**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Thiago Guimarães Santos

# AÇÕES SUAVES DE GRUPOS DE LIE

Florianópolis

2019

Thiago Guimarães Santos

# AÇÕES SUAVES DE GRUPOS DE LIE

Trabalho de Conclusão de Curso submetida ao Curso de Matemática-habilitação bacharelado para a obtenção do Grau de Graduação em Matemática - Habilitação Bacharelado.
Orientador: Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis

2019

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha Catalográfica foi confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:
http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html

Thiago Guimarães Santos

**AÇÕES SUAVES DE GRUPOS DE LIE**

Esta Trabalho de Conclusão de Curso foi julgada aprovada para a obtenção do Título de " Graduação em Matemática - Habilitação Bacharelado", e aprovada em sua forma final pela Curso de Matemática-habilitação bacharelado.

Florianópolis, 10 de julho 2019.

---

Profa. Dra. Sonia Elena Palomino Castro
Coordenadora

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva
Orientador

---

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni

Eduardo Tengan.

Prof. Dr. Eduardo Tengan

# RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar o quociente de uma variedade por uma ação suave de um grupo de Lie. Em primeiro lugar, demos uma introdução suficiente auto-contida sobre a teoria das variedades diferenciáveis, grupos de Lie e sobre distribuições que foi extremamente relevante como pre-requisito para provarmos o bom comportamento do quociente.
**Palavras-chave:** Variedade quociente. Ação suave.

**SUMÁRIO**

## 0.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar o quociente de uma variedade suave por uma ação suave de um grupo de Lie e garantir hipóteses gerais sobre à ação de modo que o quociente admita naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável. Demos uma introdução suficiente auto-contida sobre a teoria das variedades diferenciáveis. Introduzimos a noção de diferenciabilidade e derivada para aplicações entre variedades bem como os grupos de Lie e às ações suaves dos grupos de Lie.

# 1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Neste capitulo introduzimos os objetos fundamentais de nosso trabalho, as variedades diferenciáveis, e algumas de suas propriedades básicas.

## 1.1 ESTRUTURAS DIFERENCIÁVEIS

Começamos com um resultado obtido como um corolário do *teorema da Invariância do Domínio de Brouwer*. A prova desse teorema requer ferramentas avançadas da topologia algébrica e portanto ficará fora do escopo de nosso trabalho, motivo o qual vamos omitir a prova. Remetemos o leitor curioso ao teorema 2.55 da referência [5] para ver mais detalhes.

**Teorema 1.1.1 (Invariância topológica da dimensão).** *Se $n > m$ e $\mathrm{U}$ é um aberto não-vazio do $\mathbb{R}^n$, então não existe uma função injetiva contínua de $\mathrm{U}$ em $\mathbb{R}^m$. Em particular, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ não são homeomorfos.*

Considere um espaço topológico $\mathcal{M}$ com a seguinte propriedade: Para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ existem um aberto $p \in \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ e um número natural $n$ tal que $\mathrm{U}$ é homeomorfo a um aberto $\widetilde{\mathrm{U}}$ do $\mathbb{R}^n$. Note que o número $n$ acima depende do ponto $p$ e a princípio também do aberto $\mathrm{U}$. Mostremos que $n$ depende apenas de $p$. Suponhamos que $p \in \mathrm{V}$ seja um aberto em $\mathcal{M}$ relativamente ao qual existe um número natural $m$ tal que $V$ seja homeomorfo a um aberto $\widetilde{\mathrm{V}}$ do $\mathbb{R}^m$. Denotamos por $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{U}}$ e $\psi : \mathrm{V} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{V}}$ tais homeomorfismos. Note que $p \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ é um aberto de $\mathcal{M}$ e portanto $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ e $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ são abertos, respectivamente do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. E daí, temos um homeomorfismo

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Segue-se do teorema 1.1.1 que $n = m$, ou seja $n(p) := n$ depende apenas de $p$. De fato, esse argumento implica a existência de uma função $\mathrm{DIM} : p \in \mathcal{M} \mapsto n(p) \in \mathbb{N}$ localmente constante e portanto contínua. Logo, DIM é constante em cada componente conexa de $\mathcal{M}$. Nos casos em que a função acima for constante (e.g., quando $\mathcal{M}$ for conexo), assumindo valor $n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathcal{M}$, diremos que $\mathcal{M}$ é *localmente Euclideano de dimensão $n$*. Em outras palavras, $\mathcal{M}$ é localmente Euclideano de dimensão $n$ se e somente se cada ponto $p \in \mathcal{M}$ admite uma vizinhança (aberta) homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^n$. Deixamos para o leitor verificar que todo espaço localmente Euclideano de dimensão $n$ é localmente homeomorfo à bola aberta $B$ do $\mathbb{R}^n$ centrada na origem de raio 1 ou propriamente ao $\mathbb{R}^n$.

**Definição 1.1.1.** *Diremos que um espaço topológico $\mathcal{M}$ é uma* variedade topológica de dimensão $n$ *se:*

*a) $\mathcal{M}$ for um espaço Hausdorff.*

*b) $\mathcal{M}$ satisfizer o segundo axioma de enumerabilidade, i.e., $\mathcal{M}$ admitir uma base enumerável para seus abertos.*

*c) $\mathcal{M}$ for localmente Euclideano de dimensão $n$.*

Para obtermos diversos exemplos de espaços localmente Euclideanos e variedades topológicas as seguintes definições são relevantes.

**Observação 1.1.2.** Todo espaço topológico com base enumerável satisfaz a *propriedade de Lindelöf:* Toda cobertura aberta admite uma subcobertura enumerável. (Veja por exemplo, teorema 3 da sec. 11, cap.2 da referência [1])

**Definição 1.1.2.** *Uma* carta local ou vizinhança coordenada *em um espaço topológico $\mathcal{M}$ de dimensão $n$ é um par* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *constituído por um subconjunto* $\mathrm{U}$ *aberto de $\mathcal{M}$ e um homeomorfismo $\varphi : \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sobre o aberto $\varphi(\mathrm{U})$ do $\mathbb{R}^n$.*

**Definição 1.1.3.** *Um* atlas *para $\mathcal{M}$ de dimensão $n$ é uma família $\mathscr{A}$ formada por cartas locais* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *em $\mathcal{M}$ de dimensão $n$ cujos os domínios formam uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$.*

Note que $\mathcal{M}$ é localmente Euclideano de dimensão $n$ se e somente se podemos munir $\mathcal{M}$ de algum atlas $\mathscr{A}$ de dimensão $n$.

**Exemplos 1.1.3.**

a) $\mathbb{R}^n$ é naturalmente uma variedade topológica de dimensão $n$ por ser um espaço topológico Hausdorff com base enumerável (e.g., uma base formada por bolas abertas centrada em pontos de coordenadas racionais com raios racionais positivos) munida do atlas canônico $\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$, onde $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ denota a aplicação identidade.

b) Se $\mathcal{M}$ é uma variedade topológica de dimensão $n$, então todo aberto $\mathrm{U}$ não-vazio de $\mathcal{M}$ é uma variedade topológica de dimensão $n$, conhecida como *subvariedade aberta* de $\mathcal{M}$. De fato, $\mathrm{U}$ visto como um subespaço de $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade de ser Hausdorff e o segundo axioma de enumerabilidade. Quanto a munirmos U de um atlas, se $\mathscr{A}$ é um atlas $n$-dimensional para $\mathcal{M}$, podemos obter um atlas $n$-dimensional para U ao restringir o domínio de cada carta local $(\mathrm{V}, \psi) \in \mathscr{A}$ ao aberto $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ (de U e também de $\mathcal{M}$).

c) Seja $\mathcal{M} := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ munido da *topologia da união disjunta* (ver a referência [5], página 64 para mais detalhes). Afirmamos que $\mathcal{M}$ é localmente Euclideano de dimensão 1. De fato, dado $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, considere $\mathbb{R}_p := \mathbb{R} \times \{p\}$. Pela definição da topologia da união disjunta, cada $\mathbb{R}_p$ é um aberto em $\mathcal{M}$ homeomorfo a $\mathbb{R}$ dado pelo homeomorfismo

$$\varphi_p : (x, p) \in \mathbb{R}_p \mapsto x \in \mathbb{R}.$$

Assim, cada $(\mathbb{R}_p, \varphi_p)$ é um carta local de dimensão 1 em $\mathcal{M}$ e como

$$\mathcal{M} = \coprod_{p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \mathbb{R}_p \quad (*),$$

segue-se que

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}_p, \varphi_p) : p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

é um atlas de dimensão 1 para $\mathcal{M}$ e portanto $\mathcal{M}$ é localmente Euclideano de dimensão 1 como afirmado. Entretanto, $\mathcal{M}$ não é uma variedade topológica de dimensão 1, pois, embora $\mathcal{M}$ seja Hausdorff, como o leitor pode verificar sem dificuldade, $\mathcal{M}$ não pode ser munido de uma base enumerável. Com efeito, por $(*)$,

$$\{\mathbb{R}_p\}_{p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

é uma cobertura aberta para $\mathcal{M}$. Como não é possível extrair uma subcobertura enumerável dessa cobertura, logo, pela observação 1.1.2, a afirmação segue.

d) Seja $\mathcal{M} := (\mathbb{R} \times \{-1\}) \sqcup (\mathbb{R} \times \{1\})$ munido da topologia induzida por $\mathbb{R}^2$. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $\mathcal{M}$ que identifica os pontos $(x, -1)$ e $(x, 1)$ para $x \neq 0$. Consideremos ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\sim}$ munido da *topologia quociente*. Com essa topologia, a *projeção canônica*

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow {}^{\mathcal{M}}\!/_{\sim}$$

é uma *aplicação aberta* e como $\mathcal{M}$ tem base enumerável, digamos $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$, então $\{\pi(B_i) : i \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável para ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\sim}$. Entretanto, ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\sim}$ não é Hausdorff, pois se $U_{-1}$ e $U_1$ são quaisquer abertos em torno de $[(0,-1)] = \{(0,-1)\}$ e $[(0,1)] = \{(0,1)\}$ respectivamente, então para $p$ suficiente pequeno ambos abertos contém o ponto $[(\delta,1)] = \{(\delta,-1),(\delta,1)\}$. Logo, $\mathcal{M}/\sim$ não é Hausdorff. Para ver que $\mathcal{M}/\sim$ é localmente Euclideano de dimensão 1, note que

$$\varphi : \mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,1)]\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\varphi([(x,1]) = x, \forall x \neq 0$$

é um homeomorfismo. Assim,

$$(\mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,1)]\}, \varphi)$$

é uma carta local de dimensão 1 em $\mathcal{M}/\sim$. Definindo

$$\psi : \mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,-1)]\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma análoga, segue-se que

$$(\mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,-1)]\}, \psi)$$

é uma carta local de dimensão 1 em $\mathcal{M}/\sim$. Portanto,

$$\mathscr{A} := \{(\mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,1)]\}, \varphi), (\mathcal{M}/\sim \setminus \{[(0,-1)]\}, \psi)\}$$

é um atlas de dimensão 1 para $\mathcal{M}/\sim$ o que faz desse espaço, chamado *reta com duas origens*, ser localmente Euclideano.

e) Se $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um homeomorfismo entre espaços topológicos e $\mathcal{M}$ for um espaço localmente Euclideano de dimensão $n$, então $\mathcal{N}$ também o é. Com efeito, esse homeomorfismo induz o seguinte atlas $n$-dimensional para $\mathcal{N}$:

$$\mathscr{A}_f := \{(f^{-1}(\mathrm{U}), \varphi \circ f) : (\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}\},$$

onde $\mathscr{A}$ é um atlas $n$-dimensional para $\mathcal{M}$. Como a propriedade de um espaço ser Hausdorff e o segundo axioma enumerabilidade são ambos invariantes topológicos, segue-se que o resultado também vale para variedades topológicas.

f) Se $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n$, então $\mathbb{E}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e portanto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, assim, $\mathbb{E}$ é um variedade topológica de dimensão $n$.

g) A *n-esfera unitária*

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

é uma variedade topológica de dimensão $n$. De fato, $\mathbb{S}^n$ é um subespaço do $\mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia induzida e portanto é um espaço Hausdorff satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade. Ademais, podemos munir $\mathbb{S}^n$ do seguinte atlas de dimensão $n$:

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}, \Phi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}, \Phi_-)\},$$

onde as cartas desse atlas são construídas da seguinte forma: Seja $\mathbf{P}_+ := (0, \ldots, 0, 1)$ " polo norte " de $\mathbb{S}^n$. A *projeção estereográfica* do ponto $X \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}$ é o único ponto, denotado por $\Phi_+(X)$, que está na interseção da reta que passa pelos pontos $X$ e $\mathbf{P}_+$ com o *hiperplano* $\mathcal{H}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$, como ilustra a figura abaixo.

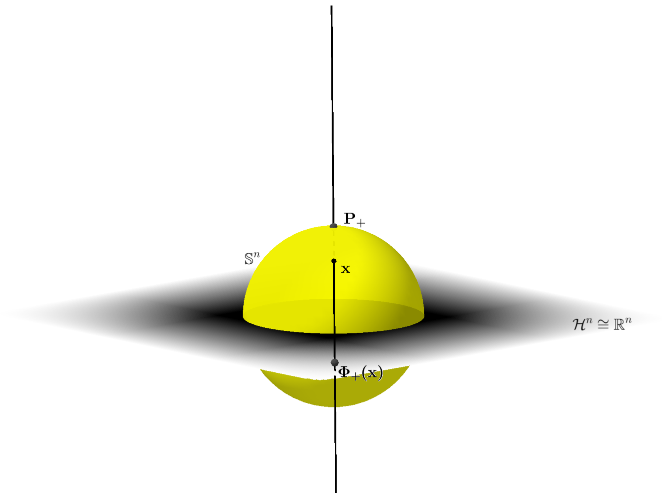


Figura 1: Projeção Estereográfica

Identificando os pontos $(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathcal{H}^n$ com $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, segue-se que a correspondência $X \mapsto \Phi_+(X)$ via a projeção estereográfica de $X$ define um homeomorfismo $\Phi_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do aberto $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\} = \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\})$ em $\mathbb{S}^n$ sobre o $\mathbb{R}^n$. De fato, para cada $X = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}$ note que $\mathrm{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ está na interseção da reta que passa por $X$ e $\mathbf{P}_+$ com o hiperplano $\mathcal{H}^n$ se e somente se $X'$ é um ponto da forma $\mathbf{P}_+ + \lambda(X - \mathbf{P}_+)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ com a última coordenada nula, donde $0 = 1 + \lambda(x_{n+1} - 1)$. Ou seja, $\lambda = \frac{1}{1-x_{n+1}}$. Portanto, $X' = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Logo, para todo $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}$, temos $\Phi_+(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$ e assim é fácil ver que $\Phi_+$ é contínua, pois sua extensão natural ao aberto

$$\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \neq 0\}$$

é de classe $\mathrm{C}^\infty$ e portanto contínua. Além disso, $\Phi_+$ é uma bijeção, pois, verifica-se sem dificuldade que sua inversa pode ser explicitamente escrita como

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}(2x_1, \ldots, 2x_n, -1 + \sum_{i=1}^n x_i^2) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\},$$

que também é contínua, pois a aplicação obtida a partir desta por uma extensão natural do codomínio ao $\mathbb{R}^{n+1}$ é de classe $\mathrm{C}^\infty$ e portanto contínua. Agora, considerando $\mathbf{P}_- := (0, \ldots, 0, -1)$ o "polo sul " de $\mathbb{S}^n$ e definindo $\Phi_- : \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de forma análoga, via a projeção estereográfica dos pontos de $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}$ sobre $\mathcal{H}^n$. Deixamos para o leitor checar que

$$\Phi_-(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n), \forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}.$$

Como $\Phi_-$ também pode ser obtida por compor o homeomorfismo

$$\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\} \ni (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, -x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}$$

seguido por $\Phi_+$, segue-se que $\Phi_-$ é um homeomorfismo do aberto $\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\} = \mathbb{S}^n \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\})$ em $\mathbb{S}^n$ sobre o $\mathbb{R}^n$. Esse exemplo com $n = 2$ indica o motivo do uso dos termos ' carta' e 'atlas' da cartografia.

h) Seja $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ não-vazio munido da topologia induzida. Então, $\mathcal{M}$ é Hausdorff e tem base enumerável. Dizemos que $\mathcal{M}$ é uma *subvariedade suave* de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ se $\forall p \in \mathcal{M}$, existir una aplicação $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

(i) $U$ é aberto no $\mathbb{R}^n$ e $\varphi(U) \subseteq \mathcal{M}$.

(ii) $p \in \varphi(U)$ e $\varphi(U)$ é aberto em $\mathcal{M}$.

(iii) $D\varphi_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora, $\forall q \in U$.

(iv) $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo.

Nesse caso, dizemos que $\varphi$ é uma *parametrização local* de $\mathcal{M}$ em $p$. Verifica-se que a coleção $\mathscr{A}$, formada pelos pares $(\varphi(U), \varphi^{-1})$, onde $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma parametrização local de $\mathcal{M}$, é um atlas de dimensão $m$ para $\mathcal{M}$, o que faz de $\mathcal{M}$, uma variedade topológica de dimensão $m$.

i) Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são espaço localmente Euclideanos de dimensões $n$ e $m$ respectivamente, então $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$(munido da topologia produto) é um espaço localmente Euclideano de dimensão $n + m$. Com efeito, identificando o $\mathbb{R}^{n+m}$ com $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, podemos construir um atlas $(n + m)$-dimensional para $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ pondo

$$\mathscr{A}_\times := \{(\mathrm{U} \times \mathrm{V}, \varphi \times \psi) : (\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}_1, (\mathrm{V}, \psi) \in \mathscr{A}_2\},$$

com $\varphi\times\psi : \mathrm{U}\times\mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida por $(\varphi\times\psi)(p, q) = (\varphi(p), \psi(q))\forall p \in \mathrm{U}, \forall q \in \mathrm{V}$, onde $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ são respectivamente atlas de dimensões $n$ e $m$ para $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Analogamente, vale o resultado análogo para variedades topológicas. Esse exemplo se estende naturalmente a uma quantidade finita qualquer de espaços localmente Euclideanos (variedades topológicas).

j) Definimos o $n$-toro como o produto cartesiano $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-vezes}}$.

Segue-se que o $n$-toro é uma variedade topológica de dimensão $n$. Quando $n = 2$, $\mathbb{T}^2$ é simplesmente chamado de toro. Como o leitor pode verificar sem dificuldade, o toro $\mathbb{T}^2$ pode naturalmente ser visto dentro do $\mathbb{R}^4$, ou ainda como um certo subconjunto do $\mathbb{R}^3$, representado pela figura abaixo que faz jus ao nome dado ao $\mathbb{T}^2$.

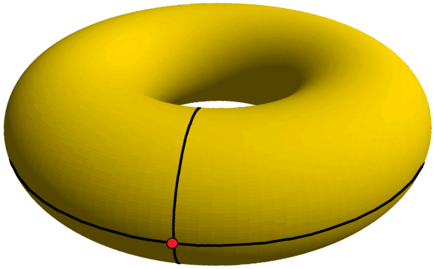

Figura 2: Toro

k) Em ainda muitos casos, o espaço quociente de uma variedade topológica é uma variedade topológica. Considere em $\mathcal{M} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, a seguinte relação de equivalência:

$$\forall x, y \in \mathcal{M}, x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

Definimos o *espaço projetivo real $n$-dimensional*, denotado por $\mathbb{RP}^n$, como o espaço quociente de $\mathcal{M}$ por $\sim$, equipado com a topologia quociente, dada pela projeção canônica $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) := [x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Afirmamos que $\mathbb{RP}^n$ é uma variedade topológica de dimensão $n$. Com efeito, seja $\mathscr{A} := \{(\mathrm{U}_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$ onde cada $\varphi_i : \mathrm{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação definida sobre o aberto [1] $\mathrm{U}_i$ (de $\mathbb{RP}^n$), para todo $[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$, por

$$\varphi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) := \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Onde

$$\mathrm{U}_i := \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n : x_i \neq 0\}.$$

Para ver a boa definição de cada $\varphi_i$, tome arbitrariamente $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}), y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathcal{M}$ com $[x] = [y] \in \mathrm{U}_i$. Segue-se que existe um escalar (não-nulo) $\lambda$ tal que $y = \lambda x$ o que implica que

$$y_i = \lambda x_i \neq 0$$

[1] Note que cada $\mathrm{U}_i$ é aberto em $\mathbb{RP}^n$, pois $\pi^{-1}(\mathrm{U}_i) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{M} : x_i \neq 0\}$, que é aberto em $\mathcal{M}$

e

$$\frac{y_j}{y_i} = \frac{\lambda x_j}{\lambda x_i} = \frac{x_j}{x_i}, \forall 1 \leq j \leq n+1,$$

que nos dá

$$\varphi_i([x]) = \varphi_i([y]).$$

Além disso, note que cada $\varphi_i$ é uma aplicação bijetiva, pois sua inversa $\varphi_i^{-1}$ pode ser explicitamente escrita como

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto [x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}] \in \mathrm{U}_i.$$

O leitor pode verificar sem dificuldade que cada $\varphi_i$ é um homeomorfismo. Como

$$\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i,$$

segue-se que $\mathscr{A}$ é um atlas de dimensão $n$ para $\mathbb{RP}^n$. Deixamos para o leitor verificar que $\mathbb{RP}^n$ é um espaço Hausdorff com base enumerável. E assim, o espaço projetivo real $n$-dimensional é uma variedade topológica de dimensão $n$, como afirmado.
Note que cada classe de equivalência $[x]$ intersecta a esfera $\mathbb{S}^n$ exatamente no par de pontos antipodais. Assim, poderíamos definir alternativamente o $\mathbb{RP}^n$ como o espaço quociente do $\mathbb{S}^n$ que identifica os pontos antipodais (essencialmente é restringir a relação de equivalência $\sim$ prévia a $\mathbb{S}^n$). Ademais, segue dessa observação que $\mathbb{RP}^n$ é compacta, por ser imagem de $\mathbb{S}^n$ (que é compacta) pela projeção canônica $\pi$.

Voltando à nossa exposição, observe que o cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$ realizado intrinsecamente no $\mathbb{R}^n$ (ou mais geralmente nos espaços normados reais) é de carácter local. Gostaríamos de estender o cálculo diferencial para certas variedades topológicas sujeitas a uma estrutura adicional que vamos definir a seguir. Com esse objetivo, usaremos as cartas locais do atlas subjacente à variedade, precisamos das seguintes definições, as quais invocaremos na próxima seção ao introduzirmos as aplicações suaves entre variedades.

**Definição 1.1.4.** *Sejam $0 \leq k \leq \infty$ e $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}, \psi)$ ambas cartas locais em um espaço topológico $\mathcal{M}$ de dimensões $n$. Diremos que $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ são* $\mathrm{C}^k$ compatíveis *se $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$ ou caso contrário, se a aplicação, chamada* aplicação de transição ou mudança de coordenada*, entre os abertos do $\mathbb{R}^n$*

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

*for um difeomorfismo de classe* $\mathrm{C}^k$ *(no sentido usual).*

**Definição 1.1.5.** *Seja* $0 \leq k \leq \infty$. *Um* atlas (ou estrutura diferenciável) de classe $\mathrm{C}^k$ e dimensão $n$ *para um espaço topológico* $\mathcal{M}$ *é um atlas* $\mathscr{A}$ *de dimensão n para* $\mathcal{M}$ *com a propriedade extra que quaisquer duas cartas locais de* $\mathscr{A}$ *são* $\mathrm{C}^k$*-compatíveis.*

**Observação 1.1.4.** É frequente na geometria nomear a classe de diferenciabilidade $\mathrm{C}^k$ com $k = \infty$ de algum objeto matemático de *suave* para distingui das classes com $k$ finito. Neste trabalho adotaremos esta nomenclatura, não apenas para nomear os atlas de classe $\mathrm{C}^\infty$, mas também para todos objetos matemáticos que vamos definir posteriormente com uma classe de diferenciabilidade.

**Exemplo 1.1.5.** $\mathscr{A}_c := \{\mathbb{R}, (\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})\}$ e $\mathscr{A}_e := \{\mathbb{R}, (\mathbb{R}, (x \mapsto x^3))\}$ são atlas suaves de dimensão 1 para $\mathbb{R}$. Note, entretanto, que as cartas correspondentes não são $\mathrm{C}^k$ compatíveis para $k \geq 1$.

Note que apenas munir $\mathcal{M}$ de um atlas $\mathscr{A}$ de classe $\mathrm{C}^k$ e dimensão $n$ não é suficiente para estendermos o cálculo diferencial para o par $(\mathcal{M}, \mathscr{A})$[2], pois esse trabalho é de caráter local. Assim, precisamos que $\mathscr{A}$ contenha cartas com domínios arbitrariamente “pequenos”. Para evitar este inconveniente introduzimos a seguinte definição.

**Definição 1.1.6.** *Um atlas* $\mathscr{A}$ *de classe* $\mathrm{C}^k$ *e dimensão n para* $\mathcal{M}$ *é dito ser* maximal *se* $\mathscr{A} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}} \implies \mathscr{A} = \widetilde{\mathscr{A}}$ *sempre que* $\widetilde{\mathscr{A}}$ *for um atlas de classe de* $\mathrm{C}^k$ *e dimensão n para* $\mathcal{M}$.

O seguinte lema mostra que as estruturas diferenciáveis maximais contém cartas com domínios arbitrariamente “pequenos”.

**Lema 1.1.6.** *Seja* $\mathscr{A}$ *um atlas de classe* $\mathrm{C}^k$ *e dimensão n para* $\mathcal{M}$ *e* $p \in \mathrm{U}$. *Se* $\mathscr{A}$ *for maximal, então, para todo aberto* $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *não-vazio, existe uma carta local* $(\widetilde{\mathrm{U}}, \varphi) \in \mathscr{A}$ *com* $p \in \widetilde{\mathrm{U}} \subseteq \mathrm{U}$.

*Demonstração.* Dado $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ aberto não-vazio. Defina

$$\widetilde{\mathscr{A}} := \{(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}, \varphi\,|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}}) : (\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}\} \cup \mathscr{A}.$$

Verifica-se sem dificuldade que $\widetilde{\mathscr{A}}$ é um atlas de classe $\mathrm{C}^k$ e dimensão $n$ para $\mathcal{M}$. Claro que $\mathscr{A} \subseteq \widetilde{\mathscr{A}}$. Daí, se $\mathscr{A}$ for maximal, a igualdade segue, e portanto tomando $(\mathrm{V}, \varphi) \in \mathscr{A}$ com $p \in \mathrm{V} \cap \mathrm{U}, (\mathrm{V} \cap \mathrm{U}, \varphi\,|_{\mathrm{V}\cap\mathrm{U}}) \in \mathscr{A}$ e o resultado segue. ■

[2] A notação em par é para enfatizar que o atlas $\mathscr{A}$ é extremamente relevante para fazermos cálculo diferencial.

**Definição 1.1.7.** *Uma variedade diferenciável de classe* $\mathrm{C}^k$ *e dimensão* $n$ *é um par* $(\mathcal{M}, \mathscr{A})$*, onde* $\mathcal{M}$ *é uma variedade topológica de dimensão* $n$ $\mathscr{A}$ *é um atlas maximal de classe* $\mathrm{C}^k$ *e dimensão* $n$ *para* $\mathcal{M}$*.*

O seguinte teorema será útil para exibirmos diversos exemplos de variedades diferenciáveis.

**Teorema 1.1.7.** *Todo atlas diferenciável de classe* $\mathrm{C}^k$ *para* $\mathcal{M}$ *está contido num único atlas diferenciável de classe* $\mathrm{C}^k$ *maximal para* $\mathcal{M}$*.*

*Demonstração.* Vejamos uma construção geral que vale para quaisquer relação de equivalência. Seja $\mathscr{A}_0$ um atlas de classe $\mathrm{C}^k$ e dimensão $n$ para $\mathcal{M}$. Denote a família de todos os atlas de classe $\mathrm{C}^k$ e dimensão $n$ para $\mathcal{M}$ por $\mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k)$. Defina a seguinte relação $\sim$ em $\mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k)$ :

$$(\forall \mathscr{A}, \widetilde{\mathscr{A}} \in \mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k))) \quad \mathscr{A} \sim \widetilde{\mathscr{A}} \iff \mathscr{A} \cup \widetilde{\mathscr{A}} \in \mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k).$$

Note que se provarmos que $\sim$ é uma relação de equivalência, então

$$\overline{\mathscr{A}_0} := \bigcup_{\mathscr{A} \in [\mathscr{A}_0]} \mathscr{A}$$

é o único atlas maximal que contém $\mathscr{A}_0$, como o leitor pode verifica-se sem dificuldade. Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k)$. Claro que $\sim$ é reflexiva e simétrica. Para ver que $\sim$ é transitiva, sejam $\mathscr{A}, \widetilde{\mathscr{A}}, \widetilde{\widetilde{\mathscr{A}}} \in \mathrm{Atlas}(\mathcal{M}, k)$ com $\mathscr{A} \sim \widetilde{\mathscr{A}}$ e $\widetilde{\mathscr{A}} \sim \widetilde{\widetilde{\mathscr{A}}}$ e tome quaisquer $(\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}$ e $(\mathrm{V}, \psi) \in \widetilde{\widetilde{\mathscr{A}}}$ com $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$. Da cobertura aberta $\{B : (B, \xi) \in \widetilde{\mathscr{A}}\}$ para $\mathcal{M}$ obtemos a cobertura $\Lambda := \{B \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{V} : (B, \xi) \in \widetilde{\mathscr{A}}, B \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset\}$ aberta para $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. Portanto, $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $\mathrm{C}^k$ se e somente se $\varphi \circ \psi^{-1} \mid_{\psi(B')}$ o for para todo $B' \in \Lambda$. Tome arbitrariamente $B' = B \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \in \Lambda$ não vazio com $(B, \xi) \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Como $B' \neq \emptyset$, então $B \cap \mathrm{U} \neq \emptyset$ e $B \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$ o que implicam que $\varphi \circ \xi^{-1} : \xi(B \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\xi \circ \psi^{-1} : \psi(B \cap \mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são de classes $\mathrm{C}^k$. Logo, as restrições destas aplicações aos abertos $\xi(B') \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi(B') \subseteq \mathbb{R}^n$ são também de classe $\mathrm{C}^k$ e portanto

$$\varphi \circ \psi^{-1} \mid_{\psi(B')} \equiv (\varphi \circ \xi^{-1}) \mid_{\xi(B')} \circ (\xi \circ \psi^{-1}) \mid_{\psi(B')}$$

é de classe $\mathrm{C}^k$ o que mostra que $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $\mathrm{C}^k$. Analogamente, mostra-se que $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe $\mathrm{C}^k$. Daí, $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ são $\mathrm{C}^k$-compatíveis, e assim a transitividade de $\sim$ segue. ■

**Observação 1.1.8.** Note que em virtude do resultado acima, para mostrarmos que uma variedade topológica admite uma estrutura de variedade diferenciável de classe $\mathrm{C}^k$, basta mostrarmos que um atlas subjacente à variedade em questão é um atlas de classe $\mathrm{C}^k$.

Veremos que a maioria das variedades topológicas dos exemplos 1.1.3 são na verdade variedades suaves. No que segue, nos concentraremos principalmente no caso suave ($k = +\infty$); a adaptação para $k < +\infty$, quando pertinente, é imediata. Também abusaremos da notação, referindo-nos ao espaço $\mathcal{M}$ como variedade suave, quando estiver claro qual é o atlas maximal subjacente.

**Exemplos 1.1.9.**

a) $\mathbb{R}^n$ é naturalmente uma variedade suave de dimensão $n$ com o atlas suave canônico $\mathscr{A} := \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$, $n$-dimensional, onde

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

denota a aplicação identidade.

b) Seja $M$ um conjunto enumerável munido da topologia discreta. Identifique $\mathbb{R}^0$ com o conjunto unitário $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Para cada $p \in M$, $\mathrm{U}_p = \{p\}$ é um aberto contendo $p$ homeomorfo a $\mathbb{R}^0$ pelo homeomorfismo

$$\varphi_p : \mathrm{U}_p \longrightarrow \mathbb{R}^0, p \mapsto 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Por $\mathrm{C}^\infty$-compatibilidade trivial, $M$ admite uma *estrutura de variedade suave de dimensão* 0.

c) Se $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão $n$, então todo aberto U não-vazio de $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão $n$, conhecida como *subvariedade aberta* de $\mathcal{M}$. De fato, vimos que U é uma variedade topológica de dimensão $n$ com o atlas

$$\mathscr{A}_{\mathrm{U}} := \{(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}, \varphi) : (\mathrm{V}, \varphi) \in \mathscr{A}\},$$

onde $\mathscr{A}$ é um atlas suave de dimensão $n$ para $\mathcal{M}$. O leitor pode verificar sem dificuldade que $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ é um atlas suave de dimensão $n$.

d) Se $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um homeomorfismo entre espaços topológicos e $\mathcal{M}$ for uma variedade suave de dimensão $n$, então $\mathcal{N}$ também o é. Com efeito, esse homeomorfismo induz o seguinte atlas $n$-dimensional para $\mathcal{N}$:

$$\mathscr{A}_f := \{(f^{-1}(\mathrm{U}), \varphi \circ f) : (\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}\},$$

onde $\mathscr{A}$ é um atlas suave $n$-dimensional para $\mathcal{M}$. Vimos que $\mathcal{N}$ munido desse atlas é uma variedade topológica de dimensão $n$. Resta estabelecer a $\mathrm{C}^\infty$-compatibilidade entre cartas quaisquer de $\mathscr{A}_f$. Para tal, sejam $(f^{-1}(\mathrm{U}), \varphi \circ f), (f^{-1}(\mathrm{V}), \psi \circ f) \in \mathscr{A}_f$ com $f^{-1}(\mathrm{U}) \cap f^{-1}(\mathrm{V}) \neq \varnothing$. Afirmamos que essas cartas são $\mathrm{C}^\infty$-compatíveis. De fato, note que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$. Assim,

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

é um difeomorfismo suave (no sentido usual). O leitor pode verificar sem dificuldade que a aplicação de transição

$$(\varphi \circ f) \circ (\psi \circ f)^{-1} : (\psi \circ f)(f^{-1}(\mathrm{U}) \cap f^{-1}(\mathrm{V})) \longrightarrow (\varphi \circ f)(f^{-1}(\mathrm{U}) \cap f^{-1}(\mathrm{V}))$$

coincide, como aplicação, com $\varphi \circ \psi^{-1}$, donde o resultado segue.

e) Se $\mathbb{E}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n$, então $\mathbb{E}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e portanto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e assim $\mathbb{E}$ é um variedade suave de dimensão $n$. Em particular, o espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) $\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ das matrizes $(a_{ij})$ com as entradas $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ é uma variedade suave de dimensão $nm$ com o atlas suave maximal determinado pela carta global $(\mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R}), \varphi)$ onde

$$\varphi : \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$$

é o isomorfismo canônico que envia cada matriz $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_{nm}(\mathbb{R})$ ao vetor

$$\varphi(a_{ij}) := (a_{11}, \ldots, a_{1m}, a_{21}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{n1}, \ldots a_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}.$$

f) O subconjunto $\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{M}_{nn}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes $A$ invertíveis é um aberto não-vazio de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e portanto $\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)$ é uma variedade suave de dimensão $n^2$ (vista como subvariedade aberta de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$).

g) Vimos que a $n$-*esfera unitária*

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

é uma variedade topológica de dimensão $n$ com o atlas

$$\mathscr{A} := \{(\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}, \Phi_+), (\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}, \Phi_-)\},$$

onde

$$\Phi_+(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n), \forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}$$

e

$$\Phi_-(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n), \forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}.$$

Vamos verificar a $\mathrm{C}^\infty$-compatibilidade entre essas cartas. Note que

$$\Phi_-((\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}) = \Phi_+((\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_+\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{P}_-\}) = \mathbb{R}^n \setminus 0_{\mathbb{R}^n} =: \mathbb{R}^n_*.$$

Afirmamos que

$$\Phi_+ \circ \Phi_- : \mathbb{R}^n_* \longrightarrow \mathbb{R}^n_*$$

é suave. De fato, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_* \iff ||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1})(x) &= \Phi_+ \left( \frac{1}{1 + ||x||^2}(2x_1, \ldots, 2x_n, ||x||^2 - 1) \right) \\
&= \frac{1}{1 - \frac{||x||^2 - 1}{||x||^2 + 1}} \left( \frac{2x_1}{||x||^2 + 1}, \ldots, \frac{2x_n}{||x||^2 + 1} \right) \\
&= \frac{x}{||x||^2} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

e assim $\Phi_+ \circ \Phi_-^{-1}$ é suave. Verifica-se sem dificuldade que $(\Phi_- \circ \Phi_+^{-1})(x) = \frac{x}{||x||^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n_*$ e portanto $\Phi_- \circ \Phi_+^{-1}$ também o é suave. Assim, o atlas acima é na verdade um atlas suave de dimensão $n$.

h) Seja $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ uma subvariedade suave de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m$. Vimos que $\mathcal{M}$ é uma variedade topológica munida do atlas $\mathscr{A}$ formada por todos pares $(\varphi(\mathrm{U}), \varphi^{-1})$, onde $\varphi : \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma parametrização local em $\mathcal{M}$. Verifica-se (ver por exemplo o corolário 3, pág. 129 de [3]) que esse atlas é suave o que faz de $\mathcal{M}$ uma variedade suave de dimensão $m$. Note que essa classe de variedades inclui o exemplo anterior.

i) Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades suaves de dimensões $n$ e $m$ respectivamente, então $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ (munido da topologia produto) é uma variedade suave de dimensão $n+m$. Com efeito, considere

$$\mathscr{A}_\times := \{(\mathrm{U}\times\mathrm{V}, \varphi\times\psi) : (\mathrm{U},\varphi) \in \mathscr{A}_1, (\mathrm{V},\psi) \in \mathscr{A}_2\},$$

com $\varphi\times\psi : \mathrm{U}\times\mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida por $(\varphi\times\psi)(p,q) = (\varphi(p), \psi(q)), \forall p \in \mathrm{U}, \forall q \in \mathrm{V}$, onde $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ são respectivamente altas suaves de dimensões $n$ e $m$ para $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Pelo item (f) do exemplo 1.1.3, $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ munida do atlas acima é uma variedade topológica de dimensão $n+m$. O leitor pode verificar sem dificuldade a $\mathrm{C}^\infty$-compatibilidade entre as cartas do atlas definido acima, o que faz de $\mathscr{A}_\times$ um atlas suave de dimensão $n+m$ para $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$. Esse exemplo se estende naturalmente a uma quantidade finita quaisquer de variedades suaves.

j) Segue-se do item anterior que o $n$-toro

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-vezes}}$$

é uma variedade suave de dimensão $n$.

k) Vimos que o espaço projetivo real $n$-dimensional $\mathbb{RP}^n$ munido do atlas de dimensão $n$

$$\mathscr{A} := \{(\mathrm{U}_i, \varphi_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

é uma variedade topológica de dimensão $n$. Vamos verificar a $\mathrm{C}^\infty$-compatibilidade entre as cartas do atlas acima. Só para fixar ideias, considerem as cartas $(\mathrm{U}_1, \varphi_i)$ e $(\mathrm{U}_{n+1}, \varphi_{n+1})$. Mostremos que a aplicação de transição entre abertos do $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_1 \circ \varphi_{n+1}^{-1} : \varphi_{n+1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}) \longrightarrow \varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1})$$

é suave. Um cálculo simples explícita os abertos acima:

$$\varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 0\}$$

e

$$\varphi_{n+1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq 0\}.$$

Seja $(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi_{n+1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1})$, temos que

$$\varphi_{n+1}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n, 1] \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \circ \varphi_{n+1}^{-1})(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1[x_1, \ldots, x_n, 1] \\ &= \frac{1}{x_1}(x_2, \ldots, x_n, 1)\end{aligned}$$

e portanto $\varphi_1 \circ \varphi_{n+1}^{-1}$ é suave! Analogamente,

$$(\varphi_1 \circ \varphi_{n+1}^{-1})^{-1} = \varphi_{n+1} \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}) \longrightarrow \varphi_{n+1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1})$$

é suave. Uma conta simples nos dá

$$(\varphi_{n+1} \circ \varphi_1^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_n}(1, x_1, \ldots, x_{n-1}), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_{n+1}).$$

O caso geral $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é análogo. É suficiente considerar $i > j$, já que o caso $i = j$ não há o que fazer, e o caso $i < j$ é semelhante. Deixamos as contas para o leitor como um exercício.

É possível construir uma estrutura de variedade suave para certos conjuntos sem estrutura topológica dada a priori.

**Lema 1.1.10.** *Seja $M$ um conjunto não-vazio e $\mathscr{A}$ uma família constituída por pares $(\mathrm{U}, \varphi), \varphi : \mathrm{U} \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades*

*i)* $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é injetora* $\forall (\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}$.

*ii) Os domínios* $\mathrm{U}$ *dos pares* $(\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}$ *cobrem* $M$.

*iii) Se* $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}, \psi) \in \mathscr{A}$ *e* $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$*, então,* $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ *e* $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ *são abertos no* $\mathbb{R}^n$ *e a aplicação*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \longrightarrow \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$$

*é suave. (Segue-se que essa aplicação é na verdade um difeomorfismo suave).*

*Nessas condições, existe uma única topologia $\tau_{\mathscr{A}}$ em $\mathcal{M}$ relativamente à qual a seguinte propriedade $(*)$ vale:*

$\forall(\mathrm{U},\varphi)\in\mathscr{A}, \mathrm{U}$ *é aberto e* $\varphi$ *é homeomorfismo sobre o aberto* $\varphi(\mathrm{U})\subseteq\mathbb{R}^n$.

*Ademais, $\mathscr{A}$ é um atlas de classe $\mathrm{C}^\infty$ em $M=(M,\tau_{\mathscr{A}})$.*

*iv)* $(M,\tau_{\mathscr{A}})$ *satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se e somente se a cobertura de $M$ por meio dos domínios $\mathrm{U}$ dos pares $(\mathrm{U},\varphi)\in\mathscr{A}$ admite uma subcobertura enumerável.*

*v)* $(M,\tau_{\mathscr{A}})$ *é Hausdorff se vale a seguinte propriedade:*

*Se $p,q\in M$ e $p\neq q$ então das duas uma:*

*a) ou $p,q\in\mathrm{U}$ para alguma carta $(\mathrm{U},\varphi)\in\mathscr{A}$*

*b) ou existem $(\mathrm{U},\varphi),(\mathrm{V},\psi)\in\mathscr{A}$ com $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\varnothing$ tais que $p\in\mathrm{U}$ e $q\in\mathrm{V}$.*

*Demonstração.* Começamos por estabelecer a unicidade da topologia em $M$ sujeito a $(*)$. Sejam $\tau$ e $\tau'$ topologias em $M$ satisfazendo $(*)$. Tome arbitrariamente $\varnothing\neq\widetilde{U}\in\tau$ e considere $p\in\widetilde{U}$. Usando (ii) e $(*)$ existe $(V,\varphi)\in\mathscr{A}$ com $p\in V, V\in\tau\cap\tau'$. Como $\widetilde{U}\cap V\in\tau$ implica

$$\varphi(\widetilde{U}\cap V)\subseteq\varphi(V)$$

é aberto em $\mathbb{R}^n$ que por sua vez implica que

$$\varphi^{-1}(\varphi(\widetilde{U}\cap V))=\widetilde{U}\cap V$$

é aberto de $\tau'$, pois $\varphi$ também é homeomorfismo com respeito a $\tau'$. Logo $\widetilde{U}\in\tau'$ e assim $\tau\subseteq\tau'$. Analogamente mostra-se a outra inclusão $\tau'\subseteq\tau$ e a unicidade segue como afirmado. Quanto à existência, vamos construir uma topologia $\tau_{\mathscr{A}}$ em $M$ por declarar que um subconjunto $M\supseteq\widetilde{U}\in\tau_{\mathscr{A}}$ se e somente se

$$\varphi(\widetilde{U}\cap\mathrm{U})\text{ é aberto no }\mathbb{R}^n,\forall(\mathrm{U},\varphi)\in\mathscr{A}.$$

Vamos checar que $\tau_{\mathscr{A}}$ é uma topologia em $M$:

(i) Claro que $M, \varnothing \in \tau_{\mathscr{A}}$.

(ii) Se $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau_{\mathscr{A}}$, afirmamos que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau_{\mathscr{A}}.$$

De fato, dado $(\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}$ temos que $\varphi(U_\lambda \cap \mathrm{U})$ é aberto no $\mathbb{R}^n$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e portanto

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi(U_\lambda \cap \mathrm{U}) \text{ é aberto no } \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$\varphi\left(\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) \cap U\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \varphi(U_\lambda \cap \mathrm{U}),$$

que é aberto no $\mathbb{R}^n$ e a afirmação segue.

(iii) Sejam $U_1, U_2 \in \tau_{\mathscr{A}}$ afirmamos que $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathscr{A}}$. De fato, tome arbitrariamente $(\mathrm{U}, \varphi) \in \mathscr{A}$. Note que

$$\varphi(U_1 \cap U_2 \cap U) = \varphi((U_1 \cap \mathrm{U}) \cap (U_2 \cap U)) \overset{\text{por } i)}{=} \varphi(U_1 \cap \mathrm{U}) \cap \varphi(U_2 \cap \mathrm{U}),$$

que é a interseção de dois abertos no $\mathbb{R}^n$ já que $U_1, U_2 \in \tau_{\mathscr{A}}$ e portanto $U_1 \cap U_2 \cap U \in \tau_{\mathscr{A}}$ como afirmado.

Agora verifiquemos que $\mathscr{A}$ é uma atlas suave de dimensão $n$ para $\mathcal{M} = (M, \tau_{\mathscr{A}})$:

Note que cada par $(U, \varphi) \in \mathscr{A}$ é uma carta de dimensão $n$. De fato, por (iii) tem-se que $\varphi(\mathrm{U})$ é aberto no $\mathbb{R}^n$ ou seja U é aberto em $M$. Pela definição de $\tau_{\mathscr{A}}$ segue-se que $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação aberta e portanto um homeomorfismo sobre o aberto $\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Logo por ii), segue-se que $\mathscr{A}$ é um atlas de dimensão $n$. Falta estabelecer (iv) e (v). A prova de (v) é bastante simples, e a omitiremos.

Suponhamos que exista uma subfamília enumerável $\mathscr{A}_{\mathbb{N}} := \{(\mathrm{U}_n, \varphi_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{A}$ com

$$M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{U}_n.$$

Ora, cada $\mathrm{U}_n$ possui uma base enumerável $\mathscr{B}^n$, por ser homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}^n$ e portanto

$$\mathscr{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}^n$$

é uma base enumerável para $M$. A recíproca segue da propriedade da observação 1.1.2.

$\blacksquare$

**Observação 1.1.11.** Trabalharemos doravante apenas com as variedades suaves. Mas em virtude do teorema 1.1.7, qualquer atlas suave está contido num único atlas de classe $\mathrm{C}^k$ maximal, para $k = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Assim sendo, toda variedade suave também é uma variedade de classe de diferenciabilidade finita e portanto a maioria dos resultados ao longo dessa monografia também valerão para as variedade diferenciáveis de classe $\mathrm{C}^k$ com $k$ finito. Basta o leitor ter atenção com a finitude de $k$, e fazer pequenas modificações óbvias. Idem para diversas definições, muitas das quais se estenderão naturalmente para as variedades com classe de diferenciabilidade finita.

## 1.2 APLICAÇÕES SUAVES

Introduziremos agora aplicações suaves entre variedades, o que permite uma vasta generalização dos conceitos do cálculo em $\mathbb{R}^n$.

**Observação 1.2.1.** Para evitar repetições óbvias desnecessárias, a parti de agora fixaremos as letras caligráficas $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{Q}, \mathcal{S}$ (às vezes indexadas, como $\mathcal{M}_\lambda$) para designar variedades suaves (abstratas). Geralmente denotamos a dimensão de uma variedade suave por $n$. No entanto, ao lidarmos com pelo menos duas variedades suaves $\mathcal{M}, \mathcal{N} \ldots$ (ou indexadas $\mathcal{M}_\lambda : \lambda \in \Lambda$), para evitar ambiguidade, denotaremos as respectivas dimensões pelas letras minúsculas correspondentes $m, n \ldots$ ($m_\lambda, \lambda \in \Lambda$). Nesse caso, às vezes escreveremos $\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n \ldots$ para indicar explicitamente as dimensões.

Seja $\mathbb{R}$ munido do atlas suave canônico $\mathscr{A}_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$, i.e., o 1-atlas suave determinado pela carta $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_R)$. Seja $f : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função em $\mathcal{M}$. Observe que para cada carta local $(\mathrm{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$, temos a seguinte função $\widehat{f}^{\varphi} := f \circ \varphi^{-1}$ do aberto $\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$. Essa correspondência nos motiva definir o seguinte:

**Definição 1.2.1.** *Dizemos $f$ é* suave *se $f^{\varphi}$ o for no sentido usual, para todas as cartas locais* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *em $\mathcal{M}$.*

**Exemplo 1.2.2.** As funções constantes

$$c : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, p \mapsto c$$

são suaves. De fato, fixado qualquer carta local $(\mathrm{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$, a função

$$f^{\varphi} : \varphi(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é constante e portanto suave (no sentido usual).

**Exemplo 1.2.3.** Cada *função coordenada* $x^i : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ em U é uma função suave. Onde $((x^1, \ldots, x^m), \mathrm{U})$ é uma carta local em $\mathcal{M}$.

Vejamos como generalizar a noção de suavidade para aplicações entre variedades suaves quaisquer.

O leitor pode verificar sem dificuldade que $f : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave se e somente se a função

$$\widehat{f}^{\varphi\psi} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

o for no sentido usual, para todas as cartas locais $(\mathrm{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ em $\mathbb{R}$ com $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$.

**Definição 1.2.2.** *Seja $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação entre variedades suaves. Sejam as cartas locais $(U, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ e $(V, \psi)$ em $\mathcal{N}$, com* $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. *A* representação de $F$ relativamente às cartas $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ *é a aplicação*

$$\widehat{F}^{\varphi\psi} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(\mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

*Quando as cartas locais não forem relevantes, denotaremos a representação de $F$ correspondente simplesmente por $\widehat{F}$.*

**Definição 1.2.3.** *Uma aplicação $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ é de* classe $\mathrm{C}^k$ *quando a representação $\widehat{F}^{\varphi\psi}$ de $F$ for de classe $\mathrm{C}^k$, no sentido usual, para todas as cartas locais* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *em $\mathcal{M}$ e* $(\mathrm{V}, \psi)$ *em $\mathcal{N}$ com* $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. *Dizemos que $F$ é* suave *se $F$ é de classe* $\mathrm{C}^{\infty}$.

Na prática a definição acima não é útil para checar que uma determinada aplicação entre variedades é suave. Ademais, como nosso trabalho é de caráter local, é de se esperar que nosso trabalho não seja dependente da maneira que representamos uma certa aplicação $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$. Em termos mais precisos, esperamos o seguinte: Para cada $p \in \mathcal{M}$, se $R_p(F)$ denota a coleção de todos pares $(\varphi, \psi)$ com $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}, \psi)$ cartas locais em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ respectivamente tais que $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$, então, se $F^{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}}$ é suave para algum $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \in R_p(F)$ então $F^{\varphi\psi}$ é suave para todo $(\varphi, \psi) \in R_p(F)$.

**Lema 1.2.4.** *Seja $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação entre variedades suaves. São equivalentes:*

*(a) $F$ é de classe $\mathrm{C}^k$.*

*(b) Para cada $p \in \mathcal{M}$, existem cartas locais $(\mathrm{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ em $\mathcal{N}$ com $p \in \mathrm{U}$ e $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ tais que a representação $\widehat{F}^{\varphi\psi}$ de $F$ relativamente as cartas $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ é de classe $\mathrm{C}^k$.*

*Demonstração.* Claro que $(a) \implies (b)$. Quanto a $(b) \implies (a)$, tome arbitrariamente cartas locais $(\widetilde{\mathrm{U}}, \widetilde{\varphi})$ em $\mathcal{M}$ e $(\widetilde{\mathrm{V}}, \widetilde{\psi})$ em $\mathcal{N}$ com $F(\widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$. Afirmamos que

$$\widehat{F}^{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}} = \widetilde{\psi} \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathrm{U}}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é de classe $\mathrm{C}^k$. É suficiente mostrar que para cada $x \in \widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathrm{U}})$ existe um aberto $B \subseteq \widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathrm{U}})$ no $\mathbb{R}^n$ em torno de $x$ tal que a restrição de $\widehat{F}^{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}}$ a $B$ é de classe $\mathrm{C}^k$. Ora, um ponto arbitrário $x \in \widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathrm{U}})$ é da forma $x = \widetilde{\varphi}(p)$ com $p \in \widetilde{\mathrm{U}}$. Em virtude de $(b)$, existem cartas locais $(\mathrm{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ em $\mathcal{N}$ com $p \in \mathrm{U}$ e $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ tais que

$$\widehat{F}^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é de classe $\mathrm{C}^k$. Note que $\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}}$ e $\mathrm{V} \cap \widetilde{\mathrm{V}}$ são ambos não-vazios por conterem respectivamente os pontos $p \in \mathcal{M}$ e $F(p) \in \mathcal{N}$ e assim as aplicações de transições

$$\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\varphi}(\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{V} \cap \widetilde{\mathrm{V}}) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

são suaves. Considere o seguinte aberto $B := \widetilde{\varphi}(\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}})$ em torno de $x = \widetilde{\varphi}(p)$. O leitor pode verificar sem dificuldade que a restrição de $\widehat{F}^{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}}$ ao aberto $B$ coincide com a aplicação

$$(\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ h \circ (\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}) : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

onde $h$ é restrição de $\widehat{F}^{\varphi\psi}$ ao aberto $\varphi(\mathrm{U} \cap \widetilde{\mathrm{U}}) = \varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ e portanto $h$ é de classe $\mathrm{C}^k$. Donde, a restrição de $\widehat{F}^{\widetilde{\varphi}\widetilde{\psi}}$ a $B$ é de classe $\mathrm{C}^k$ por ser escrita como composição de aplicações de classe $\mathrm{C}^k$ e o resultado segue[3]. ■

Vejamos alguns exemplos de funções suaves em $\mathcal{M}$.

**Exemplos 1.2.5.**

a) Uma função $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ é suave no sentido de variedades se e somente se $f$ é suave no sentido usual.

b) Em particular, as funções polinomiais $p : \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em $n$ variáveis que são funções da forma

$$p(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} c_\alpha x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U}$$

são suaves no sentido usual e portanto também o são no sentido de variedades. Aqui, $l \in \mathbb{N}$ , $\alpha = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = \sum_{i=1}^n j_i$e $c_\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Idem para as funções racionais $r : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, que são funções da forma $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ com $p, q$ funções polinomiais em $n$ variáveis e U um aberto no $\mathbb{R}^n$ tal que $q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathrm{U}$.

d) A função determinante $\det : \mathbb{GL}(\mathbb{R}, n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave. Usando a identidade [4]

$$\det(A) = \sum_\sigma (-1)^{m_\sigma} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}, \forall A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)$$

e a carta global $(\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n), \varphi)$ [5] o leitor pode verificar sem dificuldade que a representação de det em relação às cartas locais $(\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)\varphi)$ e $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ é uma função polinomial em $n^2$ variáveis definida no aberto

[3] Sejam $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $G : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ aplicações de classe $\mathrm{C}^k$, onde $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ são abertos (não-vazios) com $F(U) \subseteq V$. Então, $G \circ F : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^s, x \mapsto G(F(x))$ é de classe $\mathrm{C}^k$.

[4] A soma é tomada sobre todas as permutações

$$\sigma : i \in \{1, \ldots, n\} \mapsto \sigma_i \in \{1, \ldots, n\}$$

e $m_\sigma$ é o número de transposições na decomposição de $\sigma$.

[5] Onde $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ é o isomorfismo canônico que leva uma matriz $(a_{ij})$ no vetor $(a_{11}, \ldots a_{1m}, a_{21}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nm}) \in \mathbb{R}^{n^2}$

$\varphi(\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ e portanto suave no sentido usual pelo item prévio, ou seja, det é suave no sentido de variedades.

Denotaremos a coleção das funções suaves $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{M}$ por $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$. Alguns exemplos gerais:

**Exemplos 1.2.6.**

a) A aplicação identidade

$$\mathrm{id}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

é suave.

b) Se U é aberto em $\mathcal{M}$, então a inclusão

$$i : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

é suave.

c) Se $(\mathrm{U}, \varphi)$ é uma carta em $\mathcal{M}$, então

$$\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é suave.

d) Qualquer aplicação constante

$$c : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

com $c(p) := c, \forall p \in \mathcal{M}$, é suave.

**Exemplos 1.2.7.** a) Vimos que qualquer função em $\mathcal{M}$ constante é suave. Em particular,

$$1_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})}, 0_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})} \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

onde as funções

$$1_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})}, 0_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

são definidas naturalmente como

$$1_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})}(p) = 1, \forall p \in \mathcal{M}$$

e

$$0_{\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})}(p) = 0, \forall p \in \mathcal{M}.$$

b) Se $f, g \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$, então

$$f + g \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}) \text{ e } fg \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}),$$

onde as funções

$$f + g, fg : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

são definidas ponto a ponto, i.e.,

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p), \forall p \in \mathcal{M}$$

e

$$(fg)(p) = f(p)g(p), \forall p \in \mathcal{M}.$$

De fato, dados $p \in \mathcal{M}$ e uma carta local $(\mathrm{U}, \varphi)$ de $\mathcal{M}$ em $p$ verifica-se sem dificuldade que

$$(f + g) \circ \varphi = f \circ \varphi + g \circ \varphi : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(fg) \circ \varphi = (f \circ \varphi)(g \circ \varphi) : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que são funções suaves, ou seja $f + g, fg \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ como afirmado.

**Lema 1.2.8.** $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ *munido das operações ponto a ponto, definidas por*

$$\begin{aligned} (f + g)(q) &= f(q) + g(q) \\ (fg)(q) &= f(q)g(q) \\ (\lambda f)(q) &= \lambda f(q) \in \mathcal{M} \\ &\forall q \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*é uma* $\mathbb{R}$*-álgebra.*

*Demonstração.* Segue-se de imediato dos exemplos prévios. ■

Vejamos agora mais alguns exemplos de aplicações suaves:

**Exemplo 1.2.9.** Dados $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$ e $1 \leq i, j \leq n$ considere $A^{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ a matriz obtida por remoção da $i$-ésima linha e da $j$-ésima coluna de $A$. A matriz adjunta de $A$ é a matriz, denotada por $\mathrm{Adj}A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e dada por

$$(\mathrm{Adj}A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{ji}, 1 \leq i, j \leq n.$$

O leitor pode checar sem dificuldade que a aplicação

$$\text{Adj} : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto \text{Adj}A$$

é suave.(Dica: Mostre que cada função componente da representação de Adj

$$\varphi \circ \text{Adj} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

com respeito a carta $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \varphi)$ é uma função polinomial em $n^2$ variáveis).

**Exemplo 1.2.10.** A aplicação de inversão

$$\text{Inv} : \mathbb{GL}(\mathbb{R}, n) \longrightarrow \mathbb{GL}(\mathbb{R}, n), A \mapsto A^{-1}$$

é suave. De fato, usando a identidade $\text{Inv}(A) = A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{\det A}, \forall A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)$ tem-se que cada função componente da representação de Inv relativamente à carta global $(\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n), \varphi)$ em $\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)$ é uma função racional em $n^2$ variáveis definida no aberto $\varphi(\mathbb{GL}(\mathbb{R}, n)) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ e o resultado segue.

O seguinte lema mostra que a suavidade de uma aplicação é de caráter local.

**Lema 1.2.11.** *Seja $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação. Se $F$ é suave, então $F\mid_{\text{U}}$ também o é, para todo aberto $\text{U} \subseteq \mathcal{M}$. Reciprocamente, se cada ponto de $p$ admitir uma vizinhança $\text{U} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $F\mid_{\text{U}}$ é suave, então $F$ é suave.*

*Demonstração.* A primeira implicação segue da aplicação inclusão

$$i : \text{U} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

ser suave, para todo aberto $\text{U} \subseteq \mathcal{M}$. Para ver a outra direção, fixe arbitrariamente $p \in \mathcal{M}$ e seja $\widetilde{\text{U}}$ o aberto em torno de $p$ correspondente onde a restrição de $F$ é suave. Tome uma carta local $(\text{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ tal que $p \in \text{U} \subseteq \widetilde{\text{U}}$. Note em particular, que $(\text{U}, \varphi)$ também é uma carta local em $\widetilde{\text{U}}$. Conclua da primeira parte que $F\mid_{\text{U}}$ é suave. Mas a representação de $F\mid_{\text{U}}$ relativamente a $(\text{U}, \varphi)$ e qualquer carta local $(\text{V}, \psi)$ em $\mathcal{N}$ com $F(\text{U}) \subseteq \text{V}$ coincide com $\widehat{F}^{\varphi\psi}$, e concluirmos que $F$ é suave. ■

**Observação 1.2.12.** Se uma aplicação $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ entre variedades suaves é descontínua em um ponto $p \in \mathcal{M}$, então, não temos como se quer garantir a existência de uma carta local $(\text{U}, \varphi)$ em $\mathcal{M}$ em torno de

$p$ e uma carta local $(\mathrm{V}, \psi)$ em $\mathcal{N}$ tais que $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. No entanto, tais cartas existem em torno de quaisquer pontos de $\mathcal{M}$ sempre que $F$ for contínua. Ou seja, parece intuitivo dizer que as aplicações descontínuas entre variedades suaves não podem ser suaves. De fato, o lema abaixo comprova nossa intuição.

**Lema 1.2.13.** *Se $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ é suave, então $F$ é contínua. Em geral, se $F$ é de classe $\mathrm{C}^k$ então $F$ é de classe $\mathrm{C}^l, \forall 0 \leq l < k \leq \infty$.*

*Demonstração.* Fixe $p \in \mathcal{M}$. Sejam $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ cartas locais em torno de $p$ e $F(P)$ respectivamente com $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. Note que

$$F \mid_{\mathrm{U}} \equiv \psi^{-1} \circ \widehat{F}^{\varphi\psi} \circ \varphi : \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N},$$

portanto $F$ é contínua. ■

**Proposição 1.2.14.** *Sejam $G : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ e $F : \mathcal{N}^n \longrightarrow \mathcal{S}^s$ aplicações suaves. Então, $F \circ G : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{S}^s$ é suave.*

*Demonstração.* Sejam $(\mathrm{U}, \varphi)$, $(\mathrm{V}, \psi)$ e $(W, \eta)$ cartas locais em $\mathcal{M}$ , e $\mathcal{N}$ respectivamente com $(F \circ G)(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ e $F(W) \subseteq \mathrm{V}$. Como $G$ é suave, então $G$ é contínua. Logo, podemos diminuir se necessário U de modo que $G(\mathrm{U}) \subseteq W$. Nestas condições, deixamos para o leitor checar a seguinte identidade:

$$\widehat{F \circ G}^{\varphi\psi} = \widehat{F}^{\varphi\eta} \circ \widehat{G}^{\varphi\eta}.$$

Use esta igualdade e a suavidade de $G$ e $F$ para concluir o resultado. ■

**Lema 1.2.15.** *Seja $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação, onde $\mathcal{N}$ é a variedade produto*

$$\mathcal{M}_1 \times \cdots \times \mathcal{M}_k.$$

*São equivalentes:*

*(i) $F$ é suave.*

*(ii) Para cada $1 \leq i \leq k$, $\pi_i \circ F$ é suave, onde cada $\pi$ é a projeção.*

*Demonstração.* Pela proposição prévia, temos que $(i) \implies (ii)$. Para ver que $(ii) \implies (i)$, sejam $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}_i, \psi_i), i = 1, \ldots, k$ cartas locais em torno de $p \in \mathcal{M}$ e $(\pi_i \circ F)(p), i = 1, \ldots, k$ com

$$(\pi_i \circ F)(U) \subseteq \mathrm{V}_i, i = 1, \ldots, k.$$

Considere

$$\psi := \psi_1 \times \cdots \times \psi_k : \mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_k \longrightarrow \mathbb{R}^{m_1+\ldots+m_k}.$$

Mostre que

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \equiv \left(\psi_1 \circ (\pi_1 \circ F) \circ \varphi^{-1}, \ldots, \psi_k \circ (\pi_1 \circ F) \circ \varphi^{-1}\right).$$

Use a hipótese $(ii)$, para mostrar que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é suave. Conclua que $F$ é suave. ■

**Exemplo 1.2.16.** Em particular uma aplicação

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

é suave se e somente se cada função componente $f_i$ de $F$ o for.

**Definição 1.2.4.** *Dizemos que uma bijeção $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ suave é um* difeomorfismo*, se $F^{-1}$ também é suave. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são* difeomorfas.

**Observação 1.2.17.** Se $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ é um difeomorfismo, verifica-se sem dificuldade que $n = m$.

**Exemplo 1.2.18.** A aplicação identidade $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ é um difeomorfismo.

**Exemplo 1.2.19.** Se $(\mathrm{U}, \varphi)$ é uma carta local em $\mathcal{M}$ então $\varphi$ é um difeomorfismo de U sobre o aberto $\varphi(\mathrm{U})$.

**Exemplo 1.2.20.**

$$F : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1, x \mapsto [x]_\sim$$

é um difeomorfismo.

A família dos difeomorfismos $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ será denotada por $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$.Verifica-se da proposição 1.2.14 que $\mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ é um grupo por composição.

### 1.2.1 Funções Bump

Dada uma função $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ (não necessariamente contínua), definimos o *suporte* de $f$, denotado por $\mathrm{supp}(f)$, como o fecho topológico do subconjunto

$$\{q \in \mathcal{M} : f(q) \neq 0\}.$$

Dizemos que $f$ é *suportada* num subconjunto $A \subseteq \mathcal{M}$ se $\mathrm{supp}(f) \subseteq A$.

**Observação 1.2.21.** Dada uma função $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $\mathrm{supp}(f) \neq \varnothing$ e $q \notin \mathrm{supp}(f)$, então existe um aberto $q \in W \subseteq \mathcal{M}$ tal que $f\,|_W \equiv 0$. Em particular, se $f$ for suportada num subconjunto próprio $A \subseteq \mathcal{M}$, então $f$ se anula fora de $A$.

**Definição 1.2.5.** *Sejam $p \in \mathcal{M}$ e $p \in \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$. Uma* função bump[6] *em $p$ suportada em* U *é uma função suave $b : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ não-negativa, suportada em* U *tal que existe um aberto $\mathrm{V} \subseteq \mathcal{M}$ com $p \in \overline{\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{U}$ tal que*

$$b\,|_{\mathrm{V}} \equiv 1.$$

Para ver a existência de uma função bump em $\mathcal{M}$ suportada num aberto $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ consultar a referência [7] (páginas 140-142). Em geral uma função suave $f$ definida num aberto U não-admite uma extensão suave (e.g, a função secante restrita ao aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Mas, se diminuirmos o aberto U se necessário, a resposta é sim.

**Proposição 1.2.22.** *Sejam* $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *um aberto não-vazio e* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$. *Então, existem um aberto* $\mathrm{V} \subseteq \mathcal{M}$ *com* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$ *e uma função suave* $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ *tais que*

$$\widetilde{f}\,|_{\mathrm{V}} = f\,|_{\mathrm{V}}\,.$$

*Demonstração.* Fixe uma função bump $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ suportada em U. Defina V como o aberto correspondente onde $b$ é identicamente 1. Defina $\widetilde{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\widetilde{f} \equiv f \cdot b$ em U e $\widetilde{f} \equiv 0$ fora de U. Mostremos que cada ponto de $q \in \mathcal{M}$ admite uma vizinhança $W$ tal que $\widetilde{f}\,|_W$ é suave. Ora, se $q \in \mathrm{U}$, basta tomar $W = \mathrm{U}$. Neste caso, a $\widetilde{f}$ restrita a $W$ é suave por ser um produto de funções suaves. Caso contrário, em particular $q \notin \mathrm{supp}(b)$. Logo, podemos tomar $W = \mathcal{M} \setminus \mathrm{supp}(f)$, ou seja, $\widetilde{f}\,|_W \equiv 0$ que é suave. ∎

## 1.3 O ESPAÇO TANGENTE: MOTIVAÇÃO HEURÍSTICA

Seja $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ uma subvariedade suave de dimensão $m$. Uma dificuldade de definir derivadas em variedades é a ausência de uma estrutura linear (i.e., de espaço vetorial). A introdução da noção de *espaço tangente* visa a remediar isto. Nesta seção, discutimos, de forma

[6] O termo inglês *bump* aqui tem o sentido de "calombo". Na falta de uma tradução apropriada, deixamos o original.

intuitiva, como esses espaços vetoriais aparecem, e formalizamos seus diversos aspectos a partir da próxima seção.

Seja $p \in \mathcal{M}$. Considere uma curva suave

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(no sentido usual) com $\alpha(0) = p$, e $\alpha'(0) \in \mathbb{R}^n$. Esse *vetor velocidade* $\alpha'(0)$ nos dá uma ideia de um "vetor tangente" à subvariedade $\mathcal{M}$ em $p$. Um pouco mais formalmente, poderíamos definir o *espaço tangente* de $\mathcal{M}$ em $p$, denotado por $\widetilde{T_p\mathcal{M}}$, como o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tais que existe uma curva suave

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

com

$$\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathcal{M}, \alpha(0) = p \text{ e } \alpha'(0) = v.$$

É possível mostrar que com essa definição, $\widetilde{T_p\mathcal{M}}$ é um subespaço vetorial de dimensão $m$ de $\mathbb{R}^n$ (remetemos o leitor à referência [3], págs. 130 e 131). Veja a próxima figura, onde ilustramos isto para o $\mathbb{S}^2$.

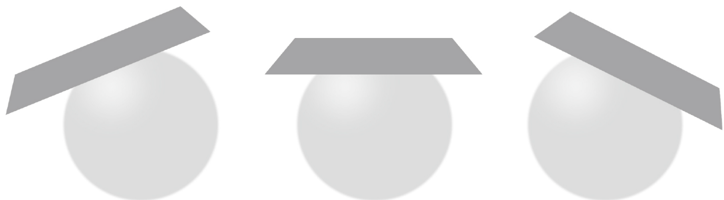

Figura 3: Ilustração de espaços tangentes na esfera $\mathbb{S}^2$

Nesse caso, $\widetilde{T_p\mathbb{S}^2}$ é geometricamente paralelo a um plano tangente em $p$. O problema com a definição acima é sua forte dependência do $\mathbb{R}^n$ ambiente.

Surpreendentemente, podemos dar uma descrição alternativa do espaço tangente, que embora mais abstrata, pode ser naturalmente estender-se ao contexto de variedades mais gerais.

Fixe $\widetilde{v} \in \widetilde{T_p\mathcal{M}}$. Defina

$$v : \mathrm{C}^{\infty}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

da seguinte forma:

$$\forall f \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathcal{M}), v(f) := (f \circ \alpha)'(0), (*)$$

onde

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$$

é uma curva suave com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \widetilde{v}$. É possível mostrar, embora não o faremos aqui, que $(*)$ possui as seguintes propriedades:

i) $v(f)$ não dependente da escolha de $\alpha$, somente de $\widetilde{v}$.

ii) $v$ é $\mathbb{R}$-linear.

iii) $v$ satisfaz a chamada *regra de Leibniz*, i.e.,

$$v(fg) = f(p)v(g) + v(f)g(p), \forall f, g \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathcal{M}).$$

O conjunto $T_p\mathcal{M}$ dos funcionais lineares em $\mathrm{C}^{\infty}(\mathcal{M})$ satisfazendo a regra de Leibniz é um espaço vetorial, e a correspondência

$$\widetilde{v} \in \widetilde{T_p\mathcal{M}} \mapsto v \in T_p\mathcal{M}$$

definida como acima é um isomorfismo *canônico* entre $T_p\mathcal{M}$ e $\widetilde{T_p\mathcal{M}}$. Essa construção será a base para nossa definição de espaço tangente, pois ao contrário de $\widetilde{T_p\mathcal{M}}$, $T_p\mathcal{M}$ não depende do ambiente.

## 1.4 O ESPAÇO TANGENTE: DEFINIÇÃO FORMAL

Fixemos a notação $\mathcal{C}_p$ para designar o conjunto de todas as funções suaves definidas numa vizinhança de $p \in \mathcal{M}$, i.e.,

$$\mathcal{C}_p = \bigcup \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{U}),$$

onde a união é tomada sobre todos os abertos $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ contendo o ponto $p$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{C}_p$ equipado com as operações dadas, para $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $\mathcal{C}_p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ , por

$$\begin{aligned} (f+g) : \mathrm{U} \cap \mathrm{V} &\longrightarrow \mathbb{R} & \qquad q &\mapsto f(q) + g(q) \\ (fg) : \mathrm{U} \cap \mathrm{V} &\longrightarrow \mathbb{R} & q &\mapsto f(q)g(q) \\ \lambda f : \mathrm{U} &\longrightarrow \mathbb{R} & q &\mapsto \lambda f(q) \end{aligned}$$

é uma $\mathbb{R}$-álgebra (comutativa). Defina em $\mathcal{C}_p$ a seguinte relação de equivalência[7] :

$$f \equiv_p g \iff f \text{ e } g \text{ coincidem numa vizinhança de } p.$$

Dizemos que a classe de equivalência de $f$ pela relação $\equiv_p$, denotada por $[f]$, é o *germe de $f$ em $p$* e escrevemos $\mathbb{F}_p$ para designar o conjunto quociente ${\mathcal{C}_p}/{\equiv_p}$ de $\mathcal{C}_p$. Em $\mathbb{F}_p$, introduzimos as operações

$$\begin{aligned}
[f]+[g] &:= [f+g] \\
[f][g] &:= [fg] \\
\lambda[f] &:= [\lambda f] \\
&\quad \forall [f],[g] \in \mathbb{F}_p, \forall \lambda \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

em que as operações dentro dos colchetes são operadas em $\mathcal{C}_p$. Para ver a boa definição destas operações, é suficiente mostrar que $\equiv_p$ é compatível com as operações da $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}_p$, i.e.,

$$\begin{cases} f \equiv_p f' \\ g \equiv_p g' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f+g \equiv_p f'+g' \\ fg \equiv_p f'g' \end{cases}.$$

Para esse fim, note que se $B$ é a interseção das vizinhanças de $p$, onde $f$ coincide com $f'$ e $g$ com $g'$, então $B$ é ainda uma vizinhança de $p$ na qual $f'|_B \equiv f|_B$ e $g'|_B \equiv g|_B$. Logo,

$$\begin{aligned}
(f'+g')|_B &\equiv f'|_B + g'|_B \\
&\equiv f|_B + g|_B \\
&\equiv (f+g)|_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f'g')|_B &\equiv (f'|_B)(g'|_B) \\
&\equiv (f|_B)(g|_B) \\
&\equiv (fg)|_B,
\end{aligned}$$

ou seja, $\equiv_p$ é compatível com as operações de $\mathcal{C}_p$. Verifica-se facilmente que $\mathbb{F}_p$ equipado com estas operações é uma $\mathbb{R}$-álgebra(comutativa).

[7]Claro que $\equiv_p$ é reflexiva e simétrica. Quanto a transitividade, sejam $f, g$ e $h$ em $\mathcal{C}_p$ tais que $f \equiv_p g$ e $g \equiv_p h$. Tomando a interseção das vizinhanças abertas de $p$ correspondentes onde $f$ coincide com $g$ e $g$ com $h$, obtemos uma vizinhança de $p$ na qual simultaneamente as funções $f, g, h$ coincidem, donde segue que $f \equiv_p h$ que dá a transitividade de $\equiv_p$ .

**Definição 1.4.1.** *Definimos* o espaço tangente de $\mathcal{M}$ em $p \in \mathcal{M}$, *denotado por* $T_p\mathcal{M}$, *como o conjunto dos funcionais* $\mathbb{R}$-*lineares* $v : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{R}$, *que satisfazem a* regra de Leibniz *:*

$$(\forall [f], [g] \in \mathbb{F}_p) \quad v([f][g]) = g(p)v([f]) + f(p)v([g]).$$

*Os elementos de* $T_p\mathcal{M}$ *são chamados de* vetores tangentes de $\mathcal{M}$ em $p$.

Em $T_p\mathcal{M}$ definimos, ponto a ponto, a soma e a multiplicação por escalar sobre $\mathbb{R}$. Verifica-se sem dificuldade que $T_p\mathcal{M}$ munido destas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

**Lema 1.4.1.** *Sejam* $p \in \mathcal{M}$, $[f] \in \mathbb{F}_p$ *e* $v \in T_p\mathcal{M}$ *um vetor tangente em* $p$ *não-nulo. Se* $f$ *é constante numa vizinhança de* $p$*, então* $v([f]) = 0$.

*Demonstração.* Como $v$ é $\mathbb{R}$-linear, basta mostrar que $v([1]) = 0$, onde $1 \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ denota a função constante $x \mapsto 1(x) = 1$ . Afirmamos que $v([1]) = 0$, de fato :

$$\begin{aligned} v([1]) &= 2v([1]) - v([1]) \\ &= v([1])1(p) + 1(p)v([1]) - v([1]) \\ &= v([1][1]) - v([1]) \\ &= v([1]) - v([1]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

∎

**Definição 1.4.2.** *Dados* $p \in \mathcal{M}$ *e uma carta local* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *de* $\mathcal{M}$ *em* $p$ *com* $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$*. Os* $n$ *vetores tangentes de* $\mathcal{M}$ *em* $p$ [8]

$$\partial_j^\varphi\Big|_p : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq j \leq n),$$

*definidos por*

$$\partial_j^\varphi\Big|_p([f]) := \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) \quad (1 \leq j \leq n),$$

*onde o último termo é a* $j$*-ésima derivada parcial em* $\mathbb{R}^n$*, em* $\varphi(p)$*, são chamados de* vetores coordenados de $\varphi$ em $p$

**Lema 1.4.2.** *Dados* $p \in \mathcal{M}$ *e* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *uma carta local de* $\mathcal{M}$ *em* $p$*, então os vetores coordenados de* $\varphi$ *em* $p$ *são linearmente independentes.*

---

[8] É fácil checar que estas aplicações estão bem definidas e são elementos do $T_p\mathcal{M}$

*Demonstração.* Sejam $x^1, \ldots, x^n$ as funções coordenadas de $\varphi$. Da combinação linear nula,

$$0_{T_p\mathcal{M}} = \sum_i c_i \left.\partial_j^{\varphi}\right|_p .$$

Obtemos, para $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
c_j &= \sum_i c_i \delta_{ij} \\
&= \sum_i c_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) \\
&= \sum_i c_i \left.\partial_i^{\varphi}\right|_p ([x^j]) \\
&= \left( \sum_i c_i \left.\partial_i^{\varphi}\right|_p \right) ([x^j]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

**Lema 1.4.3** (de Hadamard)**.** *Seja $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave definida numa bola aberta $B$ de centro $x_0$. Então existem funções suaves*

$$g_j : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ com } g_j(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \quad (1 \leq j \leq n),$$

*tais que*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x - x_0) g_i(x),$$

*para todo $x \in B$, onde $\pi_i$ é a projeção no i-ésimo fator.*

*Demonstração.* Defina, para cada $x \in B$,

$$\alpha_x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(x_0 + (x - x_0)t).$$

O teorema fundamental do cálculo nos dá

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \alpha_x(1) - \alpha_x(0) \\
&= \int_0^1 \alpha'_x(t)dt \\
&= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + (x - x_0)t) \right) dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x - x_0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + (x - x_0)t)dt.
\end{aligned}
$$

Definindo, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$g_j : B \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + (x - x_0)t)dt,$$

o resultado segue. ■

**Teorema 1.4.4.** *O espaço tangente de $\mathcal{M}^n$ em $p$ é um espaço vetorial de dimensão $n$.*

*Demonstração.* Seja $(\mathrm{U}, \varphi)$ uma carta local de $\mathcal{M}$ em $p$ com $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. A prova deste teorema consiste em estabelecer que os vetores coordenados de $\varphi$ em $p$ formam uma base para o $T_p\mathcal{M}$. Pelo lema 1.4.2, estes vetores tangentes em $p$ são linearmente independentes. Resta mostrar que $\partial_1^\varphi \mid_p, \ldots, \partial_n^\varphi \mid_p$ geram $T_p\mathcal{M}$. Dado $v \in T_p\mathcal{M}$ afirmamos que

$$v = \sum_{i=1}^{n} v([x^i])\partial_i^\varphi \mid_p .$$

De fato, fixando arbitrariamente $[f] \in \mathbb{F}_p$, podemos escolher um aberto $p \in \mathrm{U}_f \subseteq \mathcal{M}$ tais que $\mathrm{U}_f \subseteq \mathrm{U}, \mathrm{U}_f \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ e $B_f := \varphi(\mathrm{U}_f)$ seja uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro $\varphi(p)$. Aplicando o lema 1.4.3 à aplicação suave $f \circ \varphi^{-1} : B_f \longrightarrow \mathbb{R}$ com $x_0 = \varphi(p)$ e compondo à direita com a aplicação $\varphi$ restrita a $\mathrm{U}_f$, obtemos, para $x \in \mathrm{U}_f$,

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(x^i(x) - x^i(p))(g_i \circ \varphi)(x).$$

Equivalentemente,

$$f\mid_{\mathrm{U}_f} = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \mid_{\mathrm{U}_f} - x^i(p)\right)\left(g_i \circ \varphi \mid_{\mathrm{U}_f}\right).$$

Onde, pensamos em $f(p), x^1(p), \ldots, x^n(p)$ como funções constantes definidas em $\mathrm{U}_f$. Daí,

$$\begin{aligned}
[f] &= [f\mid_{\mathrm{U}_f}] \\
&= \left[f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \mid_{\mathrm{U}_f} - x^i(p)\right)\left(g_i \circ \varphi \mid_{\mathrm{U}_f}\right)\right] \\
&= [f(p)] + \sum_{i=1}^{n} \left[x^i - x^i(p)\right][g_i \circ \varphi].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v([f]) = v([f(p)]) + \sum_{i=1}^{n} v\left(\left[x^i - x^i(p)\right][g_i \circ \varphi]\right).$$

Usando o fato que

$$g_i(\varphi(p)) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \partial_i^{\varphi}\mid_p([f]),$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
v\left(\left[x^i - x^i(p)\right][g_i \circ \varphi]\right) &= v\left([x^i - x^i(p)]\right)\partial_i^{\varphi}\mid_p([f]) \\
&= \left(v([x^i]) - v([x^i(p)])\right)\partial_i^{\varphi}\mid_p([f]) \quad (1 \leq i \leq n).
\end{aligned}$$

Logo,

$$v([f]) = v([f(p)]) + \sum_{i=1}^{n} \left(v([x^i]) - v([x^i(p)])\right)\partial_i^{\varphi}\mid_p([f]).$$

E finalmente, invocando o lema 1.4.1, temos

$$v([f(p)]) = v([x^i(p)]) = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} v([f]) &= \sum_{i=1}^{n} v([x^i])\partial_i^{\varphi} \mid_p ([f]) \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n} v([x^i])\partial_i^{\varphi} \mid_p \right) ([f]). \end{aligned}$$

Como $[f]$ é arbitrário, o resultado segue. ■

Se $(\mathrm{U}, \varphi)$ é uma carta local de $\mathcal{M}$ em $p$, então chamaremos o conjunto formado pelos vetores coordenados de $\varphi$ em $p$, que é uma base para o $T_p\mathcal{M}$, de *base coordenada de $\varphi$ em $p$* .

**Observação 1.4.5.** Dados $v \in T_p\mathcal{M}$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$ com $p \in \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ aberto, definimos

$$v(f) := v([f]).$$

Além disso, note que

$$T_p(\mathrm{U}) \cong T_p\mathcal{M}.$$

### 1.4.1 A diferencial de uma aplicação suave

**Definição 1.4.3.** *Seja $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave. A* diferencial (ou derivada) de $F$ em $p \in \mathcal{M}$ *é a aplicação $\mathbb{R}$-linear*

$$\mathrm{d}F_p : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{F(p)}\mathcal{N},$$

*que a cada $v \in T_p\mathcal{M}$ faz corresponder $\mathrm{d}F_p(v) \in T_{F(p)}\mathcal{N}$ dado por* [9]

$$[g] \in \mathbb{F}_{f(p)} \mapsto \mathrm{d}F_p(v)([g]) := v([g \circ F]).$$

Segue-se imediatamente da definição o seguinte:

**Proposição 1.4.6** (Regra da cadeia)**.** *Sejam $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ e $G$ :*

[9] Dado qualquer vizinhança U de $p$ com $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$, note que $v([g \circ F|_{\mathrm{U}}]) \in \mathbb{R}$ não depende do representante do germe de $g$ bem como não depende da vizinhança $U$ de $p$. Assim, por conveniência, podemos escrever $g \circ F$ pensando em $F$ como sua restrição a qualquer vizinhança de $p$ cuja imagem seja um subconjunto do domínio de $g$. Portanto, $\mathrm{d}F_p$ está bem definida e verifica-se sem dificuldade que $\mathrm{d}F_p$ é $\mathbb{R}$-linear.

*$\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$ aplicações suaves. Então, dado $p \in \mathcal{M}$,*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

**Lema 1.4.7.** *Sejam $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave, $(\mathrm{U}\, \varphi)$ um carta local em $\mathcal{M}$ em torno de $p \in \mathcal{M}$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ uma carta local em $\mathcal{N}$ em torno de $F(p)$. Escreva-se $\varphi = (x^1, \ldots, x^m), \psi = (y^1, \ldots, y^n)$, e $\widehat{F}^{\varphi\psi} = (\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n)$. Então,*

$$\mathrm{d}F_p\left(\partial_i^{\varphi} \mid_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(\varphi(p))\partial_j^{\psi} \mid_{F(p)},$$

*para $1 \leq i \leq m$.*

*Demonstração.* Pelo teorema 1.4.4, podemos escrever

$$\mathrm{d}F_p\left(\partial_i^{\varphi} \mid_p\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}F_p\left(\partial_i^{\varphi} \mid_p\right)([y^j])\partial_j^{\psi} \mid_{F(p)}.$$

Usando a definição 1.4.3, obtemos, para $1 \leq j \leq n$,

$$\mathrm{d}F_p\left(\partial_i^{\varphi} \mid_p\right)([y^j]) = \partial_i^{\varphi} \mid_p \left([y^j \circ F]\right) = \frac{\partial(y^j \circ F)}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(\widehat{f}_j)}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

donde segue a igualdade desejada. ■

**Corolário 1.4.8.** *Sejam $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave, $(\mathrm{U}, \varphi)$ uma carta local em $\mathcal{M}$ em torno de $p$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ uma carta local em $\mathcal{N}$ em torno de $F(p)$. Então, a matriz que representa $dF_p$ com respeito às bases coordenadas de $\varphi$ e $\psi$ é a matriz Jacobiana de $\widehat{F}^{\varphi\psi}$ em $\varphi(p)$.*

**Corolário 1.4.9.** *Sejam $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ ambas cartas locais de $M$ em $p$, então $J(\psi \circ \varphi^{-1}) \mid_{\varphi(p)}$ é precisamente a matriz de passagem da base $\{\partial_1^{\varphi} \mid_p, \ldots, \partial_n^{\varphi} \mid_p\}$ para a base $\{\partial_1^{\psi} \mid_p, \ldots, \partial_n^{\psi} \mid_p\}$.*

*Demonstração.* Aplicando o lema prévio com $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, $f = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$, então verifica-se facilmente que $\mathrm{d}f_p = \mathrm{id}_{T_p\mathcal{M}}$. Invocando a observação acima, segue-se que

$$[v]_{\psi} = [\mathrm{d}f_p(v)]_{\psi} = J(\psi \circ \varphi^{-1}) \mid_{\varphi(p)} [v]_{\varphi},$$

para todo $v \in T_p\mathcal{M}$, estabelecendo o resultado. ■

Vejamos o teorema da função inversa para variedades:

**Teorema 1.4.10.** *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ variedades suaves de mesma dimensão $n$ e $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave. Dado $p \in \mathcal{M}$, se*

$$dF_p : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$$

*for um isomorfismo linear, então existe um aberto $W \subseteq \mathcal{M}$ em torno de $p$ tal que*

$$F \mid_W$$

*é um difeomorfismo sobre a subvariedade aberta $F(W) \subseteq \mathcal{N}$.*

*Demonstração.* Escolha cartas locais $(\mathrm{U}, \varphi)$ em torno de $p$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ em torno de $F(P)$ com $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. Segue-se da nossa hipótese que a matriz que representa o diferencial $dF_p$ é inversível. Ou seja, a matriz Jacobiana $J(\widehat{F}^{\varphi\psi}) \mid_{\varphi(p)}$ tem determinante não-nulo e portanto pelo teorema da função inversa usual existe um aberto $\widetilde{W} \subseteq \varphi(\mathrm{U})$ em torno de $\varphi(p)$ tal que

$$\widehat{F}^{\varphi\psi} \mid_{\widetilde{W}}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Pondo $W := \varphi^{-1}(\widetilde{W})$ e observando que

$$F \mid_W = \psi^{-1} \mid_{\psi(F(W))} \circ \left(\widehat{F}^{\varphi\psi}\right) \mid_{\widetilde{W}} \circ \varphi \mid_W$$

se exprime como composição de difeomorfismos o resultado segue. ∎

### 1.4.2 Vetor velocidade de uma curva

Nessa subseção formalizaremos a caracterização geométrica e intuitiva do espaço tangente em termos de vetores velocidade de curvas.

**Definição 1.4.4.** *Uma* curva *em $\mathcal{M}$ é uma aplicação $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$ contínua, onde $I$ é um intervalo aberto da reta. Em particular, $\alpha$ é uma aplicação entre variedades. Quando $\alpha$ for suave, dizemos que $\alpha$ é uma* curva suave *em $\mathcal{M}$.*

Dada uma curva suave $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$, e dado $t_0 \in I$, definimos $\alpha'(t_0)$, chamado *vetor velocidade (ou vetor tangente)* de $\alpha$ em $t_0$, como

$$\alpha'(t_0) := d\alpha_{\alpha(t_0)} \left(\frac{d}{dt} \mid_{t=t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}\mathcal{M},$$

onde $\frac{d}{dt}\mid_{t=t_0}$ denota o único vetor coordenado de $I$ em $t_0$ com respeito a carta global $I \hookrightarrow \mathbb{R}$. Verifica-se sem dificuldade que

$$\alpha'(t_0)f = (f \circ \alpha)'(t_0), \forall t_0 \in I, \forall [f] \in \mathbb{F}_{\alpha(t_0)}.$$

**Proposição 1.4.11.** *Todo vetor $v \in T_p\mathcal{M}$ é um vetor velocidade de alguma curva suave em $\mathcal{M}$.*

*Demonstração.* Dado $v \in T_p\mathcal{M}$. Fixe uma carta local $(U, \varphi)$ em torno de $p$ com $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Considere $\widetilde{v} \in \mathbb{R}^n$ não-nulo, e defina a curva

$$\beta : t \in I = (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \varphi(p) + t\widetilde{v}.$$

Note que escolhendo $\epsilon > 0$ suficiente pequeno de modo que $\beta(I) \subseteq \varphi(\mathrm{U})$ podemos definir uma curva suave em $\mathcal{M}$ pondo

$$\alpha = \varphi^{-1} \circ \beta : I \longrightarrow \mathcal{M}, t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t\widetilde{v}).$$

Note que $\alpha(0) = p$. O leitor pode verificar sem dificuldade que

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{v}_i \ \partial_i^{\varphi} \mid_p,$$

onde

$$\widetilde{v} = (\widetilde{v}_1, \ldots, \widetilde{v}_n).$$

Em particular, pondo

$$\widetilde{v}_1 := v[x^1], \ldots, \widetilde{v}_n := v[x^n]$$

o resultado segue. ∎

**Lema 1.4.12.** *Sejam $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave e $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$ uma curva suave em $\mathcal{M}$. Então, $F \circ \alpha : I \longrightarrow \mathcal{N}$ é uma curva suave em $\mathcal{N}$ e além disso*

$$(F \circ \alpha)'(t_0) = dF_{\alpha(t_0)}(\alpha'(t_0)), \forall t_0 \in I.$$

*Demonstração.* Segue-se de imediato da definição e do resultado da proposição 1.4.6. ∎

**Corolário 1.4.13.** *Seja $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma aplicação suave. Dados $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$ então*

$$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$$

*para qualquer curva suave*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$$

*com* $0 \in I, \alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$.

*Demonstração.* Deixamos a demostração para o leitor como um exercício. ∎

**Observação 1.4.14.** Seja $p \in \mathcal{M}$. O *espaço cotangente* de $\mathcal{M}$ em $p$ é o espaço vetorial dual $T_p\mathcal{M}^*$ de $T_p\mathcal{M}$. Embora essa definição seja importante na teoria geral de variedades, não teremos oportunidade de usar-la aqui.

## 1.5 SUBMERSÕES, IMERSÕES E MERGULHOS

Nesta seção, estudamos certas classes fundamentais de aplicações diferenciáveis de posto constante.

**Definição 1.5.1.** *Dizemos que uma aplicação* $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *suave é uma* imersão *no ponto* $p \in \mathcal{M}$ *se a diferencial* $dF_p : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$ *é injetora. Se* $F$ *é uma imersão em todo ponto* $p \in \mathcal{M}$, *diremos simplesmente que* $F$ *é uma imersão.*

**Observação 1.5.1.** Note que se $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ é uma imersão em algum ponto $p \in \mathcal{M}$ tem-se necessariamente $m \leq n$.

**Exemplo 1.5.2.** Um exemplo simples é a inclusão $F : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dada por

$$p \mapsto (p, 0_{\mathbb{R}^n}), \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

**Exemplo 1.5.3.** Eis é um exemplo de uma imersão não-injetora. Considere a curva suave $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (t^2, t^3 - t), \forall t \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 1.5.4.** Mais geralmente, lembrando que uma *curva regular* em $\mathbb{R}^n$ é uma curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ suave com vetor velocidade $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$, temos que todas as curvas regulares são imersões.

O teorema seguinte nos diz que as imersões suaves se comportam localmente como a inclusão do exemplo 1.5.2.

**Teorema 1.5.5** (Forma local das imersões)**.** *Seja* $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *uma aplicação suave que é uma imersão num ponto* $p \in \mathcal{M}$, *então existem cartas locais* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *em* $\mathcal{M}$ *em torno de* $p \in \mathrm{U}$ *e* $(\mathrm{V}, \psi)$ *em torno de*

*$F(p)$ com $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ e $\psi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo sobre o aberto $\varphi(\mathrm{U}) \times W \subseteq \mathbb{R}^n$, onde $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ um aberto contendo $0_{\mathbb{R}^{n-m}}$, tais que*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0_{\mathbb{R}^{n-m}}) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

*Demonstração.* Consultar o teorema 4.15 da referência [4]. ■

**Definição 1.5.2.** *Dizemos que uma aplicação suave $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ é um* mergulho *se $F$ é uma imersão e $F : \mathcal{M} \longrightarrow f(\mathcal{M})$ é um homeomorfismo, onde $F(\mathcal{M})$ é munido da topologia induzida por $\mathcal{N}$.*

Nem toda imersão injetora é um mergulho, no entanto temos um resultado local.

**Lema 1.5.6.** *Seja $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma imersão suave. Então, todo ponto $p \in \mathcal{M}$ possui uma vizinhança aberta $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ tal que a restrição de $F$ a $\mathrm{U}$ é um mergulho suave.*

*Demonstração.* Consultar teorema 4.25 da referência [4]. ■

**Definição 1.5.3.** *Dizemos que uma aplicação suave $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ é uma* submersão, *se para todo $p \in \mathcal{M}$, $dF_p$ é sobrejetiva.*

**Teorema 1.5.7** (Forma local das submersões)**.** *Seja $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave. Suponhamos que $dF_p : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_q\mathcal{N}, q = F(p)$, é sobrejetiva. Então, existem cartas locais $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, em torno, respectivamente de $p$ e $q = F(p)$, e uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, tais que $F(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ e a expressão $F$ nas cartas $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ é*

$$\varphi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = x.$$

*Em outras palavras, $F$ é localmente equivalente à projeção*

$$(x, y) \mapsto x.$$

*Demonstração.* Consultar a referência [2] (pág.13). ■

O próximo teorema descreve a propriedade característica das submersões suaves sobrejetoras.

**Teorema 1.5.8.** *Seja $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma submersão suave sobrejetiva. Para qualquer variedade suave $\mathcal{Q}$, uma aplicação*

$$F : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

*é suave se e somente se*

$$F \circ \pi$$

*o for.*

*Demonstração.* Consultar o teorema 4.29 referência da [4]. ■

## 1.6 SUBVARIEDADES IMERSAS E MERGULHADAS

**Definição 1.6.1.** *Uma* subvariedade imersa (resp. mergulhada) *de $\mathcal{N}$ de dimensão $m$ é uma variedade suave $\mathcal{M}$ de dimensão $m$ tal que*

*i)* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$

*ii) A inclusão $i : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ é uma imersão (resp. mergulho).*

**Observação 1.6.1.** Note que necessariamente $m \leq n$. Dizemos que o número inteiro não-negativo $n - m$ é a *codimensão* de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.

Vale apena ressaltar que a topologia definida em $\mathcal{M}$ não necessariamente precisa ser a induzida pelo espaço ambiente $\mathcal{N}$. No entanto, na prática, diversas subvariedades vem equipadas com a topologia induzida pelo espaço ambiente. Doravante, a menos de menção em contrário, consideraremos as subvariedades como mergulhadas.

**Exemplo 1.6.2.** Se U é aberto em $\mathcal{M}$ então U é uma subvariedade aberta mergulhada de $\mathcal{M}$. Reciprocamente, toda subvariedade de codimensão 0 de $\mathcal{M}$ é uma subvariedade aberta.

**Exemplo 1.6.3.** $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ por ser um aberto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ segue-se que $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade (aberta) de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de codimensão 0.

**Exemplo 1.6.4.** $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ de codimensão 1. Verifica-se facilmente que $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão (de fato, um mergulho). Abaixo, daremos uma outra demostração desse fato.

**Definição 1.6.2.** *Sejam $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave e $c \in \mathcal{N}$. Dizemos que $c$ é um* valor regular *de $F$ se $dF_p$ for sobrejetor para todo $p \in F^{-1}(c)$.*

**Proposição 1.6.5.** *Seja $c \in F(\mathcal{M})$ um valor regular de uma aplicação suave*

$$F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n.$$

*Então, $F^{-1}(c)$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}$ de dimensão*

$$\dim \mathcal{M} - \dim \mathcal{N} = m - n.$$

*Demonstração.* Consultar o corolário 1.36 da referência [6]. ■

**Corolário 1.6.6.** *Sejam $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação suave e $c \in F(\mathcal{M})$ um valor regular de $F$, então*

$$T_pF^{-1}(c) = \ker dF_p.$$

*Demonstração.* Seja $\mathcal{Q} := F^{-1}(c)$ e tome $p \in \mathcal{Q}$. Dado, $v \in T_p\mathcal{Q}$, pelo corolário 1.4.13,

$$dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$$

para qualquer curva suave

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{Q}$$

com $v = \alpha'(0)$. Por outro lado,

$$(F \circ \alpha)(t) = c, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

e portanto

$$(F \circ \alpha)'(0) = 0.$$

Concluímos que

$$T_p\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{Ker} dF_p.$$

Mas pelo teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim \mathcal{Q} = m - n = \dim T_p\mathcal{Q}$$

donde a igualdade segue. ■

**Exemplo 1.6.7.** Vamos demonstrar que $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ de codimensão 1. Seja

$$F : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \in \mathbb{R}.$$

Como $F$ é polinomial em $n+1$ variáveis segue-se que $F$ é suave. Note que $\mathbb{S}^n = F^{-1}(1)$. Afirmamos que 1 é valor regular de $F$. Com efeito, fixe $p = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in F^{-1}(1)$. Como $T_1\mathbb{R}$ tem dimensão 1, segue-se que $dF_p$ ou é identicamente nulo ou é sobrejetor. Verifica-se sem dificuldade que

$$dF_p(v) = 2\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i v(\pi_i)\right) d^{id_{\mathbb{R}}} \mid_1 .$$

Em particular, tomando-se

$$v = \partial_j^{id_{\mathbb{R}^{n+1}}} \big|_p ,$$

em que $j$ é tal que $x_j \neq 0$, temos que

$$dF_p(v) = 2x_j^2 d^{id_{\mathbb{R}}} \big|_1$$

e portanto $dF_p$ é sobrejetor. Como $p$ é arbitrário o resultado segue.

**Observação 1.6.8.** Para uma subvariedade $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ imersa ou mergulhada identificaremos o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, para $p \in \mathcal{M}$ com um subespaço vetorial de $T_p\mathcal{M}$.

**Exemplo 1.6.9.** Sejam $p, q$ inteiros não-negativos tais que $p + q = n$. Considere $I_{pq} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ a matriz diagonal cujos os $p$ primeiros elementos da diagonal valem 1 e os $q$ restantes valem $-1$. Considere

$$\mathrm{O}(p, q) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T I_{pq} A = I_{pq}\}.$$

Considere a aplicação

$$F : A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mapsto A^T I_{pq} A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}),$$

onde $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das matrizes $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas. Verifica-se sem dificuldade que $F$ está bem definida e é suave. Vamos mostrar que $I_{pq}$ é valor regular de $F$. Afim de explicitar a diferencial de $F$ em $A$, precisamos determinar a jacobiana de $F$ em $A$ relativamente às cartas globais, ou equivalentemente, determinar a transformação linear derivada

$$DF(A) : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}).$$

Ademais, $dF_A$ é sobrejetora se e somente se $DF(A)$ o for. Deixamos para o leitor checar que

$$DF(A)(B) = B^T I_{pq} A + A^T I_{pq} B, \forall B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

Daí, dada qualquer $S \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, por inspeção verifica-se que

$$DF(A)\left(\frac{1}{2} A I_{pq} S\right) = S,$$

e portanto o resultado segue. Logo, $\mathrm{O}(p, q) = F^{-1}(1)$ é uma subvariedade de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de dimensão

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

## 1.7 O FIBRADO TANGENTE

**Definição 1.7.1.** *Definimos o* fibrado tangente[10] de $\mathcal{M}$ *como a reunião disjunta dos espaços tangente em todos pontos de* $\mathcal{M}$ *:*

$$T\mathcal{M} := \coprod_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}.$$

Consideraremos os elementos de $T\mathcal{M}$ como os pares $(p,v)$ com $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$. A correspondência natural de cada $(p,v) \in T\mathcal{M}$ no primeiro fator $p \in \mathcal{M}$ define uma aplicação

$$\pi : T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

chamada de *projeção canônica* de $T\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$.

**Observação 1.7.1.** Note que cada $T_p\mathcal{M}$ é naturalmente identificado com a fibra $\pi^{-1}(p)$ de $\pi$ em $p$ via a injeção canônica $v \in T_p\mathcal{M} \mapsto (p,v) \in T\mathcal{M}$. Em virtude disso, é comum referir-se ao espaço tangente de $\mathcal{M}$ em $p$ como a fibra de $\pi$ em $p$ e vice-versa. Assim quando for conveniente, denotaremos o par $(p,v) \in T\mathcal{M}$ simplesmente por $v$ ou $v_p$.

**Exemplo 1.7.2.** Considere $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ com a estrutura canônica de variedade suave. A menos de uma identificação natural de cada espaço tangente com o $\mathbb{R}^n$, tem-se que $T\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$, ou seja, nesse caso $T\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão $2\dim\mathcal{M} = 2n$.

Mostremos agora a estrutura natural de variedade suave do fibrado tangente de $\mathcal{M}$. Fixe um atlas $\mathscr{A}$ suave de dimensão $n$ para $\mathcal{M}$ e seja $\widetilde{\mathscr{A}}$ a família das aplicações, para $(\mathrm{U},\varphi) \in \mathscr{A}$,

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \varphi(\mathrm{U}) \times \mathbb{R}^n,$$

[10] Estritamente falando, o que estamos definindo aqui é o conjunto subjacente ao fibrado tangente. Definiremos posteriormente sobre $T\mathcal{M}$ uma estrutura de variedade suave de dimensão $2n$, e este será o fibrado tangente de $\mathcal{M}$. O leve abuso de linguagem aqui será conveniente para nossa exposição.

dadas por

$$\widetilde{\varphi}\left(p, \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i^{\varphi} \mid_p\right) = (\varphi(p), (x_1, \ldots, x_n)) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

**Teorema 1.7.3.** *$T\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão $2n$.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue-se por estabelecer que a família $\widetilde{\mathscr{A}}$ definida acima satisfaz as propriedades do lema 1.1.10. Claramente, cada $\widetilde{\varphi}$ é uma bijeção, pois sua inversa pode ser explicitamente escrita como

$$\varphi(\mathrm{U}) \times \mathbb{R}^n \ni (y, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto \left(\varphi^{-1}(y), \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i^{\varphi} \mid_{\varphi^{-1}(y)}\right) \in \pi^{-1}(\mathrm{U}).$$

Ademais :

(i) Para quaisquer $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}, \psi) \in \mathscr{A}$. A menos da identificação natural, $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\varphi}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{2n}$; pois é fácil checar que $\widetilde{\varphi}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{R}^n$, que é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{2n}$

(ii) Para quaisquer $(\mathrm{U}, \varphi), (\mathrm{V}, \psi) \in \mathscr{A}$, se $\pi^{-1}(\mathrm{U}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{V}) \neq \emptyset$, então a aplicação

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \mid_{\widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(\mathrm{U}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{V}))}$$

é suave. A prova segue-se de mostrar que cada aplicação componente de $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ é suave. Note que $\widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(\mathrm{U}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{V})) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{R}^n$ e assim $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$ o que implica que $\psi \circ \varphi^{-1}$ é suave e portanto $f_1 := \psi \circ \varphi^{-1} \circ \pi_1 : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bem como as $n^2$ funções, para $1 \leq i, j \leq n$,

$$c_{ij} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , c_{ij}(y) := \left(J(\psi \circ \varphi^{-1}) \mid_y\right)_{ij}$$

também o são. Defina $f_2 : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pondo

$$f_2(y, (x_1, \ldots, x_n)) := \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}(y) x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{nj}(y) x_j\right).$$

Como cada função componente de $f_2$ é suave, segue-se a suavidade de $f_2$. Afirmamos que $\psi \circ \varphi^{-1} = (f_1, f_2)$. De fato, fixado arbitrariamente $(y, x) \in \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{R}^n$, com $x = (x_1, \ldots, x_n)$, temos

$$(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1})(y,x)=\widetilde{\psi}\left(\varphi^{-1}(y),\sum_{i=1}^{n}x_i\partial_i^{\varphi}\mid_{\varphi^{-1}(y)}\right)$$

Aplicando o corolário 1.4.9 com $p=\varphi^{-1}(y)$ e usando a definição de cada $c_{ij}$, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\partial_i^{\varphi}\mid_{\varphi^{-1}(y)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(y)x_i\right)\partial_i^{\psi}\mid_{\varphi^{-1}(y)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1})(y,x)&=\widetilde{\psi}\left(\varphi^{-1}(y),\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(y)x_i\right)\partial_i^{\psi}\mid_{\varphi^{-1}(y)}\right)\\&=\left((\psi\circ\varphi^{-1})(y),\left(\sum_{j=1}^{n}c_{1j}(y)x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}c_{nj}(y)x_j\right)\right).\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1})(y,x)=(f_1,f_2)(y,x),$$

como afirmado.

(iii) Verifica-se facilmente, usando a propriedade da observação 1.1.2 de $\mathcal{M}$, que $\mathscr{A}$ admite um subfamília $\mathscr{A}_0$ enumerável cujos domínios das cartas locais são abertos básicos da base enumerável de $\mathcal{M}$. Definindo $\widetilde{\mathscr{A}_0}$ de forma óbvia, esta é uma subfamília enumerável de $\widetilde{\mathscr{A}}$ que cobre $T\mathcal{M}$.

(iv) Sejam $(p,X)$ e $(q,Y)$ elementos distintos de $T\mathcal{M}$. Se $p=q$, então basta tomar qualquer $(\mathrm{U},\varphi)\in\mathscr{A}$ com $p=q\in\mathrm{U}$. Logo, obtemos $(p,X),(q,Y)\in\pi^{-1}(\mathrm{U})$. Caso contrário, sejam $(\mathrm{U},\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{A}$ com $p\in\mathrm{U}$ e $q\in\mathrm{V}$. Claro que $(p,X)\in\pi^{-1}(\mathrm{U})$ e $(q,Y)\in\pi^{-1}(\mathrm{V})$. Como $\mathcal{M}$ é Hausdorff, a menos de diminuir os abertos U e V se necessário, temos $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\emptyset$ o que implica que

$$\pi^{-1}(\mathrm{U})\cap\pi^{-1}(\mathrm{V})=\emptyset.$$

■

**Exemplo 1.7.4.** Pode-se verificar que o fibrado do circulo $\mathbb{S}^1$ é difeomorfo ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, como ilustra a seguinte figura.

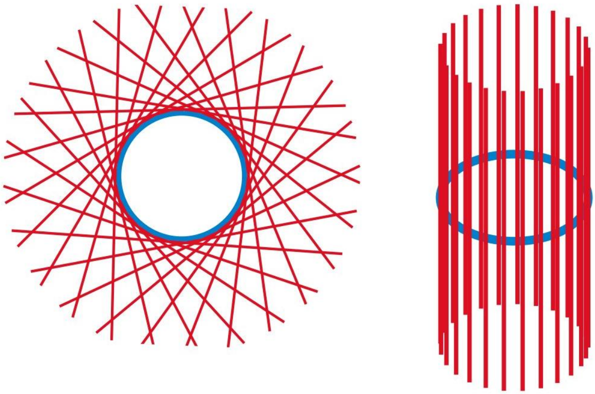

Figura 4: Fibrado tangente do circulo

## 1.8 CAMPOS VETORIAIS

**Definição 1.8.1.** *Um* campo vetorial sobre $\mathcal{M}$ *é uma aplicação*

$$X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M} \quad (p \mapsto X_p)$$

*tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{M}}"'] & T\mathcal{M} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{M} \end{tikzcd},$$

*comuta. Em outras palavras, uma aplicação $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é um campo vetorial sobre $\mathcal{M}$ se e somente se $X$ é uma inversa à direita da projeção canônica se e somente se $X_p \in T_p\mathcal{M}$ sempre que $p \in \mathcal{M}$.*

Só para fixar ideias o leitor pode pensar num campo vetorial sobre $\mathcal{M}$ da mesma forma que pensaria para um campo vetorial sobre um aberto do $\mathbb{R}^n$.

**Definição 1.8.2.** *Dizemos que um campo vetorial $X$ sobre $\mathcal{M}$ é* suave *se $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ é uma aplicação suave.*

Associado a um campo vetorial $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$, definimos, para cada aberto $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$, a função $Xf : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(Xf)(p) := X_p([f]), p \in \mathrm{U}$.

**Lema 1.8.1.** *Sejam $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ um campo vetorial sobre $\mathcal{M}$ e $(\mathrm{U}, \varphi)$ uma carta local em $\mathcal{M}$ com $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. São equivalentes:*

*i)* $X \mid_{\mathrm{U}}$ *é suave.*

*ii)* $Xx^i : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são suaves para* $1 \leq i \leq n$.

*Demonstração.* Note que *i)* vale se e somente se cada função componente de

$$\widetilde{\varphi} \circ X : X^{-1}(\pi(\mathrm{U})) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

for suave. Como $\widetilde{\varphi} \circ X = (x^1, \ldots, x^n, Xx^1, \ldots, Xx^n)$, o resultado segue. ■

**Proposição 1.8.2.** *Um campo vetorial $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$ é* suave *se e somente se a função $Xf : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ for suave sempre que $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$.*

*Demonstração.* Segue de um cálculo usando cartas locais e o lema prévio. ■

Escreveremos $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ para denotar o conjunto de todos os campos vetoriais suaves sobre $\mathcal{M}$. Em $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, definimos as operações

$$\begin{aligned} (X+Y)(p) &:= X_p + Y_p \\ (fX)(p) &:= f(p)X_p \quad \forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Verifica-se sem dificuldade que estas operações estão bem definidas o que faz de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ munido destas operações um $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$-módulo. Por exemplo, mostremos que a soma está bem definida. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, claro que $X+Y$ é um campo vetorial sobre $\mathcal{M}$, pois, para todo $p \in \mathcal{M}$, temos $X_p, Y_p \in T_p\mathcal{M}$ o que implica que $(X+Y)(p) = X_p + Y_p \in T_p\mathcal{M}$. Quanto a suavidade de $X+Y$, é fácil checar que

$$(X+Y)f = Xf + Yf, \forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}).$$

Como o segundo membro é uma soma de funções suaves de $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ que é uma $\mathbb{R}$-álgebra, segue-se que $(X+Y)f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}), \forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$, ou seja $X + Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, como afirmado. Além disso, naturalmente $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ também pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Deixamos a justificativa para o leitor como um exercício.

**Exemplo 1.8.3.** Qualquer vetor tangente de $\mathcal{M}$ em $p$, visto como uma aplicação constante de $M$ em $T\mathcal{M}$, é um campo vetorial suave sobre $\mathcal{M}$.

Dada um aberto U em $\mathcal{M}$, como U é uma subvariedade aberta de $\mathcal{M}$, podemos olhar para os campos vetoriais sobre U. Dizemos que um campo vetorial

$$X : \mathrm{U} \longrightarrow T\mathrm{U}$$

sobre U é um *campo vetorial local* em $\mathcal{M}$. Ademais, se $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{U})$, então dizemos que $X$ é um *campo vetorial suave local* em $\mathcal{M}$.

**Observação 1.8.4.** Dado um campo local suave $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{U})$, uma vez que $\forall p \in \mathrm{U}$ temos uma identificação canônica $T_p\mathrm{U} \cong T_p\mathcal{M}$ pensaremos em $X$ como aplicação suave de U em $T\mathcal{M}$.

**Proposição 1.8.5.** *Sejam* $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *um aberto não-vazio e* $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{U})$. *Então, existem um aberto* $\mathrm{V} \subseteq \mathcal{M}$ *com* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$ *e um campo vetorial suave* $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *tais que*

$$\widetilde{X}\mid_{\mathrm{V}} = X\mid_{\mathrm{V}}.$$

*Demonstração.* A demostração é inteiramente análoga à prova da proposição 1.2.22. ■

**Definição 1.8.3.** *Sejam* $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *uma aplicação suave,* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. *Dizemos que* $X$ *e* $Y$ *são* $F$-relacionados *(notação* $X \sim_F Y$*) se*

$$dF_p(X_p) = Y_{F(p)}, \forall p \in \mathcal{M}.$$

**Proposição 1.8.6.** *Sejam* $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *um difeomorfismo e* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. *Então, existe um único* $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ *tal que*

$$X \sim_F Y.$$

*Demonstração.* Segue de imediato do fato que para um difeomorfismo $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, $dF_p : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$ é um difeomorfismo, $\forall p \in \mathcal{M}$. ■

**Definição 1.8.4.** *Seja* $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ *um difeomorfismo. Denote o único* $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ *que é* $F$*-relacionado com* $X$ *por* $F_*X$. *Dizemos que* $F_*X$ *é o* pushforward *de* $X$ *por* $F$.

**Proposição 1.8.7.** *Sejam $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ e $G : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$ difeomorfismos. Então,*

*i)* $(F \circ G)_* X = F_* G_* X, \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

*ii)* $(\mathrm{id}_{\mathcal{M}})_* X = X$.

*Demonstração.* Segue de imediato da definição e regra da cadeia. ∎

Note que se $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo, então

$$F_* : X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \mapsto F_* X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$$

é um isomorfismo linear.

**Definição 1.8.5.** *Uma* curva integral *de $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ é uma curva suave $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$ satisfazendo a igualdade*

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}, \forall t \in I.$$

*Se $0 \in I$ e $\alpha(0) = p \in \mathcal{M}$; dizemos que $\alpha$ é uma* curva integral de $X$ passando *por $p \in \mathcal{M}$.*

**Definição 1.8.6.** *Uma curva integral é* maximal *se seu domínio não pode ser estendido a um intervalo aberto maior.*

**Proposição 1.8.8.** *$\forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M}$, existe uma única curva integral maximal*

$$\alpha_p : I_p \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$$

*de $X$ passando por $p$.*

*Demonstração.* Consultar o teorema 14.7 da referência [7]. ∎

**Observação 1.8.9.** Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade suave. Seu fibrado tangente $T\mathcal{M}$ é dito ser *trivial* se existem $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tais que, $\forall p \in \mathcal{M}$,

$$\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$$

é uma base de $T_p\mathcal{M}$.

Por exemplo o fibrado tangente de $\mathbb{S}^1$ é trivial (ver figura 1.7), mas o de $\mathbb{S}^2$ não.

# 2 GRUPOS E ÁLGEBRAS DE LIE

## 2.1 GRUPOS DE LIE

**Definição 2.1.1.** *Um* grupo de Lie *é uma variedade suave $\mathcal{G}$ equipada com uma estrutura de grupo de modo que a operação binária de $\mathcal{G}$*

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (a, b) \mapsto ab \in \mathcal{G}$$

*e a aplicação de inversão*

$$\mathrm{Inv} : \mathcal{G} \ni a \mapsto a^{-1} \in \mathcal{G}$$

*sejam ambas aplicações suaves. Dizemos que $k := \dim \mathcal{G}$ é a dimensão do grupo de Lie $\mathcal{G}$.*

**Exemplo 2.1.1.** $\mathbb{R}^n$ munido de sua operação de soma usual é um grupo de Lie abeliano.

**Exemplo 2.1.2.** Segue-se do exemplo 1.2.5 que o grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ das matrizes $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ invertíveis é um exemplo de um grupo de Lie de dimensão $n^2$.

**Exemplo 2.1.3.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{K} \backslash \{0\}$ é um grupo de Lie abeliano por multiplicação.

**Lema 2.1.4.** *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie. Seja $\mathcal{H}$ uma subvariedade de $\mathcal{G}$. Se $\mathcal{H}$ é um subgrupo de $\mathcal{G}$, então $\mathcal{H}$ é um grupo de Lie.*

*Demonstração.* Segue-se por definição que

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (g, h) \mapsto gh \in \mathcal{G}$$

é suave. Restringindo o domínio dessa aplicação para a subvariedade $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ e o codomínio para a subvariedade $\mathcal{H}$ ganhamos uma aplicação suave

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (g, h) \mapsto gh \in \mathcal{H}.$$

O caso para da inversão é análogo. ■

**Exemplo 2.1.5.** Vimos no exemplo 1.6.9 que $\mathrm{O}(p, q)$ é uma subvariedade de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$. Afirmamos que $\mathrm{O}(p, q)$ é um grupo de Lie. O leitor pode facilmente checar que $\mathrm{O}(p, q)$ é um grupo (subgrupo de $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$).

Restringindo o domínio da aplicação suave

$$\mathbb{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{GL}(n,\mathbb{R}) \ni (A,B) \mapsto AB^{-1} \in \mathbb{GL}(n,\mathbb{R})$$

a subvariedade $\mathrm{O}(p,q)\times\mathrm{O}(p,q)$ a restrição ainda continua suave. Como a imagem dessa restrição precisamente $\mathrm{O}(p,q)$. Restringindo o co-domínio a subvariedade $\mathrm{O}(p,q)$ ainda continuamos com uma aplicação suave. Logo, o resultado segue.

**Exemplo 2.1.6.** Fazendo $q = 0$ no exemplo anterior, obtém-se o grupo das matrizes ortogonais $\mathrm{O}(n)$. Logo, $\mathrm{O}(n)$ é um grupo de Lie.

**Exemplo 2.1.7.** Note que $A \in \mathrm{O}(p,q) \implies \det A = \pm 1$. Considere

$$\mathrm{SO}(p,q) := \{A \in \mathrm{O}(p,q) : \det A = 1\}.$$

Verifica-se sem dificuldade que $\mathrm{SO}(p,q)$ é um subgrupo aberto de Lie $\mathrm{O}(p,q)$. Em particular,

$$\dim \mathrm{SO}(p,q) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Exemplo 2.1.8.** O *grupo ortogonal especial* é o grupo de Lie definido por

$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{SO}(n,0) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}.$$

**Exemplo 2.1.9.** Seja $n \geq 1$. *O grupo unitário das matrizes $n \times n$ com entradas complexas* é o grupo por multiplicação definido por

$$U(n) := \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : A^\dagger A = I_n\},$$

onde $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ denota o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas complexas, e dada $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $A^\dagger$ denota a *conjugação Hermitiana*, i.e., conjugação complexas das entradas seguida por transposição da matriz.

**Exemplo 2.1.10.** Em particular, quando $n = 1$, identificaremos as matrizes $1 \times 1$ de entrada complexa com o conjunto dos números complexos, e nesse caso

$$U(1) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong \mathbb{S}^1$$

é chamado *grupo circular*.

**Exemplo 2.1.11.** Seja $G$ um grupo enumerável munido da topologia discreta. Então, $G$ é um grupo de Lie de dimensão 0.

**Definição 2.2.1.** *Uma* derivação *num anel* $\mathcal{A}$ *é uma aplicação* $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *que satisfaz :* $\forall a, b, \quad D(ab) = (D(a))b + a(D(b))$, *chamada a regra de Leibniz. O conjunto de todas as derivações em* $\mathcal{A}$ *será denotado por* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. *No caso em que* $\mathcal{A}$ *for uma álgebra comutativa sobre um corpo* $\mathbb{K}$, *com a mesma notação,* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *denotará o conjunto das derivações* $\mathbb{K}$*-lineares em* $\mathcal{A}$.

**Lema 2.2.1.** *Seja* $\mathcal{A}$ *um anel comutativo. Então,* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *munido das operações :*

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(a) &:= D_1(a) + D_2(b) & \forall D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}), \forall a \in \mathcal{A} \\ (cD)(a) &:= cD(a) & \forall D \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}), \forall c \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

*é um* $\mathcal{A}$*-módulo.*

*Demonstração.* Começamos por mostrar que tais operações estão bem definidas. Sejam, $D, D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ e $a, b, c \in \mathcal{A}$. Temos

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(ab) &= D_1(ab) + D_2(ab) \\ &= (bD_1(a) + bD_1(b)) + (bD_2(a) + bD_2(b)) \\ &= b(D_1(a) + D_2(a)) + a(D_1(b) + D_2(b)) \\ &= b(D_1 + D_2)(a) + a(D_1 + D_2)(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (cD)(ab) &= (cD)(ab) \\ &= c(D(ab)) \\ &= c(bD(a) + aD(b)) \\ &= c(bD(a) + c(aD(b)) \\ &= (cb)D(a) + (ca)D(b) \\ &= (bc)D(a) + (ac)D(b) \\ &= b(cD(a)) + a(cD(b)) \\ &= b(cD)(a) + a(cD)(b) \end{aligned}$$

o que mostra que a soma e a multiplicação por escalar sobre $\mathrm{Der}(A)$ estão bem definidas. Como estas operações foram definidas ponto a ponto, verifica-se facilmente que estas operações satisfazem os axiomas de um módulo sobre o anel, e o resultado segue. ∎

Segue-se que como um corolário do lema prévio que $\mathrm{C}^{\infty}(\mathcal{M})$ é um $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$-módulo e nesse caso particular, $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ também pode ser visto naturalmente como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dados $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ e $a, b \in \mathcal{A}$ , temos

$$\begin{aligned}(D_1 \circ D_2)(ab) &= D_1(D_2(ab)) \\ &= D_1(bD_2(a) + aD_2(b)) \\ &= D_1(bD_2(a)) + D_1(aD_2(b)) \\ &= D_2(a)D_1(b) + b(D_1 \circ D_2)(a) + D_2(b)D_1(a) + a(D_1 \circ D_2)(b).\end{aligned}$$

Como $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ são arbitrários , permutando os índices, obtemos

$$\begin{aligned}(D_2 \circ D_1)(ab) &= D_1(a)D_2(b) + b(D_2 \circ D_1)(a) + D_1(b)D_2(a) + a(D_2 \circ D_1)(b) \\ &= D_2(a)D_1(b) + b(D_2 \circ D_1)(a) + D_2(b)D_1(a) + a(D_2 \circ D_1)(b).\end{aligned}$$

Denotando $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$, segue-se que

$$\begin{aligned}[D_1, D_2](ab) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(ab) \\ &= (D_1 \circ D_2)(ab) - (D_2 \circ D_1)(ab) \\ &= b(D_1 \circ D_2)(a) - (D_2 \circ D_1)(a) + a(D_1 \circ D_2)(b) - (D_2 \circ D_1)(b) \\ &= b[D_1, D_2](a) + a[D_1, D_2](b)\end{aligned}$$

Assim, a correspondência $(D_1, D_2) \mapsto [D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ define um produto em $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ (não associativo) que satisfaz as seguintes propriedades ($\forall D, D_1, D_2, D_3 \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ ):

(i) $[,]$ é bi-linear

(ii) $[D, D] = 0$

(iii) $[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0$

(iv) $[,]$ é anti-simétrico (ou anti-comutativo),i.e., $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$.

Salve o item (iii), chamada *identidade de Jacobi*, os demais itens são trivialmente verificados e além disso (ii) e (iv) são equivalentes. Mostremos que vale (iii)

Como

$$\begin{aligned}[D_1, [D_2, D_3]] &= D_1 \circ [D_2, D_3] - [D_2, D_3] \circ D_1 \\ &= D_1 \circ (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) - (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) \circ D_1 \\ &= D_1 \circ D_2 \circ D_3 - D_1 \circ D_3 \circ D_2 - D_2 \circ D_3 \circ D_1 + D_3 \circ D_2 \circ D_1.\end{aligned}$$

Permutando 3 com 1, obtemos

$$\begin{aligned}[D_3,[D_1,D_2]] &= -[D_3,[D_2,D_1]] \\ &= -D_3\circ D_2\circ D_1 + D_3\circ D_1\circ D_2 - D_2\circ D_1\circ D_3 - D_1\circ D_2\circ D_3.\end{aligned}$$

E permutando 2 com 3 , obtemos

$$\begin{aligned}[D_2,[D_1,D_3]] &= -[D_2,[D_3,D_2]] \\ &= D_2\circ D_3\circ D_1 - D_2\circ D_1\circ D_3 + D_3\circ D_1\circ D_2 + D_1\circ D_3\circ D_2.\end{aligned}$$

Daí, segue-se que

$$[D_1,[D_2,D_3]] + [D_3,[D_1,D_2]] + [D_2,[D_1,D_3]] = 0_{\mathrm{Der}(\mathcal{A})} = 0$$

que é o item (iii). O espaço vetorial $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ sobre $\mathbb{K}$ com a operação $[,]$, chamada *colchete de Lie*, que satisfaz $(i)-(iv)$ é um exemplo particular de uma nova estrutura algébrica chamada *álgebra de Lie*.

Vale ter em mente que tudo que fizemos acima se estende naturalmente à $\mathbb{K}$-álgebra

$$\mathscr{L}(\mathcal{A}) := \{T:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A} : T \text{ é } \mathbb{K}\text{-linear}\} \supseteq \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

por composição $(T,H)\mapsto T\circ H$ e também a qualquer $\mathbb{K}$-álgebra. Pois, a propriedade "regra de Leibniz" foi apenas utilizada para estabelecer que $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ é fechado pelo colchete acima.

**Definição 2.2.2.** *Uma* álgebra de Lie *é um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *munido de um produto* $\mathbb{K}$*-bilinear* $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ *antissimétrico, chamado* colchete de Lie*, satisfazendo a* identidade de Jacobi*:*

$$\forall x,y,z\in\mathfrak{g}, [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0.$$

Doravante $\mathbb{K}$ será principalmente o corpo dos reais.

**Exemplo 2.2.2.** Qualquer espaço vetorial $\mathbb{E}$ com o colchete de Lie $[x,y] := 0_{\mathbb{E}}$ trivial é uma álgebra de Lie, dita ser *abeliana*.

**Exemplo 2.2.3.** Seja $\mathcal{A}$ qualquer $\mathbb{K}$-álgebra. Então, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Lie com o colchete de Lie dado por $[x,y] := xy - yx$.

**Definição 2.2.3.** *Um homomorfismo* $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ *entre álgebras de Lie (sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$*) é uma aplicação* $\mathbb{K}$*-linear que preserva:*

$$\varphi([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(x),\varphi(y)]_{\mathfrak{h}}, \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

**Observação 2.2.4.** Dado um homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ entre álgebras de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$ que em particular é um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear, então $\varphi^{-1} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é também um *homomorfismo* entre álgebras de Lie. Com efeito, $\varphi^{-1}$ é uma transformação $\mathbb{K}$-linear e além disso, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{h}$, temos

$$\begin{aligned} [x,y]_{\mathfrak{h}} &= [\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(\varphi^{-1}(y))]_{\mathfrak{h}} \\ &= \varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]_{\mathfrak{g}}), \end{aligned}$$

o que implica que $\varphi^{-1}([x,y]_{\mathfrak{h}}) = [\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]_{\mathfrak{h}}$, como afirmado.

**Lema 2.2.5.** *Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{h}$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um isomorfismo $\mathbb{K}$-linear, então $\mathfrak{h}$ admite um único colchete de Lie tal que $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie.*

*Demonstração.* Defina $(x,y) \in \mathfrak{h}\times\mathfrak{h} \mapsto [x,y]_{\mathfrak{h}} := \varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h}$. Uma vez estabelecido que $[,]_{\mathfrak{h}}$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{h}$, temos de imediato que $\varphi^{-1}$ é um homomorfismo entre álgebra de Lie e portanto pela observação 2.2.4 $\varphi$ também o é. Quanto à unicidade, se $[[,]]_{\mathfrak{h}}$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{h}$ tal que $\varphi$ é um homomorfismo entre álgebras de Lie, então pela observação 2.2.4 $\varphi^{-1}$ também o é, e assim temos, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} [[x,y]]_{\mathfrak{h}} &= \varphi(\varphi^{-1}([[x,y]]_{\mathfrak{h}})) \\ &= \varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]_{\mathfrak{g}}) \\ &= [x,y]_{\mathfrak{h}}, \end{aligned}$$

como afirmado. Resta checar que $[x,y]_{\mathfrak{h}}$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{h}$. Para ver que $[,]_{\mathfrak{h}}$ é bi-linear, note que fixando arbitrariamente $x$ em $\mathfrak{h}$, a aplicação $[\varphi^{-1}(x), (\cdot)]_{\mathfrak{g}} : y \in \mathfrak{g} \mapsto [\varphi^{-1}(x), y]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g}$ é $\mathbb{K}$-linear (pela bi-$\mathbb{K}$-linearidade do colchete de Lie). Compondo $\varphi^{-1}$ seguido respectivamente de $[\varphi^{-1}(x), (\cdot)]_{\mathfrak{g}}$ e $\varphi$ obtemos uma aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$y \in \mathfrak{h} \mapsto \varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)]_{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{h}$$

que é precisamente a aplicação $[x, (\cdot)]_{\mathfrak{h}} : y \in \mathfrak{h} \mapsto [x,y]_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}$. Analogamente mostra-se a $\mathbb{K}$-linearidade de $[(\cdot), x]_{\mathfrak{h}}$ . Além disso, $(\forall x \in \mathfrak{h}), [x,x]_{\mathfrak{h}} = \varphi([\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x)]_{\mathfrak{g}}) = \varphi(0_{\mathfrak{g}}) = 0_{\mathfrak{h}}$. E finalmente, para qualquer $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{h}$, escrevendo $y_i = \varphi^{-1}(x_i) \quad (1 \leq i \leq 3)$, vale

$$\begin{aligned}
[x_1, [x_2, x_3]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} &= [x_1, \varphi([\varphi^{-1}x_2, \varphi^{-1}(x_3)]_{\mathfrak{g}})]_{\mathfrak{h}} \\
&= \varphi([\varphi^{-1}(x_1), [\varphi^{-1}(x_2), \varphi^{-1}(x_3)]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}) \\
&= \varphi([y_1, [y_2, y_3]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}).
\end{aligned}$$

Analogamente, fazendo uma permutação nos índices e usando o fato de $[,]_{\mathfrak{h}}$ ser $\mathbb{K}$-bi-linear, anti-simétrico obtêm-se

$$\begin{aligned}
[[x_2, x_3]_{\mathfrak{h}}, x_1]_{\mathfrak{h}} &= \varphi([[y_2, y_3]_{\mathfrak{g}}, y_1]_{\mathfrak{g}}) \\
[x_3, [x_1, x_2]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} &= \varphi([y_3, [y_1, y_2]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}).
\end{aligned}$$

Pondo $a = [y_1, [y_2, y_3]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}, b = [[y_2, y_3]_{\mathfrak{g}}, y_1]_{\mathfrak{g}}$ e $c = [y_3, [y_1, y_2]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}$, pela identidade de Jacobi, temos

$$a + b + c = 0_{\mathfrak{g}},$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
[x_1, [x_2, x_3]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} + [[x_2, x_3]_{\mathfrak{h}}, x_1]_{\mathfrak{h}} + [x_3, [x_1, x_2]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}} &= \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) \\
&= \varphi(a + b + c) \\
&= \varphi(0_{\mathfrak{g}}) \\
&= 0_{\mathfrak{h}},
\end{aligned}$$

que é a identidade de Jacobi. ■

**Teorema 2.2.6.** $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$ *(isomorfismo como* $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$*-módulos)*

*Demonstração.* Para cada campo vetorial suave $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$, considere a aplicação $D(X) : \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ dada por $D(X)(f)(p) := X_p([f])$. Afirmamos que $D(X) \in \mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$. De fato, dados $f, g \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $p \in \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned}
D(X)(f + \lambda g)(p) &= X_p([f + \lambda g]) \\
&= X_p([f] + \lambda[g]) \\
&= X_p([f]) + \lambda X_p([g]) \\
&= D(X)(f)(p) + \lambda D(X)(g)(p) \\
&= (D(X)(f) + \lambda D(X)(g))(p),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
D(X)(fg)(p) &= X_p([fg]) \\
&= X_p([f])g(p) + f(p)X_p([g]) \\
&= D(X)(f)(p)g(p) + f(p)D(X)(g)(p) \\
&= ((D(X)(f))g)(p) + (fD(X)(g))(p) \\
&= ((D(X)(f))g + fD(X)(g))(p).
\end{aligned}$$

Como $p$ é arbitrário, segue-se destas igualdades a afirmação. Assim, a correspondência $X \mapsto D(X)$ define uma aplicação $D(\cdot) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$. Afirmamos que $D(\cdot)$ é um isomorfismo entre $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$-módulos (e portanto também um isomorfismo $\mathbb{R}$-linear). Com efeito, primeiro mostremos que $D(\cdot)$ é um homomorfismo entre $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$-módulos. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $f, g \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$. Então ,

$$\begin{aligned}
D(\cdot)(X + fY)(g)(p) &= D(X + fY)(g)(p) \\
&= (X_p + fY_p)[g] \\
&= X_p([g]) + f(p)Y_p([g]) \\
&= D(X)(g)(p) + f(p)D(Y)(g)(p) \\
&= D(X)(g)(p) + (fD(Y)(g))(p) \\
&= (D(X)(g) + fD(Y)(g)))(p) \\
&= (D(X) + fD(Y))(g)(p) \\
&= (D(\cdot)(X) + f(D(\cdot))(Y))(g)(p),
\end{aligned}$$

o que implica que $D(\cdot)(X + fY) = D(\cdot)(X) + f(D(\cdot)(Y))$, como afirmado. Resta mostrar que $D(\cdot)$ é uma sobrejeção com núcleo trivial. Tome qualquer $D \in \mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$ e considere $X : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ dado por $X(p)([f]) = (p, D(\widehat{f})(p))$ com $\widehat{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ qualquer extensão suave de $f$. Verifica-se sem dificuldade a boa definição de $X$ e que $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Sejam $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ e $p \in \mathcal{M}$ quaisquer. Então

$$\begin{aligned}
D(\cdot)(X)(f)(p) &= D(X)(f)(p) \\
&= X_p([f]) \qquad (\text{ pela definição de } D(X)) \\
&= D(\widehat{f})(p) \qquad (\text{ pela definição de } X\ ) \\
&= D(f)(p) \qquad (\text{ pois } f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))
\end{aligned}$$

estabelece a sobrejetividade de $D(\cdot)$. Para terminar, note que se $X \in$

$\mathrm{Ker}(D(\cdot))$, então

$$0 = D(\cdot)(X)(f)(p) = D(X)(f)(p) = X_p([f]), \forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M},$$

donde

$$X_p([f]) = X_p(\widehat{[f]}) = 0, \forall [f] \in \mathbb{F}_p, \forall p \in \mathcal{M}$$

o que mostra que $v$ é o vetor nulo de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$, ou seja $\mathrm{Ker}(D(\cdot))$ é trivial como afirmado. ■

Como um corolário da prova do teorema prévio, podemos usar o isomorfismo acima para dar ao $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ uma estrutura de álgebra de Lie isomorfa a $\mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$.

**Corolário 2.2.7.** *Seja* $[,]$ *o único colchete de Lie em* $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *que faz de* $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *uma álgebra de Lie isomorfa a* $\mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}))$*. Então,*$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), \forall f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$*:*

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

*Demonstração.* Segue-se de imediato dos resultados prévios. Deixamos a demostração para o leitor como um exercício. ■

O próximo lema mostra que em geral o colchete de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ não é bilinear com respeito às funções suaves de $\mathcal{M}$.

**Lema 2.2.8.** *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *e* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$*. Então*

$$[fX, fY] = f(Xf)Y - f(Yf)X + f^2[X, Y].$$

*Demonstração.* Basta computar $[fX, fY](g)(p)$ e usar a regra de Leibniz duas vezes. ■

**Teorema 2.2.9.** *Seja* $F : M^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ *uma aplicação suave. Dados* $X, \overline{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ *e* $Y, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$*. Se*

$$X \sim_F Y \text{ e } \overline{X} \sim_F \overline{Y},$$

*então*

$$[X, \overline{X}] \sim_F [Y, \overline{Y}].$$

*Demonstração.* Vide lema 1.22 da referência [6]. ■

## 2.3 A ÁLGEBRA DE LIE DE UM GRUPO DE LIE

Nesta seção mostraremos que todo grupo de Lie possui uma álgebra de Lie naturalmente associada.

**Definição 2.3.1.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ um campo suave sobre o grupo de lie $\mathcal{G}$. Dizemos que $X$ é* invariante à esquerda *se $X \equiv (L_g)_*X$ sempre que $g \in \mathcal{G}$, onde $L_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ denota a translação à esquerda $L_g : h \in \mathcal{G} \mapsto gh \in \mathcal{G}$. E em termos mais explícitos vale*

$$X_{gh} \equiv (dL_g)_h(X_h), \forall h \in \mathcal{G}.$$

Denotaremos a coleção dos campos vetoriais suaves $X : \mathcal{G} \longrightarrow T\mathcal{G}$ invariantes à esquerda por $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$. Verifica-se sem dificuldade que $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$.

**Lema 2.3.1.** $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ *é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$.*

*Demonstração.* Sejam $X, Y$ campos suaves invariantes à esquerda. Segue-se que

$$X \sim_{L_g} X$$

e

$$Y \sim_{L_g} Y.$$

Logo,

$$[X, Y] \sim_{L_g} [X, Y]$$

pelo teorema 2.2.9 e o resultado segue. ■

O próximo resultado assegura que este espaço dos campos invariantes à esquerda tem dimensão finita, a saber a mesma dimensão do espaço tangente $T_e\mathcal{G}$.

**Lema 2.3.2.** $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ *e $T_e\mathcal{G}$ são canonicamente isomorfos.*

*Demonstração.* Defina $\Gamma : \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \longrightarrow T_e\mathcal{G}$ pondo

$$\Gamma(X) = X_e, \forall X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G}).$$

É fácil ver que $\Gamma$ é linear. Afirmamos que $\Gamma$ é um isomorfismo. De fato, suponha que $\Gamma(X) = X_e = 0$. Como $X$ é invariante à esquerda, então $X_g = X_{ge} = (dL_g)_e(X_e) = 0, \forall g \in \mathcal{G}$ o que implica que $X = 0_{\mathfrak{X}(\mathcal{G})}$ e portanto $\Gamma$ é injetora. Para ver que $\Gamma$ é sobrejetora, dado $v \in T_e\mathcal{G}$, defina $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$, pondo

$$X_g := (dL_g)_e(v), \forall g \in \mathcal{G}.$$

Note que $X$ é invariante à esquerda, pois, $\forall h \in \mathcal{G}$,

$$X_{gh} = (dL_{gh})_e(v) = (d(L_g \circ L_h)_e)(v) = (dL_g)_h((dL_h)_e(v)) = (dL_g)_h(X_h).$$

Por construção,

$$\Gamma(X) = X_e := (dL_e)_e(v) = id_{T_e\mathcal{G}}(v) = v,$$

donde $\Gamma$ é sobrejetora e o resultado segue. ■

Identificando $T_e\mathcal{G}$ com Lie($\mathcal{G}$) via o isomorfismo prévio, podemos munir $T_e\mathcal{G}$ de um colchete de Lie. Essa é conhecida como a *álgebra de Lie do grupo de Lie* $\mathcal{G}$ .

**Proposição 2.3.3.** *O fibrado tangente de qualquer grupo de Lie* $\mathcal{G}$ *é trivial (ver observação 1.8.7).*

*Demonstração.* De fato, dada uma base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ para $T_e\mathcal{G}$, o conjunto $\{X_1, \ldots, X_k\} \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ de campos vetoriais invariantes à esquerda tal que $X_i(e) = v_i, i = 1, \ldots, k$ é um *referencial global*, i.e,

$$\{X_1(g), \ldots, X_k(g)\}$$

é uma base para $T_g\mathcal{G}$, $\forall g \in \mathcal{G}$. ■

# 3 DISTRIBUIÇÕES

## 3.1 DISTRIBUIÇÕES

**Definição 3.1.1.** *Uma* distribuição de dimensão $k$ sobre $\mathcal{M}$ *(ou* $k$-distribuição *sobre* $\mathcal{M}$*) é um subconjunto* $D \subseteq T\mathcal{M}$ *que se exprime como uma união disjunta*

$$D = \coprod_{p \in \mathcal{M}} D_p$$

*de subespaços* $D_p \subseteq T_p\mathcal{M}$ *de dimensão* $k$*.*

**Definição 3.1.2.** *Sejam* $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *aberto não-vazio e* $D$ *uma* $k$*-distribuição sobre* $\mathcal{M}$*. Uma* seção local *de* $D$ *em* $\mathrm{U}$ *é um campo vetorial suave* $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{U})$ *tal que* $X_q \in D_q, \forall q \in U$*. Denotaremos o conjunto das seções locais de* $D$ *em* $\mathrm{U}$ *por* $\mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$*. Se* $\mathrm{U} = \mathcal{M}$*, dizemos que* $X$ *é uma* seção global *de* $D$ *e nesse caso denotaremos* $\mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$ *por* $\mathfrak{X}(D)$*.*

Temos a seguinte noção de suavidade para as distribuições sobre as variedades suaves:

**Definição 3.1.3.** *Dizemos que uma distribuição* $D$ *sobre* $\mathcal{M}$ *de dimensão* $k$ *é* suave *quando cada ponto* $p \in \mathcal{M}$ *admitir* $k$*-seções locais* $X^1, \ldots, X^k \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$ *de* $D$ *definidas num aberto* $p \in \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *tais que, para todo* $q \in \mathrm{U}$*, o conjunto* $\{X^1_q, \ldots, X^k_q\}$ *é uma base para o subespaço* $D_q$*.*

**Exemplo 3.1.1.** Suponha que exista $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ com

$$X_p \neq 0_{T_p\mathcal{M}}, \forall p \in \mathcal{M}.$$

Então, podemos definir uma 1-distribuição suave $D \subseteq T\mathcal{M}$, pondo

$$D_p := \mathbb{R}X, \forall p \in \mathcal{M}.$$

**Exemplo 3.1.2.** Uma generalização do exemplo prévio é dada da seguinte forma. Suponha que existem $X^j \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ para $1 \leq j \leq k$ tais que $\{X^1, \ldots, X^k\}$ é linearmente independente, $\forall p \in \mathcal{M}$. Defina $D \subseteq T\mathcal{M}$ pondo

$$D_p := \mathrm{Span}\{X^1_p, \ldots, X^k_p\}, \forall p \in \mathcal{M}.$$

Segue-se que $D$ é uma distribuição suave sobre $\mathcal{M}$ de dimensão $k$.

**Definição 3.1.4.** *Seja $D \subseteq T\mathcal{M}$ uma $k$-distribuição suave sobre $\mathcal{M}$. Dizemos que $D$ é*

1. involutiva*, se* $\forall \mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ *aberto não-vazio,* $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D) \implies [X, Y] \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$.

2. integrável*, se para cada* $p \in \mathcal{M}$ *existir uma subvariedade imersa* $\mathcal{S}_p$ *de* $\mathcal{M}$ *de dimensão* $k$ *tal que* $T_q\mathcal{S}_p = D_q, \forall q \in \mathcal{S}_p$.

   *Nesse caso, cada* $\mathcal{S}_p$ *é dita ser uma* subvariedade integral *de* $D$.

3. totalmente integrável*, se para cada ponto* $p \in \mathcal{M}$ *existir uma carta local* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *em* $p$ *tal que* $\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ *é um cubo (aberto) e*

   $$\mathrm{Span}\{\partial_1^{\varphi}\mid_q, \ldots \partial_k^{\varphi}\mid_q\} = D_q, \forall q \in \mathrm{U}.$$

   *Uma tal carta é dita ser* planar. *para* $D$.

**Exemplo 3.1.3.** Toda distribuição suave de dimensão 1 é involutiva e integrável.

Vejamos um exemplo de uma distribuição não involutiva:

**Exemplo 3.1.4.** Considere $\mathcal{M} := \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo-}z\}$ (subvariedade aberta do $\mathbb{R}^3$). Podemos definir uma 2-distribuição $D \subseteq T\mathcal{M}$, pondo, para cada $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{M}$,

$$D_p := \{a\partial_x\mid_p + b\partial_y\mid_p + c\partial_z\mid_p : -c\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - y_0 a + x_0 b = 0\}.$$

Onde $\partial_x\mid_p$ denota o primeiro vetor coordenado em $p$ com respeito à carta global

$$i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3;$$

idem para $\partial_y\mid_p$ e $\partial_z\mid_p$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ dados por

$$X_q := -y\partial_x\mid_q + x\partial_y\mid_q + \sqrt{x^2 + y^2}\partial_z\mid_q, \forall q = (x, y, z) \in \mathcal{M}$$

e

$$Y_q := x\partial_x\mid_q + y\partial_y\mid_q, \forall q = (x, y, z) \in \mathcal{M}.$$

Verifica-se sem dificuldade que $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$. Como $X, Y$ são L.I., segue-se que $D$ é uma distribuição suave. Entretanto, $D$ não é involutiva. Para esse fim, mostraremos que $[X, Y] \notin \mathfrak{X}(D)$. Uma conta simples mostra que:

$$[X,Y] = (x-y)\partial_x + \frac{-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_z.$$

Daí, por inspeção tem-se que

$$[X,Y]_p \notin D_p, p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{M},$$

pois

$$-\left(\frac{-x_0^2-y_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)\sqrt{x_0^2+y_0^2} - y_0(x_0-y_0) = x_0^2+y_0^2 - y_0(x_0-y_0) > 0.$$

**Lema 3.1.5.** *Sejam $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{N}^n$ uma imersão suave e $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$ tal que*

$$Y_{F(p)} \in dF_p(T_p\mathcal{M}), \forall p \in \mathcal{M}.$$

*Então, existe um único $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ tal que $\overline{Y} \sim_F Y$.*

*Demonstração.* Fixe $p$. Como $dF_p$ é injetora, então existe um único $\overline{Y}_p \in T_p\mathcal{M}$ tal que $dF_p(\overline{Y}_p) = Y_{F(p)}$. Definindo $\overline{Y} : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$ de forma óbvia e usando um par cartas locais adaptadas à imersão $F$, verificamos que $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. ■

Temos às seguintes implicações com respeito às distribuições suaves.

**Proposição 3.1.6.** *(i) Totalmente integrável $\Longrightarrow$ (ii) integrável $\Longrightarrow$ (iii) involutiva.*

*Demonstração.* Mostremos que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Fixe $p \in \mathcal{M}$ arbitrariamente e mostremos que existe uma subvariedade integral $\mathcal{S}_p$ de $\mathcal{M}$. Para esse fim, seja $(\mathrm{U}, \varphi)$ a carta local em $\mathcal{M}$ em torno de $p$ tal que

$$\mathrm{span}\{\partial_1^\varphi\mid_q, \ldots, \partial_k^\varphi\mid_q\} = D_q, \forall q \in \mathrm{U}.$$

Defina

$$\mathcal{S}_p := \{q \in \mathrm{U} : x^i(q) = x^i(p), \forall k+1 \leq i \leq n\}.$$

Como $\varphi : \mathrm{U} \longrightarrow \varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, segue-se que $\mathcal{S}_p$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}$ de dimensão $k$. Ademais, note que

$$\partial_1^\varphi\mid_q, \ldots, \partial_k^\varphi\mid_q \in T_q\mathcal{S}_p, \forall q \in \mathcal{S}_p.$$

Com efeito, sejam $1 \leq i \leq k$, $q \in \mathrm{U}$ e $\epsilon > 0$ de modo que

$$\varphi(q) + te_i \in \varphi(\mathcal{S}_p), \forall t \in I_\epsilon := (-\epsilon, \epsilon)$$

e defina

$$\alpha_i : I_\epsilon \longrightarrow \mathcal{S}_p$$

pondo

$$\alpha_i(t) := \varphi^{-1}(\varphi(q) + te_i), \forall t \in I_\epsilon.$$

Note que $\alpha_i$ é uma curva suave em $\mathcal{S}_p$. Logo,

$$\alpha_i'(0) \in T_{\alpha_i(0)}\mathcal{S}_p = T_q\mathcal{S}_p.$$

Verifica-se sem dificuldade que

$$\alpha_i'(0) = \partial_i^\varphi \mid_q$$

e o resultado segue por dimensionalidade. Mostremos que $ii) \implies iii)$. Sejam $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ aberto não-vazio e $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$. Afirmamos que $[X,Y] \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$. Fixe $p \in \mathrm{U}$ e seja $\mathcal{S}_p \subseteq \mathcal{M}$ a subvariedade integral de $D$ correspondente. Ora,

$$i : \mathcal{S}_p \hookrightarrow \mathcal{M}$$

é uma imersão suave injetora. Logo,

$$X_{i(q)}, Y_{i(q)} \in di_q(T_q\mathcal{S}_p) = D_{i(q)}, \forall q \in \mathcal{S}_p.$$

Pelo lema 3.1.5, existem $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}_p \cap \mathrm{U})$ tais que $\overline{X} \sim_i X$ e $\overline{Y} \sim_i Y$. Logo, pelo lema 2.2.9 , tem-se que

$$[\overline{X}, \overline{Y}] \sim_i [X, Y].$$

Ou seja,

$$di_q([\overline{X}, \overline{Y}]) = [X, Y]_q, \forall q \in \mathcal{S}_p \cap \mathrm{U}.$$

Daí,

$$[X, Y]_q \in T_q\mathcal{S}_p = D_q, \forall q \in \mathcal{S}_p \cap \mathrm{U}.$$

Em particular,

$$[X, Y]_p \in D_p.$$

Como $p$ é arbitrário, o resultado segue. ■

**Proposição 3.1.7.** *Seja $D$ uma $k$-distribuição suave sobre $\mathcal{M}$. São equivalentes:*

*i) $D$ é involutiva.*

*ii) $\mathfrak{X}(D)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.*

*Demonstração.* $i) \implies ii)$ é imediata. Para ver que $ii) \implies i)$, tome um aberto $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{M}$ não-vazio e considerem $X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$. Fixe $p \in \mathrm{U}$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M})$ e uma função bump suportada em U com $f(p) = 1$. Sejam $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ campos vetoriais suaves que coincidem respectivamente com $X$ e $Y$ numa vizinhança contida em U, definidos pondo

$$\widetilde{X}_q = f(q) X_q$$

para $q \in \mathrm{U}$ e

$$\widetilde{X}_q = 0_{T_q\mathcal{M}}$$

para $q \notin \operatorname{supp}(f)$, e analogamente para $\widetilde{Y}$. Note que por construção $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(D)$. Por hipótese,

$$\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(D) \implies [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \in \mathfrak{X}(D).$$

Por outro lado

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \mid_{\mathrm{U}} = [\widetilde{X} \mid_{\mathrm{U}}, \widetilde{Y} \mid_{\mathrm{U}}] = [fX, fY],$$

e assim,

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \mid_{\mathrm{U}} = f(Xf)Y - f(Yf)X + f^2[X, Y],$$

donde, em particular, valorando ambos os lados em $p$, temos que

$$D_p \ni [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_p = \underbrace{(X_p f) Y_p}_{\in D_p} - \underbrace{(Y_p f) X_p}_{\in D_p} + [X, Y]_p,$$

e portanto $[X, Y]_p \in D_p$. Como $p$ é arbitrário, concluímos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}_{\mathrm{U}}(D)$, como desejado. ■

O próximo resultado, conhecido como *teorema de Frobenius*, nos garante que as implicações da proposição 3.1.6 são a rigor equivalências.

**Teorema 3.1.8** (de Frobenius)**.** *Seja $D \subseteq T\mathcal{M}$ uma distribuição suave sobre $\mathcal{M}$. São equivalentes:*

*i) $D$ é totalmente integrável.*

*ii) $D$ é involutiva.*

*Demonstração.* Consultar o teorema 19.12 da referência [4]. ■

**Definição 3.1.5.** *Se* $(\mathrm{U}, \varphi) = (\mathrm{U}, x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots, y_m)$ *é planar para a k-distribuição D, uma k-*fatia *é um subconjunto de* U *da forma*

$$y_1 = c_1, \ldots, y_m = c_m$$

*com* $c_i$ *constantes.*

**Proposição 3.1.9** (Estrutura local das variedades integrais)**.** *Sejam* $D$ *uma* $k$*-distribuição sobre* $\mathcal{M}$ *e* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *uma carta local em* $\mathcal{M}$ *planar para* $D$*. Se* $\mathcal{S}$ *é qualquer subvariedade integral de* $D$*, então* $\mathcal{S}$ *intersecta* U *numa união enumerável disjunta de abertos* $\mathrm{U}_i$ *em* $\mathcal{S}$ *e mergulhados em* $\mathcal{M}$*, onde cada* $U_i$ *é subconjunto de uma* $k$*-fatia de* U*.*

*Demonstração.* Consultar a proposição 19.16 da referência [4]. ■

**Observação 3.1.10.** Conclusão: Se $(\mathrm{U}, \varphi) = (\mathrm{U}, x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_k)$ é planar para $D$, e $\mathcal{S}$ for qualquer subvariedade integral de $D$, então $\mathcal{S}$ intersecta U no máximo numa reunião *enumerável* de $k$-fatias.

# 4 VARIEDADES QUOCIENTES

## 4.1 QUOCIENTES DE VARIEDADES VIA AÇÕES DE GRUPOS

**Definição 4.1.1.** *Sejam* $(G, \cdot)$ *um grupo e* $A$ *um conjunto não-vazio. Uma* ação *de* $G$ *sobre* $A$ *é uma aplicação* $\theta : A \times G \longrightarrow A, (a, g) \mapsto \theta_g(a)$ *satisfazendo as seguintes propriedades*[1]*:*

*i)* $\theta_{h \cdot g}(a) = \theta_g(\theta_h(a)), \forall g, h \in G, \forall a \in A$

*ii)* $\theta_e(a) = a, \forall a \in A, \forall g \in \mathcal{G}.$

*Dizemos que* $G$ age *sobre* $A$*.*

**Observação 4.1.1.** Estritamente falando, o que definimos acima é uma *ação à direita*. Uma *ação à esquerda* é definida de forma semelhante. Ademais, se $\theta : G \times A \longrightarrow A$ é uma ação à esquerda de $G$ sobre $A$, podemos ganhar uma ação à direita $\theta_r^{op} : A \times G \longrightarrow A$ pondo

$$\theta_r^{op}(a) := \theta_{g^{-1}}(a), \forall a \in A, \forall g \in G,$$

e vice-versa. Portanto, toda assertiva com respeito as ações à esquerda também valerá *mutatis mutandi* para as ações à direita e vice-versa, de modo que podemos nos fixar em apenas uma delas. Para nossa exposição será conveniente trabalharmos com as ações à direita.

**Exemplo 4.1.2.** Todo grupo $G$ age em si próprio por translação à direita e conjugação.

**Exemplo 4.1.3.** A *ação trivial* de $G$ em $A$ é a ação que fixa todos elementos de $A$: $ag = a, \forall a \in A$.

**Definição 4.1.2.** *Seja* $\theta$ *uma ação de um grupo* $G$ *sobre um conjunto* $A$*. Defina a seguinte relação de equivalência* $\sim$ *em* $A$*:*

$$\forall a, b \in A, a \sim b \iff \exists g \in G : a = bg.$$

*Definimos a* órbita *de* $a \in A$*, denotada por* $aG$*, pondo*

$$aG = \{ag : g \in G\}.$$

[1] Aqui '$\cdot$' denota a operação binária do grupo $G$. Denotaremos, mais adiante, a ação de $g$ em $a$ pela justaposição $ag$.

*O conjunto quociente por $\sim$, denotado por* $A/_{G}$*, é chamado* conjunto das órbitas *de $A$.*

**Exemplo 4.1.4.** Seja $\theta$ a ação do grupo $G$ sobre o conjunto $A$ que fixa todos elementos de $A$. A órbita de cada elemento $a$ correspondente à $G$-ação é o conjunto unitário $\{a\}$ e o conjunto das orbitas de $A$ nesse caso é a "cópia" de $A$:

$$\{\{a\} : a \in A\}.$$

Em particular, se $A = \mathcal{M}$ for uma variedade suave, então $\mathcal{M}/_{G}$ também o é. Nesse caso, $\mathcal{M}/_{G}$ é uma cópia difeomorfa de $\mathcal{M}$.

**Definição 4.1.3.** *Seja $\theta$ uma ação de um grupo $G$ sobre $A$. Dizemos que $\theta$ é* livre *se*

$$\forall a \in A, ag = a \implies g = e.$$

**Definição 4.1.4.** *Seja $\theta$ uma ação de um grupo topológico $G$ sobre um espaço topológico $M$. Dizemos que $\theta$ é* contínua *se $\theta$ o for no sentido usual. Nesse caso, dizemos que $G$ age de forma contínua sobre $M$.*

**Definição 4.1.5.** *Seja $\theta$ uma ação de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ sobre uma variedade suave $\mathcal{M}$. Dizemos que $\theta$ é* suave *se $\theta$ o for no sentido usual.*

**Exemplo 4.1.5.** Sejam $\mathcal{G} = \mathbb{R}^k$ e $\mathcal{M} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Defina $\theta$ como a ação de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}$ que translada as $k$-primeiras coordenadas, ou seja,

$$(x, y)v := \theta((x, y), v) := (x + v, y), \forall x, v \in \mathbb{R}^k, \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

$\theta$ é um exemplo de uma ação suave e livre. Cada orbita de $\mathcal{M}$ é uma variedade afim paralela ao $\mathbb{R}^k$ e o leitor pode checar sem dificuldades que que o conjunto das orbitas $\mathcal{M}/_{\mathcal{G}} \cong \mathbb{R}^m$ admite uma estrutura natural de variedade suave difeomorfa do $\mathbb{R}^m$. Ademais, a projeção canônica

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é uma submersão suave.

**Observação 4.1.6.** Se $\mathcal{G}$ age continuamente em $\mathcal{M}$, adotaremos sempre em $\mathcal{M}/_{\mathcal{G}}$ a topologia quociente, de modo que a projeção canônica

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/_{\mathcal{G}}$$

é sempre contínua.

**Lema 4.1.7.** *Considere um grupo topológico $G$ agindo sobre um espaço topológico $M$ de forma contínua, então a a projeção canônica*

$$\pi : M \longrightarrow {}^{M}\!/_{G}$$

*é uma aplicação aberta.*

*Demonstração.* Tome um $B$ aberto em $M$ e mostremos que $\pi(B)$ é aberto em ${}^{M}\!/_{G}$. Para esse fim, devemos mostrar que $V := \pi^{-1}(\pi(B))$ é aberto em $M$. Para cada $g \in G$ defina a aplicação $\alpha_g : M \longrightarrow M$ pondo $\alpha_g(p) := pg, \forall p \in M$. Note que cada $\alpha_g$ é um homeomorfismo e portanto uma aplicação aberta. Afirmamos que

$$V = \bigcup_{g \in G} \alpha_g(B)$$

e portanto o resultado segue. De fato, verifica-se sem dificuldade que $V$ coincide com o conjunto

$$\bigcup_{b \in B} bG.$$

Ora, mas cada $bG = \bigcup_{g \in G}\{bg\}$ donde comutando a ordem da união e usando que

$$\bigcup_{b \in B}\{bg\} = \{bg : b \in B\} = \bigcup_{g \in G} \alpha_g(B)$$

segue-se a igualdade. ■

**Definição 4.1.6.** *Seja $\theta$ uma ação de um grupo topológico sobre um espaço topológico $M$. Dizemos que $\theta$ é* própria *se a aplicação*

$$\Theta : M \times G \ni (p, g) \mapsto (p, pg) \in M \times M$$

*o for, i.e., $\Theta^{-1}(K)$ é compacto sempre que $K \subseteq M \times M$ o for.*

**Exemplo 4.1.8.** Note que toda ação contínua de um grupo topológico compacto $G$ sobre um espaço topológico Hausdorff $M$ é própria. Com efeito, se $K \subseteq M \times M$ é compacto, $K$ é fechado e $\Theta^{-1}(K) \subseteq \pi_1(K) \times G$, onde $\pi_1 : M \times M \longrightarrow M$ é a projeção na primeira coordenada.

Vejamos uma caracterização importante das ações próprias.

**Proposição 4.1.9.** *Seja $\theta$ uma ação contínua de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ sobre uma variedade $\mathcal{M}$. São equivalentes:*

*a) $\theta$ é própria.*

*b) Se $(p_i)$ e $(g_i)$ são sequências em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, de modo que $(p_i)$ e $(p_i g_i)$ convergem, então $(g_i)$ admite uma subsequência convergente.*

*c) O conjunto*

$$\mathcal{G}_K := \{g \in \mathcal{G} : Kg \cap K \neq \varnothing\}$$

*é compacto sempre que $K \subseteq \mathcal{M}$ o for.*

*Demonstração.* Consultar a proposição 21.5 referência [4]. ■

**Proposição 4.1.10.** *Seja $\theta$ uma ação contínua e própria de um grupo topológico $G$ sobre $\mathcal{M}$. Então, o espaço das órbitas $\mathcal{M}/G$ é Hausdorff.*

*Demonstração.* Consultar a proposição 21.4 da referência [4]. ■

Seja $\theta$ $\mathcal{G}$-ação suave sobre $\mathcal{M}$. A cada campo vetorial suave $X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ invariante à esquerda podemos associar um campo vetorial suave $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ completo[2] definido da seguinte forma:

Seja uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$ de $X$ com $\gamma(0) = e$. Para cada $p \in \mathcal{M}$, definimos

$$\widehat{X}_p := \gamma_p'(0).$$

Onde $\gamma_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ é a curva suave em $\mathcal{M}$ dada por

$$\gamma_p(t) = p\gamma(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Note que $\gamma_p$ é uma curva integral maximal de $\widehat{X}$ com $\gamma_p(0) = p$.

**Teorema 4.1.11.** *Seja $\theta$ uma $\mathcal{G}$-ação à direita suave e livre sobre $\mathcal{M}$. Então,*

$$\widehat{\theta} : X \in \mathrm{Lie}\mathcal{G} \mapsto \widehat{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$$

*é um homomorfismo injetor de álgebras de Lie.*

*Demonstração.* Dado $X \in \mathrm{Lie}\mathcal{G}$. O leitor pode verificar sem dificuldade que

$$\widehat{X}_p = d\Theta^{(p)}(X_e).$$

Daí fica fácil ver que $\widehat{\theta}$ é uma aplicação linear injetora. O restante é um resultado importante da teoria geral de grupos de Lie, ver a discussão ao redor do teorema 2.15 de [4]. ■

[2]É possível mostrar que cada campo vetorial $X \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ é completo, i.e., cada curva integral maximal de $X$ está definida em todo $\mathbb{R}$. Para mais detalhes, consultar a referência [4].

**Definição 4.1.7.** *Seja $\theta$ uma ação de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}^n$. Dizemos que uma carta local*

$$(\mathrm{U}, \varphi) = (\mathrm{U}, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)$$

*em $\mathcal{M}$ é* adaptada *à $\mathcal{G}$-ação $\theta$ se $\varphi(\mathrm{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cubo (aberto) e cada órbita $p\mathcal{G}$ intersecta* U *em no máximo uma $k$-fatia da forma*

$$y_1 = c_1, \cdots, y_m = c_m.$$

**Observação 4.1.12.** Seja $\theta$ uma $\mathcal{G}$-ação suave e livre sobre $\mathcal{M}$. Se $k := \dim\mathcal{G}$, podemos definir uma $k$-distribuição integrável sobre $\mathcal{M}$ pondo

$$D_p := T_p(p\mathcal{G}), \forall p \in \mathcal{M}.$$

Com efeito, para ver que $D$ é suave, fixe uma base $\{X^1, \ldots, X^k\}$ para Lie$\mathcal{G}$; o lema 4.1.11 nos diz que $\widehat{X^1}, \ldots, \widehat{X^k}$ são linearmente independentes. Ademais, verifica-se sem dificuldade que $\widehat{X^1}, \ldots, \widehat{X^k}$ são seções globais de $D$, donde $D$ é suave. Segue-se de imediato da definição de $D$ que cada órbita $p\mathcal{G}$ é uma subvariedade integral de $D$. Portanto $D$ é integrável, e esse argumento de fato estabelece, via teorema de Frobenius, que cada órbita é uma subvariedade imersa de $\mathcal{M}$ difeomorfa a $\mathcal{G}$.

**Proposição 4.1.13.** *Seja $\theta$ uma ação suave, livre e própria de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}$. Então, cada ponto $p$ em $\mathcal{M}$ admite uma carta local* $(\mathrm{U}, \varphi)$ *adaptada à $\mathcal{G}$-ação $\theta$.*

*Demonstração.* Segue-se da observação 4.1.12 que a $k$-distribuição $D$ dada por

$$D_p := T_p(p\mathcal{G}), \forall p \in \mathcal{M}$$

é integrável e portanto totalmente integrável pelo teorema 3.1.8. Fixado arbitrariamente $p \in \mathcal{M}$, tome uma carta local

$$(\mathrm{U}, \varphi) = (\mathrm{U}, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$$

em $\mathcal{M}$ planar para $D$ centrada em $p$. Pela observação 3.1.10, segue-se que cada $\mathcal{G}$-órbita intersecta U no máximo numa reunião enumerável de $k$-fatias da forma

$$y_1 = c_1, \ldots, y_m = c_m.$$

Devemos mostrar que existe um subconjunto aberto $\mathrm{U}_0 \subseteq \mathrm{U}$ cúbico centrado em $p$ com a propriedade de intersectar cada $\mathcal{G}$-orbita em no máximo uma $k$-fatia como acima.

Suponhamos, por contradição, que não exista tal $\mathrm{U}_0$. Para cada inteiro positivo $i$, considere as seguintes subvariedades de $\mathcal{M}$:

$$U_i := \varphi^{-1}(C_i)$$

e

$$Y_i := \varphi^{-1}(I_i)$$

em que $C_i$ denota o cubo aberto centrado na origem em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ de raio $\frac{1}{i}$ e $I_i := \mathbb{R}^k \cap C_i$ (Recomendamos que o leitor esboce o desenho da situação descrita acima para fixar as ideias). Como cada $k$-fatia de $\mathrm{U}_i$ intersecta $Y_i$ em um único ponto, segue-se da nossa hipótese que existem dois pontos distintos $p_i, p_i' \in Y_i$ numa mesma $\mathcal{G}$-órbita, ou seja

$$p_i g_i = p_i'$$

para algum $g_i$ em $\mathcal{G}$. Por construção, é fácil ver que ambas as sequências $(p_i)$ e $(p_i' = p_i g_i)$ convergem para $p$. Passando para uma subsequência se necessário, pela proposição 4.1.9, podemos concluir que $(g_i)$ converge para algum $g$ em $\mathcal{G}$. Logo, $(p_i, g_i)$ converge para $(p, g)$ e portanto por continuidade de $\theta$, obtemos passando ao limite

$$p = \theta(p, g) = pg$$

e como $\theta$ é livre segue-se que $g = e$. Considere a subvariedade $Y := \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m)$ de $\mathcal{M}$ e escreva

$$\theta^Y : Y \times \mathcal{G} \longrightarrow M$$

para designar a restrição da ação $\theta$ a $Y \times G$. Observe que $Y \times \mathcal{G}$ e $\mathcal{M}$ possuem a mesma dimensão $m + k = n$. A seguir usaremos o teorema da função inversa para finalizar a prova. Note que a restrição de $\theta^Y$ para $Y \times \{e\}$ é a inclusão

$$i : Y \hookrightarrow \mathcal{M}$$

enquanto a restrição de $\theta^Y$ a $\{p\} \times \mathcal{G}$ é a aplicação órbita

$$\Theta^{(p)} : g \in \mathcal{G} \mapsto pg\mathcal{M}$$

que são ambos mergulhos[3] e

$$T_p\mathcal{M} \cong T_p(pG) \oplus T_pY,$$

induzido por $\Theta^Y$. Segue-se que

$$d\theta^Y_{(p,e)} = (di_p, d\Theta^{(p)}_e)$$

é um isomorfismo. Assim, pelo teorema 1.4.10 da função inversa, existe um aberto $W \subseteq Y \times G$ em torno de $(p,e)$ tal que a restrição de $\theta^Y$ a $W$ é um difeomorfismo sobre sua imagem e em particular injetiva. Por outro lado, para $i$ grande o suficiente, temos que $(p_i, g_i), (p_i, e) \in W$ e

$$p'_i = \theta^Y(p_i, g_i) = \theta^Y(p'_i, e)$$

que é uma contradição. Portanto, cada ponto $p$ em $\mathcal{M}$ admite uma carta adaptada à $\mathcal{G}$-ação como afirmado. ■

Chegamos finalmente àquele que é o principal teorema deste trabalho.

**Teorema 4.1.14.** *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Lie agindo de forma suave, livre e própria sobre $\mathcal{M}$. Então, o espaço das orbitas ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ é uma variedade topológica de dimensão $n-k$, onde $k$ denota a dimensão de $\mathcal{G}$ e $n$ a dimensão de $\mathcal{M}$; ademais ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ admite uma única estrutura de variedade suave satisfazendo a propriedade da projeção canônica*

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow {}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$$

*ser uma submersão suave.*

*Demonstração.* Começamos por estabelecer a unicidade. Suponha que o espaço das órbitas ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ seja uma variedade topológica de dimensão $n-k$ e sejam $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ atlas suaves de dimensões $n-k$ tais que

$$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_i$$

é uma submersão para $i = 1, 2$, onde $\mathcal{M}_i := ({}^{M}\!/_{G}, \mathscr{A}_i), i = 1, 2$. Note que para que essas estruturas coincidam, i.e., $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ é suficiente mostrar que a aplicação identidade

$$\mathrm{id} : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

[3]Como a ação é própria, essa aplicação, que em geral é somente uma imersão, é também própria, e portanto um mergulho: ver a Proposição 4.22 de [4].

é um difeomorfismo entre variedades. Invocando o teorema 1.5.8 com $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1$, $\mathcal{P} = \mathcal{M}_2$ e $f = \mathrm{id} : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ segue-se que id é suave. Pelo mesmo argumento na direção oposta, prova-se que

$$\mathrm{id} : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1$$

é suave. Ou seja, id é um difeomorfismo como afirmado. Agora provemos que sob as hipóteses do teorema, ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ é uma variedade topológica de dimensão $n-k$. Pela proposição 4.1.10,

$${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$$

é Hausdorff. Para finalizar a parte topológica, mostremos que ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ admite uma base enumerável. Para esse fim, fixando uma base enumerável $\{B_i\}$ para $\mathcal{M}$, verifica-se sem dificuldade que $\{\pi(B_i)\}$ é uma base enumerável para ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$. Agora vamos usar a proposição 4.1.13 para construir um atlas suave de dimensão $n-k$ para ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$. Fixemos arbitrariamente um ponto $q = \pi(p) \in {}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ e seja $(\mathrm{U}, \varphi)$ uma carta local em $\mathcal{M}$ adaptada à $\mathcal{G}$-ação centrada em $p$ com $\varphi(\mathrm{U}) := \mathrm{U}' \times \mathrm{U}''$, onde $\mathrm{U}', \mathrm{U}''$ são cubos abertos (centrados na origem) no $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Pelo lema 4.1.7, $V := \pi(\mathrm{U}) \subseteq {}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ é aberto. Considere a subvariedade $Y := \varphi^{-1}(0_{\mathbb{R}^k} \times \mathbb{R}^m)$ de $\mathcal{M}$. Escrevendo,

$$\varphi = (x, y) = (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^m),$$

note que

$$Y = \{x^1 = \ldots = x^k = 0\}.$$

Pela definição de carta adaptada é fácil ver que $\pi : Y \longrightarrow V$ é uma bijeção. Afirmamos que $\pi : Y \longrightarrow V$ é um homeomorfismo. De fato, se $W$ é um aberto em $Y$, então,

$$\varphi(W) = \{0_{\mathbb{R}^k}\} \times \widetilde{W}$$

com $\widetilde{W}$ aberto em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$O = \{p \in \mathrm{U} : \varphi(p) = (x, y), y \in \widetilde{W}\}.$$

Então,

$$\pi(W) = \pi(O),$$

que é aberto em ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$. Logo, $\pi$ restrita a $Y$ é uma aplicação aberta e logo um homeomorfismo sobre $V$ como afirmado. Defina

$$\varphi'' := \pi'' \circ \varphi \circ \sigma,$$

onde $\pi'' : \mathrm{U}' \times U'' \longrightarrow \mathrm{U}'' \subseteq \mathbb{R}^m$ é a projeção no segundo fator, e

$$\sigma := (\pi\mid_{\mathrm{Y}})^{-1} : V \longrightarrow Y.$$

Chamaremos $\sigma$ de *seção local associada à carta adaptada.* Ora, $\sigma$ é um homeomorfismo sobre $Y$, e

$$\pi'' \circ \varphi : Y \longrightarrow U''$$

também é um homeomorfismo. Segue-se que

$$\varphi'' = \pi'' \circ \varphi \circ \sigma$$

é um homeomorfismo o que mostra que ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ é um espaço localmente Euclideano de dimensão $m$ e portanto uma variedade topológica de dimensão $m$. Seja $\mathscr{A}$ o atlas $m$-dimensional para ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{G}}$ formado pelas cartas

$$(\pi(\mathrm{U}), \varphi''),$$

onde $(\mathrm{U}, \varphi)$ é uma carta local em $\mathcal{M}$ adaptada à $\mathcal{G}$-ação. Vamos mostrar que $\mathscr{A}$ é suave. Sejam $(\pi(\mathrm{U}), \widetilde{\varphi})$ e $(\pi(\mathrm{V}), \widetilde{\psi})$ em $\mathscr{A}$. Suponhamos que $\pi(\mathrm{U}) \cap \pi(\mathrm{V})$ é não-vazio. Primeiro, consideramos o caso em que ambas cartas $(\mathrm{U}, \varphi)$ e $(\mathrm{V}, \psi)$ estejam centradas num mesmo ponto $p \in \mathcal{M}$. Escreva $\varphi = (x, y)$ e $\psi = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$. O fato que as coordenadas são adaptadas à $\mathcal{G}$-ação significa que dois pontos com mesma $y$-coordenada estão em uma mesma órbita e portanto também têm a mesma $\widetilde{y}$-órbita. Segue-se que a aplicação de transição entres essas cartas podem ser escrita como

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x, y) = (A(x, y), B(y)),$$

onde $A$ e $B$ são aplicações suave definidas numa vizinhança da origem. Portanto,

$$(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}) \equiv B$$

que é suave. Analogamente, mostra-se que $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1}$ é suave. Para o caso geral, podemos supor que as cartas $\varphi$ e $\psi$ estejam centradas respectivamente em $p$ e $q$. Note que para algum $g \in \mathcal{G}$ tem-se que $q = pg$. Como $\theta_g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ é um difeomorfismo levando órbitas em órbitas, segue-se que $\eta := \psi \circ \theta_g$ é outra carta adaptada a $\mathcal{G}$-ação e centrada em $p$. Ademais, $\sigma' := \theta_g^{-1} \circ \sigma$ é uma seção local associada à carta adaptada $\psi$, e portanto $\widetilde{\eta} = \pi'' \circ \eta \circ \sigma' = \pi'' \circ \psi \circ \theta_g \circ \theta_g^{-1} \circ \widetilde{\sigma} = \pi'' \circ \psi \circ \widetilde{\sigma} = \widetilde{\psi}$. Assim, voltamos à situação anterior e o resultado segue. ■

Apresentamos, inicialmente, exemplos de uma variedade quociente obtida pela ação de um grupo de Lie discreto. Vejamos, por exemplo, outra forma equivalente de definir o $n$-toro

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \mathbb{S}^1 (n - \text{vezes})$$

como uma variedade quociente obtida obtida pela ação do grupo de Lie discreto $\mathbb{Z}^n$ sobre o $\mathbb{R}^n$ por translação.

**Exemplo 4.1.15.** Seja $\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma ação por translação. Claro que essa ação é suave e livre. Para ver que $\theta$ é própria, se $(x_n)$ e $(j_n)$ são sequências em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Z}^n$ respectivamente tais que

$$x_n \to x$$

e

$$x_n + j_n \to y$$

então

$$j_n \to y - x$$

e portanto $\theta$ é própria pela proposição 4.1.9. Assim, existe uma única estrutura suave que torna ${}^{\mathbb{R}^n}\!/_{\mathbb{Z}^n}$ uma variedade suave $n$-dimensional. Afirmamos que ${}^{\mathbb{R}^n}\!/_{\mathbb{Z}^n}$ é difeomorfo ao $n$-toro $\mathbb{T}^n$. De fato, identificando os elementos de $\mathbb{S}^1$ como números complexos unitários $e^{2\pi i t}, t \in \mathbb{R}$, defina

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n.$$

Pondo

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) := (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n}),$$

verifica-se sem dificuldade que $\Phi$ é suave e também um morfismo sobrejetor de grupos com *kernel* $\mathbb{Z}^n$. Assim, podemos concluir que em termos de estrutura de grupo, ${}^{\mathbb{R}^n}\!/_{\mathbb{Z}^n}$ e $\mathbb{T}^n$ são indistinguíveis. Considere

$$\widetilde{\Phi} : {}^{\mathbb{R}^n}\!/_{\mathbb{Z}^n} \longrightarrow \mathbb{T}^n$$

dada por

$$\widetilde{\Phi}(x + \mathbb{Z}^n) := \Phi(x).$$

Verifica-se sem dificuldade que essa aplicação é um difeomorfismo.

**Exemplo 4.1.16.** Considere o grupo de Lie $\mathcal{G} := \{\pm 1\}$ agindo por multiplicação sobre $\mathbb{S}^n$. Essa ação essencialmente identifica os pontos antipodais da $n$-esfera. É fácil checar que essa ação é suave, livre e própria uma vez que o grupo é compacto. Logo, existe uma única estrutura suave que torna

$$\mathbb{S}^n \diagup \mathcal{G}$$

uma variedade suave $n$-dimensional. Essa variedade suave é difeomorfa ao espaço projetivo real $n$-dimensional $\mathbb{RP}^n$ com a definição que demos no primeiro capítulo.

Passemos a exemplos mais sofisticados, envolvendo grupos de Lie de dimensão $> 0$.

**Exemplo 4.1.17** (Fibração de Hopf)**.** Começamos identificando

$$\mathbb{S}^3 \cong \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

e

$$\mathbb{S}^2 \cong \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + x^2 = 1\},$$

onde, dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$|z| := x^2 + y^2.$$

A *fibração de Hopf* é a aplicação

$$\Phi_{\text{Hopf}} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

dada por

$$\Phi_{\text{Hopf}}(z_1, z_2) := (2z_1 z_2^*, |z_2|^2 - |z_1|^2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

onde, dado $z := x + iy \in \mathbb{C}$,

$$z^* := x - iy$$

é a *conjugação complexa* de $z$. Seja $\theta$ a ação do grupo de Lie circular $U(1)$ sobre $\mathbb{S}^3$ dada por

$$\theta((z_1, z_2), e^{it}) := (e^{it} z_1, e^{it} z_2), \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Claramente $\theta$ é uma ação suave e livre e como $U(1)$ é compacto, $\theta$

também é própria. Logo,

$$\mathbb{S}^3 \big/ U(1)$$

é uma variedade suave de dimensão 2 e a projeção canônica

$$\pi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \big/ U(1)$$

é uma submersão suave que faz o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathrm{Hopf}}"'] & \mathbb{S}^3 \big/ U(1) \arrow[d, "\overline{\Phi}_{\mathrm{Hopf}}"] \\ & \mathbb{S}^2 \end{tikzcd}$$

comutar, onde

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{Hopf}} : \mathbb{S}^3 \big/ U(1) \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

é uma aplicação induzida pela ação $\theta$. Pelo teorema 4.31 da referência [4], a aplicação $\overline{\Phi}_{\mathrm{Hopf}}$ é, em verdade, um difeomorfismo, ou seja o quociente é essencialmente a esfera $\mathbb{S}^2$.

Passamos a discutir algumas construções ainda mais elaboradas, que subentendem diversos exemplos particulares de variedades quocientes.

**Exemplo 4.1.18.** Suponha $\mathcal{G}$ age de forma suave, livre e própria sobre $\mathcal{M}$ e de forma suave sobre $\mathcal{N}$ (não necessariamente livre ou própria). Então, a ação induzida de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$

$$((p, q), g) \in (\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \times \mathcal{G} \mapsto (pg, qg) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$$

é suave, livre e própria. É fácil ver que essa ação induzida é suave e livre. Para ver que ela é própria, tome sequências $(p_i, q_i) \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ convergindo para um certo $(p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ e $(g_i) \subseteq \mathcal{G}$ de modo que

$$(p_i, q_i)g_i \to (\widetilde{p}, \widetilde{q}) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}.$$

Logo,

$$p_i g_i \to \widetilde{p}$$

e como $\mathcal{G}$ age propriamente sobre $\mathcal{M}$ segue-se que $\mathcal{G}$ admite uma subsequência convergente e assim o resultado segue.

O exemplo prévio mostrar que $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) \big/ \mathcal{G}$ admite naturalmente uma estrutura de variedade suave. É exatamente assim que são construídos os *fibrados associados* na teoria de *fibrados principais.*

**Exemplo 4.1.19** (Classes Laterais)**.** Sejam $\mathcal{G}$ um grupo de Lie e $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ um subgrupo de Lie fechado. Seja $\theta$ a ação de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{G}$ por multiplicação:

$$\theta : (g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H} \mapsto gh \in \mathcal{G}.$$

Verifica-se sem dificuldade que $\theta$ é suave e livre. Usando o fato que o grupo é fechado, e a multiplicação e a inversão são aplicações suaves, pode-se verificar facilmente que $\theta$ também é própria. Portanto, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é uma variedade suave de dimensão $\dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{H}$ e

$$\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

é uma submersão suave.

**Exemplo 4.1.20** (Variedades homogêneas)**.** Seja $\theta : \mathcal{G} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ uma ação à esquerda de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}$. Dizemos que $\theta$ é *transitiva* se:

$$\forall p, q \in \mathcal{M}, \exists g \in \mathcal{G} : p = gq = \theta_g(q).$$

Fixe $p_0 \in \mathcal{M}$. Seja

$$\mathcal{H} := \{g \in \mathcal{G} : \theta_g(p_0) = gp_0 = p_0\}.$$

$\mathcal{H}$ é chamado *subgrupo estabilizador de* $p_0$. $\mathcal{H}$ é claramente um subgrupo fechado de $\mathcal{G}$. Pelo teorema 20.12 da referência [4], $\mathcal{H}$ é um subgrupo de Lie de $\mathcal{G}$. Considere ainda a aplicação

$$\chi : g \in \mathcal{G} \mapsto \theta_g(p_0) \in \mathcal{M}.$$

Note que $\forall h \in \mathcal{H}$,

$$\chi(gh) = \theta_{gh}(p_0) = \theta_g(\theta_h(p_0)) = \theta_g(p_0) = \chi(g),$$

$\forall g \in \mathcal{G}$. Logo, $\chi$ é constante nas órbitas da ação à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ descrita no exemplo prévio. Então, induz-se a aplicação suave

$$\overline{\chi} : \mathcal{G}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\chi"'] & \mathcal{G}/\mathcal{H} \arrow[d, "\overline{\chi}"] \\ & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

comuta. Pelo teorema 4.31 da referência [4], $\overline{\chi}$ é um difeomorfismo. Portanto, *toda variedade homogênea tem uma estrutura de quociente como a descrita no exemplo 4.1.19.*

## REFERÊNCIAS

[1] Borisovich, YU., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya., Fomenko, T., *Introduction to Topology*, Mir Publishers, Moscow (1985).

[2] Camacho, C., E Lins Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*, IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[3] Lages Lima, E., *Análise Real, v.2*, IMPA, Rio de Janeiro (2006).

[4] Lee, J.M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Second Edition, New York (2003).

[5] Lee, J.M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, Second Edition, New York (2011).

[6] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York (1983).

[7] Tu, L. W., *An Introduction to Manifolds*, Springer, Second Edition, New York (2003).