Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática*

JANECLER APARECIDA AMORIN COLOMBO**
CLÁUDIA REGINA FLORES***
MÉRICLES THADEU MORETTI****

Resumo

A reflexão sobre o como se dá a construção dos conceitos em matemática e o pensamento cognitivo envolvido é um processo essencial para a organização de atividades de ensino. Por isso, este artigo procura analisar como é articulada a questão da referência na representação semiótica, tomando como fundamento teórico os estudos de Duval, e na noção de campo conceitual desenvolvida por Vergnaud. Para tanto, estuda-se o funcionamento da estrutura tríade envolvida na questão da representação semiótica e procura-se inferir sobre o que é a referência nesse processo. Pretende-se com isso, auxiliar na discussão acerca da constituição da linguagem matemática no âmbito das ciências com atributos para a educação matemática.

Palavras-chave: representação semiótica; referência, aprendizagem matemática.

Abstract

Reflection on how mathematical concepts are created and how the cognitive thinking involved takes place is an essential process for organizing teaching activities. Hence, the goal of this study is to analyze how the reference question is articulated in semiotic representation, based on the studies conducted by Duval and on the notion of conceptual field developed by Vergnaud. To do so, the working process of the triadic structure involved in semiotic representation is studied and an attempt to infer

---

* Este trabalho teve o apoio do CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

** Professora de Educação Matemática da UTFPR/Campus Pato Branco e aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC. E-mail: janecler@ced.ufsc.br, jaac@pb.cefetpr.br, janecler@superig.com.br

*** Professora do Departamento de Metodologia de Ensino/CED/UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC. E-mail: crf@mbox1.ufsc.br

**** Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/PPGECT/CED/CFM/UFSC. E-mail: mericles@mtm.ufsc.br

the meaning of the reference in this process is made. The objective is to contribute to the discussion concerning the constitution of mathematical language in the field of sciences as attributed to the mathematical teaching.

Keywords: *Semiotic representation; reference; mathematical learning.*

Introdução

Muitos psicólogos cognitivistas, com o objetivo de compreender as capacidades, os processos, as estratégias e as representações mentais básicas e subjacentes ao comportamento inteligente, apresentado pelos alunos em situação de aprendizagem matemática, têm se dedicado a pesquisar acerca da representação semiótica enquanto forma de se expressar o objeto matemático.

Dessas contribuições, destacamos a de dois psicólogos cognitivistas franceses – Raymond Duval e Gerard Vergnaud – que concentram seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os seus aspectos cognitivos, apresentando definições interessantes e não excludentes a respeito da conceitualização em matemática. Entendemos a conceitualização, aqui, no contexto da aprendizagem da matemática escolar, como o processo de apreensão dos objetos matemáticos, partindo de uma visão antropológica cultural, em que se assume a "construção do conceito", tal qual em D'Amore (2005). Nessa perspectiva, um conceito poderia ser pensado como um enunciado, fruto das reflexões culturais da humanidade, usado para explicar e/ou descrever as ações humanas sobre um objeto que o referencia. Temos colocado, assim, o aspecto imprescindível da referência para a construção de um conceito, seja no aspecto de sua produção científica (epistemológico), seja no aspecto de sua aprendizagem escolar.

Para Duval, a conceitualização acontece quando o sujeito é capaz de mobilizar, instantaneamente, um registro de representação semiótica do objeto matemático, escolhido entre os muitos que se apresenta, de modo a favorecer a resolução de um dado problema da forma mais econômica[1] possível. Essa condição é denominada pelo autor coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. A escolha, dentre os vários registros, é que levaria à distinção "essencial" do objeto matemático em

1 O termo econômico é entendido aqui como a maneira mais fácil e simples de operar uma dada representação de um objeto matemático.

relação ao seu registro de representação semiótica, ou seja, a distinção entre o representante e o representado.

Da mesma maneira que Duval, Vergnaud se apóia em operações cognitivas do pensamento para entender como se processa a conceitualização. No entanto, trata diferentemente a noção, quando assume que um conceito só pode ser definido ao se considerarem mutuamente três conjuntos que formariam um tripé: situações, invariantes e representações.

Essas duas concepções a respeito da conceitualização, logo, da aprendizagem dos conceitos, serão tratadas neste artigo com enfoque na questão da referência[2] ao conceito matemático. E, para isso, será preciso compreender também a funcionalidade das representações semióticas *em* matemática *para* a aprendizagem da matemática. Essa funcionalidade se traduz em termos de relações instituídas na tríade que passa a representar o "signo" na modernidade em muitas teorias semióticas.

Como a matemática tem uma natureza muito específica como ciência e como objeto de ensino nas escolas, estudar sobre "o que" é a referência aos conceitos pode determinar um entendimento maior sobre os processos cognitivos de aprendizagem dos alunos. E tal entendimento pode auxiliar aos professores, pesquisadores e interessados em Educação Matemática na organização de atividades de ensino que possibilitem uma aprendizagem global.

Sendo assim, o presente artigo se organiza em três seções. Na primeira, destacamos o papel da representação no processo de conceitualização em matemática, estabelecendo que os sistemas de signos são constituídos dentro de uma perspectiva histórico-cultural e destacando as relações estabelecidas na tríade semiótica. Nas seções seguintes, trataremos, justamente, da questão da referência sob o ponto de vista dos autores mencionados, a partir da análise do funcionamento da tríade semiótica na perspectiva de Duval e de Vergnaud. E, por fim, apontamos as direções finais destas reflexões[3].

---

2 Na semiologia, referência é o conceito, informação ou imagem mental que o signo transmite ao seu usuário; é o que faz a mediação entre o signo (grandeza semiótica) e o referente (grandeza não semiótica) no ato de referir; em geral, é algo que se refere ou designa outra coisa, ou atua como conexão entre duas coisas (Wikipedia, 2007).

3 Parte destas reflexões são oriundas dos trabalhos desenvolvidos para a composição da tese de doutorado de Janecler A. A. Colombo, no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC, sob a orientação do Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti.

Representação semiótica para conhecer e aprender matemática

O homem sempre procurou representar[4] o mundo a sua volta, seus pensamentos, suas experiências, suas idéias, as coisas, as situações. O homem primitivo usou primeiro a figura, os desenhos, depois inventou a linguagem falada. No processo da produção de conhecimentos, criaram-se os símbolos e a linguagem escrita. O homem moderno expandiu os símbolos, refinou a linguagem e criou sistemas de representação, estabelecidos como formais e munidos de regras. Cada qual, em seu tempo, imerso em sua cultura, tratou diferentemente o modo de representar e de pensar o sistema de representação.

O homem representa para designar, para comunicar, conhecer e aprender. Enfim, o ato de representar é presente na atividade cognitiva. Lévy (1993) discute que a capacidade cognitiva humana compreende três grandes faculdades elementares: a de perceber, a de imaginar e a de manipular. E é nesta última aptidão que encontramos a *representação*, ou melhor dizendo, a capacidade de *manipular representações* como sendo a mais fundamental e abrangente das capacidades cognitivas, uma vez que elas nos possibilita o acesso a todo e qualquer conhecimento, motor do desenvolvimento humano.

Para Lévy (ibid.) essa capacidade de manipular ou operar seria a mais especificamente humana das faculdades, uma vez que

> (...) Este poder de manejar e de remanejar o ambiente irá mostrar-se crucial para a construção da cultura, o pensamento lógico ou abstrato sendo apenas um dos aspectos, variável e historicamente datado, desta cultura. Na verdade é porque possuímos grandes aptidões para a manipulação e bricolagem que podemos trafegar, reordenar e dispor parcelas do mundo que nos cerca de tal forma que elas acabem por representar alguma coisa. Agenciamos sistemas semióticos da mesma forma como talhamos o sílex, como construímos cabanas de madeira ou barcos para navegar, os sistemas semióticos para representar. (Ibid., p. 158)

4 Utilizamos esse termo – representar – neste artigo como "o ato de estar em lugar de, isto é, estar numa tal relação como um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro." *Dictionary of Philosophy and Psychology,* vol. 2, p. 464, citado em Peirce (2000).

Isso significa que os processos cognitivos estão ligados aos processos lingüísticos, e, portanto, semióticos. A utilização de signos, de simbologias para representar os pensamentos, as idéias e os conhecimentos fornece elementos essenciais no desenvolvimento de uma determinada cultura, uma vez que esses signos são elaborados pelo homem num momento histórico datado e específico, e que atende a características e necessidades próprias daquele grupo cultural.

Nesse sentido, considera-se que a representação é imprescindível na formação e construção de conhecimentos, uma vez que o conhecimento é veiculado e limitado pelas representações. Limitado porque, para se ter conhecimento, é preciso que o objeto do conhecimento esteja em presença do sujeito do conhecimento – é preciso que o objeto do conhecimento seja dado a conhecer, o que ocorre por meio das representações. Estas possibilitam o acesso aos objetos do conhecimento.

A produção de um corpo de conhecimentos, seja ele científico, empírico, formal ou informal, criado por determinada cultura, sociedade, implicado pela elaboração e utilização de representações, leva ao estudo da semiótica enquanto "ciência dos signos e dos processos significativos (semiose) na natureza e na cultura" (Nöth, 1995, p. 17). A semiótica passa a ser, na modernidade, a ciência que explica os processos das representações no ato de conhecer. Em conseqüência disso, as representações, enquanto parte concreta que relaciona o objeto do conhecimento e o sujeito que aprende, se estabelece como elemento importante no processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

A fim de suscitar a reflexão em torno das representações semióticas no processo de construção dos conhecimentos, vale compreender acerca dos signos. O conjunto de signos (parte material da representação das coisas) constituintes de uma dada cultura pode fornecer explicitações a respeito da caracterização de cada momento cultural situado no tempo e no espaço. Essa noção é desenvolvida por Luis Radford, ao relacionar semiótica cultural com cognição, através do que denominou Sistemas Culturais Semióticos (SCS). Esses sistemas, segundo Radford (2003, 2004), aliados à dimensão histórico-econômica, organizam e formatam a atividade dos indivíduos, ou seja, constituem a estrutura simbólica da cultura que determina os modos de pensar, agir e produzir conhecimentos desta. Isso significa dizer que os SCS também influenciam o modo de conceber e compreender o conhecimento matemático.

Desse modo, torna-se evidente que cada cultura e, muitas vezes na mesma cultura, possui, no interior de seus SCS, modos distintos de representar as coisas e de lidar com o conhecimento. Assim, nos detemos em um recorte específico de tempo e espaço, a cultura do mundo ocidental moderno, na qual se formou um modelo de pensamento regido pela representação, que passa a balizar a teoria dos signos, ocupando um lugar central na constituição dos saberes (Foucault, 1992).

O papel fundamental atribuído ao signo – como a parte material de um sistema de representação semiótica – na produção dos conhecimentos, ou seja, na própria gênese das idéias, nesse período, favorece o nascimento de teorias semióticas que abarcam várias áreas do conhecimento, além da matemática. Dentre essas, as idéias de Peirce (1839-1914) que propunham uma definição e uma classificação rigorosa dos signos, baseada em sua visão pansemiótica (Nöth, 1995) do mundo e condizentes com sua filosofia.

O signo passa a ser encarado numa relação ternária, que envolve o objeto (a coisa representada), o símbolo (sinal utilizado para representar) e o interpretante (o conceito que o símbolo faz surgir na mente do sujeito, o significado). Isso significa dizer que, desde Peirce, passamos a representar o mundo a partir de signos que guardam uma relação mediadora entre o objeto e o sujeito. Sendo assim, para Peirce (2000), não se pode entender o signo fora de uma relação tríade genuína:

> Um signo ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto, não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia ... (p. 46)

Essa estrutura tríade aparece em muitas teorias semióticas, com algumas pequenas variações. O famoso triângulo de Ogden e Richards (1972) apud Eco (1974) e Netto (2001), que pode ser visualizado na Figura 3, mostra como a tríade relaciona os componentes para explicar o "significado" (Eco, 1974; Gómez, 2005), enquanto Peirce a utiliza para compreender o funcionamento do signo. No entanto, ao tentarmos compreender um ou outro, passamos, impreterivelmente, pela análise, tanto do signo quanto do significado, pelas relações constituídas entre os vértices desses triângulos. Isso se faz importante esclarecer, uma vez que o signo é o que objetiva a representação, ou seja, uma teoria geral do signo relaciona-se, fundamentalmente, a uma teoria geral da representação. E se essa faz parte do modo de conhecer ocidental, então, é necessário que se compreenda como se dá esse processo.

A definição de signo dada por Peirce pode ser então representada pelo esquema a seguir:

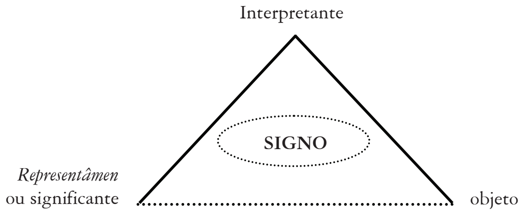


Figura 1 – Tríade de Charles Sanders Peirce
(Adaptado do Triângulo básico de Ogden e Richards, 1972)

Nessa relação, o signo aparece ligado aos seus três elementos – *representâmen* (ou significante), interpretante e objeto – e não pode ser pensado isoladamente. A linha pontilhada entre o significante e o objeto aparece por conta da não existência de relações causais diretas entre eles, o que já é diferente quando se trata das relações entre significante e interpretante ou entre objeto e interpretante.

No entanto, como Peirce faz uma divisão dos signos em símbolo, ícone e índice, há que se considerar esses dois últimos casos, donde a relação entre significante e objeto acontece de forma direta, podendo haver continuidade na linha que liga esses dois vértices. Isso porque os ícones são considerados signos que guardam uma relação com o objeto representado através de algum traço de similaridade e os índices são signos afetados diretamente pelo objeto – o girassol, por exemplo, é um índice, porque aponta para o lugar do sol no céu. Já os símbolos, são para Peirce (2000), signos arbitrários, instituídos. Em outras palavras, o símbolo está associado a um objeto por força de uma lei, uma convenção, uma idéia. E é por conta dessas disposições ou normas que o símbolo pode representar um objeto diferente dele.

O objeto que será representado, por sua vez, pode ser algo perceptível, concreto (uma coisa material) ou abstrato, uma entidade mental ou imaginária. Finalmente, temos o interpretante, que consiste no signo criado na mente do intérprete (o sujeito) pela mediação da relação triádica. Em outras palavras, é a imagem mental ou o conceito criado quando da mediação signo-objeto. Esse processo de comunicação e interpretação dos signos na mente do sujeito do conhecimento é denominado semiose.

Vejamos a funcionalidade da tríade semiótica de Peirce em um exemplo: temos o signo, a palavra /borboleta/ que nos remete ao objeto real (o animal invertebrado que convencionamos chamar borboleta); essa palavra cria, na mente do intérprete (o sujeito, nesse caso um possível leitor deste artigo), uma imagem mental, uma idéia sobre esse signo, que nada mais é do que outro signo – o interpretante; mas essa imagem mental só ocorre por conta das convenções já instituídas a respeito desse objeto. Como esse interpretante é também um signo do objeto, deverá criar um novo interpretante, mais perfeito do mesmo objeto, e isto *ad infinitum,* no processo da semiose.

Isso parece compreensível quando se trata de objetos perceptíveis, reais, concretos. Mas o que dizer dos objetos matemáticos? Como explicar o triângulo quando se têm objetos abstratos?

Em primeiro lugar, é preciso pensar sobre o que é um objeto matemático. Não existe consenso na comunidade de professores de matemática e nem de matemáticos a respeito do que seja um objeto matemático. Em diferentes posições filosóficas, como o logicismo, platonismo, formalismo e intuicionismo, por exemplo, podemos encontrar diferentes posturas sobre essa questão. O que parece, no entanto, permanecer na maioria delas é o fato de os objetos matemáticos serem considerados como objetos ideais – números, grupos, área, ponto, volume, conjuntos ... Ora, como não podemos trabalhar com objetos ideais, abstratos, isto é, com construtos mentais, parece óbvio que não há como prescindir das representações para acessar e apreender o objeto matemático.

A partir disso, assumimos então dois fatos: a existência ideal dos objetos matemáticos e a representação semiótica como forma de acessá-los na aquisição do conhecimento, no tratamento desses objetos e na apreensão deles. As conseqüências disso nos levam então a dizer que a distinção entre o objeto matemático e sua representação é um fato mais que necessário para a produção de novos conhecimentos, bem como para a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, como explica Duval (1993).

Podemos agora pensar na estrutura tríade de Peirce para representar um objeto matemático. Tomemos, por exemplo, o objeto matemático "reta". O triângulo ficaria assim formado:

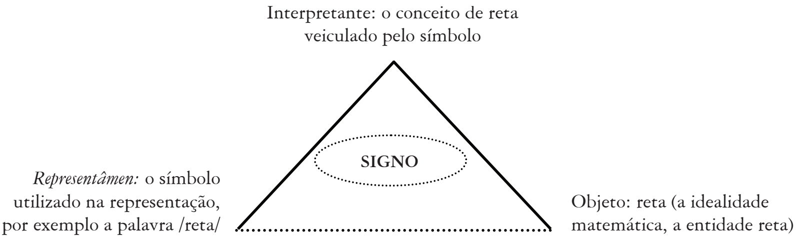


Figura 2 – Tríade de Peirce

Então, o objeto matemático – reta – é representado pelo signo, no caso, a palavra reta, que, por sua vez, determina o interpretante, ou seja, o conceito de reta. Em outras palavras, podemos dizer que o signo reta medeia a relação entre o seu objeto e o seu interpretante. O signo reta faz referência ao objeto reta.

Nessa relação, aparece o termo referência, utilizado no triângulo proposto por Ogden e Richards, que relaciona o símbolo (signo ou significante) a uma referência (conceito) e um referente[5] (objeto).

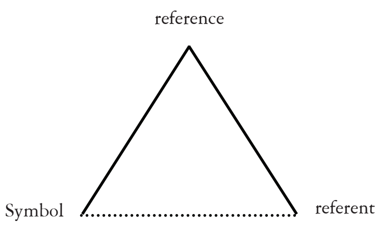


Figura 3 – Tríade de Ogden e Richards

5 Na semiologia, referente é o objeto real (um dos três componentes do signo – em semiótica); aquilo que o signo designa, contexto; o que um signo representa.

Frege, ao escrever os seus *Fundamentos da Aritmética*, forneceu contribuições importantes a respeito da natureza semântica da referência, do sentido de uma dada representação e do objeto como invariante de referência de muitas representações. Em seus estudos, Frege reconhece que a referência a uma determinada representação é o "conteúdo" dessa representação, que significa:

> (...) uma mera expressão, a forma de um conteúdo, não pode ser a essência da coisa, mas só o pode ser o próprio conteúdo. Mas qual é o conteúdo, a referência de "2.2^3+2"? a mesma que a de "18" ou de "3.6". A igualdade de $2.2^3+2=18$ exprime que a referência da seqüência de sinais à direita do sinal de igualdade é a mesma que a referência da seqüência de sinais à esquerda. Devo aqui me opor à opinião de que, por exemplo, $2+5$ e $3+4$ são iguais, mas não o mesmo. (1978, p. 36)

Aqui as representações $2.2^3 + 2$ e 3.6 fazem referência ao mesmo objeto matemático – o numeral 18. Isso significa que a referência a uma dada representação é o objeto do conhecimento, que pode ser um pensamento, um objeto sensorialmente perceptível, um nome próprio ou mesmo um valor de verdade, como é o caso do exemplo citado acima. Em respeito a isso, Frege diz que:

> A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a representação que dele temos é inteiramente subjetiva; etnre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é tão subjetivo quanto a representação, mas que também não é o próprio objeto. (...) Comparo a própria lua à referência; ela é o objeto da observação, proporcionado pela imagem real projetada pela lente no interior do telescópio, e pela imagem retiniana do observador. A primeira, comparo-a ao sentido, a segunda, à representação ou intuição. (Ibid. p. 65)

No exemplo citado sobre a lua, entende-se que a referência é relacionada a um objeto perceptível – a lua. Parece-nos que Frege assume o objeto como sendo a referência na representação. No entanto, quando analisamos a estrutura tríade e pensamos no funcionamento dos três elementos constitutivos do signo – símbolo (signo ou significante), referência (interpretante, conceito) e referente (objeto) – no processo da semiose, temos que a referência não pode ser *o* objeto, mas sim uma relação que diz respeito *a* ele, que *o* explica, que *o* conceitua.

Isso nos conduz a uma outra das importantes premissas de Frege, relacionadas à questão da referência na representação semiótica, que fornece uma forma estreita e necessária de unir os signos e objetos no processo do conhecimento: a distinção entre sentido e referência. Segundo ele, "Temos de distinguir entre sentido e referência. Certamente "2^4" e "4.4" têm a mesma referência, isto é, são nomes próprios do mesmo número, mas não têm o mesmo sentido. Daí terem "$2^4 = 4^2$" e "$4.4 = 4^2$", na verdade, a mesma referência, mas não o mesmo sentido, isto é, neste caso, não contêm o mesmo pensamento" (Frege, 1978, p. 44). Assim, as representações podem ter em comum a referência, mas não o sentido.

Esta última distinção se mostrou especialmente importante para o ensino da matemática, uma vez que, "(...) induziu a separar com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhido, da referência, que depende dos objetos expressos ou representados" (Duval, 1988, p. 7).

Então, o sentido de uma representação relaciona-se diretamente com o modo como essa representação é apresentada, ou seja, com o registro de representação semiótico escolhido. Essa ligação entre as representações (signos) e os objetos ocorre por meio da referência. A referência da representação semiótica pode ser considerada, então, como a idéia, a explicação ou o conceito que faz entender, surgir e apreender o objeto.

Além disso, o sentido da representação semiótica de um objeto relaciona-se com o conjunto de aspectos revelados pelos signos utilizados. Esses aspectos são fruto de uma construção historicamente datada de um determinado conhecimento, a exemplo do que nos mostra Bkouche (1988) a respeito da invenção da geometria analítica por Descartes e Fermat. Em outras palavras, o sentido de uma representação pode ser considerado como a possibilidade de interpretação produzida e inerente ao uso deste ou daquele signo.

Enfim, o fato de haver diferentes representações semióticas para denotar objetos do conhecimento mostra que a referência a um único objeto implica um esforço cognitivo por parte do sujeito para reconhecer esse mesmo objeto em suas distintas representações e distintos sentidos.

Registros semióticos e referência segundo Raymond Duval

Duval[6] toma as considerações a respeito da representação semiótica dos objetos matemáticos e da necessária distinção entre objeto e representação como fundamento para tecer suas idéias a respeito do problema da aprendizagem matemática. Para esse autor, a diversidade de representações semióticas se apresenta com um papel primordial na compreensão da matemática, inclusive criando um termo específico para tratar dos signos em matemática, os *registros* de representação semiótica. Ainda, para Duval (1993, p. 40) "é essencial, na atividade matemática, seja poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) no decorrer de um mesmo passo, seja poder escolher um registro antes que outro".

Para Duval, a utilização dos signos, das representações semióticas, é necessária para entender como se processa a compreensão em matemática. Nesse caso, a compreensão de um objeto do conhecimento, a partir do momento que temos construído/apreendido o conceito ao qual ele se refere – o que já denominamos conceitualização –, significa pensar nas condições do processo de conceitualização em matemática. Particularmente, para Duval, a conceitualização em matemática passaria, necessariamente, pela distinção entre o objeto matemático e sua representação. Isso significa que a estrutura tríade detalhada na seção anterior está no fundamento dos estudos de Duval sobre a aprendizagem matemática.

A Figura 4, a seguir, nos fornece uma compreensão do funcionamento do signo em matemática, segundo as idéias de Duval acerca da representação semiótica para aprendizagem matemática.

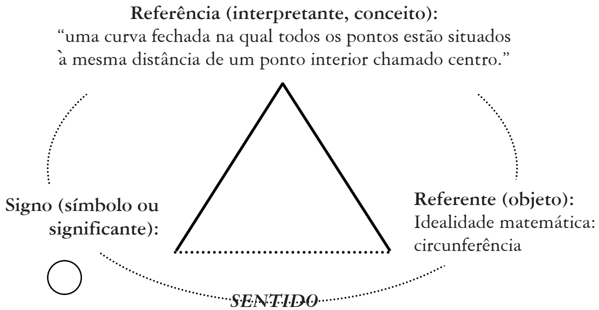


Figura 4 – Esquema da estrutura tríade em matemática

6 Pode-se consultar, por exemplo, Duval (1988, 1993, 1995, 1996, 1998a, 1998b, 2003).

No exemplo destacado no triângulo, a representação figural, ou seja, o desenho da circunferência, apresenta um determinado ponto de vista do conceito do que vem a ser circunferência, a representação exibe propriedades do objeto "circunferência" relacionadas à geometria descritiva, à imagem da circunferência. Se, por outro lado, utilizássemos o registro sob a forma de uma equação $\{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, a referência continuaria sendo a mesma, o conceito de circunferência. O referente, da mesma forma, é a idealidade matemática circunferência, mas o sentido é outro. O sentido veiculado por esse registro estaria mais relacionado à geometria analítica e às relações que podem ser estabelecidas a partir da equação que determina a circunferência. Por isso, o sentido está representado pela linha pontilhada que circunda a tríade. E também por isso a utilização de mais de um registro de representação semiótica para representar o objeto matemático pode ser um caminho para a compreensão integral desse objeto. Já que cada representação denota um sentido diferente, a complementação e o entendimento dos vários sentidos relacionados ao objeto permite criar situações que possibilitam condições mais apropriadas à aprendizagem da matemática.

Em Duval, não encontramos a diferenciação entre referência e referente, ao contrário, parece que ambos se confundem quando se trata do uso de registros de representação para determinar um mesmo objeto matemático ou os vários registros tendo a mesma referência do objeto. Isso nos leva a tal reflexão, uma vez que

> (...) $\frac{4}{2}, (1+1), \sqrt{4}$, são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto e que não possuem a mesma significação, uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade... Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência. (1988a, p. 8)

Podemos, a partir disso, entender a tríade em Duval da seguinte forma:

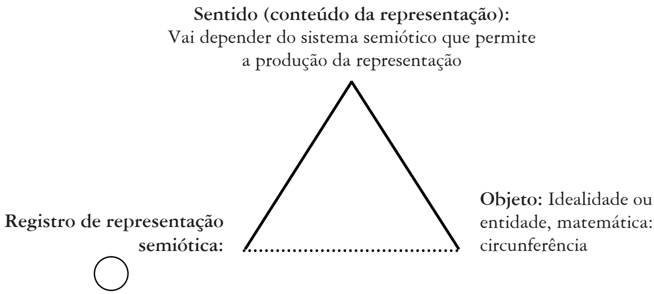


Figura 5 – Esquema da estrutura tríade em Duval

Um determinado registro de representação semiótica (o desenho da circunferência) refere-se ao objeto matemático (a entidade circunferência) e produz um sentido que vai depender das propriedades explicativas e características reveladas pelo registro utilizado. Desse modo, um registro de representação semiótico revela uma das facetas do objeto matemático a que está se referindo.

E é por conta disso que Duval defende que não há aprendizagem em matemática sem distinção entre o objeto matemático e sua representação. Essa distinção, por sua vez, se dá mediante o trânsito e a coordenação entre vários registros de representação que se referem ao mesmo objeto. Conforme Duval (1993, p. 40), "o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam, também, ser reconhecidos em cada uma de suas representações".

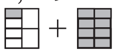
Um exemplo encontrado em Colombo, Flores e Moretti (2005 pode auxiliar no esclarecimento disso: , $\frac{1}{8}$, 0,125 são registros de representação semióticas distintos do mesmo objeto matemático produzidos segundo um sistema semiótico, munido de regras, convenções e códigos próprios.

A partir desses registros de representação semiótica, é possível realizar tratamentos operatórios específicos, justamente porque cada um deles fornece um determinado ponto de vista, um sentido diferente do mesmo objeto matemático, como já foi dito. Dessa maneira, implicará também um trabalho cognitivo diferente.

Quando operamos por exemplo $\frac{1}{8} + 1$, poderíamos pensar rapidamente em no mínimo três formas distintas para efetuar tal adição recorrendo às representações exemplificadas anteriormente, no entanto, mantendo-se a mesma referência, ou seja, o mesmo objeto matemático está evidenciado:

1. $\frac{1}{8} + \frac{8}{8}$;

2. 0,125 + 1;

3.  ;

Cada um desses exemplos demarca uma rede semiótica de representação distinta, na qual a referência é a mesma, mas não o *sentido,* e muito menos o custo cognitivo envolvido. Tomando por base essas constatações, podemos estabelecer a seguinte transposição: o registro simbólico fracionário $\frac{1}{8}$ exprime o número em função das propriedades de divisibilidade e razão; o registro simbólico decimal 0,125, em função das propriedades relativas ao sistema posicional decimal; e a representação a seguir guarda as relações que envolvem a idéia de parte/todo no registro figural contínuo: . Logo, apresentam sentidos muito diferentes.

Reportemos-nos agora ao funcionamento da tríade semiótica: todos esses registros têm como referente o numeral $\frac{1}{8}$, o que significa o objeto matemático, a idealidade abstrata e aceita culturalmente como indicativa do número racional $\frac{1}{8}$. Esse objeto (o numeral $\frac{1}{8}$) refere-se ao número racional $\frac{1}{8}$, ou seja, ao conceito de número racional que corresponde a uma quantidade contínua, grandeza, intensidade, portanto, à referência da representação 0,125 ou  e também da própria representação $\frac{1}{8}$.

O importante nisso é ver que a abstração requerida no ato cognitivo necessário para a compreensão de que todas essas representações têm como referência a mesma idéia e como referente o mesmo objeto matemático (número racional $\frac{1}{8}$) e que cada uma delas guarda um sentido diferente capaz de mobilizar tratamentos diferenciados, vai permitir apreender o objeto independentemente da representação que é utilizada.

Enfim, pode-se dizer que, para Duval, a funcionalidade da tríade semiótica, no que tange a aprendizagem da matemática, pode ser traduzida em termos de registros de representação semiótica (signo utilizado), objetos matemáticos (a referência) e o sentido (conteúdo do registro utilizado). Ou seja, o processo de conceitualização em matemática implica a coordenação de ao menos dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático, manifestada pela rapidez e pela aplicabilidade da atividade cognitiva de conversão.

Conceitualização e referência segundo Gerard Vergnaud

Nessa linha cognitivista, para compreender os processos de conceitualização e que mantêm estreita relação com as representações semióticas em matemática, encontramos os estudos de Gerard Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais.

De acordo com Vergnaud (1996), essa teoria teve seu início na busca de explicações sobre o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra. No entanto, comenta que não se restringe à matemática, pois tal teoria dos campos conceituais possibilita a localização e o estudo das continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual.

Partindo do pressuposto de que a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo, Vergnaud (ibid.) define campo conceitual como "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estrutura, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição". Uma vez que tais campos são definidos de forma abrangente e complexa, tem-se a percepção de que o domínio dos campos conceituais não acontece de forma simplificada, mas é desenvolvido durante um longo tempo, que é variável para cada indivíduo e dependente das experiências, maturidade e aprendizagem de cada um.

Para Vergnaud (1985, 1996), os campos conceituais são organizados e construídos a partir de três argumentos primordiais. O primeiro argumento é a idéia de que um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação; o segundo refere-se ao fato de que uma situação não pode ser analisada a partir de um só conceito e, finalmente, o terceiro argumento baseia-se na premissa de que a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo longo, que requer analogias, rupturas, mal-entendidos entre situações, concepções, procedimentos e significantes.

Vergnaud (1996) procurou unificar no conceito o componente construtivo, relacionando sempre os conceitos com ações, da seguinte forma: um conjunto de invariantes que conduzem às ações, implicando um conjunto de situações que formam o referente e um conjunto de esquemas postos em ação pelos sujeitos envolvidos nessas situações. Desse modo, entende o conceito como um tripé de três conjuntos: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas (*S, I, R*).

Neste tripé o conjunto *S* representa a realidade nas situações que dariam sentido ao conceito, o que considera a referência dos conceitos. É importante ressaltar que Vergnaud atribui às situações o sentido dado a esse termo na psicologia, ou seja, a idéia de "tarefa". O conjunto *I* relaciona-se ao conjunto de invariantes operatórios utilizados e reconhecidos pelos sujeitos para analisar e dominar as situações, garantindo a operacionalidade dos esquemas, isto é, o significado do conceito. Já o terceiro conjunto, *R*, é formado pelas representações simbólicas – formas pertencentes ou não à linguagem – que o sujeito disponibiliza e faz uso para entender e trabalhar com as situações, ou seja, é o significante do conceito (ibid.).

É possível, portanto, encontrar também em Vergnaud a tríade na definição que esse autor proporciona para o conceito:

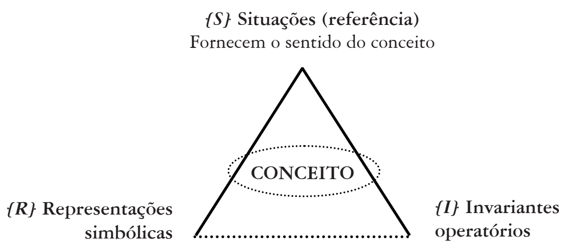


Figura 6 – Esquema da estrutura tríade em Vergnaud

Assim, podemos dizer que o elemento principal na tríade de Vergnaud não é o signo, mas sim o conceito. Para a compreensão de um conceito científico, há que se considerar a imbricação dos três conjuntos citados. Ou seja, os conceitos, representados por meio de símbolos, tomam sentido para um indivíduo em aprendizagem na medida em que este mobiliza os esquemas invariantes evocados pelas diferentes situações que o referenciam.

Aparece, então, uma nova organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações gerando ações e contendo regras. Isso significa que para Vergnaud (ibid.), não é possível reduzir o significado (ou sentido, considerando como em Duval e Frege) de um conceito nem aos significantes (as representações), nem às situações (tarefas). Sendo assim, Vergnaud propõe estudar os campos conceituais, uma vez que numa situação problema qualquer, nunca um conceito aparece isolado.

Enquanto Duval centra-se na questão das múltiplas representações dos objetos matemáticos, Vergnaud centra-se nas relações advindas e ocasionadas pelos conceitos. Duval não chega a tratar explicitamente sobre a noção de conceito, enquanto que para Vergnaud essa definição é extremamente importante como ponto de análise para sua teoria a respeito do processo de conceitualização.

Partindo dessas idéias, Vergnaud (1996) define a teoria dos campos conceituais como uma psicologia dos conceitos, que possui como primeira entrada as situações, e, como segunda, a dos conceitos e teoremas. Vê-se então a importância dada ao conjunto de situações na teoria de Vergnaud. A definição de campo conceitual das estruturas aditivas nos auxilia a dimensionar tal importância:

> O campo conceitual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. São assim constitutivos das estruturas aditivas os conceitos de cardinal e de medida, de transformação temporal por aumento ou diminuição (perder ou gastar 5 escudos), de relação de comparação quantificada (ter mais 3 bombons ou mais 3 anos que), de composição binária de medidas (quantos são ao todo?), de composição binária de medidas (quantos são ao todo?), de composição de transformações e de relações, de operação unária, de inversão, de número natural e de número relativo, de abcissa, de deslocação orientada e quantificada... (Ibid., p. 168)

Sendo assim, os exemplos colocados na seção anterior podem ser relacionados com um campo conceitual. Os registros de representação semiótica $\frac{1}{8}$,  e 0,125 formariam o conjunto *R* das representações simbólicas, do qual falamos anteriormente, ou seja, os significantes do conceito; os invariantes operatórios nesse caso seriam as propriedades e teoremas envolvidos no campo conceitual das estruturas multiplicativas e formaria então o conjunto *I*, como as propriedades do isomorfismo da função linear:

$$f(nx) = nf(x)$$
$$f(n_1 x_1 + n_2 x_2) = n_1 f(x_1) - n_2 f(x_2)$$

e a sua generalização à relações não inteiras as propriedades relativas ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas:

$$f(x) = a(x)$$
$$x = \frac{1}{a} f(x)$$

E o conjunto *S*, nesse caso, seriam as situações que forneceriam algum sentido ao conceito, por exemplo, problemas que relacionam a idéia de parte/todo, porcentagem.

Vergnaud (ibid.) define o campo conceitual das estruturas multiplicativas como

> [...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, cominação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, múltiplo e divisor, etc. (p. 168)

Assim, Vergnaud não analisa isoladamente, como o faz Duval, as representações $\frac{1}{8}$, 0,125 e , mas sim em termos de situações nas quais tais registros são as representações do conceito envolvido e que possibilitam o acesso ao significado dessas situações e a operacionalidade. E então esses registros estariam relacionados ao campo conceitual multiplicativo, já que representam números racionais. Nesse campo conceitual, o aspecto caracterizador central seria uma estrutura quaternária, uma vez que os problemas que envolvem a multiplicação e a divisão "implicam uma proporção simples de duas variáveis, uma relativamente à outra" (ibid., p. 174)

Vergnaud sublinha a importância da ação do sujeito em aprendizagem, nas situações, ou seja, nos domínios da experiência aos quais o conceito faz referência, como fonte e critério no processo de conceitualização em matemática.

Considerações finais

Vimos como dois psicólogos que centram suas preocupações no campo da aprendizagem matemática entendem o processo de conceitualização nessa área do conhecimento científico pela compreensão da funcionalidade da tríade semiótica, analisando, a esse respeito, como se configura a questão da referência aos objetos do conhecimento.

Partimos da perspectiva encontrada em Radford (2004) da semiótica cultural, de que a atividade humana produz o objeto matemático e que os signos – ou para usar o termo de Duval, registros de representação semiótica – seriam a forma cultural que representam o objeto. Sendo assim, parece-nos relevante a noção esboçada por Vergnaud acerca das situações (tarefas matemáticas) que referenciam o objeto conceitual matemático como fundamentais no processo de conceitualização, uma vez que elas fazem parte do domínio das atividades humanas e, portanto, constituem um dos aspectos da cultura.

Para Duval, estudar o processo de conceitualização em matemática é, necessariamente, considerar a conversão, os tratamentos e a coordenação entre os registros de representação semiótica. E, para isso, importante se faz a distinção entre objeto matemático e suas diferentes representações. Distinção essa que, segundo Duval (1988a), está intimamente relacionada ao princípio da substituição, essencial nos procedimentos de cálculo ou de dedução, uma vez que duas expressões que possuem a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra em uma frase ou fórmula, sem que o valor da verdade seja alterado. Então, para Duval o que se constitui a referência no processo de construção e aquisição dos conceitos é, justamente, o objeto conceitual matemático.

Em Vergnaud, também encontramos a importância relativa às representações, mas diretamente ligada à importância dada à linguagem:

> A linguagem tem, antes de mais, uma função de comunicação, e a aprendizagem da matemática é uma aprendizagem muito fortemente socializada. Mas essa função de comunicação não pode se exercer utilmente a não ser que se apóie nessa outra função de representação. (...) A linguagem e os símbolos matemáticos desempenham, pois, um papel relevante na conceitualização e na ação. Sem os esquemas e as situações, permaneceriam vazios de sentido. (Vergnaud, 1996, p. 191)

Para esse autor, estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no processo da aprendizagem ou na utilização desse conceito, requer a consideração de três planos ao mesmo tempo, ou seja, o das situações, o dos invariantes e o das representações. Os esquemas proporcionariam o vínculo necessário entre a conduta e a representação, colocando a relação entre situações e esquemas como fontes primárias da conceitualização. "Um conceito não assume a sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito" (ibid., p. 190). Ou seja, para Vergnaud, o que se constitui como referência no processo de conceitualização seriam as situações, as tarefas matemáticas que fornecem o sentido ao conceito.

A importância de definir e de estudar o papel da referência no triângulo semiótico acerca das representações semióticas para a aprendizagem da matemática escolar repousa no fato de que a matemática escolar não trabalha, necessariamente, sobre os objetos matemáticos, mas, pensando a aprendizagem da matemática, volta-se para um trabalho centrado sobre a referência desses objetos. Em outras palavras, ensinamos os conceitos que explicam os objetos.

A partir do contexto teórico apresentado, vislumbramos a necessidade de pesquisas que envolvam a sala de aula e que permitam a integração de análises referentes aos significados, atribuídos pelos alunos ao conhecimento matemático, através da exploração simultânea de um conjunto de situações referentes ao mesmo conceito matemático (ou objeto matemático) e das diferentes representações semióticas desse objeto e, ainda, a influência dos diferentes planos de representação na organização do pensamento e da projeção de significados de um para outro desses planos.

O ato de aprender torna-se, então, dinâmico e significativo para o aluno, que assume um papel participativo, quando, então, suas concepções, representações e erros são considerados, levando-se em conta a especificidade do seu trabalho cognitivo, implicando uma mudança de perspectiva epistemológica do professor, além de mudanças metodológicas e curriculares.

Referências

BKOUCHE, R. (1988). *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la geometrie*. Lille, IREM.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R. e MORETTI, M. T. (2005). Representações do número racional na formação de professores que ensinam matemática. *REREMAT*, pp. 41-48, UFSC (Disponível em www.redemat.mtm.ufsc.br).

D'AMORE, B. (2005). *Epistemologia e didática da Matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo, Escrituras.

DUVAL, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problémes de congruence. In: *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, v. 1, pp. 7-25. Irem de Strasbourg.

______(1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 5, pp. 37-65. Irem de Strasbourg.

______(1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna , Peter Lang.

______(1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v. 16, n. 3, p. 349-382.

______(1998a). Signe et objeto (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 6, p. 139-163. Irem de Strasbourg.

______(1998b). Signe et objeto (II): Questions relatives à l'anayse de la connaissance. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 6, pp. 165-196. Irem de Strasbourg.

______(2003). "Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática". In: MACHADO, S. D. A.(org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP, Papirus.

ECO, H. (1974). *As formas do conteúdo*. São Paulo, Perspectiva.

FOUCAULT, M. (1992). *As palavras e as coisas: uma arqueologia das ciências humanas*. 6 ed. São Paulo, Martins Fontes.

FREGE, G. (1978). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo, Cultrix.

GÓMEZ, W. S. (2005). El significado de objetos en el aula de matemática. *Revista Pedagógica*, Caracas, v. XXVI (jan.-abr.), n. 75, pp.131-164.

LÉVY, P. (1993). *As tecnologias da inteligência*. Rio de Janeiro, Editora 34.

NETTO, J. T. C. (2001). *Semiótica, informação e comunicação: Diagrama da Teoria do signo*. 5 ed. São Paulo, Perspectiva.

NOTH, W. (1995). *Panorama da Semiótica: de Platão a Peirce*. São Paulo, Annablume.

______(1996). *A semiótica no século XX*. São Paulo, Annablume.

OGDEN, C. K. e RICHARDS, I. A. (1972). *O significado de significado.* Rio de Janeiro, Zahar.

PEIRCE, C. S. (2000). *Semiótica*. São Paulo, Perspectiva.

RADFORD, L. (2003). On the epistemological limits of lenguaje. Mathematical Knowledge and social pratice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, v. 52, n. 2, pp. 123-150. Disponível em http://laurentian.ca/educ/Iradford//limitslg.pdf > Acesso em 04 jan 2007.

______(2004). Semiótica Cultural y Cognição. In: Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Tuxtla Gutiérrez. Luis Radford's Web Page. Disponível em: http://laurentian.ca/educ/Iradford/Tuxtla3.pdf Acesso em 04 jan. 2007.

VERGNAUD, G. (1985). Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Tradução de Ana Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. *Revista Psychologie Française*, n. 30, nov.

______(1996). "A Teoria dos Campos Conceituais". In: BRUN, J. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa, Horizontes Pedagógicos.

WIKIPÉDIA. Dísponível em: http://es.wikipedia.org/wiki,2007 Acesso em 02 fev. 2007.

Recebido em jun./2007; aprovado em nov./2007.