

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Álgebras de Lie e suas Representações

Bruno da Silveira Dias

sob a orientação de
Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis,
2019

Sumário

0	Introdução	5
1	Álgebras de Lie	7
1.1	Definição e Exemplos	7
1.1.1	Álgebras de Lie Lineares	11
1.1.2	Constantes de Estrutura	15
1.2	Ideais, Quocientes e Morfismos	19
1.3	Derivações	23
1.3.1	A Aplicação Adjunta	26
2	Representações	29
2.1	Representações e seus Morfismos	29
2.2	Operações com Representações	32
2.2.1	Sub-representação	32
2.2.2	Representação Quociente	33
2.2.3	Produto Direto e Soma Direta	35
2.2.4	Produto Tensorial de Representações	38
2.2.5	Representação Dual	38
2.3	Decomposições de Representações	39
2.4	Representações Irredutíveis de \mathfrak{sl}_2	43
2.4.1	As representações $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$	44
2.4.2	Completando a classificação	47
3	Álgebras de Lie Nilpotentes	51
3.1	Definição e Propriedades Básicas	51
3.2	O Teorema de Engel	55
4	Álgebras de Lie Solúveis	61
4.1	Definição e Propriedades Básicas	61
4.2	O Teorema de Lie	63
4.3	O Radical Solúvel	68

Sumário

4.4	Os Critérios de Cartan	70
4.4.1	Formas Traço	70
4.4.2	Critério para Solubilidade	71
4.4.3	Critério para Semissimplicidade	75
	Referências Bibliográficas	77

CAPÍTULO 0

Introdução

As álgebras de Lie constituem provavelmente a mais importante classe de álgebras não associativas. Elas têm a sua origem nos estudos do matemático norueguês Sophus Lie, que na década de 70 do século XIX buscava desenvolver uma teoria de simetrias contínuas para equações diferenciais que fosse análoga à teoria de Galois para equações polinomiais. Estes estudos colocaram em evidência uma classe de grupos – atualmente chamados *grupos de Lie* – para os quais foi criada uma extensa teoria que hoje desempenha papel central em diversas áreas da matemática e da física. O passo fundamental para o desenvolvimento desta teoria foi a descoberta, feita por Lie, daquilo que ele chamou de “grupos infinitesimais” – hoje conhecidos como álgebras de Lie – que eram associados aos grupos de Lie e funcionavam como uma espécie de “versão linearizada” destes.

Embora fossem originalmente vistas como objetos concretos associados aos grupos de Lie, logo percebeu-se que as álgebras de Lie poderiam ser estudadas como objetos independentes, de maneira abstrata. Segundo Luiz A. B. San Martins [10], esta ideia se deve a Wilhelm Killing, que por volta de 1880, de maneira independente, introduziu a definição de álgebra de Lie e provou alguns dos resultados iniciais mais importantes para a teoria.

Seguindo este ponto de vista, trazemos neste trabalho uma introdução à teoria das álgebras de Lie, com ênfase nas suas *representações* e em um contexto puramente algébrico, isto é, sem fazer referência aos grupos de Lie.

No primeiro capítulo, fazemos uma breve análise dos conceitos fundamentais sobre os quais a teoria é construída (subálgebras, ideais, homomorfismos, etc.) e apresentamos os principais exemplos. Em seguida, tratamos da linguagem básica da teoria de representações, incluindo as noções de representação irredutível e completamente redutível. Em particular, analisamos em detalhes as representações da álgebra \mathfrak{sl}_2 , das matrizes 2×2 com traço nulo.

No terceiro capítulo, estudamos as álgebras de Lie nilpotentes e provamos

o Teorema de Engel, que relaciona a nilpotência de uma álgebra de Lie com a sua representação adjunta. Finalmente, no quarto capítulo consideramos as álgebras de Lie solúveis, provando o Teorema de Lie e apresentando os critérios de Cartan.

O único pré-requisito necessário para a leitura deste trabalho é uma boa dose de álgebra linear, embora os rudimentos das teorias de grupos e anéis possam ser de grande auxílio para o entendimento do que é exposto.

Notação

A notação utilizada no trabalho é padrão:

- Os símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e \mathbb{C} denotam, respectivamente, os conjuntos de números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos. Aliás, $0 \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- A função identidade de um conjunto X é denotada por id_X .
- A transposta de uma matriz A é denotada por A^t .
- O símbolo δ é utilizado exclusivamente para denotar o delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Se V é um espaço vetorial e $S \subseteq V$ é um subconjunto, denotamos o subespaço gerado por S pela notação $\text{span } S$.

CAPÍTULO 1

Álgebras de Lie

Este capítulo tem como objetivo apresentar as álgebras de Lie, que são os objetos protagonistas deste trabalho, e estudar as suas propriedades básicas. Na primeira seção, introduzimos a sua definição e discutimos os principais exemplos. Em especial, tratamos de álgebras de Lie formadas por operadores lineares em um espaço vetorial e discutimos brevemente a noção de constantes de estrutura. Em seguida, analisamos algumas construções algébricas fundamentais como ideais, quocientes, teoremas do isomorfismo, etc. Na última seção, abordamos brevemente o conceito de derivação, que possui estreita relação com as álgebras de Lie. Em particular, estudamos a aplicação adjunta de uma álgebra de Lie.

Neste capítulo, a menos de explícita menção do contrário, \mathbb{F} denota um corpo arbitrário e todos os espaços vetoriais são tomados sobre \mathbb{F} .

1.1 Definição e Exemplos

Definição 1.1. Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, usualmente chamada de *colchete*, satisfazendo às seguintes condições:

(L1) o colchete é *alternado*: $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$;

(L2) vale a *identidade de Jacobi*: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Observação. Os somandos na identidade de Jacobi são aqueles obtidos a partir das permutações cíclicas da tripla (x, y, z) .

A condição (L1) na definição 1.1 implica que o colchete de uma álgebra de

Lie \mathfrak{g} é uma operação *anticomutativa*. De fato, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x + y, x + y] \\ &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x], \end{aligned}$$

e portanto vale

$$(L1') \quad [x, y] = -[y, x] \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Por outro lado, segue de (L1') que $2[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, e então (L1') é equivalente a (L1) quando $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$.

Fazendo uso da anticomutatividade do colchete, podemos reescrever a identidade de Jacobi como

$$(1.1) \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

ou, também,

$$(1.2) \quad [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]].$$

Mais para a frente, veremos que existem motivos interessantes para que a identidade de Jacobi seja pensada nas formas acima. Por ora, observamos apenas que, para uma operação bilinear e anticomutativa $[\cdot, \cdot]$, cada uma das equações (1.1) e (1.2) é equivalente à identidade de Jacobi.

Definição 1.2. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie. Uma função $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é dita ser um *morfismo de álgebras de Lie* se é linear e satisfaz

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Um morfismo bijetivo é chamado de *isomorfismo*¹. Se existe um isomorfismo entre \mathfrak{g} e \mathfrak{h} , dizemos que estas álgebras são *isomorfas* e escrevemos $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Definição 1.3. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra (de Lie)* de \mathfrak{g} é um subespaço vetorial $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[x, y] \in \mathfrak{a}$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{a}$.

Claramente, se \mathfrak{a} é uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} então \mathfrak{a} é ela própria uma álgebra de Lie com respeito às restrições das operações de \mathfrak{g} e a inclusão $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ é um morfismo de álgebras de Lie.

Exemplo 1.4. Em qualquer espaço vetorial V , podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie colocando $[x, y] = 0$ para todos $x, y \in V$. Uma álgebra de Lie deste tipo é dita ser *abeliana* (ou *comutativa*²). \diamond

Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, dizemos que dois elementos $x, y \in \mathfrak{g}$ *comutam* se eles satisfazem $[x, y] = 0$. Este é sempre o caso quando x e y são linearmente dependentes, pois se $y = \lambda x$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$ então $[x, y] = \lambda[x, x] = 0$. Consequentemente, todo subespaço unidimensional de \mathfrak{g} é uma subálgebra abeliana e, em particular, se $\dim(\mathfrak{g}) = 1$ então \mathfrak{g} é abeliana.

¹Neste caso, é fácil ver que a função inversa é também um morfismo.

²Se $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, então $[x, y] = [y, x]$ se e somente se $[x, y] = 0$ e portanto o uso da palavra "comutativa" coincide com o usual.

Exemplo 1.5. O produto vetorial $(x, y) \mapsto x \times y$ confere a \mathbb{R}^3 uma estrutura de álgebra de Lie sobre \mathbb{R} . De fato, se $x = (x^1, x^2, x^3)$ e $y = (y^1, y^2, y^3)$ então

$$x \times y = (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$$

donde não é difícil ver que o produto vetorial é bilinear e alternado. Resta então verificar a identidade de Jacobi. Para isto, tome $z = (z^1, z^2, z^3)$ e escreva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar o produto interno usual de \mathbb{R}^3 . Veja daí que

$$\begin{aligned} x \times (y \times z) &= (x^1, x^2, x^3) \times (y^2z^3 - y^3z^2, y^3z^1 - y^1z^3, y^1z^2 - y^2z^1) \\ &= (x^2(y^1z^2 - y^2z^1) - x^3(y^3z^1 - y^1z^3), \\ &\quad x^3(y^2z^3 - y^3z^2) - x^1(y^1z^2 - y^2z^1), \\ &\quad x^1(y^3z^1 - y^1z^3) - x^2(y^2z^3 - y^3z^2)) \\ &= ((x^2z^2 + x^3z^3)y^1 - (x^2y^2 + x^3y^3)z^1, \\ &\quad (x^1z^1 + x^3z^3)y^2 - (x^1y^1 + x^3y^3)z^2, \\ &\quad (x^1z^1 + x^2z^2)y^3 - (x^1y^1 + x^2y^2)z^3) \\ &= \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z. \end{aligned}$$

Portanto, usando a simetria do produto interno, temos

$$\begin{aligned} x \times (y \times z) + y \times (z \times x) &= \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + \langle y, x \rangle z - \langle y, z \rangle x \\ &= \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x \\ &= z \times (y \times x) \\ &= -z \times (x \times y). \end{aligned}$$

Ou seja, vale a identidade de Jacobi para o produto vetorial. \diamond

O exemplo acima mostra que o colchete em uma álgebra de Lie não é necessariamente uma operação associativa. De fato, tomando $x = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$, temos que $x \times (x \times y) = -y$, enquanto que $(x \times x) \times y = 0$. Apesar disso, as álgebras associativas desempenham um papel importante no estudo das álgebras de Lie. Em parte, isso acontece porque toda álgebra associativa dá origem a uma álgebra de Lie de maneira natural. Para ver isso, seja \mathcal{A} uma álgebra associativa e defina o *comutador* em \mathcal{A} colocando

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto [x, y] = xy - yx, \end{aligned}$$

onde as operações no lado direito da igualdade acima são aquelas advindas da estrutura de álgebra associativa. Temos então a seguinte proposição:

Proposição 1.6. *Se \mathcal{A} é uma álgebra associativa então o comutador define no espaço vetorial subjacente a \mathcal{A} uma estrutura de álgebra de Lie.*

Demonstração. O comutador é claramente bilinear e alternado. Para verificar

que satisfaz a identidade de Jacobi, tome $x, y, z \in \mathcal{A}$ e note que

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] + [y, [z, x]] &= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y \\ &= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy \\ &= xyz + zyx - yxz - zxy \\ &= (xy - yx)z - z(xy - yx) \\ &= [[x, y], z]. \end{aligned}$$

Como o comutador é alternado, tem-se $[[x, y], z] = -[z, [x, y]]$, e daí a igualdade acima equivale a $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$. \square

Dada uma álgebra associativa \mathcal{A} , denotamos por \mathcal{A}_L a álgebra de Lie cujo espaço vetorial subjacente é o mesmo de \mathcal{A} e cujo colchete é o comutador $[x, y] = xy - yx$. Note que \mathcal{A}_L é abeliana se, e somente se, \mathcal{A} é comutativa.

A correspondência $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_L$ é funtorial³. Mais precisamente, se $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um morfismo de álgebras associativas então esta mesma função pode ser vista como um morfismo de álgebras de Lie $\varphi: \mathcal{A}_L \rightarrow \mathcal{B}_L$. De fato, neste caso, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$ tem-se

$$\varphi([x, y]) = \varphi(xy - yx) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Em particular, se φ é um isomorfismo de álgebras associativas $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, então é também um isomorfismo de álgebras de Lie $\mathcal{A}_L \cong \mathcal{B}_L$.

Exemplo 1.7. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e considere o conjunto $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ dos endomorfismos lineares de V :

$$\text{End}_{\mathbb{F}}(V) = \{A: V \rightarrow V \mid A \text{ é } \mathbb{F}\text{-linear}\}.$$

Com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas ponto-a-ponto, este conjunto forma um espaço vetorial sobre \mathbb{F} . A composição de funções define então uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \circ: \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \times \text{End}_{\mathbb{F}}(V) &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \\ (A, B) &\mapsto A \circ B, \end{aligned}$$

com a qual $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ se torna uma álgebra associativa. (Muitas vezes, omitimos o símbolo “ \circ ” e escrevemos apenas AB para denotar a composição dos endomorfismos A e B .)

A construção descrita na proposição 1.6 nos dá então a álgebra de Lie $(\text{End}_{\mathbb{F}}(V))_L$, cujos elementos são os operadores lineares $A: V \rightarrow V$ e cujo colchete é o comutador

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

Esta álgebra de Lie é usualmente denotada por $\mathfrak{gl}(V)$ e denominada *álgebra de Lie linear geral* do espaço V . \diamond

³Ou seja, na linguagem da teoria de categorias, esta correspondência define um *functor* entre a categoria das álgebras associativas e a categoria das álgebras de Lie.

Exemplo 1.8. O conjunto $\text{Mat}_n(\mathbb{F})$ das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{F} é uma álgebra associativa quando munido das suas operações usuais e portanto dá origem a uma álgebra de Lie $(\text{Mat}_n(\mathbb{F}))_L$. Explicitamente, esta álgebra de Lie é o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{F} munido do comutador de matrizes $[A, B] = AB - BA$.

Por simplicidade, costumamos denotar esta álgebra de Lie por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ ou, se o corpo \mathbb{F} estiver subentendido, apenas por \mathfrak{gl}_n . \diamond

Como é de se esperar, os exemplos 1.7 e 1.8 estão intimamente relacionados: se V é um espaço vetorial de dimensão finita igual a n , então a escolha de uma base ordenada para V define um isomorfismo de álgebras associativas $\varphi: \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{F})$, que associa a cada endomorfismo de V a sua matriz na base escolhida. Esta mesma função é então um isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$.

Por causa disso, muitas vezes não fazemos distinção entre os endomorfismos de um espaço vetorial de dimensão finita e as suas matrizes com respeito a uma dada base. Isso ocorre, em especial, quando $V = \mathbb{F}^n$, caso em que utilizamos a base canônica de \mathbb{F}^n para estabelecer uma identificação natural $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^n) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$.

1.1.1 Álgebras de Lie Lineares

A maioria das álgebras de Lie presentes neste trabalho ocorre naturalmente como subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, para algum espaço vetorial V (possivelmente de dimensão infinita). Álgebras deste tipo são ditas *álgebras de Lie lineares*. Nesta subseção, vamos apresentar os principais exemplos destas álgebras, que ao longo do restante do texto serão utilizados para ilustrar os conceitos introduzidos.

Levando em consideração a identificação entre operadores lineares e matrizes comentada anteriormente, é interessante discutir estes exemplos também na linguagem matricial. Para isso, fixado $n \in \mathbb{N}^*$ e dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por E_{ij} a matriz $n \times n$ que tem 1 na (i, j) -ésima entrada e 0 nas demais. O conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ e, dada uma matriz $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, os únicos escalares $a_{ij} \in \mathbb{F}$ tais que

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

são exatamente as entradas da matriz A (o escalar a_{ij} na (i, j) -ésima entrada). Indicamos isto escrevendo $A = (a_{ij})_{ij}$.

Os comutadores das matrizes E_{ij} podem ser facilmente calculados: para quaisquer $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ tem-se $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ donde se segue imediatamente que

$$(1.3) \quad [E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}.$$

Sendo o colchete uma aplicação bilinear, esta equação é suficiente para determinar o comutador de duas matrizes quaisquer: se $A = (a_{ij})_{ij}$ e $B = (b_{ij})_{ij}$,

então

$$\begin{aligned} [A, B] &= \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}, \sum_{k,l=1}^n b_{kl} E_{kl} \right] = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} b_{kl} [E_{ij}, E_{kl}] \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} b_{kl} (\delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}) \\ &= \sum_{p,q,r=1}^n (a_{pr} b_{rq} - a_{rq} b_{pr}) E_{pq} \end{aligned}$$

e portanto $[A, B] = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} - b_{ik} a_{kj} \right)_{ij}$.

Nos exemplos a seguir, n denota um número inteiro positivo fixado e os símbolos E_{ij} são sempre utilizados para representar as matrizes básicas descritas acima.

Exemplo 1.9. Lembre que o *traço* de uma matriz $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ é definido como a soma das suas entradas diagonais: $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Vamos mostrar que o subespaço

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid \text{tr}(A) = 0\} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$$

formado pelas matrizes de traço nulo é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, que chamamos de *álgebra de Lie linear especial*.

Ora, para quaisquer $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ tem-se

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k=1}^n b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA),$$

de modo que $\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = 0$ e $[A, B] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$. Isso vale em particular se $A, B \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$, de modo que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ de fato é uma subálgebra de Lie.

Em termos das matrizes básicas E_{ij} , $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ tem como base o conjunto

$$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

e portanto sua dimensão é $n^2 - 1$. ◇

Proposição 1.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ uma forma bilinear em V . O conjunto $\text{aut}(V, \beta)$ dos endomorfismos $X: V \rightarrow V$ que satisfazem*

$$(1.4) \quad \beta(Xv, w) = -\beta(v, Xw) \text{ para todos } v, w \in V$$

forma uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Demonstração. Note que $\text{aut}(V, \beta)$ nunca é vazio, pois o endomorfismo nulo sempre satisfaz a equação (1.4). O fato de este conjunto ser um subespaço de $\mathfrak{gl}(V)$ segue então da bilinearidade de β . Além disso, se $X, Y \in \text{aut}(V, \beta)$ então

$$\begin{aligned} \beta([X, Y]v, w) &= \beta(XYv, w) - \beta(YXv, w) \\ &= -\beta(Yv, Xw) + \beta(Xv, Yw) \\ &= \beta(v, YXw) - \beta(v, XYw) \\ &= \beta(v, [Y, X]w) \\ &= -\beta(v, [X, Y]w), \end{aligned}$$

de modo que $[X, Y] \in \text{aut}(V, \beta)$. \square

Observação. Se $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ é uma forma bilinear não degenerada em um espaço de dimensão finita, é possível mostrar que para cada endomorfismo $X \in \mathfrak{gl}(V)$ existe um único $X^* \in \mathfrak{gl}(V)$, chamado de *adjunto de X relativo a β* , tal que

$$\beta(Xv, w) = \beta(v, X^*w) \text{ para todos } v, w \in V$$

Neste caso, os elementos de $\text{aut}(V, \beta)$ são precisamente aqueles endomorfismos $X: V \rightarrow V$ que são *anti-autoadjuntos* com respeito a β , isto é, que satisfazem a igualdade $X = -X^*$.

Observação. O uso da notação $\text{aut}(V, \beta)$ se deve a uma estreita relação existente entre esta álgebra de Lie e o grupo $\text{Aut}(V, \beta)$ dos automorfismos de V que preservam a forma β (veja, por exemplo, [4, pg. 70]).

Quando V tem dimensão finita, podemos traduzir a proposição 1.10 em linguagem matricial. Fixada uma base ordenada (e_1, \dots, e_n) para V , podemos estabelecer identificações entre os endomorfismos $X: V \rightarrow V$ e as suas matrizes com respeito à base escolhida, e entre vetores $v \in V$ e matrizes coluna:

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Além disso, podemos associar à forma bilinear β uma matriz $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ dada por $B = (\beta(e_i, e_j))_{ij}$.

Sob estas identificações, tem-se $\beta(v, w) = v^t B w$ para quaisquer $v, w \in V$ e portanto a equação (1.4), que expressa a condição para que um endomorfismo X pertença a $\text{aut}(V, \beta)$, torna-se

$$v^t X^t B w = -v^t B X w \text{ para quaisquer } v, w \in V.$$

Para $v = e_i$ e $w = e_j$, esta é uma igualdade entre as (i, j) -ésimas entradas das matrizes $X^t B$ e $B X$. Concluimos então que $X \in \text{aut}(V, \beta)$ se, e somente se, X satisfaz a equação matricial

$$(1.5) \quad X^t B = -B X.$$

Exemplo 1.11. No espaço vetorial \mathbb{F}^n , considere a forma bilinear β cuja matriz com respeito à base canônica é a identidade $\mathbf{1}_n$. Em outras palavras, β é a forma bilinear canônica em \mathbb{F}^n , dada por

$$\beta((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

para quaisquer (x_1, \dots, x_n) e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$.

Neste caso, a álgebra de Lie $\text{aut}(\mathbb{F}^n, \beta)$ é chamada de *álgebra de Lie ortogonal* e denotada por $\mathfrak{so}_n(\mathbb{F})$. Note que, sob a identificação natural $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^n) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, esta é a álgebra de Lie das matrizes antissimétricas: a equação (1.5) se reduz a $X^t = -X$. \diamond

Exemplo 1.12. No espaço vetorial \mathbb{F}^{2n} , considere a forma bilinear ω cuja matriz com respeito à base canônica é

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, ω é dada por

$$\omega((x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), (y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)) = \sum_{i=1}^n x_i q_i - y_i p_i$$

para quaisquer $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ e $(y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{F}^{2n}$.

A álgebra de Lie $\text{aut}(\mathbb{F}^{2n}, \omega)$ é então chamada de *álgebra de Lie simplética* e denotada por $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$. Sob a identificação natural $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^{2n}) \cong \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{F})$, os seus elementos são as matrizes da forma

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

para $A, B, C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, com B e C simétricas. Para ver isso, tome $X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{F})$ e sejam $A, B, C, D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ tais que

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Lembre então que $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$ se, e somente se, $X^t \Omega = -\Omega X$. Explicitamente, esta última igualdade se escreve como

$$\begin{pmatrix} -C^t & A^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$$

de modo que $X \in \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$ se, e somente se, valem as igualdades $C = C^t$, $B = B^t$ e $D = -A^t$. \diamond

As álgebras de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{F})$ e $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$ são conhecidas como *álgebras de Lie clássicas*, pois possuem estreita relação com os *grupos clássicos* $\text{SL}_n(\mathbb{F})$, $\text{SO}_n(\mathbb{F})$ e $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ (denominados respectivamente *grupos especial linear, especial ortogonal e simplético*). A leitora interessada pode encontrar uma discussão introdutória a respeito destes grupos e sua relação com estas álgebras de Lie no livro [3].

Exemplo 1.13. As matrizes diagonais $n \times n$ formam uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, que denotamos por $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$. O conjunto $\{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ é uma base para esta álgebra, que tem dimensão igual a n . \diamond

Exemplo 1.14. Uma matriz $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ é dita *triangular superior* se as suas entradas satisfazem $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Desta definição, segue imediatamente que o conjunto das matrizes triangulares superiores forma um subespaço $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, com base $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ e dimensão $\frac{1}{2}(n^2 + n)$.

O comutador de quaisquer duas matrizes desta base é ainda uma matriz triangular superior. De fato, supondo que $i \leq j$ e $k \leq l$, temos que se $j = k$ então $i \leq l$ e se $l = i$ então $k \leq j$. Daí,

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj} \in \mathfrak{t}_n(\mathbb{F}).$$

Segue disto que $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. ◇

Exemplo 1.15. Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ é *estritamente triangular superior* se as suas entradas satisfazem $a_{ij} = 0$ sempre que $i \geq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Um raciocínio análogo ao do exemplo anterior mostra que o conjunto $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ das matrizes estritamente triangulares superiores é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$, com base $\{E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ e dimensão $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. ◇

Quando o corpo de escalares \mathbb{F} está subentendido ou não tem relevância, é comum suprimi-lo da notação para as álgebras de Lie apresentadas acima. Assim, nestes casos escrevemos apenas \mathfrak{gl}_n , \mathfrak{sl}_n , \mathfrak{so}_n , \mathfrak{sp}_{2n} , \mathfrak{d}_n , \mathfrak{t}_n e \mathfrak{n}_n .

1.1.2 Constantes de Estrutura

Na última subseção, observamos que é suficiente conhecer os colchetes das matrizes E_{ij} da base canônica de \mathfrak{gl}_n para determinar, por bilinearidade, o colchete de quaisquer duas matrizes de ordem n . Esta observação possui um caráter mais geral, que discutiremos brevemente nesta subseção.

Suponha que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita⁴ igual a n e tome uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Existem escalares $\zeta_{ij}^k \in \mathbb{F}$ unicamente determinados tais que

$$(1.6) \quad [x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k x_k$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por bilinearidade, estes escalares são suficientes para determinar o colchete de quaisquer dois elementos de \mathfrak{g} . De fato, dados $a, b \in \mathfrak{g}$, existem únicos $\alpha^i, \beta^j \in \mathbb{F}$ tais que

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i, \quad b = \sum_{j=1}^n \beta^j x_j.$$

⁴O conteúdo desta subseção pode ser facilmente generalizado para álgebras de dimensão infinita.

Daí,

$$[a, b] = \left[\sum_{i=1}^n \alpha^i x_i, \sum_{j=1}^n \beta^j x_j \right] = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j [x_i, x_j] = \sum_{i,j,k=1}^n \alpha^i \beta^j \zeta_{ij}^k x_k.$$

Os escalares ζ_{ij}^k são denominados *constantes de estrutura* de \mathfrak{g} relativas à base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Obviamente, outras bases podem estar associadas a constantes de estrutura diferentes; porém, existem relações que são satisfeitas por qualquer conjunto de constantes de estrutura, pois decorrem das propriedades de alternância e identidade de Jacobi do colchete. A saber, se ζ_{ij}^k são constantes de estrutura de \mathfrak{g} então as igualdades

$$\begin{aligned} \zeta_{ii}^k &= 0, & \zeta_{ji}^k &= -\zeta_{ij}^k, \\ \sum_{p=1}^n (\zeta_{ij}^p \zeta_{kp}^l + \zeta_{ki}^p \zeta_{jp}^l + \zeta_{jk}^p \zeta_{ip}^l) &= 0, \end{aligned}$$

são válidas para todos $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. (Para verificar a última igualdade, basta considerar a identidade de Jacobi para elementos da base e expandir usando 1.6).

No sentido contrário, se \mathfrak{g} é um espaço vetorial com base $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\zeta_{ij}^k \in \mathbb{F}$ são escalares para os quais valem as igualdades acima, então podemos definir um colchete em \mathfrak{g} colocando

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k x_k$$

e estendendo por bilinearidade. Pode-se então verificar que este colchete é alternado e satisfaz a identidade de Jacobi, tornando \mathfrak{g} uma álgebra de Lie com constantes de estrutura dadas pelos ζ_{ij}^k . Na prática, isto é feito definindo os colchetes dos elementos da base do espaço e verificando que valem

$$\begin{aligned} [x_i, x_i] &= 0, & [x_i, x_j] &= -[x_j, x_i] \\ [x_i, [x_j, x_k]] + [x_j, [x_k, x_i]] + [x_k, [x_i, x_j]] &= 0 \end{aligned}$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Daí, segue por bilinearidade que a operação assim definida dá a \mathfrak{g} uma estrutura de álgebra de Lie.

Exemplo 1.16. Em um espaço vetorial tridimensional com base $\{p, q, z\}$, defina uma operação bilinear $[\cdot, \cdot]$ colocando

$$\begin{aligned} -[q, p] &= [p, q] = z, \\ [p, z] &= [q, z] = [p, p] = [q, q] = [z, z] = 0. \end{aligned}$$

Para verificar que vale a identidade de Jacobi para os elementos desta base, basta observar que o colchete de quaisquer dois tais elementos é sempre um múltiplo de z , que comuta com todos os demais. Obtemos portanto uma álgebra de Lie tridimensional, chamada *álgebra de Heisenberg* e denotada por $\mathfrak{heis}_3(\mathbb{F})$.

Generalizando esta construção, definimos a *álgebra de Heisenberg generalizada* $\mathfrak{heis}_{2n+1}(\mathbb{F})$, para $n \in \mathbb{N}^*$, tomando um espaço vetorial de dimensão $2n + 1$ com base $\{p_i, q_i, z \mid 1 \leq i \leq n\}$ e colocando

$$\begin{aligned} -[q_i, p_i] &= [p_i, q_i] = z, \\ [p_i, q_j] &= [p_i, z] = [q_i, z] = [p_i, p_i] = [q_i, q_i] = [z, z] = 0, \end{aligned}$$

para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq n$. \diamond

Proposição 1.17. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie de dimensão finita. Existe um isomorfismo $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ se, e somente se, \mathfrak{g} e \mathfrak{h} possuem bases com relação às quais suas constantes de estruturas são as mesmas.*

Demonstração. Suponha que existe um isomorfismo $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ e sejam $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de \mathfrak{g} e $\zeta_{ij}^k \in \mathbb{F}$ as constantes de estrutura associadas. Por definição, temos

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k x_k$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Então, como φ é um isomorfismo,

$$[\varphi(x_i), \varphi(x_j)] = \varphi([x_i, x_j]) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k \varphi(x_k).$$

Portanto os ζ_{ij}^k são constantes de estrutura de \mathfrak{h} relativas à $\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$ (este conjunto é uma base de \mathfrak{h} , pois φ é isomorfismo linear).

Reciprocamente, se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_n\}$ são, respectivamente, bases de \mathfrak{g} e \mathfrak{h} com relação às quais $\zeta_{ij}^k \in \mathbb{F}$ são as constantes de estrutura, então podemos definir uma bijeção linear $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ colocando $\varphi(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Daí,

$$\begin{aligned} \varphi([x_i, x_j]) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k \varphi(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \zeta_{ij}^k y_k \\ &= [y_i, y_j] \\ &= [\varphi(x_i), \varphi(x_j)] \end{aligned}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, se $a = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i$ e $b = \sum_{j=1}^n \beta^j x_j$, então por (bi)linearidade

$$\begin{aligned} \varphi([a, b]) &= \varphi\left(\sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j [x_i, x_j]\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha^i \beta^j \varphi([x_i, x_j]) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \alpha^i \beta^j [\varphi(x_i), \varphi(x_j)] \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \alpha^i \varphi(x_i), \sum_{j=1}^n \beta^j \varphi(x_j) \right] \\ &= [\varphi(a), \varphi(b)] \end{aligned}$$

e portanto φ é um isomorfismo de álgebras de Lie. \square

Exemplo 1.18. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ das matrizes antissimétricas 3×3 com entradas reais (veja o exemplo 1.11) possui como base o conjunto $\{E_1, E_2, E_3\}$, onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Não é difícil verificar que as matrizes desta base satisfazem as relações

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = -E_2, \quad [E_2, E_3] = E_1,$$

que, a leitora perceberá, são as mesmas relações satisfeitas pelos vetores e_1, e_2, e_3 da base canônica de \mathbb{R}^3 sob a operação de produto vetorial. Em outras palavras, as constantes de estrutura de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ relativas à base $\{E_1, E_2, E_3\}$ são as mesmas de \mathbb{R}^3 relativas à $\{e_1, e_2, e_3\}$, de modo que existe um isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$, dado por $E_i \mapsto e_i$. \diamond

Exemplo 1.19. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão dois. Tome uma base arbitrária $\{x', y'\}$ e veja que

$$[\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y'] = (\alpha\delta - \beta\gamma)[x', y']$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Em outras palavras, o colchete de quaisquer dois elementos de \mathfrak{g} é um múltiplo de $[x', y']$.

Assim, se $[x', y'] = 0$ então \mathfrak{g} é abeliana. Por outro lado, se \mathfrak{g} é não abeliana, então devemos ter $[x', y'] \neq 0$ e daí podemos colocar $y = [x', y']$ e tomar x'' tal que $\{x'', y\}$ seja uma base para \mathfrak{g} . Existe então algum $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que

$$[x'', y] = \lambda[x', y'] = \lambda y$$

Como $\{x'', y\}$ é uma base, devemos ter $[x'', y] \neq 0$, pois caso contrário \mathfrak{g} seria abeliana. Logo, $\lambda \neq 0$ e podemos definir $x = \lambda^{-1}x''$. Obtemos assim uma base $\{x, y\}$ para \mathfrak{g} tal que $[x, y] = y$.

Concluimos com isso que, a menos de isomorfismo, existe uma única álgebra de Lie não abeliana de dimensão dois. De fato, mostramos que toda álgebra de Lie deste tipo admite uma base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Em outras palavras, quaisquer duas álgebras de Lie não abelianas de dimensão dois possuem bases com relação às quais suas constantes de estrutura são as mesmas. Obviamente, resta mostrar que uma tal álgebra de Lie de fato existe, mas para isso basta tomar um espaço vetorial \mathfrak{g} com base $\{x, y\}$ e definir

$$[\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y] = (\alpha\delta - \beta\gamma)y$$

para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. A verificação de que este colchete é alternado e satisfaz a identidade de Jacobi é uma conta simples e portanto a omitimos. \diamond

1.2 Ideais, Quocientes e Morfismos

Nesta seção, vamos estudar algumas construções algébricas básicas (ideais, quocientes, teoremas de isomorfismo, etc.) no contexto das álgebras de Lie.

Definição 1.20. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é dito ser um *ideal* de \mathfrak{g} se $[x, a] \in \mathfrak{a}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $a \in \mathfrak{a}$.

Segue imediatamente desta definição que todo ideal é também uma subálgebra de Lie. O papel desempenhado pelos ideais na teoria das álgebras de Lie é, como veremos a seguir, análogo àquele desempenhado pelos ideais bilaterais na teoria de anéis ou pelos subgrupos normais na teoria de grupos: são precisamente aquelas subestruturas que surgem como núcleos de morfismos. Note que aqui, assim como no caso dos anéis comutativos, não é necessário fazer distinção entre ideais à esquerda e à direita, pois se $[x, y] \in \mathfrak{a}$, então, sendo \mathfrak{a} um subespaço vetorial, tem-se $[y, x] = -[x, y] \in \mathfrak{a}$.

Antes de prosseguir, é conveniente introduzir a seguinte notação: dados subconjuntos \mathfrak{a} e \mathfrak{b} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , escrevemos $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ para denotar o subespaço vetorial de \mathfrak{g} gerado pelos elementos da forma $[x, y]$, com $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{b}$:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \text{span}\{[x, y] \mid x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}.$$

A anticomutatividade do colchete e a identidade de Jacobi implicam que

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}], \quad [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] \subseteq [[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}]]$$

para quaisquer subconjuntos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{g}$.

Veja que, nesta notação, um ideal (resp. uma subálgebra) de \mathfrak{g} é precisamente um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ para o qual vale $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$ (resp. $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$).

Proposição 1.21. Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são ideais de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} então o mesmo vale para os subespaços $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ e $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Demonstração. As demonstrações para os subespaços $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ são imediatas. Para $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, note que

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] &\subseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \quad (\text{pois } \mathfrak{a} \text{ e } \mathfrak{b} \text{ são ideais em } \mathfrak{g}) \\ &= [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \end{aligned}$$

donde se segue que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ é um ideal em \mathfrak{g} . □

Exemplo 1.22. Em qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} , os subespaços 0 e \mathfrak{g} são ideais, chamados de *ideais triviais*. ◇

Exemplo 1.23. O *centro* de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é o subconjunto

$$Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [z, x] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$$

formado pelos elementos que comutam com toda a álgebra. Da bilinearidade do colchete, segue que $Z(\mathfrak{g})$ é um subespaço vetorial. Daí, como $[\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0 \subseteq Z(\mathfrak{g})$, temos que $Z(\mathfrak{g})$ é um ideal de \mathfrak{g} .

Com o mesmo argumento mostra-se ainda que qualquer subespaço contido em $Z(\mathfrak{g})$ é um ideal de \mathfrak{g} . Tais ideais são ditos *centrais*. ◇

A proposição a seguir descreve como as subálgebras e os ideais se comportam com relação aos morfismos.

Proposição 1.24. *Seja $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um morfismo de álgebras de Lie.*

- a) *Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ é um ideal (resp. uma subálgebra), então $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{g}$ também é um ideal (resp. uma subálgebra).*
- b) *Se $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra, então $\varphi(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{h}$ também o é.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ um ideal. Sabemos da álgebra linear que $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} . Dados $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ temos

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in \mathfrak{a},$$

pois $\varphi(y) \in \mathfrak{a}$ e \mathfrak{a} é um ideal em \mathfrak{h} . Logo, $[x, y] \in \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$, de modo que $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ é um ideal em \mathfrak{g} . As demais afirmações do enunciado são obtidas de maneira similar, com pequenas modificações. \square

Corolário 1.25. *Se $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um morfismo de álgebras de Lie, então $\ker(\varphi)$ é um ideal de \mathfrak{g} e $\text{im}(\varphi)$ é uma subálgebra de \mathfrak{h} .*

Demonstração. Basta tomar $\mathfrak{a} = 0$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ na proposição anterior. \square

Os ideais surgem naturalmente quando consideramos o seguinte problema: dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} e um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, será que é possível definir um colchete no quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ de modo que a aplicação canônica $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ seja um morfismo de álgebras de Lie? Perceba que, caso a resposta seja afirmativa, o colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ fica completamente determinado pelo fato de que π deve ser um morfismo, pois daí para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) = [x, y] + \mathfrak{a}.$$

Resta então saber sob quais condições a expressão $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a}$ define um colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Para isso, veja que tal expressão está bem definida se, e somente se, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ e $a, b \in \mathfrak{a}$ tem-se

$$[x + a, y + b] + \mathfrak{a} = [x, y] + \mathfrak{a}$$

ou, equivalentemente,

$$[x + a, y + b] - [x, y] = [x, b] + [a, y] + [a, b] \in \mathfrak{a}.$$

Esta condição é obviamente satisfeita se \mathfrak{a} é um ideal em \mathfrak{g} . Por outro lado, se esta condição é satisfeita, então tomando $a = 0$, concluímos que deve-se ter $[x, b] \in \mathfrak{a}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $b \in \mathfrak{a}$. Logo, para que o colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ esteja bem definido é necessário e suficiente que \mathfrak{a} seja um ideal em \mathfrak{g} .

Teorema 1.26. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Existe uma única estrutura de álgebra de Lie no espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ tal que a aplicação canônica $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é um morfismo de álgebras de Lie.*

Além disso, vale a seguinte propriedade universal: dado um morfismo $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ satisfazendo $\mathfrak{a} \subseteq \ker(\varphi)$, existe um único morfismo $\bar{\varphi}: \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ e este morfismo é injetivo se, e somente se, $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{h} \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{a} & & \end{array}$$

Demonstração. Pelos comentários feitos acima, sabemos que quando \mathfrak{a} é um ideal o colchete dado por $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a}$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ está bem definido e é o único que satisfaz $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$. Do fato que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, decorre que este colchete é bilinear, alternado e satisfaz a identidade de Jacobi. Tal colchete define, portanto, uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, e esta é a única tal que π é um morfismo de álgebras de Lie.

Seja então $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um morfismo satisfazendo $\mathfrak{a} \subseteq \ker(\varphi)$. Da propriedade universal do espaço vetorial quociente, sabemos que existe uma única função linear $\bar{\varphi}: \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{h}$, tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$. Resta verificar que esta função é um morfismo de álgebras de Lie. Para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}([x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}]) &= \bar{\varphi}([x, y] + \mathfrak{a}) = (\bar{\varphi} \circ \pi)([x, y]) \\ &= \varphi([x, y]) \\ &= [\varphi(x), \varphi(y)] \\ &= [\bar{\varphi}(x + \mathfrak{a}), \bar{\varphi}(y + \mathfrak{a})]. \end{aligned}$$

Por fim, segue da igualdade $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ que $\ker(\bar{\varphi}) = \pi(\ker(\varphi))$. Portanto, $\ker(\bar{\varphi}) = 0$ se e somente se $\ker(\varphi) \subseteq \mathfrak{a}$. Como por hipótese tem-se $\mathfrak{a} \subseteq \ker(\varphi)$, resulta que $\bar{\varphi}$ é injetiva se e somente se $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$. \square

Como corolário, temos os teoremas de isomorfismo para álgebras de Lie:

Teorema 1.27. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie.*

- a) *Se $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um morfismo de álgebras de Lie, então existe um isomorfismo $\bar{\varphi}: \mathfrak{g}/\ker(\varphi) \rightarrow \text{im}(\varphi)$ dado por $\bar{\varphi}(x + \ker(\varphi)) = \varphi(x)$.*
- b) *Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são ideais de \mathfrak{g} tais que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, então $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ é um ideal em $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ e existe um isomorfismo*

$$\frac{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \cong \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}.$$

- c) *Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são ideais de \mathfrak{g} , então existe um isomorfismo*

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \cong \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}.$$

Demonstração. O item a) segue imediatamente da proposição anterior. Os itens b) e c) resultam de uma aplicação rotineira do item a), de maneira análoga ao que é feito na teoria de anéis para ideais bilaterais. Por causa disso, omitimos as suas demonstrações. \square

Podemos utilizar o item b) do resultado acima para estabelecer uma correspondência entre os ideais de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ e os ideais de \mathfrak{g} que contém \mathfrak{a} :

Corolário 1.28. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Existe uma bijeção canônica*

$$\{\text{ideais de } \mathfrak{g}/\mathfrak{a}\} \longleftrightarrow \{\text{ideais de } \mathfrak{g} \text{ que contém } \mathfrak{a}\}$$

induzida pela aplicação quociente $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

Demonstração. Do item b) do teorema 1.27, temos que se \mathfrak{b} é um ideal de \mathfrak{g} com $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ então $\pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ é um ideal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Por outro lado, se $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é um ideal então, pela proposição 1.24, $\pi^{-1}(\mathfrak{h})$ é um ideal de \mathfrak{g} e, obviamente, contém $\ker(\pi) = \mathfrak{a}$. Como π é sobrejetora, as correspondências $\mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b})$ e $\mathfrak{h} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{h})$ são inversas uma da outra, e portanto estabelecem uma bijeção entre os conjuntos citados. \square

Exemplo 1.29. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Pela proposição 1.24, o subespaço $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal de \mathfrak{g} , que dizemos ser a sua *álgebra derivada*.

Este ideal dá uma medida do quão longe \mathfrak{g} está de ser abeliana. De fato, é claro que \mathfrak{g} é abeliana se, e somente se, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Mais geralmente, $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é o maior quociente abeliano de \mathfrak{g} (chamado *abelianização* de \mathfrak{g}), pois para qualquer ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ tem-se que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é abeliana se, e somente se,

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Mas isto é equivalente a $[x, y] \in \mathfrak{a}$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$, donde segue que $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é abeliana se, e somente se, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$. \diamond

Exemplo 1.30. A função traço

$$\begin{aligned} \text{tr}: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{F} \\ (a_{ij})_{ij} &\mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

é linear e, como vimos no exemplo 1.9, satisfaz $\text{tr}([A, B]) = 0$ para quaisquer matrizes $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Vendo \mathbb{F} como uma álgebra de Lie abeliana, isto significa que o traço é um morfismo de álgebras de Lie, e daí $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \ker(\text{tr})$ é um ideal de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Além disso, o teorema do isomorfismo implica que

$$\frac{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})}{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})} \cong \mathbb{F},$$

pois o traço é uma aplicação sobrejetiva⁵.

O quociente acima sendo abeliano, concluímos que $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})] \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ (vide o exemplo anterior). Por outro lado, o conjunto

$$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1, i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

⁵Isto segue, por exemplo, da igualdade $\text{tr}(\lambda E_{11}) = \lambda$, que é válida para todo $\lambda \in \mathbb{F}$

é uma base para $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ e cada um dos seus elementos é um membro de $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})]$, pois

$$\begin{aligned} E_{ij} &= [E_{ii}, E_{ij}] && \text{(para } 1 \leq i \neq j \leq n) \\ E_{ii} - E_{i+1, i+1} &= [E_{i, i+1}, E_{i+1, i}] && \text{(para } 1 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \subseteq [\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})]$ e daí $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ é precisamente a álgebra derivada de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. \diamond

Exemplo 1.31. Se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são álgebras de Lie então podemos definir um colchete no espaço vetorial $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ colocando

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'], [b, b'])$$

para quaisquer $a, a' \in \mathfrak{a}$ e $b, b' \in \mathfrak{b}$. Com esta estrutura dizemos que $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ é o *produto direto* das álgebras de Lie \mathfrak{a} e \mathfrak{b} . Esta definição faz com que as projeções canônicas

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{a}}: \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &\rightarrow \mathfrak{a} & \pi_{\mathfrak{b}}: \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} &\rightarrow \mathfrak{b} \\ (a, b) &\mapsto a & (a, b) &\mapsto b \end{aligned}$$

tornem-se morfismos de álgebras de Lie. Como $\ker(\pi_{\mathfrak{b}}) = \{(a, 0) \mid a \in \mathfrak{a}\} \cong \mathfrak{a}$ e $\ker(\pi_{\mathfrak{a}}) = \{(0, b) \mid b \in \mathfrak{b}\} \cong \mathfrak{b}$, isso significa que o produto direto $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ possui (cópias isomorfas de) \mathfrak{a} e \mathfrak{b} como ideais complementares.

Reciprocamente, se uma álgebra de Lie \mathfrak{g} se decompõe em uma soma direta de subespaços vetoriais

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$$

tais que \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são ideais em \mathfrak{g} , então esta álgebra é naturalmente isomorfa ao produto direto $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. De fato, como \mathfrak{a} é um ideal em \mathfrak{g} , temos $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$ e, analogamente, como \mathfrak{b} é ideal, temos $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b}$. Portanto

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0,$$

de modo que os elementos de \mathfrak{a} comutam com os de \mathfrak{b} . Daí, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ e escrevendo $x = a + b$ e $y = a' + b'$, com $a, a' \in \mathfrak{a}$ e $b, b' \in \mathfrak{b}$ (que estão unicamente determinados pois a soma $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ é direta), temos

$$[x, y] = [a + b, a' + b'] = [a, a'] + [b, b'].$$

Isso mostra que a aplicação $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ que associa $x = a + b \in \mathfrak{g}$ ao par $(a, b) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ é um morfismo de álgebras de Lie. Tal aplicação é, além disso, claramente bijetiva, de modo que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. \diamond

1.3 Derivações

De maneira geral, uma \mathbb{F} -álgebra (não necessariamente associativa, não necessariamente de Lie) é simplesmente um \mathbb{F} -espaço vetorial \mathcal{A} munido de uma operação bilinear $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Veremos nesta seção que muitas álgebras de Lie surgem naturalmente como conjuntos de derivações de outras álgebras e estudaremos alguns fatos básicos sobre as derivações de uma álgebra de Lie.

Definição 1.32. Seja \mathcal{A} uma álgebra. Uma *derivação* de \mathcal{A} é uma aplicação linear $D: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisfaz a regra de Leibniz:

$$D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

para todos $a, b \in \mathcal{A}$.

Exemplo 1.33. Seja $C^\infty(\mathbb{R})$ a \mathbb{R} -álgebra das funções suaves $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considere o operador de derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}: C^\infty(\mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' = \frac{df}{dx}. \end{aligned}$$

Do cálculo, sabemos que este operador é linear e satisfaz $(fg)' = f'g + fg'$ para todas as funções $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Portanto, $\frac{d}{dx}$ é uma derivação de $C^\infty(\mathbb{R})$. \diamond

Proposição 1.34. Seja \mathcal{A} uma álgebra. O conjunto $\text{der}(\mathcal{A})$ das derivações de \mathcal{A} é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Demonstração. Claramente, a soma de derivações e a multiplicação de uma derivação por um escalar são ainda derivações, de modo que $\text{der}(\mathcal{A})$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Agora, se D e D' são derivações arbitrárias de \mathcal{A} então para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ tem-se

$$\begin{aligned} DD'(a \cdot b) &= D(D'a \cdot b + a \cdot D'b) \\ &= DD'a \cdot b + D'a \cdot Db + Da \cdot D'b + a \cdot DD'b. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} [D, D'](a \cdot b) &= (DD' - D'D)(a \cdot b) \\ &= DD'a \cdot b + a \cdot DD'b - D'Da \cdot b - a \cdot D'Db \\ &= [D, D']a \cdot b + a \cdot [D, D']b, \end{aligned}$$

e portanto $[D, D'] \in \text{der}(\mathcal{A})$. \square

Observação. Embora $\text{der}(\mathcal{A})$ seja uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$, não é em geral verdade que este conjunto seja uma subálgebra associativa de $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, pois a composição de duas derivações D e D' pode não ser uma derivação. De fato, pela demonstração acima este é o caso se, e somente se, $D'a \cdot Db + Da \cdot D'b = 0$ para todos $a, b \in \mathcal{A}$. A leitora pode verificar que esta condição não é satisfeita, por exemplo, no caso em que $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R})$ e $D = D' = \frac{d}{dx}$.

Exemplo 1.35. Se V é uma álgebra de Lie abeliana, então a regra de Leibniz é trivialmente válida para qualquer operador linear em V e portanto, neste caso, $\text{der}(V) = \mathfrak{gl}(V)$. \diamond

Exemplo 1.36. Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a \mathbb{R} -álgebra das funções suaves $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e denote por $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a i -ésima derivada parcial da função f . Seja também $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos campos vetoriais suaves sobre \mathbb{R}^n , isto é, das aplicações infinitamente diferenciáveis $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dado um campo vetorial suave X , denotamos as suas funções coordenadas por X_1, \dots, X_n e definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Assim, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\lambda f + \mu g) &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ &= \lambda \mathcal{L}_X(f) + \mu \mathcal{L}_X(g)\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f \cdot g) &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot g + f \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \\ &= \mathcal{L}_X(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{L}_X(g).\end{aligned}$$

Isto significa que para cada campo vetorial suave $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem-se uma derivação \mathcal{L}_X da álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, e portanto podemos definir uma função

$$\begin{aligned}\mathcal{L}: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \text{der}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)) \\ X &\mapsto \mathcal{L}_X.\end{aligned}$$

Esta função é linear: para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda X + \mu Y}(f) &= \sum_{i=1}^n (\lambda X + \mu Y)_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda X_i + \mu Y_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \lambda \mathcal{L}_X(f) + \mu \mathcal{L}_Y(f)\end{aligned}$$

para toda função $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{L}_{\lambda X + \mu Y} = \lambda \mathcal{L}_X + \mu \mathcal{L}_Y$.

Por fim, se $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota a função projeção na i -ésima coordenada, então é claro que $\mathcal{L}_X(x_i) = X_i$ para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Decorre disso que se $\mathcal{L}_X = 0$ então $X = 0$, e portanto a aplicação \mathcal{L} é injetiva. Com um pouco de análise, é possível mostrar também a sua sobrejetividade, donde se conclui que toda derivação da álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é da forma \mathcal{L}_X para um único campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Isto pode ser utilizado para definir uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, colocando $[X, Y] = \mathcal{L}^{-1}([\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y])$. Assim, o campo $[X, Y]$ é, por definição, o único tal que $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$. As coordenadas deste campo podem ser calculadas facilmente:

$$\begin{aligned} [X, Y]_i &= \mathcal{L}_{[X, Y]}(x_i) \\ &= [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](x_i) \\ &= (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(x_i) \\ &= \mathcal{L}_X(Y_i) - \mathcal{L}_Y(X_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Com esta operação, denominada nas áreas de geometria e topologia diferenciais de *colchete de Lie*, $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ torna-se uma álgebra de Lie real, isomorfa a $\mathfrak{der}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n))$. \diamond

Exemplo 1.37. O exemplo acima pode ser generalizado para qualquer variedade diferenciável M : as derivações de $\mathcal{C}^\infty(M)$ se identificam naturalmente com os campos vetoriais suaves sobre M , de modo que o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ destes campos possui uma estrutura natural de álgebra de Lie, isomorfa a $\mathfrak{der}(\mathcal{C}^\infty(M))$. \diamond

1.3.1 A Aplicação Adjunta

Uma pergunta natural que surge neste ponto é se existe alguma relação entre uma álgebra de Lie \mathfrak{g} e a sua álgebra de derivações $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, visto que ambos os objetos são álgebras de Lie. Respondendo esta questão, veremos nesta subseção que existe um morfismo canonicamente definido $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, chamado de *aplicação adjunta*, que carrega informações a respeito da estrutura de \mathfrak{g} e constitui uma ferramenta fundamental no seu estudo.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e note que, sendo o colchete uma aplicação bilinear $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, ele dá origem a uma função linear

$$\begin{aligned} \text{ad}: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \text{ad}(x) \end{aligned}$$

onde $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é dada por $\text{ad}(x)y = [x, y]$. Lembre então que, devido à anticomutatividade do colchete, podemos reescrever a identidade de Jacobi como

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]].$$

Ou seja, para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}([x, y])z &= \operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)z - \operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)z \\ &= [\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)]z.\end{aligned}$$

Portanto $\operatorname{ad}([x, y]) = [\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, isto é, $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é um morfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.38. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. A *aplicação adjunta* de \mathfrak{g} é o morfismo $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definido por $\operatorname{ad}(x)y = [x, y]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.

Agora, a anticomutatividade do colchete permite que escrevamos a identidade de Jacobi também da seguinte maneira:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Daí, para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$ vale

$$\operatorname{ad}(x)[y, z] = [\operatorname{ad}(x)y, z] + [y, \operatorname{ad}(x)z]$$

Em outras palavras, para todo $x \in \mathfrak{g}$ a transformação $\operatorname{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação de \mathfrak{g} , e portanto a aplicação adjunta de \mathfrak{g} tem a sua imagem contida em $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$.

Exemplo 1.39. Considere a base canônica da álgebra de Lie \mathfrak{sl}_2 :

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrizes satisfazem as relações

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

e portanto as matrizes das derivações $\operatorname{ad}(h)$, $\operatorname{ad}(e)$ e $\operatorname{ad}(f)$ relativas a essa base são:

$$\operatorname{ad}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \operatorname{ad}(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{ad}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perceba que \mathfrak{h} é uma matriz diagonal e a ação de $\operatorname{ad}(h)$ é também diagonal, com autovetores e , f e h . Por outro lado, e e f são nilpotentes e o mesmo vale para $\operatorname{ad}(e)$ e $\operatorname{ad}(f)$. \diamond

Para uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , temos então as seguintes inclusões de subálgebras de Lie:

$$\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Às vezes, dizemos que $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ é a *álgebra adjunta* de \mathfrak{g} . Os seus elementos são as derivações de \mathfrak{g} da forma $\operatorname{ad}(x)$, para $x \in \mathfrak{g}$, que chamamos de *derivações internas*. Em geral, nem toda derivação de \mathfrak{g} é interna: se \mathfrak{g} é abeliana, por exemplo, então $\operatorname{ad}(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, enquanto que $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (veja exemplo 1.35). É sempre verdade, porém, que as derivações internas de \mathfrak{g} formam um ideal em $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, como mostra a próxima proposição:

Proposição 1.40. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a sua aplicação adjunta.*

- a) *Para todo $D \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ e $x \in \mathfrak{g}$ tem-se $[D, \text{ad}(x)] = \text{ad}(Dx)$. Em particular, $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$.*
- b) $\ker(\text{ad}) = Z(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Sejam $D \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ e $x \in \mathfrak{g}$. Para todo $y \in \mathfrak{g}$, tem-se

$$\begin{aligned} [D, \text{ad}(x)]y &= (D \text{ad}(x) - \text{ad}(x)D)y \\ &= D([x, y]) - [x, Dy] \\ &= [Dx, y] + [x, Dy] - [x, Dy] \\ &= \text{ad}(Dx)y \end{aligned}$$

donde segue que $[D, \text{ad}(x)] = \text{ad}(D(x))$. Daí, $[\mathfrak{der}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})] \subseteq \text{ad}(\mathfrak{g})$ e portanto $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é um ideal em $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$.

O item b) segue imediatamente das definições. \square

Corolário 1.41. *Para toda álgebra de Lie \mathfrak{g} , tem-se que $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Em particular, se $Z(\mathfrak{g}) = 0$, então \mathfrak{g} é isomorfa a uma álgebra de Lie linear.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema do isomorfismo para a aplicação adjunta de \mathfrak{g} :

$$\frac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})} = \frac{\mathfrak{g}}{\ker(\text{ad})} \cong \text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}). \quad \square$$

Exemplo 1.42. *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie não-abeliana de dimensão 2 (apresentada no exemplo 1.19). Esta álgebra possui uma base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$, e não é difícil ver daí que $Z(\mathfrak{g}) = 0$. De fato, se $z = \alpha x + \beta y \in Z(\mathfrak{g})$, então em particular tem-se*

$$\alpha y = [z, y] = 0, \quad \beta y = [x, z] = 0.$$

Logo, $\alpha = \beta = 0$ e $z = 0$.

Portanto, segue do corolário 1.41 que $\mathfrak{g} \cong \text{ad}(\mathfrak{g})$. Escrevendo as matrizes de $\text{ad}(x)$ e $\text{ad}(y)$ na base ordenada (x, y) , obtemos

$$\text{ad}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e então \mathfrak{g} é isomorfa uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{F})$

$$\mathfrak{g} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{F} \right\} \subseteq \mathfrak{gl}_2(\mathbb{F}). \quad \diamond$$

Como é de se imaginar dos exemplos e resultados acima, a aplicação adjunta desempenha um papel central no estudo da estrutura de uma álgebra de Lie. Mais geralmente, a ideia de enxergar os elementos de uma álgebra de Lie como operadores em um espaço vetorial, vislumbrada acima através da aplicação adjunta, dá origem àquilo que chamamos de *teoria de representações*, cujas ideias básicas apresentaremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

Representações

Neste capítulo, estudamos as noções básicas referentes à teoria das representações de álgebras de Lie. Começamos introduzindo os conceitos de representação e de morfismo de representações, e observamos que fixada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , as suas representações e os morfismos entre elas formam uma categoria. Em seguida, discutimos como construir novas representações a partir de outras já conhecidas, através de operações advindas da álgebra linear, como soma direta e produto tensorial. Na terceira seção, estudamos as noções de irredutibilidade e redutibilidade completa de representações. Por fim, apresentamos em detalhes a classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

Durante todo o capítulo, com exceção da última seção e a menos de explícita menção do contrário, \mathbb{F} denota um corpo arbitrário e todos os espaços vetoriais, álgebras de Lie e produtos tensoriais são tomados sobre \mathbb{F} .

2.1 Representações e seus Morfismos

Definição 2.1. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma *representação* de \mathfrak{g} é um par (V, ρ) , em que V é um espaço vetorial e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é um morfismo de álgebras de Lie.

Dada uma representação (V, ρ) de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , dizemos que V é o *espaço da representação* e que a sua dimensão é a *dimensão da representação*. Quando ρ é injetivo, dizemos que a representação é *fiel*, situação na qual \mathfrak{g} é isomorfa a uma álgebra de Lie linear: $\mathfrak{g} \cong \rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.

Muitas vezes, incorremos em um pequeno abuso de linguagem e dizemos apenas que “ $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação”, ao invés de fazer referência ao par (V, ρ) . Outras vezes, quando o morfismo ρ está subentendido ou não é relevante, dizemos apenas que “ V é uma representação de \mathfrak{g} ”.

Exemplo 2.2. Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} admite uma representação em si mesma, chamada de *representação adjunta*, dada pela aplicação adjunta

$$\begin{aligned} \text{ad}: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \text{ad}(x). \end{aligned}$$

Da proposição 1.40, sabemos que esta representação é fiel se e somente se o centro de \mathfrak{g} é trivial. \diamond

Exemplo 2.3. Se V é um espaço vetorial e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é uma álgebra de Lie linear, então a inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ define uma representação de \mathfrak{g} em V , que denominamos de *representação natural* ou *canônica*. Esta representação é sempre fiel. \diamond

Exemplo 2.4. Toda álgebra de Lie admite uma única representação no espaço vetorial nulo 0 , chamada de *representação nula*. \diamond

Exemplo 2.5. Para qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} , definimos a *representação trivial* $(\mathbb{F}, 0)$ através do morfismo nulo $x \mapsto 0 \in \mathbb{F} \cong \mathfrak{gl}(\mathbb{F})$. \diamond

Exemplo 2.6. Se $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie então toda representação (V, ρ) de \mathfrak{h} dá origem a uma representação de \mathfrak{g} por restrição: $\rho|_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.
Mais geralmente, se $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um morfismo de álgebras de Lie e (V, ρ) é uma representação de \mathfrak{h} então obtemos uma representação $(V, \varphi^*\rho)$ de \mathfrak{g} colocando $\varphi^*\rho = \rho \circ \varphi$. \diamond

Exemplo 2.7. Se $\mathfrak{g} = \mathbb{F}$ é a álgebra de Lie unidimensional, então uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V é o mesmo que uma transformação linear $A: V \rightarrow V$, pois um morfismo $\rho: \mathbb{F} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ fica completamente determinado pela escolha de um operador $\rho(1_{\mathbb{F}}) = A \in \mathfrak{gl}(V)$. \diamond

Exemplo 2.8. Considere a álgebra de Heisenberg $\mathfrak{heis}_3(\mathbb{F})$ (vide o exemplo 1.16). Esta álgebra é dada por uma base $\{p, q, z\}$ sujeita às relações

$$[p, q] = z, \quad [p, z] = [q, z] = 0.$$

Seja $\mathbb{F}[X]$ o espaço dos polinômios em uma variável com coeficientes em \mathbb{F} e defina uma aplicação linear $\rho: \mathfrak{heis}_3(\mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}[X])$ colocando

$$\begin{aligned} \rho(p): \mathbb{F}[X] &\rightarrow \mathbb{F}[X] & \rho(q): \mathbb{F}[X] &\rightarrow \mathbb{F}[X] & \rho(z): \mathbb{F}[X] &\rightarrow \mathbb{F}[X] \\ f(X) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial X}(X) & f(X) &\mapsto Xf(X) & f(X) &\mapsto f(X) \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial X}$ denota o operador de derivada formal. Veja então que $\rho(z)$ comuta com $\rho(p)$ e $\rho(q)$ (de fato, comuta com qualquer elemento de $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}[X])$). Além disso, para qualquer polinômio $f(X) \in \mathbb{F}[X]$ vale

$$\begin{aligned} [\rho(p), \rho(q)]f(X) &= \rho(p)\rho(q)f(X) - \rho(q)\rho(p)f(X) \\ &= \frac{\partial}{\partial X}(Xf(X)) - X\frac{\partial f}{\partial X}(X) \\ &= f(X) + X\frac{\partial f}{\partial X}(X) - X\frac{\partial f}{\partial X}(X) \\ &= f(X) \end{aligned}$$

de modo que $[\rho(p), \rho(q)] = \text{id}_{\mathbb{F}[X]} = \rho(z)$. Assim, ρ é um morfismo de álgebras de Lie e $(\mathbb{F}[X], \rho)$ é uma representação de dimensão infinita da álgebra de Heisenberg.

Mais geralmente, dado $n \in \mathbb{N}^*$, podemos definir uma representação da álgebra de Heisenberg generalizada $\mathfrak{heis}_{2n+1}(\mathbb{F})$ no espaço $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ dos polinômios em n variáveis fazendo p_i corresponder ao operador de derivada formal com respeito a X_i , q_i corresponder ao operador de multiplicação por X_i e z corresponder a identidade.

Quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, este exemplo pode ser construído de maneira totalmente análoga trocando polinômios por funções suaves e a derivada formal pelo seu equivalente analítico. Da mesma forma, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ podemos construir uma representação de $\mathfrak{heis}_3(\mathbb{F})$ no espaço das funções holomorfas. \diamond

Definição 2.9. Sejam (V, ρ) e (W, π) representações de \mathfrak{g} . Uma aplicação linear $\varphi: V \rightarrow W$ é dita ser um *morfismo de representações* se satisfaz

$$(2.1) \quad \varphi(\rho(x)v) = \pi(x)\varphi(v) \text{ para quaisquer } x \in \mathfrak{g} \text{ e } v \in V.$$

Dito de uma outra forma, um morfismo de representações $(V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ é uma aplicação linear $\varphi: V \rightarrow W$ tal que $\varphi \circ \rho(x) = \pi(x) \circ \varphi$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \rho(x) \downarrow & & \downarrow \pi(x) \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Façamos então as seguintes observações:

- 1) Para qualquer representação (V, ρ) , a aplicação identidade $\text{id}_V: V \rightarrow V$ é um morfismo de representações $(V, \rho) \rightarrow (V, \rho)$.
- 2) Se $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ e $\psi: (W, \pi) \rightarrow (U, \theta)$ são morfismos de representações então $\psi \circ \varphi: V \rightarrow U$ também o é. De fato, para todo $x \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi \circ \rho(x) &= \psi \circ \pi(x) \circ \varphi && \text{(pois } \varphi \text{ é morfismo de rep.)} \\ &= \theta(x) \circ \psi \circ \varphi && \text{(pois } \psi \text{ é morfismo de rep.)} \end{aligned}$$

Isto significa que, fixada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , as suas representações e os morfismos entre elas formam uma categoria $\text{Rep}(\mathfrak{g})$. Se nos restringimos às representações de dimensão finita, obtemos uma categoria da mesma maneira, que denotamos por $\text{Rep}_{\text{fin}}(\mathfrak{g})$.

Os isomorfismos nestas categorias¹ são exatamente os morfismos bijetivos. De fato, se $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ é um morfismo bijetivo, então para todo $x \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \rho(x) \circ \varphi^{-1} &= \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \rho(x) \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi^{-1} \circ \pi(x) \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi^{-1} \circ \pi(x) \end{aligned}$$

¹Lembre que um morfismo $\varphi: X \rightarrow Y$ em uma categoria é um isomorfismo se, e somente se, existe um morfismo $\psi: Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$.

e portanto φ^{-1} é um morfismo de representações $(W, \pi) \rightarrow (V, \rho)$, donde φ é um isomorfismo em $\text{Rep}(\mathfrak{g})$. Por outro lado, é óbvio que se φ é um isomorfismo em $\text{Rep}(\mathfrak{g})$, então φ é uma bijeção.

Se (V, ρ) e (W, π) são representações de \mathfrak{g} , denotamos o conjunto dos morfismos de representações $\varphi: V \rightarrow W$ por $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$. Este conjunto é um subespaço vetorial de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. De fato, a aplicação nula $0: V \rightarrow W$ é trivialmente um morfismo de representações, e portanto $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \neq \emptyset$; além disso, se $\varphi, \psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, então para todo $x \in \mathfrak{g}$ tem-se

$$\begin{aligned} (\varphi + \lambda\psi) \circ \rho(x) &= \varphi \circ \rho(x) + \lambda(\psi \circ \rho(x)) \\ &= \pi(x) \circ \varphi + \lambda(\pi(x) \circ \psi) \\ &= \pi(x) \circ (\varphi + \lambda\psi), \end{aligned}$$

de modo que $\varphi + \lambda\psi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$.

Em jargão, o parágrafo anterior diz que as categorias $\text{Rep}(\mathfrak{g})$ e $\text{Rep}_{\text{fin}}(\mathfrak{g})$ são \mathbb{F} -lineares: para quaisquer representações (V, ρ) e (W, π) a coleção $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ dos seus morfismos forma um \mathbb{F} -espaço vetorial (e não apenas um conjunto), e a composição de morfismos é bilinear (pois é apenas composição de transformações lineares). Da mesma forma, boa parte do conteúdo deste capítulo pode ser visto como um estudo das propriedades básicas das categorias $\text{Rep}(\mathfrak{g})$ e $\text{Rep}_{\text{fin}}(\mathfrak{g})$, para \mathfrak{g} uma álgebra de Lie arbitrária.

2.2 Operações com Representações

Nesta seção, vamos descrever maneiras de se obter novas representações de uma álgebra de Lie a partir de outras já conhecidas, através de operações usuais da álgebra linear. Para isso, fixamos uma álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{F} e, a menos de menção explícita do contrário, todas as representações consideradas são representações de \mathfrak{g} .

2.2.1 Sub-representação

Lembre, da álgebra linear, que um subespaço vetorial $W \subseteq V$ é dito invariante por um operador linear $A: V \rightarrow V$ quando se tem $Aw \in W$ para todo $w \in W$. Ainda, neste caso A se restringe a um operador linear em W

$$\begin{aligned} A|_W: W &\rightarrow W \\ w &\mapsto Aw. \end{aligned}$$

Generalizando para subespaços que são invariantes não apenas por um operador linear A , mas para todos os operadores $\rho(x)$ em uma representação $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, obtemos a seguinte definição:

Definição 2.10. Seja (V, ρ) uma representação de \mathfrak{g} . Um subespaço $W \subseteq V$ é dito ser *invariante* se $\rho(x)w \in W$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$.

Se W é um subespaço invariante de (V, ρ) , então podemos construir uma representação de \mathfrak{g} em W de maneira natural, restringindo a ação de \mathfrak{g} em V a

uma ação em W . Para isso basta definir $\rho_W: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ colocando

$$\begin{aligned} \rho_W(x) &= \rho(x)|_W: W \rightarrow W \\ w &\mapsto \rho(x)w \end{aligned}$$

O fato de W ser invariante garante que as aplicações $\rho_W(x)$ estão bem definidas, e daí é trivial verificar que (W, ρ_W) é uma representação de \mathfrak{g} e que a inclusão $W \hookrightarrow V$ é um morfismo de representações. Dizemos então que (W, ρ_W) é uma *sub-representação* de (V, ρ) .

Exemplo 2.11. Para qualquer representação (V, ρ) , os subespaços 0 e V são invariantes. Dizemos que estas são as *sub-representações triviais*. \diamond

Exemplo 2.12. Os subespaços invariantes da representação adjunta são precisamente os ideais de \mathfrak{g} . De fato, um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é invariante pela representação adjunta se, e somente se, $\text{ad}(x)a = [x, a] \in \mathfrak{a}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $a \in \mathfrak{a}$. \diamond

Proposição 2.13. Se $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ é um morfismo de representações, então $\ker(\varphi)$ é um subespaço invariante de (V, ρ) e $\text{im}(\varphi)$ é um subespaço invariante de (W, π) .

Demonstração. Sejam $v \in \ker(\varphi)$ e $x \in \mathfrak{g}$. Como φ é morfismo de representações, temos

$$\varphi(\rho(x)v) = \pi(x)\varphi(v) = \pi(x)0 = 0$$

e portanto $\rho(x)v \in \ker(\varphi)$. Logo, $\ker(\varphi)$ é invariante.

A demonstração para $\text{im}(\varphi)$ é similar. \square

2.2.2 Representação Quociente

Voltando novamente à álgebra linear, seja $W \subseteq V$ um subespaço invariante por um operador linear $A: V \rightarrow V$. Além de se restringir a um operador linear em W como vimos acima, A também dá origem a um operador linear no espaço vetorial quociente V/W . Para ver isso, denote por $\pi_W: V \rightarrow V/W$ a aplicação quociente e considere a transformação $\pi_W \circ A: V \rightarrow V/W$. Como W é invariante por A , se $w \in W$ então $Aw \in W = \ker(\pi_W)$. Em outras palavras, $\pi_W \circ A$ se anula em W e portanto, pela propriedade universal do quociente, existe uma única transformação linear $\bar{A}: V/W \rightarrow V/W$ tal que $\bar{A} \circ \pi_W = \pi_W \circ A$, dada por $\bar{A}(v + W) = Av + W$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & V \\ \pi_W \downarrow & & \downarrow \pi_W \\ V/W & \xrightarrow{\bar{A}} & V/W \end{array}$$

Suponha agora que W é subespaço invariante de uma representação (V, ρ) . Vamos considerar o problema de definir uma representação no espaço quociente V/W . Pelo que vimos acima, o fato de W ser invariante implica que para cada $x \in \mathfrak{g}$ existe uma única aplicação linear $\bar{\rho}(x): V/W \rightarrow V/W$, tal que

$$(2.2) \quad \bar{\rho}(x) \circ \pi_W = \pi_W \circ \rho(x).$$

Basta então verificar que a correspondência $x \mapsto \bar{\rho}(x)$ é um morfismo de álgebras de Lie. Isso pode ser feito com facilidade através da equação (2.2). Por exemplo, para verificar que $\bar{\rho}([x, y]) = [\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(y)]$, notamos primeiro que

$$\begin{aligned} \bar{\rho}([x, y]) \circ \pi_W &= \pi_W \circ \rho([x, y]) \\ &= \pi_W \circ \rho(x) \circ \rho(y) - \pi_W \circ \rho(y) \circ \rho(x) \\ &= \bar{\rho}(x) \circ \pi_W \circ \rho(y) - \bar{\rho}(y) \circ \pi_W \circ \rho(x) \\ &= \bar{\rho}(x) \circ \bar{\rho}(y) \circ \pi_W - \bar{\rho}(y) \circ \bar{\rho}(x) \circ \pi_W \\ &= [\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(y)] \circ \pi_W. \end{aligned}$$

Como π_W é sobrejetiva, isso implica em $[\bar{\rho}(x), \bar{\rho}(y)] = \bar{\rho}([x, y])$.

Temos então uma representação $\bar{\rho}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/W)$ de \mathfrak{g} no espaço V/W , que chamamos de *representação quociente*. Como vimos, para cada $x \in \mathfrak{g}$, a aplicação linear $\bar{\rho}(x)$ é a única que satisfaz a equação (2.2); portanto, a representação quociente é a única representação de \mathfrak{g} em V/W para qual $\pi_W: V \rightarrow V/W$ é um morfismo de representações.

Por fim, a representação quociente possui a seguinte propriedade universal: para qualquer representação (U, θ) , se $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (U, \theta)$ é um morfismo de representações satisfazendo $W \subseteq \ker(\varphi)$, então existe um único morfismo de representações $\bar{\varphi}: (V/W, \bar{\rho}) \rightarrow (U, \theta)$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_W$.

$$\begin{array}{ccc} (V, \rho) & \xrightarrow{\varphi} & (U, \theta) \\ \pi_W \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ (V/W, \bar{\rho}) & & \end{array}$$

De fato, pela propriedade universal do espaço vetorial quociente, já sabemos que existe uma única $\bar{\varphi}$ linear tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_W$, restando verificar que tal $\bar{\varphi}$ é um morfismo de representações. Para isso, veja primeiro que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \circ \bar{\rho}(x) \circ \pi_W &= \bar{\varphi} \circ \pi_W \circ \rho(x) && \text{(pois } \pi_W \text{ é morfismo de rep.)} \\ &= \varphi \circ \rho(x) && \text{(pois } \bar{\varphi} \circ \pi_W = \varphi) \\ &= \theta(x) \circ \varphi && \text{(pois } \varphi \text{ é morfismo de rep.)} \\ &= \theta(x) \circ \bar{\varphi} \circ \pi_W && \text{(pois } \bar{\varphi} \circ \pi_W = \varphi) \end{aligned}$$

Daí, como π_W é sobrejetiva, segue que $\bar{\varphi} \circ \bar{\rho}(x) = \theta(x) \circ \bar{\varphi}$, isto é, que $\bar{\varphi}$ é um morfismo de representações.

Segue desta discussão e da proposição 2.13 que se $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ é um morfismo de representações de \mathfrak{g} , então $\text{coker}(\varphi) = W/\text{im}(\varphi)$ é naturalmente uma representação de \mathfrak{g} e possui as propriedades usuais. Além disso, decorre da propriedade universal acima exibida que os teoremas de isomorfismo são válidos para representações de álgebras de Lie: como já sabemos que estes teoremas são válidos para espaços vetoriais, basta observar que as funções envolvidas são morfismos de representações (e não apenas transformações lineares).

2.2.3 Produto Direto e Soma Direta

Produto Direto

Seja (V_i, ρ_i) uma família de representações da álgebra de Lie \mathfrak{g} , indexada por um conjunto I . Podemos definir uma representação ρ de \mathfrak{g} no produto direto $\prod_{i \in I} V_i$ colocando, para cada $x \in \mathfrak{g}$ e $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$,

$$\rho(x)(v_i)_{i \in I} = (\rho_i(x)v_i)_{i \in I}$$

É imediato daí verificar que $\rho(x)$ é linear para cada $x \in \mathfrak{g}$ e que a aplicação $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\prod_{i \in I} V_i)$ assim definida é um morfismo de álgebras de Lie.

A representação $(\prod_{i \in I} V_i, \rho)$ vem “de fábrica” com uma família de morfismos de representações $(p_k: (\prod_{i \in I} V_i, \rho) \rightarrow (V_k, \rho_k))_{k \in I}$, dados pelas projeções canônicas:

$$p_k: \prod_{i \in I} V_i \rightarrow V_k \\ (v_i)_{i \in I} \mapsto v_k.$$

De fato, para cada $k \in I$ e para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $(v_i)_{i \in I}$, tem-se

$$\begin{aligned} p_k(\rho(x)(v_i)_{i \in I}) &= p_k((\rho_i(x)v_i)_{i \in I}) \\ &= \rho_k(x)v_k \\ &= \rho_k(x)p_k((v_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

Além disso, vale a seguinte propriedade universal: para toda representação (U, θ) de \mathfrak{g} e família de morfismos $(\varphi_k: (U, \theta) \rightarrow (V_k, \rho_k))_{k \in I}$, existe um único morfismo de representações $\Phi: (U, \theta) \rightarrow (\prod_{i \in I} V_i, \rho)$ tal que $\varphi_k = p_k \circ \Phi$ para todo $k \in I$.

$$\begin{array}{ccc} & & (\prod_{i \in I} V_i, \rho) \\ & \nearrow \Phi & \downarrow p_k \\ (U, \theta) & \xrightarrow{\varphi_k} & (V_k, \rho_k) \end{array}$$

Com efeito, a única aplicação linear $\Phi: U \rightarrow \prod_{i \in I} V_i$ tal que $\varphi_k = p_k \circ \Phi$ para todo $k \in I$ é dada por $\Phi(u) = (\varphi_i(u))_{i \in I}$, restando verificar que tal aplicação é morfismo de representações. Para isso, tome $x \in \mathfrak{g}$ e $u \in U$ e veja que

$$\begin{aligned} \Phi(\theta(x)u) &= (\varphi_i(\theta(x)u))_{i \in I} \\ &= (\rho_i(x)\varphi_i(u))_{i \in I} \quad (\text{pois os } \varphi_i \text{ são morfismo de rep.)} \\ &= \rho(x)(\varphi_i(u))_{i \in I} \\ &= \rho(x)\Phi(u). \end{aligned}$$

Em outras palavras, existe uma bijeção (linear!)

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, \prod_{i \in I} V_i) &\cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V_i) \\ \Phi &\mapsto (p_i \circ \Phi)_{i \in I} \end{aligned}$$

Por causa disso, dizemos que a representação $(\prod_{i \in I} V_i, \rho)$ é o *produto direto* das representações $(V_i, \rho_i)_{i \in I}$.

Soma direta

Por definição, a soma direta dos espaços vetoriais V_i é o subespaço

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \left\{ (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \mid (v_i)_{i \in I} \text{ é quase nula} \right\} \subseteq \prod_{i \in I} V_i.$$

Onde uma tupla $(v_i)_{i \in I}$ é dita quase nula se $v_i \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices. Assim, é claro que a soma direta é uma sub-representação de $(\prod_{i \in I} V_i, \rho)$, pois se $(v_i)_{i \in I}$ é quase nula, então $\rho(x)(v_i)_{i \in I} = (\rho_i(x)v_i)_{i \in I}$ deve ser quase nula para todo $x \in \mathfrak{g}$, já que cada $\rho_i(x)$ é linear.

Abusando da notação, denote por $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\bigoplus_{i \in I} V_i)$ o morfismo de álgebras de Lie correspondente. Considere então as inclusões canônicas

$$\begin{aligned} f_k: V_k &\hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i \\ v &\mapsto (\delta_{ik}v)_{i \in I} \end{aligned}$$

Para cada $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V_k$, temos

$$\begin{aligned} f_k(\rho_k(x)v) &= (\delta_{ik}\rho_k(x)v)_{i \in I} \\ &= (\rho_i(x)\delta_{ik}v)_{i \in I} \\ &= \rho(x)f_k(v) \end{aligned}$$

de modo que f_k é um morfismo de representações $(V_k, \rho_k) \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} V_i, \rho)$.

Vale ainda a seguinte propriedade universal: para toda representação (U, θ) de \mathfrak{g} e família de morfismos $(\psi_k: (V_k, \rho_k) \rightarrow (U, \theta))_{k \in I}$, existe um único morfismo de representações $\Psi: (\bigoplus_{i \in I} V_i, \rho) \rightarrow (U, \theta)$ tal que $\psi_k = \Psi \circ f_k$ para todo $k \in I$.

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i \in I} V_i, \rho) & & \\ \uparrow f_k & \searrow \Psi & \\ (V_k, \rho_k) & \xrightarrow{\psi_k} & (U, \theta) \end{array}$$

De fato, sabemos da álgebra linear que a única aplicação linear $\Psi: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow U$ satisfazendo $\psi_k = \Psi \circ f_k$ para todo $k \in I$ é dada por $\Psi((v_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \psi_i(v_i)$ (a soma faz sentido pois $(v_i)_{i \in I}$ é quase nula). Para ver que Ψ é morfismo de representações, tome $x \in \mathfrak{g}$ e $(v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} V_i$ e note que

$$\begin{aligned} \Psi(\rho(x)(v_i)_{i \in I}) &= \Psi((\rho_i(x)v_i)_{i \in I}) \\ &= \sum_{i \in I} \psi_i(\rho_i(x)v_i) \\ &= \sum_{i \in I} \theta(x)\psi_i(v_i) && \text{(pois os } \psi_i \text{ são morfismo de rep.)} \\ &= \theta(x) \sum_{i \in I} \psi_i(v_i) \\ &= \theta(x)\Psi((v_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

Em outras palavras, existe uma bijeção (linear!)

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{g}} \left(\bigoplus_{i \in I} V_i, U \right) &\cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_i, U) \\ \Psi &\mapsto (\Psi \circ f_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Por causa disso, dizemos que a representação $(\bigoplus_{i \in I} V_i, \rho)$ é a *soma direta* das representações $(V_i, \rho_i)_{i \in I}$.

O caso finito

Se $(V_i, \rho_i)_{i=1}^n$ é uma família finita de representações de \mathfrak{g} , então o produto direto e a soma direta coincidem:

$$\prod_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{i=1}^n V_i.$$

Neste caso, utilizamos a notação de soma direta e nos referimos a representação como “a soma direta das (V_i, ρ_i) ”, apesar de ela ser também o seu produto direto. Este é o único caso de interesse quando nos restringimos às representações de dimensão finita, e é particularmente importante porque a representação assim obtida satisfaz ambas as propriedades universais descritas acima.

Assim, se $(V_i, \rho_i)_{i=1}^n$ e $(W_j, \rho_j)_{j=1}^m$ são representações de \mathfrak{g} , decorre destas propriedades universais que dada qualquer família de morfismos $\varphi_{lk}: V_k \rightarrow W_l$, para $(k, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, existe um único morfismo

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m W_j$$

tal que o diagrama abaixo comuta para quaisquer k e l :

$$\begin{array}{ccc} V_k & \xrightarrow{\varphi_{lk}} & W_l \\ f_k \downarrow & & \uparrow p_l \\ \bigoplus_{i=1}^n V_i & \xrightarrow{\varphi} & \bigoplus_{j=1}^m W_j \end{array}$$

(Aqui, f_k e p_l são, respectivamente, a inclusão e a projeção canônicas).

Isto significa que um morfismo $\varphi: \bigoplus_{i=1}^n V_i \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m W_j$ fica completamente determinado pelas composições

$$\varphi_{lk} = p_l \circ \varphi \circ f_k$$

para $(k, l) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$. Portanto, existe uma bijeção (linear!)

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{g}} \left(\bigoplus_{i=1}^n V_i, \bigoplus_{j=1}^m W_j \right) &\cong \prod_{i,j} \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_i, W_j) \\ \varphi &\mapsto (p_j \circ \varphi \circ f_i)_{ij}. \end{aligned}$$

2.2.4 Produto Tensorial de Representações

Dadas representações (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , gostaríamos de construir uma representação no produto tensorial $V_1 \otimes V_2$, de maneira análoga ao que fizemos para a soma direta. A leitora perceberá, no entanto, que ao tentarmos definir uma representação ρ colocando

$$\rho(x)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(x)v_1 \otimes \rho_2(x)v_2$$

a aplicação $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ resultante *não* é um morfismo de álgebras de Lie (de fato, não é sequer linear). O truque aqui é pensar que os operadores $\rho(x)$ devem agir como “derivadas do produto tensorial” e colocar

$$\rho(x)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(x)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(x)v_2$$

para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Como a expressão acima é linear em v_1 e v_2 , a propriedade universal do produto tensorial implica que $\rho(x)$ é linear para cada $x \in \mathfrak{g}$. Ademais, a mesma expressão é linear também em x , o que significa que a aplicação $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ assim obtida é linear. Resta então verificar que vale

$$\rho([x, y])(v_1 \otimes v_2) = (\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x))(v_1 \otimes v_2),$$

tarefa que deixamos para os mais cétricos.

Mais geralmente, se $(V_i, \rho_i)_{i=1}^n$ são representações de \mathfrak{g} , então podemos definir uma representação de \mathfrak{g} em $\otimes_i V_i$ colocando

$$\rho(x)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \rho_1(x)v_1 \otimes \cdots \otimes v_n + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n(x)v_n.$$

2.2.5 Representação Dual

Dado um \mathbb{F} -espaço vetorial V , denotamos por V^* o seu *espaço dual*

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = \{f: V \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ é } \mathbb{F}\text{-linear}\}.$$

Agora, se $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de \mathfrak{g} em V , podemos definir uma representação ρ^* de \mathfrak{g} em V^* , chamada de *representação dual*, colocando

$$\rho^*(x)f = -f \circ \rho(x)$$

para cada $x \in \mathfrak{g}$ e $f \in V^*$. A expressão acima, sendo linear em f e em x , define uma aplicação linear $\rho^*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$. Além disso, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ e $f \in V^*$ temos

$$\begin{aligned} \rho^*([x, y])f &= -f \circ \rho([x, y]) \\ &= -f \circ (\rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x)) \\ &= (-f \circ \rho(x)) \circ \rho(y) - (-f \circ \rho(y)) \circ \rho(x) \\ &= (\rho^*(x)f) \circ \rho(y) - (\rho^*(y)f) \circ \rho(x) \\ &= -\rho^*(y)\rho^*(x)f + \rho^*(x)\rho^*(y)f \\ &= [\rho^*(x), \rho^*(y)]f, \end{aligned}$$

donde $\rho^*([x, y]) = [\rho^*(x), \rho^*(y)]$. Perceba que o sinal na definição de ρ^* é necessário para preservar a ordem dos colchetes.

Mais geralmente, se (V, ρ) e (W, π) são representações de \mathfrak{g} , então podemos definir uma representação H de \mathfrak{g} no espaço

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ é } \mathbb{F}\text{-linear}\}.$$

Para isto, basta colocar

$$H(x)f = \pi(x) \circ f - f \circ \rho(x)$$

para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Esta expressão é linear em x e em f , e portanto define uma aplicação linear $H: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W))$. Daí, se $x, y \in \mathfrak{g}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$, então

$$\begin{aligned} H(x)H(y)f &= H(x)(\pi(y) \circ f - f \circ \rho(y)) \\ &= \pi(x) \circ (\pi(y) \circ f - f \circ \rho(y)) - (\pi(y) \circ f - f \circ \rho(y)) \circ \rho(x) \\ &= \pi(x)\pi(y) \circ f - \pi(x) \circ f \circ \rho(y) - \pi(y) \circ f \circ \rho(x) + f \circ \rho(y)\rho(x) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} [H(x), H(y)]f &= (H(x)H(y) - H(y)H(x))f \\ &= \pi(x)\pi(y) \circ f + f \circ \rho(y)\rho(x) - \pi(y)\pi(x) \circ f - f \circ \rho(x)\rho(y) \\ &= (\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x)) \circ f - f \circ (\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) \\ &= \pi([x, y]) \circ f - f \circ \rho([x, y]) \\ &= H([x, y])f \end{aligned}$$

de modo que H realmente define uma representação.

Quando $W = \mathbb{F}$ com a representação trivial, recuperamos a definição da representação dual. Por outro lado, se V e W têm dimensão finita, então existe um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\cong \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \\ f \otimes w &\mapsto (v \mapsto f(v)w). \end{aligned}$$

Daí, considerando em cada espaço a representação descrita nesta subseção e na anterior, podemos verificar que a aplicação acima é na verdade um isomorfismo de representações.

Por fim, veja que uma aplicação linear $f \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ é um morfismo de representações se, e somente se, $H(x)f = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Em particular, $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é uma sub-representação de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

2.3 Decomposições de Representações

Na seção anterior, analisamos diversas maneiras de construir novas representações de uma álgebra de Lie a partir de outras já conhecidas. Em particular, vimos como construir a soma direta $(\bigoplus_i V_i, \bigoplus_i \rho_i)$ de uma família de representações e observamos que cada uma das representações originais (V_i, ρ_i)

aparece como uma sub-representação da soma direta, por meio da inclusão canônica. Vamos agora considerar o problema contrário: queremos saber sob quais condições uma dada representação (V, ρ) se decompõe em uma soma direta de sub-representações “atômicas” (i.e., que não se decompõem elas próprias como soma direta de sub-representações).

Em toda esta seção, fixamos uma álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{F} e, a menos de menção explícita do contrário, todas as representações consideradas são representações de \mathfrak{g} .

Definição 2.14. Uma representação (V, ρ) é dita ser *irredutível* ou *simple* se possui exatamente duas sub-representações.

Em outras palavras, uma representação (V, ρ) é irredutível se $V \neq 0$ e seus únicos subespaços invariantes são os triviais. Observe que estamos excluindo da definição o caso degenerado $V = 0$; a representação nula possui apenas um subespaço invariante e portanto não é considerada irredutível. Por outro lado, é claro que toda representação unidimensional é irredutível.

Conforme vimos na proposição 2.13, o núcleo e a imagem de um morfismo de representações são sempre sub-representações do domínio e codomínio, respectivamente. Como consequência disto, os morfismos entre representações irredutíveis podem ser caracterizados com simplicidade. Este é o conteúdo do *Lema de Schur*:

Teorema 2.15 (Lema de Schur). *Seja $\varphi: (V, \rho) \rightarrow (W, \pi)$ um morfismo de representações, com $\varphi \neq 0$.*

- a) *Se (V, ρ) é irredutível, então φ é injetivo.*
- b) *Se (W, π) é irredutível, então φ é sobrejetivo.*
- c) *Se (V, ρ) e (W, π) são ambas irredutíveis, então φ é um isomorfismo.*

Demonstração. Pelo proposição 2.13, $\ker(\varphi)$ é uma sub-representação de V . Assim, se V é irredutível então há duas possibilidades: $\ker(\varphi) = V$ (e daí $\varphi = 0$) ou $\ker(\varphi) = 0$ (e daí φ é injetivo). Como por hipótese $\varphi \neq 0$, resulta que φ é injetiva.

O item b) é demonstrado de maneira análoga; o item c) segue imediatamente dos itens a) e b). \square

Corolário 2.16. *Seja (V, ρ) uma representação irredutível de dimensão finita e suponha que o corpo de escalares \mathbb{F} é algebricamente fechado. Se $\varphi: V \rightarrow V$ é um morfismo de representações, então $\varphi = \lambda \text{id}_V$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Demonstração. Seja $\varphi: V \rightarrow V$ é um morfismo de representações. Como \mathbb{F} é algebricamente fechado, φ possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$. Veja então que, como $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ é um subespaço de $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, a função $\varphi - \lambda \text{id}_V$ é um morfismo de representações. Este morfismo não pode ser um isomorfismo, pois λ é autovalor de φ . Logo, pelo Lema de Schur, devemos ter $\varphi - \lambda \text{id}_V = 0$. \square

Corolário 2.17. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie abeliana e suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Uma representação (V, ρ) de dimensão finita de \mathfrak{g} é irredutível se, e somente se, é unidimensional.*

Demonstração. Suponha que (V, ρ) é uma representação irredutível de \mathfrak{g} . Então para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$ tem-se $\rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(x)$, pois

$$\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho([x, y]) = \rho(0) = 0.$$

Mas isto significa que para cada $x \in \mathfrak{g}$ a aplicação $\rho(x): V \rightarrow V$ é um morfismo de representações $(V, \rho) \rightarrow (V, \rho)$. Segue então do corolário anterior, que cada $\rho(x)$ é um múltiplo da identidade id_V , e portanto todo subespaço de V é invariante. Como V é irredutível, isto só é possível se V não admite subespaços próprios não nulos, isto é, se $\dim(V) = 1$.

A recíproca é trivial. \square

Observação. Veremos mais adiante (corolário 4.11) que a propriedade das álgebras de Lie abelianas apresentada no corolário acima é compartilhada por uma classe muito mais ampla de álgebras – as chamadas *solúveis*.

Ainda que uma representação (V, ρ) possa ser não irredutível, podemos nos perguntar se a ela se decompõe em uma soma direta de sub-representações irredutíveis.

Definição 2.18. Uma representação (V, ρ) é dita *completamente redutível* ou *semisimples* se existem sub-representações irredutíveis V_i tais que $V = \bigoplus_i V_i$.

Assim, apesar da nomenclatura, uma representação irredutível é sempre completamente redutível, embora a recíproca não seja verdadeira. De fato, as representações completamente redutíveis são exatamente aquelas que podem ser construídas a partir das representações irredutíveis através da operação de soma direta.

Se (V, ρ) é uma representação completamente redutível e $V = \bigoplus_i V_i$ é uma decomposição em que cada V_i é irredutível, dizemos que estas sub-representações são *componentes irredutíveis* de V . Estas componentes estão unicamente determinadas (a menos de isomorfismo), pois se $W \subseteq V$ é uma sub-representação irredutível, então restringindo as projeções $V \rightarrow V_i$, obtemos morfismos $W \rightarrow V_i$. Daí, pelo Lema de Schur, cada um destes morfismos é nulo ou é um isomorfismo e portanto $W = 0$ ou $W \cong V_i$ para algum i .

Uma representação completamente redutível de dimensão finita se decompõe em uma soma direta de uma quantidade finita de sub-representações irredutíveis. Daí, devido as propriedades universais da soma direta de representações (no caso finito, conforme explicado na seção anterior), os morfismos entre duas tais representações ficam completamente determinados pelos morfismos induzidos entre as suas componentes irredutíveis. Estes, por sua vez, são descritos de maneira simples pelo Lema de Schur (especialmente no caso em que o corpo de escalares é algebricamente fechado, devido ao corolário 2.16). Isto significa que, em dimensão finita, o estudo das representações completamente redutíveis se reduz² ao estudo das irredutíveis. Resta, porém, um problema: como determinar se uma dada representação é completamente redutível? O seguinte critério mostra-se bastante útil:

Teorema 2.19. *Seja (V, ρ) uma representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . As seguintes afirmações são equivalentes:*

²Completamente?

(i) A representação (V, ρ) é completamente redutível;

(ii) Todo subespaço invariante de (V, ρ) possui um complementar invariante.

Demonstração. Suponha que (V, ρ) é completamente redutível e seja $W \subseteq V$ um subespaço invariante; vamos mostrar que W possui um complementar invariante fazendo indução na sua codimensão $k = \dim(V) - \dim(W)$. Se $k = 0$, então $W = V$ e podemos tomar o subespaço 0 como complementar invariante. Se $k > 0$, tomamos V_1, \dots, V_n sub-representações irredutíveis tais que

$$(2.3) \quad V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n.$$

Daí, temos que $W \cap V_i$ é invariante para cada i e, como os V_i são irredutíveis, segue que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ vale $W \cap V_i = V_i$ ou $W \cap V_i = 0$. Como $k = \dim(V) - \dim(W) > 0$, deve existir $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $W \cap V_i = 0$. Podemos então considerar a soma direta $W \oplus V_i$, que é invariante e tem codimensão estritamente menor que k . Por indução, deve existir U invariante tal que $V = W \oplus V_i \oplus U$. Disso, segue que $V_i \oplus U$ é um subespaço invariante complementar a W . Isso mostra que (i) implica (ii).

Para a recíproca, suponha que todo subespaço invariante de (V, ρ) possui um complementar também invariante. Vamos primeiro estabelecer o seguinte fato (crucial): se $W \subseteq V$ é um subespaço invariante, então W também satisfaz a hipótese (ii) do teorema. Para isso, suponha que $U \subseteq W$ é um subespaço invariante. Então, pela hipótese sobre V , podemos escrever

$$V = U \oplus U'$$

para algum subespaço invariante $U' \subseteq V$. Afirmamos que $W = U \oplus (U' \cap W)$. Ora, qualquer $w \in W$ pode ser escrito como

$$w = u + u'$$

para $u \in U$ e $u' \in U'$. Como $U \subseteq W$, temos $u \in W$ e daí $u' = w - u \in W$. Logo, $u' \in (U' \cap W)$. Isso mostra que $W = U + (U' \cap W)$. Mas essa soma é direta, pois U' é complementar a U .

Agora é fácil mostrar que (V, ρ) é completamente redutível: se for irredutível, não há o que fazer; caso contrário, existe um subespaço invariante não trivial $W \subseteq V$ e, da hipótese, podemos escrever

$$V = W \oplus W'$$

com W e W' invariantes. Se W e W' forem irredutíveis, então V é completamente redutível. Caso contrário, podemos utilizar o fato de que W e W' também satisfazem a hipótese (ii) do teorema para decompô-los em subespaços invariantes não triviais da mesma forma que fizemos com V . Prosseguindo desta maneira, devido ao fato da dimensão de V ser finita, devemos eventualmente terminar com uma decomposição de V em soma direta de sub-representações irredutíveis. \square

Exemplo 2.20. Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2. Conforme vimos no exemplo 1.19, \mathfrak{g} admite uma base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$. Daí, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$$[\alpha x + \beta y, y] = \alpha y$$

e portanto o subespaço gerado por y é então um ideal de \mathfrak{g} . Em outras palavras, este subespaço é invariante pela representação adjunta $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Vamos mostrar que este subespaço não admite complementar invariante, donde se seguirá que a representação adjunta desta álgebra de Lie não é completamente redutível. De fato, um subespaço complementar a $\text{span}\{y\}$ deve ser da forma $U = \text{span}\{\alpha x + \beta y\}$ para alguns escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ com $\alpha \neq 0$. Daí, se U é invariante então

$$\text{ad}(y)u = [y, u] = [y, \alpha x + \beta y] = -\alpha y \in U,$$

e portanto $\text{span}\{y\} \subseteq U$, contradizendo o fato de que U é complementar a $\text{span}\{y\}$. \diamond

2.4 Representações Irredutíveis de \mathfrak{sl}_2

Para encerrar este capítulo, ilustraremos os conceitos apresentados nas seções precedentes analisando um exemplo especialmente importante: as representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, para \mathbb{F} um corpo algebricamente fechado de característica zero. Mais especificamente, vamos determinar quais são (a menos de isomorfismo) as representações irredutíveis de dimensão finita desta álgebra, descrevendo-as em detalhes. Embora não mostremos aqui, toda representação de dimensão finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ é completamente redutível, de modo que o conteúdo desta seção é na verdade suficiente para descrever todas as suas representações em dimensão finita.

Este estudo é importante não apenas a título de exemplo, mas também porque as representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ desempenham um papel central na estrutura e nas representações de outras álgebras de Lie, sendo assim um pré-requisito fundamental para estudos mais avançados.

Dividiremos nossa análise em duas etapas: primeiro, construiremos uma família de representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ e, em seguida, mostraremos que toda representação irredutível de dimensão finita é isomorfa a uma e somente uma das representações construídas, completando assim a classificação.

Utilizaremos a base canônica de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que satisfaz as seguintes relações:

$$(2.4) \quad [e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

Por fim, destacamos mais uma vez que *nesta seção*, \mathbb{F} é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

2.4.1 As representações $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$

Fixe $m \in \mathbb{N}$ e considere o subespaço $\mathbb{F}[X, Y]_m \subseteq \mathbb{F}[X, Y]$ formado pelos polinômios homogêneos de grau m em duas variáveis X, Y com coeficientes em \mathbb{F} . Veja que este subespaço tem como base o conjunto

$$(2.5) \quad \{Y^m, XY^{m-1}, X^2Y^{m-2}, \dots, X^{m-1}Y, X^m\}.$$

e portanto possui dimensão $m + 1$.

Defina uma aplicação linear $\rho_m: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}[X, Y]_m)$ colocando

$$\rho_m(e) = X \frac{\partial}{\partial Y} \quad \rho_m(f) = Y \frac{\partial}{\partial X} \quad \rho_m(h) = X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}$$

onde $\frac{\partial}{\partial X}$ e $\frac{\partial}{\partial Y}$ denotam as derivadas formais com relação às variáveis X e Y , respectivamente. É fácil ver que esses operadores preservam o grau dos polinômios e portanto são aplicações $\mathbb{F}[X, Y]_m \rightarrow \mathbb{F}[X, Y]_m$, de modo que ρ_m está bem definida.

Podemos visualizar a ação dos operadores $\rho_m(e)$, $\rho_m(f)$ e $\rho_m(h)$ calculando os seus efeitos na base de $\mathbb{F}[X, Y]_m$ formada pelos monômios X^iY^j :

$$(2.6) \quad \rho_m(e)(X^iY^j) = \begin{cases} jX^{i+1}Y^{j-1} & \text{se } j \geq 1 \\ 0 & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \rho_m(f)(X^iY^j) = \begin{cases} iX^{i-1}Y^{j+1} & \text{se } i \geq 1 \\ 0 & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

$$(2.8) \quad \rho_m(h)(X^iY^j) = iX^iY^j - jX^iY^j = (i - j)X^iY^j$$

Para determinar se ρ_m é um morfismo de álgebras de Lie, precisamos verificar se os operadores $\rho_m(e)$, $\rho_m(f)$ e $\rho_m(h)$ satisfazem as relações (2.4). Para isso, calculamos a ação dos seus comutadores na base (2.5) formada pelos monômios X^iY^j com $i + j = m$:

- Se $i, j \geq 1$ então

$$\begin{aligned} [\rho_m(e), \rho_m(f)](X^iY^j) &= \rho_m(e)(\rho_m(f)(X^iY^j)) - \rho_m(f)(\rho_m(e)(X^iY^j)) \\ &= \rho_m(e)(iX^{i-1}Y^{j+1}) - \rho_m(f)(jX^{i+1}Y^{j-1}) \\ &= i(j+1)X^iY^j - (i+1)jX^iY^j \\ &= (i-j)X^iY^j \\ &= \rho_m(h)(X^iY^j). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, vale

$$\begin{aligned} [\rho_m(e), \rho_m(f)]X^m &= \rho_m(e)(\rho_m(f)X^m) - \rho_m(f)(\rho_m(e)X^m) \\ &= \rho_m(e)(mX^{m-1}Y) \\ &= mX^m \\ &= \rho_m(h)X^m \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} [\rho_m(e), \rho_m(f)]Y^m &= \rho_m(e)(\rho_m(f)Y^m) - \rho_m(f)(\rho_m(e)Y^m) \\ &= -\rho_m(f)(mXY^{m-1}) \\ &= mY^m \\ &= \rho_m(h)Y^m. \end{aligned}$$

Assim, os operadores $[\rho_m(e), \rho_m(f)]$ e $\rho_m(h)$ coincidem em uma base de $\mathbb{F}[X, Y]_m$, e portanto devemos ter $[\rho_m(e), \rho_m(f)] = \rho_m(h)$.

- Similarmente, se $j \geq 1$, então

$$\begin{aligned} [\rho_m(h), \rho_m(e)](X^iY^j) &= \rho_m(h)(\rho_m(e)(X^iY^j)) - \rho_m(e)(\rho_m(h)(X^iY^j)) \\ &= \rho_m(h)(jX^{i+1}Y^{j-1}) - \rho_m(e)((i-j)X^iY^j) \\ &= (i-j+2)jX^{i+1}Y^{j-1} - j(i-j)X^{i+1}Y^{j-1} \\ &= 2jX^{i+1}Y^{j-1} \\ &= 2\rho_m(e)(X^iY^j). \end{aligned}$$

E também, se $j = 0$, temos

$$\begin{aligned} [\rho_m(h), \rho_m(e)]X^m &= \rho_m(h)(\rho_m(e)X^m) - \rho_m(e)(\rho_m(h)X^m) \\ &= -\rho_m(e)(mX^m) \\ &= 0 \\ &= 2\rho_m(e)X^m. \end{aligned}$$

Logo, $[\rho_m(h), \rho_m(e)] = 2\rho_m(e)$.

- Por fim, para $i \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} [\rho_m(h), \rho_m(f)](X^iY^j) &= \rho_m(h)(\rho_m(f)(X^iY^j)) - \rho_m(f)(\rho_m(h)(X^iY^j)) \\ &= \rho_m(h)(iX^{i-1}Y^{j+1}) - \rho_m(f)((i-j)X^iY^j) \\ &= (i-j-2)iX^{i-1}Y^{j+1} - i(i-j)X^{i-1}Y^{j+1} \\ &= -2iX^{i-1}Y^{j+1} \\ &= -2\rho_m(f)(X^iY^j). \end{aligned}$$

O que, juntamente com $[\rho_m(h), \rho_m(f)]Y^m = 0 = 2\rho_m(f)Y^m$, mostra a igualdade $[\rho_m(h), \rho_m(f)] = -2\rho_m(f)$.

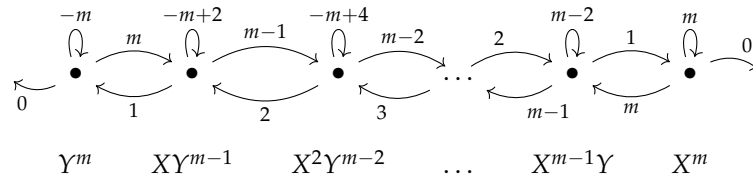
Temos portanto um morfismo de álgebras de Lie $\rho_m : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}[X, Y]_m)$, isto é, uma representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ em $\mathbb{F}[X, Y]_m$. Para entender melhor esta representação, voltemos às equações (2.6) a (2.8):

$$\begin{aligned} \rho_m(e)(X^iY^j) &= \begin{cases} jX^{i+1}Y^{j-1} & \text{se } j \geq 1 \\ 0 & \text{se } j = 0 \end{cases} \\ \rho_m(f)(X^iY^j) &= \begin{cases} iX^{i-1}Y^{j+1} & \text{se } i \geq 1 \\ 0 & \text{se } i = 0 \end{cases} \\ \rho_m(h)(X^iY^j) &= iX^iY^j - jX^iY^j = (i-j)X^iY^j \end{aligned}$$

Perceba que $\rho_m(h)$ age diagonalmente: os monômios $X^i Y^j$ são autovetores para $\rho_m(h)$, cada um com autovalor $i - j$, de modo que o espaço $\mathbb{F}[X, Y]_m$ é linearmente gerado por $m + 1$ autovetores para o operador $\rho_m(h)$, com autovalores $\{-m, -m + 2, -m + 4, \dots, m - 2, m\}$.

Veja também que $\rho_m(e)$ aumenta o expoente de X em 1 e diminui o de Y também em 1, anulando os múltiplos de X^m . Assim, $\rho_m(e)$ manda autovetores de $\rho_m(h)$ associados a um autovalor k para autovetores associados a $k + 2$, e anula os autovetores associados ao autovalor mais alto. No sentido contrário, $\rho_m(f)$ aumenta o expoente de Y em 1 e diminui o de X também em 1, e portanto age nos autovetores de $\rho_m(h)$ diminuindo o autovalor em 2 (e anulando os autovetores associados ao autovalor mais baixo). Por esse motivo, diz-se que os operadores $\rho_m(e)$ e $\rho_m(f)$ são operadores de “ascenso” (ou “construção”) e “descenso” (ou “destruição”), respectivamente.

Podemos ilustrar esta discussão com o seguinte diagrama:



Aqui, as flechas para a direita representam a ação de $\rho_m(e)$, as para a esquerda a ação de $\rho_m(f)$ e os loops a ação de $\rho_m(h)$. Assim, por exemplo, o diagrama nos diz que XY^{m-1} é mandado por $\rho_m(e)$ para X^2Y^{m-2} , sendo multiplicado por um fator de $m - 1$, ou seja, $\rho_m(e)(XY^{m-1}) = (m - 1)X^2Y^{m-2}$.

O diagrama acima mostra que se um subespaço invariante de $\mathbb{F}[X, Y]_m$ contém algum elemento da base $\{Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m\}$, então este subespaço deve ser todo o $\mathbb{F}[X, Y]_m$. Mais do que isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.21. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que os únicos subespaços invariantes são os triviais. Suponha então que $0 \neq W \subseteq \mathbb{F}[X, Y]_m$ é um subespaço invariante. Vamos mostrar que $W = \mathbb{F}[X, Y]_m$.

Tome $p(X, Y) = \sum_i a_i X^i Y^{m-i} \in W$ um polinômio não nulo e seja $k \in \mathbb{N}$ o menor índice tal que $a_k \neq 0$. Cada aplicação de $\rho_m(e)$ aumenta o expoente de X em 1 e elimina o termo com X^m . Portanto, $\rho_m(e)^{m-k}$ elimina todos os termos em $p(X, Y)$ exceto $a_k X^k Y^{m-k}$, que é mandado para um múltiplo não nulo de X^m . Logo, como W é invariante, devemos ter $X^m \in W$ e daí temos também $\rho_m(f)^i X^m \in W$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Mas segue de (2.7) que $\rho_m(f)^i X^m$ é um múltiplo não nulo de $X^{m-i} Y^i$, e portanto todos os monômios da base $\{Y^m, XY^{m-1}, \dots, X^m\}$ estão em W e daí $W = \mathbb{F}[X, Y]_m$. \square

Mostramos com isso que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ com dimensão igual a n , a saber, $(\mathbb{F}[X, Y]_{n-1}, \rho_{n-1})$. Obviamente, cada uma dessas representações é distinta (i.e., não isomorfa), pois os espaços vetoriais têm dimensão diferente.

2.4.2 Completando a classificação

Para completar a classificação das representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, mostraremos que toda representação deste tipo é isomorfa a $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Seja então (V, π) uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ com dimensão finita positiva. A estratégia que utilizaremos para construir um isomorfismo entre (V, π) e $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$ é tentar diagonalizar o operador $\pi(h)$, e depois analisar como os operadores $\pi(e)$ e $\pi(f)$ agem nos autovetores de $\pi(h)$, essencialmente mostrando que (V, π) admite uma ilustração tão legal quanto aquela que exibimos na página anterior para $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$.

A observação chave que permite a diagonalização do operador $\pi(h)$ é o conteúdo do seguinte lema:

Lema 2.22. *Seja (V, π) uma representação (não necessariamente irredutível, possivelmente de dimensão infinita) da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ e suponha que $v \in V$ é um autovetor para $\pi(h)$ com autovalor λ .*

- a) *Se $\pi(e)v \neq 0$, então $\pi(e)v$ é um autovetor para $\pi(h)$ com autovalor $\lambda + 2$;*
- b) *Se $\pi(f)v \neq 0$, então $\pi(f)v$ é um autovetor para $\pi(h)$ com autovalor $\lambda - 2$;*

Demonstração. Para o item a), basta observar que, como π é um morfismo de álgebras de Lie, vale $[\pi(h), \pi(e)] = \pi([h, e]) = 2\pi(e)$ e portanto

$$\begin{aligned} \pi(h)\pi(e)v &= \pi(e)\pi(h)v + [\pi(h), \pi(e)]v \\ &= \pi(e)(\lambda v) + 2\pi(e)v \\ &= (\lambda + 2)\pi(e)v. \end{aligned}$$

Similarmente, verifica-se que $\pi(h)\pi(f)v = (\lambda - 2)\pi(f)v$, mostrando b). \square

Assim, os operadores $\pi(e)$ e $\pi(f)$ agem nos autovetores de $\pi(h)$ de maneira muito similar ao que ocorria na representação $\mathbb{F}[X, Y]_m$, como operadores de ascenso e descenso, respectivamente, realizando incremento/decremento de 2 no autovalor associado. O próximo lema garante a existência de um autovetor que é *maximal* e não pode ter o seu autovalor incrementado, assim como X^m na representação $\mathbb{F}[X, Y]_m$.

Lema 2.23. *Se (V, π) é uma representação de dimensão finita da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, então $\pi(h)$ possui um autovetor v_0 tal que $\pi(e)v_0 = 0$.*

Demonstração. Como \mathbb{F} é algebricamente fechado, o operador linear $\pi(h)$ possui ao menos um autovetor $v \in V$, com autovalor α . Agora, a sequência de vetores

$$v, \pi(e)v, \pi(e)^2v, \pi(e)^3v, \dots$$

deve eventualmente se tornar nula: caso contrário teríamos (pelo lema anterior) uma sequência infinita de autovetores para $\pi(h)$ com autovalores distintos, o que é impossível dado que V tem dimensão finita e autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Existe portanto $k \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(e)^k v \neq 0$, mas $\pi(e)^{k+1} v = 0$. Podemos então tomar $v_0 = \pi(e)^k v$, de modo a obter $\pi(h)v_0 = (\alpha + 2k)v_0$ e $\pi(e)v_0 = 0$, como queríamos. \square

Voltando a hipótese de que (V, π) é uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ com dimensão finita igual a n , tome $v_0 \in V$ um vetor maximal como no lema acima, isto é, um vetor não nulo satisfazendo

$$\pi(h)v_0 = \lambda v_0, \quad \pi(e)v_0 = 0$$

para algum $\lambda \in \mathbb{F}$. Daí, defina $v_{-1} = 0$ e $v_k = (1/k!)\pi(f)^k v_0$ para $k > 0$.

Lema 2.24. *Com as definições acima, valem:*

- a) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\pi(h)v_k = (\lambda - 2k)v_k$;
- b) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\pi(f)v_k = (k + 1)v_{k+1}$;
- c) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $\pi(e)v_k = (\lambda - k + 1)v_{k-1}$.

Em particular, o subespaço gerado pelos v_k 's é invariante.

Demonstração. O item a) segue após repetidas aplicações do lema 2.22, enquanto que o item b) segue imediatamente da definição dos v_k .

Para o item c), faremos uma indução em k . Veja que o caso $k = 0$ é óbvio, pois $v_{-1} = 0$. Daí, supondo que vale para $k - 1$, temos

$$\begin{aligned} k\pi(e)v_k &= \pi(e)\pi(f)v_{k-1} && \text{(pelo item b)} \\ &= [\pi(e), \pi(f)]v_{k-1} + \pi(f)\pi(e)v_{k-1} \\ &= \pi(h)v_{k-1} + \pi(f)(\lambda - (k - 1) + 1)v_{k-2} && \text{(hip. de indução)} \\ &= (\lambda - 2(k - 1))v_{k-1} + (\lambda - k + 2)(k - 1)v_{k-1} && \text{(pelos itens a,b)} \\ &= (\lambda k - k^2 + k)v_{k-1} \\ &= k(\lambda - k + 1)v_{k-1}. \end{aligned}$$

Dividindo por k , obtemos o item c). □

Pelo lema acima, cada v_k não nulo é um autovetor para $\pi(h)$ com autovalor $\lambda - 2k$. Em particular, os v_k 's não nulos são linearmente independentes. Portanto, como a dimensão de V é finita, deve existir apenas uma quantidade finita de v_k 's não nulos e podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $v_m \neq 0$ mas $v_{m+1} = 0$.

Do item b) do lema, segue que $v_i = 0$ para todo $i > m$ e, por outro lado, $v_i \neq 0$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, pois caso contrário teríamos $v_m = 0$. Portanto os vetores v_0, v_1, \dots, v_m formam uma base para o subespaço W gerado por todos os v_k 's. Agora, W é não nulo e, pelo lema, é um subespaço invariante da representação (V, π) . Como esta representação é irredutível, segue que $W = V$ e portanto $m + 1 = \dim(W) = \dim(V) = n$.

Finalmente, veja que como $v_{m+1} = 0$, temos $\pi(e)v_{m+1} = 0$. Por outro lado, aplicando o item c) do lema para $k = m + 1$, obtemos

$$\pi(e)v_{m+1} = (\lambda - m)v_m.$$

Juntando, temos $0 = (\lambda - m)v_m$. Mas $v_m \neq 0$, e então devemos ter $\lambda = m$. Concluimos com isso que o autovalor λ associado ao autovetor maximal v_0 é um

inteiro não-negativo, igual a $\dim(V) - 1$. Em particular, λ fica completamente determinada por V .

Resumindo, temos uma base para V formada por autovetores de $\pi(h)$:

$$v_0, v_1, \dots, v_m.$$

O autovalor associado a v_0 é um inteiro não-negativo $\lambda = m = \dim(V) - 1$ e o autovalor de cada v_k , para $k > 0$, é obtido do anterior decrescendo 2 (este é o item a) do lema 2.24). Assim, os autovalores de $\pi(h)$ são

$$m, m - 2, \dots, -m.$$

Logo, o autoespaço associado a cada autovalor de $\pi(h)$ é unidimensional e, em particular, o vetor maximal é único a menos de multiplicação por escalar. Além disso, $\pi(e)$ e $\pi(f)$ agem “saltando” de um autoespaço para o outro: $\pi(e)$ incrementando o autovalor e $\pi(f)$ decrementando (este é o lema 2.22).

Com isso, é fácil concluir que (V, π) é isomorfa a $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$, para $m = \dim(V) - 1$. De fato, tomando um vetor maximal para $(\mathbb{F}[X, Y]_m, \rho_m)$ (por exemplo, $V_0 = X^m$), podemos utilizar o mesmo processo acima para obter uma base V_0, V_1, \dots, V_m para $\mathbb{F}[X, Y]_m$ satisfazendo as relações do lema 2.24. Daí, a correspondência $v_k \leftrightarrow V_k$ é um isomorfismo de representações.

CAPÍTULO 3

Álgebras de Lie Nilpotentes

O objetivo deste capítulo é introduzir e estudar a classe das álgebras de Lie nilpotentes. Estas álgebras de Lie generalizam as abelianas, e o seu entendimento é fundamental para o estudo de tópicos mais avançados.

A primeira seção é dedicada às propriedades básicas das álgebras de Lie nilpotentes, incluindo os principais exemplos e contraexemplos. Na segunda seção, discutimos em detalhes o Teorema de Engel, que relaciona a nilpotência de uma álgebra de Lie com a sua representação adjunta.

Por todo o capítulo, a menos de explícita menção do contrário, \mathbb{F} denota um corpo arbitrário e todos os espaços vetoriais e álgebras de Lie são tomados sobre \mathbb{F} .

3.1 Definição e Propriedades Básicas

Uma álgebra de Lie é abeliana quando o colchete de quaisquer dois dos seus elementos é nulo, isto é, quando $[x_1, x_2] = 0$ para quaisquer x_1, x_2 . Mais geralmente, podemos considerar álgebras de Lie para as quais existe um inteiro positivo k tal que qualquer colchete envolvendo k elementos da álgebra se anula. Para o estudo destas álgebras, que chamamos de *nilpotentes*, considere a seguinte definição:

Definição 3.1. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. A *série central descendente* de \mathfrak{g} é a família de subespaços $\{\mathfrak{g}^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ definida recursivamente da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}; \\ \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \quad \text{para } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, se a e b são ideais de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , então $[a, b]$ também o é. Assim, podemos concluir por indução que \mathfrak{g}^k é um

ideal de \mathfrak{g} para todo $k \in \mathbb{N}^*$, donde se segue que

$$\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*.$$

Portanto, a série central descendente de \mathfrak{g} realmente é uma “série descendente”:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \mathfrak{g}^3 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \cdots$$

Por sua vez, o termo “central” na nomenclatura se deve ao fato de que $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ está contido no centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{k+1}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$. (Veja que isto é apenas uma maneira sofisticada de dizer que $[\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$).

A seguir, buscaremos caracterizar os ideais que aparecem na série central descendente de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} em termos de colchetes iterados em \mathfrak{g} . Mais precisamente, vamos mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}^*$ o ideal \mathfrak{g}^k é gerado por todos os colchetes possíveis envolvendo k elementos de \mathfrak{g} (por exemplo, \mathfrak{g}^4 é gerado por todos os elementos das formas $[x_1, [x_2, [x_3, x_4]]]$, $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ e $[[[x_1, x_2], x_3], x_4]$, com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$ arbitrários). Perceba que se o colchete em \mathfrak{g} fosse uma operação associativa, então este resultado seria imediato das definições.

Lema 3.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}^*$, tem-se*

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subseteq \mathfrak{g}^{i+j}.$$

Demonstração. Vamos fazer uma indução em i . Quando $i = 1$, a afirmação se reduz à definição de \mathfrak{g}^{j+1} , e portanto é válida para todo $j \in \mathbb{N}^*$. Supondo então que o resultado vale para um i fixo e para todo $j \in \mathbb{N}^*$, obtemos através da identidade de Jacobi que

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}^{i+1}, \mathfrak{g}^j] &= [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i], \mathfrak{g}^j] \subseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i], \mathfrak{g}^j] + [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j]] \\ &\subseteq [\mathfrak{g}^{j+1}, \mathfrak{g}^i] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i+j}] \\ &\subseteq \mathfrak{g}^{i+j+1}. \end{aligned}$$

Logo, o resultado é válido para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}^*$. □

Proposição 3.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, \mathfrak{g}^k é o subespaço gerado por todos os colchetes envolvendo k elementos de \mathfrak{g} .*

Demonstração. Seja $C^k(\mathfrak{g})$ o subespaço gerado pelos colchetes que envolvem k elementos de \mathfrak{g} . Vamos mostrar por indução que $\mathfrak{g}^k = C^k(\mathfrak{g})$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Se $k = 1$, esta igualdade é óbvia (um colchete envolvendo 1 elemento de \mathfrak{g} é apenas um $x \in \mathfrak{g}$).

Suponha então que $k > 1$ e que o resultado vale para todo inteiro positivo $l < k$. Neste caso, \mathfrak{g}^{k-1} é gerado por colchetes envolvendo $k - 1$ elementos de \mathfrak{g} , e portanto $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ é gerado por colchetes envolvendo k elementos de \mathfrak{g} , de modo que $\mathfrak{g}^k \subseteq C^k(\mathfrak{g})$. Por outro lado, se x pode ser escrito como um colchete de k elementos de \mathfrak{g} então $x = [y, z]$ com $y \in C^i(\mathfrak{g}), z \in C^{k-i}(\mathfrak{g})$, onde $0 < i < k$. Pela hipótese de indução, $C^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^i$ e $C^{k-i}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{k-i}$, de modo que $x \in [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{k-i}]$. Do lema acima, segue que $x \in \mathfrak{g}^k$ e portanto todos os colchetes que envolvem k elementos de \mathfrak{g} pertencem a \mathfrak{g}^k . Logo, $C^k(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}^k$. □

A série central descendente é, portanto, a ferramenta adequada para descrevermos a classe das álgebras de Lie nas quais são nulos todos os colchetes que envolvem uma quantidade suficientemente grande de elementos.

Definição 3.4. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, isto é, se a sua série central descendente eventualmente se anula.

Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie nilpotente, então o menor $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ é chamado *índice de nilpotência* de \mathfrak{g} . Neste caso, segue dos resultados acima que qualquer colchete envolvendo k ou mais elementos de \mathfrak{g} é igual a zero.

Exemplo 3.5. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é abeliana se e somente se $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. Portanto, toda álgebra de Lie abeliana é nilpotente, com índice de nilpotência igual a 2. \diamond

Exemplo 3.6. Seja \mathfrak{n}_n a álgebra de Lie das matrizes $n \times n$ estritamente triangulares superiores apresentada no exemplo 1.15:

$$\mathfrak{n}_n = \{(a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ sempre que } i \geq j\}$$

Como vimos, esta álgebra possui uma base dada pelo conjunto das matrizes básicas E_{ij} tais que $j > i$. Em outras palavras, \mathfrak{n}_n é gerada pelas matrizes E_{ij} tais que $j - i \geq 1$. Mais geralmente, vamos mostrar por indução que, para todo $m \in \mathbb{N}^*$, o ideal $(\mathfrak{n}_n)^m$ é gerado pelas E_{ij} com $j - i \geq m$. De fato, supondo que isso vale para um dado $m \in \mathbb{N}^*$, temos que $(\mathfrak{n}_n)^{m+1} = [\mathfrak{n}_n, (\mathfrak{n}_n)^m]$ é gerado pelos elementos da forma $[E_{ij}, E_{kl}]$, com $j - i \geq 1$ e $l - k \geq m$. Lembre então a fórmula para os comutadores das matrizes básicas:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$$

Perceba que se $j > i$ e $l > k$ então não podemos ter simultaneamente $i = l$ e $j = k$; assim, se $j - i \geq 1$ e $l - k \geq m$ então

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} E_{il} & \text{se } j = k \\ -E_{kj} & \text{se } l = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora, se $j = k$ então $l - i = (l - k) + (j - i) \geq m + 1$ e, similarmente, se $l = i$ então $j - k = (j - i) + (l - k) \geq 1 + m$. Portanto, $(\mathfrak{n}_n)^{m+1}$ é gerado pelas matrizes E_{pq} tais que $q - p \geq m + 1$, completando a indução.

Como as matrizes em \mathfrak{n}_n são de ordem n , não existe E_{pq} com $q - p \geq n$. Logo, devemos ter $(\mathfrak{n}_n)^n = 0$ (pois seu conjunto de geradores é vazio) e daí \mathfrak{n}_n é uma álgebra de Lie nilpotente. \diamond

Exemplo 3.7. Considere a álgebra de Lie \mathfrak{t}_n das matrizes triangulares superiores de ordem $n > 1$, apresentada no exemplo 1.14:

$$\mathfrak{t}_n = \{(a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ sempre que } i > j\}$$

Uma base para esta álgebra é dada pelas matrizes básicas E_{ij} tais que $j \geq i$. Veja que $[E_{11}, E_{1n}] = E_{1n}$ e portanto $\text{ad}(E_{11})^k E_{1n} = E_{1n}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Isso mostra que $E_{1n} \in (\mathfrak{t}_n)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, de modo que \mathfrak{t}_n não é nilpotente. \diamond

Exemplo 3.8. Considere a base canônica da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, dada pelas matrizes

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfazem as seguintes relações:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

Se o corpo \mathbb{F} tem característica diferente de 2, então estas relações mostram que $e, f, h \in [\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})]$, de modo que $[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})] = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ e portanto $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ não é nilpotente.

Por outro lado, se $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$, então $[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})] = \text{span}\{h\}$ é unidimensional e portanto abeliana. Daí, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})^3 = 0$ e $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ é nilpotente. \diamond

Proposição 3.9. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie, $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra e $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um morfismo sobrejetor. Então:*

- a) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{s}^k \subseteq \mathfrak{g}^k$.
- b) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(\mathfrak{g}^k) = \mathfrak{h}^k$.

Em particular, se \mathfrak{g} é nilpotente, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de \mathfrak{g} também o são.

Demonstração. Para o item b), temos por hipótese que $\varphi(\mathfrak{g}^1) = \mathfrak{h}^1$. Supondo que $\varphi(\mathfrak{g}^k) = \mathfrak{h}^k$, obtemos $\varphi(\mathfrak{g}^{k+1}) = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]) = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{g}^k)] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^k] = \mathfrak{h}^{k+1}$ e o resultado segue então por indução.

Da mesma maneira, o item a) se demonstra por indução em k , o caso $k = 1$ sendo a hipótese. \square

Proposição 3.10. *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie tal que $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ é nilpotente, então \mathfrak{g} é nilpotente.*

Demonstração. Suponha que $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ é nilpotente e tome $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^k = 0$. Denotando por $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ o morfismo quociente e utilizando o resultado da proposição 3.9, temos

$$\pi(\mathfrak{g}^k) = \pi(\mathfrak{g})^k = (\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^k = 0.$$

Ou seja, $\mathfrak{g}^k \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Daí, $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq [\mathfrak{g}, Z(\mathfrak{g})] = 0$. \square

Proposição 3.11. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente. Se $\mathfrak{g} \neq 0$, então $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.*

Demonstração. Seja k o índice de nilpotência de \mathfrak{g} . Como \mathfrak{g} é não nula, devemos ter $k > 1$, de modo que \mathfrak{g}^{k-1} está bem definido. Além disso, devemos ter $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$, pois caso contrário k não seria o índice de nilpotência de \mathfrak{g} . Agora, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = \mathfrak{g}^k = 0$ e portanto $\mathfrak{g}^{k-1} \subseteq Z(\mathfrak{g})$, mostrando que $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$. \square

Exemplo 3.12. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2. Sabemos que \mathfrak{g} possui uma base $\{x, y\}$ tal que $[x, y] = y$, donde é possível concluir que $Z(\mathfrak{g}) = 0$, e portanto \mathfrak{g} não é nilpotente. De fato, temos $\mathfrak{g}^k = \text{span}\{y\}$, para todo inteiro $k \geq 2$. \diamond*

3.2 O Teorema de Engel

Como vimos acima, uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é nilpotente se, e somente se, existe um inteiro $k > 0$ tal que todos os colchetes envolvendo k elementos de \mathfrak{g} se anulam. Em particular, se \mathfrak{g} é nilpotente então existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\text{ad}(x)^k y = \underbrace{[x, [x, [\dots [x, y] \dots]]]}_{k \text{ vezes}} = 0.$$

Isto é, em uma álgebra de Lie nilpotente, as aplicações $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ são transformações lineares nilpotentes. O objetivo desta seção é provar que, quando a dimensão de \mathfrak{g} é finita, vale também a recíproca: se $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, então \mathfrak{g} é nilpotente.

Este resultado é conhecido como *Teorema de Engel*, em homenagem ao matemático alemão Friedrich Engel, que em 1890 esboçou a sua demonstração em uma correspondência a outro matemático alemão, Wilhelm Killing. Para prová-lo, vamos estudar álgebras de Lie lineares formadas por operadores nilpotentes em um espaço vetorial de dimensão finita, e então aplicaremos os resultados obtidos à álgebra adjunta $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie arbitrária \mathfrak{g} .

Lema 3.13. *Seja V um espaço vetorial. Se $A: V \rightarrow V$ é um operador nilpotente, então $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ também o é.*

Demonstração. Dado $A \in \mathfrak{gl}(V)$, temos as transformações lineares

$$\begin{array}{ll} L_A: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V) & R_A: \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X \mapsto AX & X \mapsto XA. \end{array}$$

e podemos escrever $\text{ad}(A) = L_A - R_A$.

Como a composição de endomorfismos é uma operação associativa, temos $A(XA) = (AX)A$ para todo $X \in \mathfrak{gl}(V)$, de modo que $L_A R_A = R_A L_A$. Logo, vale a fórmula binomial

$$(3.1) \quad \text{ad}(A)^n = (L_A - R_A)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (L_A)^{n-i} (R_A)^i$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, suponha que A é nilpotente e tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Neste caso, $(L_A)^k(X) = A^k X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{gl}(V)$ e daí $(L_A)^k = 0$. Do mesmo modo, $(R_A)^k = 0$. Portanto, tomando $n = 2k$ na equação (3.1), obtemos $(L_A)^{2k-i} = 0$ para $i \leq n$ e $(R_A)^i = 0$ para $i \geq k$, de modo que todas as parcelas no somatório são nulas e $\text{ad}(A)^{2k} = 0$. \square

Observação. A recíproca do lema acima é *falsa*: se $\text{ad}(A)$ é nilpotente para $A \in \mathfrak{gl}(V)$, não necessário que A seja nilpotente. Um contraexemplo trivial é dado por $A = \text{id}_V$.

Os dois próximos resultados, que utilizaremos para provar o Teorema de Engel, generalizam fatos conhecidos da álgebra linear: todo operador nilpotente tem núcleo não trivial e, quando a dimensão do espaço é finita, pode ser representado por uma matriz estritamente triangular superior.

Proposição 3.14. *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra de Lie de dimensão finita. Se todos os elementos de \mathfrak{g} são operadores nilpotentes, então existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $Av = 0$ para todo $A \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Procederemos por indução na dimensão de \mathfrak{g} . Se $\dim(\mathfrak{g}) \leq 1$, então existe um operador nilpotente $A \in \mathfrak{gl}(V)$ tal que $\mathfrak{g} = \text{span}\{A\}$ e o teorema se reduz a afirmação de que todo operador nilpotente possui núcleo não trivial.

Suponha agora que $\dim(\mathfrak{g}) = n > 1$ e que o resultado vale para álgebras de dimensão menor que n . O passo fundamental da demonstração é encontrar um ideal de dimensão $n - 1$ em \mathfrak{g} . Para isso, seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra própria de dimensão máxima (que existe porque \mathfrak{g} tem dimensão finita). Veja que a restrição de $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a \mathfrak{h} define uma representação de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Como \mathfrak{h} é uma subálgebra, temos $\text{ad}(A)B = [A, B] \in \mathfrak{h}$ para quaisquer $A, B \in \mathfrak{h}$, de modo que \mathfrak{h} é um subespaço invariante. Portanto, podemos considerar a representação quociente $\rho: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, dada por

$$\rho(A)(X + \mathfrak{h}) = [A, X] + \mathfrak{h}.$$

Para todo $A \in \mathfrak{h}$, temos que $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é nilpotente (lema 3.13), donde se segue que $\rho(A)$ é nilpotente. Portanto, $\rho(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ consiste de operadores nilpotentes e $\dim(\rho(\mathfrak{h})) \leq \dim(\mathfrak{h}) < \dim(\mathfrak{g}) = n$. A hipótese de indução garante então que existe um vetor não nulo $X + \mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que $\rho(A)(X + \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ para todo $A \in \mathfrak{h}$. Isto significa que existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X \notin \mathfrak{h}$, mas $[A, X] \in \mathfrak{h}$ para todo $A \in \mathfrak{h}$. Então o subespaço $\mathfrak{h} \oplus \text{span}\{X\} \subseteq \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} que contém \mathfrak{h} propriamente, e \mathfrak{h} é um ideal nesta subálgebra. Da maximalidade de \mathfrak{h} segue que $\mathfrak{h} \oplus \text{span}\{X\} = \mathfrak{g}$, de modo que \mathfrak{h} é um ideal de dimensão $n - 1$ em \mathfrak{g} .

Agora, a hipótese de indução aplicada a $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ garante que

$$W = \{w \in V \mid Aw = 0 \text{ para todo } A \in \mathfrak{h}\}$$

é um subespaço não-trivial de V . Além disso, se $w \in W$ então para todo $A \in \mathfrak{h}$ tem-se

$$AXw = [A, X]w + XAw = 0 + 0 = 0,$$

pois $[A, X] \in \mathfrak{h}$. Isso mostra que W é invariante por X , de modo que X se restringe a um operador em W . Como X é nilpotente, tal restrição também o é, e portanto deve existir um vetor não nulo $v \in W$ tal que $Xv = 0$. Logo, $Av = 0$ para todo $A \in \mathfrak{h} \oplus \text{span}\{X\} = \mathfrak{g}$, e o teorema está provado. \square

Proposição 3.15. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V de dimensão finita igual a n . Se para todo $x \in \mathfrak{g}$ o operador $\rho(x)$ é nilpotente, então existe uma sequência de subespaços*

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

tal que $\rho(x)V_i \subseteq V_{i-1}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Em outras palavras, existe uma base ordenada para V na qual todo operador $\rho(x)$ é representado por uma matriz estritamente triangular superior.

Demonstração. Se $\dim(V) = 0$, o resultado é trivial. Podemos então supor que $\dim(V) = n > 0$, e que o resultado vale para espaços de dimensão menor. Neste caso, a proposição 3.14 aplicada a subálgebra $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ garante a existência de um vetor $0 \neq v \in V$ tal que $\rho(x)v = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

O subespaço $V_1 = \text{span}\{v\}$ é então invariante, e portanto dá origem a uma representação $\bar{\rho}$ de \mathfrak{g} no espaço quociente V/V_1 , cuja dimensão é $n - 1$. Como $\rho(x)$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, o mesmo vale para $\bar{\rho}(x)$, e então, pela hipótese de indução, existe uma sequência de subespaços

$$0 = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{n-1} = V/V_1$$

tal que $\bar{\rho}(x)W_i \subseteq W_{i-1}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Denotando por $\pi: V \rightarrow V/V_1$ a aplicação quociente, defina $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$, para cada $i \in \{2, \dots, n\}$. Assim,

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 = \pi^{-1}(W_0) \subsetneq V_2 = \pi^{-1}(W_1) \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \pi^{-1}(W_{n-1}) = V$$

é uma sequência de subespaços de V . Se $u \in V_i$, $i \in \{2, \dots, n\}$, então para todo $x \in \mathfrak{g}$ tem-se $\pi(\rho(x)u) = \bar{\rho}(x)\pi(u) \in \bar{\rho}(x)W_{i-1} \subseteq W_{i-2}$, e daí segue que $\rho(x)u \in \pi^{-1}(W_{i-2}) = V_{i-1}$. Além disso, $\rho(x)V_1 = 0$. Logo, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se $\rho(x)V_i \subseteq V_{i-1}$, o que mostra a primeira afirmação do enunciado.

Quanto à segunda afirmação, seja $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$ uma sequência de subespaços satisfazendo $\rho(x)V_i \subseteq V_{i-1}$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$. Tome uma base ordenada (v_1, \dots, v_n) com $v_i \in V_i$ para todo i . Nesta base, é evidente que a matriz de cada operador $\rho(x) \in \mathfrak{g}$ é estritamente triangular superior, pois $\rho(x)v_1 \in V_0 = 0$ e para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ tem-se $\rho(x)v_i \in V_{i-1} = \text{span}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. \square

O exemplo a seguir mostra que sem a estrutura de álgebra de Lie não é possível garantir que os resultados obtidos acima ainda são válidos.

Exemplo 3.16. Considere os operadores lineares $A, B: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ dados na base canônica pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O subespaço gerado por A e B consiste inteiramente de operadores nilpotentes, pois para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ tem-se

$$(\lambda A + \mu B)^3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & \lambda \\ 0 & -\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu^2 & 0 & -\lambda\mu \end{pmatrix} = 0$$

Porém, tal subespaço não satisfaz as hipóteses da proposição 3.14, pois não forma uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathbb{F}^3)$:

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{span}\{A, B\}.$$

E, de fato, não existe nenhum vetor não nulo $v \in \mathbb{F}^3$ tal que $Av = Bv = 0$, pois se $v = (v^1, v^2, v^3)$ então $Av = (v^3, 0, 0)$ e $Bv = (0, v^1, v^2)$, de modo que $Av = Bv = 0$ implica em $v = 0$. Em particular, não é possível realizar uma mudança de base de modo a colocar todos os elementos de $\text{span}\{A, B\}$ simultaneamente em forma estritamente triangular superior. \diamond

Corolário 3.17. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V de dimensão finita. Se para todo $x \in \mathfrak{g}$ o operador $\rho(x)$ é nilpotente, então $\rho(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie nilpotente.*

Demonstração. Pela proposição 3.15, $\rho(\mathfrak{g})$ é isomorfa a uma subálgebra da álgebra de Lie \mathfrak{n}_n das matrizes estritamente triangulares superiores de ordem n , onde $n = \dim(V)$. Como \mathfrak{n}_n é nilpotente (exemplo 3.6), segue da proposição 3.9 que $\rho(\mathfrak{g})$ é nilpotente. \square

O corolário acima garante a nilpotência da álgebra de Lie $\rho(\mathfrak{g})$; entretanto, não é possível concluir o mesmo a respeito de \mathfrak{g} (para ver isso, considere o caso em que $\rho = 0$). Por outro lado, se ρ é a representação adjunta, então \mathfrak{g} de fato é nilpotente: é justamente esse o conteúdo do Teorema de Engel.

Teorema 3.18 (Engel). *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita tal que para todo $x \in \mathfrak{g}$ a aplicação $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é nilpotente, então \mathfrak{g} é nilpotente.*

Demonstração. O corolário 3.17 implica que $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie nilpotente. Pelo teorema do isomorfismo, temos $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$, de modo que $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ é nilpotente. Segue então da proposição 3.10 que \mathfrak{g} é nilpotente. \square

A importância do Teorema de Engel reside no fato de que ele fornece um critério “pontual” (a nilpotência das transformações adjuntas) para uma condição “global” (a anulação da série central descendente). Mais concretamente, o teorema pode ser pensado em termos do anulamento de colchetes iterados na álgebra de Lie: por um lado, \mathfrak{g} é nilpotente se todos os colchetes envolvendo um certo número de elementos se anula; por outro lado, o Teorema de Engel mostra ser suficiente, quando a dimensão de \mathfrak{g} é finita, que se anulem aqueles colchetes da forma $\text{ad}(x)^k y = [x, [x, [\dots [x, y] \dots]]]$.

Entretanto, é importante ressaltar que o Teorema de Engel não é válido quando a álgebra de Lie tem dimensão infinita, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 3.19. Seja V um \mathbb{F} -espaço vetorial com base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Para cada $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $i < j$, defina um operador linear $E_{ij}: V \rightarrow V$ colocando

$$E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ e_i, & \text{se } j = k \end{cases}$$

Então para quaisquer $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$ tem-se $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} \in \text{span}\{E_{ij}\}_{i < j}$ e portanto o espaço gerado pelos operadores E_{ij} forma uma subálgebra associativa $\mathfrak{g} \subseteq \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. A posteriori, este subespaço é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ (intuitivamente, \mathfrak{g} pode ser pensada como \mathfrak{n}_{∞} , “a álgebra de Lie das matrizes estritamente triangulares superiores de ordem ∞ ”).

Vamos mostrar que $\text{ad}(A): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é nilpotente para todo $A \in \mathfrak{g}$, mas que \mathfrak{g} não é uma álgebra de Lie nilpotente. Para isso, veja primeiro que se $A \in \mathfrak{g}$ então existem $c_{i_1 j_1}, \dots, c_{i_n j_n} \in \mathbb{F}$ tais que

$$A = c_{i_1 j_1} E_{i_1 j_1} + \dots + c_{i_n j_n} E_{i_n j_n}.$$

com $i_m < j_m$ para todo $m \in \{1, \dots, n\}$. Logo, para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$ tem-se

$$Ae_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \notin \{j_1, \dots, j_n\} \\ c_{i_m j_m} e_{i_m}, & \text{se } k = j_m \text{ para algum } m \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Portanto, a imagem de cada um dos vetores $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ pelo operador A é zero ou um múltiplo de e_{i_m} para algum $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i_m < k$. Analogamente, $A^2 e_k$ é zero ou um múltiplo de e_{i_p} para algum $p \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i_p < i_m < k$, e assim por diante. Deduz-se disso que $A^{n+1} e_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, donde A é nilpotente. Pelo lema 3.13, segue que $\text{ad}(A): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é nilpotente (note que não há nenhuma hipótese sobre a dimensão do espaço V neste lema).

Então \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie tal que $\text{ad}(A)$ é nilpotente para todo $A \in \mathfrak{g}$. Entretanto, \mathfrak{g} não é uma álgebra de Lie nilpotente. De fato, o mesmo argumento dado no exemplo 3.6 mostra que para todo $m \in \mathbb{N}^*$ o ideal \mathfrak{g}^m é gerado pelos operadores E_{ij} tais que $j - i \geq m$. Como i, j podem ser quaisquer inteiros positivos, segue que $\mathfrak{g}^m \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ (por exemplo, $E_{1, m+1} \in \mathfrak{g}^m$), donde \mathfrak{g} não é nilpotente. \diamond

CAPÍTULO 4

Álgebras de Lie Solúveis

Este último capítulo é dedicado ao estudo das álgebras de Lie solúveis. Começamos apresentando a definição e as propriedades básicas desta classe de álgebras de Lie e, em seguida, discutimos o Teorema de Lie, que descreve as representações de dimensão finita destas álgebras como sendo dadas, essencialmente, por matrizes triangulares superiores. Na terceira seção, mostramos que toda álgebra de Lie de dimensão finita admite um único ideal solúvel que contém todos os demais, e introduzimos a definição de álgebra de Lie semissimples. Por fim, a última seção apresenta os *critérios de Cartan* para a solubilidade e semissimplicidade de uma álgebra de Lie.

4.1 Definição e Propriedades Básicas

No exemplo exemplo 1.29 vimos que se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, então o subespaço $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal de \mathfrak{g} – chamado de álgebra derivada de \mathfrak{g} –, e é o menor tal que o quociente $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é abeliano. Se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é ela própria abeliana, então a grosso modo obtemos uma decomposição de \mathfrak{g} em dois “pedaços” abelianos. Caso contrário, podemos ainda considerar a álgebra derivada de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, e assim sucessivamente, de modo a tentar “aproximar” \mathfrak{g} por uma sequência de álgebras abelianas. Conforme veremos a seguir, a formalização desta ideia nos leva a noção de álgebra de Lie *solúvel*.

Definição 4.1. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. A *série derivada* de \mathfrak{g} é a família de subespaços $\{\mathfrak{g}^{(k)} \mid k \in \mathbb{N}\}$ definida recursivamente da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}; \\ \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lembrando que se \mathfrak{a} e \mathfrak{b} são ideais de \mathfrak{g} então $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ também o é, conclui-se por indução que cada $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de \mathfrak{g} (e não apenas de $\mathfrak{g}^{(k-1)}$). A série

derivada de \mathfrak{g} é então uma sequência decrescente de ideais

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(2)} \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)} \supseteq \dots$$

Como $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$, os quocientes sucessivos $\mathfrak{g}^{(k)} / \mathfrak{g}^{(k+1)}$ desta sequência são álgebras de Lie abelianas. Note também que $\mathfrak{g}^{(i+j)} = (\mathfrak{g}^{(i)})^{(j)}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, pois a série derivada de $\mathfrak{g}^{(i)}$ é obtida da série derivada de \mathfrak{g} deletando os primeiros i termos.

Definição 4.2. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *solúvel* se para algum $k \in \mathbb{N}$ tem-se $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, isto é, se a sua série derivada eventualmente se anula.

Exemplo 4.3. Toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel. Mais geralmente, se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, então para todo $k \in \mathbb{N}^*$ tem-se $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$. De fato, é óbvio que $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1$ e, supondo que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$, tem-se

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subseteq [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] = \mathfrak{g}^{k+1},$$

de modo que a afirmação segue por indução. \diamond

Exemplo 4.4. Considere a álgebra de Lie \mathfrak{t}_n das matrizes triangulares superiores de ordem $n > 1$:

$$\mathfrak{t}_n = \{ (a_{ij})_{ij} \in \mathfrak{gl}_n \mid a_{ij} = 0 \text{ sempre que } i > j \}$$

Como vimos no exemplo 3.7, esta álgebra de Lie não é nilpotente. Vamos mostrar agora que ela é solúvel. Para isso, tome $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathfrak{t}_n$ matrizes triangulares superiores, e observe que a (i, i) -ésima entrada do seu comutador $[A, B]$ é

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{ki} - b_{ik}a_{ki}) = a_{ii}b_{ii} - b_{ii}a_{ii} = 0.$$

(Usamos o fato que $b_{ij} = a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$). Portanto, temos $[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n] \subseteq \mathfrak{n}_n$, onde \mathfrak{n}_n é a álgebra de Lie das matrizes estritamente triangulares superiores. Por outro lado, \mathfrak{n}_n tem como base as matrizes E_{ij} tais que $j > i$, e cada uma dessas matrizes pode ser escrita como um comutador de matrizes triangulares superiores: $E_{ij} = [E_{ij}, E_{jj}]$. Disso, segue que $\mathfrak{n}_n \subseteq [\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n]$ e portanto $[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n] = \mathfrak{n}_n$.

Isso mostra que $[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n]$ é nilpotente (exemplo 3.6), e em particular, solúvel. Existe então $k \in \mathbb{N}$ tal que $[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n]^{(k)} = 0$. Daí,

$$(\mathfrak{t}_n)^{(k+1)} = [\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n]^{(k)} = 0$$

e portanto \mathfrak{t}_n é solúvel. \diamond

Exemplo 4.5. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2 e tome $\{x, y\}$ uma base para \mathfrak{g} satisfazendo $[x, y] = y$. Então

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{span}\{y\}$$

é uma álgebra de Lie unidimensional, e portanto abeliana. Logo, $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$, e então \mathfrak{g} é solúvel. Por outro lado, sabemos do exemplo 3.12 que \mathfrak{g} não é nilpotente. \diamond

Os exemplos acima mostram que toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel, mas existem álgebras de Lie solúveis que não são nilpotentes.

Proposição 4.6. *Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie, $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subálgebra e $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ um morfismo sobrejetor. Então:*

$$a) \text{ Para todo } k \in \mathbb{N}, \mathfrak{s}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}.$$

$$b) \text{ Para todo } k \in \mathbb{N}, \varphi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \mathfrak{h}^{(k)}.$$

Em particular, se \mathfrak{g} é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de \mathfrak{g} também o são.

Demonstração. Para o item b), temos por hipótese que $\varphi(\mathfrak{g}^{(0)}) = \mathfrak{h}^{(0)}$. Supondo que $\varphi(\mathfrak{g}^{(k)}) = \mathfrak{h}^{(k)}$, temos

$$\varphi(\mathfrak{g}^{(k+1)}) = \varphi([\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]) = [\varphi(\mathfrak{g}^{(k)}), \varphi(\mathfrak{g}^{(k)})] = [\mathfrak{h}^{(k)}, \mathfrak{h}^{(k)}] = \mathfrak{h}^{(k+1)}$$

e o resultado segue então por indução.

Analogamente, o item a) é consequência de uma simples indução. \square

Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie solúvel e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então da proposição anterior \mathfrak{a} e $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ também são solúveis, este último por ser a imagem de \mathfrak{g} pelo morfismo quociente $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Reciprocamente, temos:

Proposição 4.7. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Se \mathfrak{a} e $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ são solúveis, então \mathfrak{g} também o é.*

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} = 0$ e denote por $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ o morfismo quociente. Então, pela proposição anterior, temos

$$0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} = \pi(\mathfrak{g})^{(k)} = \pi(\mathfrak{g}^{(k)}).$$

Isto é, $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{a}$. Como \mathfrak{a} é solúvel, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^{(l)} = 0$. Daí,

$$\mathfrak{g}^{(k+l)} = (\mathfrak{g}^{(k)})^{(l)} \subseteq \mathfrak{a}^{(l)} = 0$$

e portanto \mathfrak{g} é solúvel. \square

O resultado da proposição acima não é válido se trocamos “solúvel” por “nilpotente”. De fato, se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2, então $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ são unidimensionais e portanto abelianas (em particular, são nilpotentes), mas \mathfrak{g} não é nilpotente.

4.2 O Teorema de Lie

O objetivo desta seção é demonstrar o *Teorema de Lie*, que descreve as representações de dimensão finita das álgebras de Lie solúveis sobre corpos algebricamente fechados de característica nula. Mais precisamente, o teorema afirma que toda representação deste tipo admite um subespaço invariante unidimensional e, conseqüentemente, se dá por matrizes triangulares superiores.

Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de \mathfrak{g} , então um subespaço invariante unidimensional é o mesmo que um vetor $v \in V$ que é simultaneamente um autovetor de $\rho(x)$ para todos os $x \in \mathfrak{g}$. Um tal vetor determina naturalmente uma função

$$\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$$

tal que para qualquer $x \in \mathfrak{g}$ vale a igualdade

$$\rho(x)v = \lambda(x)v.$$

Desta equação segue que λ é um funcional linear em \mathfrak{g} , isto é, que $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.

Definição 4.8. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial V . Para cada funcional linear $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, definimos o *espaço-peso* associado a λ como

$$V_\lambda(\mathfrak{g}) = \{v \in V \mid \rho(x)v = \lambda(x)v \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}.$$

Se $V_\lambda(\mathfrak{g}) \neq 0$, então λ é dito um *peso* de \mathfrak{g} em V , e os seus elementos são chamados de *vetores de peso* λ .

Assim, o Teorema de Lie afirma que se \mathfrak{g} é solúvel e \mathbb{F} é algebricamente fechado de característica zero, então toda representação de dimensão finita de \mathfrak{g} admite um peso. Para compreender melhor o significado deste resultado, é conveniente considerar a situação particular em que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie unidimensional. Neste caso $\mathfrak{g} \cong \mathbb{F}$ e uma representação (V, ρ) fica completamente determinada pela escolha de um operador linear $\rho(1_{\mathbb{F}}) = A \in \mathfrak{gl}(V)$. A existência de um subespaço invariante unidimensional se reduz então a existência de um autovetor para A , o que, no caso em que V tem dimensão finita e \mathbb{F} é algebricamente fechado, é um resultado conhecido de álgebra linear. O Teorema de Lie surge então como uma generalização deste resultado para o caso em que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie solúvel arbitrária (e não apenas unidimensional). Talvez surpreendentemente, neste caso precisamos exigir que o corpo \mathbb{F} , além de ser algebricamente fechado, tenha característica zero.

A chave para a demonstração do Teorema de Lie é o conteúdo do lema a seguir, conhecido como *Lema de Lie* ou *Lema da Invariância*.

Lema 4.9. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em um espaço vetorial $V \neq 0$ de dimensão finita. Se o corpo de escalares tem característica nula e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então para todo funcional linear $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ o espaço-peso*

$$V_\lambda(\mathfrak{a}) = \{v \in V \mid \rho(a)v = \lambda(a)v \text{ para todo } a \in \mathfrak{a}\}$$

é invariante por \mathfrak{g} .

Demonstração. Queremos mostrar que para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V_\lambda(\mathfrak{a})$ tem-se $\rho(x)v \in V_\lambda(\mathfrak{a})$. Por definição, isso equivale a mostrar que para quaisquer $a \in \mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V_\lambda(\mathfrak{a})$ tem-se $\rho(a)\rho(x)v = \lambda(a)\rho(x)v$. Mas

$$\begin{aligned} \rho(a)\rho(x)v &= [\rho(a), \rho(x)]v + \rho(x)\rho(a)v \\ &= \rho([a, x])v + \rho(x)\lambda(a)v \\ &= \lambda([a, x])v + \lambda(a)\rho(x)v \quad (\text{pois } [a, x] \in \mathfrak{a}) \end{aligned}$$

e portanto o problema se reduz a mostrar que $\lambda([a, x]) = 0$ para quaisquer $a \in \mathfrak{a}$ e $x \in \mathfrak{g}$.

Com este objetivo, fixe $x \in \mathfrak{g}$ e tome um vetor não nulo $v \in V_\lambda(\mathfrak{a})$. Defina então $U_i = \text{span}\{v, \rho(x)v, \dots, \rho(x)^{i-1}v\}$, para cada inteiro $i > 0$. Como V tem dimensão finita, a sequência de subespaços $0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ deve eventualmente estabilizar, de modo que podemos tomar $m \in \mathbb{N}^*$ mínimo tal que $U_{m+1} = U_m$. Vamos mostrar que para todo $a \in \mathfrak{a}$ tem-se $\rho(a)U_m \subseteq U_m$ e a restrição $\rho(a)|_{U_m}: U_m \rightarrow U_m$ é dada, na base ordenada $(v, \rho(x)v, \dots, \rho(x)^{m-1}v)$, por uma matriz triangular superior com $\lambda(a)$ nas entradas diagonais:

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} \lambda(a) & * & \dots & * \\ 0 & \lambda(a) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda(a) \end{pmatrix}$$

Em outras palavras, vamos mostrar que para quaisquer $a \in \mathfrak{a}$ e $i \in \{1, \dots, m\}$ tem-se

$$(4.2) \quad \rho(a)\rho(x)^{i-1}v = \lambda(a)\rho(x)^{i-1}v + u,$$

com $u \in U_{i-1}$ (onde $U_0 = 0$). Quando $i = 1$, esta afirmação se reduz a igualdade $\rho(a)v = \lambda(a)v$, que vale para todo $a \in \mathfrak{a}$ pois $v \in V_\lambda(\mathfrak{a})$. Supondo então que o resultado vale para $i = k \in \{1, \dots, m-1\}$, podemos escrever (levando em conta que $[a, x] \in \mathfrak{a}$ para todo $a \in \mathfrak{a}$)

$$\begin{aligned} \rho(a)\rho(x)^{k-1}v &= \lambda(a)\rho(x)^{k-1}v + u \\ \rho([a, x])\rho(x)^{k-1}v &= \lambda([a, x])\rho(x)^{k-1}v + u' \end{aligned}$$

com $u, u' \in U_{k-1}$. Daí, temos

$$\begin{aligned} \rho(a)\rho(x)^k v &= \rho(a)\rho(x)\rho(x)^{k-1}v \\ &= \rho([a, x])\rho(x)^{k-1}v + \rho(x)\rho(a)\rho(x)^{k-1}v \\ &= \lambda([a, x])\rho(x)^{k-1}v + u' + \rho(x)(\lambda(a)\rho(x)^{k-1}v + u) \\ &= \lambda(a)\rho(x)^k v + u'' \end{aligned}$$

onde $u'' = \lambda([a, x])\rho(x)^{k-1}v + \rho(x)u + u' \in U_k$. Isto mostra (4.2) para $i = k+1$, concluindo a demonstração de que, para todo $a \in \mathfrak{a}$, a matriz de $\rho(a)|_{U_m}$ é como em (4.1).

Tomando traço em U_m , segue de (4.1) que $\text{tr}_{U_m}(\rho(a)) = m\lambda(a)$ para todo $a \in \mathfrak{a}$ e, em particular, $\text{tr}_{U_m}(\rho([a, x])) = m\lambda([a, x])$ para todo $a \in \mathfrak{a}$. Por outro lado, $\text{tr}_{U_m}(\rho([a, x])) = \text{tr}_{U_m}(\rho(a)\rho(x) - \rho(x)\rho(a)) = 0$ e portanto devemos ter $m\lambda([a, x]) = 0$ para todo $a \in \mathfrak{a}$. Como o corpo de escalares tem característica nula, isso implica em $\lambda([a, x]) = 0$ para todo $a \in \mathfrak{a}$, e o lema está provado. \square

Teorema 4.10 (Lie). *Seja $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de uma álgebra de Lie solúvel \mathfrak{g} em um espaço vetorial $V \neq 0$ de dimensão finita. Se o corpo de escalares \mathbb{F} é algebricamente fechado e tem característica zero, então a representação admite um peso $\lambda \in \mathfrak{g}^*$.*

Demonstração. Observe primeiro que, como \mathfrak{g} é solúvel, $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é uma álgebra de Lie solúvel de dimensão finita (pois V tem dimensão finita). Além disso, se $\lambda: \rho(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{F}$ é um peso de $\rho(\mathfrak{g})$ em V (para a representação canônica $\rho(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$), então $\lambda \circ \rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ é um peso de \mathfrak{g} em V . Podemos portanto, substituindo \mathfrak{g} pela sua imagem, supor que \mathfrak{g} tem dimensão finita.

Se $\dim(\mathfrak{g}) = 0$, o teorema é trivial. Suponha então que $\dim(\mathfrak{g}) = n \geq 1$ e que o teorema está provado para o caso em que a dimensão da álgebra é $n - 1$. Como \mathfrak{g} é solúvel, temos que $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um subespaço próprio de \mathfrak{g} , pois caso contrário teríamos $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos então tomar um subespaço $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que \mathfrak{a} tem dimensão $n - 1$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$. Assim, \mathfrak{a} é um ideal em \mathfrak{g} , pois

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}.$$

Além disso, como \mathfrak{a} tem codimensão 1 em \mathfrak{g} , podemos escrever

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \text{span}\{x\}$$

para algum $x \in \mathfrak{g}$.

Agora, a hipótese de indução garante que existe um peso para a representação restrita $\rho|_{\mathfrak{a}}$. Ou seja, existe $\mu \in \mathfrak{a}^*$ tal que o espaço-peso

$$V_{\mu}(\mathfrak{a}) = \{v \in V \mid \rho(a)v = \mu(a)v \text{ para todo } a \in \mathfrak{a}\}$$

é não trivial. Pelo lema 4.9, $V_{\mu}(\mathfrak{a})$ é invariante por \mathfrak{g} e, em particular, por $\rho(x)$. Logo, como \mathbb{F} é algebricamente fechado, $\rho(x)|_{V_{\mu}(\mathfrak{a})}$ possui um autovetor. Isto é, existe $v \in V_{\mu}(\mathfrak{a})$ não nulo e $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\rho(x)v = \alpha v$. Defina então um funcional linear $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ colocando

$$\lambda(a + \eta x) = \mu(a) + \eta \alpha$$

para cada $a \in \mathfrak{a}$ e $\eta \in \mathbb{F}$. Daí, por construção, tem-se

$$\rho(a + \eta x)v = \rho(a)v + \eta \rho(x)v = \mu(a)v + \eta \alpha v = \lambda(a + \eta x)v$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{a}$ e $\eta \in \mathbb{F}$. Em outras palavras, $\rho(y)v = \lambda(y)v$ para todo $y \in \mathfrak{g}$, de modo que $v \in V_{\lambda}(\mathfrak{g})$. Logo, $V_{\lambda}(\mathfrak{g}) \neq 0$ e λ é um peso de \mathfrak{g} em V . \square

Segue do Teorema de Lie que se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então toda representação (V, ρ) de \mathfrak{g} em dimensão finita > 0 admite um subespaço invariante unidimensional. De fato, pelo teorema existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tal que $V_{\lambda}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Tomando um vetor não nulo $v \in V_{\lambda}(\mathfrak{g})$, temos

$$\rho(x)v = \lambda(x)v \in \text{span}\{v\}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Logo, $\text{span}\{v\}$ é um subespaço invariante unidimensional. Isso mostra o seguinte corolário:

Corolário 4.11. *Uma representação (V, ρ) de dimensão finita de uma álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero é irredutível se, e somente se, V é unidimensional.* \square

Quocientando por um tal subespaço invariante unidimensional, obtemos uma nova representação de \mathfrak{g} , que por sua vez (se não for nula) admite algum subespaço invariante unidimensional. Prosseguindo desta forma, conseguimos “triangularizar” a representação, conforme descrito na proposição abaixo:

Proposição 4.12. *Seja $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita igual a n de uma álgebra de Lie solúvel \mathfrak{g} . Se o corpo de escalares \mathbb{F} é algebricamente fechado e de característica zero, então existe uma sequência de subespaços*

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

tal que $\rho(x)V_i \subseteq V_i$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Em outras palavras, existe uma base ordenada para V na qual todo operador $\rho(x)$ é representado por uma matriz triangular superior.

Demonstração. Apresentaremos apenas um esboço da demonstração, pois esta é completamente análoga àquela da proposição 3.15.

Se $\dim(V) = 0$, então o resultado é óbvio. Caso contrário, o Teorema de Lie garante a existência de um subespaço invariante unidimensional V_1 . Passando para a representação quociente $\bar{\rho}$ em V/V_1 , obtemos por indução na dimensão do espaço uma sequência de subespaços

$$0 = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{n-1} = V/V_1$$

tal que $\bar{\rho}(x)W_i \subseteq W_i$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$. As pré-imagens destes subespaços pela aplicação quociente $V \rightarrow V/V_1$ formam então uma sequência de subespaços para V com as propriedades desejadas.

Em uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $v_i \in V_i$ para cada i , os operadores $\rho(x)$ são todos triangulares superiores. \square

Corolário 4.13. *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de dimensão finita.*

a) *Se $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, então $\rho(x)$ é um operador nilpotente.*

b) *Para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tem-se $\text{tr}(\rho(x)\rho(y)) = 0$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, existe uma base para V na qual todo operador $\rho(x)$ é representado por uma matriz triangular superior. Identificando $\mathfrak{gl}(V)$ com \mathfrak{gl}_n por meio desta base (para $n = \dim(V)$), isto significa que $\rho(x) \in \mathfrak{t}_n$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Daí,

$$\rho([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subseteq [\rho(\mathfrak{g}), \rho(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n] = \mathfrak{n}_n$$

(a última igualdade foi mostrada no exemplo 4.4). Isso mostra o item a), pois os elementos de \mathfrak{n}_n são matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal e portanto representam operadores nilpotentes de V .

Assim, se $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ então $\rho(x)$ é dado por uma matriz triangular superior e $\rho(y)$ por uma matriz estritamente triangular superior. O produto $\rho(x)\rho(y)$ deve ser dado então por uma matriz estritamente triangular superior, donde $\text{tr}(\rho(x)\rho(y)) = 0$, mostrando o item b). \square

Corolário 4.14. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então \mathfrak{g} é solúvel se, e somente se, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.*

Demonstração. Se \mathfrak{g} é solúvel, aplicando o resultado da proposição 4.12 à sua representação adjunta, concluímos que $\text{ad}(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de \mathfrak{t}_n para $n = \dim(\mathfrak{g})$. Logo, $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})]$ é uma subálgebra de $\mathfrak{n}_n = [\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n]$, e portanto é nilpotente. Segue então da proposição 3.10 que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.

A recíproca vale mais geralmente sem nenhuma hipótese sobre o corpo. Se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente, então é solúvel e daí, como $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{(k-1)}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, \mathfrak{g} é solúvel. \square

4.3 O Radical Solúvel

Proposição 4.15. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$ são ideais solúveis, então $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ também o é.*

Demonstração. Pelo teorema do isomorfismo,

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{\mathfrak{b}} \cong \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}.$$

Como \mathfrak{a} é solúvel, $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ também o é, pois é a imagem de \mathfrak{a} pelo morfismo quociente. Então $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ e \mathfrak{b} são solúveis e o resultado segue da proposição 4.7. \square

Corolário 4.16. *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então existe um único ideal solúvel $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}$ que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} .*

Demonstração. A unicidade de um tal ideal é óbvia: se \mathfrak{r}_1 e \mathfrak{r}_2 são ideais solúveis de \mathfrak{g} que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} , então em particular $\mathfrak{r}_1 \subseteq \mathfrak{r}_2$ e $\mathfrak{r}_2 \subseteq \mathfrak{r}_1$, donde $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$.

Quanto à existência, veja primeiro que \mathfrak{g} certamente possui ideais solúveis, pois o ideal trivial é solúvel. Então, como \mathfrak{g} tem dimensão finita, podemos tomar $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal solúvel de dimensão máxima. Daí, se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é qualquer ideal solúvel, então a proposição anterior implica que $\mathfrak{r} + \mathfrak{a}$ também o é. Como $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$, segue da maximalidade de \mathfrak{r} que $\mathfrak{r} + \mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, isto é, que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{r}$. Logo, \mathfrak{r} é um ideal solúvel de \mathfrak{g} que contém todos os ideais solúveis de \mathfrak{g} . \square

Este corolário nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 4.17. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. O maior ideal solúvel de \mathfrak{g} é chamado *radical* de \mathfrak{g} e denotado por $\text{rad}(\mathfrak{g})$.*

Obviamente, uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é solúvel se e somente se ela coincide com o seu radical, isto é, se $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. No extremo oposto, temos:

Proposição 4.18. *Para uma álgebra de Lie de dimensão finita \mathfrak{g} , são equivalentes:*

- (i) *O radical de \mathfrak{g} é nulo, isto é, $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$;*
- (ii) *O único ideal solúvel de \mathfrak{g} é 0;*

(iii) O único ideal abeliano de \mathfrak{g} é 0.

Demonstração. É claro que (i) \iff (ii) \implies (iii), pois todo ideal solúvel de \mathfrak{g} está contido no radical, que é solúvel, e todo ideal abeliano é solúvel.

Para ver que (ii) se segue de (iii), lembre primeiro que se \mathfrak{a} é um ideal de \mathfrak{g} então $\mathfrak{a}^{(1)} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ também o é. Daí, segue por indução que todos os termos na série derivada de \mathfrak{a} são ideais em \mathfrak{g} .

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{(0)} \supseteq \mathfrak{a}^{(1)} \supseteq \mathfrak{a}^{(2)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{a}^{(k)} \supseteq \dots$$

Se $\mathfrak{a} \neq 0$ e \mathfrak{a} é solúvel então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a}^{(n)} \neq 0$, mas $\mathfrak{a}^{(n+1)} = 0$. Neste caso, $\mathfrak{a}^{(n)}$ é um ideal abeliano de \mathfrak{g} , pois

$$[\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{a}^{(n)}] = \mathfrak{a}^{(n+1)} = 0.$$

Isso mostra, pela contrapositiva, que (iii) \implies (ii). \square

Definição 4.19. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensão finita é dita *semisimples* se satisfaz às condições equivalentes da proposição 4.18.

O centro de uma álgebra de Lie é um ideal abeliano. Assim, se \mathfrak{g} é semisimples então $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Como o centro é o núcleo da aplicação adjunta, resulta que a representação adjunta de uma álgebra de Lie semisimples é sempre fiel.

Proposição 4.20. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal solúvel. O quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie semisimples se, e somente se, $\mathfrak{a} = \text{rad}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Seja $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ o morfismo quociente e seja $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ um ideal solúvel. A pré-imagem $\pi^{-1}(\mathfrak{h})$ é um ideal de \mathfrak{g} que contém o radical $\text{rad}(\mathfrak{g})$, e além disso, vale que

$$\mathfrak{h} = \pi(\pi^{-1}(\mathfrak{h})) = \frac{\pi^{-1}(\mathfrak{h})}{\text{rad}(\mathfrak{g})}.$$

Como \mathfrak{h} e $\text{rad}(\mathfrak{g})$ são solúveis, segue que $\pi^{-1}(\mathfrak{h})$ é solúvel e portanto está contido no radical de \mathfrak{g} . Mas então $\mathfrak{h} = \pi^{-1}(\mathfrak{h})/\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Como \mathfrak{h} é um ideal solúvel arbitrário de $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$, segue que $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ é semisimples.

Suponha que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal de \mathfrak{g} tal que o quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie semisimples. Como $\text{rad}(\mathfrak{g})$ é solúvel, temos que $\pi(\text{rad}(\mathfrak{g}))$ é um ideal solúvel de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Mas $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é semisimples, e portanto isso só é possível se $\pi(\text{rad}(\mathfrak{g})) = 0$, isto é, se $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$. \square

A proposição acima dá a ideia de que, grosso modo, o problema de estudar uma álgebra de Lie de dimensão finita pode ser reduzido ao problema de estudar, separadamente, uma álgebra de Lie solúvel (o radical) e uma semisimples (o quociente $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$). Isso pode ser tornado ainda mais preciso: o *Teorema da Decomposição de Levi*, que não provaremos aqui, afirma que se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, então \mathfrak{g} possui uma subálgebra semisimples \mathfrak{s} que é isomorfa a $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ e complementar (como subespaço vetorial) ao radical $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

4.4 Os Critérios de Cartan

Nesta seção, apresentaremos os *critérios de Cartan* para solubilidade e semissimplicidade de uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica nula. Estes critérios expressam condições necessárias e suficientes para que uma álgebra de Lie seja solúvel ou semissimples em termos de formas bilineares definidas na álgebra.

4.4.1 Formas Traço

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre \mathbb{F} . Uma forma bilinear $\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ é dita *invariante se*

$$(4.3) \quad \beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]).$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Observação. Fazendo uso da aplicação adjunta $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ e da anticomutatividade do colchete, a equação (4.3) se reescreve como

$$\beta(\text{ad}(y)x, z) = -\beta(x, \text{ad}(y)z)$$

Portanto, uma forma bilinear β é invariante se, e somente se, $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{aut}(\mathfrak{g}, \beta)$ (veja a proposição 1.10).

Se (V, ρ) é uma representação de dimensão finita de \mathfrak{g} , então podemos definir uma forma bilinear $\beta_\rho: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$, chamada de *forma traço*, colocando

$$\beta_\rho(x, y) = \text{tr}(\rho(x)\rho(y))$$

para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$. Temos então:

Proposição 4.21. *A forma traço associada a uma representação de dimensão finita é simétrica e invariante.*

Demonstração. A forma β_ρ é simétrica pois o traço é simétrico. Isto é, para quaisquer operadores $X, Y: V \rightarrow V$ tem-se

$$\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX).$$

Para ver que é invariante, basta tomar $x, y, z \in \mathfrak{g}$ e calcular

$$\begin{aligned} \beta_\rho([x, y], z) &= \text{tr}(\rho([x, y])\rho(z)) \\ &= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\ &= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z)) - \text{tr}(\rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\ &= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z)) - \text{tr}(\rho(x)\rho(z)\rho(y)) \quad (*) \\ &= \text{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z) - \rho(x)\rho(z)\rho(y)) \\ &= \text{tr}(\rho(x)\rho([y, z])) \\ &= \beta_\rho(x, [y, z]), \end{aligned}$$

fazendo uso em (*) da igualdade $\text{tr}(\rho(y)\rho(x)\rho(z)) = \text{tr}(\rho(x)\rho(z)\rho(y))$, que decorre da simetria do traço aplicada aos operadores $\rho(y)$ e $\rho(x)\rho(z)$. \square

Um caso especialmente importante, que merece ser destacado em uma definição à parte, ocorre quando \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie de dimensão finita e $(V, \rho) = (\mathfrak{g}, \text{ad})$ é a sua representação adjunta:

Definição 4.22. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre \mathbb{F} . A *forma de Killing* de \mathfrak{g} é a forma bilinear $\kappa_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ dada por

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$$

para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$.

4.4.2 Critério para Solubilidade

Nesta subseção, \mathbb{F} denota um corpo algebricamente fechado de característica zero.

No corolário 4.13, vimos que se (V, ρ) é uma representação de uma álgebra de Lie solúvel \mathfrak{g} sobre \mathbb{F} então

$$\text{tr}(\rho(x)\rho(y)) = 0$$

para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Em outras palavras, a forma traço associada satisfaz $\beta_{\rho}(x, y) = 0$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Obviamente, a recíproca desta afirmação não é em geral verdadeira: se $\rho = 0$, por exemplo, então a forma traço associada a representação é trivial, mesmo que \mathfrak{g} não seja solúvel. O objetivo desta subseção é provar que a recíproca vale sempre que ρ é fiel ou é a representação adjunta de \mathfrak{g} . Estes resultados são conhecidos como o *critério de Cartan* para solubilidade, em homenagem ao matemático francês Élie Cartan.

Para a demonstração destes teoremas, precisaremos de alguns resultados básicos a respeito das decomposições de Jordan de operadores lineares. Mais precisamente, utilizaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em qualquer bom livro de álgebra linear:

Proposição 4.23. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} . Dado um operador linear $A \in \mathfrak{gl}(V)$, existem únicos $A_s, A_n \in \mathfrak{gl}(V)$ tais que:*

- a) $A = A_s + A_n$;
- b) A_s é diagonalizável;
- c) A_n é nilpotente;
- d) $[A_s, A_n] = 0$.

Além disso, existem polinômios $p(t), q(t) \in \mathbb{F}[t]$ sem termo constante satisfazendo $p(A) = A_s$ e $q(A) = A_n$. \square

Observação. Se $A: V \rightarrow V$ é um operador linear e $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ é um polinômio com coeficientes $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, então escrevemos $p(A)$ para denotar o operador $V \rightarrow V$ dado por

$$(4.4) \quad p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i.$$

Dizemos ainda que tal operador é um polinômio em A .

A decomposição $A = A_s + A_n$ é chamada *decomposição de Jordan-Chevalley* do operador A , e os operadores A_s e A_n são, respectivamente, as partes semissimples¹ e nilpotente de A . Por serem polinômios em A , eles comutam com todo operador que comuta com A . Além disso, como estes polinômios não tem termo constante, A_s e A_n são combinações lineares de potências positivas de A . Daí, se

$$U \subseteq W \subseteq V$$

são subespaços tais que $AW \subseteq U$, então $A_s W \subseteq U$ e $A_n W \subseteq U$.

No lema 3.13, vimos que se $A: V \rightarrow V$ é um operador nilpotente, então o mesmo vale para $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. O lema a seguir complementa este resultado:

Lema 4.24. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} , $A \in \mathfrak{gl}(V)$ um operador linear. Se A é diagonalizável, então $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ também o é.*

Demonstração. Tome uma base (e_1, \dots, e_n) para V relativa a qual a matriz de A é diagonal:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Relativamente a essa base, sejam $E_{ij}: V \rightarrow V$ os operadores correspondentes as matrizes da base canônica de \mathfrak{gl}_n ; isto é, dados por $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$. Veja então que, para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, vale

$$\begin{aligned} (\text{ad}(A)E_{ij})e_k &= [A, E_{ij}]e_k = AE_{ij}e_k - E_{ij}Ae_k \\ &= A(\delta_{jk}e_i) - E_{ij}(\alpha_k e_k) \\ (4.5) \qquad &= \alpha_i \delta_{jk} e_i - \alpha_k \delta_{jk} e_i \\ &= (\alpha_i - \alpha_j) \delta_{jk} e_i \\ &= ((\alpha_i - \alpha_j)E_{ij})e_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$. Portanto $\text{ad}(A)E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)E_{ij}$ para todos i, j , e então $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é diagonal com respeito a base $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$. \square

Corolário 4.25. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} e $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Se $A = A_s + A_n$ é a decomposição de Jordan de A , então $\text{ad}(A) = \text{ad}(A_s) + \text{ad}(A_n)$ é a decomposição de Jordan de $\text{ad}(A): \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.*

Demonstração. Como ad é linear, é óbvio que $\text{ad}(A) = \text{ad}(A_s) + \text{ad}(A_n)$. Além disso, $\text{ad}(A_s)$ é diagonalizável e $\text{ad}(A_n)$ é nilpotente, pois A_s e A_n o são. Por fim, como ad é um morfismo de álgebras de Lie, temos

$$[\text{ad}(A_s), \text{ad}(A_n)] = \text{ad}([A_s, A_n]) = \text{ad}(0) = 0. \quad \square$$

¹Um operador linear A é dito ser *semissimples* se todo subespaço invariante por A admite complementar invariante. Sobre corpos algebricamente fechados, A é semissimples se e somente se é diagonalizável.

O critério de Cartan para solubilidade se seguirá do seguinte lema técnico:

Lema 4.26. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ subespaços vetoriais de $\mathfrak{gl}(V)$. Defina*

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid \text{ad}(X)\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\} \subseteq \mathfrak{gl}(V).$$

Se $A \in \mathfrak{h}$ satisfaz $\text{tr}(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, então A é nilpotente.

Demonstração. Seja $A = A_s + A_n$ a decomposição de Jordan de A e fixe uma base (e_1, \dots, e_n) para V relativa a qual a matriz de A_s é diagonal:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Queremos mostrar que $A_s = 0$, ou seja, que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como \mathbb{F} tem característica zero, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$ e podemos considerar o \mathbb{Q} -subespaço vetorial $U \subseteq \mathbb{F}$ gerado pelos elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. O problema então equivale a mostrar que $U = 0$ ou, ainda, que $U^* = 0$.

Iremos então mostrar que todo funcional linear $f: U \rightarrow \mathbb{Q}$ é nulo. Para isso, tome $f \in U^*$ um tal funcional e considere o operador linear $X: V \rightarrow V$ cuja matriz na base fixada é

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Suponha que tenhamos $X \in \mathfrak{h}$ (mostraremos em um instante que isso de fato ocorre). Então, por hipótese,

$$0 = \text{tr}(AX) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\alpha_i).$$

Aplicando f a esta igualdade, obtemos $\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)^2 = 0$. Como cada $f(\alpha_i)$ é um número racional, decorre que $f(\alpha_i) = 0$ para todo i . Mas os α_i são uma base para U , e portanto devemos ter $f = 0$.

Resta mostrar que $X \in \mathfrak{h}$; isto é, que $\text{ad}(X)\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Faremos isso mostrando que $\text{ad}(X)$ é um polinômio sem termo constante em $\text{ad}(A)$. Para isso, seja $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ a base de $\mathfrak{gl}(V)$ dada por $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$ e lembre que, pela equação (4.5), temos

$$\text{ad}(A_s)E_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j)E_{ij}, \quad \text{ad}(X)E_{ij} = (f(\alpha_i) - f(\alpha_j))E_{ij}$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por meio da interpolação de Lagrange, podemos tomar um polinômio $r(t) \in \mathbb{F}[t]$ tal que $r(\alpha_i - \alpha_j) = f(\alpha_i) - f(\alpha_j)$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Note que não há ambigüidade nos valores atribuídos,

pois f é linear: $\alpha_i - \alpha_j = \alpha_k - \alpha_l \implies f(\alpha_i) - f(\alpha_j) = f(\alpha_k) - f(\alpha_l)$. Além disso, r não tem termo constante, pois $i = j$ dá $r(0) = 0$. Daí,

$$r(\text{ad}(A_s))E_{ij} = r(\alpha_i - \alpha_j)E_{ij} = (f(\alpha_i) - f(\alpha_j))E_{ij} = \text{ad}(X)E_{ij}$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e portanto $r(\text{ad}(A_s)) = \text{ad}(X)$. Como $\text{ad}(A_s)$ é a parte semissimples de $\text{ad}(A)$ (vide corolário 4.25), existe um polinômio $p(t) \in \mathbb{F}[t]$ sem termo constante tal que $p(\text{ad}(A)) = \text{ad}(A_s)$. Logo, $(r \circ p)(t)$ não tem termo constante e $\text{ad}(X) = (r \circ p)(\text{ad}(A))$.

Isto significa que $\text{ad}(X)$ é uma combinação linear de potências positivas de $\text{ad}(A)$. Mas $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ e $\text{ad}(A)\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ (pois, por hipótese, $A \in \mathfrak{h}$). Logo, devemos ter $\text{ad}(X)\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, e portanto $X \in \mathfrak{h}$. \square

Teorema 4.27. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{F} e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra de Lie. Se $\text{tr}(XY) = 0$ para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, então \mathfrak{g} é solúvel.*

Demonstração. Pelo corolário 4.14, para mostrar que \mathfrak{g} é solúvel, basta mostrar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente. Pelo Teorema de Engel, isto equivale a mostrar que $\text{ad}(A): [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente para todo $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Portanto, é suficiente provar que todo $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente (pois daí $\text{ad}(A)$ também o é).

Fixe $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Vamos mostrar que A é nilpotente fazendo uso do último lema. Para isso, veja que se $\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}$ naquele enunciado, então

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Logo, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$ e, para concluir do lema que A é nilpotente, precisamos mostrar que $\text{tr}(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Escrevendo

$$A = \sum_{i=1}^m [B_i, C_i].$$

para alguns $B_i, C_i \in \mathfrak{g}$ (isto é possível pois $A \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$), temos que

$$\begin{aligned} \text{tr}(AX) &= \text{tr}\left(\sum_{i=1}^m [B_i, C_i]X\right) = \sum_{i=1}^m \text{tr}([B_i, C_i]X) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr}(B_i[C_i, X]) \end{aligned}$$

(No último passo, utilizamos a invariância da forma traço associada a representação canônica de $\mathfrak{gl}(V)$ em V). Quando $X \in \mathfrak{h}$, a definição de \mathfrak{h} implica que $[C_i, X] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Daí, a hipótese do teorema nos dá $\text{tr}(B_i[C_i, X]) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, de modo que $\text{tr}(AX) = 0$. \square

Corolário 4.28. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie sobre \mathbb{F} e (V, ρ) uma representação fiel de dimensão finita. Se a forma traço associada satisfaz $\beta_\rho(x, y) = 0$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, então \mathfrak{g} é solúvel.*

Demonstração. Nas hipóteses do corolário, $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ satisfaz as hipóteses do teorema anterior, e portanto é solúvel. Como a representação é fiel, temos $\mathfrak{g} \cong \rho(\mathfrak{g})$, e daí \mathfrak{g} é solúvel. \square

Corolário 4.29. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre \mathbb{F} . Se a forma de Killing de \mathfrak{g} satisfaz $\kappa(x, y) = 0$ para quaisquer $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, então \mathfrak{g} é solúvel.*

Demonstração. Nas hipóteses deste corolário, se $X \in \text{ad}(\mathfrak{g})$ e $Y \in [\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})]$ então

$$\text{tr}(XY) = 0.$$

Daí, pelo teorema 4.27, tem-se $\text{ad}(\mathfrak{g})$ solúvel. Mas

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \frac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})},$$

de modo que \mathfrak{g} possui um ideal solúvel pelo qual o quociente também é solúvel. Logo, \mathfrak{g} é solúvel. \square

4.4.3 Critério para Semissimplicidade

Nesta subseção, \mathbb{F} denota um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Com o critério para solubilidade em mãos, podemos obter uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra de Lie de dimensão finita seja semissimples em termos da sua forma de Killing. Mais precisamente, veremos nesta subseção que, sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, \mathfrak{g} é semissimples se e somente se a sua forma de Killing é não degenerada.

Começamos com a seguinte observação: de maneira geral, se $\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ é uma forma bilinear simétrica (por exemplo, uma forma traço), então podemos falar de ortogonalidade em \mathfrak{g} com respeito a esta forma. Mais precisamente, dado um subconjunto $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, definimos o subespaço ortogonal

$$\mathfrak{a}^\perp = \{z \in \mathfrak{g} \mid \beta(a, z) = 0 \text{ para todo } a \in \mathfrak{a}\}$$

Em particular, temos que β é não degenerada se e somente se $\mathfrak{g}^\perp = 0$.

Lema 4.30. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ uma forma bilinear simétrica e invariante definida em \mathfrak{g} . Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal, então o seu subespaço ortogonal é também um ideal. Além disso, se β é não degenerada então $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ é abeliano.*

Demonstração. Queremos mostrar que, se $x \in \mathfrak{g}$ e $z \in \mathfrak{a}^\perp$, então $[x, z] \in \mathfrak{a}^\perp$, isto é, que $\beta(a, [x, z]) = 0$ para todo $a \in \mathfrak{a}$. Mas, como β é invariante, temos

$$\beta(a, [x, z]) = \beta([a, x], z).$$

Mas $z \in \mathfrak{a}^\perp$ e $[a, x] \in \mathfrak{a}$, pois \mathfrak{a} é um ideal. Portanto, o lado direito da igualdade acima é zero, completando a demonstração de que \mathfrak{a}^\perp é um ideal.

Suponha agora que β é não degenerada e considere o ideal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Veja que $\beta|_{\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}} = 0$. Daí, se $b, b' \in \mathfrak{b}$ e $x \in \mathfrak{g}$, então

$$\beta([b, b'], x) = \beta(b, [b', x]) = 0$$

pois, já que \mathfrak{b} é um ideal, $[b', x] \in \mathfrak{b}$. Como isso vale para todo $x \in \mathfrak{g}$ e β é não degenerada, devemos ter $[b, b'] = 0$. Logo, \mathfrak{b} é um ideal abeliano. \square

Lema 4.31. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ um ideal. Se κ e $\kappa_{\mathfrak{a}}$ denotam, respectivamente, as formas de Killing de \mathfrak{g} e \mathfrak{a} , então $\kappa_{\mathfrak{a}} = \kappa|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$.*

Demonstração. Dado $x \in \mathfrak{a}$, denote por $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ e $\text{ad}_{\mathfrak{a}}(x)$ a ação adjunta de x em \mathfrak{g} e em \mathfrak{a} , respectivamente. Queremos mostrar que, para quaisquer $x, y \in \mathfrak{a}$,

$$\text{tr}_{\mathfrak{a}}(\text{ad}_{\mathfrak{a}}(x) \text{ad}_{\mathfrak{a}}(y)) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(y))$$

Para isso, veja que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(y) \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$, pois \mathfrak{a} é um ideal. Daí, tomando uma base para \mathfrak{a} e estendendo a uma base de \mathfrak{g} , a matriz de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \text{ad}_{\mathfrak{g}}(y)$ é dada por blocos na forma

$$\begin{pmatrix} \text{ad}_{\mathfrak{a}}(x) \text{ad}_{\mathfrak{a}}(y) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É então imediato que vale a igualdade desejada. \square

Teorema 4.32. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre \mathbb{F} . Então \mathfrak{g} é semissimples se, e somente se, a sua forma de Killing κ é não degenerada.*

Demonstração. Seja

$$\mathfrak{g}^{\perp} = \{z \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, z) = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$$

subespaço ortogonal a \mathfrak{g} . Como a forma de Killing é invariante, segue do lema 4.30 que \mathfrak{g}^{\perp} é um ideal de \mathfrak{g} . Denote por $\kappa_{\mathfrak{g}^{\perp}}$ a forma de Killing deste ideal. Pelo lema 4.31, temos

$$\kappa_{\mathfrak{g}^{\perp}}(x, y) = \kappa(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}^{\perp}$. Mas $\kappa(x, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}^{\perp}$ (pela definição de \mathfrak{g}^{\perp}) e então \mathfrak{g}^{\perp} é solúvel pelo critério obtido na subseção anterior (corolário 4.29). Assim, se \mathfrak{g} é semissimples, então $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$ e κ é não degenerada.

Reciprocamente, suponha que κ é não degenerada. Dado um ideal abeliano $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, tome $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$ e considere a aplicação $\text{ad}(x) \text{ad}(y): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Para qualquer $z \in \mathfrak{g}$, tem-se

$$\begin{aligned} (\text{ad}(x) \text{ad}(y))^2 z &= [x, [y, [x, [y, z]]]] \in [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}}]]]] \\ &\subseteq [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]] \\ &\subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0, \end{aligned}$$

de modo que $\text{ad}(x) \text{ad}(y)$ é nilpotente. Em particular, $\text{ad}(x) \text{ad}(y)$ tem traço nulo e portanto $\kappa(x, y) = 0$. Como $x \in \mathfrak{a}$ e $y \in \mathfrak{g}$ foram arbitrários, segue disso que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^{\perp}$. Mas $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$, pois κ é não degenerada. Logo, o único ideal abeliano de \mathfrak{g} é $\mathfrak{a} = 0$, e portanto \mathfrak{g} é semissimples. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Jacques Dixmier. *Enveloping Algebras*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1996.
- [2] Karin Erdmann e Mark J. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. 1ª ed. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2006.
- [3] Brian C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*. 2ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2015.
- [4] Joachim Hilgert e Karl-Hermann Neeb. *Structure and Geometry of Lie Groups*. 1ª ed. Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [5] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. 1ª ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1972.
- [6] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. 1ª ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Inc., 1979.
- [7] Victor Kac. *MIT Mathematics 18.745, Lecture Notes: Introduction To Lie Algebras*. (Notas de Aula). Disponível em: <http://math.mit.edu/classes/18.745/classnotes.html>. 2010.
- [8] Anthony W. Knap. *Lie Groups Beyond an Introduction*. 2ª ed. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2002.
- [9] James S. Milne. *Lie Algebras, Algebraic Groups, and Lie Groups*. Disponível em www.jmilne.org/math/. 2013.
- [10] Luiz A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. 2ª ed. Editora da Unicamp, 2010.