tica, a sintaxe são indispensáveis para o completo conhecimento da língua.

No que se refere à sintaxe, o uso da análise lógica, como método é grandemente aconselhável, uma vez que a linguagem deve muito à parte racional do homem.

3) A língua se aprende, acima de tudo, pelo manuseio dos bons escritores e convívio com pessoas que prezam a boa linguagem. Tornam-se êles padrões de excelência para nós. São modelos, que devemos seguir porque sabem dizer e falar de acôrdo com os preceitos da clareza, precisão, conveniência e elegância ou bom gôsto.

4) A deficiência do ensino vem do desprêzo do convívio com bons escritores e da defeituosa sistematização dos fatos da linguagem por se contentar com uma gramática estropiada e mal ensinada. Os professôres de Português estão na obrigação de promover uma reação contra o estado atual do ensino, incentivando o convívio com bons escritores e cuidando da apresentação metódica e completa dos vários e indispensáveis capítulos da gramática, conforme a opinião ainda abalizada de Júlio Ribeiro: "Ouvindo bons oradores, conversando com pessoas instruídas, lendo artigos e livros bem escritos, muita gente consegue falar e escrever corretamente sem ter feito estudo especial de um curso gramatical. Não se pode negar, todavia, que as regras do bom uso da linguagem, expostas como elas o são nos compêndios, facilitam muito tal aprendizagem; até mesmo o estudo dessas regras é o único meio que têm de corrigir-se os que na puerícia aprenderam mal a sua língua." (4).

5) Os que combatem a gramática se esquecem de que, se sabem alguma coisa é porque seguem os princípios que ela expõe e a sistematização que ela faz dos fatos da boa linguagem.

6) Os bons exemplos de linguagem ainda devem ser procurados nos escritores do passado, dado o cuidado maior que tinham em preservar o bom gôsto e a correção em matéria de linguagem.

(4) *Gramática Portuguêsa* — 2.ª edição, pág. 1.

OBJETIVOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Prof. OSVALDO SANGIORGI

Catedrático de Matemática do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta" de São Paulo e assistente da seção de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Mackenzie.

N.R. — "ATUALIDADES PEDAGÓGICAS" tem a satisfação de incluir nesta seção sôbre os grandes temas da educação, a colaboração do prof. Sangiorgi a respeito do ensino da Matemática no curso secundário e normal, onde são analisadas, objetivamente, as necessidades mais prementes relativas à aprendizagem da referida matéria, sem dúvida, de relevante importância na formação do cidadão moderno.

SERIA DESCABIDO FAZER-SE, em relação à Matemática, a mesma pergunta que naturalmente surge quando se trata do ensino de qualquer matéria: qual é o verdadeiro objetivo e o valor real do ensino da Matemática? O assunto se prende, como bem observa Thorndike, ao problema da finalidade educacional. A não ser na hipótese de uma formação profissional, ultra-específica, nenhuma disciplina pode ser considerada como auto-suficiente. Matéria alguma, com exceção talvez da língua materna, é, por si mesma, exclusivista do ensino secundário. Tôdas têm uma função mais ampla do que a simples aquisição de seu conteúdo, função de que nós, professôres, precisamos ter uma consciência nítida para que o seu ensino não falhe inteiramente. Acresce que os alunos, os pais, e em geral todos os que se interessam pela educação, têm o direito de ser informados dos propósitos e do valor do ensino. Ora, dado o caráter abstrato e a forma técnica da Matemática, a sua utilidade pode ser posta em dúvida, mais do que qualquer outra disciplina, embora o seu prestígio multissecular de ginástica mental permaneça inabalável. Na realidade, porém, tal prestígio é mais acadêmico e teórico do que prático.

"O povo sabe que muita gente alcança fortuna e glória sem saber nada de Matemática, já escrevia o prof. Euclides Roxo, em 1937, no seu esplêndido livro "A matemática na Educação Secundária". Exemplo frisante do que estamos dizendo é o meu vendeiro que na conta das despesas do mês passado acrescentou como parcela na coluna das compras efetuadas o ano de 1954. Como estranhássemos o aumento de conta — afinal somos professôres de Matemática — êle nos disse que fôra um pequeno equívoco. De equívoco em equívoco...

Contudo, não é possível, para a determinação dos objetivos educacionais de qualquer disciplina, prescindir do valor científico, filosófico e estético da Matemática. Basta lembrar que todo progresso científico feito, seja em que ramo fôr do conhecimento humano, é medido por uma maior matematização dêsses conhecimentos. Assim, também, a precisão e a regularidade com que são arrancados da natureza os elementos que se traduzem em confôrto e bem-estar para o homem, obedecem rigorosamente às leis matemáticas. Quem já teve a ventura de visitar a nossa colossal Usina do Cubatão, que se coloca entre as maiores do mundo pela grandiosíssima queda artificial (quase 800 m de altura), observou que as oito turbinas existentes, que fazem São Paulo, Volta Redonda e Rio de Janeiro ser o que o Brasil é para o mundo, têm os respectivos rendimentos equacionados num enorme painel — de surpreendente maravilha, que bem reflete aos afortunados que a visitam o poder empreendedor das ciências matemáticas.

Tão profundamente matemática é a forma do pensamento científico do homem que, ao investigar a natureza, êle a encontra impregnada de incógnitas que são raízes de outras tantas equações que, se ainda não foram resolvidas, caminhamos a passos largos para resolvê-las. Os monumentos de estudos já esboçados na Mecânica Celeste e na Física Matemática permitem ao humano, dentro de uma majestade digna de respeito, porque intelectual, prever o momento exato de um eclipse ou da passagem de um astro, mostrando a Matemática ao serviço do racional contra o animismo que sempre acompanhou a humanidade. E ela, além de tudo, tem um objetivo filosófico e estético. Auxilia o filósofo a aprofundar-se em noções de número, espaço e tempo, fornecendo ainda subsídios à música e à pintura. A beleza que as obras imortais de Miguel Ângelo, Leonardo da Vinci, Rembrandt revelam em seus quadros e esculturas, obedecem rigorosamente o que os cânones da Geometria Descritiva e Projetiva revelaram séculos depois. E o que dizer da beleza grega, onde as linhas puras da mulher considerada bela, eram aferidas pela divisão áurea? Garantimos que muitas das polêmicas entre as "misses" do universo seriam evitadas se os colendos juízes justificassem o respectivo voto empregando a geometria e os olhos, bem entendidos.

O estudo da Matemática

O estudo da Matemática, lembra-nos David E. Smith, deve ser sempre necessàriamente incluído entre as bases educativas do cidadão moderno. Por quê? 1.º) Porque ela pertence ao pequeno grupo de matérias — como ler e escrever, geografia e história, que intimamente se relacionam com a quase totalidade dos conhecimentos humanos imprescindíveis à concepção de um homem culto; 2.º) Porque a Matemática tem um alto valor como disciplina mental; 3.º) Porque a Matemática é uma das verdades eternas inalteráveis no espaço e no tempo e como tal pode produzir a elevação do espírito, tal qual ao contemplarmos os grandes espetáculos da natureza sentimos a presença de Deus. Antes que existessem Marte ou a Terra ou o Sol e muito depois que deixarem de existir, lá como aqui ou nas regiões mais remotas do espaço estelar, do tipo que conhecemos — o quadrado construído sôbre a hipotenusa foi, é, e sempre será igual à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos; 4.º) Porque pela Matemática, como de nenhum outro modo seria possível, o homem se torna consciente da sua posição no universo. Só por considerações de ordem matemática podemos, de algum modo, perscrutar a imensidão do espaço sideral conhecido (cêrca de 400 milhões anos-luz !) e compreender os métodos pelos quais conseguimos sondar as suas profundezas; 5.º) Porque a história da Matemática é a história da raça humana. Pode-se dizer que ela surgiu com o despertar da alma humana, desprovida de fins utilitários. Foi a ânsia de resolver o mistério do universo, em que a nossa alma é um simples átomo, que lhe deu o primeiro impulso. O seu desenvolvimento verdadeiro resultou, antes de tudo, do esfôrço para compreender o infinito. E ainda hoje, passados milênios, tenta o homem penetrar no azul profundo do infinito no afã de conquistar as galaxias siderais, qual Colombo da era atômica. Não foram necessários 30 anos para que o homem, galgando os espaços a 120 km por hora, chegasse nos dias atuais a velocidades super e hipersônicas deixando para trás uma muralha que parecia intransponível: o som. Não serão precisos mais que trinta anos para a inteligência humana galgar novas posições no universo, conquistando, como num conto de mil e uma noites, da época atual, outros elementos que o integram e que até agora nos pertencem sòmente pelos olhos e pelo coração.

Dos Alunos

Apesar dos tempos paradoxais que atravessamos, os alunos de hoje possuem mais elementos para se valerem dos estudos, como trampolim de todos os saltos que a vida de hoje exige. Já se foi o tempo em que o aluno era parte passiva numa classe de aula, em que o tratamento ao professor era de "S.Ex.ª".

Hoje, o aluno caminha ao sabor das gerações modernas, fazendo parte ativa da classe. Aliás, não desgostamos nada do atual aluno, já que também somos influenciados pelos reflexos dos dias atuais. Já não existem as grandes descobertas isoladas. A história também mudou a sua feição. Quantos de nós não penetramos no estudo dos descobridores, dos inventores de coisas pelo dedo mágico das histórias que envolviam os grandes descobridores. Era Thomas Edison com sua vida atribulada dando-nos o gramofone, a lâmpada elétrica; era o genial Marconi, com seu telégrafo sem fio; era Graham Bell com o telefone; o nosso Santos Dumont voando com o mais pesado. Hoje, os tempos e as histórias já são outros. Já não existem inventos particulares que pertençam a "A" ou a "B"; os trabalhos são de equipes. Não se pode, num dado instante, citar o descobridor da bomba atômica, dessa maravilha que se chama televisão, agora a 3.ª dimensão, que já está deliciando o público paulista.

Desafiando estas duas épocas, restanos apreciar ainda o "homo-sapiens", na pessoa do venerável Einstein, o criador da teoria da relatividade e cujo intervalo de vida tem seus extremos nas épocas que descrevemos. Mas reparem os nossos colegas que os tempos — o de Einstein e o nosso — já estão divorciados. Numa das últimas entrevistas coletivas de Einstein, já se destaca a figura do criador da teoria da relatividade, que revolucionou a Física a partir de 1910, da de Einstein de hoje, da Universidade de Princeton, pois, ao invés de ser inquirido, como era de se desejar, pura e simplesmente, no que dizia respeito aos seus estudos físico-matemáticos, a imprensa coletiva se cingiu a perguntar: se êste fôra de fato expulso, quando aluno, do liceu onde estudava por ser dos piores estudantes; se era verdade que êle gostava de tocar violino mais com a mão esquerda do que com a direita; mas nada de Física, enfim. Estereotiparam no fim da entrevista coletiva — sinal dos tempos — quatro fórmulas matemáticas e disseram, por sua conta, em manchetes, que sòmente uma meia dúzia de pessoas as entendiam. Segue-se daí que, realmente, os nossos alunos estão de fato vivendo em outros tempos. Penso que a solução é ir ao encontro do estado atual de coisas, fornecendo-lhes um ensino que os atinja dentro da realidade que vivem, e não mediante processos de aprendizagem já obsoletos e que colocam o professor num Himalaia e o aluno num chão bem distante. Ora, não há muitos anos, os alunos candidatavam-se ao ginásio sabendo um progama de Matemática pràticamente igual ao que hoje se estuda na 1.ª série e obtínhamos, com êsses alunos, resultados bem superiores em relação aos que são obtidos atualmente. Não podemos acreditar que, com o simples decorrer dos anos, a inteligência e a capacidade de raciocínio de nossos estudantes tenham diminuído. Pelo contrário, só podemos acreditar que a orientação que está sendo imprimida a êsses alunos é falha, não correspondendo aos imperativos dos dias atuais.

A nosso ver, uma das grandes origens da dispersão em que se encontram os atuais alunos secundários provém da bagagem arcaica que trazem dos cursos primários, não nos referindo aos conhecimentos que devem ter recebido, mas, sim, aos processos de seleção que não foram eficazes, de modo a exigirem do aluno, ao ingressar no ginásio de hoje, elementos de cultura dos quais já deve estar provido. Principalmente em São Paulo, tudo leva a crer que não existe mais a possibilidade de se selecionar os alunos dos atuais cursos primários de um modo perfeito, quer pelas pouquíssimas horas de estudo — e conseqüente falta de vivência entre colegas — quer pelo processo de se avaliar o mérito de seus professôres, que é feito em função do número de alunos que aprovam anualmente, confundindo-se, assim, os interêsses particulares dos professores — que humanamente querem garantir as respectivas promoções no quadro do magistério — com os interêsses do ensino.

Programas

O ensino da Matemática, como o de outras disciplinas, tem sofrido enormemente com as sucessivas reformas do ensino secundário. Realmente não temos tido sorte nas diversas programações efetuadas desde a reforma Francisco Campos, em 1931, reforma Capanema, em 1942 e reforma Simões Filho, em 1951. Como estamos com novo ministro, já se ensaia, como não poderia deixar de ser, mais uma nova reforma. Até parece que a preocupação dos novos titulares da Educação é marcar as respectivas passagens pelo ministério com reformas do ensino médio, esquecendo-se numa hora dessas que os mais visados com isso são justamente os menos culpados: os alunos. E' evidente, principalmente para aquêles que se preocupam um pouco com as questões de educação, que com o desenvolvimento rápido dos processos da aprendizagem em conseqüência das pesquisas do domínio da psicologia experimental da infância e da adolescência, não se pode dizer a última palavra no que respeita a investigações dos princípios do ensino da Matemática, pois a finalidade geral do ensino é função da diretriz cultural de cada época. Façam-se as reformas, mas que sejam elas levadas a cabo para possibilitar a colheita de resultados (pró ou contra) na opinião da maioria dos professôres, que são os únicos e exclusivos a opinar sôbre elas, e já estaremos caminhando em terreno mais firme. Do ensino normal paulista, o programa, que se diz indevidamente em vigor desde 1937, é uma tábua de exigência descabida e inadequada às nossas futuras professôras. Por êsses programas, devem ser ensinadas às normalistas altas matemáticas (como cálculo de PI, equações irracionais etc.) esquecendo-se de que a bagagem aritmética de cada uma delas é que irá estruturar o ensino primário. Optamos em nossas aulas por um curso de aritmética intensivo, onde possam ser vistos debaixo para cima todos os óbices relativos às deficiências do raciocínio aritmético, quer com os fracionários, quer com as medidas de um modo geral. Temos impressão que com a atual orientação do Departamento de Educação de São Paulo surgirão de vez os novos programas do ensino normal paulista — êsse mesmo ensino que sempre desfrutou uma posição invejável no panorama brasileiro — que devem caminhar "pari-passu" à altura da situação reinante, de praticidade e objetivismo que caracterizam e circunscrevem a vida moderna.

Conclusões

Se o nosso objetivo de professôres é melhorar o índice do aproveitamento dos alunos do curso secundário, no que diz respeito à Matemática, quer-nos parecer que não basta retocarmos pura e simplesmente os programas, pois a raiz do mal não se encontra exclusivamente nêles.

E' sintomático que não se limita à Matemática o fracasso dos candidatos que concorrem aos cursos das escolas superiores. Em tôdas as matérias e no Português, de modo particular, se observa o mesmo descalabro. E' portanto, no método, na forma de ensinar, no tempo devido de estágio que a disciplina merece, que devemos procurar as faltas mais graves do nosso ensino. Partindo do princípio do ensino de um mínimo programa de Matemática, que deveria ser o reflexo das nossas reais necessidades atuais, com uma distribuição pelas diversas séries ginasiais, mais consentânea com a idade dos alunos, e em relação mais íntima com as demais matérias, somos de parecer, e conosco muitos colegas, que as seguintes normas gerais deveriam ser adotadas:

1.ª) Ao ensino da Matemática, nos dois ciclos do curso secundário, devem ser dedicadas, no mínimo, cinco aulas semanais. E, diga-se de passagem, outras tantas de Português (na França, diàriamente estuda-se: francês e matemática — na Itália: italiano e matemática). Destas cinco aulas poderiam ser reservadas 3 para exposição e discussão dos assuntos, e as demais a exercícios no caderno, sob a orientação e direta assistência do professor.

2.ª) As notas mensais devem ter por base o trabalho, a aplicação e o aproveitamento do aluno nas aulas de exercícios. A média de aplicação nesse trabalho não deve ser inferior a 5.

3.ª) E' de máxima importância que o professor acompanhe suas classes em tôdas as séries de cada ciclo, a fim de evitar lacunas na seqüência da matéria entre uma série e outra.

4.ª) O ensino deve ser orientado tanto quanto possível do concreto ao abstrato, do particular ao geral, da prática à teoria. Tôdas as definições apriorísticas, excessivamente formais ou abstratas devem ser evitadas, para que o aluno venha a evitar a obrigação de decorar o que não entende. Também as demonstrações muito intensas e as generalizações demasiadamente complicadas devem ser excluídas. Convém não perder de vista que o curso secundário se

(conclui à pág. 40)

CONCURSOS DE LATIM

José Cretella Júnior

II

Utilização da bibliografia latina: morfologia

N.R. — "Atualidades Pedagógicas", *cumprindo mais um item de seu programa de bem servir à causa da educação e do ensino, inaugura neste número mais uma seção especializada a respeito de problemas pertinentes ao ensino de Latim no curso secundário. Esta seção estará sob a responsabilidade intelectual do prof. José Cretella Júnior, autor de inúmeros trabalhos didáticos sôbre a matéria e figura de larga projeção no magistério paulista e que estará ao inteiro dispor dos interessados no assunto.*

Reveste-se a *morfologia latina* de aspectos muito curiosos, mas que, por isso mesmo, não só exigem a maior aplicação da parte do estudioso, como também — e isto é essencial — verdadeiro trabalho preparatório de *adaptação prévia* da mentalidade atual para a transposição ajustada ao mundo latino.

Com efeito, a responsabilidade dum salto histórico através de 2.000 anos não é pequena para a tentativa de penetração numa sistemática gramatical que regia a língua dum povo cuja cultura era a síntese de todo o mundo antigo.

Eis porque, entrando no mundo romano, distante e diverso do mundo de nossos dias, é indispensável banir do espírito conceitos "nossos" para poder entender as sutilezas próprias da língua latina.

Não é só no setor lingüístico que assim se deve proceder, tendo o cuidado de *afastar sistemàticamente as prenoções:* a interpretação de quaisquer fenômenos do mundo antigo deve ser feita em função daquele mundo.

Assim o direito romano, a moral romana, a religião romana, a família romana, o "humour" romano, o gôsto romano, a sátira romana apresentam aspectos nem sempre fàcilmente surpreendidos pelo exegeta de hoje.

Em nosso campo de pesquisas, quem levar para os estudos latinos noções precisas, mas *atuais*, da *acentuação das línguas modernas* do Ocidente, cujas palavras são pronunciadas "intensivamente", não poderá entender com facilidade o singular capítulo *O acento latino*, em que se jogam, antes de tudo, com as noções de *altura* e acabará por desenvolver tese estranha ao tema proposto; quem levar para o campo latino a noção moderna sôbre *o porque* da *categoria dos gêneros* igualmente encontrará dificuldades em compreender as razões que teriam levado um "demi-civilisé" a fazer a distinção dos nomes em *masculinos, femininos* e *neutros;* quem pretender indagação mais profunda sôbre a razão de ser do mecanismo do sistema verbal latino nada perceberá da *categoria do aspecto*, se estiver raciocinando com as idéias correntes de *tempo — ontem, hoje, amanhã* ou *passado, presente, futuro* — que dominam o nosso sistema verbal, em vez de jogar com a *categoria da duração*, que indica o *têrmo do desenvolvimento do processo* (1); quem desejar ler os poetas latinos, sentindo-os, ficará perplexo diante dos hexâmetros de Vergílio,

(1) Ver: "Atualidades Pedagógicas", vol. n.º 21, págs. 1-3 e 12 — "O aspecto e o tempo no sistema verbal".

Os Resultados Práticos do I Congresso de Ensino da Matemática no Brasil

Declarações do prof. OSVALDO SANGIORGI, da representação do Estado de São Paulo — Ensino dirigido — Programas mínimos, formativos e exeqüíveis

A reportagem de "Atualidades Pedagógicas" teve a oportunidade de ouvir o prof. Osvaldo Sangiorgi, catedrático de Matemática do Instituto de Educação Feminino Padre Anchieta, da Capital, e que, em companhia do prof. Omar Catunda, catedrático de Análise Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de S. Paulo, representou o Estado de São Paulo no Primeiro Congresso do Ensino de Matemática no Brasil, realizado na cidade de Salvador, Bahia, de 4 a 7 de setembro de 1955. A proposito dos resultados práticos e do desenvolvimento daquele conclave, assim se manifestou o prof. Osvaldo Sangiorgi:

— E' ainda sob a emoção da magnífica acolhida proporcionada pela cidade do Salvador que temos imenso prazer em divulgar os estudos realizados e os resultados obtidos numa memorável concentração de professôres de Matemática, da qual participamos, juntamente com o dr. Omar Catunda, catedrático de Análise Matemática, da nossa Universidade, representando a Sociedade Matemática de São Paulo. Sob os auspícios da Faculdade de Filosofia, da Universidade da Bahia, realizou-se em Salvador, na Semana da Pátria, o I Congresso do Ensino de Matemática no Brasil, que, sob todos os aspectos, revestiu-se de invulgar êxito, quer no respeitante à salutar idéia de reunir professôres de Matemática dos diversos Estados brasileiros, a fim de debaterem os problemas mais relevantes do nosso ensino, quer no tocante aos resultados efetivamente alcançados e aptos a serem logo executados. Inicialmente, as nossas congratulações com a direção da Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia pelo acertado programa que elaborou, onde, concretizando um dos itens de sua própria finalidade — que é o de licenciar professôres destinados ao ensino secundário e superior — tratou de propor estudos que pudessem solucionar, tanto quanto possível, os complexos problemas de nosso ensino.

Seria bem difícil, neste instante, enumerar todos os professôres baianos responsáveis pela realização do Congresso. De momento, lembramo-nos das figuras do dr. Isaias Alves, diretor da Faculdade de Filosofia, do sr. Luís Moura Bastos, diretor do Colégio Estadual e prof. da Seção de Matemática da Faculdade; da prof.ª Marta Maria de Sousa Dantas, responsável pelo Curso de Didática Especial da Faculdade de Filosofia e, sem dúvida, uma das grandes idealizadoras do Congresso e alma operosa no seu

DOC. 107

desenvolvimento. Segue-se uma plêiade enorme de jovens professôres entusiastas, cuja dedicação aos trabalhos revelaram o grande interêsse da nova geração nos magnos problemas do ensino.

De quase todos os Estados do Brasil, desde o Rio Grande do Sul até o Rio Grande do Norte, vieram professôres de lastro — e seria uma grande lista se fôssemos mencionar nomes — alguns responsáveis pela Didática Especial de suas faculdades, outros licenciados, outros não, mas todos, indistintamente, professôres militantes de Matemática e que — a nosso ver — devem ser obrigatòriamente lembrados e consultados tôda vez que se cogita de estudar reformas de ensino. Como a finalidade geral da instrução é função da diretriz cultural de cada época, segue-se que não se pode dizer a última palavra quanto à investigação dos melhores princípios que devem nortear o ensino da Matemática. Mas é evidente que os professôres de Matemática de todos os graus devem necessàriamente estar presentes nessas revisões periódicas, por serem os que mais diretamente estão em contacto com a questão e conhecem, como ninguém mais, o terreno onde pisam diàriamente. Teríamos, assim, aquela contribuição indispensável, principalmente nas feituras de programas, ainda não sentidas em nenhuma das sucessivas reformas que temos sofrido.

Ora, não é demais repetir que o nosso ensino médio é pletórico, ineficaz e bastante divorciado da realidade brasileira. Currículos sobrecarregados, programas extensos e inexequíveis, para não dizer ineptos, a preocupação geral e exclusiva dos exames, da aprovação e do certificado, fizeram do atual curso secundário, apesar das maravilhas que acompanham o nosso século, um atabalhoado curso despido de seu único objetivo que é o de ser *eminentemente formativo*. Compete a nós, professôres, ir ao encontro dessa situação muito cômoda para alguns e demais comprometedora para a juventude presente. Convenhamos, ainda, que a melhora do índice de aproveitamento em Matemática, dos alunos do curso secundário, não se cinge exclusivamente no retocar pura e simplesmente os programas existentes, mas também reestruturar os métodos de ensinar, cultivando mais o raciocínio, correlacionando os programas adotados com horários consentâneos à sua exposição e estágio que a disciplina merece.

TEMÁRIO

O temário do Congresso consistiu de: a) Métodos gerais do ensino; tendências modernas; b) Horários e programas; c) O livro de classe; d) O aperfeiçoamento progressivo do professor. E foi todo êle desenvolvido em sessões de estudos e plenários no contemplativo Retiro de São Francisco — local privilegiado da natureza e do espírito onde ficaram hospedados os congressistas, e dotado de todos os requisitos para o bom funcionamento de um congresso; na Faculdade de Filosofia e no auditório, por sinal muito lindo, do Instituto Normal da Bahia. Vamos tecer alguns comentários sôbre os principais trabalhos realizados:

Com relação ao 1.º item, "Métodos gerais do ensino: tendências modernas", chegou-se a resultados felizes e profícuos, graças aos excelentes trabalhos desenvolvidos pela representação do Distrito Federal, da qual se destacaram o prof. Roberto Peixoto, catedrático do Instituto de Educação e a prof.ª Eleonora Lobo Ribeiro, autora de uma substanciosa tese sôbre estudo dirigido com demonstrações de praticidade no Colégio de Aplicação anexo à Faculdade Nacional de Filosofia.

À representação de São Paulo coube apresentar sugestão de um programa de Matemática. O programa elaborado, que obedeceu à seguinte norma: ser mínimo; de assuntos essencialmente formativos; relacionados com o número de aulas e de exercícios, seria, o do ginásio, desenvolvido em 4 anos letivos com 4 aulas semanais e viria, na verdade, substituir o atual programa, de difícil execução, para não dizer absurdo. Até parece que a preocupação da nossa atual 2.ª série ginasial não é iniciar o aluno em álgebra, mas ensiná-la tôda, congestionando assim todo o ensino que se pretende dar. Na 3.ª série não há presentemente continuidade e a 4.ª série se intoxicou com tanto trinômio do segundo grau. A parte do colégio recebeu um mínimo imprescindível dentro de uma melhor distribuição.

O programa, aprovado com muita disposição pelo plenário, é o seguinte:

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

(CURSO GINASIAL)

4 aulas semanais

Primeiro ano

ARITMÉTICA — Programa atual com exceção de números relativos e unidades de velocidade angular, radiano e densidade.

Deve-se acrescentar o estudo das potências e raízes quadradas.

Segundo ano

ARITMÉTICA — Razões e proporções e regras que delas dependem (regra de três, juros, falsa posição etc.).

ÁLGEBRA — (Início). Números relativos. Cálculo literal.

Monômios e polinômios. Operações algébricas. Casos simples de fatoração. Frações literais. Radicais.

Terceiro ano

ÁLGEBRA — Equações de 1.º grau e uma incógnita. Sistemas do 1.º grau até 3 incógnitas. Problemas do 1.º grau.

Desigualdades algébricas. Inequações do 1.º grau e uma e duas incógnitas.

GEOMETRIA DEDUTIVA — (Início). Estudo das figuras geométricas planas: triângulos, quadriláteros, polígono e circunferência. Construções geométricas.

Quarto ano

ÁLGEBRA — Equações do 2.º grau com uma incógnita. Equações redutíveis ao 2.º grau. Sistemas simples do 2.º grau. Problemas do segundo grau.

GEOMETRIA — Linhas proporcionais. Semelhança de figuras planas. Relações métricas no triângulo, círculo e polígono. Definição de seno e co-seno num triângulo retângulo. Polígonos reguladores. Áreas das figuras planas.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

(CURSO COLEGIAL)

Desenvolvimento em 3 anos letivos com 5 aulas semanais, no mínimo, mantidas as atuais distinções para os cursos científico e clássico.

Primeiro ano

ÁLGEBRA — Progressões. Números irracionais. Logaritmos (como operação). Equações exponenciais.

TRIGONOMETRIA — Relações trigonométricas na circunferência. Generalização para arcos quaisquer. Igualdades trigonométricas (equações e identidades). Resolução de triângulos.

Segundo ano

ÁLGEBRA — Análise combinatória simples. Binômio de Newton. Determinantes. Sistemas de aquações lineares.

GEOMETRIA ESPECIAL. — Reta e plano. Diedros. Triedros e Poliedros. Corpos redondos.

Terceiro ano

ANÁLISE MATEMÁTICA — (Início). Conceitos elementares de variável e de função. Limites: primeiras noções sôbre derivadas e aplicações ao estudo de variação de uma função.

Estudo do Trinômio do 2.º grau. Conceito elementar de número complexo.

Polinômios e equações algébricas em geral (pequena introdução).

GEOMETRIA ANALÍTICA — (Início). Estudo no plano, até cônicas.

Êstes programas já foram entregues ao Ministério da Educação, na pessoa do prof. Armando Hildebrand, diretor do Ensino Secundário, para as devidas providências oficiais que, queremos crer, serão objetos de estudos, não só por refletirem o pensamento unânime do professorado de matemática, como também por virem ao encontro do sentido realístico que deve ser imprimido ao ensino secundário e que tem na pessoa do prof. Hidelbrand o seu principal defensor.

Quanto ao *Livro de classe*, foi apresentado pela prof.ª Marta Maria de Sousa Dantas, da Bahia, uma magnífica tese, onde foram destacados com raro brilhantismo os seguintes aspectos: a) O livro deve ser elaborado de modo que se torne a chave da ciência para a vida; b) O govêrno proporcionará todos os meios para tornar o livro acessível a todo estudante; c) O livro de classe deve ficar perfeitamente a cavaleiro dos programas e reformas.

Não fôra a escassez do tempo de que dispomos, muita coisa ainda poderia dizer-se dos valiosos trabalhos apresentados e discutidos em plenário. Felizmente constarão êles dos Anais do Congresso, que já estão sendo confeccionados e que ficarão como o testemunho da grande jornada consagrada ao ensino da Matemática. Não poderíamos deixar de mencionar, também, o desusado interêsse despertado pelos professôres de Matemática que integram o ensino normal da Bahia, dentre os quais se destacam as figuras das professôras Laurentina Puga Tavares, ilustre vereadora da Câmara Municipal de Salvador, Rosa Ramos Florence, Maria Odete Piton, Carmen Augusta Galvão, tôdas do Instituto Normal, que, em mesa redonda, quiseram saber do ensino normal de São Paulo, quanto aos seus programas (que felizmente já temos os novos em vigor) e das linhas gerais da nova reestruturação que presentemente se estuda entre nós.

Foi na Magnífica Reitoria da Universidade da Bahia — encantador edifício de linhas modernas entrosadas com as puras tradições baianas — que se deu a sessão solene de encerramento, com a participação de secretários de Estado e de altas autoridades educacionais da esfera federal. Ressaltou-se, nessa sessão, a fé inabalável que têm todos os professôres, de ver o Brasil caminhar para o seu grande destino educacional — iniciado auspiciosamente na grande Bahia — certos de que no próximo Congresso (provàvelmente no Rio Grande do Sul, em 1957) continuarão a frutificar para o ensino aquelas resultantes exigidas pelo sabor das novas gerações, que, todavia, sabem ser a Matemática uma das verdades eternas e portanto, como ciência, inalterável no espaço e no tempo.

O Lastro das Relações Humanas na Educação

GENERICE A. VIEIRA

NO TRATO PESSOAL com sua turma o professor surpreende reações variáveis em natureza, grau, intensidade, etc. Enquanto alguns alunos, por exemplo, se aproximam emocionalmente dêle, favorecendo a obra educativa, outros se afastam sistemàticamente, dificultando sua aprendizagem e seu próprio desenvolvimento harmonioso. Onde a gênese dessa divergência de percepções e manifestações de sentimentos que o adulto provoca, sofre ou goza na tarefa de ensinar? Por que, apesar do esfôrço dispendido e dos atributos que, tantas vêzes, credenciam seu êxito na turma, o educador quase sempre enfrenta casos de indiferença, hostilidade, agressão? Se nos resignássemos a admitir que o problema é universal, de todos os tempos e se resume em uma questão de simpatia ou antipatia espontânea, quedaríamos no limiar do fenômeno, sem perceber as motivações que o provocam.

A experiência que o Ministério da Educação e Cultura promove ativamente, com a *"Pesquisa dos fatôres emocionais na situação pedagógica"*, está oferecendo significativa contribuição ao estudo do assunto. A penetração de novas áreas no domínio profundo das relações humanas entre professor e aluno começa a incorporar ao nosso patrimônio científico o conhecimento documentado de realidades inexploradas que poderá determinar uma séria revisão ou completa inovação nos fundamentos do nosso sistema educacional.

A originalidade da pesquisa e o que lhe confere segurança e autoridade é sua própria natureza e a técnica de realização adotada. O cuidadoso exame e acompanhamento dos conflitos humanos ocorridos na escola, a cujo estudo o "seminário de professôres" vem se dedicando desde 1952, já está apreesntando resultados concretos que permitem desvendar o início de um mundo novo e promissor para as práticas educacionais.

Os fatos demonstram — na análise e solução das várias centenas de casos reais de desajustamento estudados — que o êxito ou o insucesso do ato educativo depende fundamentalmente da atitude consciente ou inconsciente do professor. O adulto só se capacita a estimular e orientar construtivamente uma personalidade em desenvolvimento, quando consegue observar, aprender e compreender as motivações psicológicas que impulsionam ou determinam não só a conduta do educando, mas, também, a sua própria.

Entre os fatôres que têm perturbado a serenidade do mestre e impossibilitado sua atitude científica, ponderada e tolerante, diante da criança, evidenciam-se — segundo depoimentos pessoais do trabalho em execução — dois aspectos básicos:

1) a incompreensão da verdadeira importância e da significativa interferência dos componentes emocionais no comportamento humano;

2) o excesso de zêlo do professor, sua preocupação por vêzes até mesmo obcessiva de ensinar, sua atitude preconcebida de formar, isto é, de cultivar potencialidades, segundo padrões ou moldes pré-estabelecidos.

Quanto ao primeiro caso, sabe-se que a evolução dos estudos psicológicos nos últimos anos vem ampliando a compreensão da área, influências e conseqüências dos fatôres emocionais no desenvolvimento da personalidade e na motivação da conduta humana. Êsses conhecimentos, intelectualmente aceitos, se estão corporificando experimentalmente, através da compreensão dos distúrbios afetivos manifestados nas situações pedagógicas apresentadas e estudadas desde 1952. E' a oportunidade dessas vivências reais — que a Pesquisa do I.N.E.P. está proporcionando a um grupo de educadores — o que permite observar, pesar, avaliar e confrontar idéias e fatos. As conclusões, que assim se firmam e estruturam, estão contribuindo para que o professor adquira uma visão mais real do problema e possa assumir nova posi-

PROGRAMAS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA PARA OS CURSOS NORMAIS

Consoante o que *Atualidades Pedagógicas* anunciou em seu último número, iniciamos hoje os debates sôbre o estabelecimento de normas gerais para a formação de uma *mentalidade brasileira*, respeitadas as particularidades regionais, no mais importante ciclo de nossas atividades educacionais — o *ensino primário*. À esclarecida e importante apreciação do professor Osvaldo Sangiorgi sôbre o programa em vigor no Estado de São Paulo, segue-se a publicação dos programas de Matemática e Estatística vigentes nas Escolas Normais e Institutos de Educação de diferentes Estados do país.

★

APRECIAÇÃO SÔBRE O PROGRAMA DE SÃO PAULO

OSVALDO SANGIORGI

Com relação ao programa de Matemática e Estatística, estabelecido para o Estado de São Paulo, podemos adiantar algo sôbre a sua elaboração, justificando tanto quanto possível, os frutos que resultaram, depois de prolongados debates e estudos, e que empolgaram, sobremaneira, os que sinceramente se interessavam pelo ensino normal paulista.

Há mais de seis anos que a Secretaria de Educação de São Paulo, amparada por prestigiosa equipe de estudiosos de todos os graus do ensino, ensaiava uma reforma substancial de seu ensino normal que, em face das novas e contínuas conquistas no campo pedagógico e da realidade brasileira presente, já se tornara obsoleto na sua estrutura, falho nos resultados e que de apreciável só apresentava um número cada vez maior de professôres primários diplomados anualmente. O primeiro passo da reforma, defendido intransigentemente pelos professôres em concentrações de estudos patrocinadas pela: Apesnóesp (Associação dos Professôres do Ensino Secundário e Normal de São Paulo), Associação dos Antigos Alunos da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo, Forum de Debates Educacionais, foi a concretização de novos programas para o Ensino Normal de São Paulo, de acôrdo com a Portaria 49, de 4-12-54, do Diretor Geral do Departamento de Educação, em substituição aos programas de então que se apresentavam completamente superados.

Com a adoção do novo programa de Matemática e Estatística (o que vem publicado) vingou o salutar princípio de que as futuras professôras primárias levassem como bagagem fundamental de

sua formação profissional, no que respeita a Matemática e Estatística, tão sòmente a *aritmética prática*, a *geometria prática* e *noções de Estatística aplicada à Educação*, ao invés de se aprofundarem em "altas matemáticas" como objetivavam os antigos programas que, sem desmerecê-los, atendiam razões pertinentes a sua época. Ademais, para aquêles que desejam conhecer as belezas dos diversos ramos da Matemática de grau médio-superior, existem cursos específicos (científico, superior) que atendem plenamente a êsse maravilhoso desejo.

O acêrto das resoluções tomadas em São Paulo está no fato do reflexo favorável que elas tiveram pelos estudiosos de outros Estados. Assim desde o ano passado o Estado do Paraná adotou integralmente para as suas Escolas Normais o programa de Matemática atualmente em vigor em São Paulo. Também no Rio Grande do Sul, por ocasião do II Congresso Nacional do Ensino da Matemática, realizado em Pôrto Alegre, no princípio de julho dêste ano, foi o atual programa de Matemática e Estatística de São Paulo alvo de distinção, ressaltando os congressistas de outros Estados a vantagem de tal programa em relação aos demais que se apresentam bastante distanciados da atual realidade brasileira.

Resolvido e aceito o atual programa de Matemática e Estatística de São Paulo (que já está servindo de modêlo para estudos em outros Estados) processa-se agora neste Estado o segundo passo da reforma por que passa o seu Ensino Normal e que agora diz respeito a reestruturação das disciplinas que compõem o currículo, regulamentação de horários de exposição etc., de acôrdo com que foi aprovado em 22 de janeiro do corrente ano pela Assembléia Legislativa do Estado. Particularmente para o caso da Matemática e Estatística, discute-se neste instante qual o tempo mais indicado para a execução de seu programa no Curso Normal, já que é imprescindível uma correspondência harmoniosa entre "o que se vai ensinar" e o "tempo necessário para garantir êxito do que se está ensinando".

Ora, *ler* e *contar* é o binômio que acompanha as crianças desde os seus primeiros ensinamentos. Portanto, a língua pátria e a aritmética, que estão intimamente ligadas às primeiras iniciações de estudos dos alunos, passam a representar a viga mestra de tôda a formação escolar. Nestas condições, a professôra normalista deve, obrigatòriamente, conhecer em grau suficiente para pleno desembaraço, os elementos de Português e de Matemática que, diária e sucessivamente, usará na sua nobre missão de ensinar. Precisamos convir, outrossim, que não se trata de ensinar, aos futuros mestres de nossas escolas primárias, coisas novas em Matemática e sim fazê-los estagiar, simplesmente de fato, num intervalo de tempo muito maior, naquilo que apreenderam superficialmente como alunas das duas primeiras séries ginasiais e uma parte da terceira. Teriam agora, em três anos de Curso Normal, o sabor de conhecerem, dentro da aritmética e geometria, a razão dos "porquês" tão comum nas perguntas de seus futuros alunos.

Isto é de certa forma enriquecer a cultura do professor primário que deve ainda adestrar-se com bastante tempo na técnica do cálculo e na solução de problemas típicos necessários àqueles que se destinam a arte de ensinar. Com um tempo bem distribuído pelo curso a aritmética e a geometria ficariam bem arraigadas nos recém-formados professôres que assim estariam na verdade habilitados para interpretarem os seus programas de ensino e conseqüentemente bem preparar as suas lições. E' tão comum, infelizmente, encontrar professôres primários que desconhecem por completo a nomenclatura oficial relativa às unidades de medir; que não sabem efetuar raciocínios, dos mais elementares, na resolução de problemas da vida real da criança, bem como incorrem em erros crassos no cálculo de expressões aritméticas, com o agravante de não saber que estão em êrro. Daí não ser demais repetir que a aprendizagem na Matemática se faz com o treino e verificação permanente dos princípios sôbre os quais se fundamentam a aritmética e a geometria.

Acresce, ainda, que o normalista só poderá ter sucesso nas cadeiras de Metodologia e Prática de Ensino se souber realmente "o que ensinar", seguindo os diversos métodos que lhe forem apresentados. Desta forma convivendo com a aritmética e a geometria nos diversos anos do Curso estará a futura professôra primária credenciada a um desempenho mais eficiente e portanto a melhorar o nível dos alunos dos grupos escolares.

Aliás, em recente artigo, o brilhante Prof. Silveira Bueno frisa que *a grande hecatombe nos exames vestibulares às escolas superiores vem do ensino primário*, onde os alunos não recebem a formação que era de se desejar quer em Português, quer em Matemática.

Não é outro o pensamento de cêrca de uma centena de professôres de Matemática de todo o Estado de São Paulo que, reunidos no recente "Encontro de Mestres", realizado na capital paulista a 15 de junho último, sob os auspícios do Ministério da Educação, ratificaram os estudos de outros congressos de estudos relativos ao ensino normal e aprovaram em plenário o que se segue: *"sendo o curso normal o responsável direto pela formação do professor primário, ao qual compete uma tarefa básica no ensino, quer seja a de ministrar os primeiros conhecimentos aos alunos, não se compreende o descaso com que se procura distribuir diplomas sem o rigor necessário; nestas condições os professôres de Matemática reunidos neste "Encontro de Mestres", unânimemente, reivindicam a inclusão da Matemática nas três séries do Curso Normal, visando com isso o aprimoramento do ensino normal brasileiro".*

1.º) Estado de São Paulo e Paraná

CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSÔRES PRIMÁRIOS

PROGRAMA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

(para os Institutos de Educação e Escolas Normais Oficiais)

Tempo de execução (em discussão): dois anos letivos com três aulas semanais ou três anos letivos com duas aulas semanais.

I — ARITMÉTICA PRÁTICA

1 — *Número inteiro:* *a*) Sucessão dos números. Confronto. Sistemas de numeração. Representações geométrica e literal; *b*) Operações fundamentais. Propriedades respectivas; *c*) Estabelecimento de problemas típicos; *d*) Potenciação. Propriedades; *e*) Divisibilidade aritmética; múltiplos e divisores. Critérios de divisibilidade. Números primos. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum; *f*) Aplicações.

2 — *Número fracionário:* *a*) Noção intuitiva de fração. Funções próprias, impróprias e aparentes. Propriedades das frações. Simplificação e reduções. Confronto; *b*) Operações fundamentais. Expressões aritméticas fracionais; *c*) Estabelecimento de problemas típicos; *d*) Frações decimais. Correspondência com os números decimais. Transformações. Propriedades dos números decimais. Operações. Conversões. Números decimais periódicos. Geratrizes; *e*) Aplicações.

3 — *Número racional e número irracional:* *a*) Grandezas comensuráveis. Números racionais; *b*) Grandezas incomensuráveis. Números irracionais; Prática de Raiz Quadrada.

4 — *Aplicações com uso da álgebra:* Métodos aritmético e algébrico — de resolução de problemas típicos.

5 — *Sistemas de medidas decimais e não decimais:* Nomenclatura e notações oficiais.

6 — *Noções de aritmética comercial:* *a*) Números proporcionais e grandezas proporcionais; *b*) Regras de três; *c*) Porcentagem; taxa milesimal; *d*) Juros simples. Operações com o Montante. Divisor fixo. Desconto. Moeda e Câmbio: Aplicações.

II — GEOMETRIA PRÁTICA

1 — *a*) *Noção de equivalência entre figuras geométricas planas.* Áreas das principais figuras. Teoremas de Pitágoras e suas aplicações.

2 — *a*) *Noção de equivalência entre figuras geométricas sólidas:* *b*) Definição. Áreas das superfícies lateral e total. Volume dos principais sólidos geométricos.

III — NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

1 — Origem e natureza dos dados estatísticos.

2 — Levantamento estatístico.

3 — Os principais tipos de números relativos.

4 — Processos básicos de representação gráfica.

5 — Suas distribuições de freqüência e sua representação gráfica.

6 — Medidas de posição: a média de aritmética simples e ponderada; a mediana, os quartis, decis e percentis; a moda.

7 — Medidas de dispensão: a amplitude semiquartil: o afastamento padrão.

8 — Algumas aplicações à Educação. Simbolismo estatístico usual.

Observação: Vigora no Paraná, com exceção de Estatística que constitui disciplina independente.

2.º) Programa dos Cursos Normais do Distrito Federal e Paraíba

MATEMÁTICA

Álgebra

UNIDADE I — PROGRESSÕES

a) *Progressões aritméticas* — Definições. Fórmula do têrmo geral. Fórmulas derivadas. Inserção de meios aritméticos. Propriedades dos têrmos eqüidistantes dos extremos. Soma dos têrmos. Exercícios.

b) *Progressões geométricas* — Definições. Fórmula do têrmo geral. Fórmulas derivadas. Inserção de meios geométricos. Soma dos têrmos. Limite dessa soma no caso da progressão ilimitada e decrescente. Têrmos eqüidistantes dos extremos. Produto dos têrmos. Exercícios.

UNIDADE II — LOGARITMOS

Definição de logaritmos. Propriedades fundamentais. Logaritmos decimais. Prática das tábuas. Cálculo por logaritmos de expressões numéricas.

Geometria

UNIDADE III — OS POLIEDROS

a) *Prisma* — Definições. Seção reta. Prismas oblíquo, reto e regular. Área lateral e total de um prisma. Volume do prisma. Volume do prisma reto. Paralelepípedo. Área total, volume e diagonal do paralelepípedo retângulo. Estudo especial do cubo. Exercícios práticos.

b) *Pirâmide* — Definições. Pirâmide regular. Áreas lateral e total, volume. Exercícios práticos. Estudo descritivo e sucinto dos poliedros regulares. Teorema de Euler.

UNIDADE IV — OS CORPOS REDONDOS

a) *Cilindro* — Definições. Cilindro de revolução. Desenvolvimento de sua superfície lateral. Áreas lateral e total, volume. Cilindro eqüilátero. Exercícios práticos.

b) *Cone* — Definições. Cone de revolução. Desenvolvimento de sua superfície lateral. Relação métrica entre seus elementos. Áreas lateral e total, volume. Exercícios práticos.

c) *Esfera* — Definições. Principais partes da esfera e da superfície esférica. Área e volume da esfera. Exercícios práticos.

3.º) Programa do Instituto de Educação de Minas Gerais

MATEMÁTICA

(quatro aulas semanais)

1.º) *Número:*

a) conceito de número;
b) número inteiro;
c) número fracionário e
d) número incomensurável.

2.º) *Operações elementares:*

a) operações de composição e operações de decomposição;
b) operações inversas;
c) estudo paralelo da adição e da subtração, da multiplicação e da divisão, da pontenciação e da readiciação.

3.º) *Propriedades da adição:*

a) comutação;
b) associação;

Propriedades da subtração:

a) subtração de uma soma ou de uma diferença indicada;
b) uso do parêntese;
c) complemento aritmético de um número.

Números relativos.
Generalização das noções de adição e subtração.

4.º) *Linha reta, semi-reta e segmento de reta:*

a) soma e diferença de segmentos;
b) ângulo; soma e diferença de ângulos.

5.º) *Propriedades da multiplicação e da divisão:*

a) propriedade comutativa;
b) propriedade associativa;
c) multiplicação de uma soma ou diferença por um número e de um número por uma soma ou por uma diferença;
d) produto de uma soma por outra;
e) multiplicação de produtos indicados.

Teoria da divisão.

6.º) *Generalização das noções de multiplicação e de divisão:*

a) multiplicação por um número maior do que a unidade;
b) valor do quociente, quando o divisor é menor do que a unidade;
c) multiplicação algébrica;
d) produtos notáveis;
e) divisão de monômios e polinômios por monômio;
Fatoração em casos simples.

7.º) *Números primos; Teoremas principais:*

Divisibilidade;

a) teoremas gerais;
b) caracteres de divisibilidade por 10 e 10m, 2 e 2m, 5 e 5m por 8, por 9 e por 11.

8.º) *M. d. c. e m. m. c.:*

Teoremas principais.
Divisores de um número.
Condições de divisibilidade de um número por outro.
Divisibilidade de um polinômio por um binômio da forma $X = a$.

9.º) *Recapitulação do estudo das frações ordinárias:*

a) teoremas principais;
b) simplificação e conversão ao mesmo denominador;
c) operações.

10º) *Números decimais:*

a) propriedades;
b) operações;
c) dízimas periódicas;
d) frações geratrizes;
e) teoremas principais.

11.º) *Potências e raízes:*

a) multiplicação e divisão de potências da mesma base;
b) expoente zero e expoente negativo;
c) potências e raízes de potências indicadas;
d) expoentes fracionários;
e) cálculo dos radicais.

12.º) *Proporções:*

a) teoremas fundamentais;
b) regra de três;
c) porcentagem;
d) divisão proporcional;
e) juros;
f) desconto;
Dedução das fórmulas de juros e de desconto, divisores fixos.
Médias;

a) aritmética simples e ponderadas;
b) geométrica;
Dedução das fórmulas de juros e de desconto, divisores fixos;
Médias;

a) aritmética simples e ponderadas;
b) geométrica;
c) harmônica.

13.º) *Perpendiculares e oblíquas. Paralelas. Triângulos e polígonos em geral:*

Área do retângulo, do paralelogramo, do triângulo, do trapézio e dos polígonos.

14.º) *Circunferência e círculo:*

Medida da circunferência e da área do círculo.

15.º) *Aplicações práticas* das fórmulas referentes ao volumes do paralelepípedo, do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera.

ESTATÍSTICA

1.º) Noção de estatística, objetivos da estatística.
2.º) Modos de representação dos resultados, tabelamentos, gráficos. Números representativos de uma série.
3.º) Média aritmética dos têrmos de uma série. Divisão por freqüências. Métodos abreviados.
4.º) Mediana, quartis, decis e percentis.
5.º) Modos, relações empíricas entre modo, mediana, média.
6.º) Média aritmética ponderada.
7.º) Média geométrica.
8.º) Desvio padrão.
9.º) Gráficos em geral: diagrama, setores, barras e colunas. Histograma, curva de graus, ogiva de Galton.
10.º) Organização de tabelas. Convenções usuais. Números índices.

4.º) Programa do Instituto de Educação do Estado de Pernambuco

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

PRIMEIRA SÉRIE

As sucessivas extensões de conceito de número:

Progressões e logaritmos.
Análise combinatória:

a) arranjos, permutações e combinações;
b) binômio de Newton;
c) noções sôbre cálculo das probabilidades.

Funções e limite:

a) definição de função;
b) gráfico de uma função;
c) classificação das funções;
d) noções de limite e de continuidade.

Funções circulares:

a) definições, variações, redução ao 1.º quadrante;
b) relações entre as funções circulares de um mesmo arco;
c) cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º;
d) resolução de triângulo retângulo.

Derivação e integração:

a) derivadas; definição; interpretação geométrica;
b) cálculos das derivadas;
c) determinação das máximas e mínimas e estudos da variação de algumas funções simples;

d) primitivas imediatas;
e) integrais indefinida e definida;

O plano e a reta no espaço:

a) geração e determinação do plano;
b) retas e planos perpendiculares e paralelas;
c) noções sôbre ângulos diedros e poliedros.

Os poliedros:

a) noções gerais;
b) estudos dos prismas e das pirâmides e respectivos troncos;
c) área e volume dos prismas e das pirâmides.

Corpos redondos:

a) cilindro e cone de revolução; generalidades; áreas e volume do cilindro e do cone;
b) área lateral e volume do cone;
c) esfera; generalidades; área da esfera, da zona e do fuso esférico;
d) volumes da esfera.

Centro de Formação e Aperfeiçoamento de Oficiais da Fôrça Pública do Estado de S. Paulo

Uma das mais tradicionais unidades da gloriosa Fôrça Pública de São Paulo. Onde a formação propedêutica e a técnica se unem harmoniosamente para a formação do futuro oficial.

Reportagem de ATUALIDADES PEDAGÓGICAS

Como já o fizera em muitas outras ocasiões, "Atualidades Pedagógicas" não poderia deixar de registrar, se bem que muito sumàriamente, mais uma unidade educacional de nosso sistema de ensino especializado que muito honra e engrandece as mais legítimas tradições paulistas: o *Curso de Formação e de Aperfeiçoamento de Oficiais da Fôrça Pública do Estado de São Paulo,* destinado à formação de Oficiais, Sargentos, Cabos e soldados para as diversas funções exercidas pela fôrça Pública.

ORGANIZAÇÃO DOS CURSOS

Localizada no aprazível recanto de Barro Branco, no bairro de Tremembé, na capital do Estado, o *C. F. O* (Centro de Formação de Oficiais) compreende as seguintes escolas em funcionamento regular:

A) Escola de Oficiais, destinada à formação do oficial, dividida em dois cursos: *Curso de Formação de Oficial* e o *Curso Preparatório.* O primeiro, de formação do oficial, tem a duração de três anos, durante os quais os alunos percebem os vencimentos mensais de Cr$ 4.000,00. Os alunos que concluem com aproveitamento o C. F. O. são declarados Aspirantes, com acesso ao pôsto de 2.º tenente. O *Curso Preparatório* (C. P.), tem a duração de dois anos, com a finalidade de completar o ensino ginasial. O aluno dêste curso tem direito, desde a matrícula, a ensino, fardamento, alojamento e alimentação por conta do Estado, além de perceber vencimentos mensais de Cr$ 3.700,00. Neste Curso são ministradas matérias do Curso Secundário, com apenas noções elementares sôbre a parte militar. Terminado o Curso Preparatório, o aluno aprovado será matriculado no 1.º ano do Curso de Formação de Oficiais (C. F. O.), independentemente de exames.

No Curso de Formação de Oficiais são ministradas matérias de curso de nível superior, tais como: Direito Constitucional, Processo Penal e Penal Militar, Direito Civil, Introdução à Ciência do Direito, Sociologia, Criminologia, Criminalística e Lógica.

O Curso de Formação de Oficiais, de acôrdo com as leis federais n.º 1821, de 12-3-53, e 3104, de 1-3-1957, está equiparado ao Curso Secundário (Científico ou Clássico).

B) Escola de Sargentos — E' o Curso destinado à formação do sargento para as várias funções policiais que exerce a Fôrça Pública em todo o território do Estado.

C) Escola de Cabos — Encarregada da formação de cabos.

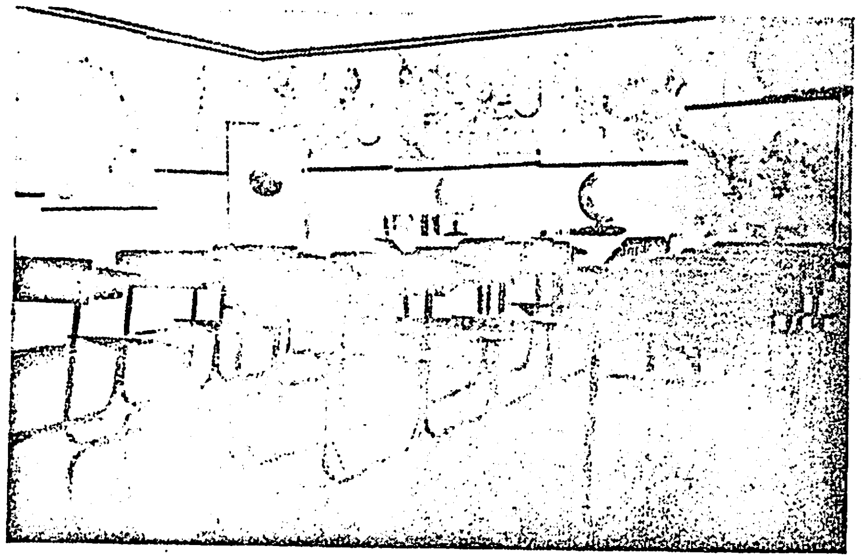
D) Escola de Recrutas — E' o curso fundamental destinado ao soldado.

COMANDO DO CENTRO

Tôdas as escolas, acima assinaladas, que constituem o Centro de Formação e Aperfeiçoamento de Oficiais da Fôrça Pública, estão sob o *comando geral* do Sr. Cel. Arrisson de Souza Ferraz, tendo como auxiliares imediatos o Sr. *Subcomandante,* Major Carlos Domingos Guimarães Ambrogi, e o *Diretor de Ensino,* o Major Ennio Collaço França.

DIREÇÃO DE ENSINO DO CENTRO

A *Direção de Ensino* (D. E.), para o integral desempenho de suas funções educacionais, tem a colaboração de Depar-



Uma das salas-ambiente do Instituto.

Berçário

Funciona também em regime de semi-internato, abrigando crianças de 6 meses até 3 anos, um BERÇÁRIO para que as mães possam trabalhar, quando isto fôr realmente necessário.

Internato para meninas

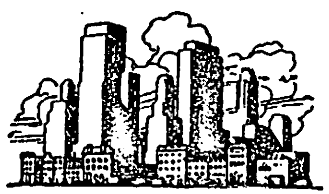
Proporciona às assistidas sadia formação moral e profissional, preparando-as para a vida, por meio dos cursos: primário doméstico, dactilografia e, para as mais dotadas, ginasial.

Ambulatório

Com a finalidade de prevenir e combater os males da infância e dar, à criança pobre, assistência médica e à mãe, noções de higiene e puericultura. O ambulatório, funcionando em lugar provisório e exíguo, aguarda a oportunidade de construir salas apropriadas, com capacidade e instalações, que possibilitem o desenvolvimento da assistência; espera, também, instalar gabinete dentário para os assistidos.

Cursos

Para educar e instruir a juventude, o Instituto mantém os seguintes cursos: *jardim de infância*, com duração de 3 anos; *primário*, com duração de 4 anos; *admissão*, com duração de 1 ano; admissão no período de férias, a começar em 10 de janeiro e *ginásio*, com duração de 4 anos, reconhecido e fiscalizado pelo Govêrno Federal.



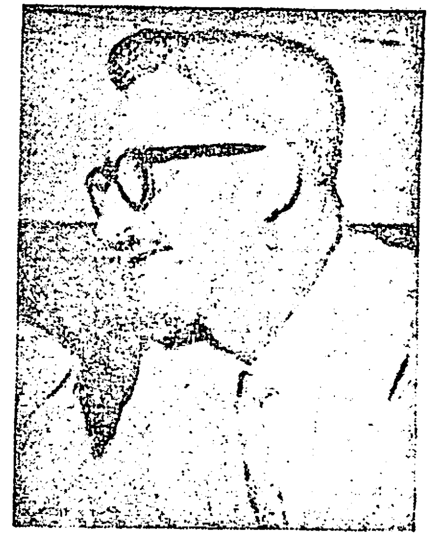
A Matemática nas Classes Experimentais

OSVALDO SANGIORGI

Em boa hora foram baixadas instruções pelo Ministério de Educação no sentido de serem estabelecidas classes experimentais em ginásios de todo o país. Estas instruções, oriundas de uma antiga sugestão de professôres estudiosos de nossos problemas educacionais, tiveram a melhor repercussão dentro do magistério secundário que nelas viu uma oportunidade para a completa renovação dos métodos e processos do ensino médio, geralmente reconhecidos como falhos e pouco eficientes.

As classes experimentais, aprovadas e fiscalizadas pelo Conselho Nacional de Educação, devem constituir, a nosso ver, o primeiro passo para o tão desejado aprimoramento do ensino brasileiro de segundo grau. Nós, que nunca nos furtamos de criticar — no que concerne à Matemática — os programas e as portarias que tanto têm tumultuado os estudantes secundários, criando barreiras ao bom desempenho dos docentes, cumprimentamos sinceramente essa iniciativa do Ministério de Educação que mostra, neste instante, estar acompanhado os demais países civilizados na busca de melhores soluções para os problemas do ensino atual.

Desde o lançamento dos "sputniks" os ocidentais e, em particular os norte-americanos, não cessam de render homenagens às realizações soviéticas no domínio do ensino, escreve K. S. Karol, comentando a proposta reforma do ensino soviético por parte de Nikita Kruchev. Afirma-se, categòricamente, que em virtude de haver quatro vêzes mais estudantes nas escolas superiores russas que em tôdas as da Inglaterra, França,



Alemanha e Itália, reunidas, é que os soviéticos conseguiram organizar um exército de técnicos responsáveis pelo prodigioso desenvolvimento tecnológico que apresentam. Pois bem, não é êsse o pensamento de Kruchev no extenso relatório que apresentou sôbre a educação nacional russa e do qual extrairemos alguns trechos. Critica inicialmente o líder vermelho o fato do curso ginasial de seu país ter sido concebido ùnicamente para preparar jovens destinados às escolas superiores e "não para a entrada direta na vida produtiva". E para mostrar que a situação do atual ensino médio soviético não é dos melhores, Kruchev chega a dizer: "numerosos países capitalistas educam os estudantes melhor do que nós. Precisamos fazer com que tôdas as crianças freqüentem durante oito anos a escola e depois trabalhem em qualquer setor de produção. Quanto maior fôr o êxito e mais evidente o desejo de aprender, maiores facilidades lhes serão dadas para estudarem ainda mais. Os que, por outro lado, não tiverem qualquer vocação especial, começarão a formação profissional desde a idade dos quinze anos. Talvez seja útil, também, selecionar os jovens especialmente dotados para as matemáticas, física, biologia ou desenho e permitir-lhes que estudem sem passar pela fase produtiva. Assim as nossas escolas superiores e especializadas poderão recrutar jovens dos dois sexos especialmente bem preparados para os setores científicos".

Vemos, por êsse modo de expor o problema russo, que nem tudo "são rosas", na União Soviética, que também tenta resolver, à sua maneira, os graves problemas do ensino médio incluindo o do recrutamento às escolas superiores, apesar do espetacular saldo de êxitos conseguidos nestes dois últimos anos no campo científico.

Na verdade tais problemas estão interessando igualmente a todos os países altamente estruturados e industrializados. Razão porque respiramos um ar de satisfação ao verificar a possibilidade de aqui entre nós também iniciarmos classes experimentais, a fim de serem colhidas amostras que permitam, num futuro próximo, a promulgação de uma reforma necessàriamente útil ao país, bem como a manutenção de idôneos laboratórios educacionais.

Não tem sido outra, aliás, a atuação da França e da Itália nos anos 1957 e 1958 (Vide *Nouveaux horaires et programmes de l'enseignement du second degré* de 12/10/1957 e *Una pedagogia libera* de Bellano, 8/4/1958). A intensidade do movimento científico contemporâneo, o extraordinário desenvolvimento e a rápida evolução das técnicas (é dêsse mês, por exemplo, o feito dos americanos com o "Pioneiro", foguete que atingiu a maior altitude no espaço sideral: 128 000 km !) têm uma grande influência sôbre os novos métodos de ensino, que devem ser sempre revisionados em função do educando presente. As leituras de revistas, que mostram conquistas superfantásticas, tão ao sabor dos alunos de hoje e que fazem, a rigor, parte constante de suas atividades; o rádio, a televisão, o cinema, "os discos voadores", os satélites terráqueos e daqui a pouco lunares, exigem por parte dos educadores conscientes uma nova tomada de posição, sob pena dos mesmos ficarem defasados da época de cienticidade que atravessamos, com o conseqüente prejuízo da nova geração de jovens (tão mal denominada de sòmente "transviada") que, ansiosa, espera novos métodos de estudos e outras técnicas de pesquisas.

Com relação à *participação* da *Matemática* nas classes experimentais, todos os projetos apresentados por ilustres professôres paulistas, — representantes de estabelecimentos desejosos de participarem dessa nova ordem — colocam-na naquela posição de destaque que sempre a caracterizou em todos os tempos. Assim o Português, como instrumento principal de expressão, e a Matemática, como formadora racional do espírito e instrumento indispensável ao estudo das ciências, constituem o binômio que participa ativamente de todos os ensaios em curso, embora não se conheçam ainda os programas com que se apresentarão.

Nesta nossa colaboração procuraremos sugerir um *programa de Matemática*, que poderá ser iniciado na primeira série ginasial experimental, louvados em estudos que de há muito vimos realizando, bem como em resultados apresentados por certos países envolvidos com o mesmo problema.

Tendo em vista que a média das disciplinas apresentadas em quatro projetos conhecidos, consideradas *básicas* para a 1.ª ginasial-experimental, constitui-se de:

Português; Matemática; Ciências Naturais; Conhecimentos de História e Geografia; Artes (desenho, pintura, modelagem, ...); *Segunda língua* (Inglês ou francês)

sendo

Atividades complementares: Práticas esportivas e Educação Física; Iniciação musical, canto, teatro, etc...

e que o grupo de trinta alunos componentes dessa classe representará o conjunto ao qual serão aplicadas as últimas conquistas da pedagogia e da metodologia, é óbvio que o programa de Matemática a ser proposto seja naturalmente *flexível, adaptável* às possibilidades *reais* dos alunos, bem como *suscetível* de ser superado numa série ou no conjunto do curso ginasial experimental, uma vez que deverá estar intimamente entrosado com as disciplinas básicas.

Nestas condições o *programa* de Matemática seria constituído, de início, por duas *estruturas* que denominaríamos:

1) *Estrutura aritmético-algébrica*
2) *Estrutura geométrica intuitiva*

e complementado, necessàriamente, com:

3) *Trabalhos práticos*
4) *Noções preliminares de astronomia*

Discorreremos, a seguir, sôbre êsses itens:

1) **Estrutura aritmético-algébrica.** — Somos de parecer que o programa de Matemática da 1.ª série ginasial-experimental deva possuir nuances que constituam realmente *centros de interêsse* ao aluno recém-vindo do curso primário. A aritmética jamais deverá ser estudada como mera repetição da bagagem que o grupo de alunos, obrigatòriamente, já deve possuir e sim com vistas a generalização para uma iniciação algébrica simples, espontânea, que encerre a idéia de *correspondência* entre grandezas variáveis. Aliás, o programa deve ser tornado *funcional*, servindo-se precisamente das estruturas mentais já existentes na mente das crianças, de molde que sejam levadas em conta as dificuldades que encontra o aluno ao passar de uma estrutura mental a outra. Segundo o grande pedagogo Gattegno, não é o particular mas o *geral* que interessa um aluno de 11 anos em diante.

As ações de um programa e a do professor que o executa não devem constranger a inteligência do aluno confinando-o dentre de certos limites que possam impressioná-lo mal sôbre os verdadeiros objetivos do ensino da Matemática, tornando-a, conseqüentemente, uma disciplina injustamente pouco atraente. No ensino da *aritmética*, dentro da estrutura preconizada, pode conseguir-se, em breve tempo, que os alunos se libertem do numérico, para tomarem consciência, mesmo que seja de modo intuitivo, de propriedades gerais das várias operações e passar depois ao campo da álgebra pròpriamente dita. Aqui, sempre tendo em vista *concepções gerais*, insistir-se-á mais sôbre a reversibilidade das operações e o dinamismo das fórmulas (isto é, sôbre os vários aspectos que uma fórmula pode tomar). Além do mais, observe-se que o conceito de função que o aluno tem nessa idade é sempre mais amplo daquele que nós, costumeiramente, queremos impor-lhe quando lhe oferecemos exemplos simples.

O estudo da álgebra será feito ressaltando-se principalmente *o que há de comum* com a aritmética, tais como as propriedades análogas existentes para os *números inteiros* e para os *polinômios; a decomposição em fatôres primos* e *fatoração algébrica*, etc... mostrando-se aos alunos uma estrutura da Matemática elementar, como *um todo*, sem compartimentos estanques entre os seus diversos ramos. No programa, em anexo, propomos que nesta 1.ª série se estude sòmente Expressões algébricas inteiras (operações com monômios e polinômios inteiros); Equações inteiras do 1.º grau a uma incógnita (bem simples) e Problemas do 1.º grau, cuja resolução dependa de equações inteiras do 1.º grau a uma incógnita (bem simples também).

2) **Estrutura geométrica intuitiva.** — O ensino da geometria na 1.ª série ginasial experimental não deve ser dedutivo. Isto porque não se deve impor ao aluno um tipo de raciocínio, a fim de levá-lo a certos resultados, que contrarie a sua estrutura mental de 11 anos e que só teria sentido daí a alguns anos.

O ensino da geometria deve ser *intuitivo*, pois o aluno de 11 a 13 anos "vê" com um raciocínio espontâneo aquilo que nós outros, eivados de uma rígida disciplina, procuramos "não ver" tão claramente. Todavia, não se deve dar definições geométricas sem sentido (pensando que desta forma facilitará o ensino) que possibilitarão na certa a construção de uma *falsa geometria*.

Assim, por exemplo, não podemos dizer que "reta é a *linha* que passa por dois pontos", quando sabemos que por dois pontos podem passar tantas linhas quantas quisermos. Como a reta não é definida diretamente, devemos deixar o seu conceito como *primitivo*, adquirido através de inúmeros exemplos (raio de luz, por ex.) e frisar como propriedade fundamental a *unicidade* da reta que passa por dois pontos — propriedade aliás de fácil verificação experimental.

E' conveniente de início acostumar os alunos a se familiarizarem com as figuras planas, fazendo-os desenhar no fim de cada lição: triângulos, quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos, trapézios, circunferências, a fim de que essas figuras, tão comuns em todos os seus estudos, tenham um trato correto aliado ao conhecimento de suas principais propriedades. Deve-se, outrossim, deixar um pouco de tempo (e isto constará obrigatòriamente na parte de Trabalhos Práticos, que também faz parte do programa anexo) à fantasia do próprio aluno para que êle também possa desenvolver "elementos seus" dentro da geometria que se está estudando (nesse caso a euclidiana). Mais tarde, com relação aos sólidos, é sempre interessante orientá-los no sentido de fazerem coleções de modelos em cartolina, tendo porém sempre presentes as propriedades geométricas fundamentais. Desta forma propiciar-se-á aos jovens alunos uma espécie de emulação artística em correspondência ao conhecimento geométrico que passaram a ter.

3) **Trabalhos práticos.** — O estudo de cada um dos capítulos do programa elaborado, liga-se, naturalmente, a trabalhos práticos que servirão para "preparar" uma definição, a "descobrir" uma relação entre certos fatos ou certos sêres, a "verificar" um resultado ou uma fórmula ou mesmo "sugerir" qualquer problema novo.

Para realizar tais trabalhos os alunos deverão utilizar instrumentos do desenho usual: réguas, esquadros, compasso, papel milimetrado ou quadriculado e instrumentos de medida, dos mais comuns, como: metro, decímetro, trena, palmers, curvímetros, balanças, etc...

O emprêgo dêsses instrumentos deve ser cuidadosamente explicado em correlação com as demais disciplinas e atentamente controlados, a fim de que manejados pelos alunos não se reduza a um simples *gesto de imitação* e sim um *ato reflexivo* adaptado à execução do trabalho.

A noção de escala de um desenho deve ser introduzida atendendo as enormes aplicações que rodeiam os alunos (ampliações de fotografias, plantas de construção, etc...) O estudo dos sólidos, como já foi acentuado, deve ser feito a partir de modelos pré-fabricados ou manufaturados pelos próprios alunos.

Com êsses trabalhos práticos estariam, automàticamente, iniciada a composição de um *Laboratório de Matemática* (tão em voga em inúmeros países), que realmente completa a efetivação de um eficiente aprendizado. O material construído, bem como aquêle adquirido (entre êles destacamos: ábacos, caixas de jogos, geoplanos de Gattegno, formulários, livros de História da Matemática, revistas de divulgação científica) teria no Laboratório o verdadeiro local para a sua exposição e mesmo os alunos e os professôres fariam vingar a sala "ambiente" de Matemática, cujo enriquecimento de ano para ano mais o solidificaria.

4) **Noções preliminares de astronomia.** — E' pela Matemática que o espírito do aluno deve ser iniciado e precisado nas primeiras noções de astronomia. Não nos devemos surpreender com o título acima, pois a preocupação primeira do racional é ainda querer situar-se no planêta em que habita e no Universo a que pertence (*Aroldo de Azevedo* no seu livro 1.º Ano Colegial pág. 31, denomina Geografia Astronômica ou *Geografia Matemática*). E' nos jovens alunos de hoje, principalmente, que essa idéia é despertada muito precocemente, como se nota pela incrível atração que as revistinhas em quadrinhos exercem sôbre êles. E' preferível, então, que passem a conhecer em têrmos seguros aquelas noções preliminares de astronomia que lhes é imposta de um modo superfantástico e inverossímil.

Não é pròpriamente de um programa que se cogita mas simplesmente de algumas noções que possam despertar reais qualidades de observação e de estudos que se coadunem ao nível dos alunos e aos gostos que êles venham a manifestar por essa iniciação séria.

Comentados, ligeiramente, os itens que compõem o esquema a ser realizado na experimentação educacional em tela, sugerimos o seguinte

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

PARA A 1.ª SÉRIE GINASIAL EXPERIMENTAL

I — Estrutura aritmético-algébrica

1) Números inteiros; operações fundamentais; divisibilidade; números primos. Números fracionários. Potenciação. Radiciação (como operação inversa). Raiz quadrada.
2) Números relativos; operações fundamentais. Expressões algébricas *inteiras;* operações. Equações racionais e *inteiras* do 1.º grau a uma incógnita. Problemas simples do 1.º grau.

II — Estrutura geométrica intuitiva

1) Sistemas de unidades de medir. Unidades e medidas legais.
2) Estudo intuitivo das principais propriedades das figuras geométricas planas e espaciais.

III — Complementação

1) Trabalhos práticos (iniciação do Laboratório de Matemática).
2) Noções preliminares de astronomia: Observação de um movimento diurno. Orientação. Plano meridional local. Identificação das constelações locais. Céu local (para São Paulo, neste instante, colaboraria enormemente o *Planetarium* do Ibirapuera).

   Fases da lua; horários de visibilidade local. Identificação dos planêtas visíveis.

Uma última nota dêste trabalho: não devemos prejulgar como "muita matéria" o que está sendo sugerido, pois mesmo não cotejando com o atual programa de Matemática da 1.ª Série (que é um dos "mais 10" que sobrecarrega o aluno) o que se está propondo está perfeitamente *enquadrado com o conjunto das disciplinas* do currículo médio já conhecido (pràticamente 6) para a 1.ª série experimental, bem como com a tão almejada *continuidade para o estudo da Matemática em 4 anos* (primeiramente), cuja distribuição pelos programas presentes, que apresentam tanta descontinuidade (basta atentar para a "intoxicação" algébrica da 2.ª série; para a "ausência" de álgebra da 3.ª; a "trinomite" na 4.ª, etc...), tem sido unânimemente combatida pelos professôres em inúmeras mesas-redondas de estudos (Encontro de Mestres) e em dois memoráveis Congressos de Ensino da Matemática (Salvador — 1955 e Pôrto Alegre — 1957).

Acresce ainda que não cogitamos de outras partes importantes intimamente ligadas aos problemas já tratados e que vêm reforçar o nosso ponto de vista. E' o caso da aferição do *aproveitamento* do aluno e do *regime de exames* (caso existam!) que controla a promoção. Mas isso será assunto para um outro artigo.

35.º Aniversário da INSTITUIÇÃO UNIVERSITÁRIA "MOURA LACERDA"

Notável educandário que em quase meio século vem desenvolvendo trabalho fecundo em favor da cultura e da grandeza intelectual da mocidade ribeirãopretana.

Reportagem de HONÓRIO A. DA SILVA FIGUEIREDO, *especialmente para* "ATUALIDADES PEDAGÓGICAS".

O educandário pioneiro, iniciou-se com a criação, a 15 de junho de 1923, do primeiro Curso Comercial da cidade, curso que representaria, com o correr dos anos, a verdadeira célula-mater de outras fecundas iniciativas no setor do ensino da cidade de Ribeirão Prêto: a FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS DE RIBEIRÃO PRÊTO, o COLÉGIO "MOURA LACERDA", a ESCOLA NORMAL LIVRE DE RIBEIRÃO PRÊTO e a ESCOLA DE DACTILOGRAFIA VELOZ.

Mantendo cursos de nível primário, secundário, técnico-profissional e superior, a Instituição proporciona educação completa, desde o início da idade escolar. Não sòmente a instrução, contudo, é o objetivo principal do educandário, mas também a formação da personalidade moral e cívica representa preocupação constante da tradicional casa de ensino localizada no coração de um dos principais e mais progressistas centros produtores de café no país.

Instalações

Ampliando recentemente suas magníficas instalações, acaba a direção da instituição de incorporar ao seu vasto patrimônio um amplo e luxuoso edifício de seis pavimentos, dotado de todos os requisitos pedagógicos para o desenvolvimento de amplo, moderno e eficiente plano de educação integral.

Salas amplas, instalações confortáveis, amplo salão de conferências e cinema educativo, colocam a Instituição Universitária "Moura Lacerda" em padrão de igualdade com os melhores institutos educacionais americanos e europeus, destacando-se dentre os estabelecimentos congêneres do país. As várias fotografias que ilustram esta reportagem são atestado eloqüente do que acima afirmamos: salas de aula amplas, bem iluminadas e arejadas, de acôrdo com as mais modernas exigências pedagógicas; laboratórios de física e química completos, que oferecem condições para trabalhos práticos excepcionais, capazes de despertar nos alunos real interêsse pelas disciplinas; salas-ambiente de História Natural e Geografia, suficientemente equipadas para que se consiga alto rendimento das aulas ministradas; instalações administrativas perfeitas etc., eis uma síntese da Instituição Universitária "Moura Lacerda" no seu 35.º aniversário.

Professôres

Fazem parte do corpo docente da Instituição nomes dos mais abalizados e competentes professôres do magistério local, destacando-se elementos como Sebastião Palma, Hermínia Gugliano, Zilah Gugliano, Dr. Paulo Barra, e outros de não menor projeção intelectual e social como os professôres Benedito Maciel Arantes, Dr. Domingos J. B. Spinelli, João de Oliveira, Joaquim Vitor de Oliveira, Pascoal Lucisano, Macário An-

UNIVERSIDADE MACKENZIE

FACULDADE DE FILOSOFIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Boletim -3-

1959

PERSPECTIVA DE RELEVO

(Estudo sôbre um trabalho do Dr. Erwin Kruppa)

OSVALDO SANGIORGI

PERSPECTEVA DE RELÊVO.

Comentários gerais sôbre figuras em relêvo:-

A perspectiva desejada de um objeto, pode ser tomada como um traço ou uma corda, através de uma mudança extraordinária de perspectiva. A projeção central é por isso um caso particular do problema, i. e; derivar um objeto de uma perspectiva colinear.

Entende-se, geralmente, por mudança de um conjunto de variações $\Sigma(p)$, formado de certos elementos (p), geométricos, numa variação $\Sigma_1(p_1)$ de elementos geométricos (p_1), a possibilidade de que a própria projeção (conjunto) Σ_1 de uma figura Σ do espaço venha a ser também um corpo do espaço. Entre os elementos de Σ_1 e os de Σ há um acréscimo (em geral unilateral - uma adição ou ordenação) permitindo assim a possibilidade de representação. No sentido desta explicação devem-se considerar por exemplo, modelos de corpos Σ também como projeção de Σ_1, apenas com modificações parecidas, (na maioria são diminuições) nas ordenações inversas.

NOTA1:- Se por exemplo, a variação de um ponto for representada por um perfil (esboço), então para os seus elementos (p) pontos do espaço teremos em correspondência os elementos (p_1) das figuras (p' e p").

De maneira mais geral, pode-se representar um corpo no espaço, submetendo-o a uma colineação perspectiva. Sob certas restrições de que logo trataremos, um quadro geométrico perspectivo colinear, serve também para enganar um observador que aprecia o objeto em vista, bem como o esboço geral uniocularmente (unilateral ou torto) do centro de colineação ou ponto de vista. É por isto que a modificação dos corpos da perspectiva colinear veio a ser a expressão da arte plástica. De acordo com o sentido artístico e às possibilidades práticas a execução do relevo é feita onde a articulação natural do objeto exige maior profundidade e o oposto para ela não existe.

Os meios usados para êstes quadros nas artes plásticas é por isso mesmo a plástica de relêvo, a decoração de cenários e a jardinagem mais elevada. A modificação através da perspectiva colinear de um objeto denomina-se de perspectiva de relêvo.

NOTA 2:- A respeito da história e literatura da perspectiva em relêvo consulte-se: Chr. Wiener, Lehrbuch d. Darst. Geometrie, Leipzig (1884), I. S. 47ff; ferner Enz. d. Math. Wissench. , Art. III A B 6, Darst. Geometrie (E. Papperitz) Nr. 34 Für Theater perspektive sehe man: L. Burmester, Grundlehren der Theaterperspektive, Allgem. Bauzeitung 1884, S. 39,44,53.

Se um objeto Σ em perspectiva colinear for modificado em quadro de relêvo para Σ^r encontraremos sempre 2 pontos correspondentes de Σ e Σ^r que vai do ponto de vista, pelo centro de colineação (olho) O, 2 retas ou planos cortar-se-ão no plano de colineação - plano de intersecção π.

O plano impróprio Ω do espaço objeto correspondente a π que é o plano parálelo e correlato no espaço da projeção, Ω^r será o plano de fuga; se considerarmos Ω como espaço de projeção então lhe corresponderá uma superficie paralela e que é correspondente do espaço objeto a π - plano de desaparecimento π_v.

Se a modificação em perspectiva colinear do objeto deve suscitar no observador impressão semelhante a do próprio objeto ou corpo, então devem ser seguidas certas ordens na demarcação de sua reprodução.

O plano de intersecção π escolhemos vertical. Com isto conseguiremos que os cantos dos objetos (principalmente verticais) correspondam a pontos idênticos em relêvo. Como nosso olhar habitual é horizontal, denominemos o raio visual normal a π - raio principal. Para evitar torções (desfigurações) profundas, deve-se como em projeção centrais, cuidar de que o objeto a ser retratado esteja dentro do cone de visão, cujo ângulo com o raio principal não deve ultrapassar de 30°. Para se obter a impressão intencionada ainda é necessário que o quadro de relêvo apresente a mesma estruturação do fundo que o objeto, ou em têrmos geométricos: "<u>as projeções</u> (as linhas pontilhadas) <u>que vão ao ponto de vista devem ser paralelas</u>". Esta condição é satisfeita quando se considera o plano intersecção π entre o olho $\underline{O}$ e o plano de fuga Ω^r. Olhando-se em sentido oposto a $\overrightarrow{O\pi}$, teremos o plano π_v (princípio 4) e êste estará além de $\underline{O}$ à uma distância $\ell = \Omega^r\pi$. À uma reta qualquer no sentido comum, A, corresponde o segmento A^r (fig. 1) que passa pelo ponto de intersecção $a = [A\pi]$ e é paralelo ao raio visual passante pelo ponto de fuga, no caso ponto de desaparecimento $a_v = [A\pi_v]$.

A^r corta Ω^r no ponto de fuga a_u^r, onde a reta paralela à A, toca o plano de fuga Ω^r; ($a\ a_v\ O\ a_u^r$) é um paralelogramo. Observando agora a correlação entre os pontos A e A^r, verificamos que a 2ª parte do espaço atrás de π (que não contém O), ou a parte paralela entre π e Ω^r corresponde ao espaço de relêvo. Se o objeto a ser reproduzido se encontrar nesta 2ª parte, formar-se-á o relêvo entre π e Ω^r, com menores dimensões de profundidade. Denomina-se a extensão (espaço) $\ell = [\pi\Omega^r]$ analogicamente de profundidade de relêvo. O raio principal corta π, Ω^r e π_v em pontos que denominar-se-ão sucessivamente de: ponto principal h, ponto de fuga principal h_u^r, ponto de desaparecimento principal h_v. O plano do horizonte ou horizontal corta π, Ω^r e π_v em horizontais, dando origem aos seguintes planos: plano de intersecção do horizonte H, plano horizontal de fuga H_u^r, plano horizontal de desaparecimento H_v.

Destas explicações de Ω^r e π_v segue-se indubitavelmente os seguintes princípios:

<u>1º Princípio</u>: As figuras em relêvo de retas paralelas à direção a_u cortam-se em Ω^r no ponto de fuga a_u^r destas retas.

<u>2º Princípio</u>: As figuras em relêvo de superfícies paralelas ao plano de posição $\mathcal{E}_u$, cortam-se em Ω^r na reta de fuga $\mathcal{E}_u^r$ destas superfícies.

<u>3º Princípio</u>: Retas paralelas G^r (superfícies $\mathcal{E}^r$) do espaço de relê-

vo são as figuras ou relevos das retas G (superfícies E_Q) que se cortam em π_v no ponto de desaparecimento g_v (cuja intersecção ou linha de desaparecimento é F_v).

<u>[illegible]</u>.

Considere-se o plano intermediário como sendo o plano de perfil, propomo-nos o seguinte problema: derivar o perfil (traçar) de relêvo diretamente do objeto. Se, (fig.1) $a_u^{r''}$ fôr o perfil de a_u^r então (O a_u^r $a_u^{r''}$ h_v) será um paralelogramo, cujo lado $[a_u^{r''} h_v]$ terá a direção a_u. Obter-se-á assim o perfil $a_u^{r''}$ de relêvo de um ponto impróprio a_u mais rapidamente do que se projetassemos imediatamente a_u de h_v sôbre π. Esta regra também é válida para qualquer ponto, pois $A^{r''} = [a\ a_u^{r''}]$ é simultaneamente o perfil de A^r e do esboço geral A de h_v. Como porém cada ponto pode ser considerado como intersecção de 2 retas, vale de um modo geral o princípio de J. de la Gournerie:

<u>NOTA 1</u>:- Tratado de perspectiva linear, Paris 1859, pag. 250, erradamente atribuído à A. Morstad por Chr. Wiener.

<u>1º Princípio</u>: O perfil de relêvo sôbre o plano de intersecção é ao mesmo tempo esbôço geral do objeto para o ponto de desaparecimento principal bem como para o olho. Este é um caso particular do que se segue.

<u>NOTA 2</u>:- J. Schlesinger, a geometria representativa no sentido da geometria mais recente, Viena 1870, pag. 259.

<u>2º Princípio</u>: Se um objeto N em um ponto qualquer c e seu relêvo N^r do quadro de relêvo $\underline{c}^r$ fôr projetado sôbre o plano de intersecção π, os 2 traços serão idênticos (coincidirem).

De fato, pois se $(p\ p^r)$ forem pontos quaisquer, $(c\ c^r)$ um par diferente de pontos correspondentes, teremos que $(c\ p)$ e $(c^r\ p^r)$ serão retas ou par de retas correspondentes. Estas se cortarão por isso no plano de colineação π (plano intersecção) e com isto o esbôço geral de p proveniente de c sôbre π é efetivamente idêntico ao de p^r proveniente de c^r.

Escolhendo como ponto c o ponto de desaparecimento geral (ponto de fuga geral) h_v e com isto escolhemos como ponto c^r o ponto impróprio de h_u do raio principal, obtem-se novamente o princípio 1.

O 2º princípio é um caso particular do:

<u>3º Princípio:</u> Se o objeto K fôr projetado de um ponto qualquer <u>c</u> e seu relêvo K^r de um ponto do quadro de relêvo, $\underline{c}^r$, sôbre um plano qualquer, então serão ambos, de um modo geral, os traçados de uma perspectiva colinear, tendo $[\pi\,\varphi]$ por eixo e $[o\ c\,.\,\varphi]$ por centro.

Com efeito, os feixes luminosos que K projeta de <u>c</u> e K^r de $\underline{c}^r$, têm como feixes correspondentes a ambos, os espaços de perspectiva colinear e posição perspectiva em relação ao plano de intersecção π. Se, pois, φ diferir do π ($[\varphi\, c] \neq 0$, $[\varphi\, c^r] \neq 0$), formar-se-ão do φ 2 campos colineares nos quais cada ponto de $[\pi\,\varphi]$ se corresponderá a si mesmo; como além disso nos 2 feixes, cada superfície, devido ao raio visual $[o\ c] = [o\ c^r]$, se corresponde a si mesmo, um raio que corresponde a φ em φ é a secante que passa por $[o\ c\,.\,\varphi]$. Assim, prova-se o que afirmamos anteriormente.

Para obtenção prática (desenho) do relêvo de um corpo dado, deve-se considerar o seguinte caso particular do 3º princípio. Acrescentamos sob a superfície horizontal (fig. 1) uma outra superfície horizontal T que denominamos superfície fundamental. Suas secantes (intersecções) com π, Ω^r e π_v sejam respectivamente G, G_u^r e G_v.

Se escolhermos no 3º princípio, a superfície T como φ e o ponto impróprio u = [redacted] T como <u>c</u>, segue portanto que $u = u^r$.

<u>4º Princípio:</u> O traçado normal K' do corpo K sôbre a superfície fundamental T é perspectivamente colinear ao traçado normal $K^{r\prime}$ do seu relêvo com $O_1 = [O \mid T]$ como centro, G como eixo e G_v, G_u^r como contraeixo, (L. Kl: L. Lorstadt - Sôbre a perspectiva do relêvo (perspectiva no espaço) principalmente de esferas. Z. Math. Phys. 1? (1907) S. [illegible] 326-339). Êste princípio pode-se facilmente estabelecer uma regra simples para a obtenção prática (desenho) do esbôço do corpo

[illegible] relêvo sôbre a superfície fundamental T. Como o 1º princípio já constitue uma regra para a obtenção do perfil do quadro em relêvo sôbre π, é evidente que tomemos π como plano para desenho e portanto [illegible] o esbôço e mensuração, no redor de G até que coincida com π. Estabelecemos que o esbôço de um ponto p do espaço, antes de girar, chamado p_1, denominar-se-á depois p'. Fazendo girar o traço (traçado) de K_1^r do relêvo ao redor do G, até coincidir com π, será a sua nova posição $K^{r'}$, em relação ao traço (traçado) K_1 do corpo em perspectiva; pois de acordo com o 4º princípio G é o eixo de perspectividade entre K_1 e K_1^r e no movimento G permanece fixo. O centro de perspectividade 0° entre K_1 e $K^{r'}$ resulta de uma simples reflexão sôbre o desenho (fig. 1). O ponto impróprio h_u do raio principal têm simultaneamente os significados: h_{u1}, h_v^r, h_{v1}^r. Pelo movimento giratório h_{v1}^r consegue atingir o ponto impróprio $h_v^{r'}$ da perpendicular do espaço; de mais a mais o traçado geral h_{u1}^r do ponto de fuga principal que está a uma altura t acima da superfície fundamental, vem a ter à perpendicular através do ponto principal h a $h_u^{r'}$ se fizermos descer a superfície mediante dianteira T.

O centro 0°, cujos raios ligam os pontos correspondentes K_1 e $K^{r'}$ dando a secante os dois raios $\left[h_{u1}\ h_u^{r'}\right]$ e $\left[h_{v1}\ h_v^{r'}\right]$. Assim, ficará 0° sôbre a perpendicular de h_v numa distância t acima ou abaixo de T conforme o movimento giratório. O resultado desta observação é o princípio de R. Staudigl (Nota 1 - Fundamentos de perspectividade de relêvo, Viena (1868) pag. 69).

5º Princípio: Para o plano fundamental T como plano de projeção, o esbôço ou traçado geral do objeto, visto do olho 0°, que está situado na perpendicular que passa pelo ponto de desaparecimento principal h_v e que dista de T só pela profundidade t, será o traçado $K^{r'}$ do relêvo sôbre π. Escolhendo-se de preferência T com profundidade t abaixo do horizonte, além disso, fazendo-se girar T até π de modo que (olhando-se do ponto 0) a 2ª parte do plano π venha a descer, cairá 0° no ponto de

desaparecimento h_v e dos princípios 5º e 1º resultará:
(NOTA - J. Schlesinger, obra já citada, pag. [illegible], 261)

6º Princípio: Se um objeto K fôr representado segundo o seu esboço, obtendo-se o [illegible] e esbôço plano em quadro em relêvo de um [illegible] por 1 (central) tomando-se como ponto de desaparecimento principal h_v o olho (ponto de vista) e o plano de intersecção π como superfície da figura, ainda toma-se uma superfície abaixo do horizonte com uma profundidade t como (superfície) fundamental. O 6º Princípio também admite o corolário:

7º Princípio: O esbôço geral e traçado central de um objeto K podem também ser considerados sempre como parte do traçado normal da figura em relêvo K. Precisa-se considerar sòmente o plano do quadro como plano de intersecção, o olho como ponto de desaparecimento principal e a distância da linha fundamental do horizonte como profundidade de relêvo.

Se um objeto K fôr retratado de acôrdo com os princípios 1 e 5, i. é, por meio de perfil e traçado ($K^{r''}$ $K^{r'}$) de seu relêvo K^r, resultará um sistema duplo (universal), que é portanto mais comum que a representação por esbôço central. O par de figuras ($p^{r'}$ $p^{r''}$) de um ponto p aparece da seguinte maneira: projeta-se p de um ponto T sôbre T até p_1 e de h_v sôbre π até $p^{r''}$; agora os dois pontos ($p^{r''}$ p_1) de 0° até π; neste último lance $p^{r''}$ permanecerá imutável e p_1 confundir-se-á com $p^{r'}$.

Como caso particular da perspectiva de relêvo, consideramos o caso de um centro impróprio O (fig. 2). Em vez da colineação em perspectiva terá lugar uma afinidade perspectiva, poder-se-á denominar a figura como um relêvo em paralelo se a submetermos às seguintes condições já mencionadas, as quais estão intimamente ligadas com o conceito "RELÊVO".

Em primeiro lugar, devido à (estética) exigência artística, devem corresponder, a estruturação de profundidade de relêvo com a do objeto; i. é, as pontos semelhantes devem ser paralelos nos raios de afinidade. A característica de afinidade, i. é, a relação de distância $C = \overrightarrow{\pi a^r} : \overrightarrow{\pi a}$ dos pontos relativos a, a^r de π deve ser positiva. Além disso, deve ser $C < 1$, se o relevamento da profundidade de relêvo fôr menor que o do como (NOTA 1 - o relêvo (a) paralelo só poderá ser contemplado corretamente, se fôr apreciado de considerável distância e de um ângulo com a direção dos raios visuais). Por isso, apresentará, visto de um prisma ou plano de observação (configurações) desagradáveis e anti-estéticas ao relêvo central que por ser observado de um ponto diferente do olho, traz estes inconvenientes.

Consideremos o plano de afinidade π (vertical) como plano de perfil e o plano correspondente (horizontal) T como plano de esboco, obteremos facilmente por meio de superposição o perfil e traçado geral do relêvo em paralelo. Como os raios de afinidade $[a\ a^{r}]$ são paralelos e a relação de distância $\overrightarrow{\pi a''}:\overrightarrow{\pi a}$ para todos os pares dos devidos pontos a, a" têm o mesmo valor, serão todas as retas $[a,\ a^{r''}]$ paralelas. O perfil $K^{r''}$ do relêvo paralelo é assim idêntico ao traçado lateral do objeto K de um olho situado no ponto impróprio O_2 (NOTA 2 - isto também poderia ser concluido da parte anexa de afinidade com o principio 1). Por isso deduz-se facilmente (fig. 2) que as linhas de ligação $[a_1\ a^{r'}]$ sejam paralelas, de modo que se obterá de uma maneira simples o esboço geral do objeto K_1 de um ponto impróprio O_1 sôbre π. Como consequência teremos o:

2 Principio: Tendo-se π e T como planos de perfil para o traçado geral, êles serão respectivamente, o perfil K^{r} do relêvo paralelo do traçado lateral de um corpo K e o esboco geral K^{r} do traçado lateral de esboço de K. A cópia de um corpo K por meio do perfil e do traçado geral ($K^{r''}$ $K^{r'}$) de um relêvo paralelo, é assim novamente um sistema duplo ou seja um sistema com um par de figuras ($a^{r'}$ $a^{r''}$) de um ponto a do espaço e cujo resultado se obtém da seguinte maneira: projeta-se a de O_2 sôbre π até $a^{r''}$ e de π sôbre T até a_1. Projeta-se então os dois pontos (a_1 $a^{r''}$) de O_1 sôbre o plano de desenho π; veremos que $a^{r''}$ ficará imutável e a_1 coincidirá com $a^{r'}$.

[illegible] PARA [illegible] RELÊVO [illegible] PLANO [illegible]

Os dois principios: 1 e 2, contém as indicações necessárias para derivar de um corpo qualquer K e imediatamente o perfil e o traçado de seu relêvo ($K^{r'}$ $K^{r''}$). Afim de fixar a cópia de um corpo K por meio de um par de figuras ($K^{r'}$ $K^{r''}$) escolhe-se a linha fundamental (horizontal) $G = [\Gamma \pi]$, em se fixa sôbre uma normal à G, os pontos $h = h_u^{r''}$ e $h_u^{r'}$ como par de figuras do ponto infinitamente longinquo h_u do raio principal, finalmente ao redor destes pontos como centro, temos 2 circulos de distâncias iguais D_{hv} e D_{C^o} de h_v e de C^o. Com isto, determina-se a colineação central que dá o relêvo, pois, a distância $\overline{Ch_u^{r'}}$ é igual a profundidade do relêvo $\underline{t}$. $h_u^{r''}$ é ao mesmo tempo, o ponto principal $\underline{h}$ e a horizontal, através dêle nos dá o horizonte H, a horizontal por $h_u^{r'}$ é a primeira figura $\Omega^{r'}$ do plano propriamente chamado Ω. Estabelecemos que h_v acha-se diante do plano de desenho (plano de intersecção) π; deve-se então imaginar a rotação de T para π de tal modo que o plano $\Omega^{r'}$ esteja contido ou se acha antes da rotação, atraz de π. Se $\Omega^{r'}$ estiver como na figura 3, acima de G, o ponto mais profundo será (C^o) e D_{C^o} será o ponto de fuga giratório na rotação de T para π.

Da figura deduz-se a relação entre o esboço e o perfil (p' p") de um ponto p do espaço e seu par de figuras ($p^{r'}$ $p^{r''}$). Além disso, mostra ela a representação de um plano ε pelos vestigios do par de figuras $E = [\varepsilon \pi]$ e suas retas impróprias E_u. E coincide com E^r e $E^{r''}$, $E^{r'}$ cai sôbre a linha fundamental G. $E_u^{r''}$ é a linha de fuga do plano ε tendo h_v como olho e π como plano da figura, eis porque é paralelo a $\parallel$ E; $E_u^{r'}$ cairá sôbre $\Omega^{r'}$. Como desta maneira, os pares de figuras de 2 retas de ε são conhecidas, pode-se sem hesitação desenhar o par de figuras ($q^{r'}$ $q^{r''}$) dos pontos q sôbre o plano ε. Em seguida deverá a cópia $K \rightarrow (K^{r'}$ $K^{r''})$ ser demonstrada em 2 exemplos.

1º Problema:

Representar o relêvo de um cone, com eixo vertical, em projeção e esbôço sendo dados, o vértice S, a altura h e o raio da base r.

(Na fig. 4, como no texto subsequente omitir-se-á a demarcação de r).

Deve-se sempre lembrar, que a ... simulação ... consta de se

obter o es[illegible] central do cone, de h_v e de $O°$, tendo π co[illegible] plano de [illegible]
[illegible]jeção e como plano fundamental P.

[illegible] levantar [illegible] a altura h, [illegible] M^n de vértice [illegible]
levantamos na perpendicular através de M^n a medida h = [illegible]. A horizontal através de m^n é [illegible] projeção $d = f''$ da base. $[m^n\ h''_u]$ corta a linha de ordem $[B'\ B'']$ no 2º ponto m'', centro da base m; m' coincidirá com B'. Será então: $M' = G$, $M''_u = Mo$, $L'_u = \Omega'$. Desenha-se em seguida a 2ª figura do diametro 1 2 paralela a G, que têm o circulo de base B o comprimento dado 2r, sôbre êste 1'' 2'' como diametro da figura D°' do circulo de base voltado em direção ao plano π. O ponto de fuga [illegible]tório para esta volta é o ponto mais alto ou mais profundo (h_v) do circulo de distância D_{h_v}. Obtem-se agora a 2ª figura a'' b'' para o diametro nor[illegible]l da base do π, projetando-se o diametro vertical a°'' b°'' de D°'' (de h_v) sôbre $[m''\ h''_u]$ até a'' b''. a'' b'' é um diametro da 2ª figura de B, pois as tangentes em a'' e b'' são paralelas. Assim, também se conhece o centro O'' de D'' e o conjugado de a'' b'', diametro paralelo à G, c'' d'' resultará por meio da colineação entre B°'' e B'' tendo [1''2''] como eixo e (h_v) como centro.

Baixando-se uma reta de a'' b'' sôbre $[m'\ h'_u]$ e de c'' d'' sôbre $[G'|G]$ consegue-se o diametro conjugado de B'.

2º Problema:

Representar o relêvo de uma esfera em perfil e esboço. (Figura 5, os pontos r são novamente omitidos).

Sejam dados o par de figuras (m' m'') do centro [illegible] e a 2ª figura paralela ao plano π do grande circulo $\bar{I}$ da esfera. [illegible] circulo de distância h_v corta II no ponto de fuga d, [illegible] um feixe de [illegible] horizontais paralelas, que se inclinam para π [illegible] de 45°. Obtem-se assim a 2ª figura r'' q'' do diametro normal da esfera em π projetando-se o [illegible] horizontal $\bar{r}\ \bar{q}$ de $\bar{I}$ sôbre d até $[m''\ h''_u]$; [illegible] retas de $[m'\ h'_u]$ obtem-se r' q'. Como os planos [illegible] em relêvo R^p [illegible] são paralelos [illegible] π [illegible] e [illegible], o centro n'' de r'' q'' será [illegible], o centro n' de r' q' o esbôço [illegible] de [illegible], [illegible]-

-se naturalmente que n'' q'' e consequentemente n' q' sejam [illegible]. K^r, 9

será um elipsoide, um paraboloide elíptico ou hiperboloide bivalvo conforme a esfera não cortar realmente, tocar (tangente) ou cortar de fato o plano de desaparecimento Π_v.

No 1º e 3º caso é favorável possuir-se o eixo triplo de K^r. Considerando o par de figuras (n'' n') como esboço geral de (h_v) e esboço fundamental de (0°) de um ponto n do espaço, então será êste o polo de Π_v relativo à esfera K. Ao eixo triplo de K^r correspondem no sistema da esfera K aquelas cordas triplas conjugadas atravez de n cujos pontos de intersecção (x,y,z) c. Π_v são projetadas por meio de raios triplos retângulares do centro de colineação o. (x,y,z) é o triângulo polar comum do sistema polar do circulo cortado $K=[\Pi_v]$ e do sistema anti-polar do circulo de distância $T=(h_v,t)$ do centro o relativo a Π_v. Para se verificar qual dos três casos possiveis se apresenta, na figura 5, [illegible] o diâmetro esférico normal de Π - n q - do plano horizontal [illegible] seu ponto de projeção 3 para o plano de figura. Seja S a projeção desse plano horizontal, s_v o ponto de desaparecimento de [pq]; s_v'' será então [illegible] o ponto de [n'' q'']. Se projetarmos, portanto, s_v'', [illegible], q'' [illegible] ponto d sôbre [illegible], teremos: $\overline{s_v'' \ldots} = m$ como distância do plano Π_v do centro da esfera n, $\overline{n^0 q^0} = r$ como raio da esfera. Na figura 5 temos, $r < m$, [illegible] K^r é um elipsoide.

[illegible] $K[\Pi_v]$ é portanto nulo, (sem pontos), [illegible] que passam por seu cone mínimo são os tais pontos do diâmetro [n q] que distam do Π_v o seguinte:

$$t = \sqrt{m^2 - r^2}$$

O verdadeiro substituto K_r de K é o circulo de distância destes pontos do cone relativo a Π_v. Na figura 5 as projeções normais $K_r^n = (s,t)$ e $T^n = (s_v'',t)$ foram desenhadas sôbre Π. O traçado normal do triângulo (x,y,z) é [illegible] o triângulo polar comum das anti-polaridades de K_r^n e T^n, na verdade é (x^n y^n), o par comum da involução de pontos anticonjugados, produzidos pelos 2 circulos em [h_u'' [illegible]] e z^n o ponto impróprio de normal em $[b''_{u}\ n'']$. Na 2ª figura, vemos pois que as figuras de [illegible] A" e B" tem direção $[b''_{u}\ n'']$, ao passo que o 3º C", é normal. Na 1ª projeção [illegible] a direção do A' e B' obtem-se baixando perpendiculares [illegible] n'' e [illegible] sôbre [illegible] e unindo os pontos obtidos com [illegible] C' é [illegible] os [illegible] pontos [illegible] (a)', [illegible] dos planos. Como o plano tangencial do elipsóide em p é [illegible] π, $[\ \|\ ]$ é [illegible] da 1ª figura do corte principal [illegible] contrato p' e do par de diâmetros conjugados [illegible] os pontos [illegible] a' e b' bem como a" e b" que [illegible] perpendiculares que a eles se [illegible]. Os planos paralelos a π [illegible] o elipsóide em círculos. (cc)' é o diâmetro do corte do [illegible] paralelo a π. Este círculo corta a figura principal [illegible] (r r), cuja 1ª projeção é o diâmetro da elipse (a'n'[illegible]) [illegible] a G. Com o auxílio de retas perpendiculares (para [illegible] a $[\ ]$, acha-se r" e depois c" fazendo-se girar r" de um [illegible] n".

Na 2ª projeção o aparente contorno do elipsóide é a elipse com o eixo [illegible] c"c" e os fócos p",q" (por causa dos cortes circulares paralelos a π). Na 1ª projeção o contorno aparente é determinado pelo diâmetro p',q' e pelas tangentes paralelas a G e pelo ponto p'. Por [illegible] as explicações não é difícil tratar semelhantemente o caso em que K^r se torna um hiperbolóide bivalvo.

A figura 8 nos mostra finalmente o caso, na qual a esfera K (atinge [illegible]) o plano de desaparecimento π_{v}, com isto K^r se torna um [illegible] elíptico.

[illegible] agora, como já foi feito na 3ª figura, esboço o perfil [illegible] do mesmo objeto, por (p' p") e esboce o perfil [illegible] por (p'' p"). Seja dado o par de figuras (p' p") [illegible]. Com isto determina-se [illegible], pois [illegible] π. [illegible] do corte $[\ ]$ [illegible] 1 a π [illegible]

π é o plano lateral para a S- projeção normal. [illegible], tem-se [illegible] considerar $[\,{}^{\prime\prime}_{u}\ m^{r\prime\prime}]$ como plano de projeção A_3, e todas as projeções [illegible] mais accessórias. ($m^{r}m'$) e ($m''m'''$) [illegible] desenhadas. A [illegible] h_v [illegible] paralela a A_3, constitue a [illegible] π_v''' [illegible] reconhecimento, o [illegible] figura K''' da esfera (simultaneamente o circulo [illegible] visual voltado $K=[\pi_3]$) é o circulo tangente π_v''' com o centro [illegible]'''; finalmente acha-se o''' em $[h_u^{r''}|\pi_v''']$ conforme $h_v'''\,o''' = t.K$ vem coincidir com o corte principal do parabolóide em π por causa da colineação central. Por isso, é possivel que o ponto s pode ser determinado por K atravez das projeções s''',s'',s' - no qual corresponde o vértice s^r do parabolóide (verificar na fig. 6). Denominando u o ponto de contacto da esfera com π_v será u^r o vértice impróprio do parabolóide K^r; $u^{r''}$ é o ponto impróprio de K_{23} e $u^{r'}$ o ponto impróprio do $[m^{r'}\ h_u^{r'}]$. Os (2) circulos esféricos que atravessam os cortes principais do K^r, são K e também o pequeno circulo normal K_1, com o diametro us. Para a cópia (imagem) dêstes cortes principais representa-se as tangentes S e S_1 nestes circulos nos pontos S e além disso sempre um dos pontos dos circulos. Assim, obteve-se para K^r na figura 6 o ponto s^r, tendo-se o plano tangencial paralelo a π; para K_1^r escolhe-se um ponto x [illegible] (como x^{IV} no circulo K_1 dobrado para K_1^{IV}).

Também os contornos aparentes de U_1 e U_2 de K^r podem ser construidos facilmente nas 2 últimas figuras 5 e 6. De acordo com os principios 1 e 5, é pois U_1 o espaço central do equador esférico para o olho O^c e U_2 o contorno central da esfera do h_v.

Obtem-se por isso, na figura 6 o vértice t do U_2, cortando-se a tangente de h_v''' e K''' com K_{23}; $s^{r''}$ é o fôco de U_2.

05. I. 3. 1271

MATEMÁTICA CLÁSSICA OU MATEMÁTICA MODERNA, NA ELABORAÇÃO DOS PROGRAMAS DO ENSINO SECUNDÁRIO?

Ensaio apresentado pelo Prof. Osvaldo Sangiorgi, de São Paulo, 1959

É esta a pergunta que tem dominado, atualmente, os estudiosos da Matemática do ensino secundário. Quer-nos parecer que, sendo a finalidade geral da instrução função diretriz de cada época, não se pode dizer na verdade a última palavra quanto à investigação dos melhores princípios que devem nortear o ensino da Matemática. Não é outra, aliás, a afirmação dos ilustres membros da "Comission Internationale pour l' étude et l'amélioration de l'enseignament des mathématiques" feita no livro "L'enseignement des mathematiques" editado na Suíça, em dezembro de 1956. Fazem parte dessa Comissão professôres que, em campos diversos — psicológico, metodológico e prático procuram dar uma contribuição ao aprimoramento do ensino da Matemática. Assim é que desde 1950, em reuniões internacionais (Inglaterra, Bélgica, Suíça, França, Luxemburgo, Alemanha, Holanda, Itália e Áustria), os matemáticos Jean Dieudonne, André Lichnerowics. Gustave Choquet, o psicólogo Jean Piaget, o lógico-matemático Ewart Beth e o pedagogo Caleb Gattegno, secretário-geral, têm realizado a grande façanha de estudar, correlacionando os diversos setores em que são mestres consagrados, as normas capazes de divulgarem aos estudantes as belezas eternas e inalteráveis da Matemática.

Podemos, de um modo geral, dizer que a principal diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna reside no fato de a primeira ter por base os **elementos simples**, tais como os números inteiros, o ponto, a reta, etc.... e a segunda um **sistema operatório**, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki), sôbre as quais se assenta o edifício matemático, destacando-se entre elas as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. Cremos que as teorias cada vez mais complexas, a que é conduzida a investigação moderna, revelam-se pouco susceptíveis de virem ser já incorporadas no ensino secundário. É evidente, e os fatos nos têm provado, que a tendência é caminhar no sentido de satisfazer o anseio das novas gerações que estão vivendo num mundo ultra-moderno, onde as ciências físico-matemáticas recebem continuadamente novos e substanciosos impulsos. Mas — e êste é o nosso pensamento — essa modelação aos tempos novos deve ser gradativa, a fim de serem evitados os malefícios decorrentes de transformações radicais, como exemplificaremos mais adiante para o caso particular de nossos programas de ensino.

Como a matemática clássica tem sua essência na pureza dos elementos com que opera, quer em aritmética, álgebra ou geometria (aqui os entes fundamentas ainda guardam para a sua abstração uma certa divindade, oriunda dos gregos), e, tendo já sido demonstrado (Jean Piaget) que as etapas fundamentais na aprendizagem dos conceitos matemáticos correspondem precisamente aos três tipos de estruturas há pouco descritos, seguem-se que a **elaboração de novos programas deve necessàriamente trazer traços que caracterizem, tanto quanto possível, êstes dois estados da matemática-ensino, satisfazendo obrigatòriamente a um ensino lógico, e não perdendo nunca de vista o principal objetivo da escola secundária: eminentemente formativo.** (pelo menos até o presente momento)!

Não é demais repetir que o ensino médio brasileiro tem sido pletórico, ineficaz e bastante divorciado da realidade. Presentemente, então, com currículos sobrecarregados, programas extensos e inexequíveis dentro do horário correspondente, está o nosso curso secundário atual, apesar das maravilhas que acompanham o século e de alguns resultados proveitosos (convém lembrar que o curso secundário se destina a inteligências das mais diversas e não às innteligências brilhantes, que constituem exceções), um atabalhoado curso mal situado com relação às finalidades que lhe são pertinentes.

É evidente também que a melhora do índice de aproveitato, em Matemática, dos alunos do curso secundário não se cinge exclusivamente no retocar pura e simplesmente os programas existentes, mas reestruturar os métodos de ensinar em função de programas que cultivem espontâneamente o raciocínio do aluno fazendo-o participar ativamente do trabalho do professor. Êste por sua vez deve dispor de horário hábil para a perfeita exposição da matéria e para a direção de exercícios em cadernos de aproveitamento. Em abono do que afirmamos é conveniente lembrar que na maioria dos países civilizados se estuda diàriamente a respectiva língua pátria e Matemática.

Logo, necessitamos de programas que **permitam educar o aluno perante as novas conquistas da ciência (não confundir com enciclopedismo), oferecendo-lhe tão sòmente o número de fatos considerado imprescindível a sua formação.**

Como julgar em Matemática quais os fatos indispensáveis?

A nossa resposta: aquêles que permitem dotar o aluno de métodos de pensar em ciência.

Não importa, por exemplo, que o aprendizado da geometria se faça mediante proposições euclidianas ou estruturas topológicas. O que interessa, para ambos os casos, é criar para o aluno uma atitude própria — "sponte sua" — sempre que estiver diante de um aglomerado de fatos, como lhe é freqüentemente exigido. A êsse respeito disse Poincaré: "a ciência constrói-se com fatos como uma casa se constrói com materiais de construção, mas uma ciência não é uma coleção de fatos, do mesmo modo que uma casa não é um monte de materiais de construção".

Vamos esclarecer melhor o nosso pensamento, exemplificando-o pràticamente com questões do atual programa. Que resultados conseguiu obter em álgebra um aluno que cursou completamente a 2.ª série ginasial, se para êsse mesmo aluno apreender a álgebra da 4.ª série, que começa com equações do 2.° grau, é preciso retroceder (a prática nos tem revelado em todos êstes últimos anos), portanto, sair do programa, devido ao hiato apresentado na 3.ª série que não possui álgebra? Quer dizer que pelo programa atual da 2.ª série estamos em tôrno de uma estrutura algébrica, preconizada pela matemática moderna, e que em programas anteriores não se cogitava. Até aí seria um bem se tal programa lograsse familiarizar o aluno com as principais estruturas algébricas, levando-o a reconhecer propriedades comuns em domínios diversos(tais como as propriedades comuns a números inteiros e polinômios; decomposição em fatôres primos e fatoração algébrica, etc...), mostrando-lhe a **matemática elementar como um todo sem compartimentos estanques entre os seus diversos ramos.** Mas não é, infelizmente, o que está ocorrendo, pois, o excesso algébrico exigido numa só série e a má distribuição pelas séries seguintes não permitem que se alcance o objetivo desejado.

Qual o proveito do estudo da raiz cúbica do modo como é feito atualmente? Que resultados trouxe à formação do aluno senão o de permitir-lhe uma intoxicação de cálculos? E sempre na 2.ª série!

Preferível sim que lhe fôsse apresentado o problema sob a forma de decomposição em fatôres primos e teríamos um modo ameno de apresentar a extração da raiz de índice qualquer de um número fatorável, com o condão de aguçar o espírito do aluno para as generaliazções, bem como ressaltar uma das operações inversas da potenciação.

Qual a vantagem ao aluno do 2.º ciclo em saber o "Algoritmo de Pelatarius" (3.º científico atual) na teoria das equações algébricas? Achamos, siceramente, preferível não saber dizer nada a êsse respeito do que deixar de conhecer fatos genéricos que caracterizem a importância da teoria das equações algébricas. E o que dizer da **decoração** (que jamais deveria tomar parte no aprendizado da Matemática) feita presentemente pelos alunos sôbre o trinômio do 2.º grau, tão mal situado na 4.ª série ginasial? E assim por diante poderíamos mencionar fatos peculiares aos atuais programas que todos nós professôres sentimos e estamos no dever de divulgar, a fim de que em novas revisões (obrigatórias cada 4 anos) sejam atendidos os resultados hoje apontados.

Quanto à responsabilidade do professor neste estado de coisas, somos pela nossa culpa quando fazemos das aulas de Matemática uma sala típica de cálculos e de problemas complicados que espantam mesmo o aluno imbuído da melhor boa vontade. Mas quando, apesar dos programas, transmitimos aos alunos um encadeamento lógico de raciocínios capaz de tornar interessante uma questão árida (e elas bem que existem) ou concretizamos, tanto quanto possível, uma questão abstrata, então estaremos distribuindo aos alunos a mais bela ação de um racional: propiciar a ação formativa da Matemática.

Só depois de estabelecidos os programas — atendidos que forem os elementos que estamos discutindo — acompanhados de instruções que indiquem os princípios que presidirem a sua coordenação é que vêm as responsabilidades do professor, que lhes deve aplicar as regras da melhor didática para a execução dos mesmos. Ademais não deve o professor — que deve amar profundamente a cultura geral — esquecer que os princípios didáticos na aplicação de um programa levam muito em conta as responsabilidades dos alunos a seu cargo. Dessa forma não transformará o aluno numa máquina de resolver exercícios e nem num insípido repositório de teoremas.

luno senão o de permitir-lhe uma intoxicação de cálculos? E sempre na 2.ª série!

Preferível sim que lhe fôsse apresentado o problema sob a forma de decomposição em fatôres primos e teríamos um modo ameno de apresentar a extração da raiz de índice qualquer de um número fatorável, com o condão de aguçar o espírito do aluno para as generaliazções, bem como ressaltar uma das operações inversas da potenciação.

Qual a vantagem ao aluno do 2.º ciclo em saber o "Algoritmo de Pelatarius" (3.º científico atual) na teoria das equações algébricas? Achamos, siceramente, preferível não saber dizer nada a êsse respeito do que deixar de conhecer fatos genéricos que caracterizem a importância da teoria das equações algébricas. E o que dizer da **decoração** (que jamais deveria tomar parte no aprendizado da Matemática) feita presentemente pelos alunos sôbre o trinômio do 2.º grau, tão mal situado na 4.ª série ginasial? E assim por diante poderíamos mencionar fatos peculiares aos atuais programas que todos nós professôres sentimos e estamos no dever de divulgar, a fim de que em novas revisões (obrigatórias cada 4 anos) sejam atendidos os resultados hoje apontados.

Quanto à responsabilidade do professor neste estado de coisas, somos pela nossa culpa quando fazemos das aulas de Matemática uma sala típica de cálculos e de problemas complicados que espantam mesmo o aluno imbuído da melhor boa vontade. Mas quando, apesar dos programas, transmitimos aos alunos um encadeamento lógico de raciocínios capaz de tornar interessante uma questão árida (e elas bem que existem) ou concretizamos, tanto quanto possível, uma questão abstrata, então estaremos distribuindo aos alunos a mais bela ação de um racional: propiciar a ação formativa da Matemática.

Só depois de estabelecidos os programas — atendidos que forem os elementos que estamos discutindo — acompanhados de instruções que indiquem os princípios que presidirem a sua coordenação é que vêm as responsabilidades do professor, que lhes deve aplicar as regras da melhor didática para a execução dos mesmos. Ademais não deve o professor — que deve amar profundamente a cultura geral — esquecer que os princípios didáticos na aplicação de um programa levam muito em conta as responsabilidades dos alunos a seu cargo. Dessa forma não transformará o aluno numa máquina de resolver exercícios e nem num insípido repositório de teoremas.

Portanto, professor e programa (respeitado o comedimento que deve prevalecer no uso da Matemática clássica ou Matemética moderna) constituem as peças basilares para o aprimoramento de nosso ensino secundário. Para terminar a discussão que mantivemos com êsse binômio é oportuno lembrar o pensamento expedido por Henri Lebesgue reagindo contra o excesso e dificuldade dos programas dos liceus franceses de então (1940): "nenhum conhecimento é indispensável para que um indivíduo freqüente uma escola de engenharia ou faculdade; basta-lhe sòmente ter apreendido a trabalhar intelectualmente". Por nossa vez achamos que ensinar o aluno a trabalhar intelectualmente exigirá que os diversos assuntos de um bom programa sejam distribuídos pelas diversas séries do curso secundário tendo em vista:

a) que devem estabelecer um exato entrelaçamento das diversas teorias, passando-se de uma a outra, através de uma concatenação cuidadosa, pelos processos de dedução, generalização e analogia;
b) que tenham maior correlação, principalmente com os programas de Desenho e Física;
c) que sejam exequíveis integral e obrigatòriamente.

O número de aulas semanais em cada série deve ser tal que permita ao professor pôr em prática um ensino ativo e eficiente, fazendo com que os alunos participem da aula (método heurístico).

Continuamos partidários que os professôres de Matemática de todos os graus devem necessàriamente estar presentes nas revisões periódicas dos programas. Que além da ilustre Congregação do Colégio Pedro II (Rio de Janeiro), legalmente constituída para opinar sôbre programas, sejam também levados em conta as Congregações de outros estabelecimentos idôneos do Brasil, bem como os felizes e oportunos resultados do I Congresso do Ensino da Matemática, realizado em Salvador, Bahia (1955) que foi o primeiro marco do encontro de professôres nacionais com o fim específico de estudar os problemas sôbre o ensino da Matemática. Não é demais lembrar que êsse tem sido o processo empregado pela maioria dos países civilizados.

Visando cooperar construtivamente, e estimando que os esforços dispendidos pelos professôres de Matemática neste II Congresso do Ensino da Matemática que se realiza em Pôrto Alegre, Rio Grande do Sul, sejam levados efetivamente em conta pelos poderes competentes da República, apresentamos a título de sugestão para estudos, um programa — que obedece na medida do possível aos princípios expostos neste trabalho — já aprovado pela Comissão de Matemática, do Encontro de Mestres, realizado em São Paulo, a 15 de Junho de 1957, sob os auspícios da Inspetoria Seccional de São Paulo, subordinada ao Ministério de Educação e Cultura.

I — CURSO GINASIAL (4 aulas semanais por série)

1.ª Série

Aritmética elementar:

Números inteiros; operações fundamentais. Divisibilidade; números primos. Números fracionários. Potenciação e radiciação; raiz quadrada.
Sistemas de unidades de medir; unidades e medidas usuais (excluindo densidade, velocidade angular, radiano, etc...).

Observação: A parte da geometria intuitiva necessária para o estudo dos sistemas de unidade de medir será desenvolvida pela cadeira de Desenho.

2.ª Série

Aritmética elementar:

Razões e proporções; grandezas proporcionais; aplicações mais usuais até juros simples.

2 — Álgebra elementar:

Números relativos. Expressões algébricas; operações. Casos simples de fatoração. Cálculo literal até frações algébricas.

Observação: O estudo da álgebra é feito ressaltando-se o que há de comum com a aritmética, tais como as propriedades análogas existentes para os números inteiros e para os polinômios, a decomposição em fatôres primos e a fatoração algébrica, etc... Com essa finalidade chegou-se até o cálculo com as frações algébricas (os alunos de hoje confundem frações algébricas com equações), onde aparecem as analogias com as frações aritméticas.

3.ª Série

1 — Álgebra elementar:

Igualdades algébricas; equações e sistemas do 1.º grau. Problemas do 1.º grau (com uma e duas incógnitas). Desigualdades algébricas com uma incógnita. (1.º grau).

2 — Geometria dedutiva:

Estudo das figuras geométricas planas: triângulo, quadrilátero, polígno e circunferência (sem a parte da medida). Construções geométricas.

Observações: A parte algébrica tem como principal centro de interêsse a resolução de equações do 1.º grau e dos respectivos problemas. O aluno é nessa fase despertado, certamente, pelas vantagens que a álgebra lhe traz.

A parte relativa a construções geométricas, com régua e com compasso, merecem nessa série um trato harmonioso com a cadeira de Desenho, não só pela importância que representam na formação do espirito dedutivo do aluno, como também, na aplicação, que realmente são, da geometria ao desenho.

4.ª Série

1 — Álgebra elementar:

Números irracionais; radicais; frações irracionais. Equação do 2.º grau e equações redutíveis ao 2.º grau. Sistemas do 2.º grau (simples).

2 — Geometria dedutiva:

Linhas proporcionais. Semelhança e equivalência de polígnos. Áreas. Relações métricas nos triangulos retângulos, obliquângulos e no círculo. Polígnos regulares. Medida da circunferência e do círculo.

3 — Complementos:

Coordenadas cartesianas no plano; representação de um ponto; noção de função e sua representação cartesiana. Resolução gráfica e discussão de sistemas do 1.º grau a duas incógnitas. Razões trigonométricas de um ângulo agudo. Uso das tábuas de valores naturais.

Observação: A parte algébrica traz agora como centro de interêsse as equações do 2.° grau. Os números irracionais e os radicais são introduzidos para o bom desenvolvimento dessas equações. A geometria dedutiva (semelhança, proporcionalidade) está intimamente ligada com a álgebra e permitirá desenvolver problemas comuns a ambas, agora mais consentâneos com a idade do aluno.

As coordenadas cartesianas no plano visam dar aos alunos os primeiros conceitos de geometria analítica, de reais benefícios(a maioria dos livros de textos de qualquer disciplina são ilustrados com gráficos).

II — CURSO COLEGIAL — CURSO CIENTÍFICO (5 aulas semanais)

1.ª Série

1 — Álgebra:

Trinômio do 2.° grau e inequações do 2.° grau. Progressões; logaritmos; equações exponenciais e logarítmicas.

2 — Trigonometria:

Funções triginométricas. Transformações trigonométricas. Uso das tábuas de logaritmos, Identidade e equações. Resolução de triângulos. Aplicações.

3 — Geometria espacial:

Posições relativas de retas e planos. Perpendicularidades e paralelismo. Diedros, triedros e ângulos poliédricos.

2.ª Série

1 — Aritmética racional:

Operações fundamentais sôbre números inteiros; divisibilidade; m. d. c. e m. m. c; números primos. Operações sôbre números fracionários.

2 — Álgebra:

Operações sôbre polinômios. Noções de análise combinatória Binômio de Newton.

3 — **Geometria espacial:**

Poliedros; prismas e pirâmides. Corpos redondos: cilindro, cone e esfera.

3.ª Série

Análise algébrica:

Determinantes e equações lineares. Números reais e complexos. Funções; limite e continuidade. Derivadas e aplicações. Séries e Sucessões. (Estudo elementar).

2 — **Geometria analítica:**

Equação da reta. Equação da circunferência. Equação reduzida das cônicas.

Observações: O programa do curso científico já traz elementos que visam enriquecer a formação matemática do aluno ginasiano e o seu conseqüente patrimônio cultural. No 1.º Ano existe, entre novos centros de interêsse algébrico (logaritmo), a correlação da trigonometria com a Física. A geometria no espaco é feita em dois anos para melhor estágio do aluno. Os fundamentos da aritmética racional, desenvolvidos no 2.º Ano, constituem fator básico para que os alunos não sejam apenas adestrados nos cálculos mas compreendam a natureza dos números e desenvolvam melhor o raciocínio matemático.

No 3.º Ano o aluno entrará em contacto com as sucessivas ampliações no campo dos números (até complexos) e terá uma informação útil sôbre a matemática superior, a partir da introdução dos limites, derivadas e as respectivas aplicações, inclusive na física e na química (tão largamente usada pelos estudiosos, presentemente).

Com relação ao curso clássico a orientação se faria no desenvolvimento do mesmo programa, com algumas restrições, num sentido mais informativo, mais histórico (com vistas à Filosofia). Ressaltar-se-ia a correlação da Matemática com outras ciências; as posições de Descartes, de Leibnitz, etc... na cultura a partir das suas contribuições matemáticas. Os alunos passariam assim a não ter a impressão errônea (que hoje infelizmente têm) de que estão perdendo tempo com uma sobrecarga de conhecimentos inúteis.

São Paulo, 27 de junho de 1957.

Ass.: Osvaldo Sangiorgi

SUGESTÕES PARA A COMPILAÇÃO DOS PROGRAMAS

A maioria das pedagogias modernas concordam em recusar ao professor o direito de impor-se com a sua ação ao aluno dentro do processo educacional, enquanto querem que êste se oriente e decida por si mesmo ativamente no seu conhecimento, servindo-lhe o professor como guia e companheiro.

Sem, neste momento, querer discutir esta aquisição das pedagogias atuais, mas sòmente encarando-a como fato e processo adotado, reparamos que desta maneira está mudado o papel do professor, pois se centraliza o interêsse educacional e didático sôbre o aluno e, por conseguinte, sôbre o que êle deve aprender, sôbre os programas, únicos documentos daquilo que, êsse aluno, deve aprender.

Disto decorre que os programas **não poderão ser mais encarados como um conjunto de indicações** de noções e de estudos científicos, mas **devem prever uma finalidade,** conhecimentos e determinados limites, que evidentemente poderão ser sugeridos por uma específica concepção da vida.

A esta concepção, que torna os programas éticos, de simples instrumentos indicativos que eram, o professor necessàriamente deverá apelar para que fique resguardada a autonomia do aluno, como querem as novas pedagogias e, ao mesmo tempo, possa a sua autoridade encontrar apoio para educar. E, com o professor, também a sociedade (ou comunidade), para a qual o aluno se educa como seu membro.

I SUGESTÃO:

Daqui a necessidade de cuidar que os programas sejam pensados, redigidos e realizados não **visando apenas uma preocupação de ordem científica,** mas ainda **filosófica,** que permita transcender o mero fato utilitário e imediato (embora sem desconhecê-lo), evitando assim que superposições estritamente didáticas e técnicas prejudiquem contemporâneamente o direito do aluno a proceder com autonomia e o dever do professor em cumprir com o imperativo de educador, (que, embora tudo sempre fica educador).

Vamos exemplificar. Compilar programas, por exemplo, que não possam permitir aos alunos do curso secundário (que para nós é o mais delicado e importante de sua vida formativa porque coincide biológica e psicològicamente com a puberdade e a adoloscência, logo com crises de tôda espécie) insinuações como a que as evidências matemáticas são as únicas valiosas para o espírito. Se um programa tiver isto (e é fácil que o contenha) incluirá sob forma propedêutica a negação à formação do homem completo pois não levaria em conta outros valores, que não fôssem os matemáticos. Um programa, ao contrário, que permitisse entrever que essas evidências, em seu rigor, são apenas um dos vários aspéctos da verdade, prepararia a dar valor a tôdas as disciplinas (evitando o unilateralismo) e incluiria implicitamente um clima propício para tornar a matemática mais agradável (o que muitas vêzes não é).

II SUGESTÃO:

Tendo em vista ainda os rumos das pedagogias modernas e o que foi dito, queremos acrescentar que os programas não devem ser rígidos na indicação dos conhecimentos a serem ministrados, impondo taxativamente em quais determinados anos (séries) se deve dar um determinado ponto. Deveriam ser feitos de tal forma a permitir **elasticidade**, permitir isto é ao professor interpretá-los sem ofender a realidade evolutiva do aluno (grau de receptividade dos alunos) e ao mesmo tempo poder conseguir o objetivo de dá-los completamente (pelo menos na sucessão fundamental e lógica das suas partes).

Vamos exemplificar. Se, por exemplo, experimentamos (como nós experimentamos!) que na segunda série os radicais, as operações com os radicais não concordam com a possibilidade assimilativa da realidade bio-psíquica dos alunos, porque o professor então ter a obrigação de ministrar êstes conhecimentos nesta série, quando melhor seria dá-los na terceira ou na quarta?

Logo programas abertos e não fechados, não limitados por séries, mas por ciclos.

III SUGESTÃO

Disso decorreria a conseqüência de que o Ministério ditaria programas apenas orientativos por ciclos, deixando a Direção do Ginásio e do Colégio o estudo (feito em conjunto com os respectivos docentes) da distribuição e aplicação dos mesmos pelas séries, dentro de cada ciclo.

IV SUGESTÃO

Para melhor alcançar o objetivo prático do que foi dito anteriormente, dever-se-ia, quanto possível, fazer com que o professor acompanhasse os seus alunos por tôdas as séries, começando pela primeira e levando-os até a última.

Desta maneira parece-nos que se alcançariam êstes dois resultados imediatos:

a) seria impedido ao professor fossilizar-se na matéria de uma ou duas séries;
b) evitar-se-ia que por impossibilidade de vária ordem não fôssem esgotados os programas, deixando assim hiatos no processo cognoscitivo dos alunos.

CONCLUSÃO

Programas redigidos com esta elasticidade e com uma concepção da vida visando uma completa harmonia permitiriam o respeito para com a autonomia do aluno e maior raio de ação ao professor para realizar com maior profundidade a sua tarefa de educar.

ELVIRA RINA M. RICCI
(Colaboradora do Centro de Pesquisas Pedagógicas e Orientações Educacionais do R. G. S. e Professôra de Matemática no Ginásio S. Inês de Pôrto Alegre)

federais e o modo pelo qual a administração da escola organizará os quadros do pessoal docente (artigo 27). Os professôres serão contratados por prazo não superior a três anos, admitindo-se a renovação por igual prazo, a critério exclusivo do CONSELHO DE REPRESENTANTES *(parágrafo único, artigo 27).*

Ora, tal solução não parece consultar aos altos interêsses do ensino e rompe velha tradição já firmada como a mais moralizadora para a seleção de elementos categorizados e capazes para a função docente de qualquer nível de ensino, isto é, de que os cargos docentes deverão ser providos por concursos de títulos e provas. Representa, em outras palavras, o cumprimento da exigência da Constituição Federal que estabelece essa forma de seleção, por concurso, como a forma mais moralizadora e democrática para a escolha dos mais aptos e capazes para a função de ensinar.

A relevância dêsse aspecto, inteiramente descuidado na presente reforma de ensino industrial de âmbito federal, está a exigir ampla aglutinação de fôrças interessadas no cumprimento daquela salutar exigência constitucional e, ao mesmo tempo, tomada de posição, clara e objetiva, dos elementos mais interessados no problema, — sem dúvida alguma os próprios professôres do ensino profissional —, a fim de que êsse artigo possa ainda ser revogado quanto antes. Só assim, acreditamos, será o sistema de ensino industrial resguardado da intromissão indébita dos interêsses políticos regionais ou da instauração do sistema paternalista na escolha dos professôres para a regência dos cursos, refletindo o jôgo dos interêsses pessoais e de grupos que nem sempre consultam as conveniências pedagógicas da escola.

J.A.P.

III CONGRESSO NACIONAL DO ENSINO DA MATEMÁTICA

OSVALDO SANGIORGI

É bem oportuno, no instante em que se delineiam os preparativos para mais um Congresso Nacional do Ensino da Matemática, lembrar, de um modo sucinto, os diversos aspectos que caracterizaram os Congressos anteriores e tecer algumas considerações históricas sôbre os mesmos.

Sob o aspecto de realização educacional, onde pontificaram estudiosos e professôres de Matemática de todo o Brasil que, magnìficamente, discutiram temas de relevância de nosso ensino, pode-se dizer que o êxito foi completo, quer seja em Salvador — berço do I Congresso, nascido por obra do idealismo, entusiasmo e competência da ilustre colega Prof.ª Martha Maria de Souza Dantas, quer seja em Pôrto Alegre, cuja continuidade de êxito foi assegurada pela capacidade realizadora da colega gaúcha Prof.ª Martha Blauth Menezes, que foi Secretária Geral.

Todavia, é de se lamentar que os brilhantes resultados dêsses Congressos não tenham sido levados em conta pelas autoridades federais do Ministério de Educação e Cultura, a fim de que se coroassem os esforços daqueles que espontâneamente iniciaram tão altruística obra, cujos objetivos, a rigor, devem coincidir com as próprias metas das autoridades interessadas no aprimoramento da máquina educacional do País.

Enquanto em outros países conclaves dessa natureza são expressivamente prestigiados pelos órgãos oficiais constituídos, pois, dessas assembléias é que partem os subsídios indispensáveis para o norteamento do ensino, dentro do mundo ultracientífico em que vivemos, não tivemos nós em 1955 e 1957, a execução — por quem de direito — dos excelentes princípios aprovados em dois Congressos. Talvez seja por sofrermos ainda as conseqüências de os nossos Ministérios possuírem uma estrutura baseada quase sempre em esquemas políticos que emperram e criam barreiras ao processo educacional. Nem é preciso repetir o que vem ocorrendo há mais de dez anos com o projeto de lei de bases e diretrizes para dar mais realce a êsses malfadados esquemas.

Chegou agora a vez da realização, na última semana de junho do corrente ano, do III Congresso Nacional do Ensino da Matemática. Felizmente, sob a égide dos distintos professôres de Matemática do Rio de Janeiro, terá o patrocínio da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES), do Ministério de Educação e Cultura que, sem favor algum, já tem um grande acervo de bons serviços, prestados ao nosso ensino secundário.

Nestas condições exultam os professôres de Matemática, pois, de saída, contarão para o III Congresso com a cobertura oficial da CADES, já que a presidência da Comissão Executiva será exercida pelo Prof. Gildásio Amado, muito digno Diretor do Ensino Secundário.

Cremos, agora, sinceramente, que deverão ser executados os resultados, que por fôrça serão brilhantes, dêsse novo encontro de professôres e estudiosos de Matemática para gáudio daqueles que, como nós, desejam novos rumos quanto a metodologia e programas de curso, para só citar dois entre os problemas fundamentais que serão ventilados.

À guisa de informações, daremos alguns característicos dos Congressos já realizados.

O I Congresso Nacional do Ensino da Matemática realizou-se na cidade do Salvador, de 4 a 7 de setembro de 1955, patrocinado pela Faculdade de Filosofia, da Universidade da Bahia. A sua Comissão Organizadora teve como Presidente o Prof. Luiz de Moura Bastos, como Vice-Presidente o Prof. Aristides da Silva Gomes e como Secretário-Geral a Prof.ª Martha Maria de Souza Dantas.

Êsse Congresso, que se revestiu de sucesso invulgar, foi o marco inicial das reuniões entre os professôres de Matemática de todo o Brasil (licenciados por Faculdade de Filosofia ou não), que assim passou a contar entre as suas atividades intelectuais com mais uma bienal a partir de 1955. A experiência de velhos professôres, autodidatas e excelentes mestres e o conhecimento de jovens professôres egressos de faculdades superiores formaram, pela primeira vez, um salutar binômio de cultura que possibilitou, com elevação, a discussão do seguinte temário: Horários e Programas; Métodos Gerais de Ensino; Tendências Modernas do Ensino; O Livro de Classe; O problema do aperfeiçoamento progressivo do professor.

Representações de muitos Estados participaram ativamente das oito sessões plenárias realizadas, presididas pelo colega Prof. Roberto Peixoto, cujo brilhante desempenho foi uma das garantias do êxito do Congresso. São as seguintes as conclusões aprovadas e constantes dos Anais do Congresso:

I — O Congresso reconhece a necessidade e propõe a elevação do número de aulas semanais (Matemática) para quatro no curso de ginásio e para cinco no de colégio;

II — O Congresso proclama que os programas de ensino devem ser flexíveis e sujeitos a revisões periódicas, que atendam ao evolver da técnica e do pensamento coletivo. Tais revisões devem ser feitas não sòmente por técnicos em educação, como também por professôres em exercícios, eleitos em cada Unidade da federação;

III — O Congresso recomenda uma reestruturação dos atuais programas de Matemática no Curso Secundário, de modo a permitir uma verdadeira sistematização e a garantir um aproveitamento maior do educando. Neste sentido, propõe como esquema um programa; (Êsse programa consta no n.º 34-1955, pág. 3, da Revista Atualidades Pedagógicas.)

IV — O Congresso proclama a seguinte *Declaração de Princípios:*

1) O professor de Matemática não deverá empregar método particular de ensino mas, seguindo a tendência moderna, substituí-lo pelos recursos didáticos que intercalam os diferentes métodos em função das imposições psicológicas, intelectuais, sociais e biológicas dos educandos em cada turma. Nenhum método é condenável, nenhum deverá ser seguido exclusivamente. Todos são bons desde que o professor conduza o aluno a *participar*, em lugar de *assistir;*

2) O programa deve ser elaborado de maneira a ser integralmente realizado, e obedecendo ao caráter formativo da Escola Secundária, para que constitua uma das componentes do sistema cuja resultante seja a educação integral do adolescente para a vida;

3) A cultura não se traduz por quantidade de conhecimentos adquiridos, mas por organização mental, e, por isso, impõe-se a implantação do *estudo dirigido* que irá assistir de perto o educando podendo o professor aquilatar a aprendizagem que se fará sentir pelas transformações operadas através do ensino, da maneira de sentir, pensar ou agir do educando.

De 29 de junho a 4 de julho de 1957 realizou-se na culta Pôrto Alegre o II Congresso Nacional do Ensino da Matemática, sob os auspícios da Faculdade de Filosofia, da Universidade do Rio Grande do Sul, tendo como Secretária-Geral a ilustre colega gaúcha Prof.ª Martha Blauth Menezes. O Presidente da Comissão Organizadora foi o nosso caríssimo companheiro de estudos daqui da Faculdade de Filosofia de São Paulo, o

Prof. Ary Nunes Tietbhöl, hoje diretor do Centro de Pesquisas do Rio Grande do Sul, que teve por parte de ilustres professôres do sul (Major Daniel Monteiro, Prof. Antônio Ribeiro Jr.) magnífica colaboração. Crescendo em potencial, apesar do quase desconhecimento por parte das autoridades federais, êste II Congresso reuniu mais de trezentos professôres de Matemática de todo o País. O âmbito na verdade foi maior que o do primeiro Congresso, pois, além da Matemática do curso secundário envolveu, como decorrência natural de expansão, o Ensino Normal e Primário, desenvolvendo o seguinte temário:

1) Evolução da aprendizagem da Matemática na infância e adolescência;

2) Direção da aprendizagem da Matemática na escola moderna;

3) Programas (princípios para a elaboração, condições para a execução, articulação com matérias afins, etc.);

4) A Matemática na escola e suas relações com a comunidade;

5) A Matemática e suas relações com as demais disciplinas;

6) Formação específica e pedagógica do professor;

7) Material didático.

Teses brilhantes e comunicações de congressistas de todo Brasil transformaram o plenário num grande acontecimento cultural. Basta, por exemplo, citar as experiências realizadas por jovens oficiais, professôres de Matemática da Escola Preparatória de Cadetes, de Pôrto Alegre, sôbre o uso do hipnotismo no ensino da Matemática, com resultados positivos, e a confecção de um filme acêrca da Trigonometria, para facilitar o seu aprendizado. *Matemática clássica ou Matemática moderna na elaboração dos futuros programas do curso secundário?* — foi uma das teses apresentadas por São Paulo e que mereceu do plenário elevadas e consagradoras discussões.

Como principais conclusões podemos citar:

1.ª) Ratificação da proposta do I Congresso de melhor distribuição do programa de Matemática pelo curso secundário;

2.ª) Criação de Centros de Estudos de Matemática em todos os Estados e intensificação dos cursos de aperfeiçoamento e seminários em correlação com as Faculdades de Filosofia;

3.ª) Criação de uma Comissão permanente para estudar a possibilidade de introduzir o estudo da Matemática Moderna.

Estamos agora em pleno 1959 e na antevéspera de mais um Congresso, o terceiro da série. Para êste certame, que será solenemente aberto às 20 h do próximo dia 20 de julho, no Teatro Municipal do Rio de Janeiro, serão convocados professôres de Matemática de todos os cursos: secundário, normal, primário, comercial, industrial e pré-universitário, vindo de tôdas as partes do território nacional. Pode-se prever, desde já, o sucesso dessa reunião de professôres, não só porque valorosos colegas do Rio darão muito da sua experiência (o Prof. Roberto Peixoto é o Secretário-Geral) como também está assegurado o apoio oficial do Ministério de Educação e Cultura.

Deverão ser apresentadas as inovações que se impõem para a obtenção de um aprendizado mais seguro da Matemática nos cursos de grau médio. Serão organizadas sete grandes comissões técnicas para efeito da racionalização do estudo das teses que serão apresentadas.

Não é preciso encarecer a esplêndida oportunidade que tais Congressos proporcionam. Professôres dos quatro quadrantes dêste enorme País discutem, em elevadas reuniões, temas em evidência da realidade nacional, contribuindo com o valor de seus conhecimentos e de sua experiência para o aperfeiçoamento cada vez maior do ensino da Matemática. Trabalhos doutrinários, resultados de pesquisas, proposições de ordem objetiva, desfilam durante os debates, permitindo, dessa forma, ao professorado do interior e das grandes capitais um melhor entrosamento de pontos de vista.

Nós, que temos participado efetivamente dos Congressos anteriores e contamos continuar participando, almejamos ardentemente que o III Congresso Nacional do Ensino da Matemática seja uma autêntica tomada de posição dos professôres de Matemática do Brasil, nos problemas que dizem de perto das novas técnicas, novos métodos e novas concepções que compõem o fulgurante edifício da mais notável e exata das ciências.

☆ ☆ ☆

Doc 91

UNIVERSIDADE MACKENZIE

FACULDADE DE FILOSOFIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1959

PERSPECTIVA DE RELEVO

(Estudo sôbre um trabalho do Dr. Erwin Kruppa)

OSVALDO SANGIORGI

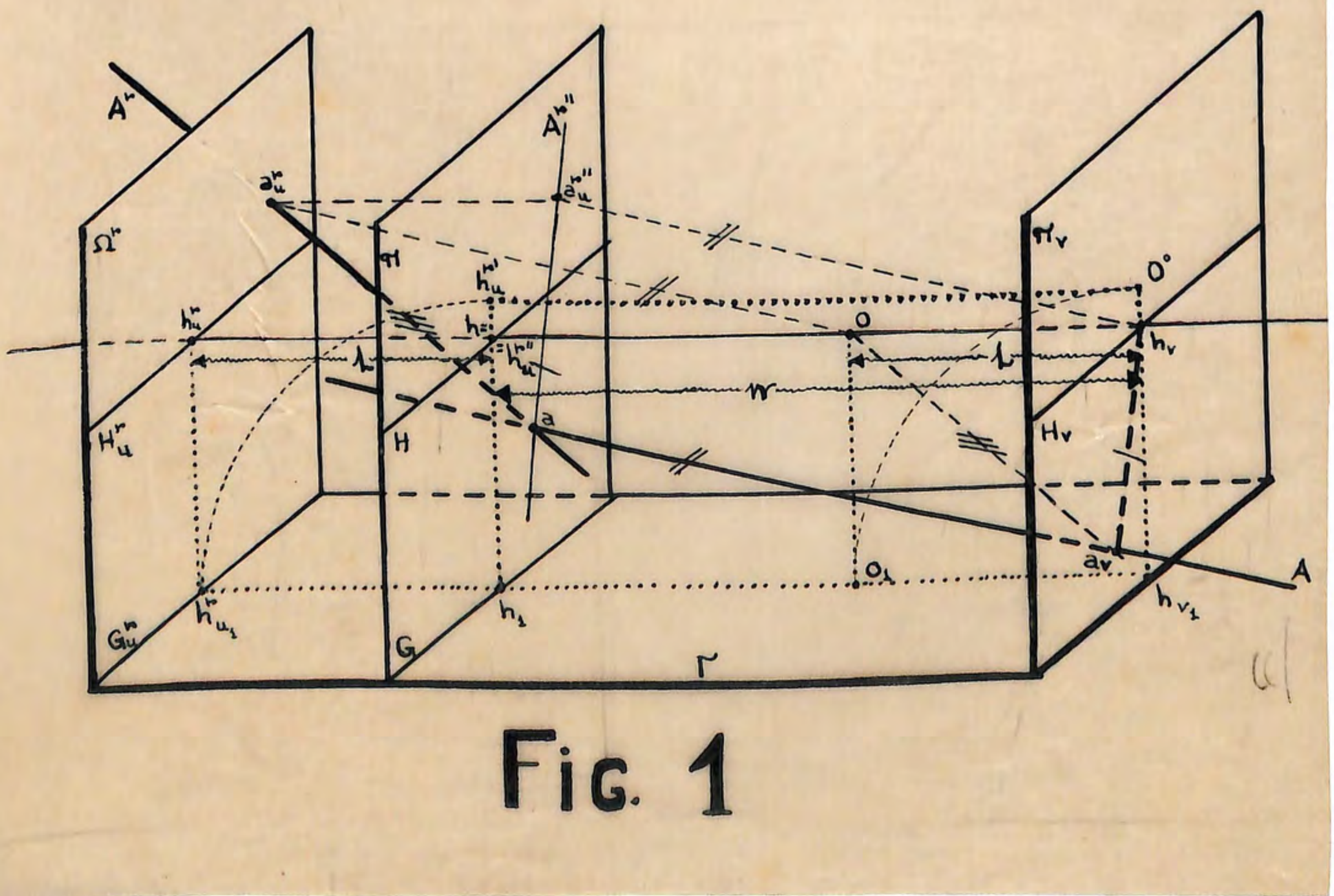


Fig. 1

PERSPECTIVA DE RELÊVO.

Comentários gerais sôbre figuras em relêvo:-

A perspectiva desejada, de um objeto, pode ser tomada como um traço ou uma corda, atravez de uma mudança extraordinária de perspectiva. A projeção central é por isso um caso particular do problema, i. e; faz derivar um objeto de uma perspectiva colinear.

Entende-se geralmente, por mudança de um conjunto de variações $\Sigma(p)$, formado de certos elementos (p), geométricos, ~~num~~ a uma variação $\Sigma_1(p_1)$ de elementos geométricos (p_1), a possibilidade de que a própria projeção (conjunto) Σ_1 de uma figura Σ do espaço venha a ser também um corpo do espaço, entre os elementos de Σ_1 e os de Σ hà um acréscimo (em geral unilateral - uma adição ou ordenação) permitindo assim a possibilidade de representação. No sentido desta explicação devem-se considerar por exemplo, modelos de corpos Σ também como projeção de Σ_1, apenas com modificações parecidas,(na maioria são diminuições) nas ordenações inversas.

<u>NOTA1</u>:- Se por exemplo, a variação de um ponto for representada por um perfil (esboço), então ~~parte os~~ seus elementos (p)(ou pontos do espaço) teremos em correspondência os elementos (p_1) e as figuras (p' e p").

De maneira mais geral, pode-se representar um corpo no espaço, submetendo-o a uma colineação perspectiva. Sob certas restriçoes de que logo trataremos, um quadro geométrico perspectivo colinear, serve também para enganar um observador que aprecia o objeto em vista, bem como o esboço geral unioculadamente (unilateral ou torto) do centro de colineação ou ponto de vista. É por isto que a modificação dos corpos de perspectiva colinear veio a ser a expressão da arte plástica. De acordo com o sentido artistico e às possibilidades práticas a execução do mesmo é feita onde a articulação natural do objeto exige maior profundidade e o espaço para ela não existe.

Os meios usados para êstes quadros nas artes plásticas é por isso mesmo a plástica de relêvo, a decoração de cenários e a jardinagem mais elevada. A modificação atravez da perspectiva colinear de um objeto denomina-se de perspectiva de relêvo.

NOTA 2:- A respeito da história e literatura da perspectiva em relêvo consulte-se: Chr. Wiener, Lehrbuch d. Darst. Geometrie, Leipzig (1884), I. S. 47ff; ferner Enz. d. Math. Wissench. , Art. III A B 6, Darst Geometrie (E. Papperitz) Nr. 34 Für Theater perspektive sehe man: L. Burmester, Grundlehren der Theaterperspektive, Allgem. Bauzeitung 1884, S. 39,44,53.

Se um objeto Σ em perspectiva colinear for modificado em quadro de relêvo para Σ^r encontraremos sempre 2 pontos correspondentes de Σ e Σ^r que vai do ponto de vista, pelo centro de colineação (olho) O, 2 retas ou planos cortar-se-ão no plano de colineação - plano de intersecção π.

O plano impróprio Ω do espaço objeto correspondente a π que é o plano paralelo e correlato no espaço da projeção, Ω^r será o plano de fuga; se considerarmos Ω como espaço de projeção então lhe corresponderá uma superficie paralela e que é correspondente do espaço objeto a π - plano de desaparecimento π_v.

Se a modificação em perspectiva colinear do objeto deve suscitar no observador impressão semelhante a do próprio objeto ou corpo, então devem ser seguidas certas ordens na demarcação de sua reprodução.

O plano de intersecção π escolhemos vertical. Com isto conseguiremos que os cantos dos objetos (principalmente verticais) correspondam a pontos idênticos em relêvo. Como nosso olhar habitual é horizontal, denominemos o raio visual normal a π - raio principal. Para evitar torções (desfigurações) profundas, deve-se como em projeção centrais, cuidar de que o objeto a ser retratado esteja dentro do cone de visão, cujo ângulo com o raio principal não deve ultrapassar de 30°. Para se obter a impressão intencionada ainda é necessário que o quadro de relêvo apresente a mesma estruturação de fundo que o objeto, ou em têrmos geométricos: "as projeções (as linhas pontilhadas) que vão ao ponto de vista devem ser paralelas". Esta condição é satisfeita quando se considera o plano intersecção π entre o olho $\underline{O}$ e o plano de fuga Ω^r. Olhando-se em sentido oposto a $\overrightarrow{O\pi}$, teremos o plano π_v (principio 4) e êste estará além de $\underline{O}$ à uma distância $l = \Omega^r\pi$. A uma reta qualquer no sentido comum, A, corresponde o segmento A^r (fig. 1) que passa pelo ponto de intersecção $a = [A\pi]$ e é paralelo ao raio visual passante pelo ponto de fuga, no caso ponto de desaparecimento $a_v = [A\pi_v]$.

fig 1

A^r corta Ω^r no ponto de fuga a_u^r, onde a reta paralela à A, toca o plano de fuga Ω^r; (a a_v O a_u^r) é um paralelogramo. Observando agora a correlação entre os pontos A e A^r, verificamos que a 2ª parte do espaço atrás de π (que não contém O), ou a parte paralela entre π e Ω^r corresponde ao espaço de relêvo. Se o objeto a ser reproduzido se encontrar nesta 2ª parte, formar-se-á o relêvo entre π e Ω^r, com menores dimensões de profundidade. Denomina-se a extensão (espaço) $l = [\pi\Omega^r]$ analogicamente de profundidade de relêvo. O raio principal corta π, Ω^r e π_v em pontos que denominar-se-ão sucessivamente de: ponto principal h, ponto de fuga principal h_u^r, ponto de desaparecimento principal h_v. O plano do horizonte ou horizontal corta π, Ω^r e π_v em horizontais, dando origem aos seguintes planos: plano de intersecção do horizonte H, plano horizontal de fuga H_u^r, plano horizontal de desaparecimento H_v.

Destas explicações de Ω^r e π_v segue-se indubitavelmente os seguintes principios:

<u>1º Principio</u>: As figuras em relêvo de retas paralelas à direção a_u cortam-se em Ω^r no ponto de fuga a_u^r destas retas.

<u>2º Principio</u>: As figuras em relêvo de superficies paralelas ao plano de posição E_u cortam-se em Ω^r na reta de fuga E_u^r destas superficies.

<u>3º Principio</u>: Retas paralelas G^r (superficies ε^r) do espaço de relê-

vo são as figuras ou relevos das retas G (superficies E_q) que se cortam em π_v no ponto de desaparecimento g_V (cuja intersecção ou linha de desaparecimento é E_v).

REPRESENTAÇÕES PLANAS DE FIGURAS EM RELÊVO.

Consideremos o plano intermediário como sendo o plano de perfil, propomo-nos o seguinte problema: derivar o perfil (traçar) de relêvo diretamente do objeto. Se, (fig.1) $a_u^{r''}$ fôr o perfil de a_u^r então (O a_u^r $a_u^{r''}$ h_v) será um paralelogramo, cujo lado $[a_u^{r''}$ $h_v]$ terá a direção a_u. Obter-se-á assim o perfil $a_u^{r''}$ de relêvo de um ponto impróprio a_u mais rapidamente do que se projetassemos imediatamente a_u de h_v sôbre π. Esta regra também é válida para qualuqer ponto, pois $A^{r''} = [a\ a_u^{r''}]$ é simultaneamente o perfil de A^r e do esboço geral A de h_v. Como porém cada ponto pode ser considerado como intersecção de 2 retas, vale de um modo geral o principio de J. de la Gournerie:

NOTA 1:- Tratado de perspectiva linear, Paris 1859, pag. 230, erradamente atribuido à R. Morstad por Chr. Wiener.

1º Principio: O perfil de relêvo sôbre o plano de intersecção é ao mesmo tempo esboço geral do objeto para o ponto de desaparecimento principal bem como para o olho. Êste é um caso particular do que se segue.

NOTA 2:- J. Schlesinger, a geometria representativa no sentido da geometria mais recente, Viena 1870, pag. 259.

2º Principio: Se um objeto K em um ponto qualquer c e seu relêvo K^r do quadro de relêvo c^r fôr projetado sôbre o plano de intersecção π, os 2 traços serão idênticos (coincidiram).

De fato, pois se (p p^r) forem pontos quaisquer, (c c^r) um par diferente de pontos correspondentes, teremos que (c p) e (c^r p^r) serão retas ou par de retas correspondentes. Estas se cortarão por isso no plano de colineação π (plano intersecção) e com isto o esboço geral de p proveniente de c sôbre π é efetivamente idêntico ao de p^r proveniente de c^r.

Escolhendo como ponto c o ponto de desaparecimento geral (ponto de fuga geral) h_v e com isto escolhemos como ponto c^r o ponto impróprio de h_u do raio principal, obtem-se novamente o principio 1.

O 2º principio é um caso particular do:

3º Principio: Se o objeto K fôr projetado de um ponto qualquer c e seu relêvo K^r de um ponto do quadro de relêvo, c^r, sôbre um plano qualquer, então serão ambos, de um modo geral, os traçados de uma perspectiva colinear, tendo $[\pi \varphi]$ por eixo e $[o\, c . \varphi]$ por centro.

Com efeito, os feixes luminosos que K projeta de c e K^r de c^r, têm como feixes correspondentes a ambos, os espaços de perspectiva colinear e posição perspectiva em relação ao plano de intersecção π. Se, pois, φ diferir de π ($[\varphi c] \neq 0$, $[\varphi c^r] \neq 0$), formar-se-ão de φ 2 campos colineares nos quais cada ponto de $[\pi \varphi]$ se corresponderá a si mesmo; como além disso nos 2 feixes, cada superficie, devido ao raio visual $[o\, c] = [o\, c^r]$, se corresponde a si mesmo, um raio que corresponde a φ em φ é a secante que passa por $[o\, c . \varphi]$. Assim, prova-se o que afirmamos anteriormente.

Para obtenção prática (desenho) do relêvo de um corpo dado, deve-se considerar o seguinte caso particular do 3º principio. Acrescentamos sob a superficie horizontal (fig. 1) uma outra superficie horizontal T que denominamos superficie fundamental. Suas secantes (intersecções) com π, Ω^r e π_v sejam respectivamente G, G_u^r e G_v.

Se escolhermos no 3º principio, a superficie T como φ e o ponto impróprio $u = | T$ como c, segue portanto que $u = u^r$.

4º Principio: O traçado normal K' do corpo K sôbre a superficie fundamental T é perspectivamente colinear ao traçado normal $K^{r'}$ de seu relêvo com $O_1 = [O | T . T]$ como centro, G como eixo e G_v, G_u^r como contraeixo, (NOTA1: R. Morstadt - Sôbre a perspectiva de relêvo (perspectiva no espaço) principalmente de esferas. Z. Math. Phys. 12 (1867) S. Pag. 326-339). Dêste principio pode-se facilmente estabelecer uma regra simples para a obtenção prática (desenho) do esboço do quadro em relêvo sôbre a superficie fundamental T. Como o 1º principio já constitue uma regra para a obtenção do perfil do quadro em relêvo sôbre π, é evidente que tomamos π como plano para desenho e portanto fazemos girar T com o esboço procurado, ao redor de G até que coincida com π. Estabelecemos que o esboço de um ponto p do espaço, antes de girar, chamado p_1, denominar-se-à depois p'. Fazendo girar o traço (traçado) de K_1^r do relêvo ao redor de G, até coincidir com π, será a sua nova posição $K^{r'}$, em relação ao traço (traçado) K_1 do corpo em perspevtiva; pois de acordo com o 4º principio G é o eixo de perspectividade entre K_1 e K_1^r e no movimento G permanece fixo. O centro de perspectividade 0° entre K_1 e $K^{r'}$ resulta de uma simples reflexão sôbre o desenho (fig. 1). O ponto impróprio h_u do raio principal têm simultaneamente os significados: h_{u1}, h_v^r, h_{v1}^r. Pelo movimento giratório h_{v1}^r consegue atingir o ponto impróprio $h_v^{r'}$ da perpendicular do espaço; de mais a maiś o traçado geral h_{u1}^r do ponto de fuga principal que está a uma altura t acima da superficie fundamental, vem a ter à perpendicular atravez do ponto principal h a $h_u^{r'}$ se fizermos descer a superficie mediana dianteira T.

O centro 0°, cujos raios ligam os pontos correspondentes K_1 e $K^{r'}$ dando a secante dos dois raios $[h_{u1}\ h_u^{r'}]$ e $[h_{v1}\ h_v^{r'}]$. Assim, ficará 0° sôbre a perpendicular de h_v a uma distância t acima ou abaixo de T conforme o movimento giratório. O resultado desta observação é o principio de R. Staudigl (NOTA 1 - Fundamentos de perspectividade de relêvo, Viena (1868) pag. 69).

5º Principio: Para o plano fundamental T como plano de projeção, o esboço ou traçado geral do objeto, visto do olho 0°, que está situado na perpendicular que passa pelo ponto de desaparecimento principal h_v e que dista de T só pela profundidade t, será o traçado $K^{r'}$ do relêvo sôbre π. Escolhendo-se de preferência T com profundidade t abaixo do horizonte, além disso, fazendo-se girar T até π de modo que (olhando-se do ponto 0) a 2ª parte do plano π venha a descer, cairá 0° no ponto de

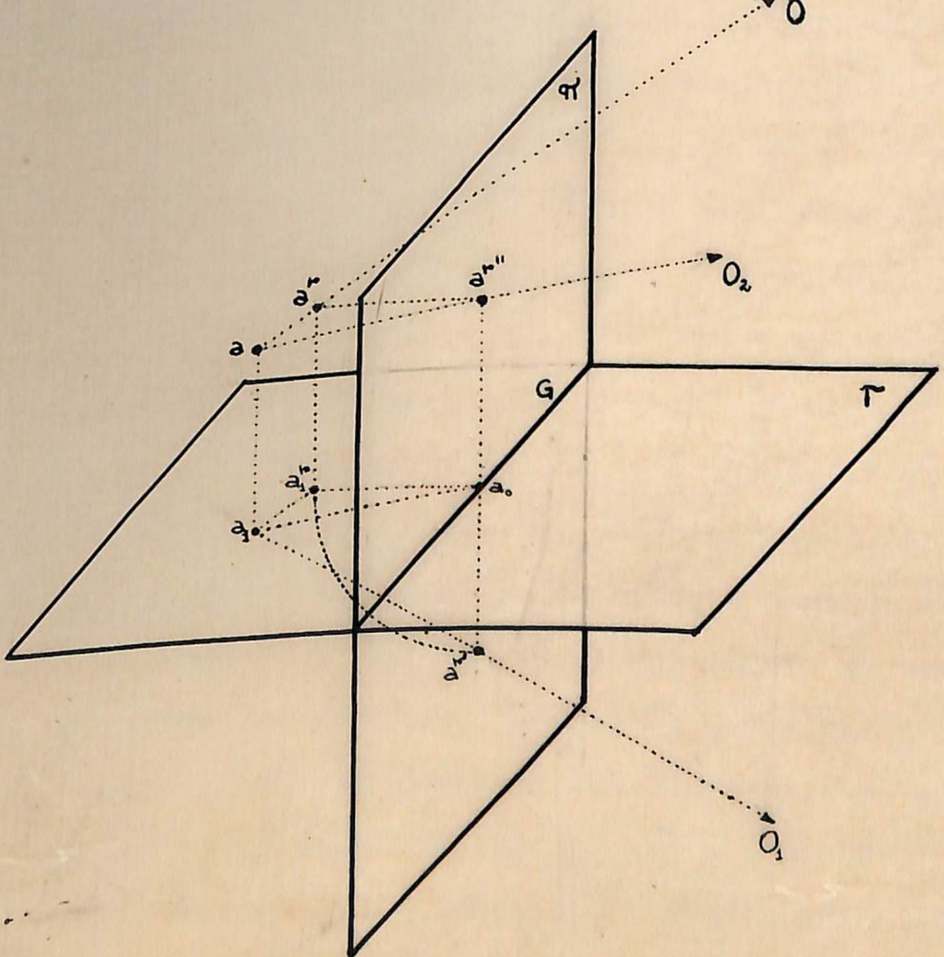


Fig. 2

desaparecimento h_v e dos principios 5º e 1º resultará:

(NOTA - J. Schlesinger, obra já citada, pag. 233, 261)

6º Principio: Se um corpo K fôr representado segundo o seu esboço, obteremos o perfil e esboço plano do quadro em relêvo de um modo geral (central) tomando-se como ponto de desaparecimento principal h_v o olho (ponto de vista) e o plano de intersecção π como superficie da figura, ainda toma-se uma superficie abaixo do horizonte com uma profundidade t como (superficie) fundamental. O 6º Principio também admite o corolário:

7º Principio: O esboço geral e traçado central de um objeto K podem também ser considerados sempre como parte do traçado normal da figura em relêvo K. Precisamos considerar sòmente o plano do quadro como plano de intersecção, o olho como ponto de desaparecimento principal e a distância da linha fundamental do horizonte como profundidade de relêvo.

Se um objeto K fôr retratado de acôrdo com os principios 1 e 5, i. é, por meio de perfil e traçado ($K^{r''}$ $K^{r'}$) de seu relêvo K^r, resultará um sistema duplo (universal), que é portanto mais comum que a representação por esboço central. O par de figuras ($p^{r'}$ $p^{r''}$) de um ponto p aparece da seguinte maneira: projeta-se p de um ponto |T sôbre T até p_1 e de h_v sôbre π até $p^{r''}$; agora os dois pontos ($p^{r''}$ p_1) de 0° até π; nêste último lance $p^{r''}$ permanecerá imutável e p_1 confundir-se-à com $p^{r'}$.

Como caso particular da perspectiva de relêvo, consideramos o caso de um centro impróprio O (fig. 2). Em vez da colineação em perspectiva terá lugar uma afinidade perspectiva, poder-se-à denominar a figura como um relêvo em paralelo se a submetermos às seguintes condições já mencionadas, as quais estão intimamente ligadas com o conceito "RELÊVO".

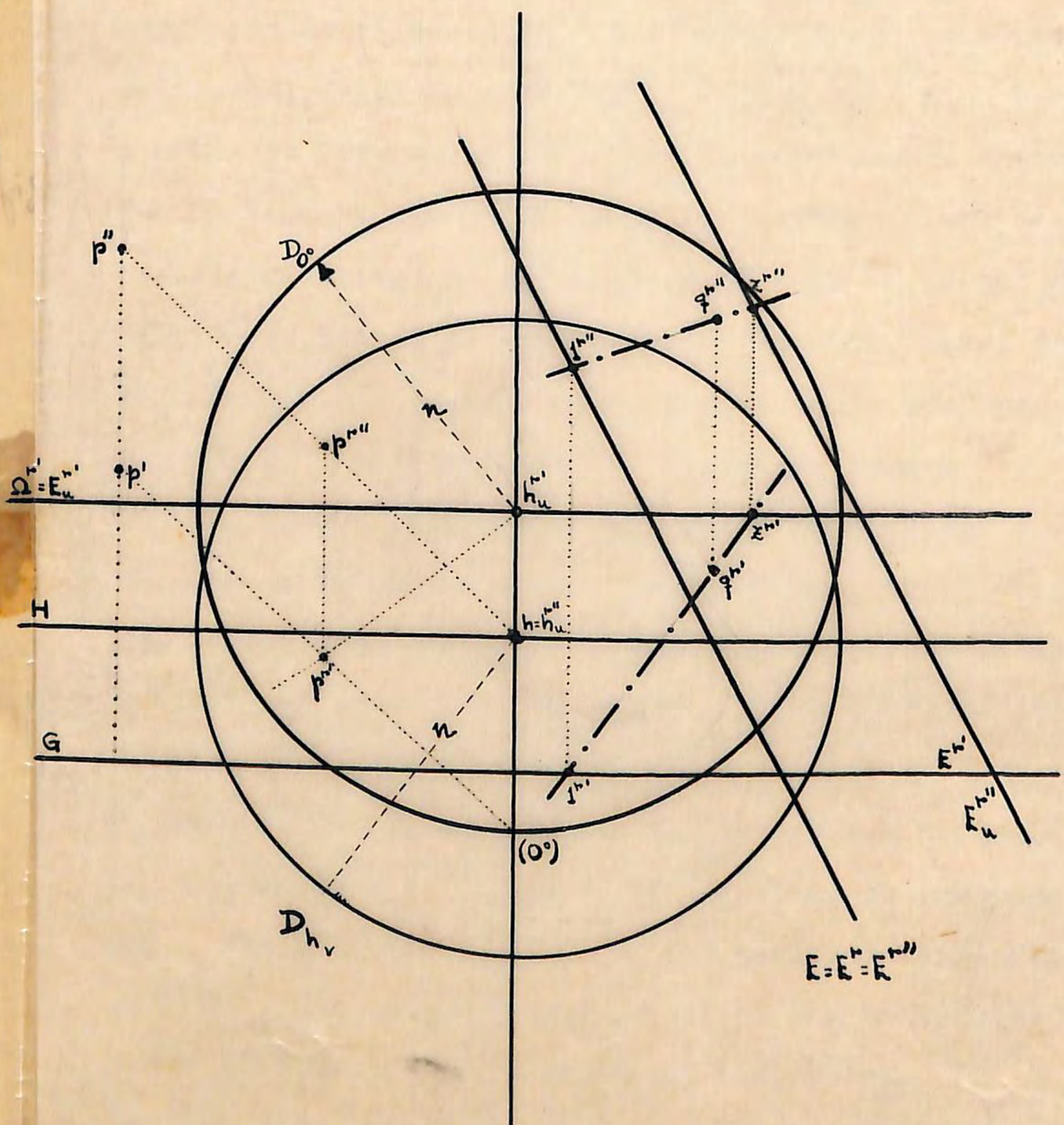
Em primeiro lugar, devido à (estética) exigência artistica, devem corresponder, a estruturação de profundidade de relêvo com a do objeto; i. é, os pontos semelhantes devem ser paralelos nos raios de afinidade. A caracteristica de afinidade, i. é, a relação de distância $C = \overrightarrow{\pi a^r} : \overrightarrow{\pi a}$ dos pontos relativos a, a^r de π deve ser positiva. Além disso, deve ser $C < 1$, se o prolongamento da profundidade de relêvo fôr menor que a do corpo (NOTA 1 - um relêvo (em) paralelo só poderá aparentar bem o objeto, se fôr apreciado de considerável distância e de acôrdo com a direção dos raios visuais). Por isso, apresentará, visto de um prisma ou plano menos aberrações (desfigurações) desagradáveis e anti-estéticas que o relêvo central que por ser observado de um ponto diferente do olho, traz estes inconvenientes.

Consideremos o plano de afinidade π (vertical) como plano de perfil e o plano correspondente (horizontal) T como plano de esboço, obteremos facilmente por meio de superposição o perfil e traçado geral do relêvo em paralelo. Como os raios de afinidade $[a\ a^r]$ são paralelos e a relação de distândia $\overrightarrow{\pi a^r} : \overrightarrow{\pi a}$ para todos os pares dos devidos pontos a, a^r têm o mesmo valor, serão todas as retas $[a, a^{r''}]$ paralelas. O perfil $K^{r''}$ do relêvo paralelo é assim idêntico ao traçado lateral do objeto K de um olho situado no ponto impróprio O_2 (NOTA 2 - isto também poderia ser concluido da parte anexa de afinidade com o principio 2). Por isso deduz-se facilmente (fig. 2) que as linhas de ligação $(a_1\ a^{r'})$ sejam paralelas, de modo que se obterá de uma maneira simples o esboço geral do objeto K_1 de um ponto impróprio O_1 sôbre π. Como consequência teremos o:

8º Principio: Tendo-se π e T como planos de perfil para o traçado geral, êles serão respectivamente, o perfil K^r de relêvo paralelo do traçado lateral de um corpo K e o esboço geral K^r do traçado lateral de esboço de K. A cópia de um corpo K por meio do perfil e do traçado geral ($K^{r''}$ $K^{r'}$) de um relêvo paralelo é assim novamente um sistema duplo ou seja um sistema comum de par de figuras ($a^{r'}$ $a^{r''}$) de um ponto a do espaço e cujo resultado se obtém da seguinte maneira: projeta-se a de O_2 sôbre π até $a^{r''}$ e de π sôbre T até a_1. Projeta-se então os dois pontos (a_1 $a^{r''}$) de O_1 sôbre o plano de desenho π; veremos que $a^{r''}$ ficará imutável e a_1 coincidirá com $a^{r'}$.

EXEMPLOS PARA TRAÇADO E DEMONSTRAÇÃO DE RELÊVO EM PERFIL E EM TRAÇADO GERAL.

Os dois principios: 1 e 5, contêm as indicações necessárias para



p''
p'
D_{0°
n
$p^{r''}$
$\Omega^{r'} = E_u^{r'}$
$h_u^{r'}$
H
$h = h_u^{r''}$
$p^{r'}$
n
G
(0°)
D_{hv}
$q^{r''}$
$z^{r''}$
$z^{r'}$
$q^{r'}$
$E^{r'}$
$E_u^{r''}$
$E = E^{r} = E^{r''}$

FIG. 3

derivar de um corpo qualquer K e imediatamente o perfil e o traçado de seu relêvo ($K^{r'}$ $K^{r''}$). Afim de fixar a cópia de um corpo K por meio de um par de figuras ($K^{r'}$ $K^{r''}$) escolhe-se a linha fundamental (horizontal) $G = [T\pi]$, em seguida sôbre uma normal a G, os pontos $h = h_u^{r''}$ e $h_u^{r'}$ como par de figuras do ponto infinitamente longinquo h_u do raio principal, finalmente ao redor destes pontos como centro, temos 2 circulos de distâncias iguais D_{h_v} e $D_{0°}$ de h_v e de 0°. Com isto, determina-se a colineação central que dá o relêvo, pois, a distância $\overline{Gh_u^{r'}}$ é igual a profundidade de relêvo t. $h_u^{r''}$ é ao mesmo tempo, o ponto principal h e a horizontal, atravez dêle nos dá o horizonte H, a horizontal por $h_u^{r'}$ é a primeira figura $\Omega^{r'}$ do plano impropriamente chamado Ω. Estabelecemos que h_v acha-se diante do plano do desenho (plano de intersecção) π; deve-se então imaginar a rotação de T para π de tal modo que o plano $\Omega^{r'}$ esteja contido ou se ache antes da rotação, atraz de π. Se $\Omega^{r'}$ estiver como na figura 3, acima de G, o ponto mais profundo será (0°) e $D_{0°}$ será o ponto de fuga giratório na rotação de T para π.

Da figura deduz-se a relação entre o esboço e o perfil (p' p") de um ponto p do espaço e seu par de figuras ($p^{r'}$ $p^{r''}$). Além disso, mostra ela a representação de um plano φ pelos vestigios do par de figuras $E = [\varphi\pi]$ e suas retas impróprias E_u. E coincide com E^r e $E^{r''}$, $E^{r'}$ cai sôbre a linha fundamental G. $E_u^{r''}$ é a linha de fuga do plano φ tendo h_v como olho e π como plano da figura, eis porque é paralelo a $\parallel$ E ; $E_u^{r'}$ cairá sôbre $\Omega^{r'}$. Como desta maneira, os pares de figuras de 2 retas de φ são conhecidas, pode-se sem hesitação desenhar o par de figuras ($q^{r'}$ $q^{r''}$) dos pontos q sôbre o plano φ. Em seguida deverá a cópia $K \rightarrow (K^{r'}$ $K^{r''})$ ser demonstrada em 2 exemplos.

1º Problema:

Representar o relêvo de um cone, com eixo vertical, em projeção e esboço sendo dados, o vértice S, a altura h e o raio da base r.

(Na fig. 4, como no texto subsequente omitir-se-á a demarcação de r).

Deve-se sempre lembrar, que o problema simplesmente consta de se

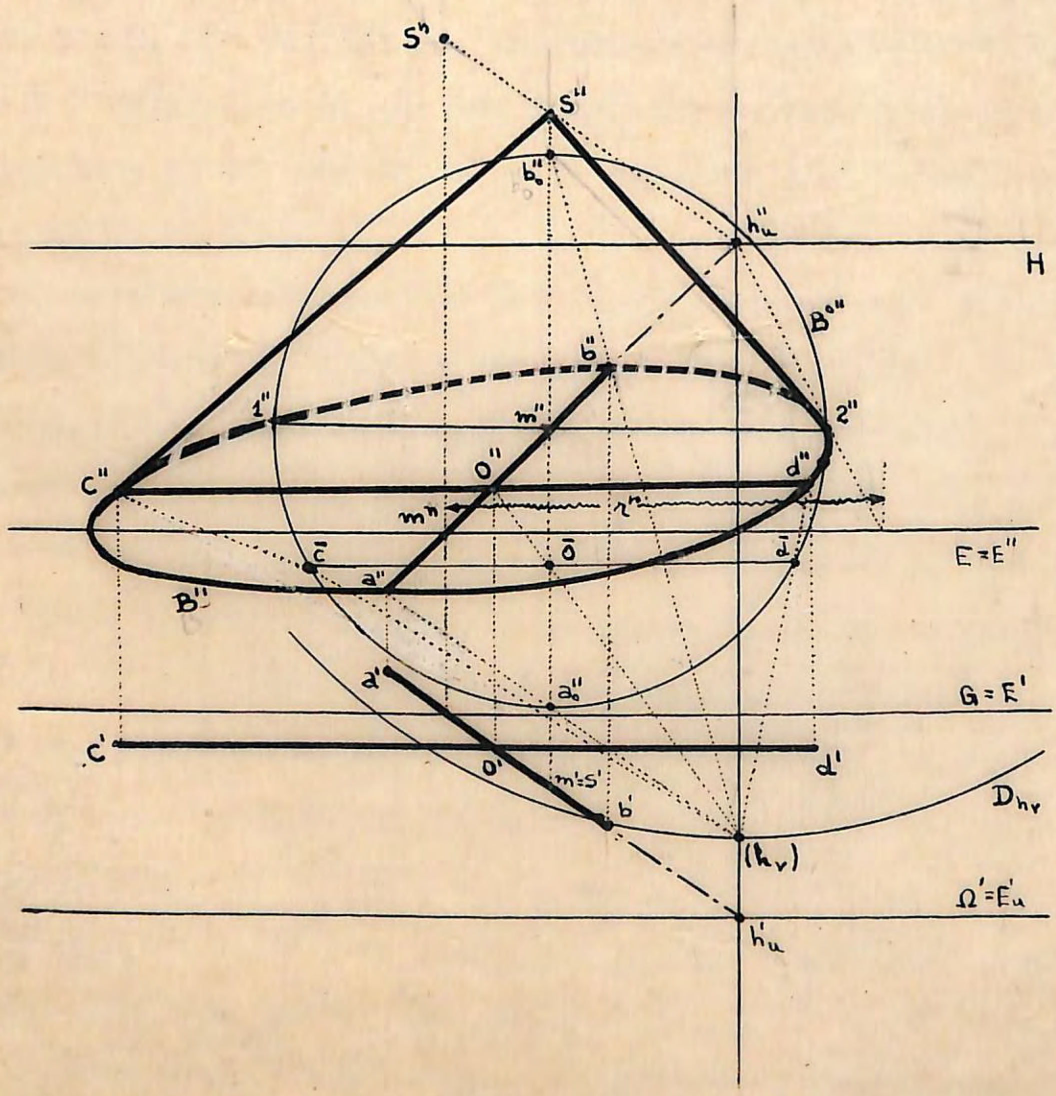


FIG. 4

obter o esboço central do cone, de h_v e de $0°$, tendo π como plano de projeção e como plano fundamental T.

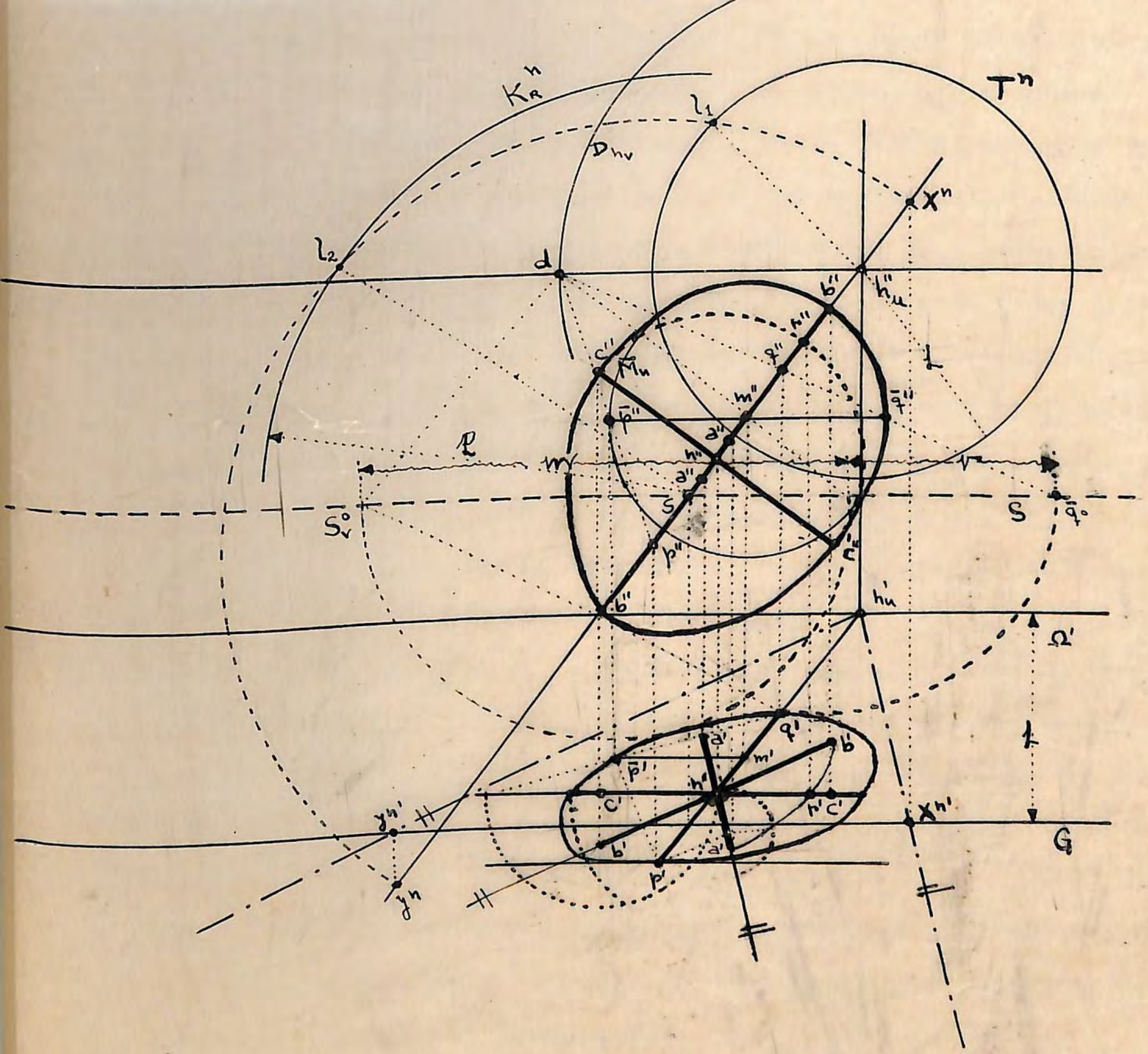
Para levantar a altura h, achamos a normal S^n do vértice do cone e levantamos na perpendicular através de S^n a medida $h = \overline{S^n m^n}$. A horizontal atravez de m^n é a projeção $E = E''$ da base. $[m^n\ h''_u]$ corta a linha de ordem $[S'\ S'']$ no 2º ponto m'', centro da base m; m' coincidirá com S'. Será então: $E' = G$, $E''_u = He$, $E'_u = \Omega'$. Desenha-se em seguida a 2ª figura de diametro 1 2 paralela a G, que têm o circulo de base B e comprimento dado 2r, sôbre êste 1" 2" como diametro da figura B°' do circulo de base voltada em direção ao plano π. O ponto de fuga giratório para esta volta é o ponto mais alto ou mais profundo (h_v) do circulo de distância D_{h_v}. Obtem-se agora a 2ª figura a" b" para o diametro normal da base de π, projetando-se o diametro vertical a°" b°" de B°" (de h_v) sôbre $[m''\ h''_u]$ até a" b". a" b" é um diametro da 2ª figura de B, pois as tangentes em a" e b" são paralelas. Assim, também se conhece o centro 0" de B" e o conjugado de a" b", diametro paralelo à G, c" d" resultará por meio da colineação entre B°" e B" tendo [1"2"] como eixo e (h_v) como centro.

Baixando-se uma reta de a" b" sôbre $[m'\ h'_u]$ e de c" d" sôbre [0'|G] consegue-se o diametro conjugado de B'.

2º Problema:

Representar o relêvo de uma esfera em perfil e esboço. (Figura 5, os pontos r são novamente omitidos).

Sejam dados o par de figuras (m' m") do centro m e a 2ª figura paralela ao plano π do grande circulo $\overline{M}$ da esfera K. O circulo de distância D_{h_v} corta H no ponto de fuga d, dando um feixe de retas horizontais paralelas, que se inclinam para π abaixo de 45°. Obtem-se assim a 2ª figura p" q" do diametro normal da esfera em π projetando-se o diametro horizontal $\overline{p}\ \overline{q}$ de $\overline{M}$ sôbre d até $[m''\ h''_u]$; baixando-se retas de $[m'\ h'_u]$ obtem-se p' q'. Como os planos tangentes ao quadro em relêvo K^r da esfera são paralelos a π em p^r e q^r, o centro n" de p" q" será o perfil, o centro n' de p' q' o esboço geral do centro geral de K^r, pressupondo-



Kₖⁿ
Tⁿ
l₁
l₂
d
Dhv
Xⁿ
b''
h''u
L
c''
p''
q''
m''
a''
h''
S
S°v
S
R
r
v
p̄''
q̄''
q̄₀
h'u
Ω'
k
G
a'
q'
b'
m'
p̄'
h'
c'
Xⁿ'
yⁿ'
yⁿ
p'

FIG. 5

-se naturalmente que p" q" e consequentemente p' q' sejam pontos. K^r, será um <u>elipsoide</u>, um <u>parabolóide elíptico</u> ou <u>hiperbolóide bivalve</u> conforme a esfera não cortar realmente, tocar (tangente) ou cortar de fato o plano de desaparecimento π_v.

No 1º e 3º caso é favorável possuir-se o eixo triplo de K^r. Considerando o par de figuras (n" n') como esboço geral de (h_v) e esboço fundamental de (0°) de um ponto n do espaço, então será êste o polo de π_v relativo à esfera K. Ao eixo triplo de K^r correspondem no sistema da esfera K aquelas cordas triplas conjugadas atravez de <u>n</u> cujos pontos de intersecção (x,y,z) em π_v são projetadas por meio de raios triplos retângulares do centro de colineação <u>o</u>. (x,y,z) é o triângulo polar comum do sistema polar do circulo cortado $K = [K\pi_v]$ e do sistema anti-polar do circulo de distância $T = (h_v, t)$ do centro <u>o</u> relativo a π_v. Para se verificar qual dos três caso possiveis se apresenta, na figura 5, fazemos girar o diametro esférico normal de π - p q - do plano horizontal por seu ponto de projeção S para o plano da figura. Seja S a projeção dessa plano horizontal, s_v o ponto de desaparecimento de [pq]; s''_v será então propriamente o ponto de [p" q"]. Se projetarmos, portanto, s''_v, m", q" do ponto <u>d</u> sôbre S, teremos: $\overline{s^o_v m^o} = m$ como distância do plano π_v do centro da esfera m, $\overline{m^o q^o} = r$ como raio da esfera. Na figura 5 temos , $r < m$, assim K^r é um elipsóide.

O corte da esfera denominado por $K[K\pi_v]$ é portanto nulo, (sem partes), as pontas que passam por seu cone mínimo são os tais pontos de diametro [p q] que distam de π_v o seguinte:

$$t = \sqrt{m^2 - r^2}$$

O verdadeiro substituto K_r de K é o circulo de distância destas pontas do cone relativo a π_v. Na figura 5 as projeções normais $K^n_r = (s,t)$ e $T^n = (h''_u, t)$ foram desenhadas sôbre π. O traçado normal do triângulo (x,y,z) é agora o triângulo polar comum das anti-polaridades de K^n_r e T^n, na verdade é $(x^n\ y^n)$, o par comum de involução de pontos anticonjugados, produzidos pelos 2 circulos em $[h''_u\ m'']$ e z^n o ponto impróprio

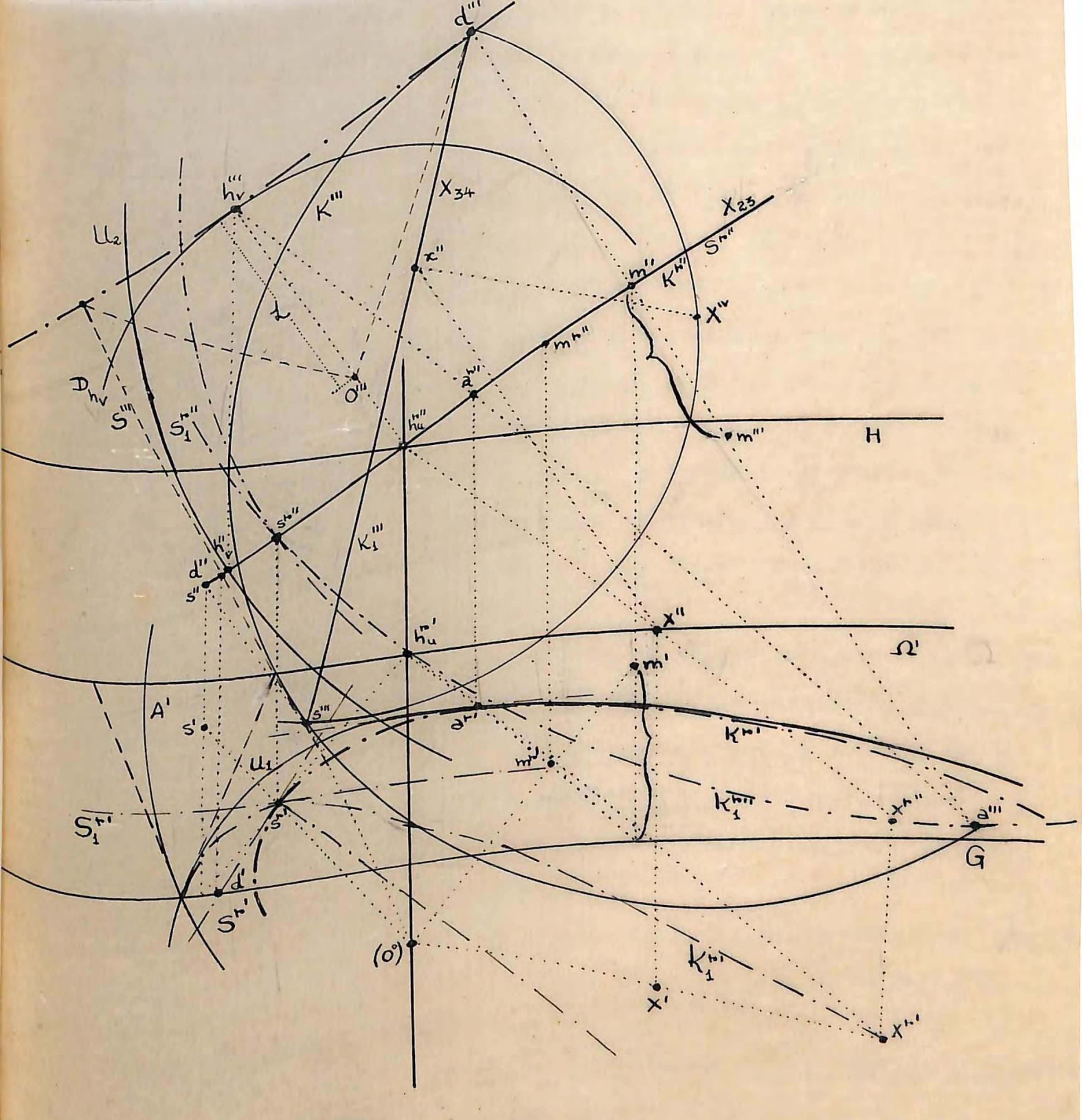


FIG. 6

da normal em $[h_u'' \; m'']$. Na 2ª figura, vemos pois que as figuras do eixo A" e B" tomam direção $[h_u'' \; m'']$, ao passo que o 3º C", é normal. Na 1ª projeção obtem-se mesmo que não se queira, o esboço de π_v desenhado, do centro de colineação o, a direção de A' e B' obtem-se baixando perpendiculares de x^n e y^n sôbre G e unindo os pontos obtidos com h_u'; C' é paralelo a G. Ainda temos que representar agora os pontos extremos (aa),(bb),(cc) dos eixos. Como o plano tangencial do elipsóide em p é paralelo a π, $[p' \parallel G]$ é tangente da 1ª figura do corte principal (a n b). Dela, de seu ponto de contacto p' e do par de diametros conjugados (A' B') podemos achar os pontos extremos a' e b' bem como a" e b" que obter-se-ão por perpendiculares que a elas se tiram. Os planos paralelos a π cortam o elipsóide em circulos. (cc) é o diametro do corte do circulo por n, paralelo a π. Este circulo corta a figura principal (a n b) num diametro (r r), cuja 1ª projeção é o diametro da elipse (a'n'b') paralelo a G. Com o auxilio de retas perpendiculares (para cima) de r' a $[m'' \; h_v'']$ acha-se r" e depois c" fazendo-se girar r" de um ângulo reto de n".

fig 6

Na 2ª projeção o aparente contorno do elipsóide é a elipse com o eixo secundário c"c" e os fócos p",q" (por causa dos cortes circulares paralelos a π). Na 1ª projeção o contorno aparente é determinado pelo diametro p',q' e pelas tangentes paralelas a G e pelo ponto p'.
Por estas explicações não é dificil tratar semelhantemente o caso em que K^r se torna um hiperbolóide bivalve.

A figura 6 nos mostra finalmente o caso, na qual a esfera K (atinge ou toca) o plano de desaparecimento π_v, com isto K^r se torna um parabolóide elíptico.

Denominemos agora, como já foi feito na 3ª figura, esboço e perfil de um ponto p do espaço objeto, por (p' p") e esboço e perfil de uma figura em relêvo p^r por ($p^{r\prime}$ $p^{r\prime\prime}$). Seja dado o par de figuras ($m^{r\prime}$ $m^{r\prime\prime}$) do centro da esfera m. Com isto determinou-se a esfera, pois ela tocará π_v. Acrescentemos atravez do ponto [Om] ao plano normal a π um plano

π_3 como plano lateral para a 3ª projeção normal. Então, teremos que considerar $[h_u'' \; m^{r''}]$ como eixo de projeção X_{23}, e tôdas as projeções normais accessórias. $(m''m')$ e $(m''m''')$ podem ser desenhadas. A tangente D_{h_v} à paralela a X_{23}, constitue a 3ª figura π_v''' do espaço de desaparecimento, e a 3ª figura K''' da esfera (simultaneamente o circulo principal voltado $K = [K\pi_3]$) é o circulo tangente π_v''' com o centro m'''; finalmente acha-se o''' em $[h_u^{r''} | \pi_v''']$ conforme $h_v''' \; o''' = t.$ K vem coincidir com o corte principal do parabolóide em π_3 por causa da colineação central. Por isso, é possivel que o ponto s pode ser determinado por K atravez das projeções s''', s'', s' - ao qual corresponde o vértice s^r de parabolóide (verificar na fig. 6). Denominando u o ponto de contacto da esfera com π_v será u^r o vértice impróprio do parabolóide K^r; $u^{r''}$ é o ponto impróprio de X_{23} e $u^{r'}$ o ponto impróprio de $[m^{r'} \; h_u^{r'}]$. Os (2) circulos esféricos que atravessma os cortes principais de K^r, são K e também o pequeno circulo normal K_1, com o diametro us. Para a cópia (imagem) destes cortes principais representa-se as tangentes S e S_1 nestes circulos nos pontos S e alé, disso sempre um dos pontos dos circulos. Assim, obteve-se para K^r na figura 6 o ponto a^r, tendo-se o plano tangencial paralelo a π; para K_1^r escolhe-se um ponto x de posição qualquer (como x^{IV} no circulo K_1 dobrado para K_1^{IV}).

Também os contornos aparentes de U_1 e U_2 de K^r podem ser mostrados façilmente nas 2 últimas figuras 5 e 6. De acordo com os principios 1 e 5, é pois U_1 o esboço central do equador esférico para o olho 0° e U_2 o contorno central da esfers de h_v.

Obtem-se por isso, na figura 6 o vértice t de U_2, cortando-se a tangente de h_v''' e K''' com X_{23}; $a^{r''}$ é o fôco de U_2.

Afangiorgi
12 de Setembro 1952

F I M

P R I M E I R A   P A R T E

RELAÇÃO DAS PROFESSÔRAS QUE PARTICIPARAM DO CURSO DE MATEMÁTICA

1 - Maria da Conceição B. Correia

2 - Georgeta Coelho Leal

3 - Maria de Lourdes Clementina C. Figueirôa

4 - Maria Cândida de Oliveira Lira

5 - Nuvenil Pereira da Silva

6 - Sebastiana Porpino Estruc

7 - Teresinha Fonsêca dos Santos

8 - Yára Cruz

10 - Miriam Castelo Branco da Boa Viagem

11 - Matilde de Lima Mendes

12 - Maria Leopoldina Albuquerque Brito

13 - Irene Figueirôa Mendes

14 - Amantina Pedroza de Queiroz

15 - Edméa Lopes Pimentel Rosa

16 - Odete Rodrigues de Almeida

17 - Sônia Lins e Silva

18 - Elizete Dourado

****

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
6/8/59 - 3/12/59

" Utilização do Material Cuisinaire "

" OS NÚMEROS EM CÔRES "

Primeira AULA

I - INTRODUÇÃO

a) Diretrizes do Curso.
b) O material Cuisinaire - orígem, importância e construção.
c) Primeiros exercícios.

A) - DIRETRIZES DO CURSO

Em primeiro lugar, necessitamos estabelecer as diretrizes do nosso Curso.

Trabalharemos com um grupo de 16 professôras, as quais ficarão incumbidas de :

a) tomar apontamentos;
b) participar ativamente;
c) meditar e estudar;
d) debater e apresentar sugestões;
e) elaborar relatórios;
f) empregar e difundir os ensinamentos adquiridos.

As ouvintes não poderão participar dos debates, no entanto têm o direito de apresentar dúvidas, sugestões ou críticas por escrito.

B) - O MATERIAL CUISINAIRE - ORIGEM, IMPORTANCIA e CONSTRUÇÃO

No artigo "Novos Rumos no Ensino da Matemática", publicado no Jornal do Comércio de 22/12/57, descreví a construção do material Cuisinaire. Todavia só fiquei realmente interessado, quando ví em Binche (Bélgica), vários professores ensinando crianças de vários níveis com as barras coloridas.

À primeira vista, o material Cuisinaire dá a impressão de ser pueríl e que não se pode ensinar matemática com êle, no entanto é maravilhoso e multivalente. Foi inventado por um professor de THUIN, na Bélgica, Monsieur Cuisinaire o qual possue grande experiência do ensino primário. Êle utilizou as barras inicialmente, tendo em vista alguns objetivos apenas, mas, depois que se difundiu e que outros professores começaram a utilizá-las, então surgiram novas experiências e novas aplicações. O prof. GATTEGNO, da Universidade de Londres, maior autoridade em didática de matemática no mundo, adotou o uso dêste material. Convém frisar que o mesmo além de ser professor, é um bom matemárico. Estudou o material Cuisinaire e observou propriedades e aplicações que o próprio idealizador não tinha previsto. Por isso, espero confiante que vocês, com a experiência que têm de lidar com crianças, vão enriquecer ainda mais a aplicação dêste material.

GATTEGNO tem feito coisas interessantes, anda com uma caixa cheia de barras coloridas, por tôda Europa ministrando cursos. Já esteve na Bélgica, na Itália, na França, Alemanha e na Inglaterra. O mais notável é que deu uma aula a uma turma na Itália, sem saber uma só palavra de italiano. Mostrou que o material pode ser usado sem o professor dizer uma só palavra.

Utilizou-o para surdos-mudos.

Um material didático para ser válido, necessita apresentar as seguintes qualidades :

1 - estar relacionado diretamente às estruturas matemáticas - êste está;
2 - ser um material que desperte o interêsse da criança - êste desperta;
3 - ser um material fácil de carregar - êste o é ;
4 - ser um material barato e que as próprias crianças possam construir - êste o é ;
5 - ser um material que apresente grande multiplicidade de aplicações.

* O material Cuisinaire pode ser usado dêsde o Jardim da infância até o Científico. Nos Cursos Ginasial e Científico, já possuo bôas experiências, e pretendo publicar um trabalho, num futuro próximo. Tenho utilizado para o ensino de progressões aritméticas, geométricas, logarítmos, análise combinatória, áreas e volumes. No Curso Primário, não se pode nem limitar o uso e creio que as professôras do Brasil , vão descobrir uma infinidade de novas aplicações, além daquelas que veremos no nosso curso.

Muitas crianças, não chegam a aprender a Matemática, ou não chegam a gostar desta admirável ciência, porque nesta fase inicial, que é importantíssima, elas não são bem encaminhadas. É necessário justamente que a criança, antes de aprender a noção de número, tenha as noções de ordem e de equivalência. Justamente êste material, possibilita isso, uma vez que está diretamente ligado às estruturas da matemática moderna que são - : as estruturas de ordem, de equivalência e algébrica.

Os professores CHOQUET, JERONNEZ, GATTEGNO, JEAN PIAGET, DIEUDONNÉ e outros, têm feito trabalhos notáveis com relação a didática.

Os psicólogos estudam a evolução do conceito de número, na criança. O matemático estuda as estruturas da matemática e o pedagogo procura relacionar as estruturas matemáticas com os operadores da inteligência da criança.

Quer dizer que, as dificuldades para planejar um curso, consistem em procurar estabelecer, quais as estruturas matemáticas que mais se aproximam das estruturas mentais, existentes no espírito dos alunos.

Quando recebemos um determinado aluno, necessitamos sentir qual a noção que êle deve aprender antes de outras, levando em consideração: - seu nível mental e psicológico, bem como as experiências que o mesmo tem da vida.

Justamente isso, que pretendo fazer no nosso curso. Vou dar a parte de aritmética qualitativa, depois a parte quantitativa, operações com números inteiros e fracionários, com números decimais, áreas, volumes e algumas noções de percentagem.

Quando usamos o material com crianças, nas primeiras aulas, não devemos fazer a associação côr-número. As crianças o receberão apenas como um novo brinquedo. Elas farão coisas interessantes, desenhos, amontoarão algumas barras, construirão fogueiras, garages, castelos, etc. É um perigo, para o sucesso do curso, começar sem deixar a criança brincar livremente. O professor tem uma responsabilidade muito grande, pois precisa planejar tudo, para que as coisas saiam da maneira mais normal, mais simples e espontanea dentro da classe e para evitar perguntas precipitadas, as quais, contribuirão para o fracasso do material.

Por isso é necessário que a pessoa se identifique bem com o uso das barras coloridas, pois as mesmas serão maravilhosas nas mãos de um professor experiente.

O material Cuisinaire é constituido de paralelepípedos retângulos, sendo o menor de todos um cubo de aresta igual a 1 cm.

Essas barras que se chamam <u>barras coloridas</u>, têm 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm, 8cm, 9cm, e 10 cm de comprimento e secção quadrada de $1cm^2$.

Observem o seguinte:

a primeira, a branca 1cm
a segunda, a vermelha 2cm
a terceira, a verde claro 3cm
a quarta, a carmim 4cm
a quinta, a amarela 5cm
a sexta, a verde escuro 6cm
a sétima, a preta 7cm
a oitava, a marron 8cm
a nona, a azul 9cm
a décima, a alaranjada 10cm

Temos portanto, os seguintes grupos:

O grupo da <u>branca</u>, que é a primeira, e o grupo da <u>preta</u> que é a sétima; o grupo das <u>azuis</u>; verde-claro, verde escuro e azul; o grupo das <u>amarelas</u> incluindo, a amarela e a alaranjada; e o grupo das <u>vermelhas</u> compreendendo a vermelha, a carmim e a marrom.

Como vêm é um material muito simples.

C) - <u>VEJAMOS AGORA ALGUNS EXERCÍCIOS</u>:

1) Em primeiro lugar, brinquem com o material procurando formar figuras as mais variadas.
2) Agora procurem uma barra, que seja igual a esta

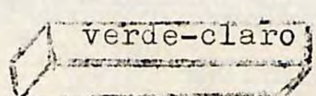


Fig. I.

3) Separem as barras em grupos, pelas côres.
4) Misturem bem as barras. Agora fechem os olhos e procurem grupá-las de acôrdo com os comprimentos. Muito bem! Conseguiram. O que conseguiram observar? - Que as barras de mesmo comprimento têm a mesma côr.

Com êste exercício a criança, faz a associação côr-comprimento, isto é estabelecerá a primeira equivalência: - barras de mesma côr têm o mesmo comprimento e barras de mesmo comprimento têm a mesma côr.

Observem que o material apresenta esta grande vantagem, desenvolve o raciocínio da criança - e é êsse o principal objetivo no ensino da Matemática - desenvolver a capacidade de pensar da criança . Se a criança não adquire a capacidade de pensar por si mesma, fica inutilizada para o resto da vida.

Aprender matemática, não é decorar um amontoado de regras, através do ensino. É sentir, é adquirir noções, é dominar, perceber essas mensagens que são dadas através das regras, através do ensino. Necessitamos facilitar as tomadas de consciência da criança, as quais formarão o seu lastro de conhecimentos matemáticos.

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA

Em 11/8/59

Segunda AULA

Na aula passada, frisei a necessidade de identificar as crianças com as côres e com as noções de posição.

Façamos hoje um exercício, para verificar se as "crianças"- conhecem bem as côres.

Você sabe qual a côr desta barra? verde-claro

- Verde

Que tonalidade de verde? Escuro ou claro ?

- Escuro

E qual a côr desta barra?

- Amarela

Vejamos agora um novo exercício: 5) escôlho uma barra qualquer, por exemplo a azul, e vou procurar duas barras que colocadas " ponta a ponta", fiquem do mesmo comprimento dela. Temos a amarela e a carmim.

Será que poderemos colocar ponta a pontamais de duas barras?

Diga-me quais barras colocou ponta a ponta? - Alaranjado, marrom e vermelho.

6) Consideremos, agora, a barra marrom e procuremos duas barras, que colocadas ponta a ponta, fiquem do mesmo comprimento dela.

- Verde escuro e vermelho .

7) Agora faremos o seguinte : dada esta barra, (alaranjada) procuremos barras que, colocadas ponta a ponta, fiquem do mesmo comprimento dela. Será possível isto ?

- Vejamos: - Alaranjado é igual : -

- Branco e azul
- Vermelho e marrom
- Verde claro e preto
- Carmim e verde escuro
- Amarelo e amarelo
- Verde escuro e carmim
- Preto e verde claro
- Marrom e vermelho
- Azul e branco

Êste grupo vamos chamar de "esquema" do alaranjado.

Podem vocês fazer o mesmo com esta barra azul?

Muito bem. Agora leiam o seu esquema, dizendo as côres.

- Azul é igual : -
- Vermelho e preto
- Carmim e amarelo
- Verde-escuro e verde-claro
- Preto e vermelho
- Branco e marrom
- Verde-claro e verde-escuro
- Amarelo e carmim

Você será capaz agora, de repetir da direita para a esquerda ?

- Marrom e branco
- Amarelo e carmim
- Verde-claro e verde-escuro
- Branco e marrom
- Preto e vermelho
- Verde-escuro e verde-claro
- Carmim e amarelo
- Vermelho e preto
- Azul

8) Procurem agora, fechando os olhos, ver o "esquema". Estão vendo? Observem que o aluno, fazendo êste confronto, está adquirindo as noções de equivalência, ordem e a propriedade comutativa da soma (a ordem das parcelas não altera a soma) .

No exercício que consideramos, como das "crianças" no grupo preta-vermelha, procurou pegar logo a preta. No entanto, desprezou a procurou outra barra, voltando depois para a preta. Por que ? Porque sentiu que já tinha considerado as barras preta e vermelha ; apenas estava diferente da ordem inicial, que era vermelha-preta.

No momento em que ela fez isso, estava dando o primeiro passo para compreender que a ordem das parcelas, não altera a soma, sem conhecer ainda a operação de adição. Os alunos, fazendo muitos dêstes exercícios, adquirem a noção de equivalência, quando observam que duas barras podem, colocadas ponta a ponta, ser iguais a uma outra barra e que há várias duplas de barras que satisfazem essa condição. Devemos fazer muitos exercícios na elaboração dos "esquemas" de tôdas as barras. Êsses exercícios são importantíssimos para o futuro do aluno, pois o mesmo vai praticando ações que servirão para o domínio das operações aritméticas.

9) Se colocarmos as barras vermelha e alaranjada ponta a ponta, formarão um comprimento maior ou menor do que a barra azul ; do que a marrom ? Do que a preta ? Do que a alaranjada e a branca ? Do que a alranjada e a verde-claro ?

10) Consideremos agora a barra azul. É possível encontrar uma que seja igual a ela ? Uma que seja menor ? Uma que seja maior ? Duas que ponta a ponta dêm o mesmo comprimento dela ?

11) Vocês estão vendo esta barra amarela ? E esta qual é ? - Carmim. Olhem, eu coloquei estas duas barras juntas. São do mesmo comprimento ? - NÃO. Será que existe alguma barra, que colocada ponta a ponta com a carmim dê o comprimento da amarela ?

Se vocês considerarem esta barra aquí (verde-escuro) e esta (vermelha) qual a que falta? Esta barra (carmim) colocada ponta a ponta com a vermelha é do mesmo comprimento que a verde?

Vocês devem ter observado que não é necessário a associação número - côr. As "crianças" estão fàcilmente encontrando o que falta para completar a quantidade. Vocês viram, por exemplo, que verde escuro é igual a carmim e vermelho. Se nós considerarmos, por exemplo, esta barra (marrom) e esta (verde claro) qual a que falta? Amarela .... Vocês devem lançar mão da imaginação para fazer variados exercícios dêsse tipo. Agora, vamos fazer o seguinte exercício:

12) Coloquemos ponta a ponta, duas barras. Por exemplo, a vermelha e a preta. Será que existe alguma barra que seja do mesmo comprimento desta? - AZUL.

Vocês vêm que a marrom é igual a vermelha e verde escuro; alaranjado é igual a marrom e vemmelha; e azul é igual a amarela e carmim.

Precisamos compreender que as reações que sentimos, não são as mesmas das crianças. Nós só poderemos julgar o valor das coisas que estão sendo feitas, depois de verificarmos como as crianças agem diante disso. Por isso, aconselho aquí, que alguma professôra se assim o desejar, deve experimentar êstes exercícios com algumas crianças conhecidas, só para ver a reação.

13) Agora, vocês separem uma barra de cada côr. Vocês sabem o que formaram ? - UMA ESCADA. Vocês então vão subir a escada, dizendo as côres:

- Branca
- Vermelha
- Verde claro
- Carmim
- Amarela
- Verde escuro
- Preta
- Marrom
- Azul
- Alaranjado

14) Agora, vejam se são capazes de dizer qual a barra que segue a azul? Qual barra é a maior? Qual é a menor? Qual vem antes da maior? Qual barra segue a menor?

Desçam a escada, dizendo as côres de tôdas as barras. Podem vocês fazer a mesma coisa com os seus olhos fechados, começando com a branca? Começando com a alaranjada? Observemos nossa escada. Quais barras necessitamos para fazermos cada degrau, igual ao alaranjado? Procure-as e coloque-as em seus lugares. Agora retire-as e deixe a escada como ela era antes. Podem vocês agora dizer, qual barra é necessária para a azul? Para a amarela? Para a verde claro?

Não deve haver aquí, repito, associação número-côr. Tôda a vêz que se fizer êstes exercícios, não se deve pensar em número. O exercício deve ser sempre em relação ao concreto.

Na primeira aula, eu forneci os valores das barras, apenas para possibilitar a construção, mas nestes exercícios as "crianças" devem esquecer êsses números.

15) Se considerarmos estas barras, (marrom e verde-escuro) já descobriram uma maneira prática de encontrar uma barra igual a ela? Qual é a maneira mais simples de fazer? - É considerar logo a maior de tôdas. Vocês viram, que a barra maior de tôdas (a alaranjada), é me-

nor do que estas duas barras colocadas ponta a ponta, evidentemente, não existirá aquí no conjunto, nenhuma outra que possa ser do mesmo comprimento delas.

Há alguma barra aquí no conjunto, igual a azul colocada ponta a ponta com a carmim? Não há, por que? Porque a azul fica junto da alaranjada e já vimos antes, que a azul com a branca era igual a alaranjada. E se coloquei a carmim, como é que pode ser?

16) Tomem qualquer par de barras, coloque-as ponta a ponta e procurem todos os pares de barras que ponta a ponta, dêm o mesmo comprimento.

Observe que estão fazendo um grande progresso, mas infelizmente, algumas razões contribuem para que o nosso êxito não seja completo. Elas são:

1º - o fato das professôras não poderem reagir como criança;

2º - todos aquí têm conhecimentos de matemática, o que quebra um pouco o "encanto" das descobertas;

3º - não podemos fazer um grande número de exercícios, pois perderíamos muito tempo.

Lembro às professôras que o material - Cuisinaire, está intimamente relacionado com as estruturas da matemática, o que possibilita o desenvolvimento do aluno.

É bem verdade, que do início, encontraremos algumas dificuldades, mas as mesmas serão completamente superadas.

A maior dificuldade para algumas será talvez, sair da inércia e da rotina, pela adoção de novas técnicas de ensino.

O método dinâmico, exige um grande esfôrço por parte do mestre e obriga o mesmo a todo dia se aperfeiçoar e adquirir novos conhecimentos.

Prezadas colegas, por hoje é só.

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 13/8/959

Terceira AULA

Vamos continuar o nosso curso. Na aula passada fizemos alguns exercícios com o material Cuisinaire.

Vamos, inicialmente, fazer uma recordação do que foi dito. Lembram-se quantos são os grupos?

- Cinco. (Branco, preto, azuis, vermelhas, amarelas).

Qual é a menor barra?

- Branca.

Qual a mais próxima da menor?

- Vermelha.

Qual a mais próxima da maior?

- Azul.

(O professor apresenta várias barras e as "alunas" vão dizendo as côres das mesmas e fazendo as comparações)

Vamos construir a escada?

- Alaranjado, azul, marrom, preto, verde-escuro, amarela, carmim, verde-claro, vermelha, branca.

É possível deseer a escada a partir do degrau marrom?

- Marrom, preta, verde-escuro, amarela, carmim, verde-claro , vermelha, branca.

Vamos então fazer mais alguns exercícios.

17) Vamos ver se é possível formarmos mentalmente o esquema correspondente a esta barra (verde-escuro). Já sabem como é feito; devemos procurar duas barras que colocadas ponta a ponta fiquem do mesmo comprimento desta. Vamos ver.

- Verde-escuro é igual a amarelo e branco;
verde-claro e verde-claro;
vermelho e carmim ;
branco e amarelo ;
carmim e vermelho .

Vamos repetir o esquema. Tôdas as "alunas" repetem. Não devemos pensar em número. Para nós é um pouco difícil, porque: - primeiro, não temos tempo para fazermos muitos exercícios; segundo já está arraigado em nosso espírito o conceito de número.

Vamos fazer outro esquema. Temos aqui a barra preta. A que é igual a barra preta?

- É igual a branca e verde-escuro;
verde-escuro e branca;
vermelha e amarela;
amarela e vermelha;
verde-claro e carmim;
carmim e verde-claro.

Agora, observem: já perceberam as noções que a criança adquire com êsse exercício? Só as noções de equivalência, e de ordem. Vejamos se as colegas vão ficar tão precisas e tão rápidas como as crianças. A primeira coisa que devemos fazer quando mostre uma barra é verificar qual a que precede.

Então, vejamos: - A barra marrom é igual a:

branca e preta;
preta e branca;
vermelha e verde-escuro?
verde-escuro e vermelha;
verde-claro e amarela;
amarela e verde claro;
carmim e carmim.

A criança depois de alguns exercícios, descobre a lei de formação do esquema. Considera a barra que precede a escolhida, colocando-a ponta a ponta com a branca. Depois procura o novo par, usando o mesmo raciocínio. Então a construção do modêlo é simples.

Vamos ver esta barra (azul). Se eu considero a barra branca, qual a que falta para a azul ?

- Marrom .
Se considero a vermelha, qual a que falta?
- Preta.
Se considero a verde-claro?
- Falta verde-escuro.

(O professor repete o mesmo exercício com barras de diferentes côres).

Eu procuro fazer tudo dentro da lei que está regendo meu trabalho. O que está regendo isso que estamos fazendo é justamente a comparação obtida por meio de comprimentos, e de côres. Quando pergunto qual a que falta, poderemos fazer o confronto mental dessa barra com outras barras. Digo azul, então vejo na escada o azul e procuro o que falta para a alaranjada. Falta a branca. Se dou a branca o que falta para alaranjado, falta a azul. Se dou vermelha falta a marron; se dou a preta falta a verde-claro, e assim por diante.

18) Todos os exercícios que vamos praticar, são feitos sempre colocando uma barra num extremo, outra noutro extremo, sôbre uma barra escolhida. Agora vamos fazer mentalmente. Tenho a barra alaranjada, coloco num extremo verde-escuro e noutro a branca, qual a que falta?

- Verde-claro.
Êsse tipo de exercício exige muita prática.

Vejamos, agora o seguinte exercício:

Duas barras são colocadas ponta a ponta, e sôbre os extremos da barra obtida, colocamos duas novas barras. Determinar qual barra deve ser intercalada.

Por exemplo: - temos as barras verde-claro e a amarela, coloco num extremo a barra branca e noutro extremo a barra vermelha.

Qual a que falta ?

- Amarela.

Coloco a amarela ponta a ponta com a azul, coloco num extremo a barra alaranjada e noutra extremo a barra verde-claro.

Qual a que falta?

- Branca.

Coloco a barra preta ponta a ponta com a barra verde-claro . Num extremo coloco a vermelha e noutro extremo a carmim, qual a que falta?

- Outra carmim.

(O professor repete o mesmo exercício com barras diferentes).

Tudo é feito por comparação e confronto, únicos instrumentos que a criança tem para lançar mão. Como nós não estamos bastante práticos naquelas técnicas e não aprendemos por êsse método, precisamos adaptar-nos a isso. Para a criança será mais fácil. Experimentei com um garoto de nove anos, apesar do mesmo possuir alguns conhecimentos de aritmética, fêz com grande rapidez. Nós não acertamos com rapidez, primeiro, porque queremos advinhar, - segundo, porque queremos lançar mão dos nossos conhecimentos aritméticos.

Frisei, no início, que iria fazer uma demonstração do que se poderia fazer, não disse que deveríamos seguir à risca o que fazemos aqui, porque é preciso adaptar de acôrdo com a personalidade, as condições da classe. Apenas vamos dar os marcos do caminho a percorrer, e cada professôra, de per si, com sua experiência, procurará adaptar e realizar isso. Estamos fazendo apenas uma comunicação de experiências.

Devemos praticar muito os exercícios dados. Observem bem que a criança determinará o valor da barra com raciocínio, e não por advinhação. Êsse material ajuda a desenvolver a capacidade de pensar por si mesmo e é para isto que deveremos lutar para que as crianças adquiram essa capacidade, porque decorar não vale nada, não é matemárica. Quando aplicar o material à criança, a professôra deve ter me mente o raciocínio que a mesma precisa usar para chegar a essas conclusões. Ela vai ver quais as noções de matemárica, quais as relações que a criança já está aprendendo com o material porque quando a criança fôr capaz de fazer isso que estamos fazendo, com precisão, com rapidez, podemos estar certos de que no seu espírito já há êsse raciocínio.

Estou vendo uma criança imaginária se desenvolvendo, como seu raciocínio está melhorando. No comêço só via barras de côres, fizemos o raciocínio, a equivalência mais simples, associação côr-comprimento. Fomos aos poucos mostrando como era possível colocar barras ponta a ponta. Tudo isso vai sendo feito para que ela vá se desenvolvendo mentalmente. Então, daremos uma barra e pediremos a criança que verifique se é possível cobrir a barra só com barrinhas ver melhas. Ela colocará uma barra vermelha, outra barra vermelha, e assim por diante. Ela verá que é possível cobrir a barra marron com barras vermelhas. (Verá que dois mais dois, mais dois, mais dois , igual a oito). Ela está tendo, sob uma forma muito simples, muito rudimentar, a primeira noção de repetição do valor constante da parcela (interação) e vendo que pode substituir isso por outro valor a que chamaremos, no futuro, de produto. Então veremos se ela pode fazer a mesma coisa usando a barra verde, ela verá que não é possível. Estamos preparando a criança para a divisão, com resto. Essas coisas vamos incutindo no espírito da criança sem ela saber. Nós poderemos fazer muitos exercícios dêsse tipo: dada uma barra pedir que a criança cubra essa barra com barras da mesma côr. Posso perguntar se é possível cobrir a barra azul com a barra alaranjada, então, ela vai ter o conceito de medição e razão, sem perceber. O que as professôras precisam ter em mente quando usarem êsse material, é ver do alto essas coisas que a criança está fazendo, observar o que se está passando e prepará-la para alcançar a méta que nós desejamos.

Pergunto: é possível cobrir com barras brancas a barra verde-claro?

- É.

Qualquer barra pode ser coberta com a barra branca. Peço, então, que cubram tôdas as barras com a vermelha e as crianças verão que nem tôdas as barras podem ser cobertas com a barra vermelha.

As professôras precisam convencer-se de que usar êsse material ou qualquer material didático, sem plena segurança do que aquilo pode dar, de que a criança está aprendendo, do que está despertando na criança, o aperfeiçoamento que ela está tendo, será uma coisa inútil, absolutamente inútil e talvez até prejudicial.

Agora vamos brincar de fazer trem. Poderemos fazer um trem com barras vermelhas. Se quizermos diferenciar diremos que a máquina vai ser a barra verde-claro. Êsse trem aparentemente não tem grande interêsse, mas vai dar várias noções à criança. Então , nós temos um trem construído com barras vermelhas. Então, pediremos que construa um trem com barras verde-claro, a criança constrói. Pergunto: é possível construir um trem com barras verde-claro que seja igual ao trem de barras vermelhas? Ela verá que não é possível, porque se substituíssemos êsse trenzinho de barras verde-claro por uma barra correspondente, que coubesse, teríamos a barra azul e já tínhamos visto que com barras vermelhas não poderemos cobrir a barra azul.

É só por hoje.

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA

Em 18/8/959

Quarta AULA

Façamos o seguinte exercício:

Dada a barra carmim, procuremos tôdas as barras que colocadas ponta a ponta fiquem do mesmo comprimento dela. Devemos fazer êste mesmo exercício com as barras verde-escuro, com a marrom, com a amarela e a preta.

Observem bem, que o exercício consiste no seguinte: pedimos a cada aluno que escolha uma barra arbitrària e que procure as barras que colocadas ponta a ponta sejam iguais à que êle escolheu, quer dizer, fique com o mesmo comprimento. Êste é o nosso exercício. Agora nós já podemos escolher mais de duas barras, tôdas até iguais. Êste exercício é de vital importância, porque vai preparando o aluno para a compreensão dos conceitos: de número, de adição, de simbolização. A criança confrontando uma barra determinada, com várias barras brancas, percebe quantas vêzes determinada barra contém uma barra branca, isso vai facilitar o nosso trabalho quando convencionarmos o valor da barra branca.

Agora vamos ler os esquemas:

- Carmim é igual a
  - branca e verde claro
  - vermalha e vermelha
  - branca - branca - branca - branca.

- Verde escuro é igual a
  - verde claro e verde claro
  - amarelo e branco
  - carmim e vermelho
  - branco e amarelo
  - branco - branco - branco - branco- branco - branco .

- Amarelo é igual a
  - branco e carmim
  - carmim e branco
  - verde-claro e vermelho
  - branco - branco - branco - branco e branco .

- Marrom é igual a
  - amarelo e verde-claro
  - carmim e carmim
  - preta e branca
  - verde-escuro e vermelha
  - branca - branca - branca - branca - branca - branca - branca e branca .

- Preta é igual a
  - amarela e vermelha
  - verde-escuro e branca
  - verde-claro e carmim
  - branca - branca - branca - branca - branca - branca e branca .

Podemos observar que uma aluna escolheu a verde-escuro, outra escolheu a barra marrom, outra escolheu a barra amarela, outra a barra carmim e finalmente uma outra escolheu a barra preta, portanto, escolheram barras de côres diferentes, cada uma formou seu esquema. Agora, o que deveremos fazer? Nós deveremos pedir que as alunas troquem de posição e verifiquem se o esquema de sua colega está correto, para que não fique monótono, se não estiver exato a aluna, então sugere à colega que modifique o valor das barras. Feito isso repetirão os esquemas sem ver as barras, procurando dizer as côres das barras que colocadas ponta a ponta fiquem iguais a determinada barra escolhida. Creio que essa parte já está bastante esclarecida e ninguém tem mais dúvida, quanto ao modo de proceder.

Agora, façamos o seguinte: vamos escolher, por exemplo, uma barra qualquer, a barra verde-escuro e vamos procurar quantas barras brancas devem ser colocadas ponta a ponta para ficar do mesmo comprimento dela. Então a aluna vai procurando as barras - ela ainda não sabe a representação - e experimentando-as. Podemos fazer a mesma coisa com tôdas as barras na sequência que nós conhecemos, a vermelha, a verde, a carmim, a amarela, a verde-claro, a preta, etc. Feita a compração, então faremos o seguinte: mandaremos a aluna formar sua escada. Lembram-se da escada? Então ela vai colocar a barra branca, em seguida a vermelha, a verde-claro, a carmim, a amarela, a verde-escuro, a preta, a marrom, a azul e a alaranjada. A aluna formou a escada, pedimos então que ela repita aquêle exercício já famoso, entre nós, de subir e descer a escada, de confrontar e comparar. Depois diremos à aluna: esta barra aqui que nós estamos chamando de barra branca, essa aqui de vermelha e essa que nós estamos chamando de ver-de-claro poderemos chamar essas barras com outros nomes, poderemos convencionar outros nomes em vez dêstes para nomear essas barras, por exemplo, vamos chamar essa barra branca de um (1), vamos representar essa barra por um sinal convencional qualquer. Poderemos pedir à aluna que invente um sinal, cada aluna sugerirá um sinal diferente, e depois, como uma espécie de uniformização o professor sugere um sinal conhecido. Quer dizer, essa barra (branca) vamos representar por meio dêsse sinal que vamos chamar de um (1), em vez de barra branca, diremos um (1); a barra vermelha, em vez de chamarmos vermelha, nós poderemos dar um nome qualquer, por exemplo, dois (2). Nós descobriremos, então um sinal para representarmos tôdas as barras. Observem que o aluno não está aprendendo a contar, <u>está apenas utilizando novas convenções</u>.

É preciso ficar patente entre nós o seguinte: é que muitas vêzes confunde-se <u>contar</u> com <u>cantar</u>; as crianças, normalmente <u>cantam</u>, não <u>contam</u> e muitas vêzes as pessoas pensam que pelo fato de a criança tagarelar os nomes dos números até 50, a criança sabe contar. Pedindo-se 17 objetos a um dêsses garotos, ficam indecisos em mostrar a pluralidade suscitada. É necessário que a criança sinta perfeitamente, qual a pluralidade, que o sinal convencional representa.

Estávamos justamente estabelecendo novas convenções, em vez de barra branca, diremos 1, em vez de vermelha, diremos 2, isso com o objetivo de fazer com que a criança aprenda êsses nomes, de fazer com que a criança compreenda êsses sinais para então relacionar êsse conjunto novo, porque contar, em última análise, é fazer a correspondência entre os elementos de dois conjuntos.

Então teremos o seguinte:

Branco .... 1 (um)
Vermelha .... 2 (dois)
Verde-claro ...... 3 (três)
Carmim .... 4 (quatro)
Amarela .... 5 (cinco)

Verde-escuro .... 6 (seis)
Preta .... 7 (sete)
Marrom .... 8 (oito)
Azul .... 9 (nove)
Alaranjada ....10 (dez)

Observem, que o nosso objetivo foi apenas fazer com que a criança adquirisse termos novos, aumentasse seu vocabulário, nada mais, de agora por diante, mostro à criança aquí esta barra e ao invés de a criança dizer preta, ela diz 7 (sete), em vez de azul, ela dirá 9 (nove). Feito isso, a criança já sabendo o nome das barras, pedimos à mesma que faça os esquemas novamente, com a barra preta, por exemplo, com a barra verde-claro, com a amarela e assim por diante. Exemplificando, vamos fazer o esquema com a barra verde-claro:

Verde-claro é igual a - vermelho e branco
- branco e vermelho
- branco - branco e branco.

A criança aprende a somar, a subtrair, a multiplicar antes de saber os números das operações, apenas trabalha com sinais, é apenas um jôgo de simbolização, aprende tabuada antes de saber que existe tabuada. Em vez de usarmos a expressão, três é igual a dois " e " um, devemos usar a expressão: três é igual a dois "mais" um. Para a criança é apenas um nome a mais, um sinal a mais, não vale nada o sinal, a palavra não tem significação nenhuma, porque poderia ser outra palavra, o que interessa é a ação que está escondida por traz dessa palavra, dêsse sinal. A criança deve ser despertada para as ações suscitadas por essas palavras e por êsses sinais. Não adianta esclarecimentos de ordem teórica. Ela necessita viver tôdas as ações. Os esclarecimentos e os desenvolvimentos vão surgindo à proporção que o curso vai se desenvolvendo, daí a razão do fracasso do ensino da matemárica, é que, muitas vêzes a pessoa recebe excesso de esclarecimentos, vamos dizer assim, excesso de expressões, de palavras que não entende, que não pode entender porque essas palavras ficam sem suscitar as ações correspondentes.

O (+) e o (-) funcionam como verbos na gramática da matemática.

Com o que fizemos até aqui, podem ficar certas, de que a criança já adquiriu noção de adição. Estou fazendo com que a criança adquira o contrôle dos símbolos.

Quando ensinamos no 3º ano científico noção de limite, noção de derivada, de integral, estamos fazendo com que o aluno aprenda essa nova simbolização, é apenas uma mecanização, uma aquisição de vocabulário, êle não poderá perceber a significação de limite ou de uma integral aí nêsse estágio do curso, então quando êle entra na Faculdade ou em curso mais desenvolvido êle vai ver espantado a significação de todos os símbolos que aprendeu. Isso é o mesmo caso de um indivíduo que nunca viu um carro, êle tem logo a intenção de perguntar o nome daquilo, êle não quer saber como se movimenta o carro, que se fôssemos dar a êle nesse instante todos os esclarecimentos, êle não entenderia nada. À proporção que êle vai tendo mais conhecimentos a respêito do carro, e à proporção que vai tendo mais curiosidade de conhecer certos aspectos sentirá aí necessidade de aprender como dirigir o carro, quererá saber quais as peças do carro, como o motor funciona. À proporção que vai se aprofundando, as ações vão sendo suscitadas e êle vai querendo cada vez mais se aprofundar em conhecimentos. Assim acontece também na matemática.

Depois que sentimos que a criança compreendeu, que ela guardou essas palavras novas, êsses sinais, devemos utilizar outros materiais, como pedrinhas, bolinhas, etc., para fazermos exercícios de correspondência. Por exemplo, se ela coloca essa barra carmim, ela escreverá: 4 = 1 + 1 + 1 + 1 . Então ela tem justamente essa representação simbólica. Feito isso nós poderemos agora entrar na parte de cálculo, fazer com que a criança sinta quantas barrinhas brancas correspondem a essa barra vermelha. Quando chamei a barra vermelha de 2, significa que corresponde a duas barras dessas, (brancas); essa barra 3 corresponde a três barrinhas brancas e assim por diante. Depois do conceito, depois de darmos essas noções é que começamos a construir êsses esquemas para findar a parte de operação até 10, e a criança com êsses exercícios irá aprender tôda a tabuada. No esquema da preta, ela aprenderá, por exemplo, várias combinações dando o resultado 7. Depois para introduzirmos o sinal menos nós faremos assim: tomamos uma barra carmim, e perguntaremos se colocada uma barra vermelha em cima quanto vale a parte que não está coberta. Vale justamente 2 (dois), vale uma barra vermelha, nós então utilizaremos um novo símbolo, (-) (4 - 2 = 2). Devemos ler 4 menos 2 igual a dois.

Se eu tenho a barra amarela e coloco a vermelha em cima, como faremos a representação simbólica? Será: 5 - 2 = 3 . Se coloco a barra verde-escuro por cima da barra carmim? Como faremos a representação? Será: 6 - 4 = 2.

Por hoje, sras. professôras, é só.

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA

Em 20/8/959

Quinta AULA

Faremos hoje uma exposição rápida sôbre alguns aspectos da Matemática. Veremos a diferença entre número e algarismo, sistema de numeração e a conceituação das operações. O nosso objetivo é fornecer elementos para melhorar a compreensão do uso do material Cuisinaire.

Observem bem: a matemática não foi sempre conhecida como o é, hoje. Houve época em que o homem não sabia sequer contar. Não sabia, ainda, representar as quantidades por meio de sinais convencionais, nem fazer corresponder cada sinal de um determinado nome . Não havia convenção de espécie alguma, estabelecida; a Matemática não existia portanto para o homem. A humanidade nessa época, nessa fase pré-histórica, já sentia a noção de grandeza. Como? Por que ? De um certo modo, fàcilmente, pois, quando procurava, o homem primitivo, um buraco na rocha para se abrigar, êle já percebia que êsse buraco, por vêzes, não era suficiente para abrigá-lo a sí e abrigar os seus. Então êle já possuía a noção de grandeza. Quando êle procurava, por exemplo, no rio próximo uma determinada quantidade de peixe, êle já sabia, êle já sentia, qual a quantidade que devia levar para casa. Êle sentia, mas não sabia representá-la por um sinal. Êle sabia que determinada quantidade era insuficiente para satisfazer a fome dos seus. Quando êle se deparava com animais na floresta, sabia se podia ou não enfrentá-los, Isso tudo já existia, desde essa época pré-histórica, o homem possuia embora sem definir, a noção de grandeza. Noção realmente perceptível porém indefinível.

Em qualquer curso de Matemática, devemos considerar a noção de grandeza, como um conceito primitivo. Não se pode definir grandeza como sendo "tudo aquilo que pode ser contado, pesado e medido!" O que é pesar? O que é medir? O que é contar?

O homem para chegar até a idéia abstrata de número, passou por várias fases : observação, seleção e grupamento e abstração .

Nos primeiros contáctos com a natureza percebeu entre elementos isolados certas analogias e os grupou instintivamente sob as denominações comuns de homens, pássaros, cavalos, peixes, plantas, pedras, flôres, etc.

Os homens impulsionados pelas necessidades de subsistência e defesa, reuniram-se sob o comando do mais forte, formando as sociedades rudimentares. Selecionam então os animais e as plantas de acôrdo com as utilidades, surgindo como consequências as criações de carneiros, gado, camelos, cavalos, aves, e as plantações de diversos cereais, como o trigo.

O homem sentiu que cada coisa ou ser dá a idéia de unidade. Várias coisas ou sêres sugerem a idéia de pluralidade e ao considerá-las juntas obtem a noção de conjunto, reunião, classe, agregado ou coleção.

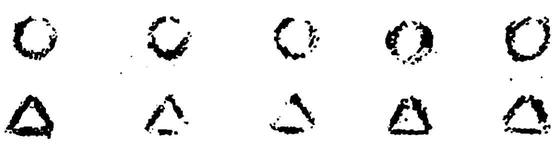
Nesta época, os pastores necessitavam de uma excelente memória. Diàriamente, quando iam recolher os rebanhos, faziam passar os carneiros por uma porteira estreita e iam observando cada animal: - passam o da mancha na orelha, o malhado, o cotó, ... até o último .

Um dia um pastor inteligente, colocou perto da entrada um monte seixos, e a cada carneiro que passava fazia corresponder um seixo, o qual colocava dentro de uma bolsa de couro; recolhidos todos os carneiros ficou com uma coleção de seixos. Daí por diante libertaram-se os pastores da necessidade de conhecer cada animal. Bastava passar um seixo de uma bolsa para outra, a medida que os carneiros entravam no cercado. Se ao último carneiro correspondesse o último seixo, então não faltavam carneiros.

Passados todos os carneiros se ainda sobrassem seixos, era porque faltavam carneiros. Ainda havia a possibilidade de estar passando carneiros e não existirem mais seixos. Neste caso estavam passando mais carneiros do que êle possuía, possívelmente os do vizinho.

Com essa simples correspondência entre coleções constituídas de elementos de naturezas tão diversas, como carneiros e seixos, surge o conceito abstrato de número.

Consideremos duas coleções:



Observem que a cada elemento dessa coleção ( ), corresponde um elemento da outra ( ) e vice-versa. Êste tipo de correspondência é o que nós chamamos de <u>correspondência bi-unívoca</u>. Chamaremos de agora em diante, êsses conjuntos de <u>coordenáveis</u>, porque a cada elemento de um dêles corresponde um e um só do outro conjunto e vice-versa.

Sentimos que êles possuem algo em comum, independente da forma e da natureza dos elementos considerados. Êsse ente abstrato comum a vários conjuntos coordenáveis, chamaremos de <u>número natural</u>.

Depois que o homem abstraiu a idéia de número começou a sentir a necessidade de representá-lo por meio de sinais e de sons orais, para facilitarem as suas transações comerciais e os seus estudos da natureza.

Professôra, vamos admitir que a senhora fôsse fazendeira no Antigo Egito. Caso desejasse comprar uma certa quantidade de carneiros, como fazer o vendedor sentir a quantidade desejada?

Admitindo que não existiam nem palavras, nem sinais convencionais para representaem os números. Bem, a senhora poderia ir ao cercado e aí separar a quantidade de carneiros desejada, ou então mostrar ao vendedor um certa coleção de seixos correspondente a de carneiros.

Vejam bem, êstes processos são bastante complicados,não acham? Êles exigiriam sempre a presença da profesôra, para a realização do negócio ou de levar sempre consigo uma bolsa contendo grande quantidade de seixos.

Caso a professôra, desejasse comprar mais carneiros do que seixos pudesse carregar ou só que os carneiros existentes no cercado? Como fazer agora o vendedor, saber a quantidade desejada? No entanto, tudo, poderia ter sido tão simples, bastando para isso que num dia a professôra tivesse convencionado com o vendedor que aquela quantidade seria representada pelo sinal <u>S</u> e correspondesse a palavra Menfis.

Daquela data em diante, tôda vez que a professôra desejasse comprar aquela quantidade de carneiros, bastaria mostrar ao vendedor o sinal convencionado ou pronunciar a palavra Menfis. Não precisava mais a sua presença, pois bastaria mandar um servo ou um amigo com um papiro desenhado o sinal ou mandar pronunciar diante do vendedor a palavra mágica.

O vendedor sentiria então de uma maneira bastante prática e simples a quantidade desejada. Disto concluimos, que há necessidade de corresponder a cada quantidade um sinal e uma palavra.

Depois que o homem começou a inventar sinais, verificou que o problema era muito mais complexo, pois era necessário com poucos sinais e com poucas palavras representar qualquer quantidade por mais elementos que ela possua.

Os sinais convencionados receberam o nome de algarismos. O vocábulo algarismo vem do persa KHARIZMI, região da Ásia Central, através do árabe AL-KHARIZMI, natural de Kharizmi, sobrenome do matemático muçulmano ABUL JAFAR MOAMED IBN MUSA.

Aquêles sinais foram idealizados pelos indús e introduzidos na Península Ibérica, pelos árabes. Um monge francês GEBERT durante uma viagem à Espanha, pelo ano 980, aprendeu os sinais usados pelos árabes, e quando mais tarde (999) foi eleito papa sob o nome de SILVESTRE II, adotou-os.

Para conseguirmos com os sinais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 e com poucas palavras, representar qualquer número por maior que êle seja, é necessário estabelecermos algumas convenções. Criaremos um sistema de numeração que é um conjunto limitado de sinais convenções e sons orais utilizados para a representação simbólica dos números, por mais elementos que êles possuam.

O homem obteve a idéia fundamental da numeração, observando que os indivíduos são reunidos em famílias, as famílias em tribos, as tribos em cidades, as cidades em nações, etc.

Obedecendo a esta indicação prática, procurou grupar os números em coleções de unidades simples, e as unidades gradualmente compostas foram constituidas de um modo regular, tomado sempre o número de unidades (simples e compostas) de uma ordem qualquer para constituirem a de ordem imediatamente superior.

Era necessário então, escolher uma quantidade padrão, para indicar quantas unidades de uma ordem, formariam uma unidade de ordem imediatamente superior. Foi escolhida então, uma quantidade correspondente a dos dedos das mãos. O homem foi levado a isto, pelas seguintes razões:

a) - já estava acostumado nas suas transações diárias, a corresponder os elementos de uma coleção qualquer, com os dedos das mãos;

b) - era a coleção mais fácil de carregar; e de utilizar nos momentos de necessidade;.

Os babilônicos usavam o sistema de base sessenta. Os francos usavam possívelmente o sistema duodecimal.

Vejamos agora alguma coisa sôbre as operações aritméticas.

A primeira operação aritmética que se conheceu foi a adição. Para se resolver esta operação sempre se recorreu a elementos concretos, uma vez que não se havia chegado a um grau suficiente de abstração. Na América os Incas, que alcançaram um elevado nível de cultura, praticavam a adição fazendo nós em cordas de vivas côres. A adição é a operação mais simples da qual tôdas as outras de pendem. A idéia de adicionar ou somar, está subordinada diretamente a noção de contagem.

A adição pode ser definida como sendo a operação, que tem por objetivo, determinar o número de elementos da coleção constituída por todos os elementos e sòmente êstes, de duas ou mais coleções dadas.

Admitamos que a professôra Leopoldina possue 10 livros de Matemática, e compre mais 4 (quatro). Ficará com 14 livros. A quantidade que ela possuía é o adicionando (10) e a quantidade comprada (4) é o adicionador e a quantidade resultante é o total ou soma (14).

Temos $10 + 4 = 14$

Observem que o adicionando exerce sempre o papel passivo, enquanto o adicionador o papel ativo.

Admitamos que abrindo um livro, alguém encontre a seguinte adição:

$12 + \quad = 15$ Conhecemos uma parcela, e o total e não sabemos o valor da outra parcela. Faríamos possìvelmente a seguinte pergunta: Qual o número que devemos somar a 12 para obtermos 15? O homem resolveu êste problema criando uma nova operação chamada subtração. Poderemos escrever assim: $15 - 12 = 3$. O 15 passou a receber o nome de minuendo, o 12 o subtraendo e o 3 resto, excesso ou diferença. Devemos ler: quinze menos doze, é igual a três. Podemos portanto enunciar a seguinte definição: Subtração é a operação que tem por objetivo, dados a soma de dois números e um dêles, determinar o outro.

Na prática da adição surgiu um novo problema: uma adição de parcelas iguais. Por exemplo: $8 + 8 + 8 + 8 = 32$. Os matemáticos procuraram representar esta adição de parcelas iguais, sob uma forma mais simples, surgindo dêste modo uma nova operação chamada multiplicação. Escrevemos 4 seguido de um x ou um ponto . e do valor da parcela, assim: $4 \times 8 = 32$. Devemos ler: Quatro multiplicado por oito igual a 32. Portanto multiplicação é a operação, que tem por objetivo determinar uma soma de tantas parcelas iguais a um número (multiplicando), quantas são as unidades de outro (multiplicador). O multiplicador será sempre abstrato, podendo no entanto o multiplicando ser concreto ou abstrato, dependendo de vir ou não seguido de unidade.

Exs: 3 x 5 livros (multiplicando concreto)

3 x 8 (multiplicando abstrato)

Quando considerarmos um produto, no qual os fatôres são todos iguais, poderemos simbolizá-lo sob uma forma mais simples. Ex: $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$. Poderemos escrever o fator 7 e a direita e um pouco acima um número que contenha tantas unidades quantos são os fatôres considerados.

$$7^4 = 2401$$

O 7 recebeu o nome de base, o 4 expoente e o 2401 potência. A potenciação deu orígem a duas novas operações: radiciação e logarítmação. Admitamos que não conhecemos o valor da base.

Ex: $\cdot^4 = 2401$. É evidente que faríamos a seguinte pergunta: Qual o número que deve ser elevado a quarta potência, para fornecer o valor 2401 ? Os matemáticos conceberam um novo símbolo operatório, chamado radical. Então - Na radiciação portanto, conhecemos o valor da potência e do expoente e desconhecemos o valor da base.

Admitamos, agora que não conhecemos o valor do expoente.

Ex: $7^4 = 2401$. Faríamos agora a seguinte pergunta: A que número devemos elevar o 7, para obtermos 2401 ? Êste problema deu orígem a uma nova operação, chamada logarítmação.

Portanto, na logarítmação conhecemos o valor da base e da potência, e temos por objetivo determinar o valor do expoente.

Para finalizar estas simples considerações, vejamos a divisão. Os babilônicos e indús, foram os primeiros em conhecer a divisão. Os métodos atuais para resolver a divisão se derivam dos indús, que dispunham sôbre a areia os elementos da operação: dividendo, divisor, quociente e resto. Êstes conhecimentos foram transmitidos à Europa pelo árabes.

Consideremos o seguinte produto: 8 x . = 32 . Faríamos imediatamente a seguinte pergunta: por qual número devo multiplicar 8, para obter 32 ? Para resolver êste problema, surgiu uma nova operação chamada divisão. Poderemos escrever: 32 : 8 = 4 . O produto recebe o nome de dividendo, o fator conhecido o nome de divisor e o fator procurado o nome de quociente. Poderemos então enunciar a seguinte definição: divisão é a operação que tem por objetivo dado o produto de dois números e um dêles, determinar o outro. Poderemos também desejar saber, quantas vêzes um número contém outro. Nêste caso, poderemos admitir duas hipóteses:

a) - O número contém em outro um número inteiro de vêzes
Ex: - 45 :9 Nêste caso diremos que a divisão é exata.

b) - O número não contém outro um número inteiro de vêzes.
Ex. 47 : 9 Nêste caso a divisão é dita aproximada.

Na outra aula, tivemos oportunidade de falar na necessidade de inventar-se novos sinais, novas palavras; por exemplo: ao invés de barra verde-claro chamaremos barra três e representaremos por êsse sinal 3, que podia ser qualquer outro. Se nós considerarmos essa barra branca irei representá-la por meio de sinal (1) irei chamar (um); essa barra vermelha vou representar por meio de um outro sinal a que chamarei de 2, e assim sucessivamente. Ela está sentindo o que é aquilo, já está percebendo o que são as côres e, por si mesma, ela irá fazer vários exercícios e verá, por exemplo, que a barra verde-claro é representada por êsse número, 3. Se ela toma, por exemplo, a barra carmim, (4) e coloca uma barra branca em cima, ela mesmo irá procurar outra que colocada junto da branca dê o mesmo comprimento da de carmim. Ela mesma irá procurar qual a barra que colocada ponta a ponta deu isso, representará por aquêle sinal a que chamei de 4 e dirá: "então posso chamar de 4 e representar por aquêle sinal". Se eu considerar, por exemplo a barra amarela e disser: procure as barras que colocadas ponta a ponta que dêem o comprimento dela. A criança encontrará, por exemplo, as barras branca e carmim, e colocando-as ponta a ponta verá que elas formam um comprimento correspondente à barra amarela.

Numa das últimas aulas estávamos fazendo exercícios sôbre o seguinte: dada uma barra, procurar tôdas as barras que colocadas ponta a ponta ficassem iguais, do mesmo comprimento da barra considerada. Temos, por exemplo, a barra amarela. Observem, quando formos utilizar esse material com as crianças devemos utilizar tôdas as barras, devemos fazer o esquema da vermelha, da verde claro, da carmim, depois mandaremos que elas troquem; a criança vai para o esquema da outra colega, e assim se faz revesando, para não ficar monótono, ela vai corrigir, ver se a outra criança fêz certo, se está faltando alguma barra. Se ela vai fazer o esquema da amarela, por exemplo, então que ela pega?

Branca e carmim
Branca-vermelha e vermelha

Verde-claro e Vermelha
Carmim e Branca
Branca-Branca-Branca-Branca-Branca
Verde-claro - Branca e Branca
Vermelha - Branca-Branca e Branca
Vermelha - Branca e Vermelha
Vermelha - Vermelha e Branca
Branca - Verde-claro e Branca

Então eu digo: represente êsse esquema usando os sinais que nós vimos. Quando fôrmos dizer 5 é igual, explicaremos à criança: convencionamos êsses dois tracinhos que vão se denominar "é igual". Então temos: 5=1 e 4, que será a barra branca e a carmim; agora em vez de usar "e", nós diremos à criança, você irá usar aquela cruzinha: $5 = 1 + 4$.
$5 = 2 + 3$.

Observem que maravilha, a criança fazendo êsses exercícios está aprendendo tantas coisas, está aprendendo os sinais, os algarismos, está aprendendo nomes, está aprendendo o sinal de adição, está aprendendo propriedade comutativa, ela está vendo que pode trocar a ordem. Nós precisamos apenas orientar, observar, vamos ajudando a criança a evoluir. No momento oportuno é que ela vai ser esclarecida de que isso se chama propriedade comutariva, isso se chama adição, isso quer dizer proporção, ela vai evoluindo e fará muitos exercícios dêsses. Depois que ela consegue representar o esquema que antes lia com côres é que pedimos então a ela que, de olhos fechados, faça muitos exercícios dêsses. Quando ela começa a usar os sinais ela dirá, de olhos fechados, o que está no quadro-negro, então o que ela está aprendendo é tabuada, sem saber o que é tabuada, está aprendendo várias combinações fundamentais. Nós vamos ver nas nossas aulas tôdas as operações, inclusive frações, de 1 a 10, todos os cálculos serão dados só até 10, nós aprenderemos a somar, subtrair, multiplicar; dividir nós deixaremos à parte, como também frações de 1 até 10. É preciso que as professôras atentem para a seguinte questão que é muito importante: é necessario traduzir com palavras aquilo que se pensa, aquilo que se tem no pensamento e podem estar certas de que não é fácil a pessoa traduzir com palavras aquilo que se pensa. Já fiz várias experiências com alunos e quando me refiro a alunos, é a todos os alunos, já fiz experiências com professôras: colocava - as diante de certos problemas, pedia que elas dissesem o que lhes vinha na mente e elas iam dizendo o que se ia passando, depois então é que as encaminhava até a solução do problema, fazendo que elas desenvolvessem o raciocínio. Podem ficar certas de que crianças de 9, 10 anos têm dificuldade de traduzir isso porque lhes faltam as expressões correspondentes, e muitas pessoas de idade superior também não conseguem. Está claro que no nosso caso nós pedimos que o aluno leia o exercícios, leia o que escreveu e então perguntamos: é você capaz de ler o que escreveu? Nós faremos muito dêsses exercícios com tôdas as barras, utilizaremos nossa imaginação, inventaremos outros exemplos, repetiremos aquêles exercícios da parte de aritmética qualitativa, repetiremos aquêles exercícios de, considerada uma barra escolher outras que colocadas ponta a ponta sejam do mesmo comprimento. Não irei entrar em detalhes porque será humanamente impossível. Cada uma de persi, em casa, deve fazer para praticar.

Por exemplo, se eu digo $3 + 2 = 5$, vocês já viram que foi justamente êsse problema que deu lugar à subtração, porque se conheço a soma e uma das parcelas da soma e quero a outra parcela, isso é ou não subtração? Então, quando eu coloco essa barra (vermelha) sôbre essa (verde-claro) imediatamente vem ao pensamento de qualquer criatura, quando falta, qual a barra que devo colocar ponta a ponta com a vermelha para dar o comprimento da verde-claro. Como poderemos dizer que isso não representa subtração?.

Então digo, qual a barra que você deve colocar ponta a ponta com a vermelha para dar a verde-claro? Ela diz: a branca, Então vamos representar isso escrevendo da seguinte maneira: 3-2=1 . Em vez da cruzinha, 3 + 2, nós usaremos êsse tracinho, 3 - 2 . Êsse tracinho vou chamar de <u>menos</u>, nós teremos, então 3 - 2 = 1. Quer dizer que a forma simbólica será esta: 3 - 2 = 1 . Isso corresponde exatamente à subtração, corresponden à definição que foi dada hoje ; então poderemos fazer vários exercíoios. Tenho até uma relação de exercícios que podem ser feitos com as crianças. Na próxima aula entraremos na parte de multiplicação.

-:::::::::-

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 25/8/959

Sexta AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO : - (Apresenta no quadro-negro diversos exercícios).

Êsses exercícios devem ser distribuídos, se possível mimiografados, para que as crianças não tenha necessidade de copiar.

Então, a criança recebe essa igualdade e eu peço: complete isso aqui, 1 + 1 =

Aquí, qual a quantidade que ela deve colocar 1 + 1 + 1 + 1 =
2 + 1 =

Feito isso nós pedimos então que ela leia o que escreveu. A criança então vai ler:

1 + 1 = 2	2 - 1 = 1	2 = 1 + 1
3 - 2 = 1	1 + 1 + 1 = 3	3 = 2 + 1
3 - 1 = 2	2 + 1 = 3	3 - 1 = 2
1 + 1 = 2	3 = 2 + 1	

Se por algum motivo uma criança não conseguir completar, então pedimos que ela use as barras. Ela já sabe, por exemplo, o primeiro exercício 1 + 1 que é a barra branca e a barra branca, então nós pedimos que ela faça a representação do que está alí, no exercício, com as barras. Ela fará a representação disso aquí, assim : 1 + 1 = 2. Aquí ela tem a representação usando as barras. Quer dizer, se ela não se lembrasse de que era igual, então ela procuraria com as barras dar a resposta. No comêço devemos permitir que as crianças usem as barras quando não conseguirem fazer a representação , se elas vêem 3 - 2 e não conseguem sentir a que é igual com os sinais, então elas usam a barra verde-claro e colocam num extremo a barra que deve colocar justamente para dar o comprimento da barra verde - claro. Elas vêem que 3 - 2 = 1.

Por exemplo, no exercício 3 - 1 = ela fará a mesma coisa, ela usará a barra verde-claro, coloca num extremo uma barra branca e verá qual a barra que deve colocar para dar o comprimento da barra verde-claro. Ela então saberá a resposta uma vez que conhece que a barra vermelha corresponde a um sinal, que será 2 (dois).

Observem que êsses exercícios não serão feitos com a criança assim logo em seguida, é preciso praticar, é preciso variar , é preciso modificar, mandar usar barras, mandar representar por sinais, podemos mandar compôr com barras e depois representar por meio de sinais. Uma grande quantidade de exercícios deve preceder outros exercícios. Estou dando apenas uma amostra como se deve fazer, porque eu não vou organizar todos êsses exercícios que podem ser feitos. Passemos agora a 2ª série de exercícios, organizei alguns que irei apresentar. Poderia dizer assim: usando os sinais, a cruzinha (+) mais, e o tracinho (-) menos, pode você completar êsses exercícios? É ainda uma série do mesmo tipo da anterior: 1 + 1 = 4 . Agora, nós não colocamos o sinal, colocamos 1 + 1 = 4 e então deixamos que a criança raciocine se deve colocar o mais (+) ou o menos (-).

Ela irá usar os sinais, algum dos algarismos, ela vai usar o sinal + ou - . Seguem-se agora os exercícios que organizei , no caso é uma série análoga a dos outros exercícios que ainda há pouco apresentei:

1 + 2 =	3 = 4	4 = 3	3 + 1 =
2 + 1 = 4	3 = 2	2 = 4	1 + 2 = 4
1 + 1 = 3	4 - 3 =	3 - 2 =	4 - 1 =
- 2 = 4	1 + 1 = 4	- 1 = 3	2 + + 1=
4 = 2 + 1	4 = 1 + + 2		

Vamos praticar agora alguns exercícios dêsse tipo. (O professor escreve no quadro o resultado dos exercícios apresentados) Vamos começar agora fazendo o esquema da barra alaranjada. Procurem agir raciocinando, seguindo o que vimos nas diversas aulas passadas. A colega vai dizendo o esquema com as côres e as outras colegas vão escrevendo por meio de sinais.

Alaranjada (10) = 1+9=2+8=3+7=4+6=5+5=6+4=7+3=8+2=9+1=5+2+3=2+2+4=3+3+4=4+1+5=5+2+3=8+1+1=1+1+1+1+1+5.

Agora, a professôra Ana vai ler o esquema dela, em côres, as colegas não copiem, apenas ouvem e vão ver se ela vai dizendo certo, o treino é sòmente mental, vocês vão verificar se o que ela está dizendo está certo, agora, pensando com sinais.

Agora, a professôra Ana vai dizendo os sinais e as outras colegas vão dizendo as côres e corrigindo os sinais, se não estiverem certos.

Vamos passar a outro exercício, podem desmanchar os esquemas. As professôras vão fazer a representação no caderno com sinais e vou mostrar com barras.

Branco - Amarelo e Carmim (1 + 5 + 4) o que isso está indicando ? qual a operação ? Uma soma.

Agora, se nós fizermos assim ? 5 + 4 - 3

Aquí nós só poderíamos considerar sendo uma soma de 5 + 4 e do resultado tirar 3 (verde claro), se nós esquematisássemos da seguinte forma: (5 + 4) - 3.

Da maneira como a aluna interpretou acima 5 + 4 - 3, está errado, prestem atenção à questão dos têrmos. Qualquer operação já leva para a álgebra. A dificuldade que os alunos sentem é justamente quanto ao emprego de parêntesis e que é uma coisa muito simples, daí a confusão que fazem.

Por exemplo: 4 + 2 x 3 + 12 ÷ 6 . Quantas alunas fazem isso: somam 4 com 2, multiplicam o resultado por 3, somam com 12 e dividem por 5. A interpretação está errada. O que está aqui eu não posso, por hipótese alguma, somar êsse 4 com 2, o resultado multiplicar por 3, o resultado somar com 12 e dividir por 6. Isso é um êrro comum nos alunos do curso ginasial. Quando vamos ensinar cálculo e verificação numérica de uma expressão algébrica o aluno vai substituir a incógnita pelo valor dado e dificílmente consegue encontrar o valor numérico, porque não sentem os têrmos da expressão. Os têrmos são separados, pelos sinais + e - .

Temos três têrmos, o resultado dessas operações parciais é que vamos somar, então nós teremos que 4 vai ser somado com êsse resultado, vai ser adicionado ao resultado disso aqui, justamente para incutir no aluno o têrmo; o certo será dêsse modo:

$4 + 2 \times 3 + 12 \div 6$. O nosso objetivo é justamente levar o aluno para o caminho certo. O que nós precisamos fazer é que desapareça completamente do espírito do aluno isso que existe em 90% das vêzes. O aluno chega ao ginásio e ainda não sabe distinguir têrmos, numa expressão. Êsses exercícios a que há pouco me referí já foram feitos aquí, em outras aulas, apenas estava já considerando como sabidos. A questão de ler é importante, percebam isso. Se leio: Amarelo + Carmim - Verde-claro (5 + 4 - 3) significa que de 5 somdo ao 4 vou tirar 3, quando, na realidade, não é isto que está escrito. Posso ler isso de duas maneiras: a primeira 5 + 4 - 3, que é errada e da seguinte, que é a certa (5 + 4) - 3, como se eu tivesse aqui a barra azul, substituindo o 5 e o 4 e tivesse uma barra verde-claro em cima da barra azul. A noção parêntesis vai ter que existir, forçosamente. Nas próximos aulas irei mostrar frações com multiplicação, tudo isso com barras e pedir que vocês colaborem, irei mostrar a representação simbólica da multiplicação, soma e divisão de frações, tudo misturado. O que vamos é evoluir, está claro. Êsses exercícios cada vez serão de grau mais desenvolvido. Uma das coisas mais importantes para a pessoa evoluir em matemática é ser capaz de traduzir com palavras aquilo que vê em símbolos, e vice-versa. Uma das coisas mais importantes é considerar a matemática como uma linguagem, por exemplo, a taquigrafia de pensamento. Vamos ler agora alguns exercícios mais trabalhosos. Lembrem-se que êsses exercícios já foram feitos com côres, até ensinei como era que colocava a barra que faltava, por raciocínio, sem ser por advinhação.

$$\frac{[7 - (3 - 1)] + [8 - (4 + 1)]}{9 - [3 - (2 - 1)]}$$

Observem a razão de ser dos sinais de grupamento, o de adição, a cruzinha (+) e o tracinho indicando a subtração (-) ; êsses sinais de grupamento podem ser ensinados desde as primeiras letras. Êsses sinais de grupamento não exigem esfôrço nenhum da criança, é uma questão de sentir o que significa grupar, reunir. De 9 vou tirar o resultado de tudo, não posso botar 9 sem um colchete porque o resultado seria outro. Se não colocarmos o colchete cometeremos um êrro. Por exemplo: $9 - 3 (2 - 1)$ aparentemente está certo, mas, não está traduzinho a ação suscitada inicialmente. Qual a tendência natural de quem olhar para isso ? Não é a de tirar de 9 - 3 e do resultado tirar (2 - 1). De 9, não vou tirar 3 e sim o resultado disso $[3 - (2 - 1)]$.

Podem vocês ler os seguintes exercícios? Então escrevam:

5 - 4 + 1	3 + 2 = 5	2 + 2 = 4	1 + 3 + 1 = 5
3 - 2 = 1	4 + 1 = 5	4 - 1 = 3	4 - 2 = 2
5 - 2 = 3	4 = 5 - 1	3 = 5 - 2	

Antes de terminarmos a nossa aula de hoje vamos justamente dar a simbolização de multiplicação. Observem, estão colocadas ponta a ponta duas barras vermelhas. Tenho vermelha e vermelha, então, 2 + 2 . Vamos representar simbolicamente assim 2 x 2 . Isso significa 2 vêzes 2. Se nós considerarmos então essas três barras vermelhas vamos representar por 3 x 2 . Uma coisa que as crianças tanto confundem e que é preciso convencionar dêsde as primeiras aulas é o seguinte: quando leio 2 x 3, êsse 2 traduz duas barras do valor 3. Depois é que poderemos trocar a ordem, mas aí vamos introduzir outra simbolização. Isso vai ser uma área. Há uma confusão entre ler 2 x 3 e 3 x 2 . Quando vou representar por meio de área, tanto faz o produto da base pela altura, como da altura pela base. Se eu tenho

2 x 3 estou me relacionando a comprimento. Nessa parte como deveremos fazer com o aluno ? Daremos muitos exercícios a êle da parte simbólica e pedimos que êle leia ; pedimos também que êle mostre com barras e então escreveremos assim, por exemplo, - 3 x 7 e pedimos que o aluno mostre o que representa isso: 3 barras de comprimento 7 colocadas ponta a ponta.

Eu necessito voltar a falar, a insistir sôbre o conceito da multiplicação. Não sei se alguém tem dúvida, é uma questão de insistência de minha parte, se porventura alguém tiver dúvida a insistência vai valer, não se perdeu nada, foi mais um exercício. Quando nós dizemos 3 vêzes qualquer coisa, significa que tenho uma soma com 3 parcelas e o valor dessa coisa . Se digo 3 x verde-escuro, são 3 barras verde-escuro; se o valor do verde-escuro é 6, então, eu tenho 3 x 6 e não 6 x 3. Reparem que uma coisa tão banal é motivo de muitas crianças se atrazarem, se retardarem na sua aprendizagem de multiplicação. Como já falei na primeira aula, mostrei que o simples fato de o professor contar diante da criança assim 1, 2, 3, 4 , isso retarda até em seis meses a evolução da criança na matemática . Trata-se apenas de uma questão de apresentação, como já tive oportunidade de frizar, em outra aula.

:::::::::::::::::::

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 27/8/959

Sétima AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Vamos continuar com a nossa aula. Sabem qual a côr dessa barra? Verde-claro. E essa ? Vermelha. E essa ? Alaranjada. E essa ? Carmim.

Estamos apenas fazendo uma recordação rápida. Lembram-se da nossa escada ? Vamos construir a nossa escada. Vamos subir a escada dizendo as côres: Branca, vermelho, verde-claro, carmim, amarelo, verde-escuro, preto, marrom, azul e alaranjado. Vamos agora descer a escada: alaranjado, azul, marrom, preto, verde-escuro, amarelo, carmim, verde-claro, vermelha e branco.

Se nós estivermos no degráu marrom, subam a escada: azul e alaranjado. Quais as barras mais próximas da azul ? A marrom e a alaranjada. Qual das duas a maior ? A alaranjada. E qual a barra menor ? A branca. Qual a maior de tôdas ? A alaranjada. A mais próxima da menor ? A vermelha. Vamos construir o esquema da barra amarela. Tôdas as professôras construam o esquema da barra amarela, podem usar mais de duas barras na construção do nosso esquema.

A professôra quer, por bondade ler o seu esquema ;

Amarelo é igual a carmim e branco
branco e carmim
verde-claro e vermelho
vermelho e verde-claro
vermelho, vermelho e branco
branco, vermelho e vermelho
vermelho, branco e vermelho
branco,branco,branco,branco e branco
vermelho, branco, branco e branco.

(As professôras que participam do curso, lêem os diversos esquemas que formaram)

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Agora, uma professôra vai ler o esquema com os valores convencionais das barras:

$$
\begin{aligned}
5 &= 1 + 2 + 2 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 1 + 4 \\
&= 2 + 3 \\
&= 3 + 2 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Agora, a professôra Ana vai dizer as côres e as colegas vão dizer os valores correspondentes. (A professôra vai lendo o es quema e as outras colegas vão dizendo os valores correspondentes).

Vamos agora fazer o seguinte: uma professôra vai ler o seu esquema e outra professôra vai representar com sinais no quadro-negro. A professôra vai dizendo as côres e as outras vão escrevendo no caderno, para corrigirmos depois.

Agora, confrontem os resultados com os do quadro. Êsses exercícios nós já tínhamos feito, apenas é uma recordação rápida. Agora, observem o seguinte: coloquei essas duas barras ponta a ponta, há alguma barra do mesmo comprimento dela? Como poderemos representar essas duas barras? Amarela e Verde-claro? Essa representação como seria ? 5 + 3 . E se fizermos assim? 5 - 3 . E se nós fizermos assim? 5 - 3 - 1 . E se nós considerarmos assim? Será 4 - (2 + 1) .

Se nós considerarmos agora essa barras (vermelha, vermelha e Verde-claro). Como poderemos ler ? (2 x 2) + 3 . E se considerarmos essas barras aqui? (3 verde-claro) 3 x 3 . Então isso está representando o que? Multiplicação. Por que ? Nós temos uma interação de parcelas. Na aula passada fizemos vários exercícios . Hoje trouxe uma série de exercícios para continuarmos. Observem o 1º exercício: Pode você escrever usando os sinais + e x o seguinte, usando as barras também ?

Cinco (5) barras brancas colocadas ponta a ponta?

RESULTADO: 5 x 3

Três (3) barras brancas seguidas por uma vermelha ?

RESULTADO: 3 x 1 + 2

Uma (1) barra vermelha seguida por uma branca ?

RESULTADO: 2 + 1

Usando as barras procure qual dos seguintes comprimentos é o maior:

3 x 1	ou	1 + 3	ou	3 + 1
2 x 2	ou	3 + 1	ou	2 + 2
2 + 3	ou	2 x 3	ou	3 x 2
4 + 1	ou	4 x 1	ou	1 + 4
5 x 1	ou	1 + 5	ou	5 + 1

Usando as barras verifiquem qual dêsses comprimentos é o maior, não pensem em cálculo, vocês não sabem tabuada de espécie alguma, devem esquecer. Observem, confrontem e concluam. Devem construir o esquema e devem confrontar os esquemas. Depois, quando fizermos a revisão eu vou dizendo a composição de cada exercício para vocês confrontarem com o que fizeram.

<u>1º exercício</u>: - nós temos 3 x 1. Então deveríamos colocar 3 barras brancas ponta a ponta. 1 + 3 : Uma barra branca e uma verde-claro. 3 + 1 : Uma verde-claro e uma branca. Só pelo confronto e pela observação poderíamos imediatamente concluir que os dois últimos exercícios vão dar o mesmo comprimento em face de estarem permutadas as côres. Só haverá confronto entre um comprimento e outro. Se eu tenho 3 x 1, três barras de comprimento 1, que forma justamente a verde-claro, como viram, então o outro conjunto tem a mais uma barra branca. Evidentemente que êste vai ser o maior.

<u>No segundo exercício temos</u>: 2 x 2 (duas barras vermelhas co-

locadas ponta a ponta)

3 + 1 (Uma barra verde-claro e uma barra branca)

2 + 2 (Uma barra vermelha e uma barra vermelha)

Os três conjuntos, como vêem são iguais, porque têm o mesmo resultado: 2 x 2 = 4 3 + 1 = 4 e 2 + 2 = 4 . (O 4 equivale à barra carmim).

No terceiro exercício temos : 2 + 3 (Uma barra vermelha e uma barra verde-claro)

2 x 3 (Duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta)

3 x 2 (Três barras vermelhas colocadas ponta a ponta)

O confronto vai ser feito entre um dos dois últimos conjuntos, que dão o mesmo resultado, e o primeiro conjunto. Se eu tenho que 2 x 3 = 6, 3 x 2 = 6 e 2 + 3 = 5, é lógico que o conjunto que tem como resultado, 6, é o maior.

No quarto exercício temos : 4 + 1 (Uma barra carmim e uma barra branca)

4 x 1 (Quatro barras brancas colocadas ponta a ponta)

1 + 4 (Uma barra branca e uma barra carmim)

O primeiro e o segundo conjuntos dão o mesmo resultado (4) , barra carmim, Se eu tenho o terceiro conjunto que é composto de uma barra branca e uma barra carmim, e se êsse conjunto tem uma barra branca a mais que os outros conjuntos é lógico que 1 + 4 = 5 é o maior dos conjuntos.

No quinto exercício temos : 5 x 1 (Cinco barras brancas colocadas ponta a ponta)

1 + 5 (Uma barra branca e uma barra amarela)

5 + 1 (Uma barra amarela e uma barra branca). Por confronto, o segundo e o terceiro conjunto são iguais porque apenas houve uma permutação na posição das barras.

Êsses dois grupos serão os maiores porque têm uma barra branca a mais do que a própria amarela que é o resultado do primeiro conjunto (5 x 1 = 5), 5 corresponde à barra amarela, e 5 + 1 e 1 5 têm o mesmo resultado que é 6, (verde-escuro).

O segundo exercício que irei apresentar vai exigir um pouco de imaginação porque vão fazer grupos sem usar as barras, vocês vão fazer a mesma coisa, apenas mentalmente, comparar as barras, confrontar os comprimentos e concluir.

Então, pode você, sem usar as barras dizer qual dos seguintes é o menor e não mais o maior ?

2 + 1	ou	2 x 1	3 x 1	ou	1 + 3	5 x 1	ou	5 + 1
4 x 1	ou	3 x 2	1 + 5	ou	5 x 1	2 x 1 + 1	ou	3 x 1
5 x 1	ou	4 x 1	4 + 1	ou	2 + 3	2 x 2 + 1	ou	2 + 2 + 1

Observem que há poucos instantes pedi a maior, agora quero a menor, sem usar as barras. A formação será feita mentalmente. 2 x 1 é menor do que 2 + 1 porque (2 x 1) duas barras brancas colocadas ponta a ponta corresponde à vermelha e no outro grupo (2 + 1), nós temos a vermelha mais a barra branca. Qualquer que fôsse o valor dessas barras, êsse conjunto (2 + 1) teria um comprimento a mais. Evidentemente, 2 x 1 é o menor comprimento.

4 x 1 (4 barras brancas colocadas ponta a ponta)

3 x 2 (3 barras vermelhas colocadas ponta a ponta) Então pergunto, qual dêsses dois comprimentos é o menor? Será 4 x 1.

5 x 1 (5 barras brancas colocadas ponta a ponta)

4 x 1 (4 barras brancas colocadas ponta a ponta) Qual o menor? 4 x 1.

3 x 1 (3 barras brancas colocadas ponta a ponta)

3 + 1 (1 barra verde-claro e uma barra branca) Qual a menor? 3 x 1.

1 + 5 (1 barra branca e uma barra amarela)

5 x 1 (5 barras brancas colocadas ponta a ponta) Qual o menor ? 5 x 1.

2 x 1 + 1 (2 barras brancas colocadas ponta a ponta mais uma barra branca)

3 x 1 (3 barras colocadas ponta a ponta) Qual dos dois comprimentos é o menor ? São iguais.

2 x 2 + 1 (2 barras vermelhas colocadas ponta a ponta mais uma barra branca)

2 + 2 + 1 (Uma barra vermelha, mais uma barra vermelha, mais uma barra branca)

Pelo confronto dêsses dois conjuntos vê-se que são iguais, porque correspondem a mesma barra, amarela (5).

O exercício agora será o seguinte: pode você descobrir a resposta nos seguintes exemplos ?

1 + 2 x 2 =	2 x 2 + 1 =	3 x 1 + 2 =
2 x 1 + 2 =	2 x 1 + 1 =	3 x 1 + 1 =
1 x 3 + 1 x 2 =	1 x 1 + 1 x 4 =	

Não pensem em fazer cálculo, se encontrarem dificuldade de sentir o resultado, pensem nas barras e procurem uma barra que corresponda ao total. Entendem?

Quanto ao primeiro exercício 1 + 2 x 2, quem fêz essa operação sem separar os têrmos fêz errado. Quem fêz 1 + 2 x 2 = 6, está errado, é preciso corrigir essa falha. O certo é da seguinte maneira : 1 + (2 x 2) = 5. Repito, quem colocou a resposta 6 é preciso fazer muitos exercícios quanto à leitura dos têrmos da expressão aritmética.

1 + (2 x 2) = 5 Uma barra branca e duas vermelhas colocadas ponta a ponta = amarela.

(2 x 1) + 2 = 4 Qual a representação ? Duas barras brancas colocadas ponta a ponta mais uma barra vermelha.

(1 x 3) + (1 x 2) O certo é fazer-se essa operação separando-se os têrmos como está aquí, mas, ôntem mesmo estava dando uma aula no 1º ano científico e um aluno cometeu êsse êrro: 1 x 3 + 1 x 2 = 8 .

Peço às professôras para incutirem no espírito da criança, com barras ou sem barras a significação do têrmo de uma expressão. Nós não podemos, por hipótese alguma considerar assim: (1 x 3 + 1) x 2 = 8 . O certo é do seguinte modo como está acima :

(1 x 3) + (1 x 2) = 5 . O resultado de um grupo, mais o resultado de outro grupo, então a resposta será 5. Se vocês observarem mentalmente o esquema verão que não pode, por hipótese alguma, ser feito de outra maneira.

2 x 2 + 1 = 5 Qual a representação ? Duas barras vermelhas colocadas ponta a ponta mais uma barra branca.

2 x 2 + 2 = 4 Qual a representação ? Duas barras brancas colocadas ponta a pnta mais uma barra vermelha.

(1 x 1) + (1 x 4) = 5 Qual a representação simbólica? Uma barra branca e uma barra carmim. Então, uma barra carmim e uma barra branca correspondem a que ? A amarela.

(3 x 1) + 2 = 5 Qual a representação simbólica ? Três barras brancas colocadas ponta a ponta mais uma barra vermelha , igual a barra amarela.

(3 x 1) + 1 = 4 Três barras brancas colocadas ponta a ponta mais uma branca, igual a barra carmim.

Passemos agora a outros exercícios:

5 - (2 x 2) =
5 - 2 x 1 =
3 x 1 + 1 =
4 - (2 + 1) =
4 = 2 x
5 - 1 x 1 =
5 - 3 x 1 =
5 - (2 + 2) =
3 + 2 x 1 =
1 x 1 + = 4
5 - (1 + 1) =
5 - (2 x) = 1

Vamos construir mentalmente o esquema do primeiro exercício:

5 - (2 x 2) = 1

Uma amarela menos duas vermelhas colocadas ponta a ponta = Uma barra branca.

(Em seguida o professor, juntamente com as alunas, vai completando as respostas dos exercícios, como fêz no primeiro caso)

Agora prestem atenção: se eu tenho uma barra alaranjada, sôbre a alaranjada uma barra carmim e sôbre a carmim uma barra vermelha, como eu leio isso ?

10 - (4 - 2) =

E se agora eu considerar a barra amarela e a carmim, colocar a verde-claro numa ponta, a carmim na outra, a vermelha numa ponta e a branca na outra, como eu leio isso ?

$$\left[4 - (3 - 2)\right] + \left[5 - (4 - 1)\right] =$$

Nós estamos, nêste caso, justamente traduzindo o que estamos mostrando. Viram ?

O resultado dêsse grupo, mais o resultado dêsse outro grupo , depois grupamos as operações e separamos por meio dos sinais correspondentes.

Por hoje é só.

:::::::::::::::

CURSO DE MATEMATICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 1/9/959

Oitava AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Na aula passada nós praticamos a parte de operações da adição, subtração e multiplicação. Creio que estão tôdas identificadas com essa parte inicial. Vamos sòmente lembrar alguma coisa. Por exemplo: se nós tivermos essas duas barras colocadas ponta a ponta, qual será a representação simbólica ? (2 + 6). E se tivermos assim? (6 - 2) . E se nós fizéssemos assim, colocássemos aqui ao lado essas barras, então ficaria:

$$6 = 2 + 4 \times 1$$

$$6 = 2 \times 2 + 2$$

$$6 = 2 + 4$$

Quer dizer que utilizamos combinações diferentes para fazer essa representação. E se nós tivéssemos assim: coloquei uma barra verde-escuro ponta a ponta com a carmim. Numaponta coloquei essa barra branca e noutra coloquei essa barra vermelha. Então, como posso ler ?

$$6 - 1 + 4 - 2$$

E se nós fizéssemos agora assim, como seria?

$$\left[6 - (3 - 2)\right] + \left[4 - (3 - 1)\right]$$

Se eu quero indicar o produto de 3 x 2 : - três barras vermelhas colocadas ponta a ponta. E se quero 2 x 3 é igual a duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta. Se quero, por exemplo, 7 - 2, coloco uma barra preta e sôbre ela uma vermelha. E se quizer 7 - (3 - 2) é igual a uma barra preta, sôbre a preta uma verde-claro e sôbre a verde-claro uma vermelha. Se quizer 3 x 2 + 4 é igual a três barras vermelhas colocadas ponta a ponta e mais uma barra carmim. E se nós quisermos 2x 3 + 7 x 2 é igual a duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta mais sete barras vermelhas colocadas ponta a ponta. E se nós tivermos agora o seguinte: 3 x 7 - 2 x 3 é igual a três barras pretas colocadas ponta a ponta, sôbre elas, duas barras verde-claro.

Vamos agora continuar com outros exercícios. É bem verdade que só poderão passar para êsses exercícios que nós vamos considerar agora, depois de fazermos muitos exercícios dêsses com tôdas as barras, com tôdas as combinações. Observem que nós só estamos aprendendo de 1 até 10. Todos os cálculos até agora não ultrapassaram de 10. Já fizemos soma, subtração e multiplicação. Agora vejamos outra noção que pode ser introduzida. Já viram que duas barras vermelhas colocadas ponta a ponta podem ser representadas simbòlicamente por 2 x 2 ou então 2 + 2 e isso equivale à barra carmim, que vai ser 4. Então, eu poderia perguntar o seguinte: Tenho 2 + 2 ou 2 x 2, ou ainda duas barras vermelhas colocadas ponta a ponta correspondem à carmim. Poderemos, então, chamar a barra vermelha de metade da barra carmim, dizendo, portanto, que a barra vermelha é metade da barra carmim. E como nós representaremos simbòlicamente isso ?

$$\frac{1}{2} \times 4 = 2$$

Êsse de traduz-se justamente por multiplicação. Então, eu escreví que metade de 4 = 2 . Realmente, nós vimos que a barra vermelha é metade de 4, porque duas barras vermelhas colocadas ponta a ponta correspondem à barra carmim ? Sendo assim, posso dizer que a barra vermelha é metade da barra carmim, ou então 2 vai ser metade de 4 e representaremos simbòlicamente.

Temos agora duas barras brancas que colocadas ponta a ponta nos fornece um comprimento igual à vermelha. Então, eu tenho que 2 x 1=2, ou então 1 + 1 = 2, ou ainda que duas barras brancas colocadas ponta a ponta correspondem à barra vermelha. Posso, então, dizer que a barra branca é metade da barra vermelha. Logo, a barra vermelha é formada por duas barras brancas colocadas ponta a ponta , ou então, a barra vermelha é formada por duas metades delas colocadas ponta a ponta.

Eu tenho que a barra vermelha é igual a duas barras brancas colocadas ponta a ponta, ou então que 1 + 1 = 2, ou então 2x1=2, ou ainda que metade da barra vermelha e a metada da barra vermelha , corresponde à barra vermelha, porque a barra branca é metade da barra vermelha. Como irei representar simbòlicamente que a barra branca é metade da barra vermelha?

$$1 = \frac{1}{2} \times 2$$

Observem que se acostumarmos o garoto a, olhando para essa expressão dizer que metade de 4 = 2, êle sentirá e verá muito mais do que se dissermos <u>um meio</u> de 4 = 2. A maneira de dizer já vai possibilitar, mais tarde, o ensino da parte de multiplicação e divisão de frações. A maneira de ler traduz justamente nosso problema .

Temos essa barra (verde-escuro), que posso fazer corresponder a duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta. Então temos, verde-claro e verde-claro igual a verde-escuro, ou então 3 + 3 = 6, ou 2 x 3 = 6. Baseados no novo conceito introduzido, nós podemos dizer que a barra verde-claro representa metade da barra verde - escuro. Portanto, posso dizer que a barra verde-escuro é formada de duas metades dela mesma; posso dizer também que a barra verde-escuro é igual à metade da barra verde-escuro mais metade da barra verde escuro. E como poderemos representar simbòlicamente que a barra verde-claro é metade da barra verde escuro ? Seria então:

$$3 = \frac{1}{2} \times 6$$

Vamos agora considerar a barra vermelha. As duas barras brancas colocadas ponta a ponta, o que representa a branca da vermelha ? A metade. Duas metades da vermelha ? A vermelha. Três metades da vermelha? Vou procurar uma barra igual a três metades da vermelha. Metade da vermelha, metade da vermelha e metade da vermelha. Observem, então a barra constituída por três metades da vermelha é a barra verde-claro. Portanto, o que representa três metades da barra vermelha ? A barra verde-claro.

Agora estão vendo a barra vermelha. Temos a barra branca que é metade da barra vermelha. Então, quatro metades da barra vermelha representa o que? A carmim. Então, a carmim é formada por quatro metades da barra vermelha. E a barra vermelha não é metade da barra carmim? Então, quatro metades da barra vermelha é a carmim. E a vermelha o que é da barra carmim ? A metade. Quer dizer que a barra branca é metade da barra vermelha, duas metades da barra vermelha fornecem a barra vermelha, três metades da vermelha dão a verde-claro, quatro metades da vermelha é a carmim. Mas a vermelha é metade da carmim ; então, a barra vermelha é metade da carmim.

Se a barra vermelha é metade da barra carmim, então, duas barras vermelhas o que são ? A carmim. Mas a barra vermelha é formada por quantas brancas ? Duas. Então, a branca o que é da vermelha ? Metade. E a barra branca o que é da barra carmim ? Um quarto. Se nós considerarmos, ainda, a barra vermelha, então tenho que a barra branca é metade da barra vermelha ; três barras destas colocadas ponta a ponta são três metades da barra vermelha; Já vimos que dão a barra verde-claro. Então, a barra verde-claro o que é da barra vermelha ? Três metades da barra vermelha, não é lógico ? As três metades da barra vermelha correspondem à verde-claro. Como então representaremos simbòlicamente isso ?

$$3 = \frac{3}{2} \times 2$$

O que é a barra branca da vermelha ? Metade. E duas metades da barra vermelha o que são ? A barra vermelha. Três metades? A verde-claro. Quatro metades? A carmim. Cinco metades ? A amarela. Quer dizer que a barra amarela é formada por cinco metades da barra vermelha. Se considerarmos cinco metades da barra vermelha colocadas ponta a ponta, obteremos a barra amarela. E poderemos representar isso simbòlicamente? Sim.

$$5 = \frac{5}{2} \times 2$$

Se considerarmos ainda a barra vermelha. A barra branca já vimos que é metade da vermelha. Seis metades da barra vermelha o que representam ? A barra verde-escuro. Então, quanto vale a barra verde-escuro?

$$6 = \frac{6}{2} \times 2$$

De posse dessa introdução, já poderemos fazer êstes exercícios: Podem vocês ler ?

$\frac{1}{2} \times 2 + 3$ (Metade de dois mais três)

$3 + \frac{1}{2} \times 4$ (Três mais metade de quatro)

$\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2$ (Metade de quatro mais metade de dois)

$1 + \frac{1}{2} \times 4 + 3$ (Um mais metade de quatro mais três)

$\frac{1}{2} \times 2 + 1 + \frac{1}{2} \times 4 + 1$ (Metade de dois mais um, mais metade de quatro mais um)

Vamos fazer a representação com o material.

Passemos a outros exercícios. Completem os seguintes exemplos:

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$\frac{1}{2} \times 4 + 1 = 3$

$3 = \frac{1}{2} \times 2 + 2$

$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 = 3$

$3 - (\frac{1}{2} \times 2) = 2$

$4 + (\frac{1}{2} \times 2) = 5$

$5 - (\frac{1}{2} \times 2) = 4$

$2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 = 5$

$5 - (\frac{1}{2} \times 2) = 4$

Quando a criança fôr realizar êsses exercícios ela não deve usar mais as barras.

Agora, vejamos outros exercícios. Completar ainda os seguintes exemplos:

$\frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$

$\frac{3}{2} \times 2 - 1 = 2$

$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{4}{2} \times 2 = 5$

$\frac{3}{2} \times 2 + 1 = 4$

$\frac{3}{2} \times 2 = 3$

$\frac{2}{2} \times 2 = 2$

$\frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5$

$\frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$

$\frac{2}{2} \times 4 = 4$

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA

Em, 3/9/959

NONA AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO: - Vamos continuar nosso curso . Na aula passada nós tivemos o portunidade de estudar a parte sôbre frações. Foi estudado tudo sôbre metade, quer dizer, foi dado conceito de metade, fizemos vários exercícios, todos êles giraram especìficamente em tôrno do concei to de "metade". Observem: nós temos essa barra verde-claro e es s a s barras brancas. Vamos colocar 3 barras brancas ponta a ponta, o que vocês vêem ? Têm o mesmo comprimento da verde-claro. Ora, vamos en tão dizer que essa barra branca é um terço da verde-claro. Se a barra branca é um terço da verde-claro, então posso perguntar: será que há alguma barra igual a dois terços da verde-claro? A vermelha. Será que há alguma barra igual a três terços da verde-claro? A verde-claro. Será que há alguma barra igual a um terço da verde-claro? A branca. Será que há alguma barra igual a quatro terços da barra verde-claro? A carmim. Será que há alguma barra igual a cinco terços da verde-claro? A amarela. Será que há alguma barra igual a seis terços da barra verde-claro ? A verde-escuro. Se a barra verde-escuro é seis terços da verde-claro, então o que é a barra verde-claro da verde-escuro ? Vai ser a metade, coisa que já foi estudada.

Vamos então convencionar, representar isso: - se a barra branca corresponde a um terço da verde-claro, vamos representar assim: $1 = \frac{1}{3} \times 3$. Então nós temos aí essa representação de que a barra branca é um terço da verde-claro.

Como posso então escrever que a barra vermelha é igual em relação à barra verde-claro? Dois terços da barra verde-claro. Escreverei como?

$2 = \frac{2}{3} \times 3$ Essa barra carmim será o que da barra verde-claro? Quatro terços da barra verde-claro. Como nós poderemos representar?

$4 = \frac{4}{3} \times 3$ Então, a barra branca sendo um terço da barra verde-claro, duas barras brancas correspondem a quanto? A dois terços da verde-claro. Qual a barra que corresponde a dois terços da verde-claro e sendo constituída por duas barras brancas colocadas ponta a ponta, o que é essa barra branca da vermelha ? A metade. E a barra carmim o que é da barra branca ? Quatro barras brancas colocadas ponta a ponta. Se a barra branca é um terço da verde claro, então o que a barra carmim é da barra verde-claro ? Quatro terços. Se a barra amarela vale cinco barras brancas colocadas ponta a ponta, e se a barra branca é um terço da verde-claro, o que é a barra amarela da verde-claro ? Será cinco terços da verde-claro. E a barra verde-escuro corresponde a quantas barras verde-claro ? A duas. Então, se a verde-escuro corresponde a duas barras verde-claro, então o que a barra verde-claro é da barra verde-escuro? A metade. Então, tenho que a barra verde-escuro corresponde a duas barras verde-claro. Se a barra branca é um terço da barra verde-claro, então, a barra verde-escuro sendo constituida de seis barras brancas , o que é a barra verde-escuro da verde-claro ? Seis terços.

Vamos agora considerar a barra marrom. A marrom corresponde a quantas barras brancas ? A oito. Se a barra marrom é igual a oito barras brancas e se a barra branca é metade da barra vermelha, então a marrom é o que da vermelha ? Oito metades da vermelha.

A barra azul, por exemplo, a quantas barras brancas correspon de ? A nove. Se a barra branca é um terço da barra verde — claro, então o que a azul é da verde-claro? Nove terços. Se a barra azul é formada por três barras verde-claro, então o que a barra verde-claro é da barra azul ? Um terço. Se a azul é constituida por três barras verde-claro, então o que a barra azul é da verde-claro ? Três terços. Não é facílimo ? Não há nenhum mistério mesmo. Portanto, nós já vimos exercícios sôbre metade e sôbre têrço . Vamos brincar de resolver êsses exercícios.

Exercícios para completar:

$\frac{2}{3}$ x 3 = 2 $\qquad$ $\frac{1}{3}$ x 3 = 1

$\frac{4}{3}$ x 3 = 4 $\qquad$ $\frac{2}{3}$ x 3 x $\frac{1}{3}$ 3 = 3

$\frac{1}{3}$ x 3 + $\frac{4}{3}$ x 3 = 5 $\qquad$ $\frac{4}{3}$ x 3 - $\frac{1}{3}$ x 3 = 3

$\frac{5}{3}$ x 3 - $\frac{2}{3}$ x 3 = 3 $\qquad$ $\frac{5}{3}$ x 3 - 2 = 3

$\frac{4}{3}$ x + 1 = 5 $\qquad$ $\frac{5}{3}$ x 3 - $\frac{1}{2}$ x 2 = 4

$\frac{4}{3}$ x 3 - $\frac{3}{2}$ x 2 = 1

1 + $\frac{1}{2}$ x 2 + $\frac{1}{3}$ x 3 = 3

Êsses exercícios devem ser feitos da seguinte maneira: Admitindo que vocês nunca aprendera frações. Só sabem o que é metade, só sabem o que é um terço. Essas respostas devem ser dadas lançando mão, exclusivamente do que foi dado ; fazendo cálculo não é admissível, nós não iremos fazer cálculo lançando mão das regras operatórias, porque isso não foi ensinado.

Continuação ainda do 1º exercício:

4 - ($\frac{1}{3}$ x 3) = 3

5 - ($\frac{2}{2}$ x 4) = 1

2 - ($\frac{1}{3}$ x 3) = 1

Vamos agora ao 2º exercício. Qual a maior ?

$\frac{1}{2}$ x 2 = 1 $\qquad$ ou $\qquad$ $\frac{1}{3}$ x 3 = 1

$\frac{3}{2}$ x 2 = 3 $\qquad$ ou $\qquad$ $\frac{2}{2}$ x 4 = 4

$\frac{4}{2} \times 2 = 4$ ou $\frac{2}{2} \times 4 = 4$

$\frac{2}{2} \times 2 = 2$ ou $\frac{2}{3} \times 3 = 2$

$\frac{3}{2} \times 2 = 3$ ou $\frac{3}{3} \times 3 = 3$

Temos aqui a barra carmim. Sabemos que quatro barras brancas colocadas ponta a ponta correspondem a carmim.

Observem agora o seguinte, de agora por diante, a barra branca será um quarto da carmim. Então, se a barra branca é um quarto da carmim, duas barras brancas correspondem a quanto da carmim ? A dois quartos da carmim. E três barras brancas ? A três quartos. O que é a barra carmim em relação à branca ? Quatro barras brancas. Se a barra branca corresponde a um quarto da carmim e a verde- claro são três barras brancas, o que a verde-claro é da carmim ? Três quartos. Se a barra branca corresponde a um quarto da carmim e a amarela corresponde a cinco barras brancas, o que é a barra amarela da carmim ? Cinco quartos. Se a barra marrom corresponde a oito barras brancas e a barra branca é um quarto da carmim, então o que é a barra marrom da carmim ? Oito quartos. Se quatro barras brancas correspondem à barra carmim, a barra marrom corresponde, portanto, a duas barras carmim, o que é a barra marrom da barra carmim ? Duas barras carmim. O que é a barra carmim da marrom ? A metade. Se a barra branca é um terço da verde-claro, e a barra carmim são quatro barras brancas, então a barra carmim o que é da verde-claro ? Quatro terços da verde-claro.

Se a barra branca é um quarto da carmim e a barra verde-claro são três barras brancas o que é a barra verde-claro da carmim? Três quartos. Estou raciocinando com as barras. Se o professor vai dar uma aula dessa lançando mão de outros conhecimentos matemáticos, êle se perde, então êle precisa estar senhor da coisa e só poderá pensar na aula, senão êle erra. Quer dizer, vocês precisam raciocinar sòmente com o que estão fazendo na hora. Estou=falando assim com vocês porque estou raciocinando, pensando só com as barras, não estou lançando mão de outros conhecimentos.

<u>Pode você completar</u> ?

$\frac{1}{2} \times 2 = 1$ $\frac{1}{3} \times 3 = 1$

$\frac{1}{4} \times 4 = 1$ $\frac{2}{2} \times 2 = 2$

$\frac{2}{3} \times 3 = 2$ $\frac{2}{4} \times 4 = 2$

$\frac{3}{2} \times 2 = 3$ $\frac{3}{3} \times 3 = 3$

$\frac{4}{2} \times 2 = 4$ $\frac{4}{3} \times 3 = 4$

$\frac{3}{4} \times 3 = 3$ $\frac{4}{4} \times 4 = 4$

$\frac{5}{2} \times 2 = 5$

Vamos agora considerar a barra preta que é constituída por sete barras brancas colocadas ponta a ponta. Se a barra branca é um terço da barra verde-claro, a barra preta o que é da verde-claro? Sete terços. Se a barra preta é constituída por sete barras brancas colocadas ponta a ponta e a barra branca é metade da barra vermelha, o que é a barra preta, da vermelha ? Sete metades. Então, observem: se a barra preta é constituída por sete barras brancas colocadas ponta a ponta e a barra branca é um quarto da barra carmim , então o que é a barra preta da barra carmim ? Sete quartos. Se a barra carmim é constituída por quatro barras brancas, a barra preta é constituída por sete brancas, o que á barra preta é da carmim ? Sete quartos. Se a barra azul é constituída por três barras verde-claro ponta a ponta e a barra verde-claro é constituída por três barras brancas o que a barra azul é da barra branca? Nove barras brancas . Se a barra azul é constituída por três barras verde-claro colocadas ponta a ponta, então o que é a barra verde-claro da barra azul? Um terço.

Então, êsses exercícios como vocês vêem devem ser praticados com intensidade, muitos e variados, relacionando tôdas as barras . Vocês vejam que mundo de coisas nós poderemos fazer só com metade , com terços e quartos; vejam como nós estamos fazendo coisas interessantíssimas, porque dêsse modo a criança está adquirindo o que ? Conceito de metade, de terço, de quarto, etc., a criança não sabe ainda o sistema de numeração, não sabe ainda fração nem nada disso, está aprendendo dentro do campo que ela conhece para depois então elastecermos êsse campo. Na próxima aula vocês vão continuar fazendo exercícios de quinto, de sexto, de sétimo, oitavo, nono, depois vamos ampliar o nosso campo e iremos entrar no sistema de numeração.

Por hoje é só.

:+++:::::::::::::

CURSO DE MATEMATICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em, 8/9/959

Décima AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Vamos fazer uma recordação um pouco denâmica do que já foi feito. Prestem atenção: se a barra verde-claro fica coberta com 3 barras brancas, e a barra vermelha será coberta com duas barras brancas, então o que a verde-claro é da vermelha ? $\frac{3}{2}$ da barra vermelha. Se a barra carmim é coberta com 4 barras brancas e a barra branca é metade da barra vermelha, então o que a barra carmim é da barra vermelha? $\frac{4}{2}$ (4 metades), se a barra vermelha é metade da carmim, o que a barra carmim é da barra vermelha ? Duas barras vermelhas.

Vamos agora considerar o seguinte : na aula passada nós fizemos vários exercícios de multiplicação, soma, subtração, usamos metade, terço, quarto, usamos expressões; relembremos, por exemplo, agora o seguinte: a barra marrom é coberta com 8 barras brancas, a barra branca é metade da barra vermelha, então o que a barra marrom é da barra vermelha ? 8 metades.da barra vermelha. Se a barra azul é coberta com 9 barras brancas e a barra branca é $\frac{1}{3}$ da verde claro o que a barra azul é da barra verde-claro? É claro, $\frac{9}{3}$. Se a barra alaranjada é coberta com 10 barras brancas e a barra branca é $\frac{1}{4}$ da carmim, então que a alaranjada é da carmim ? $\frac{10}{4}$. Será que existe alguma barra formada por 4 metades ($\frac{4}{2}$) da vermelha ? A carmim. Será que existe alguma barra formada por 5 metades ($\frac{5}{2}$)da barra vermelha ? A amarela. Existe alguma barra formada por 8 metades ($\frac{8}{2}$) da barra vermelha ? A marrom.

Se a barra verde-escuro é coberta com 2 barras verde-claro, então a barra verde-claro o que é da barra verde-escuro ? A metade ($\frac{1}{2}$) .

Se a barra verde-escuro é coberta com 3 barras vermelhas o que a barra vermelha é da verde-escuro ? $\frac{1}{3}$.

Vamos agora considerar esta barra que todos estão vendo, a amarela. Vamos procurar quantas barras brancas podem cobrir a amarela. Então, nós teremos que a barra amarela fica coberta por cinco barras brancas, nós então vamos dizer que a barra branca representa $\frac{1}{5}$ da barra amarela e representar assim : $1 = \frac{1}{5} \times 5$.

Se a barra vermelha é formada por duas barras brancas e a barra branca é $\frac{1}{5}$ da amarela, o que a barra vermelha é da amarela? $\frac{2}{5}$. Se a barra verde-claro é formada por 3 barras brancas e a barra branca é $\frac{1}{5}$ da amarela, então o que a verde-claro é da amarela? $\frac{3}{5}$. Se a barra carmim é formada po 4 barras brancas, e a barra branca é

$\frac{1}{5}$ da amarela, o que a barra carmim é da amarela ? $\frac{4}{5}$. Se a barra carmim é formada por duas barras vermelhas, o que a barra vermelha é da carmim ? Metade ($\frac{1}{2}$). Se a barra vermelha é formada por duas barras brancas, e a barra branca é $\frac{1}{3}$ da barra verde-claro o que a barra carmim é da verde-claro ? $\frac{4}{3}$. Agora pergunto, o que a barra branca é da barra carmim ? $\frac{1}{4}$. O que é a barra branca da verde-claro ? $\frac{1}{3}$. O que é a barra branca da amarela ? $\frac{1}{5}$. O que é a verde-claro é da amarela ? $\frac{3}{5}$. O que é a vermelha da verde-claro ? $\frac{2}{3}$. O que é a barra azul da verde-claro ? $\frac{9}{3}$. O que é a barra alaranjada da amarela? $\frac{10}{5}$. O que é a barra marrom da verde-claro ? $\frac{8}{3}$. O que é a barra verde-escuro da carmim ? $\frac{6}{4}$. Quer dizer que vocês já estão raciocinando com grande facilidade, isso já é maravilhoso. Observem, vamos agora considerar o seguinte : - se a barra branca é $\frac{1}{5}$ da amarela, e a barra vermelha é coberta com duas barras brancas, o que é a vermelha da amarela? $\frac{2}{5}$. Se a barra amarela é coberta com 5 barras brancas e a branca é $\frac{1}{5}$ da amarela, então que a barra amarela é da vermelha ? $\frac{5}{2}$.

<u>Vamos fazer agora o seguinte</u> : vou dizer o valor e vocês vão mostrando as barras.

$\frac{2}{3}$ da verde-claro	- (vermelha)	$\frac{3}{4}$ da carmim	- (verde-claro)
$\frac{4}{5}$ da amarela	- (carmim)	$\frac{7}{2}$ da vermelha	- (preta)
$\frac{8}{2}$ da vermelha	- (marrom)	$\frac{9}{2}$ da vermelha	(azul)
$\frac{10}{3}$ da verde-claro	- (alaranjada)	$\frac{7}{3}$ da verde-claro	- (preta)

Qual a barra formada por $\frac{1}{3}$ da verde-claro e $\frac{1}{2}$ da vermelha? a vermelha.

Qual a barra formada por $\frac{1}{4}$ da barra carmim e $\frac{2}{5}$ da amarela? A verde-claro.

Qual a barra formada por $\frac{1}{2}$ da vermelha, $\frac{2}{3}$ da verde-claro e $\frac{1}{4}$ da carmim ? A carmim.

Qual a barra formada por $\frac{2}{5}$ da amarela, $\frac{1}{3}$ da verde-claro e $\frac{1}{4}$ da carmim ? A carmim.

Como vêem, podemos fazer uma série de exercícios interessantes.

Como continuação vamos fazer êsses exercícios aquí, usando só mente 5 barras, a branca, vermelha, verde-claro, carmim e amarela, dizendo quais pares de barras darão o resultado:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{1}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

Usem as barras, formem todos os pares de barras necessários para representar o que está aquí.

<u>Eis a resposta</u> :	branca	e	verde-claro
	branca	e	vermelha
	branca	e	carmim
	vermelha	e	verde-claro
	verde-claro	e	verde-claro
	verde-claro	e	carmim
	carmim	e	carmim
	verde-claro	e	vermelha
	vermelha	e	vermelha
	vermelha	e	carmim
	branca	e	amarela
	amarela	e	carmim
	verde-claro	e	amarela
	verde-claro	e	branca
	vermelha	e	amarela
	carmim	e	amarela

Agora, o exercício consiste em completar:

$5 - 3 = 2$

$1 + 2 + 2 = 5$

$\frac{1}{2} \times 4 \; \frac{1}{4} \times 4 = 3$

$\frac{5}{3} \times 3 - \frac{4}{4} \times 4 + 2 = 3$

$\frac{1}{2} \times 4 + \frac{2}{3} \times 3 = 4$

$\frac{1}{5} \times 5 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{3} \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 1$

$\frac{1}{5} \times (3 + 2) = 1$

$\frac{1}{4} \times (5 - 1) = 1$

$\frac{1}{3} \times (5 - 2) = 1$

$\frac{1}{2} \times (3 + 1) - \frac{1}{4} \times (5 - 1) = 1$

Agora, vamos fazer o seguinte exercício, considerar até a bar ra amarela, começando pela branca.

A branca o que é da branca ? $\frac{1}{1}$

A branca o que é da vermelha ? $\frac{1}{2}$

A branca o que é da verde-claro ? $\frac{1}{3}$

A branca o que é da carmim ? $\frac{1}{4}$

A branca o que é da amarela ? $\frac{1}{5}$

A vermelha o que é da vermelha ? $\frac{2}{2}$

A vermelha o que é da verde-claro ? $\frac{2}{3}$

A vermelha o que é da carmim ? $\frac{2}{4}$

A vermelha o que é da amarela ? $\frac{2}{5}$

A verde-claro o que é da branca ? $\frac{3}{1}$

A verde-claro o que é da vermelha ? $\frac{3}{2}$

A verde-claro o que é da verde-claro ? $\frac{3}{3}$

A vermelha o que é da verde-claro ? $\frac{2}{3}$

A verde-claro o que é da carmim ? $\frac{3}{4}$

A verde-claro o que é da amarela ? $\frac{3}{5}$

A carmim o que é da branca ? $\frac{4}{1}$

A carmim o que é da vermelha ? $\frac{4}{2}$

A carmim o que é da verde-claro ? $\frac{4}{3}$

A carmim o que é da carmim ? $\frac{4}{4}$

A carmim o que é da amarela ? $\frac{4}{5}$

A amarela o que é da branca ? $\frac{5}{1}$

A amarela o que é da vermelha ? $\frac{5}{2}$

À amarela o que é da verde-claro ? $\frac{5}{3}$

À amarela o que é da carmim ? $\frac{5}{4}$

À amarela o que é da amarela ? $\frac{5}{5}$

Quer dizer que vocês já sabem o que é metade, terço, quarto, quinto, já visualizam tudo isso, já sabem raciocinar com barras ou sem barras, com símbolos ou sem símbolos. Já poderemos fazer uma porção de exercícios assim : À

À verde-escuro o que é da carmim ? $\frac{6}{4}$

À marrom o que é da carmim ? $\frac{8}{4}$

À preta o que é da verde-claro ? $\frac{7}{3}$

À azul o que é da verde-claro ? $\frac{9}{3}$

À azul o que é da amarela? $\frac{9}{5}$

À azul o que é da vermelha ? $\frac{9}{2}$

À amarela o que é da verde-claro? $\frac{10}{3}$

À branca o que é da verde-claro ? $\frac{1}{3}$

À barra branca o que é da carmim ? $\frac{1}{4}$

Duas barras brancas representam o que da carmim ? $\frac{2}{4}$

Três barras brancas representam o que da verde-claro ? $\frac{3}{3}$

Quatro barras brancas representam o que da amarela ? $\frac{4}{5}$

À carmim o que representa da amarela ? $\frac{4}{5}$

À amarela o que representa da carmim ? $\frac{5}{4}$

À amarela o que representa da verde-claro ? $\frac{5}{3}$

À verde-claro o que representa da amarela ? $\frac{3}{5}$

À vermelha o que representa da verde-claro ? $\frac{2}{3}$

À verde-claro o que representa da preta ? $\frac{3}{7}$

Agora, vejamos se eu colocar uma barra alaranjada, sôbre ela uma barra verde-claro, então como posso representar isso com frações?

$$\frac{10}{3} \times 3 - \frac{3}{3} \times 3$$

E se eu considerar uma barra alaranjada e sôbre ela colocar uma barra vermelha como posso representar isso com frações ?

$$\frac{10}{2} \times 2 - \frac{2}{2} \times 2$$

E agora a carmim tendo sôbre ela a verde-claro ?

$$\frac{4}{3} \times 3 - \frac{3}{3} \times 3$$

Agora, a amarela tendo sôbre ela a preta ?

$$\frac{7}{2} \times 2 - \frac{2}{2} \times 2$$

E finalmente, a marrom tendo sôbre ela a amarela ?

$$\frac{8}{5} \times 5 - \frac{5}{5} \times 5$$

Nêste último exemplo, vamos representar sem utilizar aquí símbolos, utilizando valores convencionais das barras:

será 8 - 5 . Quer dizer, tanto faz $\frac{8}{5} \times 5 - \frac{5}{5} \times 5$, como

8 - 5 .

Façamos mais alguns exercícios :

$\frac{2}{5}$ da amarela + $\frac{3}{4}$ da carmim = amarela

$\frac{4}{5}$ da amarela + $\frac{3}{5}$ da amarela = preta

$\frac{7}{5}$ da amarela = preta

$\frac{4}{5}$ da amarela + $\frac{5}{5}$ da amarela = azul

A amarela o que é da verde-claro ? $\frac{5}{3}$

A marrom o que é da vermelha ? $\frac{8}{2}$

Por hoje, sras. professôras, é só.

: : : : : : : : : : :

CURSO DE MATEMÁRICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 10/9/959

Décima Primeira AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Vamos fazer alguns exercícios de representação simbólica de algumas operações que já estudamos. Vou mostrar as barras e vocês vão dizendo a representação. Por exemplo, seu eu coloco essas duas barras carmim ponta a ponta, qual a representação ? 4 + 4 . Como posso representar de outra maneira ? 2 x 4 . Poderemos, fazer, como vêem duas representações.

Se nós considerarmos 3 barras verde-claro colocadas ponta a ponta ?

Resultado: 3 + 3 + 3 ou então 3 x 3 .

E se nós colocarmos 4 barras vermelhas colocadas ponta a ponta ?

Resultado: 2 + 2 + 2 + 2 ou então 4 x 2 .

E se nós tivermos a barra carmim e sôbre ela colocarmos a vermelha ? 4 - 2 .

Se nós considerarmos a barra amarela e a barra carmim colocadas ponta a ponta, e sôbre a amarela colocarmos uma vermelha e sôbre a carmim colocarmos uma barra verde-claro ?

Resultado: (5 - 2) + (4 - 3)

Se nós considerarmos agora a barra preta e a verde-escuro colocadas ponta a ponta, tendo sôbre a verde-escuro duas vermelhas colocadas ponta a ponta e sôbre a barra preta duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta, como poderemos fazer a representação?

Resultado: 7 - (2 x 3) + 6 - (2 x 2)

Se considerarmos a alaranjada e sôbre ela colocarmos duas vermelhas colocadas ponta a ponta e duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta ?

Resultado: 10 - (2 x 2 + 2 x 3)

Se nós considerarmos agora a barra preta e a amarela colocadas ponta a ponta, sôbre a preta eu vou colocar 4 barras brancas colocadas ponta a ponta, em seguida eu vou colocar uma barra vermelha colocada ponta a ponta com essas barras brancas; sôbre a verde-claro eu cou colocar uma vermelha, sôbre a vermelha eu vou colocar uma vermelha e sôbre a vermelha eu vou colocar uma branca, qual será a representação?

$$\left[7 - (4 \times 1 + 2)\right] + \left[3 - (2 - 1)\right]$$

E agora, se vocês fossem subtrair de um número a soma dos resultados dêstes colchetes ?

Nêsse caso eu deveria colocar, então, uma chave e seria assim:

$$10 - \{[7 - (4 \times 1 + 2)] + [3 - (2 - 1)]\}$$

Agora, se eu considero a barra amarela e sôbre ela eu coloco a verde-claro, quero que traduzam isso relacionando a verde - claro com a amarela:

$$\frac{5}{5} \times 5 - \frac{3}{5} \times 5$$

E agora, relacionando a amarela com a verde-claro ?

$$\frac{5}{3} \times 3 - \frac{3}{3} \times 3$$

Já que vocês compreenderam bem, vamos passar para outros exercícios, apenas usando outras barras.

Vocês vão representar de tôdas as maneiras possíveis êsse par de barras que está aqui. (Verde-escuro e vermelha).

$6 - 2 =$

$\frac{6}{6} \times 6 - \frac{2}{6} \times 6 =$ $\frac{6}{2} \times 2 - \frac{2}{2} \times 2 =$

A terceira representação dêsse exercício $\frac{6}{2} \times 2 - \frac{2}{2} \times 2 =$ foi realizado relacionando o verde-escuro com a vermelha. A vermelha foi considerada como unidade.

Considerando a vermelha como unidade a barra verde-escuro quantas vermelhas valem ? Três. Admitindo a barra verde-claro como sendo 3 brancas, mas, se eu considero a branca como metade da barra vermelha e a vermelha é $\frac{2}{2}$ da vermelha, a verde-escuro então será composta de $\frac{6}{2}$ da vermelha . A barra branca o que é da verde-claro ? $\frac{1}{3}$.

Observem, então, se eu posso cobrir a verde-escuro com 6 barras brancas, então nós teremos o seguinte, que a barra verde-escuro corresponde a 6 barras brancas e nós diremos então que essa barra branca é $\frac{1}{6}$ da barra verde-escuro e nós representaremos simbòlicamente assim : $1 = \frac{1}{6} \times 6$.

Se a barra branca representa, portanto $\frac{1}{6}$ da verde-escuro e se a barra verde-escuro representa em relação a si mesma $\frac{6}{6}$, a vermelha sendo composta de duas barras brancas e cada branca é $\frac{1}{6}$ da verde-escuro, então o que a barra vermelha é da verde-escuro? $\frac{2}{6}$ da verde-escuro. Poderemos, dessa maneira, então fazer a seguinte representação acima mencionada : $\frac{6}{6} \times 6 - \frac{2}{6} \times 6$.

Agora vamos usar parênteses com frações, também. Vamos usar a barra amarela, e sôbre ela duas barras vermelhas colocadas ponta a ponta.

$5 - 2 \times 2$ ou $5 - (2 + 2) =$

$\frac{5}{5} \times 5 - (\frac{2}{5} \times 5 + \frac{2}{5} \times 5) =$

$\frac{5}{2} \times 2 - (\frac{2}{2} \times 2 + \frac{2}{2} \times 2) =$

$\frac{5}{2} \times 2 - 2 \times \frac{2}{2} \times 2 =$

$\frac{5}{5} \times 5 - 2 \times \frac{2}{5} \times 5 =$

Quantas barras brancas cobrem a carmim ? 4 . A barra branca é da carmim $\frac{1}{4}$. Se a barra branca é $\frac{1}{4}$ da carmim e a barra vermelha são duas barras brancas, a barra branca é portanto $\frac{2}{4}$ da carmim ; a amarela sendo coberta por 5 barras brancas e cada branca sendo $\frac{1}{4}$ da carmim, a amarela vai ser, então $\frac{5}{4}$ da carmim. Sendo assim poderemos fazer outra representação em relação à carmim.

$\frac{5}{4} \times 4 - (\frac{2}{4} \times 4 + \frac{2}{4} \times 4) =$ ou $\frac{5}{4} \times 4 - 2 \times \frac{2}{4} \times 4$

Já que vocês viram tôdas essas representações, vamos fazer agora outros exercícios:

Vamos considerar a barra preta e sôbre ela duas barras verde-claro colocadas ponta a ponta. Vamos representar simbòlicamente:

$7 - (3 + 3) =$ ou $7 - 2 \times 3 =$

$\frac{7}{3} \times 3 - (\frac{3}{3} \times 3 + \frac{3}{3} \times 3) =$

$\frac{7}{3} \times 3 - 2 \times \frac{3}{3} \times 3 =$

$\frac{7}{7} \times 7 - (\frac{3}{7} \times 7 + \frac{3}{7} \times 7) =$

$\frac{7}{7} \times 7 - 2 \times \frac{3}{7} \times 7 =$

Vamos fazer outro exercício usando a barra preta, tendo sôbre ela duas verde-claro colocadas ponta a ponta, usando sòmente o 4 como unidade de medida.

$7 = \frac{7}{4} \times 4 =$

$\frac{7}{4} \times 4 - \left(\frac{3}{4} \times 4 + \frac{3}{4} \times 4 \right) =$

$\frac{7}{4} \times 4 - 2 \times \frac{3}{4} \times 4 =$

A barra carmim é coberta por 4 barras brancas; quer dizer é $\frac{1}{4}$ da carmim. Se a barra branca é $\frac{1}{4}$ da carmim e a verde-claro é coberta com 3 barras brancas, a verde-claro vai ser $\frac{3}{4}$ da carmim. Se a barra preta é coberta com 7 barras btancas, a branca sendo $\frac{1}{4}$ da carmim, a barra preta será então, $\frac{7}{4}$ da carmim.

Por hoje, sras. professôras é só.

:::::::::::::::

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em, 13/10/959

Décima segunda AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO: - Depois da apresentação dos relatórios vamos reiniciar o nosso curso. Todas peguem as barras, nessa parte do nosso curso vamos estudar de 1 a 20, apenas vou dar dois ou três exercícios. Vocês escolham uma barra de cada côr. Construam com a barra uma escada, de acôrdo com os comprimentos, começando pela barra branca.

Tôdas construiram a escada ? Agora vocês subam a escada a partir da barra branca dizendo as côres : Branca, Vermelha, Verde-claro, Carmim, Amarela, Verde-escuro, Preta, Marrom, Azul e Alaranjada.

Observem que nós diremos que duas barras são sucessivas quando uma segue ou precede imediatamente a outra. A barra amarela segue a barra carmim, a barra preta será a sucessiva da barra verde-escuro ; a barra marrom será a sucessiva da preta, etc.

Pergunto, então, qual a diferença entre duas barras sucessivas nessa escada ? A diferença será de uma branca. Então nós podemos dizer que a barra alaranjada é a sucessiva da barra azul e a alaranjada excede a barra azul de uma barra branca. Entendem ? Observem que êsse conceito é de vital importância na realização de problemas, futuramente. Então nós como poderemos representar simbòlicamente que a barra alaranjada excede de uma unidade a barra azul? Exatamente porque nós sabemos que a barra branca vale 1 se a barra brancavale 1, e eu disse que a barra alaranjada excede a barra azul de uma barra branca, eu posso dizer sob outra forma, assim, por exemplo, que a barra alaranjada, portanto, 10, excede 9 de uma unidade. Entendem ?

Então nós poderemos escrever assim $10 = 9 + 1$.

Quer dizer, portanto, que 10 excede 9 de uma unidade. Portanto, 9 e 10 são sucessivos, como também as barras correspondentes são sucessivas.

Como poderemos representar, então, simbòlicamente que a azul excede a barra marrom de uma unidade ? $9 = 8 + 1$.

Como poderemos representar que a barra marrom excede a barra preta de uma unidade ? Escrevendo assim : $8 = 7 + 1$.

Façam, então, como exercício o seguinte : que a barra preta excede a barra verde-escuro de uma unidade: $7 = 6 + 1$.

Façam como exercício que a barra verde-escuro excede a barra amarela de uma unidade. $6 = 5 + 1$.

Que a barra amarela excede a carmim de uma unidade : $5=4+1$.

Que a barra carmim excede de uma unidade a barra verde-claro: $4 = 3 + 1$.

Que a barra verde-claro excede a vermelha de uma unidade: $3= 2 + 1$.

Que a barra vermelha excede de uma unidade a barra branca: $2 = 1 + 1$.

Agora, nós poderemos fazer exercícios sob outra forma : nós poderemos dizer que a barra azul é igual à barra alaranjada menos a barra branca.

Então, eu posso dizer, traduzindo, que a barra alaranjada menos a barra branca é igual à azul, ou então, que a barra alaranjada excede de uma unidade a barra azul.

Escrevendo sob outra forma nós poderemos dizer que a azul é igual à alaranjada menos a barra branca e nós poderemos escrever que $9 = 10 - 1$. Isso traduz que o número 10 excede o 9 de uma unidade. Isso é outra maneira de traduzir a mesma relação. Vocês que já aprenderam equação sabem que isso é importante. É uma maneira de traduzir o " excede ".

Tanto posso dizer que o azul excede de uma unidade a barra marrom ; ($8 = 9 - 1$) como posso dizer que a barra marrom excede a preta de uma unidade, usando a simbolização, $7 = 8 - 1$.

Então fazendo uns exercícios, vocês poderão dizer que a marrom excede a preta de uma unidade ; que a preta excede a verde-escuro de uma unidade ; que a verde-escuro excede a amarela de uma unidade; que a amarela excede a carmim de uma unidade; que a carmim excede a verde-claro de uma unidade e assim sucessivamente.

Quer dizer que vocês aprenderam duas relações e vocês têm então que essas igualdades que nós escrevemos aqui traduzem as relações; e que essas barras estão traduzindo a relação que há entre essas barras. Traduzindo sob forma genérica, poderia dizer que duas barras sucessivas diferem de uma unidade. Então isso é uma relação entre os valores de duas barras quaisquer escolhidas entro dêsse conjunto de barras. Entendem ? Duas barras sucessivas diferem uma unidade, diferem de uma barra branca.

Vamos ver agora o seguinte : vamos construir uma escada a partir da barra branca de tal modo que duas barras sucessivas difiram de uma barra vermelha.

Branca - Verde-claro - Amarela - preta e Azul.

Então leiam por bondade a escada que satisfaz às condições pré estabelecidas. Subam a escada a partir da barra branca dizendo as côres : desçam a escada a partir da barra azul. Subam dizendo os valores. Desçam a escada a partir do valor 9 e coloquem a barra vermelha preenchendo as lacunas para ver se confere, se a relação entre duas barras sucessivas diferem de uma barra vermelha.

Por exemplo, posso agora dizer que a barra azul difere da preta de uma barra vermelha ; isso dizendo com relação às barras, e com relação aos valores ? $9 = 7 + 2$. E sob outra forma, como poderia dizer ? $7 = 9 - 2$.

Qual a barra que precede a preta ? - amarela. E entre a preta e a amarela qual a relação que há? Que a barra preta difere da amarela de uma barra vermelha. Como posso representar simbòlicamente essa relação ? $7 = 5 + 2$ ou $5 = 7 - 2$. E o 5 o que é do 3 ? Qual a relação entre o 5 e o 3 nessa escada ? O 5 difere do 3 de uma barra vermelha. Então usando as barras, a amarela difere da verde-claro de uma barra vermelha. Então, estabelecendo a simbolização correspondente poderei escrever da seguinte maneira : $5 = 3 + 2$ ou então $3 = 5 - 2$.

Por hoje, sras. professôras é só.

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 17/9/959

Décima Terceira AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Na aula passada fizemos aquêles primeiros exercícios de relação, construímos algumas escadas. Depois, nós observamos que duas barras consecutivas apresentavam a diferença comum de uma barra; depois construimos uma escada a partir da barra branca, tendo como diferença comum a vermelha.

Agora, vocês vão construir uma escada a partir da vermelha, tendo como diferença comum a vermelha, quer dizer a diferença entre duas barras consecutivas vai ser a vermelha. (Pausa) - Tôdas vocês já fizeram ?

Digam as côres de suas escadas. Vermelha, carmim, verde-escuro, marrom e alaranjada.

Agora, intercalem a barra vermelha entre duas barras consecutivas para verem se está realmente correto o esquema. Quer dizer que o esquema está perfeitamente correto.

Agora, como poderemos escrever aquelas relações que ensinei na aula passada com respeito a essa escada ? Nós teremos que a alaranjada excede a marrom de uma barra vermelha; que a marrom excede a verde-escuro de uma barra vermelha ; que a verde-escuro excede a carmim de uma barra vermelha ; a carmim excede a vermelha de uma vermelha.

Como poderemos representar simbòlicamente essas relações que acabo de anunciar ?

$10 = 8 + 2$ $\quad 8 = 10 - 2$ $\quad 8 = 6 + 2$ $\quad 6 = 8 - 2$

$6 = 4 + 2$ $\quad 4 = 6 - 2$ $\quad 4 = 2 + 2$

Vamos agora construir uma escada a partir da barra branca apresentando como diferença comum a barra verde-claro.

Branca, Carmim, Preta e Alaranjada.

Digam os valores : 1, 4, 7 e 10 .

Então o que vocês observaram ? Que há uma diferença comum entre duas barras consecutivas. Qual a diferença ? A diferença é a barra verde-claro. Então, como eu posso traduzir em linguagem matemática que a diferença entre duas barras consecutivas é a barra verde-claro?

Eu digo por exemplo, que a alaranjada é maior do que a preta , três unidades ; que a preta é maior do que a carmim, três unidades, e que a carmim é maior do que a branca, três unidades. Quer dizer que poderemos traduzir assim sob essa forma tôdas essas barras.

Simbòlicamente, como poderemos dizer que a alaranjada excede a preta de três unidades, nessa escada que acabamos de construir? $10 = 7 + 3$.

Por que posso afirmar que a preta segue a carmim nessa escada?

Porque 7 vai ser igual a 4 + 3 . Agora, dizendo sob outra forma, a preta é maior ou menor do que a alaranjada ? E' menor . Então porque é menor ? Porque difere da alaranjada de três unidades. Como poderemos representar simbòlicamente que essa barra alaranjada ex excede a preta de três unidades ? 7 = 10 - 3.

Agora, vamos fazer o seguinte exercício :

separem as barras brancas, verde-claro, amarela, preta e azul; formem uma escada com êssas barras. O que é que vocês observam ? Que a diferença entre duas barras consecutivas é de uma barra vermelha. É evidente. E quais são as côres das barras da escada ? Branca. Verde-claro, Amarela, Preta e Azul. E quais os valôres? 1, 3, 5, 7 e 9 .

Escolham agora as seguintes barras: Vermelha, carmim, verde-escuro, marrom e alaranjada. Não desmanchem a outra escada. O que vocês observam nessa última escada ? Quais as côres das barras que compõem essa escada ? vermelha, carmim, verde-escuro, marrom e alaranjada.

Qual a diferença entre duas barras consecutivas ? A barra vermelha.

O que vocês perceberam então ? Que as duas escadas apresentam a diferença. Então, elas possuem uma equidiferença, possuem uma diferença igual. E qual essa equidiferença? A barra vermelha.

Quais são os valores das duas escadas. Vejamos e procuremos prestar atenção. Na primeira temos 1, 3, 5, 7, 9 e na segunda temos 2, 4, 6, 8, 10 .

Ora, temos aqui dois grupos de côres, dois grupos de valôres . Vamos então dar o nome a êsses valores, nomes novos; vamos dizer, por exemplo que a primeira escada que nós construimos é constituída por barras ímpares e a outra por barras pares. Então, teremos valores ímpares e valores pares. Quais os ímpares ? 1, 3, 5, 7 e 9.

E quais os valores pares ? 2, 4, 6, 8, e 10. Podem desmanchar as duas escadas. Vamos, agora, fazer um exercício muito interessante: tôdas vocês procurem tôdas as barras que podem ser cobertas por um número ímpar de barras brancas: branca, verde-claro, amarela, preta e azul.

Agora, procurem barras que podem ser cobertas por um número par de barras brancas: vermelha, carmim, verde-escuro, azul e alaranjada.

Então, agora quero que vocês verifiquem se é possível existir alguma barra que pode ser coberta por um número par de barras vermelha, e por um número ímpar de barras brancas.

Não há possibilidade, porque cada barra vermelha é coberta por um número par de barras brancas e se cada vermelha é coberta por um número par de barras brancas essas barras não podem ser encontradas porque elas sendo cobertas por um número par de barras vermelhas seria forçosamente cobertas por um número par de barras brancas.

Agora, vejamos o seguinte exercício: determinar se há alguma barra que pose ser coberta por um número ímpar de barras vermelhas e por um número par de barras brancas.

Existem as seguintes barras: a própria vermelha que é coberta por duas barras brancas; a <u>verde-escuro</u> que é coberta por três barras vermelhas e por seis barras brancas e a barra <u>alaranjada</u> que pode ser coberta por cinco barras vermelhas e por dez barras brancas.

Então há possibilidade.

Procurem agora tôdas as barras que podem ser cobertas por um número par de barras vermelhas. <u>Resposta</u>: as barras <u>marrom</u> e <u>carmim</u>, cobertas, a primeira por 4 barras vermelhas e a segunda por 2 barras vermelhas.

Procurem as barras que podem ser cobertas com um número ímpar de barras vermelhas : A <u>vermelha</u> , a <u>verde-escuro</u>, e a alaranjada. Quais os valores dessas barras? 2, 6, 10.

Procurem tôdas as barras que podem ser cobertas por um número ímpar de barras verde-claro e por um número par de barras brancas.

Não é possível, porque se cada barra verde é coberta por um número ímpar de barras brancas, se a barra branca é um número ímpar, forçosamente, cada barra que fôsse coberta por um número ímpar de barras verde-claro seria também coberta por um número ímpar de barras brancas.

E , se nós tivermos um número par de barras verde-claro, e um número ímpar de barras brancas é possível ?

Não é possível também porque tôda a vez que nós tivermos uma barra verde-claro ela pode ser coberta por um número ímpar de barras brancas, e então quando tivermos um número par de barras ímpares, teremos sempre uma barra par. Duas verde-claro dão a verde-escuro. Podem escolher duas barras quaisquer ímpares que vocês obterão um número par.

Se eu considero um número par de barras verde-claro então serão cobertas essas barras por um número par de barras brancas também.

É esta a nossa conclusão.

Vocês procurem sempre raciocinar com tôdas as escadas que dei. Construam as três escadas a que me referí anteriormente. O que vocês observam ? Quero ver quais as conclusões que vocês podem tirar, quais as observações que vocês podem fazer olhando para essas três escadas.

Por exemplo, se eu digo construam uma escada cuja diferença seja a barra vermelha, vocês poderiam construir essa escada ? Repetindo, se eu disser construam uma escada de tal modo que a diferença entre duas barras consecutivas seja a vermelha vocês poderiam construir, ou precisam de mais algum elemento para resolver ? Vocês têm todos os dados necessários ? Raciocinem porque futuramente isso servirá para a resolução de problemas. Nós precisamos conhecer a barra inicial, porque nós não podemos saber nem afirmar se a escada que nós construiremos será a que foi pedida, porque vocês têm diante dos seus olhos êsse problema resolvido de duas maneiras distintas. Por exemplo, essa escada aqui, 2, 4, 6, 8 e 10 e essa outra 1, 3, 5, 7 e 9, e nessas duas escadas a diferença entre duas barras consecutivas não é sempre de uma vermelha ? É evidente, então que eu pedindo para vocês construirem uma escada de tal modo que a diferença entre duas barras consecutivas seja a barra vermelha, só com êsse elemento vocês saberiam qual das duas escadas eu pedi ? E só não há essas escadas, há milhares que poderiam ser escolhidas satisfazendo plenamente o enunciado do meu problema. Para que se resolva um problema é necessário saber se os elementos dados são suficientes para resolvê-los No caso não seria suficiente eu dizer apenas a diferença entre duas barras consecutivas, necessito dizer ainda o valor da barra inicial. Vocês observaram que duas barras ímpares consecutivas diferem, entre sí, de duas unidades, e que duas barras pares consecutivas diferem, entre sí, das duas unidades, então eu posso dizer que qualquer barra par é igual à precedente ou à seguinte, mas, ssee eu quero a seguinte terei que adicionar uma barra vermelha, e se quero a precedente terei que subtrair uma vermelha. Então, se eu tenho / barra ímpar e quero determinar a seguinte, como é que faço ? Será da mesma maneira, vai depender apenas de eu considerar se a barra é par ou é ímpar, pouco interessa saber outra coisa, basta sòmente saber se a barra é ímpar ou par para determinar a barra precedente ou a seguinte.

Por hoje, sras. professôras, é só.

::::::::::::::

CURSO DE MATEMÁTICA MINISTRADO PELO PROFESSOR
WALDECYR CAVALCANTI DE ARAÚJO PEREIRA
Em 25/9/959

Décima Quarta AULA

O SNR. PROF. WALDECYR ARAÚJO:- Na aula passada fizemos exercícios sôbre a parte de diferença comum entre duas barras consecutivas, fizemos exercícios com a barra verde.

Vamos hoje construir uma escada a partir da barra branca e apresentando como diferença comum entre duas barras consecutivas, a carmim.

RESULTADO: Branca - Amarela - Azul .

Quais os valores ?

RESULTADO: 1 - 5 - 9 .

Então passemos agora à representação simbólica. Como será a representação simbólica dessa escada ? Tenho, por exemplo que a barra azul excede a barra amarela de uma barra carmim, portanto vai ser: 9 excede 5 de 4 unidades. O 5 excede a unidade (1), de 4 unidades. Quer dizer:

$$9 = 5 + 4$$
$$5 = 9 - 4$$
$$1 = 5 - 4$$

Vejamos agora se é possível cobrir, ou melhor, se é possível determinar uma barra que pode ser coberta por um número par de barras carmim e por um número ímpar de barras brancas. Não é possível, porque a barra carmim já é par, ela será coberta por um número par de barras brancas e se qualquer barra fôr coberta por um número par de barras carmim, será uma barra par, e sendo uma barra par será coberta por um número par de barras brancas.

Vejamos o seguinte problema: será possível determinar uma barra que possa ser coberta por um número ímpar de barras carmim e por um número par de barras brancas. Não é possível, para nós porque por enquanto só estudamos até o número 10 . Agora vejamos o seguinte: vocês considerem a alaranjada, coloquem uma barra branca ponta a ponta com a alaranjada, vocês sabem, por exemplo, que a barra alaranjada pode ser coberta por quantas barras brancas ? Por 10. Então, nós teremos um novo comprimento diferente de todos aquêles que consideramos até agora. Nós teremos a barra alaranjada e uma barra branca, então teremos 10 barras brancas e uma barrinha branca a mais, então teremos um novo comprimento e a êsse novo comprimento vamos chamar de onze. Vamos representar simbòlicamente assim : 11. Agora, se ao invés de colocar uma barra branca ponta a ponta com a alaranjada, considerarmos a alaranjada ponta a ponta com a vermelha, teremos um novo comprimento, que chamaremos doze e representaremos simbòlicamente assim : 12 .

Vocês agora considerem a barra alaranjada e coloquem uma verde-claro ponta a ponta com a alaranjada. Êsse comprimento excede o precedente de que ? De uma barra branca. Eu seria capaz de dizer que êle excede o precedente de uma barra branca; seria capaz até de escrever êsse comprimento, que não conheço, e que representando simbòlicamente, será igual a 12 + 1 .

Se eu serei capaz já de representar 12 + 1 , então para êsse comprimento vamos inventar um nome, chamaremos treze e representaremos simbòlicamente assim : 13.

Quer dizer que nós aprendemos três novos símbolos, três novas palavras e obtivemos três novos comprimentos, três novos números, evidentemente.

Se nós construirmos a escada a partir da barra branca, considerando êsse novo comprimento, o que obteremos ?

Branca - Vermelha - Verde-claro - Carmim - Amarela - Verde Escuro - Preta - Marrom - Azul - Alaranjada - Alaranjada e Branca - Alaranjada e Vermelha - Alaranjada e Verde - claro .

Agora vocês construam a escada partindo da barra branca de tal modo que a diferença entre duas barras consecutivas seja a barra vermelha .

Branca - Verde-claro - Amarela - Preta - Azul - Alaranjada e Branca - Alaranjada e Verde-claro .

Tentem, agora, construir uma escada partindo da barra vermelha de tal modo que a diferença entre duas barras consecutivas seja a barra vermelha.

Vermelha - Carmim - Verde-Escuro - Marrom - Alaranjada - Alaranjada e vermelha . Vamos ler as três escadas dizendo as côres e o valor, e depois vocês irão tirar algumas conclusões:

<u>1ª escada</u> : (CÔRES) - Branca - Vermelha - Verde-Claro - Carmim - Amarela - Preta - Verde-Escuro - Marrom - Azul - Alaranjada - Alaranjada e Branca - Alaranjada e vermelha - Alaranjada e Verde-Claro .

<u>1ª escada</u> : (VALÔRES) - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 .

<u>2ª escada</u> : (CÔRES)--Branca - Verde-Claro - Amarela - preta- Azul - Alaranjada e Branca - Alaranjada e Verde-Claro.

<u>2ª escada</u> : (VALÔRES) - 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 .

<u>3ª escada</u> : (CÔRES) - Vermelha - Carmim - Verde-Escuro - marrom - Alaranjada - Alaranjada e vermelha.

<u>3ª escada</u> : (VALÔRES) - 2, 4, 6, 8, 10, 12 .

Nessas escadas, na primeira e na terceira apareceu a barra que vimos hoje, a 12. Ela foi encontrada como que ? Como um valor par, quer dizer que 12 vai ser considerada como barra par, como valor par.

Vejam agora a escada constituida por valores ímpares, o 11 e o 13 aparecem nessa escada, quer dizer que 11 e 13 serão considera - dos valores ímpares.

Vejamos agora alguns exercícios para treinar a parte já estudada, exercícios inicialmente de comparar.

$$10 + ? = 13$$

$$11 - 9 = ?$$

$$2 + ? = 11$$

$$7 + 4 = ?$$

$$6 + ? = 13$$

$$2 \times 6 = ?$$

$$13 - 5 = ?$$

$$12 = 7 + ?$$

$$8 + ? = 11$$

$$3 + ? = 12$$

$$4 + ? = 11$$

$$12 = 8 + ?$$

$$3 + 9 = ?$$

$$13 - 4 = ?$$

Procurem fazer os exercícios vendo as barras, vendo os valores e preenchendo com sinais.

Por exemplo, eu tenho 12 = 7 + uma certa quantidade. Eu preciso procurar a quantidade de que 12 excede de 7. Nós já poderemos traduzir na nossa linguagem, precisaremos determinar qual a quantidade em que 12 excede de 7. Qual é essa quantidade ? Vai ser a barra amarela. Qual o valor ? 8.

Por exemplo, eu tenho 13 = 10 mais uma certa quantidade. Quer dizer, 13 excede uma certa quantidade de 10, então qual será essa barra ? Será a verde-claro, quer dizer, 3.

Se eu tenho 11 - 9 = o que significa ? 11 excede de 9 quanto ? Qual a barra ? A vermelha.

Se tenho 2 + ? = 11, qual vai ser a barra de que 11 excede de 2 ? A azul, portanto o valor 9, isso está traduzindo a relação que nós consideramos aqui.

7 + 4 = ? quer dizer, tenho a preta mais a carmim, vai corresponder a qual barra ? A alaranjada e branca, quer dizer, 11.

6 + ? = 13 Quer dizer que o 13 excede uma certa quantidade de 6. Qual será a quantidade ? 7, a preta.

2 x 6 = ? Vejam bem, como farei essa representação com barras ? Duas barras verde-escuro colocadas ponta a ponta que correspondem a que ? Correspondem a barra alaranjada e ainda exce -

dendo uma certa quantidade, a vermelha, então nós poderemos representar que corresponde a alaranjada e vermelha que será portanto 1e.

13 - 5 = ? Como posso ler isso ? 13 excede uma certa quantidade de 5 ; Qual será essa quantidade ? Será justamente a marrom, o 8.

8 + ? = 11 A barra 11 excede uma certa quantidade de barra 8, qual será essa quantidade ? Será a verde-claro.

3 + ? = 12. 12 excede uma certa quantidade de 3, qual será? Será 9. Vocês devem fazer os cálcumos raciocinando, com o conhecimento que já possuem, lançando mão, apenas dos conhecimentos que já adquiriram, como se realmente fossem crianças. De outra forma eu não iria dar êsses exercícios, por hipótese alguma, seria tremendamente impossível tal coisa.

4 + ? = 11. 11 excede uma certa quantidade de 4, qual será? Será 7, a barra preta.

12 = 8 + ? 12 excede uma certa quantidade de 8, qual será? Será 4, que é, portanto, a carmim.

3 + 9 = ? Como será a representação disso, com barras ? Será a verde-claro colocada ponta a ponta com a azul. Obteremos uma alaranjada e vermelha, que recebeu o nome de 12.

13 - 4 = ? 13 excede uma certa quantidade de 4, qual será essa quantidade ? Vai ser 9, a barra azul.

Vamos fazer mais alguns exercícios:

$2 + 9 =$

$2 \times 5 + 1 =$

$1 + 2 + 3 + 4 = 11 - ?$

$11 - \frac{1}{2} \times 6 =$

$\frac{1}{2} \times (11 - 9) =$

$11 - 9 + 3 =$

$5 + 6 =$

$11 - 6 + 4 - 3 + 2$

Vejamos os resultados:

2 + 9 = ? Como será a representação ? Vai ser a vermelha colocada ponta a ponta com a azul, que vai dar a barra alaranjada e branca.

2 x 5 + 1 = ? Qual será a representação ? Será a seguinte : duas amarelas colocadas ponta a ponta e mais a barra branca . A alaranjada mais a barra branca será 11.

1 + 2 + 3 + 4 = 11 - ? Como será essa representação ? Será a branca mais a vermelha, mais a verde-claro, e mais a carmim; essas barras poderão ser substituidas por qual barra ? Pela alaranjada. Então a barra 11 excede a alaranjada de quantas ? De uma.

Devemos, portanto, tirar de onze qual quantidade para obter aquêle valor ?

$11 - \frac{1}{2} \times 6 = ?$ Alaranjada e branca colocadas ponta a ponta, sôbre essas barras nós vamos colocar a barra verde-claro, que será a metade da barra verde-escuro. Portanto teremos essa representação, qual a quantidade que falta para corresponder ao comprimento de 11 ? A marrom..

$\frac{1}{2} \times 11 - 9 = ?$ 11 - 9 qual será a representação ? A barra alaranjada e branca tendo sôbre ela a azul, fica sobrando qual o valor ? A vermelha. Teremos, então metade de vermelha que será a barra branca.

$11 - 9 + 3 = ?$ Alaranjada e branca, sôbre elas a azul colocadas ponta a ponta com a verde-claro, dará qual resultado? Vai ser 2 + 3, portanto, a amarela.

$5 + 6 = ?$ A amarela e a verde-escuro vão corresponder a qual barra ? A alaranjada e a branca, igual a 11.

Agora vejamos o seguinte: $11 - 6 + 4 - 3 + 2 = ?$ Vejamos qual a representação disso aqui: Sôbre a alaranjada e branca colocaremos a verde-escuro, vai ficar sobrando qual o valor ? A amarela ; 4 é a barra carmim, portanto, amarela com a carmim já poderemos substituir pela azul ; colocando-se sôbre a azul a verde-claro colocada ponta a ponta com a vermelha, teremos a marrom. (9) .

Vamos fazer outros exercícios:

$3 + 8 = ?$ Verde-claro colocada ponta a ponta com a marrom , corresponde a alaranjada e branca que será portanto 11.

$3 \times 3 + 2 =$ Três barras verde-claro colocadas ponta a ponta e mais uma barra vermelha correspondem à alaranjada mais a branca. (11) .

$11 - 5 + 4 = ?$ Alaranjada e branca, sôbre êsse valor a amarela e carmim colocadas ponta a ponta irão dar a vermelha, que vale 2 .

$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times 8 = 11 - ?$ Metade da barra verde-escuro (verde claro); metade da marrom (carmim); verde-claro mais a carmim igual à preta. Então 11 excede de 7, qual o valor ? A carmim . Vejam como é simples determinar o valor sem precisar de lançar mão das regras de operação que vocês aprendem. Nós resolvemos uma equação de 1º grau mentalmente, e que a criança só vai aprender no segundo ano de ginásio.

$\frac{1}{3} \times (11 - 2) = ?$ Alaranjada e branca, sôbre estas a vermelha, qual será o valor ? A azul, então $\frac{1}{3}$ da azul vai ser a verde-claro. (3).

$11 - 8 + 5 = ?$ Alaranjada e branca tendo sôbre estas a marrom, vai sobrar o que ? A verde-claro; agora a verde-claro juntamente com a amarela qual será o resultado ? A marrom que vale 8.

$11 - 3 \times 3 = ?$ Vejamos, 3 x 3 são três barras verde-claro colocadas ponta a ponta ; então teremos 11, alaranjada e branca e dessas nós tiramos 3 barras verde-claro, portanto, qual o resultado ? A vermelha.

11 - (2 x ?) = 3 . Eu tenho 11 menos 2 vêzes uma certa quantidade, que deve dar 3. Então raciocinando sôbre qual a quantidade que 11 excede de 3, qual será essa quantidade ? Será 8. Então eu tenho 2 vêzes uma certa barra para obter 8, qual será essa barra ? A carmim.

$\frac{1}{3}$ x 9 + ? = 11 . Vejamos: $\frac{1}{3}$ x 9, quanto vale ? A verde-claro. Verde-claro quanto vale ? 3. Teremos então que 11 será igual a 3, mais uma certa quantidade ; qual a quantidade que 11 excede de 3 ? Será 8, portanto, a marrom. Por aí vocês observam como o raciocinio da criança vai sendo preparado, de maneira extraordinária para seu futuro aperfeiçoamento, ela vai aprendendo inconscientemente tôda a técnica, todo o mecanismo de outros conhecimentos que ela adquirirá num curso mais adiantado. Vamos continuar com outros exercícios. Vocês façam o seguinte : construam uma escada a partir da barra amarela, apresentando a barra vermelha como diferença entre duas barras consecutivas.

AMARELA,	PRETA,	AZUL,	ALARANJADA e BRANCA,	ALARANJADA E VERDE-CLARO
5	7	9	11	13

Digam as relações que estão observando nessa escada ?

13 = 11 + 2
11 = 9 + 2
9 = 7 + 2
7 = 5 + 2
5 = 33+ 22

Não poderíamos agora utilizar a diferença ?

11 = 13 - 2
9 = 11 - 2
7 = 5 - 2
5 = 77-- 2 .

Façam essa representação no caderno dêsses valores que vocês viram, por soma e por diferença e procurem lembrar-se que essas relações traduzem que uma certa quantidade excede a outra, tanto faz nós escrevermos assim, 3 + 8 = 11, como escrever 8 = 11 - 3, exprimem a mesma relação, exprimem que uma quantidade excede a outra de certa quantidade. Se eu escrevesse 3 = 11 - 8, poderia exprimir que o 11 excede o três de 8 unidades.

Vamos agora, lidar com frações para os novos valores que nós introduzimos. A barra 11 pode ser coberta por quantas barras brancas ? Por 11 barras brancas. Então, nós diremos que a barra branca representa $\frac{1}{11}$ dêsse comprimento aqui (alaranjada e branca)

Como posso representar que a barra branca é um $\frac{1}{11}$ dessas barras (alaranjada e branca) ? Então diremos que $1 = \frac{1}{11} \times 11$.

A barra vermelha então o que será dessas barras (alaranjada e branca) ? Será $\frac{2}{11}$; então $2 = \frac{2}{11} \times 2$. A barra vermelha pode ser coberta por duas barras brancas e cada barra branca corresponde a $\frac{1}{11}$.

A barra verde-claro o que será da barra 11 ? Será $\frac{3}{11}$.

E a barra carmim o que será da barra 11 ? Será $\frac{4}{11}$.

Agora, consideremos o seguinte: a alaranjada e a vermelha. Vocês já observaram que são necessárias quantas barras brancas para cobrir essas barras que tenho nas mãos ? São necessárias 12 barras brancas. Se a barra branca corresponde a $\frac{1}{12}$ dessas barras e representaremos simbòlicamente assim : $1 = \frac{1}{12} \times 12$, da mesma maneira poderemos perguntar, a barra vermelha o que representa então dessas barras ? $\frac{2}{12}$.

Se a barra vermelha corresponde a $\frac{2}{12}$ dessas barras e se eu usasse a vermelha como unidade, quanto representaria dessas barras ? $\frac{1}{6}$.

Se eu uso a barra branca e obtenho $\frac{1}{12}$, e se uso a vermelha e posso cobrir com 6 vermelhas, teremos que a barra vermelha será $\frac{1}{6}$ dessa barra.

Tanto faz, portanto $\frac{2}{12}$, como $\frac{1}{6}$. Vocês já estão aprendendo simplificação de frações sem saber o que é isso.

Se considerarmos a verde-claro, que representa a verde-claro dessas barras (alaranjada e vermelha) ? Representa $\frac{1}{4}$.

Considere-se aqui essas barras divididas em 12 partes, o que seria a verde-claro ? $\frac{3}{12}$. Logo, posso dizer que $\frac{3}{12}$ é o mesmo que $\frac{1}{4}$ dessas barras. Se nós considerarmos agora a carmim ? quantas barras carmins são necessárias para cobrir essa barra ? (alaranjada e vermelha). 3 barras carmim. Posso, então, dizer que a carmim representa $\frac{1}{3}$ dessas barras. (alaranjada e vermelha). Se eu usar a barra branca como unidade, o que será a carmim dessas barras? $\frac{4}{12}$. Entendem ? Se nós considerarmos agora, a amarela, quantas barras brancas corresponderiam à amarela ? 5 . Então o que representa a amarela com relação a essas barras (alaranjada e vermelha) usando a branca como unidade ? $\frac{5}{12}$. Se considerarmos a verde-escuro , quantas barras verde-escuro são necessárias para cobrir essas barras (alaranjada e vermelha) ? 2 barras verde-escuro e 2 barras verde-escuro o que representam com relação a essas (alaranjada e vermelha)? $\frac{1}{2}$. Então teremos que a barra verde escuro é metade dessas barras. Se a verde-escuro pode ser coberta por seis brancas e a branca é $\frac{1}{12}$ dessa barra tôda, o que é a verde-escuro dessa barra ? $\frac{6}{12}$.

::::::::::::::

mundo inteiro possa beneficiar-se, o mais depressa possível, das experiências e do progresso realizado por professôres de todos os países.

Vê-se, pois, que a confecção e o uso do material didático pode ser um meio natural e eficiente para a prática feliz da abstração e concretização que fazem parte da atividade matemática educativa.

Instruções
para o uso do Geoplano

1 — **Justificação:**

Com o uso do geoplano, como material didático procura-se dar uma maior motivação às aulas de geometria, através de:

1) maior facilidade de visualização.

2) maior facilidade em fazer com que os alunos percebam as diversas etapas da construção geométrica dos teoremas.

3) levar os alunos do intuitivo ao dedutivo.

2 — **Descrição:**

1) um quadro magnético.

2) varetas de côres de comprimentos diferentes.

3 — **Modo de usar:**

As figuras geométricas são construídas com as varetas sôbre a prancha, *à vista dos alunos*, e aproveitando-se as côres para indicar elementos iguais.

Cabe ao professor adaptar o uso do geoplano a cada caso particular.

Podemos sugerir algumas aplicações:

1) Justificar os postulados fundamentais da geometria.

Exemplo: Por um ponto passam infinitas retas.

Considera-se um ponto qualquer do geoplano e se faz passar um grande número de varetas (retas) e leva-se o aluno a perceber que no caso de ponto e reta estas são infinitas.

2) Propiciar melhor visualização durante o decorrer da demonstração de um teorema que seria depois generalizado (para qualquer figura geométrica) no quadro negro.

Exemplo: Teorema do ângulo externo.

Num triângulo qualquer o ângulo externo é maior do que qualquer ângulo interno não adjacente.

Com varetas de côres diferentes constrói-se um triângulo *ABC*.

Prolonga-se um dos lados do triângulo e mostra-se, então, aos alunos que se obteve um ângulo externo e quais os ângulos internos não adjacentes.

Chama-se atenção para o fato de que se quer demonstrar que o ângulo externo é maior do que o interno não adjacente, portanto, que êste o contém.

Constrói-se, então, com vértice em *C* um ângulo igual a *B* do seguinte modo:

Tomam-se varetas que correspondam a metade de *BC* (isto é, considera-se o ponto *E* médio de *BC*) e as colocamos sôbre o lado *BC*. Unimos *AE* (*A* ao ponto *E*) e tomamos uma outra vareta igual a *AE* (prolongamos *AE* de um segmento *ED* igual a *AE*) e em seguida unimos *D* e *C*.

Retiramos a vareta AC e verificamos que os triângulos ABE e EDC são iguais (LAL) logo fica comprovado que o ângulo C é maior que B porque o contém.

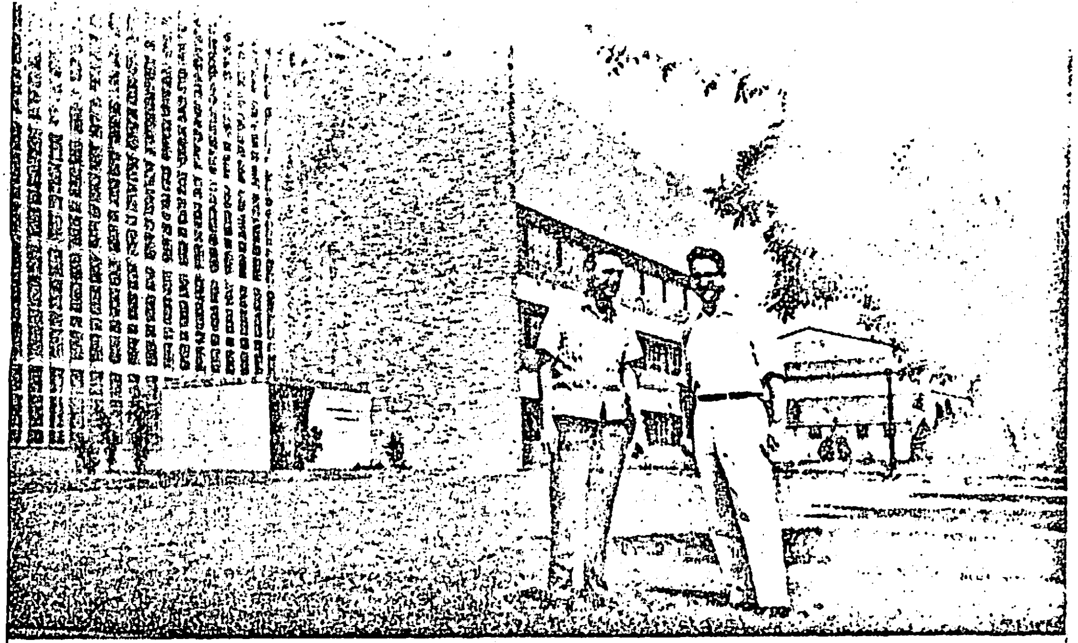
3) Fazer com que o concreto preceda o abstrato como fase preparatória para a demonstração.

Exemplo: Teorema da desigualdade entre ângulos e lados de um triângulo.

Tomam-se duas varetas iguais que vão formando sucessivamente ângulos desiguais e convida-se o aluno a observar o que acontece com o 3.º lado do triângulo assim construído, e a anunciar a proposição sugerida pela observação.

Imediatamente, após, deve-se fazer a demonstração do teorema enunciado (no quadro negro).

Observação: O professor deve tomar o maior cuidado possível com o uso do geoplano a fim de evitar o excesso de concretização. Para isso, deverá fazer logo a demonstração simbólica no quadro negro, para levar o aluno à necessária abstração matemática.



CURSOS DE VERÃO

esplêndida oportunidade para a renovação dos conhecimentos dos professôres e atualização de programas e métodos de ensino

Declarações do Prof. Osvaldo Sangiorgi *(visto na foto, à direita em companhia do Prof. Russell N. Bradt, diretor do Departamento de Matemática da K. U., em frente ao edifício que abriga o conjunto de Computadores Electrônicos), bolsista brasileiro, participante do Curso de Verão, 1960, para professôres do ensino secundário e superior, realizado pelo Departamento de Matemdtica, da Universidade de Kansas, U.S.A., que venceu a bôlsa oferecida pela Pan American Union, em colaboração com a National Science Foundation, tendo obtido, após a prestação dos exames finais, classificação "A" — a mais alta distinção conferida a bolsistas que freqüentam tais cursos superiores.*

Acêrca dos Cursos de Verão para professôres do ensino secundário e superior muito se poderia dizer, tal a importância que estão tendo (às vêzes com o nome de Cursos de Inverno) em todos os países civilizados que se interessam pela educação e cultura de seu povo. Ensejam êsses Cursos, um nôvo e superior arejamento das disciplinas lecionadas, aos professôres que dêles participam, bem como oferecem um vasto campo experimental, onde são estudados novos programas e métodos funcionais de ensino que mais se coadunem com os tempos modernos.

Buscam os Cursos de Verão — em especial os de Matemática e de Ciências, dentro da atual época de superestrutura científica — o que de mais recente em conteúdo e metodologia se poderia oferecer à presente geração de estudantes, sequiosa de maiores estímulos para as suas "maneiras de pensar e agir". Daí a necessidade de contínuos e progressivos Cursos de Verão que, realizados durante uma boa parte das grandes férias, possibilita aos professôres o salutar contacto com os últimos resultados obtidos pelas Universidades de todo o mundo.

Aqui no Brasil, como de resto em qualquer país, onde ao professor secundário cabe uma grande parcela na formação dos jovens, é mister a realização de cursos análogos, que permitirão aos docentes — para melhor desempenho de sua altruística função — a vivência com os últimos progressos do campo educacional, que, a nosso ver, é o mais importante de todos.

Notadamente, aos professôres portadores de diplomas de Curso Superior, que passam a lecionar durante anos seguidos em centros desprovidos de ensino superior, é imprescindível, sob pena de perder-se um estudioso professor e ganhar-se um simples repetidor de aulas, que se lhes ofereça a oportunidade de manterem em dia a sua formação, propiciando-lhes Cursos de Verão, no máximo de dois em dois anos, como verdadeiras bienais de cultura, a fim de se salvaguardar a autenticidade de um curso secundário atualizado.

É evidente que o sucesso dêsses Cursos depende de um planejamento que garanta a participação de professôres de Universidades Nacionais e Estrangeiras, para que o professorado possa de fato haurir de magníficas lições, dentro de programa de moderno conteúdo de Matemática, bem como se inteirar de novos acordos metodológicos.

Para melhor conhecimento de um tipo de Curso de Verão e os seus conseqüentes benefícios, limitar-nos-emos às impressões que tivemos como professor participante efetivo do "Summer Institute for High School and College Teachers of Mathematics" (Curso de Verão para professôres de cursos secundário e superior de Matemática) realizado pelo Departamento de Matemática, da Universidade de Kansas, U.S.A., de junho a agôsto de 1960, em colaboração com a Pan American Union e financiado pela National Science Foundation.

Preliminarmente queremos ressaltar o grande interêsse das Universidades Americanas para com o ensino secundário de seu país no presente instante, por contribuírem eficientemente na resolução de seus magnos problemas. Além de Kansas University, mais cinqüenta outras Universidades respondiam pelo êxito de Cursos de Verão relativos a outras disciplinas.

A verdade é que depois do lançamento do "Sputinik", pelos russos, em 1957, houve como que uma nova tomada de posição, por parte dos educadores norte-americanos, em relação à estrutura do ensino de seu país, notadamente na parte que dizia respeito à Matemática e às Ciências, de um modo geral. Guardando semelhança, pela imediata aplicação, com a primeira grande revolução feita por Moore (presidente do American Mathematical Society) nos Estados Unidos, em 1910, quando acusou de "anárquico" o ensino da Matemática, procuraram agora, os estudiosos norte-americanos, restaurar uma nova mentalidade de ensino da Matemática que levasse em conta: *a psicologia do aluno, a formação específica do professor secundário e superior*, e, *a contínua assistência a essa formação*. Daí a mobilização geral dos professôres secundários que, convocados pelos podêres competentes, têm realizado nas Universidades, durante as grandes férias, cursos de aperfeiçoamento, seminários de Matemática Superior, que já estão trazendo frutos benéficos ao ensino secundário ianque. Novos métodos de ensino, programas atualizados, "classes experimentais", uso apropriado de filmes, do rádio, da televisão (que paradoxalmente é dos fatôres de maior dispersão dos estudantes), tudo isto tem sido estudado sèriamente, onde a experiência dos mais antigos aliada à formação dos mais novos, tem procurado a melhor receita para os alunos da época atual.

Classe experimental, Eleventh Grade (eqüivalente ao nosso 3.° científico). Exposição de "Introdução à Álgebra Moderna"

Como é óbvio, sòmente dispondo de bons recursos financeiros, é que as Universidades podem levar a cabo tais programas, pois, recebem, os professôres participantes do Curso, numerário suficiente para a sua estada, bem como para as despesas de transporte. A prestação de exames finais, com a respectiva classificação (vai da letra A até E) visa não só comprovar o aproveitamento dos professôres inscritos, como assegurar a sua participação em novos cursos. Existe nos E. U. A., o Fundo Nacional de Ciências, alojado em magnífico edifício em Washington, que responde econômicamente pelo êxito dos Cursos de Verão.

Por que não se criar um Fundo análogo no Brasil que, sem dúvida alguma, desponta como um dos mais cultos país do hemisfério Sul? Propiciar-se-ia assim aos professôres secundários Cursos de Férias, bem estruturados como verdadeiros estágios de informação, já que a cultura é função diretriz de cada época. Dentro de nossas Universidades, a Faculdade de Filosofia, além de uma de suas altas finalidades, que é a de formar professôres para o ensino secundário e superior, poderiam, em convênio com o Ministério da Educação e Secretarias de Estado, planejar um esquema educacional que pudesse garantir com êxito aquêle altruístico escopo dos Cursos de Férias de outros países: oferecer assistência contínua aos seus professôres secundários.

Voltando a falar dos atuais Cursos de Verão norte-americanos faremos a seguir um rápido resumo do local, onde vivemos e participamos, durante quase três meses: a *Universidade de Kansas*. Kansas University, mais conhecida por K. U., situada em Lawrence, Estado de Kansas, é uma verdadeira festa em tecnicolor para os olhos e uma constante alegria para o espírito. Das mais antigas (1894) é também das mais lindas dos E.U.A. Os seus imponentes edifícios, as suas majestosas salas de aula dotadas de todo o confôrto possível (luz indireta ar condicionado, quadros móveis, quadros murais, etc. ...) as suas magníficas residências típicas, os seus soberbos museus e laboratórios (basta dizer que o Departamento de Matemática dispõe de um completo Centro de Computadores Electrônicos e o de Física de um Reator Atômico e um Síncroton) e os seus funcionais Departamentos, constituem um impressionante conjunto, cuja harmonia de linhas se distribui numa topografia encantadora, comandada por um esguio campanário que, além dos lindos concertos de carrilhão que proporciona, anuncia a constante presença dos seus estudantes mortos na última guerra.

O Departamento de Matemática de K.U., superiormente dirigido pelo Prof. Russell N. Bradt, realizou um perfeito Curso de Verão, oferecendo aos participantes os seguintes cursos, com aulas diárias de 1 hora, de 2.as às 6.as feiras:

Mathematics Logic, Sets with applications

Introduction to Abstract Algebra

Modern Geometries

Statistical Analysis

Topics in High School and College Mathematics

e mais duas Classes Experimentais (Demonstration Class) constituídas de alunos

Exposição de um bolsista (introdução à álgebra) na Classe Experimental do Ninth Grade (3.º ginasial).

recrutados de Escolas Secundárias, de diversas cidades norte-americanas, de ambos os sexos, não satisfazendo critério determinado de escolha, para bem caracterizar a experiência.

Os professôres inscritos no Curso de Verão de K.U., deveriam escolher, no mínimo, dois dos cursos acima citados e prestarem os respectivos exames no fim de cada 4 semanas. Inscrevemo-nos oficialmente nos cursos de: Mathematics Logic, Sets with applications; Modern Geometrics e Topics in High School and College Mathematics, incluindo as Classes Experimentais. Os professôres instrutores (entre os quais destacamos o renomado prof. George Springer que deu o curso de Lógica Matemática), acompanhado de seus assistentes, proporcionaram ótimos cursos, realizando trabalho de mérito acêrca de diversos temas de Matemática Superior e da discussão de novos programas e métodos de ensino. O curso de Lógica Matemática desenvolvido (que a maioria dos bolsistas do ensino secundário e superior não tinham tido ainda oportunidade de conhecer) deu uma belíssima contribuição no sentido de apresentar a Matemática como Lógica Formal, ressaltando o conhecido isomorfismo entre o cálculo das proposições elementares e as funções, bem como as importantes interpretações nos vários campos: álgebra linear, probabilidade contínua, físico (circuitos elétricos), biológico (leis da genética), etc... Assim, por exemplo, foram apresentados alguns modelos (passíveis de serem realizados nos colégios) interpretando diversas funções binárias e entre elas as mais elementares da lógica proposicional. A estrutura do cálculo binário, dos modernos computadores electrônicos, teve a sua apresentação para a resolução de problemas lógicos. Os mesmos "robots", classificadores da moderna técnica automática, apresentaram-se para resolver questões da Lógica Formal, verificando implicações, equivalências e tautologias.

O Curso de Geometrias Modernas, dado pelo Prof. Schatten (que já deu curso análogo na Alemanha) selecionou tópicos de Geometrias Não-Euclidianas, a partir de grupos de transformações. Foram investigadas tôdas as propriedades das figuras geométricas que permanecessem invariáveis por um grupo de transformações. Assim, foram estudados também os invariantes topológicos e apresentados modelos de Geometrias, a partir de axiomáticas formalizantes.

Muito ainda se poderia dizer acêrca dos Cursos desenvolvidos pelo Departamento de Matemática de K.U. É evidente que não seria possível fazê-lo nessa simples apresentação. Todavia, não podemos deixar de mencionar uma das partes importantes do Curso de Verão que assistimos: as Classes Experimentais (Courses of Demonstration Class). Reputamos fundamental todo o esfôrço que se fizer no sentido de se aprimorar êsses verdadeiros laboratórios de pesquisas educacionais. Participamos ativamente dos estudos dessas Classes: Nineth Grade (equivalente ao atual terceiro ginasial brasileiro) e Eleventh Grade (equivalente ao terceiro científico), discutindo e opinando juntamente com os demais colegas, a respeito dos cursos programados e o desenvolvimento dos mesmos durante dois meses e meio. Os resultados advindos das Classes Experimentais constituem matéria-prima para a nova orientação que se busca atualmente para ensinar Matemática. Muitas observações construtivas foram feitas em classes-ambientes (cêrca de 25 alunos) onde a matéria explanada por um dos bolsistas era discutida após a aula. Os livros didáticos (também experimentais) foram elaborados por Grupos de Estudos (School Mathematics Study Group; Mathematical Association of America; Comission on Mathematics of the College Entrance Examination Board; Committee on School Mathematics — Illinois —) que assim passaram a ter o seu primeiro contacto com os alunos.

O que fazemos no Brasil, relativamente a programas e métodos de exposição nas classes experimentais brasileiras (são de outro molde naturalmente), foi alvo de interêsse geral por parte dos professôres participantes, junto dos quais tivemos a oportunidade de mostrar o que é feito em São Paulo nesse campo. Não é preciso acentuar a importância dessas classes. Delas decorrerão as futuras diretrizes para programas e métodos de ensino que mais se identifiquem com as diferentes épocas por que transitamos. Pode-se variar a maneira de se atuar com as Classes Experimentais, mas não se pode deixar de tê-las. Há uma sensível diferença no trato dessas Classes aqui e nas dos Estados Unidos. Lá, inicialmente, são testados os novos programas (que se pretende tornar efetivos por determinado tempo), como também os novos métodos de ensino, às classes de alunos recrutados de diversos Estados e que permitem concluir acêrca dos resultados que serão (ou

Hall do Departamento de Matemática da Universidade de Kansas, cuja fachada se vê na foto que abre esta entrevista

não) aplicados num determinado ano letivo. Êsses alunos, que prazerosamente aceitam essa colaboração, pois, são considerados bolsistas, e, portanto, hóspedes, da Universidade, recebem no fim do Curso, em solenidade da qual participam também os pais, um Certificado de Estudos de Classe Experimental.

Diremos agora algumas palavras de ordem geral.

Observamos criteriosamente o preparo dos professôres secundários (High School e College) dos U.S.A. É equivalente a dos professôres secudáries do Brasil e possivelmente a dos professôres secundários de outras grandes Repúblicas da América Latina. Recebem êles formação superior em Matémática (no College of Liberal Arts and Sciences, análogo às nossas Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras) e a seguir um preparo especializado de Didática, em Seções de Educação. Esta foi uma das razões porque o Curso de Verão, organizado pelo Departamento de Matemática de K.U., se situou dentro de um alto nível de informação, cujas primeiras conseqüências serão os imediatos benefícios que irão receber os atuais e futuros alunos dos cursos secundários.

Não nos devemos esquecer que os problemas pertinentes ao ensino da Matemática são, pràticamente, os mesmos quer aqui no Brasil, quer no E.U.A., como também na França, Rússia, Itália, Inglaterra, Alemanha... (basta consultar os boletins que registram as atividades educacionais dêsses países para verificar os inúmeros grupos de estudos criados e constituídos por ilustres personalidades, não só professôres militantes de Matemática, como também psicólogos e pedagogos de renome). Procura-se, na verdade, destacar "o que se deve ensinar" (novos programas) e "como ensinar" (novos métodos) a Matemática aos jovens de hoje, a fim de proporcionar-lhes meios de adquirirem "melhores hábitos de pensar". O emprêgo dos recursos que a didática moderna possui (método heurístico, uso de filmes apropriados, da televisão, de livros didáticos bem organizados, de laboratórios experimentais bem dosados, etc...) constitui metas a serem vencidas pelos Cursos de Férias.

O nosso último tópico é uma mensagem otimista*. O ideal seria o Brasil possuir esquema próprio para a realização de cursos nos moldes que se assemelhem àquele do qual participamos e para tanto fazemos sinceros votos. Todavia, já sabemos da viabilidade da realização de Curso de Verão (ou de Inverno) nos diversos países das Américas, por via da colaboração direta da Pan Americam Union e National Science Foundation. O Chile contará êsse ano com os Cursos de Matemática e de Química, para os seus professôres secundários, bem como já estabeleceu bôlsas para outros países das Américas (5 de cada para o Brasil), com recursos financeiros oriundos de convênios com aquelas organizações. Costa Rica terá os seus Cursos de Física e Matemática, já contando com o suporte financeiro para professôres bolsistas e professôres que irão reger os Cursos nesses países. O Brasil participou inclusive do Curso de Verão, no ano findo, no que respeita ao Curso de Biologia, realizado numa Universidade estadunidense, enviando como professor regente do Curso, o brilhante Prof. Clodowaldo Pavan, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, da Universidade de São Paulo. Dias melhores hão de vir, pois ouvimos em Washington, do Dr. Jesse D. Perkinson Jr., Chefe da Divisão do Desenvolvimento Científico, da União Pan Americana, palavras de elogios para com o nosso país, que acabara de visitar, justamente relativas à execução do intercâmbio, já citado, para muito breve. Não tardará, assim, o dia da almejada aproximação cultural, e em grande escala, dos professôres das três AMÉRICAS, como início de um real convívio que se estenderá aos poucos aos países dos cinco continentes. Sejam os Cursos de Verão (ou de Inverno) os primeiros passos para êsse altruístico objetivo.

(*) Temos a grata satisfação de informar que as negociações entre a Pan American Union e a National Science Foundation, de um lado, e os Departamentos de Matemática das Universidades de São Paulo e Mackenzie, de outro, para a vinda do Prof. George Springer a São Paulo, nos próximos meses de agôsto e setembro, a fim de ministrar um Curso de Lógica Matemática e suas aplicações, estão para ser concluídas a contento.

Outrossim, a Secretaria da Educação de São Paulo também irá colaborar no sentido de propiciar aos professôres secundários tal curso, oferecendo, inclusive aos professôres do interior, diárias que possibilitem sua permanência na Capital, sem prejuízo dos vencimentos.

PREPARAÇÃO UNIVERSITÁRIA DOS PROFESSÔRES PRIMÁRIOS

José de Arruda Penteado

Mais recentemente têm surgido, nos meios educacionais do país, planos de reforma dos cursos de formação de professôres primários, mas todos êles não tocaram ainda na necessidade de preparação técnica e profissional, em nível universitário. A êsse propósito, pareceu-nos oportuno destacar, nesta breve nota, a notícia da instalação, em janeiro de 1959, na Baviera, de um curso de formação de professôres de escolas primárias em escola normal incorporada à Universidade. As observações esclarecedoras foram feitas pelo Presidente da nova instituição acadêmica alemã, Prof. Wolfgang Brezinka e transcritas na revista *Panorama*, publicação da Confederação Mundial das Organizações Profissionais de Ensino, vol. 1, n.º 3. (O artigo original do referido mestre alemão foi publicado no número de 25 de fevereiro de 1959 do *Die Bayerische Schule*, órgão do Bayerischer Lehrer-und Lehrerinnenverein.)

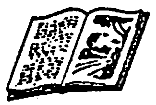
Na sua exposição, o prof. Brezinka esclarece que o início dos cursos de formação de professôres primários na Baviera data de 189 anos atrás em Würzburg. Desde então, com a complexidade cada vez maior da vida contemporânea e substituição das funções educacionais outrora desempenhadas mais eficientemente pelas instituições sociais tradicionais tais como a família e a Igreja, não é mais possível entregar as tremendas responsabilidades de formação das crianças às antigas escolas primárias, constituídas por professôres sem formação humana, técnica e pedagógica sólida. As novas circunstâncias sociais exigem que as escolas contem agora com pessoal docente, de ambos os sexos, que possua uma educação excepcionalmente estruturada, que leve em consideração o profundo significado do seu trabalho docente e que esteja disposto e preparado, não só no domínio técnico de suas especialidades mas, do mesmo modo, em condições objetivas para colaborar no renascimento cultural, ético, político e religioso da civilização alemã. O trabalho profissional do professor primário, destaca o mestre alemão, na sua integridade, não o é menos importante que a dos padres, dos médicos ou dos advogados. Daí a razão principal e suficiente para incluir-se o curso de formação de professôres primários nas universidades, com a duração de três anos.

A nova *escola normal* bávara não será apenas uma escola profissinal: será também um instituto de formação cultural, de nível superior. Em síntese, a nova *escola normal* estará harmônicamente integrada dentro de três objetivos fundamentais: educação científica, formação profissional e preparação cultural mediante a ação recíproca entre catedráticos universitários e alunos.

No que diz respeito ao currículo pròpriamente dito da nova instituição escolar, o prof. W. Brezinka faz oportunas observações que representam um brado de alerta para os nossos reformadores das coisas do ensino. Explica, dessa maneira, que a Pedagogia é uma ciência extremamente difícil. Deve incluir e tratar, separadamente, o conjunto dos conhecimentos humanos, na medida que tais conhecimentos se revestem de importância para a educação. Para compreendê-la, é necessário estar preparado para examiná-la do ponto de vista histórico e possuir amplos conhecimentos gerais. Dificuldade especial é encontrada no fato de que a Pedagogia não é simplesmente matéria teórica, mas que se realiza nas suas aplicações práticas. Por êsse motivo, explica o professor bávaro, o aluno necessita da constante observação pessoal de classes em desenvolvimento, além de certa atividade pedagógica própria, como fundamento necessário para seus estudos especializados.

Eis aí, apresentados em resumo, os traços da filosofia pedagógica de Anísio Teixeira em matéria de educação pública, por êle concebida como direito do povo, dever dos governos, condição de plenitude democrática e, por tudo isso, aspiração do mais nobre quilate, respeitosa de todos os demais esforços que, no terreno vasto e complexo da formação humana, outras entidades entendam de fazer, desde que com a melhor técnica e com o mais alevantado objetivo, e sempre no quadro institucional do País. Pois, êsse quadro institucional é, ao cabo, a própria educação que o assegura; e valerá, assim, o que essa educação possa valer.

*É forçoso, pois, que reconheçamos a benemerência do longo e persistente trabalho dêsse educador, em cujo espírito a educação tem sentido, a um tempo, tão claramente cívico e tão claramente humano. É forçoso e é grato. É a homenagem dêsse reconhecimento que **Atualidades Pedagógicas** vem prestar a Anísio Teixeira, eminente figura de professor já definitivamente incorporada, com pleno mérito e de pleno direito, à galeria dos grandes educadores brasileiros.*



Não há setor da educação brasileira em que não se encontre obra de sua mão, inspirada por êle ou marcada de suas influências, nem problema que não tenha enfrentado para lhe dar solução mais adequada. Das questões relativas à infra-estrutura, constituída dos edifícios e instalações escolares, das bibliotecas, laboratórios e museus, passa com o mesmo zêlo às que dizem respeito à formação profissional, seleção, aperfeiçoamento e especialização do magistério de todos os graus por meio de cursos no país ou de bôlsas de estudos no estrangeiro. Se ataca com vigor as que concernem à expansão da rêde escolar, multiplicando escolas primárias, não se interessa menos pelas que se levantam no campo da prática e observação de novas técnicas de ensino e da verificação de ~~seus~~ resultados em escolas experimentais. Analisa, no empenho de resolvê-las, as que se referem à organização interna de escolas, mas para, em seguida, numa visão de conjunto, abordar os problemas implicados na articulação das unidades dos diversos tipos e graus, na circulação horizontal e vertical dos estudantes no interior dos sistemas, e na reestruturação dêstes em bases mais sólidas e segundo novas perspectivas. Quando o supomos dominado pela paixão de um problema que examina, discute e tenta resolver, podemos estar certos de que outro já lhe disputa o lugar nas suas cogitações. É que a largueza de vistas, aliadas ao ímpeto empreendedor, não lhe concede deter-se em nenhum dos setores da educação sem ter presentes as suas inter-relações e a necessidade, em conseqüência, de acudir às repercussões de uns sôbre os outros.

FERNANDO DE AZEVEDO,
in *Anísio S. Teixeira, pensamento e ação*

Euclides? Lobachevski?

OSVALDO SANGIORGI

(N. R.) *Durante cêrca de 2 000 anos as colunas mestras da geometria estiveram alicerçadas nos postulados euclidianos: durante tôda a era cristã, portanto, até fins do século passado, quando as discussões sôbre as possibilidades de demonstração do Postulado V (Livro I) dos Elementos de* EUCLIDES, *versando a teoria das paralelas, culminaram com a comunicação do matemático russo* LOBACHEVSKI *sôbre um sistema revolucionário que excluía o postulado das paralelas e, quase na mesma ocasião, com as divulgações e conclusões dos matemáticos* BOLYAI, *húngaro* (1802-1860), e GAUSS, *alemão* (1777-1855), *ambos igualmente concernentes à construção de geometrias nas quais deixava de ser válida a proposição de* EUCLIDES. *As últimas décadas do século XIX constituem, por conseguinte, um momento marcante na história da matemática, a partir do qual se sentiram alterações sensíveis no ensino da geometria.*

Sôbre a atualidade e interêsse dêsse palpitante assunto, dentro dos limites que mais de perto interessam aos nossos currículos escolares, discorre nestas páginas o prof. Osvaldo SANGIORGI, *assíduo e aplaudido colaborador de nossa revista, membro do corpo docente da Universidade Mackenzie e do magistério secundário oficial do Estado de São Paulo, e autor de conceituada série de compêndios ginasiais.*

Absolutamente convencidos da propriedade do tema desenvolvido, recomendamos vivamente sua leitura e meditação a nossos leitores, especialmente àqueles ligados ao ensino da matemática.

Por mais de dois mil anos o ensino da geometria foi sublimemente dominado por EUCLIDES que, em seus *Elementos*, procurara coordenar (250 anos antes de Cristo) todos os resultados que nesse campo haviam colhido os seus predecessores e seus contemporâneos, tais como Tales, Pitágoras, Platão, Eudóxio, Eratóstenes e tôda uma plêiade de geniais gregos que tanto contribuíram para o aprimoramento da cultura humana. Pretendeu EUCLIDES, tanto quanto possível, apresentar a totalidade da geometria elementar sob forma lógica, em que cada afirmação decorresse de um certo número de postulados.

Embora não haja, na realidade, conseguido exclusivamente êsse objetivo, foi esta a idéia que em tôrno de sua obra se criou por muitos e muitos séculos. Quando se analisa atentamente o sistema de postulados sôbre os quais EUCLIDES baseou os *Elementos*, reconhece-se a sua insuficiência. As demonstrações apresentadas estão cheias de apelos à intuição, dissimulando postulados admitidos tàcitamente. Daí os trabalhos modernos de reconstrução da geometria euclidiana, do ponto de vista formal, por parte de PASCH, PEANO, PIERI, HILBERT, VEBLEN, e outros que permitem a nós — professôres de Matemática — dispor de maiores recursos para fazer o estudante aprender a "pensar bem" mediante uma sistematização do raciocínio dedutivo.

Mas será que poderíamos "pensar melhor" fugindo do esquema euclidiano? Dêsse mesmo esquema que enriquecido pelas contribuições de ilustres matemáticos de todos os tempos, vem desde a antigüidade exibindo a magnífica contribuição do gênio grego a partir da concepção quase divina dos elementos primitivos *ponto, reta* e *plano*, até as demonstrações, por vêzes artificiosas, que procuramos ensinar desde a 3.ª série ginasial?

Se a Matemática, encarada como deve ser, possui não apenas verdade, como suprema beleza, mas a exaltação ao espírito como na poesia, confessamos que, embora fôssemos bem iniciados com Euclides, estamos necessitando para os alunos de nossa época, de algo como um esquema mais amplo, despido de demonstrações forçadas ou inócuas, onde a liberdade de participação permita ao estudante, ombro a ombro com o professor, demonstrar uma proposição.

Longe de nós qualquer pretensão de deslustrar o alcance e o serviço que até êste instante tem prestado aos racionais a geometria euclidiana.

O título de glória de Euclides já está mais do que solidificado e o que lhe assegurará a imortalidade — não tenhamos dúvida — é o reconhecimento de que um de seus postulados, o famoso *Postulado das Paralelas*, não passa de mera convenção humana, ou seja uma afirmação estabelecida como ponto de partida para trabalho do raciocínio.

EUCLIDES

Matemático grego, nascido cêrca de 330 a.C. Embora não possamos dispor de elementos para o conhecimento de sua vida privada, sabemos que foi educado em Atenas e que, na Alexandria, exerceu a atividade de professor. Euclides é conhecido primordialmente por seus livros versando a geometria, livros que foram usados quase ininterruptamente por dois mil anos. Dêles, contudo, deve destacar-se como principal os *Elementos*, cujos treze volumes, inicialmente publicados em tradução latina do arábico, em 1482, foram por muito tempo a base geral do ensino da geometria. Apenas em nossos dias foi que a teoria da relatividade trouxe para primeiro plano a geometria não-euclidiana.

"Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar *sòmente uma* paralela a esta reta" é uma das formas de enunciação do tradicional postulado de Euclides, postulado que alicerceia as demonstrações do esquema geométrico euclidiano ensinado no atual curso secundário. É usando êsse postulado que provamos ser a *soma dos* ângulos internos de um triângulo *igual* a *dois ângulos retos*, bastando para isso traçar por um dos vértices do triângulo *a paralela* ao lado oposto e confrontar os ângulos assim formados com os do triângulo.

E se passássemos *mais de uma* paralela ao lado oposto em questão pelo mesmo vértice? E se não passássemos *nenhuma?* Então... nada feito quanto à demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Na realidade, tivemos com Euclides o primeiro "modêlo" de geometria racional, que serviu como fonte emuladora para as atuais axiomatizações, mesmo levando-se em conta que a sua formalização fôra feita com os equivalentes físicos de então (o plano euclidiano era considerado chato como o mundo). Ora, como vivemos na verdade numa esfera (ou coisa semelhante) e não num plano euclidiano, era de se esperar que as geometrias que partissem de outras hipóteses deveriam parecer mais naturais ao nosso espírito, não fôsse o fato de têrmos sido educados há milênios na crença de que os princípios reunidos por Euclides em sua geometria são realmente verdades imutáveis.

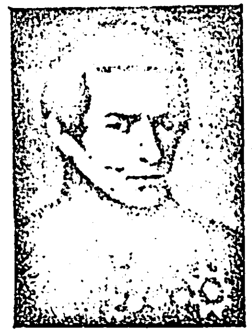
O primeiro grito efetivo contra essa maneira de ver as coisas, resultante de maduro raciocínio, foi feito em 1816 por um russo de gênio — Lobachevski — cuja morte ocorreu há 103 anos, muito longe portanto, de qualquer interpretação política que se queira dar ao nosso trabalho. Nicolai Ivanovich *Lobachevski* construiu a primeira geometria *não-euclidiana*, mediante um sistema dedutivo de proposições que nega o Postulado das Paralelas de Euclides, embora sejam conservadas e completadas as demais proposições euclidianas. Na sua geometria, apresentada ao mundo em 1835 no seu livro *Novos Princípios de Geometria*, o Postulado das Paralelas constante dos *Elementos* é substituído por êsse outro: "Por um ponto qualquer passam *duas e sòmente duas* paralelas e uma reta dada". Agora, admitido êsse postulado, já se

pode demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é *inferior* a dois ângulos retos! Essa é uma afirmação aparentemente estranha aos ginasianos que sempre "acreditaram" ser de dois retos (180°) a soma dos ângulos internos de um triângulo. Mais intrincados ficarão os estudantes quando, convidados a medirem, com o maior rigor possível, os ângulos internos de um triângulo, que pode ser desenhado na lousa em tôda a sua extensão (é conveniente desenhá-lo "bem grande"), encontrarem por soma *menos* ou *mais* que dois ângulos retos e só excepcionalmente, ou fortuitamente por aproximação instrumental, o valor euclidiano de dois ângulos retos!

Na verdade os triângulos da experiência não se apresentam euclidianos, embora todos possam conceber a existência de "triângulos euclidianos" como uma conquista do intelecto. Nestas condições, respeitadas as leis da razão a *geometria lobachevskiana*, assim como outras, deve ser apresentada aos nossos estudantes como propiciadora de novos hábitos de pensar, uma vez que êles já se "acostumaram" a ver tão-sòmente unilateralmente importantes proposições. Basta notar que depois do feito de Lobachevski, outros gênios construíram geometrias não-euclidianas, tão *consistentes* como a de Euclides e algumas das quais, como a do extraordinário alemão *Riemann*, em 1854, se tornaram de máxima importância na Física Moderna.

Na *geometria riemanniana* é admitido o Postulado: "Por um ponto qualquer não passa *nenhuma* paralela a uma reta dada", isto é, tôda reta que passa pelo ponto encontra a reta dada. Agora já se pode demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é *maior* que dois ângulos retos.

A teoria dos "espaços curvos", de Einstein — uma das grandes realizações do século — é fundamentada na geometria de Riemann. A extrema abstração da física moderna torna-a de difícil compreensão, mas fornece aos que a entendem uma visão do mundo como um todo e um sentido de sua estrutura e mecanismo, impossível de ser conseguido de outra maneira. "A capacidade de usar abstrações — já disse o notável filósofo e matemático Bertrand Russell — é a essência do intelecto, e a cada aumento no poder de abstração correspondem novos triunfos intelectuais".



LOBACHEVSKI

Nicolai Ivanovich Lobachevski, matemático russo nascido em 1793 e falecido em 1856, exerceu a cátedra de sua especialidade a partir de 1816, até sua morte. É citado nos anais de matemática como sendo o fundador do primeiro sistema compreensivo de geometria não-euclidiana (inicialmente, ao que parece, concebida, mas não divulgada, por Gauss). Na mesma época, e independentemente de Lobachevski ou Gauss, o húngaro Bolyai trabalhava em formulação similar. Ambos os sistemas, e o de Lobachevski, partiram do discutido Postulado V, Livro I (axioma das paralelas) e confinaram-se no espaço hiperbólico não-euclidiano.

Então qual o *conteúdo* de geometria que se deveria ensinar aos jovens de nossa geração?

Observemos que nenhum dos sistemas ligeiramente apresentados visa superar o de Euclides, destronando-o. Não é êsse o objetivo. Até que para certos fins é preferível a geometria euclidiana. O que queremos realçar no feito de Lobachevski, por exemplo, é que o sistema por êle introduzido não teve por mira demolir a geometria clássica de Euclides mas sim *reduzi-la* ao seu exato valor como simples maneira de raciocinar e ver as coisas e não como *verdade absoluta*.

Quando se pensa que a "verdade euclidiana" tinha 2000 anos de tradição e se apresentava como um dos mais sólidos axiomas que a mente humana podia conceber, não é difícil compreender a repercussão que teve no pensamento matemático e filosófico a idéia lançada por Lobachevski, que no dizer de Albert

Einstein "foi o homem que desafiou um axioma". E. nem se estranhará que o ilustre matemático Clifford tenha dado ao genial geômetra russo o apelido de "O Copérnico da Geometria", pois, para Lobachewski, nos seus *Novos Princípios de Geometria*, *ponto*, *reta* e *plano*, não são mais conceitos primitivos. Os conceitos primitivos para êle são: *corpo*, *contacto entre corpos e movimento rígido*. Por *corpo* é entendido, quase sempre, qualquer sólido que uma deformação contínua possa reduzir a uma esfera (em têrmos modernos "cada sólido homeomorfo a uma esfera"). O conceito de *contacto* equivale à possibilidade de dividir um corpo em várias partes e de compô-las novamente. Os vários tipos de contactos (que ensejam as transformações topológicas) definem as *superfícies*, as *linhas* e os *pontos*. Sucessivamente, Lobachewski dá as definições de *esfera*, *superfície esférica*, *circunferência* (círculo), *plano* e de *reta*.

Notemos que a ordem inversa do que tradicionalmente (ou euclidianamente) é feito em geometria não é casual e sim corresponde plenamente ao novo critério de Lobachewski em estabelecer os seus princípios. O caráter topológico (embora a topologia, como ciência, nascesse depois de sua época) que possuem os primeiros conceitos da geometria exposta nos *Novos princípios de Geometria* é muitas vêzes destacado pelos cientistas soviéticos que fizeram sua revisão para a edição nacional de 1950, a ser usada nas escolas de níveis médio superior russas. Convieram os técnicos em educação que os conceitos e procedimentos de uma geometria racional e axiomática, com suas abstratas concepções de ponto, reta e plano são didàticamente um ponto de chegada de um caminho complexo, e não de saída.

A idéia de Lobachewski — apesar das imperfeições e lacunas que ainda existem como tentativa radical de uma nova geometria — é profundamente honesta sob o ponto de vista filosófico, pioneira de modernos conceitos do ponto de vista matemático e digna de máxima reflexão no que concerne à didática matemática que ainda mantém na grande maioria dos países rigorosamente euclidiana.

A êste propósito ainda é oportuno lembrar a opinião de um dos maiores estudiosos contemporâneo de psicologia — o suíço Jean Piaget, segundo o qual (1) os primeiros conceitos geométricos da infância têm caráter *não-métrico*, mas *topológicos*.

De onde, então, derivariam os primeiros princípios da geometria? Seriam êles impostos pela lógica? Os construtores das geometrias não-euclidianas demonstraram que não.

Seria o *espaço* revelável pelos sentidos? Nem isso é verdade, pois o espaço que se queira identificar com os nossos sentidos diferirá absolutamente do espaço apresentado pelo geômetra.

Decorreria a geometria tão-sòmente da experiência? A simples verificação de quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo diz que não.

Concluímos assim, de início, que os princípios sôbre os quais repousa uma geometria são simples *convenções*. Simples como tôdas as coisas que propiciam grandes conquistas.

Tais convenções, entretanto, não são arbitrárias. A história da matemática moderna dos dias de hoje não justifica a afirmação entre alguns formalistas de que "o matemático inventa a seu arbítrio postulados sôbre os quais baseia o seu sistema". A atenção dedicada pelos matemáticos às geometrias aparentemente "mais estranhas" (não-euclidianas, não-arquimedianas, não-arguisianas ....) tem um significado bem diverso, pois a elaboração dessas convenções decorre de uma acurada análise das relações de dependência ou independência lógica dos diversos postulados e proposições que a nossa mente forja a partir da experiência e das estruturas do mundo moderno. O livro de matemática baseado sôbre postulados absolutamente arbitrários, inventados a capricho, com a única condição de compatibilidade, deve ser ainda escrito. E se o fôr, provàvelmente não encontrará leitores nem entre os superteóricos da matemática, que irão discordar de vê-la reduzida a um "puro jôgo mental" que tanto emperramento traz ao seu progresso.

Os grandes geômetras que têm fundado novas disciplinas geométricas não partiram de convenções ou de postulados livremente inventados (não deveríamos,

(1) *La Psychologie de l'intelligence*, Librairie Armand Colin, 1956.

por exemplo, a menos que alguma estrutura o justificasse, "inventar" o postulado: "Por um ponto fora de uma reta passam *sòmente três* paralelas a essa reta" pelo simples prazer de ter "criado" um postulado), mas sim das relações acima enunciadas em sintonia, tanto quanto possível, com novos e contínuos aspectos da realidade física.

A variedade dos *novos espaços*, e das conseqüentes novas geometrias, está intimamente ligada à exigência de se estudar novos fenômenos, novas transformações e operações que encontramos no mundo de hoje. A geometria torna-se, assim, não sòmente a ciência dos movimentos rígidos dos corpos sólidos, mas das *deformações de superfícies* (Gauss), das *propriedades das figuras invariantes com relação às operações de projeção e secção* (Poncelet), ou por *transformações e deformações mais genéricas*, como aquelas estudadas pela *topologia* (Riemann, Betti, Poincaré).

Atendendo com mais solicitação às estruturas mentais já existentes na mente da criança — que, segundo o ilustrado pedagogo contemporâneo Gattegno, não é o particular mas o *geral* que interessa a um aluno de 12 anos em diante — cremos que a geometria de Lobachevski estaria mais próxima dos alunos do curso secundário nesse atendimento. O criador da *Pangeometria*, isto é, de uma "geometria geral" que incluísse a "geometria ordinária" como caso particular, atende mais às novas reivindicações do mundo moderno e o seu livro *Novos Princípios de Geometria* (2) constitui uma magistral exposição dos teoremas fundamentais no plano e no espaço, independentes do postulado euclidiano das paralelas. Cada capítulo vem dividido em duas partes: a primeira, dedicada à geometria plana, e a segunda, à geometria esférica. Assim, por exemplo, no capítulo VI se expõem primeiramente os critérios de congruência para triângulos do plano e a seguir os critérios relativos aos triângulos descritos sôbre a superfície esférica e cujos lados são arcos de circunferência máxima.

A geometria esférica, a trigonometria esférica, não aparecem em nossos programas de escola secundária e quer-nos parecer que isto constitui uma grave *limitação*, principalmente no mundo de superciência em que vivemos. A idéia de ensiná-las conjuntamente com a geometria plana e a trigonometria plana é de grande interêsse na *formação* do aluno, dando-lhe inclusive a possibilidade de melhor compreender uma geometria *não-euclidiana*.

O problema, pois, existe. É evidente que não será através da pura e simples substituição dos conceitos do esquema euclidiano pelos de Lobachevski, ou de outros de igual valor, que teremos uma radical melhora dos hábitos de bem pensar de nossos alunos ginasianos. Mas é indubitável — e isto reputamos importantíssimo — que todos os defensores da participação da Matemática na formação do jovem brasileiro devem ter presente que o ideal característico da Matemática só se encontra onde o raciocínio é levado a agir com aquela espontânea elasticidade que os sistemas apontados apresentam, para honra dos racionais.

Os caminhos existem. O que precisamos realmente é saber escolhê-los a seu tempo e tomar posição para que maior número de jovens brasileiros saibam sentir verdadeiramente as belezas eternas que a Matemática encerra. Basta que os esforços sejam conduzidos no sentido de despertar, efetivamente, nos atuais estudantes ginasianos: *a crença na razão, a confiança na verdade que se demonstra e o valor que representa a conquista de uma demonstração racional na formação de um futuro cidadão.*

(2) *Nuovi principi della geometria*. Edizioni Einaudi, 1955.

Distribution: limited

Unesco/EDcsu/1962/3
PARIS, 5 March 1962
Original: English

UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION

THE PRESENT STATUS OF MATHEMATICS TEACHING IN SECONDARY SCHOOLS IN ARGENTINA, BRAZIL, CHILE, COLOMBIA, COSTA RICA, PERU, URUGUAY AND VENEZUELA

by

Osvaldo Sangiorgi
Mackenzie University
Sao Paulo, Brazil

/Study No. 3: This is one of several studies, on the various aspects of the teaching of mathematics in secondary schools, which are intended to provide an analysis of how this subject is being taught in different parts of the world/

WS/0462.82

THE PRESENT STATUS OF MATHEMATICS TEACHING IN SECONDARY SCHOOLS IN ARGENTINA, BRAZIL, CHILE, COLOMBIA, COSTA RICA, PERU, URUGUAY AND VENEZUELA BY OSVALDO SANGIORGI, BRAZIL

INTRODUCTION

The principal object of this paper is to present a general view of the latest developments in secondary school mathematics teaching in some countries in Latin America, with reference to the introduction of new concepts of modern mathematics. The teaching of mathematics in these countries has followed the traditional patterns; it is only recently that some of them have implemented reforms in mathematics teaching in secondary school and special training for teachers has been organized for this purpose.

As has been done in Europe (1) and in the United States (2) since 1957, the tendency in these Latin American countries has been to investigate the principles that must serve as a guide both to the practice of teaching in general, and the means of presenting new topics in particular. A list of these topics has already been suggested by distinguished mathematicians of our time.

With new topics to teach, we must face the important problem of special training of teachers. This training must be permanent and intensive in order to enable teachers to follow the process of evolution of mathematics during the past 60 years or so.

This paper is mainly based on information sent by the Latin American countries to the First Inter-American Conference on Mathematical Education held in Bogota, Colombia, from 4 to 9 December 1961, under the auspices of Pan American Union (3).

Here we will try to cover the following topics: -

I - The types of schools that enable graduates to enter University;

II - Traditional programme and sequence of mathematics in secondary school;

III - Qualifications and experience required for mathematics teachers in secondary schools;

IV - Proposals for new content of mathematics programme; modern methods and material used in mathematics teaching; special training for secondary teachers; the teaching of new areas of mathematics.

I - THE TYPES OF SCHOOLS THAT ENABLE GRADUATES TO ENTER UNIVERSITY

ARGENTINA

1. "Escuelas Elementales" (Elementary School): beginning at the age of 7 years and ending at 12.

2. "Escuelas Secundarias" (Secondary School): beginning at 13 and ending at 18.

   a) Colegios Nacionales (for men and women) y Liceos (for women): students graduate as "Bachilleres";

   b) Escuelas Normales: students graduate as "Elementary school teachers";

   c) Escuelas de Comercio: students graduate as "Accountants";

   d) Escuelas Industriales: students graduate as "Technicians";

   e) Escuelas de Orientacion Profesional: students graduate as "Professionals".

BRAZIL

1. "Escolas Primarias" (Elementary School): beginning at the age of 7 years and ending at 10 (or 11). Note: There is at the Elementary School level an optional preparatory course for High School ("Admissao ao Ginasio") extending over 1 year.

2. "Escolas Secundarias" (Secondary School): beginning at 11 (or 12, depending on the optional preparatory course) and ending at 17 (or 18).

   a) Secundaria (Secondary): 1st. "ciclo" (4 years) and 2nd. "ciclo" (3 years);

   b) Normal: the 1st "ciclo" is the same; the 2nd. "ciclo", 3 years; students graduate as "Elementary School Teachers";

   c) Commercial: the 1st. "ciclo" is the same; the 2nd., 3 years; students graduate as "Accountants";

   d) Industrial e Agricola: 4 years; students graduate as "Technicians".

CHILE

1. "Escuela Primaria" (Elementary School): 6 years, beginning at the age of 7 years and ending at 12.

2. "Ensenanza Media Profesional" (Secondary School): 6 years (comprising two cycles).

COLOMBIA

1. "Educacion Primaria" (Elementary School): 5 years;

2. "Educacion Secundaria" (Secondary School): 6 years.

   a) "Bachillerato" (day-school and night-school);

   b) "Tecnica": industrial, commercial, agricultural and cattle breeding, artistic, etc.

COSTA RICA

1. "Ensenanza Primaria" (Elementary School): beginning at the age of 7 years and ending at 12.

2. "Ensenanza Media" (Secondary School): 5 years.

PERU

1. "Escuela Primaria" (Elementary School);

2. "Escuelas Secundarias" (Secondary School) - two kinds of courses:

   a) General or academic culture; and

   b) Vocational education: technical, commercial, etc.

URUGUAY

1. "Escuela Primaria" (Elementary School): 6 years (from 6 to 11).

2. "Ensenanza Secundaria" (Secondary School): 6 years (from 12 to 17). There are two levels: 1st. cycle (4 years) and 2nd cycle (2 years).

VENEZUELA

1. "Escuela Primaria" (Elementary School): 6 years;

2. "Ensenanza Media" (Secondary School); 5 years in two cycles:

   a) Liceos (1st. "ciclo", 3 years; 2nd. "ciclo", 2 years); students graduate as "Bachilleres";

   b) Normales (4 years required); students graduate as "Elementary School Teachers";

   c) Industriales (6 years);

   d) Commercio (5 years).

II - TRADITIONAL CURRICULUM AND SEQUENCE OF MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS

ARGENTINA

1. The present curriculum for secondary schools was set up in 1956. It acquired definitive form in 1958. It presents a logical foundation for each topic, emphasizing precise language.

Geometry follows a deductive line. Only certain outstanding demonstrative properties are included. In Arithmetic and Algebra methods are based on numerical examples with applications in Physics. Mathematics is studied in every grade, five days per week in classes lasting 40 minutes.

2. Usually teachers use the "heuristic" method, although there are some who persevere with merely expositive methods.

BRAZIL

1. The present curriculum in Mathematics for Secondary Schools was elaborated by the "Faculty" of "Colégio Pedro II" (Rio de Janeiro) and the Ministério da Educacao (Education Board) approved it on 2/10/1951 (4).

Curso Ginasial - 1st. cycle (High School - Elementary) (4 classes per week in 1st. grade; 3 classes in the others, all lasting 50 minutes).

* 1st. grade: Arithmetic (Whole numbers, counting with whole numbers, relative numbers, divisibility, fractions, decimals).
* 2nd. grade: Algebra (Algebraic notation, polynomials, equations and inequalities of the first degree; linear systems of two unknowns.)
* 3rd. grade: Geometry (Geometric plane figures; straight line and circle; similarity - deductive method.)
  Trigonometrical relation in the right triangle.
  Arithmetic (Ratios and proportions; arithmetic applications.)
* 4th. grade: Algebra (Equations and inequations of second degree.)
  Geometry (Metric relations in the circle and polygons; areas.)

Curso Colegial - 2nd. cycle (High School - Senior) (4 classes per week, lasting 50 minutes.)

* 1st. grade: Algebra (Errors; progressions, logarithms.)
  Spatial Geometry (Straight line and planes; surface and polyhedrons, round bodies; areas and volumes.)
  Conic Sections
* 2nd. grade: Permutation and combination; binomial theorem of Newton; determinants; linear systems; vectors.
  Trigonometric transformations; equations; triangle solvings.
* 3rd. grade: Function; Cartesian notation; straight line and circle.
  Limits and continuity, notion of primitives and derivatives.
  Introduction to the theory of equations. Polynominals; special types of equations.

CHILE

1. There is a Permanent Committee attached to the Board of Education, which is charged with the renewal of the mathematics curriculum of secondary schools. During the past 30 years the content of mathematics curriculum has remained the same, the only changes registered being those which deal with the distribution of the different subjects in several grades. At the moment the curriculum is as follows:

- 1st. grade (5 classes per week): Arithmetic (4 hours per week) - Decimal system, counting, divisibility, fraction measurement systems).
  Geometry (1 hour per week) - Geometric solids.
- 2nd. grade (4 classes per week): Arithmetic (2 hours per week) - Powers and roots; ratios and propositions.
  Geometry (2 hours per week): angles, arcs, parallels, polygons.
- 3rd. grade (4 classes per week): Arithmetic (1 hour) - averages, applications to banking, taxation, business.
  Algebra (1 hour) - algebraic notations, numerical equations.
  Geometry (2 hours) - parallels, Euclidean Postulate, polygons.
- 4th. grade (3 classes per week): Algebra (1 hour and half) - polynomials, first degree equation; problem-solving.
  Geometry (1 hour and half) - inscribed and circumscribed figures; Pythagoras Theorem.
- 5th. grade (3 classes per week): Algebra (1 hour and half) - Powers and roots; second degree equations; problem solving.
  Geometry (1 hour and half) - Similar triangles; applications, circle.
- 6th. grade (3 classes per week): Algebra (1 hour and half) - Systems of equations (1st. and 2nd. degree); graph solving.
  Geometry and Cosmography (1 hour and half) - regular polygons; solids; areas and volumes (Cavallieri's Principle).

COLOMBIA

The mathematics curriculum for the "Bachillerato" is divided up as follows:

- 1st. grade: Arithmetic (5 hours per week).
- 2nd. grade: Arithmetic (5 hours per week).
- 3rd. grade: Algebra (3 hours per week).
- 4th. grade: Algebra (3 hours) and Geometry (4 hours).
- 5th. grade; Geometry and Trigonometry (3 hours per week).
- 6th. grade; No Mathematics, except for night schools.

COSTA RICA

Teaching of mathematics in secondary school is at present spread over five years, 4 classes per week, with a duration of 40 minutes each.

* 1st. grade: Arithmetic - counting and writing numbers; fractions; ratios and proportions, arithmetic applications (banking, taxation).
* 2nd. grade: Algebra - algebraic notation; equations of first degree. Geometry - Euclidean Geometry; parallels, perpendiculars.
* 3rd. grade: Algebra - Linear systems. Geometry - Lines and arcs of circle. Similar triangles; Chasles and Pythagoras's Theorems.
* 4th. grade: Algebra - Second degree equations; co-ordinate systems; progressions; logarithms. Geometry - Areas of plane figures.
* 5th. grade: Trigonometry - Trigonometric functions; solving of triangles. Stereometry - Solids: areas and volumes.

PERU

1. Since 1957 the teaching of mathematics has been unified. Arithmetic, algebra, geometry and trigonometry are not considered isolated areas of mathematics any more, but are studied as a whole. We find, therefore, the following courses in secondary school:

* 1st., 2nd. and 3rd. grades: General Mathematics (correlated).
* 4th. grade: Solid Geometry. Revision of algebra and geometry.
* 5th. grade: Spatial Geometry and Trigonometry.

2. To carry out the new curriculum in Peru, use is made of the general recommendations of the Inter-American Seminar on Secondary Education, held in Santiago, Chile, in 1955.

URUGUAY

1. The curriculum dated 1932 involves 7th, 8th, 9th and 10th grades (secondary school), and in each grade there is only one teacher in charge of all courses, free to deal with arithmetic, algebra and geometry, either separately or alternatively. For the first level (1st. "ciclo") of secondary school, the content of the curriculum is the following:

* 7th. grade: Arithmetic - Whole numbers, counting, divisibility; equalities; decimal measurement. Geometry and Geometrical drawing - use of compass, rule, etc.; experimental study of properties of geometrical figures.
* 8th grade: Algebra - Cartesian co-ordinates; relative numbers; first degree equations; applications. Geometry - Polygons and circle (deductive method). Similarity, Pythagoras' Theorem; areas.

x9th. grade: Algebra - Systems of equations; 2nd. degree equations; progressions and logarithms.
Trigonometric - Functions up to 360°; triangle solving.
Spatial Geometry - Lines and planes in space; polyhedrons.
x10th. grade: Real numbers (Complements). Complements of geometry. Mathematics applied to business.

2. As the curriculum has been split up, most teachers tend, in practice, to disregard geometry. Many changes have been proposed in topics which have applications in daily work. Once the pupils reach the second level in secondary school (11th and 12th grades), they have a choice between a professional and a scientific career. The mathematics topics related to commerce and industry are taught to those going on for professional careers.

VENEZUELA

Curriculum of the Liceos (Secondary School)
1st. "ciclo" (1st. level): 3 years.
x1st. grade: (120 hours theoretically) Arithmetic - natural numbers, counting, divisibility, fractions, metric system.
Geometry - polygons, circle, problems using rule and compass, solid figures.
x2nd. grade (120 hours theoretically): Algebra - rational numbers, polynomials, first-degree equations.
Geometry - equivalence between plane figures; Pythagoras' Theorem; areas.
x3rd. grade (90 hours theoretically): Algebra - ratio and proportion; co-ordinates; linear systems of equations; second degree equations.
Geometry - equivalence between plane figures; Pythagoras' Theorem; areas.
2nd. "ciclo" (2nd. level): 2 years.
x1st. grade (120 hours): Algebra - Progressions and logarithms.
Geometry - Metric relations; regular polygons.
Trigonometric - Functions, equations, solving triangles.
x2nd. grade (120 hours): Algebra - permutation and combination; determinants; linear systems; equations.
Geometry - Similarity and homomorphisms; conics; areas and volumes of geometric solids.
Trigonometric - Spherical triangles.

III - QUALIFICATIONS AND EXPERIENCE REQUIRED FOR MATHEMATICS TEACHERS IN SECONDARY SCHOOLS

ARGENTINA

The mathematics teachers are recruited from among:

a) teachers of mathematics or physics, graduated from "Institutos Nacionales del Profesorado Secundario" or from universities after studies on those fields for four years;

b) science teachers graduated as "Profesorados de las Escuelas Normales", after three years study of science;

c) engineers, architects, surveyors, graduates of "Universidades Nacioneles";

d) teachers in elementary schools with no special qualification.

Remark: 1. In big centres the first qualification (a) prevails over the others. The general teaching conditions, particularly mathematics teaching, would be improved if rules were enforced to make mathematics teachers work in only one school, with appropriate reward.

2. The course of "Institutos Nacionales del Profesorado Secundario" attached to the "Escuela Normale de Profesores no. 1", in Buenos Aires, consists of:

1st. grade - Mathematical analysis (6 hours per week); plane geometry (5 hours); trigonometry (4 hours); mechanics (6 hours).

2nd. grade - Mathematical analysis (4 hours); analytical geometry (4 hours); projective geometry (4 hours).

3rd. grade - Mathematical analysis (4 hours); descriptive geometry (3 hours); cosmography (3 hours).

4th. grade - Mathematical physics (6 hours); epistemology of mathematics (4 hours).

BRAZIL.-

Mathematics teachers can be grouped in three classes:

a) "Licenciados" (graduates) in mathematics or physics by "Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras", entitled to teach in elementary and senior high schools;

b) "Licenciados" (graduates) in pedagogy, social sciences, natural history and chemistry, also by "Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras", entitled to teach only in elementary high school (1st. "ciclo", or 1st. level);

c) Those who pass an "Exame de Suficiencia" (capacity test) held by "Inspetorias Seccionais" (Inspection Board), are entitled to teach in elementary high school (only 1st. "ciclo"), when "licenciados" cannot be easily found.

<u>Remark</u>: 1. For teachers in secondary schools, the following qualifications are minimum requirements:

a) "Licenciados" in mathematics and physics (Class "A"): Mathematical analysis, superior analysis, analytic and projective geometry, rational mechanics, celestial mechanics, mathematical physics;

b) "Licenciados" in mathematics (Class "B"): mathematics analysis, modern algebra, analytic and projective geometry, mathematical logic, theoretical physics, general topology, history of mathematics;

c) Complementary course mathematics (first and second levels);

d) A course in the subject matter which is intended to be taught in the first level.

2. After fulfilling any of the above qualifications, one should have authorization to teach, and for this purpose it is necessary to be registered at the "Ministerio da Educacao e Cultura" (Education Board).

3. About 30% of secondary teachers in Brazil are "licenciados" by "Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras" (universities, superior courses). They attend also the following minimum pedagogical course: educational psychology; principles of education; didactics, special and general (with practice in secondary school classes); school administration.

4. As a sample of secondary school teachers, we can take Estado de Sao Paulo, where one finds the best teaching in the country. Among the secondary school teachers of this State 50% belong to public schools. In order to teach at a public school one must pass a public examination held by a Board of Specialists. There are about 1,000 mathematics teachers in Sao Paulo public schools, and we can assume that 50% of them have graduated in mathematics (a), 25% have other university degrees (engineers, etc.), and 25% have no university qualification.

CHILE

There are two grades of teachers appointed by the "Ministerio de la Educacion": a) "en propiedad", e b) "interino".

For the first position the prospective teacher must have a degree from "Facultad de Filosofia y Educacion" and must pass a test on the subject. The second appointment is granted to the candidate for a period of 2 years.

Remark: 1. Formerly, the "Facultad de Filosofia y Educacion" presented the following plan of studies of 5 years: one course in algebra; one course in plane and spherical trigonometry; a preparatory course in modern algebra; a 2 years'course in analytic geometry; 3 courses in analysis; differential geometry; theoretical physics, rational mechanics.

2. Presently about 600 mathematics teachers work in 123 public schools and among them 40% belong to the first group; 30% are teachers with no special training and 30% have higher degrees.

COLOMBIA

In 1934 the "Facultad de Educacion de la Universidad Nacional" produced the first batch of graduates in mathematics. Since 1938 this university, now under the name "Escuela Pedagogica Normale Superior", has been offering courses for "licenciados" or graduates in mathematics and in physics. At present, under the name "Universidad Pedagogic" (including a department for women in Bogota), it prepares secondary school teachers. In 1946 a "Facultad de Ciencias" (science faculty) was created in the National University with the purpose of training science teachers. In 1955 a Mathematics and Statistics Department was also created, which became in 1958 the "Facultad de Matematica".

COSTA RICA

1. Till 1956 there was no institution in Costa Rica for the preparation of secondary school teachers either in physics or in mathematics. Those who had the opportunity of receiving special training abroad were at the time only qualified teachers.

2. After the organization of the University, in 1952, permission to work as regular teachers was given to engineers and chemists.

3. The increasing number of secondary schools brought out the problem of a lack of qualified teachers, and able elementary school teachers were recruited for special training. In 1961 the first batch of teachers in mathematics and physics graduated from "Facultad de Ciencias y Letras" (Mathematics Department).

PERU

To become a certified teacher of mathematics one must have the degree of "Profesor de Educacion Secundaria (special training in mathematics):

a) to obtain the degree one must attend a minimum course of 5 years in mathematics and education at a recognized university;

b) about 70% of the mathematics teachers are included in item (a), and of this percentage 15% are engineers or follow other professions.

URUGUAY

There are both specially trained and untrained mathematics teachers:

a) There is a public institution, "Instituto Artigas", devoted to the preparation of secondary school teachers in several branches of knowledge. A new plan of studies is about to be approved for the purpose of preparing teachers to obtain their mathematics degree. Besides cultural and pedagogic topics, 4 courses in analysis, 3 in geometry, 1 in principles of mathematics and several others in physics, chemistry, etc. (at superior level) are included.

To attend the courses in Instituto Artigas, prospective teachers must have finished some preparatory studies (grade 12) in general culture, having finished mathematical studies of grade 10 standard. In grades 13th and 14th the mathematics teacher trainees take a course in abstract algebra and general topology;

b) There is also a "Concurso de oposicion" (oral and written examination) for those who want to become secondary school teachers.

Remark: Where it is difficult to find specially trained teachers, they count on local people who have studied at the university for some time.

VENEZUELA

1. Secondary school teachers are prepared by the "Institutos Pedagogicos" which do not belong to universities. There are two such institutes, one in Caracas and another in Barquisimento. After a 4-year course, students receive degrees in mathematics and physics.

2. The mathematics course is as follows:

3 courses in geometry (plane, spatial; conics);
1 course in analytic geometry (plane and spatial);
1 course in arithmetic and theory of numbers;
3 courses in algebra (counting analysis, determinants, linear systems, equations - 2nd., 3rd. and 4th. degrees);
4 courses in mathematical analysis (sequences, differential and integral calculus).

IV - PROPOSALS FOR NEW CONTENT IN MATHEMATICS PROGRAMME. MODERN METHODS AND MATERIAL USED IN MATHEMATICS TEACHING. SPECIAL TRAINING FOR SECONDARY TEACHERS. THE TEACHING OF NEW AREAS OF MATHEMATICS.

ARGENTINA

1. Changes in present programmes

Experiments have been conducted in several secondary schools, for the purpose of introducing changes in the present mathematics curriculum, such as:

a) to teach the unity in mathematics studies, establishing the relations between arithmetic, algebra and geometry;

b) to extend deductive processes to arithmetic and algebra, as it has been done to geometry;

c) to introduce a systematic use of ideas such as variable and function, as well as the methods applied to analytic geometry;

d) to select examples in arithmetic, algebra and geometry in order to exercise the deductive capacity of pupils.

Steps have been taken to suppress those topics already known from elementary studies, such as arithmetic applied to business, and to emphasize the importance of the evolution of mathematics in relation to the other fields of study.

2. Refresher courses

In recent years brief courses have been organized, generally lasting 1 month. Among the topics that have been studied are:

1956 - Principles of arithmetic; geometric problem solving.

1959 - Boolean algebra; theory of functions.

These courses have been developed at "Facultad de Ciencias Exatas y Naturales" of Buenos Aires.

1961 - A course on "Programming for Electronic Computers" (Marcury De Ferranti) was given for secondary school teachers.

The "Facultad de Filosofia de la Universidad Nacional de Buenos Aires" sponsored brief courses on history of mathematics, psycho-pedagogy and organizing secondary school programmes.

A full-time summer course is being planned for 1962 by the "Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Tecnicas", and it is expected that some 40 secondary school teachers will attend. It will last 1 month and its programme will include the following topics:

Principles of geometry and geometry problem solving;
Introduction to modern algebra;
Complements of analysis;
Probability and statistics.

From 1956 improvements in teaching techniques and curriculum can be noted. One may add that Unesco has contributed greatly to such improvement through the establishment of the "Centro Regional de Matematicas para America Latina" in Buenos Aires.

3. Publications

A recent bulletin containing information and news on mathematics teaching is published by "Centro Argentino de Profesores de Matematicas para la Ensenanza Media". There are some other publications concerning secondary school teaching in general, as well as books about mathematics teaching (5).

BRAZIL

1. Changes in current programme

Since 1955 the problems relating to mathematics teaching, whether methodological or curricular, in the different levels of secondary school, have been analysed and discussed in the "Brazilian Conferences on Mathematics Teaching". These congresses (1955, held in Salvador (Bahia); 1957, held in Rio Grande do Sul; 1959, held in Rio de Janeiro) last a week and bring together hundreds of mathematics teachers from secondary schools and universities throughout the country. The IV Conference has been delayed and will be held during 1962 in Sao Paulo.

Such conferences have always been supported by "Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras" of several Brazilian Universities and by CADES (Campanha de Difusao do Ensino Secundario: Campaign for the Diffusion of Secondary School Teaching), an institute sponsored by the Ministério da Educacao (Board of Education). Their recommendations are circulated among all Brazilian secondary school teachers through special publications ("Annals") (6).

Among the conclusions already approved of, are the following:

1. Teachers should not restrict themselves to one particular method of teaching; new lines of teaching should take account of the psychological and intellectual abilities of pupils and keep in view social considerations. A teacher should guide pupils to act, and not to watch (I Conference);
2. The curriculum should be planned in such a way that it could entirely fulfill the fundamental purposes of the secondary school, i.e. accomplish the whole education of the young (I Conference);
3. Guided study should be adopted in order to enable the teacher to evaluate the pupil's capacity of learning (I Conference);
4. Unity, generality and precision should be emphasized while teaching modern syllabus (III Conference);
5. Radio and T.V. should be utilized as teaching aids (III Conference);
6. Preparatory courses on modern mathematics should be organized for secondary school teachers (III Conference).

As a result of these Conferences, the secondary school teachers have been permitted since 1959 to plan a minimum programme to be followed in their classes, with the approval of the School Congregation (Act 86, 20-2-1959, Board of Education).

2. Refresher Courses

a) Vacation Courses have been promoted by some universities in collaboration with the Boards of Education from various States. These generally pertain to elementary topics in mathematics, while a few approach a higher level. Those devoted to university teachers included topics on modern algebra, and mathematical logic and theory of sets;

b) Since 1954 the Board of Education (Federal) has been promoting courses to improve the competence of secondary school mathematics teachers. In these courses, supported by CADES and helped by Boards of Inspection, attention was devoted to mathematics content (topics of elementary mathematics related to higher levels) and didactic techniques (modern teaching methods, modern teaching aids, etc.);

c) There are also institutes of mathematics and research centres where teachers can find all resources necessary to improve their knowledge of pure mathematics, such as lectures, courses, publications on the subject. The "Coloquios Brasileiros de Matematica", which brought together a great number of mathematics teachers from universities all over the country, permitted discussion of problems concerning mathematics teaching.

d) Through representative organizations, such as: 1) "Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciencia" (SBPC) (Brazilian Society for Scientific Progress); 2) "Instituto Brasileiro de Educacao, Ciencia e Cultura (IBECC) (Brazilian Institute of Education, Science and Culture) courses to improve the competence of secondary school teachers in science, physics and mathematics have been organized.

Remark: The IBECC is a national organization founded to develop Unesco's programmes in Brazil. Equipment and didactic materials are manufactured for science and mathematics teaching, and a "Science Club sponsored by IBECC is well known throughout the country (8). During January 1962, in agreement with the National Science Foundation of U.S.A., this Institute will promote a summer improvement course for secondary school teachers of science and physics.

3. Publications

a) With the special purpose of guiding secondary school teachers in mathematics teaching, the III Brazilian Conference on Mathematics Teaching (1959) recommended the publication of a periodical magazine.
At the present time there is a regular section (since 1957) on mathematics subjects in "Revista Secundaria" or "Escola Secundaria" (secondary school) issued each trimester by CADES, Board of Education of Brazil (9);

b) Other publications maintain regular sections on mathematics, such as:
   1) "Revista Brasileira de Estudos Pedagogicos", published by Instituto Nacional de Estudos Pedagogicos-INEP (National Institute of Pedagogic Studies);
   2) "Revista de Pedagogia", published by "Faculdade de Filosofia, Ciencias e Letras" (University of S. Paulo);
   3) "Atualidades Pedagogicas", published by Companhia Editora Nacional (Sao Paulo) (10).

c) Three monographs have so far been published (11, 12, 13).

4. Introduction to new concepts of mathematics

In 1958, under the supervision of the Board of Education of Brazil, special work was done in experimental classes. In Sao Paulo, for instance, experimental classes (two public and four private schools) have been introduced for the two secondary school levels, and in one of them (1st.grade) a special programme (14) was applied involving new concepts, such as:

a) Arithmetic and algebraic structure (notion of sets, logical implications, etc.);

b) Geometric structure;
c) Practical work (initiation to the mathematical laboratory) and preliminary notions of astronomy.

At one of these experimental classes of the second level a new programme (14) was introduced, to run through 3 years, containing:

a) Symbolical logic; sets, fundamental operations on sets; Boolean algebra and applications;
b) Systems of co-ordinates; functions;
c) Sequences; limits and continuity; differential calculus;
d) Spatial axiomatic geometry;
e) Mathematical systems; group, rings and fields.

5. <u>In-service preparation</u>

a) In July 1961 (vacation period), under the auspices of the Board of Education of Brazil through the Board of Education of Sao Paulo, the first course of in-service preparation for mathematics teachers, involving topics as follows, was held (15):

   1) Modern algebra;
   2) Mathematical logic and its applications to secondary school;
   3) Methodology and didactic techniques.

b) In August-September 1961, a course in modern mathematics for secondary school teachers was organized with the participation of the U.S.A. National Science Foundation, represented by Professor George Springer from the Mathematics Department of Kansas University, who presented mathematical logic topics (16). This course was attended by about 40 teachers from Sao Paulo Public Schools (commissioned by the Board of Education of Sao Paulo) and from the Mathematics Departments of the University of Sao Paulo and Mackenzie University, who presented practical work and test results on the following subjects (17):

   1) Mathematical logic and its applications;
   2) Modern algebra;
   3) Theory of sets.

c) The Board of Education of Sao Paulo has planned follow-up courses; the first one was realized in October, 1961, in Itapetininga City. These courses have as their main purpose:

   1) To bring home the new ideas in mathematics teaching, and

   2) To point out the role of new teaching aids, such as films and television in retention of learning (18).

d) In August 1962 the "Grupo de Estudos do Ensino da Matematica" - GEEM (Group of Studies on Mathematics Teaching) was founded in Sao Paulo. Today it is in full operation and brings together teachers from secondary schools and universities, as well as specialists in psychology and pedagogy, with the purposes of (19):

1) Improving and co-ordinating modern mathematics teaching in elementary and secondary schools of Sao Paulo, under the supervision of the Board of Education of Sao Paulo;

2) Promoting courses and contacts with similar organizations (national and foreign) devoted to improvement of mathematics teaching.

More details of the developments, courses etc. relating to Brazil are given in the Annex 1.

CHILE -

The "Facultad de Filosofia y Educacion" of the University provides secondary schools with mathematics teachers.

There are courses to improve the competence of secondary school teachers, some of them under the auspices of the Education Ministry, some promoted by Education Departments of Universities.

COLOMBIA

1. <u>Changes in present programme</u>

In the "Seminario Nacional do Bacharelado", recently held in Tunja, the Committee of Mathematics presented the following recommendations:

a) Continuity in teaching: mathematics should be an obligatory topic in 6th. grade of "Bacharelato";

b) Intensity in teaching: 1) the number of hours for study should be increased for mathematics courses; 2) some topics which now form exclusive matter for universities should be developed in lower levels of teaching; 3) the teaching must follow a sequence of topics for the development of mathematical knowledge.

c) Integration in teaching: denominations such as arithmetic, algebra, geometry and trigonometry should be unified under the general title of mathematics;

d) Synthetic, analytic and axiomatic theories of number; the secondary school teacher should establish a clear distinction regarding different stages of building up number, following a psychological line, i.e. the student must be led to abstract conception of numbers as properties or relations during synthetic stage and using equivalence concepts in analytic stages;

e) Teaching of geometry: geometry teaching should turn as quickly as possible from synthetic procedures (Euclidean ones) into cartesian synthetic-analytic procedures;

f) Use of logic: mathematics teaching should be improved by using logical instruments.

PERU

1. Changes in present programme

At the present time the curriculum prescribed for secondary schools does not present any basic change; the academic year has 180 days of effective work, with 4 hours per week for teaching mathematics.

2. Courses to improve competence of secondary school teachers

In the summer of 1961, a course for in-service teachers was promoted, under the auspices of the National Science Foundation, U.S.A. Called "Instituto de Verao para Profesores de Matematica", it was attended by 194 teachers representing approximately 30% of all mathematics teachers of common secondary schools of the country.

URUGUAY

1. Changes in present programmes

Vast reforms for mathematics programmes in secondary schools are being undertaken. Among other relevant topics the notion of statistics and other new structures of modern mathematics will be introduced. These ideas are not very well known yet, hence the need of publicising works like "New Thinking in School Mathematics", textbooks prepared by SMSG (School Mathematics Study Group) for both students and teachers.

The "Instituto Artigas" publishes a magazine about pedagogic matters, in which interesting remarks about mathematics teaching in secondary schools can be found(20).

The "Instuto de Matematica e Estatistica" has two periodical publications (21), containing original works on mathematics investigation, and history of mathematics, didactic articles, etc.;

VENEZUELA

1. Changes in present programmes

Many improvements and useful changes are being studied in order to enlarge and renew mathematics programmes and mathematics teaching at all levels of secondary schools.

2. <u>Courses to improve competence of secondary school teachers</u>

There is now a lack of secondary school teachers, and very often the chair of mathematics is occupied by students from the university or "Instituto Pedagogico" or even by elementary school teachers. Thus progressive courses cannot be found here and the teaching is still very far from embodying the spirit and trends of modern mathematics.

CONCLUSION

Mathematics teaching in Latin America is changing progressively at the different levels of secondary school, becoming more and more up to date through the introduction of the new ideas about experimental programmes, of modern teaching methods, of innovations about content and efficient teaching aids, and above all through the constant improvement of teachers' competence. In some countries we can already find Regular Courses on mathematical methods and programmes, promoted by universities or similar organizations.

Appended is the list of recommendations of the First Inter-American Conference on Mathematical Education, held in Bogota, Colombia, from 4 to 9 December, 1961, under the auspices of Pan-American Union, where representatives from 27 countries took part.

FIRST INTER-AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION

Considering -

a) that in our technological society mathematics is a vital branch of knowledge and an indispensable instrument for economic and social progress, especially through its applications to biology, physics, economics, statistics, chemistry, technology, etc.;

b) that the alarmingly increasing shortage of mathematics teachers is prejudicial to the development of mathematics and applied mathematics;

c) that it is consequently urgently necessary to adopt measures for the intensified training of an increased number of qualified teachers, principally at secondary level;

d) that the teaching of mathematics at this level should be entrusted only to those teachers who have received professional training in mathematics at institutions of university level;

e) that one of the most important conditions of teaching is that the teacher must keep his mathematical knowledge up to date,

THE INTER-AMERICAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL EDUCATION RECOMMENDS TO GOVERNMENTS AND COMPETENT AUTHORITIES:

I - With regard to the training of teachers

1) that the training centres for teachers of mathematics at secondary level should offer scholarships and other facilities to anybody electing this career, and that secondary school students should be informed by means of lectures and published notices of the prospects of careers as teacher and research worker, of their social importance and of the facilities available to those who take up these careers;

2) that the training of teachers at secondary school level should become exclusively the responsibility of the university, under the supervision of very competent mathematicians in order to avoid the dichotomy between mathematics teaching and advances in scientific research and technology; meanwhile, in cases where this training is being carried out by specialized institutions, mathematics courses should be at university level;

3) that the content of courses for training secondary school mathematics teachers should be modernized and augmented and that pedagogic aspects of the training should not be over-emphasized.

II - with regard to practising teachers

4) that secondary school teachers should keep in constant touch with the university by attending regular refresher courses, towards which end it would be necessary to offer increased facilities for attending such courses, by granting scholarships for studies within the country and abroad.

5) that measures should be taken to improve the economic and social status of qualified teachers, such as:

a) guarantee of security of service;

b) basic salaries equal to those of comparable professions which require academic training;

c) a scale of promotions, with corresponding advantages (increase in salary, decrease in teaching time, etc.), taking into account additional professional attainments, works published, refresher courses attended, etc.;

d) establishment of sabbatical leave;

e) opportunity and facilities for improving professional ability.

6) that opportunities (scholarships, extra allowances, etc.) should be offered to teachers of secondary schools, who are actually teaching and who do not have university qualifications, to obtain degrees and thus receive the benefits set down in article 5, whether they attend university or take special courses of training.

III. With regard to improvement of teaching:

7) that new courses should be promoted and experimental institutions set up, to try out new textbooks and methods for teaching mathematics;

8) that the following proposals should be made to the International Mathematics Union, Unesco and OEA:

a) Intensification of programmes for the improvement of teaching mathematics at secondary school level;

b) Diffusion of information on activities, special programmes and publications relating to the improvement and modernization of mathematics teaching;

c) Publication and distribution of reports, new texts and translations for the information of teachers, which will improve their professional training;

d) Planning of more intensive research as a contribution towards scientific and technological advancement and an inspiration for better teaching;

e) Organization of an international centre for collecting and disseminating information on experiments and new ideas relating to mathematics education;

f) Organization of an Inter-American Commission on Mathematics Education of a permanent nature, to give continuity to the ideas and plans discussed at this Conference and promote activities which would raise the standard and efficiency of mathematics teaching at school and university levels.

9) that broad exchange of information on new ideas on mathematical teaching in all countries should be encouraged, by sponsoring national meetings and international conferences;

10) that delegates and participants at this conference should establish and maintain contact with the authorities of their respective countries in order to adopt effective means of carrying out these recommendations.

BIBLIOGRAPHY

(1) "L'Enseignement des Mathématiques", J. Piaget, E. Beth, J. Dieudonné, A. Lichenerowics, G. Choquet, C. Gattegno. Delachaux & Nestlé, Suisse, 1955.

(2) U.I.C.S.M. (School Mathematics Study Group) - Dartmouth College Writing Group. Universal Mathematics - a book of experimental text materials.

(3) "Reports presented in First Inter-American Conference on Mathematical Education" (held in Bogota, Colombia, December 1961):
"Comentario sobre educacion matematica en Argentina" - Argentina's Delegation:
"Informacion sobre la ensenanza de la matematica en el Brasil" - Prof. A. Pereira Gomez;
"La educacion matematica en Chile" - Prof. Cesar Abuauad;
"La ensenanza de las matematicas en Colombia" - Arturo Ramirez Montufar;
"Ensenanza matematica en Costa Rica" - Costa Rica's Delegation;
"Respuestas al Survey of current practices in Mathematical Education" - Peru - Prof. Jose Tola;
"Organizacion general de la ensenanza en el Uruguay" - Prof. Laguardia;
"Ensenanza de la Matematica en Venezuela" - Prof. Manuel Balanzat.

(4) Acts No. 966, 2.10.1951, and No. 1054, 14.12.1951, from the Board of Education of Brazil.

(5) "Ensenanza de la Matematica" - Dr. Fausto I. Toranzos (ed. 1959).

(6) First Congress Annals - published by University of Bahia, 1957.
Second Congress Annals - published by University of Rio Grande do Sul, 1959.
Third Congress Annals - published by CADES (Rio de Janeiro, 1960).

(7) Report from the program on Science Education - published by IBECC-UNESCO, Sao Paulo, 1959.

(8) "Clube de Ciencias" - published by IBECC-UNESCO, Sao Paulo, 1958.

(9) "Escola Secundaria", published by CADES (Rio de Janeiro).

(10) "Mathematics Department", by Osvaldo Sangiorgi. Published by Companhia Editora Nacional, Sao Paulo.

(11) "Didatica da Matematica", by Maria E. Jacques da Silva. Published by CADES (Rio de Janeiro).

(12) "O ensino da Matematica", by Maria Jose G. Werebe. Published by Faculdade de Filosofia, Ciencias e Letras de Sao Paulo.

(13) "Didatica especial da Matematica", by Jairo Bezerra. Published by CADES (Rio de Janeiro).

(14) "Classes experimentais do Colégio Santa Cruz", included in report to National Science Foundation - NSF Grant - G17638.

(15) "Apostilas de Exercicios sobre Algebra Moderna e Logica Matematica", published by the Board of Inspection of Sao Paulo.

(16) Final report submitted to National Science Foundation, by Prof. George Springer, University of Kansas on NSF Grant G17638, November 1, 1961.

(17) "Apostilas sobre exercicios de Algebra Moderna, Teoria dos Conjuntos e de Logica Matematica", published by Mathematics Department of the Faculdade de Filosofia, Mackenzie University, September, 1961.

(18) "Curso de Admissao pela T.V.", publication of the Sao Paulo Educational Department.

(19) "Estatutos do G.E.E.M." - Statute of G.E.E.M.

(20) "Algunos aspectos de la ensenanza de la Matematica en nuestro Primer Ciclo liceal", A. Petraca, published by Instituto "Artigas", 1957. Montevideo.

(21) "Publicaciones didacticas del Instituto de Matematica y Estadistica", Montevideo.

ANNEX 1: An Account of Developments in Mathematics Teaching in Schools in Brazil

The first step towards giving more unity to mathematics teaching in Brazilian elementary schools has been taken by the Institute Nacional de Estudos Pedagogicos - INEP (National Institute of Studies in Pedagogy). The Instituto which forms part of the Ministry of Education and Culture in Rio de Janeiro has just published "Matematica na Escola Elementar" (Mathematics in Elementary Schools) - a book that is designed to improve mathematical instruction in elementary schools.

The content of the book was divided into sections: a general section which dealt with considerations applicable to every grade in elementary school and five other sections arranged according to the different grades of the course. The general section contained:

1. General considerations on methods of teaching;
2. Teaching aids and models;
3. Analysis of problems;
4. Suggestions for projects;
5. Tests for evaluation.

Each of the remaining five sections was laid out according to the following plan:

1. Content classification;
2. Pupil's mental development and general understanding of mathematical structures;
3. Specific topics to be taught;
4. Organization of games;
5. Solution of problems;
6. Development of projects.

Maximum and minimum limits of pupil attainment were established so that teaching could be adapted to the special conditions of each class and school. The syllabuses presented in this publication have been organized in the form of projects and may be related to language and social science courses. Of course the individual child's interests have to be taken into account and therefore the suggested syllabuses are more in the nature of guides or examples than compulsory curricula to be blindly followed. Once the subject matter has been established the decision as to which is the best way of teaching will depend on the child's particular wishes, interests and capabilities. The teacher is the guide and helps the child to make an appropriate choice.

Since 1956, the State of Rio Grande do Sul, through its Centro de Pesquisas et Orientacao Educacional da Secretaria da Educacao et Cultura (Education Board's Centre of Researches and Guided Education), has been guiding mathematics teaching in elementary school with the help of a series of books called "Brincando con Numeros" ("Playing with Numbers") /"Brincando com os numeros" - 4 series de Cecy Cordeiro Thofehrn - Editora do Brasil S.A./ which aroused an enormous interest among pupils by its different ways of introducing arithmetic to children.

In the same year the "Centro Regional de Pesquisas Educacionais" ("Local Centre of Researches on Education") was created in Sao Paulo. Among the activities of this Centre, there is a special course for professors from the UNESCO Education Centres, already in its fifth year /"O Estado de Sao Paulo" (jornal) - 12/11/1961 - CRPE/

In this Centro Regional are many departments, including psychological testing, audio-visual aids, etc.

An arithmetic course in elementary school based on mental development of the child began in January 1960. Pe. Pierre Faure, from Centre d'Etudes Pédagogiques" - Paris, gave lectures in Rio de Janeiro and Sao Paulo on this subject.

The basic notions of "set" and "logical structures of operations" have been studied since the visit of Prof. Caleb Gattegno to Brazil, in May 1961. /"Aritmetica con Numeros en Color", Prof. Gattegno, Lopez de Hoyos, 76 - Madrid 2/. While here, he showed his new methods of teaching, together with the material of Cuisenaire, to the professors of "Faculdade de Filosofia, Ciencias et Letras, de Rio Claro - Sao Paulo (Philosophy School of Rio Claro, Sao Paulo"), and followed with practical demonstrations to elementary school students.

In August 1961, the Group of Studies on Mathematics Teaching ("Grupo de Estudos do Ensino da Matematica" - GEEM) was created in Sao Paulo. This was the first serious attempt to spread new ideas about teaching modern mathematics in elementary schools, and experimental classes have been started in seminaries and in experimental elementary schools. In particular, the following methods have received serious attention of the Group:

a) Methods of teaching artihmetic by Prof. Lore Rasmussen/"A Aritmetica Divertida" - Lore Rasmussen - Selecoes Reader's Digest; Setembro 1961/, from Miquon School, Philadelphia, U.S.A., who belongs to UNICSM-Mathematics Project Group of Studies directed by Prof. Max Beberman, which has been causing a complete revolution in educational matters in the U.S.A.;

b) Training of teachers leading them to use the mental structures of children. Use of Cuisenaire-Gattegno's, including films "geoplanes" /"Numeros en Color" - Cuisenaire de Espana - Lopez de Hoyos, 76 - Madrid 2/, and so on;

c) Convenient use of Lucienne Felix's new concepts /a. "Mathématiques Modernes - Enseignement Elementaire" - Lucienne Felix - Libraire Scientifique Albert Blanchard 9 - 1960; b. Revue de l'Escole Nouvelle Française, No. 85-86 - Amelia Dubouquet et Lucienne Felix; c. "L'Unité des Mathématiques et leur enseignement" - février-mars, 1961/ about unity in Mathematics Teaching, according to our Brazilian patterns.

Radio and Television have played an active role in all these tasks regarding education. In several states of Brazil arithmetic programmes are given by radio.

T.V. programmes have been organized in Sao Paulo since February 1961, which give Mathematics Lessons /"Apostilas de Matematica" do Curso de Admissao pela T.V.; publicaçao do Departamento de Educaçao de Sao Paulo/ three times a week, under the supervision of Sao Paulo Education Board. These classes last 25 minutes and their teachers are supposed to prepare the students to get into Secondary School, as well as to develop and increase new techniques of teaching.

This is the first attempt of this kind in South America and the results obtained are very satisfactory. This programme was discussed at the "International Convention on Teaching through Radio and Television" in ROMA, held from 3rd to 9th December 1961.

THE NEW BASIS FOR MATHEMATICS TEACHING IN BRAZILIAN SECONDARY SCHOOLS

New ideas in programmes of mathematics teaching received attention first in 1955, and since then National Conventions on Mathematics Teaching studied the use of new techniques in teaching and the application of new didactic material more suitable to the age we live in.

As a positive result, there have been guided study system, use of films and preparation of radio programmes, and later, television as new media of teaching .

Experimental Classes in secondary schools, organized in 1958 with the approval of the Ministry of Education and Culture of Brazil, opened the way to the introduction of first course in modern mathematics.

PRESENT PROGRAMME OF MATHEMATICS - "Curso Ginasial"

Junior High school

1a. Série (7th grade):

I - Whole numbers; fundamental operations; relative numbers
II - Multiples and dividers; prime numbers;
III - Fractions; fractionary numbers;
IV - Units of measurement; systems of measurement

2a. Série (8th grade):

I - Powers and roots; irrational expressions;
II - Algebraic representation and operations; polynomials;
III - Linear binomial; equations and inequalities of the first power; linear systems of two unknowns.

3a. Série (9th grade):

I - Ratios and proportions; arithmetical application;
II - Plane geometric figures; straight line and circle;
III - Proportional straight lines; similarity between polygons;
IV - Trigonometric relationship in the right triangle. Natural trigonometric tables.

4a. Série (10th grade)

I - Second degree trinomial: equations and inequalities of second degree in one unknown;

II - Metric relationship in the circle and polygons; calculation of π;

III - Area of plane figures.

"Curso Colegial"

High School

1a. Série (11th grade)

I - Approximation in all problems; errors;
II - Progressions;
III - Logarithms;
IV - Straight line and planes; surface and polyhedrons; round bodies; definitions and properties; areas and volumes;
V - Conic sections; fundamental properties and definitions.

2a. Série (12th grade) - Junior College

I - Permutation and Combination;
II - Binomial theorem of Newton;
III - Determinants; linear systems;
IV - Nations of vectors; projections; arcs and angles; straight line and trigonometric relationship;
V - Trigonometric transformations in general; simple trigonometric equations;
VI - Trigonometric resolution of triangles.

3a. Série (College)

I - Notion of function; cartesian representation; straight line and circle; intuitive notion of limits and continuity;
II - Notions of primitives and derivatives; interpretations; applications;

III - Introduction to the theory of equations; polynomials; properties; divisibility by x $\pm$ a; problems of composition transformations and finding and determining of the nature of the roots; special types of equations.

PROGRAMMES APPROVED:

"Curso Ginasial" (junior high school)

1a. Série (2nd grade):

Arithmetic: 1. Present programme, with the exception of relative numbers and the units of angular velocity, radian and density.
2. Numerical powers and square roots.

2a. Série (2nd grade):

Arithmetic: Ratios and proportions and rules that depend on them (Rule of three, interest, etc...)

Algebra (beginning): Relative numbers; literal calculus; monomials and polynomials; simple cases of factoration. Algebraic functions; root calculus.

3a.Série (3rd grade):

Algebra: First degree equations with one unknown; first degree systems; first degree problems. Unequalities; inequations of first degree with one and two unknowns.

Geometry (beginning): Study of the plane geometric figures; lines, angles, triangles, quadrangles, polygons in general, circles; geometric constructions.

4a. Série (4th degree):

Algebra: Second degree equations with one unknown; biquadratic equations; irrational equations; simple systems of the second degree; second degree problems; separate study of auric division, of the problem of light and the well.

Geometry: Proportional lines; similarity of plane figures; notions of sine, co-sine and tangent of an acute angle; metric relations in the triangle, in the quadrangles and in the circle; regular polygons; areas of plane figures.

"Curso Colegial" (high school, junior college)

1a. Série: (first year): Progressions; irrational numbers; powers with fractional exponents; logarithms (as an operation); exponential equations; trigonometry.

2a. Série (second year): combinatory analysis; Newton's binomial; determinants; linear equations; solid geometry.

3a. Série (third year): mathematical analysis (beginning): elementary concepts of variable and function. Limit: notions about derivates and applications to the study of the variation of a function. Study of the second degree trinomial. Notions about complex numbers. Polynomials and algebraic equations in general (short introduction).

Analytic geometry (beginning): Study on the plane up to conics.

INTRODUCTION TO MODERN MATHEMATICS. PRESENT DEVELOPMENT SECONDARY SCHOOLS. PROGRAMMES. TEACHERS' TRAINING

In 1959 for the first time, a programme of modern mathematics was used in Sao Paulo in experimental classes (junior high school first grade and junior college first grade).

For junior high school, first grade, where the student is normally eleven years old, the programme is composed of two structures:

1. Arithmetic-algebraic structure
2. Geometric-intuitive structure

followed by

3. Practical works; mathematical laboratory films;
4. First notions on astronomy

This programme is ruled by the following fundamental principles;

a. to consider the formative role and informative content of each subject matter;

b. to prepare pupils to conceive abstract patterns;

c. to resort, in the course of the study of numbers and polynomials, to common properties which later will lead to the understanding of general structures of algebra, such as "sets", "group", "ring" and "fields".

For the "Curso Colegial" (high school and junior college), where the student is normally fifteen years old in the first grade, the first programme of an Experimental Course in Modern Mathematics is being developed in the Holy Cross, in Sao Paulo, under the guidance of the Board of Education and Culture of Brazil.

This programme aroused enormous interest among Sao Paulo instructors. The pupils were happy to be able to know important ideas which mark the instruction of modern mathematics; symbolic logic, theory of sets and several axiomatics theories. The deductive reasoning taught in algebra, as also in geometry, was done in small models (mathematical systems) with a number of propositions smaller than usual.

In this experimental programme sufficient note has been taken of the need of elementary calculus and of notions of probability, which provide the base of applied mathematics nowadays.

The programme has the following items and will be taught in three years, with five hours of classes per week:

Unit I - <u>Symbolic Logic</u>

Simple and compound assertions
Connectives; truth table
Modifiers and quantifiers
Laws of propositional calculus
Implications

Unit II - <u>Sets</u>

Primitive concept; symbolic notations and graphic representation
Set "builder"; Venn diagram
Cartesian set; special sets and their construction
Operations on sets: union, intersection, complementation
Algebra of sets

Unit III - <u>Relations</u>

The ordered pair; the Cartesian product
Meaning of domain, range; symbolic designation
Functional relation: definition of a function, domain and range
Special functions; inverse function
Arithmetic operations on functions and compositions

Unit IV - <u>Numbers</u>

Real numbers: definitions as ordered pair; postulates
Natural numbers: postulate of mathematical induction
Rational and irrationals numbers
Complex numbers

Unit V - Probability

Laws of counting: fundamental principle of sequential counting
Permutations; partitions; combinations; binomial formula
Concepts of probability: experiment; sample space; event; weight
Algebra of Events; algebra of sets; algebra of statements.

Unit VI - Co-ordinate geometry in the plane

The straight line in co-ordinate plane; several forms
Parallel and perpendicular lines; angle; solution sets
Conics; loci

Unit VII - General Functions

The polynomial function of the n th degree: theory of equations
Algebraic irrational functions
Transcendental functions and applications; trigonometric; logarithmic; exponential.

Unit VIII - Sequences, Series, Limits and Continuity

Sequences: convergent and divergent
Special sequences: arithmetic progression and geometric progression; sums of progression; sigma notations; theorems about infinite geometric series
Limits: graphic interpretations; applications
Continuity: intuitional meaning of the continuum, a property of real numbers; theorems; the polynomial as continuous function

Unit IX - Differential calculus of polynomials

Meaning and purpose of the study of differential calculus
The derivative function; geometrical interpretation
Functions defined implicitly and implicit differentiation
Applications to physical and geometrical problems

Unit X - Spatial Geometry

Spatial concepts: relations of lines and planes in space

The fundamental solids; locus; mensurations of solids

Cavalieri's Principle

Co-ordinate geometry in space: intercept form of the equation of the plane; distance between two points

Unit XI - Mathematical Systems

Group: meaning and postulates; study of examples of finite groups; simple theorems; fields; meaning and postulates

Modular fields; examples

Optional Topics: Ventors; methods of proof

Integral calculus of polynomials

Statistics

Polar equations

Boolean algebra and applications to switching circuits.

ANNEX II: Supplementary Information vis-à-vis the Bogota Conference

A trend to modernize mathematics teaching in elementary and secondary schools is evident in many Latin American countries, but the development is not rapid in some countries, due mainly to the lack of appropriate resources. The main lines of activity are directed towards:

a) a new curriculum in high school mathematics containing the concepts of logic, set theory, vector spaces, probability and statistics;

b) special training for secondary school teachers;

c) preparation of experimental textbooks;

d) new teaching methods and teaching aids.

The following account will indicate the present developments in those countries where the movement has taken firm root.

Argentina:

1. Argentina is urging the use of the heuristic method in mathematics teaching in elementary and high school classes.

2. Argentina is re-training its high school teachers, and this year a "Summer Course" for high school teachers supported by the "Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas e Tecnicas" will introduce modern algebra, probability and statistics according to a programme already established.

The continuity of this training programme is guaranteed by the Consejo which will support those "Summer Courses" every year.

3. Unfortunately, there are not yet any plans regarding experimental textbooks for the use of pupils and teachers.

Brazil:

1. The foundation of several new Colleges of Liberal Arts and Sciences (Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras) has provided high schools with better trained teachers; it has allowed for a more homogeneous mathematics teaching (there are already 12 of such colleges in the State of Sao Paulo).

In order to attract to the teaching career those who have obtained a college education and are being attracted by better jobs, a group is working to obtain higher wages for the high school teachers.

One factor that contributed a great deal to better preparation of school teachers is, without doubt, the increase in number and quality of research mathematicians in universities and institutes of mathematics. The following factors also contributed concretely to the improvement of mathematics teaching:

a) Brazilian Seminars on Mathematics (1957, 1959, 1961) where, with the participation of visitors from other countries, teachers and students discussed many problems concerning mathematics teaching.

b) National Meetings on Mathematics Education (1955, 1957, 1959) where hundreds of mathematics teachers got together and studied changes in curriculum, modernization of teaching methods, new didactic material, etc.

In the meeting of 1962 new programmes for high school mathematics teaching will be presented for definitive approval. The alteration of the curriculum was made possible due to the new law of "Diretrizes e Bases" recently (1962) introduced in Brazil.

2. Some successful experiments are now in their fourth year of development. A very important event was the visit to Sao Paulo in 1961 of Prof. George Springer, who in August and September gave a series of lectures about mathematical logic and its application. At the same time Prof. Springer participated at several seminars and a course in modern algebra and set theory sponsored by teachers from the University of Sao Paulo and Mackenzie University.

The G.E.E.M. (Grupo de Estudos do Ensino da Matematica) is responsible for these experiments and also for the introduction of the concepts of modern mathematics in high school. The G.E.E.M. will prepare new textbooks for students and teachers about those concepts.

Uruguay:

Changes are already being made in high school curriculum. These changes include the introduction of statistics and concepts of modern mathematics in high schools.

Uruguay has a centralized education system and is therefore in a good position to effect reforms in mathematics teaching.

The I Inter-American Conference in Bogota brought some very important results:

1. It has effected a closer contact among the American countries and allowed for an exchange of ideas and information on what is being done in the field of mathematics teaching.

2. A permanent Inter-American Commission was created headed by Professor Marshall Stone (University of Chicago) and having as members Gonçalves Domingues (Argentina), Alfredo Pereira Gomez (Brazil), José Tola Pasquel (Peru) and Bernardo Alfaro (Costa Rica). The task of the Commission will be to encourage the realization of ideas presented at the Conference and to raise the level of high school and university education. This Commission is already at work.

ANNEX III: Part played by TV in Mathematics Teaching

The first International Congress on Education through radio and television was organized in Rome in December 1961 and was promoted by the RAI (Italian Radio Television) under the auspices of UER (Union Européenne de Radiodiffusion). Representatives of about 70 countries got together and they each presented and compared the educational work that is being done all over the world by radio and television.

In the field of mathematics education, attention was called to the great resources of didactic material offered by video tapes. Television can also offer high school teachers courses in new concepts of modern mathematics, and a much larger number of teachers could thus be acquainted with modern mathematics in a much shorter time than by the traditional training courses limited to 40 teachers at a time.

Europe:

In Europe,mainly in Italy, France, England, Belgium, Switzerland, Germany, Sweden, Yugoslavia, Spain - mentioning those countries which worked most on the use of TV for education - one finds excellent mathematics classes shown by "life" television or by video tapes and films.

The rational work done in Italy by the RAI by means of its Telescuola is a sample of how the extraordinary resources of television can be used for good teaching.

The "Centro Telescuola" has its own building, with modern rooms (sala ambiente). Each room has the most recent pedagogic material. In the school year 1960-1961 the "Centro Telescuola" transmitted 960 hours educational programmes of school telecasting, 140 of which were on mathematics education. Its educational programme is broadcast between 8.30 a.m. and 6.30 p.m. During the 1961-62 school year the Telescuola will transmit over 1,170 hours, the largest index at present in the world.

The lectures on mathematics (experimental high school courses and professional courses) as well as the others are presented by specially trained teachers directly from the "Centro Telescuola". The transmission covers a network of 2,968 listening posts (PAT) distributed throughout the country. The demonstration room (sala ambiente) of mathematics has many modern audio-visual devices such as magnetized black-boards that greatly help the composing and decomposing of geometric figures, panels lighted by sections intended to cut off some formal properties of the operations; movable displays, and many other devices peculiar to the TV. These act as strong forces in making interesting and pleasant the "roceiving" of mathematics lectures.

The telestudents who listen to those lectures (in the Centro Telescuola, listening posts or homes) receive textbooks from the Centre. These textbooks contain explanations which make it easy to follow the course.

France is also a country where the use of TV for education is in an advanced stage.

In Great Britain the TV is a powerful means of education. Every day, at 5 p.m. the BBC and the ITV compete during an hour before millions of children. To follow the educational programme the children receive free textbooks.

Over 300 traditional schools received in 1961 TV receptors from authorities while other schools have promoted campaigns for their acquisition. There is also a TV rental service for schools.

Over 2,000 education centres use the programme on TV. Arithmetic is taught over TV, and the teaching of mathematics is about to begin.

America:

Among the American countries, the U.S.A. is without doubt the one which presents the greatest development in the use of TV for education in general. In New York for the third year in succession educational courses were given through TV. In 1961, 67 programmes were transmitted, 27 of them on life television and the others in films covering 26 hours weekly. These programmes were transmitted to students in schools or homes by the WPIX Station. Among these programmes there was a very successful "Club of Mathematics".

Among the many educational programmes through TV in the USA, the excellent work of "The Midwest Programme on Airborne Television Instruction (MPATI), stands out which will be a vital part in an exciting new experiment in education. A major goal of the project is to increase educational quality and efficiency in schools and colleges through the improved utilization of television as a medium of instruction.

There is a mathematics TV programme for elementary classes and high school classes.

The "Exploring Mathematics to the Classroom Teacher" contains 64 telecasts which involve in an objective way the teaching of many chapters of arithmetic, algebra and geometry.

It is the MPATI which will, for the first time in America, introduce the concepts of modern algebra over television.

Modern algebra will include the following items: a review and restatement of elementary algebra, vectors and lines, inner products, the complex plane, lines, planes and equations, and matrix algebra.

The text "Introduction to Modern Algebra", by Dr. John L. Kelley, Television Teacher, and a "Student Manual", by Professor Roy Dubisch have been specially written for the course. The text consists of 48 sections which are numbered to correspond to the lessons.

Also in the USA, the following plan was tried out for the first time; in the early morning hours (from 6 a.m. to 7 a.m.) during some weeks television has been used to transmit a course on the new concepts of modern mathematics designed for high school teachers. The transmission of this course covered a very large area and reached a large number of teachers having an efficiency never heard of before the advent of television.

In Latin America the problem of commercial competition among TV stations of one country or even among the TV stations of one State (Sao Paulo alone has 5 distinct channels!) stands against the development of educational programmes through TV since such programmes are never financially attractive.

However there is a serious interest in the use of TV for educational programmes.

Representatives from Argentina, Brazil, Chile, Mexico, Uruguay and Venezuela, participated in the Congress of Rome. They presented samples of what has been done in their countries to use TV as a medium of instruction.

Brazil is one of the first countries in the world to use the television for the teaching of reading and writing. Since February 1961, Brazil has had an educational TV programme in Sao Paulo called "Curso de Admissao ao Ginasio pela TV", under the auspices of the Board of Education of Sao Paulo, and the collaboration of a private station TV-"Cultura" - Canal 2.

This course has been well accepted by the public and it has about 5,000 students regularly registered. The course consists of two daily lectures of 25 minutes each on Portuguese, Mathematics, History and Geography. The course is given during the school year and the students receive free textbooks to follow the lectures. In the mathematics classes arithmetic is taught and modern audio-visual TV devices are used.

During the 1962 school year the G.E.E.M. will help in the mathematics course, introducing the use of the Cuisenaire-Gattegno Material to elementary and high school teachers. Also a course on "Introduction to Algebraic Structures" is being planned for 1962.

Uruguay is planning for this year a course through TV aiming to bring to elementary teachers methods of solving arithmetic problems. This course will be sponsored by the "Consejo Nacional de Ensenanza Secundaria".

DOC. 115

(Separata da Revista DIDÁTICA N.º 1 — Marília, 1964)

MESA-REDONDA SÔBRE INTRODUÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NO ENSINO DE QUALQUER GRAU.

Relator: Prof. **Oswaldo Sangiorgi,** da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Mackenzie.

I. — Sessão do dia 3-9-1963.

Todos que se interessam pelo ensino, de um modo geral, já sentiram a tendência bem acentuada que, presentemente, há no sentido de reestruturar-se a Matemática que tradicionalmente é destinada aos nossos jovens alunos.

A abordagem clássica não satisfaz mais as condições e as necessidades criadas pelo mundo moderno. Assim como nos exprimimos em Português, hoje e mdia, numa ortografia completamente diferente da usada no século passado (quando, por exemplo, farmácia se escrevia com ph...) não se pode mais adiar a modernização da linguagem nos assuntos considerados fundamentais em Matemática, sob pena de não se transmitir aos alunos de nossa época os verdadeiros aspectos da ciência atual.

E' preciso superar, com trabalho honesto e construtivo a herança de um ensino anacrônico de Matemática que vem se arrastando de 50 anos para cá e que está longe de corresponder às exigências dos tempos de muita ciência que vivemos, mormente em nosso país, que luta estoicamente para vencer a barreira do seu subdesenvolvimento econômico e cultural. Países de bom índice cultural já estão propiciando aos seus alunos, desde a Escola Primária, o conhecimento do verdadeiro caráter estrutural da Matemática Moderna. Para isso levam em conta não só a psicologia do jovem atual e as variações de ordem pedagógica do grupo em que vivem, mas também, e cuidadosamente, a própria natureza da ciência a ensinar.

Assim sendo, não basta a criança adquirir rudimentos de leitura, de escrita e de cálculo, como coisas sem ligação, mas é essencial que, por intermédio da leitura, da escrita, do cálculo (como técnica), do desenho (como fonte emuladora de seu espírito criador), ela possa através das **Estruturas comuns,** estar apta a compreender o mundo em que está vivendo.

E' preciso, pois, aproveitar as estruturas mentais da criança desde as primeiras manifestações exibidas na sua atividade normal de agir, de brincar, na arte de compor e decompor (operações direta e inversa) apreendendo uma Matemática que a aprimore nas suas coordenações e que esteja a serviço do desenvolvimento **natural** de sua inteligência!

O psicólogo Piaget demonstrou, exaustivamente, a correspondência existente entre os mecanismos operatórios da inteligência de uma criança e as estruturas algébricas da Matemática. Destacou, com ênfase, que as operações que coordenam as ações do pensamento de uma criança de 2 a 8 anos, traduzindo atos de inteligência, possuem uma **estrutura de grupo abeliano,** que é das mais importantes em tôda a Matemática.

Dizer que a composição de duas ações (de uma criança) ainda é uma ação; que as composições sucessivas são associativas; que tôda ação pode ser desenvolvida em dois sentidos (operações direta e inversa); que existe uma operação idêntica, como resultado de uma ação seguida de sua inversa é, na verdade, dizer que as estruturas dos sistemas matemáticos (constituídos de um **conjunto** de elementos quaisquer e de uma **operação,** também qualquer) se iniciam desde que a criança comece a usar a sua qualidade de racional e prossegue nas suas atividades dos cursos primário, secundário e superior.

Se não fizermos as crianças aproveitarem devidamente as suas estruturas mentais que, segundo o matemático inglês Boole se apresenta como uma "álgebra do pensamento" estaremos desperdiçando um precioso tempo para fazê-la adquirir bons hábitos de raciocinar.

Assim, por exemplo, "a passagem do **singular** para o **plural**" é uma "operação" que se desenvolve tanto no Português como na Matemática, atendendo a mesma estrutura mental que se traduz no Português acrescentando **s** ou **m** nas palavras, e na Matemática na operação "multiplicação"; como se pode observar dos enunciados:

1 objeto custa Cr$ 50,00

3 objetos custa**m** Cr$ 50,00 x 3 = Cr$ 150,00.

A operação inversa "passagem do **plural** para o **singular**" que no Português implica na retirada do "s" ou do "m" da palavra, na Matemática traduz-se na operação inversa da "multiplicação" que é a "divisão":

3 objetos custa**m** Cr$ 150,00

1 objeto custa Cr$ 150,00 : 3 = Cr$ 50,00

O mesmo acontece no universo das frações onde

1/3 é o **singular** (lê-se: um terço)

2/3 é o **plural** (lê-se: dois terços)

e a passagem de uma fração para outra é feita através da operação **multiplicação** (de 1/3 para 2/3) e sua inversa pela **divisão** (de 2/3 para 1/3). O aproveitamento das mesmas estruturas existentes na língua e na Matemática permitirão ao aluno falar corretamente:

2/3 custa**m**... e não 2/3 custa!

Desde Leibnitz, famoso filósofo e matemático do século XVIII, conhece-se a preocupação de encontrar a "estrutura-mãe" que comandasse tôdas as atividades do gênero humano, bem como pudesse interpretar os fenômenos da natureza. Daí o nome de "Característica Universal" a sua grande obra.

Em tempos mais recentes a Teoria dos Quanta, de Max Planck, é a "estrutura-mãe" para a Física, Química e Biologia, por ser capaz de **unificar** essas ciências com a **mesma linguagem**.

O Grupo Bourbaki (Weil, Dieudonne, Delsarte, Chauquet...) é nos nossos tempos os responsáveis pela apresentação da Matemática no **singular**, unificando-a através da linguagem dos **conjuntos, estruturas** e **relações**.

São três as estruturas-mães propostas por aquele grupo: **estruturas algébricas, estruturas de ordem** e **estruturas topológicas**, que permitem identificar as estruturas mentais da criança com suas atividades em qualquer disciplina. Daí a vantagem inata de se conhecer a Matemática dentro do seu caráter estrutural.

Pois bem, propiciar o conhecimento da Matemática nesse sentido é o que se pretende quando se fala na introdução da Matemática Moderna no ensino de graus primário e secundário. Mostrar ao aluno que não existem Matemáticas distintas: a do primário, a do secundário e a do superior e sim que existe uma **atitude Matemática** que êle deve adquirir para melhor conhecer os diversos assuntos que compõem o seu currículo.

O que se deseja, essencialmente, com Modernos Programas de Matemática é na realidade ensinar os assuntos da "velha matemática" usando uma nova linguagem, onde prevaleçam as idéias de conjuntos, estruturas e símbolos lógicos, capazes de atender os objetivos já expostos.

Conjunto é o conceito hoje universalmente empregado no ensino da Matemática, desde o Curso Primário. O estudo das **estruturas** é aquêle que diz respeito às propriedades comuns a certos conjuntos munidos de determinadas operações. Assim, desenvolvem-se certos conceitos através dos conhecimentos de algumas estruturas e nunca por vias que cuidam de mostrar, ingênuamente, interpretações provisórias e falhas, como por exemplo, quando o estudante aprende que:

$4a + 3a. = 7a$

em virtude de uma propriedade estrutural básica da Matemática (propriedade distributiva):

$4a + 3a. (4 + 3)a = 7a$

e nunca porque: "4 abacaxis mais 3 abacaxis é igual a 7 abacaxis", pois no instante que êsse mesmo estudante tiver que efetuar

$4a \times 3a. = 12a^2$
a linguagem do "abacaxi" já não serve mais, enquanto a propriedade estrutural (agora **associativa**) justifica prontamente.

Por outro lado êsses conceitos dando a unidade e o caráter estrutural da Matemática atual, não mais autorizam a existência de compartimentos estanques: aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, etc... como partes distintas entre si ou quase autônomas como se existissem diversas matemáitcas...

Na verdade, êsses nomes só podem satisfazer, didàticamente, a um atendimento de distribuição de assuntos que, deve porém, conservar a Matemática no singular, a fim de que sua unidade seja posta em evidência e cada passo pela identidade dos métodos e procedimentos empregados tanto para números, como para **letras, polinômios**, para **pontos**, para **vetores** ou qualquer **conjunto de abstrações**.

Outra contribuição preconizada pela modernização do ensino da Matemática é a utilização de símbolos lógicos que respondem pela precisão indispensável que deve prevalecer nessa ciência. O mais interessante é que todos nós estamos cansados de saber que o próprio aluno, por si, sente necessidade do uso de sinais abreviados para poder tomar nota e acompanhar bem uma aula. Todavia, corre o risco de não poder decifrar, devidamente, tais sinais particulares e portanto não desfrutar de um esquema de trabalho que poderia lhe ser útil se fôsse tratado de outra maneira pelo uso de símbolos bem definidos. Então, atendendo a êsse desejo do próprio aluno, porque não usar palavras e símbolos, que devem ser introduzidos naturalmente no momento propício pelo mestre, adotados universalmente e de emprêgo legítimo em tôda a Matemática?

Estão nesse caso os símbolos lógicos chamados **quantificadores**: o quantificador universal: $\forall$ que se lê: "qualquer que seja"; o quantificador existencial: $\exists$ que se lê: "existe pelo menos um", que, quando empregados, permitem ao professor uma forma correta de expressão e aos alunos uma forma convincente de apreensão. O estudante se acostumará fàcilmente a não passar sem o uso dêsses símbolos, assim como, não passa sem o uso dos símbolos clássicos de $=$, $+$ $\times$...

Dessa forma vai se dando à Matemática o aspecto moderno que permite uma tomada de consciência de suas idéias fundamentais através de um ensino mais vivo, mais eficaz, bem como é possível estabelecer com ênfase a continuidade na apresentação dos diversos assuntos, desde o jardim de infância até os níveis mais adiantados.

Preocupando-se assim a Matemática atual, muito menos com a natureza dos elementos que estuda (números, letras, polinômios, pontos, vetores...), e muito mais com o **tipo de estrutura** que caracteriza as relações existentes entre êsses elementos, que aparentemente pareciam não estar subordinados a relação alguma, é fundamental que a nossa Escola Secundária, a exemplo do que estão realizando países adiantados culturalmente, transmita aos seus jovens alunos as verdadeiras mensagens que é portadora a chamada Matemática Moderna.

II — Sessão do dia 4-9-1963

Conteúdo e método.

Foi feita uma exposição sôbre tópicos de um moderno programa de Matemática organizado pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) de São Paulo, contendo assuntos mínimos considerados indispensáveis para a Escola Secundária atual.

Foram realçadas para tais assuntos (24 para o 1.° ciclo e 18 para o 2.° ciclo) as sugestões para o seu desenvolvimento, que destacam a importância das idéias de conjunto e estruturas que garantem a unidade que sempre deve prevalecer no estudo da Matemática.

Foi mostrado que, nestas condições, o aluno compreenderá com facilidade a identidade de métodos e procedimentos empregados com números, polinônmios, pontos, vetores, etc...

A seguir destacou-se o conceito geral de **operação** e de **operação inversa**, com elementos quaisquer, bem como as propriedades estruturais nos conjuntos onde estão definidas. Foram exemplificados sistemas matemáticos diferentes dos trivais, acompanhados das respectivas tábuas operatórias.

Discutindo-se a parte executiva de tal programa e levando-se em conta a flexibilidade do currículo e a continuidade que deve existir no ensino dos diversos assuntos, o professor interessado em Matemática Moderna poderá programar, dos itens apresentados, o número que achar conveniente. Apenas, como caráter de sugestão, poder-se-ia desenvolver em classes normais 6 itens por série de ginásio (naturalmente na ordem em que aparecem, tanto quanto possível). E' lógico que a reação da classe, na qual se ensina, e sua maior ou menor rapidez de entendimento, constituirão para o professor os fatôres decisivos que o aconselharão a estender-se além dêsse limite ou reduzir o número de itens.

*

Material distribuído aos participantes da mesa-redonda sôbre "Introdução da Matemática Moderna no Ensino de qualquer grau".

GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA — GEEM
ASSUNTO MÍNIMO PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO.

Orientação e Sugestões para o seu Desenvolvimento (*).

INTRODUÇÃO.

Dentro do processo da modernização dos nossos currículos e do das mais avançadas técnicas da pedagogia contemporânea, oferese agora ótima oportunidade para atualizar o ensino da Matemática em nossas escolas secundárias.

Quando se fala na introdução da Matemática Moderna no estudo secundário, não se deve pensar que se pretende ensinar um programa completamente diferente dos programas já conhecidos.

O que se deseja essencialmente com Modernos Programas de Matemática (e esta seria a expressão aconselhada) é estudar os mesmos assuntos da Matemática, conhecidos como essenciais na formação do jovem ginasiano, usando porém uma linguagem moderna que seja mais atraente às novas gerações. Essa linguagem moderna envolve substancialmente o conceito de conjunto e deve atender a

---

(*). — Êste trabalho do GEEM de São Paulo recebeu aprovação unânime IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática realizado em julho, 1962 — Belém — Pará e readaptado no Curso de Treinamento Básico para Professôres Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963.

formação das estruturas matemáticas, que permitam, com menos esfôrço, melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno e dão ênfase ao caráter da Matemática atual.

A unidade da Matemática será desta forma posta em evidência, a cada passo, permitindo ao aluno que compreenda com facilidade a identidade dos métodos e procedimentos empregados com números, polinômios, pontos, etc.

E' evidente que a Matemática sendo uma ciência sempre em evolução, não se poderia pensar nunca em um programa definitivo. Porém, se poderia pensar sempre num esquema de assuntos mínimos fundamentais, dispostos com continuidade de forma que garantindo a unidade da Matemática, ressalte o caráter estrutural da Matemática Moderna.

A seguir vem o esquema de 24 itens sôbre assuntos mínimos (incluindo pequenas sugestões para um moderno desenvolvimento) de um Programa de Matemática para os 4 anos de ginásio, apresentado pelo GEEM ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, como contribuição para a discussão do tema: "Reestruturação do ensino da Matemática na Escola Secundária face à Lei de Diretrizes e Bases".

Atendendo à flexibilidade do currículo e à continuidade que deve existir no ensino dos diversos assuntos, o professor poderá programar o número de itens que achar conveniente (ou outros se achar conveniente, que atendam porém às razões expostas) por série do ginásio. Apenas com caráter de sugestão poder-se-ia desenvolver em classes normais 6 itens por série (naturalmente na ordem em que aparecem). E' lógico que a reação da classe, na qual se ensina, e sua maior ou menor rapidez de entendimento constituirão para o professor os fatôres decisivos que o aconselharão a estender-se além dêsse limite ou reduzir o número de itens.

Convém assinalar que o programa ora apresentado pelo GEEM, mereceu aprovação unânime do plenário, relativo à Comissão de Matemática do V Encontro de Mestres, realizado na capital de São Paulo, de 27 a 28 de junho último, sob o patrocínio da CADES e jurisdição da Inspetoria Seccional de São Paulo, bem como da reunião de professôres da Secção K — Educação, relativa a "Introdução da Matemática Moderna no Curso Secundário", da XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, Paraná, em 10 do corrente.

Assuntos Mínimos para um moderno programa de Matemática para o Ginásio.

O GEEM de São Paulo, apresentando ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, a contribuição de sua equipe acêrca do atual problema da modernização do ensino da Matemática no curso médio, almejou, ir ao encontro do que é possibilitado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, na certeza de que dessa Assembléia máxima dos professôres de Matemática do Brasil, reunida, em Belém do Pará, surgirão reais diretrizes para um verdadeiro norte do ensino da Matemática nas escolas secundárias do país.

ASSUNTOS MÍNIMOS.	SUGESTÕES.
1 — Número e numeral. Sistemas de numeração. Bases.	1 — A idéia de **conjunto** deve ser dominante; destacar os conceitos de número (como **idéia**) e numeral (como símbolo, nomes... que representam os números). Lembrar a importância de outros sistemas de numeração (antigos e modernos) além do decimal; ressaltar as aplicações de algumas bases.
2 — Operações (operações inversas) com os números inteiros, propriedades estruturais.	2 — A operação deve ter um significado **mais geral** do que aquêle que o aluno normalmente possui; deve-se destacar o significado de operação inversa. As propriedades estruturais das operações com números inteiros devem ser ressaltadas como o início das estruturas matemáticas.
3 — Divisibilidade, múltiplos e divisores, números primos — fatoração completa.	3 — O uso da linguagem de conjuntos e operações entre conjuntos trará novos centros de interêsse na explanação da matéria. Devem ser acentuadas as relações de "múltiplo de" e "divisor de"; o estudo das operações m.d.c. e m.m.c. e as respectivas propriedades estruturais.
4 — Números fracionários; operações (operações inversas); propriedades estruturais.	4 — Destacar com os números fracionários a permanência das propriedades já introdu-

zidas com os números inteiros (a estrutura contínua). Dar a idéia de número racional absoluto, e suas propriedades.

5 — Estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais.

5 — Nesse estudo que compreende uma revisão do primário, possibilitar aos alunos construções de figuras geométricas.

6 — Sistemas de medida; Sistemas decimal e não decimais.

6 — Caracterizar um sistema de medida; destacar as vantagens do S.M.D. em relação aos outros sistemas e seu uso obrigatório no Brasil.

7 — Razões e proporções; aplicações.

7 — Discriminar as aplicações principais usando as propriedades: divisão proporcional, regra de três; percentagem; juros e câmbio.

8 — Números racionais relativos; operações (operações inversas); propriedades estruturais.

8 — Ressaltar o aspecto das propriedades dos números racionais relativos (números inteiros e números fracionários); observando, se possível, a **estrutura de grupo**, das mais importantes da Matemática.

9 — Cálculo literal, polinômios com coeficientes racionais, operações fundamentais, propriedades.

9 — Estudar, nesse cálculo, os casos simples de fatoração; ressaltar as propriedades estruturais comuns às operações entre os números já introduzidos e os polinômios.

10 — Frações algébricas, operações fundamentais; propriedades.

10 — Relacionar tanto quanto possível com os estudos das frações já efetuados; lembrar a ausência de significado do anulamento das frações algébricas e aproveitar a ocasião para motivar o início do estudo das equações.

11 — Esquações do 1.º grau com uma incógnita, inequações

11 — Estudar sòmente as equações do primeiro grau com coefi-

do 1.º grau com uma incógnita; inequações simultâneas.	cientes racionais, através da linguagem de sentenças matemáticas; para as inequações simultâneas, usar as operações entre conjuntos, fazer problemas de aplicação relacionados com a vivência do aluno.
12 — Função: representação gráfica cartesiana de uma função.	12 — Dar a noção fundamental de função (como correspondência) e de par ordenado; introduzir sistema de coordenadas no plano; estudar a função linear $y=ax+b$.
13 — Sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica. Sistema de equações do 1.º grau com três incógnitas.	13 — Será conveniente usar operações entre conjuntos (interseção); acentuar o princípio da eliminação que pode ser estendido a sistemas com um número qualquer de equações. Discutir completamente o caso do sistema de duas equações do 1.º grau, com duas incógnitas. Problemas relacionados com a vivência do aluno.
14 — Sistemas de inequações do 1.º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica.	14 — Continuar usando as operações entre conjuntos, ressaltando a interpretação gráfica.
15 — Elementos fundamentais da Geometria plana: ponto, reta, semi-reta, segmento; plano, semiplano, ângulos.	15 — Introduzir intuitivamente os elementos fundamentais e suas propriedades; usar, sempre que possível, a linguagem dos conjuntos e suas operações. Mostrar como algumas propriedades são conseqüência de outras mais elementares, introduzindo assim o processo dedutivo na Geometria (Preparação para a axiomatização).

16 — Polígonos: generalidades. Estudo dos triângulos.	16 — Ressaltar a convexidade e não convexidade; estudo do triângulo: congruência, propriedade se aplicações.
17 — Perpendicularismo e paralelismo no plano; estudo dos quadriláteros.	17 — Na teoria das paralelas mostrar a importância do Postulado de Euclides, seu valor histórico bem como o surgimento de outras geometrias, não-euclidianas.
18 — Circunferência; propriedades; posições relativas de reta e circunferência e de circunferências.	18 — Continuar aplicando a linguagem dos conjuntos e suas operações.
19 — Número real (racional e irracional); operações; propriedades estruturais; cálculo dos radicais.	19 — Destacar a validade das propriedades introduzidas com os números racionais relativos, resolver equações e sistemas do 1.º grau com **coeficientes reais.** Representação do número real na reta.
20 — Equações do 2.º grau com uma incógnita; função trinômio do 2.º grau; equações redutíveis às do 2.º grau, sistemas redutíveis aos do 2.º grau.	20 — Estudar as primeiras noções sôbre trinômio do 2.º grau; representação gráfica e aplicação simples. Entre as equações redutíveis às do 2.º grau, estudar as equações biquadradas e as irracionais simples.
21 — Segmentos proporcionais; semelhança de polígonos; seno, coseno e tangente de um ângulo.	21 — Relacionar com o estudo das razões e proporções. Empregar a tábua de valores naturais.
22 — Relações métricas nos triângulos. Lei dos senos e lei dos co-senos.	22 — Dar ênfase ao Teorema de Pitágoras pelo seu valor histórico na introdução dos números irracionais; construção geométrica dos irracionais quadráticos.
23 — Relações métricas no círculo; polígonos regulares.	23 — Ressaltar as construções geométricas de polígonos regulares.

24 — Áreas dos polígonos; medida da circunferência e área do círculo.

24 — Noção do número π; ressaltal seu valor histórico, bem como as diferentes fases de seu cálculo (pelo homem e pelos computadores).

*

ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O COLÉGIO.

Orientação e Sugestões para o seu Desenvolvimento.

INTRODUÇÃO.

Seguindo a mesma orientação sugerida para o desenvolvimento dos 24 itens sôbre assuntos mínimos de um programa de Ginásio, são agora apresentados mais 18 itens destinados para o Curso Colegial em 3 anos. Atendendo, novamente a flexibilidade do currículo que deve prevalecer no ensino dos diversos assuntos, o professor poderá programar o número de itens que achar mais conveniente por série de Colégio.

Como caráter de sugestão e atendendo-se as razões já expostas (programa do Ginásio), poder-se-ia desenvolver, em classes normais, 6 itens por série.

Não é preciso ressaltar que, nas sugestões que acompanham os itens, de acôrdo com o que já foi iniciado no programa do primeiro ciclo, continuarão presentes — e agora com mais intensidade — aquêles conceitos que têm caracterizado a modernização da linguagem Matemática dentro do espírito de unificação de seus diversos assuntos, tais como o de conjuntos e operações, estruturas (de ordem,, algébricas, topológicas), amparadas com uma notação mais ampla de símbolos lógicos.

ASSUNTOS MÍNIMOS.

1. — Função do 2.º grau. Estudo completo do trinômio do 2.º grau e aplicações.

2. — Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Aplicações trigométricas nos triângulos.

SUGESTÕES.

1. — No estudo do trinômio, ressaltar o aspecto gráfico e nas aplicações, as inequações do 2.º grau.

2. — Ressaltar a significação da medida de arco e de ângulo em radianos. No estudo das funções, destacar as relações entre elas e as propriedades de simetria e pe-

riodicidade. Introduzir a noção de vetor no estudo do teorema das projeções. Examinar os casos simples de resolução de triângulos.

3. — Identidades, equações e inequações trigonométricas simples.

3. — Discussão das soluções, levando em conta a periodicidade e simetria.

4. — Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço. Paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.

5. — Diedros, triedos e ângulos poliédricos.

6. — Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas.

7. — Corpos redondos.

4. — 5. — 6. — 7. — Desenvolver o assunto em encadeamento lógico, ressaltando as propriedades fundamentais intuitivas e as demonstráveis, procurando destacar os diversos métodos de demonstração. Aproveitar as idéias operacionais de conjuntos. No estudo da esfera, introduzir os triângulos esféricos, com vistas a um exemplo de Geometria não Euclideana.

8. — Transformações pontuais; translação, rotação, simetria e homotetia.

8. — Ressaltar as estruturas definidas através dêsses tipos de transformação.

9. — Noção de seqüência ou sucessão de números reais. Progressões.

9. — A noção de seqüência deve proceder a de progressões que constituem um caso particular. Após o conceito e notações, seguem-se as operações com seqüências, onde devem ser examinadas as estruturas algébricas (grupo aditivo e espaço vetorial). A idéia de convergência, preferìvelmente, será dado no caso das progressões geométricas.

10. — Noção de potência no campo real. Operações inversas. Logarítimos.

10. — Partir das propriedades de radicais para representá-los, agora, como potências de expoente irracional. Resumir a estrutura algébrica do campo real. No estudo das operações inversas aparecerá a logaritmação. Ressaltar a aplicação dos logarítimos à resolução de equações exponenciais.

11. — Análise Combinatória e aplicações.

11. — Estudar os vários tipos de agrupamentos que, eventualmente, podem ser tratados através de noções de probabilidade. Aplicações às potências de binômios (Newton) e polinômios (Leibnitz).

12. — Elementos de Geometria Analítica Plana. Equação da reta e aquação da circunferência. Equações reduzidas das cônicas.

12. — Recordar, sistematizando, os elementos de Geometria Analítica, já introduzidos. Exame das equações através de subconjuntos de pontos do plano. Poder-se-ia iniciar, inclusive, um tratamento de Geometria Analítica com Álgebra Vetorial.

13. — Medidas dos sólidos geométricos.

13. — Introdução do postulado de Calvallieri para o estudo das medidas dos sólidos.

14. — Sistema de equações lineares. Noção de matrizes: aplicações.

14. — O estudo pode ser feito através da teoria dos determinantes ou preferìvilmente, pelas matrizes. Ressaltar as estruturas algébricas das operações com matrizes (anel e espaço vetorial).

15. — Números complexos: operações fundamentais; propriedades.

15. — Ressaltar a estrutura algébrica (corpo).

16. — Estudo dos polinômios.

16. — Exame da estrutura algébrica (anel). Destacar a operação de divisão de polinômios e princípio de identidade, derivada de um polinômio definida pela fórmula de Taylor.

17. -- Equações algébricas.

17. — Admitir o teorema fundamental da Álgebra: dedução das conseqüências. Pesquisa de raízes inteiras e racionais. Estudar, eventualmente as equações do 3.º e 4.º graus, recíprocas e binômias.

18. — Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de cálculo integral; aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

18. — Dar noções intuitivas, que permitam deduzir as principais propriedades, que serão utilizadas nas aplicações a outras ciências.

*

III. — Sessão do dia 4-9-1963.

DEMONSTRAÇÃO PRÁTICA COM UMA CLASSE DE 1a. SÉRIE GINASIAL DO GINÁSIO ESTADUAL DE MARÍLIA.

Foi ensinada, em período normal de uma aula: **Maneira moderna de resolver problemas das quatro operações fundamentais, a partir de estrutura e de sentenças matemáticas.**

Nessa aula foram destacadas as diversas estruturas que se apresentam nos problemas, de um modo geral. Fêz-se uso das sentenças matemáticas relativas aos problemas propostos e tôda classe praticou a nova abordagem, tendo mostrado, através de tais exercícios a fixação dos conhecimentos que adquiriram.

Diversamente do que se faz costumeiramente, foram os alunos que formularam a maioria dos problemas de dadas estruturas. Destacaram com isso, redações próprias das idades em que se encontram, mostrando assim maior interêsse por um assunto tradicionalmente árido, quando ensinado pelos processos clássicos de 50 anos passados.

MATEMÁTICA MODERNA NO ENSINO

por

Osvaldo Sangiorgi

Separata de

Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática

vol. 7, n. 3

outubro de 1964

MATEMÁTICA MODERNA NO ENSINO

FELIZ ENCONTRO ENTRE A LÓGICA, A PSICOLOGIA E A PEDAGOGIA *

OSVALDO SANGIORGI, Professor da Universidade Mackenzie, São Paulo

Já se disse, com muita propriedade, que entre os maiores impactos sofridos pela Humanidade, com relação aos problemas universais, destacam-se :

a) A mudança do sistema geocêntrico para o heliocêntrico, isto é, quando a Terra deixou de ser o centro do Universo. Até Copérnico — nos idos de 1.500 — todos os grandes vultos de então, papas, imperadores, homens de posição e, mesmo, qualquer pessoa do povo, acreditavam, de um modo geral, que a Terra estivesse parada, como centro do Universo, em tôrno dela girando tudo o mais. Quem negasse tal princípio era considerado herético e "iria para o inferno".

Essa era a bela herança que o velho Ptolomeu legara à Europa. Copérnico, como católico (era, inclusive, sacerdote), acreditava no Inferno, porém não cria que uma pessoa pudesse ser condenada sòmente por usar os *olhos* e a *razão.*

b) O abalo que, em 1.860, a conservadora Inglaterra e a maioria dos povos civilizados sofreram com a publicação das obras de Charles Darwin — *A origem das espécies* e a *Descendência do Homem,* apontando um caminho científico para o problema das *espécies.*

c) A efetiva revelação feita por Sigmund Freud, em 1.885, do complexo *universo do subconsciente,* quando evidencioua existência de uma de uma parte da psiquê *fora* do campo da consciência.

Guardando muita semelhança com êste último "impacto', foi divulgada aos estudiosos de nossa época, a partir de 1.940, uma nova dimensão no tratamento do *universo-mente,* inato em cada um de nós.

Um grupo de gigantes intelectuais — em nome da *Psicologia,* e comandado por um dos maiores psicologistas contemporâneos, Jean Piaget; da *Lógica Matemática,,* envolvendo figuras de expressão, como Ewald Beth, Leo Apostel, Wolfe Mays; da *Matemática* pròpriamente dita, com a indumentária moderna, introduzida pelo notável *Grupo Bourbaki* (Jean Dieudonné, André Weil, André Lichnerowicz, Gustavo Choquet, Delsarte, e outros) e da *Pedagogia,* com os famosos trabalhos de Jacques Rustchmann e supervalorizada por Caleb Gattegno — cuja dedicação integral à transmissão da Matemática fêz com que deixasse a cátedra de Matemática Superior da Universidade de Londres, para se consagrar ao problema

* Extrato do 1.º Seminário realizado pelo Prof. Sangiorgi, em 27/4/1964, a convite do Departamento de Educação, da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo.

de encontrar a melhor maneira de levar às crianças as verdadeiras mensagens de que é portadora a Matemática — vem realizando um extraordinário trabalho de pesquisar o que *de comum* participa dessas ciências.

Fundamentando cientìficamente os resultados obtidos pelo feliz encontro da Psicologia, Lógica Matemática e Pedagogia, conseguiu êste Grupo obter informações preciosíssimas, que causaram uma verdadeira *revolução* no ensino da Matemática de todo o mundo civilizado, principalmente nos cursos primários e secundários, onde os jovens estudantes recebiam, via de regra, com certa prevenção "hereditária", tudo aquilo que em nome da Matemática lhes era oferecido.

A chamada *Matemática Moderna,* que numerosos grupos americanos e europeus têm divulgado com êxito invulgar nas escolas primárias e secundárias (isso porque o ensino superior já gozava dêsse privilégio) de seus países nos últimos cinco anos, chegou também até nós, graças ao trabalho ininterrupto e eficiente, de quase três anos, do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), que congrega em seu seio professôres das três Universidades de São Paulo (U.S.P., Mackenzie e Católica) e de outros estabelecimentos de ensino superior do país. Através de Sessões de Estudos e de Aperfeiçoamento, destinados a professôres secundários e, ùltimamente, também a professôres primários, o GEEM, em convênio com o Ministério de Educação e Cultura e a Secretaria de Educação de São Paulo, tem propiciado aos professôres de São Paulo e de outros Estados esplêndidas oportunidades para restaurarem seus conhecimentos em bases modernas, bem como, apresentando-lhes novas técnicas de abordagem do ensino da Matemática, tidas como fundamentais na formação de qualquer estudante. Cêrca de mil professôres já passaram pelos Estágios do GEEM, que lhes têm oferecido uma visão geral do caráter estrutural da Matemática de hoje, através da *Teoria dos Conjuntos,* do *Cálculo Proposicional* (dentro da Lógica Matemática), da *Álgebra Moderna.* Inclusive outros importantes setores do ensino brasileiro têm solicitado do GEEM colaboração, a fim de habilitarem-se em Matemática Moderna. Também nossa Academia Militar das Agulhas Negras recebeu, ainda êste ano, o 1.º Estágio do GEEM, destinado aos oficiais professôres do seu Quadro de Ensino, que pretendem modernizar a Matemática destinada aos jovens cadetes daquela Academia.

Assinalada a presença da *Matemática Moderna* nos cursos médios brasileiros, ressaltemos a sua gênese, apreciando alguns aspectos do já citado *feliz encontro* da Psicologia, da Lógica Matemática e da Pedagogia no âmbito universal, dentro dêste não menos feliz encontro patrocinado pelo Departamento de Educação — Setor de Pedagogia — da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, que, reunindo professôres representantes das diversas secções desta Faculdade, está refletindo entre nós a norma seguida atualmente pelos grandes Centros de Pesquisa de todo o mundo, no conduzir e discutir dos magnos problemas da Educação.

A rigor, o *Sistema Piaget* — como é conhecido — traz um isomorfismo com o Sistema Freud na revelação de um novo universo, pois o seu trabalho original — "Teoria intelectual e percptual do desenvolvimento" — projeta um novo esquema para estudar-se a mente: a Álgebra das Proposições, valendo-se, para tanto, de princípios fundamentais da Matemática. Na realidade, seguia com profundidade as idéias preconizadas pelo extraordinário irlandês George Boole, que, com o seu trabalho de 1854. — "Leis do Pensamento", pusera em evidência o comportamento das ações que compõem a inteligência como uma verdadeira 'álgebra do pensamento".

Na verdade, essa científica maneira de interpretar os fenômenos ligados à mente fêz com que uma série enorme de problemas fôssem acumulados em cada um dos campos específicos da Psicologia, da Lógica Matemática e da Pedagogia, à espera de que os estudiosos pudessem interpretar os magníficos resultados *comuns* a tôdas elas. Embora trabalhando com "personagens" diferentes, observava-se, com frequência, que o comportamento dos mesmos, em relação a um determinado Sistema, era idêntico, isto é, tinham a mesma *estrutura*. A palavra *estrutura* que vem sendo há dez anos a mais empregada em tôdas aquelas ciências revelou, como essência, a existência de um "fundo comum" a tôdas as disciplinas, que professôres e estudiosos em geral não mais podem ignorar, sob pena de não "falarem", e, o que é pior, jamais "entenderem" a linguagem empregada pelas crianças que, normalmente, se valem dessas *estruturas* para exprimirem nas atividades de que participam.

Em particular, começaram a ser ressaltadas as correspondências existentes entre as Estruturas Operatórias da Inteligência e as Estruturas Matemáticas (principalmente as denominadas pelo Grupo Bourbaki de "estruturas-mães": algébricas, de ordem e topológicas). Coisas curiosas começaram então a ser observadas no ensino : a chamada Matemática Superior, apresentada com unidade, através da linguagem dos *conjuntos* e que enfatizava as estruturas dos Sistemas estudados, era *mais fácil* de ser ensinada (ao lado de ser mais importante e mais atraente) do que a Matemática denominada Elementar, pois, tradicionalmente, desde os bancos escolares, nas poucas mensagens que podia transmitir, a Matemática vinha tão saturada de técnicas operatórias que, geralmente, apresentava sempre o trágico balanço: interessava a uns poucos e era odiada pela maioria !

Havia, pois, uma imperfeição lógica na chamada Matemática tradicional, principalmente por não usar a linguagem que a *estrutura mental* da criança queria "ouvir" e que só era falada devidamente — guardada a proporção — na Matemática Superior, estudada nas Faculdades de Filosofia, dentro do espírito bourbakista.

O ano que iniciou o "acêrto de contas" entre a Psicologia e a Lógica Matemática foi o de 1.952, quando da realização, em Rocheton, França, do "Colóquio de la Rochette de Melun", consagrado ao estudo das Estruturas Matemáticas e as Estruturas Psicológicas. Primeiramente, com um "Seminário sôbre Estruturas Matemáticas", por Jean Dieudonné, e, a seguir, outro, sôbre "Estruturas Psicológicas", de Jean Piaget, ganhou corpo e forma a correspondência existente entre as *estruturas matemáticas* e as *estrturas operatórias da inteligência.*

Do êxito, sem precedentes, dêsse encontro intelectual, seguiram-se outros: em abril de 1953, no Luxemburgo, onde foram tratadas especìficamente as "Relações entre o ensino da Matemática e as necessidades da ciência moderna"; em julho de 1953, na Alemanha, "As relações entre o pensamento dos alunos e o ensino da Matemática"; em 1.954, na Holanda, "A matemática moderna nas escolas"; em 1.955, na Itália. "Uma pedagogia que liberta: o aluno frente à matemática moderna", todos eles guardando a mesma linha de importância e com a participação dos mais ilustres psicologistas, lógicos, matemáticos e pedagogistas contemporâneos.

Como consequência imediata dêsses encontros, foi fundada em 1.954 a "Comissão Internacional para o Estudo e o Aprimoramento do Ensino da Matemática", composta por um psicologista (Piaget), três matemáticos (Dieudonné, Lichnerowicz e Choquet), um lógico (Beth) e um dedagogista (Gattegno), que lançaram em 1.956 o livro *L'enseignement des mathématiques,* por todos os títulos uma preciosa amostra de seus trabalhos e revelando inclusive alguns aspectos de como se pode ensinar aos alunos das escolas médias a Matemática Moderna.

Uma outra importante consequência daqueles encontros — importantíssima pelos altos objetivos que encerra — foi a fundação, em 1.955, do "Centro Internacional de Epistemologia Científica" (CIEG), em Genebra. Dirigido por Piaget e contando com especialistas europeus e americanos em Psicologia, Lógica, Matemática, Física, Biologia e Sociologia, o CIEG tem se dedicado a: 1) analisar as questões psicológicas relacionadas com a Lógica, assim como a sua influência sôbre a comunicação e o desenvolvimento; 2) reconhecer um estado "psico-genético" através da epistemologia genética (definida por Piaget como o estudo dos estados sucessivos de uma ciência em função de seu desenvolvimento).

Na realidade, o Centro Internacional de Epistemologia Genética veio precisar as relações entre a epistemologia genética e as demais disciplinas, orientando-se no que há *de comum* entre elas. Realizou, assim, uma verdadeira *interciência* de instância superior, que buscava não sòmente relacionar as diversas disciplinas, como também, *criar,* através dessa correlação, um instrumento novo e poderoso, que resolvesse velhos problemas ensarilhados e pusesse em destaque outros, até agora subjacentes.

A tendência da *Interciência* não é ser uma superciência dirigente das demais, mas sim, fornecer subsídios para apreciar e reunir (e não perder, como sempre acontecia!) os fatos comuns às ciências, principalmente os relacionados com o mundo atual, onde fatos acumulados acêrca do comportamento do homem e da natureza estavam exigindo uma tomada de posição. Confrontando os resultados da Lógica Matemática (dentro das metas-linguagem técnicas) com os da Psicologia, foi possível ao CIEG iniciar estudos que conduzem a uma imagem verdadeira do homem moderno, no que respeita ao seu comportamento intelectual.

Uma série enorme de informações — que transcendem os limites específicos de uma determinada ciência (e quem poderia determinar os limites de uma determinada ciência?) — pode agora ser codificada e interpretada em contacto com outras esferas do conhecimento. Tais são os casos da: Lógica Matemática e as Ciências Físicas ou Biológicas; Cibernética e Psicofisiologia; certas Teorias Matemáticas e os grupos de ciência de Conduta Humana (Antropologia, Psicologia, Sociologia). Dessa forma, ficam creditadas aos estudantes de hoje — ressalvados os níveis de ensino em que se encontram — comunicações essenciais, provindas do CIEG, para sua tomada de conhecimento e consequente participação no mundo em que vive, como :

1. uma concepção da origem natural e a evolução progressiva dos principais conceitos matemáticos;
2. uma atitude de crítica lógica com respeito ao rigor do raciocínio e da precisão de linguagem;
3. uma compreensão sôbre a participação (agora mais do que nunca) da Matemática, mediante as suas estruturas, em outras disciplinas;
4. uma participação (agora num segundo estágio) no estudo dos problemas mais importantes da Matemática Pura e suas aplicações, bem como, um conhecimento preciso da natureza e da importância prática do pensamento axiomático.

Enriquecendo os altos objetivos peculiares a uma Faculdade de Filosofia, sugere-se ainda que deva ser colocado ao alcance de seus estudantes que se consagram às Letras e às Ciências Sociais, mais que à Matemática e à Física, qualquer um dos aspectos mais elementares dos novos ramos da moderna Matemática, incrementados no domínio das Ciências Sociais e do comportamento humano, como: os computadores eletrônicos; a teoria da informação; a álgebra dos conjuntos, a álgebra das proposições e a álgebra de Boole, com suas aplicações; as programações lineares; a teoria dos jogos estratégicos; as estruturas políticas e as preferências sociais e individuais.

A ilustre pedagogista e matemática francesa Lucienne Felix, mostrou, em diversos seminários realizados em 1.962 no GEEM, o vigor com que as crianças francesas e belgas, desde o Jardim da Infância "falam" a linguagem usada pela Matemática Moderna. Os notáveis resultados alcançados pelos Estados Unidos, através de seus Grupos de Estudos (SMSG, UICSM, UMMaP, BCMI, BSTCEP, NCTM, MPi), confirmam o alto índice em que se encontra atualmente o ensino da Matemática Moderna nos cursos primários e secundários daquela grande República do Norte. Basta ver que, durante o ano letivo de 1960-61, o SMEG (School Mathematics Study Group) preparou, através de Cursos de Férias, 500 professôres para trabalharem com 50.000 alunos de escolas médias, distribuídos em 45 estados; o UICSM (University Illinois Committee School Mathematics), por sua vez, preparou 200 professôres para desenvolverem Matemática Moderna a 20.000 alunos, distribuidos em 25 estados; a UMMaP (University of Maryland Mathematics Project) habilitou 100 professôres para o ensino da Matemática Moderna a 5.000 alunos da Escola Primária.

Estão assim revelados os primeiros resultados do *feliz encontro* da Psciologia, Lógica Matemática e da Pedagogia: uma nova Matemática vem de ser ensinada às crianças, não mais como "bicho-papão" mas como uma "boa amiga" que é, essencialmente, quando "fala" a linguagem da estrutura mental inata na criança.

No segundo Seminário será estudada, com pormenores, a correspondência existente entre as Estruturas Operatórias da Inteligência e as Estruturas Operatórias da Inteligência e as Estruturas Matemáticas.