UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Comportamento assintótico da solução de uma Equação de Onda via Transformada de Fourier

Mateus Patrício

Florianópolis
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Comportamento assintótico da solução de uma Equação de Onda via Transformada de Fourier

Mateus Patrício

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis
2019

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a minha família: meu pai Marcelo, minha mãe Márcia e meus irmãos, Micael, Moisés e, agora, a Débora; pois são a minha base, as pessoas com quem sempre posso contar, que vão estar sofrendo e comemorando comigo em todos os meus momentos. Agradeço a meus avós, aos meus tios, em especial, à tia Raquel e à tia Nena (Constância), a todos os meus primos e parentes em geral, destacando aqui, a Franciele.

Sou muito grato ao seu Laércio e a dona Albertina, o meu casal de professores preferido, que foram incentivadores do meu sonho, desde quando eu estava no Ensino Fundamental. Assim como aproveito para agradecer a todos os professores que tive no meu ensino básico.

Sempre tive comigo o sonho de ser professor. Quando mudei de Ciência da Computação para a Matemática, fiz Fundamentos I com o professor Leandro Batista Morgado e foi ali que tive certeza de que havia feito a escolha certa. Suas aulas são sensacionais e são um exemplo para mim.

Durante o curso, enfrentamos diversas dificuldades, e é muito difícil conciliar a universidade com o trabalho, além da vida social rsrs. Mas a UFSC me proporcionou muitas coisas boas, entre elas, os amigos que vou levar para a vida, como a Beli, o Leo, o Carlinhos, o Gabi, o João, a Ana e o Vini, o Rodrigo, a Lidiane, o Bruscato, a Karen, o Getúlio, o Rafa, e todos os meus amigos da matemática e dos outros cursos do CFM, que foram meus parceiros de vida e de campeonatos; são tantos, que não caberiam aqui. Vocês foram e são muito importantes para mim.

Mais do que merecido, este espaço está reservado para os melhores amigos que fiz nesta graduação: a Amanda, o Pedrinho, o Pimenta, o Graciani, o Jean, a Andresa e o Joaquim. Amanda: Sempre que tenho a oportunidade, eu nunca deixo de falar, pois você é a pessoa mais alto astral que conheço. Você é muito positiva e sua alegria contagiante, fez com que meus primeiros semestres fossem incríveis. Pedrinho: muito obrigado por toda a parceria e pelas horas em que ficávamos conversando. Agradeço demais por toda à análise e combinatória que aprendi contigo e pela indicação no CEM (Centro de Estudos Matemáticos). Você é o melhor leitor que conheço, e suas falas são tão inteligentes, que fico horas conversando, sem reparar no tempo. Pimenta: cara, eu nem sei como te agradecer. O maior parceiro de estudo, futebol, rolês. Véi, só agradeço por tua amizade. Vocês três fazem uma falta gigante; Floripa não é a mesma sem vocês. Quando me pego pensando nesses bons tempos em que compartilhamos, a saudade aumenta ainda mais. Graciani e Andresa, especialmente nesse último ano, vocês foram as pessoas mais próximas a mim. A amizade de vocês me deu força para conseguir completar mais este ano.

Apesar de eu dizer que foi difícil conciliar, o trabalho no CEM me proporcionou um aprendizado muito grande na matemática, além das pessoas incríveis que conheci lá. Fica aqui, meu carinho a todos os meus colegas e aos queridos alunos, que também se tornaram meus amigos.

Quando eu estava no meio da minha graduação, chegou um momento em que pensei em desistir, mas havia uma professora muito especial no meu caminho: professora Silvia Martini de Holanda. Eu amo você demais. Você é luz, você é fantástica e suas aulas são brilhantes, além de ser a melhor coordenadora de curso que alguém poderia querer. Você me fez amar o Cálculo, que me fez amar de novo a Matemática. Sou extremamente grato e tenho a honra de dizer que fui seu aluno.

Vários professores foram fundamentais para a minha formação, e gostaria de agradecer a professora Rosilene, o professor Gilson e o professor Danilo. Destaco aqui, o professor Douglas Soares Gonçalves, com quem tive Álgebra Linear, e tenho o prazer de tê-lo como amigo. Fico muito feliz de ter você e o professor Morgado em minha banca de TCC.

Por fim, expresso aqui minha gratidão ao professor Cleverson Roberto da Luz. Durante este TCC, sempre que eu precisava, estava pronto a me atender. Eu aprendi muita matemática contigo. Não poderia ter escolhido alguém melhor para ser meu orientador neste projeto. Obrigado pela amizade, pela compreensão e pelo tempo que dedicou. Este trabalho só foi possível por sua causa.

"Tudo o que vale a pena ser feito,
merece e exige ser bem feito!"
(Philip Chesterfield)

Resumo

A Equação da Onda é uma importante equação diferencial parcial, recorrentemente vista em estudos de matemática aplicada que, de algum modo, analisem fenômenos de propagação de ondas, tais como acústicas, eletromagnéticas, aquáticas, sísmicas, entre outras. Neste trabalho, será apresentado um estudo da solução do Problema de Cauchy, para a Equação da Onda com termo dissipativo, fazendo uma análise do comportamento assintótico dessa solução via Transformada de Fourier.

Palavras chave: Equação da Onda, Transformada de Fourier, análise da solução.

Abstract

The Wave Equation is an important partial diferential equation, recurrently seen in applied mathematics studies that, somehow, analyze wave propagation phenomena, such as acoustic, electromagnetic, aquatic, seismic, among others. In this work, a study of the solution of Cauchy's Problem, for the Wave Equation with a dissipative term, will be presented, by doing an analysis of the asymptotic behavior of this solution by Fourier Transformation.

Keywords: Wave Equation, Fourier Transformation, solution analysis.

Sumário

1 Introdução

As Equações Diferenciais Parciais são uma parte muito importante da Matemática e formam uma subárea da Análise. A pesquisa em Equações Diferenciais Parciais envolve vários aspectos tais como resultados de existência, unicidade, regularidade e comportamento assintótico de soluções para problemas de valor inicial e/ou de contorno.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, são pré-requisitos, determinados conhecimentos de análise e, deste modo, o projeto se inicia com abordagens acerca de resultados de topologia. Além disso, é relevante se ter uma ideia geral sobre equações diferenciais ordinárias e parciais.

Assim, fica estruturada a base deste trabalho, cujo emprego de valor se justifica no fato de que alguns conteúdos estudados não são parte integral, até o presente momento, do currículo de disciplinas obrigatórias no curso de Licenciatura em Matemática na UFSC. Portanto, torna-se essencial o aprimoramento inicial desses conhecimentos.

Após a comprovação destes importantes resultados, será possível caracterizar um dos objetivos centrais desse trabalho, que consiste no estudo das Transformadas de Fourier e algumas de suas aplicações em equações diferenciais parciais.

De maneira geral, definimos a transformada de Fourier por meio do operador $\mathbb{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, em que, dado $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{F}u$ é a função definida por:

$$(\mathbb{F}u)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-ixy}dy.$$

Restringindo-se o domínio do operador para $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, pode-se estender, de maneira única, a transformada para um operador $F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, bijetor e isométrico (15). Tal isometria é conhecida como Teorema de Plancherel. Outra propriedade muito interessante é o fato desse operador transformar derivadas em produtos.

Inicialmente, enfatizamos a importância do assunto no contexto das equações diferenciais, esta que modela diversos fenômenos da natureza. As aplicações da transformada de Fourier em equações diferenciais inclui: propagação de ondas não-elásticas e elásticas (sistema de ondas elásticas), condução de calor em materiais, placas e lâminas estruturais, ondas aquáticas em meios rasos (equação de Boussinesq), estado quântico de sistemas físicos não-relativísticos (equação de Schrödinger) e relativísticos (equação de Klein-Gordon), movimento de corpos em fluidos ideais (equações de Kirchhoff), além de outros fenômenos. Nesse sentido, a vasta aplicação da transformada de Fourier em equações diferenciais já são suficientes para justificar a importância dessa teoria nas ciências exatas e da terra.

O presente trabalho terá como foco, estudar a solução do seguinte Problema de Valor Inicial (ver (8) e (9)):

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + u_t(t) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases},$$

com $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, que é uma equação de onda com termo dissipativo. Através da Transformada de Fourier, será feito um estudo do comportamento assintótico dessa solução.

O resultado principal do trabalho (Teorema 5) mostra que a energia do sistema $(E(t))$ decai com taxa polinomial de grau 2 e a norma L^2 da solução $\left(\|u(t)\|_{L^2}^2\right)$ decai com taxa polinomial de grau 1. Para melhor visualização, observe o gráfico abaixo sobre o decaimento da energia:

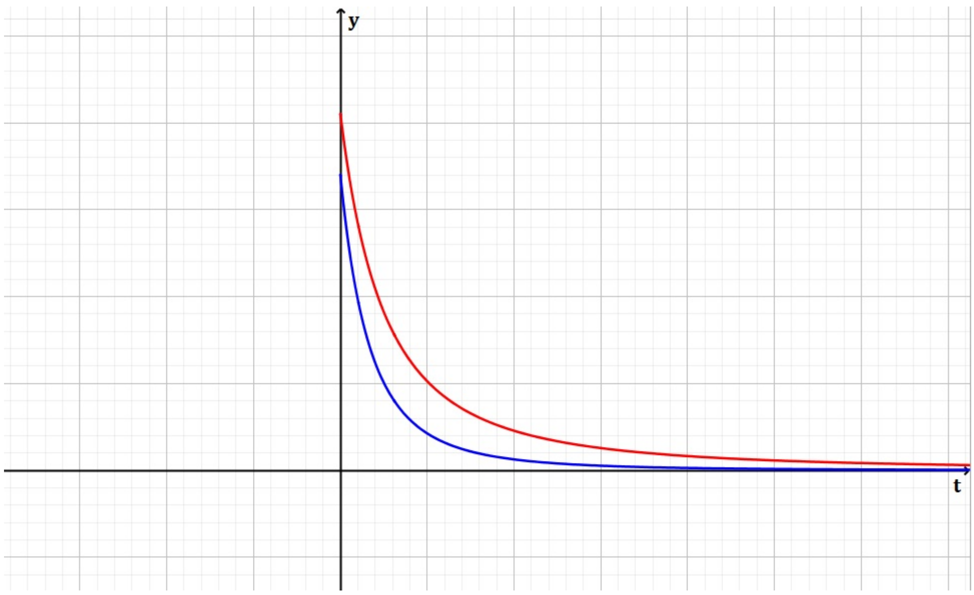

Figura 1.0.1 – Imagem criada através do software GeoGebra

A função em vermelho representa $y_0 = \dfrac{C}{(1+t)^2}$ e, em azul, simbolicamente, o gráfico da energia. De modo simplificado, o que se mostra é que a partir de um determinado t_0, o gráfico da energia estará sempre abaixo do gráfico da função y_0. Dessa forma, a energia total decai para zero mais rápido do que a função y_0.

2 Objetivos

2.1 Objetivos Gerais

Efetuar a análise do comportamento assintótico da solução da Equação da Onda via Transformada de Fourier.

2.2 Objetivos Específicos

- Estudar análise como pré-requisito para o projeto;
- Compreender os principais conceitos relacionados a Transformada de Fourier;
- Usar a Transformada de Fourier para encontrar soluções de modelos de evolução em $\mathbb{R}^n$;
- Estudar o comportamento assintótico das soluções de modelos de evolução.

3 Pré-requisitos

3.1 Espaços Métricos

Inicialmente, é fundamental que sejam definidos alguns conceitos de análise, que para melhor compreensão, podem ser encontrados no livro Espaços Métricos, de Elon Lages Lima (12).

Para se definir um espaço métrico, primeiramente é preciso saber o que é uma métrica.

Definição 1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

(i) $d(x, x) = 0$;

(ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

As duas primeiras condições se relacionam com a noção de distância usual, ou seja, uma distância entre dois elementos x e y é sempre maior ou igual a zero, com $d(x, y) = 0$ se, e somente se $x = y$. A condição (iii) informa que a *métrica* é uma função simétrica; enquanto que a quarta condição é a popular *desigualdade triangular*.

Definição 2. Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.

A seguir serão apresentadas mais algumas definições úteis e bastante recorrentes no trabalho. São conceitos bastante conhecidos, que podem também ser encontrados, acompanhados de exemplos, em (10) e (11).

Definição 3. Um conjunto não vazio V é dito um *espaço vetorial* sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos (*vetores*), estiverem definidas as operações de *adição* e *multiplicação por um escalar*, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in V$, com as seguintes propriedades:

- *Comutatividade:* $x + y = y + x$;
- *Associatividade:* $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- *Vetor nulo:* $\exists\ 0 \in V$ chamado *vetor nulo*, tal que $x + 0 = 0 + x = x$;
- *Inverso aditivo:* Para cada $x \in V$, existe $-x \in V$ tal que $-x + x = x + (-x) = 0$;

- *Distributividade*: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$;
- *Multiplicação por 1*: $1 \cdot x = x$.

Definição 4. Uma *norma* num espaço vetorial X é uma aplicação $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz, para x e y vetores arbitrários em X e λ escalar qualquer, os seguintes postulados:

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Por simplicidade, a norma de um vetor também será representada neste trabalho simplesmente por $|x|$.

Definição 5. Dado um espaço vetorial E, um *produto interno* em E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par (x, y), com $x, y \in E$ associa um número real $\langle x, y \rangle$, denominado produto interno de x por y, de modo que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

(iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

3.1.1 Bolas e Esferas

Uma ferramenta essencial para o estudo de espaços métricos é a ideia de bola. Com ela, a definição de futuros conceitos torna-se muito mais sucinta. No final do trabalho, quando se estiver limitando a densidade de energia do sistema, por exemplo, ao se fazer o cálculo de uma integral, a região será dividida em dentro e fora de uma bola.

Para o que se segue, considere a um ponto num espaço métrico M e, também, um número real $r > 0$.

Definição 6. A *bola aberta* de centro a e raio r, denotada por $B(a; r)$ é o conjunto dos pontos de M que estão a uma distância de a menor do que r. Em outras palavras, a bola aberta é o conjunto:

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}.$$

Definição 7. A *bola fechada* de centro a e raio r, denotada por $B[a;r]$ é o conjunto dos pontos de M que estão a uma distância de a menor ou igual a r. Em outras palavras, a bola fechada é o conjunto:

$$B[a;r] = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 8. A *esfera* de centro a e raio r, denotada por $S(a;r)$ é o conjunto dos pontos de M que estão a uma distância de a igual a r. Em outras palavras, a esfera é o conjunto:

$$S(a;r) = \{x \in M : d(x,a) = r\}.$$

Definição 9. Um subconjunto X de um espaço métrico M é dito *limitado* se existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x,y) < c, \forall x,y \in X$. O menor desses números c é denominado o diâmetro de X. Desta forma, c é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x,y)$ dos pontos de X. A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais é conhecido como o *supremo* desse conjunto, denotado por sup.

Definição 10. Seja M um espaço métrico. Uma função $f : X \to M$ é dita *limitada* se sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de M. A distância entre duas funções limitadas $f, g : X \to M$ pode ser definido por:

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d\left(f(x), g(x)\right).$$

Se o conjunto $\{d\left(f(x), g(x)\right); x \in X\}$, das funções $f, g : X \to M$, é limitado, então denota-se $d(f,g) < +\infty$.

3.1.2 Funções contínuas

Definição 11. Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, obtém-se $\delta > 0$ tal que se $d(x,a) < \delta$ então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, então ela é dita contínua. Observe que a continuidade é pontual.

De modo equivalente, uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola na imagem de centro $f(a)$ e raio ε, isto é, $B' = B(f(a);\varepsilon)$, obtém-se $B = B(a;\delta)$ tal que $f(B) \subset B'$.

Definição 12. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Sob tais hipóteses, f é dita *uniformemente contínua*, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x,y \in X$ com $|x - y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Neste caso, o número $\delta > 0$ depende apenas de ε. Assim, fica evidenciada a diferença entre continuidade uniforme e continuidade em um ponto.

3.1.3 Conjuntos Abertos

Definição 13. Seja $X \subset M$. Um ponto $a \in X$ é dito *ponto interior* a X quando é centro de uma bola aberta contida em X. Isto é, existe $r > 0$ tal que, se $d(x, a) < r$, então $x \in X$. O conjunto dos pontos interiores a X é denominado o *interior de* X *em* M e denotado por $\text{int}\, X$.

Definição 14. É denominada a fronteira de X, denotada por ∂X, o conjunto de todos os pontos $b \in M$ tais que, toda bola aberta de centro b contém ao menos um ponto do interior de X e um do complementar $M - X$.

Definição 15. Um conjunto em que, todos os seus pontos são pontos interiores, é chamado de *conjunto aberto*.

3.2 Outros resultados

Nesta seção serão apresentados alguns resultados básicos que serão utilizados nos próximos capítulos. Algumas demonstrações serão omitidas, por serem considerados resultados bastante conhecidos. Como referência citamos Brezis (3), Evans (7) e Medeiros-Rivera (13), (14).

Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Seja $u : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função mensurável, em que $\mathbb{K}$ é um corpo: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e seja $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então $u = 0$ quase sempre em K.

Como consequência, define-se o suporte de u, que será denotado por *supp* (u), como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega \backslash K.$$

Definição 16. Representamos por $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções

$$u : \Omega \to \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$

No que segue usaremos a seguinte notação:

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

em que $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, em que, para todo i, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Definição 17. Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:

i) $\exists\ K \subset \Omega$, K compacto, tal que $supp\,(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha\varphi_k(x) \to D^\alpha\varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Definição 18. O espaço vetorial $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.

3.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 19. Sejam Ω um conjunto aberto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por μ a medida de Lebesgue e $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup\mathrm{ess}_{x\in\Omega}\ |f(x)| \\ &= \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ /\ \mu\{x \in \Omega\ /\ |f(x)| > C\} = 0\} \\ &= \inf\{C > 0 :\ \ |f(x)| \leq C \ \text{ quase sempre em } \Omega\}.\end{aligned}$$

Observação 1. As funções $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1. $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.

Teorema 2 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$)**.** Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^\alpha_{L^p(\Omega)}\,\|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

com $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 20. Sejam Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que o produto $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde χ_K é a função característica de K.

Observação 2. $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

3.4 Equações Diferenciais

Uma equação diferencial é uma equação envolvendo a(s) variável(is) independentes e as derivadas de uma função (variável dependente). Se a equação possui apenas uma variável independente, ela é dita Equação Diferencial Ordinária (EDO) e, se possui duas ou mais variáveis independentes, é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP), pois neste caso, envolve as derivadas parciais da função. Durante este trabalho, será feito uso de ambas. A princípio, o que se tem é a Equação da Onda em $\mathbb{R}^n$, que é uma EDP e, após aplicar a Transformada de Fourier, o que será obtido é uma EDO no espaço de Fourier.

Uma equação diferencial pode também ser classificada em Linear ou Não Linear. Uma equação é dita linear, se é linear na variável dependente e em suas respectivas derivadas. Após a aplicação da Transformada de Fourier à Equação da Onda, o que se terá é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. Este caso, bastante específico, possui uma forma resolutiva para se encontrar a solução. Tal método está descrito a seguir.

3.4.1 EDOs Lineares de Segunda Ordem Homogêneas

De modo geral, sendo $y = y(t)$, uma EDO linear de segunda ordem pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{3.1}$$

em que a linha denota a diferenciação em relação à variável independente t. A equação acima é dita linear, pois é linear na variável dependente y e em suas respectivas derivadas. Se $g(t) = 0$, a equação é dita homogênea.

Definição 21. Dada uma EDO do tipo $ay'' + by' + cy = 0$, com a, b e c constantes em y, associa-se à ela a equação $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ que é chamada de *equação característica* associada à equação diferencial. Se λ é raiz da equação característica, então $y = e^{\lambda t}$ é solução da EDO. As demonstrações destes fatos e dos que se seguem nesta subseção encontram-se em Boyce-DiPrima (2).

Considerando as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ existem três situações possíveis:

- Se $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$. Neste caso, a solução da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ é dada por:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \tag{3.2}$$

- Se $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2$, então a solução da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ é dada por:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}; \tag{3.3}$$

- Se $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, então λ_1 e λ_2 são da forma $\alpha \pm \beta i$ e a solução da EDO $ay'' + by' + cy = 0$ é:

$$y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t); \tag{3.4}$$

sendo C_1 e C_2 constantes.

Neste terceiro caso foi utilizada uma identidade bastante importante, conhecida como, **Fórmula de Euler**, cuja demonstração também se encontra em (2). A identidade diz que:

$$e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t). \tag{3.5}$$

Teorema 3. *Existência e Unicidade.* Considere o PVI (Problema de Valor Inicial) a seguir

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}, \tag{3.6}$$

em que p, q e g são contínuas no aberto I que contém o ponto t_0. Sendo assim, existe uma única solução $y = y(t)$ para este PVI e ela existe em todo o intervalo I. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (5).

3.5 Espaço de Schwartz

O *Espaço de Schwartz*, que será denotado por $S(\mathbb{R}^n)$, é muito importante para este estudo, pois nele a Transformada de Fourier fica bem definida.

Definição 22. Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita ser rapidamente decrescente no infinito se para cada $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ polinômio e cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ser válido que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} P(x)(D^\alpha \varphi)(x) = 0.$$

Assim, define-se

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \ \mid \ \varphi \in C^\infty \text{ e } \varphi \text{ rapidamente decrescente no infinito}\}.$$

Observe que as funções em $S(\mathbb{R}^n)$ tendem a zero em $\pm\infty$ rapidamente, o que é muito interessante, e se torna ainda melhor pelo fato de que, $\varphi \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, mais rápido do que o inverso de qualquer polinômio. Conforme Iório (1991) (9), "O espaço de Schwartz é "feito sob medida"para o estudo da transformada de Fourier".

Lema 1. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, são equivalentes:

(i) $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $c = c_k$ tal que $\left(1 + \|x\|^2\right)^k |D^\alpha \varphi(x)| \leq c_k$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| \leq k$.

Demonstração.
$(\Rightarrow)$ Supondo que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, seja $k \in \mathbb{N}$. Sabe-se que $P_k(x) = (1 + \|x\|^2)^k$ é polinômio em $\mathbb{R}^n$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}$, por hipótese, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} P_k(x) D^\alpha \varphi(x) = 0$. Então, dado $\varepsilon = 1$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$P_k(x)|D^\alpha \varphi(x)| = |P_k(x) D^\alpha \varphi(x)| \leq 1$$

se $\|x\| \geq R_\alpha$. É claro que $R_\alpha = R(\alpha, k)$. Seja $R = \max\limits_{|\alpha| \leq k} R_\alpha \Rightarrow 0 < R < +\infty$.

Sendo assim, $P_k(x)|D^\alpha \varphi(x)| \leq 1$, se $\|x\| \geq R$ e $|\alpha| \leq k$.

Como $P_k D^\alpha \varphi$ é contínua, então existe $m_k > 0$ tal que $P_k(x)|D^\alpha \varphi(x)| \leq m_k < \infty$, em que, $m_k = \max\limits_{|\alpha| \leq k} m_{k,\alpha}$, $\|x\| \leq R$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$.

Por fim, tomando $c_k = \max\{1, m_k\}$, então

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^k |D^\alpha \varphi(x)| \leq c_k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ e } |\alpha| \leq k.$$

$(\Leftarrow)$ Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma constante $c = c_k$ tal que

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^k |D^\alpha \varphi(x)| \leq c_k, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ e } |\alpha| \leq k. \tag{3.7}$$

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Para provar que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, é suficiente provar que $x^\alpha D^\beta \varphi(x) \to 0$, se $\|x\| \to \infty$, sendo que $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Seja $k = \max\{|\alpha| + 1, |\beta|\}$. Usando (3.7) obtemos

$$\begin{aligned}
|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| &= |x^\alpha|\,|D^\beta \varphi(x)| \\
&\leq \|x\|^{|\alpha|} |D^\beta \varphi(x)| \\
&\leq \|x\|^{k-1} |D^\beta \varphi(x)| \\
&= \|x\|^{k-1} |D^\beta \varphi(x)|\ \frac{(1 + \|x\|^2)^k}{(1 + \|x\|^2)^k} \\
&= \left(1 + \|x\|^2\right)^k |D^\beta \varphi(x)|\ \frac{\|x\|^{k-1}}{(1 + \|x\|^2)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \|x\|^2)} \\
&\leq c_k\, \frac{\|x\|^{k-1}}{(1 + \|x\|^2)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \|x\|^2)}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| \geq 1$, para alguma constante $c_k > 0$, pois $|\beta| \leq k$.

Observe que:

$$\frac{1+\|x\|}{1+\|x\|^2} \leq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq \frac{2^{k-1}c_k}{1+\|x\|^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \|x\| \geq 1.$$

Portanto, $x^\alpha D^\beta \varphi(x) \to 0$, se $\|x\| \to \infty$, isto é, φ é rapidamente decrescente no infinito e, assim, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Observação 3. $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Definição 23. *Norma em* $S(\mathbb{R}^n)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, define-se:

$$\rho_m(u) = \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^m |D^\alpha u(x)|$$

para $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Do lema anterior, $\rho_m : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ está bem definida.

Definição 24. *Métrica em* $S(\mathbb{R}^n)$. Define-se $d : S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+$ por

$$d(u,v) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(u-v)}{1+\rho_m(u-v)}.$$

Observação 4. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\theta(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-m_0} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, observe que, se $n \geq 2$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^{-m_0} dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\|x\|=r} \left(1+\|x\|^2\right)^{-m_0} ds_x dr \\
&= \int_0^\infty \left(1+r^2\right)^{-m_0} \left(\int_{\|x\|=r} ds_r\right) dr \\
&= \int_0^\infty \omega_n r^{n-1} \left(1+r^2\right)^{-m_0} dr
\end{aligned}$$

em que $\omega_n = \displaystyle\int_{\|x\|=1} ds$ e, claro, $0 < \omega_n < +\infty$. Assim, se $n \geq 2$, tem-se que:

$$I = \omega_n \int_0^\infty \left(1+r^2\right)^{-m_0} r^{n-1} dr = \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{m_0}} dr < +\infty$$

se $2m_0 - (n-1) > 1 \;\Rightarrow\; m_0 > \dfrac{n}{2}$.

Caso se tenha $n = 1$, então:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1+|x|^2\right)^{-m_0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2\right)^{-m_0} dx = 2\int_0^\infty \left(1+x^2\right)^{-m_0} dx < +\infty$$

se $2m_0 > 1$ ou $m_0 > \dfrac{1}{2}$.

Desse modo, concluí-se que $\theta(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-m_0} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ se $m_0 > \dfrac{n}{2p}$.

Lema 2. Toda função do espaço $S(\mathbb{R}^n)$ é uma função de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $m_0 > \dfrac{n}{2p}$, então $\theta(x) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{-m_0} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Como u é mensurável (contínua), tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{m_0 p} |u(x)|^p (1 + \|x\|^2)^{-m_0 p} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[(1 + \|x\|^2)^{m_0} |u(x)|\,\right]^P (1 + \|x\|^2)^{-m_0 p} dx \\
&\leq \rho_{m_0}^p(u) \int_{\mathbb{R}^n} \left[(1 + \|x\|^2)^{-m_0}\right]^p dx \\
&= \rho_{m_0}^p(u)\, \|\theta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p < +\infty,
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\rho_{m_0}(u) &= \sup_{|\alpha| \leq m_0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{m_0} |D^\alpha u(x)| \\
&\geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{m_0} |u(x)| \\
&\geq (1 + \|x\|^2)^{m_0} |u(x)|.
\end{aligned}$$

Logo, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

4 Transformada de Fourier

Neste capítulo serão definidos e enunciados importantes resultados sobre a Transformada de Fourier, que é uma ferramenta fundamental para este estudo, pois através dela estudaremos as soluções de algumas equações diferenciais e o comportamento assintótico da solução da equação da onda. Os conceitos e resultados deste capítulo podem ser encontrados em Adams (1), Dautray-Lions (6) e Evans (7).

Definição 25. A transformada de Fourier de uma função u em $L^1(\mathbb{R}^n)$ é denotada por $\hat{u}$, ou ainda, $\mathbb{F}u$, e é definida por:

$$(\mathbb{F}u)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-ixy}dy,$$

sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $xy = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

Tem-se que $\mathbb{F}u$ está bem definida para $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, como u é mensurável, então $u(y)e^{-ixy}$ também é mensurável para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado. E ainda, como $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)e^{-ixy}|dy = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|dy < +\infty.$$

Assim, $u(y)e^{-ixy} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $(\mathbb{F}u)(x) \in \mathbb{K}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$|(\mathbb{F}u)(x)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}u(y)dy \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{4.1}$$

ou seja, $\mathbb{F}u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observe que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F} : L^1(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto & \mathbb{F}u \end{array}$$

é linear e contínua, sendo que a linearidade segue diretamente da linearidade da integral e a continuidade de (4.1).

Definição 26. Seja $\tilde{\mathbb{F}} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$(\tilde{\mathbb{F}}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{ixy}dy.$$

A aplicação $\tilde{\mathbb{F}}u$ é denominada Transformada de Fourier Conjugada. Observe que $\tilde{\mathbb{F}}\overline{u} = \overline{\mathbb{F}u}$, pois:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbb{F}}\overline{u})(x) &= (\mathbb{F}\overline{u})(-x) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u}(y) e^{ixy} dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(y) e^{-ixy}} dy \\
&= \overline{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) e^{-ixy} dy} \\
&= \overline{\mathbb{F}u}(x).
\end{aligned}$$

Definição 27. Seja $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade. Dessa forma, tem-se que para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ fixado, $J^\alpha(x) = x^\alpha$, ou seja, $J^\alpha(x) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Observe que são verdadeiras as seguintes afirmações:

- $J^\alpha(ix) = (ix)^\alpha = (ix_1)^{\alpha_1} \cdot (ix_2)^{\alpha_2} \ldots (ix_n)^{\alpha_n} = i^{|\alpha|} x^\alpha$;
- $J^\alpha(-x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha$;
- $|J^\alpha(x)| = |x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_n|^{\alpha_n} \leq \|x\|^{\alpha_1} \ldots \|x\|^{\alpha_n} = \|x\|^{|\alpha|}$;

sendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. A aplicação identidade será utilizada na Proposição 1 e, consequentemente, em várias partes do trabalho.

O resultado a seguir é útil para derivar sob o sinal de integração.

Lema 3. Seja $F : U \times V \to \mathbb{K}$ uma função mensurável com U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Suponha que

(i) Para cada $y \in V$ a função $F(\cdot, y) : U \to \mathbb{K}$ é de classe $C^1(U)$;

(ii) Existem funções g, g_j em $L^1(V)$, com $j = 1, \ldots, n$, tais que $|F(x, y)| \leq g(y)$ e

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq |g_j(y)|, \quad \forall\, y \in V \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Então, a função $f(x) = \displaystyle\int_V F(x, y)\, dy$ é de classe $C^1(U)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \displaystyle\int_V \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, y)\, dy$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

A próxima proposição é uma das mais importantes, sendo frequentemente utilizada, como na Seção 5.1, quando a transformada de Fourier é aplicada à equação da onda.

Proposição 1. Para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$, tem-se que:

(i) $D^\alpha(\mathbb{F}u)(x) = \mathbb{F}((-iJ)^\alpha u)(x)$ e $D^\alpha(\tilde{\mathbb{F}}u)(x) = \tilde{\mathbb{F}}((iJ)^\alpha u)(x)$;

(ii) $\mathbb{F}(D^\alpha u)(x) = [(iJ)^\alpha(\mathbb{F}u)](x)$ e $\tilde{\mathbb{F}}(D^\alpha u)(x) = [(-iJ)^\alpha(\tilde{\mathbb{F}}u)](x)$.

Demonstração. Será feita a demonstração somente para $\mathbb{F}u$ e para $n = 1$. Para os outros casos é análoga.

(i) Seja $u \in S(\mathbb{R})$ e $F(x,y) = u(y)e^{-ixy}, x, y \in \mathbb{R}$. Tem-se que $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

$$|F(x,y)| \leq |u(y)| = g(y) \in L^1(\mathbb{R})$$

e

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right| = |-iyu(y)e^{-ixy}| = |yu(y)| = g_1(y) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Logo, pelo lema anterior,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(y)e^{-ixy}dy,$$

é de classe $C^1(\mathbb{R})$ e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{df}{dx}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(u(y)e^{-ixy}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} (-iy)u(y)e^{-ixy}dy.$$

Isto significa que $\mathbb{F}u \in C^1(\mathbb{R})$ e $\frac{d}{dx}(\mathbb{F}u)(x) = \mathbb{F}\left((-iJ)u\right)(x)$. Como $(-iJ)u \in S(\mathbb{R})$, pelo que foi provado, obtém-se

$$\frac{d}{dx}(\mathbb{F}u)(x) = \mathbb{F}\left((-iJ)u\right)(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}(\mathbb{F}u)(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{F}\left((-iJ)u\right)(x) = \mathbb{F}\left((-iJ)^2u\right)(x).$$

Prosseguindo com esse raciocínio, concluí-se que $\mathbb{F}u \in C^\infty(\mathbb{R})$ e que

$$D^\alpha(\mathbb{F}u) = \mathbb{F}((-iJ)^\alpha u), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}.$$

(ii) Seja $u \in S(\mathbb{R})$. Integrando por partes, tem-se que

$$\int_a^b u'(y)e^{-ixy}dy = u(b)e^{-ixb} - u(a)e^{-ixa} + \int_a^b (ix)u(y)e^{-ixy}dy.$$

Como $u \in S(\mathbb{R})$, tem-se

$$\lim_{b\to\infty} u(b)e^{-ixb} = \lim_{a\to-\infty} u(a)e^{-ixa} = 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} u'(y)e^{-ixy}dy = ix\int_{\mathbb{R}} u(y)e^{-ixy}dy,$$

logo,

$$\mathbb{F}\left(\frac{du}{dx}\right)(x) = ix(\mathbb{F}u)(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Repetindo esse raciocínio $\alpha \in \mathbb{N}$ vezes, concluí-se que

$$\mathbb{F}(D^\alpha u)(x) = [(iJ)^\alpha(\mathbb{F}u)](x).$$

Lema 4. Para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$ tem-se

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^m (\mathbb{F}u)(x) = \mathbb{F}\left((I - \Delta)^m u\right)(x).$$

Demonstração. Para provar este lema, será utilizada a proposição anterior. Note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(\Delta u)(x) &= \mathbb{F}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (i)^{|\alpha_j|} x^{\alpha_j} (\mathbb{F}u)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1) x_j^2 (\mathbb{F}u)(x) \\
&= -\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)(\mathbb{F}u)(x) \\
&= -\|x\|^2\, \mathbb{F}u(x),
\end{aligned}$$

com $\alpha_1 = (2, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_2 = (0, 2, 0, \ldots, 0)$, ..., $\alpha_n = (0, \ldots, 0, 2)$. Então, tem-se que $\mathbb{F}(-\Delta u)(x) = \|x\|^2 \mathbb{F}u(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left((I - \Delta)^m u\right)(x) &= \mathbb{F}\Big((I - \Delta)(I - \Delta)^{m-1} u\Big)(x) \\
&= \mathbb{F}\Big((I - \Delta)^{m-1} u - \Delta(I - \Delta)^{m-1} u\Big)(x) \\
&= \mathbb{F}\Big((I - \Delta)^{m-1} u\Big)(x) + \|x\|^2\, \mathbb{F}\Big((I - \Delta)^{m-1} u\Big)(x) \\
&= (1 + \|x\|^2)\, \mathbb{F}\Big((I - \Delta)^{m-1} u\Big)(x).
\end{aligned}$$

Repetindo esse resultado, obtém-se que

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^m (\mathbb{F}u)(x) = \mathbb{F}\left((I - \Delta)^m u\right)(x).$$

Observação 5. Para $m \geq m_0$, existe constante $\tilde{c}_m > 0$ tal que

$$\left(1 + \|x\|^2\right)^{m_0} \left((I - \Delta)^m [J^\alpha u](x)\right) = \left(1 + \|x\|^2\right)^{m_0} \left((I - \Delta)^m [x^\alpha u(x)]\right) \leq \tilde{c}_m \rho_{3m}(u)$$

para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \leq m$.

Proposição 2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$, existe uma constante $c_m > 0$ tal que

$$\left(1+\|x\|^2\right)^m |D^\alpha(\mathbb{F}u)(x)| \leq c_m \rho_{3m}(u)$$

para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \leq m$.

Demonstração. Da Proposição 1, tem-se que

$$\left(1+\|x\|^2\right)^m |D^\alpha(\mathbb{F}u)(x)| = \left(1+\|x\|^2\right)^m |\mathbb{F}((-iJ)^\alpha u)(x)|.$$

Utilizando o Lema 4, obtém-se que

$$\left(1+\|x\|^2\right)^m |\mathbb{F}((-iJ)^\alpha u)(x)| = |\mathbb{F}\left((I-\Delta)^m[(-iJ)^\alpha]u\right)(x)|$$

e da definição da Transformada de Fourier e da observação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(1+\|x\|^2\right)^m |D^\alpha(\mathbb{F}u)(x)| &= \left|(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (I-\Delta)^m((-iJ)^\alpha u)(y) e^{-ixy} dy\right| \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |(I-\Delta)^m(J^\alpha u)(y)|\, dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|^2)^{-m_0}(1+\|y\|^2)^{m_0}|(I-\Delta)^m(J^\alpha u)(y)|\, dy \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{c}_m \rho_{3m}(u) \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|^2)^{-m_0} dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{c}_m \rho_{3m}(u) \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = c_m \rho_{3m}(u).
\end{aligned}$$

Lema 5. Se $u \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\mathbb{F}u, \tilde{\mathbb{F}}u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\theta(x) = (1+\|x\|^2)^{-m_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Observe que se a desigualdade da Proposição 2 vale para $m \geq m_0$, então também vale para $m < m_0$, pois, se $m < m_0$, tem-se que

$$\left(1+\|x\|^2\right)^m |D^\alpha(\mathbb{F}u)(x)| \leq \left(1+\|x\|^2\right)^{m_0} \left|D^\beta(\mathbb{F}u)(x)\right| \leq c_{m_0}\rho_{3m_0}(u),$$

para todo $|\beta| \leq m_0$. Sabe-se que $\mathbb{F}u, \tilde{\mathbb{F}}u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e, desse modo, segue do Lema 1 que $\mathbb{F}u \in S(\mathbb{R}^n)$ e, de forma análoga, $\tilde{\mathbb{F}}u \in S(\mathbb{R}^n)$.

Lema 6. Para todo $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(y)(\mathbb{F}u)(y)e^{ixy}dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)(\mathbb{F}v)(y)dy.$$

Demonstração. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v(y)(\mathbb{F}u)(y)e^{ixy}dy &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(z)e^{-izy}dz\right)e^{ixy}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(z)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{ixy}e^{-izy}dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(z)(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{-i(z-x)y}dy\right)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(z)(\mathbb{F}v)(z-x)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)(\mathbb{F}v)(y)dy,
\end{aligned}$$

em que, no último passo, fez-se a mudança de variável $z = x + y$.

Proposição 3. As aplicações

$$\begin{aligned} \mathbb{F} : S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \mathbb{F}u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{F}} : S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \tilde{\mathbb{F}}u \end{aligned}$$

são bijetivas e $\mathbb{F}^{-1} = \tilde{\mathbb{F}}$.

Demonstração. Inicialmente, será provado que $\tilde{\mathbb{F}}\mathbb{F}u = u$, para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Considere $\varphi(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} \in S(\mathbb{R}^n)$. Sabe-se que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$ e $(\mathbb{F}\varphi)(x) = \varphi(x)$. Seja $\varepsilon > 0$ e $v_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Aplicando a Transformada de Fourier e, apropriadamente, fazendo a mudança de variável $z = \varepsilon y$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(v_\varepsilon)(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon(y) e^{-ixy} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon y) e^{-ixy} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \varphi(z) e^{-ix\frac{z}{\varepsilon}} dz \\ &= \varepsilon^{-n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) e^{-i\frac{x}{\varepsilon}z} dz \\ &= \varepsilon^{-n} (\mathbb{F}\varphi) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \varepsilon^{-n} \varphi \left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Observe que $v_\varepsilon \in S(\mathbb{R}^n)$, pois, $v_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Usando o Lema 6, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon(y)(\mathbb{F}u)(y) e^{ixy} dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y)(\mathbb{F}v_\varepsilon)(y) dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\varepsilon y)(\mathbb{F}u)(y) e^{ixy} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x+y) \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x + \varepsilon z) \varphi(z) dz, \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, fez-se a mudança de variável $z = \dfrac{y}{\varepsilon}$.

Tomando agora o limite com $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0)(\mathbb{F}u)(y) e^{ixy} dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \varphi(z) dz.$$

Como $\varphi(0) = 1$, obtém-se:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathbb{F}u)(y)e^{ixy}dy = u(x)(2\pi)^{\frac{n}{2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, $\tilde{\mathbb{F}}(\mathbb{F}u)(x) = u(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo:

$$\tilde{\mathbb{F}}\mathbb{F}u = u, \quad \forall\, u \in S(\mathbb{R}^n).$$

E, também,

$$\mathbb{F}\tilde{\mathbb{F}}u = \overline{\overline{\mathbb{F}\tilde{\mathbb{F}}u}} = \overline{\tilde{\mathbb{F}}\overline{\tilde{\mathbb{F}}u}} = \overline{\tilde{\mathbb{F}}\mathbb{F}\overline{u}} = \overline{\overline{u}} = u.$$

Logo, $\mathbb{F}$ é bijetiva e $\tilde{\mathbb{F}}$ é a inversa de $\mathbb{F}$, isto é, $\mathbb{F}^{-1} = \tilde{\mathbb{F}}$.

Proposição 4. *Transformada de Fourier de uma translação.* Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(f(x-a))(\xi) &= e^{-i\xi a}\mathbb{F}(f(x))(\xi) \text{ e} \\ \mathbb{F}(e^{iax}f(x))(\xi) &= \mathbb{F}(f(x))(\xi - a). \end{aligned}$$

Demonstração. Da definição da transformada e, logo após, fazendo uma mudança de variáveis, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(f(x-a))(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-a)e^{-i\xi y}dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\xi(y+a)}dy \\ &= e^{-i\xi a}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\xi y}dy \\ &= e^{-i\xi a}\, \mathbb{F}(f(x))(\xi). \end{aligned}$$

Assim, fica demonstrada a primeira fórmula. O segundo caso é obtido de forma direta, pois:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(e^{iax}f(x))(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iay}f(y)e^{-i\xi y}dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(\xi-a)y}dy \\ &= \mathbb{F}(f(x))(\xi - a). \end{aligned}$$

Teorema 4. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função absolutamente integrável, então sua transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua e limitada. Se, além disso, $\hat{f}$ for absolutamente integrável, então f é contínua.

Definição 28. *Produto de Convolução.* Dadas duas funções f e g em $S(\mathbb{R}^n)$, seu produto de convolução é definido por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Tem-se que $f * g = g * f$ e $|(f * g)(x)| \leq (\max |f(x)|) \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy < \infty$, pois f é limitada e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 5. Se f e g estiverem em $S(\mathbb{R}^n)$, então

(i) $D^\alpha(f * g)(x) = [(D^\alpha f) * g](x) = [f * (D^\alpha g)](x)$;

(ii) $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 6. Para todo $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$ valem as seguintes relações:

(i) $(u, v)_{L^2} = (\mathbb{F}u, \mathbb{F}v)_{L^2} = (\tilde{\mathbb{F}}u, \tilde{\mathbb{F}}v)_{L^2}$, conhecida como identidade de Parseval, sendo $(u, v)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v}(x)dx$.

(ii) $\mathbb{F}(u * v) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathbb{F}u)(\mathbb{F}v)$ e $\tilde{\mathbb{F}}(u * v) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\tilde{\mathbb{F}}u)(\tilde{\mathbb{F}}v)$.

(iii) $\mathbb{F}(uv) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\mathbb{F}u) * (\mathbb{F}v)$ e $\tilde{\mathbb{F}}(uv) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\tilde{\mathbb{F}}u) * (\tilde{\mathbb{F}}v)$.

Teorema de Plancherel. Existe uma aplicação linear e contínua $F : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ com as seguintes propriedades:

(i) $(Fu, Fv)_{L^2} = (u, v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (Parseval).

(ii) F é bijetiva e se $(\tilde{F}u) = (Fu)^V$, então $F^{-1} = \tilde{F}$ (sendo $z^V(x) = z(-x)$).

(iii) $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (Fu)(y)(Fv)(y)e^{ixy}dy, \quad \forall\, u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $Fu = \mathbb{F}u$ e $\tilde{F} = \tilde{\mathbb{F}}$, se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

(v) $Fu = \lim_{v \to \infty} \mathbb{F}(uX_{B(0,v)}) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \forall\, u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

sendo $X_{B(0,v)}$ a função característica da bola com centro na origem e raio v.

5 Equação da Onda

Neste capítulo, usando a transformada de Fourier, vamos estudar propriedades de decaimento para uma equação de onda dissipativa em $\mathbb{R}^n$. Na próxima seção vamos obter uma representação da solução da equação da onda no espaço de Fourier.

5.1 Solução da Equação da Onda

Considere a equação da onda descrita a seguir:

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + u_t(t) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

em que $u = u(t,x)$, com $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. O termo $u_t(t)$ representa uma dissipação friccional (ver Seção 5.2).

Assumindo que os dados iniciais u_0 e u_1 são suficientemente regulares, aplica-se a transformada de Fourier e, usando o fato de que ela é linear, obtêm-se:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(t) - \widehat{\Delta u(t)} + \hat{u}_t(t) = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} .$$

Da Proposição 1, sabe-se que $\widehat{-\Delta u(t)} = -(i|\xi|)^2\hat{u}(t) = |\xi|^2\hat{u}(t)$. Logo:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(t) + |\xi|^2\hat{u}(t) + \hat{u}_t(t) = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} . \tag{5.2}$$

Deste modo, tem-se uma equação ordinária em t, cuja equação característica é

$$\lambda^2 + \lambda + |\xi|^2 = 0,$$

e, resolvendo esta equação, encontra-se:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4|\xi|^2}}{2}.$$

Há três casos possíveis:

- Se $1 - 4|\xi|^2 = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. De (3.3), a solução da EDO é dada por

$$\hat{u}(t) = A(\xi)e^{-\frac{1}{2}t} + B(\xi)te^{-\frac{1}{2}t}. \tag{5.3}$$

Usando que $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, obtém-se $A(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$.

Substituindo em (5.3) e derivando:

$$\hat{u}_t(t) = -\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + \left(1 - \frac{t}{2}\right)B(\xi)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Usando agora que $\hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$, tem-se:

$$B(\xi) = \hat{u}_1(\xi) + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}.$$

Portanto, para este caso, tem-se:

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-\frac{1}{2}t} + \left(\hat{u}_1(\xi) + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)te^{-\frac{1}{2}t}.$$

- Se $1 - 4|\xi|^2 < 0$, então $\lambda_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{-1 + 4|\xi|^2} \cdot i}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{-1 + 4|\xi|^2} \cdot i}{2}$.

Logo, de (3.4), tem-se que a solução é da forma:

$$\hat{u}(t) = A(\xi)e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right) + B(\xi)e^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right). \tag{5.4}$$

Usando que $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, tem-se que $A(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$.

Derivando agora $\hat{u}(t)$ e já fazendo a substituição $A(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t(t) = \; & - \; \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right) \\
& - \; \hat{u}_0(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}t} \frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right) \\
& - \; \frac{B(\xi)}{2}\, e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right) \\
& + \; B(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}t} \frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2} \cdot t\right).
\end{aligned}$$

Usando que $\hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$, tem-se:

$$\hat{u}_1(\xi) = -\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2} + B(\xi)\, \frac{\sqrt{-1 + 4|\xi|^2}}{2}$$

e, logo:

$$B(\xi) = \frac{2\hat{u}_1(\xi) + \hat{u}_0(\xi)}{\sqrt{-1+4|\xi|^2}}.$$

Portanto, a solução para este caso é dada por:

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_0(\xi)e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{-1+4|\xi|^2}}{2}\cdot t\right) + \frac{2\hat{u}_1(\xi)+\hat{u}_0(\xi)}{\sqrt{-1+4|\xi|^2}}e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{-1+4|\xi|^2}}{2}\cdot t\right).$$

- Se $1-4|\xi|^2 > 0$, então $\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}$.
  Logo, de (3.2), tem-se que a solução é da forma:

$$\hat{u}(t) = A(\xi)e^{\left(\frac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t} + B(\xi)e^{\left(\frac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t}. \tag{5.5}$$

Usando que $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, obtém-se

$$A(\xi) + B(\xi) = \hat{u}_0(\xi). \tag{5.6}$$

Derivando agora (5.5), tem-se:

$$\hat{u}_t(t) = \frac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}A(\xi)e^{\left(\frac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t} + \frac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}B(\xi)e^{\left(\frac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t}.$$

Usando que $\hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$, obtém-se:

$$\hat{u}_1(\xi) = \frac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}A(\xi) + \frac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}B(\xi). \tag{5.7}$$

Multiplicando (5.6) por $\dfrac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}$ e somando com (5.7), encontra-se:

$$\sqrt{1-4|\xi|^2}A(\xi) = \frac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi).$$

Obtendo:

$$A(\xi) = \frac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\hat{u}_0(\xi) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}. \tag{5.8}$$

De (5.8) e (5.6), tem-se:

$$B(\xi) = \left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right)\hat{u}_0(\xi) - \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}.$$

Por fim, chega-se que a solução deste terceiro caso é:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) \;=\; & \left(\frac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\hat{u}_0(\xi) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right)\cdot e^{\left(\frac{-1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t} \\ & + \left(\left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right)\hat{u}_0(\xi) - \frac{\hat{u}_1(\xi)}{\sqrt{1-4|\xi|^2}}\right)\cdot e^{\left(\frac{-1-\sqrt{1-4|\xi|^2}}{2}\right)\cdot t}.\end{aligned}$$

5.2 Taxas de Decaimento

Até o presente momento, foi obtida uma representação da solução no espaço de Fourier. O objetivo desta seção é estudar o comportamento assintótico da solução e da energia associada a equação da onda.

Então, retornando à equação (5.1), multiplicando-a por $u_t(t)$ e integrando, tem-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t(t)|^2dx - \int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(t)u_t(t)dx + \int_{\mathbb{R}^n}|u_t(t)|^2dx = 0.$$

Pela identidade de Green (13), obtém-se:

$$-\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(t)u_t(t)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(t)\nabla u_t(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2dx.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\{|u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2\}dx + \|u_t(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Define-se $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\{|u_t(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2\}dx$ como sendo a energia total do sistema. Assim, de forma mais simplificada, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}E(t) + \|u_t(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Como $\|u_t(t)\|_{L^2}^2$ é positivo, então $\frac{d}{dt}E(t)$ é negativo e, consequentemente, tem-se que $E(t)$ é decrescente. Portanto, esta função possui um certo decaimento, e este comportamento dela, é o que será estudado a seguir usando o método dos multiplicadores.

Considere a equação da onda no espaço de Fourier:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(t) + |\xi|^2\hat{u}(t) + \hat{u}_t(t) = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} . \tag{5.9}$$

Tomando o produto interno da equação em (5.9) com $\overline{\hat{u}_t(t)}$:

$$\hat{u}_{tt}(t)\overline{\hat{u}_t(t)} + |\xi|^2\hat{u}(t)\overline{\hat{u}_t(t)} + |\hat{u}_t(t)|^2 = 0. \tag{5.10}$$

Tem-se que $\frac{d}{dt}|\hat{v}(t)|^2 = 2Re(\hat{v}(t)\cdot\overline{\hat{v}_t}(t))$, pois:

$$\frac{d}{dt}|\hat{v}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\hat{v}(t)\cdot\overline{\hat{v}}(t)) = \hat{v}_t(t)\cdot\overline{\hat{v}}(t) + \hat{v}(t)\cdot\overline{\hat{v}_t}(t) = \overline{\overline{\hat{v}_t}(t)\cdot\hat{v}(t)} + \hat{v}(t)\cdot\overline{\hat{v}_t}(t) = 2Re(\hat{v}(t)\cdot\overline{\hat{v}_t}(t)).$$

Então, considerando a parte real da equação (5.10), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + |\hat{u}_t(t)|^2 = 0. \tag{5.11}$$

Integrando (5.11) em $(0,t)$, obtém-se:

$$\frac{1}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds = \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2. \tag{5.12}$$

Multiplicando (5.11) por $(1+t)$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+t)}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{(1+t)}{2}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \int_0^t (1+s)|\hat{u}_t(s)|^2 ds \\
&= \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds \\
&\leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2\right) + \frac{1}{2}\int_0^t |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade vem diretamente de (5.12).

Na sequência vamos limitar a integral do lado direito da estimativa acima por uma constante que depende dos dados iniciais. Para isso, tomando o produto interno da equação (5.9) com $\overline{\hat{u}(t)}$ obtém-se

$$\hat{u}_{tt}(t)\overline{\hat{u}(t)} + |\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)} = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}) - |\hat{u}_t(t)| + |\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}) - |\hat{u}_t(t)| + |\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\hat{u}(t)|^2 = 0. \tag{5.14}$$

Integrando agora em $(0,t)$, tem-se:

$$\int_0^t |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds + \frac{|\hat{u}(t)|^2}{2} = \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 - (\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}) + (\hat{u}_1\overline{\hat{u}_0}) + \int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds. \tag{5.15}$$

Observe que

$$\hat{u}_1\overline{\hat{u}_0} \leq \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2$$

e de (5.12),

$$-\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)} \leq |\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{4}|\hat{u}(t)|^2 \leq |\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{4}|\hat{u}(t)|^2.$$

Ainda da equação (5.12), obtém-se que:

$$\int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2.$$

Considerando as três estimativas acima em (5.15) tem-se que:

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds + \frac{|\hat{u}(t)|^2}{2} \;\leq\; & \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + |\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{4}|\hat{u}(t)|^2 \\
& + \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^t |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds + \frac{|\hat{u}(t)|^2}{4} \le |\hat{u}_0|^2 + 2|\hat{u}_1|^2 + \frac{3}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2. \tag{5.16}$$

Portanto, de (5.13) e (5.16), tem-se que:

$$\begin{aligned}&\frac{(1+t)}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{(1+t)}{2}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \int_0^t (1+s)|\hat{u}_t(s)|^2 ds \\ &\le \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(|\hat{u}_1|^2 + |\xi|^2|\hat{u}_0|^2\right) + \frac{1}{2}\left(|\hat{u}_0|^2 + 2|\hat{u}_1|^2 + \frac{3}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2\right),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{(1+t)}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{(1+t)}{2}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + \int_0^t (1+s)|\hat{u}_t(s)|^2 ds \le \frac{7}{4}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + \frac{3}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2. \tag{5.17}$$

Pela desigualdade acima, conclui-se que a densidade de energia, definida por,

$$E(t,\xi) = \frac{1}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2$$

possui um decaimento menor ou igual a uma função do tipo $v_1(t) = \dfrac{C}{1+t}$, sendo C é uma constante que depende dos dados iniciais. No que segue, vamos melhorar essa estimativa e provar que a densidade de energia decai para zero mais rápido do que a função $v_2(t) = \dfrac{C}{(1+t)^2}$.

Retornando a equação (5.11) e multiplicando-a por $(1+t)^2$, obtém-se:

$$\frac{(1+t)^2}{2}\frac{d}{dt}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{(1+t)^2}{2}\frac{d}{dt}|\xi|^2|\hat{u}(t)|^2 + (1+t)^2|\hat{u}_t(t)|^2 = 0.$$

Integrando por partes esta nova equação, tem-se:

$$\begin{aligned}&\frac{(1+t)^2}{2}|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{(1+t)^2}{2}|\xi|^2|\hat{u}_t(t)|^2 + \int_0^t (1+s)^2|u_t(s)|^2 ds \\ &= \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2 + \int_0^t (1+s)|u_t(s)|^2 ds + \int_0^t (1+s)|\xi|^2|u(s)|^2 ds. \end{aligned}\tag{5.18}$$

Observe que $\displaystyle\int_0^t (1+s)|u_t(s)|^2 ds$ já está limitado por (5.17). Porém, o termo $\displaystyle\int_0^t (1+s)^2|\xi|^2|u(s)|^2 ds$ ainda não havia aparecido em nenhum momento anterior. Para limitá-lo, a equação (5.14) será multiplicada por $(1+t)$ e, a seguir, será tomada a integral, resultando em:

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+s)|\xi|^2|u(s)|^2 ds + \frac{(1+t)}{2}|\hat{u}(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}(s)|^2 ds + \int_0^t (1+s)|u_t(s)|^2 ds \\ &\quad -(1+t)\big(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}\big) + (\hat{u}_1\overline{\hat{u}_0}) + \int_0^t \hat{u}_t(s)\overline{\hat{u}(s)} ds.\end{aligned}$$

Além de outras relações utilizadas anteriormente, observe também que

$$-(1+t)\big(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}\,\big) \leq (1+t)|\hat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{4}(1+t)|\hat{u}(t)|^2$$

e que

$$\int_0^t \hat{u}_t(s)\overline{\hat{u}(s)}ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}(s)|^2 ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)|\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds + \frac{(1+t)}{2}|\hat{u}(t)|^2 \\
&\quad \leq \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_1|^2 + \frac{1}{2}|\hat{u}_0|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}(s)|^2 ds \\
&\qquad + \int_0^t (1+s)|\hat{u}_t(s)|^2 ds + (1+t)|\hat{u}_t(t)|^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4}(1+t)|\hat{u}(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\hat{u}(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Observe que o termo $\frac{1}{4}(1+t)|\hat{u}(t)|^2$ será absorvido pelo lado esquerdo, e ainda, de (5.12) e de (5.17), obtém-se:

$$\int_0^t (1+s)|\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 ds + \frac{(1+t)}{4}|\hat{u}(t)|^2 \leq \int_0^t |\hat{u}(s)|^2 ds + 2|\hat{u}_0|^2 + \frac{17}{4}|\hat{u}_1|^2 + \frac{13}{4}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2.$$

Considerando a desigualdade acima e (5.17) em (5.18) obtém-se

$$\begin{aligned}
&(1+t)^2\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + (1+t)^2\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{(1+t)}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\quad \leq 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds + \frac{21}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 d\xi + \frac{26}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_1|^2 d\xi + 5\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0|^2 d\xi. \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Falta então limitar o termo $\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds$. Para $|\xi| \geq 1$, tem-se por (5.16) que

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds &\leq \int_0^t\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^2|\hat{u}(s)|^2 d\xi ds \\
&\leq \int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}_0|^2 d\xi + 2\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{u}_1|^2 d\xi + \frac{3}{2}\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0|^2 d\xi + 2\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_1|^2 d\xi + \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\hat{u}_0|^2 d\xi. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Assim, falta apenas limitar o termo $\displaystyle\int_0^t\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds$.

Dividindo a equação (5.14) por $|\xi|^2$, obtém-se:

$$\frac{1}{|\xi|^2}\frac{d}{dt}\big(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}\,\big) + |\hat{u}(t)|^2 + \frac{1}{2|\xi|^2}\frac{d}{dt}|\hat{u}(t)|^2 = \frac{|\hat{u}_t(t)|^2}{|\xi|^2}.$$

Integrando em $|\xi| \leq 1$ e $(0,t)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_0|^2 d\xi - \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}\big(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}\,\big) d\xi \\
&\qquad + \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}\big(\hat{u}_1\overline{\hat{u}_0}\,\big) d\xi + \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(s)|^2 d\xi ds. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Agora, dividindo (5.12) por $|\xi|^2$ e integrando em $|\xi| \leq 1$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(t)|^2 d\xi + \int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(s)|^2 d\xi ds \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}_0|^2 d\xi. \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

Observe ainda que

$$-\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}\big(\hat{u}_t(t)\overline{\hat{u}(t)}\,\big) d\xi \leq \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{1}{4}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}(t)|^2 d\xi. \qquad (5.23)$$

Usando (5.23) e (5.22) em (5.21), obtém-se que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds + \frac{1}{4}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\quad \leq \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_0|^2 d\xi + \frac{5}{4}\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi + \frac{3}{4}\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}_0|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Por fim, é necessário garantir que $\displaystyle\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_0|^2 d\xi$ e $\displaystyle\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_1|^2 d\xi$ sejam limitados. Para tanto, pode-se verificar que:

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2}|\hat{u}_i|^2 d\xi &\leq \|\hat{u}_i\|_{L^\infty}^2 \int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-2} d\xi \\
&= \|\hat{u}_i\|_{L^\infty}^2 \int_0^1 \int_{|\xi|=r} r^{-2} ds dr \\
&= c_n\|\hat{u}_i\|_{L^\infty}^2 \int_0^1 r^{-2}r^{n-1} dr \\
&= c_n\|\hat{u}_i\|_{L^\infty}^2 \int_0^1 r^{n-3} dr \\
&= \frac{c_n}{n-2}\|\hat{u}_i\|_{L^\infty}^2,
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1$, sendo c_n é uma constante e assumindo que $n > 2$. Dessa forma,

$$\int_0^t \int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(s)|^2 d\xi ds \leq \frac{c_n}{n-2}\|\hat{u}_0\|_{L^\infty}^2 + \frac{5}{4}\frac{c_n}{n-2}\|\hat{u}_1\|_{L^\infty}^2 + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0|^2 d\xi.$$

Usando a desigualdade acima e (5.20) em (5.19) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^2\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+(1+t)^2\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{u}_t(t)|^2d\xi+\frac{(1+t)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(t)|^2d\xi\\
&\leq\frac{27}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{u}_0|^2d\xi+17\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_1|^2d\xi+\frac{17}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_0|^2d\xi\\
&+\frac{2c_n}{n-2}\,\|\hat{u}_0\|^2_{L^\infty}+\frac{5}{2}\frac{c_n}{n-2}\,\|\hat{u}_1\|^2_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

Segue da estimativa acima e da identidade de Parseval (ver Proposição 6) o seguinte resultado:

Teorema 5. Seja $n\geq 3$ e $u=u(t,x)$ a solução do problema (5.1). Assuma que $u_0,u_1\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma constante $C>0$ tal que

$$E(t)\leq C\left\{\,\|u_0\|^2_{L^1\cap L^2}+\|u_1\|^2_{L^1\cap L^2}+\|\nabla u_0\|^2_{L^2}\right\}\,(1+t)^{-2},\qquad\forall\ t\geq 0$$

e

$$\|u(t)\|^2_{L^2}\leq C\left\{\,\|u_0\|^2_{L^1\cap L^2}+\|u_1\|^2_{L^1\cap L^2}+\|\nabla u_0\|^2_{L^2}\right\}\,(1+t)^{-1},\qquad\forall\ t\geq 0.$$

Os resultados obtidos no teorema acima não são ótimos, isto é, é possível, através de outras técnicas, obter taxas ainda melhores de decaimento (ver (4)).

6 Considerações Finais

As Equações Diferenciais são de suma importância tanto para a matemática pura, efetuando assim um estudo mais voltado para a área da Análise, quanto para a aplicada, podendo-se trabalhar com diversos problemas físicos, por exemplo. O presente trabalho teve um caráter mais voltado para a Análise, estudando a existência da solução da Equação da Onda com dissipação, e também o seu comportamento assintótico ao longo do tempo.

O estudo da Transformada de Fourier foi crucial para a elaboração deste trabalho, sendo que, por este motivo, foi dedicado um espaço para a apresentação dos principais lemas e proposições. Como pode ser observado, dentro do espaço de Fourier, a análise do comportamento da solução, pode ser feita de modo muito mais simples e sucinto.

Ao aplicar a Transformada de Fourier à Equação da Onda, foi obtida uma EDO mais simples de resolver que a EDP original. Resolvendo-a, foi encontrada a solução explícita da equação no espaço de Fourier. A partir disto, é possível fazer várias análises sobre essa solução. A escolhida neste trabalho foi sobre o seu comportamento assintótico.

No espaço de Fourier, foi feita uma análise do decaimento da energia e da solução da equação da onda. Manipulando de forma adequada os termos da equação e utilizando o método de multiplicadores, foi possível provar que a energia possui um decaimento mais rápido que uma função do tipo $v_1(t) = \dfrac{C}{(1+t)^2}$, enquanto que, como consequência, também se obteve para a norma da solução um decaimento mais rápido que o de uma função do tipo $v_2(t) = \dfrac{C}{1+t}$.

Deste modo, obtém-se o comportamento assintótico da solução da Equação da Onda, que é uma equação de evolução, e representa toda uma classe de funções hiperbólicas. Essa análise foi feita no espaço de Fourier, porém, os teoremas mostram que os resultados podem ser estendidos para o $\mathbb{R}^n$, onde estava originalmente.

Por fim, ressalta-se mais uma vez a relevância do estudo da equação da onda, no sentido de que interessa muito aos amantes da matemática aplicada, por, inevitavelmente, aparecer quase todas as vezes em que se estuda fenômenos com propagação de ondas, como também para os mais voltados para a análise, podendo aprofundar o estudo acerca de EDPs hiperbólicas, por exemplo.

Referências

1 R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

2 Boyce, Willian E.; DiPrima, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares: E Problemas de Valores de Contorno.* 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010. 607 p.

3 H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

4 Charão, R.C.; da Luz, C.R.; Ihekata, R. *Sharp decay rates for wave equations with a frictional damping via new method in the Fourier space.* J. Math. Anal. Appl. 408 (2013) 247-255.

5 Coddington, Earl A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961. 341 p.

6 R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Volume 2: Functional and Variational Methods, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

7 L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2002.

8 Figueiredo, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Rio de Janeiro: Impa, 1977. 290p.

9 Iório, Valéria de Magalhães. *EDP Um Curso de Graduação.* Rio de Janeiro: Impa, 1991. 347p.

10 Lang, Serge. *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003. 406p.

11 Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear.* 7.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008. 357p.

12 Lima, Elon Lages. *Espaços métricos.* 4.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2009. 299p.

13 L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

14 L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

15 Rudin, W. *Functional analysis.* 2.ed. International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1991. 448 p. Volume único.

16 Zill, Dennis G.; Cullen, Michael R. *Equações Diferenciais.* 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 436 p. (Vol. 2).