

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECATRÔNICA

Willian Kenji Nishizawa

Análise da Cinemática de Posição de uma Plataforma Stewart 6-3

Joinville

2019

Willian Kenji Nishizawa

Análise da Cinemática de Posição de uma Plataforma Stewart 6-3

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica no curso de Engenharia Mecatrônica, da Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Simoni

Joinville

2019

Este trabalho é dedicado a todos que me apoiaram em
minha jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A esta universidade, seu corpo docente, direção ,administração e colegas que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Ao meu orientador, Dr. Roberto Simoni, pela orientação, paciência e confiança na elaboração deste trabalho.

A minha família e amigos, em especial Lucas, Júlia e Thaís, que me apoiaram e incentivaram nas horas mais difíceis.

“O homem não é nada em si mesmo. Não passa de uma probabilidade infinita. Mas ele é o responsável infinito dessa probabilidade.”
(Albert Camus, 1913-1960)

RESUMO

O objeto de estudo deste trabalho é a Plataforma Stewart, um manipulador paralelo. Primeiramente é feita uma apresentação da Plataforma Stewart além de sua descrição e modelagem geométrica. Um método para a dedução da cinemática direta é descrito em detalhes. Os resultados da cinemática inversa são apresentados com o propósito de verificar os cálculos da cinemática direta e também para realizar as análises de espaço de trabalho da Plataforma Stewart.

A dedução do método para a obtenção da cinemática direta foi apresentado em detalhes para validar os resultados disponíveis na literatura. Pequenas diferenças foram observadas devido a diferentes aplicações do método de solução da cinemática direta (Newton-Raphson).

O resultado deste trabalho é apresentado na forma de dois algoritmos, um para calcular a cinemática direta e um para a cinemática inversa usado para obetação do espaço de trabalho da Plataforma Stewart.

Palavras-chave: Plataforma de Stewart. Manipulador. Cinematica. Direta. Inversa. Newton-Raphson.

ABSTRACT

The subject of this study is the Stewart Platform, a parallel manipulator. Firstly the Stewart Platform is presented along with its description and geometrical modelling. A method to deduce the direct kinematics is described in detail. The results of the inverse kinematics are presented to verify the direct kinematic calculations and also to realize a study of the workspace of a Stewart Platform.

The deduction of the direct kinematics was presented in detail in order to validate the results presented in the literature. Small differences in the results are noticed given the differences in the application of the Newton-Raphson method.

The result of this study is presented as two sets of algorithms, one calculate the direct kinematic and the other the inverse kinematics in order to obtain the workspace of a Stewart Platform.

Keywords: Stewart Platform. Manipulator. Parallel. Kinematics. Direct. Inverse. Newton-Raphson.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – (a) Manipulador serial Puma - FONTE:(TSAI, 1999) e (b) Plataforma Stewart - FONTE:(JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018)	12
Figura 2 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador aeronáutico - FONTE (MERLET, 2006)	14
Figura 3 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador ferroviário - FONTE (AMARAL, 2015)	14
Figura 4 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador de transferência de carga entre navios - FONTE (AMARAL, 2015)	15
Figura 5 – Modelo cinemático da Plataforma Stewart.	19
Figura 6 – Tipos de juntas: (a),(b) Revolutas (1GDL,R), (c) Prismática (1GDL,P), (d) Universal (2GDL,U) e (e) Esférica (3GDL,S). - FONTE: (BAJAJ; SPIERS; DOLLAR, 2015)	20
Figura 7 – Configurações simétricas - FONTE (JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018)	21
Figura 8 – Vista superior da Plataforma Stewart - FONTE: AUTOR(2019)	22
Figura 9 – Áreas que compõem a Plataforma Base - FONTE: AUTOR(2019)	23
Figura 10 – Área T1 (a) e Área T2 (b) - FONTE: AUTOR(2019)	24
Figura 11 – Área R1 (a) e Área R2 (b) - FONTE: AUTOR(2019)	24
Figura 12 – Definindo o eixo coordenado B - FONTE: AUTOR(2019)	25
Figura 13 – Relação entre as centróides das plataformas - FONTE: AUTOR(2019)	26
Figura 14 – Ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)	27
Figura 15 – Ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)	27
Figura 16 – Encontrando as coordenadas do ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)	28
Figura 17 – Relações no plano X-Y entre as plataformas base e móvel - FONTE: AUTOR(2019)	28
Figura 18 – Geometria utilizada para calcular Z_{A_1} - FONTE: AUTOR(2019)	29
Figura 19 – Modelagem para a cinemática inversa da Plataforma Stewart 6-3 - FONTE: AUTOR(2019)	35
Figura 20 – Vista isométrica do resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$ - FONTE:AUTOR(2019)	42
Figura 21 – Vista superior do resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$ - FONTE:AUTOR(2019)	43
Figura 22 – Vistas isométricas da solução encontrada para a cinemática direta com estimativa inicial $[-0,1;-0,1;-0,1]$ - FONTE:AUTOR(2019)	44
Figura 23 – Resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,1;0,1;0,4]$ para Y_{A_1} , Y_{A_2} e Y_{A_3} - FONTE:AUTOR(2019)	45

Figura 24 – Espaço de trabalho translacional com $R_x = R_y = R_z = 0^\circ$ - FONTE:AUTOR(2019)	47
Figura 25 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 10^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	47
Figura 26 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 15^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	48
Figura 27 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 20^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	48
Figura 28 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 40^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	48
Figura 29 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 65^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	49
Figura 30 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 75^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)	49
Figura 31 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 80^\circ$ - FONTE:AUTOR(2019)	50
Figura 32 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$, $R_x = 80^\circ$ e o dobro de resolução - FONTE:AUTOR(2019)	50
Figura 33 – Espaço de trabalho com faixa de rotações variando de -30° a 30° - FONTE:AUTOR(2019)	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cálculo dos graus de liberdade para plataformas Stewart simétricas. . .	21
Tabela 2 – Formas geométricas que compõem a plataforma base	23
Tabela 3 – Posições dos vértices no sistema de coordenadas da base	26
Tabela 4 – Posições dos pontos imaginários P_i	27
Tabela 5 – Posições dos vértices da plataforma móvel no eixo X	29
Tabela 6 – Hipotenusas h_i	29
Tabela 7 – Posições dos vértices da plataforma móvel no eixo Z	29
Tabela 8 – Parâmetros geométricos calculados para as dimensões do exemplo . .	41
Tabela 9 – Componentes Y das posições dos vértices da plataforma móvel obtidas pelo método de Newton-Raphson	41
Tabela 10 – Vértices da plataforma móvel obtidos pelo algoritmo da cinemática direta	42
Tabela 11 – Descrição da plataforma móvel obtida pelo algoritmo da cinemática direta	42
Tabela 12 – Validação das características estruturais da plataforma Stewart para a estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$	43
Tabela 13 – Descrição da plataforma móvel obtida pelo algoritmo da cinemática direta para o Exemplo 2	44
Tabela 14 – Validação das características estruturais da plataforma Stewart para a estimativa inicial $[-0,1;-0,1;-0,1]$	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	15
1.2	OBJETIVOS	16
1.2.1	Objetivo Geral	16
1.2.2	Objetivos Específicos	16
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	MODELAGEM DA PLATAFORMA STEWART	19
2.2	CINEMÁTICA DIRETA	22
2.2.1	Vértices da plataforma base	22
2.2.1.1	Centróide da plataforma base	23
2.2.1.2	Posições no espaço	25
2.2.2	Vértices da Plataforma Móvel	25
2.2.3	Métodos para Solucionar a Cinemática Direta	30
2.2.3.1	Newton-Raphson	31
2.2.3.2	Obtendo a centróide da plataforma móvel	31
2.2.3.3	Ângulos da Plataforma Móvel	32
2.3	CINEMÁTICA INVERSA	33
2.4	ESPAÇO DE TRABALHO	37
3	MATERIAIS E MÉTODOS	40
3.1	SIMULAÇÕES NO OCTAVE	40
3.1.1	Cinemática Direta	40
3.1.2	Exemplo 1	41
3.1.2.1	Validação pela cinemática inversa	43
3.1.3	Exemplo 2	44
3.1.4	Exemplo 3	45
3.2	ESTUDOS DO ESPAÇO DE TRABALHO	46
4	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICE A – ALGORITMO DA CINEMÁTICA DIRETA	55
	APÊNDICE B – ALGORITMO DA CINEMÁTICA INVERSA E ESPAÇO DE TRABALHO	62

1 INTRODUÇÃO

Um manipulador serial pode ser descrito como diversos elos, conectados um após o outro, por diferentes tipos de juntas, com objetivo de mover ou orientar uma ferramenta (Figura 1(a)). Já manipuladores paralelos são compostos por no mínimo duas cadeias cinemáticas unidas por um corpo rígido e que são responsáveis por mover e orientar um segundo corpo rígido (no caso das plataformas Stewart, os corpos rígidos são as plataformas base e móvel). Diferentes configurações, ou arquiteturas, de manipuladores variam conforme sua estrutura e os graus de liberdade (GDL) de seu movimento.

Grau de liberdade é um termo utilizado em referência a quantidade mínima de números reais necessária para determinar o estado físico de um sistema (MERLET, 2006). Um espaço bidimensional tem 2-GDL: um para movimento no eixo X e um para movimentos no eixo Y, já um espaço tridimensional tem 6-GDL, composto pelas três translações (nos eixos X, Y e Z), e uma rotação em torno de cada um dos eixos, somando mais três graus de liberdade.

Um manipulador com 6-GDL é capaz de assumir qualquer posição em seu espaço de trabalho e o denominamos de manipulador de propósito geral, um manipulador com menos de 6 GDL é classificado como limitado e um robô com mais do que 6 GDL é chamado de redundante (MELLO, 2011).

Cinemática é o estudo das relações entre os movimentos nas juntas e a posição da ferramenta ou, no caso da plataforma de Stewart, a posição da plataforma móvel. Os estudos da cinemática são divididos entre a cinemática direta e a cinemática inversa. A cinemática direta busca calcular a posição final da plataforma móvel com base nos valores de deslocamento de cada uma das juntas. Já a cinemática inversa tem como objetivo encontrar as atuações necessários em cada junta para que seja atingida uma determinada posição e orientação no espaço.

A resposta para a cinemática direta de manipuladores seriais é encontrada pelo

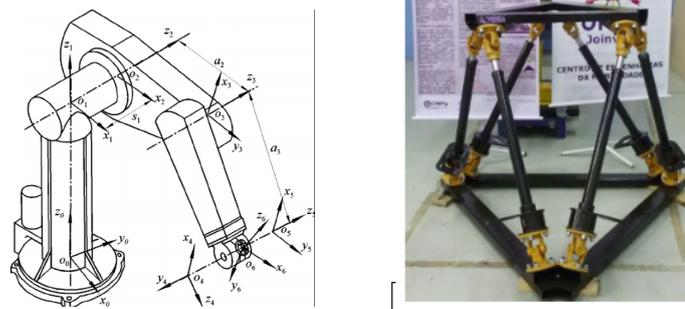


Figura 1 – (a) Manipulador serial Puma - FONTE:(TSAI, 1999) e (b) Plataforma Stewart - FONTE:(JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018)

método de Denavit-Hartenberg, que enumera sistemas de referência para cada uma das juntas e realiza operações matriciais para representar a posição no espaço de cada junta em relação ao sistema coordenado da junta anterior (TSAI, 1999). A cinemática inversa já é um caso mais complexo para manipuladores seriais, pois geralmente depende de um sistema de equações não-lineares, o que não garante que uma solução real exista. De forma simples, para cada conjunto de atuações nas juntas o manipulador serial tem uma única configuração, já para alcançar um ponto no espaço, o manipulador serial pode tomar um número indeterminado de configurações.

No caso dos manipuladores paralelos, por possuírem uma cadeia cinemática fechada (isto é, os GDL dependem da configuração geométrica e do número de articulações passivas e ativas), torna-se impossível encontrar um conjunto de equações explícitas para a cinemática direta, pois um conjunto de atuações nas juntas de cada perna pode resultar em inúmeras posições e orientações no espaço. Por outro lado, para uma determinada posição e orientação no espaço, existe apenas uma configuração válida para o manipulador paralelo.

Apesar de ser uma vantagem estrutural (pois os esforços são divididos entre todas as juntas do robô) a cadeia cinemática fechada torna os cálculos da cinemática direta computacionalmente custosos, muitas vezes impedindo a implementação de algoritmos de controle capazes de gerar trajetórias em tempo real (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993). Esse é um dos motivos para que, mesmo após décadas de pesquisas e propostas de estruturas, os manipuladores paralelos não possuem aplicações muito diversas, limitando-se a tarefas como orientação de plataformas (no caso de simuladores navais (ACUÑA, 2009) e de vôo (STEWART, 1965)) e ferramentas (aplicações de usinagem), posicionamento de peças e micro/nano manipulações (TSAI, 1999).

Um dos motivos dessa falta de diversidade se dá pelo fato de manipuladores paralelos geralmente possuírem muitas juntas passivas, que apesar de aumentar a rigidez da plataforma, aumenta a complexidade da sua modelagem cinemática quando comparada a suas contrapartes seriais (TSAI, 1999). Além disso, as juntas passivas e as interações dinâmicas entre os movimentos das pernas tornam o manipulador suscetível a deformações sob elevados esforços físicos ou térmicos, notadamente em aplicações de usinagem pesada. Outra grande desvantagem impactante relacionada aos robôs paralelos está no seu espaço de trabalho extremamente limitado, com pouca liberdade na orientação da plataforma (MERLET, 2006). Esses são alguns dos fatores que fazem com que, apesar da superioridade em questão de precisão, rigidez, velocidade e capacidade de carga, os manipuladores paralelos não sejam tão utilizados na indústria quanto as suas contrapartes seriais (TSAI, 1999).

Uma das primeiras configurações de manipuladores paralelos a serem desenvolvidas surgiu na década de 1960 e atualmente é conhecida como plataforma Stewart, (STEWART, 1965), representada na Figura 1(b). A plataforma Stewart possui uma plataforma móvel

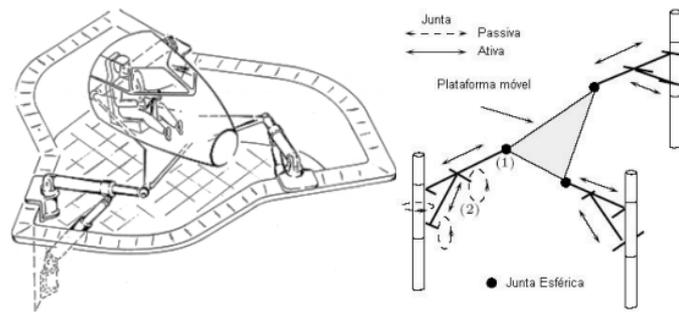


Figura 2 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador aeronáutico - FONTE (MERLET, 2006)



Figura 3 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador ferroviário - FONTE (AMARAL, 2015)

conectada à base por seis cadeias cinemáticas (ou pernas), o que lhe permite realizar três movimentos de translação e três de rotação no espaço, resultando em 6-GDL.

Por ser uma das mais antigas configurações de manipulador paralelo, a plataforma Stewart já foi aplicada em diversas aplicações de engenharia e na academia. Uma das aplicações mais comuns da plataforma Stewart é a simulação de movimentação de veículos (AMARAL, 2015). Para isso, a plataforma Stewart é responsável por orientar uma cabine que simula o interior de um veículo. Um exemplo de simulador aeronáutico pode ser observado na Figura 2. Estruturas similares também podem ser utilizadas para simular a condução de trens de metrô, como pode ser observado na Figura 3.

Outro campo propício para as aplicações da plataforma Stewart é o da engenharia naval. Além de simular a dinâmica do movimento de navios (ACUÑA, 2009), a plataforma Stewart também já foi aplicada para testar sistemas de transferência de cargas entre navios, onde uma plataforma Stewart simula um navio em movimento que possui um guindaste instalado, e uma segunda plataforma Stewart simula o navio que está recebendo



Figura 4 – Aplicação de uma plataforma Stewart em um simulador de transferência de carga entre navios - FONTE (AMARAL, 2015)

a carga, como pode ser observado na Figura 4.

Esse trabalho tem como objetivo implementar algoritmos para a análise cinemática de uma plataforma Stewart 6-3, realizando uma descrição da geometria utilizada nas análises, os métodos para a obtenção das equações cinemáticas e também métodos para calcular os espaços de trabalho translacional e alcançável da plataforma.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Por possuir uma cadeia cinemática fechada, a análise da cinemática direta de uma plataforma Stewart é complexa e sua solução depende de sistemas de equações não-lineares que devem ser resolvidas por métodos numéricos. Esse é um desafio para aplicações em tempo real pois tanto o sistema de equações obtidos quanto o método numérico escolhido influenciam o tempo necessário para a obtenção da resposta (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002). Incluir a cinemática direta nos sistemas de controle de movimento torna possível realizar a realimentação do feedback de força exercida pela plataforma, permitindo o uso de sensores de força-torque, posição-orientação, dentre outros que podem auxiliar na geração e validação de trajetórias no espaço.

Comparações entre métodos de análise cinemática em conjunto com métodos numéricos foram propostos na literatura (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002) e nota-se que o método de Newton-Raphson alcança uma boa convergência na solução dos sistemas não-lineares em conjunto com diversos métodos de análise.

A cinemática inversa da plataforma Stewart resulta em um conjunto de equações fechadas que encontra uma configuração de juntas para cada posição e orientação desejada para a plataforma móvel (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993). Neste trabalho a cinemática inversa é utilizada para validar a análise da cinemática direta e para implementar a análise do espaço de trabalho do manipulador.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Implementar os algoritmos da cinemática de posição (direta e inversa) da Plataforma Stewart e comparar os resultados com aqueles disponíveis na literatura.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Apresentar a modelagem geométrica da plataforma Stewart 6-3;
2. Obter as equações da cinemática direta;
3. Obter as equações da cinemática Inversa;
4. Implementar algoritmos para obter os resultados da cinemática direta, inversa de uma Plataforma Stewart 6-3;
5. Implementar algoritmos para o cálculo do espaço de trabalho translacional e alcançável de uma plataforma Stewart 6-3.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Primeiramente é apresentada a revisão bibliográfica de todos os tópicos relevantes às discussões propostas neste trabalho com o primeiro tópico sendo uma breve descrição dos arcabouços deste trabalho. Em seguida é feita a apresentação das características e da modelagem geométrica da plataforma Stewart.

Após isso é feita a apresentação do método adotado para os cálculos da cinemática direta de uma plataforma Stewart 6-3 incluindo as considerações utilizadas nos procedimentos.

Um método clássico para a análise da cinemática inversa é apresentado e utilizado para validar os resultados encontrados pela cinemática direta e também como parte do procedimento para realizar a análise dos espaços de trabalho. O conceito de espaço de trabalho de robôs paralelos é apresentado com a partir de classificações para tipos de espaço de trabalho e métodos de solução.

O procedimento da análise da cinemática direta é apresentado detalhadamente devido ao fato de o trabalho de Acuña (ACUÑA, 2009) apresentar algumas equações e considerações de forma incorreta, possivelmente devido a erros de digitação. As equações em questão são as referentes a centróide Y_b , que apresenta um erro resultante das considerações incorretas no cálculo das centróides das áreas que compõem a plataforma base (deslocamentos da centróide das áreas T1), as equações para o cálculo de h_i não são apresentadas e não é observado que a componente ZA_2 não toma a mesma forma que as

componentes $Z A_1$ e $Z A_3$. Isso resulta na representação incorreta do sistema de equações não lineares que deve ser resolvidos pelo método de Newton-Raphson.¹

Com base nas equações obtidas pela análise cinemática da plataforma Stewart são derivados dois conjuntos de algoritmos: um deles (APÊNDICE 1) implementa os cálculos envolvidos na cinemática direta de uma plataforma Stewart 6-3, podendo apresentar os resultados de forma simbólica ou com os parâmetros fixos para resultados numéricos. Os códigos do APÊNDICE 2 utilizam os resultados da cinemática inversa para encontrar o espaço de trabalho translacional e o espaço de trabalho alcançável de uma plataforma Stewart.

¹ Os parâmetros $Y_b, h_i, Z A_1, Z A_2, Z A_3$ são descritos no Capítulo 2

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A principal referência para este trabalho foi a dissertação de mestrado de Hernán Gonzalez Acuña, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (ACUÑA, 2009). Seu trabalho tem como tema o projeto mecatrônico de uma plataforma Stewart para simulação dos movimentos de navios. Acuña justificou a escolha da plataforma de Stewart para essa aplicação pois assim como a movimentação dos navios, a plataforma Stewart apresenta 6 graus de liberdade. Primeiramente Acuña define os sistemas de referência para a movimentação dos navios, após isso é feita uma breve apresentação dos manipuladores paralelos e os mesmos são classificados de acordo com os graus de liberdade de seu movimento. Em seguida, a plataforma de Stewart é apresentada e são demonstrados os cálculos para os graus de liberdade para duas de suas configurações: 6-UPS (juntas Universal-Prismática-Esférica) e 6-SPS (Esférica-Prismática-Esférica). Assim como o objeto de estudo deste trabalho, Acuña estudou uma plataforma Stewart simétrica 6-6, isto é, com 6 pontos articulados na plataforma móvel e 6 na plataforma base. Diferente de outros autores que utilizam formulações vetoriais para encontrar a cinemática direta (GONZALEZ, 2018) (XIGUANG HUANG QIZHENG LIAO, 2010) (que resultam em sistemas computacionalmente complexos de serem resolvidos), este trabalho vai realiar uma abordagem geométrica para realizar os cálculos da cinemática de uma plataforma Stewart de configuração 6-3, seguindo o método apresentado por Liu (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993) e Acuña (ACUÑA, 2009). Tendo definido a cinemática direta são apresentadas as equações para a solução da cinemática inversa, consideravelmente mais simples de ser resolvida. Com ambas as modelagens cinemáticas é feita a análise dinâmica da plataforma. A análise dinâmica de robôs é separada entre dois tipos: dinâmica direta, que calcula a trajetória da plataforma baseado em dados de torque e força nos atuadores, e a dinâmica inversa, que toma valores de trajetória e aceleração como entrada para calcular os valores de torque e força nos atuadores. Em seguida Acuña relaciona a análise dinâmica do manipulador com a modelagem dos atuadores, necessária para o projeto de um controlador PID. Por fim é feita uma análise do espaço de trabalho da plataforma com ênfase nos limites de giro e velocidades durante as trajetórias a serem seguidas.

Após terem sido encontradas algumas inconsistências nos procedimentos apresentados pelo trabalho de Acuña o estudo foi estendido ao trabalho apresentado por Liu et al. em 1993 (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993), que tem como tema o estudo da dinâmica e das singularidades de uma plataforma Stewart de 6 graus de liberdade. São descritos os métodos de análise cinemática explorados por Acuña com a finalidade de, em conjunto com a análise dinâmica, estudar as posições de singularidade que podem ser alcançadas durante as trajetórias do manipulador, isto é, as posições no espaço de trabalho onde devido a restrições estruturais da plataforma Stewart os valores calculados para o deslocamento das juntas se torna indeterminável, resultado de infinitas soluções

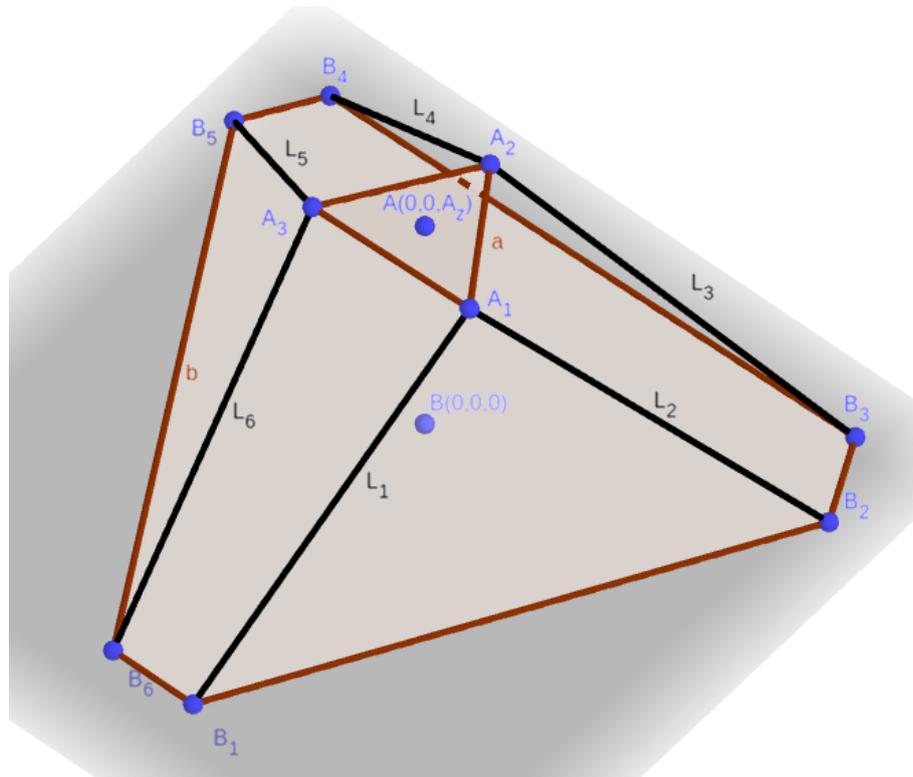


Figura 5 – Modelo cinemático da Plataforma Stewart.

para a cinemática inversa. Em seus resultados, Liu identifica 4 pontos de singularidade no espaço de trabalho e também as condições que causam singularidades de torque e de posição durante trajetórias.

Budin e Jakobovic (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002) seguem uma análise algébrica para obter a cinemática direta. O trabalho também inclui métodos para otimizar as equações resultantes, comparação de eficiência entre métodos iterativos em combinação com as equações otimizadas e também propõem um método de adaptação para minimizar o problema de múltiplas soluções;

Os estudos de espaço de trabalho foram realizados com base na discretização apresentada por Simoni et al. (SIMONI *et al.*, 2019) na análise de um manipulador delta instalado em um veículo autônomo submerso de intervenção (I-AUV). É feita uma comparação entre as relações do espaço de trabalho de cada manipulador comparadas a suas outras características.

2.1 MODELAGEM DA PLATAFORMA STEWART

A Plataforma de Stewart é composta por duas plataformas (plataforma móvel e plataforma base) conectadas por 6 pernas (ou cadeias cinemáticas) e 14 juntas. Esse arranjo possibilita realizar movimentos com 6 graus de liberdade - três movimentos de translação e três movimentos de rotação (JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018).

Para posicionar a plataforma no espaço, cada perna possui um atuador prismático

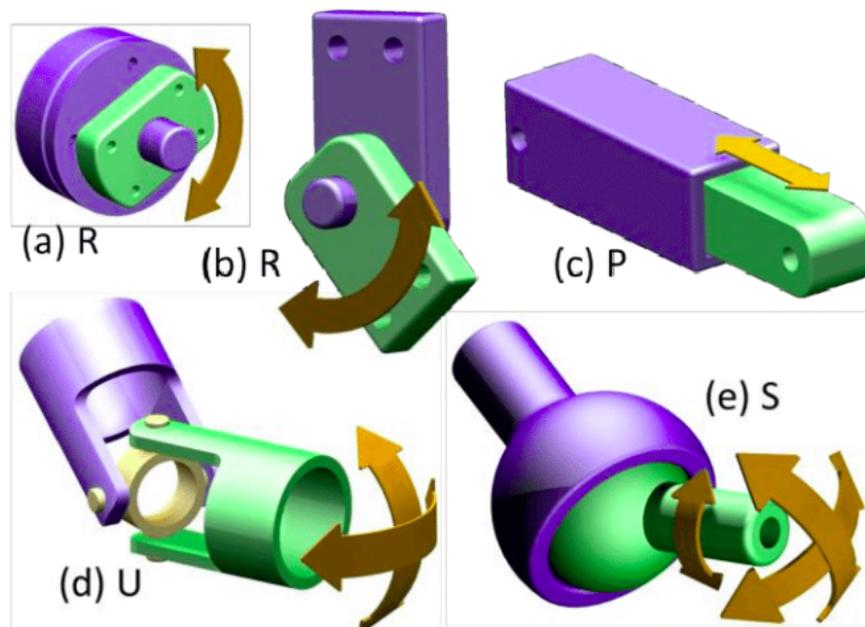


Figura 6 – Tipos de juntas: (a),(b) Revolutas (1GDL,R), (c) Prismática (1GDL,P), (d) Universal (2GDL,U) e (e) Esférica (3GDL,S). - FONTE: (BAJAJ; SPIERS; DOLLAR, 2015)

(representados na Figura 5 como $L_1...L_6$) responsável por variar seu comprimento. Para se obter os seis graus de liberdade, os movimentos lineares dos seis atuadores prismáticos são combinados com os graus de liberdade das juntas passivas nas extremidades das pernas (ACUÑA, 2009).

Uma Plataforma Stewart pode possuir diferentes configurações de juntas, que seguem o padrão de denominação 6-UPS e 6-SPS, onde cada nome é descrito pelas siglas em inglês dos tipos de juntas que as compõem, sendo: U (universal), P (prismatic) e S (spherical)(ACUÑA, 2009).

O número de graus de liberdade da plataforma é determinado pelo número mínimo de atuadores utilizados para alcançar uma dada trajetória. O critério de Grüble (TSAI, 1999) define que para robôs paralelos com m graus de liberdade existem m cadeias cinemáticas suportando o efetador (1) (no nosso caso deste estudo, a plataforma móvel):

$$M = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_p \quad (1)$$

Onde:

M = graus de liberdade do mecanismo;

λ = Graus de liberdade do espaço onde o mecanismo se encontra. Robôs com movimento planar tem $\lambda=3$, os com movimentos espacial tem $\lambda=6$;

n = Número total de elos do mecanismo (plataforma base e móvel);

j = Número total de juntas;

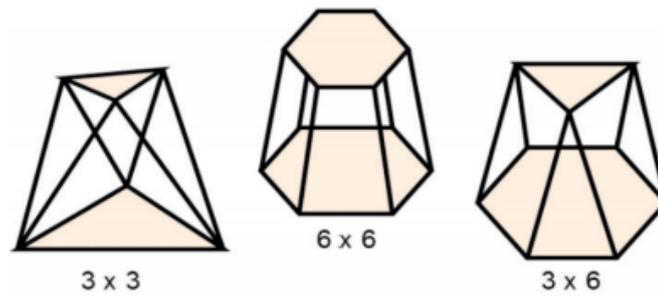


Figura 7 – Configurações simétricas - FONTE (JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018)

f_i = Graus de movimento relativo por junta;

f_p = Graus de liberdade passivos;

Uma plataforma Stewart com articulações SPS tem os seguintes parâmetros: $\lambda = 6$, $n = 14$, $j = 18$, $f_i = 3$ e $f_p = 6$. O critério de Grubler calcula 12-GDL para essa configuração o que a classifica como um manipulador redundante (cada perna com articulações SPS possui um grau de liberdade resultante da rotação em torno de seu comprimento). Já uma plataforma com articulações UPS apresenta 6-GDL. A Tabela 1 demonstra os parâmetros para os cálculos da mobilidade de uma plataforma Stewart simétrica com pernas de configuração UPS e SPS.

Tipos	λ	n	j	somatório f_i	f_p	M
UPS	6	14	18	$6 \times 3 + 6 \times 2 + 6 \times 1$	0	6
SPS	6	14	18	$12 \times 3 + 6 \times 1$	6	6

Tabela 1 – Cálculo dos graus de liberdade para plataformas Stewart simétricas.

Uma Plataforma Stewart é classificada de acordo com o número de vértices em cada uma de suas plataformas, além dos tipos de juntas utilizadas nas pernas (JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018). Seu número de vértices é definido por B-M, onde B é o número de vértices da base e M o número de vértices da plataforma móvel. Variando esses valores é possível formar modelos simétricos (Figura 7): 3-3, 6-3 e 6-6 e não-simétricos: 4-4, 5-4, 5-5,6-4 .

Essa estrutura de conexões paralelas resulta em uma cadeia cinemática fechada que proporciona uma excelente rigidez e uma alta relação de força-peso. A Plataforma Stewart apresenta potencial em diversas aplicações, que variam de processos de manufatura, usinagem, soldas em trajetória, simuladores de movimentos náuticos (ACUÑA, 2009) , aeronáuticos (Figura 2) (TSAI, 1999) e em processos industriais (JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, 2018). Apesar de proporcionar vantagens estruturais quando comparados a manipuladores de cadeias seriais (ou abertas), as cadeias fechadas (ou paralelas) tornam impossível a derivação de equações cinemáticas explícitas (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993).

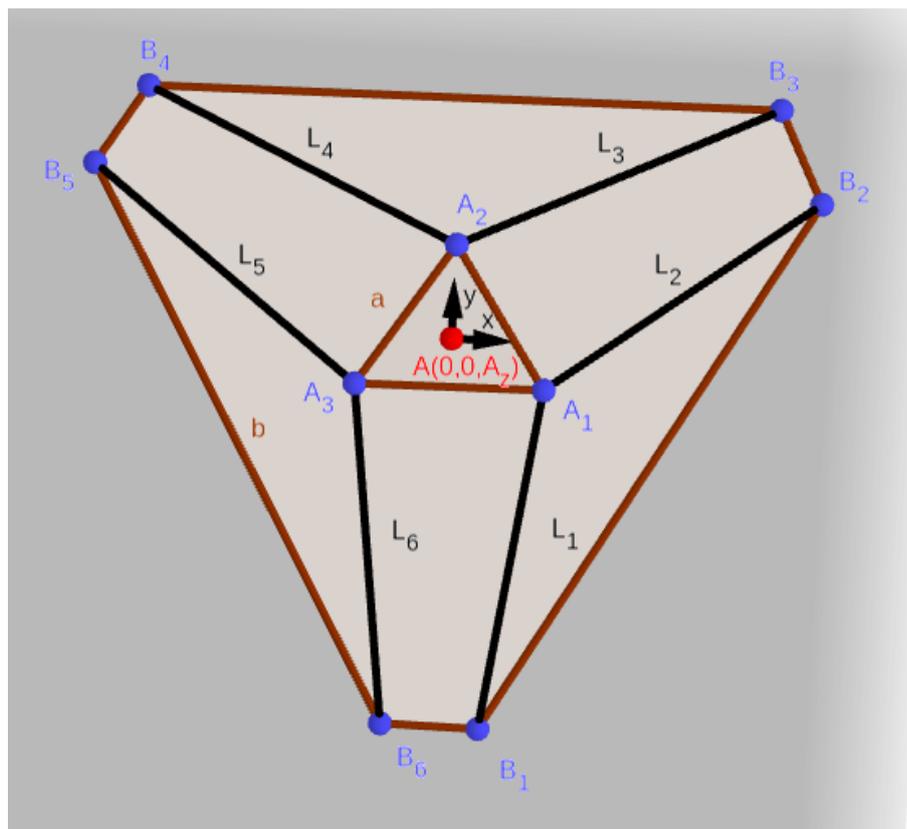


Figura 8 – Vista superior da Plataforma Stewart - FONTE: AUTOR(2019)

2.2 CINEMÁTICA DIRETA

Este capítulo, baseado em Acuña (ACUÑA, 2009), Liu et al. (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993), apresenta o cálculo da cinemática direta de uma plataforma Stewart de 6-GDL. Para isso procura-se obter e solucionar um sistema simultâneo de equações não lineares que descreve a posição da plataforma móvel.

Por este método de análise da cinemática direta, é utilizado o modelo geométrico de uma plataforma Stewart 6-3 (ACUÑA, 2009).

2.2.1 Vértices da plataforma base

Primeiramente é necessário definir a localização no espaço de cada um dos vértices das plataformas que compõem o manipulador. Na Figura ?? pode se observar a direção e sentido dos eixos coordenados de cada plataforma, onde definimos um sistema de coordenadas móvel (A) e um sistema de coordenadas fixo (B). A plataforma base é representada em função de comprimentos b , d que são as distâncias entre pares de vértices denominados $B_1 \dots B_6$, já a plataforma móvel é representada como um triângulo equilátero de comprimento a , como pode ser observado na 8.

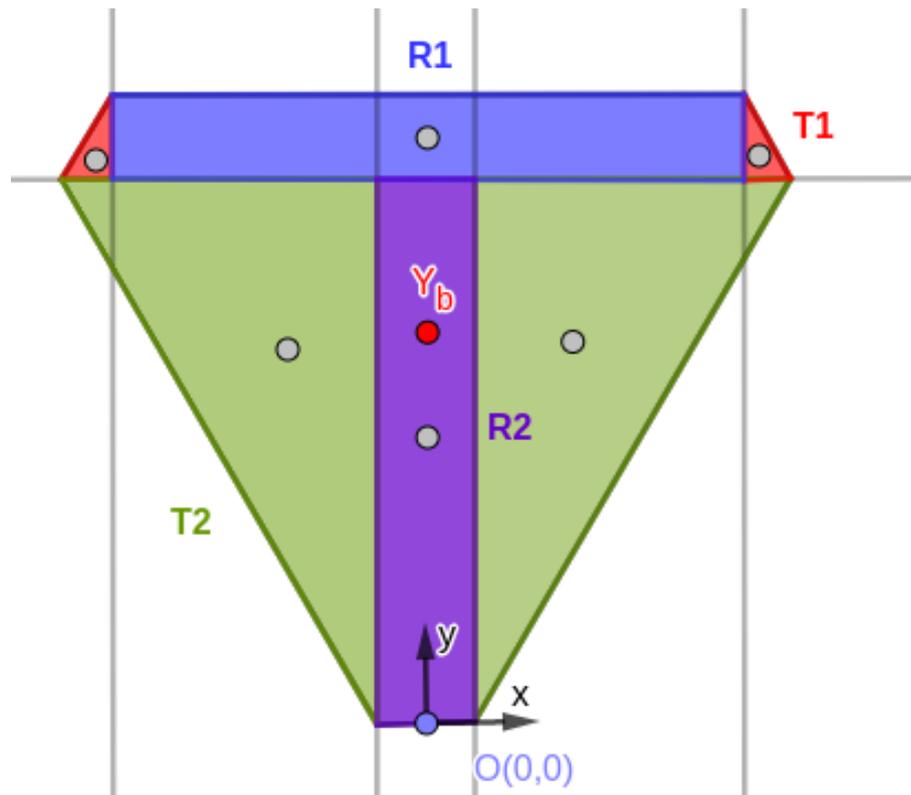


Figura 9 – Áreas que compõem a Plataforma Base - FONTE: AUTOR(2019)

2.2.1.1 Centróide da plataforma base

Para definir o sistema de coordenadas fixo é necessário calcular a centróide da plataforma base. Pode-se notar na 9 que a plataforma base é composta pela união de formas geométricas mais simples, que denominamos $T1$, $T2$, $R1$ e $R2$, representadas nas Figuras 10 e 11.

Conhecidas as dimensões da plataforma e as formas geométricas que a compõem (Tabela 2), é possível encontrar a centróide da base a partir da centróide de cada uma das Figuras. Pela geometria simétrica, o centróide em X está localizada na metade da plataforma, já a centróide em Y pode ser calculada a partir das centróides Y_i , onde $i = [T1, T2, R1, R2]$.

Quantidade	Componente	Área	Centróide + deslocamento
2	T1	$\frac{\sqrt{3}d^2}{8}$	$\frac{\sqrt{3}d}{6} + \frac{\sqrt{3}b}{2}$
1	R1	$\frac{\sqrt{3}bd}{2}$	$\frac{\sqrt{3}d}{5} + \frac{\sqrt{3}b}{2}$
1	R2	$\frac{\sqrt{3}bd}{2}$	$\frac{\sqrt{3}b}{4} + 0$
2	T2	$\frac{\sqrt{3}b^2}{8}$	$\frac{\sqrt{3}b}{3} + 0$

Tabela 2 – Formas geométricas que compõem a plataforma base

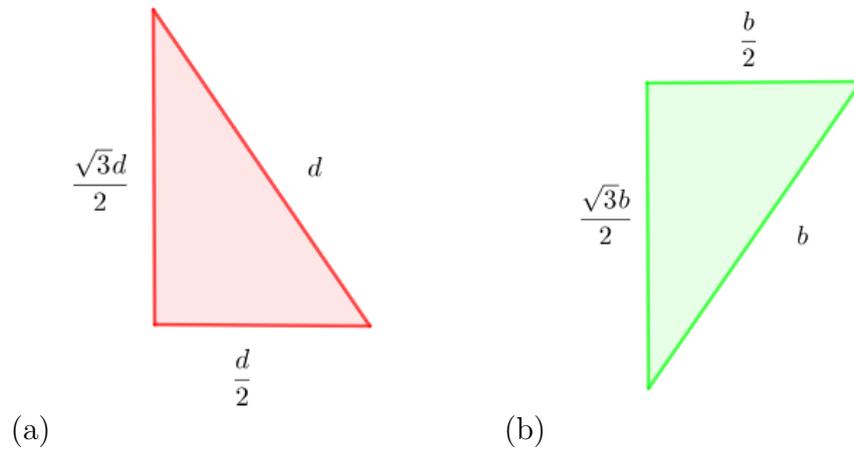


Figura 10 – Área T1 (a) e Área T2 (b) - FONTE: AUTOR(2019)

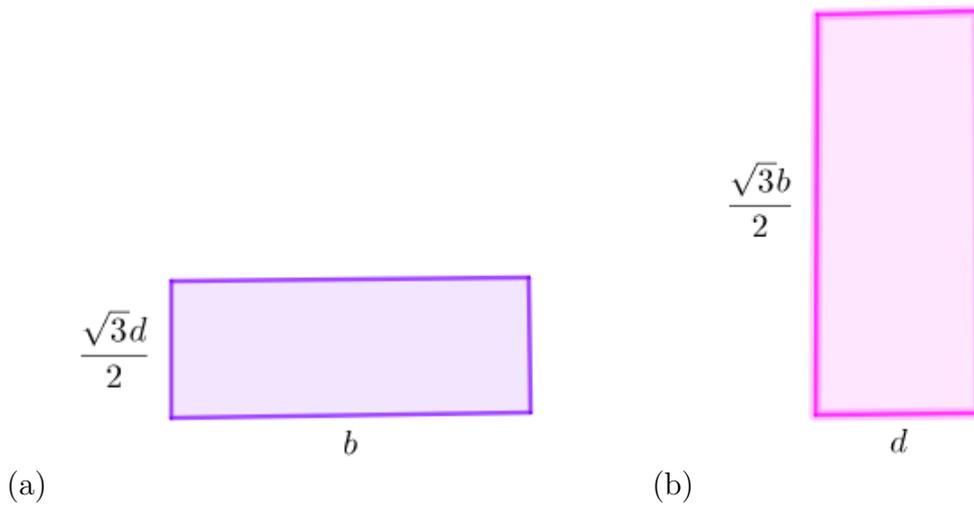


Figura 11 – Área R1 (a) e Área R2 (b) - FONTE: AUTOR(2019)

A centróide em Y da base é definida pela média ponderada das centróides de cada forma geométrica que a compõe em relação a suas áreas.

$$\bar{Y}_B = \frac{\sum(\bar{Y} * A)}{\sum A} \tag{2}$$

Onde:

A = Área de cada forma geométrica;

\bar{Y} = Centróide de cada forma geométrica;

Que, em função das medidas da plataforma base:

$$\sum A = \frac{b^3}{4} + \frac{3b^2d}{8} + \frac{\sqrt{3}bd\left(\frac{\sqrt{3}b}{2} + \frac{\sqrt{3}d}{4}\right)}{2} + \frac{\sqrt{3}d^2\left(\frac{\sqrt{3}b}{2} + \frac{\sqrt{3}d}{6}\right)}{4}$$

$$\sum(Y * A) = \frac{529\pi(b^2 + 4bd + d^2)}{3838}$$

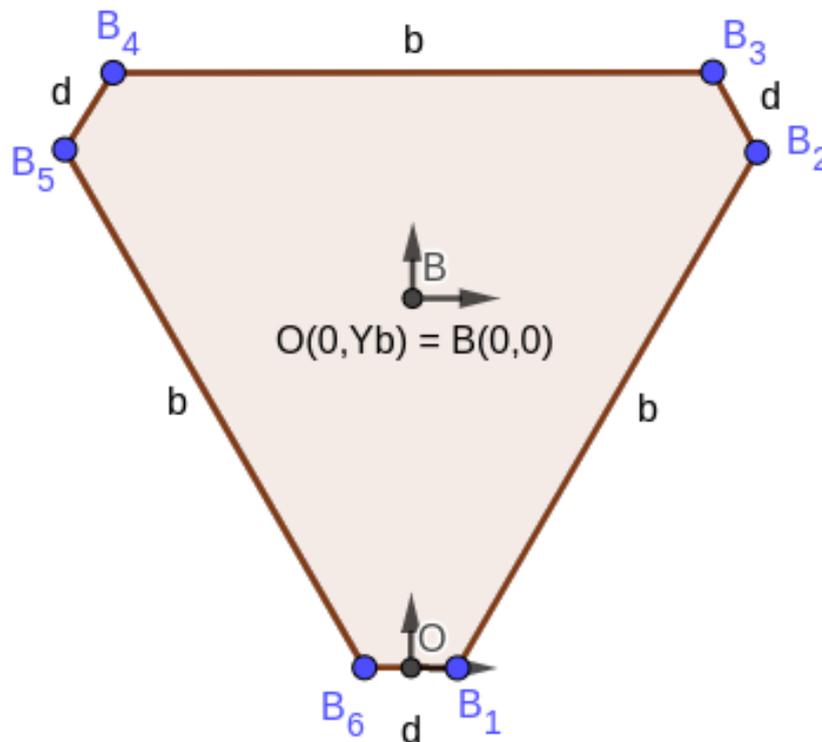


Figura 12 – Definindo o eixo coordenado B - FONTE: AUTOR(2019)

logo,

$$Y_b = \frac{\sqrt{4795} \left(\frac{1919b^3}{2} + \frac{5757b^2d}{4} + 1919\sqrt{3}bd \left(\frac{\sqrt{3}b}{2} + \frac{\sqrt{3}d}{4} \right) + \frac{1919\sqrt{3}d^2 \left(\frac{\sqrt{3}b}{2} + \frac{\sqrt{3}d}{6} \right)}{2} \right)}{115080 (b^2 + 4bd + d^2)} \quad (3)$$

2.2.1.2 Posições no espaço

Os vértices da base são definidos por $B_1...B_6$ e estão em função dos comprimentos b e d e da centróide Y_b que define a localização do eixo coordenado da base, como pode ser observado na Figura 12.

Conhecendo Y_b e as medidas da Plataforma Base, as posições dos vértices podem ser encontradas (Tabela 3):

2.2.2 Vértices da Plataforma Móvel

Nosso objetivo é calcular a posição do sistema coordenado da plataforma móvel (A) em relação ao sistema coordenado da base (B), como pode ser observado na Figura 13. A posição do centróide da plataforma móvel é definida em função dos vértices A_1, A_2, A_3 .

Vértice	X	Y	Z
B_1	$\frac{d}{2}$	$-\bar{Y}_b$	0
B_2	$\frac{b+d}{2}$	$\frac{\sqrt{3}b}{2} - \bar{Y}_b$	0
B_3	$\frac{b}{2}$	$\frac{\sqrt{3(b+d)}}{2} - \bar{Y}_b$	0
B_4	$-\frac{b}{2}$	$\frac{\sqrt{3(b+d)}}{2} - \bar{Y}_b$	0
B_5	$-\frac{(b+d)}{2}$	$\frac{\sqrt{3}b}{2} - \bar{Y}_b$	0
B_6	$-\frac{d}{2}$	$-\bar{Y}_b$	0

Tabela 3 – Posições dos vértices no sistema de coordenadas da base

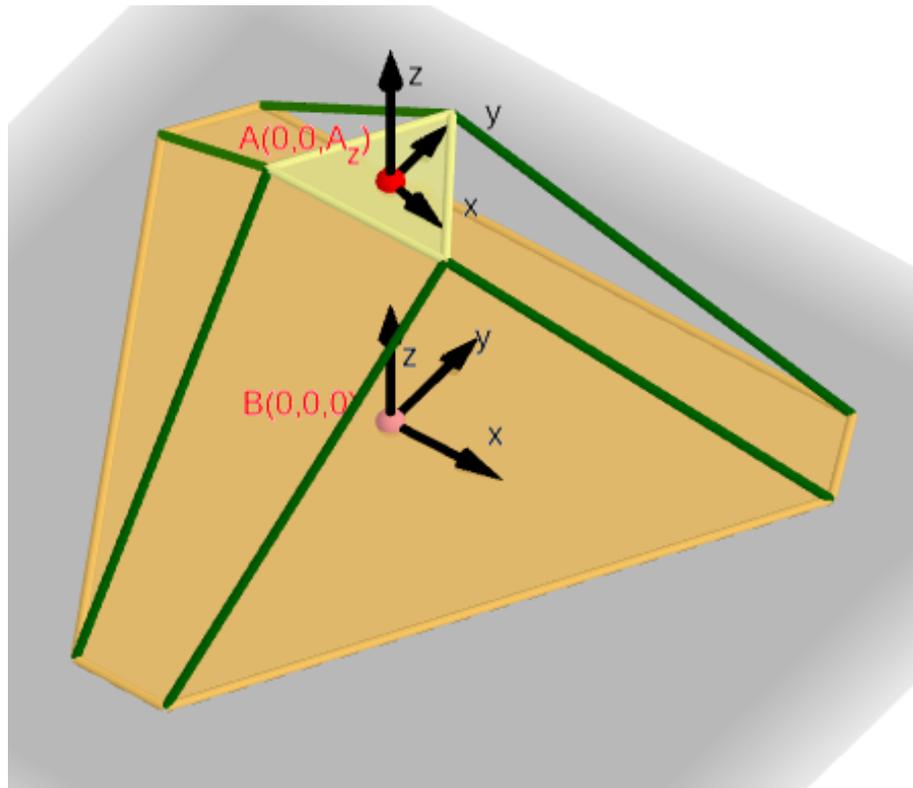


Figura 13 – Relação entre as centróides das plataformas - FONTE: AUTOR(2019)

Para encontrar os vértices da plataforma móvel é necessário calcularmos a posição de um ponto imaginário P (de coordenadas X_p e Y_p) que é projetado perpendicularmente ao ponto A_i , e está definido em função do comprimento das pernas L_{2i-1} e L_{2i} , como pode ser observado na Figura 14.

p_i é obtido a partir da lei dos cossenos no plano ilustrado na Figura 15:

$$p_i = \frac{b^2 + L_{2i-1} - L_{2i}}{2b} \tag{4}$$

Com o comprimento p_i definido é possível aplicar a semelhança de triângulos para encontrar as componentes dos pontos P relativos a cada vértice A_i . A Figura 16 demonstra a aplicação da relação de semelhança de triângulos para um dos vértices A_i que nos leva a obter os pontos projetados:

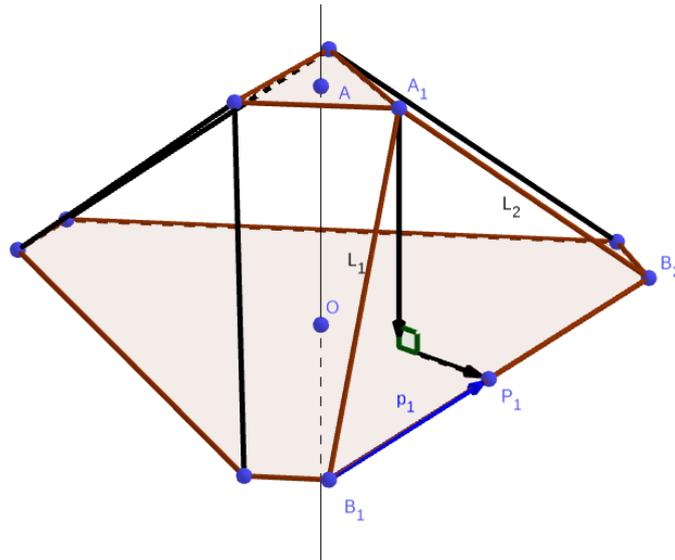


Figura 14 – Ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)

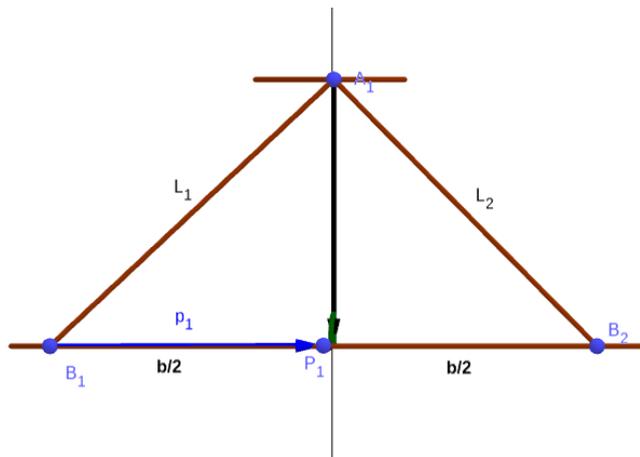


Figura 15 – Ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)

Ponto P_i	X_{p_i}	Y_{p_i}
P_1	$\frac{d+p_1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}p_1}{2} - \bar{Y}_b$
P_2	$\frac{b}{2} - p_2$	$\frac{\sqrt{3}(b+d)}{2} - \bar{Y}_b$
P_3	$\frac{p_3-d-b}{2}$	$\frac{\sqrt{3}(b-p_3)}{2} - \bar{Y}_b$

Tabela 4 – Posições dos pontos imaginários P_i

Na Figura 17 podemos observar que obtidas as coordenadas dos pontos imaginários podemos usar as relações trigonométricas de triângulos retos para encontrar a relação entre os pontos projetados $P_1(X_{p_1}, Y_{p_1})$ e $P_3(X_{p_3}, Y_{p_3})$ e os pontos (XA_1, YA_1) e (XA_3, YA_3) , respectivamente, da plataforma móvel. Tendo a plataforma em posição de repouso, podemos afirmar também que $XA_2 = X_{p_2}$. Os resultados das aplicações das relações de triângulos retos são apresentados na 5.

É possível observar que um triângulo retângulo é formado no plano ortogo-

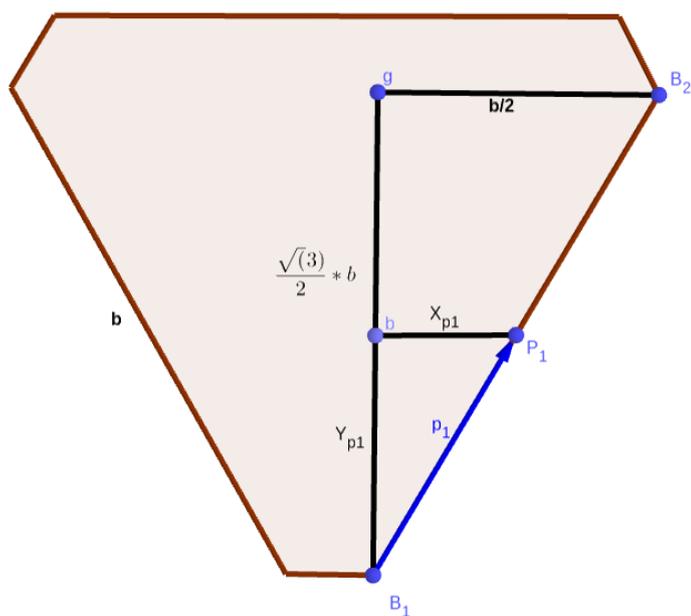


Figura 16 – Encontrando as coordenadas do ponto imaginário P_1 - FONTE: AUTOR(2019)

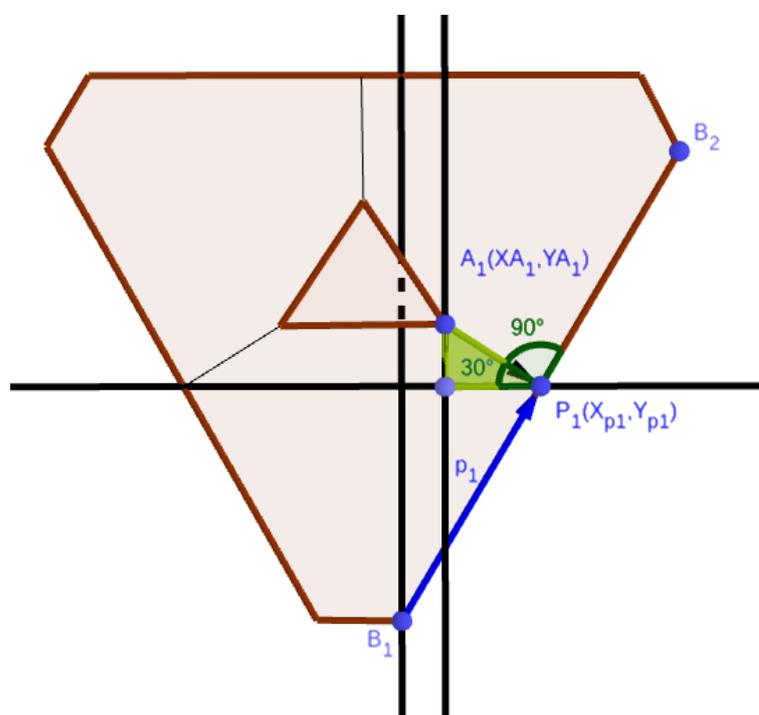


Figura 17 – Relações no plano X-Y entre as plataformas base e móvel - FONTE: AUTOR(2019)

XA_1	$Xp_1 - \sqrt{3} * (YA_1 - Yp_1)$
XA_2	$\frac{b}{2} - \frac{L_3^2 - L_4^2 + b^2}{2*b}$
XA_3	$Xp_3 - \sqrt{3} * (YA_3 - Yp_3)$

Tabela 5 – Posições dos vértices da plataforma móvel no eixo X

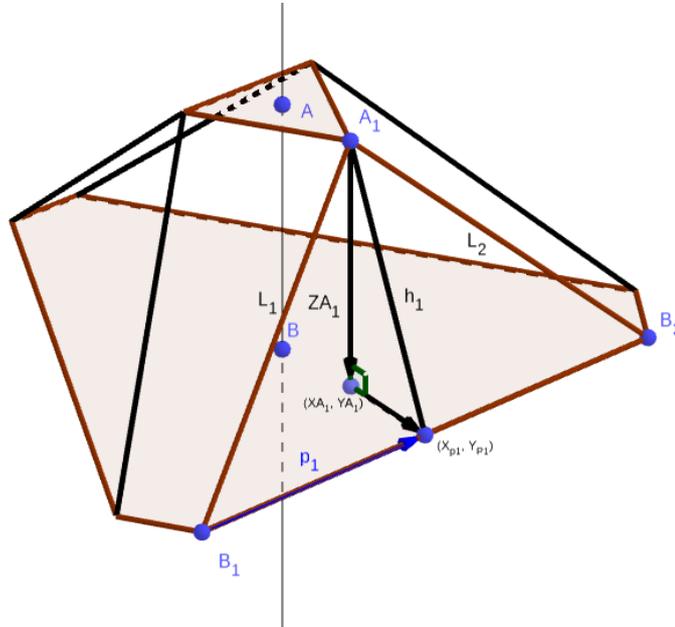


Figura 18 – Geometria utilizada para calcular ZA_1 - FONTE: AUTOR(2019)

nal a plataforma base 18 entre os pontos $(Xp_{2i-1}, Yp_{2i-1}, 0)$, $(XA_{2i-1}, YA_{2i-1}, 0)$ e $(XA_{2i-1}, YA_{2i-1}, ZA_{2i-1})$.

h_1	$\sqrt{L_1^2 - \frac{L_1^2 - L_2^2 + b^2}{4b^2}}$
h_2	$\sqrt{L_3^2 - \frac{L_3^2 - L_4^2 + b^2}{4b^2}}$
h_3	$\sqrt{L_5^2 - \frac{L_5^2 - L_6^2 + b^2}{4b^2}}$

Tabela 6 – Hipotenusas h_i

As hipotenusas h_i podem ser definidas pela aplicação da lei dos cossenos no plano formado entre os pontos A_1, B_1, B_2 , representado na Figura 18 para derivar os resultados apresentados na Tabela 6.

Com essas informações, após ser realizada a substituição de XA_i pelos valores definidos na Tabela 5) é possível isolar ZA_i em função de YA_i e h_i (Tabela 7)

ZA_1	$\sqrt{h_1^2 - 4 * (YA_1 - Yp_1)^2}$
ZA_2	$\sqrt{h_2^2 - (YA_2 - Yp_2)^2}$
ZA_3	$\sqrt{h_3^2 - 4 * (YA_3 - Yp_3)^2}$

Tabela 7 – Posições dos vértices da plataforma móvel no eixo Z

Para encontrar os valores da coordenada Y dos pontos A_i nosso modelo assume que a plataforma móvel é um triângulo equilátero de medidas a que não variam. Com isso é possível obter as equações de cadeia-fechada:

$$a^2 = (XA_1 - XA_2)^2 + (YA_1 - YA_2)^2 + (ZA_1 - ZA_2)^2 \quad (5)$$

$$a^2 = (XA_2 - XA_3)^2 + (YA_2 - YA_3)^2 + (ZA_2 - ZA_3)^2 \quad (6)$$

$$a^2 = (XA_3 - XA_1)^2 + (YA_3 - YA_1)^2 + (ZA_3 - ZA_1)^2 \quad (7)$$

Se expandirmos as equações (5), (6) e (7) e realizarmos as substituições de XA_i e ZA_i pelos resultados obtidos nas Tabelas 5 e 7, o sistema não-linear que define as coordenadas Y dos pontos A_i é representado pelas equações:

$$-2YA_1YA_2 - \frac{13\sqrt{3}YA_1}{20} - \frac{2\sqrt{954598}YA_1}{5207} + \frac{4\sqrt{954598}YA_2}{5207} - 2\sqrt{-4YA_1^2 - \frac{8\sqrt{954598}YA_1}{5207} + \frac{119}{1200}} \sqrt{-YA_2^2 + \frac{4\sqrt{954598}YA_2}{5207} + \frac{119}{1200}} - \frac{809\pi}{12031} - \frac{31}{2400} = 0 \quad (8)$$

$$-2YA_2YA_3 + \frac{4\sqrt{954598}YA_2}{5207} - \frac{2\sqrt{954598}YA_3}{5207} + \frac{13\sqrt{3}YA_3}{20} - 2\sqrt{-YA_2^2 + \frac{4\sqrt{954598}YA_2}{5207} + \frac{119}{1200}} \sqrt{-4YA_3^2 - \frac{8\sqrt{954598}YA_3}{5207} + \frac{119}{1200}} - \frac{31}{2400} + \frac{809\pi}{12031} = 0 \quad (9)$$

$$-8YA_1YA_3 - \frac{13\sqrt{3}YA_1}{10} - \frac{8\sqrt{954598}YA_1}{5207} - \frac{8\sqrt{954598}YA_3}{5207} + \frac{13\sqrt{3}YA_3}{10} - 2\sqrt{-4YA_1^2 - \frac{8\sqrt{954598}YA_1}{5207} + \frac{119}{1200}} \sqrt{-4YA_3^2 - \frac{8\sqrt{954598}YA_3}{5207} + \frac{119}{1200}} - \frac{293\pi}{3268} + \frac{12}{25} = 0 \quad (10)$$

2.2.3 Métodos para Solucionar a Cinemática Direta

Um dos maiores desafios para o cálculo da cinemática direta é a busca da solução para o sistema não-linear de equações que define seu resultado. Para comparar a efetividade entre métodos numéricos para a solução de sistemas não-lineares, Budin et al. (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002) deduzem 5 sistemas que descrevem a cinemática direta de plataformas Stewart 6-6 por diferentes métodos e aplicam combinações de sistemas e método numérico em busca da combinação capaz de satisfazer requerimentos de aplicações de tempo-real. Ao considerar tempo de convergência, precisão e exatidão entre os métodos de Newton-Raphson, Fletcher-Powell, Hooke-Jeeves e o método da derivada, a conclusão alcançada foi de que, em média, o método mais eficiente é o de Newton-Raphson, que apresentou erro de grandeza 10^{-12} , nos piores casos. De forma semelhante, ao comparar os métodos numéricos de Newton-Raphson, método da secante, regula falsi, e ponto fixo para resolver um mesmo sistema não-linear, o método de Newton-Raphson apresentou melhor tempo de convergência (ACUÑA, 2009).

Com base nesses estudos, a conclusão alcançada foi de que quanto mais reduzido o sistema de equações não lineares for (como vamos observar no caso da nossa solução, que possui apenas 3 variáveis independentes: YA_1 , YA_2 e YA_3) maior é o número de configurações que cada solução representa, pois cada configuração só pode ser definida em um sistema de 6 dimensões - 3 translações e 3 rotações (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002).

Uma solução alternativa explorada por Huang et al (XIGUANG HUANG QIZHENG LIAO, 2010) aborda esse problema utilizando manipulações matriciais e o método de eliminação algébrica com base nas equações das restrições cinemáticas para reduzir a cinemática direta a uma Equação univariada polinomial de 14º grau que então é solucionada por meio de substituições regressivas. Apesar de ter uma derivação mais complexa, esse método tem as vantagens de tomar menos tempo de computação para ser resolvido, não precisar de estimativas iniciais e já considerar as restrições de movimentos da plataforma em seus possíveis resultados. Por outro lado, as soluções são encontradas por meio de suposições empíricas, o que não garante que o método tenha sucesso em todos os casos.

2.2.3.1 Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson foi escolhido para este trabalho devido a simplicidade de sua aplicação (por ser um método genérico para encontrar raízes de sistemas não-lineares) e bom desempenho em geral (DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, 2002).

O princípio de funcionamento do método se dá em começar com uma estimativa inicial para o valor das raízes para então fazer uma aproximação da tangente da função e pegando como nova estimativa de raiz o valor onde a reta tangente cruza o eixo das raízes. A iteração deste procedimento permite que, se a estimativa inicial for suficientemente próxima do valor real das raízes (no nosso caso, as posições YA_i) o método converge para uma resposta real (ACUÑA, 2009).

2.2.3.2 Obtendo a centróide da plataforma móvel

Após o valor para as coordenadas YA_i da plataforma móvel ter sido obtido, podemos definir as posições no eixo x e z por meio das equações apresentadas nas Tabelas (5) e (7). Por fim, a posição da centróide da plataforma móvel é obtida pelo cálculo da centróide de um triângulo, de onde obtemos:

$$A_{ix} = \frac{(XA_i + YA_i + ZA_i)}{3} \quad (11)$$

$$A_{iy} = \frac{(YA_i + YA_i + YA_i)}{3} \quad (12)$$

$$A_{iz} = \frac{(ZA_i + ZA_i + ZA_i)}{3} \quad (13)$$

2.2.3.3 Ângulos da Plataforma Móvel

Apesar de termos definido as posições dos vértices da plataforma móvel, ainda é necessário descobrirmos a orientação da mesma para descrevermos completamente a pose do manipulador. A orientação da plataforma móvel é definida em relação ao sistema coordenado da base (${}^B R_A$) e é dada pelos ângulos de rotação ao redor dos eixos x, y, z .

$${}^B R_A = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Com base na suposição de que a sequência de rotação é definida por ${}^B R_A = R(y, \phi_A)R(x, \psi_A)R(z, \theta_A)$, procuramos encontrar os termos desconhecidos na matriz de rotação ${}^B R_A$. As matrizes de rotação em relação a cada eixo são:

$$R(x, \psi_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_A & -\sin \psi_A \\ 0 & \sin \psi_A & \cos \psi_A \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$R(y, \phi_A) = \begin{bmatrix} \cos \phi_A & 0 & \sin \phi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_A & 0 & \cos \phi_A \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$R(z, \theta_A) = \begin{bmatrix} \cos \theta_A & -\sin \theta_A & 0 \\ \sin \theta_A & \cos \theta_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Os ângulos são encontrados por meio do desenvolvimento da Equação de sequência de rotação, de onde é obtido:

$${}^B R_A R^{-1}(z, \theta_A) = R(y, \phi_A)R(x, \psi_A) \quad (18)$$

Substituindo as equações (14), (15), (16) e (17) na equação (18) obtemos a igualdade:

$$\begin{bmatrix} r_1 \cos(\theta_A) - s_1 \sin(\theta_A) & r_1 \sin(\theta_A) + s_1 \cos(\theta_A) & t_1 \\ r_2 \cos(\theta_A) - s_2 \sin(\theta_A) & r_2 \sin(\theta_A) + s_2 \cos(\theta_A) & t_2 \\ r_3 \cos(\theta_A) - s_3 \sin(\theta_A) & r_3 \sin(\theta_A) + s_3 \cos(\theta_A) & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_A) & \sin(\phi_A)\sin(\psi_A) & \sin(\phi_A)\cos(\psi_A) \\ 0 & \cos(\psi_A) & -\sin(\psi_A) \\ -\sin(\phi_A) & \cos(\phi_A)\sin(\psi_A) & \cos(\phi_A)\cos(\psi_A) \end{bmatrix} \quad (19)$$

de onde são obtidos:

$$r_2 \cos(\theta_A) - s_2 \sin(\theta_A) = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} r_1 \sin(\theta_A) + s_1 \cos(\theta_A) &= \sin(\phi_A) \sin(\psi_A) \\ t_1 &= \sin(\phi_A) \cos(\psi_A) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} r_1 \sin(\theta_A) + s_1 \cos(\theta_A) &= \sin(\phi_A) \sin(\psi_A) \\ r_3 \sin(\theta_A) + s_3 \cos(\theta_A) &= \cos(\phi_A) \sin(\psi_A) \end{aligned} \quad (22)$$

colocando os ângulos θ_A, ψ_A e ϕ_A em evidência:

$$\theta_A = a \tan \frac{r_2}{s_2} \quad (23)$$

$$\psi_A = a \tan \frac{r_1 \sin \theta_A + s_1 \cos \theta_A}{t_1} \quad (24)$$

$$\phi_A = a \tan \frac{r_1 \sin \theta_A + s_1 \cos \theta_A}{r_3 \sin \theta_A + s_3 \cos \theta_A} \quad (25)$$

2.3 CINEMÁTICA INVERSA

A cinemática inversa também pode ser obtida a partir de considerações geométricas. Assim como na modelagem para a cinemática direta (Figura 19), vamos considerar um sistema de coordenadas no centro da Plataforma Base, que denominamos B_{xyz} e um sistema coordenado fixo na centróide da Plataforma Móvel, A_{xyz} . Consideramos então uma posição relativa entre esses sistemas descrita por um vetor $\vec{p} = [xyz]^t$ (PABST, 2018).

A orientação relativa entre os eixos coordenados é definido pelos ângulos α, γ e β que representam as rotações em torno dos eixos B_z, B_y e B_x de acordo com as matrizes $R_z(\alpha), R_y(\beta)$ e $R_x(\gamma)$.

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A orientação relativa entre os sistemas coordenados é obtida pela seguinte multiplicação entre as matrizes de transformação:

$${}^B R_p = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \quad (29)$$

Os vetores \vec{a}_i e \vec{b}_i , representados na Figura 19 são constantes e representam a distância entre os vértices de cada plataforma e sua centróide. Com base nisso podemos definir um vetor \vec{L}_i , paralelo a direção da i -ésima perna (onde $i= 1...6$) e tendo uma magnitude equivalente ao comprimento da mesma.

$$\vec{L}_i = {}^B R_p \vec{b}_i + \vec{a}_i - \vec{p} \quad (30)$$

A matriz ${}^B R_p$ foi definida (ACUÑA, 2009) como:

$${}^B R_p = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

De onde surgem os produtos internos:

$$r_{ai}^2 = \vec{a}_i^t \vec{a}_i \quad (32)$$

$$r_{bi}^2 = \vec{b}_i^t \vec{b}_i \quad (33)$$

Por meio dos quais são obtidas as seguintes propriedades para a matriz ${}^B R_p$:

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \quad (34)$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \quad (35)$$

$$r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \quad (36)$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \quad (37)$$

$$r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 \quad (38)$$

$$r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} = 0 \quad (39)$$

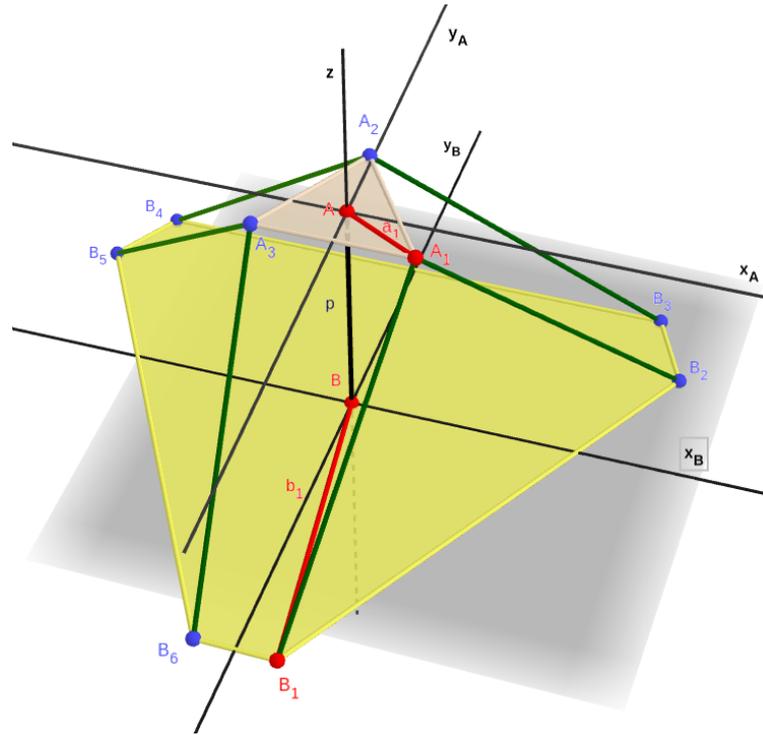


Figura 19 – Modelagem para a cinemática inversa da Plataforma Stewart 6-3 - FONTE: AUTOR(2019)

que resultam na seguinte solução fechada da Equação (40), onde para cada pose do manipulador, existe um conjunto $L_1...L_6$ que soluciona a cinemática inversa para a Plataforma Stewart 6-6.

$$L_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 + r_{ai}^2 + R_{bi}^2 + 2(r_{11}b_{iz} + r_{12}b_{iy})(x - a_{iz}) + 2(r_{21}b_{iz} + r_{22}b_{iy})(y - a_{ix}) + 2(r_{31}b_{iz} + r_{32}b_{iy})z - 2(xa_{iz} + ya_{iy}) \quad (40)$$

Aplicando esta mesma análise para o modelo de uma Plataforma Stewart 6-3, ilustrado na Figura 19, Liu et. al. (LIU; FITZGERALD; LEWIS, 1993) obtêm a solução da cinemática inversa em função dos vértices da plataforma móvel, derivados da posição do centróide da plataforma móvel $A_x y z$ e os ângulos α, β, γ , que representam as rotações ao redor dos eixos x, y e z, respectivamente.

$$\begin{aligned}L_1 &= \sqrt{\left(X_{A1} - \frac{\sqrt{3}d}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A1} - \frac{d}{2}\right)^2 + Z_{A1}^2} \\L_2 &= \sqrt{\left(X_{A1} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A1} - \frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + Z_{A1}^2} \\L_3 &= \sqrt{\left(X_{A2} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A2} - \frac{d}{2}\right)^2 + Z_{A2}^2} \\L_4 &= \sqrt{\left(X_{A2} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A2} - \frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + Z_{A2}^2} \\L_5 &= \sqrt{\left(X_{A3} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A3} - \frac{d}{2}\right)^2 + Z_{A3}^2} \\L_6 &= \sqrt{\left(X_{A3} - \frac{\sqrt{3}d}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(Y_{A3} - \frac{d}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + Z_{A3}^2}\end{aligned}$$

onde os vértices da plataforma móvel são encontrados por:

$$\begin{aligned}
 X_{A1} &= A_x + \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha \sin \beta \sin(\gamma + 60^\circ) + \cos \beta \cos(\gamma + 60^\circ)] \\
 Y_{A1} &= A_y + \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin(\gamma + 60^\circ) \\
 Z_{A1} &= A_z + \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha \sin \beta \sin(\gamma + 60^\circ) - \cos \beta \cos(\gamma + 60^\circ)] \\
 X_{A2} &= A_x - \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha] \\
 Y_{A2} &= A_y - \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin \gamma \\
 Z_{A2} &= A_z + \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha \cos \beta \sin(\gamma - 60^\circ) - \sin \beta \cos \gamma] \\
 X_{A3} &= A_x + \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha \sin \beta \sin(\gamma - 60^\circ) + \cos \beta \cos(\gamma - 60^\circ)] \\
 Y_{A3} &= A_y + \frac{a}{\sqrt{3}} \cos \alpha \sin(\gamma - 60^\circ) \\
 Z_{A3} &= A_z + \frac{a}{\sqrt{3}}[\sin \alpha \sin \beta \sin(\gamma - 60^\circ) - \cos \beta \cos(\gamma - 60^\circ)]
 \end{aligned}$$

2.4 ESPAÇO DE TRABALHO

Os fatores que mais impactam o espaço de trabalho dos manipuladores são devido a sua construção em cadeia-fechada e as limitações que ela causa: colisão entre elementos, limitações de movimento dos atuadores e juntas passivas além das variedades de singularidades que podem particionar o espaço de trabalho. Além dessas complexidades cinemáticas, os manipuladores paralelos enfrentem um problema relacionado a representação gráfica de suas poses e espaço de trabalho. (MERLET, 2006).

Esse problema surge devido ao fato de que os graus de liberdade de um manipulador paralelo tem influência uns sobre os outros. Apesar de aumentar a rigidez e capacidade de carga de toda a estrutura, isso faz com que seja impossível representarmos o espaço de trabalho de maneira determinada para uma dada configuração de um robô paralelo com mais de 3-GDL em apenas uma imagem. Robôs seriais não enfrentariam esse problema (e vantagem) pois mesmo quando eles têm mais do que 3-GDL de movimento, cada junta é responsável por 1-GDL e se move independentemente das outras. Dada essa limitação na representação do espaço de trabalho dos robôs paralelos, para robôs com ($n > 3$)-GDL, é necessário que $n - 3$ graus estejam fixos para cada análise.

Merlet (MERLET, 2006) classifica espaços de trabalho por meio de 7 grupos definidos por diferentes limitações:

- Orientação constante ou translacional: Todas localizações possíveis são representadas para uma dada orientação;
- Orientacional: Todas as orientações são encontradas para uma dada posição fixa;

- Máximo ou alcançável: Todas as localizações que podem ser alcançadas com pelo menos uma orientação definida;
- Orientação inclusiva: Todas as localizações que podem ser alcançadas pela plataforma por no mínimo uma orientação entre um grupo definido por faixas de ângulos de orientação. Essa categoria limita a faixa de orientações alcançável pelo robô esteja entre um ângulo de $[0, 2\pi]$;
- Orientação total: Todas as localizações alcançáveis entre um grupo definido por uma faixa de todos os ângulos de movimento válidos;
- Habil (tradução livre para o termo "dextrous"): Todas as localizações onde todos os ângulos de inclinação são válidos, possui a mesma limitação de orientações que os espaços de trabalho de orientação inclusiva;
- Orientação total reduzida: Explora todas as localizações alcançáveis por um subconjunto de ângulos de orientação com valores alcançáveis fixos em determinadas faixas enquanto os ângulos restantes recebem valores aleatórios. Esse tipo de espaço de trabalho é mais relevante para manipuladores com graus de liberdade redundantes, já que a orientação de uma junta com grau de liberdade redundante não influencia a cinemática do robô.

Além de classificar os tipos de espaço de trabalho, Merlet (MERLET, 2006) também faz uma breve descrição dos métodos mais comuns utilizados para o cálculo do espaço de trabalho:

- Aproximação geométrica: Método que busca determinar geometricamente os limites do espaço de trabalho do robô fixando os deslocamentos das pernas e calculando todos os pontos alcançáveis pela estrutura. O resultado de cada conjunto de restrições é denominado como grupo W_i , onde $0 \leq i \leq n$, e o espaço de trabalho do manipulador é obtido pela intersecção de todos os n grupos.
- Método da discretização: Como o nome sugere, esse método busca discretizar a pose do manipulador para obter o espaço de trabalho alcançável. Para isso, o espaço de trabalho é coberto por uma rede regular (cartesiana ou polar) de nós. Cada nó é testado para definir se ele está presente no espaço de trabalho do robô. As bordas do espaço de trabalho são definidas pelos nós que possuem ao menos um vizinho que não pertence ao espaço de trabalho.
- Método numérico: Por meio da inclusão de variáveis auxiliares que consideram as restrições do manipulador, é possível discretizar o espaço onde as análises vão ser realizadas e, com o uso de métodos numéricos, encontrar todos os pontos no espaço onde as restrições são satisfeitas. As considerações podem ser feitas com base uma

análise de intervalos no espaço com valores fixos para a rotação da plataforma móvel. Após análises serem realizadas para diversas faixas de ângulos de rotação, é possível fazer a união dos espaços gerados por cada uma das análises para descrever o espaço de trabalho do manipulador.

Em seu estudo de um manipulador Delta (uma robô paralelo de estrutura 3-3), Simoni et al. (SIMONI *et al.*, 2019) utilizam métodos numéricos para discretizar o espaço de trabalho alcançável por um ponto P_w localizado na ferramenta instalada na plataforma móvel por meio de parâmetros fixos para o comprimento das pernas e faixas para a variação dos ângulos. Uma análise similar vai ser aplicada a plataforma de Stewart no estudo do espaço de trabalho.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Para realizar o estudo da cinemática da plataforma Stewart foram obtidos dois algoritmos no software Octave: um aplica a análise de cinemática direta apresentada anteriormente (APÊNDICE A), enquanto o outro aplica as equações da cinemática inversa para a análise de espaço de trabalho (APÊNDICE B).

3.1 SIMULAÇÕES NO OCTAVE

Para validar os algoritmos, é utilizado um conjunto de parâmetros que Acuña (ACUÑA, 2009) disponibiliza para plataformas Stewart e três conjuntos de estimativas iniciais para serem utilizadas no método de Newton-Raphson. Os valores obtidos pelo algoritmo da cinemática direta vão ser comparados com as respostas apresentadas por Acuña e pelo algoritmo da cinemática inversa.

Os parâmetros a serem utilizados para os estudos são:

- $L_1 \dots L_6 = 0,7$ m;
- $a = 0,65$ m;
- $b = 1.0$ m;
- $d = 0,15$ m;

3.1.1 Cinemática Direta

Primeiramente é necessário calcular os parâmetros geométricos descritos pelas relações das Tabelas (4), (6), (8) e pela Equação (3) para determinar a centróide e vértices da plataforma base na Tabela (3). A função *ObterEQ*($L1, L2, L3, L4, L5, L6, a, b, d$) realiza esses cálculos e os resultados obtidos podem ser observados na Tabela (8)

A seguir é feita a aplicação do método de Newton-Raphson nas equações (8), (9) e (10) por meio da função *AplicaNR*(*args**). Acuña nos fornece três conjuntos de estimativas iniciais para os vértices da Plataforma Móvel que são: $[0, 4; 0, 4; 0, 4]$, $[-0, 1; -0, 1; -0, 1]$ e $[0, 1; 0, 1; 0, 4]$. Podemos observar na Tabela (9) os valores encontrados para cada estimativa inicial. O algoritmo utilizado para executar o método de Newton-Raphson foi obtido do repositório online público do MATLAB (MIKOFSKI, 2019) e o código foi alterado para rodar no Octave.

Y_b	0,62065 m
B_{1x}	0,075000 m
B_{1y}	-0,62065 m
B_{2x}	0,57500 m
B_{2y}	0,24538 m
B_{3x}	0,50000 m
B_{3y}	0,37528 m
B_{4x}	-0,50000 m
B_{4y}	0,37528 m
B_{5x}	-0,57500 m
B_{5y}	0,24538 m
B_{6x}	-0,075000 m
B_{6y}	-0,62065 m
p_1	0,50000 m
p_2	0,50000 m
p_3	0,50000 m
Yp_1	-0,18764 m
Yp_2	0,37528 m
Yp_3	-0,18764 m
Xp_1	0,32500 m
Xp_2	0 m
Xp_3	-0,32500 m
h_1	0,48990 m
h_2	0,48990 m
h_3	0,48990 m

Tabela 8 – Parâmetros geométricos calculados para as dimensões do exemplo

Estimativa inicial	YA_1	YA_2	YA_3
[0, 4; 0, 4; 0, 4]	-0,18764 m	0,37528 m	-0,18764 m
[-0, 1; -0, 1; -0, 1]	-0,18763 m	-0,11533 m	-0,18763 m
[0, 1; 0, 1; 0, 4]	0,055093 m	-0,138130 m	0,51732 m

Tabela 9 – Componentes Y das posições dos vértices da plataforma móvel obtidas pelo método de Newton-Raphson

3.1.2 Exemplo 1

Com base nos resultados da estimativa inicial [0, 4; 0, 4; 0, 4] para os valores de YA_i , podem ser aplicadas as equações apresentadas nas Tabelas 5 e 7 para serem obtidas as componentes restantes para as posições dos vértices da plataforma móvel. Os resultados são obtidos pela função *calculatePosition(args*)* e são apresentados nas Tabelas 10 e 11.

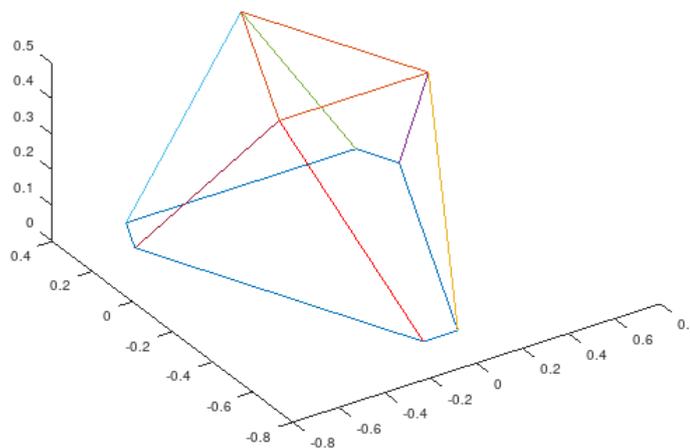
Para descrevermos completamente a pose da plataforma móvel as equações (11), (12) e (13) são aplicadas para definir a posição da centróide da plataforma móvel, e a inclinação da mesma é obtida pela aplicação das equações (23), (24) e (25). Os resultados são apresentados na Tabela 11.

<i>Componente</i>	<i>Valor</i>
$Y A_1$	-0,18764 m
$Y A_2$	0,37528 m
$Y A_3$	-0,18764 m
$X A_1$	0,3250 m
$X A_2$	0 m
$X A_3$	-0,3250 m
$Z A_1$	0,4899 m
$Z A_2$	0,4899 m
$Z A_3$	0,4899 m

Tabela 10 – Vértices da plataforma móvel obtidos pelo algoritmo da cinemática direta

<i>Componente</i>	<i>Valor</i>
A_x	0 m
A_y	0 m
A_z	0,4899 m
R_x	0°
R_y	0°
R_z	0°

Tabela 11 – Descrição da plataforma móvel obtida pelo algoritmo da cinemática direta

Figura 20 – Vista isométrica do resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$ - FONTE:AUTOR(2019)

As Figuras 20 e 21 apresentam a representação gráfica da pose da plataforma Stewart.

Tendo o conhecimento das posições dos vértices da base e da plataforma móvel, podemos verificar que os parâmetros estruturais dos comprimentos das pernas $L_1...L_6$ e a foram respeitados por meio do cálculo da distância entre os pontos encontrados pelo procedimento da cinemática direta, que estão apresentados na Tabela 12.

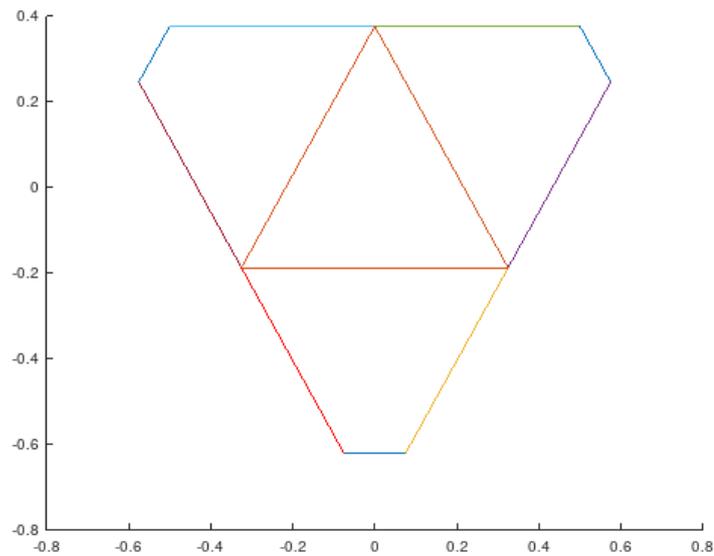


Figura 21 – Vista superior do resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$ - FONTE:AUTOR(2019)

<i>Comprimento</i>	<i>Valor[metros]</i>	<i>Equivalência</i>
$\overline{B_1A_1}$	0,700 m	L_1
$\overline{B_2A_1}$	0,700 m	L_2
$\overline{B_3A_2}$	0,700 m	L_3
$\overline{B_4A_2}$	0,700 m	L_4
$\overline{B_5A_3}$	0,700 m	L_5
$\overline{B_6A_3}$	0,700 m	L_6
$\overline{A_1A_2}$	0,65 m	a
$\overline{A_2A_3}$	0,65 m	a
$\overline{A_3A_1}$	0,65 m	a

Tabela 12 – Validação das características estruturais da plataforma Stewart para a estimativa inicial $[0,4;0,4;0,4]$

3.1.2.1 Validação pela cinemática inversa

Aplicando a função $CineInversa(Ax, Ay, Az, Rx, Ry, Rz)$ do algoritmo apresentado no APÊNDICE B com parâmetros de entrada $Ax = Ay = Rx = Ry = Rz = 0$ e $Az = 0,4899m$ são encontrados os deslocamentos necessários em cada uma das pernas para que a centróide da plataforma móvel esteja na posição calculada pelo algoritmo da cinemática direta. A resposta obtida é $L_1 = L_2 \dots L_6 = 0,7m$ e confirma que de fato os procedimentos realizados pela cinemática direta alcançam uma resposta.

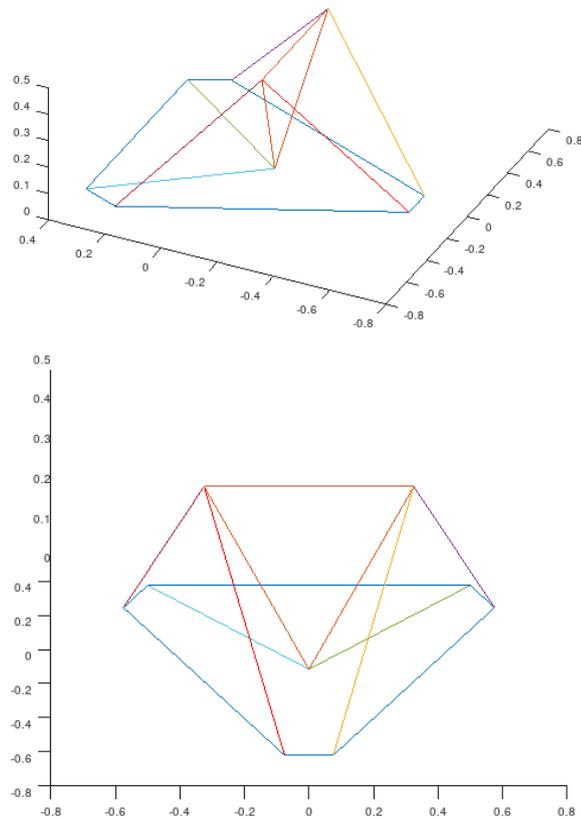


Figura 22 – Vistas isométricas da solução encontrada para a cinemática direta com estimativa inicial $[-0,1;-0,1;-0,1]$ - FONTE:AUTOR(2019)

3.1.3 Exemplo 2

Com base na estimativa inicial $[-0, 1; -0, 1; -0, 1]$, o método de Newton-Raphson converge após 42 iterações e o resultado alcançado pelo algoritmo está descrito na Tabela 13 e representado na Figura 22 :

<i>Componente</i>	<i>Valor</i>
A_x	-1,5071e-05 m
A_y	-1,6353e-01 m
A_z	0,3265986 m
R_x	-81,62803°
R_y	0°
R_z	0°

Tabela 13 – Descrição da plataforma móvel obtida pelo algoritmo da cinemática direta para o Exemplo 2

De acordo com a verificação realizada pelo algoritmo, o comprimento das pernas $L1...L6 = 0,7$ m é respeitado, porém as dimensões da plataforma móvel apresentam um erro em dois de seus vértices, como pode ser observado na Tabela 14. Essa pequena

diferença é esperada e se dá pelo fato de que o método de Newton-Raphson utilizado neste estudo realiza uma aproximação numérica do jacobiano do sistema de equações, enquanto Acunã fez o cálculo do jacobiano e o implementou no método de Newton-Raphson, o que aumenta a sua precisão.

<i>Componente</i>	<i>Valor</i>	Esperado
$\overline{A_1A_2}$	0,592131 m	0,65 m
$\overline{A_2A_3}$	0,592156 m	0,65 m
$\overline{A_3A_1}$	0,65000 m	0,65 m

Tabela 14 – Validação das características estruturais da plataforma Stewart para a estimativa inicial $[-0,1;-0,1;-0,1]$

3.1.4 Exemplo 3

A partir da estimativa inicial $[0,1;0,1;0,4]$ o método de Newton-Raphson converge para valores que possuem componentes imaginárias consideráveis, sendo eles $YA_1 = 0,055093+0,019803i$, $YA_2 = -0,138130-0,052650i$ e $YA_3 = 5,1732e-01+1.6173e-12i$ resultando em uma configuração inválida, como pode ser observado na Figura 23.

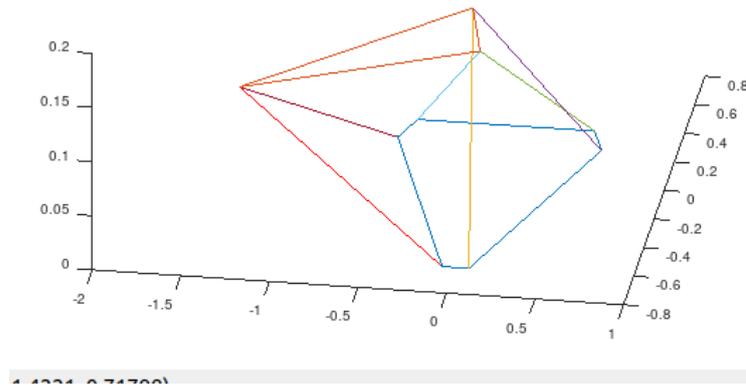


Figura 23 – Resultado da cinemática direta com estimativa inicial $[0,1;0,1;0,4]$ para YA_1 , YA_2 e YA_3 - FONTE:AUTOR(2019)

3.2 ESTUDOS DO ESPAÇO DE TRABALHO

Os algoritmos do APÊNDICE B possuem, além de um método para o cálculo da cinemática inversa, dois modos de análise para o espaço de trabalho da Plataforma Stewart.

É possível calcular o espaço de trabalho alcançável da plataforma móvel considerando faixas de deslocamentos para as pernas, que variam de $0 \leq L_1 \dots L_6 \leq l_{max}$ e uma faixa de rotação ao redor de cada eixo com limites Rx,Ry e Rz (de $-Ri < 0 < Ri, i = x, y, z$). Essa análise é implementada pela função *CineInversaStewart36(args*)*. Essa função utiliza o método *workspaceSetL(args*)* que itera em todo o espaço, com uma discretização de 5cm entre pontos, e seleciona todos os pontos do espaço onde os comprimentos $L_1 \dots L_6$ obtidos pela cinemática inversa estão dentro da faixa $0 \leq L_i \leq l_{imax}$. O argumento *args** é composto por $(a, b, d, rx, ry, rz, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$, onde a,b e d são as dimensões da Plataforma Stewart, rx,ry e rz são os limites de rotação ao redor de cada um dos eixos e $l_1 \dots l_6$ são os valores l_{max} máximos para o deslocamento das pernas.

A partir dessa função foi derivado um método que calcula o espaço de trabalho translacional por meio dos parâmetros *Rx, Ry e Rz* fixos. A função *CineInversaRFixo(args*)* utiliza o método *workspaceTrans(args*)* que itera pontos no espaço com uma discretização de 5cm entre pontos e seleciona todos os pontos onde os comprimentos $L_1 \dots L_6$ obtidos pela cinemática inversa estão dentro da faixa $0 \leq L_i \leq l_{imax}$. O argumento *args** é composto por $(a, b, d, rx, ry, rz, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$, onde a,b e d são as dimensões da Plataforma Stewart, *rx,ry e rz* são os valores fixos para as rotações ao redor de cada um dos eixos e $l_1 \dots l_6$ são os valores l_{max} máximos para o deslocamento das pernas.

As entradas utilizadas nessa análise foram $a = 0,65\text{m}$, $b = 1,0\text{m}$, $d = 0,15\text{m}$, $l_{imax} = 0,7\text{m}$ e um passo de $0,05\text{m}$ na discretização do espaço. Os pontos gerados pelo algoritmo do APÊNDICE B foram alimentados na extensão pshow do MATLAB a partir dos métodos *plotWorkspaceZ()* e *plotWorkspace()*.

A Figura 24 apresenta o espaço de trabalho translacional para $Rx = Ry = Rz = 0^\circ$. Também foram análises com o ângulo Rx fixo nos valores de $Rx = 10^\circ$ (Figura 25), $Rx = 15^\circ$ (Figura 26), $Rx = 20^\circ$ (Figura 27), $Rx = 40^\circ$ (Figura 28), $Rx = 65^\circ$ (Figura 29), $Rx = 75^\circ$ (Figura 30) e por fim $Rx = 80^\circ$ (Figura 31). Pode-se observar que, quanto maior o ângulo analisado, menor é o volume do espaço de trabalho encontrado.

Um dos maiores problemas do método de análise numérica é que a não ser que o espaço seja discretizado em intervalos muito pequenos, o que aumenta consideravelmente o custo computacional da análise, não é possível obter uma representação legítima do espaço de trabalho. Na Figura 31 são demonstrados os resultados do espaço de trabalho translacional com $Ry = Rz = 0^\circ$ e $Rx = 80^\circ$. A Figura 31 analisa o dobro de pontos no espaço em comparação ao resultado da Figura 32, mas pode-se observar que a diferença na quantidade de pontos e no tamanho do volume do espaço de trabalho são desprezíveis.

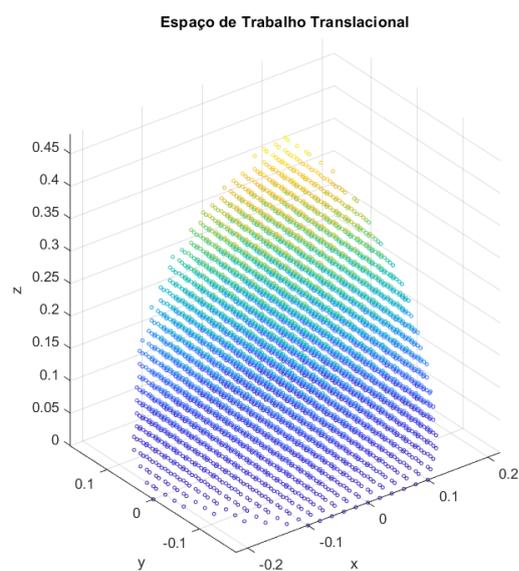


Figura 24 – Espaço de trabalho translacional com $R_x = R_y = R_z = 0^\circ$ - FONTE:AUTOR(2019)

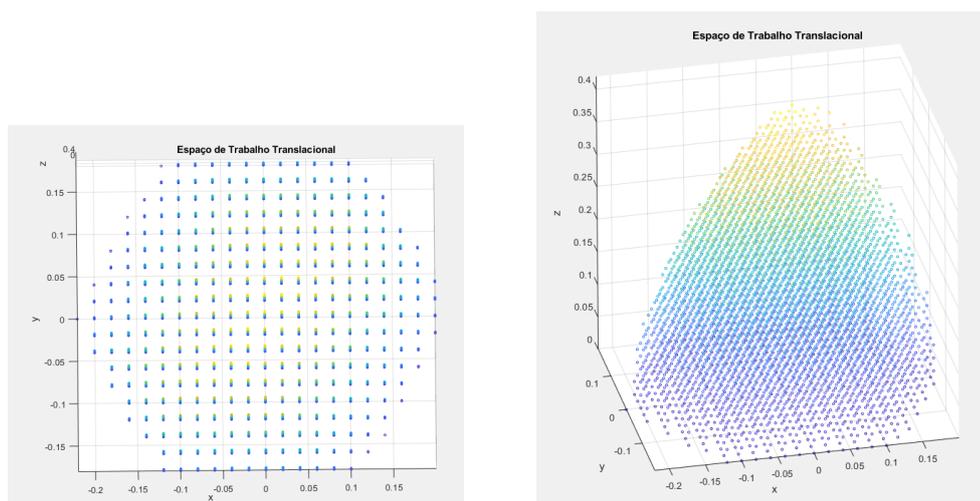


Figura 25 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 10^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

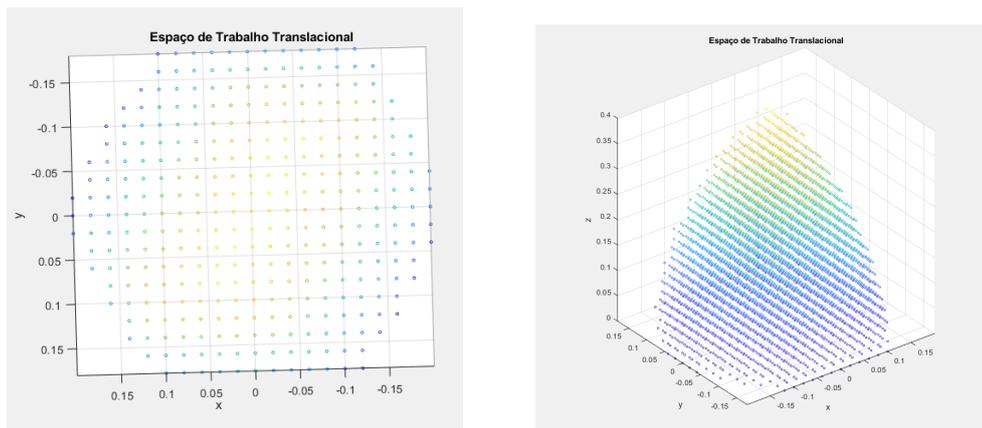


Figura 26 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 15^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

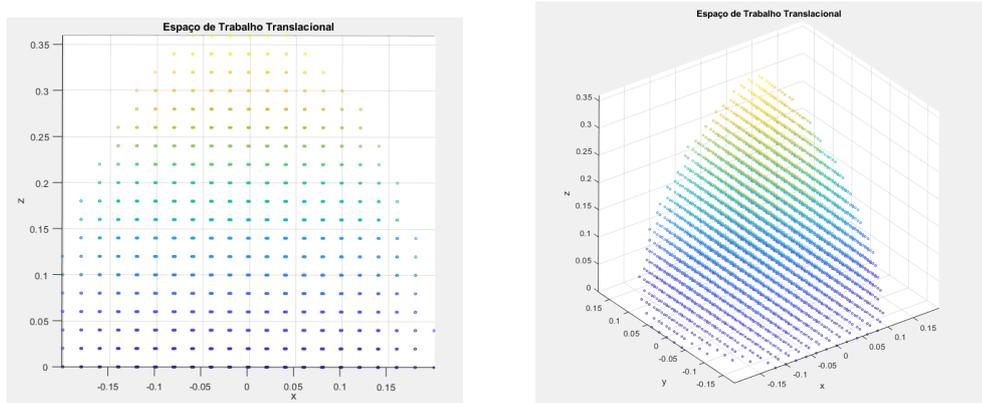


Figura 27 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 20^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

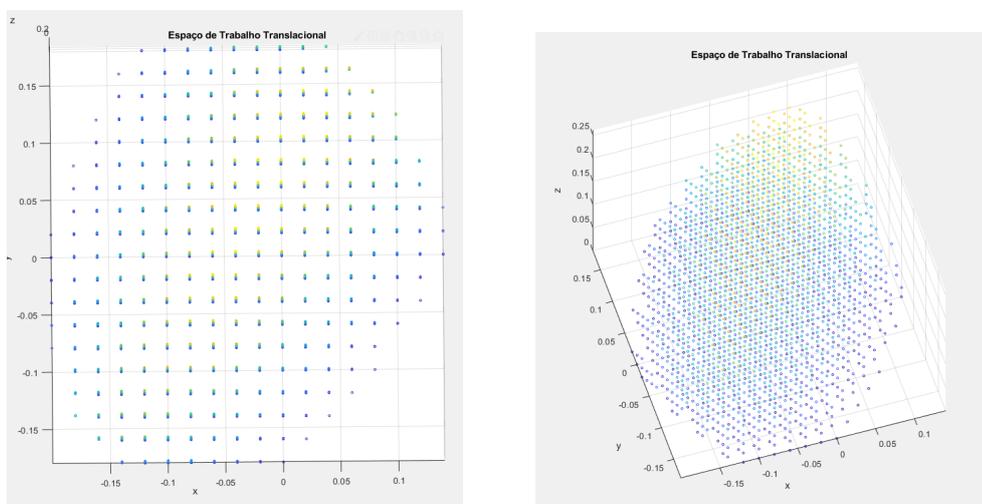


Figura 28 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 40^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

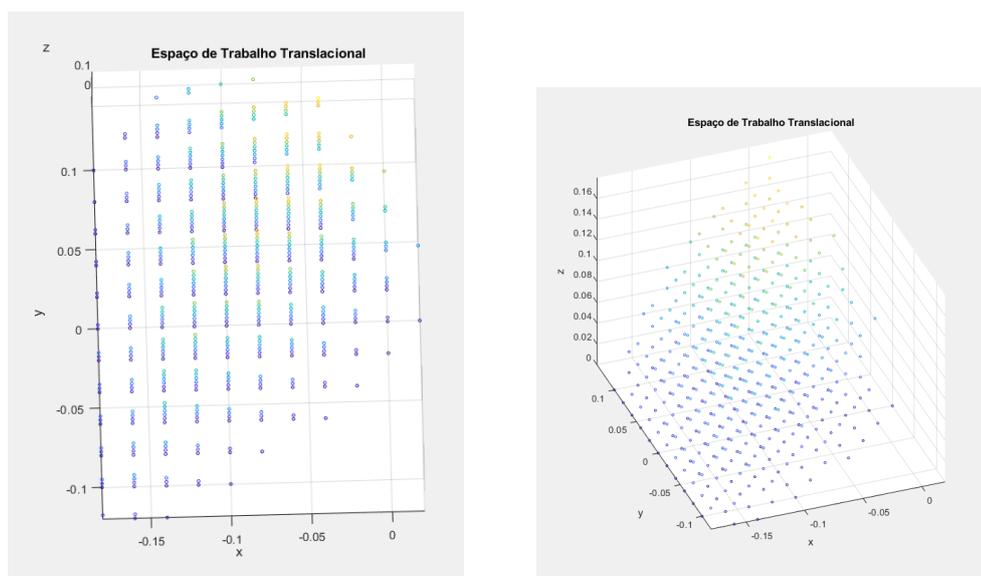


Figura 29 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 65^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

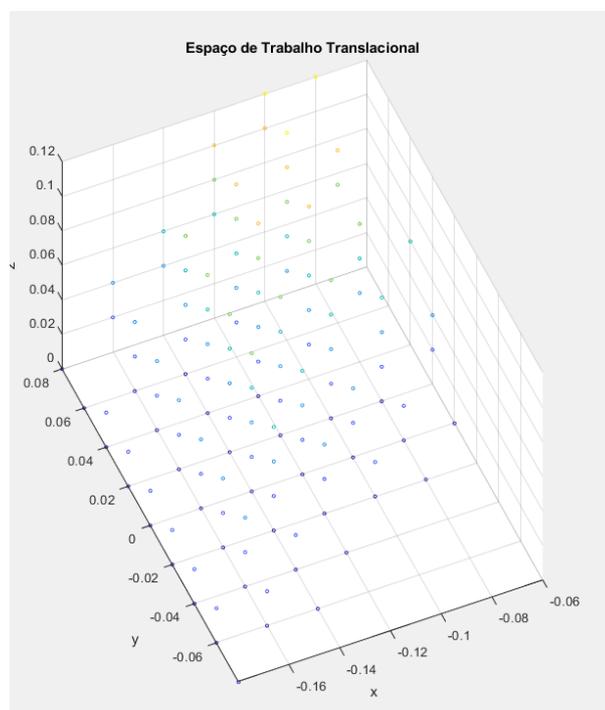


Figura 30 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 75^\circ$ - FONTE:AUTOR - FONTE:AUTOR(2019)

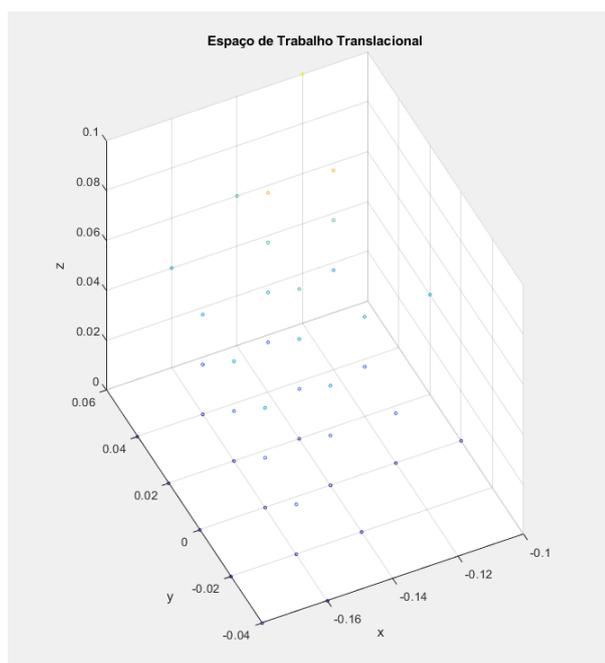


Figura 31 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$ e $R_x = 80^\circ$ - FONTE:AUTOR(2019)

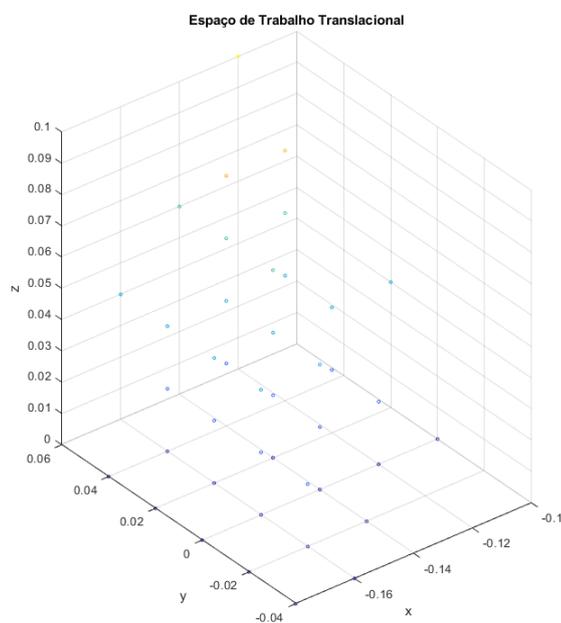


Figura 32 – Espaço de trabalho translacional com $R_y = R_z = 0^\circ$, $R_x = 80^\circ$ e o dobro de resolução - FONTE:AUTOR(2019)

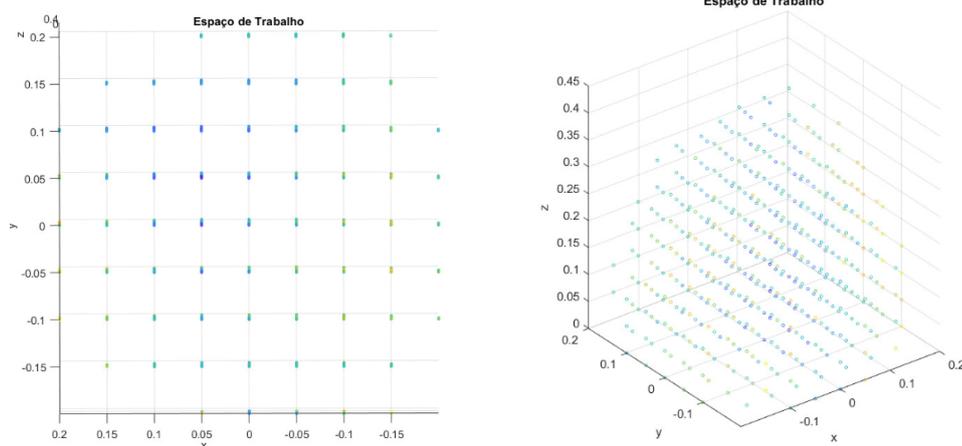


Figura 33 – Espaço de trabalho com faixa de rotações variando de -30° a 30° -
FONTE:AUTOR(2019)

A Figura 33 mostra o resultado para o espaço de trabalho alcançável para rotações variando entre $-30^\circ < R_i < 30^\circ$, onde $i = x, y, z$ e deslocamentos $li_{max} = 0,7\text{m}$ para $L1 \dots L6$:

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram obtidos algoritmos responsáveis por realizar as análises da cinemática de posição uma Plataforma Stewart. O algoritmo para Octave apresentado no APÊNDICE A implementa todas as deduções e cálculos para a cinemática direta. Uma solução clássica da cinemática inversa foi apresentada com o intuito de validar os cálculos da cinemática direta e para realizar a obtenção dos espaços de trabalho translacionais e alcançáveis de uma plataforma Stewart, apresentados no APÊNDICE B.

Os resultados da cinemática direta foram validados por meio de um estudo comparativo dos conjuntos de dados disponibilizados por Acuña (ACUÑA, 2009) e pela implementação da cinemática inversa. Pequenas diferenças foram encontradas em alguns resultados devido a diferença entre as implementações do método de Newton-Raphson neste trabalho e na referência. Acuña realiza o cálculo do jacobiano do sistema não-linear para aumentar a precisão do método. Na implementação apresentada neste trabalho, o jacobiano é estimado por meios numéricos.

O método para a obtenção da cinemática direta foi descrito em detalhes devido ao fato que as equações de Y_b , ZA_i e h_i apresentadas na referência (ACUÑA, 2009) terem sido escritas incorretamente. O estudo comparativo concluiu que, apesar de ter informado as equações incorretamente, o método descrito e resultados apresentados são válidos.

Em futuros estudos, os algoritmos e métodos apresentados aqui podem ser aplicados em estudos da Plataforma Stewart presente no Laboratório de Geodésia Industrial (LGI) do Centro Tecnológico de Joinville (CTJ). Uma sugestão de estudo seria aplicar essa metodologia de análise da cinemática direta na plataforma do laboratório de modo a realizar a verificar se a resposta cinemática de uma plataforma 6-6 pode ser aproximada por um modelo 6-3. Com o auxílio dos módulos iGPS que a plataforma do LGI possui é possível determinar a dimensão dos erros de cálculo resultantes da simplificação.

REFERÊNCIAS

- ACUÑA, Hernán Gonzales. **Projeto Mecatrônico de uma Plataforma Stewart para Simulação dos movimentos nos Navios**. Mar. 2009. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ - Brasil.
- AMARAL, Janaína Ribas de. “Revisão das Aplicações da Plataforma de Stewart.” **II Congresso Nacional das Engenharias da Mobilidade**, UFSC, Joinville, p. 1–9, 2015.
- BAJAJ, Neil; SPIERS, Adam; DOLLAR, Aaron. State of the Art in Prosthetic Wrists: Commercial and Research Devices. *In*: DOI: 10.1109/ICORR.2015.7281221.
- DOMAGOJ JAKOBOVIĆ, Leo Budin. **Forward Kinematics of a Stewart Platform Mechanism**. Zagreb: Ministry of Science e Technology of the Republic of Croatia, mai. 2002. Research project "Problem-Solving Environments in Engineering".
- GONZALEZ, Luiz Eduardo Garcia. **Maximum Singularity-Free Orientation Subregions of Paralell Robot**. Set. 2018. Diss. (Mestrado) – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, SC - Brasil.
- JANAÍNA RIBAS DE AMARAL, Roberto Simoni. “Desenvolvimento de uma Plataforma de Stewart para Simulação de Montagem de Blocos de Embarcação em laboratório.” **Políticas Públicas e o Desenvolvimento da Ciência**, Anais da Reunião Anual da SBPC, Porto Seguro, p. 274–287, 2018.
- LIU, K.; FITZGERALD, J. M.; LEWIS, F. L. Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 40, n. 2, p. 282–293, mai. 1993. ISSN 1557-9948. DOI: 10.1109/41.222651.
- MELLO, C. B. **Controle de trajetória de uma plataforma Stewart para simulação de transferência de carga fora do porto**. Ago. 2011. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ - Brasil.
- MERLET, J. P. **Parallel Robots**. 2. ed. Netherlands: Springer, 2006.
- MIKOFSKI, Mark. **Newton-Raphson Solver**. File Exchange: mathworks.com, 2019. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43097-newtonraphson>. [Acesso em: 16/10/2019].
- PABST, Rodolfo. **Modelagem e Programação de uma Plataforma de Stewart**. Joinville: UFSC, nov. 2018. Research project UFSC CTJ.
- SIMONI, R. *et al.* Design and kinematic analysis of a 6-DOF foldable/deployable Delta parallel manipulator with spherical wrist for an I-AUV. *In*: p. 1–10. DOI: 10.1109/OCEANSE.2019.8867496.

STEWART, D. “A platform with 6 degrees of freedom”. **Institution of mechanical engineers**, v. 180, p. 371–386, 1965.

TSAI, L. W. **Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators**. 1. ed. New York: Centro de Documentação e Disseminação de Informações., 1999.

XIGUANG HUANG QIZHENG LIAO, Shimin Wei. Closed-form forward kinematics for a symmetrical 6-6 Stewart platform using algebraic elimination. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 45, p. 327–334, 2010.

APÊNDICE A – ALGORITMO DA CINEMÁTICA DIRETA

```

pkg load symbolic
warning('off', 'all');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Entradas
L1 = 0.7
L2 = 0.7
L3 = 0.7
L4 = 0.7
L5 = 0.7
L6 = 0.7

a = 0.65
b= 1.0
d= 0.15

%initialGuessNR = [0.4,0.4,0.4]
%initialGuessNR = [-0.1,-0.1,-0.1]
initialGuessNR = [0.1,0.1,0.4]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Parte 1

function [Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3] = ObterEQ(L1,L2,L3,L4,L5,L6)
%Tirar o comentario da proxima linha para obter as equacoes em termos de:
%syms a b d L1 L2 L3 L4 L5 L6
disp('*****')

areaT1 = ((sqrt(3)*(d^2))/4)/2
areaT2 = ((sqrt(3)*(b^2))/4)/2
areaR = (sqrt(3)*b*d)/2

sumAreas =(sqrt(3)/4)*(d^2+b^2+4*b*d)
%(2*areaT1 + 2*areaT2 + 2*areaR)

cYT1 = (sqrt(3)*d/2)*(1/3) + (sqrt(3)*b/2)
cYT2 = (sqrt(3)*b/2)*(2/3)

```

$$cYR1 = (\text{sqrt}(3)*d/4) + ((\text{sqrt}(3)*b)/2)$$

$$cYR2 = \text{sqrt}(3)*b/4$$

$$\text{sumAY} = 2*(\text{areaT1}*cYT1) + 2*(\text{areaT2}*cYT2) + \text{areaR}*cYR1 + \text{areaR}*cYR2$$

syms YA1 YA2 YA3 %Yb

disp('*****')

disp('Geometria')

disp('*****')

$$Yb = (\text{sumAY} / \text{sumAreas})$$

$$p1 = (b^2 + L1^2 - L2^2) / (2*b)$$

$$p2 = (b^2 + L3^2 - L4^2) / (2*b)$$

$$p3 = (b^2 + L5^2 - L6^2) / (2*b)$$

$$Yp1 = \text{sqrt}(3)*p1/2 - Yb$$

$$Yp2 = \text{sqrt}(3)*(d+b)/2 - Yb$$

$$Yp3 = \text{sqrt}(3)*(b-p3)/2 - Yb$$

$$Xp1 = (d+p1)/2$$

$$Xp2 = (b/2)-p2$$

$$Xp3 = (p3-d-b)/2$$

$$h1 = \text{sqrt}(L1^2 - p1^2)$$

$$h2 = \text{sqrt}(L3^2 - p2^2)$$

$$h3 = \text{sqrt}(L5^2 - p3^2)$$

%Tirar o comentario da proxima linha para obter as eqyacies em termos de:

%syms h1 h2 h3 Xp1 Xp2 Xp3 Yp1 Yp2 Yp3 a

disp('*****')

disp('Equacoes caracteristicas')

disp('*****')

pause(1)

disp('XAi')

$$XA1 = Xp1 - \text{sqrt}(3)*(YA1 - Yp1)$$

$$XA2 = Xp2$$

```

XA3 = Xp3 - sqrt(3)*(YA3 - Yp3)
pause(1)
disp('*****')

disp('ZAi')
ZA1 = sqrt(h1^2 - 4*(YA1 - Yp1)^2)
ZA2 = sqrt(h2^2 - (YA2 - Yp2)^2)
ZA3 = sqrt(h3^2 - 4*(YA3 - Yp3)^2)

%Tirar o comentario da proxima linha para obter as eqyacies em termos de:
%syms XA1 XA2 XA3 ZA1 ZA2 ZA
disp('*****')
disp('Equacoes caracteristicas')
disp('*****')
eq422 = (XA1 - XA2)^2 +(YA1 - YA2)^2 +(ZA1 - ZA2)^2 -a^2
eq423 = (XA2 - XA3)^2 +(YA2 - YA3)^2 +(ZA2 - ZA3)^2 -a^2
eq424 = (XA3 - XA1)^2 +(YA3 - YA1)^2 +(ZA3 - ZA1)^2 -a^2

disp('*****')
disp('Equacoes caracteristicas expandidas')
disp('*****')
eq425 = expand(eq422);
eq426 = expand(eq423);
eq427 = expand(eq424);

disp('Equacao geral encontrada pelo metodo descrito no algoritmo')
disp('*****')
eq1 = disp(eq425,'flat')
eq2 = disp(eq426,'flat')
eq3 = disp(eq427,'flat')

endfunction

%%%%%%%%%%
%Parte 2 - Aplicando Newton Raphson

function [YA1, YA2, YA3] = AplicaNR(Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3,in

tolNR = 1e-12; %Tolerancia

```

```

syms YA1 YA2 YA3

%% Exemplo: Eq2xnr = @(YA1, YA2, YA3) RESULTADO-EQ425|EQ426|EQ427
eq28nr = @(YA1, YA2, YA3) -2*YA1*YA2 - 13*sqrt(3)*YA1/20 - 622*pi*YA1/5207 + 1244
eq29nr = @(YA1, YA2, YA3) -2*YA2*YA3 + 1244*pi*YA2/5207 - 622*pi*YA3/5207 + 13*s
eq30nr = @(YA1, YA2, YA3) -8*YA1*YA3 - 13*sqrt(3)*YA1/10 - 2488*pi*YA1/5207 - 248

fun = @(var) [eq28nr(var(1),var(2),var(3)), eq29nr(var(1),var(2),var(3)),eq30nr(var
options = optimset('TolX',tolNR);
[var, resnorm, f, exitflag, output, jacob] = newtonraphsonn(fun, initialGuessNR, op

YA1 = double(var(1))
YA2 = double(var(2))
YA3 = double(var(3))
disp('results acima')
%Obtemos as posicoes em Y da plataforma movel

endfunction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Parte 3 - Calculando posicao

function calculatePosition(a,b,d,Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3,YA1,

disp('*****')
disp('Resultados para a posicao dos vertices da plataforma movel \n \n')
disp('*****')
YA1 = YA1 ;
YA2 = YA2;
YA3 = YA3 ;

XA1 = Xp1 - sqrt(3)*(YA1 - Yp1)
XA2 = Xp2
XA3 = Xp3 - sqrt(3)*(YA3 - Yp3)

```

```

ZA1 = sqrt(h1^2 - 4*(YA1 - Yp1)^2)
ZA2 = sqrt(h2^2 - (YA2 - Yp2)^2)
ZA3 = sqrt(h3^2 - 4*(YA3 - Yp3)^2)

disp('*****')
disp('Centro da plataforma movel \n \n')
disp('*****')

Px = 1/3 * (XA1 + XA2 + XA3)
Py = 1/3 * (YA1 + YA2 + YA3)
Pz = 1/3 * (ZA1 + ZA2 + ZA3)

Rz = atan( sqrt(3)*(YA1 - YA3) / (2*YA2 - YA1 - YA3) )
Rx = atan( (2*ZA1*(XA3 - XA2) + 2*ZA2*(XA1-XA3) + 2*ZA3*(XA2-XA1)) / (a*sqrt(3)*(YA1 - YA3)) )
Ry = atan( ( (2*ZA2-ZA1-ZA3)*sind(Rz) - sqrt(3)*(ZA1-ZA3)*cosd(Rz) ) / ( sqrt(3)*(XA1 - XA3) ) )

%%PLOTS
disp('*****')
disp('Posicoes dos vertices da Base \n \n')
disp('*****')

B1x = d/2
B1y = -Yb

B2x = (b+d)/2
B2y = sqrt(3)*(b)/2 - Yb

B3x = b/2
B3y = sqrt(3)*(b+d)/2 - Yb

B4x = -b/2
B4y = B3y

B5x = -(b+d)/2
B5y = B2y

B6x = -d/2
B6y = B1y

```

```

disp('*****')

disp('Tamanho da perna B1A1 ')
DB1A1 = sqrt((XA1 - B1x)^2 + (YA1 - B1y)^2 + (ZA1 - 0)^2)
disp('Tamanho da perna B2A1 ')
DB2A1 = sqrt((XA1 - B2x)^2 + (YA1 - B2y)^2 + (ZA1 - 0)^2)
disp('Tamanho da perna B3A2 ')
DB3A2 = sqrt((XA2 - B3x)^2 + (YA2 - B3y)^2 + (ZA2 - 0)^2)
disp('Tamanho da perna B4A2 ')
DB4A2 = sqrt((XA2 - B4x)^2 + (YA2 - B4y)^2 + (ZA2 - 0)^2)
disp('Tamanho da perna B5A3 ')
DB5A3 = sqrt((XA3 - B5x)^2 + (YA3 - B5y)^2 + (ZA3 - 0)^2)
disp('Tamanho da perna B6A6 ')
DB6A3 = sqrt((XA3 - B6x)^2 + (YA3 - B6y)^2 + (ZA3 - 0)^2)
disp('')
disp('Tamanho da aresta A1A2')
DA1A2 = sqrt((XA1 - XA2)^2 + (YA1 - YA2)^2 + (ZA1 - ZA2)^2)
disp('Tamanho da aresta A2A3')
DA2A3 = sqrt((XA2 - XA3)^2 + (YA2 - YA3)^2 + (ZA2 - ZA3)^2)
disp('Tamanho da aresta A3A1')
DA3A1 = sqrt((XA3 - XA1)^2 + (YA3 - YA1)^2 + (ZA3 - ZA1)^2)

disp('*****')

pause(3);
disp('PLOT:')
%Plot da Base
v1=[B1x, B1y, 0];
v2=[B2x, B2y, 0];
v3=[B3x, B3y, 0];
v4=[B4x, B4y, 0];
v5=[B5x, B5y, 0];
v6=[B6x, B6y, 0];
%Plot da Plataforma
x1=[XA1, YA1, ZA1];
x2=[XA2, YA2, ZA2];
x3=[XA3, YA3, ZA3];
%plot das pernas
y1=[v1;x1];

```

```

y2=[v2;x1];
y3=[v3;x2];
y4=[v4;x2];
y5=[v5;x3];
y6=[v6;x3];
%Plot
v=[v1;v6;v5;v4;v3;v2;v1];
x=[x1;x3;x2;x1];
plot3(v(:,1),v(:,2),v(:,3),x(:,1),x(:,2),x(:,3), y1(:,1), y1(:,2), y1(:,3),y2(:,1),
endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%NEWTON RAPHSON
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%function [x, resnorm, F, exitflag, output, jacob] = %newtonraphsonn(fun, x0, optio

%Função adaptada de (MIKOFSKI, 2019).

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('*****MAIN*****')

[Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3] = ObterEQ(L1,L2,L3,L4,L5,L6,a,b,d);

[YA1, YA2, YA3] = AplicaNR(Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3,initialGues

calculatePosition(a,b,d,Yb,p1,p2,p3,h1,h2,h3,Xp1,Xp2,Xp3,Yp1,Yp2,Yp3,YA1, YA2, YA3)

```

APÊNDICE B – ALGORITMO DA CINEMÁTICA INVERSA E ESPAÇO DE TRABALHO

worspaceSetL.m

```
function [Pontos] = workspaceSetL(a,b,d,rx,ry,rz, l1,l2,l3,l4,l5,l6)
% lmax = [l1,l2,l3,l4,l5,l6]
Pontos = zeros(0,4);
spacestep = 0.05;
anglestep = rx/8;
for Rx = -rx:anglestep:rx
    for Ry = -ry:anglestep:ry
        for Rz = -rz:anglestep:rz
            %passa pela faixa de angulos fixa
            txt = sprintf("Processing Rxyz= %f %f %f \n", Rx, Ry, Rz);
            txt
            for px = -1.0:spacestep:1.0
                for py = -1.0:spacestep:1.0
                    for pz = 0:spacestep:1.0
                        [L1,L2,L3,L4,L5,L6] = CineInversa(a,b,d,px,py,pz,Rx,Ry,Rz);
                        if ((L1>0) && (L2>0) && (L3>0) && (L4>0) && (L5>0) && (L6>0))
                            if ((L1<l1) && (L2<l2) && (L3<l3) && (L4<l4) && (L5<l5) && (L6<l6))
                                %Verifica se os valores Li encontrados estão entre 0 e o valor m
                                Pontos = [Pontos; px py pz, min([Rx, Ry, Rz]) ];
                                %Se estiverem dentro dos limites, o ponto é "marcado" para ser
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
```

workspaceTrans.m

```
function [Pontos] = workspaceTrans(a,b,d,rx,ry,rz, l1,l2,l3,l4,l5,l6)
% lmax = [l1,l2,l3,l4,l5,l6]
Pontos = zeros(0,4);
```



```

thetavar = 15
lmax = 0.7
lgiven = lmax/1.5
lu = lmax
pts = workspaceSetL( a,b,d, thetavar, thetavar, thetavar, lu,lu,lu,lu,lu,lu );
plotWorkspace(pts(:, 1:3), pts(:, 4), "Espaço de Trabalho")

function [L1,L2,L3,L4,L5,L6] = CineInversa(a,b,d,px,py,pz,Rx,Ry,Rz)
XT1 = px + (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*sind(Ry)*sind(Rz+60) + cosd(Ry)*cosd(Rz+60));
YT1 = py + (a/sqrt(3))*cosd(Rx)*sind(Rz+60);
ZT1 = pz + (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*cosd(Ry)*sind(Rz+60) - sind(Ry)*cosd(Rz+60));
XT2 = px - (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*sind(Ry)*sind(Rz) + cosd(Ry)*cosd(Rz));
YT2 = py - (a/sqrt(3))*cosd(Rx)*sind(Rz);
ZT2 = pz - (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*cosd(Ry)*sind(Rz) - sind(Ry)*cosd(Rz));
XT3 = px + (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*sind(Ry)*sind(Rz-60) + cosd(Ry)*cosd(Rz-60));
YT3 = py + (a/sqrt(3))*cosd(Rx)*sind(Rz-60);
ZT3 = pz + (a/sqrt(3))*(sind(Rx)*cosd(Ry)*sind(Rz-60) - sind(Ry)*cosd(Rz-60));

L1 = sqrt((XT1 - d/(2*sqrt(3)) - b/sqrt(3))^2 + (YT1 - d/2)^2 + ZT1^2);
L2 = sqrt((XT1 - d/(2*sqrt(3)) + b/(2*sqrt(3)))^2 + (YT1 - d/2 - b/2)^2 + ZT1^2);
L3 = sqrt((XT2 + d/(sqrt(3)) + b/(2*sqrt(3)))^2 + (YT2 - b/2)^2 + ZT2^2);
L4 = sqrt((XT2 + d/(sqrt(3)) + b/(2*sqrt(3)))^2 + (YT2 + b/2)^2 + ZT2^2);
L5 = sqrt((XT3 - d/(2*sqrt(3)) + b/(2*sqrt(3)))^2 + (YT3 + b/2 + d/2)^2 + ZT3^2);
L6 = sqrt((XT3 - d/(2*sqrt(3)) - b/(sqrt(3)))^2 + (YT3 + d/2)^2 + ZT3^2);
end

function [a] = plotWorkspaceZ(Pontos, ttl)
    pcshow(Pontos, 'MarkerSize', 6);
    title(ttl);
    xlabel("x");ylabel("y");zlabel("z");
    a=1;
end

function [a] = plotWorkspace(Pontos, cMap, ttl)
    pcshow(Pontos, cMap, 'MarkerSize', 6);
    title(ttl);
    xlabel("x");ylabel("y");zlabel("z");
    a=1;
end

```

