

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE ENGENHARIA DE TRANSPORTES E LOGÍSTICA

RENAN EDUARDO LORENZI

APLICAÇÃO DE UM MODELO DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM  
RESTRICÇÕES DE CAPACIDADE E JANELAS DE TEMPO

Joinville  
2019

RENAN EDUARDO LORENZI

APLICAÇÃO DE UM MODELO DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM  
RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE E JANELAS DE TEMPO

Trabalho apresentado como requisito para obtenção do título de bacharel no Curso de Graduação em Engenharia de Transportes e Logística do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientadora: Dra. Silvia Lopes de Sena Tagliarenha.

Joinville  
2019

RENAN EDUARDO LORENZI

APLICAÇÃO DE UM MODELO DE ROTEIRIZAÇÃO DE VEÍCULOS COM  
RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE E JANELAS DE TEMPO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do título de bacharel em Engenharia de Transportes e Logística na Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Joinville (SC), 25 de novembro de 2019.

**Banca Examinadora:**

---

Dra. Silvia Lopes de Sena Tagliapietra  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Dr. Romulo Alberto Castillo Cardenas  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Dr. Helry Luvillany Fontenele Dias  
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho a minha preciosa família e a todos os professores e colegas da UFSC de Joinville.

## RESUMO

Diante dos avanços tecnológicos e da rapidez com o qual as informações chegam aos clientes, o transporte como barreira física continua apresentando um dos maiores custos no processo produtivo e um dos maiores tempos dispendidos entre a produção e a entrega ao cliente. As empresas precisam investir muito em conhecimento logístico e de transporte para avançar em mercados cada vez mais competitivos. Ferramentas de otimização em transporte vem sendo utilizadas e tem-se mostrado de eficiente resolução, com resultados satisfatórios. Este trabalho apresenta um estudo de caso de uma transportadora e uma distribuidora de mercadorias em que seus veículos realizam rotas de coleta e entrega de mercadorias definidas com janelas de tempo, com 18 e 22 clientes, respectivamente. Considera-se um modelo de programação matemática de roteirização de veículos com janelas de tempo e múltiplos viajantes, implementado em linguagem AMPL e OPL e resolvido pelos *solvers* Gurobi™ e IBM ILOG® CPLEX®. As análises comparativas dos resultados obtidos e do desempenho dos *softwares* considerados indicam que os modelos aplicados foram coerentes com a situação prática e evidenciam que, em relação ao tempo de viagem em rota e em relação à distância total percorrida nas rotas, com qualidade superior aos obtidos nas pesquisas originais, em especial ao caso da distribuidora que com 77% dos clientes visitados conseguiu uma economia de 50% na distância percorrida. No aspecto econômico, um menor número de rotas e veículos proporciona um nível de serviço mais favorável, gerando maior competitividade no mercado e maior previsibilidade para boas decisões estratégicas.

**Palavras-chave:** AMPL. OPL. Modelo exato. Programação Linear Inteira. Roteirização de Veículos com Janelas de Tempo.

## ABSTRACT

As a result of technological advances and the speed with which information reaches customers, transportation as a physical barrier continues to present one of the highest costs in production process and one of the highest time costs between production and costumers delivery. Companies needs high investments in logistics and transportation knowledge to advance in competitive markets. Transport optimization tools have been used and have been shown to be efficient in resolution with satisfactory results. This paper presents a case study of a carrier and a freight distribution company, wich in which their vehicles perform defined time window collection and delivery in routes, with 18 and 22 customers, respectively. It is considered a mathematical programming model of vehicle routing with time windows and multiple travelers, implemented in AMPL and OPL language and solved with Gurobi <sup>TM</sup> and IBM ILOG® CPLEX® solvers. Comparative result analyzes obtained and software performance considered indicate that applied models were consistent with the practical situation and show that, in relation to travel time in route and total distance on routes, with better than those obtained. in the original surveys, especially in the case of the distributor who, with 77% of the customers visited, achieved a 50% saving in the distance traveled. Economically, fewer routes and vehicles provide a more efficient level of service, leading to greater market competitiveness and increasing predictability for good strategic decisions.

Keywords: AMPL. OPL. Exact model. Integer Linear Programming. Routing Vehicles with Time Windows.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da metodologia.....	11
Figura 2 - Grafo de um PCV .....	21
Figura 3 - Modelo matemático do PCV em AMPL no Gurobi™ .....	28
Figura 4 - Dados genéricos para o PCV em AMPL no Gurobi™ .....	28
Figura 5 - Modelo matemático do PCV em OPL no IBM ILOG® CPLEX® .....	29
Figura 6 - Dados genéricos para o PCV em OPL no IBM ILOG® CPLEX® .....	29
Figura 7 - Modelo matemático do PRVJTMV no Gurobi™ .....	31
Figura 8 - Modelo matemático do PRVJTMV no IBM ILOG® CPLEX® .....	32
Figura 9 - Dados do problema de LAZZARI (2018) em Gurobi™ .....	33
Figura 10 - Dados do problema de LAZZARI (2018) em IBM ILOG® CPLEX® .....	34
Figura 11 - Dados do problema de LIMA (2019) no Gurobi™ .....	35
Figura 12 - Dados do problema de LIMA (2019) no IBM ILOG® CPLEX® .....	36
Figura 13 - Trajeto nas rotas.....	40
Figura 14 - Rotas dos veículos 1, 2 e 5.....	41
Figura 15 - Rotas dos veículos 3 e 4.....	42
Figura 16 - Rotas dos veículos 1, 2, 4 e 5.....	47
Figura 17- Rotas dos veículos 3, 6 e 7.....	47

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Parâmetros para formulação do PRVJT.....	23
---	----

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Número de variáveis e restrições (Transportadora) .....	52
Gráfico 2 - Número de variáveis e restrições (Distribuidora) .....	52
Gráfico 3 - Tempo de processamento entre os <i>solvers</i> .....	53
Gráfico 4 - Número de interações no Gurobi™ .....	54
Gráfico 5 – Distâncias percorridas dos sequenciamentos de rotas da pesquisa de LIMA (2019) .....	55
Gráfico 6 - Comparação das distâncias no sequenciamento de rotas obtidas com a aplicação do modelo .....	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Veículo da frota .....	38
Tabela 2 – Informações dos pontos de coleta (clientes).....	39
Tabela 3 – Matriz distâncias.....	39
Tabela 4 – Matriz tempos de viagem.....	39
Tabela 5 – Rotas resultantes .....	39
Tabela 6 – Janela de horários, tempos de coleta e demanda dos clientes.....	40
Tabela 7 – Tipos de Veículos da frota da empresa.....	41
Tabela 8 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total.....	43
Tabela 9 – Distância percorrida por veículo.....	43
Tabela 10 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total.....	44
Tabela 11 – Capacidade dos veículos.....	45
Tabela 12 – Janelas de tempo, duração de atendimento e demanda dos clientes.....	46
Tabela 13 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total.....	48
Tabela 14 – Capacidade utilizada de cada veículo .....	48
Tabela 15 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total.....	49

## LISTA DE SIGLAS

ABComm - Associação Brasileira de Comércio Eletrônico.

AMPL – *A Mathematical Programming Language*.

AMPL IDE – *A Mathematical Programming Language Integrated Development Environment*.

CF – Custo Fixo.

CV – Custo Variável.

NP – *Nondeterministic polynomial time*.

OPL – *Optimization Programming Language*

PCV – Problema do Caixeiro Viajante.

PL – Programação linear.

PLI – Programação linear inteira.

PNL – Programação não linear.

PRV – Problema de Roteirização de Veículos.

PRVC – Problema de Roteirização de Veículos Capacitados.

PRVJT – Problema de Roteirização de Veículos com Janelas de Tempo.

PRVJTMV – Problema de Roteirização de Veículos com Janelas de Tempo e Múltiplos Viajantes.

PRVMV – Problema de Roteirização de Veículos com Múltiplos Viajantes.

VRP – *Vehicle Routing Problem*.

VRPTW – *Vehicle Routing Problem with Time Windows*.

VUC – Veículo Urbano de Carga.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
1.1 OBJETIVOS .....	10
<b>1.1.1 Objetivo geral</b> .....	<b>10</b>
<b>1.1.2 Objetivos específicos</b> .....	<b>10</b>
1.2 METODOLOGIA.....	11
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	<b>13</b>
2.1 A IMPORTÂNCIA DA LOGÍSTICA E DO TRANSPORTE.....	13
2.2 CARACTERÍSTICAS DO TRANSPORTE RODOVIÁRIO NO BRASIL.....	14
<b>2.2.1 Tipos de transporte de cargas e cargas fracionadas em transporte rodoviário</b> .....	<b>15</b>
2.3 CARACTERÍSTICAS DOS VEÍCULOS .....	15
2.4 CUSTOS DE TRANSPORTES.....	16
2.5 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA .....	17
<b>2.5.1 Roteirização de veículos e roteirização e programação de veículos</b> .....	<b>19</b>
<b>2.5.2 O problema do caixeiro viajante</b> .....	<b>20</b>
<b>2.5.3 Modelagem matemática do PRV</b> .....	<b>21</b>
<b>2.5.5 Problema de roteirização de veículos capacitado (PRVC)</b> .....	<b>24</b>
<b>2.5.6 Problema de roteirização de veículos com múltiplas viagens (PRVMV)</b> .....	<b>25</b>
2.6 MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	27
<b>2.6.1 Exato</b> .....	<b>27</b>
<b>2.6.2 Aproximados (heurísticos)</b> .....	<b>30</b>
<b>2.6.3 Meta-heurísticos</b> .....	<b>30</b>
2.7 MODELO PARA UM PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO COM JANELAS DE TEMPO E MÚLTIPLOS VIAJANTES (PRVJTMV) EM GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX® .....	31
2.8 APLICAÇÃO DOS DADOS EM GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX®.....	33
<b>3 ESTUDOS DE CASO</b> .....	<b>38</b>
3.1 CASO EM UMA TRANSPORTADORA.....	38
<b>3.1.1 Solução com o <i>solver</i> Gurobi™</b> .....	<b>38</b>
<b>3.1.2 Solução com o <i>solver</i> IBM ILOG® CPLEX®</b> .....	<b>44</b>
3.2 CASO EM UMA DISTRIBUIDORA .....	45
<b>3.2.1 Solução com o Gurobi™</b> .....	<b>45</b>
<b>3.2.2 Solução com o IBM ILOG® CPLEX®</b> .....	<b>49</b>

<b>4 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>51</b>
4.1 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM OS SOLVERS GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX® .....	51
4.2 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM OS RESULTADOS APRESENTADOS NAS PESQUISAS ORIGINAIS .....	54
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>57</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO A – MATRIZ DISTÂNCIAS CASO TRANSPORTADORA .....</b>	<b>63</b>
<b>ANEXO B – TEMPOS DE VIAGEM CASO TRANSPORTADORA .....</b>	<b>64</b>
<b>ANEXO C – MATRIZ DISTÂNCIAS CASO DISTRIBUIDORA.....</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO D – TEMPOS DE VIAGEM CASO DISTRIBUIDORA.....</b>	<b>66</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Com o crescimento do e-commerce, juntamente com um mercado cada vez mais competitivo, faz-se necessária a otimização de rotas mais elaboradas em logística para acompanhar tal avanço. Custos e tempo são afetados diretamente pela morosidade de rotas mal otimizadas. Dados, como a da ABComm (2016), demonstram que cerca de 61% das empresas de e-commerce têm como principal problema os atrasos na entrega.

Para Bowersox e Closs (2001), o objetivo da logística é tornar disponíveis produtos e serviços no local em que são necessários e quando são desejados. A logística integra informações, estoque, armazenamento, que combinado, tornam o gerenciamento integrado de logística desafiador.

Em uma corporação, à medida que aumenta de tamanho, torna-se cada vez mais desafiador alocar recursos disponíveis para as diversas atividades de maneira mais eficiente. Logo, tais problemas e a necessidade de encontrar soluções de menor custo, acabam criando as condições necessárias para o surgimento da pesquisa operacional, auxiliando na diminuição dos custos com transporte (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

O transporte representa até 66% dos custos logísticos totais, a outra parcela é dividida entre administração de materiais e recursos, métodos, sistemas e equipamentos de distribuição, armazenamento, administração de compras, entre outros. Por isso, aumentar sua eficiência é uma das preocupações do setor, determinando os melhores roteiros para os veículos ao longo de uma rede, a fim de minimizar tempo e distância, constituem, desse modo, problemas frequentes na tomada de decisão (BALLOU, 2006).

Pozo (2010) explica que o transporte é um elemento importante para a economia e um dos mais importantes componentes nos custos logísticos. Tem relevância para o desenvolvimento de uma nação e, em contraste com as menos desenvolvidas, onde produção e consumo ocorrem em lugares similares, possuindo menor participação da área de transporte. Portanto quando o preço do transporte é vantajoso, podem-se disponibilizar os produtos para outras localidades com maior chance de desenvolvimento.

No âmbito da diminuição de custos aplica-se a pesquisa operacional para problemas que possuem as condições necessárias e suas restrições, podendo ser representado por algoritmos que resolvam modelos matemáticos envolvendo centenas ou milhares de variáveis, executados por *softwares*. Implementações por meio de *softwares* apresentam bons resultados em algoritmos que solucionam problemas de roteirização (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Este trabalho considera dois estudos de caso distintos envolvendo, primeiramente, uma transportadora e seu sistema de coletas, e uma distribuidora e seu sistema de entregas. Ambos os problemas objetivam otimizar suas rotas e diminuir seus custos logísticos.

Para atingir os objetivos, foi necessário realizar a organização e tratamento dos seus dados, construir um modelo matemático e implementar em uma ferramenta de modelagem AMPL em método exato, atendendo as restrições impostas pelos problemas, confrontando os resultados com outra ferramenta de modelagem, o OPL, ambas agregam todo o ciclo de modelagem de otimização, desde o desenvolvimento até a manutenção dos modelos.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

Aplicar um modelo de otimização para problemas de roteirização de veículos com restrições de capacidade e janelas de tempo para uma transportadora e uma distribuidora localizadas em Joinville/SC.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Para alcançar a meta proposta deve-se atender os seguintes objetivos específicos:

- Identificar um modelo matemático de roteirização que considere restrições de janelas de tempo e capacidade de carga;
- Realizar testes iniciais em escala menor com os dados do problema da transportadora no solver Gurobi para validação do modelo matemático;
- Aplicar um modelo exato de roteirização com janelas de tempo, restrições de capacidade e múltiplas viagens em linguagem AMPL no *solver* Gurobi™;
- Aplicar outro modelo exato com as mesmas características em linguagem OPL no *solver* IBM ILOG® CPLEX®;

- Comparar os resultados dos *solvers* para comprovar eficácia do modelo e comparar os resultados obtidos com os apresentados nas pesquisas originais;

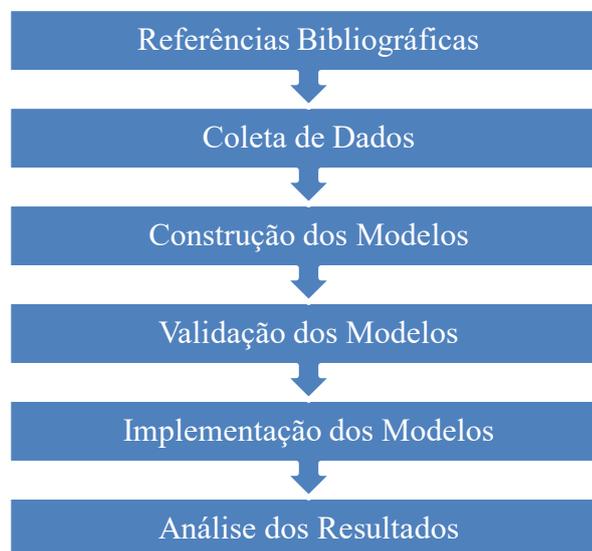
## 1.2 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho optou-se pelo método de pesquisa aplicada, por ser a que melhor representa a estrutura a ser alcançada, em concordância com Barros e Lehfeld (2000). A pesquisa aplicada visa produzir conhecimento para alcançar seus resultados, visando uma solução quase imediata de um problema realístico.

A pesquisa aplicada concentra-se em torno de problemas em atividade das organizações, grupos ou atores sociais e empenha-se na elaboração de diagnósticos, identificação de problemas e busca por soluções (THIOLLENT, 2009).

Na Figura 1 apresentam-se as principais etapas da metodologia considerada no presente trabalho.

Figura 1 - Etapas da metodologia



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

As referências bibliográficas reúnem as principais fontes de pesquisa para o trabalho, organizadas nas referências, antes dos anexos. A coleta de dados é organizada de forma a atender os requisitos para resolução dos problemas tratados e estão detalhados no capítulo 3 sobre o estudo de caso. As construções dos modelos tratam sobre os modelos matemáticos que descrevem os problemas de forma lógica e estão tratadas no capítulo 2.5 sobre programação matemática. A validação e implementação dos modelos se dá pelos testes dos

dados nos modelos matemáticos no capítulo 2 e 3, em estudos de caso e a análise dos resultados no capítulo 4.

O presente trabalho analisa os casos de uma transportadora e de uma distribuidora, focado em aspectos quantitativos, sendo feita uma análise para a compreensão dos problemas e utilizando métodos exatos para sua resolução.

Na próxima seção serão apresentadas as definições e a relevância da logística, do transporte, características dos veículos considerados no trabalho, a formulação dos modelos e a apresentação dos dados em AMPL e OPL para os *solvers*.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção são apresentados conceitos e importância de logística e transporte, característica do transporte rodoviário, os tipos de cargas transportadas pelos caminhões, características dos veículos, custos de transporte, modelagem e programação linear, modelos e dados em Gurobi™ e IBM ILOG® CPLEX®, itens que servem de base para a aplicação dos modelos matemáticos.

### 2.1 A IMPORTÂNCIA DA LOGÍSTICA E DO TRANSPORTE

Segundo Colla (2006), a logística tem origem militar, cujo intuito é alocar os recursos certos, no local e na hora certa, com o objetivo de vencer batalhas. Larrañaga (2008) discorre que a logística tem papel fundamental para a economia e desenvolvimento das empresas, contribuindo para redução de custos, melhorando o padrão de vida para a sociedade e sendo de grande importância para construção de preço do produto até o consumidor final.

Para Bowersox e Closs (2001), a logística envolve a integração de informações, transporte, estoque, armazenamento, manuseio de materiais e embalagens que, combinadas, tornam o gerenciamento de logística um trabalho desafiador. Afirmam ainda que, os gastos com logística podem chegar a 35% do valor da venda, dependendo o tipo de atividade, da área geográfica e outros fatores. A logística em questão de custo só é superada pelos materiais consumidos na produção. O objetivo central da logística é atingir um nível desejado de serviço ao cliente pelo menor custo possível.

O transporte representa o elemento mais importante em termos de custo para inúmeras empresas. Um sistema de transporte eficiente e barato contribui para intensificar a competitividade e aumentar as economias de escala na produção e reduz os preços dos produtos em geral (BALLOU, 2006).

Para Ballou (2006), o usuário tem uma ampla variedade de serviços à disposição e sua variedade é quase ilimitada. Os fatores mais importantes a se levar para a tomada de decisão do meio de transporte são: preço, tempo médio de viagem, variabilidade do tempo de

trânsito, perdas e danos. Presume-se que o serviço esteja disponível e que possa ser fornecido com certa frequência de modo a torná-lo atraente, logo, o custo do transporte é basicamente a taxa da linha de transporte dos produtos mais as despesas complementares, cujos valores podem variar bastante de acordo com o transporte utilizado.

A logística e o transporte e sua eficiência estão diretamente ligados a características do modal rodoviário, ao qual será apresentado na próxima seção.

## 2.2 CARACTERÍSTICAS DO TRANSPORTE RODOVIÁRIO NO BRASIL

Transporte rodoviário é um tipo de transporte usado em estradas, vias e rodovias, pavimentadas ou não, movimentando mercadorias, matérias-primas, animais, pessoas e outros tipos de cargas. São usados por veículos automotores, onde as primeiras rodovias surgiram no final do século XIX, substituindo estradas de carruagens. No século seguinte ocorreu seu desenvolvimento devido ao crescimento da indústria automobilística. É recomendado para pequenas distâncias devido a sua dinamicidade e agilidade, possibilitando alternativas de rotas, fato que não corre em outros meios (FRANCISCO, 2019).

Transportadoras rodoviárias apresentam a maior disponibilidade, se dirigindo diretamente para os pontos de origem e destino, caracterizado pelo serviço porta-a-porta. A preferência pelo modal rodoviário é parcialmente explicada devido a um destaque em características operacionais que são velocidade, disponibilidade, confiabilidade, capacidade e frequência (FLEURY; WANKE; FIGUEIREDO, 2011).

O transporte rodoviário é cerca de sete vezes mais caro que o ferroviário e cerca de quatro vezes mais caro que o aquaviário (BALLOU, 2006). Para Lima (2014), o desbalanceamento da matriz de transporte de carga no Brasil impacta a economia e eleva os custos das empresas de logística.

Para Boente *et al* (2016), o escoamento de cargas no Brasil não funciona de forma ideal devido à falta de estrutura de outros modos de transporte exceto o rodoviário, tornando-o totalmente dependente deste meio para transportes de cargas. Afirma ainda que o transporte rodoviário pode ter seu potencial otimizado se for realizado apenas por distâncias curtas e com poucas quantidades de cargas, apenas ligando os diferentes modos de transportes de maior capacidade e de longa distância, sendo possível o uso de uma intermodalidade ou multimodalidade.

### **2.2.1 Tipos de transporte de cargas e cargas fracionadas em transporte rodoviário**

O transporte rodoviário opera em quatro modalidades de carga principais:

- Serviço de lotação completa: a carga é inserida em instalações de embarque, sendo transportada no mesmo veículo para o depósito destino, não passando pelo depósito da transportadora;
- Serviço de carga fracionada local: quando a carga é coletada em instalações de embarque, sendo deslocada para o depósito da transportadora. É feita triagem e o reembarque em veículos de redistribuição;
- Serviço de cargas fracionadas de longa distância: similar ao anterior, mas ocorrendo outra operação de descarga/triagem/carregamento em depósito regional da transportadora;
- Serviços de cargas fracionadas de longa distância com terminais intermediários de trânsito: similar ao anterior, mas com terminais intermediários da transportadora para reorganizar as remessas (CAIXETA; MARTINS, 2001).

Cargas fracionadas objetivam enviar pequenas remessas cujos volumes, para um dado cliente, origem e destino, não são suficientes para lotar um veículo, em consequência várias cargas de diversos clientes são agregadas e transportadas em conjunto (BOCK; ESTENDER; SOUZA, 2015).

Patrus (2019) descreve cargas fracionadas como um modo de operação em que uma pequena remessa é enviada e o embarcador arca apenas com o seu espaço utilizado no caminhão. A transportadora reúne vários produtos com as mesmas características e destino semelhante, dividindo o frete entre eles. Cargas completas são mais úteis para grandes volumes de encomendas ou para cargas perigosas. Os principais desafios das cargas fracionadas são a infraestrutura das rodovias, a segurança nas estradas, a redução no prazo de entrega, maior monitoramento e a cobertura geográfica.

Na próxima seção serão explanadas as características dos veículos empregados pela transportadora e distribuidora, esclarecendo sua importância de escolha.

### **2.3 CARACTERÍSTICAS DOS VEÍCULOS**

Quem regulamenta os tipos de caminhões é o Conselho Nacional de Trânsito (CONATRAN), que, através da resolução nº 68 de 23/09/1988, classifica o trânsito de

combinações de veículos de cargas pelo conjunto de eixos, rodagem, suspensão, entre eixos e capacidade de carga. (CONATRAN, 1988)

Para Stabelini (2018), classificar os caminhões, categorias e suas capacidades de cargas é o caminho para escolher o melhor modelo para seu negócio. Segundo o mesmo autor existem três tipos de caminhões ditos leves, o primeiro é o Veículo Urbano de Carga (VUC), com capacidade de até três toneladas, seguido pelo caminhão toco, conhecido como semipesado, com até dezesseis toneladas de peso bruto máximo e por fim o caminhão pesado, com até vinte e três toneladas de capacidade máxima. A escolha errada entre os tipos de caminhões acarretará maior número de manutenções a médio e longo prazo.

Segundo Coelho (2010), o VUC é um caminhão de menor porte, apropriado para ambiente urbano, possui até 2,2 metros de largura máxima, comprimento de até 6,3 metros e emissão limitada de poluentes. Sua capacidade máxima é de três toneladas, sendo destaque em custo benefício e redução de custos por carga. Este caminhão é utilizado pelas empresas analisadas neste trabalho.

## 2.4 CUSTOS DE TRANSPORTES

Pelo VUC ser um caminhão de pequeno porte otimizado para o ambiente urbano, com custo benefício em relação a caminhões maiores, este é o veículo principal utilizado pela transportadora nos estudos de LAZZARI (2018) e parte da frota nos estudos de LIMA (2019).

Segundo Arantes (2005), o custo de transportes contempla todos os gastos que se tem na movimentação de material, produtos, cargas, dentre outros, desde a origem até o destino, além de que, outros fatores podem influenciar os custos de transporte, como a localização do mercado de destino e a dificuldade de manuseio da carga.

A maior parte do custo é devido a distribuição e transporte de cargas, refletindo negativamente no lucro das empresas. O custo operacional, por exemplo, é estimado em 24,9% em 2016 e no ano seguinte subiu para 27%, representando um grande valor nas contas das empresas. Investir em infraestrutura é uma necessidade para o crescimento de uma economia, pois quando a economia aquece, mais produtos são produzidos, necessitando a ampliação de malhas e integração entre elas para uma maior eficiência em infraestrutura do transporte (ROSSARI, 2018).

Os principais custos logísticos rodoviários podem ser divididos em custos fixos e custos variáveis. Custos fixos não tem variação pela distância percorrida, sendo calculados

periodicamente como: salários dos motoristas, licenciamento, reposição do veículo e seguro. Custos variáveis alteram conforme o veículo roda, como os gastos com acessórios, peças de manutenção, lubrificantes, combustível e desgaste dos pneus. Há ainda despesas indiretas, que são administrativas e variam de acordo com o volume movimentado, podem ser salários, encargos e despesas para o funcionamento da empresa (MARTINS, 2017).

## 2.5 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Modelagem matemática é uma técnica utilizada para se obter alguma explicação ou entendimento de situações reais, consistindo na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e interpretando através da solução na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2015). Burak e Klüber (1992) entendem a modelagem matemática como conjunto de procedimentos que se objetiva a construir um paralelo para explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano, ajudando na tomada de decisão.

Em matemática, o termo otimização, ou programação matemática, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável (DANTZIG, 1996). Nota-se que a programação matemática é uma técnica muito difundida e utilizada para solucionar problemas de alocação de recursos limitados entre atividades concorrentes, bem como, outros problemas com uma formulação matemática semelhante (DANTZIG, 1996).

Tornou-se uma ferramenta padrão de grande importância para inúmeras empresas e organizações industriais. Além disso, grande parte das organizações estão preocupadas em alocar recursos em algum contexto, e há um reconhecimento crescente da aplicabilidade eficiente dessa técnica (DANTZIG, 1996).

Dependendo das características do modelo matemático, podem ser divididos em: (i) programação linear (PL), (ii) programação linear inteira (PLI) ou de (iii) programação não linear (PNL). Programação é dita não-linear quando as variáveis ou função de custo não variam linearmente, cuja obtenção da solução ótima nesta programação são difíceis (NOGUEIRA, 2016).

A programação linear tem sido classificada como um dos maiores avanços científicos do século XX, poupando milhões de dólares desde 1950, onde grande parte da computação científica é dedicada ao seu uso. A programação linear usa um modelo matemático para descrever um problema, sendo o adjetivo de programação um sinônimo para planejamento e o

adjetivo linear usado para descrever que todas as funções nesse modelo são funções lineares, logo uma programação linear seria o planejamento de atividades para obter o melhor objetivo especificado entre todas as alternativas viáveis (HILLIER; LIEBERMAN, 2013). Um modelo matemático é dito PLI se algumas ou todas as variáveis pertencem ao conjunto dos números inteiros (HILLIER; LIEBERMAN, 2013) e pode ser descrito pelo conjunto de equações (1)-(4).

$$\text{Minimizar } Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

Sujeito às restrições:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim b_1 \quad (2)$$

⋮

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim b_m \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \quad (4)$$

As variáveis  $x_j$  representam as variáveis utilizadas,  $j = 1, \dots, n$ ,  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa a função a ser otimizada,  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são funções que definem as restrições do problema e  $b_i$  representam a quantidade disponível do recuso  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . O termo ( $\sim$ ) pode assumir as nomenclaturas  $<$ ,  $\leq$ ,  $=$ ,  $>$  ou  $\geq$ .

Dependendo da definição das funções  $f$  e  $g$ , este modelo pode ser classificado como de programação linear ou não linear.

Quando as variáveis  $x_j$  são declaradas inteiras e  $f$  e  $g$  são funções lineares, diz-se que o modelo (1)-(4) representa um problema de programação linear inteira (PLI).

Um problema de programação linear inteira se caracteriza por ter algumas ou todas variáveis discretas, tendo que assumir valores inteiros. Pode-se dividir entre programação linear inteira pura, quando todas as variáveis estão sujeitas à condição de integralidade, ou mista, quando apenas algumas estão. (ALVES; DELGADO, 1997).

Existe um caso especial para variáveis inteira que é quando se tem variáveis binárias, ou seja, o valor só pode se tornar zero ou um. Logo, quando todas as variáveis de um modelo são binárias, diz-se que este modelo é de programação inteira binária. Variáveis binárias são muito úteis para problemas dicotômicos, do tipo fazer ou não fazer (ALVES; DELGADO, 1997).

Na próxima seção serão expostos os conceitos de roteirização e programação de veículos e suas características que em conjunto com PLI fundamentam o modelo matemático do trabalho.

### 2.5.1 Roteirização de veículos e roteirização e programação de veículos

Segundo Ballou (2006), o tempo em que as mercadorias passam em trânsito acabam tendo impacto no número de fretes que podem ser realizados por veículos em determinado período e nos custos do transporte para todos os embarques. Reduzir custos do transporte, melhorar os serviços e descobrir melhores roteiros ao longo de uma rede, a fim de minimizar tempos e distâncias, constituem problemas recorrentes na tomada de decisão.

Cunha (1997) argumenta que roteirização é um processo em que se define um ou mais roteiros ou sequência de paradas que um veículo deve cumprir, para que todos os pontos pré-definidos sejam atendidos, minimizando os custos do trajeto.

Ballou (2006) descreve um problema de VRP (*Vehicle Routing Problem*) como *extensão do problema básico de roteirização*, cujas restrições são mais realistas e incluem: coleta e entrega, múltiplos veículos com capacidade limitada de peso e volume que podem ser usados, há um tempo máximo de tráfego em cada rota, as escalas permitem coleta e entrega em janelas de tempo, as coletas são permitidas num roteiro apenas depois das entregas e os motoristas têm direito a breves intervalos em períodos do dia.

Cunha (2000) descreve problemas de roteirização pertencentes, na teoria da complexidade computacional, a categoria *NP-hard*, pois possuem complexidade exponencial e exigem grande esforço computacional para resolução, inviabilizando o uso de algoritmos exatos quando se considera problemas com  $n^o$  grande de nós (clientes).

As vantagens de se adotar roteirização em cargas fracionadas são a redução do custo de frete, diminuição das distâncias, redução do tempo para distribuição, melhoria no dimensionamento e consolidação de cargas, melhor aproveitamento de rota, recursos humanos mais eficientes e menos horas trabalhadas, menor reclamação por atraso na entrega, maior satisfação dos clientes e maior ganho em competitividade (PATRUS, 2019).

Para conseguir soluções em problemas de roteirização, são usados *softwares* que solucionam modelos matemáticos em tempo plausível para as empresas. Segundo Mello e Ferreira Filho (2010), tais *softwares* são sistemas computacionais que utilizam algoritmos e base de dados, apresentando soluções para os problemas de roteirização e programação de veículos, sendo mais eficiente que os métodos manuais.

### 2.5.2 O problema do caixeiro viajante

O problema de roteirização com origem e destino coincidentes é conhecido como problema do caixeiro viajante (PCV), cujo objetivo é determinar a sequência na qual os pontos visitados minimizam a distância ou o tempo total de viagem (BALLOU, 2006). Goldbarg e Luna (2000) descrevem o problema do caixeiro viajante como um dos mais notórios e tradicionais problemas de programação matemática.

É um dos problemas de otimização combinatória mais estudados. Seu modelo pode parecer simples, ainda sim continua sendo um dos problemas mais complexos da pesquisa operacional. O PCV consiste em determinar um roteiro de distância mínima que passa por cada vértice apenas uma vez, este roteiro é conhecido como ciclo hamiltoniano. Seja  $G = (V, A)$  um grafo em que  $V$  é um conjunto de  $n$  vértices e  $A$  um conjunto de arcos, permite que  $d_{ij}$  seja uma matriz de distância associada com  $A$  a ser minimizada (LAPORTE, 1991).

A modelagem matemática do PCV é apresentada nas funções (5)-(12). Considerando-se  $n =$  número cliente/nós, defina-se as variáveis decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se motorista segue do nó } i \text{ imediatamente ao nó } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ .

O modelo matemático do PCV, segundo (CHRISTOFIDES, 1985), é descrito pelas equações (6)-(12).

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j, j \neq i \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i, i \neq j \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{ij} = n, \quad \forall j: j \neq i \quad (9)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad \forall i \in V \text{ e } \forall j \quad (10)$$

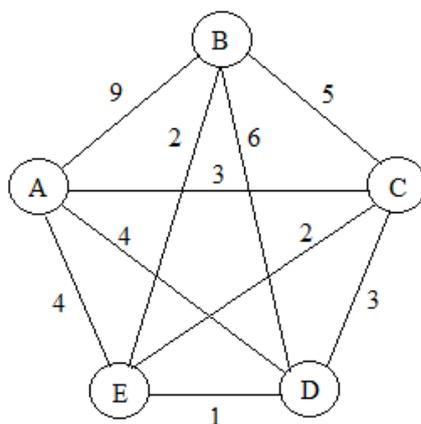
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \quad (11)$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i,j \quad (12)$$

A equação (6) define a função objetivo do problema, e minimiza a distância total percorrida. As restrições (7) e (8) garantem a unicidade das rotas de chegada e saída em cada cidade, respectivamente. As restrições (9) e (10) impedem a formação de sub-rotas, onde  $u$  é uma variável auxiliar que não possui significado físico ou prático. Por fim, as restrições (11) e (12) definem os tipos de variáveis consideradas no problema.

O grafo de um PCV é exemplificado na Figura 2.

Figura 2 - Grafo de um PCV



Fonte: (HILLIER; LIEBERMAN, 2013)

### 2.5.3 Modelagem matemática do PRV

O problema de Roteamento de Veículos (PRV) foi introduzido em 1959 por Dantzig e Ramser no artigo “O Problema de Despacho de Caminhões”. O estudo deu origem a avanços em algoritmos e heurísticas exatas (LAPORTE, 2009).

O PRV consiste em um conjunto de problemas envolvendo a visita de clientes por veículos, cujo objetivo é fornecer mercadorias geograficamente dispersas aos clientes, usando veículos a partir de um depósito em comum, minimizando os custos das rotas (CHRISTOFIDES, 1985). De acordo com as afirmações acima, o PRV é apresentado pelas restrições (13) a (19).

A função objetivo é a minimização dos custos totais de viagem  $c_{ij}$ , representada pela função (13). As restrições (14) representa a capacidade dos veículos  $q_i$ , limitando sua utilização a capacidade máxima  $Q_v$ .

As equações (15) garantem que todos os veículos iniciem e terminem suas rotas no depósito ( $i = 0$ ). A restrição (16) garante que todos os clientes serão atendidos e que cada um deles será visitado por apenas um veículo.

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_i^n \sum_{i \neq j}^n \sum_{v=1}^{NV} c_{ij} x_{ij}^v \quad (13)$$

$$\text{Sujeito à:} \quad \sum_i q_i y_i^v \leq Q_v \quad v = 1, \dots, NV \quad (14)$$

$$\sum_v y_0^v = NV \quad (15)$$

$$\sum_v y_i^v = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$\sum_i x_{ij}^v = y_j^v, \quad \forall i = 1, \dots, n; \forall v = 1, \dots, NV \quad (17)$$

$$\sum_j x_{ij}^v = y_i^v \quad \forall i = 1, \dots, n; \forall v = 1, \dots, NV \quad (18)$$

$$y_i^v \in \{0,1\} \quad i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV \quad (19)$$

As restrições (17) e (18) representam a conservação de fluxo, onde cada cliente terá um único arco de entrada e um único arco de saída, garantindo também que os veículos não estacionem em um cliente. As restrições (19) evitam formação de sub-rotas, onde para cada veículo, os arcos de qualquer subgrafo  $S$  do grafo  $G(N, A)$  que compõem o problema, não realizem circuitos isolados (FISHER; JAIKUMAR, 1981).

#### 2.5.4 Problemas de roteirização de veículos com janelas de tempo (PRVJT)

*Vehicle Routing Problem with Time Windows* (VRPTW), é um problema de otimização combinatória, do tipo *NP-complete*, que envolve o roteamento de frotas de veículos com limitações de capacidade e tempos de viagem, a partir de um depósito central para elementos dispersos espacialmente, com demandas e janelas de tempo específicas (JUELL; THANGIAH; NYGARD, 1991).

Pode ser do tipo simples, onde o prazo de chegada não pode ser ultrapassado, impedindo que o veículo chegue antes do prazo, ou do tipo duplo, onde se impõe prazos de chegada mínimos e máximos, evitando que um veículo fique ocioso no tempo de espera, evitando prejudicar o atendimento a outros clientes (JUELL; THANGIAH; NYGARD, 1991).

Envolvendo mais de um veículo para atender os nós o problema se torna *NP-hard* (JUELL; THANGIAH; NYGARD, 1991).

O Quadro 1 apresenta os parâmetros necessários para a formulação do modelo matemático para o PRVJT.

Quadro 1 – Parâmetros para formulação do PRVJT

Parâmetros	Definição
$e_i$	Instante inicial já janela de tempo do cliente $i$
$l_i$	Instante final da janela de tempo do cliente $i$
$b_i^v$	Instante do início do atendimento do cliente $i$ pelo veículo $v$
$s_i$	Tempo de serviço do cliente $i$
$t_{ij}$	Tempo de viagem do cliente $i$ para o cliente $j$
$M$	Constante positiva suficientemente grande

Fonte: Adaptado de (OMBUKI, ROSS e HANSHAR, 2006)

O modelo matemático para PRVJT proposto por Ombuki *et al* (2006) é dado pela função minimizadora de custos (20) pelas restrições (21)-(28).

$$\text{Min } Z = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{v=1}^{NV} c_{ij} x_{ij}^v \quad (20)$$

Sujeito a:

$$\sum_{v=1}^{NV} \sum_{j=1}^N x_{ij}^v = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i \sum_{j=0}^N x_{ij}^v \leq C \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (22)$$

$$\sum_{j=0}^N x_{j0}^v = 1 \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ih}^v - \sum_{j=0}^N x_{hj}^v = 0 \quad \forall v = 1, \dots, NV; \forall h = 1, \dots, n \quad (24)$$

$$\sum_{i=0}^N x_{i,n+1}^v = 1 \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (25)$$

$$b_i^v + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^v) \leq b_j^v \quad \forall i, j = 1, \dots, n; \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (26)$$

$$e_i \leq b_i^v \leq l_i \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (27)$$

$$x_{ij}^v \in \{0,1\}^+ \quad i, j = 1, \dots, n; \quad v = 1, \dots, NV \quad (28)$$

A função objetivo (20) e as restrições (21) e (22) são idênticas ao modelo PRV. As restrições (23), (24) e (25) são restrições de fluxo e garantem que cada veículo deixe o depósito 0, passando pelos clientes e terminando a rota no depósito  $n + 1$ . A restrição (26) evita que um veículo  $k$ , que esteja viajando de um cliente  $i$  para  $j$ , não chegue ao seu destino antes do tempo de serviço no cliente  $i$  mais o tempo de viagem entre  $i$  e  $j$  ( $s_i + t_{ij}$ ). As restrições (27) garantem que cliente  $i$  seja atendido dentro de sua janela de tempo. As restrições (28) definem o domínio das variáveis binárias.

### 2.5.5 Problema de roteirização de veículos capacitado (PRVC)

O problema de roteamento de veículos capacitado é a versão mais simples do PRV. Todos os clientes possuem demandas conhecidas previamente, que serão atendidas integralmente por apenas um veículo. Todos os veículos são semelhantes e partem de um único depósito, apenas uma restrição de capacidade é imposta ao problema, que estabelece que as somas das demandas de todos os clientes pertencentes a uma rota não devem superar a capacidade do veículo designado (VIEIRA, 2013).

O PRV consiste em encontrar um conjunto de  $K$  rotas, cada uma percorrida por um veículo, minimizando o custo total de transporte e satisfazendo as restrições: cada rota deve ter início e fim no depósito, cada cliente deve ser visitado um vez por apenas um veículo e a soma das demandas dos clientes em uma rota não pode exceder a capacidade do veículo (VIEIRA, 2013).

Seja um grafo completo  $G = (V, A)$ , em que  $A$  é um conjunto de arcos representando os caminhos que ligam os clientes ao depósito e  $V$  o conjunto de  $n + 1$  vértices, o vértice zero representa o depósito e os outros são os clientes. Cada arco  $(i, j)$  é associado a um custo não negativo,  $c_{ij}$ , representando o custo de viagem do vértice  $i$  para o  $j$ .

Um conjunto  $K$  de veículos similares, de capacidade  $C$ , é conectado a um único depósito. A cada cliente  $i$  é associado a uma demanda não negativa  $m_i$  e definimos  $m_0 = 0$  sendo o depósito.

Definindo-se as variáveis de decisão na equação (29), o modelo matemático para o PRVC, consiste no conjunto de funções (20)-(28), acrescido das inequações (30).

$$x_{ij}^v = \begin{cases} 1, & \text{se o veículo } v \text{ trafega no trecho } (i, j) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (29)$$

$$i, j \in \{0, 1, \dots, n\}; i \neq j; v \in \{1, \dots, NV\}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \sum_{j=0; j \neq i}^n x_{ijk} \leq C \quad k = 1, \dots, K \quad (30)$$

A restrição (30) mantém limitada a capacidade dos veículos (VIEIRA, 2013).

Na próxima seção é apresentada o problema de roteirização de veículos com múltiplas viagens, uma extensão do PRV que inclui múltiplos veículos e permite que um veículo atenda mais de uma rota.

### 2.5.6 Problema de roteirização de veículos com múltiplas viagens (PRVMV)

O problema de roteirização de veículos com múltiplas viagens é uma extensão do PRV, permitindo que um veículo atenda mais de uma rota durante um período de planejamento. Logo os veículos não podem ultrapassar o seu limite de carga, o início e fim de cada rota tem como ponto de partida e retorno o depósito, os clientes não são atendidos por apenas um veículo e este atende apenas uma rota durante o período planejado (FROTA; SILVA; SUBRAMANIAN, 2012).

No modelo, a última restrição é modificada permitindo múltiplas viagens, logo um veículo pode atender mais de uma rota durante o período de planejamento. O problema pertence à classe *NP-hard*, não sendo possível determinar soluções ótimas em tempo polinomial, sendo necessárias o uso de heurística e meta-heurísticas para problemas de grande dimensão. O PRVMV tem grande importância para empresas de transporte, pois a duração das rotas pode terminar com a jornada de trabalho, gerando ociosidade nos veículos (FROTA *et al.*, 2012).

O PRVMV pode ser definido considerando-se um grafo não orientado  $G = (V, A)$ , onde  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  representa os vértices do grafo, assumindo que 0 é o depósito e os nós  $i \in V \setminus \{0\}$  representando clientes, com sua demanda  $q_i$ . Define-se um horizonte de tempo  $T$ , seja  $r$  uma rota onde  $v_0 = 0$  e  $n(r)$  é definido com o número de clientes visitados, sabendo que cada vértice tem demanda  $q_{vi}$ , consideramos as inequações (31) a (33).

$$q_r = \sum_{i=1}^{n(r)} q_{vi} \quad \text{é a demanda coberta pela rota} \quad (31)$$

$$c_r = \sum_{i=0}^{n(r)} q_{vi,vi+1} \quad \text{é o custo da rota } (c_{ij} \text{ é o custo do arco } ij) \quad (32)$$

$$t_r = \sum_{i=0}^{n(r)} t_{vi,vi+1} \quad \text{é a duração da rota} \quad (33)$$

Oliveira e Viera (2007) apresentam a modelagem matemática do PRVMV, assumindo  $x_r^k$  como valor de 1 se a rota  $r$  está na solução e é atribuída ao veículo  $k$ , caso contrário a variável assume valor 0. Considerando  $R$  o conjunto de rotas possíveis, o coeficiente  $a_{ir}$  tem valor 1 se a rota  $r \in R$ , visitou o cliente  $i$ , será 0 caso contrário, consideramos as inequações (34) a (37).

$$\text{Min } Z = \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} c_r x_r^k \quad (34)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{r \in R} a_{ir} x_r^k = 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (35)$$

$$\sum_{r \in R} t_r x_r^k \leq T \quad \forall k \in K \quad (36)$$

$$x_r^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, \forall r \in R \quad (37)$$

A função objetivo (34) busca minimizar o custo total de deslocamento. As restrições (35) garantem que cada cliente deve pertencer exatamente a uma rota. As restrições (36) asseguram que a duração das rotas atribuídas a cada veículo, não deve exceder o período de planejamento e as restrições (37) definem o domínio das variáveis.

Na seção 2.6 é exposto os conceitos acerca do método exato considerado no trabalho, com exemplos de aplicações no solver Gurobi™ e solver IBM ILOG® CPLEX®.

## 2.6 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Existem diversas formas de se resolver modelos matemáticos, alguns mais adequados que outros dependendo o tipo e a complexidade da problemática. São apresentados, a seguir, o método exato que foi utilizado neste trabalho e, para fins didáticos, os métodos heurísticos e meta-heurísticos.

### 2.6.1 Exato

Encontrar soluções exatas pode levar a uma computação não determinística, resolvendo uma determinada instância, numa busca exaustiva de todas as possibilidades. Com a ajuda da computação, que tem maneiras não triviais e maleáveis de se solucionar problemas, existem alternativas mais eficientes para otimização, como os algoritmos exatos exponenciais e sua técnica mais antiga para melhorar a busca exaustiva que é o *branching*, que divide recursivamente os espaços de busca e evita que espaços desnecessários sejam visitados (FOMIN, KASKI, 2013).

Os algoritmos exatos requerem muito tempo de computação, mas garantem a solução ideal. Os métodos exatos mais promissores são os métodos *Branch & Bound* e *Branch & Cut* (GELOĞULLARI, 2001).

Com o auxílio da ferramenta de modelagem AMPL, que suporta todo o ciclo de modelagem de otimização, desde o desenvolvimento até a manutenção, cuja representação de alto nível promove rápido desenvolvimento e resultados confiáveis, foi possível implementar e solucionar o modelo exato. O AMPL integra várias linguagens que identificam o modelo e passam para o *solver* (AMPL, 2019).

O *solver* primário escolhido para a linguagem AMPL é a plataforma Gurobi™, que é flexível, suportando diversas linguagens de programação. O desempenho da plataforma se mostra superior a outros solucionadores (GUROBI™, 2019).

Exemplificando, na Figura 3 o modelo matemático (6)-(12) do problema do caixeiro viajante (PCV) na linguagem AMPL.

Figura 3 - Modelo matemático do PCV em AMPL no Gurobi™

```

param N;
param V;
param M;
param Custo {v in 1..V};
param d {i in 1..N,j in 1..N};

var x {i in 1..N,j in 1..N, v in 1..V} binary;
var b {i in 1..N,v in 1..V} >=0;
var u {i in 1..N, v in 1..V} >=0;

minimize fo: (sum {i in 1..N, j in 1..N, v in 1..V} Custo[v]*d[i,j]*x[i,j,v]);

subject to C1 {i in 2..N-1}: sum {v in 1..V, j in 2..N} x[i,j,v]=1;
subject to C2 {v in 1..V}: sum {j in 1..N} x[1,j,v]=1;
subject to C3 {p in 2..N-1, v in 1..V}: sum {i in 1..N} x[i,p,v]-sum {j in 1..N} x[p,j,v]=0;
subject to C4 {v in 1..V}: sum {i in 1..N} x[i,N,v]=1;
subject to C5 {i in 2..N, j in 1..N, v in 1..V}: u[i,v]-u[j,v]+N*x[i,j,v]<=(N-1);

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Declaram-se os parâmetros, as variáveis e a função minimização no arquivo modelo. Os dados para um exemplo de 6 nós implementado na linguagem AMPL é ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Dados genéricos para o PCV em AMPL no Gurobi™

```

param N=6;
param V=1;
param M=10000000;
param Custo: 1 :=
1 0.2;

param d: 1 2 3 4 5 6 :=
1 9999 8.3 7.0 3.6 3.6 9999
2 9999 9999 14.3 47.0 4.7 8.3
3 9999 14.3 9999 9.5 10.0 7.0
4 9999 47.0 9.5 9999 0.4 3.6
5 9999 13.7 11.1 9.2 9999 8.3
6 9999 9999 9999 9999 9999 9999;

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Declaram-se os parâmetros com os dados fornecidos pelo problema, como número de clientes e as distâncias entre os nós, incluindo depósito.

O *solver* secundário IBM ILOG® CPLEX® na linguagem OPL tem a mesma flexibilidade e desempenho consistente, com algoritmos otimizado para múltiplas máquinas (IBM, 2019). No presente trabalho foi usado para verificar se o *solver* Gurobi™ alcançou os resultados esperados. Na Figura 5, o mesmo modelo (6)-(12) em IBM ILOG® CPLEX®.

Figura 5 - Modelo matemático do PCV em OPL no IBM ILOG® CPLEX®

```

int V=...;
range v=1..V;
int M=...;
int N=...;
range n1=1..N;
range n2=1..N-1;
range n3=2..N;
range n4=2..N-1;
float Custo[v]=...;
float d[n1][n1]=...;

dvar boolean x[n1][n1][v];
dvar int b [n1][v];
dvar int u [n1][v];

minimize sum (k in v, i,j in n1) Custo[k]*d[i,j]*x[i,j,k] + sum(j in n4, k in v) CF[k]*x[1,j,k];

subject to {

forall (i in n4) sum (j in n3, k in v) x[i,j,k]==1;
forall (k in v) sum (j in n1) x[1,j,k]==1;
forall (p in n4, k in v) sum (i in n1) x[i,p,k]-sum (j in n1) x[p,j,k]==0;
forall (k in v) sum (i in n1) x[i,N,k]==1;
forall(i in n3, j in n1, k in v) u[i,k]-u[j,k]+N*x[i,j,k]<=(N-1);};

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Com as mesmas características do modelo em AMPL, declaram-se os parâmetros, variáveis e função minimização. Os dados em IBM ILOG® CPLEX® são vistos na Figura 6.

Figura 6 - Dados genéricos para o PCV em OPL no IBM ILOG® CPLEX®

```

V=1;
N=6;
M=10000000;

Custo= [[ 0.79]];

d= #[ 12      3      4      5      6 :=
1:   9999   1.9    2.4    96.33  8.3    9999,
2:   9999   9999   1      94.8   6.9    1.9,
3:   9999   0.883  9999   95.2   7.2    2.4,
4:   9999   94.5    94.762 9999   89.817 96.33,
5:   9999   6.9     7.2    91.169 9999   8.3,
6:   9999   9999   9999   9999   9999   9999]#;

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Declaram-se os mesmos parâmetros que o problema em IBM ILOG® CPLEX®. Além dos modelos exatos há métodos mais avançados para problemas maiores que são os aproximados e os meta-heurísticos.

### 2.6.2 Aproximados (heurísticos)

Heurística, derivado da palavra grega *heuriskein*, significa “descobrir” (FOULDS, 1984). Em “Regras para a direção do espírito” Descartes descreve um método que poderia resolver qualquer problema, reduzindo-o a um problema matemático, mas ressaltando a importância da metodologia, da argumentação, da dedução e do controle sobre o trabalho (DESCARTES, 1998).

Heurísticas podem ser vistas como regras gerais de influência em julgamentos em tarefas decisórias de incerteza, reduzindo a complexidade das tarefas e predizendo valores a simples operações (PLOUS, 1993).

O objetivo de uma heurística é encontrar boas soluções de maneira simples e rápida, não sendo capazes de garantir o ótimo da solução, sendo uma técnica que melhora a eficiência do processo de busca de soluções para um problema (ARAUJO, 2006).

Modelos heurísticos também são específicos para problemas, que podem ser generalizados, sendo chamados de meta-heurísticos, explorados a seguir.

### 2.6.3 Meta-heurísticos

O termo meta-heurística deriva de duas palavras gregas, *heuriskein* e *meta*, cujo significado da segunda é “após”, denotando um nível superior de descoberta (BECCENERI; ZINOBER, 2001). Algoritmos meta-heurísticos são de uso e aplicação geral, não focam em ótimos locais, buscando sempre o ótimo global (TAVORA, 2011).

A meta-heurística pode ser vista como uma ferramenta heurística geral aplicada a diferentes problemas de otimização, com modificações pequenas para torná-las adaptáveis a problemas específicos (DORIGO, 2000).

Tem como objetivo superar falhas de modelos exatos, como o término prematuro em um ótimo local, por exemplo muitos dos modelos são baseados na natureza, seja físico, biológicos ou evolutivos (ARAUJO, 2006).

Os métodos meta-heurísticos podem ser divididos em: buscas por entornos, que percorrem a vizinhança para encontrar a solução, as de relaxação, que simplificam e utilizam a solução encontrada para guiar o problema, as construtivas, que definem meticulosamente o valor de cada componente da solução, e as evolutivas, que com uma população de soluções evoluem através das iterações (MELIÁN *et al*, 2003).

Na seção 2.7 serão tratados os modelos matemáticos em PRVJTMV nos *solvers* Gurobi™ e IBM ILOG® CPLEX®.

## 2.7 MODELO PARA UM PROBLEMA DE ROTEIRIZAÇÃO COM JANELAS DE TEMPO E MÚLTIPLOS VIAJANTES (PRVJTMV) EM GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX®

Na Figura 7, o modelo matemático (20)-(32) no Gurobi™ para um problema de roteirização com janelas de tempo e múltiplos viajantes (PRVJTMV), que são utilizadas no trabalho.

Os parâmetros em ordem sequencial são: custo variável  $CV$ , que englobam gastos com combustível, depreciação das peças dos veículos e outros custos que variam pela distância percorrida, os custos fixos  $CF$ , que abrangem custos como salário do motorista e seguro do veículo, que independem da distância percorrida, a demanda dos nós  $q$ , que pode ser representado por um peso, uma quantidade ou um valor de custo, a distância entre os nós  $d$ , tempo de viagem entre os nós  $t$ , tempo de atendimento nos nós  $s$ , início da janela de tempo  $e$ , fim da janela de tempo  $l$  e capacidade máxima dos veículos  $C$ . A variável  $x$  é binária e representa se o nó será visitado, sendo 1 se for e 0 se não for visitado, a variável auxiliar  $b$  é utilizada para marcar o tempo no qual um veículo inicia o atendimento no nó, a variável auxiliar  $u$  é utilizada para evitar subciclos.

A função objetivo é a soma do custo variável, que depende da distância percorrida, com o custo fixo. A restrição C1 garante que cada ponto seja visitado apenas 1 vez. A restrição C2 determina que a capacidade dos veículos não deva ser ultrapassada.

As restrições C3, C4 e C5 representam a conservação de fluxo, logo os veículos sempre retornam ao depósito, não terminando sua rota em algum nó de atendimento.

Figura 7 - Modelo matemático do PRVJTMV no Gurobi™

```

param N;
param V;
param M;
param CV {v in 1..V};
param CF {v in 1..V};
param q {i in 1..N};
param d {i in 1..N,j in 1..N};
param t {i in 1..N,j in 1..N};
param s {i in 1..N};
param e {i in 1..N};
param l {i in 1..N};
param C {v in 1..V};

```

Continua...

```

:
var x {i in 1..N,j in 1..N, v in 1..V} binary;
var b {i in 1..N,v in 1..V} >=0;
var u {i in 1..N, v in 1..V} >=0;

minimize fo: (sum {i in 1..N, j in 1..N, v in 1..V} CV[v]*d[i,j]*x[i,j,v])+(sum {j in
2..N-1, v in 1..V} CF[v]*x[1,j,v]);

subject to C1 {i in 2..N-1}: sum {v in 1..V, j in 2..N} x[i,j,v]=1;
subject to C2 {v in 1..V}: sum{i in 2..N, j in 1..N} q[i]*x[i,j,v] <= C[v];
subject to C3 {v in 1..V}: sum {j in 1..N} x[1,j,v]=1;
subject to C4 {p in 2..N-1, v in 1..V}: sum {i in 1..N} x[i,p,v]-sum{j in 1..N}
x[p,j,v]=0;
subject to C5 {v in 1..V}: sum {i in 1..N} x[i,N,v]=1;

subject to C6 {i in 1..N-1, j in 1..N-1, v in 1..V}: b[i,v]+s[i]+t[i,j]-b[j,v]<=(M*(1-
x[i,j,v]));
subject to C7 {i in 1..N, v in 1..V}: e[i]<=b[i,v];
subject to C8 {i in 1..N, v in 1..V}: l[i]>=b[i,v];

subject to C9 {i in 2..N, j in 1..N, v in 1..V}: u[i,v]-u[j,v]+N*x[i,j,v]<=(N-1);

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A restrição C6 é de tempo de atendimento mínimo ao cliente, C7 e C8 representam as janelas de tempo. A restrição C9 evita subciclos. Em IBM ILOG® CPLEX® o mesmo modelo pode ser observado na Figura 8.

Todas as variáveis representam de forma igualitária o modelo em Gurobi™. A declaração delas diferencia em alguns aspectos, sendo possível colocar limites numéricos dos parâmetros para facilitar a leitura das restrições, representados pelo parâmetro *range*.

Figura 8 - Modelo matemático do PRVJTMV no IBM ILOG® CPLEX®

```

int V=...;
range v=1..V;

int M=...;

int N=...;
range n1=1..N;
range n2=1..N-1;
range n3=2..N;
range n4=2..N-1;

float CV[v]=...;
float CF[v]=...;
float q[n1]=...;
float d[n1][n1]=...;
int t[n1][n1]=...;
int s[n1]=...;
int e[n1]=...;
int l[n1]=...;
float C[v]=...;

```

Continua...

```

:
dvar boolean x[n1][n1][v];
dvar int b [n1][v];
dvar int u [n1][v];

minimize sum (k in v, i,j in n1) CV[k]*d[i,j]*x[i,j,k] + sum(j in n4, k in v) CF[k]*x[1,j,k];

subject to {

forall (i in n4) sum (j in n3, k in v) x[i,j,k]==1;
forall(k in v) sum (i in n3, j in n1) q[i]*x[i,j,k]<=C[k];
forall (k in v) sum (j in n1) x[1,j,k]==1;
forall (p in n4, k in v) sum (i in n1) x[i,p,k]-sum (j in n1) x[p,j,k]==0;
forall (k in v) sum (i in n1) x[i,N,k]==1;

forall (i in n2, j in n2, k in v) b[i,k]+s[i]+t[i,j]-b[j,k]<=(M*(1-x[i,j,k]));
forall (i in n1, k in v) e[i]<=b[i,k];
forall (i in n1, k in v) l[i]>=b[i,k];

forall(i in n3, j in n1, k in v) u[i,k]-u[j,k]+N*x[i,j,k]<=(N-1);};

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na seção 2.8 são tratados a aplicação dos dados dos anexos A, B, C e D em linguagem AMPL para os *solver* Gurobi™ e OPL para *solver* IBM ILOG® CPLEX®.

## 2.8 APLICAÇÃO DOS DADOS EM GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX®

De forma análoga aos modelos, os dados nos *solvers* Gurobi™ e IBM ILOG® CPLEX® foram adaptados a partir das informações dos anexos A e B. Na Figura 9 os dados em AMPL no Gurobi™ no caso da transportadora.

Figura 9 - Dados do problema de LAZZARI (2018) em Gurobi™

```

param N=20;

param V=5;

param M=10000000;

param CV: 1 2 3 4 5 :=
1 0.79 0.55 0.86 2.4 0.79;

param CF: 1 2 3 4 5 :=
1 196.07 141.08 166.51 363.11 141.08;

param q: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 :=
1 0 0.3 2.84 3.05 0.55 1.04 5.98 2.2 1.01 9.14 0.06 7.22 0.06 6.19 0.22 2.11 3.4 2.03 4.1 0 ;

param d:1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12
          13     14     15     16     17     18     19     20 :=
          13     14     15     16     17     18     19     20 :=

```

Continua...

1	9999	1.9	2.4	96.33	8.3	1.6	73.5	95.743	7	98.6	9.9	36.9
	3.55	10.42	3.6	94.523	8.32	7.995	2.4	9999				
:												
20	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999;				
param t: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 :=												
1	0	5	4	6	9	16	3	5	4	6	8	12
	80	16	33	5	14	5	67	11	15	4	0	
:												
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
param s: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 :=												
1	0	30	15	30	15	30	25	20	30	15	35	15
	30	30	30	30	25	20	30	0				
param e: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 :=												
1	0	60	120	0	0	60	60	60	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60	0
param l: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 :=												
1	360	240	360	120	120	180	360	240	240	240	240	120
	240	240	180	120	240	360						
param C: 1 2 3 4 5 :=												
1	12	3.8	9	25	3.8							

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Nos dados constam as informações necessárias para que o modelo execute os cálculos e apresente o resultado. Os dados completos de distância e tempo para o caso da transportadora podem ser encontrados nos anexos A e B, respectivamente. Alguns parâmetros são organizados numa matriz como na tabela de distâncias  $d$  e no tempo  $t$ , de acordo com a expansão das informações. Os dados em IBM ILOG® CPLEX® da transportadora são observados na Figura 10.

Figura 10 - Dados do problema de LAZZARI (2018) em IBM ILOG® CPLEX®

CV=	[0.79, 0.55, 0.86, 2.4, 0.79];
CF=	[196.07, 141.08, 166.51, 363.11, 141.08];
q=	[0, 0.3, 2.84, 3.05, 0.55, 1.04, 5.98, 2.2, 1.01, 9.14, 0.06, 7.22, 0.06, 6.19, 0.22, 2.11, 3.4, 2.03, 4.1, 0];
d=	[[1000.0, 1.9, 2.4, 96.33, 8.3, 1.6, 73.5, 95.743, 7.0, 98.6, 9.9, 36.9, 3.55, 10.42, 3.6, 94.523, 8.32, 7.995, 2.4, 1000.0],
:	
	[ 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0, 1000.0];
t=	[[0, 5, 4, 69, 16, 3, 54, 68, 12, 80, 16, 33, 5, 14, 5, 67, 11, 15, 4, 0]
:	
	Continua...

```

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];

s= [0, 30, 15, 30, 15, 15, 30, 25, 20, 30, 15, 35, 15, 30, 30, 30, 25, 20, 30, 0 ];

e= [ 0, 60, 120, 0, 0, 60, 60, 60, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 60, 0];

l= [360, 240, 360, 120, 120, 180, 360, 240, 240, 240, 240, 240, 120, 240, 240, 180, 120, 120, 240, 360 ];

C= [ 12, 3.8, 9, 25, 3.8];

```

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

A diferença mais perceptível está na organização das matrizes, que tem um enquadramento diferente no *solver* IBM ILOG® CPLEX®. Dados completos de distância e tempo podem ser encontrados nos anexos A e B, respectivamente. Os dados da distribuidora estão apresentados na Figura 11. São válidas as mesmas observações apresentadas para o modelo em Gurobi™, com a diferença que neste caso, o problema possui 24 nós. Os dados completos de distância e tempo podem ser encontrados no anexos C e D, respectivamente.

Figura 11 - Dados do problema de LIMA (2019) no Gurobi™

```

param N=24;

param V=7;

param M=10000000;

param CV: 1 2 3 4 5 6 7 :=
1 1 1 1 1 2 2 2;

param CF: 1 2 3 4 5 6 7 :=
1 0 0 0 0 0 0 0;

param q: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 :=
1 0 12 8 16 7 4 18 11 30 9 10 6 16 27 23 8 9 10 8 6 84 16 4 0 ;

param d:1      2      3      4      5      6      7      8      9      10      11      12
      13      14      15      16      17      18      19      20      21      22      23      24
:=
1      9999      15.3      9      42.2      21.6      2.6      15      15      22.9      19.4      18      42.8
      31.7      54.9      52.8      54      44.3      47.9      43.5      51.5      53.2      43.4      45.4      9999.
:
24      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999
9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999      9999

```

Continua...

param t:1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
:=												
1	0	15	9	37	21	5	19	19	22	20	19	61
	41	66	59	62	38	49	38	56	61	37	38	0
:												
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0;
param s: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 :=												
1 0 34 6 50 5 6 54 27 0 9 13 11 62 36 21 0 16 10 6 7 40 30 5 0;												
param e: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 :=												
1 0 180 60 0 60 0 0 0 0 0 0 120 0 0 0 0 0 0 0 240 0 0 0 0 ;												
param l: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24:=												
1 600 420 300 300 600 300 300 300 300 300 300 540 300 600 300 300 300 300 600 300 300 240 600 ;												
param C: 1 2 3 4 5 6 7:=												
1 300 300 300 300 600 600 600;												

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Os mesmos dados em IBM ILOG® CPLEX® podem ser observados na Figura 12.

Figura 12 - Dados do problema de LIMA (2019) no IBM ILOG® CPLEX®

N=24;												
V=7;												
M=10000000;												
CV= [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2];												
CF= [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];												
q= [0, 12, 8, 16, 7, 4, 18, 11, 30, 9, 10, 6, 16, 27, 23, 8, 9, 10, 8, 6, 84, 16, 4, 0];												
d=	[[9999,	15.3,	9,	42.2,	21.6,	2.6,	15,	15,	22.9,	19.4,	18,	
	42.8,	31.7,	54.9,	52.8,	54,	44.3,	47.9,	43.5,	51.5,	53.2,	43.4,	45.4, 9999],
:												
	[9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,
	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,	9999,
	9999]];											
t=	[[0,	15,	9,	37,	21,	5,	19,	19,	22,	20,	19,	61,
	41,	66,	59,	62,	38,	49,	38,	56,	61,	37,	38,	0],
:												
	[0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0]];
Continua...												

$s = [0, 34, 6, 50, 5, 6, 54, 27, 0, 9, 13, 11, 62, 36, 21, 0, 16, 10, 6, 7, 40, 30, 5, 0];$  $e = [0, 180, 60, 0, 60, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 120, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 240, 0, 0, 0, 0];$  $l = [600, 420, 300, 300, 600, 300, 300, 300, 300, 300, 300, 300, 540, 300, 600, 300, 300, 300, 300, 300, 600, 300, 300, 240, 600];$  $C = [300, 300, 300, 300, 600, 600, 600];$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

As mesmas observações para o caso da transportadora, a matriz e a lista são declaradas de outra forma em IBM ILOG® CPLEX® em relação ao Gurobi™. Dados completos de distância e tempo podem ser encontrados nos anexos C e D, respectivamente. Os modelos e os dados em programação são visivelmente diferentes e seus desempenhos são afetados pela complexidade distinta, como é explorado no próximo capítulo.

Na próxima seção são tratados os estudos de caso analisados, suas características e resultados.

### 3 ESTUDOS DE CASO

No presente capítulo são detalhados os dois casos analisados, cuja problemática se utiliza de roteirização de veículos com janelas de tempo e múltiplos viajantes. A primeira é um estudo de caso de uma transportadora (LAZZARI, 2018), e a segunda é relativa a uma distribuidora de alimentos (LIMA, 2019).

#### 3.1 CASO EM UMA TRANSPORTADORA

O primeiro estudo de caso é relativo a uma transportadora de cargas fracionadas, localizada em Joinville (SC), cuja operação solicita a otimização de suas rotas para uma quantidade fixa de clientes, que inclui janelas de tempo, limitação de capacidade e múltiplos veículos coletores. Desse modo, fornecidos os custos e capacidades de cada veículo, janelas de tempo de cada cliente, demanda dos clientes, tempos de coleta e matriz de distâncias, foram inseridas as informações na linguagem AMPL (LAZZARI, 2018).

A seguir é apresentado o modelo na linguagem AMPL utilizando a plataforma Gurobi™.

##### 3.1.1 Solução com o *solver* Gurobi™

É realizado um primeiro teste para reconstruir o programa de validação proposto pelo autor e observar se corroborava com resultados encontrados no estudo anterior. O modelo tem seis nós, quatro clientes e dois veículos para coleta. Os dados dos veículos podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1 – Veículo da frota

Veículo	Capacidade ( $m^3$ )	Custo Variável (R\$/Km)	Custo Fixo (R\$/dia)
1	2	0,2	5
2	6	0,4	10

Fonte: LAZZARI (2018)

Informações sobre os nós de origem e destino como volume demandado por cliente, tempo de atendimento e intervalo de atendimento requisitado são especificados na Tabela 2.

Tabela 2 – Informações dos pontos de coleta (clientes)

Cliente	Volume (m <sup>3</sup> )	Tempo de atendimento (min)	Início (horas)	Fim (horas)	Início (min)	Fim (min)
1	0	0	08:00	12:00	0	240
2	1	20	08:00	10:00	0	120
3	1	30	08:00	10:00	0	120
4	3	35	08:00	10:00	0	120
5	3	25	08:00	10:00	0	120
6	0	0	08:00	12:00	0	240

Fonte: LAZZARI (2018)

A distância entre os nós é especificada na Tabela 3.

Tabela 3 – Matriz distâncias

Cliente	1	2	3	4	5	6
1	-	8,3	7,0	3,6	3,6	-
2	-	-	14,3	47,0	4,7	8,3
3	-	14,3	-	9,5	10,0	7,0
4	-	47,0	9,5	-	0,4	3,6
5	-	13,7	11,1	9,2	-	8,3
6	-	-	-	-	-	-

Fonte: LAZZARI (2018)

O tempo de viagem entre os nós pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 – Matriz tempos de viagem

Cliente	1	2	3	4	5	6
1	0	16	12	5	5	0
2	0	0	22	9	9	16
3	0	20	0	14	15	12
4	0	10	13	0	1	5
5	0	20	11	12	0	10
6	0	0	0	0	0	0

Fonte: LAZZARI (2018)

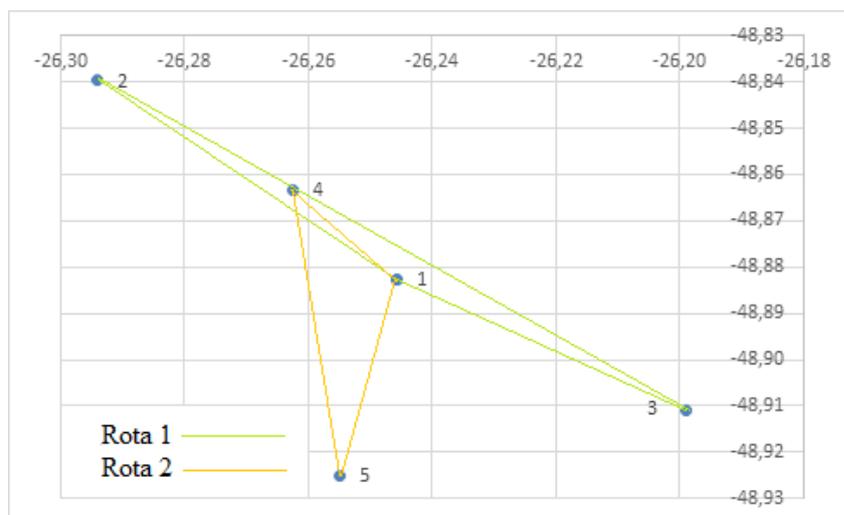
Os dados são implementados na linguagem AMPL e enviados ao *solver* Gurobi™, obtendo os resultados apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Rotas resultantes	
Arco	Veículo
1-3	1
1-4	2
2-6	1
3-2	1
4-5	2
5-6	2

Fonte: Gurobi™ (2019)

A rota completa do veículo 1 é constituída por 1-3-2-6, e, do veículo 2 por 1-4-5-6, como indicado na Figura 13.

Figura 13 - Trajeto nas rotas



Fonte: LAZZARI (2018)

Os eixos coordenados da Figura 13 representam a posição e distância espacial entre os nós. O próximo passo é construir uma configuração semelhante ao projeto principal de LAZZARI (2018), com 20 nós e 5 veículos. Porém, devido à ausência de dados como distâncias, não foi possível num primeiro momento testar o programa.

Tabela 6 – Janela de horários, tempos de coleta e demanda dos clientes

Cliente	Início	Fim	Tempos atendimento (min)	Volume ( $m^3$ )
1	08:00	14:00	0	0
2	09:00	12:00	30	0,3
3	10:00	14:00	15	2,84
4	08:00	10:00	30	3,05
5	08:00	10:00	15	0,55
6	09:00	11:00	15	1,04
7	09:00	14:00	30	5,98
8	09:00	12:00	25	2,2
9	08:00	12:00	20	1,01
10	08:00	12:00	30	9,14
11	08:00	12:00	15	0,06
12	08:00	12:00	35	7,22
13	08:00	10:00	15	0,06
14	08:00	12:00	30	6,19
15	08:00	12:00	30	0,22
16	08:00	11:00	30	2,11
17	08:00	10:00	25	3,4
18	08:00	10:00	20	2,03
19	09:00	12:00	30	4,1
20	08:00	14:00	0	0

Autor: LAZZARI (2018)

Entrando em contato com o autor foi possível adquirir a tabela completa com as distâncias e tempos de viagem com até 30 nós (Tabela 6). Mas, os dados fornecidos são mais recentes, então, uma comparação entre os dois não pôde ser realizada, contudo, para o modelo com 20 nós e 5 veículos, foi possível obter os resultados esperados.

Os tipos de veículos analisados e as restrições de capacidade e custos fixo e variável, podem ser observados na Tabela 7.

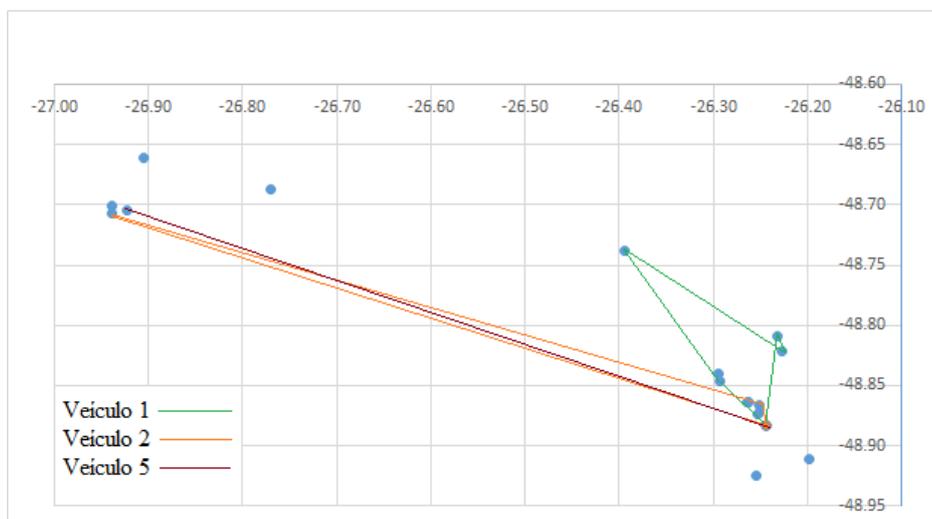
Tabela 7 – Tipos de Veículos da frota da empresa

Veículo	Tipo	Capacidade ( $m^3$ )	Custo Variável (R\$/Km)	Custo Fixo (R\$/dia)
1	SPRINTER	12	0,79	196,07
2	FIORINO	3,8	0,55	141,08
3	MASTER	9	0,86	166,51
4	TOCO	25	2,4	363,11
5	FIORINO	3,8	0,79	141,08

Fonte: LAZZARI (2018)

Os resultados obtidos, comparados aos atingidos por LAZZARI (2018), foram diferentes devido aos dados importados que eram mais atuais, mas que chegaram a um resultado viável para o problema. Uma pequena alteração nas janelas de tempo na restrição C7 da figura 7 foi necessária para que a viagem do depósito ao primeiro cliente pudesse ser contabilizada. Então a restrição dos nós nas janelas de tempo foi modificada de  $(2..N - 1)$ , para  $(1..N - 1)$ , logo, a soma da primeira viagem é considerada, mas não a última, pois o depósito seria repetido, o que desconsideraria a viagem de volta, respeitando os horários dos clientes.

Figura 14 - Rotas dos veículos 1, 2 e 5

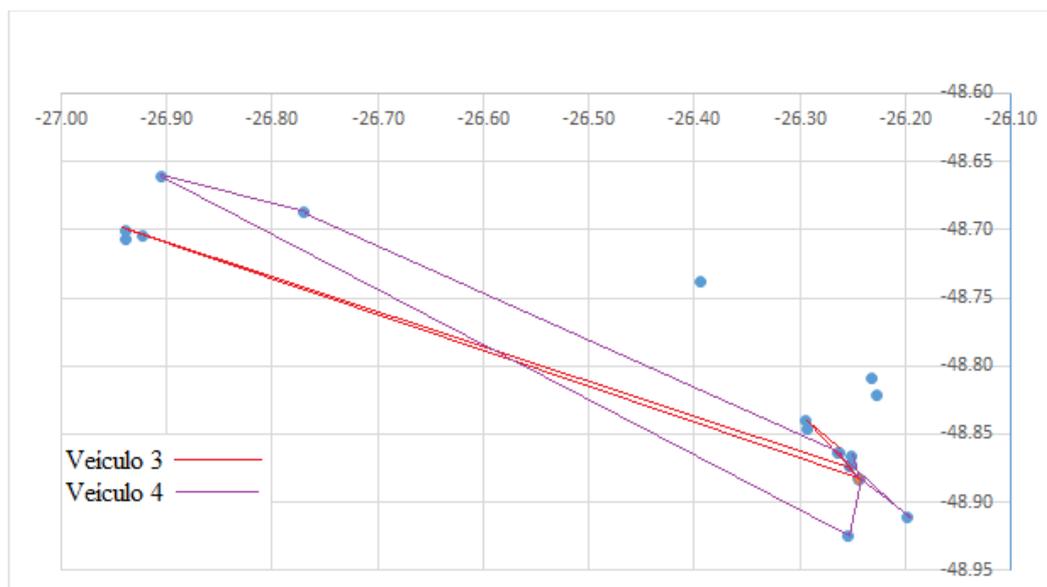


Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Aplica-se o modelo matemático em linguagem AMPL enviando ao *solver* Gurobi™, o resultado das rotas pode ser observado na Figura 14 para os veículos 1, 2 e 5.

Idêntico a Figura 13, os eixos coordenados da Figura 14, representam a posição e distância espacial entre os nós. Na Figura 15 detalha-se as rotas dos veículos 3 e 4.

Figura 15 - Rotas dos veículos 3 e 4



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

As rotas obtidas são apresentadas na Tabela 8, com os períodos demandados por cada nó.

Pelos dados apresentados na Tabela 8, analisando o horário de chegada de cada veículo no respectivo nó, observa-se que nenhum deles ultrapassou os limites das janelas de tempo introduzidos pela Tabela 6.

Na Tabela 8, o horário de atendimento refere-se ao tempo necessário para atender o cliente, onde o tempo de viagem é o tempo que o motorista levou do cliente anterior até o cliente atual; ao horário de chegada, no qual o tempo exato em que o motorista chega ao cliente após viagem, e o horário, representando a soma dos tempo de atendimento com tempo de viagem, partindo do horário anterior, para fins de cálculo.

Observa-se também na Tabela 8, que os tempos de chegada em cada cliente estão dentro das restrições de janelas de tempo estabelecidas, como se observa em horário de chegada no local, que seguem as restrições da Tabela 6.

Tabela 8 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total

Veículo	Roteiro	Tempo de Atendimento (min)	Tempo de viagem (min)	Horário de chegada no local	Horário
1	1	0	0	---	08:56
	19	30	4	09:00	09:34
	13	15	3	09:33	09:48
	12	35	27	10:15	10:50
	15	30	29	11:19	11:49
	20	0	5	---	11:54
2	1	0	0	0	08:00
	5	15	16	08:16	08:31
	4	30	72	09:43	10:13
	20	0	69	---	11:22
3	1	0	0	---	08:00
	14	30	14	08:14	08:44
	6	15	10	08:54	09:09
	2	30	2	09:11	09:41
	9	20	12	09:53	10:13
	20	0	12	---	10:25
4	1	0	0	---	08:00
	18	20	15	08:15	08:35
	11	15	16	08:51	09:06
	8	25	75	10:21	10:46
	16	30	5	10:51	11:21
	10	30	16	11:37	12:07
	7	30	26	12:33	13:03
	3	15	51	13:54	14:09
	20	0	4	---	14:13
5	1	0	0	---	08:00
	17	25	11	08:11	08:36
	20	0	11	---	08:47

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Na Tabela 9 apresenta-se a capacidade utilizada pelos veículos em cada rota.

Tabela 9 – Distância percorrida por veículo

Veículo	1	2	3	4	5
Capacidade máxima ( $m^3$ )	12	3,8	9	25	3,8
Volume coletado	11,6	3,6	8,54	24,36	3,4
Capacidade utilizada (%)	96,67	94,73	94,89	97,44	89,47

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Observa-se ainda, da Tabela 9, as distâncias percorridas por cada veículo e sua capacidade utilizada durante o roteiro. Observa-se que a capacidade de cada veículo é otimizada ao máximo durante as viagens.

Os resultados comprovam a eficiência do código em respeitar os limites de tempo estabelecidos e otimizar as capacidades de cada veículo, diminuindo ao máximo os custos por carga.

Na seção a seguir é apresentado o mesmo modelo no *solver* IBM ILOG® CPLEX® da plataforma IBM (IBM, 2019).

### 3.1.2 Solução com o *solver* IBM ILOG® CPLEX®

Através do *solver* IBM ILOG® CPLEX® também é possível resolver o modelo para o caso da transportadora e o resultado pode ser visto na Tabela 10.

Tabela 10 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total

Veículo	Roteiro	Tempo de Atendimento (min)	Tempo de viagem (min)	Horário de chegada no local	Horário
1	1	0	0	---	08:56
	19	30	4	09:00	09:34
	13	15	3	09:33	09:48
	12	35	27	10:15	10:50
	15	30	29	11:19	11:49
	20	0	5	---	11:54
2	1	0	0	0	08:00
	5	15	16	08:16	08:31
	4	30	72	09:43	10:13
	20	0	69	---	11:22
3	1	0	0	---	08:00
	14	30	14	08:14	08:44
	6	15	10	08:54	09:09
	2	30	2	09:11	09:41
	9	20	12	09:53	10:13
	20	0	12	---	10:25
4	1	0	0	---	08:00
	18	20	15	08:15	08:35
	11	15	16	08:51	09:06
	8	25	75	10:21	10:46
	16	30	5	10:51	11:21
	10	30	16	11:37	12:07
	7	30	26	12:33	13:03
	3	15	51	13:54	14:09
	20	0	4	---	14:13
5	1	0	0	---	08:00
	17	25	11	08:11	08:36
	20	0	11	---	08:47

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Análogo a Tabela 8, na Tabela 10 tem-se em ordem a partir da terceira coluna: o tempo necessário de atendimento ao cliente, o tempo que o motorista levou do cliente anterior até o cliente atual, o tempo exato que o motorista chega no cliente após uma viagem e a soma dos tempo de atendimento com tempo de viagem partindo do horário anterior, para fins de cálculo.

Na próxima seção apresenta-se o estudo de caso de uma distribuidora considerado em (LIMA, 2019).

### 3.2 CASO EM UMA DISTRIBUIDORA

O segundo caso envolve uma distribuidora do setor alimentício abordado por LIMA (2019). O trabalho consistiu em otimizar rotas de entrega de um dos quinze centros de distribuição para um dia especificado, cujo número de clientes era originalmente de 29 atendidos pelo centro, respeitando restrições de capacidade, demanda dos clientes, janelas de tempo e jornada máxima de cada veículo.

A seguir, é apresentado o modelo na linguagem AMPL utilizando a plataforma Gurobi™ para resolução do problema.

#### 3.2.1 Solução com o Gurobi™

Para formulação do modelo algumas mudanças tiveram que ser realizadas, uma delas corresponde as janelas de tempo, em que foi estipulado que as entregas deveriam ocorrer entre 07:00 e 12:00 horas e um máximo de 24 nós (22 clientes) em vez de 29 para facilitar a carga de trabalho do programa.

Alguns dados foram deixados com maior intervalo de valor porque não modificavam o resultado final, como em que alguns clientes por disporem uma margem de atendimento bem amplo, suas janelas de tempo não precisavam ser padronizadas entre 07:00 e 12:00 horas.

Os dados de capacidade de cada veículo podem ser observados na Tabela 11.

Tabela 11 – Capacidade dos veículos

Veículo	Capacidade (Caixas)
1	300
2	300
3	300
4	300
5	600
6	600
7	600

Fonte: LIMA (2019)

As janelas de tempo podem ser observadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Janelas de tempo, duração de atendimento e demanda dos clientes

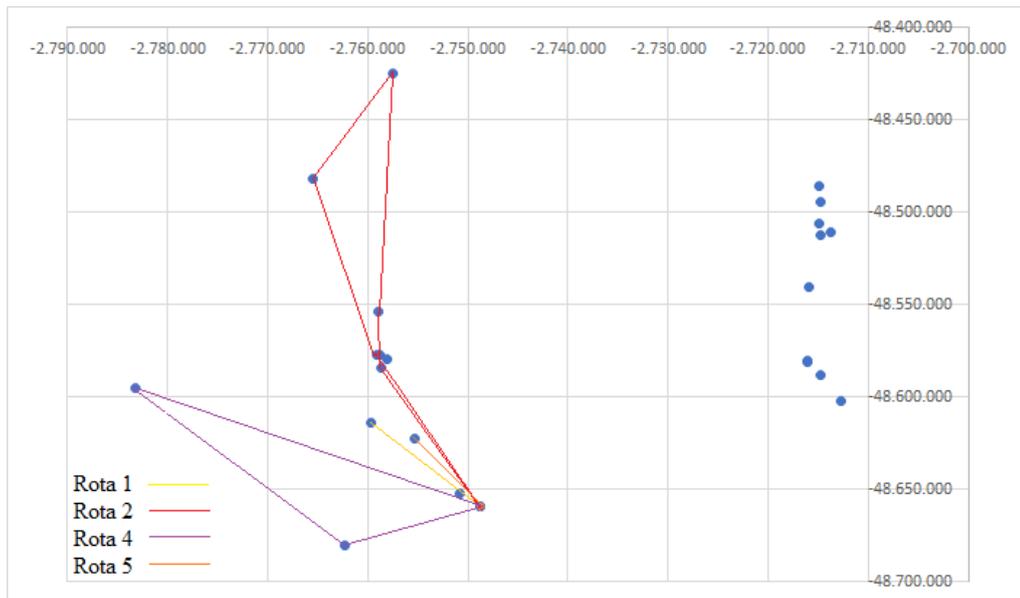
Cliente	Início Janela	Fim Janela	Duração de Atendimento	Demanda (caixas)
1	10:00:00	14:00:00	00:00:00	0
2	08:00:00	12:00:00	00:34:00	12
3	07:00:00	12:00:00	00:06:00	8
4	08:00:00	17:00:00	00:50:00	16
5	07:00:00	12:00:00	00:05:00	7
6	07:00:00	12:00:00	00:06:00	4
7	07:00:00	12:00:00	00:54:00	18
8	07:00:00	12:00:00	00:27:00	11
9	07:00:00	12:00:00	00:00:00	30
10	07:00:00	12:00:00	00:09:00	9
11	09:00:00	16:00:00	00:13:00	10
12	07:00:00	12:00:00	00:11:00	6
13	07:00:00	17:00:00	01:02:00	16
14	07:00:00	12:00:00	00:36:00	27
15	07:00:00	12:00:00	00:21:00	23
16	07:00:00	12:00:00	00:00:00	8
17	07:00:00	12:00:00	00:16:00	9
18	07:00:00	12:00:00	00:10:00	10
19	11:00:00	17:00:00	00:06:00	8
20	07:00:00	12:00:00	00:07:00	6
21	07:00:00	12:00:00	00:40:00	84
22	05:00:00	11:00:00	00:30:00	16
23	07:00:00	12:00:00	00:05:00	4
24	07:00:00	12:00:00	00:00:00	0

Fonte: LIMA (2019)

Os custos fixos e variáveis para os veículos não foram fornecidos, logo pressupondo que os veículos com o dobro de capacidade custam o dobro para se operar em custo variável, em parte devido a potência do motor necessária para se carregar mais peso em veículos maiores serem superiores, gerando maiores custos de combustível e desgastando ainda mais as peças.

O custo fixo é nulo para nivelar os veículos e facilitar o trabalho de cálculo do programa, as rotas resultantes são observadas na Figura 16 para os veículos 1, 2, 4 e 5.

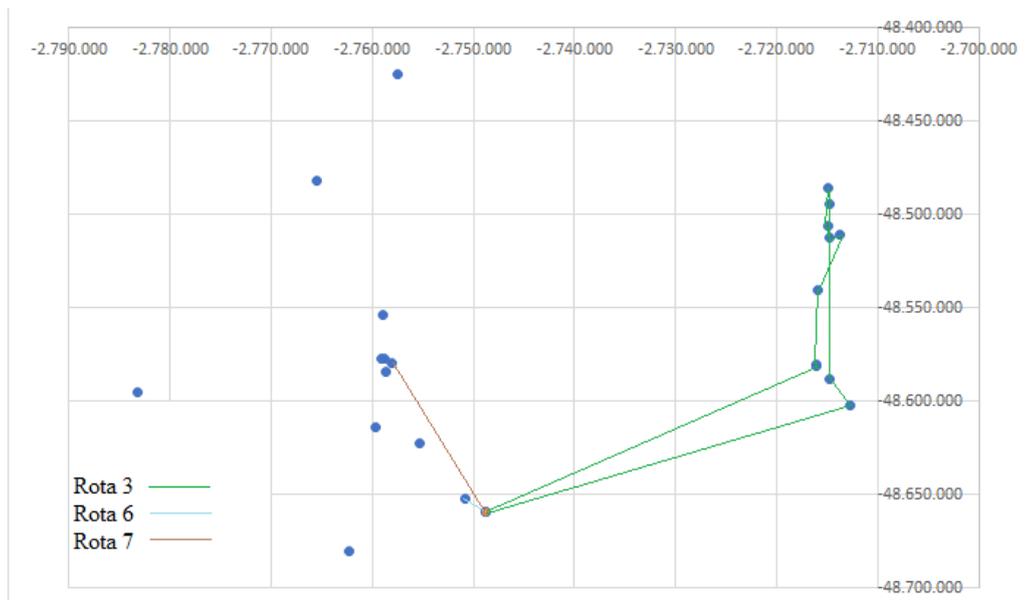
Figura 16 - Rotas dos veículos 1, 2, 4 e 5



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Como nas Figuras 13 a Figura 15, os eixos coordenados representam os espaços e distâncias percorridas pelos viajantes entre os nós. Na Figura 17 é apresentado as rotas resultantes pelos veículos 3, 6 e 7.

Figura 17- Rotas dos veículos 3, 6 e 7



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Logo, a Tabela 13 é montada de forma a analisar se os requisitos de tempo são cumpridos pelas rotas.

Tabela 13 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total

Veículo	Roteiro	Tempo de Atendimento (min)	Tempo de viagem (min)	Horário de chegada no local	Horário
1	1	0	0	---	09:45
	2	34	15	10:00	10:34
	24	0	15	---	10:49
2	1	0	0	---	07:00
	8	27	19	07:19	07:46
	9	0	13.93	07:59.43	07:59.93
	12	11.15	44	08:44	08:55
	13	62	28.42	09:24	10:26
	11	13	22	10:48	11:01
	10	9	2	11:03	11:12
24	0	19	---	11:31	
3	1	0	0	---	07:00
	23	5	38	07:38	07:43
	17	16	8	07:51	08:07
	16	0	32	08:39	08:39
	14	36	5.03	08:44.03	09:20.03
	21	40	9.12	09:29.15	10:09.15
	15	21	2	10:11.15	10:32.15
	20	6	4	10:36.15	10:40.15
	18	10	14	10:54.15	11:04.15
	19	6	14.33	11:18.48	11:24.48
	22	30	0	11:24.48	11:54.48
24	0	34	---	12:28.48	
4	1	0	0	---	08:39
	5	5	21	09:00	09:05
	4	50	28	09:33	10:23
	24	0	29	---	10:52
5	1	0	0	---	08:51
	3	6	9	09:00	09:06
	24	0	11	---	09:17
6	1	0	0	---	07:00
	6	6	5	07:05	07:11
	24	0	7	---	07:18
7	1	0	0	---	07:00
	7	54	19	07:19	08:13
	24	0	19	---	08:32

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

E as capacidades utilizadas por cada veículo na Tabela 14.

Tabela 14 – Capacidade utilizada de cada veículo

Veículo	1	2	3	4	5	6	7
Capacidade máxima (caixas)	300	300	300	300	600	600	600
Volume coletado (caixas)	12	82	195	23	8	4	18
Capacidade utilizada (%)	4	27.33	65	7.67	2.67	0.67	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Como se observa, a capacidade dos veículos não alcança seu potencial, sendo o melhor resultado com 65% de carga utilizada na rota 3. Outras alcançam capacidade muito reduzida, pois o programa é restringido a utilizar todos os caminhões e que a melhor economia é quando se leva o máximo possível respeitando as janelas de tempo, sobrando poucas rotas. Sugere-se diminuir o número de veículos para 22 clientes e ter resultado separado para outros 8 nós restantes.

Na próxima seção a solução com o solver IBM ILOG® CPLEX® para o problema da distribuidora.

### 3.2.2 Solução com o IBM ILOG® CPLEX®

O resultado obtido pelo IBM ILOG® CPLEX® para o problema LIMA (2019) e o modelo matemático (20)-(32) se encontra na Tabela 15.

Tabela 15 – Horário de atendimento, tempo de viagem, horário de chegada no cliente e horário total

Veículo	Roteiro	Tempo de Atendimento (min)	Tempo de viagem (min)	Horário de chegada no local	Horário
1	1	0	0	---	08:39
	5	5	21	09:00	09:05
	4	50	28	09:33	10:23
	24	0	29	---	10:52
2	1	0	0	---	07:00
	23	5	38	07:38	07:43
	17	16	8	07:51	08:07
	16	0	32	08:39	08:39
	14	36	5.03	08:44.03	09:20.03
	21	40	9.12	09:29.15	10:09.15
	15	21	2	10:11.15	10:32.15
	20	6	4	10:36.15	10:40.15
	18	10	14	10:54.15	11:04.15
	19	6	14.33	11:18.48	11:24.48
	22	30	0	11:24.48	11:54.48
	24	0	34	---	12:28.48
3	1	0	0	---	09:45
	2	34	15	10:00	10:34
	24	0	15	---	10:49
4	1	0	0	---	07:00
	8	27	19	07:19	07:46
	9	0	13.93	07:59.43	07:59.93
	12	11.15	44	08:44	08:55
	13	62	28.42	09:24	10:26
	11	13	22	10:48	11:01
	10	9	2	11:03	11:12
24	0	19	---	11:31	
5	1	0	0	---	07:00
	6	6	5	07:05	07:11

Continua...

<b>Veículo</b>	<b>Roteiro</b>	<b>Tempo de Atendimento (min)</b>	<b>Tempo de viagem (min)</b>	<b>Horário de chegada no local</b>	<b>Horário</b>
<b>5</b>	24	0	7	---	07:18
<b>6</b>	1	0	0	---	08:51
	3	6	9	09:00	09:06
	24	0	11	---	09:17
<b>7</b>	1	0	0	---	07:00
	7	54	19	07:19	08:13
	24	0	19	---	08:32

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Como pode-se observar na Tabela 15, os resultados são idênticos aos da Tabela 13, mesmo utilizando *solvers* e linguagens diferentes. O horário de chegada em cada cliente respeita as janelas de tempo da Tabela 12. Os clientes visitados são os mesmos para cada veículo, o que difere em algumas rotas são a sequência em que os clientes são visitados. Logo a eficácia do modelo matemático é comprovada devido a plataformas diferentes obterem resultados idênticos.

Na próxima seção são expressas as análises dos resultados do modelo matemático, comparando a eficiência dos *solvers*, analisando a complexidade de um problema NP-*Hard* e comparando os resultados obtidos com os resultados das pesquisas originais.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as análises dos resultados quanto à eficácia e eficiência dos métodos para um modelo exato, apresentando seus códigos e resultados

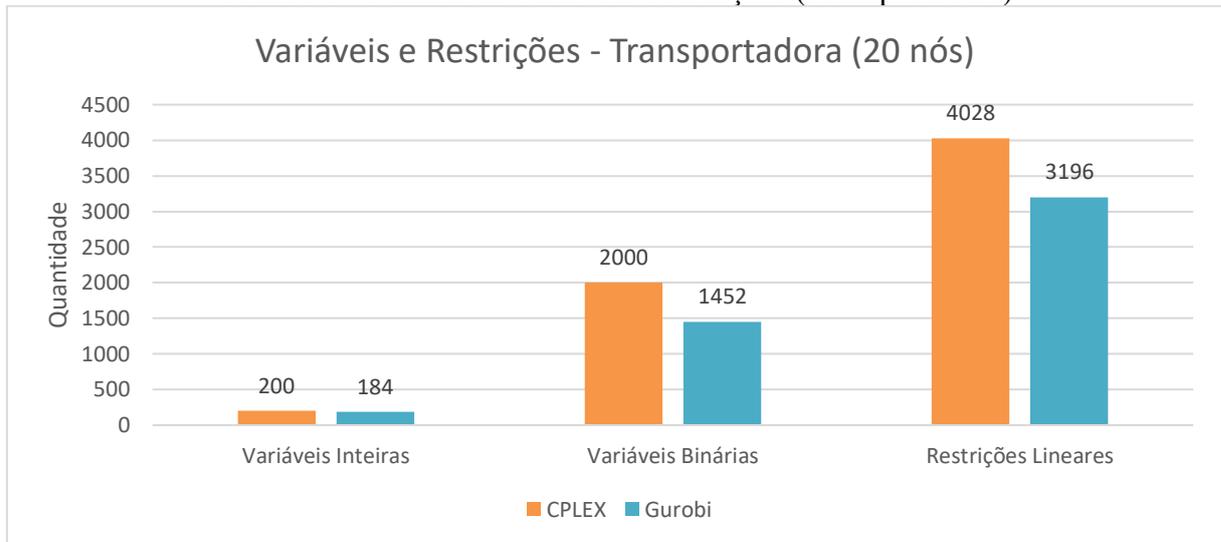
Foram realizados testes com 20 nós e 5 veículos para um cenário 1, no caso da transportadora, 24 nós e 7 veículos para um cenário 2, no caso da distribuidora. Utilizando a linguagem AMPL com o *solver* Gurobi™ e OPL com o *solver* IBM ILOG® CPLEX® da IBM, foi possível alcançar em um PRVJTMV, resultados para até 31 nós que era o limite dos dados das problemáticas originais, sendo calculados nas plataformas online NEO SERVER (*Network-Enabled Optimization System Server*), IBM® Decision Optimization e um notebook pessoal para as versões offline dos *solvers*, que serão comparadas de maneira a encontrar a mais eficiente em demanda computacional e no tempo de resposta mínimo.

### 4.1 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM OS SOLVERS GUROBI™ E IBM ILOG® CPLEX®

É possível analisar alguns parâmetros utilizados na execução de um PRVJTMV com o Gurobi™ e o IBM ILOG® CPLEX®, como observado no Gráfico 1, no qual apresenta-se o número de variáveis e restrições para o caso da transportadora.

No eixo vertical do Gráfico 1, é informado a quantidade de variáveis ou restrições que cada *solver* teve que calcular, o eixo das abscissas tem-se o tipo, podendo ser inteiras, binárias ou lineares. O Gráfico 1 mostra que o Gurobi™ possui o menor número de variáveis e restrições para calcular e chegar ao mesmo resultado, cujas diferenças na quantidade são de 20% em restrições lineares e 28% em variáveis binárias.

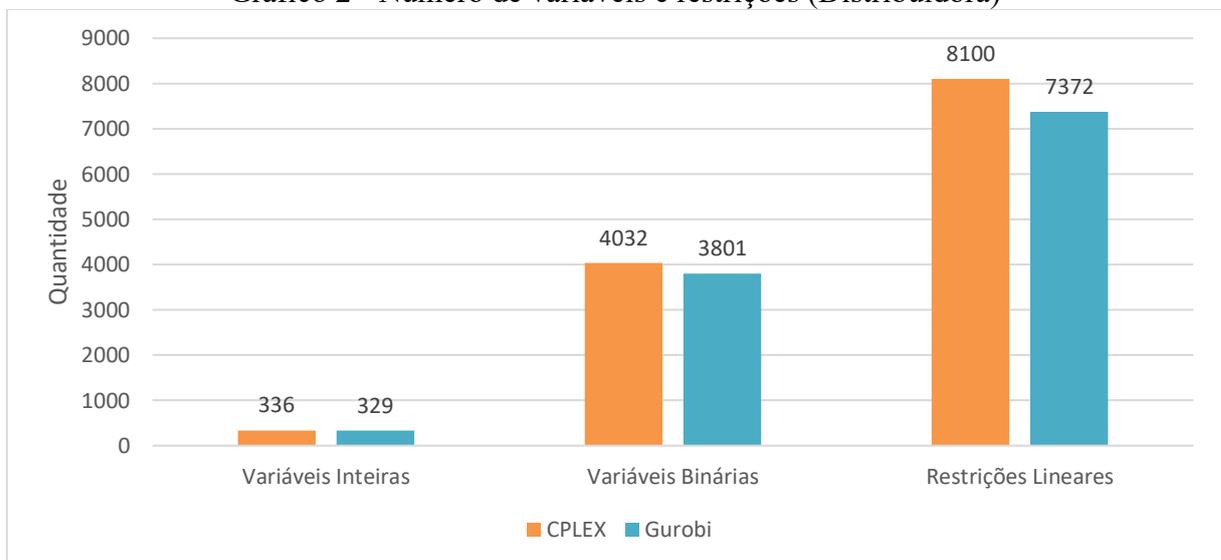
Gráfico 1 - Número de variáveis e restrições (Transportadora)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

De forma análoga, o Gráfico 2 apresenta o número de variáveis para o caso da distribuidora, com 24 nós e 7 veículos.

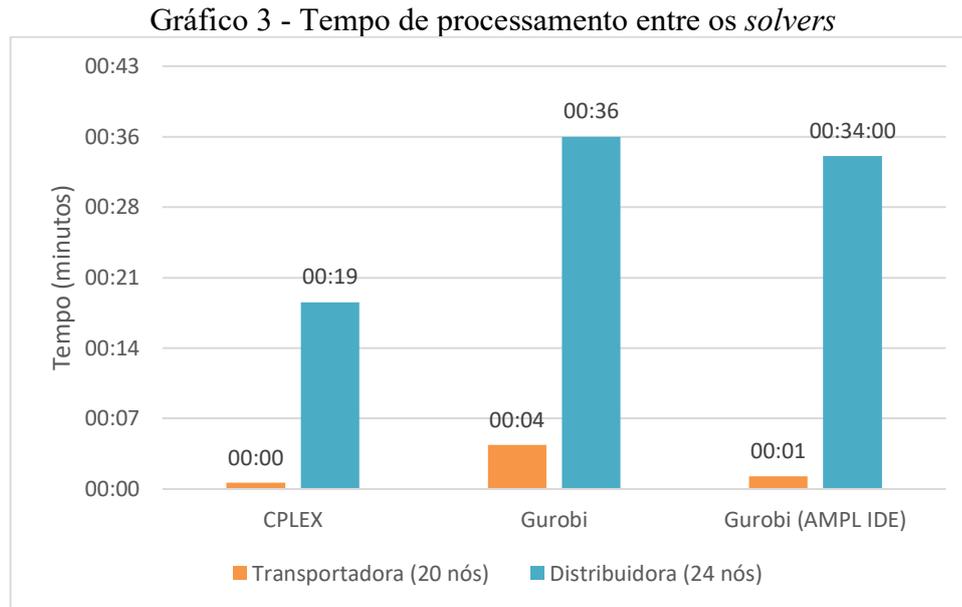
Gráfico 2 - Número de variáveis e restrições (Distribuidora)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Similar ao Gráfico 1, no eixo vertical do Gráfico 2, tem-se a quantidade a variáveis e restrições que cada *solver* calculou e o eixo horizontal informa seu tipo.

Idêntico ao Gráfico 1, nota-se no Gráfico 2 a diferença do número de variáveis e restrições calculadas em Gurobi™ e IBM ILOG® CPLEX®, tendo menos variáveis e restrições para calcular no Gurobi™, evidenciando um algoritmo mais otimizado. No Gráfico 3 comparamos os tempos de processamento para se chegar a resposta, tendo sido utilizada a plataforma IBM ILOG® CPLEX® da IBM, Gurobi™ e Gurobi™ no notebook (AMPL IDE).



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

No eixo vertical do Gráfico 3, tem-se o tempo de processamento em minutos de cada *solver*, estes denotados pelo eixo horizontal.

Os modelos gerados em Gurobi™, tanto no servidor quanto no computador local, de maneira geral, demandaram maior tempo de processamento, embora calculem muito menos variáveis e restrições, quando comparado ao IBM ILOG® CPLEX®. Isso é possível devido a questões de latência do servidor para entrega de resultados e porque os servidores IBM testados em licença gratuita temporária, são potentes e custam R\$40/hora, diferente do Gurobi™ com AMPL IDE no notebook testado com licença estudantil e do Gurobi™ com servidor gratuito NEO SERVER, logo uma comparação entre plataformas não é viável, mas é importante como informação para escolha, pois não necessariamente alguma traz mais vantagens do que outra no quesito rapidez com que se obtém o retorno da solução.

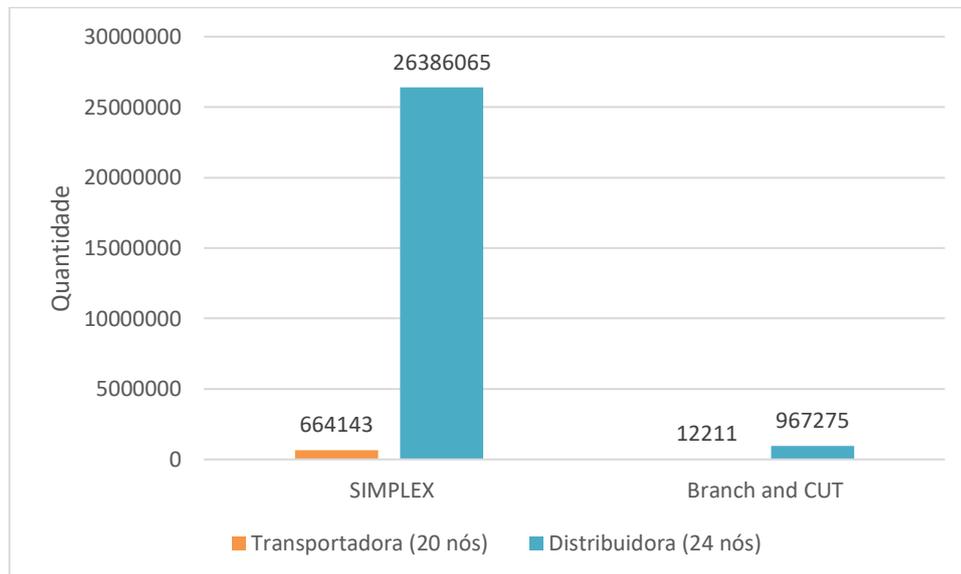
Observa-se uma diferença significativa entre os modelos de 24 nós em relação ao de 20 nós, devido ao número de cálculos que um *NP-hard* pode gerar com o aumento de apenas alguns nós, em escala exponencial. O Gráfico 4 evidencia esta diferença comparando o nº de interações *branch-and-cut* e *simplex* dos problemas para se chegar à resposta, ambos algoritmos exatos que calculam os modelos.

No eixo vertical do Gráfico 4, é informado a quantidade de interações feitas pelos *solvers* para obtenção do resultado. No eixo horizontal o tipo de interações, podendo ser *simplex* ou *branch and cut*, ambos algoritmos otimizados para modelos exatos.

A diferença de desempenho entre os problemas da transportadora e da distribuidora evidencia a carga de trabalho e a complexidade que é gerada em modelos exatos de

PRVJTMV, indicando a necessidade de computadores mais potentes, sendo recomendado o uso de meta-heurísticas para problemas maiores.

Gráfico 4 - Número de interações no Gurobi™



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Para efeitos práticos a melhor alternativa de *solver* é o Gurobi™ com AMPL IDE em computador local com licença estudantil, que não tem limite de tempo de processamento, conseguindo resultados de forma mais rápida. A segunda melhor alternativa é o Gurobi™ nos servidores da NEO SERVER, ideal pela praticidade, flexibilidade e quando não se tem uma ferramenta computacional dedicada.

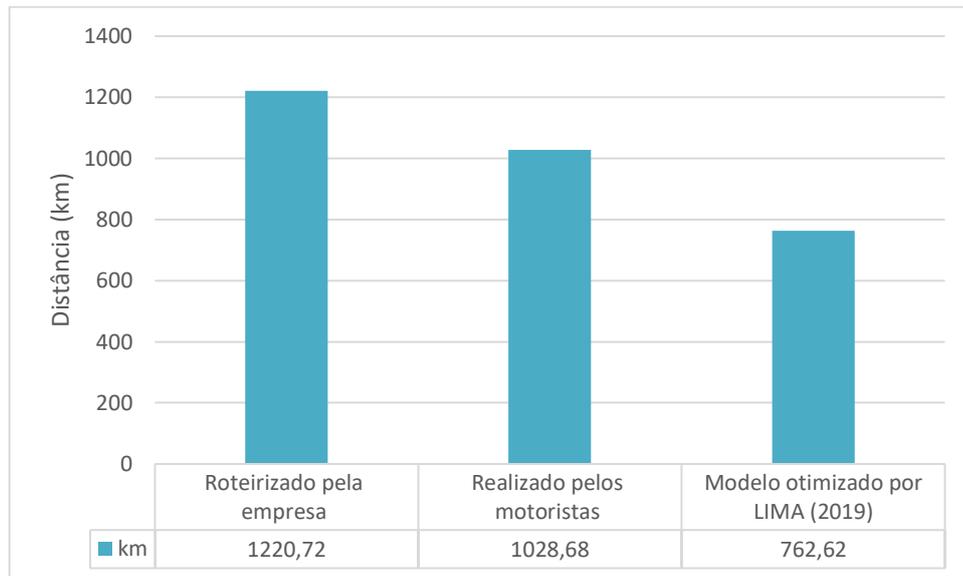
A plataforma IBM ILOG® CPLEX® em computador local é limitada a 16 nós, se mostrando eficiente para desenvolver o código pois o programa tem auxílio a erros. O IBM ILOG® CPLEX® nos servidores IBM é recomendado para testes com mais de 16 nós, sendo de licença gratuita temporária, útil para corroborar testes feitos em Gurobi™.

#### 4.2 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM OS RESULTADOS APRESENTADOS NAS PESQUISAS ORIGINAIS

Para o modelo de LIMA (2019), é possível realizar uma comparação aproximada, mas não exata, devido a diferença nas metodologias utilizadas.

O Gráfico 5 apresenta os modelos roteirizados pela pesquisa original e os utilizados pela distribuidora.

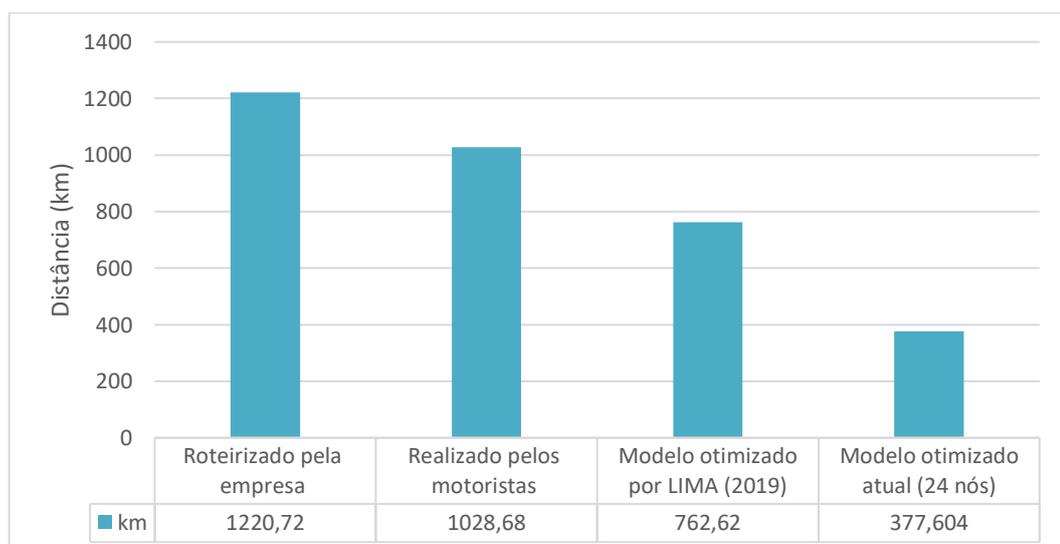
Gráfico 5 – Distâncias percorridas dos sequenciamentos de rotas da pesquisa de LIMA (2019)



Fonte: LIMA (2019)

No eixo vertical do Gráfico 5, é informado a distância em quilômetros que cada modelo conseguiu roteirizar dadas as mesmas condições observadas. No eixo horizontal os modelos analisados, que são o roteirizado pela empresa, o roteirizado pelos motoristas, que por intuição conseguem caminhos melhores e os otimizados por LIMA (2019) através do *solver* Gurobi™, também o valor exato de cada um em quilômetros.

Gráfico 6 - Comparação das distâncias no sequenciamento de rotas obtidas com a aplicação do modelo



Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Do Gráfico 5 observa-se que o modelo otimizado por LIMA (2019) chegou a uma rota percorrida total de todos os veículos para 31 nós de 762,62 km, bem inferior ao roteirizado pela empresa e pelos motoristas.

Uma comparação dos resultados obtido com a aplicação do modelo considerado deste trabalho é feita para análise, como visto no Gráfico 6.

Semelhante ao Gráfico 5, o eixo vertical informa as distâncias percorridas em quilômetros pelos modelos roteirizados, estes categorizados no eixo horizontal, com o valor exato percorrido em quilômetros. A diferença é a inclusão do modelo otimizado deste trabalho, para efeitos comparativos, com os modelos apresentados por LIMA (2019).

O estudo do presente trabalho foi realizado a 24 nós devido a limitações que o modelo exato nas plataformas pode calcular, mas é perceptível no Gráfico 6, que com 77% dos nós visitados chegam a apenas metade da distância total percorrida pelo modelo otimizado por LIMA (2019), o que comprova eficácia e a eficiência do modelo. Isso em parte, é explicado também, devido ao modo como LIMA (2019) aplicou seu modelo, dividindo as visitas por partes e fazendo uma junção delas para compor as rotas totais.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O sistema logístico atual necessita de boas alternativas para otimização de roteiros, que em muitas empresas ainda se tem como meio os métodos não matemáticos ou sem metodologia ideal para obter uma verdadeira economia em transportes, cuja implementação otimiza o nível de serviço, gera vantagem competitiva e estratégia mais madura, visto que outras áreas estão cada vez mais carentes de diminuição de custos.

Alternativas como os problemas de roteirização com janelas de tempo e múltiplos viajantes (PRVJTMV), tem se provado eficientes para otimização de rotas com aplicação real, pois lidam com as principais variáveis destes problemas como os custos fixos e variáveis, quantidade máxima transportada de cada veículo e janelas de tempo para atendimento dos clientes.

O modelo exato para PRVJTMV é uma alternativa segura e viável para problemas de roteirização, não necessitando de tantos nós, de resposta rápida e flexível. Os modelos apresentados no presente trabalho tiveram resultados de melhoria significativa, considerando todas as restrições e detalhes para cada problema tratado.

Dos objetivos específicos, foi possível identificar um modelo matemático de roteirização com as restrições necessárias a partir do modelo matemático de LAZZARI (2018), sendo possível realizar os testes iniciais com êxito com os dados do problema da Transportadora no Gurobi™. Com o mesmo modelo foi possível aplicar o método exato com as restrições de capacidade e janelas de tempo em AMPL no Gurobi™ e em OPL no IBM ILOG® CPLEX®. Finalmente foi viável realizar comparações dos resultados entre o modelo exato de LIMA (2019) e o modelo do presente trabalho com bons resultados de otimização.

As dificuldades iniciais da realização do trabalho foram de adaptar idealmente o modelo exato no Gurobi™ para a problemática tratada, alocando os dados de maneira correta com as janelas de tempo e demais informações.

Uma das dificuldades foi na implementação do código para o problema da transportadora, que não respeitava as janelas de tempo que a restringiam, sendo feito uma

análise e descoberto que o problema não considerava nos cálculos o tempo de viagem inicial, assim corrigido posteriormente.

Outra dificuldade foi na adaptação do código para a plataforma IBM ILOG® CPLEX®, tendo que recorrer a exemplos e tutoriais tanto na própria plataforma da IBM quanto em fóruns especializados do *solver*.

Com tais dificuldades os métodos tiveram bons resultados, mesmo não obtendo uma comparação perfeita com as pesquisas originais, foi possível até uma comparação de eficiência de modelos. Os modelos exatos tratados podem servir de implementação para transportadoras e distribuidoras de pequeno e médio porte, a depender do número de clientes simultâneos, com bons resultados de otimização.

Comparando os resultados do trabalho com o sequenciamento de rotas da distribuidora, o modelo encontrado se tornou mais eficiente, para 77% das rotas visitadas alcançou metade da distância percorrida pela pesquisa original. O modelo para a transportadora encontrou resultado satisfatório para 5 veículos e 20 clientes, reproduzindo o modelo original, embora uma comparação não sendo possível devido aos dados serem de outra data.

Com estes resultados se conclui que os modelos desenvolvidos, embora necessitem de maior pesquisa, se apresentaram suficientes e com bons resultados na resolução dos problemas da transportadora e da distribuidora. Métodos heurísticos e meta-heurísticos são ferramentas obrigatórias para modelos maiores e de tempo hábil, mas ainda assim os modelos exatos podem ser suficientes para implementação real em muitas empresas, tendo resultados mais precisos e que atendam todas as necessidades e restrições requeridas.

Para trabalhos futuros são propostas as seguintes sugestões:

1. Aumentar o número de nós e veículos para conseguir resultados mais robustos;
2. Aumentar e simplificar as restrições a partir do modelo proposto;
3. Aplicar alguma meta-heurística concisa e compare com a eficácia dos modelos exatos;
4. Fazer uso de meta-heurística e do modelo exato para que em aplicações reais sejam cada vez mais precisos.

## REFERÊNCIAS

ALVES, R.; DELGADO, C. Programação Linear Inteira. **Uporto**. v. 1, n. 1, p. 05-25, 1997.

AMPL. **Why AMPL**. 2019. Disponível em: <https://ampl.com/products/ampl/>. Acesso em: 13 nov. 2019.

ARANTES, A. **O papel da logística na organização empresarial e na economia: Fatores que influenciam custo e o pricing do transporte**. Portugal, 2005. Disponível em: [https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/49180/1/LEGI\\_cap\\_7\\_Transporte\\_05-06.pdf](https://dspace.ist.utl.pt/bitstream/2295/49180/1/LEGI_cap_7_Transporte_05-06.pdf). Acesso em: 01 junho 2019.

ARAUJO, S. A. **Heurística para Otimização Combinatória**. 2006. Apostila - Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE COMÉRCIO ELETRÔNICO. Logística no e-commerce brasileiro. 2016. Disponível em: <https://www.abcomm.org/Pesquisas/Pesquisa-ABComm-Logistica-Ecommerce-2017.pdf>. Acesso em: 21 junho 2016.

BALLOU, R. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos: planejamento, organização e logística empresarial**. 4. ed. São Paulo: Bookman, 2006.

BARROS, A. J. S.; LEHFELD, N. A. S. **Fundamentos de metodologia: um guia para a iniciação científica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 2000.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BECCENERI, J. C.; ZINOBER, A. Extraction of Energy in a Nuclear Reactor. *Ini: XXXIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL. Anais [...]*. Campos do Jordão, 6 a 9 de outubro de 2001.

BOCK C. P.; ESTENDER, A. C.; SOUZA, I. C. A Logística e a implantação de Carga Fracionada. *Ini: XVIII CONGRESSO METODISTA DE INICIAÇÃO E PRODUÇÃO CIENTÍFICA - XVII SEMINÁRIO DE EXTENSÃO - XII SEMINÁRIO PIBIC/UMESP .. Anais [...]*. São Paulo, 11 a 12 de novembro de 2015. Disponível em: <https://www.metodista.br/congressos-cientificos/index.php/CM2015/RIPI/paper/view/6825>. Acesso em: 20 junho 2019

BOENTE, A. N. P. *et al.* A importância da intermodalidade/multimodalidade no transporte de cargas no brasil: uso da lógica fuzzy como ferramenta de aferição. *Ini: XII CONGRESSO NACIONAL DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO & III INOVARSE – RESPONSABILIDADE SOCIAL APLICADA. Anais [...]*. Rio de Janeiro, 29 a 30 de setembro de 2016. Disponível em: [http://www.inovarse.org/sites/default/files/T16\\_370.pdf](http://www.inovarse.org/sites/default/files/T16_370.pdf). Acesso em: 21 maio 2019.

BOWERSOX, D.; CLOSS, D. **Logística empresarial: o processo de integração da cadeia de suprimentos**. São Paulo: Atlas, 2001.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Revista PUCSP**. v. 10, n. 1, p. 17-34, 1992.

CAIXETA, J. V.; MARTINS, R. S. **Gestão logística do transporte de cargas**. São Paulo: Atlas, 2001.

CHRISTOFIDES, N. *et al.* **The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization**. California: John Wiley & Sons, 1985.

COELHO, L. C. **Tipos de caminhões (tamanhos e capacidades): logística descomplicada**. 2010. Disponível em: <https://www.logisticadescomplicada.com/tipos-de-caminhoes-tamanhos-e-capacidades/>. Acesso em: 01 junho 2019.

COLLA, J. E. **Breve relato sobre o estudo da logística**. Administradores, São Paulo, 3 nov. 2006. Disponível em: <http://www.administradores.com.br/membros.jps?pagina=menbrosespacosabertocorpo&idColuna=2882&isColunista=12007>. Acesso em: 02 Junho 2019.

CONATRAN. **Resolução nº 68 de 23 de setembro de 1988**. Requisitos de segurança necessários à circulação de Combinações de Veículos de Carga - CVC. Disponível em: <http://www.geipot.gov.br/download/1998/98-13-Resol68.doc>. Acesso em: 02 junho 2019.

CUNHA, C. B. **Uma contribuição para o problema da roteirização de veículos com restrições operacionais**. Tese (Doutorado em Escola Politécnica). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

CUNHA, C. B. Aspectos práticos da aplicação de modelos de roteirização de veículos a problemas reais. **Revista Transportes**. v. 8, n.2, p. 51-74. 2000.

DANTZIG, G. B. **The Nature of Mathematical Programming**. (1996). Disponível em: <https://web.archive.org/web/20140305080324/http://glossary.computing.society.informs.org/index.php?page=nature.html>. Acesso em: 10 nov. 2019.

DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. The Truck Dispatching Problem. **INFORMS**. v. 6, n. 1, p. 80-91, 1959.

DESCARTES, R. **Regulae ad directionem ingenii**. Leiden: Brill Rodopi, 1998.

FISHER, M.; JAIKUMAR, R. A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing. **Networks. Research Gate**. v. 11, p. 113-129, 1981.

FLEURY, P. F.; WANKE, P.; FIGUEIREDO, K. F. **Logística empresarial: a perspectiva brasileira**. 8 ed. Coleção Coppead: Rio de Janeiro, 2011.

FOMIN, F. V.; KASKI, P. Exact exponential algorithms. **Communications of the ACM**. v. 56, p. 80-88, 2013.

FOULDS, L. R. **Combinatorial Optimization for Undergraduates**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1984.

FRANCISCO, W. C. Transporte rodoviário. *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/geografia/rodovias.htm>. Acesso em: 02 de junho de 2019.

FROTA, Y. A. M.; SILVA, D. M.; SUBRAMANIAN, A. Uma heurística para o problema de roteamento de veículos com múltiplas viagens. *Ini: CONGRESSO LATINO-IBEROAMERICANO DE INVESTIGAÇÃO OPERATIVA - SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL. Anais [...]*. Rio de Janeiro, 24 a 28 de setembro de 2012. Disponível em: <http://cdsid.org.br/sbpo2015/wp-content/uploads/2015/08/146131.pdf>. Acesso em: 2 junho 2019.

GELOĞULLARI C. A. **An Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Backhauls**. Dissertação (Degree of Master os Science) - Department of Industrial Engineering and the Institute of Engineering and Science. Bilkent University, Ankara, 2001.

GOLDBARG, M.C.; LUNA, H.P. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro, Campus, 2000.

GUROBI. **Gurobi Optimizer**. Disponível em: <https://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/>. Acesso em: 13 nov. 2019.

HILLIER, G. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 40 anos. 9. Ed. McGraw-Hill, 2013.

IBM. **CPLEX Optimizer**. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/analytics/cplex-optimizer>. Acesso em: 13 nov. 2019.

JUELL, P. L.; THANGIAH, S. R.; NYGARD K. Gideon: A genetic algorithm system for vehicle routing with time windows. *Ieee xplore*. v. 1, p. 3-25, 1991.

LAPORTE, G. Fifty Years of Vehicle Routing. *Inform Pubs Online*. v. 43, n. 4, p. 407-548, 2009.

LAPORTE, G. The Traveling Salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*. v.1, n. 59, p. 231-247, 1991.

LARRAÑAGA, F. A. **A logística global**. 9. ed. São Paulo: Aduaneiras, 2008.

LAZZARI, S. G. **Problema de Roteirização de Veículos: um estudo de caso em uma transportadora**. TCC (Graduação em Engenharia de Transportes e Logística) – Centro Tecnológico de Joinville. Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, 2018.

LIMA, E. C. S. **Otimização de Rotas de Distribuição de uma Empresa Multinacional Alimentícia**. TCC (Graduação em Engenharia de Transportes e Logística) – Centro Tecnológico de Joinville. Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville, 2019.

LIMA, M. **Custos logísticos no Brasil**. 2014. Disponível em: <http://www.ilos.com.br/web/custos-logisticos-no-brasil/>. Acesso em 03. out. 2019.

MARTINS, R. **Quais são os custos logísticos no transporte rodoviário**. 2017. Cargox. Disponível em: <https://cargox.com.br/blog/quais-sao-os-custos-logisticos-no-transporte-rodoviario>. Acesso em: 01 junho 2019.

MELIÁN, B. *et al.* Metaheuristics: A Global View. **Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. Asociación Española de Inteligencia Artificial.** v. 2, n.19. 2003.

MELLO, A. C. S.; FERREIRA FILHO, V. J. M. Sistemas de Roteirização e Programação de Veículos. *Pesquisa Operacional. Scielo.* v. 21, n. 2, p. 223-232. 2010.

DORIGO, M. **Metaheuristics network:** project summary. 2000. Disponível em: <http://www.metaheuristics.org/>. Acesso em: 06 nov. 2019.

OLIVEIRA, A.; VIERA, O. Adaptive memory programming for the vehicle routing problem with multiple trips. **Computers & Operations Research.** v. 34, n. 1, p. 28-47, 2007.

OMBUKI B.; ROSS, B. HANSHAR, F. Multi-objective genetic algorithm for vehicle routing problem with time windows, **Applied Intelligence.** v. 24, p. 17-30, 2006.

PATRUS. **Entenda o que significa carga fracionada e quais os maiores desafios.** Disponível em: <http://www.patrus.com.br/blogpatrus/?p=814>. Acesso em: 1 junho 2019.

PATRUS. **Roteirização de cargas fracionadas:** porque é importante. 2017. Disponível em: <http://www.patrus.com.br/blogpatrus/?p=562>. Acesso em: 1 junho 2019.

PLOUS, S. **The psychology of judgment and decision making.** 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1993.

POZO, H. **Administração de recursos materiais e patrimoniais:** uma abordagem logística. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

ROSSARI, P. **Transporte no Brasil:** custo versus eficiência. 2018. Dica de hoje research. Disponível em: <https://dicadehoje7.com/economia/brasil-transportes> . Acesso em: 01 junho 2019.

STABELINI, D. **Tipos de caminhões e capacidades:** veja o ideal para sua carga. Blog Texaco. 2018. Disponível em: <https://blog.texaco.com.br/ursa/tipos-de-caminhoes-e-capacidades/>. Acesso em: 01 junho 2019.

TAVORA, R. C. M. **Um estudo de caso do problema do caixeiro viajante.** Dissertação (Pós-graduação em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa ação.** 14 ed. São Paulo: Cortez, 2009.

VIEIRA, H. P. **Metaheurística para a Solução de Problemas de Roteamento de Veículos com Janela de Tempo.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática Aplicada. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

## ANEXO A – MATRIZ DISTÂNCIAS CASO TRANSPORTADORA

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-	1.9	2.4	96.33	8.3	1.6	73.5	95.743	7	98.6	9.9	36.9	3.55	10.42	3.6	94.52	8.32	7.995	2.4	-
2	-	-	1	94.8	6.9	0.23	72.14	94.3	8.034	97.25	8.4	37.343	2.103	9.07	2.101	93.1	7.801	6.278	1	1.9
3	-	0.883	-	95.2	7.2	0.949	72.4	94.604	8.752	97.5	7.391	35.8	2.011	8.1	2.402	93.5	8.116	6.607	-	2.4
4	-	94.5	94.762	-	89.82	94.6	34.89	0.6	98.55	6.7	102	73.4	92.5	103	92.125	4.504	95.11	89.11	94.76	96.33
5	-	6.9	7.2	91.17	-	6.45	68.42	90.6	14.3	93.52	10.3	31.8	47.02	11	4.736	89.43	13.67	1.31	7.2	8.3
6	-	0.23	0.949	94.5	6.747	-	71.9	94.102	8.34	97.07	8.12	35.301	1.9	8.935	1.959	93.01	7.664	6.143	0.949	1.6
7	-	72.14	72.4	23.7	68.42	71.9	-	22.303	82.51	25.2	86.1	57.555	76.5	86.754	76.071	21.2	79.11	73.11	72.4	73.5
8	-	94.3	94.604	0.584	90.6	94.1	22.3	-	97.78	6.118	10.1	72.903	91.9	102.14	91.5	3.912	94.49	88.51	94.6	95.74
9	-	8.034	8.752	98.37	14.3	8.34	82.51	97.782	-	101	13.52	40.828	9.504	17.009	10.005	96.63	8.916	17.5	8.752	7
10	-	97.25	97.5	7.304	93.52	97.07	25.2	6.118	101	-	104	75.42	97.35	105	94.1	6.541	97.06	91.1	97.5	98.6
11	-	8.4	7.391	102	10.3	8.12	86.1	10.1	13.52	104	-	42.662	6.812	2.5	7.149	100	14.89	9.3	7.391	9.9
12	-	37.34	35.8	74	31.8	35.3	57.56	72.903	40.83	75.42	42.66	-	32.4	42.722	32	72.3	35.33	29	35.8	36.9
13	-	2.103	1.721	96.3	47.02	1.9	76.5	91.902	9.504	97.35	6.812	32.402	-	8.104	0.4	94.62	9.204	4.602	1.721	3.55
14	-	9.07	8.1	102	11	7.602	86.75	101.26	17.01	105	2.5	42.722	8.104	-	7.017	100.1	14.7	9.203	8.1	10.42
15	-	2.101	2.402	92.6	5.14	1.959	76.07	91.5	10.01	94.1	7.149	32	0.4	7.017	-	90.8	9.311	4.5	2.402	3.6
16	-	93.1	93.5	3.821	89.43	93.01	21.2	3.912	96.63	6.541	100	72.3	94.62	100.1	90.801	-	94	88	93.5	94.52
17	-	7.801	8.116	93.42	13.67	7.664	79.11	92.821	11.07	97.06	14.89	35.33	9.204	14.7	8.3	91.66	-	12.44	8.116	8.32
18	-	6.278	5.9	90.4	1.31	6.143	73.11	88.51	17.5	91.1	9.3	29	4.602	9.203	4.5	88	12.44	-	5.9	7.995
19	-	0.883	-	95.2	7.2	0.949	72.4	94.604	8.752	97.5	7.391	35.8	2.011	8.1	2.402	93.5	8.116	6.607	-	2.4
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: LAZZARI (2018)

## ANEXO B – TEMPOS DE VIAGEM CASO TRANSPORTADORA

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	5	4	69	16	3	54	68	12	80	16	33	5	14	5	67	11	15	4	0
2	0	0	2	66	13	2	53	65	12	74	13	32	4	13	4	66	10	13	2	5
3	0	1	0	66	12	2	51	67	13	74	10	28	3	11	3	66	10	11	0	4
4	0	67	66	0	67	66	19	1	69	13	76	51	69	76	66	6	67	66	66	69
5	0	13	12	72	0	12	57	67	22	76	16	30	9	16	9	73	20	5	12	16
6	0	2	3	66	14	0	50	64	12	78	11	27	3	13	3	68	9	13	3	3
7	0	55	51	19	58	50	0	17	59	26	66	41	57	67	58	18	57	56	51	54
8	0	65	67	2	67	64	17	0	69	13	75	50	66	78	66	5	67	65	67	68
9	0	12	13	70	20	12	55	70	0	76	21	33	14	24	15	71	10	20	13	12
10	0	75	74	13	76	78	26	13	79	0	85	60	79	85	75	16	78	74	74	80
11	0	13	9	76	16	11	62	75	21	83	0	37	10	4	10	76	19	16	9	16
12	0	32	28	54	29	27	41	50	35	60	38	0	29	39	29	52	28	28	28	33
13	0	4	2	69	10	3	59	66	13	79	10	27	0	11	1	67	12	8	2	5
14	0	13	11	76	16	10	67	76	24	85	4	39	11	0	9	77	18	15	11	14
15	0	4	3	70	10	3	58	66	13	75	12	29	1	1	0	66	12	8	3	5
16	0	66	66	6	73	70	18	7	71	16	76	52	67	67	66	0	68	66	66	67
17	0	11	10	67	20	9	54	65	11	78	19	28	12	12	10	66	0	16	10	11
18	0	11	12	66	5	12	56	65	20	74	16	28	8	8	8	66	16	0	12	15
19	0	1	0	66	12	2	51	67	13	74	10	28	3	11	3	66	10	11	0	4
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: LAZZARI (2018)

### ANEXO C – MATRIZ DISTÂNCIAS CASO DISTRIBUIDORA

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	-	15.3	9	42.2	21.6	2.6	15	15	22.9	19.4	18	42.8	31.7	54.9	52.8	54	44.3	47.9	43.5	51.5	53.2	43.4	45.4	-
2	-	-	6.1	34.8	9.2	12.5	8.7	5.6	10.7	7.2	5.7	30.5	19.4	66.2	64.2	65.4	55.7	59.2	54.9	62.8	64.5	54.8	56.8	15.7
3	-	6.9	-	38.8	13.2	7.4	6	6	14.5	11	9.6	34.4	23.3	61.2	59.1	60.3	50.6	54.2	49.8	57.8	59.5	49.7	51.7	10.6
4	-	33.9	38.8	-	31	45.2	42.4	39.4	44.4	40.9	39.5	64.3	53.2	98.9	96.8	98.1	88.4	91.9	87.5	95.5	97.2	87.4	89.5	30
5	-	8.9	13.8	30	-	20.2	17.5	14.4	19.5	16	14.5	39.3	28.2	74	71.9	73.1	63.4	67	62.6	70.6	72.2	62.5	64.5	21.6
6	-	13.4	7.1	45.3	19.7	-	13.1	13.1	21	17.5	16.1	40.9	29.8	55.3	53.2	54.4	44.8	48.3	43.9	51.9	53.6	43.8	45.9	4.7
7	-	7.2	6	43	17.4	12.5	-	0.9	8.3	1.8	2	28.1	17	66.2	64.1	65.3	55.7	59.2	54.8	62.8	64.5	54.7	56.8	15.6
8	-	4.3	6	39.2	13.5	12.5	1.2	-	7.9	1.4	1.6	27.7	16.6	66.2	64.1	65.4	55.7	59.2	54.8	62.8	64.5	54.7	56.8	15.6
9	-	9.4	14.3	45.3	19.6	20.7	7.1	7.3	-	6.4	6.3	21.1	14.7	74.4	72.3	73.6	63.9	67.4	63	71	72.7	62.9	65	23.9
10	-	6.2	6.5	42.1	16.4	12.9	1.1	1	7.3	-	1	27.2	16.1	66.6	64.5	65.8	56.1	59.6	55.3	63.2	64.9	55.1	57.2	16.1
11	-	5.8	10.6	41.6	15.9	17	1.4	1.4	6.9	0.3	-	26.7	15.6	70.7	68.7	69.9	60.2	63.7	59.4	67.3	69	59.3	61.3	20.2
12	-	26.9	31.7	62.7	37.1	38.1	24.6	24.8	20.9	23.8	23.8	-	13.5	91.9	89.8	91	81.3	84.9	80.5	88.5	90.2	80.4	82.5	46.3
13	-	18.4	23.2	54.2	28.6	29.6	16.1	16.3	15.6	15.3	15.2	14	-	83.4	81.3	82.5	72.8	76.4	72	80	81.7	71.9	73.9	32.8
14	-	68.4	62.1	100.3	74.7	55.8	68.1	68.1	76	72.5	71.1	95.9	84.8	-	3.2	0.9	12.9	8.2	11.7	3.8	2.6	11.6	16.4	53.8
15	-	66.3	60.1	98.3	72.6	53.8	66.1	66.1	74	70.5	69.1	93.8	82.8	3.2	-	2.4	10.8	6.1	9.7	1.5	0.8	9.5	14.3	51.7
16	-	67.5	61.3	99.5	73.8	55	67.3	67.3	75.2	71.7	70.2	95	83.9	0.9	2.4	-	12	7.3	10.8	2.9	1.7	10.7	15.5	52.9
17	-	56.9	50.7	88.8	63.2	44.4	56.6	56.6	64.5	61	59.6	84.4	73.3	12.8	10.7	11.9	-	5.8	1.6	9.4	11.1	1.7	3.6	42.3
18	-	61.3	55.1	93.2	67.6	48.8	61	61	68.9	65.4	64	88.8	77.7	8.2	6.1	7.3	5.8	-	4.6	4.8	6.4	4.5	9.3	46.7
19	-	56.9	50.7	88.9	63.3	44.4	56.7	56.7	64.6	61.1	59.7	84.4	73.4	11.7	9.6	10.9	1.7	4.7	-	8.3	10	0.1	7.8	42.3
20	-	65.7	59.5	97.7	72	53.2	65.5	65.4	73.4	69.8	68.4	93.2	82.1	3.4	1.3	2.5	10.2	5.5	9	-	1.7	8.9	13.7	51.1
21	-	66.9	60.7	98.8	73.2	54.4	66.6	66.6	74.5	71	69.6	94.4	83.3	2.5	0.8	1.7	11.4	6.7	10.2	2	-	10.1	14.9	52.3
22	-	56.8	50.6	88.8	63.1	44.3	56.6	56.6	64.5	61	59.6	84.3	73.3	11.6	9.5	10.8	1.7	4.6	0.1	8.2	9.9	-	7.7	42.2
23	-	57.9	51.7	89.9	64.2	45.4	57.7	57.7	65.6	62.1	60.6	85.4	74.3	16	13.9	15.1	2.7	9	4.3	12.6	14.3	4.4	-	43.3
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fonte: LIMA (2019)

### ANEXO D – TEMPOS DE VIAGEM CASO DISTRIBUIDORA

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	15	9	37	21	5	19	19	22	20	19	61	41	66	59	62	38	49	38	56	61	37	38	0
2	0	0	8.8	31	14.12	14	14	12	17	13	13	55	28	78.65	71	75	48	59	47	67	72	47	48	15
3	0	11	0	32.82	16	10	15	15	19	16	15	58	30	74	66	70	44	55	43	63	67	42	43	11
4	0	31.0	34.0	0	31.13	40.0	40.0	39.0	43.0	40.0	39.0	82.0	55.0	104.0	96.0	100.0	74.0	85.0	73.0	93.0	98.0	73.0	73.0	29
5	0	15	18.0	28.0	0	23.73	24.0	22.68	27.0	23.75	23.0	66.0	38.0	88.0	80.0	84.0	58.0	69.0	57.0	77.0	81.45	56.0	57.0	20.0
6	0	16.0	9	38.0	21.1	0	20.15	19.58	24.0	21.0	20.0	63.0	36.0	70.0	62.0	66.0	39.97	51.0	39.0	59.0	63.0	38.0	39.0	7.0
7	0	14.0	14.0	40	22.83	19.0	0	4.07	15.0	7.0	7.43	54.0	27.0	84.0	76.0	79.0	53.0	64.0	52.0	72.0	77.0	52.0	52.0	19.0
8	0	11.0	14.0	37.0	20	19.0	5.0	0	13.93	5.0	6.0	53.0	26.0	84.0	76.0	79.38	53.0	64.18	52.0	72.0	77.0	52.0	52.42	19.0
9	0	14.0	17.0	41.0	23.0	22	11.0	13.0	0	10.13	10.0	44.0	23.0	87.0	79.0	83.0	56.0	67.0	55.0	75.0	80.0	55.0	56.0	24.0
10	0	11.0	15.0	38.0	20.0	20.0	3	4.0	13.0	0	4.6	51.68	24.0	84.0	76.0	80.0	54.0	65.0	53.0	73.0	77.42	52.0	53.0	19.0
11	0	9.0	12.0	35.63	18.0	17.0	5.43	6	11.0	2.0	0	49.82	23.0	82.0	74.0	78.0	52.0	62.0	50.0	70.0	75.0	50.0	51.0	18.0
12	0	52.0	55.0	79.0	61.0	60.0	49.0	51.0	44	48.0	48.0	0	28.42	124.77	117.0	121.0	95.0	105.0	93.0	113.0	118.0	93.0	94.0	86.0
13	0	26.0	28.0	52.0	35.0	34.0	22.0	25.0	23.0	21.58	22.0	32.0	0	98.17	90.0	94.02	68.0	79.0	67.0	86.58	91.37	66.0	67.0	34.0
14	0	83.0	76.0	105.0	88.0	71.0	87.0	86.0	90.82	88.0	87	130.0	102.0	0	10.98	5.0	37.0	24.0	35.0	14.0	9.12	35.0	47.0	64.0
15	0	74.0	67.0	96.2	79.0	62.0	78.0	77.0	82.0	79.0	78.0	121	94.0	11.77	0	7.62	28.38	16.0	26.0	4.0	3.0	26.0	39.0	58.0
16	0	79.0	72.0	101.0	84.0	67.0	83.0	82.0	87.0	83.9	83.0	126.0	99	5.03	7.0	0	33.33	21.0	31.0	10.0	5.0	31.0	44.0	61.0
17	0	50.0	43.0	72.05	55.0	38.0	54.0	53.0	58.0	55.0	54.0	97.0	70.0	36	28.0	32.0	0	16.32	4.0	24.0	29.0	4.0	11.0	35.0
18	0	62.0	55.0	84.32	67.0	50.0	66.0	66.0	70.0	67.0	66.0	109.0	82.0	23.05	15	19.0	17.0	0	14.33	11.0	16.0	13.92	27.0	47.0
19	0	49.0	42.0	71.0	54.0	37.0	53.0	52.0	57.0	53.75	53.0	96.0	68.0	33.0	24.6	28	4.0	13.0	0	21.05	26.0	0	14.0	34.0
20	0	73.0	66.0	95.0	78.0	61.0	77.0	76.03	81.0	78.0	77.0	120.0	92.0	12.0	3.55	7.43	27	14.0	25.0	0	4.78	24.0	37.0	56.0
21	0	76.0	69.0	98.0	80.82	64.0	80.0	79.0	84.0	81.0	80.0	123.0	96.0	10.0	2.0	6.0	30.0	18	28.12	6.0	0	27.7	41.0	59.0
22	0	48.35	41.0	71.0	53.0	37.0	52.0	52.0	56.0	53.0	52.0	95.0	68.0	32.0	24.0	28.0	4.0	13.0	0.4	21.0	25.0	0	13.08	34.0
23	0	49.0	42.0	72.0	54.0	38.0	53.0	53.0	58.0	54.0	53.0	96.0	69.0	44.0	35.65	40.0	8.0	24.0	11.0	32.1	37.0	11.0	0	35.0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: LIMA (2018)

