UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CURSO DE LICENCITURA EM MATEMÁTICA

Geraldo Campos

MODELOS PIONEIROS COM DINÂMICA POPULACIONAL: Uma breve análise

Florianópolis - SC

2019

Geraldo Campos

MODELOS PIONEIROS COM DINÂMICA POPULACIONAL: Uma breve análise

Trabalho Conclusão do Curso II de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Orientador: Prof. Dr. João Arthur de Souza

Florianópolis - SC

2019

AGRADEDECIEMNTOS

A Deus, por ter mostrado aos homens, tamanho do seu amor, através de Jesus Cristo.

Aos meus familiares, que pacientemente suportaram minha ausência e comemoram cada conquista comigo.

Ao meu orientador professor Dr. João Arthur de Souza, pelo apoio, orientações valiosas, não apenas para o trabalho aqui elaborado, mas também para a vida.

Em especial às professoras Dr. Silvia Martini de Holanda e Dr. Sônia Palominio, por suas correções, orientações e paciência.

A todos os professores, pela mínima ou suprema colaboração em nosso aprendizado.

RESUMO

O pressente trabalho exibe uma análise quantitativa e qualitativa dos modelos populacionais pioneiros evidenciando as mudanças, apontando algumas contribuições das equações diferenciais, para isso usa-se da metodologia de pesquisa integrativa, com uma busca em bases de dados de artigos, livros e bases de teses e dissertações. É trabalhado uma abordagem histórica sobre seu desenvolvimento, assim como a contribuição de alguns matemáticos, evidenciando as mudanças propostas no tempo. Dentre as perspectivas de análises a serem trabalhadas, resultou na seleção dos modelos de Malthus (1798), Verhulst (1838) e Montroll (1971), cuja abordagem está mais direcionada a descrever fenômenos de crescimento populacional humano. Como resultado é evidenciado a evolução ou mudanças necessárias dos modelos, configurados para uma representatividade mais adequada dos comportamentos populacionais.

Palavras-chave: *Modelo de Malthus, Modelo de Verhulst, Modelo de Montroll.*

SUMÁRIO

Lista de figuras

Lista de tabelas

1. Introdução

Muitos dos princípios ou leis que regem o comportamento do mundo físico são proposições ou relações envolvendo as taxas e variações, princípios estes suportados pelas equações diferenciais (Boyce, 2012, p. 2). As equações diferenciais se configuram em uma das ferramentas mais importantes para se modelar fenômenos naturais, cujas variáveis estão sujeitas as variações ao longo do tempo, podendo ser aplicadas em diversas áreas.

As equações diferenciais foram estendidas para as mais diversas áreas do conhecimento, podendo-se mencionar a dinâmica de populações, propagação de epidemias, a datação por carbono radioativo, citado por Thomas, 2013, além disso Teixeira, 2013 também cita a exploração de recursos renováveis, a competição de espécies, citado em economia.

Na medida em que as necessidades do espírito humano foram se tornando mais complexas, cresceram as carências por aperfeiçoar o processo de compreensão do mundo. (Simonato, 2010). Na impossibilidade de lidar diretamente com complexidade do mundo, o homem tem se mostrado cada vez mais hábil na criação de relações matemáticas para representação e solução de sua interação com esse mundo.

Nessas relações matemáticas as taxas são geralmente derivadas, e assim essas equações resultantes que envolvem derivadas acabam por ser equações diferenciais. E dentro do universo de aplicabilidade das equações diferenciais, destacam-se os modelos dinâmicos populacionais que podem prever crescimento ou declínio das espécies em um ambiente.

Esses modelos dinâmicos populacionais vêm sendo aprimorados com o passar do tempo e descrevem cada vez melhor a realidade, principalmente quando usados os recursos computacionais. O que motiva esse avanço é a tentativa de se criar um modelo que retrate a realidade (Boyce, 2012).

A modelagem populacional baseada no indivíduo tem sido crescentemente empregada para analisar processos ecológicos, desenvolver e avaliar teorias, bem como para fins de manejo da vida silvestre e conservação (Giacomini, 2007). Entretanto os modelos baseados no indivíduo são mais realistas do que modelos populacionais clássicos, mais presos dentro de um rígido formalismo matemático.

Ao decorrer do tempo, estudos e pesquisas na pretensão de se modelar matematicamente destacaram-se alguns modelos que deram início a várias outras pesquisas. E dentre os modelos dinâmicos populacionais clássicos e pioneiros, destacam-se os modelos de Malthus (1798), Verhulst (1838), [...] nesta área de aplicação. (Cecconello, 2006). Além disso Magalhães, afirma que alguns dos principais modelos da literatura destacados são: Modelo de Malthus [...] passamos pelo modelo de Verhulst (1837) [...] também o modelo de Gompertz (1825) [...] e o mais recentemente é o de Montroll (1971). (Magalhães, 2012).

Deste modo, o presente trabalho tem o intuito de rever estes modelos dinâmicos populacionais pioneiros neste ramo, e comparar, como se deu as mudanças destes modelos em busca de um modelo determinístico que se aproxima da realidade, evidenciando as contribuições das equações diferenciais.

Esse trabalho está distribuído em 6 capítulos, no primeiro capítulo a introdução, onde delimitaremos o tema e traremos a pergunta que é o eixo central do trabalho, apresentamos os objetivos: Objetivo geral e Objetivos específicos. No segundo capítulo exibimos a justificativa da pesquisa. No terceiro capítulo seção traz as fundamentações teóricas para embasar os estudos. No quarto capítulo, o desenvolvimento apresentaremos uma revisão e análise juntamente com as considerações entre os modelos de Malthus (1798), Verhulst (1838), Montroll (1971). Juntamente uma aplicação dos modelos usando como matéria prima a população de Florianópolis – SC. No quinto capítulo faremos as considerações gerais. E por fim, no sexto capítulo apresentamos as referências.

Delimitação do Tema

Os modelos são construídos para organizar a compreensão dos sistemas e ideias; avaliar os dados observados; fornecer o entendimento das ligações entre os componentes; definir os problemas; fazer previsões (Angelini, 2010).

Segundo Cecconello (2006), entre os modelos de dinâmicas populacional clássico e pioneiros, destacam-se os modelos de Malthus (1798), Verhulst (1838) e Latka-Volterra (1926). Dos modelos referidos por Cecconello não faremos análise, comparação, revisão do modelo Latka-Volterra, presente trabalho procura evidenciar os modelos voltados para dinâmica populacional, limitando aos modelos de uma única espécie, sem interação com outras espécies ou auto interação. Como já dito na introdução, nosso objetivo não é de nos aprofundarmos no estudo da dinâmica de populações, mas fazer uma breve revisão dos modelos pioneiros evidenciando mudanças ocorridas em uma análise histórica.

Vale ressaltar também que estamos considerando, em cada modelo, que as dinâmicas de crescimento estão isentas dos fatores abióticos (temperatura, vento, umidade, etc) e de fatores auto regulação (espaço, alimento, idade, guerra, etc)

E ainda, Magalhães (2012, p. 351) nos diz que, os principais modelo pioneiros que se destacam são: modelos Malthus (1798), Verhulst (1838), Gompertz (1925) e Montroll (1971).

Tomando os modelos pioneiros do crescimento populacional, o presente trabalho tratará de rever e analisar evidenciando as mudanças entre os mesmos e as contribuições das equações diferenciais, e restringido os modelos sem a dinâmica presa-predador.

Por tais modelos terem sido conceitos que deram origem a outros pesquisadores da época, e são modelos pioneiros no ramo, a pesquisa se limitará a modelos dinâmicos populacionais na década de 90, limitando também termos e conceitos tratados na licenciatura.

Portanto os modelos tratados aqui são: Modelo de Malthus (1798), Modelo de Verhulst (1838), e Montroll (1971).

Problema

Quais mudanças são percebidas nos principais modelos pioneiros de dinâmicas populacionais determinísticos da década de 90?

Objetivos

Objetivos geral

Identificar as mudanças percebidas nos modelos dinâmicos populacionais determinísticos desenvolvidos na década de 90, considerados pioneiros, buscando evidenciar como as equações diferenciais contribuíram nos modelos.

Objetivos específicos

a) Mapear e selecionar os principais modelos dinâmicos populacionais determinísticos da década de 90 pioneiros;

b) Comparar os modelos populacionais determinísticos selecionados;

c) Apontar principais diferenças e características destes modelos para a época;

d) Apresentar comparações através de tabelas;

e) Aplicação na população de Florianópolis.

2. Justificativa

Na constante busca do aperfeiçoamento de uma teoria e conceitos, a matemática com suas generalizações pode tonar-se fria e insossa, entretanto, as equações diferenciais têm contribuído para modelar matematicamente sistemas dinâmicos, principal desafio que se apresenta na modelagem de sistemas em termos de equações diferenciais (Rodney, p. 442).

Através dos resultados do estudo de dinâmica populacionais permite-se fazer inferências sobre a mesma e planejar ações, e com isto, é possível prever taxas de crescimento ou decrescimento futuras das populações em análise. E assim, caso necessário, atuar no dimensionamento de recursos para essas populações ou no controle efetivo da mesma, caso o crescimento seja indesejável. Formular as equações que descrevem o problema a partir de um conjunto restrito de informações ou “pistas” sobre o comportamento geral do sistema, faz com que o modelo tratado se torne cada vez mais próximo com a realidade (Thomas, 2013, p.3).

O estudo sobre o comportamento e crescimento populacional de número de determinada espécie é objeto de pesquisa de vários matemáticos e está em constante desenvolvimento (Teixeira, 2012, p. 17). Conhecer os números relacionados a determinada espécie é importante para criar ações e planejamentos. Uma vez estabelecido a espécie e definido o modelo é possível prever o declínio, crescimento ou estabilidade na cadeia de evolução.

Diversas áreas procuram ferramentas matemáticas para poderem estimar o crescimento de uma população, planejar o uso correto de recursos públicos, programar a construção de postos de atendimento médico, a urbanização planificada de cidades, alocação de salas de aula, turnos, dependências de lazer, etc.

Da mesma forma, como por exemplo, avaliar crescimento de populações para prever se uma temporada de pesca será boa ou má, ou preparar-nos para uma invasão de pernilongos, gafanhotos e outras pragas. A equação produção e consumo é importante para a preservação da espécie e crescimento consciente para o planeta, neste sentido, é ainda urgente prever quantos seremos na Terra e quantos recursos teremos nas próximas décadas, segundo Thomaz (2013) essa relação inclui outras variáveis, além das variáveis ou taxas de natalidade e mortalidade. As variáveis mencionadas por Thomaz têm mudanças com o tempo, como por exemplo a evolução tecnológica, pois a produção que se tinha a 50 anos atrás, hoje é, no mínimo três vezes maior no mesmo espaço de terra.

Quando tratado de modelos dinâmicos populacionais, podemos classificar diversas populações, desde espécies humanas (Magalhães, Leite, 2012) até crescimento de tumores sólidos (Domingues, 2011). Quando previsto crescimento ou decrescimento populacional, pode-se criar ações, para retardar ou estabilizar, ou até estimular o crescimento ou decrescimento desse grupo.

Historicamente, o controle da população humana tem sido implementado, limitando a taxa de natalidade da população, geralmente por ordem do governo. Caso não crie ações podem gerar fatores como: Níveis elevados ou crescentes de pobreza, preocupações ambientais, motivos religiosos e superpopulação, e outros subsequente destes. O controle da população pode envolver medidas que melhorem a vida das pessoas, dando-lhes um maior controle de sua reprodução.

Assim, Bassanezi, levanta questões derivadas que merecem a análise, como por exemplo: em quanto anos dobraremos nossa população nacional? Mundial? Quanto alimento estaremos produzindo? Considerando o ritmo de crescimento da população, o mercado de trabalho absorverá toda a mão-de-obra que se formará? Quantos estarão desempregados? (Bassanezi, 2004, p. 48). Não tentaremos neste trabalho responder à estas perguntas, mas estimular o leitor, a entender a importância do estudo de modelos matemáticos que preveem o crescimento ou decrescimento de uma espécie, principalmente humana.

3. Fundamentação teórica

Para compreender melhor a dinâmica dos modelos aqui envolvidos, deixaremos alguns resultados importantes que facilitam o estudo, possibilitando o acesso ao processo de construção dos modelos, tanto nas modelagens, quanto nas resoluções e na interpretação. Porém, é necessário que o leitor tenha um prévio conhecimento de resultados visto em cálculo I, como limites.

Modelagem Matemática

Quando dizemos resolver um problema temos primeiro em geral, que formular esse problema como uma expressão matemática em termos de variáveis, funções, equações, etc. Uma expressão desse tipo então chamada de um modelo matemático do problema em questão o processo de elaborar um modelo resolvê-lo matematicamente interpretar seus resultados em termos físicos ou outro é chamado de *modelagem matemática* ou, resumidamente de **modelagem** trata-se de um processo que requer experiência.

Para Bassanezi (2004), a Modelagem Matemática de uma situação problema real deve seguir uma sequência de etapas:

1. **Experimentação**: É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados;

2. **Abstração**: É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos;

3. **Resolução**: O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente – é como num dicionário, a linguagem matemática admite "sinônimos" que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural**;**

4. **Validação**: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para validação;

5. **Modificação**: Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas, pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, poder-se-ia dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos, sendo esta reformulação dos modelos uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

Equações diferenciais

Vejamos como Bassanezi apresenta equações diferenciais "[...] as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais, [...]" (Bassanezi, p. 9). Equações diferenciais é uma ferramenta matemática de aplicabilidade. E segundo Boyce muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressar em linguagem matemática, as relações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivada são equações diferenciais.

Notemos que em ambos os casos equações diferenciais são tentativas formalizar uma situação em uma equação, fazendo associação da equação com suas derivadas. Boyce descreve modelo matemático como uma equação diferencial proveniente de um processo físico, e Bassanezi expos modelos matemática como processo de interação da teoria matemática e as outras Ciências.

Matematicamente, uma equação diferencial é uma equação que envolve um função desconhecida e derivadas desta equação.

Classificação de Equações diferenciais

Uma equação diferencial dita ordinária se a função incógnita depender apenas de uma variável independente, que contém uma ou mais derivadas de uma função desconhecida, a qual usualmente chamamos de $y(x)$. Abreviaremos equações diferencias ordinária por (EDO). Vejamos exemplos:

$$y' = \cos(x) \tag{1}$$

$$y'' + 9 = 0 \tag{2}$$

$$x^2y'''y' + 2e^xy''=(x^2 + 2)y^2 \tag{3}$$

Se a equação diferencial depender de duas ou mais variáveis independentes será denominada equação diferencial parcial (E. D. P.). Apresentaremos equações diferenciais parciais a título de exemplificação, mas neste trabalho abordaremos somente equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, uma E.D.P com uma função desconhecida u de duas variáveis x e y é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ordem da equação diferencial

Diz-se que uma EDO é de ordem n quando a n-ésima derivada da função desconhecida y é a derivada mais alta de um y na equação. O conceito de ordem fornece uma classificação útil para as EDOs temos as EDOs de primeira ordem, de segunda ordem, e assim por diante. Portanto, a equação (1) é de primeira ordem e a equação (2) é de segunda ordem e (3) de terceira ordem. Consideremos EDOs de primeira ordem. Essas equações contêm somente a primeira derivada y', podendo também conter y e função quaisquer dada de x. Dessa forma, é possível escrever essas equações como:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{4}$$

ou, frequentemente, na forma

$$y' = f(x, y)$$

Esta última forma é chamada *explícita*, em contraste com a forma *implícita* (4). Por exemplo a EDO implícita $x^{-3}y' - 4y^2 = 0$ (onde $x \neq 0$) pode ser escrita explicitamente como $y' = 4x^3y^2$.

Conceito de solução de uma EDO.

Uma função

$$y = h(x)$$

é chamada de solução da EDO (4) em algum intervalo abeto $a < x < b$, se $h(x)$ for definida e diferenciável ao longo de todo esse intervalo e se for tal que a equação se torna uma identidade quando y e y' são substituídos por h e h', respectivamente. A curva (ou seja, o gráfico) de h é chamada de **curva solução**. Cada EDO possui uma solução contendo uma constante arbitrária c. Uma solução que inclui uma constante arbitrária c é chamada **de solução geral**. Veremos nos modelos que essa constante é a taxa de crescimento.

Problema de valor inicial

Uma EDO apresentada juntamente com sua condição inicial é chamada de **problema de valor inicial**. Portanto, caso a EDO seja explícita, $y' = f(x, y)$, o problema de valor inicial assume a forma

$$y' = f(x, y),$$

$$\mathrm{y}(x_0) = y_0.$$

EDOs Separáveis.

Muitas EDOs de utilidade prática podem ser reduzidas a forma

$$g(y)y' = f(x) \tag{5}$$

através de manipulações algébricas. Dessa forma, é possível integrar ambos os lados com relação a x, o que nos faz obter

$$\int g(y)\, y' dx = \int f(x)\, dx + c. \tag{6}$$

Do lado esquerdo, podemos mudar a variável de integração para y, visto que, do cálculo, sabemos $y'dx = dy$, de modo que

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx + c. \tag{7}$$

Se f e g são funções contínuas, as integrais em (7) existem e sua resolução nos faz obter uma solução geral de (5). Esse método de resolução de EDOs é chamado de **método das variáveis separáveis** e (5) é chamada de equação separável, devido ao fato de que em (7) as variáveis estão agora separadas: x somente aparece no lado direito da equação e y somente no lado esquerdo.

EDOs autônoma

Uma EDO $y' = f(x, y)$ em que x não ocorre (aparece) explicitamente assume a forma

$$y' = f(y)$$

é chamada de **EDO autônoma**.

4. Desenvolvimento

Neste capítulo apresentaremos os procedimentos metodológicos, faremos uma análise dos modelos envolvidos. Na intenção de responder à pergunta problema, foram levantadas diversos artigos, monografias, teses. Então através destes documentos, citaram excessivamente os modelos de Malthus, Verhulst e Montroll, sendo os modelos pioneiros. Então apesar de serem modelos simples, inspiraram outros autores, nascendo a partir deles vários outros modelos.

Inicialmente, foi feito um levantamento através de ferramentas de pesquisas nas bases de dados de artigos de quais modelos dinâmicos populacionais foram pioneiros, na dinâmica populacional humana. E por descomedimento de citações escolhido os modelos a ser revisado e analisado. Evidenciando as equações diferenciais, e suas derivações na construção dos modelos, buscando técnicas analíticas geralmente desenvolvidas em curso de graduação em Licenciatura Matemática.

Em seguida, foi realizado um levantamento teórico acerca da modelagem matemática, para que assim possamos fundamentar o trabalho.

A aplicação de modelos com conceitos matemáticos simples para fenômenos populacionais descritos por Equações Diferenciais Ordinárias. As origens dos nomes destes modelos populacionais estão associadas aos nomes de Malthus (MALTHUS, 1798), Verhulst (VERHULST, 1838) e Montroll (MONTROLL, 1971). Tais modelos tratam do crescimento de uma única espécie de população, e a variável de interesse é o número indivíduos, sem interação(ões) entre espécies. Assim como já dito capítulos anteriores ressaltamos que estamos considerando em cada modelo, que as dinâmicas de crescimento estão isentas dos fatores abióticos e auto regulação.

No intuito de compreender um pouco da complexa dinâmica do crescimento ou decrescimento humano, e transcrevendo numa linha histórica, selecionando modelos matemáticos fenomenológicos populacionais: Malthus, Verhulst e Montroll, afim de comparar, correlacionando com as características envolvidas no crescimento e decrescimento ao longo do tempo. A seguir abordaremos tais modelos contínuos, e a título de exemplificação deixaremos no apêndice modelo de Malthus discreto.

Revisão e análise do modelo de Malthus (1978)

Para análise do modelo de Malthus foi usado trabalho da Teixeira, como material de apoio. A investigação dos modelos dinâmicos populacional, para prever crescimento e declínio de populações é, historicamente, o mais antigo ramo da ecologia matemática (Cecconello, 2006). E contribuíram em diversas áreas, tais modelos sofrem aperfeiçoamentos e mudanças.

Tanto Alitolef, quanto Magalhães, tratam essas mudanças como evolução. (Magalhães CMAC, p. 351), (Alitolef, 2011, p. 5). Entretanto aqui neste trabalho trataremos evolução como mudança. As mudanças desses modelos dinâmicos populacional, desenvolvidas ao decorrer da história, deve-se em parte às equações diferenciais.

O primeiro grande avanço na modelagem de populações foi de Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) publicou anonimamente no livro “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvenment of Society”, um artigo sobre o estudo do crescimento populacional humano que atualmente é conhecido como primeira proposta de utilização da matemática na tentativa de avaliar a dinâmica populacional (Cecconello,2006, p. 6), e também foi a primeira teoria populacional a relacionar o crescimento da população com a fome, afirmando a tendência do crescimento populacional em progressão geométrica, e do crescimento da oferta de alimentos em progressão aritmética. (Alitolef, 2011, p. 24).

Tal modelo serviu como ponta pé inicial para outros pesquisadores afirma Teixeira (2012, p. 19), ainda Magalhães (2013, p. 351) ressalta, que o modelo não é conciso quando prever crescimento populacional humano dado um prazo consideravelmente longo, haja vista que serviu de base para muitos outros.

Malthus fez a proposição de que as pessoas deveriam ter filhos apenas quando estas tivessem terras cultiváveis para sustentá-los. E segundo no mundo de hoje suas teorias não se concretizaram, a população não dobra a cada 50 anos, e a produção de alimentos é mais que suficiente para alimentar essa população. Thomas afirma, o que leva as pessoas passarem fome é má distribuição de recursos, não é a falta de terras, pois hoje tem alimentos mais que suficiente em tempo suficientemente rápido em pequeno espaço de terra (Thomas, 2013).

Para a revisão do modelo de Malthus foi usado como material de apoio o trabalho de Cecconello (2006). Embora Malthus não tenha formulado matematicamente, o atualmente conhecido como modelo de Malthus, em termo de equações diferenciais, é dado por:

$$p' = \frac{dp}{dt} = \gamma p \tag{8}$$

onde $p = p(t)$, população no instante t em anos. E a taxa de crescimento ou decrescimento é dada por $(\alpha - \beta) = \gamma$, onde α é taxa de natalidade e β é taxa de mortalidade.

Como a população não é nula, multiplicando pelo inverso multiplicativo em ambos os lados

$$\frac{dp}{dt}\left(\frac{1}{p}\right) = \gamma$$

integrando ambos os membros em t,

$$ln|p| = \gamma t + c$$

Daí,

$$p = ke^{\gamma t}$$

como população $p \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e considerando população inicial $(p(0) = p_0)$ é $p_0 \neq 0$, então a solução do problema de valor inicial é

$$p = p_0 e^{\gamma t}$$

No modelo de Malthus contínuo, assumiremos que o tempo é uma variável contínua, isto é, $t \geq 0$.

No modelo de Malthus contínuo, admitimos que as taxas de natalidade α e mortalidade β sejam constantes, que a proporção de indivíduos reprodutores é constante durante o crescimento da população e que essa população viva em condições ideais, ou seja, não há fatores limitantes (a população cresce sem que haja interação com outras espécies, os recursos são ilimitados, e há sempre espaço físico).

Note que a constante $\gamma > 0$ crescimento exponencial e $\gamma < 0$ declínio exponencial da população. É importante observar que neste modelo contínuo, assim como no discreto:

1) Se a taxa de natalidade é maior que taxa de mortalidade, temos:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$$

2) Se a taxa de mortalidade é maior que taxa de natalidade, temos:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0$$

3) Se a taxa de natalidade e mortalidade iguais, temos:

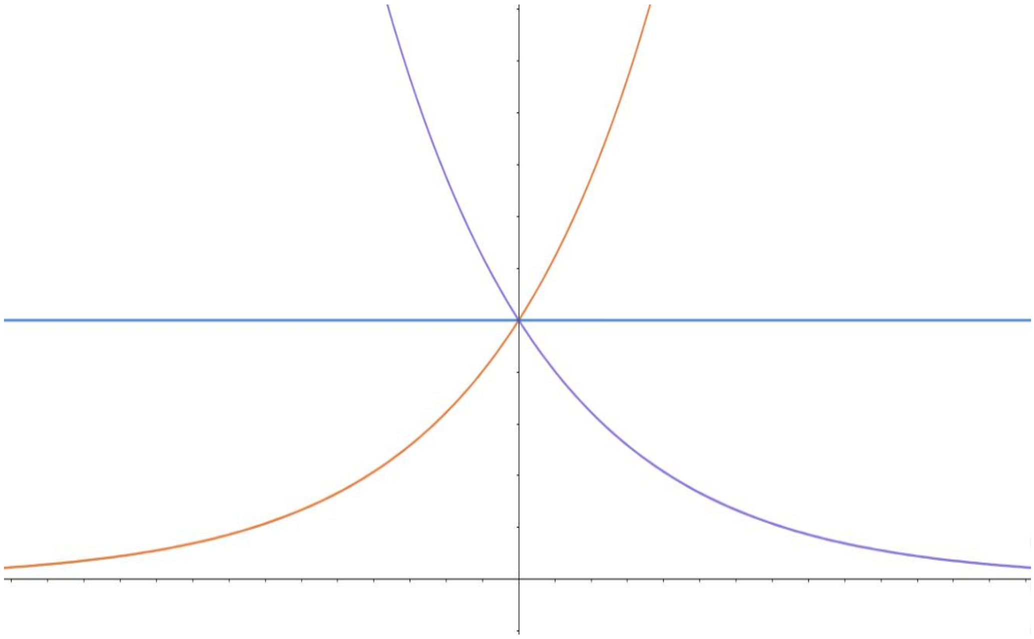
$$\lim_{t \to \infty} p(t) = p_0$$

Se $\gamma = \alpha - \beta > 0$, a natalidade é maior que mortalidade, população cresce;

Se $\gamma = \alpha - \beta = 0$, temos que a população não alterar, se mantém;

Se $\gamma = \alpha - \beta < 0$, a mortalidade é maior que a natalidade, a população decresce.

Figura 1: Crescimento segundo modelo de Malthus.



Fonte: https://www.infoescola.com

Mais uma vez, podemos ver que para o modelo contínuo a população ou cresce infinitamente, o que não condiz com a prática, ou decresce até chegar à extinção. Dessa forma, o modelo Malthusiano pode ser considerado mais apropriado no estágio inicial de crescimento. A longo prazo a população cresce infinitamente, podendo ocupar um espaço muito maior do que o meio suporta, o que certamente não é uma boa descrição para realidade humana, já descrito por diversos autores mencionados na referência deste trabalho.

O que iria acontecer se a população crescesse muito? Falta de alimento, e de espaço físico. Acreditava-se nisso, porém para os dias atuais isso não é verdade.

Quando o modelo é aplicado a comunidades humana, às vezes os resultados não são confiáveis principalmente quando intervalo de tempo é muito grande. Isto ocorre porque na realidade não pode garantir através do modelo Malthus, pois a comunidade humana é muito instável. (Sodré, 2007, p. 12).

Apesar deste modelo tem pouca ou nenhuma influência sobre a população humana atual, ele funciona melhor como um indicador do potencial de sobrevivência e de crescimento de uma certa espécie de população do que como um modelo para mostrar o que realmente ocorre.

Malthus, não conseguiu traduzir corretamente suas ideias em modelos matemáticos. É claro que a aplicação desse modelo às populações humanas gerou grande discussão no início do século XIX. (Teixeira, 2012, p. 29). E Thomas no diz que mesmo sendo um modelo extremamente simplificado, ele se mostra útil na investigação da dinâmica de certos tipos de população como, por exemplo, no estudo de crescimento de tumores. (Thomas, 2013, p. 9).

Em 1835, Adolphe Quetelet (1796 – 1874), um estatístico e diretor do observatório de Bruxelas, publicou "A Treatise on Man and the Development of his Faculties", sugeriu que que as populações não poderiam crescer geometricamente por um longo período de tempo, por que os obstáculos mencionados por Malthus formariam uma espécie de "resistência", que ele pensou, por analogia à Mecânica, ser proporcional ao quadrado da velocidade de crescimento da população. Esta analogia não tinha base real, mas inspirou Verhulst. (Teixeira, 2012, p. 35).

Revisão e análise modelo de Verhulst (1838)

Para análises do modelo, foram coletados diversos dados de diversos autores, mas para aprofundamento dos procedimentos matemática foram usados principalmente o livro didático de Kreyszig, 2009 e o trabalho de Cecconello, 2006. Pierre-François Verhulst (1804-1849) nasceu em Bruxelas e obteve seu doutorado em Matemática na University of Ghent, em 1825. Em 1835 ele se tornou professor de matemática na recém-criada Free University in Brussels.

No ano de 1835, seu compatriota Adolphe Quetelet (1796-1874), um estatístico e diretor do observatório de Bruxelas, publicou “A Treatise on Man and the Development of his Faculties”. Quetelet sugeriu que as populações não poderiam crescer geometricamente por um longo período de tempo, porque os obstáculos mencionados por Malthus formariam uma espécie de “resistência”, que ele pensou, por analogia à Mecânica, ser proporcional ao quadrado da velocidade de crescimento da população. Esta analogia não tinha base real, mas inspirou Verhulst. Em 1838 Verhulst publicou “Note on the law of population growth”. Verhulst percebeu que a analogia de Quetelet não era razoável.

Apresentaremos equação apresentada por Verhulst adaptando as variáveis, para melhor compreensão do leitor, tendo então uma linearidade desde a equação proposta por Malthus até Montroll.

Equação diferencial para a população $p(t) = p$ tempo t em anos, γ vinda do modelo de Malthus.

Tomando a equação (8). E acrescentando a função que depende da própria população digamos $g(p)$.

Segue que

$$p' = \frac{dp}{dt} = \gamma g(p)\, p$$

A função $g(p)$ é escolhida de forma que $g(p) > 0$, quando população p for suficientemente pequeno, $g(p) < 0$, quando população p for suficientemente grande e que $g(p)$, decresça linearmente quando p cresce. Tomando

$$g(p) = \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

e por

$$p' = \frac{dp}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{p}{k}\right)p = \gamma p - \frac{\gamma}{k}p^2 \tag{9}$$

onde k é valor suporte, assim a taxa de crescimento diminui quando p se aproxima de k.

O novo termo introduzido na equação é a taxa de crescimento efetiva e depende do tamanho da população. A constante k é chamada de capacidade de suporte do meio. Ela representa a população limite estabelecida pela disponibilidade de recursos naturais como espaço, comida, efeito de predadores, etc. Lembrando que não estamos nos referindo ao sistema presa predador, pois estamos analisando modelo numa ótica de individuo sem interação com outras espécies ou auto interação.

Ainda na mesma equação, o coeficiente γ é chamado também de taxa de crescimento intrínseco, ou seja, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador.

Se $p < k$ a taxa de crescimento é positiva, se $p > k$ a taxa de crescimento é negativa e se $p = k$ ocorre um equilíbrio estável.

Observação: equilíbrio estável a população é constante, ou seja, $\frac{dp}{dt} = 0$, assim consequentemente $\gamma\left(1 - \frac{p}{k}\right) = 0$. Dessa forma ou população igual zero ou $p(t_m) = k$. Onde t_m é instante onde a população atinge valor suporte.

Observe da equação

$$p' = \frac{dp}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{p}{k}\right)p \tag{10}$$

Quando a população p é pequena em comparação com o parâmetro k, obtemos a aproximação

$$p' \cong \gamma p$$

cuja solução é $p \cong p_0 e^{\gamma t}$, isso é, crescimento Malthusiano. Assim, a taxa de crescimento diminui quando p se aproxima do valor suporte.

Para obter a solução da equação (10) proposta por Verhulst, e já sabendo que $p = p(t)$ reescrevemos na forma

$$\frac{1}{\gamma p\left(1-\frac{p}{k}\right)} dp = dt \tag{11}$$

Através de frações parciais temos que,

$$\frac{1}{\gamma p\left(1-\frac{p}{k}\right)} = \frac{A}{\gamma p} + \frac{B}{\left(1-\frac{p}{k}\right)} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\gamma\, p\left(1-\frac{p}{k}\right)} = \frac{A\left(1-\frac{p}{k}\right) + B\gamma p}{\gamma p\left(1-\frac{p}{k}\right)} \Longrightarrow$$

$$A\left(1-\frac{p}{k}\right) + B\gamma p = 1$$

Note que p está entre, população está próximo de zero e o valor suporte. Então se $p \cong 0$, então $A = 1$. Se $p = k$, então $B\gamma k = 1$ o que implica $B = \frac{1}{\gamma k}$.

Logo

$$\frac{1}{\gamma\, p\left(1-\frac{p}{k}\right)} = \frac{1}{\gamma p} + \frac{\frac{1}{\gamma k}}{\left(1-\frac{p}{k}\right)}$$

Agora integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{1}{\gamma p\left(1-\frac{p}{k}\right)} dp = \int \frac{1}{\gamma p} dp + \int \frac{\frac{1}{\gamma k}}{\left(1-\frac{p}{k}\right)} dp =$$

$$= \int \frac{1}{\gamma p} dp \; + \; \frac{1}{\gamma k} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{k}\right)} dp =$$

$$= \frac{1}{\gamma} ln|p| - \frac{1}{\gamma} ln \left|1 - \frac{p}{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[ln \left| \frac{p}{1 - \frac{p}{k}} \right| \right] + c.$$

Voltando na equação (11), temos

$$\frac{1}{\gamma} \left[ln \left| \frac{p}{1 - \frac{p}{k}} \right| \right] = t + c \Rightarrow \; ln \left| \frac{p}{1 - \frac{p}{k}} \right| = \gamma(t + c).$$

Aplicando exponencial em ambos os membros,

$$\left|1 - \frac{p}{k}\right| = e^{\gamma t + \gamma c} \Longrightarrow |p| = \left|1 - \frac{p}{k}\right| e^{\gamma t} . e^{\gamma c} \Rightarrow p = \left|1 - \frac{p}{k}\right| e^{\gamma t} . C$$

onde $C = e^{\gamma c} > 0$.

Para $t = 0$, com $p(0) = p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq k$ obtemos então,

$$p_0 = \left|1 - \frac{p_0}{k}\right| C \Rightarrow \frac{p_0}{\left|1 - \frac{p_0}{k}\right|} = C$$

Assim, $\frac{p_0 k}{k - p_0} = C$, para $p_0 < k$ e $\frac{p_0 k}{p_0 - k} = C$, para $p_0 > k$.

Vamos considerar duas situações:

Assim,

Tabela 1: Estudo de casos

Inicial	**C**	**Situação**
$p_0 > k$	$C = \frac{p_0 k}{p_0 - k}$	1
$p_0 < k$	$C = \frac{p_0 k}{k - p_0}$	2

Situação 1: Para $p_0 > k$, temos que $p > k$ para qualquer t, então

$$p = \left|1 - \frac{p}{k}\right| e^{\gamma t} \frac{p_0 k}{p_0 - k}, \qquad p_0 > k \Longrightarrow$$

$$p = |k - p(t)| e^{\gamma t} \frac{p_0}{p_0 - k} \Longrightarrow$$

$$p - p(t) e^{\gamma t} \frac{p_0}{p_0 - k} = -k e^{\gamma t} \frac{p_0}{p_0 - k} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{\frac{-k e^{\gamma t} p_0}{p_0 - k}}{\frac{p_0 - k - e^{\gamma t}}{p_0 - k}} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{-k e^{\gamma t} p_0}{p_0 - k - e^{\gamma t}} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{k e^{\gamma t} p_0}{k - p_0 + p_0 e^{\gamma t}}$$

Situação 2: Para $p_0 < k$, temos que $p(t) < k$ para qualquer t, então

$$p = \left|1 - \frac{p(t)}{k}\right| e^{\gamma t} \frac{p_0 k}{k - p_0}, \qquad p_0 > k \Longrightarrow$$

$$p = |k - p(t)| e^{\gamma t} \frac{p_0}{k - p_0} \Longrightarrow$$

$$p + p e^{\gamma t} \frac{p_0}{k - p_0} = k e^{\gamma t} \frac{p_0}{k - p_0} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{\frac{k e^{\gamma t} p_0}{k - p_0}}{\frac{k - p_0}{k - p_0} + e^{\gamma t} \frac{p_0}{k - p_0}} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{k e^{\gamma t} p_0}{k - p_0 + p_0 e^{\gamma t}}$$

Logo,

$$p = \frac{p_0 k e^{\gamma t}}{k + p_0(e^{\gamma t} - 1)}$$

A população aumenta progressivamente a partir de p_0 no tempo $t = 0$ até o valor superte k, que é alcançado somente quando t →∞.

Sem dar valores para os parâmetros desconhecidos γ e k, Verhulst comparou seu resultado com os dados da população da França entre 1817 e 1831, entre outros, e o ajuste mostrou ser razoável (Teixeira 2012, p. 37).

Dada a solução para o modelo, podemos fazer algumas análises referentes a constante k e a estabilidade da função p.

Dividindo o numerador e o denominador por k, temos, obviamente $k \neq 0$.

$$p = \frac{p_0 e^{\gamma t}}{1 + \frac{p_0}{k}(e^{\gamma t} - 1)}$$

1) Note quando estabelece um valor de k consideravelmente grande, voltamos à solução do modelo de Malthus, ou seja, $k \to \infty$, $\frac{p_0}{k} \to 0$. Assim quando o meio passa a ter disponibilidade ilimitada de recursos naturais, o que leva a um crescimento exponencial.
2) Como os pontos críticos do modelo $p' = \frac{dp}{dt} = 0$, segue $p = 0$ ou $p = k$, quando $p = 0$ é instável, pois todas as outras soluções divergem dela. Se tivermos uma população muito pequena, mas não nula a população nunca atingirá a extinção. No entanto se $p = k$ é assintoticamente estável.

De fato, é possível analisar a solução p no limite em que $t \to \infty$. Seja p_∞ quando $t \to \infty$. Dada a equação

$$p(t) = \frac{p_0 k e^{\gamma t}}{k + p_0(e^{\gamma t} - 1)}$$

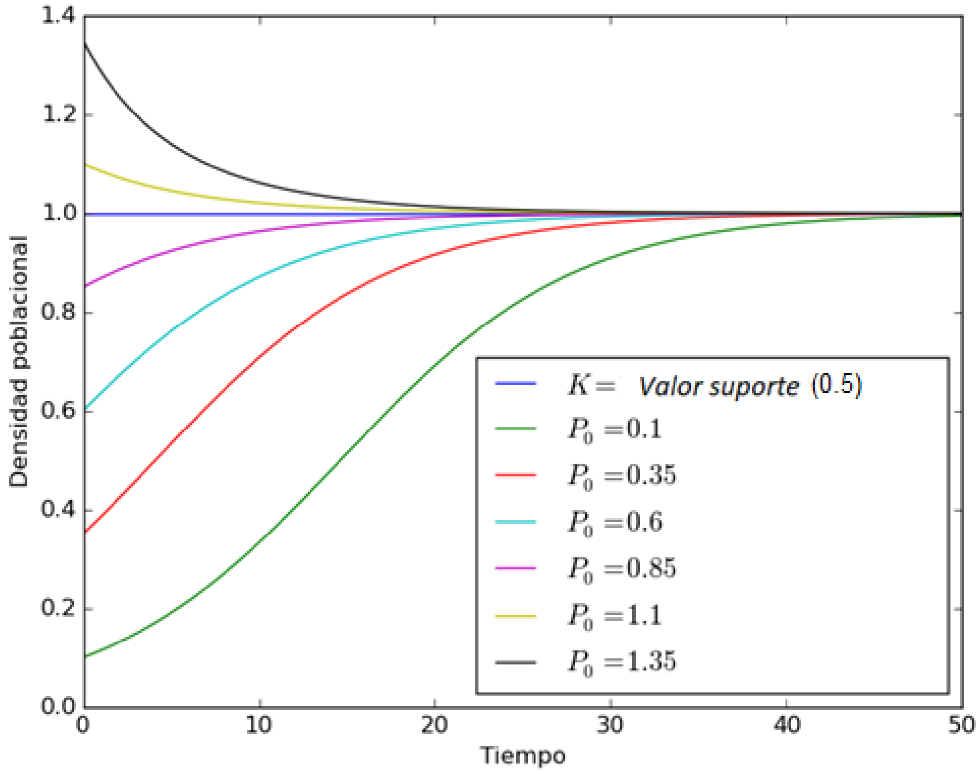
$$p_\infty = \lim_{t \to \infty} p(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{p_0 k e^{\gamma t}}{k + p_0(e^{\gamma t} - 1)}$$

Quando $t \to \infty$, temos $e^{-\gamma t} \to 0$, segue daí,

$$p_\infty = \lim_{t \to \infty} p(t) = \begin{cases} 0, se\ p_0 = 0 \\ k, se\ p_0 \neq 0 \end{cases}$$

Assim, k é onde todas as trajetórias são conduzidas.

Figura 2: Soluções segundo modelo de Verhulst



Fonte:https://entremathemas.wordpress.com/2015/10/09/lecciones-matematicas-sobre-la-competencia/

- A partir p_0 no tempo $t = 0$, até o valor suporte k, se aproxima de k somente quando t é infinitamente grande.

- A curva p aumenta com a curvatura positiva (é convexa) quando $p < \frac{k}{2}$ e em seguida, continua a aumentar em relação a k, mas com uma curvatura negativa (é côncava), logo que $p > \frac{k}{2}$.

Assim, a curva tem a forma de uma letra S distorcida.

É possível verificar

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

obtemos

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \left(-\frac{2\alpha p^2}{k}\right)$$

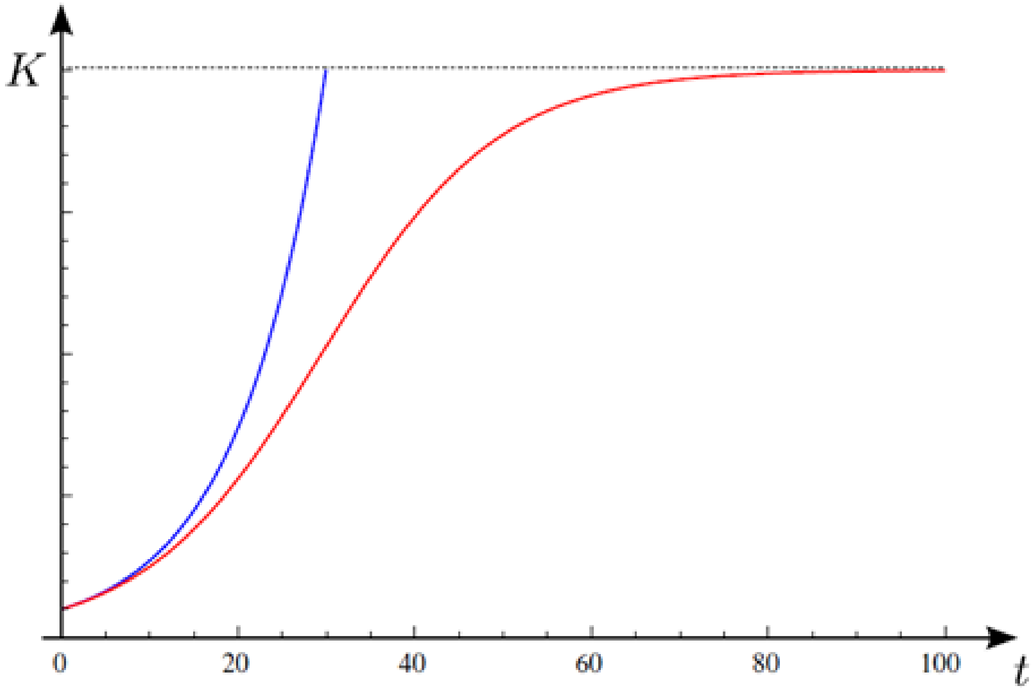
$$\frac{d^2p}{dt^2} > 0, se\ p < \frac{k}{2}\ e\ \frac{d^2p}{dt^2} < 0\ p > \frac{k}{2}$$

Assim, supondo $\alpha > 0$, tem-se:

1) Se $p_0 > k$, a função $p(t)$ decresce vagorosamente para k;
2) Se $p_0 < k$, a função $p(t)$ cresce vagorosamente para k.

Comparando as Figuras 2 e 3, observamos que as soluções para o modelo Malthusiano crescem infinitamente, enquanto que as soluções para o modelo Logístico tendem a um limite estabelecido pela disponibilidade de recursos naturais, ou outros fatores relevantes para a situação, quando t → ∞. A figura 4, evidencia a diferença entre os modelos de Malthus e Verhulst. Note que, embora essas duas soluções sejam bastante distintas, elas são bastante parecidas nos instantes iniciais do crescimento.

Figura 3 Soluções segundo os modelos de Malthus e Verhulst (Adaptado)



Fonte: http://www.unifieo.br/files/0728matem.pdf

Observando a equação (9)

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{p}{k}\right)p = \gamma p - \frac{\gamma}{k}p^2$$

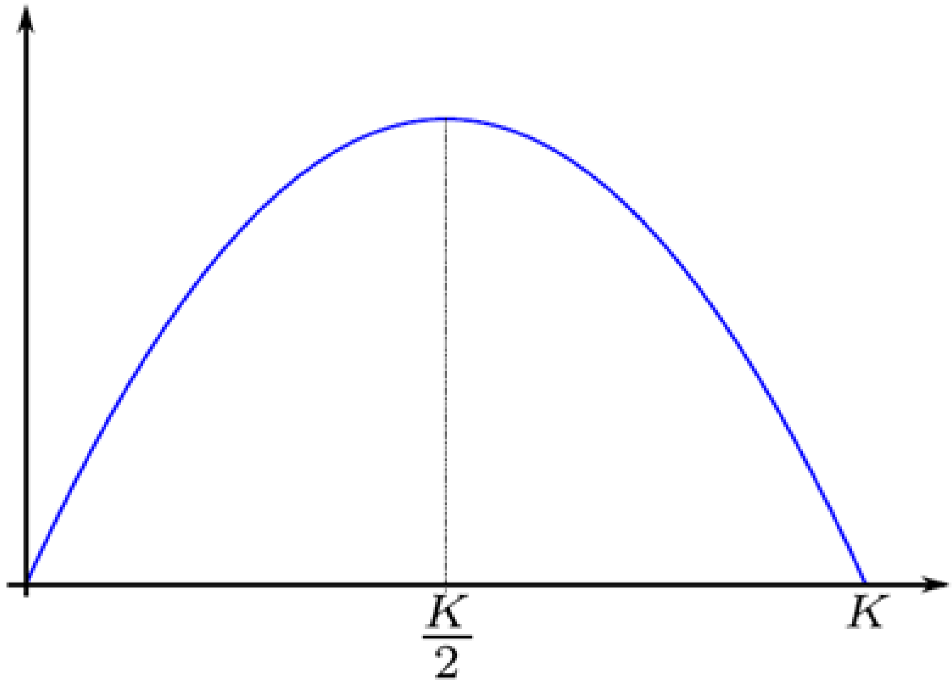
Avaliando como uma função de p mostra comportamento de uma parábola (figura 5) com concavidade voltada para baixo, $p = 0$ e $p = k$ são pontos de equilíbrio da equação

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\, p\left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

Analisando o sinal da 2ª derivada , vemos o ponto de inflexão $p = \frac{k}{2}$.

Quando há um ponto de inflexão, quer dizer que em uma vizinhança à sua esquerda, a taxa de crescimento da população aumenta e à direita a taxa de crescimento da população diminui ou vice-versa. Tal ponto, coincide com taxa de variação máxima da população da curva na figura 4. Assim, a taxa de variação populacional atinge seu valor máximo, quando a população atinge a metade da capacidade suporte k.

Figura 4 Taxa de crescimento em função do tamanho da população de Verhulst



Fonte: http://site.dfi.uem.br/

Podemos ainda, encontrar o momento em que a população atingi variação máxima.

Tomando

$$\frac{k}{2} = p = \frac{p_0 k e^{\gamma t}}{k + p_0(e^{\gamma t} - 1)}$$

o que implica que t_{vm} é o instante que ocorre a taxa variação máxima da população.

$$t_{vm} = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{k - p_0}{p_0}\right), \qquad com\ \gamma \neq 0\ e\ p_0 < k$$

Observações:

1) Se $p_0 > k$, p tende a k decrescendo e não temos ponto de inflexão. Neste caso, $\frac{dP}{dt} < 0$.

2) Se $p_0 < k$, $p_0 < p < k$ e $p(t)$ tende a k crescendo e não temos ponto de inflexão. Neste caso, $\frac{dP}{dt} > 0$.

3) Se $t_{vm} > 0, \Longrightarrow \left(\frac{k-p_0}{p_0}\right) > 0 \Rightarrow \frac{k-p_0}{p_0} > 1$.

Portanto, $k > 2p_0 \Rightarrow p_0 < \frac{k}{2}$. Isso significa, que se $p_0 < \frac{k}{2}$, temos inflexão e para $\frac{k}{2} < p_0 < k$ não ocorre inflexão.

Considerações do modelo de Malhtus para com o modelo de Verhulst

O modelo de Malthus, serve como aproximação para problemas mais elaborados em intervalos de tempo relativamente curtos, e quando tempo é relativamente grande o crescimento é desenfreado, sendo o resultado obtido não condizente com o que aconteceria de fato, isso já dito massivamente por diversos autores.

Se pensarmos, a exponencial sugerida por Malthus aplicada na população humana, chegará um momento que nosso planeta não suportaria. Teríamos então que viajar para Lua? Ou tomar medidas políticas como o governo chinês em 1980 estabelecer política do filho único? (Em outubro de 2015, foi alterada, e casais poderão ter dois filhos)[1]. No modelo de Verhulst, possuem algumas limitações também. Por exemplo, o ponto de inflexão (ou crescimento máximo) da curva está sempre localizado no ponto $\frac{k}{2}$ o que nem sempre acontece na maioria das variáveis relacionadas a fenômenos com tendência assintótica.

De fato, as populações nem sempre são estáveis, como por exemplo as células em determinado ponto ocorrem mutações, então seu comportamento implica a necessidade de outro modelo, e também à população humana, como Sodré 2007, já nos disse tal população é instável, envolve outros parâmetros como social, econômico, clima, etc. Embora já se observa uma mudança entre o modelo de Malthus e Verhulst, não podemos ainda garantir eficiência ou eficácia do modelo de Verhulst para população humana. Estabelecer um parâmetro de limitação

---

1 http://g1.globo.com/mundo/noticia/2015/10/china-acaba-com-politica-do-filho-unico-e-permitira-dois-filhos-por-casal.html <Acessado dia 29-10-2019>.

para crescimento da população é um passo para melhoria do modelo, ou como Guimarães trata: evolução.

Além disso, Verhulst não leva em conta que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, ou seja, que os novos membros não contribuem de imediato para o aumento da espécie. Mas as populações de germes de fermento e de moscas aquáticas, por exemplo, crescem a uma taxa que não se afasta muito da que é dada pelo modelo (Sodré, 2007, p. 17).

O que nos leva a pensar será que podemos modificar o modelo de forma que ponto de maior variação não seja $\frac{k}{2}$? Buscando evidenciar as mudanças nos modelos e levando em consideração os fatores mencionados acima, trataremos agora de um modelo generalizado que considera o comportamento assintótico de uma variável, assumindo que o posicionamento da variação máxima possa ocorrer para qualquer valor (instante t) entre p_0 e k.

Revisão e análise do modelo de Montroll (1971)

Para análise do modelo de Montroll foram levantados diversos artigos, livros e documentos, entre eles os principais foram livro de Bassanezi – *modelagem matemática*, o trabalho da Teixeira. Surge então em 1971 o italiano Elliott Waters Montroll, na área de dinâmicas populacionais, com um aprimoramento, melhoria ou evolução (generalização) do modelo de Verhulst que propôs um modelo mais geral para representar o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta como já dito que a variação máxima pode ser qualquer valor entre a população inicial e a população limite.

Montroll nasceu no dia 4 de maio de 1916 em Pittsburgh, Pennsylvania, e recebeu a educação escolar elementar e alta dele nas Escolas públicas de Dormont. Em 1933 ele entrou na Universidade de Pittsburgh e em 1937 ele recebeu um grau de BS em Química. De 1937 até

1939 ele era um assistente diplomado no Departamento de Matemáticas da Universidade de Pittsburgh e durante o primeiro semestre do calendário escolar 1939-1940 ele levou a cabo, pesquisa no Departamento de Química de Universidade de Columbia. Ele foi premiado Ph.D em matemáticas na Universidade de Pittsburgh em 1939, com uma tese algumas notas e aplicações da teoria de Valor Característica de Equações Integrantes, nas quais ele aplicou equações integrantes ao estudo de gases imperfeitos[2].

Antes de iniciar analise devemos lembrar que o modelo Verhusts supõe que uma população cresce até um limite máximo sustentável e depois tende a se estabilizar. Desta forma, sua equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor, dessa forma o modelo se aproxima da situação inicialmente proposta, no entanto, possui limitações, como já dito, o fato de que o ponto de inflexão crescimento máximo da curva está sempre fixado, em $p = \frac{k}{2}$. Então visando outro ponto de inflexão $P \neq \frac{k}{2}$ além do já conhecido $p = \frac{k}{2}$, em 1971, Montroll propôs um modelo geral na tentativa de suprir essa limitação. Então em geral levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre p_0 e k. Analisaremos numericamente e analiticamente levando em consideração as mundas entre o modelo de Verhulst e modelo de Montroll.

Nesse modelo chamado modelo de Montroll, a taxa de crescimento relativo é decrescente com relação a p, porém não necessariamente linear como no modelo Logístico (Cecconello, 2006, p.8). Sua equação é dada por

$$p' = \frac{dp}{dt} = \gamma\, p \left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right] \tag{12}$$

Com $\gamma > 0$ e $\beta > 0$.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Elliott_Waters_Montroll <acessado em 30-11-2019>

O valor do parâmetro β é o indicador do ponto de inflexão da curva. Quando $\beta = 1$, retornamos à equação do modelo de Verhulst (10). Já o parâmetro γ representa a taxa de crescimento relativa.

Para determinar a posição do ponto de inflexão da curva que chamaremos de p_m, onde o crescimento é máximo, é suficiente considerar a equação $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$ uma vez que $\frac{dp}{dt} > 0$ pois $0 < p < k$.

Segue da equação diferencial (11)

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \gamma \frac{dp}{dt}\left(1 - \frac{p}{k}\right)^{\beta} - \beta\gamma \frac{p}{k}\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta-1} \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \gamma \frac{dp}{dt}\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta} - \beta\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right]$$

por sua vez

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \gamma \frac{dp}{dt}\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta} - \beta\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right] = 0$$

$$\gamma \frac{dp}{dt}\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}(1+\beta)\right] = 0 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}(1+\beta)$$

Segue,

$$\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta} = \frac{1}{\beta+1} \Leftrightarrow \frac{p}{k} = \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Portanto, como queremos população no ponto de variação máxima $p_m = p$.

$$p_m = k\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{13}$$

A diferença fundamental entre modelo os modelos Montroll e Verhulst está na posição do ponto de maior variação populacional, isso dito massivamente por diversos autores, principalmente Cecconelo, (2006, p.8). O objetivo principal deste modelo geral é propor diferentes formas possíveis de decrescimento das taxas de variação.

Enquanto no modelo de Verhulst tal ponto corresponde a $\frac{k}{2}$, no moldelo de Montroll é dado por $k\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{1/\beta}$. Dessa forma o ponto de inflexão pode ser alterado de acordo com a necessidade do problema, ou seja, dado valor para k, o p_m dependerá somente do parâmetro β.

Para ilustrar. Dado $k,$ o valor de p_m depende somente do parâmetro β.

$$\beta = 3 \rightarrow p_m = 0{,}6299\, k$$

$$\beta = 2 \rightarrow p_m = 0{,}5773\, k$$

$$\beta = 1 \rightarrow p_m = 0{,}5000\, k$$

$$\beta = 0{,}5 \rightarrow p_m = 0{,}4444\, k$$

$$\beta = 0{,}25 \rightarrow p_m = 0{,}4096\, k$$

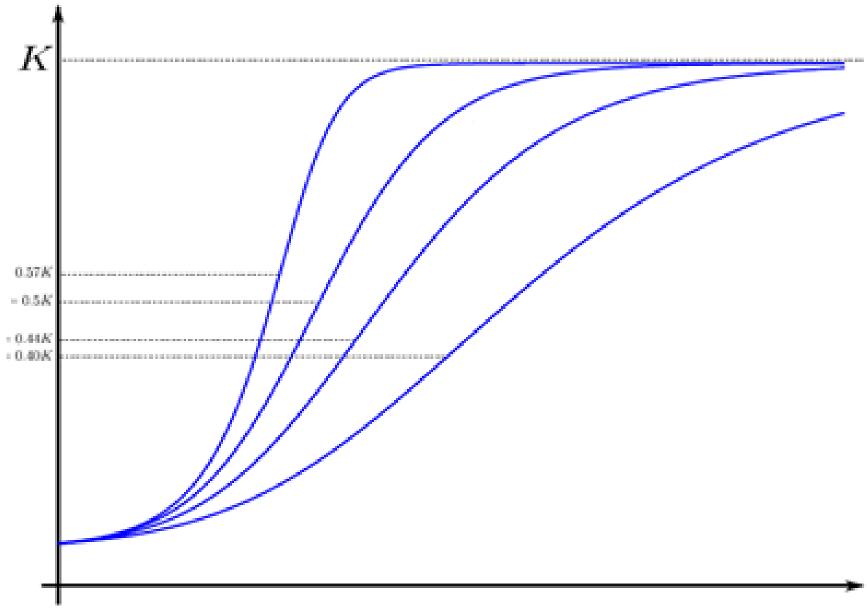
Observamos da equação (12) que quando $\beta > 0$ decresce, o ponto de inflexão também deresce e tem a um valor positivo igual a $\frac{k}{e} \cong 0{,}3678\, k$ com $\beta \rightarrow 0$ por valores positivos. Assim obtemos,

$$\lim_{\beta\rightarrow 0^+} p_m = k \lim_{\beta\rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{1/\beta} = k\ \frac{1}{\lim\limits_{\beta\rightarrow 0^+}(1+\beta)^{1/\beta}} = \frac{k}{e}$$

Por outro lado, quando β cresce, a curva e o ponto de inflexão tendem assintótica e suavemente ao valor k. Tomando o limite de $\beta \rightarrow +\infty$, encontramos

$$\lim_{\beta\rightarrow +\infty} p_m = k \lim_{\beta\rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{1/\beta} = k$$

Figura 5 Crescimento segundo modelo de Montroll com diferentes pontos de variação máxima.



Note que $\beta = 1$, "caímos" no modelo de Verhulst, como já dito anteriormente, assim $p_m = 0{,}5000\ k = \frac{k}{2}$. Uma vez estabelecidos valores para β o ponto de inflexão altera.

O modelo geral propõe diferentes formas possíveis de decrescimento das taxas de variação. Podemos considerar estas taxas como sendo dadas pela expressão

$$r = f(p, \beta) = \gamma \left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right]$$

Veja também que Mesmo que $\beta \to 0$ ou β tivesse valores muito grande, sempre tenderão assintoticamente para o valor suporte.

- Quando $\beta > 0$ decresce, o ponto de inflexão também decresce e tenda um valor igual a $\frac{k}{e}$, com $\beta \to 0$.

Para resolver basta fazer a integrações ambos os lados

$$\frac{dp}{dt} = \gamma p\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right] \Rightarrow \frac{dp}{p\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right]} = \gamma dt$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dp}{p\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right]} = \int_0^t \gamma\, dt.$$

Calculando as integrais e manipulações algébricas encontramos a solução da equação do modelo de Montroll, dada por

$$p = \frac{p_0 k}{\left\{\left[\left(\frac{k}{p_0}\right)^{\beta} - 1\right] e^{-\beta\gamma t}\right\}^{1/\beta}}$$

Considerações do modelo Verhulst para com o modelo Montroll

No modelo de Verhulst supõe que uma população cresce até um limite máximo sustentável e depois tende a se estabilizar, mas apresenta limitações, como o ponto de maior taxa de variação da população (crescimento máximo ou ponto de inflexão) é quando atinge exatamente a metade da capacidade suporte e é sempre este.

Porém no modelo de Montroll no intuito de traduzir crescimento assintótico de uma variável, (ou como diz Guimarães evoluir o modelo), apresentando um modelo que leva em conta o posicionamento da variação máxima, podendo ser qualquer valor entre população inicial e o valor suporte, não só apenas quando atinge exatamente a metade do valor suporte. Então pode-se adaptar o modelo o quanto quisermos o modelo para o que nos é conveniente, onde a maior taxa de variação é onde desejarmos.

Modelo de Montroll pode ser considerado uma generalização do modelo de Verhulst, porém se difere no fato de que o índice de crescimento relativo da população não é linear

(Teixeira, 2012). Assim, o modelo de Montroll apresenta uma vantagem em relação ao de Verhulst, pois é possível adaptá-lo a problemas de naturezas diversas através do cálculo do ponto de inflexão, modificando, quando necessário. (Magalhães, Leite, p. 353).

Tabela de comparação entre os modelos Malthus, Verhulst e Montroll.

A tabela a seguir apresenta alguns dos pontos importantes, para comparar os modelos de Malthus, Verhulst e Montroll, especificando em equação, solução, número de constantes, Assíntotas, ponto de inflexão e simetria.

Tabela 2: Tabela de compração de Malthus, Verhulst e Montroll

Propriedades	Malthus	Verhulst	Montroll
Equação	$\frac{dp}{dt} = \gamma p$	$\frac{dp}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{p}{k}\right)p$	$\frac{dp}{dt} = \gamma p\left[1 - \left(\frac{p}{k}\right)^{\beta}\right]$
Solução	$p = p_0 e^{\gamma t}$	$p = \frac{p_0 k e^{\gamma t}}{k + p_0(e^{\gamma t} - 1)}$	$p = \frac{p_0 k}{\left\{\left[\left(\frac{k}{p_0}\right)^{\beta} - 1\right] e^{-\beta\gamma t}\right\}^{1/\beta}}$
Parâmetros	2	3	4
Assíntotas	-	$p = 0, p = k$	$p = 0, p = k$
Ponto de inflexão	-	$p(t) = \frac{k}{2}$	É ajustável conforme o valor de β.
Simetria	Assimétrica	Simétrica no ponto de inflexão	Simétrica no ponto de inflexão para $\beta = 1$, assimétrica para $\beta \neq 1$

Fonte: Adaptação tabela exibida por Cecconello.

Note que:

- O número de variáveis aumenta, quando acontece as mudanças;
- As variáveis anteriores não se alteram;
- Surge um ponto suporte;
- É possível alterar o ponto suporte de acordo com a necessidade.

Aplicação

Para exemplificar os modelos, vamos estudar a dinâmica populacional da cidade Florianópolis/SC, em que podemos analisar o comportamento desta população e fazer previsões futuras quanto ao desenvolvimento populacional da cidade, o que pode ser útil, por exemplo, para planejamento da urbanização, desenvolvimento econômico e mercado de trabalho etc...

Tal exemplo similar pode ser encontrado no trabalho de Teixeira, digo similar pois os métodos aplicados são os mesmos, no entanto, estamos utilizando a população de Florianópolis, também limitando-se aplicação do modelo de Malthus e Verthust.

De acordo com os dados coletados do Instituto Brasileiro de Geografia - IBGE[3], a cidade de Florianópolis possui atualmente uma área territorial de aproximadamente 674,844 km^2, e uma densidade demográfica de aproximadamente 623,68 hab/km^2. O município de Florianópolis é o segundo município mais populoso do estado (após Joinville) e o 48º do Brasil. Tomaremos censo de 2012 a 2019[4].

Tempo	Ano	Polução
0	2012	433.158
1	2013	453.285
2	2014	461.524
3	2015	469.690
4	2016	477.798
5	2017	485.838
6	2018	492.977
7	2019	500.973

Tabela 3. Fonte IBGE. Censo demográfico da cidade de Florianópolis-SC adaptado.

Considere p população no instante t em anos, ∂ taxa de crescimento ou decrescimento é obtida através da fórmula (13), vista no modelo discreto de Malthus. Teremos que fazer alguns ajustes para fórmula para modelo contínuo.

Aplicando o logaritmo natural em $p = (\partial + 1)^t p_0$ obtemos

$$\ln p = t \ln(1 + \partial) + \ln p_0$$

[3] https://sidra.ibge.gov.br/<Acessado em 31/10/2019>
[4] https://pt.wikipedia.org/wiki/Wikip%C3%A9dia:P%C3%A1gina_principal<acessado em 31/10/2019>

Desta forma chegamos

$$p = p_0 e^{\ln(1+\partial)t}$$

Ou ainda fazendo $\gamma = \ln(1 + \partial)$, chegamos a, e como

$$p = p_0 e^{\gamma t}$$

Desta maneira, os modelos discretos e contínuos fornecem a mesma solução quando

$$\gamma = \ln(1 + \partial)$$

Aplicando os dados na fórmula (13) obtemos $\partial = 0.02099589786$, assim $\gamma = 0{,}02077852141$.

A função então,

$$p(t) = 433.158 e^{0{,}02077852141t}$$

fornece a população em cada ano t.

Para valores de t é necessário fazer alguns ajustes conforme visto na tabela (2)

Para o modelo de Verhulst se fez necessário encontrar o valor de suporte da população P_∞. Inicialmente, calcularemos a taxa de crescimento populacional $\partial = r(n)$ em cada período da tabela até 2018.

Tomando a equação

$$r(n) = \frac{p(n+1) - p(n)}{p(n)}$$

Produziremos uma nova tabela com novo números de população:

Entre os	anos de	Taxa
2013	2014	0,018176
2014	2015	0,017694
2015	2016	0,017262
2016	2017	0,016827
2017	2018	0,014694
2018	2019	0,016220

Tabela 4 Taxas anuais do crescimento populacional de Florianiópollis

Aproximaremos por uma reta a taxa de crescimento da população em função da própria população em cada t anos

Fazendo $r(t) = 0$, $k = p_\infty$ foi encontrado por meio ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. O valor encontrado para k que permitiu melhor ajuste aproximado do modelo foi $k = 715.914$ aproximadamente utilizando os parâmetros ∂ e k, foram calculadas as populações de 2012 a 2019.

Logo temos a função variando em t anos.

$$p(t) = \frac{(433.158)(715.914)e^{0,02077852141t}}{715.914 + 433.158(e^{0,02077852141t} - 1)}$$

Conhecendo os valores os valores p_0, ∂ e k podemos construir um gráfico da solução para crescimento da população de Florianópolis.

(t) tempo	Ano	População real	População por Malthus	População por Vertults
0	2012	433.158	433158	433158
1	2013	453.285	442253	451347
2	2014	461.524	451538	469918
3	2015	469.690	461018	488878
4	2016	477.798	470698	508237
5	2017	485.838	480581	528003
6	2018	492.977	490671	548183
7	2019	500.973	500973	568788

Tabela 5 Fonte IBGE, População por Malthus, População Por Verulsts

A simulação da dinâmica populacional segundo Malthus apresentou resultados bastante próximo do real, mas percebe-se o que em geral se aplica melhor aproximação simulação obtida através do modelo de Verthurst. Observa-se também no modelo de Malhtus no instante t=7 está muito próximo ao que é real, obviamente se fizermos uma previsão para tempo muito grande iria exceder o espaço territorial, que não faz sentindo para a situação. Em geral este modelo não é um bom modelo para aplicação quando a população humana, mesmo em intervalo tempo, pois a população humana é muito instável, afirma Sodré, 2007.

5. Considerações finais

Primeiramente ressaltemos que as equações aqui exibidas representam um comportamento efetivo do sistema voltados para dinâmica populacional humana, mas podem ser levadas para outras dinâmicas, ou seja, para comportamento de sistemas genéricos, mas lembrando que são modelos pioneiros.

Modelos mais específicos, envolvendo diretamente a interação e suas localizações espaciais, como população de células poderiam ter sido aqui discutido, entretanto envolveria outras áreas de estudo, procuramos envolver modelos com dinâmica de populações humanas.

Outro ponto importante, é número de citação massiva, apontando os modelos aqui estudados e considerando-os como pioneiros no ramo de dinâmica populacional, ainda mais voltado para população humana, uma vez que tais modelos são considerados simples.

Talvez o caminho mais curto para um novo modelo é tomar um "pronto" e melhora-lo, ao invés de tomar desde o início todas a variáveis do mundo real e tentar traduzir através de equações.

A tentativa de modelar para que possa aplicar e então prever resultados concretos é um caminho árduo, quando conseguimos testar ou medir o grau de influência ou sensibilidade de cada variável, então é possível elaborar um modelo matemático que esteja mais perto do problema real sem deixar que o mesmo seja difícil de ser tratado matematicamente.

Mas já é um grande avanço quando tratamos de modelos matemáticos iniciais, pois tais modelos simples, nos permite caminhar para modelos mais elaborados, por isso a importância do estudo dos modelos iniciais.

Com isso percebemos a importância dos 3 modelos matemáticos aqui tratados, uma evolução, pois possibilitam projetar em populações diferentes espécies, todos com suas particularidades e aplicabilidades, não apenas humana.

Embora seja possível fazer tais projeções é notório que para uma modelagem atingir um nível de satisfatório é necessário levar em conta uma série de variáveis.

Enfatizamos também o que outros autores já mencionaram, não existe um modelo pronto que possa modelar um determinado fenômeno sem que seja feito os devidos ajustes.

A busca do homem em compreender o mundo, nem sempre é um caminho fácil, estudando tais modelos podemos perceber que se partirmos de modelos preestabelecidos, o caminho para melhorar os modelos talvez seja mais curto, do que partirmos do "zero".

Então de modo geral: Conseguimos alcançar os objetivos do trabalho, analisamos quantitativa e qualitativamente as equações que regem o crescimento populacional em cada modelo e destacarmos as mudanças ocorridas em cada um. Investigamos aspectos gerais das populações, visando os conceitos envolvidos nessa dinâmica.

Fizemos comparações entre os modelos estudados, buscando discutir as mudanças ou evoluções. Como já dito, não há modelos prontos, estão em constantes mutações, melhorias, adaptações.

Note que partimos do modelo de Malthus, passamos pelo modelos de Verhulst e chegamos ao modelo conhecido como generalização de Verhulst ou modelo de Montroll, nestes são modelos unidimensional, ou seja tratam-se de uma única espécie sem interação com outras ou auto interação, percebemos uma necessidade de caminhar para outros modelos, bidimensionais, talvez para um trabalho futuro a partir do modelo de deste trabalho caminhar em direção aos modelos bidimensionais.

6. Referências

BASSANEZI, R. C. *Equações Diferenciais com Aplicações.* Harbra, São Paulo, 1988.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática*. Contexto, São Paulo, 2002.

SOUZA, R. T.; VELINI, Edivaldo Domingues; PALLADINI, L. A. *Aspectos metodológicos para análise de depósitos de pulverizações pela determinação dos depósitos pontuais.* Planta Daninha, p. 195-202, 2007.

CECCONELLO, Moiseis dos Santos. et al. *Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2006.

MAGALHÃES, Maycon Luiz A.; LEITE, Neila M. Gualberto. *Equações Diferenciais Aplicada Dinâmica Populacional*, In: Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Nordeste, IFNMG-Campus Januária. 2012.

TEIXEIRA, Fernanda Luiz. *Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SODRÉ, Ulysses. *Crescimento populacional*. Matemática, UEL, Londrina, 2007.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de contorno.* 7a. edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.

ANGELINI, R. *Ecossistemas e modelagem ecológica*. Pompêo, M. L. M. (Ed.) Perspectivas na Limnologia do Brasil. Maringá -PR, 2001.

SIMONATO, Adriano Luís; GALLO, Kenia Cristina, *Aplicação de modelagem no crescimento populacional brasileiro*, p. 431 a p. 445. São Paulo -SP, 2007.

GIACOMINI, Henrique C. *Sete motivações teóricas para o uso da modelagem baseada no indivíduo em ecologia*. ACTA AMAZONICA, Rio Claro, SP. 2007.

THOMAS, Lucas Rangel, *Uso de equações diferencias na modelagem de sistemas naturais e outros*, TCC, Universidade de Brasília, 2013.

ALITOLEF, Sérgio dos Santos, *Algumas Aplicações das equações diferenciais*,TCC, UNIR, Ji-Paraná, 2011.

Apêndice

Modelo de Malhtus discreto.

Adentraremos na análise do modelo discreto de Malthus discreto, apenas a título de exemplo de um modelo discreto, no que segue trataremos apenas de modelos contínuos.

Inicialmente assumimos tempo é discreto, ou seja, que não estamos considerando o tempo como uma variável contínua e sim uma variável pertencente a um conjunto discreto, por exemplo os naturais. Considere $p(t)$ o número de integrantes se uma certa população no instante t. Suponha ainda, $\alpha > 0$, o coeficiente de natalidade, e $\beta > 0$ o coeficiente de mortalidade.

Seja ∂ a taxa de crescimento da população dada pela diferença entre as taxas de natalidade e a de mortalidade. Então o modelo de Malthus discreto é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \partial P(t)$$

Considerando a população inicial $P(0) = P_0$ obtemos, usando método indutivo temos,

$$P(t) = (\partial + 1)^t P_0$$

Assim, dados dois censos P_0 e P_t, a taxa de crescimento demográfico em t é obtida, fazendo

$$(\partial + 1)^t = \frac{P_t}{P_0}$$

Isto é,

$$\partial = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{14}$$

Ou ainda fazendo $\gamma = \ln\,(1 + \partial)$, chegamos a

$$p(t) = p_0 e^{\gamma t}$$

Observe que:

1) Se $\alpha = \beta$, então $\gamma = 0$. Assim $p(t) = p_0$ para todo instante, o que significa que a população não aumente nem diminui.
2) Se $\alpha > \beta$, então $\gamma > 0$, e, portanto, $p(t)$ é uma função exponencial crescente em t e significa que população que a população cresce exponencialmente com o tempo (Figura 1(a)).
3) Se $\alpha > \beta$, então $\gamma > 0$, e, portanto, $p(t)$ é uma função exponencial decrescente em t, o que significa que a população diminui e tende a extinção à medida que t cresce (Figura 1(b))

Em geral, quando estudamos dinâmica populacional, uma quantidade relevante é P_∞ , que é o número de indivíduos quando t → ∞.

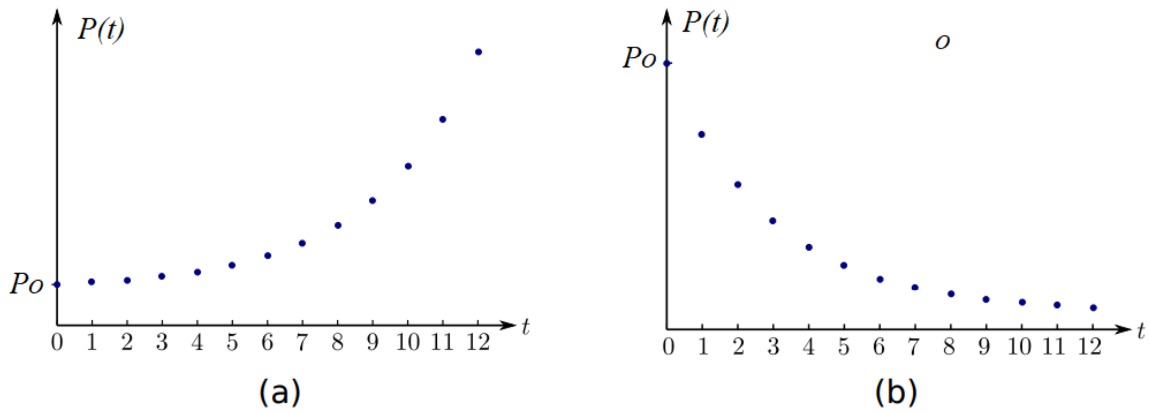


Figura 6: Em (a), o gráfico da solução para modelo de Malthus discreto no caso em quem $\partial>0$ e em (b) para o caso em que $\partial<0$.

Constatamos que a população ou cresceria infinitamente, o que poderia acarretar em problemas quanto ao meio ambiente, limites geográficos, condições socioeconômicas, ou então a população diminuiria até chegar à extinção. Dessa forma, é possível ver que o modelo Malthusiano é um modelo muito idealizado, como já dito por Magalhães, no texto acima referenciado. “[...]o modelo não é conciso quando prever crescimento populacional humano dado um prazo consideravelmente longo, [...] Magalhães (2013, p. 351).

Note que se você estimar valores para t absurdamente grande obviamente que tal estimativa é, no mínimo, exagerada. Em geral, o modelo de Malthus é mais apropriado para descrever o crescimento em seu estágio inicial, mas não é bom para prever o crescimento a longo prazo.