UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Liana Garcia Ribeiro

TEORIA DE REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS FINITOS

Florianópolis

2019

Liana Garcia Ribeiro

TEORIA DE REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS FINITOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Matemática para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática.
Orientador: Dr. Prof. Eliezer Batista

Florianópolis

2019

Liana Garcia Ribeiro

TEORIA DE REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS FINITOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de "Licenciada em Matemática", e aprovado em sua forma final pelo Departamento de Matemática

Florianópolis, 22 de novembro 2019

Dra. Prof[a]. Silvia Martini de Holanda
Coordenador do Curso

Dr. Prof. Eliezer Batista
Orientador

Banca Examinadora:

Dra. Prof[a]. Alda Dayana Mattos Mortari

Dr. Prof. Eduardo Tengan

Dedico este trabalho aos meus amados pais, Marilene e Deodoro, que são meu porto seguro.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus pais Deodoro e Marilene que tanto me apoiaram desde sempre. Por sempre estar cuidando de tudo em casa para que eu pudesse estudar e, principalmente, cuidando de mim. Eles que trabalharam tanto para que eu pudesse ter uma educação de qualidade e poder me dedicar ao curso de graduação.

Gostaria de agradecer também a minha namorada Paloma por me apoiar tanto durante estes anos de curso, por sempre me ajudar em tudo que eu precisei, por se preocupar tanto comigo e me alegrar nos momentos difíceis.

Aos meus avôs e todos os familiares que sempre torceram por mim.

Aos meus queridos amigos Agnaldo, Aline, Anieli, Crisleine, Elídio, Gabriela, Gabriel, Juliane, Lucas e Tainá por todos os momentos compatilhados, pelas conversas na sala do PIBID, pelos estudos em grupo, pelos momentos de desespero e por tornar esses anos de graduação muito mais agradáveis.

Aos meus amigos da vida Gabriéla, Gustavo, Luiz e Nathália.

Para todos os professores que passaram em minha vida, o meu muito obrigada. Especialmente meu querido orientador Eliezer por me ajudar incrivelmente com este trabalho e pelas disciplinas desafiadoras que me fizeram aprender tanto.

Também quero agradecer a professora Carmem por me ensinar tanto, pela incrível (e difícil) disciplina de Fundamentos, por me apresentar a ORMM e me dar a oportunidade de trabalhar e aprender muito com ela.

Aos professores Flávia, Luciane e Nereu pelas experiências no PIBID e no LEMAT que me acrescentaram tanto.

À professora Alda pela ótima disciplina de Álgebra, por esses anos de trabalho com a ORMM e pela oportunidade no PIC da OBMEP que contribuiram demais para o meu crescimento.

Ao professor Fernando pelo grande aprendizado nas disciplinas de Álgebra Linear e Introdução à Análise.

Agradeço também a Coordenadoria de Matemática e todos os outros servidores da UFSC por todo auxílio prestado ao longo do curso. À PROEX, CAPES e CNPq pelas bolsas ofertadas que me ajudaram muito.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar, analisar e demonstrar resultados básicos importantes da Teoria de Representações de Grupos Finitos. Também vamos explorar as Relações de Ortogonalidade, os Caracteres e as Funções de Classe.
Palavras-chave: Algebra. Teoria de Grupos.Teoria de Representação de Grupos Finitos.

ABSTRACT

The aim of this work is to present, analyze and demonstrate important basic results of Representation Theory of Finite Groups. We will also explore Orthogonality Relations, Characters, and Class Functions.
Keywords: Algebra. Group Theory. Finite Group Representation Theory

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos apresentar alguns resultados importantes da Teoria de Representações de Grupos Finitos. A escolha do tema se mostra como uma maneira de aprofundar os conceitos trabalhados nas disciplinas da área de Álgebra do curso de graduação.

Para falicitar a compreensão do trabalho espera-se que o leitor tenha algum conhecimento prévio da Teoria de Grupos e em Álgebra Linear.

Essa teoria representa um elemento de grupo finito através de um homomorfimo levado numa transformação linear inversível de um espaço vetorial. E isso será a base para conseguirmos ver os resultados expostos. Esta teoria também possui diversas aplicações abrangendo desde a Teoria dos Números e da Combinatória à Geometria.

As representações de grupos finitos surgiram através dos estudos da Teoria de Representação e essa teoria nasceu em 1896 com o trabalho do matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius.

No segundo capítulo iremos definir o que é, de fato, uma representação de um grupo finito e vamos abordar os conceitos iniciais dessa teoria. Neste capítulo veremos que toda representação é completamente redutível e vamos trabalhar em alguns exemplos para entender melhor os resultados expostos.

No terceiro capítulo veremos as Relações de Ortogonalidade e como elas são obtidas. Também iremos definir os caracteres de uma representação e através deles conseguiremos determinar se uma representação é irredutível.

No quarto e último capítulo vamos mostrar que a álgebra de um grupo é um anel com a soma ponto a ponto e com a multiplicação convolução. Além disso, vamos mostrar que as funções de classe formam o centro deste anel.

Usaremos como referência principal o livro Representation Theory of Finite Groups. Também foram consultados a dissertação Teoremas de dualidade de Tannaka-Krein, a monografia Representação de

Grupos Finitos e o livro Introduction to Representation Theory.

2 REPRESENTAÇÃO DE UM GRUPO FINITO

2.1 NOTAÇÕES

A seguir estão apresentadas algumas das notações que serão utilizadas ao longo do trabalho.

- $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos.
- Considere $m, n, s \in \mathbb{N}^*$.
- Denotamos por $M_{\mathrm{mn}}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$.
- $M_{\mathrm{nn}}(\mathbb{C}) := M_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$.
- O conjunto das transformações lineares de um espaço vetorial V para um espaço vetorial W será denotado por $Hom(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \mid T \text{ é transformação linear}\}$.
- $Hom(V, V) := End(V)$.
- O conjunto das transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial V para ele mesmo será denotado por $GL(V) = \{T \in End(V) \mid T \text{ é inversível}\}$. Também conhecido como Grupo Linear de V.
- O conjunto das matrizes $n \times n$ inversíveis será denotado por $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{\mathrm{n}}(\mathbb{C}) \mid A \text{ é inversível}\}$.
- O grupo das matrizes unitárias $n \times n$ será denotado por $U_n(\mathbb{C})$.
- Sejam V um espaço vetorial, φ uma representação e $m > 0$. Denotaremos $mV = \underbrace{V \oplus ... \oplus V}_{\text{m vezes}}$ e $m\varphi = \underbrace{\varphi \oplus ... \oplus \varphi}_{\text{m vezes}}$.
- Sejam $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações unitárias e irredutíveis de um grupo finito G. Denotamos $d_i = deg\varphi^{(i)}$ para todo $i \in \{1, ..., s\}$.

2.2 DEFINIÇÃO DE REPRESENTAÇÃO

Definição 1. *Dados um grupo G e um espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ com dimensão finita, uma representação do grupo G é um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$. A dimensão de V é chamada de grau de φ e é denotada por $deg\varphi$. Se φ é injetora, a representação é chamada de fiel. Dado $g \in G$ denotamos $\varphi(g) := \varphi_g$.*

Exemplo 1. *Considere o grupo de permutações $S_3 = \{Id, (123), (132), (23), (12), (13)\}$. Como (123) e (23) são os geradores deste grupo, podemos definir uma representação $\pi_1 : S_3 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C})$ da seguinte maneira:*

$$\pi_1(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\pi_1(123) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e$$
$$\pi_1(23) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2. *Ainda considerando S_3 podemos definir a representação $\pi_2 : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$:*

$$\pi_2(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\pi_2(123) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} e$$
$$\pi_2(23) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.3 REPRESENTAÇÕES EQUIVALENTES

Definição 2. *Dados um grupo G, espaços vetoriais V e W sobre $\mathbb{C}$ com dimensão finita e representações $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\psi : G \longrightarrow GL(W)$, φ e ψ são ditas equivalentes se existir um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal* *que para qualquer $g \in G$ tem-se que $\psi_g T = T\varphi_g$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\psi_g"'] & W \end{tikzcd}$$

Exemplo 3. *Seja $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq 2$. Considere as seguintes representações do grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:*

$\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ *dada por*

$$\varphi[m] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{bmatrix}$$

e

$\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ *dada por* $\psi[m] = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix}$.

Vamos verificar que essas representações são equivalentes. Considere o isomorfismo $T : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ associado a matriz $A = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Temos que $A^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}$.

Assim,

$$A^{-1}\varphi[m]A = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & ie^{\frac{2\pi mi}{n}} \\ -e^{\frac{-2\pi mi}{n}} & ie^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 2ie^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ 0 & 2ie^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} = \psi[m].$$

Assim, $\varphi[m]A = A\psi[m]$. *Portanto, as representações* ψ *e* φ *são equivalentes.*

2.4 SUBESPAÇO G-INVARIANTE

Para podermos definir mais a frente o que é uma representação irredutível, precisamos saber o que é um subespaço G-invariante.

Definição 3. *Dados um grupo* G*, um espaço vetorial* V *com dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$*,* $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *uma representação. Um subespaço* W *de* V *é dito ser* G*-invariante se para todo* $g \in G$ *e para todo* $w \in W$ *tem-se que* $\varphi_g(w) \in W$*.*

2.5 SOMA DIRETA DE REPRESENTAÇÕES

Definição 4. *Dados um grupo* G*, espaços vetoriais* V_1 *e* V_2 *sobre* $\mathbb{C}$ *com dimensão finita e representações* $\varphi_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ *e* $\varphi_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$*, então a soma direta (externa) de* φ_1 *e* φ_2 *é a representação* $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$ *dada por* $((\varphi_1 \oplus \varphi_2)(g))(v_1, v_2) = (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2))$*.*
Pensando em termos de matrizes, sejam m *e* n *o grau das representações* φ_1 *e* φ_2 *respectivamente, suponha que* $\varphi_1 : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ *e* $\varphi_2 : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ *sejam respresentações. Então temos a forma em matriz de bloco:*

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(g) = \begin{bmatrix} \varphi_1(g) & 0 \\ 0 & \varphi_2(g) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4. *Considere a representação* $\rho : S_3 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ *do grupo* S_3 *dada por:*

$$\rho(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(12) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

$$\rho(123) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere também a representação $\psi : S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *definida por* $\psi_\sigma = 1$ *para todo* $\sigma \in S_3$*. Temos que:*

$$(\rho \oplus \psi)(Id) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\rho \oplus \psi)(12) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

$$(\rho \oplus \psi)(123) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.6 REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS, COMPLETAMENTE REDUTÍVEIS E DECOMPONÍVEIS

Definição 5. *Dados* G *um grupo,* V *um espaço vetorial com dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$ *e* $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *uma representação não nula de* G*. Dizemos que* φ *irredutível se os únicos subespaços* G*-invariantes de* V *forem* $\{0_V\}$ *e* V*.*

Proposição 1. *Sejam* G *um grupo,* V *um espaço vetorial com dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$ *e* $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *uma representação de grau 2. Então* φ *é irredutível se, e somente se, não existe autovetor em comum*

v para todo φ_g com $g \in G$.

Definição 6. *Dados G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula de G. Dizemos que φ é completamente redutível se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$ em que V_i é G-invariante e $\varphi|_{V_i}$ é irredutível para todo $i \in \{1, ..., n\}$. De forma equivalente, temos que φ é completamente redutível se for equivalente à soma direta de representações irredutíveis.*

Definição 7. *Dados G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão n sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula de G. Dizemos que φ é decomponível se $V = V_1 \oplus V_2$ com V_1, V_2 subespaços não nulos G-invariantes. Caso contrário, dizemos que a representação φ é indecomponível.*

Lema 1. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Se φ é equivalente a uma representação decomponível, então φ é decomponível.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários.

Suponha que φ é equivalente a uma representação decomponível. Digamos $\psi : G \longrightarrow GL(W)$. Então existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que $T\varphi_g = \psi_g T$.

Como ψ é decomponível, existem W_1, W_2 subespaços G-invariantes não nulos de W tais que $W = W_1 \oplus W_2$.

Considere $V_1 = T^{-1}(W_1)$ e $V_2 = T^{-1}(W_2)$. Primeiro, vamos mostrar que $V = V_1 \oplus V_2$.

Seja $x \in V_1 \cap V_2$ arbitrário. Então, $x \in T^{-1}(W_1) \cap T^{-1}(W_2)$. Assim, $T(v) \in W_1 \cap W_2$. Como $W = W_1 \oplus W_2$, temos que $W_1 \cap W_2 = \{0_W\}$. Portanto, $T(x) = 0_W$.

Como T é isomorfismo, temos que $x = 0_V$. Disso segue que $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Agora, seja $v \in V$ arbitrário. Então $T(v) \in W$. Como $W = W_1 \oplus W_2$, existem únicos $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $T(v) = w_1 + w_2$. Assim,

$$v = T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).$$

Como $V_1 = T^{-1}(W_1)$ e $V_2 = T^{-1}(W_2)$, temos que $T^{-1}(w_1) \in V_1$ e $T^{-1}(w_2) \in V_2$.

Do exposto segue que $V = V_1 \oplus V_2$.

Agora vamos mostrar que V_1 e V_2 são G-invariantes. Sejam $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ arbitrários. Temos que

$$\varphi_g(v_i) = (T^{-1}T\varphi_g)(v_i) = (T^{-1}\psi_g T)(v_i) = T^{-1}(\psi_g(T(v_i))) \text{ e}$$
$$T(v_i) \in W_i \ \forall i \in \{1, 2\}.$$

Como W_i é G-invariante para todo $i \in \{1, 2\}$, temos que $\psi_g(T(v_i)) \in W_i \ \forall i \in \{1, 2\}$. Disso segue que $T(v_i) \in T^{-1}(W_i) = V_i$ $\forall i \in \{1, 2\}$. Portanto, V_1 e V_2 são G-invariantes.

Disso segue que φ é uma representação decomponível. □

Lema 2. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Se φ é equivalente a uma representação irredutível, então φ é irredutível.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários.

Suponha que φ é equivalente a uma representação irredutível. Digamos $\psi : G \longrightarrow GL(W)$. Então existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que $T\varphi_g = \psi_g T$.

Seja S um subespaço G-invariante de V arbitrário. Se $S = \{0_V\}$ então φ é irredutível. Caso $S \neq \{0_V\}$ então existe $x \in S$ não nulo. Como S é G-invariante, temos que $\varphi_g(x) \in S$. Além disso,

$$\varphi_g(x) = T^{-1}(\psi_g(T(x))) \in S$$

Como T é uma transformação linear e S é um subespaço vetorial de V, temos que $T(S)$ é um subespaço vetorial de W. Além disso, temos que $T(S)$ é G-invariante pois:

$$T^{-1}(\psi_g(T(x))) \in S,$$
$$T(T^{-1}(\psi_g(T(x)))) \in T(S) \text{ e}$$
$$\psi_g(T(x)) \in T(S).$$

Como ψ é irredutível, os únicos subspaços G-invariantes de W são $\{0_W\}$ ou W. Assim, $T(S) = \{0_W\}$ ou $T(S) = W$.

Caso $T(S) = \{0_W\}$, como T é isomorfismo, temos que $S = \{0_V\}$. O que não ocorre, pois estamos no caso em que $S \neq \{0_V\}$.

Caso $T(S) = W$, como T é isomorfismo temos que $T(S) = Im(T) = T(V)$. Novamente, como T é isomorfismo, temos que $S = V$.

Do exposto segue que φ é uma representação irredutível. □

Lema 3. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Se φ é equivalente a uma representação completamente redutível, então φ é completamente redutível.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula abritrárias.

Suponha que φ é equivalente a uma representação completamente redutível. Digamos que φ é equivalente a representação ψ.

Pela definição de completamente redutível, temos que ψ é equivalente a soma direta de representações irredutíveis. Assim, φ é equivalente a soma direta de representações irredutíveis.

Portanto, φ é completamente redutível. □

2.7 REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS E TEOREMA DE MASCHKE

Definição 8. *Dados G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita e produto interno sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Dizemos que φ é uma representação unitária se φ_g é unitária $\forall g \in G$, isto é, $< \varphi_g(v), \varphi_g(w) >=< v, w > \forall v, w \in V$.*

Proposição 2. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita e produto interno sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Se φ é unitária, então φ é irredutível ou decomponível.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita e produto interno sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários.

Suponha que φ não é irredutível. Vamos mostrar que φ é decomponível.

Como φ não é irredutível, existe um subespaço G-invariante W de V tal que $W \neq \{0_V\}$ e $W \neq V$.

Considere o complemento ortogonal de W, $W^{\perp}$, que também é não nulo. Já sabemos que $V = W \oplus W^{\perp}$. Vejamos que $W^{\perp}$ é G-invariante.

Seja $x \in W^{\perp}$ arbitrário. Vamos mostrar que $\varphi_g(x) \in W^{\perp}$. Seja $w \in W$ arbitrário, temos que:

$$< \varphi_g(x), w > = < \varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(x)), \varphi_{g^{-1}}(w) > = < x, \varphi_{g^{-1}}(w) > .$$

Como W é G-invariante, temos que $\varphi_{g^{-1}}(w) \in W$. E como $x \in W^{\perp}$, temos que $< x, \varphi_{g^{-1}}(w) > = 0$. Ou seja, $< \varphi_g(x), w > = 0$. Assim, $\varphi_g(x) \in W^{\perp}$.

Assim, $W^{\perp}$ é G-invariante. Portanto, φ é decomponível. □

Proposição 3. *Toda representação de um grupo finito é equivalente a uma representação unitária.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários. Digamos que n seja o grau de φ.

Tome uma base $B = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ para V e defina $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ por $T(v_1\beta_1 + ... + v_n\beta_n) := (v_1, ..., v_n)$ para todo $v_i \in \mathbb{C}$ com $i \in \{1, ..., n\}$. Note que T é um isomorfismo.

Agora, defina a representação $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ por $\rho_g := T\varphi_g T^{-1}$. Por construção, temos que φ é equivalente a ρ.

Considere $< ., . >$ o produto interno usual em $\mathbb{C}$. Vamos definir agora um novo produto interno $(., .)$ em $\mathbb{C}^n$.

Sejam $v, w \in \mathbb{C}^n$ arbitrários. Definimos:

$$(v, w) := \textstyle\sum_{g \in G} < \rho_g(v), \rho_g(w) > .$$

Vamos mostrar que este é um produto interno sobre $\mathbb{C}^n$:

- Seja $v \in \mathbb{C}^n$ arbitrário. Temos que $(v, v) = \sum_{g\in G} < \rho_g(v), \rho_g(v) >$. Como $< .,. >$ é o produto interno usual em $\mathbb{C}$, obtemos que $(v, v) \geq 0$.

- Seja $v \in \mathbb{C}^n$ arbitrário. Suponha que $(v, v) = 0$. Então,

$$\sum_{g\in G} < \rho_g(v), \rho_g(v) >= 0.$$

Assim, $< \rho_g(v), \rho_g(v) >= 0$ para todo $g \in G$. Portanto, $\rho_g(v) = 0$ para todo $g \in G$. Logo, $v = 0_{\mathbb{C}^n}$.

- Sejam $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ arbitrários. Então,

$$\begin{gathered}(u + v, w) = \sum_{g\in G} < \rho_g(u + v), \rho_g(w) >= \\ =\sum_{g\in G} < \rho_g(u) + \rho_g(v), \rho_g(w) >= \sum_{g\in G}(< \rho_g(u), \rho_g(w) > + \\ +<\rho_g(v), \rho_g(w) >) = \sum_{g\in G} < \rho_g(u), \rho_g(w) > + \\ +\sum_{g\in G} < \rho_g(v), \rho_g(w) >= (u, w) + (v, w).\end{gathered}$$

- Sejam $w, v \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então,

$$(\alpha w, v) = \sum_{g\in G} < \rho_g(\alpha w), \rho_g(v) >= \sum_{g\in G} < \alpha\rho_g(w), \rho_g(v) >=$$

$$=\sum_{g\in G}(\alpha < \rho_g(w), \rho_g(v) >) = \alpha \sum_{g\in G} < \rho_g(w), \rho_g(v) >= \alpha(w, v).$$

- Sejam $w, v \in \mathbb{C}^n$ arbitrários. Então,

$$\begin{gathered}(w, v) = \sum_{g\in G} < \rho_g(w), \rho_g(v) >= \\ =\sum_{g\in G} \overline{< \rho_g(v), \rho_g(w) >} = \overline{(v, w)}.\end{gathered}$$

Finalmente, vamos mostrar que a representação ρ é unitária com respeito ao produto interno $(.,.)$ sobre $\mathbb{C}^n$.

$$\begin{gathered}(\rho_h(v), \rho_h(w)) = \sum_{g\in G} < \rho_g(\rho_h(v)), \rho_g(\rho_h(w)) >= \\ =\sum_{g\in G} < \rho_{gh}(v), \rho_{gh}(w) > .\end{gathered}$$

Aplicando a mundança de variável definindo $x = gh$, como g no somatório varia por todos os elementos de G, temos que x varia por todos os elementos de G. Assim, temos que:

$$(\rho_h(v), \rho_h(w)) = \sum_{x\in G} < \rho_x(v), \rho_x(w) >= (v, w).$$

Do exposto segue que φ é equivalente a uma representação unitária. $\square$

Corolário 1. *Sejam G um grupo finito, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula. Então φ é irredutível ou decomponível.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários. Pela Proposição 3, φ é equivalente a uma representação unitária. Digamos que esta representeção unitária seja ρ. Pela Proposição 2, temos que ρ é irredutível ou decomponível. Pelo Lema 1 e pelo Lema 2, temos que φ é irredutível ou decomponível. $\square$

Teorema 1. ***(Teorema de Maschke)*** *Toda representação de um grupo finito é completamente redutível.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula arbitrários. Vamos mostrar que φ é completamente redutível através de uma indução sobre o grau desta representação.

Caso $dim(V) = 1$, temos que é irredutível pois V não possui subespaços próprios não nulos.

Suponha por hipótese de indução que φ seja completamente redutível caso $dim(V) \leq n$. Vamos mostrar que é válido para o caso $dim(V) = n + 1$. Se φ for irredutível, então é válido. Caso contrário, pelo Corolário 1, temos que φ é decomponível.

Assim, existem V_1, V_2 subespaços G-invariantes não nulos de V tais que $V = V_1 \oplus V_2$. Como $dim(V_1), dim(V_2) < dim(V) = n + 1$, temos que $dim(V_1), dim(V_2) \leq n$. Pela hipótese de indução, $\varphi|_{V_1}$ e $\varphi|_{V_2}$ são completamente redutíveis.

Sejam $dim(V_1) = k$ e $dim(V_2) = l$, existem $U_1, ..., U_s$ e $W_1, ..., W_r$ subespaços G-invariantes não nulos de V_1 e V_2, respectivamente, tais que $V_1 = U_1 \oplus ... \oplus U_s$, $V_2 = W_1 \oplus ... \oplus W_r$ e $\varphi|_{U_i}, \varphi|_{W_j}$ representações irredutíveis para todo $i \in \{1, ..., s\}$ e $j \in \{1, ..., r\}$.

Portanto, $V = U_1 \oplus ... \oplus U_s \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_r$. Do exposto segue que φ é completamente redutível. $\square$

No próximo exemplo queremos mostrar que toda representação admite uma sub-representação canônica que pode ser trivial.

Exemplo 5. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação não nula.*

Defina o subespaço fixo de V como $V^G = \{v \in V : \varphi_g(v) = v \ \forall g \in G\}$.

Vejamos que V^G é um subespaço G-invariante:

Seja $v \in V^G$ arbitrário. Então $\varphi_g(v) = v$ para todo $g \in G$. Assim, $\varphi_g(v) \in V^G$ para todo $g \in G$.

Vamos mostrar agora que $\dfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h(v) \in V^G$ para todo $v \in V$.

Seja $v \in V$ arbitrário. Temos que:

$$\varphi_g(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_g\varphi_h(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_{gh}(v).$$

Como h varia em todo G no somatório, temos que gh também varia em todo G. Desta forma,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h(v) \in V^G.$$

Vejamos que $\dfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h(v) = v$ para todo $v \in V^G$.

Seja $v \in V^G$ arbitrário. Então $\varphi_g(v) = v$ para todo $g \in G$. Assim, temos que:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} v = \frac{1}{|G|}\cdot(|G|\cdot v) = v.$$

Considere a transformação linear $P = \dfrac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi_h$.

Vamos mostrar que $dim(V^G)$ é o posto de P, ou seja, $dim(Im(P)) = dim(V^G)$. Vamos mostrar que $Im(P) = V^G$. Já temos que $Im(P) \subseteq V^G$. Agora, seja $v \in V^G$ arbitrário. Temos que:

$$v = \varphi_g(v) \text{ para todo } g \in G.$$

Além disso,

$$|G|v = \sum_{g\in G} \varphi_g(v) \text{ para todo } g \in G.$$

Logo,

$$v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi_g(v) = P(v) \text{ para todo } g \in G.$$

Disso segue que $V^G \subseteq Im(P)$. Assim, $dim(Im(P)) = dim(V^G)$.

Agora, vamos verificar que $P^2 = P$. De fato, seja $v \in V$ arbitrário temos:

$$P(P(v)) = P(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi_g(v)) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{h\in G} \varphi_h(\sum_{g\in G} \varphi_g(v)) =$$
$$= \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} \varphi_{hg}(v) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} \varphi_{hg}(v) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} \varphi_h(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} P(v) = \frac{P(v)|G|}{|G|} = P(v).$$

No exemplo a seguir veremos o conceito de representação conjugada.

Exemplo 6. *Sejam G um grupo e $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ uma representação não nula. Vamos mostrar que $\psi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ dada por $\psi_g := \overline{\varphi_g}$ é uma representação. Dizemos que ψ é a **representação conjugada** de φ.*

Vamos mostrar que ψ é de fato uma representação. Sejam $g, h \in G$ e $v \in V$ arbitrários. Temos que:

$$(\psi_g\psi_h)(v) = (\overline{\varphi_g\varphi_h})(v) = \overline{\varphi_{gh}}(v) = \psi_{gh}(v).$$

Veja que φ e ψ não precisam ser equivalentes. Por exemplo, considere $G = (\mathbb{C}, \cdot) = \mathbb{C}^\times$ e as seguintes representações:

$$\pi_1 : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \text{ dada por } \pi_1(z)(w) = zw \text{ e}$$

$$\pi_2 : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \text{ dada por } \pi_1(z)(w) = \overline{z}w.$$

Suponha que π_1 e π_2 são equivalentes. Então existe um isomorfismo T tal que o diagrama abaixo comuta para todo $z \in \mathbb{C}^\times$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\times} \arrow[r, "\pi_1(z)"] \arrow[d, "T"'] & \mathbb{C}^{\times} \arrow[d, "T"] \\
\mathbb{C}^{\times} \arrow[r, "\pi_2(z)"'] & \mathbb{C}^{\times}
\end{tikzcd}$$

Seja $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$ *arbitrário. Temos que:*

$$\begin{gathered}
(T\pi_2)(\lambda) = (\pi_1 T)(\lambda), \\
T(\pi_2(\lambda)) = \pi_1(T(\lambda)) \text{ e} \\
T(\overline{\lambda}) = T(\lambda).
\end{gathered}$$

Como T *é isomorfismo, temos que* $\lambda = \overline{\lambda}$. *Como* λ *é arbitrário, obtemos uma contradição. Logo* π_1 *e* π_2 *não são equivalentes.*

Exemplo 7. *Seja* $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ *uma representação de grau 1 de* G. *Defina* $\varphi^{\chi} : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ *por* $\varphi^{\chi}_g := \chi(g)\varphi_g$.

Vamos mostrar que φ^{χ} *é uma representação. Sejam* $g, h \in G$ *e* $v \in V$ *arbitrários. Temos que:*

$$\begin{gathered}
(\varphi^{\chi}_g \varphi^{\chi}_h)(v) = (\chi(g)\varphi_g \chi(h)\varphi_h)(v) = (\chi(g)\chi(h)\varphi_{gh})(v) = \\
= (\chi(gh)\varphi_{gh})(v) = \varphi^{\chi}_{gh}.
\end{gathered}$$

Veja que φ *e* φ^{χ} *não precisam ser equivalentes. Por exemplo, considere* $G = S_n$, $\chi = sign$ *e* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$ *tal que* $dim(V) = 1$.

Seja $\rho : S_n \longrightarrow GL(V)$ *uma representação e considere* $\rho^{\chi} : S_n \longrightarrow GL(V)$. *Suponha que* ρ^{χ} *e* ρ *sejam equivalentes. Então existe um isomorfismo* T *tal que o diagrama abaixo comuta para todo* $k \in S_n$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\
V \arrow[r, "\rho^{\chi}_k"'] & V
\end{tikzcd}$$

Tome $g \in S_n$ *tais que* $\chi(g) = -1$. *Assim, para* $k = g$ *temos que:*

$$\rho_g^\chi T = T\rho_g,$$
$$\chi(g)\rho_g T = T\rho_g \ e$$
$$-\rho_g T = T\rho_g.$$

Contradição. Logo, as representações ρ^χ *e* ρ *não são equivalentes.*

3 MORFISMOS DE REPRESENTAÇÕES E RELAÇÕES DE ORTOGONALIDADE

3.1 MORFISMOS DE REPRESENTAÇÕES

Definição 9. *Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *e* $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ *representações não nulas. Um morfismo de* φ *para* ρ *é uma transformação linear* $T : V \longrightarrow W$ *tal que* $T\varphi_g = \rho_g T$ *para todo* $g \in G$. *Ou seja, tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi_g} & V \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ W & \xrightarrow[\rho_g]{} & W \end{array}$$

Observações:

1. *O conjunto de todos os morfimos de* φ *para* ρ *é denotado por* $Hom_G(\varphi, \rho)$. *Note que* $Hom_G(\varphi, \rho) \subseteq Hom(V, W)$.

2. *Se* $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$ *é invertível, então* φ *e* ρ *são equivalentes.*

3. *Temos que* $T : V \longrightarrow V$ *pertence a* $Hom_G(\varphi, \varphi)$ *se, e só se,* $T\varphi_g = \varphi_g T$, *isto é,* T *comuta com* $\varphi(G)$. *Em particular, a identidade* $I : V \longrightarrow V$ *sempre é um elemento de* $Hom_G(\varphi, \varphi)$.

Proposição 4. *Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre* $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ *e* $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ *representações não nulas. Se* $T : V \longrightarrow W \in Hom_G(\varphi, \rho)$, *então* $ker(T)$ *é um subespaço G-invariante de V e* $Im(T)$ *é um subespaço G-invariante de W.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações não nulas e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear arbitrárias. Suponha que $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$.

Sejam $v \in ker(T)$ e $g \in G$ arbitrários. Então,

$$T(\varphi_g(v)) = (T\varphi_g)(v) = (\rho_g T)(v) = \rho_g(T(v)) = \rho_g(0_W) = 0_W.$$

Assim, $\varphi_g(ker(T)) \in ker(T)$ para todo $g \in G$. Logo, $ker(T)$ é G-invariante.

Sejam $w \in Im(T)$ e $g \in G$ arbitrários. Então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Assim,

$$\rho_g(w) = \rho_g(T(v)) = (\rho_g T)(v) = (T\varphi_g)(v) = T(\varphi_g(v))$$

Logo, $\rho_g(w) \in Im(T)$ para todo $g \in G$. Portanto, $Im(T)$ é G-invariante. □

Proposição 5. *Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações não nulas. Então $Hom_G(\varphi, \rho)$ é um subespaço vetorial de $Hom(V, W)$.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações não nulas arbitrários.

Tome $T_1, T_2 \in Hom_G(\varphi, \rho)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ arbitrários. Temos que:

$$(c_1T_1+c_2T_2)\varphi_g = c_1T_1\varphi_g+c_2T_2\varphi_g = c_1\rho_gT_1+c_2\rho_gT_2 = \rho_g(c_1T_1+c_2T_2).$$

Assim, $c_1T_1 + c_2T_2 \in Hom_G(\varphi, \rho)$.

Logo, $Hom_G(\varphi, \rho)$ é um subespaço vetorial de $Hom(V, W)$. □

Lema 4. ***(Lema de Schur)****Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações não nulas. Se φ, ρ são representações irredutíveis e $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$ então T é isomorfismo ou T é a transformação nula. Consequentemente:*

1. *Se φ e ρ não são equivalentes então $Hom_G(\varphi, \rho) = \{0_{Hom_G(\varphi,\rho)}\}$.*

2. *Se $\varphi = \rho$ então $T = \lambda I$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações irredutíveis e $T \in Hom_g(\varphi, \rho)$ arbitrários.

Caso $T = 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$, está provado.

Agora, suponha que $T \neq 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$. Vamos mostrar que T é isomorfismo.

Pela Proposição 4, temos que $ker(T)$ é G-invariante. Como φ é irredutível, $ker(T) = V$ ou $ker(T) = \{0_V\}$. Como $T \neq 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$, $ker(T) = V$ não ocorre. Assim, $ker(T) = \{0_V\}$ e, portanto, T é injetora.

Pela Proposição 4, temos que $Im(T)$ é G-invariante. Como ρ é irredutível, $Im(T) = W$ ou $Im(T) = \{0_W\}$. Como $T \neq 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$, $Im(T) = \{0_W\}$ não ocorre. Assim, $Im(T) = W$ e, portanto, T é sobrejetora.

Do exposto, segue que T é isomorfismo.

1. Suponha por absurdo que $Hom_G(\varphi, \rho) \neq \{0_{Hom_G(\varphi,\rho)}\}$. Então existe $T \neq 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$ tal que $T \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Pelo demonstrado acima, T é isomorfismo. Assim, φ e ρ são equivalentes. Contradição. Logo, $Hom_G(\varphi, \rho) = \{0_{Hom_G(\varphi,\rho)}\}$.

2. Suponha que $\varphi = \rho$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T. Então $\lambda I - T$ não é inversível. Como $I \in Hom_G(\varphi, \rho)$, $\lambda I - T \in Hom_G(\varphi, \rho)$. Como $\lambda I - T$ não é isomorfismo, pelo demonstrado acima temos que $\lambda I - T = 0_{Hom_G(\varphi,\rho)}$. Assim, $T = \lambda I$.

□

Observação: Não é difícil ver que se φ e ρ forem equivalentes então $dim(Hom_G(\varphi, \rho)) = 1$.

Corolário 2. *Seja G um grupo abeliano finito. Então qualquer representação irredutível de G é de grau 1.*

Demonstração. Seja G um grupo, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação irredutível arbitrários.

Tome $h \in G$ arbitrário e defina $T = \varphi_h$. Seja $g \in G$ arbitrário. Então:

$$T\varphi_g = \varphi_h\varphi_g = \varphi_{hg} = \varphi_{gh} = \varphi_g\varphi_h = \varphi_g T.$$

Assim, temos que $T \in Hom_G(\varphi, \varphi)$. Como φ é irredutível, pelo item 2 do Lema de Schur, temos que $T = \varphi_h = \lambda_h I$ para algum $\lambda_h \in \mathbb{C}$.

Sejam $v \in V$ não nulo e $k \in \mathbb{C}$ arbitrários. Então:

$$T(kv) = \varphi_h(kv) = (\lambda_h I)(kv) = \lambda_h(I(kv)) = \lambda_h kv \in \mathbb{C}v.$$

Sendo assim, $\mathbb{C}v$ é um subespaço G-invariante. Pois h é arbitrário.

Como φ é irredutível, temos que $\mathbb{C}v = V$ ou $\mathbb{C}v = \{0\}$. Como v é não nulo, temos que $\mathbb{C}v = \{0\}$ não ocorre. Assim, $\mathbb{C}v = V$, ou seja, $dim(V) = 1$. Disso segue que a representação φ é de grau 1. $\square$

Corolário 3. *Sejam G um grupo abeliano finito e $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ uma representação. Então existe uma matriz invertível T tal que $T^{-1}\varphi_g T$ é diagonal para todo $g \in G$.*

Demonstração. Sejam G um grupo abeliano finito e $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ uma representação arbitrários.

Pelo Teorema de Maschke, temos que φ é completamente redutível. Assim, existem $m \in \mathbb{N}^*$ e representações irredutíveis $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(m)}$ tais que φ é equivalente a $\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus \varphi^{(m)}$.

Como G é abeliano, pelo Corolário 2, temos que $\varphi^{(i)}$ é de grau 1 para todo $i \in \{1, ..., m\}$ e, sendo assim, $n = m$. Consequentemente, $\varphi_g^{(i)} \in \mathbb{C}^*$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$ e para todo $g \in G$.

Se $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ dá a equivalência entre φ e $\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus \varphi^{(n)}$, então:

$$T^{-1}\varphi_g T = \begin{bmatrix} \varphi_g^{(1)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \varphi_g^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \varphi_g^{(n)} \end{bmatrix}$$

Que é uma matriz diagonal para todo $g \in G$. □

Corolário 4. *Seja $A \in GL_m(\mathbb{C})$ uma matriz. Então A é diagonalizável. Além disso, se existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^n = I$, então os autovalores de A são n-ésimas raízes da unidade.*

Demonstração. Seja $A \in GL_m(\mathbb{C})$ uma matriz de ordem finita arbitrária. Suponha que $A^n = I$.

Defina a representação $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ por $\varphi(\overline{x}) = A^x$.

Pelo Corolário 3, existe $T \in GL_m(\mathbb{C})$ invertível tal que $T^{-1}AT$ é uma matriz diagonal.

Digamos

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} = D.$$

Então $D^n = (T^{-1}AT)^n = T^{-1}A^nT = T^{-1}IT = T^{-1}T = I$. Assim, temos que

$$I = D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_m^n \end{bmatrix}.$$

Disso segue $\lambda_i^n = 1$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Isso estabelece que os autovalores de A são raízes n-ésimas da unidade. □

3.2 RELAÇÕES DE ORTOGONALIDADE

Definição 10. *Seja G um grupo finito. Defina $L(G) = \mathbb{C}^G = \{f | f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$. Sejam $f_1, f_2 \in L(G)$, $c \in \mathbb{C}$ e $g \in G$ arbitrários. Definimos* *a soma, a multiplicação por um escalar e o produto interno em $L(G)$ como:*

$$\begin{gathered}(f_1+f_2)(g)=f_1(g)+f_2(g),\\ (cf_1)(g)=c\cdot f_1(g)\ e\\ <f_1,f_2>=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_1(g)\overline{f_2(g)}.\end{gathered}$$

Desta forma, podemos verificar que $L(G)$ é um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{C}$. Definimos $L(G)$ como a Álgebra do Grupo G.

Proposição 6. *Sejam G um grupo finito, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações. Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear, então:*

1. $T^{\#}=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g\in Hom_G(\varphi,\rho)$.
2. *Se* $T\in Hom_G(\varphi,\rho)$ *então* $T=T^{\#}$.
3. *A função* $P: Hom(V,W)\longrightarrow Hom_G(\varphi,\rho)$ *definida por* $P(T)=T^{\#}$ *é uma transformação linear.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações arbitrários.

Suponha que $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear. Temos que :

$$T^{\#}\varphi_h=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g\varphi_h=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_{gh}=*$$

Aplicando uma mudança de variável $x = gh$ temos:

$$*=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{hx^{-1}}T\varphi_x=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_h\rho_{x^{-1}}T\varphi_x=$$
$$=\rho_h\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{x^{-1}}T\varphi_x=\rho_hT^{\#}.$$

Portanto, $T^{\#}\in Hom_G(\varphi,\rho)$.

Suponha que $T\in Hom_G(\varphi,\rho)$. Então:

$T^{\#} = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T\varphi_g = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}\rho_g T = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T = \dfrac{1}{|G|}|G|T = T.$

Agora, considere a função $P : Hom(V, W) \longrightarrow Hom_G(\varphi, \rho)$ definida por $P(T) = T^{\#}$. Vamos mostrar que P é uma transformação linear.

Sejam $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $T_1, T_2 \in Hom(V, W)$ arbitrários. Temos que:

$P(c_1T_1+c_2T_2) = (c_1T_1+c_2T_2)^{\#} = \dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}(c_1T_1+c_2T_2)\varphi_g = c_1\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T_1\varphi_g+c_2\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{g^{-1}}T_2\varphi_g = c_1T_1^{\#}+c_2T_2^{\#} = c_1P(T_1)+c_2P(T_2).$

Do exposto segue que P é uma transformação linear. □

Proposição 7. *Sejam G um grupo finito, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações irredutíveis e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, então:*

- *Se φ e ρ não são equivalentes então $T^{\#} = 0$;*
- *Se $\varphi = \rho$ então $T^{\#} = \dfrac{Tr(T^{\#})}{deg\varphi}I$ em que $deg\varphi$ é o grau da representação φ.*

Demonstração. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais com dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ e $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ representações irredutíveis e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear arbitrárias.

Suponha que φ e ρ não sejam equivalentes. Pelo Lema de Schur temos que $Hom(\varphi, \rho) = 0$. Como $T^{\#} \in Hom(\varphi, \rho)$, segue que $T^{\#} = 0$.

Suponha agora que $\varphi = \rho$. Pelo Lema de Schur temos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T^{\#} = \lambda I$. Como $T^{\#} : V \longrightarrow V$, temos que:

$$Tr(T^{\#}) = Tr(\lambda I) = \lambda Tr(I) = \lambda dimV = \lambda deg\varphi.$$

Assim, segue que $\lambda = \dfrac{Tr(T^{\#})}{deg\varphi}$. Portanto, $T^{\#} = \dfrac{Tr(T^{\#})}{deg\varphi}I$. □

Lema 5. *Sejam* $A \in M_{rm}(\mathbb{C})$*,* $B \in M_{ns}(\mathbb{C})$ *e* $E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$*. Então* $(AE_{ki}B)_{lj} = (a_{lk}b_{ij})$ *em que* $A = (a_{ij})$*,* $B = (b_{ij})$ *e* E_{ki} *é a matriz que tem* 1 *na entrada* ki *e* 0 *nas demais entradas.*

Demonstração. Sejam $A \in M_{rm}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{ns}(\mathbb{C})$ arbitrárias. Considere $E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$ a matriz que tem 1 na entrada ki e 0 nas demais entradas. Temos que:

$$(AE_{ki}B)_{lj} = \sum_{x,y} a_{lx}(E_{ki})_{xy}b_{yi}.$$

Da definição de E_{ki} temos que os únicos termos não nulos do somatório são aqueles obtidos quando $x = k$ e $y = i$. Deste modo, obtemos que $(AE_{ki}B)_{lj} = (a_{lk}b_{ij})$. □

Lema 6. *Sejam* G *um grupo finito e* $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ *e* $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ *representações unitárias. Seja* $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$*. Então* $A^{\#}_{lj} =< \varphi_{ij}, \rho_{kl} >$*.*

Demonstração. Sejam $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ representações unitárias arbitrárias. Seja $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$.

Como ρ é unitária, temos que $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1} = \rho_g^*$. Sendo assim, temos que $\rho_{lk}(g^{-1}) = \overline{\rho_{kl}(g)}$. Então:

$$A^{\#}_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_{g^{-1}} E_{ki} \varphi_g)_{lj}.$$

Pelo Lema 5 temos que:

$$A^{\#}_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{lk}(g^{-1}) \varphi_{ij}(g).$$

Portanto,

$$A^{\#}_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{kl}(g)} \varphi_{ij}(g) =< \varphi_{ij}, \rho_{kl} > .$$

□

Teorema 2. ***(Relação de Ortogonalidade de Schur)*** *Seja* G *um grupo finito. Se* $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ *e* $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ *são representações unitárias irredutíveis que não são equivalentes, então:*

1. $< \varphi_{ij}, \rho_{kl} >= 0$;

2. $< \varphi_{ij}, \varphi_{kl} >= \begin{cases} 1/n & \text{se } i{=}k \text{ e } j{=}l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$

Demonstração. Sejam $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ representações unitárias irredutíveis arbitrárias que não são equivalentes. Seja $A = E_{ki} \in M_{mn}(\mathbb{C})$ e $B = E_{ki} \in M_n(\mathbb{C})$.

Como φ e ρ não são equivalentes, pela Proposição 7, temos que $A^{\#} = E_{ki}^{\#} = 0$. Pelo Lema 6, temos que $A^{\#} = E_{ki}^{\#} =< \varphi_{ij}, \rho_{kl} >$. Portanto, $< \varphi_{ij}, \rho_{kl} >= 0$.

Para o item 2, usamos o segundo item da Proposição 7. Temos que:

$$B^{\#} = \frac{Tr(E_{ki}^{\#})}{deg(\varphi)} I \text{ e}$$
$$B_{lj}^{\#} =< \varphi_{ij}, \varphi_{kl} > .$$

Se $l \neq j$ então $I_{lj} = 0$ e assim $B_{lj}^{\#} =< \varphi_{ij}, \varphi_{kl} >= 0$. Se $i \neq k$ temos que $Tr(E_{ki}^{\#}) = 0$ e, portanto, $B_{lj}^{\#} =< \varphi_{ij}, \varphi_{kl} >= 0$.

Agora, suponha que $i = k$ e $j = l$. Temos então que $Tr(E_{ki}^{\#}) = 1$. E como $deg(\varphi) = n$ temos que $B_{lj}^{\#} =< \varphi_{ij}, \varphi_{kl} >= \dfrac{1}{n}$. □

3.3 CARACTERES E FUNÇÕES DE CLASSE

Definição 11. *Sejam G um grupo finito, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação. O caractere $\chi_\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de φ é definido por $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$.*

Observações:

1. Se a representação φ for irredutível então χ_φ é chamado de caractere irredutível;
2. Se $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ é dada por $\varphi_g = (\varphi_{ij}(g))$, então $\chi_\varphi(g) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g)$;
3. Se $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ é uma representação de grau 1, então $\chi_\varphi = \varphi$.

Proposição 8. *Sejam G um grupo finito e φ uma representação de G. Então $\chi_\varphi(1) = deg\varphi$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação arbitrários. Então:

$$\chi_\varphi(1) = Tr(\varphi_1) = Tr(I) = dimV = deg\varphi.$$

Portanto, $\chi_\varphi(1) = deg\varphi$. $\square$

Proposição 9. *Sejam φ e ρ representações equivalentes. Então $\chi_\varphi = \chi_\rho$.*

Demonstração. Sejam φ e ρ representações equivalentes abitrárias. Seja G um grupo finito e suponha que $\varphi, \rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Como φ e ρ são equivalentes, existe uma matriz inversível $T \in GL_(\mathbb{C})$ tal que $\varphi_g = T\rho_g T^{-1}$ para todo $g \in G$. Assim, dado $g \in G$ arbitrário, temos:

$$\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(T\rho_g T^{-1}) = Tr(T^{-1}T\rho_g) = Tr(\rho_g) = \chi_\rho(g)$$

$\square$

Proposição 10. *Sejam G um grupo finito e φ uma representação de G. Então $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1})$ para todo $g, h \in G$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, φ uma representação de G e $g, h \in G$ arbitrários. Então:

$$\chi_\varphi(hgh^{-1}) = Tr(\varphi_{hgh^{-1}}) = Tr(\varphi_h\varphi_g\varphi_{h^{-1}}) = Tr(\varphi_h\varphi_g\varphi_h^{-1}) =$$
$$=\mathrm{Tr}(\varphi_h^{-1}\varphi_h\varphi_g) = Tr(\varphi_g) = \chi_\varphi(g)$$

$\square$

Definição 12. *Sejam G um grupo finito e $a, b \in G$. Dizemos que a e b são conjugados se existir $g \in G$ tal que $b = gag^{-1}$. Temos que esta é uma relação de equivalência em G e as classes de equivalência são chamadas de classes de conjução. O número de classe de G é a quantidade de classes de conjugação distintas em G.*

Definição 13. *Seja G um grupo finito. Uma função $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita ser uma função de classe se $f(g) = f(hgh^{-1})$ para todo $g, h \in G$, ou seja, f é constante nas classes de conjução de G. O espaço das funções de classe será denotado por $Z(L(G))$.*

Observações:

1. Em particular, na Proposição 10 mostramos que caracteres são funções de classe;

2. Se $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe e C uma classe de conjugação, $f(C)$ denotará o valor contanste que f assume em C.

Proposição 11. *Seja G um grupo. Temos que $Z(L(G))$ é um subespaço de $L(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grupo, $f_1, f_2 \in Z(L(G))$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ arbitrários. Tome $g, h \in G$ quaisquer. Temos que:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)(hgh^{-1}) = c_1 f_1(hgh^{-1}) + c_2 f_2(hgh^{-1}) = \\ = c_1 f_1(g) + c_2 f_2(g) = (c_1 f_1 + c_2 f_2)(g).$$

Portanto, $(c_1 f_1 + c_2 f_2) \in Z(L(G))$. Assim, $Z(L(G))$ é subespaço de $L(G)$. □

Proposição 12. *Sejam G um grupo finito e $Cl(G)$ o conjunto de todas as classes de conjugação de G. Defina para cada $C \in Cl(G)$ a função*

$$\delta_C : G \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \delta_C(g) = \begin{cases} 1 & se\ g \in C \\ 0 & se\ g \notin C \end{cases}.$$

Seja $B = \{\delta_C | C \in Cl(G)\}$. Temos que B é uma base para $Z(L(G))$. Consequentemente, $dim Z(L(G)) = |Cl(G)|$. Ou seja, a dimensão do espaço das funções de classe de G é o número de classes de G.

Demonstração. Seja G um grupo abritrário. Considere $Cl(G)$ o conjunto de todas as classes de conjugação de G.

Defina para cada $C \in Cl(G)$ a função $\delta_C : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada como no enunciado. Seja $B = \{\delta_C | C \in Cl(G)\}$. Vamos mostrar que B forma uma base para $Z(L(G))$.

Pela definição da função δ_C, temos que ela é constante nas classes de conjugação de G. Assim, δ_C é uma função de classe. Ou seja, $\delta_C \in Z(L(G))$ para todo $C \in Cl(G)$.

Seja $f \in Z(L(G))$ arbitrário. Vamos mostrar que $f = \sum_{C(G)} f(C)\delta_C$. Tome $g \in G$ arbitrário.

Se $C' \in Cl(G)$ é a classe de conjugação de g então $f(g) = f(C')$, $\delta_{C'}(g) = 1$ e $\delta_C(g) = 0$ para todo $C \neq C'$. Desta forma, o único termo que não irá zerar no somatório é o $f(C')\delta_{C'}$. Portanto,

$$f(g) = f(C') = f(C') \cdot 1 = f(C')\delta_{C'}(g) = \sum_{C(G)} f(C)\delta_C(g).$$

Para mostrar que B é linearmente dependente vamos mostrar que B é um conjunto ortogonal. Sejam $\delta_{C_1}, \delta_{C_2} \in B$ arbitrários. Temos que:

$$< \delta_{C_1}, \delta_{C_2} >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_{C_1}(g)\overline{\delta_{C_2}(g)}.$$

Assim, se $C_1 \neq C_2$, temos que $< \delta_{C_1}, \delta_{C_2} >= 0$ pois quando $g \in C_1$ teremos que $\delta_{C_1}(g) = 1$ mas $\delta_{C_2}(g) = 0$ e nos demais casos os termos do somatório são todos nulos. Analogamente se $g \in \delta_{C_2}$ também teremos que todos os termos serão nulos. Se $g \notin \delta_{C_1}$ e $g \notin \delta_{C_2}$ então todos os termos serão nulos.

Se $C_1 = C_2$ então os únicos termos não nulos do somátorio serão quando $g \in C_1 = C_2$. Esses termos serão iguais a 1 pois $\delta_{C_1}(g) = \delta_{C_2}(g) = 1$. Desta forma, teremos que $< \delta_{C_1}, \delta_{C_2} >= \frac{|C_1|}{|G|} = \frac{|C_2|}{|G|}$.

Temos então que B é um conjunto ortogonal que gera $Z(L(G))$. Portanto, B é uma base de $Z(L(G))$. E como $|B| = |Cl(G)|$, temos que $dimZ(L(G)) = |Cl(G)|$. □

Teorema 3. ***(Primeira Relação de Ortogonalidade)*** *Sejam G um grupo finito e φ, ρ representações irredutíveis de G. Então:*

$$< \chi_\varphi, \chi_\rho >= \begin{cases} 1 & \textit{se } \varphi \textit{ e } \rho \textit{ são equivalentes} \\ 0 & \textit{se } \varphi \textit{ e } \rho \textit{ não são equivalentes} \end{cases}.$$ *Assim, o conjunto de caracteres irredutíveis formam um conjunto ortonormal em $Z(L(G))$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito e φ, ρ representações irredutíveis arbitrárias de G. Suponha sem perda de generalidade que $\varphi : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$ e $\rho : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ são unitárias. Temos que:

$$\begin{aligned} < \chi_\varphi, \chi_\rho > &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\varphi(g)\overline{\chi_\rho(g)} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ii}(g) \sum_{j=1}^{m} \overline{\rho_{jj}(g)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi_{ii}(g)\overline{\rho_{jj}(g)}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} < \varphi_{ii}(g), \rho_{jj}(g) > . \end{aligned}$$

Se φ e ρ não são equivalentes então $< \varphi_{ii}(g), \rho_{jj}(g) >= 0$ pelo Teorema 2. Sendo assim, $< \chi_\varphi, \chi_\rho >= 0$.

Se φ e ρ são equivalentes então suponha que $\varphi = \rho$. Assim,

$$< \varphi_{ii}, \rho_{jj} >=< \varphi_{ii}, \varphi_{ii} >= \frac{1}{n}.$$

E, portanto,

$$< \chi_\varphi, \chi_\rho >= \sum_{i=1}^{n} < \varphi_{ii}, \varphi_{ii} >= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

$\square$

Corolário 5. *Seja G um grupo finito. Então existem no máximo $|Cl(G)|$ classes de equivalência de representações irredutíveis de G.*

Definição 14. *Sejam G um grupo finito e ρ uma representação de G. Se ρ é equivalente a $m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$ então m_i é dito ser a multiplicidade de $\varphi^{(i)}$ em ρ. Se $m_i > 0$, então dizemos que $\varphi^{(i)}$ é um constituinte irredutível de ρ. Observe que $deg\rho = m_1d_1 + ... + m_sd_s$.*

Lema 7. *Sejam G um grupo finito e φ, ρ, ψ representações de G. Se $\varphi = \rho \oplus \psi$ então $\chi_\varphi = \chi_\rho + \chi_\psi$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito e φ, ρ, ψ representações de G arbitrários. Suponha que $\varphi = \rho \oplus \psi$.

Digamos que $\rho : G \longrightarrow U_n(\mathbb{C})$, $\psi : G \longrightarrow U_m(\mathbb{C})$ e $\varphi : G \longrightarrow U_{n+m}(\mathbb{C})$. Como $\varphi = \rho \oplus \psi$, temos a seguinte forma matricial de bloco:

$$\varphi_g = \begin{bmatrix} \rho_g & 0 \\ 0 & \psi_g \end{bmatrix}.$$

Para $g \in G$ arbitrário, segue que $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g) = Tr(\rho_g) + Tr(\psi_g) = \chi_\rho(g) + \chi_\psi(g)$.

Portanto, $\chi_\varphi = \chi_\rho + \chi_\psi$. $\square$

Teorema 4. *Sejam G um grupo finito, ρ uma representação de G e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis de G. Se ρ é equivalente a $m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$ então $m_i =< \chi_\rho, \chi_{\varphi^{(i)}} >$. Consequentemente, a decomposição de ρ em termos irredutíveis é única.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, ρ uma representação de G e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações irredutíveis de G arbitrários.

Suponha que ρ é equivalente a $m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$.

Pelo Lema 7 temos que $\chi_\rho = m_1\chi_{\varphi^{(1)}} + ... + m_s\chi_{\varphi^{(s)}}$. Assim,

$$< \chi_\rho, \chi_{\varphi^{(i)}} >=< m_1\chi_{\varphi^{(1)}} + ... + m_s\chi_{\varphi^{(s)}}, \chi\varphi^{(i)} >=$$
$$= m_1 < \chi_{\varphi^{(1)}},_{\varphi^{(i)}} > +... + m_s < \chi_{\varphi^{(s)}}, \chi_{\varphi^{(i)}} > .$$

Pelo Teorema 3, temos que o único termo não nulo desta soma será $m_i < \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_{\varphi^{(i)}} >$ e $< \chi_{\varphi^{(i)}}, \chi_{\varphi^{(i)}} >= 1$. Deste modo, $< \chi_\rho, \chi_{\varphi^{(i)}} >= m_i$. □

Corolário 6. *Sejam G um grupo finito e ρ uma representação de G. Temos que ρ é irredutível se, e somente se, $< \chi_\rho, \chi_\rho >= 1$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito e ρ uma representação de G arbitrários. Suponha que ρ é irredutível. Então, pelo Teorema 3, temos que $< \chi_\rho, \chi_\rho >= 1$.

Suponha agora que $< \chi_\rho, \chi_\rho >= 1$. Suponha também que ρ é equivalente a $m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$ em que $\varphi^{(i)}$ é uma representação irredutível de G para todo $i \in \{1, ..., s\}$.

Pelo Teorema 3, obtemos:

$$< \chi_\rho, \chi_\rho >=< m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}, m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)} >=$$
$$= m_1^2 + ... + m_s^2.$$

Como $< \chi_\rho, \chi_\rho >= 1$ e $m_1, ..., m_s$ são inteiros não negativos, temos que existe $j \in \{1, ..., s\}$ tal que $m_j = 1$ e $m_i = 0$ para todo $i \neq j$. Disso segue que ρ é irredutível. □

Exemplo 8. *Considere a representação ρ do grupo S_3 feita no Exemplo 4. Temos que:*

$$\chi_\rho(Id) = Tr(\rho_{Id}) = Tr(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 2,$$

$$\chi_\rho(12) = Tr(\rho_{(12)}) = Tr(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0 \ e$$

$$\chi_\rho(123) = Tr(\rho_{(123)}) = Tr(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = -1.$$

E como $Id, (12), (123)$ formam um conjunto completo de representantes das classes de conjugação de S_3, podemos calcular o produto interno $< \chi_\rho, \chi_\rho >$ usando os valores obtidos acima. Como $|S_3| = 6$ e temos três transposições e dois ciclos de três, segue que:

$$< \chi_\rho, \chi_\rho >= \frac{1}{6}(2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = \frac{1}{6}(4 + 2) = 1.$$

Sendo assim, pelo Corolário 7, ρ é irredutível.

3.4 A REPRESENTAÇÃO REGULAR

Definição 15. *Sejam G um grupo finito. A representação regular de G é o homomorfismo $L : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}G)$ definido por*

$$L_g \sum_{h\in G} c_h h = \sum_{h\in G} c_h gh = \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x \text{ para cada } g \in G$$

em que $\mathbb{C}G = \{\sum_{g\in G} c_g g | c_g \in \mathbb{C}\}$.

Proposição 13. *Seja G um grupo finito. Então a representação regular de G é uma representação unitária.*

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Vamos mostrar que L é de fato um homomorfismo. Tome $g_1, g_2 \in G$ e $h \in G$ um elemento base de $\mathbb{C}G$ arbitrários. Temos que:

$$L_{g_1} L_{g_2} h = L_{g_1} g_2 h = g_1 g_2 h = L_{g_1 g_2} h$$

Sendo assim, L é um homomorfismo.

Agora, seja $g \in G$ arbitrário. Vamos mostrar que L_g é unitária. Temos que:

$$< L_g \sum_{h\in G} c_h h, L_g \sum_{h\in G} k_h h >=< \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} x, \sum_{x\in G} k_{g^{-1}x} x >=$$
$$= \sum_{x\in G} c_{g^{-1}x} \overline{k_{g^{-1}x}} = *$$

Fazendo uma mudança de variável $y = g^{-1}x$ obtemos:

$$* = \sum_{y\in G} c_y\overline{k_y} =< \sum_{y\in G} c_y y, \sum_{y\in G} k_y y > .$$

Logo, L_g é unitária. $\square$

Proposição 14. *Seja G um grupo finito. Então o caractere da representação regular de G é dado por:*

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & se\ g = 1 \\ 0 & se\ g \neq 1 \end{cases} .$$

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Digamos $G = \{g_1, ..., g_n\}$ em que $|G| = n$. Então $L_g g_j = gg_j$.

Como G é uma base para $\mathbb{C}G$, considere $L_{gi,j}$ a matriz da representação L_g com respeito a base G. Temos que:

$$L_{gi,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } g_i = gg_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_i g_j^{-1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Em particular, temos que $L_{gi,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_i g_i^{-1} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Desta forma, obtemos:

$$\chi_L(g) = Tr(L_g) = \begin{cases} |G| & \text{se } g = 1 \\ 0 & \text{se } g \neq 1 \end{cases} .$$

$\square$

Teorema 5. *Sejam G um grupo, L a representação regular de G e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis e unitárias de G. Então L é equivalente a $d_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus d_s\varphi^{(s)}$.*

Demonstração. Seja G um grupo arbitrário. Considere L a representação regular de G e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis e unitárias de G.

Suponha que L é equivalente a $m_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus m_s\varphi^{(s)}$. Pelo Teorema 4, temos que $m_i =< \chi_L, \chi_{\varphi^{(i)}} >$.

Pela Proposição 15 temos que $\chi_L(g) = |G|$ se $g = 1$ e $\chi_L(g) = 0$ se $g \neq 1$. Assim, temos que:

$$< \chi_L, \chi_{\varphi^{(i)}} >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_L(g) \overline{\chi_{\varphi^{(i)}}(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_L(1) \overline{\chi_{\varphi^{(i)}}(1)} =$$
$$= \frac{1}{|G|} |G| \overline{\chi_{\varphi^{(i)}}(1)} = deg \varphi^{(i)} = d_i.$$

Portanto, L é equivalente a $d_1\varphi^{(1)} \oplus ... \oplus d_s\varphi^{(s)}$. □

Corolário 7. *Sejam G um grupo finito e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis e unitárias de G. Então $|G| = d_1^2 + ... + d_s^2$.*

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Considere $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações irredutíveis e unitárias de G.

Pelo Teorema 5 e pelo Lema 7, temos que:

$$\chi_L = d_1\chi_{\varphi^{(1)}} + ... + d_s\chi_{\varphi^{(s)}}.$$

Avaliando χ_L em 1 obtemos:

$$|G| = \chi_L(1) = d_1\chi_{\varphi^{(1)}}(1) + ... + d_s\chi_{\varphi^{(s)}}(1) =$$
$$= d_1 deg\varphi^{(1)} + ... + d_s deg\varphi^{(s)} =$$
$$= d_1^2 + ... + d_s^2.$$

□

Teorema 6. *Sejam G um grupo finito e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações irredutíveis e unitárias de G. O conjunto $B = \{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)} | 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k\}$ forma uma base ortonormal para $L(G)$.*

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Considere $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis e unitárias de G. Defina $B = \{\sqrt{d_k}\varphi_{ij}^{(k)} | 1 \leq k \leq s, 1 \leq i, j \leq d_k\}$.

Pelo Teorema 2, temos que B é um conjunto ortonormal. Como $|B| = d_1^2 + ... + d_s^2 = |G| = dimL(G)$, temos que B é base para $L(G)$. □

Teorema 7. *Sejam G um grupo finito e $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(s)}$ um conjunto completo de representações de representações irredutíveis e unitárias de G. O conjunto $B = \{\chi_{\varphi^{(1)}}, ..., \chi_{\varphi^{(s)}}\}$ forma uma base ortonormal para $Z(L(G))$.*

Corolário 8. *Seja G um grupo finito. Então o número de classes de equivalência de representações irredutíveis de G é o número de classes de conjugação de G.*

Corolário 9. *Seja G um grupo finito. Temos que G é abeliano se, e somente se, possui $|G|$ classes de equivalência de representações irredutíveis.*

Daqui pra frente vamos denotar $\chi_{\varphi^{(i)}}$ por χ_i.

Definição 16. *Seja G um grupo finito com caracteres irredutíveis $\chi_1, ..., \chi_s$ e classes de conjugação $C_1, ..., C_s$. A tabela de caracteres de G é uma matriz X de ordem $s \times s$ tal que $X_{i,j} = \chi_i(C_j)$.*

Teorema 8. ***(Segunda Relação de Ortogonalidade)*** *Sejam G um grupo finito, C, C' classes de conjugação de G, $g \in C$ e $h \in C'$. Então:*

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|C|} & se\ C = C' \\ 0 & se\ C \neq C' \end{cases}.$$

Consequentemente, as colunas da tabela de caracteres são ortogonais e, assim, a tabela de caracteres é invertível.

Demonstração. Sejam G um grupo finito, C, C' classes de conjugação de G, $g \in C$ e $h \in C'$ arbitrários. Usando que $\delta_{C'} = \sum_{i=1}^{s} < \delta_{C'}, \chi_i > \chi_i$, para temos que:

$$\begin{aligned} \delta_{C'}(g) = \sum_{i=1}^{s} < \delta_{C'}, \chi_i > \chi_i(g) = \\ = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \delta_{C'}(x)\overline{\chi_i(x)}\chi_i(g) = \\ = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in C'} \overline{\chi_i(x)}\chi_i(g) = \\ = \frac{|C'|}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)}. \end{aligned}$$

Como $\delta_{C'}(a) = 1$ quando $a \in C'$ e $\delta_{C'}(a) = 0$ caso contrário, podemos concluir que:

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = \begin{cases} \dfrac{|G|}{|C|} & \text{se } C = C' \\ 0 & \text{se } C \neq C' \end{cases}.$$

$\square$

3.5 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS ABELIANOS

Proposição 15. *Sejam G_1, G_2 grupos abelianos finitos. Suponha que $\chi_1, ..., \chi_m$ e $\varphi_1, ..., \varphi_n$ são representações irredutíveis de G_1, G_2 respectivamente. Em particular, $|G_1| = m$ e $|G_2| = n$. Então as funções $\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ dadas por $\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)$ formam um conjunto completo de representações irredutíveis de $G_1 \times G_2$.*

Demonstração. Sejam G_1, G_2 grupos abelianos finitos arbitrários. Suponha que $\chi_1, ..., \chi_m$ e $\varphi_1, ..., \varphi_n$ são representações irredutíveis de G_1, G_2 respectivamente. Defina $\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ por $\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)$.

Primeiro, vamos mostrar que α_{ij} é um homomorfismo. Tome $(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times G_2$ arbitrários. Temos que:

$$\begin{gathered}\alpha_{ij}(g_1, g_2)\alpha_{ij}(g_1', g_2') = \chi_i(g_1)\varphi_j(g_2)\chi_i(g_1')\varphi_j(g_2') = \\ = \chi_i(g_1)\chi_i(g_1')\varphi_j(g_2)\varphi_j(g_2') = \chi_i(g_1g_1')\varphi_j(g_2g_2') = \alpha_{ij}(g_1g_1', g_2g_2') = \\ = \alpha_{ij}((g_1, g_2)(g_1', g_2')).\end{gathered}$$

Agora, suponha $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$. Vamos mostrar que $i = k$ e $j = l$. Sejam $g \in G_1$ e $h \in G_2$ arbitrários. Temos que:

$$\begin{gathered}\chi_i(g) = \alpha_{ij}(g, 1) = \alpha_{kl}(g, 1) = \chi_k(g) \text{ e} \\ \varphi_j(h) = \alpha_{ij}(1, h) = \alpha_{kl}(1, h) = \varphi_l(h).\end{gathered}$$

Assim, segue que $i = k$ e $j = l$.

Como $G_1 \times G_2$ possui $|G_1 \times G_2| = mn$ representações irredutíveis distintas, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, segue que o $\{\alpha_{ij} : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{C}^* | 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n\}$ é um conjunto completo de representações irredutíveis de $G_1 \times G_2$. $\square$

4 ANÁLISE DE FOURIER EM GRUPOS FINITOS

4.1 FUNÇÕES PERIÓDICAS EM GRUPOS CÍCLICOS

Definição 17. *Seja $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é periódica com período $n \in \mathbb{Z}$ se $f(x) = f(x+n)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.*

Definição 18. *Seja $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. Definimos a sua trasnformada de Fourier por $\widehat{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ descrita como $\widehat{f}([m]) = n < f, \chi_m >= \sum_{k=0}^{n-1} f([k])e^{-2\pi imk/n}$.*

Proposição 16. *A transformada de Fourier é inversível. Mais precisamente, $f = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}([k])\chi_k$.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função arbitrária. Tome $[m] \in \mathbb{Z}_n$ qualquer. Temos que:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}([k])\chi_k([m]) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} f([l])\chi_k(l)\overline{\chi_k(m)} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k,l}^{n-1} f([l])e^{\frac{2\pi i}{n}k(l-m)} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f([l])[\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}k(l-m)}] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f([m]) =$$

$$= \frac{1}{n}(n \cdot f([m])) = f([m]).$$

$\square$

4.2 O PRODUTO CONVOLUÇÃO

Definição 19. *Sejam G um grupo finito e $a, b \in L(G)$. Definimos a convolução $a * b : G \longrightarrow \mathbb{C}$ por $(a * b)(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y)$ para cada $x \in G$.*

Agora, sendo G um grupo finto, para cada $g \in G$ iremos denotar $\delta_g = \delta_C$ em que $g \in C$ e $C \in Cl(G)$.

Proposição 17. *Sejam G um grupo finito e $g, h \in G$. Temos que $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, $g, h, x \in G$ arbitrários. Temos que:

$$(\delta_g * \delta_h)(x) = \sum_{y \in G} \delta_g(xy^{-1})\delta_h(y) = \delta_g(xh^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = xh^{-1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

$$(\delta_g * \delta_h)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = gh \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \delta_{gh}(x).$$

$\square$

Teorema 9. *Seja G um grupo finito. O conjunto $L(G)$ é um anel com a soma ponto a ponto e a multiplicação convolução. Além disso, δ_1 é a identidade da multiplicação.*

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Tome $a, b, c \in L(G)$ e $g \in G$ arbitrários. Temos que:

- $(a + b)(g) = a(g) + b(g) = b(g) + a(g) = (b + a)(g)$.

- $((a + b) + c)(g) = (a + b)(g) + c(g) = a(g) + b(g) + c(g) =$

$= a(g) + (b+c)(g) = (a+(b+c))(g).$

- $0_{L(G)} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $0_{L(G)}(h) = 0$ para todo $h \in G$ é o elemento netro da soma. De fato,

  $$(a + 0_{L(G)})(g) = a(g) + 0_{L(G)}(g) = a(g) + 0 = a(g).$$

- $(-a) : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $(-a)(h) = -(a(h))$ para todo $h \in G$ é o elemento oposto de a. De fato,

  $$(a+(-a))(g) = a(g)+(-a)(g) = a(g)+(-(a(g))) = 0 = 0_{L(G)}(g).$$

- $\delta_1 : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $\delta_1(h) = 1$ se $h = 1$ e $\delta_1(h) = 0$ caso contrário é o elemento neutro da multiplicação. De fato,

  $$(a * \delta_1)(g) = \sum_{h\in G} a(gh^{-1})\delta_1(h).$$

  Temos que $\delta_1(h) = 1$ quando $h = 1$ e, neste caso, $h^{-1} = 1$. Deste modo, o único termo não nulo do somatório será o termo $a(g \cdot 1^{-1})\delta_1(1) = a(g) \cdot 1 = a(g)$. Portanto,

  $$(a * \delta_1)(g) = a(g).$$

- $((a * b) * c)(g) = \sum_{h\in G}(a * b)(gh^{-1})c(h) =$

  $= \sum_{h\in G} \sum_{k\in G} a(gh^{-1}k^{-1})b(k)c(h).$

  Fazendo uma mudança de variável $u = kh$, temos que $u^{-1} = h^{-1}k^{-1}$ e $k = uh^{-1}$. Assim,

  $((a * b) * c)(g) = \sum_{h\in G} \sum_{u\in G} a(gu^{-1})b(uh^{-1})c(h) =$

  $= \sum_{u\in G} a(gu^{-1}) \sum_{h\in G} b(uh^{-1})c(h) =$

  $= \sum_{u\in G} a(gu^{-1})(b * c)(u) = (a * (b * c))(g).$

- $(a*(b+c))(g) = \sum_{h\in G} a(gh^{-1})[(b+c)(h)] =$

  $= \sum_{h\in G} a(gh^{-1})(b(h)+c(h)) = \sum_{h\in G}[a(gh^{-1})b(h)+a(gh^{-1})c(h)] =$

  $= \sum_{h\in G} a(gh^{-1})b(h) + \sum_{h\in G} a(gh^{-1})c(h) = a*b+a*c.$

- $((a+b)*c)(g) = \sum_{h\in G}[(a+b)(gh^{-1})]c(h) =$

  $= \sum_{h\in G}(a(gh^{-1})+b(gh^{-1}))c(h) = \sum_{h\in G}[a(gh^{-1})c(h)+b(gh^{-1})c(h)] =$

  $= \sum_{h\in G} a(gh^{-1})c(h) + \sum_{h\in G} b(gh^{-1})c(h) = a*c+b*c.$

Do exposto, segue que $(L(G),+,*)$ é um anel. □

Proposição 18. *Seja G um grupo finito. O conjunto das funções de classe Z(L(G)) é o centro do anel L(G). Isto é, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função de classe se, e somente se, $a*f = f*a$ para todo $a \in L(G)$.*

Demonstração. Seja G um grupo finito arbitrário. Tome $a, f \in L(G)$ e $x \in G$ arbitrários.

Primeiro, suponha que $f \in Z(L(G))$. Temos que:

$$(a*f)(x) = \sum_{y\in G} a(xy^{-1})f(y).$$

Como f é uma função de classe, temos que $f(y) = f(xyx^{-1})$. Assim,

$$(a*f)(x) = \sum_{y\in G} a(xy^{-1})f(xyx^{-1}).$$

Fazendo uma mudança de variável $z = xy^{-1}$ obtemos:

$$(a*f)(x) = \sum_{z\in G} a(z)f(xz^{-1}) = \sum_{z\in G} f(xz^{-1})a(z) = (f*a)(x).$$

Agora, suponha que $f*a = a*f$. Vamos mostrar que $f \in Z(L(G))$.

Afirmação: $f(gh) = f(hg)$ para todo $g,h \in G$.

De fato, $f(gh) = \sum_{y\in G} f(gy^{-1})\delta_{h^{-1}}(y) = f*\delta_{h^{-1}} =$

$= \delta_{h^{-1}} * f = \sum_{y \in G} \delta_{h^{-1}}(gy^{-1})f(y) = f(hg).$

Sendo assim, seja $y \in G$ arbitrário, temos que $f(xyx^{-1}) = f(yx^{-1}x) = f(y)$. Portanto, $f \in Z(L(G))$. □

4.3 ANÁLISE DE FOURIER E GRUPOS ABELIANOS FINITOS

Definição 20. *Seja G um grupo abeliano finito. Considere $\widehat{G}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Este conjunto é chamado de grupo dual de G.*

Proposição 19. *Seja G um grupo abeliano finito. Usando a multiplicação ponto a ponto em $\widehat{G}$, temos que $\widehat{G}$ é um grupo abeliano de ordem $|G|$.*

Demonstração. Seja G um grupo abeliano finito arbitrário. Sejam $\chi, \theta, \phi \in \widehat{G}$ e $g_1, g_2 \in G$ arbitrários. Temos que:

$$(\chi\theta)(g_1g_2) = \chi(g_1g_2)\theta(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)\theta(g_1)\theta(g_2) =$$
$$= \chi(g_1)\theta(g_1)\chi(g_2)\theta(g_2) = (\chi\theta)(g_1)(\chi\theta)(g_2).$$

Assim, $\widehat{G}$ é fechado com relação ao produto. Além disso,

$$(\chi\theta)(g_1) = \chi(g_1)\theta(g_1) = \theta(g_1)\chi(g_1) = (\theta\chi)(g_1).$$

E também,

$$[(\chi\theta)\phi](g_1) = [(\chi\theta)(g_1)]\phi(g_1) = \chi(g_1)\theta(g_1)\phi(g_1) =$$
$$= \chi(g_1)[(\theta\phi)(g_1)] = [\chi(\theta\phi)](g_1).$$

O elemento neutro do produto será o caractere $\chi_1 : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definido por $\chi_1(g) = 1$ para todo $g \in G$. De fato,

$$(\chi_1\theta)(g_1) = \chi_1(g_1)\theta(g_1) = 1 \cdot \theta(g_1) = \theta(g_1).$$

O inverso de χ será dado por $\chi^{-1}(g) = (\chi(g))^{-1} = \overline{\chi(g)}$ para todo $g \in G$.

Do exposto, segue que $\widehat{G}$ é um grupo abeliano com o produto ponto a ponto. □

Definição 21. *Sejam G um grupo abeliano finito e $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função. A transformação de Fourier $\widehat{f} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por:*

$$\widehat{f}(\chi) = |G| < f, \chi >= \sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi(g)}.$$

Os números complexos $|G| < f, \chi >$ são chamados os coeficientes de Fourier de f.

Teorema 10. *Seja G um grupo abeliano finito. Se $f \in L(G)$ então $f = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi$.*

Demonstração. Sejam G um grupo abeliano finito e $f \in L(G)$ arbitrários. Temos que:

f$=\sum_{\chi\in\widehat{G}} < f, \chi > \chi = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\widehat{G}} |G| < f, \chi > \chi = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi$

□

Corolário 10. *Seja G um grupo abeliano finito. A função $T : L(G) \longrightarrow L(\widehat{G})$ dada por $T(f) = \widehat{f}$ é uma transformação linear invertível.*

Demonstração. Seja G um grupo abeliano finito arbitrário. Defina a função $T : L(G) \longrightarrow L(\widehat{G})$ por $T(f) = \widehat{f}$. Sejam $f_1, f_2 \in L(G)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $\chi \in \widehat{G}$ arbitrários. Digamos que $|G| = n$. Temos que:

[T($c_1 f_1 + c_2 f_2$)]$(\chi) = (c_1 \widehat{f_1 + c_2} f_2)(\chi) = n < c_1 f_1 + c_2 f_2, \chi >=$

$= nc_1 < f_1, \chi > + nc_2 < f_2, \chi >= c_1 \widehat{f_1}(\chi) + c_2 \widehat{f_2}(\chi) =$

$= c_1[T(f_1)](\chi) + c_2[T(f_2)](\chi).$

Portanto, T é uma transformação linear. Pelo Teorema 10, temos que T é injetora. E como $dimL(G) = dimL(\widehat{G})$, temos que T é invertível. □

Teorema 11. *Sejam G um grupo finito e $a, b \in L(G)$. Então $\widehat{a * b} = \widehat{a} \cdot \widehat{b}$.*

Demonstração. Sejam G um grupo finito, $a, b \in L(G)$ e $\chi \in \widehat{G}$ arbitrários. Digamos que $|G| = n$. Temos que:

$\widehat{a*b}(\chi) = \sum_{x\in G}(a*b)(x)\overline{\chi(x)} = \sum_{x\in G}\overline{\chi(x)}\sum_{y\in G}a(xy^{-1})b(y) =$

$= \sum_{y\in G}b(y)\sum_{x\in G}a(xy^{-1})\overline{\chi(x)}.$

Fazendo uma mudança de variável $z = xy^{-1}$, temos que $x = zy$. Assim,

$\widehat{a*b}(\chi) = \sum_{y\in G}b(y)\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(zy)} = \sum_{y\in G}b(y)\overline{\chi(y)}\sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)} =$

$= \sum_{z\in G}a(z)\overline{\chi(z)}\sum_{y\in G}b(y)\overline{\chi(y)} = \widehat{a}(\chi)\cdot\widehat{b}(\chi).$

$\square$

Exemplo 9. *Considere o grupo* $\mathbb{Z}_n$*. Defina* $w_n = e^{2\pi i/n}$ *e* $\chi_k : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *por* $\chi_k([m]) = w_n^{km}$ *para todo* $[m] \in \mathbb{Z}_n$ *com* $0 \leq k \leq n-1$*. Então* $\chi_0, ..., \chi_{n-1}$ *são representações irredutíveis de* $\mathbb{Z}_n$*.*

Considere agora o grupo $\mathbb{Z}_3$*. Temos que* $\widehat{\mathbb{Z}_3} = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2\}$*. Então obtemos a seguinte tabela de caracteres irredutíveis de* $\mathbb{Z}_3$*:*

$$\begin{bmatrix} \chi_0([0]) & \chi_0([1]) & \chi_0([2]) \\ \chi_1([0]) & \chi_1([1]) & \chi_1([2]) \\ \chi_2([0]) & \chi_2([1]) & \chi_2([2]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{bmatrix}.$$

Considere a função $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por* $f([k]) = sen(2\pi k/3)$*. Assim,* $\widehat{f} : \widehat{\mathbb{Z}_3} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é dada por:*

$\widehat{f}(\chi_0) = f([0])\chi_0([0]) + f([1])\chi_0([1]) + f([2])\chi_0([2]) =$

$$= sen(0) \cdot 1 + sen(2\pi/3) \cdot 1 + sen(4\pi/3) \cdot 1 =$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$\widehat{f}(\chi_1) = f([0])\chi_1([0]) + f([1])\chi_1([1]) + f([2])\chi_1([2]) =$$

$$= sen(0) \cdot 1 + sen(2\pi/3) \cdot w + sen(4\pi/3) \cdot w^2 =$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}w - \frac{\sqrt{3}}{2}w^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(w - w^2).$$

$$\widehat{f}(\chi_2) = f([0])\chi_2([0]) + f([1])\chi_2([1]) + f([2])\chi_2([2]) =$$

$$= sen(0) \cdot 1 + sen(2\pi/3) \cdot w^2 + sen(4\pi/3) \cdot w =$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}w^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}w$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(w^2 - w).$$

Em que $w = e^{2\pi i/3}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado apenas uma introdução desta teoria. Daqui pra frente, poderíamos obter diversas aplicações. A partir do que foi apresentado, uma continuação natural seria o Teorema da Dimensão. Também poderíamos ver a Análise de Fourier em grupos não abelianos. Ambos tópicos são abordados no livro Representation Theory of Finite Groups.

Pode-se também seguir o estudo na Teoria de Categorias e analisar todas as características da Categoria de Representação. Neste caminho, seria possível ver alguns resultados apresentados neste trabalho de forma generalizada.

REFERÊNCIAS

1.STEINBERG, B.: *Representation Theory of Finite Groups*. Springer, 2012.

2.AMARO, J.: *Teoremas de dualidade de Tannaka-Krein*, 2017.

3.MORTARI, A.D.M.: *Representação de Grupos Finitos*, 2004.

4.ETINGOF, P.; et al: *Introduction to Representation Theory*, AMS, 2010.