Carlos Eduardo Caldeira

Álgebras de Banach e Teorema de Gelfand

Florianópolis, Santa Catarina.

2019

Carlos Eduardo Caldeira

Álgebras de Banach e Teorema de Gelfand

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis, Santa Catarina.

2019

Carlos Eduardo Caldeira

Álgebras de Banach e Teorema de Gelfand

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Prof. Dr. Danilo Royer
Orientador

Prof. Dr. Luciano Bedin

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto

Florianópolis, Santa Catarina.
2019

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha mãe, Manoela, por todo o amor, dedicação, compreensão e todos os sacrifícios que você fez por mim. Você é meu exemplo. Também gostaria de agradecer ao Ilson e a Raphaela.

À minha namorada Helena, pelo amor, compreensão e por estar tão presente na minha vida.

Ao professor Pinho e a todos que conheci no PET.

Aos meus amigos, colegas de curso e todos que me ajudaram de alguma forma durante a graduação. Ao Mateus e a Ana, que sempre que possível me emprestavam seus cadernos e tiravam as minhas dúvidas.

Ao meu orientador Danilo, pela dedicação, paciência e toda a motivação de estudar matemática que você passou a mim. Aos professores Luciano e Paulo por fazerem parte deste trabalho.

Bebê dãdã, bebê gato e bebê auau.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho acadêmico é apresentar e demonstrar o Teorema de Gelfand, um importante resultado em C^*-álgebra.

Para isso, primeiramente é apresentado um estudo de álgebras de Banach, no qual obtivemos resultados importantes como o Teorema de Gelfand-Mazur e o Teorema de Beurling. Por último, exploramos as álgebras de Banach abelianas. No capítulo final, nós apresentamos C^*-álgebras e é demonstrado o teorema principal, que garante que toda C^*-álgebra abeliana A é isometricamente isomorfa a $C_0(X)$, de forma que X está relacionado a A.

Palavras-chave: Teorema de Gelfand. C^*-álgebra. Álgebras de Banach.

Abstract

The main goal of this academic work is to present and to prove the Gelfand Theorem, an important result in C^*-algebra.

For that, initially it is presented a study of Banach algebras, in which we obtained important results such as the Gelfand-Mazur Theorem and the Beurling Theorem. Finally, we explore abelian Banach algebras. In the final chapter, we present C^*-algebras and it is proved the main theorem, that guarantees that every abelian C^*-algebra A is isometric isomorphic to $C_0(X)$, in a way that X is related to A.

Keywords: Gelfand Theorem. C^*-algebra. Banach Algebras.

Sumário

1 Introdução

O conteúdo deste trabalho acadêmico gira em torno de estruturas conhecidas como álgebras. Inicialmente, nosso estudo é realizado em álgebras de Banach unitais (muitos resultados são generalizados para álgebras de Banach não unitais, por um processo chamado de unitização), onde obtivemos resultados importantes. Posteriormente, o nosso objeto de estudo são as álgebras de Banach abelianas e as C^*-álgebras. Neste processo de enriquecimento da estrutura, são abordados vários conceitos que se mostram poderosos aliados no desenvolvimento da nossa teoria, como o de espectro, raio espectral e elemento autoadjunto.

No capítulo 1, a primeira seção é dedicada a apresentação de exemplos de álgebras, em particular álgebras de Banach, muitas destas desempenharão um papel central no decorrer do trabalho. Na seção 2, é definido o conceito de ideal e construímos a álgebra quociente, outro exemplo importante de álgebra. Na seção 3, é construída a unitização de uma álgebra, este processo será de fundamental importância, já que vamos generalizar muitos resultados de álgebras de Banach unitais para álgebras de Banach não unitais nos capítulos seguintes. Na seção 4, mostramos que todo ideal modular próprio está contido em um ideal maximal. Tal resultado será utilizado posteriormente.

No capítulo 2, é introduzido o conceito de espectro, e então são provados resultados importantes, como o espectro de um elemento de uma álgebra (complexa) de Banach unital é não vazio e o Teorema de Gelfand-Mazur.

No capítulo 3, definimos o conceito de raio espectral e então provamos o teorema de Beurling. Também definimos o conjunto $\Omega(A)$, que terá fundamental importância nos capítulos seguintes.

No capítulo 4, mostramos alguns resultados sobre álgebras de Banach abelianas, o qual se destaca uma relação entre o espectro de um elemento e o conjunto $\Omega(A)$. Além disso, também equipamos o conjunto $\Omega(A)$ com a topologia fraca estrela e provamos um importante teorema que será utilizado no capítulo final.

No último capítulo, na seção 1 introduzimos as C^*-álgebras. Veremos que tais estruturas são muito ricas, possuindo muitas propriedades. Na seção 2 é construído a unitização de uma C^*-álgebra, com o mesmo intuito do capítulo 1. Por último, demonstramos o teorema principal do trabalho, que garante que toda C^*-álgebra abeliana A é isometricamente isomorfa a $C_0(\Omega(A))$.

Para a leitura do texto é necessário um bom conhecimento em Análise Funcional (Espaços de Banach e Hilbert, Operadores Lineares Limitados, e alguns teoremas clássicos de tal área), Topologia, Álgebra Linear, Álgebra, e também um pouco de Análise Complexa. Para entender alguns exemplos é necessário Teoria da Medida. As referências mais utilizadas são (MURPHY, 1990) e (KREYSZIG, 1978), com o primeiro utilizado no estudo de álgebras e o segundo no estudo de ánalise funcional.

2 Álgebras

Neste primeiro capítulo do trabalho, são apresentados definições e exemplos de álgebras, em particular as álgebras de Banach. Além disso, iremos desenvolver alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

2.1 Álgebras e Álgebras de Banach

Essa seção é iniciada com algumas definições necessárias ao estudo de álgebras, como também alguns exemplos.

Definição 2.1.1. *Uma álgebra A, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com uma operação bilinear (multiplicação),*

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto ab$$

tal que

$$(ab)c = a(bc),$$

para $a, b, c \in A$. Além disso, se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$, dizemos que A é uma álgebra abeliana.

Definição 2.1.2. *Seja A uma álgebra. Dizemos que uma norma $\| \ \|$ é submultiplicativa se para quaisquer $a, b \in A$, temos $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.*

No caso de a norma $\| \ \|$ ser submultiplicativa então o par $(A, \| \ \|)$ é dito ser uma álgebra normada. Além disso, se a álgebra normada $(A, \| \ \|)$ é um espaço de Banach, dizemos ser uma álgebra de Banach.

Definição 2.1.3. *Seja A uma álgebra normada. Dizemos que A é uma álgebra unital se existe $1_A \in A$ (unidade), tal que para qualquer $a \in A$ temos*

$$1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a,$$

e satisfaz $\|1_A\| = 1$. Se A for uma álgebra de Banach então diremos ser uma álgebra de Banach unital.

Em seguida vamos apresentar exemplos de tais definições. Para isso, vamos definir um conjunto que nos será importante.

Definição 2.1.4. *Seja S um conjunto e V um espaço normado. Dizemos que uma função $f : S \longrightarrow V$ é limitada se existe $M > 0$ tal que para todo $x \in S$, $\|f(x)\| < M$.*

Em particular, o conjunto das funções limitadas $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ é denotado por $l^\infty(S)$.

Observação 2.1.5. *Dados f e $g \in l^\infty(S)$, existem $N, M > 0$ tais que para qualquer $x \in S$, $|f(x)| < M$ e $|g(x)| < N$. Dessa forma, para todo $x \in S$, $|f(x) \cdot g(x)| < M \cdot N$.*

Exemplo 2.1.6. *Considere o espaço $l^\infty(S)$. Defina operações para $f, g \in l^\infty(S)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \tag{2.1}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \tag{2.2}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \tag{2.3}$$

Defina a norma por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$. Sabemos que $l^\infty(S)$ é um espaço vetorial normado com as operações (2.1) *e* (2.2)*.*

Vamos mostrar que $l^\infty(S)$ é uma álgebra. Sejam f e $g \in l^\infty(S)$. Pela observação anterior $f \cdot g \in l^\infty(S)$. Além disso, como $\mathbb{C}$ é um corpo segue que a multiplicação (2.3) *é bilinear e associativa.*

Além disso, $\| \ \|_\infty$ é uma norma submultiplicativa. Sejam f e $g \in l^\infty(S)$. Perceba que $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$, para todo $x \in X$. Logo $\|f \cdot g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

A função

$$1_S : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto 1$$

é limitada, e $\|1_S\|_\infty = 1$. Além disso, para todo $f \in l^\infty(S)$ temos

$$f \cdot 1_S = 1_S \cdot f = f.$$

Logo $l^\infty(S)$ é uma álgebra normada unital.

Agora vamos mostrar que $l^\infty(S)$ é um espaço de Banach. Seja uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset l^\infty(S)$ de Cauchy. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para $n, m \geqslant N$,

$$\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in S$. Note então que a sequência $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ é de Cauchy, pois existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geqslant n_0$,

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon.$$

Como $\mathbb{C}$ é completo, a sequência $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, isto é, existe $y_{x_0} \in \mathbb{C}$, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = y_{x_0}$. Logo, defina a função $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$, por $x \mapsto y_x$. Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Fixe $\varepsilon > 0$ e $x \in S$. Tome n_0 tal que para $n, m \geqslant n_0$,

$$\|f_m - f_n\| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Além disso, tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m > k_0$,

$$|f_m(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Então para $m, n \geqslant n_0$ e $m \geqslant k_0$ temos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leqslant \|f_n - f_m\|_\infty + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue então que para $n \geqslant n_0$, $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Note ainda que $f \in l^\infty(S)$. De fato, tome n_0 tal que $\|f_{n_0} - f\|_\infty < 1$. Logo, para todo $x \in S$ temos

$$|f(x)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty.$$

Portanto f é limitada.

Das afirmações anteriores concluímos que $l^\infty(S)$ é uma álgebra de Banach unital.

Lema 2.1.7. *Seja (X, Ω, μ) um espaço de medida e f uma função essencialmente limitada em (X, Ω, μ). Então existe $N \in \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$ e para todo $x \in N^c, |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.*

Demonstração. Como $\|f\|_\infty = \inf\{\sup\{|f(x)| : x \in P^c\} : P \in \Omega,\ \mu(P) = 0\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \Omega$, com $\mu(M_n) = 0$ tal que

$$sup\{|f(x)| : x \in M_n^c\} \leqslant \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}.$$

Tome $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Observe então que $\mu(M) = 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sup\{|f(x)| : x \in M^c\} \leqslant \|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}.$$

Logo,

$$\sup\{|f(x)| : x \in M^c\} \leqslant \|f\|_\infty.$$

Dessa forma, para todo $x \in M^c$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$. □

Exemplo 2.1.8. *Seja (X, Ω, μ) um espaço de medida. Então $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é uma álgebra de Banach unital com a operação de multiplicação definida por*

$$\overline{f} \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g}.$$

Note que tal operação esta bem definida. De fato, sejam $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$. Logo existem N e $P \in \Omega$ tais que $\mu(N) = 0 = \mu(P)$ e para quaisquer $x \in N^c$ e $y \in P^c$, temos $f(x) = f_1(x)$ e $g(x) = g_1(x)$. Observe então que $\mu(N \cup P) = 0$ e que para todo $x \in N^c \cap P^c$, $(fg)(x) = (f_1 g_1)(x)$. Segue que $fg \sim f_1 g_1$.

Agora vamos mostrar que a norma $\| \ \|_\infty$ é submultiplicativa. Sejam $\overline{f}$ e $\overline{g} \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$. Pelo Lema 2.1.7 existe $N \in \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$ e que para todo $x \in N^c$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$. Da mesma forma, existe $P \in \Omega$ tal que $\mu(P) = 0$ e que para todo $x \in P^c$, $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$. Portanto $\mu(N \cup P) = 0$, e para todo $x \in N^c \cap P^c$ temos

$$|(fg)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \tag{2.4}$$

Relembre que $\|f\|_\infty = \inf\{\ \sup\{|f(x)| : x \in M^c\} : M \in \Omega,\ \mu(M) = 0\}$. Então por (2.4), $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Além disso, para $\overline{1} \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, satisfaz para todo $\overline{f} \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$,

$$\overline{1} \cdot \overline{f} = \overline{1 \cdot f} = \overline{f} = \overline{f \cdot 1} = \overline{f} \cdot \overline{1}.$$

Assim, como $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é um espaço de Banach, concluímos que $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é uma álgebra de Banach unital.

Note que os dois exemplos anteriores são álgebras abelianas.

Exemplo 2.1.9. *Seja X um espaço de Banach. Então o espaço $B(X)$ (transformações lineares limitadas de X em X) é uma álgebra de Banach unital com a operação definida por*

$$(T \cdot S)(x) = (T \circ S)(x).$$

De fato, seja $x \neq 0$. Temos $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leqslant \|T\|$. Disto segue que $\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|$. Perceba que a desigualdade anterior também é valida para $x = 0$.

Assim, $\|T(S(x))\| \leqslant \|T\|\|S(x)\| \leqslant \|T\|\|S\|\|x\|$. Concluímos que $\|T \cdot S\| \leqslant \|T\|\|S\|$. Como X é Banach então $B(X)$ é um espaço de Banach. Além disso, o operador

$$id_X : X \longrightarrow X, \quad x \mapsto x,$$

satisfaz $T \cdot id_X = T = id_X \cdot T$ e $\|id_X\| = 1$. Portanto $B(X)$ álgebra de Banach unital.

Considere o espaço $B(\mathbb{C}^2)$. Sejam os operadores $T(x, y) = (x, 2y)$ e $S(x, y) = (y, x)$. Note que

$$(T \circ S)(x, y) = (y, 2x) \text{ e } (S \circ T)(x, y) = (2y, x),$$

Como $T \cdot S \neq S \cdot T$, então $B(\mathbb{C}^2)$ não é uma álgebra abeliana. Em geral a álgebra $B(X)$ não é abeliana.

Definição 2.1.10. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial B de A é uma subálgebra de A se para quaisquer $b, b' \in B$, temos $bb' \in B$.*

Exemplo 2.1.11. *Seja X um espaço topológico e $C_b(X)$ o espaço das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ limitadas e contínuas.*

Vamos mostrar que $C_b(X)$ é uma subálgebra de $l^\infty(X)$. De fato, para f e $g \in C_b(X)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos $f + g$ e $\lambda f \in C_b(X)$, pois a soma e a multiplicação por escalar de funções contínuas é contínua. Logo , $C_b(X)$

é um subespaço vetorial de $l^\infty(X)$. Da mesma forma, $f \cdot g \in C_b(X)$, pois $f \cdot g$ é contínua.

Além disso, $C_b(X)$ é uma álgebra normada unital. A função

$$1_X : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto 1$$

é contínua, logo $C_b(X)$ é uma álgebra normada unital.

Vamos mostrar que $C_b(X)$ é fechado em $l^\infty(X)$. Seja $f \in \overline{C_b(X)}$, então existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b(X)$ tal que $f_n \longrightarrow f$.

Fixe $\varepsilon > 0$ e $y \in X$. Vamos mostrar que f é contínua em y. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Como f_{n_0} é continua, existe um aberto $U_y \subset X$, que contém y e que para todo $x \in U_y$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, para todo $x \in U_y$ temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leqslant \|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + \|f_{n_0} - f\|_\infty < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto f é contínua. Como $l^\infty(X)$ é um espaço de Banach então $C_b(X)$ é um espaço de Banach.

Pelas afirmações anteriores temos que $C_b(X)$ é uma álgebra de Banach unital.

No caso de X ser um compacto então

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é contínua}\} = C_b(X),$$

pois toda função contínua em um compacto é limitada.

A seguir daremos um exemplo de uma álgebra que não é uma álgebra normada.

Exemplo 2.1.12. *Considere a álgebra $C([0,1])$ com a norma definida por*

$$\|f\| = \int_0^1 f(x)dx, \qquad (f \in C([0,1])).$$

Note por exemplo que $\|x^2\| = \int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$. Por outro lado, $\|x\| = \int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$. Assim,

$$\|x^2\| = \frac{1}{3} \nleqslant \frac{1}{4} = \|x\|\|x\|.$$

Portanto tal norma não é submultiplicativa.

Definição 2.1.13. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Dizemos que uma função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ se anula no infinito se para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é um compacto. O conjunto das funções que se anulam no infinito definidas em X é denotado por $C_0(X)$.*

Lema 2.1.14. *Considere o espaço $C_0(X)$. Então $f \in C_0(X)$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset X$ tal que para todo $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Fixe $\varepsilon > 0$. Como $f \in C_0(X)$ então $K = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é um compacto e para $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Fixe $\varepsilon > 0$. Queremos mostar que o conjunto $|f|^{-1}([\varepsilon, +\infty))$ é um compacto. Por hipótese existe um compacto $K \subset X$ tal que para todo $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$. Como f é continua, $|f|$ é continua. Assim $C = |f|^{-1}([\varepsilon, +\infty))$ é fechado.

Vamos mostrar que $C \subset K$. Seja $x \in C$. Assim, $|f(x)| \in [\varepsilon, +\infty)$, isto é, $|f(x)| \geqslant \varepsilon$, portanto $x \in K$. Como K é compacto e C é fechado então C é compacto.

$\square$

Note que $C_0(X) \subset C_b(X)$. De fato, seja $f \in C_0(X)$. Então existe um compacto $K \subset X$ tal que para $x \in K^c$, $|f(x)| < 1$. Seja $W = f(K) \cup [0,1]$, então $Im(f) \subset W$. Como W é compacto segue que o conjunto $Im(f)$ é limitado. Portanto f é limitada e pertence a $C_b(X)$.

Exemplo 2.1.15. *O espaço $C_0(X)$ é uma subálgebra de Banach de $C_b(X)$.*
Vamos mostrar $C_0(X)$ é uma subálgebra de $C_b(X)$. Fixe $\varepsilon > 0$. Sejam f e $g \in C_0(X)$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. Dessa forma existem compactos $K_f, K_g \subset X$ tais que para quaisquer $x \in K_f^c$ e $y \in K_g^c$ temos

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad |g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para $z \in K_f^c \cap K_g^c$ temos

$$|f(z) + g(z)| \leqslant |f(z)| + |g(z)| < \varepsilon.$$

Como $(K_f^c \cap K_g^c)^c = K_f \cup K_g$ é compacto, pelo Lema 2.1.14 segue que $f + g \in C_0(X)$. Da mesma forma, existe $K_{\lambda f} \subset X$ compacto, tal que para qualquer $x \in K_{\lambda f}^c$ temos

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Assim, para $x \in K_{\lambda f}^c$ segue que

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| < \frac{\varepsilon|\lambda|}{|\lambda| + 1} < \varepsilon.$$

Portanto pelo Lema 2.1.14, $\lambda f \in C_0(X)$. Vamos mostar agora que $fg \in C_0(X)$. Tome $K_1, K_2 \subset X$ compactos, tais que para quaisquer $x \in K_1^c$ e $y \in K_2^c$ satisfazem

$$|f(x)| < \sqrt{\varepsilon} \quad e \quad |g(y)| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Segue que para $z \in K_1^c \cap K_2^c$ temos

$$|f(z)g(z)| = |f(z)||g(z)| < \varepsilon.$$

Como $(K_1^c \cap K_2^c)^c = K_1 \cup K_2$ é compacto então pelo Lema 2.1.14, $fg \in C_0(X)$. Então $C_0(X)$ é uma subálgebra de $C_b(X)$.

Para mostrar que $C_0(X)$ é Banach, vamos mostrar que $C_0(X)$ é fechado em $C_b(X)$. Seja $f \in \overline{C_0(X)}$. Portanto existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0(X)$ tal que $f_n \longrightarrow f$. Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $f_{n_0} \in C_0(X)$, então existe um compacto $K \subset X$, tal que para $x \in K^c$ temos

$$|f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $x \in K^c$,

$$|f(x)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x)| < \varepsilon.$$

Concluímos que $f \in C_0(X)$.

Como $C_b(X)$ é Banach então $C_0(X)$ é uma subálgebra de Banach.

Exemplo 2.1.16. *Considere o espaço $X = (0, 1]$ e o conjunto*

$$M = \{f \mid f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é contínua e } \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\}.$$

Observe que X é um espaço Hausdorff localmente compacto. Vamos determinar a álgebra $C_0(X)$. Vamos mostrar $C_0(X) = M$. ($\subset$) Seja $g \in C_0(X)$. Suponha por absurdo que $g \notin M$. Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in (0, 1/n)$ tal que $|g(y_n)| \geqslant \varepsilon$. Como $g \in C_0(X)$ então o conjunto $K = \{x \in X \mid |g(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é compacto, em particular K é fechado. Observe que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Como $y_n \longrightarrow 0$ e por K ser fechado segue que $0 \in K$. Porém $K \subset (0, 1]$. Logo, $g \in M$.

($\supset$) Seja $f \in M$. Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $\delta > 0$ tal que se $x \in (0, \delta)$, então $|f(x)| < \varepsilon$. Logo, como $[\delta, 1]$ é compacto e para $x \in (0, \delta)$, $|f(x)| < \varepsilon$, pelo Lema 2.1.14, $f \in C_0(X)$.

A seguir daremos um exemplo de uma álgebra em que a unidade não tem norma 1.

Exemplo 2.1.17. *Seja $(A, \|\ \|)$ uma álgebra de Banach unital. Defina a norma $\|a\|_1 = 2\|a\|$, para $a \in A$. Então, $(A, \|\ \|_1)$ é uma álgebra de Banach, porém não é unital. Note primeiro que $\|\ \|_1$ que é uma norma submultiplicativa. Sejam a e $b \in A$. Então,*

$$\|ab\|_1 = 2\|ab\| \leqslant 2\|a\|\|b\| \leqslant \frac{\|a\|_1\|b\|_1}{2} \leqslant \|a\|_1\|b\|_1.$$

Portanto $\|\ \|_1$ é submultiplicativa. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ uma sequência de Cauchy em $(A, \|\ \|_1)$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para *quaisquer $n, m \geqslant n_0$,*

$$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon.$$

Note então que para $n, m \geqslant n_0$,

$$\|x_n - x_m\| = \frac{2\|x_n - x_m\|}{2} = \frac{\|x_n - x_m\|_1}{2} \leqslant \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon.$$

Logo,$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(A, \| \;\|)$. Como $(A, \| \;\|)$ é um espaço de Banach, existe $x \in A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ com a norma $\| \;\|$. Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow x$ com a norma $\| \;\|_1$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant N$,

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para $n \geqslant N$,

$$\|x_n - x\|_1 = 2\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Segue que $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon$, para $n \geqslant N$. Portanto $x_n \longrightarrow x$ com a norma $\| \;\|_1$. Portanto $(A, \| \;\|_1)$ é Banach. Observe porém que $\|1\|_1 = 2\|1\| = 2$.

Proposição 2.1.18. *Seja A uma álgebra normada. Então a operação multiplicação $(a, b) \mapsto ab$ é contínua.*

Demonstração. Sejam sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tais que $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$. Observe que,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|ab - a_n b_n\| &= \|ab - a_n b + a_n b - a_n b_n\| \\ &\leqslant \|ab - a_n b\| + \|a_n b - a_n b_n\| \\ &\leqslant \|a - a_n\|\|b\| + \|a_n\|\|b - b_n\|. \end{aligned}$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, e

$$\|a - a_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|b - b_n\| \longrightarrow 0,$$

segue que $\|a_n b_n - ab\| \longrightarrow 0$. Portanto $a_n b_n \longrightarrow ab$. $\square$

Proposição 2.1.19. *O fecho de uma subálgebra B de A é uma subálgebra de A.*

Demonstração. Primeiro note que o fecho de B é um subespaço vetorial de A. De fato, dados $a, b \in \overline{B}$, existem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$. Assim, $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $a_n + b_n \longrightarrow a + b$. Logo $a + b \in \overline{B}$. Da mesma forma para $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\lambda a_n \longrightarrow \lambda a$. Portanto $\lambda a \in \overline{B}$.

Além disso, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ e pela proposição anterior $a_n b_n \longrightarrow ab$. Portanto $ab \in \overline{B}$. □

Proposição 2.1.20. *Sejam A uma álgebra e $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ uma família de subálgebras de A. Então $\cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ é uma subálgebra de A.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Primeiro vamos mostrar que $\cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ é um subespaço vetorial de A. Então para todo $\lambda \in I$, $x, y \in A_\lambda$. Como A_λ é subespaço vetorial, temos $\alpha x + y \in A_\lambda$, para todo $\lambda \in I$. Portanto $\alpha x + y \in \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$.

Vamos mostar agora que $xy \in \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$. Como $x, y \in \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$ então para todo $\lambda \in I$, $x, y \in A_\lambda$. Como A_λ é uma álgebra, temos $xy \in A_\lambda$, para todo $\lambda \in I$. Portanto $xy \in \cap_{\lambda\in I} A_\lambda$. □

2.2 Ideais e Álgebras Quocientes

A seguir, vamos apresentar a noção de ideal e construir a álgebra quociente, que além de ser um exemplo interessante de álgebra, nos próximos capítulos, nos fornecerá um resultado importante.

Definição 2.2.1. *Seja A uma álgebra. Dizemos que uma subálgebra I é um ideal de A se para quaisquer $a \in A$ e $b \in I$, $ab, ba \in I$.*

Exemplo 2.2.2. *Considere o espaço $C_0(X)$ e $w \in X$. Seja $I = \{f \in C_0(X) : f(w) = 0\}$. Note que I é um ideal de $C_0(X)$.*

De fato, sejam $f, g \in I$, $h \in C_0(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então λf, $f + g$ e $fg \in I$, já que $(\lambda f)(w) = 0$, $(f + g)(w) = 0$ e $(fg)(w) = 0$. Portanto I é subálgebra de $C_0(X)$. Além disso, $(hf)(w) = 0$, segue que $hf \in I$. Como $C_0(X)$ é uma álgebra abeliana então $fh \in I$. Logo I é ideal de $C_0(X)$.

Proposição 2.2.3. *O fecho de um ideal B de A é um ideal de A.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.19, sabemos que o fecho de B é uma subálgebra. Seja $b \in \overline{B}$. Então existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tal que $b_n \longrightarrow b$. Assim, como B é ideal, para todo $a \in A$, $(a \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$. Logo, pela Proposição 2.1.18, $a \cdot b_n \longrightarrow ab$. Dessa forma, $ab \in \overline{B}$ para todo $a \in A$. □

Exemplo 2.2.4. *Seja A uma álgebra e I um ideal de A. Defina a relação de equivalência em A por*

$$a \sim b \quad \textit{se e somente se} \quad a - b \in I.$$

Denotaremos o conjunto das classes de equivalência $\overline{a} = \{b \in A \mid b \sim a\}$ para $a \in A$ por A/I. Defina as operações para $\overline{a}, \overline{c} \in A/I$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ por

$$\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{ac} \tag{2.5}$$

$$\overline{a} + \overline{c} = \overline{a + c} \tag{2.6}$$

$$\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a} \tag{2.7}$$

Então A/I é uma álgebra com as operações já definidas. Primeiro vamos mostrar que tais operações estão bem definidas. Sejam $a \sim a_1$ e $c \sim c_1$. Então para (2.5) veja que

$$ac - a_1c_1 = ac - ac_1 + ac_1 - a_1c_1 = a(c - c_1) + (a - a_1)c_1.$$

Como $c - c_1$ e $a - a_1 \in I$ e I é ideal, segue que $ac - a_1c_1 \in I$. Portanto $ac \sim a_1c_1$.

Para (2.6) temos

$$(a + c) - (a_1 + c_1) = (a - a_1) + (c - c_1) \in I.$$

Logo $(a + c) \sim (a_1 + c_1)$. Da mesma forma $\lambda a \sim \lambda a_1$ pois $a - a_1 \in I$.

Como A é uma álgebra então segue que A/I com as operações definidas é uma álgebra.

Segue também que se A é álgebra abeliana, então A/I é uma álgebra abeliana.

Proposição 2.2.5. *Se I é um ideal fechado em uma álgebra normada A, então A/I é uma álgebra normada com a norma quociente definida por*

$$\|\overline{a}\| = inf\{\|a + b\| \mid b \in I\}.$$

Demonstração. Como $\|x\| \geqslant 0$ para $x \in A$, então para todo $a \in A$, $inf\{\|a+b\| \mid b \in I\} \geqslant 0$. Vamos mostrar que tal função está bem definida. Assim, sejam $a \sim a_1$. Note que para todo $b \in I$ temos

$$\|a+c\| \leqslant \|a_1+b\|,$$

onde $c = (a_1 - a + b) \in I$. Como $\|\overline{a}\| = inf\{\|a+b\| \mid b \in I\} \leqslant \|a+c\|$, então $\|\overline{a}\| \leqslant \|a_1+b\|$ para todo $b \in I$. Portanto $\|\overline{a}\| \leqslant inf\{\|a_1+b\| \mid b \in I\} = \|\overline{a_1}\|$. De modo análogo temos $\|\overline{a_1}\| \leqslant \|\overline{a}\|$. Assim $\|\overline{a}\| = \|\overline{a_1}\|$.

Note agora que tal função é uma norma em A/I.

1. $\|\overline{a}\| = 0$ se e somente se $\overline{a} = 0$.
   Se $\|\overline{a}\| = 0$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in I$ tal que

   $$0 \leqslant \|a+b_n\| < \frac{1}{n}.$$

   Então $\|a+b_n\| \longrightarrow 0$. Segue que $a + b_n \longrightarrow 0$. Portanto $b_n \longrightarrow -a$. Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ então $-a \in \overline{I}$, além disso I é fechado, portanto $-a \in I$. Dessa forma $a \in I$, e $\overline{a} = 0$. Por outro lado se $a \in I$ então

   $$0 \leqslant inf\{\|a+b\| \mid b \in I\} \leqslant \|a+(-a)\| = 0.$$

   Logo $\|\overline{a}\| = 0$.

2. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in A$ temos $\|\lambda\overline{a}\| = |\lambda|\|\overline{a}\|$. De fato, observe que para $\lambda = 0$ a igualdade segue. Seja $\lambda \neq 0$. Então, para todo $c \in I$, temos

   $$\|\lambda\overline{a}\| = inf\{\|\lambda a+b\| \mid b \in I\} \leqslant \|\lambda a+\lambda c\| \leqslant |\lambda|\|a+c\|.$$

   Então,

   $$\|\lambda\overline{a}\| \leqslant inf\{|\lambda|\|a+c\| \mid c \in I\} = |\lambda| inf\{\|a+c\| \mid c \in I\} = |\lambda|\|\overline{a}\|.$$

   Por outro lado, para todo $c \in I$, temos

   $$|\lambda|\|\overline{a}\| = |\lambda| inf\{\|a+b\| \mid b \in I\} \leqslant |\lambda|\|a+\lambda^{-1}c\| = \|\lambda a+c\|.$$

   Logo, $|\lambda|\|\overline{a}\| \leqslant inf\{\|\lambda a+c\| \mid c \in I\} = \|\lambda\overline{a}\|$. Portanto, $\|\lambda\overline{a}\| = |\lambda|\|\overline{a}\|$.

3. Para quaisquer $a, b \in A$ temos $\|\overline{a}\| + \|\overline{b}\| \geqslant \|\overline{a} + \overline{b}\|$. De fato, para quaisquer $c, c_1 \in I$, temos

$$\|a + c_1\| + \|b + c\| \geqslant \|a + b + d\|,$$

onde $d = (c + c_1) \in I$. Logo, como $\|a + b + d\| \geqslant \|\overline{a} + \overline{b}\|$, então

$$\|a + c_1\| + \|b + c\| \geqslant \|\overline{a} + \overline{b}\|.$$

Tomando o ínfimo sobre $c_1 \in I$ temos

$$\|\overline{a}\| + \|b + c\| \geqslant \|\overline{a} + \overline{b}\|.$$

E tomando o ínfimo sobre $c \in I$ segue que

$$\|\overline{a}\| + \|\overline{b}\| \geqslant \|\overline{a} + \overline{b}\|.$$

Agora vamos provar que a norma quociente é submultiplicativa. Fixe $\varepsilon > 0$ e sejam $a, c \in A$. Portanto, existem $a', c' \in I$ tal que

$$(\varepsilon + \|\overline{a}\|)(\varepsilon + \|\overline{c}\|) \geqslant \|a + a'\|\|c + c'\| \geqslant \|ac + b\|,$$

onde $b = a'c + ac' + a'c'$. Como $\|ac + b\| \geqslant \|\overline{ac}\|$ segue que

$$(\varepsilon + \|\overline{a}\|)(\varepsilon + \|\overline{c}\|) \geqslant \|\overline{ac}\|.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos

$$\|\overline{a}\|\|\overline{c}\| \geqslant \|\overline{ac}\|.$$

$\square$

Teorema 2.2.6. *Um espaço X é Banach se e somente se para toda série $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ convergente, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente em X.*

O teorema acima pode ser visto em (KREYSZIG, 1978).

Proposição 2.2.7. *Sejam A uma álgebra de Banach e um ideal fechado $I \subset A$. Então A/I é uma álgebra de Banach com a norma quociente. Além disso, se A é unital, então A/I é unital.*

Demonstração. Pela proposição anterior temos A/I é uma álgebra normada. Vamos mostrar que A/I é um espaço de Banach. Assim seja $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A/I$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\overline{a}_n\| < \infty$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in I$ tal que

$$\|a_n + y_n\| < \|\overline{a_n}\| + \frac{1}{2^n}.$$

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n + y_n\| < \infty$. Como A é Banach, pelo Teorema 2.2.6, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + y_n$ converge em A. Digamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + y_n$ converge para $x \in A$. Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geqslant n_0$,

$$\|\sum_{n=0}^{N}(a_n + y_n) - x\| < \varepsilon.$$

Assim, para $N \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} - \overline{x}\| &= inf\{\|\sum_{n=0}^{N} a_n - x + b\| \mid b \in I\} \leqslant \|\sum_{n=0}^{N} a_n - x + \sum_{n=0}^{N} y_n\| \\ &\leqslant \|\sum_{n=0}^{N}(a_n + y_n) - x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}$ converge em A/I.

Agora vamos mostrar que se A é unital então A/I é unital. Para todo $a \in A$,

$$\overline{a}\overline{1} = \overline{a1} = \overline{a}.$$

Da mesma forma, $\overline{1}\overline{a} = \overline{a}$. Temos também que

$$\|\overline{1}\| = inf\{\|1 + b\| \mid b \in I\} \leqslant \|1 + 0\| = \|1\| = 1.$$

Por outro lado,

$$\|\overline{1}\| = \|\overline{1}\overline{1}\| \leqslant \|\overline{1}\|\|\overline{1}\|.$$

Segue que $0 \leqslant \|\overline{1}\|(\|\overline{1}\| - 1)$, logo $\|\overline{1}\| \geqslant 1$. Assim, $\|\overline{1}\| = 1$ e A/I é unital. $\square$

2.3 Unitização de Álgebras

Nesta seção mostraremos que toda álgebra de Banach pode ser incluída em uma álgebra de Banach unital.

Considere uma álgebra normada A. Defina no espaço $\tilde{A} = \mathbb{C} \oplus A$ para $\alpha \in \mathbb{C}$ as operações

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, a) + (\lambda_2, b) &= (\lambda_1 + \lambda_2, a + b) && (2.8)\\
\alpha(\lambda_1, a) &= (\alpha\lambda_1, \alpha a) && (2.9)\\
(\lambda_1, a)(\lambda_2, b) &= (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 b + \lambda_2 a + ab) && (2.10)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar $\tilde{A}$ é uma álgebra normada unital com as operações anteriores e com a norma definida por

$$\|(\lambda, a)\| = |\lambda| + \|a\|.$$

Para $(\lambda_1, a), (\lambda_2, b)$ e $(\lambda_3, c) \in \tilde{A}$ temos

$$(\lambda_1, a)((\lambda_2, b)(\lambda_3, c)) = (\lambda_1, a)(\lambda_2\lambda_3, \lambda_2 c + \lambda_3 b + bc)$$

$$= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \lambda_1\lambda_2 c + \lambda_1\lambda_3 b + \lambda_1 bc + \lambda_2\lambda_3 a + \lambda_2 ac + \lambda_3 ab + abc)$$
$$= (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 b + \lambda_2 a + ab)(\lambda_3, c) = ((\lambda_1, a)(\lambda_2, b))(\lambda_3, c).$$

Portanto a multiplicação é associativa. Vamos mostrar a bilinearidade.

$$((\lambda_1, a) + (\lambda_2, b))(\lambda_3, c)) = (\lambda_1 + \lambda_2, a + b)(\lambda_3, c)$$

$$= ((\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3, \lambda_3(a + b) + (\lambda_1 + \lambda_2)c + (a + b)c) =$$

$$(\lambda_1\lambda_3, \lambda_3 a + \lambda_1 c + ac) + (\lambda_2\lambda_3, \lambda_3 b + \lambda_2 c + bc) = (\lambda_1, a)(\lambda_3, c) + (\lambda_2, b)(\lambda_3, c).$$

Da mesma forma, podemos mostrar

$$(\lambda_3, c)((\lambda_1, a) + (\lambda_2, b)) = (\lambda_3, c)(\lambda_1, a) + (\lambda_3, c)(\lambda_2, b).$$

A norma satisfaz

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_1, a)(\lambda_2, b)\| &= \|(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 b + \lambda_2 a + ab)\| = |\lambda_1\lambda_2| + \|\lambda_1 b + \lambda_2 a + ab\|\\
&\leqslant |\lambda_1||\lambda_2| + |\lambda_1|\|b\| + |\lambda_2|\|a\| + \|ab\|.
\end{aligned}$$

Como A é uma álgebra normada, então

$$|\lambda_1||\lambda_2| + |\lambda_1|\|b\| + |\lambda_2|\|a\| + \|ab\| \leqslant |\lambda_1||\lambda_2| + |\lambda_1|\|b\| + |\lambda_2|\|a\| + \|a\|\|b\|.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\|(\lambda_1, a)(\lambda_2, b)\| &\leqslant |\lambda_1||\lambda_2| + |\lambda_1|\|b\| + |\lambda_2|\|a\| + \|a\|\|b\| \\ &= (|\lambda_1| + \|a\|)(|\lambda_2| + \|b\|) = \|(\lambda_1, a)\|\|(\lambda_2, b)\|.\end{aligned}$$

Portanto $\tilde{A}$ é uma álgebra normada. Vejamos que $\tilde{A}$ é unital. Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in A$ temos

$$(\lambda, a)(1, 0) = (\lambda, a) = (1, 0)(\lambda, a).$$

Também $\|(1, 0)\| = |1| + \|0\| = 1$. Então $\tilde{A}$ é uma álgebra normada unital.

Além disso, se A é uma álgebra de Banach, então $\tilde{A}$ é um álgebra de Banach. De fato, seja $((\lambda_n, a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{A}$ uma sequência de Cauchy. Logo para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > n_0$,

$$|\lambda_n - \lambda_m| + \|a_n - a_m\| = \|(\lambda_n - \lambda_m, a_n - a_m)\| = \|(\lambda_n, a_n) - (\lambda_m, a_m)\| < \varepsilon.$$

Logo, as sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{C}$ e em A respectivamente. Como tais espaços são completos, então existem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in A$ tais que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ e $a_n \longrightarrow a$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Tome $N, M \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n \geqslant N$ temos

$$\|a_n - a\| < \varepsilon/2,$$

e para todo $n \geqslant M$ temos

$$|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/2.$$

Logo, para todo $n \geqslant max\{N, M\}$ temos

$$\|(\lambda_n, a_n) - (\lambda, a)\| = \|(\lambda_n - \lambda, a_n - a)\| = |\lambda_n - \lambda| + \|a_n - a\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto $(\lambda_n, a_n) \longrightarrow (\lambda, a)$.

Também se A é uma álgebra abeliana, então $\tilde{A}$ é um álgebra abeliana. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $a, b \in A$. Como A é uma álgebra abeliana então $ab = ba$. Dessa forma,

$$(\lambda_1, a)(\lambda_2, b) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 b + \lambda_2 a + ab) = (\lambda_2\lambda_1, \lambda_1 b + \lambda_2 a + ba) = (\lambda_2, b)(\lambda_1, a).$$

Veja que para $a \in A$, $\|(0,a)\| = |0| + \|a\| = \|a\|$. Portanto a função $A \ni a \mapsto (0,a) \in \tilde{A}$ é uma inclusão em uma álgebra de Banach unital.

A álgebra $\tilde{A}$ é chamada de unitização de A. Em muitos casos utilizaremos a unitização de uma álgebra não unital para generalizar resultados que são válidos para álgebras unitais.

2.4 Ideais Maximais

A seguir vamos apresentar as noções de ideal maximal e ideal modular. Vamos mostrar que todo ideal modular próprio está contido em um ideal maximal. Tal resultado e definições expostas serão utilizadas posteriormente.

Definição 2.4.1. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um ideal B é um ideal modular se existe $u \in A$, tal que para todo $a \in A$, $a - au$ e $a - ua \in B$.*

Definição 2.4.2. *Seja X um espaço topológico e $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que o conjunto*

$$\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

é o suporte de f.

Denotamos o conjunto das funções contínuas com suporte compacto por $C_c(X)$. Observe que no caso de X ser um espaço Hausdorff localmente compacto temos $C_c(X) \subset C_0(X)$. De fato, para $f \in C_c(X)$ para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$K = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Como o suporte de f é compacto e K é fechado segue que K é compacto. Logo $f \in C_0(X)$.

Teorema 2.4.3 (Lema de Urysohn)**.** *Suponha que X é um espaço Hausdorff localmente compacto, V aberto em X e $K \subset V$ compacto. Então existe uma função $f \in C_c(X)$, tal que $Im(f) \subset [0,1]$, $f(x) = 1$ para $x \in K$, e o suporte de f está contindo em V.*

Tal teorema pode ser visto em (RUDIN, 1987).

Exemplo 2.4.4. *Considere o ideal do Exemplo 2.2.2. Vamos mostrar que tal ideal é modular. De fato, Como X é localmente compacto existe um aberto U e um compacto K tal que $w \in U \subset K$. Além disso, por X ser Hausdorff localmente compacto existe um aberto V tal que $\overline{V} \subset U$ e $w \in V$. Note que $\overline{V} \subset K$. Como K é compacto então $\overline{V}$ é compacto*

Aplicando o Lema de Urysohn, existe $f \in C_c(X)$, tal que $Im(f) \subset [0,1]$, $f(x) = 1$ para $x \in \overline{V}$, e o suporte de f está contido em U. Como $C_c(X) \subset C_0(X)$, então $f \in C_0(X)$, além disso pela nossa construção de f, temos $f(w) = 1$. Seja $g \in C_0(X)$. Assim, $(g - fg)(w) = g(w) - f(w)g(w) = g(w) - g(w) = 0$. Da mesma forma $(g - gf)(w) = 0$. Segue que para $g - gf$ e $g - fg \in I = \{f \in C_0(X) : f(w) = 0\}$.

Definição 2.4.5. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um ideal B de A é próprio se $B \neq A$.*

Definição 2.4.6. *Seja A uma álgebra. Dizemos que um ideal B de A é maximal se é próprio e se para todo ideal C de A tal que $B \subset C$ então $C = B$ ou $C = A$.*

Teorema 2.4.7 (Lema de Zorn)**.** *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado com a propriedade que cada subconjunto totalmente ordenado admite uma cota superior. Então X contém um elemento maximal.*

Lema 2.4.8. *Seja A um álgebra. Todo ideal modular próprio $W \subset A$ está contido em um ideal maximal.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$M = \{I \subset A : I \text{ é ideal próprio e } W \subset I\}$$

com a relação de ordem dada por $I_1 \leqslant I_2$ se e somente se $I_1 \subset I_2$. Como $W \in M$, então $M \neq \emptyset$. Considere um subconjunto V de M totalmente ordenado.

Vamos mostrar que $\cup_{I \in V}$ é um ideal de A. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$, e $a_1, a_2 \in \cup_{I \in V} I$ e $a \in A$. Dessa forma, existem $I_1, I_2 \in V$ tais que $a_1 \in I_1$ e $a_2 \in I_2$. Como V é um conjunto totalmente ordenado, então $I_1 \leqslant I_2$ ou $I_2 \leqslant I_1$.

Suponha que $I_1 \leqslant I_2$. Portanto $I_1 \subset I_2$, logo $a_1, a_2 \in I_2$. Como I_2 é um ideal, então $\lambda a_1 + a_2 \in I_2$, segue que $\lambda a_1 + a_2 \in \cup_{I \in V}$. Da mesma forma $a_1 a_2 \in I_2$ e $aa_1, a_1 a \in I_2$ e assim $a_1 a_2, aa_1$ e $a_1 a \in \cup_{I \in V}$. Logo, $\cup_{I \in V}$ é um ideal de A.

Vamos mostrar que $\cup_{I \in V} I$ é próprio. Observe que se um ideal $J \supset W$, então J também é um ideal modular. De fato, como W é ideal modular, então existe $u \in A$, tal que para todo $a \in A$, $a - ua, a - au \in W \subset J$. Além disso, $u \notin J$, para todo $J \in M$. Suponha que $u \in J$, então para todo $r \in A$, $r = (r - ur) + (ur) \in J$, pois $r - ur \in J$, já que J é modular e $ur \in J$, pois J é ideal. Logo, $J = A$, contrariando o fato de J ser um ideal modular próprio. Então $u \notin J$, para todo $J \in M$. Assim, $u \notin \cup_{I \in V} I$, e segue que $\cup_{I \in V} I$ é próprio e portanto pertence a M.

Como $\cup_{I \in V} I$ é uma cota superior para V então pelo Lema de Zorn, temos que existe um elemento maximal L em M. Vamos mostrar que L é um ideal maximal que contém W. Como $L \in M$, então L é um ideal que contém W. Falta mostar a maximalidade. Suponha que L não é um ideal maximal, logo existe um ideal K tal que

$$L \subsetneq K \subsetneq A.$$

Logo, $K \in M$, $L \leqslant K$ e $K \neq L$, dessa forma L não é um elemento maximal em M. Portanto L é um ideal maximal que contém W. $\square$

3 Espectro

Neste capítulo vamos apresentar a noção de espectro de uma álgebra. Tal noção será uma ferramenta muito útil para o estudo de álgebras de Banach. Por final, será demonstrado o Teorema de Gelfand-Mazur.

Definição 3.0.1. *Seja A uma álgebra unital. Dizemos que $a \in A$ é inversível se existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, além disso diremos que b é inverso de a. Denotamos o conjunto dos elementos inversíveis de A por $Inv(A)$.*

Observação 3.0.2. *Seja $a \in Inv(A)$. Suponha que x e $y \in A$ são inversos de a. Logo,*

$$x = x1 = x(ay) = (xa)y = 1y = y.$$

Então o inverso de a é único. Dada a unicidade do inverso, denotaremos o inverso de $a \in Inv(A)$, por a^{-1}. Pela unicidade do inverso temos $(a^{-1})^{-1} = a$.

Observação 3.0.3. *Se x e $y \in Inv(A)$, então $xy \in Inv(A)$, já que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. De fato,*

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = (x1)x^{-1} = xx^{-1} = 1,$$
$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = (y^{-1}1)y = y^{-1}y = 1.$$

Observação 3.0.4. *Se a, b e $c \in A$ tais que $ac = 1$ e $cb = 1$. Então,*

$$a = a1 = a(cb) = (ac)b = 1b = b.$$

Segue que $c \in Inv(A)$.

Observação 3.0.5. *Observe que se $a \in Inv(A)$, então para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda a \in Inv(A)$, já que $(\lambda a)(\lambda^{-1}a^{-1}) = (\lambda\lambda^{-1})(aa^{-1}) = 1 = (\lambda^{-1}\lambda)(a^{-1}a) = (\lambda^{-1}a^{-1})(\lambda a)$.*

Definição 3.0.6. *Seja A uma álgebra unital e $a \in A$. O espectro de $a \in A$ é o conjunto*

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}.$$

Exemplo 3.0.7. *Seja Ω um espaço Hausdorff compacto e considere $A = C(\Omega)$. Então $\sigma(f) = f(\Omega)$, para $f \in A$. Primeiro vamos mostrar que $\sigma(f) \subset f(\Omega)$.*

Seja $\lambda \in \sigma(f)$. Logo, $\lambda 1 - f \notin Inv(A)$. Suponha por absurdo que $\lambda \notin f(\Omega)$. Portanto $(\lambda 1 - f)(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Assim a função $g(x) = \frac{1}{(\lambda 1 - f)(x)}$ está bem definida e é contínua. Observe então que para todo $x \in \Omega$,

$$(\lambda 1 - f)(x)g(x) = 1.$$

Segue que $(\lambda 1 - f)^{-1} = g$. Porém isto é um absurdo, pois $\lambda \in \sigma(f)$.

Por outro lado, seja $\lambda \in f(\Omega)$. Suponha por absurdo que $\lambda \notin \sigma(f)$, dessa forma existe $g \in A$ tal que $(\lambda 1 - f)g = 1$. Logo, para $x_0 \in f^{-1}(\lambda)$, $((\lambda 1 - f)g)(x_0) = 1$. Porém $(\lambda 1 - f)(x_0) = 0$, o que contraria $((\lambda 1 - f)g)(x_0) = 1$.

Exemplo 3.0.8. *Considere $A = l^\infty(S)$. Então $\sigma(f) = \overline{f(S)}$, para $f \in A$.*

Primeiro vamos mostrar que $\sigma(f) \subset \overline{f(S)}$. Seja $\lambda \in \sigma(f)$. Suponha por absurdo que $\lambda \notin \overline{f(S)}$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(\lambda) \cap f(S) = \emptyset$. Portanto, para todo $x \in S$,

$$|\lambda - f(x)| \geqslant r > 0.$$

Assim, para todo $x \in S$,

$$0 < \frac{1}{|\lambda - f(x)|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Segue que a função $\dfrac{1}{\lambda 1 - f}$ é limitada, e que tal função é o inverso de $\lambda 1 - f$, o que é um absurdo. Portanto, $\lambda \in \overline{f(S)}$.

Seja $\lambda \in \overline{f(S)}$. Suponha por absurdo que $\lambda \notin \sigma(f)$. Logo, $\lambda 1 - f \in Inv(A)$. Assim, existe $g \in l^\infty(S)$ tal que $(\lambda 1 - f)g = 1$. Como g é limitada, existe $M > 0$, tal que para todo $x \in S$, $|g(x)| \leqslant M$. Então para todo $x \in S$, $0 < \dfrac{1}{M} \leqslant |\lambda - f(x)|$. O que é absurdo. Portanto, $\lambda \in \sigma(f)$.

Exemplo 3.0.9. *A álgebra $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas de dimensão n pode ser identificada com a álgebra $B(\mathbb{C}^n)$ do Exemplo 2.1.9, isto é, tais* *matrizes são transformações lineares limitadas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$. As matrizes triangulares superiores são uma subálgebra de $M_n(\mathbb{C})$. Para $a \in A$ da forma*

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix},$$

temos $\sigma(a) = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn}\}$. Similarmente para $A = M_n(\mathbb{C})$ e $a \in M_n(\mathbb{C})$, então $\sigma(a)$ é o conjunto de autovalores de a.

Apesar de definirmos uma álgebra como um espaço vetorial sobre os complexos com uma operação de multiplicação, poderíamos definir de modo análogo uma álgebra sobre o corpo dos reais. Observe que até aqui todas as definições e exemplos poderiam ser vistos sobre os reais, no entanto, alguns dos teoremas futuros não são válidos sobre os reais.

Lema 3.0.10. *Sejam A uma álgebra unital e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ tal que $a_i a_j = a_j a_i$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se $x = a_1 a_2 \dots a_n \in Inv(A)$ então $a_i \in Inv(A)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Demonstração. Como $x \in Inv(a)$, existe $c \in A$ tal que $xc = 1$ e $cx = 1$. Fixe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então

$$1 = xc = a_1 a_2 \dots a_n c = a_i(a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n c), \tag{3.1}$$

$$1 = cx = c a_1 a_2 \dots a_n = (c a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n) a_i. \tag{3.2}$$

Da Observação 3.0.4, temos $a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n c = c a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$, e portanto $a_i \in Inv(A)$. □

Lema 3.0.11. *Sejam A uma álgebra unital e $p \in \mathbb{C}[z]$ (anel dos polinômios com coeficientes complexos) não constante. Para $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, com*

$$p(a) - \lambda 1_A = \alpha(a - \lambda_1 1_A) ... (a - \lambda_n 1_A),$$

$p(a) - \lambda 1_A \in Inv(A)$ se e somente se $(a - \lambda_i 1_A) \in Inv(A)$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Segue da Observação 3.0.3.

($\Rightarrow$) Para quaisquer $i, j \in \{1, ..., n\}$, temos $(a - \lambda_i 1_A)(a - \lambda_j 1_A) = (a - \lambda_j 1_A)(a - \lambda_i 1_A)$. Como $p(a) - \lambda 1_A = \alpha(a - \lambda_1 1_A)...(a - \lambda_n 1_A)$ segue pelo Lema 3.0.10 segue que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $(a - \lambda_i 1_A) \in Inv(A)$. $\square$

Note que da contrapositiva do lema anterior temos que $p(a) - \lambda 1_A \notin Inv(A)$ se e somente se existe $i \in \{1, ..., n\}$, tal que $(a - \lambda_i 1_A) \notin Inv(A)$.

Teorema 3.0.12 (Teorema do Mapeamento Espectral)**.** *Seja a um elemento de uma álgebra unital A. Se $\sigma(a)$ é não vazio e $p \in \mathbb{C}[z]$, então*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Demonstração. Considere o polinômio constante $p = \lambda_0$. Então $p(\sigma(a)) = \{\lambda_0\}$. Como $(\lambda - \lambda_0)1 \notin Inv(A)$, se e somente se, $\lambda - \lambda_0 = 0$, então $\sigma(p(a)) = \sigma(\lambda_0 1) = \lambda_0$. Logo, $p(\sigma(a)) = \{\lambda_0\} = \sigma(p(a))$.

Suponha agora p é não constante. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $p - \lambda = \alpha(z - \lambda_1)...(z - \lambda_n)$ e portanto

$$p(a) - \lambda 1_A = \alpha(a - \lambda_1 1_A)...(a - \lambda_n 1_A). \tag{3.3}$$

Observe que $\xi \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, se e somente se $p(\xi) = \lambda$. Da contrapositiva do Lema 3.0.11 em (3.3) temos que $\lambda \in \sigma(p(a))$ se e somente se existe $k \in \{1, ..., n\}$, tal que $\lambda_k \in \sigma(a)$. Dessa forma, $\lambda \in \sigma(p(a))$ se e somente se existe $k \in \{1, ..., n\}$, tal que $\lambda_k \in \sigma(a)$ e $p(\lambda_k) = \lambda$, isto é, $\lambda \in \sigma(p(a))$ se e somente se $\lambda \in p(\sigma(a))$. $\square$

Exemplo 3.0.13. *Seja o polinômio $p = z^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Então para $a \in A$, tal que $\sigma(a) \neq \emptyset$, se $\lambda \in \sigma(a)$ então $\lambda^n \in p(\sigma(a))$. Pelo teorema anterior, $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$, logo $\lambda^n \in p(\sigma(a)) = \sigma(p(a))$, isto é, $\lambda^n \in \sigma(p(a)) = \sigma(a^n)$.*

Proposição 3.0.14. *Seja A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$. Então*

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Demonstração. Como A é uma álgebra normada então $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = (1-\|a\|)^{-1}$. Dessa forma $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|$ é convergente. Pelo Teorema 2.2.6, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é convergente.

Além disso note que $(1-a)\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 - a^{n+1} = (\sum_{i=0}^{n} a^i)(1-a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|a\| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ $\lim_{n\to\infty} 1 - a^n = 1$. Pela Proposição 2.1.18 segue que

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a^n)(1-a) = (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i)(\lim_{n\to\infty} 1-a) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=0}^{n} a^i)(1-a) = 1.$$

Da mesma forma mostramos que $(1-a)(\sum_{n=0}^{\infty} a^n) = 1$. □

Definição 3.0.15. *Sejam A e B espaços de Banach. Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ é dita diferenciável em $a \in A$, se existe um operador linear limitado $T : A \longrightarrow B$, tal que*

$$\lim_{c\to 0} \frac{\|f(a+c) - f(a) - T(c)\|}{\|c\|} = 0.$$

Proposição 3.0.16. *Seja A uma álgebra normada unital. O conjunto $Inv(A)$ é aberto em A e a aplicação*

$$\Phi : Inv(A) \longrightarrow A \qquad a \mapsto a^{-1}$$

é diferenciável.

Demonstração. Seja $a \in Inv(A)$. Tome $b \in A$ tal que $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Assim, $\|1 - ba^{-1}\| = \|ba^{-1} - 1\| \leqslant \|b-a\|\|a^{-1}\| < 1$. Pela Proposição 3.0.14 ba^{-1} é inversível. Como $a \in Inv(A)$, então pela Observação 3.0.3, $b \in Inv(A)$.

Vamos mostrar agora que a aplicação é diferenciável. Seja $b \in A$ com $\|b\| < 1$. Então $1 - (-b) \in Inv(A)$ e pela Proposição 3.0.14 temos

$$\begin{aligned} \|(1+b)^{-1} - 1 + b\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^n - 1 + b\| = \|\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b^n\| \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|b\|^n = \|b\|^2 (1-\|b\|)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sejam $a \in Inv(A)$ e $c \in A$ tal que $\|c\| < \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$. Então

$$\|a^{-1}c\| < \|a^{-1}\|\|c\| < 1/2.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\|(a+c)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| &= \|(a(1+a^{-1}c))^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\
&= \|(1+a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\
&\leqslant \|(1+a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\|\|a^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Como $\|a^{-1}c\| < 1/2$, de (3.4) com $b = a^{-1}c$, segue que

$$\|(1+a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\|\|a^{-1}\| \leqslant \|a^{-1}\|\|a^{-1}c\|^2(1 - \|a^{-1}c\|)^{-1}.$$

Como $(1 - \|a^{-1}c\|)^{-1} < 2$, então

$$\|(1+a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\|\|a^{-1}\| \leqslant 2\|a^{-1}\|^3\|c\|^2. \tag{3.5}$$

Concluímos então que para $c \in A$ que satisfaz $\|c\| < \dfrac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, então

$$\|(a+c)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \leqslant 2\|a^{-1}\|^3\|c\|^2.$$

Além disso,

$$0 \leqslant \frac{\|(a+c)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\|}{\|c\|} \leqslant 2\|a^{-1}\|^3\|c\|.$$

Portanto,

$$\lim_{c \to 0} \frac{\|(a+c)^{-1} - a^{-1} - u(c)\|}{\|c\|} = 0.$$

Defina o operador

$$u : A \longrightarrow A \qquad x \mapsto -a^{-1}xa^{-1}.$$

Para concluírmos que Φ é diferenciável falta mostrar que u é um operador linear limitado. De fato, sejam $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então

$$u(\alpha x+y) = -a^{-1}(\alpha x+y)a^{-1} = \alpha(-a^{-1})xa^{-1}+(-a^{-1})ya^{-1} = \alpha u(x)+u(y).$$

Também para $b \in A$, $\|u(b)\| = \| - a^{-1}ba^{-1}\| \leqslant 2\|a^{-1}\|\|b\|$.

Portanto Φ é diferenciável e $\Phi' = u$. $\square$

Lema 3.0.17. *Sejam A uma álgebra de Banach unital e $a \in A$. O espectro $\sigma(a)$ de a é um subconjunto fechado do disco centrado na origem com raio $\|a\|$, e a aplicação*

$$\phi : \mathbb{C}\backslash\sigma(a) \longrightarrow A \qquad \lambda \mapsto (\lambda 1 - a)^{-1},$$

é diferenciável.

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|a\|$. Então $\|\lambda^{-1}a\| < 1$. Pela Proposição 3.0.14, $(1 - \lambda^{-1}a) \in$ Inv(a). Logo, da Observação 3.0.5, $\lambda 1 - a \in Inv(A)$. Assim se $|\lambda| > \|a\|$, então $\lambda \notin \sigma(a)$. Da contrapositiva de tal implicação, se $\lambda \in \sigma(a)$ então $|\lambda| \leqslant \|a\|$.

Vamos mostrar agora que $\sigma(a)$ é fechado. Sejam $\lambda \in \overline{\sigma(a)}$. Logo, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma(a)$ tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n 1 - a \in (Inv(A))^c$. Portanto, a sequência $(\lambda_n 1 - a)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida em $(Inv(A))^c$. Além disso, $(Inv(A))^c$ é fechado em A, pois pela Proposião 3.0.16, $Inv(A)$ é um aberto em A. Como $(\lambda_n 1 - a) \longrightarrow (\lambda 1 - a)$ e $(Inv(A))^c$ é fechado, então $\lambda 1 - a \in (Inv(A))^c$. Portanto $\lambda \in \sigma(a)$.

□

Teorema 3.0.18 (Hanh-Banach - Espaços Normados)**.** *Sejam X um espaço normado e $f : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear limitado tal que Z é subespaço vetorial de X. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}$ é extensão de f e $\|f\|_Z = \|\tilde{f}\|_X$, isto é,*

$$sup\{\|f(x)\| \mid x \in Z,\ \|x\| = 1\} = sup\{\|\tilde{f}(x)\| \mid x \in X,\ \|x\| = 1\}.$$

O teorema anterior pode ser visto em (KREYSZIG, 1978). Vamos denotar o conjunto dos funcionais lineares limitados em A por A'.

Teorema 3.0.19. *Seja X um espaço vetorial. Então para todo $x \in X$ temos*

$$\|x\| = sup\{\|\varphi(x)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração. Para o caso $x_0 = 0$ é fácil ver que tal igualdade segue. Seja $x_0 \in X$ tal que $x_0 \neq 0$. Considere o espaço $Z = span\{x_0\}$ e defina funcional linear $f_{x_0} : Z \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $f_{x_0}(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

De fato, sejam $x, y \in Z$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tais que $x = \alpha_1 x_0$ e $y = \alpha_2 x_0$. Assim,

$$\begin{aligned} f_{x_0}(\lambda x + y) &= f_{x_0}((\lambda\alpha_1 + \alpha_2)x_0) = (\lambda\alpha_1 + \alpha_2)\|x_0\| = \lambda\alpha_1\|x_0\| + \alpha_2\|x_0\| \\ &= \lambda f_{x_0}(\alpha_1 x_0) + f_{x_0}(\alpha_2 x_0) = \lambda f_{x_0}(x) + f_{x_0}(y). \end{aligned}$$

Portanto f_{x_0} é linear. Além disso, $\|f_{x_0}\| = 1$. Para $z \in Z$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $z = \alpha x_0$. Logo,

$$|f_{x_0}(z)| = |\alpha\|x_0\|| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|z\|.$$

Dessa forma $\|f_{x_0}\| \leqslant 1$. Como $|f_{x_0}(\frac{x_0}{\|x_0\|})| = \dfrac{1}{\|x_0\|}\|x_0\| = 1$. Segue que $\|f_{x_0}\| = 1$. Pelo teorema de Hanh-Banach existe um funcional linear limitado $\tilde{f_{x_0}} : X \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $\tilde{f_{x_0}}$ é extensão de f_{x_0} e $\|\tilde{f_{x_0}}\|_X = \|f_{x_0}\| = 1$. Assim,

$$\|x_0\| = \|f_{x_0}(x_0)\| = \|\tilde{f}_{x_0}(x_0)\|.$$

Segue que $\|x_0\| \leqslant sup\{\|\varphi(x_0)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\}$. Também, para todo $\varphi \in X'$, temos $\|\varphi(x_0)\| \leqslant \|\varphi\|\|x_0\|$. Portanto $\|x_0\| \geqslant sup\{\|\varphi(x_0)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\}$ e assim $\|x_0\| = sup\{\|\varphi(x_0)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\}$. □

Lema 3.0.20. *Sejam A um espaço normado e $a \in A$. O operador*

$$\ddot{a} : A' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(a).$$

é um operador linear limitado e $\|\ddot{a}\| = \|a\|$.

Demonstração. Sejam ψ e $\varphi \in A'$, e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então $\ddot{a}(\alpha\psi + \varphi) = (\alpha\psi + \varphi)(a) = \alpha\psi(a) + \varphi(a) = \alpha\ddot{a}(\psi) + \ddot{a}(\varphi)$.

Vamos mostar agora que $\ddot{a}$ é limitada. Como $\ddot{a}(\varphi) = \varphi(a)$ então

$$sup\{\|\varphi(a)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\} = sup\{\|\ddot{a}(\varphi)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\}. \quad (3.6)$$

Pelo teorema anterior e de (3.6) , temos $\|\ddot{a}\| = sup\{\|\ddot{a}(\varphi)\| \mid \varphi \in X', \|\varphi\| = 1\} = \|a\|$. □

Corolario 3.0.21. *Seja X um espaço vetorial e $x \in X$. Se para todo $f \in X'$ temos $f(x) = 0$, então $x = 0$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $x \neq 0$. Logo, pelo Teorema 3.0.19 existe $\varphi \in X'$, tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\|\varphi(x)\| > \|x\|/2 > 0$. Portanto, $\varphi(x) \neq 0$, contradizendo a hipótese, logo $x = 0$. □

Teorema 3.0.22. *Se a é um elemento de uma álgebra(complexa) de Banach unital A, então o espectro $\sigma(a)$ de a é não vazio.*

Demonstração. Suponha que $\sigma(a) = \emptyset$. Logo, podemos definir a função

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow A \qquad \lambda \mapsto (\lambda 1 - a)^{-1},$$

que pelo Lema 3.0.17 é diferenciável. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 2\|a\|$. Assim, $\|\lambda^{-1}a\| < 1/2$, e pela Proposição 3.0.14,

$$1 - \lambda^{-1}a \in Inv(A) \quad \text{e} \quad (1 - \lambda^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}a)^n.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}a)^n - 1\| &= \|\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-1}a)^n\| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda^{-1}a\|^n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $\|\lambda^{-1}a\| < 1/2$, então $1 - \|\lambda^{-1}a\| > 1/2$, logo $\dfrac{1}{1 - \|\lambda^{-1}a\|} < 2$. Note também que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda^{-1}a\|^n = \frac{\|\lambda^{-1}a\|}{1 - \|\lambda^{-1}a\|} < 2\|\lambda^{-1}a\| < 1. \tag{3.8}$$

Por (3.7) e (3.8) temos $\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| < 1$. Portanto,

$$\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| = \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1 + 1\| \leqslant \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| + \|1\| < 2.$$

Com isso, $\|(\lambda 1 - a)^{-1}\| = |\lambda^{-1}| \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1}$. Em particular, mostramos que para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 2\|a\|$, $\|\varphi(\lambda)\| < \|a\|^{-1}$. Como ϕ é diferenciável, então ϕ é contínua. Assim, como o disco $2\|a\|D$ é um compacto, $\phi(2\|a\|D)$ é compacto, e então limitado. Portanto existe $M \in \mathbb{R}$, tal que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\phi(\lambda)\| < M$.

Se $\varphi \in A'$, então $\varphi \circ \phi$ é inteira e também limitada, pois para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\varphi(\phi(\lambda))\| \leqslant \|\varphi\| \|\phi(\lambda)\| \leqslant \|\varphi\| M.$$

Pelo Teorema de Liouville, $\varphi \circ \phi$ é constante. Logo, $(\varphi \circ \phi)(0) = (\varphi \circ \phi)(1)$, isto é, $\varphi((1-a)^{-1}) = \varphi((-a)^{-1})$. Por φ ser linear temos $\varphi((1-a)^{-1} + a^{-1}) = 0$. Como tal igualdade é verdadeira para todo $\varphi \in A'$, pelo Corolário 3.0.21, $(1-a)^{-1} + a^{-1} = 0$. Dessa forma, $(1-a)^{-1} = -a^{-1}$, o que é um absurdo, já que implica que $1 - a = -a$. $\square$

O teorema acima não é válido se considerarmos álgebras de Banach unitais sobre $\mathbb{R}$. Por exemplo a matriz

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem $\sigma(a) = \emptyset$, já que seus autovalores são complexos.

Teorema 3.0.23 (Gelfand-Mazur)**.** *Se A é uma álgebra de Banach unital em que todo elemento não nulo é inversível, então $A = \mathbb{C}1$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $A \subset \mathbb{C}1$. Seja $a \in A$. Pelo Teorema 3.0.22, temos que $\sigma(a) \neq \emptyset$, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda 1 - a \notin Inv(A)$. Por hipótese todo elemento não nulo pertence a $Inv(A)$, dessa forma $\lambda 1 - a = 0$. Portanto $a = \lambda 1$. Concluímos então que $A \subset \mathbb{C}1$. Como A é uma álgebra então $\mathbb{C}1 \subset A$, assim $\mathbb{C}1 = A$. $\square$

4 Raio Espectral

A seguir vamos definir a noção de raio espectral de um elemento de uma álgebra de Banach. Também veremos o Teorema de Beurling, e para uma álgebra abeliana A vamos definir o conjunto $\Omega(A)$, que terá papel central nos próximos capítulos.

Definição 4.0.1. *Seja A uma álgebra de Banach unital. O raio espectral de a é definido por*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Pelo Teorema 3.0.22 o espectro de a é não vazio, além disso sabemos que se $\lambda \in \sigma(a)$, então $|\lambda| \leqslant \|a\|$, assim $r(a) \leqslant \|a\|$.

Exemplo 4.0.2. *Se $A = C(\Omega)$, onde Ω é espaço compacto Hausdorff. Pelo Exemplo 3.0.7, para $f \in A$, $\sigma(f) = f(\Omega)$, então $r(f) = \sup_{\lambda \in f(\Omega)} |\lambda| = \|f\|_\infty$.*

O próximo lema será utilizado na demonstração do Teorema de Beurling.

Lema 4.0.3. *Sejam a e $b \in \mathbb{R}$. Suponha que todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c$ satisfaz $b \leqslant c$. Então $b \leqslant a$.*

De fato, suponha por absurdo que $a < b$. Então,

$$b > \frac{b-a}{2} + a > a.$$

Logo,

$$\frac{b-a}{2} + a > a.$$

Tomando $c = \dfrac{b-a}{2} + a$, pela hipótese segue que $\dfrac{b-a}{2} + a \geqslant b$, o que é um absurdo.

Teorema 4.0.4 (Teorema de Beurling)**.** *Se a é um elemento de uma álgebra de Banach unital A, então*

$$r(a) = \inf_{n \geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 3.0.13, se $\lambda \in \sigma(a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. Então, pelo Lema 3.0.16, $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$. Segue que $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto , $r(a) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Seja Δ o disco aberto em $\mathbb{C}$ centrado em 0 e com raio $1/r(a)$ (usaremos a convenção que $1/0 = \infty$). Se $\lambda \in \Delta\backslash\{0\}$, então $|\frac{1}{\lambda}| > r(a)$, portanto $(\frac{1}{\lambda})1 - a \in Inv(A)$, logo $1 - \lambda a \in Inv(A)$. Concluímos que para $\lambda \in \Delta\backslash\{0\}$ $1 - \lambda a \in Inv(A)$. Como $1 \in Inv(A)$, então para todo $\lambda \in \Delta$, $1 - \lambda a \in Inv(A)$.

Se $\varphi \in A'$, a aplicação

$$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto \varphi((1-\lambda a)^{-1}),$$

é analítica. Então existe uma única sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, satisfazendo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n \ \ (\lambda \in \Delta).$$

Se $|\lambda| < 1/\|a\| < 1/r(a)$, então $\|\lambda a\| < 1$. Portanto, pelo Lema 3.0.14,

$$(1-\lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n,$$

como φ é contínua segue que,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi(a^n).$$

Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(a^n) = \lambda_n$. Portanto para $\lambda \in \Delta$, a sequência $(\lambda^n \varphi(a^n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge para zero. Como $\mathbb{C}$ é um espaço de Banach, então A' e um espaço de Banach. Defina para $n \in \mathbb{N}$, o operador linear

$$\ddot{z}_n : A' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(\lambda^n a^n).$$

Pelo Lema 3.0.20, $\ddot{z}_n$ é um operador linear limitado e $\|\ddot{z}_n\| = |\lambda|^n \|a^n\|$. Como para todo $\varphi \in A'$, a sequência $(\lambda^n \varphi(a^n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge para zero, então tal sequência é limitada. Portanto para todo $\varphi \in A'$, a sequência $(\ddot{z}_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, temos que a sequêcia $(\|\ddot{z}_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Como $\|\ddot{z}_n\| = |\lambda|^n \|a^n\|$, então $(|\lambda|^n \|a^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda|^n \|a^n\| \leqslant M$, e portanto se $\lambda \neq 0$, para $n \geqslant 1$, $\|a^n\|^{1/n} \leqslant M^{1/n}/|\lambda|$. Consequentemente,

$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} M^{1/n}/|\lambda| = 1/|\lambda|$. Mostramos então que se $r(a) < 1/|\lambda|$ então $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Portanto do Lema 4.0.3, $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$.

Como $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$, então

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = r(a) = \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n},$$

já que $\liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Segue que $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \|a^n\|^{1/n}$. □

Exemplo 4.0.5. *Seja $A = M_2(\mathbb{C})$ e*

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $a^n = 0$, para todo $n \geqslant 2$, pelo teorema de Beurling $r(a) = 0$.

Definição 4.0.6. *Sejam A e B álgebras. Dizemos que uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$, é um homomorfismo se satisfaz para quaisquer $a, b \in A$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. No caso de A e B serem unitais e $\varphi(1) = 1$, então dizemos que φ é unital.*

Exemplo 4.0.7. *Sejam A uma álgebra e I ideal de A. A aplicação*

$$\psi : A \longrightarrow A/I, \quad a \mapsto \overline{a},$$

é um homomorfismo. Sejam $a, c \in A$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos $\psi(\lambda a + c) = \overline{\lambda a + c} = \lambda\overline{a} + \overline{c} = \lambda\psi(a) + \psi(c)$. Além disso, $\psi(ac) = \overline{ac} = \overline{a} \cdot \overline{c} = \psi(a)\psi(c)$. Logo, ψ é um homomorfismo. No caso de A ser unital, então $\psi(1) = \overline{1}$, portanto ψ é um homomorfismo unital.

Lema 4.0.8. *Sejam A e B álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo. Então o $ker(\varphi)$ é um ideal de A e a imagem de φ é uma subálgebra de B.*

Demonstração. Sabemos que $ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$ são subespaços vetoriais de A e B respectivamente.

Sejam $a_1 \in ker(\varphi)$ e $a_2 \in A$. Então

$$\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = 0 = \varphi(a_2)\varphi(a_1) = \varphi(a_2a_1).$$

Então $a_1a_2, a_2a_1 \in ker(\varphi)$. Segue que $ker(\varphi)$ é um ideal em A.

Sejam $b_1, b_2 \in Im(\varphi)$. Então existem $x_1, x_2 \in A$ tal que $\varphi(x_1) = b_1$ $\varphi(x_1) = b_2$. Como

$$b_1b_2 = \varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(x_1x_2).$$

Segue que $b_1b_2 \in Im(\varphi)$. Então $Im(\varphi)$ é uma subálgebra de B.

□

Lema 4.0.9. *Sejam A e B álgebras unitais e $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo unital. Então para $a \in A$, temos $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$.*

Demonstração. Seja $a \in Inv(A)$. Então

$$\varphi(1) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a),$$

$$\varphi(1) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}).$$

Logo, $\varphi(a) \in Inv(B)$. Mostramos então que

$$\varphi(Inv(A)) \subset Inv(B). \tag{4.1}$$

Portanto da implicação (4.1), temos que $(Inv(B))^c \subset (\varphi(Inv(A)))^c$.

Seja $\lambda \in \sigma(\varphi(a))$. Portanto

$$\varphi(\lambda 1 + a) = \lambda 1 + \varphi(a) \notin \; Inv(B).$$

Dessa forma, $\varphi(\lambda 1 + a) \in (Inv(B))^c \subset (\varphi(Inv(A)))^c$. Segue que $\lambda 1 + a \notin Inv(A)$, pois caso contrário $\varphi(\lambda 1 + a) \in \varphi(Inv(A))$. Portanto $\lambda \in \sigma(a)$. □

Definição 4.0.10. *Seja A uma álgebra abeliana. Denotaremos o conjunto dos homomorfismos não nulos $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$, por $\Omega(A)$. Os elementos de $\Omega(A)$ chamaremos de caracteres.*

Se A é unital, então para $\tau \in \Omega(A)$, temos

$$\tau(1) = \tau(1 \cdot 1) = \tau(1)\tau(1),$$

segue que $\tau(1) = 1$ ou $\tau(1) = 0$. No caso de $\tau(1) = 0$, então para todo $a \in A$,

$$\tau(a) = \tau(a1) = \tau(a)\tau(1) = \tau(a)0 = 0.$$

Dessa forma, $\tau = 0$. Porém como τ é não nulo então $\tau(1) = 1$, assim τ é homomorfismo unital.

Exemplo 4.0.11. *Considere a álgebra $\tilde{A}$ da Seção 2.3. Seja $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ um homomorfismo. Defina a aplicação*

$$\tilde{\tau} : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \ (\lambda, a) \mapsto \lambda + \tau(a).$$

Vamos mostrar que $\tilde{\tau}$ é um homomorfismo unital. Sejam (λ_1, a_1), $(\lambda_2, a_2) \in \tilde{A}$, e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}(\alpha(\lambda_1, a_1) + (\lambda_2, a_2)) &= \tilde{\tau}((\alpha\lambda_1 + \lambda_2, \alpha a_1 + a_2))) \\
&= \alpha\lambda_1 + \lambda_2 + \tau(\alpha a_1 + a_2) \\
&= \alpha(\lambda_1 + \tau(a_1)) + (\lambda_2 + \tau(a_2)) \\
&= \alpha\tilde{\tau}((\lambda_1, a_1)) + \tilde{\tau}((\lambda_2, a_2)).
\end{aligned}$$

Também satisfaz,

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}((\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2)) &= \tilde{\tau}((\lambda_1\lambda_2, \lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_1 a_2)) \\
&= \lambda_1\lambda_2 + \tau(\lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_1 a_2) \\
&= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\tau(a_1) + \lambda_1\tau(a_2) + \tau(a_1)\tau(a_2) \\
&= (\lambda_1 + \tau(a_1))(\lambda_2 + \tau(a_2)) = \tilde{\tau}((\lambda_1, a_1))\tilde{\tau}((\lambda_2, a_2)).
\end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\tau}$ é um homomorfismo unital, já que $\tilde{\tau}((1, 0)) = 1 + \tau(0) = 1$. No caso de $\tau = 0$, denotaremos o homomorfismo $\tilde{\tau}$ por τ_∞.

Lema 4.0.12. *Sejam A uma álgebra abeliana. Então*

$$\Omega(\tilde{A}) = \{\tilde{\tau} \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\tau_\infty\}.$$

Demonstração. Pelo exemplo anterior, temos a inclusão

$$\{\tilde{\tau} \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{\tau_\infty\} \subset \Omega(\tilde{A}).$$

Seja $\varphi \in \Omega(\tilde{A})$ e $(\lambda, a) \in \tilde{A}$. Então como φ é um homomorfismo temos

$$\begin{aligned}
\varphi((\lambda, a)) &= \varphi((\lambda, 0) + (0, a)) = \varphi((\lambda, 0)) + \varphi((0, a)) \\
&= \lambda\varphi((1, 0)) + \varphi((0, a)) = \lambda + \varphi((0, a)).
\end{aligned}$$

Defina o operador $\tau(a) = \varphi((0,a))$. Vamos mostrar que τ é um homomorfismo em A. De fato, para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x, y \in A$ temos

$$\tau(\alpha x + y) = \varphi((0, \alpha x + y)) = \alpha\varphi((0,x)) + \varphi((0,y)) = \alpha\tau(x) + \tau(y).$$

Também satisfaz

$$\tau(xy) = \varphi((0,xy)) = \varphi((0,x)(0,y)) = \varphi((0,x))\varphi((0,y)) = \tau(x)\tau(y).$$

Logo, τ é um homomorfismo em A. Se $\tau = 0$, então $\varphi = \tau_\infty$. Se $\tau \in \Omega(A)$, então $\varphi = \tilde{\tau}$. $\square$

Lema 4.0.13. *Sejam A uma álgebra abeliana unital e $a \in A$. Se $\tau \in \Omega(A)$, então $\tau(a) \in \sigma(a)$.*

Demonstração. Como $\tau(a)1 - \tau(a) = \tau(a-a) = 0 \notin Inv(\mathbb{C})$, então $\tau(a) \in \sigma(\tau(a))$. Pelo Lema 4.0.9, $\sigma(\tau(a)) \subset \sigma(a)$. Segue que $\tau(a) \in \sigma(a)$. $\square$

Definição 4.0.14. *Seja A uma álgebra de Banach não unital. O espectro de $a \in A$ é o conjunto $\sigma(a) = \sigma_{\tilde{A}}((0,a))$. Além disso, definimos o raio espectral de $a \in A$, por $r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\sigma(a)}} |\lambda|$.*

Teorema 4.0.15. *Se a é um elemento de uma álgebra de Banach A, então*

$$r(a) = \inf_{n \geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Demonstração. Caso A seja unital então é o teorema de Beurling. Suponha A não unital, e considere a álgebra $\tilde{A}$. Como $\tilde{A}$ é uma álgebra de Banach unital então

$$r((0,a)) = \inf_{n \geqslant 1} \|(0,a)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|(0,a)^n\|^{1/n}.$$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(0,a)^n = (0,a^n)$, e $\|(0,a^n)\| = \|a^n\|$, então $\|(0,a)^n\| = \|a^n\|$. Segue que,

$$r((0,a)) = \inf_{n \geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Como $r((0,a)) = r(a)$, então

$$r(a) = \inf_{n \geqslant 1} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

$\square$

5 Representação de Gelfand

Neste capítulo vamos determinar um importante relação entre o espectro de um elemento de uma álgebra de Banach abeliana A e o conjunto $\Omega(A)$. Também vamos introduzir uma topologia em $\Omega(A)$ de forma que seja um espaço localmente compacto Hausdorff e apresentar a representação de Gelfand.

Proposição 5.0.1. *Seja I um ideal modular de uma álgebra de Banach A. Se I é próprio então $\overline{I}$ é própio. No caso de I ser maximal então I é fechado.*

Demonstração. Como I é um ideal modular existe $u \in A$, tal que $a - au$ e $a - ua \in I$, para todo $a \in A$.

Vamos supor por absurdo que existe $b \in I$, que satisfaz $\|u - b\| < 1$. Então o elemento $v = (1, -u + b)$ é inversível em $\tilde{A}$. De fato, como $\|(0, u - b)\| = |0| + \|u - b\| = \|u - b\| < 1$, então pelo Lema 3.0.14,

$$v = (1, -u + b) = (1, 0) - (0, u - b) \in Inv(\tilde{A}).$$

Sejam os conjuntos $A_0 = \{(0, a) : a \in A\}$, $A_0v = \{a_0v : a_0 \in A_0\}$ e $I_0 = \{(0, i) : i \in I\}$.

Vamos mostrar que $A_0v \subset I_0$. Seja $a_0v = (0, a)v \in A_0v$. Temos,

$$a_0v = (0, a)(1, -u + b) = (0, a - au + ab) \in I_0,$$

já que $ab \in I$ e $a - au \in I$, pois I é um ideal modular. Além disso, $A_0 \subset A_0v$. De fato, seja $(0, a) \in A_0$. Como v é inversível, então existe $v^{-1} \in \tilde{A}$ tal que $v^{-1}v = 1$. Então $(0, a)1 = (0, a)v^{-1}v \in A_0v$, já que $(0, a)v^{-1} \in A_0$. Segue que $A_0 \subset A_0v \subset I_0$. Portanto, $A \subset I$, o que contraria que I é próprio. Logo, se $b \in I$, então $\|u - b\| \geqslant 1$. Portanto $u \notin \overline{I}$. Dessa forma, $\overline{I}$ é próprio.

Note que se I é maximal, então $I = \overline{I}$, pois $\overline{I}$ é próprio. $\square$

Lema 5.0.2. *Se I é um ideal maximal de uma álgebra de Banach unital A, então A/I é um corpo.*

Demonstração. Como A é unital, então todo ideal de A é modular. Além disso, pela proposição anterior, I é fechado. Logo, A/I é uma álgebra de Banach unital abeliana.

Seja ψ a aplicação quociente do Exemplo 4.0.7. Vamos mostrar que se J é um ideal de A/I, então $\psi^{-1}(J) = K$ é um ideal de A. De fato, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $k_1, k_2 \in K$ e $a \in A$ temos

$$\psi(\lambda k_1 + k_2) = \lambda\psi(k_1) + \psi(k_2) \in J,$$

pois J é ideal e $\psi(k_1), \psi(k_2) \in J$. Da mesma forma,

$$\psi(k_1 a) = \psi(k_1)\psi(a) \in J \text{ e } \psi(ak_2) = \psi(a)\psi(k_2) \in J.$$

Portanto, K é um ideal em A. Como $I \subset K$, pela maximalidade de I temos $K = I$ ou $K = A$. Portanto ou $J = \overline{0}$ ou $J = A/I$.

Suponha que $\psi(a)$ é um elemento não nulo de A/I. Então $\psi(a)(A/I)$ é um ideal não nulo de A/I. Devemos ter $\psi(a)(A/I) = A/I$. Segue que existe $\overline{b} \in (A/I)$ tal que $\psi(a)\overline{b} = \overline{1}$. Assim $\overline{a}$ é inversível, o que implica que A/I é corpo. $\square$

Teorema 5.0.3. *Seja A uma álgebra de Banach abeliana unital.*

1. *Se $\tau \in \Omega(A)$, então $\|\tau\| = 1$.*

2. *O conjunto $\Omega(A)$ é não vazio,e a aplicação*

$$\tau \mapsto ker(\tau),$$

define uma bijeção de $\Omega(A)$ para o conjunto de todos os ideais maximais de A.

Demonstração. Para $\tau \in \Omega(A)$ e $a \in A$, pelo Lema 4.0.13 $\tau(a) \in \sigma(a)$. Assim, pelo Lema 3.0.17, $|\tau(a)| \leqslant \|a\|$. Portanto τ é limitada e $\|\tau\| \leqslant 1$. Como $\tau(1) = 1$ então $\|\tau\| = 1$.

Para $\tau \in \Omega(A)$, pelo item anterior τ é contínua, portanto o ideal $I = ker(\tau)$ é fechado.

Vamos mostrar que I é um ideal maximal de A. Como $\tau \neq 0$ então $I \neq A$. Note que $a - \tau(a)1 \in I$, pois $\tau(a - \tau(a)1) = \tau(a) - \tau(a) = 0$. Portanto $I \oplus \mathbb{C}1 = A$, pois para todo $a \in A$, $a = (a - \tau(a)1) + \tau(a)1$, além disso $I \cap \mathbb{C}1 = \{0\}$, já que $\tau(1) = 1$.

Para concluir que I é maximal, suponha que existe um ideal J tal que $I \subsetneq J$. Então existe um elemento $j \in J$ tal que $j \notin I$. Podemos escrever $j = a + \lambda 1$, em que $a \in I$. Como $j \notin I$, então $j - a \neq 0$. Então $\lambda \neq 0$ e

$$\lambda 1 = (j - a) \in J.$$

Pois $a \in J$. Isso implica que $1 \in J$, então $J = A$. Concluímos que I é maximal.

Seja τ_1 e $\tau_2 \in \Omega(A)$, com $ker(\tau_1) = ker(\tau_2)$. Para $a \in A$, $a - \tau_2(a)1 \in ker(\tau_2)$ pois $\tau_2(a - \tau_2(a)1) = \tau_2(a) - \tau_2(a) = 0$. Como $ker(\tau_1) = ker(\tau_2)$, então $a - \tau_2(a)1 \in ker(\tau_1)$, isto é, $\tau_1(a - \tau_2(a)1) = 0$, segue que $\tau_1(a) = \tau_2(a)$.

Seja I um ideal maximal arbitrário. Então pela Proposição 5.0.1 I é fechado, e a álgebra de Banach unital A/I é um corpo pelo Lema 5.0.2. Então pelo teorema de Gelfand-Mazur, $A/I = \mathbb{C}\overline{1}$.

Vamos mostar que $A = I \oplus \mathbb{C}1$. Seja $a \in A$. Então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{a} = \lambda\overline{1}$. Isto implica que $a - \lambda 1 \in I$. Portanto $a = (a - \lambda 1) + \lambda 1$. Além disso $I \cap \mathbb{C}1 = \{0\}$, pois caso contrário, se $1 \in I$, como I é ideal, para todo $a \in A$, $a = a1 \in I$, então $I = A$.

Defina $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$, por $\tau(a + \lambda 1) = \lambda$, em que $a \in I$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. É fácil ver que τ é uma transformação linear. Seja a e $b \in A$ com $a = a_1 + \lambda 1$ e $b = b_1 + \alpha 1$ em que $a_1, b_1 \in I$. Como I é ideal então $\alpha a_1 + \lambda b_1 + a_1 b_1 \in I$, segue que

$$\begin{aligned} \tau(ab) = \tau((a_1 + \lambda 1)(b_1 + \alpha 1)) &= \tau(\alpha a_1 + \lambda b_1 + a_1 b_1 + \lambda\alpha 1) \\ &= \lambda\alpha = \tau(a)\tau(b). \end{aligned}$$

Logo, $\tau \in \Omega(A)$. Além disso, $ker(\tau) = I$. Concluímos então que a aplicação $\tau \mapsto ker(\tau)$ é bijetora. Pelo Lema 2.4.8, o conjunto de ideais maximais de A é não vazio, assim $\Omega(A)$ é não vazio. $\square$

Para uma álgebra abeliana A qualquer o conjunto $\Omega(A)$ pode ser vazio. Um exemplo trivial é quando $A = \{0\}$, então $\Omega(A)$ é vazio.

Teorema 5.0.4. *Sejam A uma álgebra de Banach abeliana e $a \in A$.*

1. *Se A é unital, então*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}.$$

2. *Se A é não unital, então*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}.$$

Demonstração. Primeiro suponha que A é unital. Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Note que o ideal $(\lambda 1 - a)A$ é próprio, pois caso contário, $1 \in (\lambda 1 - a)A$, portanto existe $b \in A$ tal que $1 = (\lambda 1 - a)b$, o que contradiz o fato de $\lambda \in \sigma(a)$. Logo, o ideal $(\lambda 1 - a)A$ é próprio. Pelo Lema 2.4.8, existe um ideal maximal I tal que $(\lambda 1 - a)A \subset I$. Pelo Teorema 5.0.3, existe $\tau \in \Omega(A)$ tal que $ker(\tau) = I$. Portanto $\tau((\lambda 1 - a)1) = 0$, segue que $\tau(a) = \lambda$. Mostramos que $\sigma(a) \subset \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}$. A inclusão $\{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \subset \sigma(a)$ segue do Lema 4.0.13.

Agora suponha que A é não unital. Por definição $\sigma(a) = \sigma_{\tilde{A}}((0, a))$. Do item anterior temos $\sigma_{\tilde{A}}((0, a)) = \{\tilde{\tau}((0, a)) \mid \tilde{\tau} \in \Omega(\tilde{A})\}$. Pelo Lema 4.0.12 $\{\tilde{\tau}((0, a)) \mid \tilde{\tau} \in \Omega(\tilde{A})\} = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$, então $\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$.

□

Definição 5.0.5. *Seja A um espaço normado. Dizemos que a topologia fraca estrela é a menor topologia em A' em que para todo $a \in A$, o operador linear*

$$\ddot{a} : A' \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(a),$$

é contínuo. Denotaremos tal espaço topologico por $(A', \mathcal{J}_*)$.

Proposição 5.0.6. *O espaço topológico $(A', \mathcal{J}_*)$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $\varphi, \psi \in A'$ tais que $\varphi \neq \psi$. Queremos mostrar que existem abertos $U, V \in \mathcal{J}_*$ que satisfazem $\psi \in U$ e $\varphi \in V$, e $U \cap V = \emptyset$.

Como $\varphi \neq \psi$, existe $a \in A$, tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$. Defina

$$r = \frac{|\varphi(a) - \psi(a)|}{2} > 0.$$

Como $\ddot{a}$ é contínua, então $U = \ddot{a}^{-1}(B_r(\psi(a)))$ é um aberto em $\mathcal{J}_*$. Da mesma forma $V = \ddot{a}^{-1}(B_r(\varphi(a)))$ é um aberto em $\mathcal{J}_*$. Perceba que $\psi \in U$, pois $\ddot{a}(\psi) = \psi(a) \in B_r(\psi(a))$ e $\varphi \in V$, pois $\ddot{a}(\varphi) = \varphi(a) \in B_r(\varphi(a))$.

Vamos mostrar que $U \cap V = \emptyset$. Seja $\phi \in U$. Então $\ddot{a}(\phi) = \phi(a) \in B_r(\psi(a))$, isto é, $|\phi(a) - \psi(a)| < r$. Observe que

$$|\varphi(a) - \psi(a)| \leqslant |\varphi(a) - \phi(a)| + |\phi(a) - \psi(a)|.$$

Logo,

$$|\varphi(a) - \phi(a)| \geqslant |\varphi(a) - \psi(a)| - |\phi(a) - \psi(a)|.$$

Portanto,

$$|\varphi(a) - \phi(a)| \geqslant |\varphi(a) - \psi(a)| - r = r.$$

Dessa forma, $\phi(a) \notin B_r(\varphi(a))$. Segue que $\phi \notin V$, pois $\ddot{a}(\phi) = \phi(a) \notin B_r(\varphi(a))$. Concluímos que $U \cap V = \emptyset$.

□

Teorema 5.0.7 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Seja A um espaço de Banach. Então a bola fechada unitária em A' é um compacto em $(A', \mathcal{J}_*)$.*

O teorema acima pode ser visto em (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

Observe pela demonstração do Teorema 5.0.3 que se A é uma álgebra abeliana então para $\tau \in \Omega(A)$, $\|\tau\| \leqslant 1$ (se A também é unital então $\|\tau\| = 1$). Portanto para uma álgebra abeliana A, $\Omega(A)$ está contido na bola fechada unitária S em A'.

O espaço topológico $\Omega(A)$ com a topologia induzida pelo espaço topológico $(A', \mathcal{J}_*)$ é chamado espectro de A.

Teorema 5.0.8. *Se A é uma álgebra de Banach abeliana, então $\Omega(A)$ é um espaço Hausdorff localmente compacto. Se A é unital, então $\Omega(A)$ é compacto.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que que $\Omega(A) \cup \{0\}$ é fechado. Seja $\varphi \in \overline{\Omega(A) \cup \{0\}}$. Então existe uma uma net $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \Omega(A) \cup \{0\}$ tal que

$\varphi_\lambda \longrightarrow \varphi$. Vamos mostrar que φ é um homomorfismo. Para a e $b \in A$ temos $\varphi(a)\varphi(b) = \ddot{a}(\varphi)\ddot{b}(\varphi)$. Como $\ddot{a}$ e $\ddot{b}$ são contínuas então

$$\ddot{a}(\varphi)\ddot{b}(\varphi) = \ddot{a}(\lim \varphi_\lambda)\ddot{b}(\lim \varphi_\lambda).$$

Portanto,

$$\varphi(a)\varphi(b) = \ddot{a}(\varphi)\ddot{b}(\varphi) = \ddot{a}(\lim \varphi_\lambda)\ddot{b}(\lim \varphi_\lambda) = \lim \ddot{a}(\varphi_\lambda) \lim \ddot{b}(\varphi_\lambda). \quad (5.1)$$

Pela Proposição 2.1.18, a multiplicaçao é contínua, logo $\lim \ddot{a}(\varphi_\lambda) \lim \ddot{b}(\varphi_\lambda) = \lim \ddot{a}(\varphi_\lambda)\ddot{b}(\varphi_\lambda)$. Como $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \Omega(A) \cup \{0\}$ então para todo $\lambda \in \Lambda$, φ_λ é um homomorfismo. Assim,

$$\lim \ddot{a}(\varphi_\lambda) \lim \ddot{b}(\varphi_\lambda) = \lim \ddot{a}(\varphi_\lambda)\ddot{b}(\varphi_\lambda) = \lim \varphi_\lambda(a)\varphi_\lambda(b) = \lim \varphi_\lambda(ab). \quad (5.2)$$

Como $\ddot{ab}$ é contínua, então

$$\lim \varphi_\lambda(ab) = \lim \ddot{ab}(\varphi_\lambda) = \ddot{ab}(\lim \varphi_\lambda) = \ddot{ab}(\varphi) = \varphi(ab). \quad (5.3)$$

De (5.1), (5.2) e (5.3), $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$. Portanto $\varphi \in \Omega(A) \cup \{0\}$. Sabemos então que $\varphi \in \Omega(A) \cup \{0\} \subset S$ e é fechado. Pelo Teorema de Alaoglu S é compacto, portanto $\varphi \in \Omega(A) \cup \{0\}$ é compacto.

Vamos consiferar o subespaço $\Omega(A) \cup \{0\}$ com a topologia induzida. Seja $\varphi \in \Omega(A)$. Pela Proposição 5.0.6, $(A', \mathcal{J}_*)$ é Hausdorff. Portanto o subespaço $\Omega(A) \cup \{0\}$ é Hausdorff. Assim, existem abertos U, V de $\Omega(A) \cup \{0\}$ tais que $U \cap V = \emptyset$ e $\varphi \in U$ e $0 \in V$.

Vamos mostrar que $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Suponha por absurdo que $\overline{U} \cap V \neq \emptyset$. Então existe $\psi \in \overline{U} \cap V$. Como $\psi \in \overline{U}$, então para todo aberto $W \ni \psi$ de $\Omega(A) \cup \{0\}$ intersecta U. Em particular V intersecta U, isto é, $U \cap V \neq \emptyset$. Dessa forma, $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Como $U \subset \overline{U} \subset \Omega(A) \cup \{0\}$ e $\Omega(A) \cup \{0\}$ é compacto, implica que $\overline{U}$ é compacto. Assim, para $\varphi \in \Omega(A)$, existe uma vizinhança compacta $\overline{U} \subset \Omega(A)$, isto é, $\Omega(A)$ é um espaço localmente compacto. Novamente, como $\Omega(A) \cup \{0\}$ é Hausdorff então o subespaço $\Omega(A)$ é Hausdorff. Concluímos que $\Omega(A)$ é um espaço Hausdorff localmente compacto.

Se A for unital observe para todo $\varphi \in \Omega(A)$, $\varphi(1) = 1$. Assim, suponha por absurdo que $0 \in \overline{\Omega(A)}$. Portanto existe um net $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \Omega(A)$ tal que

$\varphi_\lambda \longrightarrow 0$. Observe porém que

$$0 = \ddot{1}(0) = \ddot{1}(\lim \varphi_\lambda) = \lim \ddot{1}(\varphi_\lambda) = \lim \varphi_\lambda(1) = \lim 1 = 1.$$

Então $0 \notin \overline{\Omega(A)}$. Como $\Omega(A) \cup \{0\}$ é Hausdorff e compacto então $\Omega(A) \cup \{0\}$ é fechado, portanto $\overline{\Omega(A)} \subset \overline{\Omega(A) \cup \{0\}} = \Omega(A) \cup \{0\}$. Como $\overline{\Omega(A)} \neq \Omega(A) \cup \{0\}$ pois $0 \notin \overline{\Omega(A)}$, então $\overline{\Omega(A)} = \Omega(A)$. Dessa forma, $\Omega(A)$ é compacto, já que $\Omega(A)$ é fechado e está contido no compacto $\Omega(A) \cup \{0\}$.

□

Sejam A uma álgebra de Banach abeliana tal que $\Omega(A)$ é não vazio e $a \in A$. Definimos a função $\hat{a}$ por

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(a).$$

Tal função é chamada de transformada de Gelfand. Note que $\hat{a} = \ddot{a}|_{\Omega(A)}$, portanto $\hat{a}$ é contínua em $\Omega(A)$.

O espaço topológico $\Omega(A)$ é chamado espectro de A.

Proposição 5.0.9. *Sejam A uma álgebra de Banach abeliana em que $\Omega(A)$ é não vazio e $a \in A$. Então $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que o conjunto $K = \{\tau \in \Omega(A) \mid |\hat{a}(\tau)| \geqslant \varepsilon\}$ é um compacto. Para isso, relembre que $\Omega(A) \cup \{0\}$ é um compacto. Então basta mostrar que K é fechado em $\Omega(A) \cup \{0\}$.

Assim seja $\tau \in \overline{K}$. Portanto existe um net $(\tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset K$ tal que $\tau_\lambda \longrightarrow \tau$. Como a função $\ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}$ é contínua em $\Omega(A) \cup \{0\}$, então

$$|\ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}(\tau)| = |\ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}(\lim \tau_\lambda)| = \lim |\ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}(\tau_\lambda)| = \lim |\hat{a}(\tau_\lambda)| \geqslant \varepsilon.$$

Dessa forma, $\tau \neq 0$, pois caso contrário teríamos $|\ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}(\tau)| = 0$. Assim, como $\tau \in \Omega(A)$, temos $\hat{a}(\tau) = \ddot{a}|_{\Omega(A) \cup \{0\}}(\tau)$, segue que

$$|\hat{a}(\tau)| \geqslant \varepsilon.$$

Portanto $\tau \in K$. Concluímos então que K é compacto. Como $\hat{a}$ é contínua, então $\hat{a} \in C_0(\Omega(A))$.

□

Agora vamos demonstrar o Teorema abaixo, que será usado no teorema principal do próximo capítulo.

Teorema 5.0.10. *Seja A uma álgebra de Banach abeliana e $\Omega(A)$ não vazio. Então a aplicação*

$$\gamma : A \longrightarrow C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a},$$

é um homomorfismo contrativo, e $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Demonstração. Vamos mostrar que γ é um homomorfismo. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x, y \in A$. Então para $\tau \in \Omega(A)$,

$$(\widehat{\lambda x + y})(\tau) = \tau(\lambda x + y) = \lambda\tau(x) + \tau(y) = \lambda\hat{x}(\tau) + \hat{y}(\tau) = (\lambda\hat{x} + \hat{y})(\tau).$$

Portanto $\widehat{\lambda x + y} = \lambda\hat{x} + \hat{y}$. Assim,

$$\gamma(\lambda x + y) = \widehat{\lambda x + y} = \lambda\hat{x} + \hat{y} = \lambda\gamma(x) + \gamma(y).$$

Da mesma forma, para $\tau \in \Omega(A)$,

$$(\widehat{xy})(\tau) = \tau(xy) = \tau(x)\tau(y) = \hat{x}(\tau)\hat{y}(\tau) = (\hat{x}\hat{y})(\tau).$$

Portanto $\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y}$. Assim,

$$\gamma(xy) = \widehat{xy} = \hat{x}\hat{y} = \gamma(x)\gamma(y).$$

Então γ é um homomorfismo. Queremos mostrar que $\|\gamma(a)\|_\infty \leqslant \|a\|$. Note que

$$\|\gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau\in\Omega(A)} |\hat{a}(\tau)| = \sup_{\tau\in\Omega(A)} |\tau(a)|. \tag{5.4}$$

Pelo Teorema 5.0.4, se A é unital então $\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\}$. Se A é não unital então $\sigma(a) = \{\tau(a) \mid \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$. Portanto

$$\sup_{\tau\in\Omega(A)} |\tau(a)| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = r(a). \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5) temos $\|\gamma(a)\|_\infty = r(a)$, isto é, $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$. Como $r(a) \leqslant \|a\|$, então $\|\gamma(a)\|_\infty \leqslant \|a\|$. Concluímos que γ é um homomorfismo contrativo. □

A aplicação γ é a representação de Gelfand de A.

6 O Teorema de Gelfand

Neste capítulo estudaremos as C^*-álgebras. Por último vamos demonstrar o Teorema de Gelfand.

6.1 C*-Álgebras

A seguir vamos apresentar definições e exemplos de C^*-álgebras e algumas de suas propriedades.

Definição 6.1.1. *Seja A uma álgebra. Dizemos que uma aplicação conjugado linear*

$$* : A \longrightarrow A, \quad a \mapsto a^*,$$

é uma involução, se para quaisquer $a, b \in A$, $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$. O par $(A, *)$ é chamado de um álgebra involutiva ou $*$-álgebra.

Definição 6.1.2. *Seja A uma álgebra e um subconjunto S de A. Dizemos que S é autoadjunto se o conjunto $S^* = \{a^* |\ a \in S\}$, satisfaz $S^* = S$. No caso de S ser uma subálgebra de A então dizemos que S é uma $*$-subálgebra de A.*

Note que uma $*$-subálgebra S de A é uma $*$-álgebra com a restrição $*|_S$.

Exemplo 6.1.3. *Os complexos são uma $*$-álgebra com a involução definida como o conjugado.*

Exemplo 6.1.4. *Seja A uma $*$-álgebra. Então $\tilde{A}$ é uma $*$-álgebra com a involução definida por $(\lambda, a)^* = (\overline{\lambda}, a^*)$. De fato,*

$$((\lambda, a)^*)^* = (\overline{\lambda}, a^*)^* = (\overline{\overline{\lambda}}, (a^*)^*) = (\lambda, a).$$

E para (λ, a) e $(\alpha, b) \in \tilde{A}$, temos

$$\begin{aligned} ((\lambda, a)(\alpha, b))^* &= (\lambda\alpha, \lambda b + \alpha a + ab)^* = (\overline{\lambda\alpha}, (\lambda b + \alpha a + ab)^*) \\ &= (\overline{\lambda}\overline{\alpha}, \overline{\lambda} b^* + \overline{\alpha} a^* + b^* a^*) = (\overline{\alpha}, b^*)(\overline{\lambda}, a^*) \\ &= (\alpha, b)^*(\lambda, a)^*. \end{aligned}$$

Além disso, vamos mostrar que tal aplicção é conjugado linear. Para $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, *temos*

$$\begin{aligned}(\lambda_1(\lambda, a) + (\alpha, b))^* &= (\lambda_1\lambda + \alpha, \lambda_1 a + b)^* = (\overline{\lambda_1\lambda + \alpha}, (\lambda_1 a + b)^*) \\ &= (\overline{\lambda_1\lambda} + \overline{\alpha}, \overline{\lambda_1}a^* + b^*) = \overline{\lambda_1}(\overline{\lambda}, a^*) + (\overline{\alpha}, b^*) \\ &= \overline{\lambda_1}(\lambda, a)^* + (\alpha, b)^*.\end{aligned}$$

Exemplo 6.1.5. *Sejam* A *uma* $*$*-álgebra e* I *um ideal de* A *autoadjunto. Então a aplicação* $\overline{a} \mapsto (\overline{a})^* = \overline{a^*}$ *é uma involução em* A/I.

Primeiro vamos mostrar que tal operação está bem definida. Sejam $a, b \in A$ *tal que* $a \sim b$, *isto é,* $a - b \in I$. *Como* I *é autoadjunto, então* $a^* - b^* = (a - b)^* \in I$. *Logo,* $a^* \sim b^*$. *Para* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $c, c_1 \in A$, *temos*

$$(\lambda\overline{c} + \overline{c_1})^* = (\overline{\lambda c + c_1})^* = \overline{(\lambda c + c_1)^*} = \overline{\overline{\lambda}c^* + c_1^*} = \overline{\lambda}\overline{c}^* + \overline{c_1}^*$$

Assim, tal aplicação é conjugado linear. Também, $((\overline{c})^*)^* = \overline{(c^*)^*} = \overline{c}$ *e* $((\overline{c})(\overline{c_1}))^* = \overline{(cc_1)^*} = \overline{c_1^* c^*} = (\overline{c_1})^*(\overline{c})^*$. *Logo,* A/I *é uma* $*$*-álgebra.*

Lema 6.1.6. *Seja* A *uma* $*$*-álgebra e* $a \in A$. *Então*

1. $0^* = 0$.
2. $(-a)^* = -(a^*)$.
3. *Se* A *é unital, então* $1^* = 1$.
4. *Se* A *é unital e* $a \in Inv(A)$, *então* $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

Demonstração. Como $0 = 0^* - 0^* = (0+0)^* - 0^* = 0^* + 0^* - 0^* = 0^*$, segue que $0 = 0^*$.

Note que $a^* + (-a)^* = (a + (-a))^* = 0^* = 0$. Portanto, $(-a)^* = -(a^*)$. Agora, se A é unital, então $1 = (1^*)^* = (11^*)^* = (1^*)^*1^* = 11^* = 1^*$. Suponha que $a \in Inv(A)$. Então

$$(a^*)(a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1 = (aa^{-1})^* = (a^{-1})^*(a^*).$$

Dessa forma, $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. □

Definição 6.1.7. *Seja A uma $*$-álgebra tal que A é uma álgebra de Banach. Dizemos A é uma $*$-álgebra de Banach se para todo $a \in A$, $\|a\| = \|a^*\|$.*

Exemplo 6.1.8. *Os complexos são uma $*$-álgebra de Banach, já que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = |\overline{\lambda}|$.*

Em uma $*$-álgebra de Banach se a é um elemento não nulo então a^* é não nulo, já que $0 < \|a\| = \|a^*\|$.

Definição 6.1.9. *Seja A uma $*$-álgebra de Banach. Dizemos que A é uma C^*-álgebra se para qualquer $a \in A$, temos $\|a^*a\| = \|a\|^2$.*

Exemplo 6.1.10. *Seja H um espaço de Hilbert. Então a álgebra $B(H)$ do Exemplo 2.1.9 é uma C^*-álgebra com a involução $T \mapsto T^*$, tal que para quaisquer $x, y \in H$, é válido*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

A demonstração que $B(H)$ é uma C^*-álgebra pode ser vista em (KREYSZIG, 1978).

Se a é um elemento de uma C^*-álgebra, tome $b = a^*$. Então $\|b^*b\| = \|b\|^2$, isto é, $\|(a^*)^*a^*\| = \|a^*\|^2$. Como $\|a^*\| = \|a\|$, segue que $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Lema 6.1.11. *Seja A uma $*$-álgebra tal que A é uma álgebra de Banach e satisfaz $\|a^*a\| \geqslant \|a\|^2$, para todo $a \in A$. Então A é uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Temos para todo $a \in A$, $\|a\|^2 \leqslant \|a^*a\| \leqslant \|a\|\|a^*\|$, assim $\|a\| \leqslant \|a^*\|$. Segue que $\|a^*\| \leqslant \|(a^*)^*\| = \|a\|$, portanto $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$.

Como A é uma álgebra de Banach então $\|a^*a\| \leqslant \|a^*\|\|a\| \leqslant \|a\|^2$, para todo $a \in A$.

□

Exemplo 6.1.12. *Sejam A e B C^*-álgebras. O espaço $A \oplus B$ é um espaço de Banach com as operações*

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ \lambda(a_1, b_1) &= (\lambda a_1, \lambda b_1),\end{aligned}$$

e a norma em $A \oplus B$ *definida por* $\|(a_1, b_1)\| = \max\{\|a_1\|, \|b_1\|\}$. *Então* $A \oplus B$ *é uma* $C*$*-álgebra com as operações*

$$\begin{aligned} (a_1, b_1)(a_2, b_2) &= (a_1a_2, b_1b_2) & (6.1)\\ (a_1, b_1)^* &= (a_1^*, b_1^*) & (6.2) \end{aligned}$$

Observe que a associatividade e bilinearidade da operação (6.1) *segue da associatividade e bilinearidade das multiplicações de* A *e* B. *Então a operação* (6.1) *é uma multiplicação em* $A \oplus B$. *Para* $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \oplus B$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é válido*

$$\begin{aligned} (\lambda(a_1, b_1) + (a_2, b_2))^* = (\overline{\lambda}a_1^* + a_2^*, \overline{\lambda}b_1^* + b_2^*) &= \overline{\lambda}(a_1^*, b_1^*) + (a_2^*, b_2^*)\\ &= \overline{\lambda}(a_1, b_1)^* + (a_2, b_2)^* \end{aligned}$$

Então a operação (6.2) *é conjugado linear. Além disso,*

$$(a_1, b_1)^{**} = (a_1^*, b_1^*)^* = (a_1^{**}, b_1^{**}) = (a_1, b_1).$$

E,

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1)(a_2, b_2))^* = ((a_1a_2, b_1b_2))^* &= ((a_1a_2)^*, (b_1b_2)^*) = (a_2^*a_1^*, b_2^*b_1^*)\\ &= (a_2^*, b_2^*)(a_1^*, b_1^*) = (a_2, b_2)^*(a_1, b_1)^*. \end{aligned}$$

Então a operação (6.2) *é uma involução. Portanto* $A \oplus B$ *é uma* $*$*-álgebra e para concluir que* $A \oplus B$ *é uma álgebra de Banach falta mostrar que a norma é submultiplicativa. De fato,*

$$\begin{aligned} \|(a_1, b_1)(a_2, b_2)\| &= \|((a_1a_2, b_1b_2)\| = \max\{\|a_1a_2\|, \|b_1b_2\|\}\\ &\leqslant \max\{\|a_1\|\|a_2\|, \|b_1\|\|b_2\|\}\\ &\leqslant \max\{\|a_1\|, \|b_1\|\} \max\{\|a_2\|, \|b_2\|\} = \|(a_1, b_1)\|\|(a_2, b_2)\|. \end{aligned}$$

Suponha que $\|(a_1, b_1)\| = \|a_1\|$, *então*

$$\|(a_1, b_1)^*(a_1, b_1)\| = \|(a_1^*a_1, b_1^*b_1)\| = \max\{\|a_1^*a_1\|, \|b_1^*b_1\|\}.$$

Como $\|a_1^*a_1\| = \|a_1\|^2$ *e* $\|b_1^*b_1\| = \|b_1\|^2$, *segue que*

$$\begin{aligned} \|(a_1, b_1)^*(a_1, b_1)\| = \|(a_1^*a_1, b_1^*b_1)\| &= \max\{\|a_1\|^2, \|b_1\|^2\}\\ &= \|a_1\|^2 = \|(a_1, b_1)\|^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.1.11, $A \oplus B$ *é uma* C^**-álgebra.*

Dado uma C^*-álgebra A, pelo exemplo anterior $\mathbb{C} \oplus A$ é uma C^*-álgebra. Tal exemplo nos será útil e vamos denotar a C^*-álgebra $\mathbb{C} \oplus A$ por $\tilde{A}_1$.

Exemplo 6.1.13. *Considere a álgebra de Banach unital $l^\infty(S)$. Defina em $l^\infty(S)$ a aplicação $f \mapsto f^* = \overline{f}$. Vamos mostrar que $l^\infty(S)$ é uma C^*-álgebra. Sejam $f_1, f_2 \in l^\infty(S)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então*

$$(\lambda f_1 + f_2)^* = \overline{\lambda f_1} + \overline{f_2} = \overline{\lambda} f_1^* + f_2^*,$$

e claramente $f_1^{**} = f$ e $(f_2 f_1)^* = f_1^* f_2^*$. Como $f_1^* f_1 = \overline{f_1} f_1 = |f|^2$, e

$$\sup_{x \in S} |f^2(x)| = (\sup_{x \in S} |f(x)|)^2,$$

Então

$$\|f\|_\infty^2 = \|f^2\|_\infty = \|f^* f\|_\infty.$$

Segue do Lema 6.1.11, que $l^\infty(S)$ é uma C^*-álgebra.

Definição 6.1.14. *Seja A uma C^*-álgebra. Se B é uma $*$-subálgebra fechada de A então dizemos que B é uma C^*-subálgebra de A.*

Note que uma C^*-subálgebra é também uma C^*-álgebra.

Exemplo 6.1.15. *Seja X um espaço topológico. O espaço $C_b(X)$ do Exemplo 2.1.11, é uma C^*-subálgebra de $l^\infty(X)$. De fato, se $f \in C_b(X)$ então $f^* = \overline{f} \in C_b(X)$.*

Exemplo 6.1.16. *Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto. Se $f \in C_0(X)$, para qualquer $x \in X$, $|\overline{f(x)}| = |f(x)|$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $K = \{x \in X : |\overline{f(x)}| \geqslant \varepsilon\}$, é compacto, pois $K = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Portanto $f^* \in C_0(X)$ e $C_0(X)$ é uma C^*-subálgebra de $l^\infty(X)$.*

No Exemplo 2.1.8, denotamos a classe de equivalência de f por $\overline{f}$. No próximo exemplo vamos denotar por $[f]$.

Exemplo 6.1.17. *Seja (X, Ω, μ) um espaço de medida. Então $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é uma C^*-álgebra com a involução definida por $f \mapsto [f]^* = [\overline{f}]$ (classe de equivalência do conjugado de f).*

Sejam $f \sim f_1$. Logo, existe $P \in \Omega$ tal que $\mu(P) = 0$ e para $x \in P^c$, temos $f(x) = f_1(x)$. Então, $\overline{f(x)} = \overline{f_1(x)}$ para $x \in P^c$. Portanto $\overline{f} \sim \overline{f_1}$. Então a operação está bem definida.

Note que tal aplicação é conjugado linear. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $[f_1], [f_2] \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, temos

$$([\lambda f_1 + f_2])^* = [\overline{\lambda f_1 + f_2}] = \overline{\lambda}[\overline{f_1}] + [\overline{f_2}] = \overline{\lambda}[f_1]^* + [f_2]^*.$$

Além disso, satisfaz

$$\begin{aligned} [f_1]^{**} = [\overline{f}]^* &= [\ \overline{\overline{f}}\ ] = [f], \\ ([f_2][f_1])^* = [f_2 f_1]^* = [\overline{f_2 f_1}] &= [\overline{f_2}][\overline{f_1}] = [f_1]^*[f_2]^*. \end{aligned}$$

Então $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é uma $*$-álgebra e uma álgebra de Banach. Vamos mostrar que $\|f_1\|^2 \leqslant \|f_1^* f_1\| = \|f_1^2\|$. Como $\|f_1\| = \inf\{sup\{|f_1(x)| : x \in P^c\} : P \in \Omega,\ \mu(P) = 0\}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n \in \Omega$ tal que $\mu(P_n) = 0$ e

$$\sup_{x \in P_n^c} |f_1(x)|^2 < \|f_1^2\| + \frac{1}{n}.$$

Defina $K = \cup_{n \in \mathbb{N}} P_n$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in K^c} |f_1(x)|^2 < \|f_1^2\| + \frac{1}{n}.$$

Segue que

$$\sup_{x \in K^c} |f_1(x)|^2 \leqslant \|f_1^2\|.$$

Como $(\sup_{x \in K^c} |f_1(x)|)^2 = \sup_{x \in K^c} |f_1(x)|^2$. Observe que $\mu(K) = 0$, então $(\inf\{\ \sup\{|f_1(x)| : x \in P^c\} : P \in \Omega,\ \mu(P) = 0\})^2 \leqslant (\sup_{x \in K^c} |f_1(x)|)^2$. Portanto,

$$\|f_1\|^2 = (\inf\{\ \sup\{|f_1(x)| : x \in P^c\} : P \in \Omega,\ \mu(P) = 0\})^2 \leqslant \|f_1^2\|.$$

Pelo Lema 6.1.11, $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ é uma C^*-álgebra.

Definição 6.1.18. *Sejam A uma $*$-álgebra e $a \in A$.*

1. *Se $a = a^*$, dizemos que a é autoadjunto.*
2. *Se $a^* a = a a^*$, dizemos que a é normal.*

3. *Se A é unital e $a^*a = 1 = aa^*$, dizemos que a é unitário.*

Exemplo 6.1.19. *Considere o espaço de Hilbert ℓ^2 (espaço das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$). Defina o operador*

$$T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2, \quad (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (0, x_2, x_3, ...).$$

Como $\|T\| = 1$, então $T \in B(\ell^2)$. Note que para quaisquer $\ell^2 \ni x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ e $\ell^2 \ni y = (y_1, y_2, y_3, ...)$ temos

$$\langle T(x), y\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} x_n y_n = \langle x, T(y)\rangle.$$

Portanto, $T = T^*$.

Exemplo 6.1.20. *Considere a C^*-álgebra $B(\mathbb{C}^n)$. Para $T \in B(\mathbb{C}^n)$ e para uma base dada de $\mathbb{C}^n$, podemos representar T e T^* como matrizes quadradas $n \times n$, A e B respectivamente. Então, usando que para $x, y \in \mathbb{C}^n$,*

$$\langle x, y\rangle = x^t \bar{y},$$

onde x e y são escritos como vetores coluna e x^t significa o vetor transposto, temos

$$\langle T(x), y\rangle = \langle Ax, y\rangle = (Ax)^t\overline{y} = x^t A^t \overline{y} = x^t\overline{\overline{A}^t y} = \langle x, \overline{A}^t y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Segue que $B = \overline{A}^t$.

No caso dos complexos, note que todo elemento pode ser escrito de forma única como $a + ib$, com a, b autoadjuntos (neste caso reais). Este mesmo fato vale em geral conforme o seguinte lema.

Lema 6.1.21. *Sejam A uma $*$-álgebra e $a \in A$. Então existem únicos elementos autoadjuntos $b, c \in A$ tais que $a = b + ic$. Além disso, $b = \dfrac{a + a^*}{2}$ e $c = \dfrac{a - a^*}{2i}$.*

Demonstração. De fato, para $b = \dfrac{a + a^*}{2}$ e $c = \dfrac{a - a^*}{2i}$ temos $b + ic = a$. Também temos

$$\left(\frac{a + a^*}{2}\right)^* = \frac{a^* + (a^*)^*}{2} = \frac{a^* + a}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{a - a^*}{2i}\right)^* = \frac{-a^* + (a^*)^*}{2i} = \frac{-a^* + a}{2i}.$$

Portanto b e c são autoadjuntos. Agora suponha que existem elementos autoadjuntos $b_1, c_1 \in A$ tais que $b_1 + ic_1 = a$. Então,

$$b_1 - ic_1 = b_1^* - ic_1^* = (b_1 + ic_1)^* = a^*.$$

Segue que

$$b_1 = \frac{2b_1}{2} = \frac{(b_1 + ic_1 + b_1 - ic_1)}{2} = \frac{a + a^*}{2}.$$

Da mesma forma,

$$c_1 = \frac{2ic_1}{2i} = \frac{(b_1 + ic_1 + -b_1 + ic_1)}{2i} = \frac{a - a^*}{2i}.$$

$\square$

Teorema 6.1.22. *Seja A uma C^*-álgebra e a um elemento autoadjunto de A. Então $r(a) = \|a\|$.*

Demonstração. Como a é autoadjunto, então $\|a^2\| = \|a^*a\|$. Como A é uma C^*-álgebra, então $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Segue que $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$.

Vamos mostar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. Suponha que para $k \in \mathbb{N}$, é valida a igualdade $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$. Como a é autoadjunto então a^{2k} é autoadjunto. Segue que

$$\|a^{2^{k+1}}\| = \|a^{2 \cdot 2^k}\| = \|a^{2k} a^{2k}\| = \|(a^{2k})^* a^{2k}\|.$$

Como A é uma C^*-álgebra então

$$\|(a^{2k})^* a^{2k}\| = \|a^{2k}\|^2.$$

Da hipótese de indução temos

$$\|a^{2k}\|^2 = (\|a\|^{2^k})^2 = \|a\|^{2 \cdot 2^k} = \|a\|^{2^{k+1}}.$$

Portanto para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$. Pelo Teorema 4.0.15,

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|a^{2^n}\|^{1/(2^n)} = \lim_{n \to \infty} \|a\| = \|a\|.$$

$\square$

Em geral, um espaço vetorial pode ter várias normas que o transformam em espaço normado. Para C^*-álgebras isto não ocorre, conforme o seguinte corolário.

Corolario 6.1.23. *Seja A uma $*$-álgebra. Então existe no máximo uma norma em A tal que A é uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Sejam $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ normas em A que tornam A em uma C^*-álgebra. Assim, para $a \in A$, a^*a é autoadjunto. Então pelo Teorema 6.1.22, para $j \in \{1, 2\}$ temos

$$(\|a\|_j)^2 = \|a^*a\|_j = r(a^*a).$$

Logo, $\|a\|_1 = \sqrt{r(a^*a)} = \|a\|_2$, para todo $a \in A$. Portanto $\| \ \|_1 = \| \ \|_2$. □

De certa forma para álgebras de Banach, já havíamos notado uma relação entre a norma e sua estrutura álgebrica, como por exemplo o Lema 3.0.17 e o Teorema de Beurling. Para C^*-álgebras, da igualdade $\|a\| = \sqrt{r(a^*a)}$, a sua norma fica determinada pela sua estrutura álgebrica.

Definição 6.1.24. *Sejam A e B $*$-álgebras. Dizemos que um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ é um $*$-homomorfismo se φ preserva adjuntos, isto é, para todo $a \in A$, $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$.*

Exemplo 6.1.25. *Sejam A uma $*$-álgebra e I um ideal de A autoadjunto. Considere a $*$-álgebra do Exemplo 6.1.5. Então a aplicação*

$$\psi : A \longrightarrow A/I, \quad a \mapsto \overline{a},$$

é um $*$-homomorfismo. De fato, pelo Exemplo 4.0.7, já sabemos que tal aplicação é um homomorfismo. Note que para todo $a \in A$,

$$\psi(a^*) = \overline{a^*} = (\overline{a})^* = \psi(a)^*.$$

Exemplo 6.1.26. *Considere a C^*-álgebra $B(\mathbb{C}^2)$. Tome o operador $L \in B(\mathbb{C}^2)$ tal que na base canônica seja representado pela matriz M, dada por*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue então que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Defina a aplicação φ em $B(\mathbb{C}^2)$, por

$$\varphi(T) = LTL^{-1}.$$

Note que para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T_1, T_2 \in B(\mathbb{C}^2)$ temos

$$\varphi(\lambda T_1 + T_2) = L(\lambda T_1 + T_2)L^{-1} = \lambda L T_1 L^{-1} + L T_2 L^{-1} = \lambda\varphi(T_1) + \varphi(T_2).$$

E,

$$\varphi(T_1 T_2) = L(T_1 T_2)L^{-1} = (LT_1L^{-1})(LT_2L^{-1}) = \varphi(T_1)\varphi(T_2).$$

Portanto φ é um homomorfismo. Vamos mostrar que φ não é um $*$-homomorfismo.

Tome o operador $T \in B(\mathbb{C}^2)$ representado pela matriz A na base canônica, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo exemplo 6.1.20, segue que o adjunto de L, L^{-1} e T são representados pelas matrizes

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (M^{-1})^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad e \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Como

$$MA^*M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (M^{-1})^*AM^* = (MAM^{-1})^*,$$

Segue que $\varphi(T^*) \neq \varphi(T)^*$.

Lema 6.1.27. *Sejam A e B $*$-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um $*$-homomorfismo. Então a imagem de φ é uma $*$-subálgebra de B.*

Demonstração. Pelo Lema 4.0.8, $Im(\varphi)$ é subálgebra de B. Seja $b \in Im(\varphi)$. Então existe $a \in A$, tal que $\varphi(a) = b$. Como φ é um $*$-homomorfismo então $b^* = (\varphi(a))^* = \varphi(a^*)$. Portanto $b^* \in Im(\varphi)$. Logo, $Im(\varphi)$ é uma $*$-subálgebra de B. $\square$

6.2 Unitização de C*-Álgebras

Nesta seção mostraremos que toda C^*-álgebra pode ser incluída em uma C^*-álgebra unital.

Definição 6.2.1. *Seja A uma C^*-álgebra. Dizemos que o par (L, R) de operadores lineares limitados em A é um duplo centralisador em A, se para quaisquer $a, b \in A$, satisfaz*

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b) \text{ e } R(a)b = aL(b).$$

Exemplo 6.2.2. *Sejam A uma C^*-álgebra e $c \in A$. Defina as aplicações $L_c(a) = ca$ e $R_c(a) = ac$. Vamos mostrar que o par (L_c, R_c) é um duplo centralisador em A. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a, b \in A$, temos*

$$L_c(\lambda a + b) = c(\lambda a + b) = \lambda ca + cb = \lambda L_c(a) + L_c(b).$$

Da mesma forma, mostramos que $R_c(\lambda a + b) = \lambda R_c(a) + R_c(b)$. Para $a \in A$, temos

$$\|L_c(a)\| = \|ca\| \leqslant \|c\|\|a\|.$$

Como $\|c\| = \|c^*\|$ e $\|cc^*\| = \|c\|^2$, então

$$\|L_c(\frac{c^*}{\|c^*\|})\| = \|c\frac{c^*}{\|c^*\|}\| = \frac{\|c\|^2}{\|c^*\|} = \frac{\|c\|^2}{\|c\|} = \|c\|.$$

Dessa forma, $\|L_c\| = \|c\|$. De modo análogo podemos mostrar $\|R_c\| = \|c\|$. Veja que o par (L_c, R_c) satisfaz para quaisquer $a, b \in A$,

$$L_c(ab) = c(ab) = (ca)b = L_c(a)b, \;\; R_c(ab) = (ab)c = a(bc) = aR_c(b) \text{ e}$$

$$R_c(a)b = (ac)b = a(cb) = aL_c(b).$$

Portanto, (L_c, R_c) é um duplo centralisador.

Lema 6.2.3. *Se (L, R) é um duplo centralisador em uma C^*-álgebra A, então $\|L\| = \|R\|$.*

Demonstração. Seja $b \in A$. Se $L(b) \neq 0$, então

$$\|\frac{L(b)^*}{\|L(b)^*\|}L(b)\| = \frac{\|L(b)\|^2}{\|L(b)\|} = \|L(b)\|.$$

Portanto,

$$\|L(b)\| \leqslant \sup_{\|a\|=1} \|aL(b)\|. \tag{6.3}$$

Para $a, b \in A$, temos

$$\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leqslant \|R(a)\|\|b\| \leqslant \|R\|\|a\|\|b\|.$$

Segue que

$$\sup_{\|a\|=1} \|aL(b)\| \leqslant \|R\|\|b\|. \tag{6.4}$$

Por (6.3) e (6.4) temos $\|L(b)\| \leqslant \|R\|\|b\|$. Segue que $\|L\| \leqslant \|R\|$. A desigualdade $\|L\| \leqslant \|R\|$ segue de forma similar a anterior.

□

O conjunto de duplo centralizadores em uma C^*-álgebra A é denotado por $M(A)$. Na próxima proposição vamos considerar tal conjunto com as operações de soma e multiplicção por escalar coordenada a coordenada.

Lema 6.2.4. *Seja A uma C^*-álgebra. Então $M(A)$ é um subespaço vetorial fechado de $B(A) \oplus B(A)$ com a norma do Exemplo 6.1.12.*

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$. Para quaisquer $a, b \in A$, temos

$$(\lambda L_1 + L_2)(ab) = \lambda L_1(a)b + L_2(a)b = (\lambda L_1 + L_2)(a)b,$$

$$(\lambda R_1 + R_2)(ab) = \lambda a R_1(b) + aR_2(b) = a(\lambda R_1 + R_2)(b),$$

$$(\lambda R_1 + R_2)(a)b = \lambda R_1(a)b + R_2(a)b = \lambda a L_1(b) + aL_2(b) = a(\lambda L_1 + L_2)(b).$$

Então $\lambda(L_1, R_1)+(L_2, R_2) \in M(A)$. Portanto $M(A)$ é um subespaço vetorial de $B(A) \oplus B(A)$.

Vamos mostrar que tal subespaço é fechado. Seja $(L, R) \in \overline{M(A)}$. Então existe uma sequência $(L_n, R_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M(A)$, tal que $(L_n, R_n) \longrightarrow (L, R)$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geqslant n_0$,

$$\|(L_n - L, R_n - R\| < \varepsilon.$$

Como $\|(L_n - L, R_n - R)\| = \max\{\|L_n - L\|, \|R_n - R\|\}$, segue que $L_n \longrightarrow L$ e $R_n \longrightarrow R$ em $B(A)$. Assim, pela Proposição 2.1.18,

$$L(ab) = \lim_{n\to\infty} L_n(ab) = \lim_{n\to\infty} L_n(a)b = L(a)b,$$

$$R(ab) = \lim_{n\to\infty} R_n(ab) = \lim_{n\to\infty} aR_n(b) = aR(b),$$

$$R(a)b = \lim_{n\to\infty} R_n(a)b = \lim_{n\to\infty} aL_n(b) = aL(b).$$

Logo $(L, R) \in M(A)$. □

Se $L \in B(A)$, defina $L^* : A \longrightarrow A$, por $L^*(a) = (L(a^*))^*$.

Lema 6.2.5. *Seja A uma C^*-álgebra. A aplicação $L \mapsto L^*$ é uma aplicação conjugado linear isométrica de $B(A)$ em $B(A)$ que satisfaz*

1. $(L^*)^* = L$.
2. $(LL_1)^* = L^*L_1^*$.

Para $L, L_1 \in B(A)$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $L^* \in B(A)$. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a, b \in A$. Temos

$$\begin{aligned} L^*(\lambda a + b) &= (L((\lambda a + b)^*))^* = (L(\overline{\lambda} a^* + b^*))^* \\ &= \lambda(L(a^*))^* + (L(b^*))^* = \lambda L^*(a) + L^*(b). \end{aligned}$$

Também, $\|L^*(a)\| = \|(L(a^*))^*\| = \|L(a^*)\|$. Como $\|a^*\| = \|a\|$, então

$$\begin{aligned} \|L^*\| &= \sup\{\|L^*(a)\| \mid a \in A,\ \|a\| = 1\} \\ &= \sup\{\|L(a^*)\| \mid a \in A,\ \|a\| = 1\} = \|L\|. \end{aligned}$$

Logo, $L^* \in B(A)$.

Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $L_1, L_2 \in B(A)$. Então para $a \in A$,

$$\begin{aligned} (\lambda L_1 + L_2)^*(a) &= ((\lambda L_1 + L_2)(a^*))^* = (\lambda L_1(a^*) + L_2(a^*))^* \\ &= \overline{\lambda}(L_1(a^*))^* + (L_2(a^*))^* = \overline{\lambda} L_1^*(a) + L_2^*(a). \end{aligned}$$

Dessa forma, $L \mapsto L^*$ é uma aplicação conjugado linear.

Como $(L^*)^*(a) = ((L^*)(a^*))^* = (L(a^{**}))^{**} = L(a)$ para todo $a \in A$, então $(L^*)^* = L$. Além disso, para todo $a \in A$,

$$(L^* \circ L_1^*)(a) = L^*((L_1(a^*))^*) = ((L \circ L_1)(a^*))^* = (L \circ L_1)^*(a).$$

Então $(LL_1)^* = L^* L_1^*$. □

Proposição 6.2.6. *Seja A uma C^*-álgebra. Então o espaço vetorial $M(A)$ com a operação de multiplicação definida por*

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 L_2, R_2 R_1), \tag{6.5}$$

e a involução por

$$(L_1, R_1)^* = (R_1^*, L1^*), \tag{6.6}$$

é uma C^*-álgebra.

Demonstração. Sejam $(L_1, R_1), (L_2, R_2)$ e $(L_3, R_3) \in M(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Primeiro vamos mostrar que a multiplicação é fechada em $M(A)$. Para quaisquer $a, b \in A$, é válido

$$(L_1 L_2)(ab) = L_1(L_2(a)b) = L_1(L_2(a))b,$$

$$(R_2 R_1)(ab) = R_2(aR_1(b)) = aR_2(R_1(b)),$$
$$a(L_1 L_2)(b) = R_1(a)L_2(b) = R_2(R_1(a))b.$$

Assim, $(L_1 L_2, R_2 R_1) \in M(A)$.

A associatividade da multiplicação segue do fato que a composição de funções é associativa. Vamos mostrar que a aplicação (6.5) é bilinear. Utilizando que $B(A)$ é uma álgebra (Exemplo 6.1.10), temos

$$\begin{aligned}
(L_1, R_1)(\lambda(L_2, R_2) + (L_3, R_3)) &= (L_1, R_1)(\lambda L_2 + L_3, \lambda R_2 + R_3)) \\
&= (L_1(\lambda L_2 + L_3), (\lambda R_2 + R_3)R_1) \\
&= (\lambda L_1 L_2 + L_1 L_3, \lambda R_2 R_1 + R_3 R_1) \\
&= (\lambda L_1 L_2 + L_1 L_3, \lambda R_2 R_1 + R_3 R_1) \\
&= \lambda(L_1 L_2, R_2 R_1) + (L_1 L_3, R_3 R_1) \\
&= \lambda(L_1, R_1)(L_2, R_2) + (L_1, R_1)(L_3, R_3).
\end{aligned}$$

De modo análogo é possível mostrar que $(\lambda(L_2, R_2) + (L_3, R_3))(L_1, R_1) = \lambda(L_2, R_2)(L_1, R_1) + (L_3, R_3)(L_1, R_1)$. Portanto a aplicação (6.5) é bilinear.

Vamos mostrar que (6.6) é uma involução. Pelo Lema 6.2.5, a aplicação $L \mapsto L^*$ é conjugado linear, então

$$\begin{aligned}
(\lambda(L_1, R_1) + (L_2, R_2))^* &= ((\lambda L_1 + L_2, \lambda R_1 + R_2))^* \\
&= ((\lambda R_1 + R_2)^*, (\lambda L_1 + L_2)^*) \\
&= (\overline{\lambda} R_1^* + R_2^*, \overline{\lambda} L_1^* + L_2)^*) \\
&= \overline{\lambda}(R_1^*, L_1^*) + (R_2^*, L_2^*) = \overline{\lambda}(L_1, R_1)^* + (L_2, R_2)^*.
\end{aligned}$$

Também temos a propriedade

$$((L_1, R_1)^*)^* = (R_1^*, L_1^*)^* = ((L_1^*)^*, (R_1^*)^*).$$

Pelo Lema 6.2.5, $(L_1^*)^* = L_1$, então $((L_1, R_1)^*)^* = (L_1, R_1)$. Novamente pelo Lema 6.2.5, é válido que $(R_2 R_1)^* = R_2^* R_1^*$

$$\begin{aligned}
((L_1, R_1)(L_2, R_2))^* = (L_1 L_2, R_2 R_1)^* &= ((R_2 R_1)^*, (L_1 L_2)^*) \\
&= (R_2^* R_1^*, L_1^* L_2^*) \\
&= (R_2^*, L_2^*)(R_1^*, L_1^*) \\
&= (L_2, R_2)^*(L_1, R_1)^*.
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação (6.6) é uma involução. Como $B(A)$ é uma C^*-álgebra, então para $L_1, L_2 \in B(A)$ satisfaz $\|L_1 L_2\| \leqslant \|L_1\|\|L_2\|$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(L_1, R_1)(L_2, R_2)\| &= \|(L_1 L_2, R_2 R_1)\| = \|L_1 L_2\| \\
&\leqslant \|L_1\|\|L_2\| = \|(L_1, R_1)\|\|(L_2, R_2)\|.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a norma em $M(A)$ é submultiplicativa. Como $B(A) \oplus B(A)$ é um espaço de Banach então $M(A)$ é Banach, já que $M(A)$ é fechado em $B(A) \oplus B(A)$. Concluímos que $M(A)$ é uma $*$-álgebra de uma álgebra de Banach. Como para $\|a\| = 1$,

$$\begin{aligned}
\|L_1(a)\|^2 &= \|(L_1(a))^* L_1(a)\| = \|L_1^*(a^*) L_1(a)\| = \|a^*(R_1^* L_1)(a)\| \\
&\leqslant \|R_1^* L_1\| = \|(R_1^* L_1, R_1 L_1^*)\| = \|(L_1, R_1)^*(L_1, R_1)\|.
\end{aligned}$$

Como $\|L\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|L(a)\|^2$, então

$$\|(L, R)\|^2 = \|L\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|L(a)\|^2 \leqslant \|(L_1, R_1)^*(L_1, R_1)\|.$$

Do Lema 6.1.11, $M(A)$ é uma C^*-álgebra.

□

Lema 6.2.7. *Seja A uma C^*-álgebra. A aplicação*

$$\xi : A \longrightarrow M(A), \quad a \mapsto (L_a, R_a)$$

é um $*$-homomorfismo isométrico.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Note que para todo $c \in A$, $L_{\lambda a+b}(c) = (\lambda a + b)(c) = \lambda ac + bc = \lambda L_a(c) + L_b(c)$. Da mesma forma, podemos mostrar que $R_{\lambda a+b}(c) = \lambda R_a(c) + R_b(c)$. Também satisfaz, $L_{ab}(c) = (ab)c = a(bc) = (L_a L_b)(c)$ e $R_{ab}(c) = c(ab) = (R_b R_a)(c)$. Então

$$\begin{aligned} \xi(\lambda a + b) = (L_{\lambda a+b}, R_{\lambda a+b}) &= (\lambda L_a + L_b, \lambda R_a + R_b) \\ &= \lambda(L_a, R_a) + (L_b, R_b) = \lambda\xi(a) + \xi(b). \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} \xi(ab) = (L_{ab}, R_{ab}) &= (L_a L_b, R_b R_a) \\ &= (L_a, R_a)(L_b, R_b) = \xi(a)\xi(b). \end{aligned}$$

Portanto ξ é um homomorfismo. Note que $L_a^*(c) = (L_a(c^*))^* = (ac^*)^* = ca^* = R_{a^*}(c)$. De forma análogo, mostramos que $R_a^*(c) = L_{a^*}(c)$. Segue que $\xi(a^*) = (L_{a^*}, R_{a^*}) = (R_a^*, L_a^*) = (L_a, R_a)^* = (\xi(a))^*$. Que φ é uma isometria segue do Lema 6.2.3. □

Proposição 6.2.8. *Sejam A e B espaços de Banach e $\varphi : A \longrightarrow B$ uma transformação linear isometrica. Então $\varphi(A)$ é fechado em B.*

Demonstração. Seja $y \in \overline{\varphi(A)}$. Então existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varphi(A)$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \varphi(A)$ é uma sequência convergente em B, então tal sequência é de Cauchy.

Considere para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \varphi^{-1}(y_n)$. Então a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ é de Cauchy, já que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| = \|y_n - y_m\|$. Como A é completo, então $x_n \longrightarrow x$. Note que $\varphi(x) = y$, pois $y_n \longrightarrow \varphi(x)$, já que

$$0 \leqslant \|y_n - \varphi(x)\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\| = \|x_n - x\|,$$

e $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, então $\|y_n - \varphi(x)\| \longrightarrow 0$. Logo, $y \in \varphi(A)$.

□

Da proposição anterior temos que a imagem $\xi(A) \subset M(A)$ do Lema 6.2.7 é fechado em $M(A)$.

Vimos no Exemplo 6.1.4 que se A é uma $*$-álgebra, então $\tilde{A}$ é uma $*$-álgebra. Porém, observe que se $A = \mathbb{C}$ e $b = (1, -2) \in \tilde{A}$, temos

$$\|b\|^2 = 9 \quad \text{e} \quad \|b^*b\| = \|(1,0)\| = 1.$$

Logo, se A é C^*-álgebra, em geral $\tilde{A}$ com a norma $\|(\lambda, a)\| = |\lambda| + \|a\|$ não é uma C^*-álgebra. Futuramente iremos definir uma norma em $\tilde{A}$, de forma que $\tilde{A}$ seja uma C^*-álgebra.

Lema 6.2.9. *Sejam A uma $*$-álgebra e B uma C^*-álgebra. Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um $*$-homomorfismo injetor a aplicação definida em A por $\|a\|_A = \|\varphi(a)\|_B$ é uma norma submultiplicativa que satisfaz $\|a^*a\|_A = \|a\|_A^2$.*

Demonstração. Observe que pelo fato de φ ser linear e injetor então $\|\ \|_A$ é uma norma em A. Para $a, b \in A$,

$$\|ab\|_A = \|\varphi(ab)\|_B = \|\varphi(a)\varphi(b)\|_B \leqslant \|\varphi(a)\|_B\|\varphi(b)\|_B = \|a\|_A\|b\|_A.$$

Então $\|\ \|_A$ é submultiplicativa e para todo $A \in A$, satisfaz

$$\|a^*a\|_A = \|\varphi(a^*a)\|_B = \|(\varphi(a))^*\varphi(a)\|_B = \|\varphi(a)\|_B^2 = \|a\|_A^2.$$

□

Proposição 6.2.10. *Se A é uma C^*-álgebra, então existe uma única norma em $\tilde{A}$ fazendo dela uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Primeiro suponha que A possui unidade. Defina a aplicação

$$\varphi : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}_1, \quad (\lambda, a) \mapsto (\lambda, \lambda 1 + a).$$

Vamos mostrar que φ é um $*$-homomorfismo injetor. De fato, sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $(\lambda_1, b_1), (\lambda_2, b_2) \in \tilde{A}$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(\lambda_1, b_1) + (\lambda_2, b_2)) &= \varphi((\alpha\lambda_1 + \lambda_2, \alpha b_1 + b_2)) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \lambda_2, (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)1 + \alpha b_1 + b_2) \\ &= \alpha(\lambda_1, \lambda_1 1 + b_1) + (\lambda_2, \lambda_2 1 + b_2) \\ &= \alpha\varphi((\lambda_1, b_1)) + \varphi((\lambda_2, b_2)). \end{aligned}$$

Também satisfaz,

$$\begin{aligned} \varphi((\lambda_1, b_1)(\lambda_2, b_2)) &= \varphi((\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_1 + b_1 b_2)) \\ &= (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_2 1 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 b_1 + b_1 b_2) \\ &= (\lambda_1, \lambda_1 1 + b_1)(\lambda_2, \lambda_2 1 + b_2) = \varphi((\lambda_1, b_1))\varphi((\lambda_2, b_2)). \end{aligned}$$

Além disso, φ preserva adjunto, isto é,

$$(\varphi((\lambda_1, b_1)))^* = (\lambda_1, \lambda_1 1 + b_1)^* = (\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_1} 1 + b_1^*) = \varphi((\overline{\lambda_1}, b_1^*)) = \varphi((\lambda_1, b_1)^*).$$

Portanto φ é um $*$-homomorfismo. Claramente φ é injetor.

Defina $\|(\lambda, a)\|_1 = \|\varphi((\lambda, a))\|$. Pelo Lema 6.2.9, $\| \ \|_1$ é uma norma submultiplicativa que satisfaz $\|(\lambda, a)^*(\lambda, a)\|_1 = \|(\lambda, a)\|_1^2$, para $(\lambda, a) \in \tilde{A}$. Seja $(\alpha, b) \in \tilde{A}_1$. Então $\varphi((\alpha, -\alpha + b)) = (\alpha, \alpha - \alpha + b) = (\alpha, b)$. Então, φ é sobrejetor.

Vamos mostrar que $\| \ \|_1$ é completa. Seja uma sequência de Cauchy $(\lambda_n, a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\tilde{A}$. Então a sequência $(\varphi(\lambda_n, a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\tilde{A}_1$. Como $\tilde{A}_1$ é completo existe $(\alpha, b) \in \tilde{A}_1$ tal que a sequência $\varphi(\lambda_n, a_n) \longrightarrow (\alpha, b)$. Como φ é sobrejetora, existe (λ, a) tal que $\varphi(\lambda, a) = (\alpha, b)$. Então,

$$0 \leqslant \|(\lambda_n, a_n) - (\lambda, a)\| = \|\varphi(\lambda_n, a_n) - \varphi(\lambda, a)\| = \|\varphi(\lambda_n, a_n) - (\alpha, b)\|.$$

Como $\|\varphi(\lambda_n, a_n) - (\alpha, b)\| \longrightarrow 0$, então $(\lambda_n, a_n) \longrightarrow (\lambda, a)$. Portanto $\| \ \|_1$ é completa. Concluímos que $\tilde{A}$ é uma C^*-álgebra.

Suponha agora que A não possui unidade. Na notação do Lema 6.2.7, vamos mostrar que $\xi(A) \cap \mathbb{C}1 = 0$. Suponha que $\lambda 1 \in \xi(A) \cap \mathbb{C}1$ tal que $\lambda \neq 0$. Portanto existe $c \in A$ tal que $(L_c, R_c) = (\lambda id_A, \lambda id_A)$. O que implica que para todo $a \in A$, $(ca, ac) = (\lambda a, \lambda a)$, isto é,

$$\frac{c}{\lambda} a = a = a \frac{c}{\lambda}.$$

Portanto $\dfrac{c}{\lambda} = 1$, o que é um absurdo.

Defina $\varphi : \tilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}1 \oplus \xi(A), \quad (\lambda, a) \mapsto (\lambda id_A + L_a, \lambda id_A + R_a)$. isto é, $\varphi(\lambda, a) = \lambda 1 + \xi(a)$. Claramente φ é um isomorfismo. Também satisfaz

$$(\varphi(\lambda, a))^* = \overline{\lambda}1 + (\xi(a))^* = \overline{\lambda}1 + \xi(a^*) = \varphi((\lambda, a)^*).$$

Defina agora a norma $\|(\lambda, a)\|_1 = \|\varphi(\lambda, a)\|$. Pelo Lema 6.2.9, $\| \ \|_1$ é uma norma submultiplicativa que satisfaz $\|(\lambda, a)^*(\lambda, a)\|_1 = \|(\lambda, a)\|_1^2$.

Falta mostrar que $\| \ \|_1$ é completo. Para isso, como sabemos que $\xi(A)$ é fechado em $M(A)$ então o espaço normado quociente $M(A)/\xi(A)$ com a norma da Proposição 2.2.5 está bem definido. Tome a função

$$\psi : M(A) \longrightarrow M(A)/\gamma(A), \quad (L, R) \mapsto \overline{(L, R)}.$$

A aplicação ψ é contínua, já que $\|\overline{(L, R)}\| = inf\{\|(L, R) + b\| \mid b \in \gamma(A)\} \leqslant \|(L, R)\|$, e assim $\|\psi\| \leqslant 1$. Como $\mathbb{C}\overline{1}$ tem dimensão finita implica que $\mathbb{C}\overline{1}$ é fechado em $M(A)/\gamma(A)$. Então $\mathbb{C}1 \oplus \xi(A) = \psi^{-1}(\mathbb{C}\overline{1})$ é fechado em $M(A)$. Como $M(A)$ é Banach segue que $\mathbb{C}1 \oplus \xi(A)$ é Banach.

Seja uma sequência de Cauchy $(\lambda_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\tilde{A}$. Então a sequência $(\varphi(\lambda_n, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}1 \oplus \xi(A)$. Como $\mathbb{C}1 \oplus \xi(A)$ é completo e sobrejetor existe $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ tal que a sequência $\varphi((\lambda_n, a_n)) \longrightarrow \varphi(\varphi(\lambda, a))$. Então,

$$0 \leqslant \|(\lambda_n, a_n) - (\lambda, a)\| = \|\varphi(\lambda_n, a_n) - \varphi(\lambda, a)\|.$$

Como $\|\varphi(\lambda_n, a_n) - \varphi(\lambda, a)\| \longrightarrow 0$, então $(\lambda_n, a_n) \longrightarrow (\lambda, a)$. Portanto $\| \ \|_1$ é completa. Portanto $\tilde{A}$ é uma C^*-álgebra. □

Veja que para $a \in A$, se A é unital então $\|(0, a)\|_1 = \|(0, 0 + a)\| = \|a\|$. Da mesma forma, para A não unital $\|(0, a)\|_1 = \|\xi(a)\| = \|a\|$. Portanto a função $A \ni a \mapsto (0, a) \in \tilde{A}$ é uma inclusão.

6.3 O Teorema de Gelfand

Nessa seção vamos demonstrar o Teorema de Gelfand.

Em geral, transformações lineares entre espaços normados não são necessariamente limitadas. Além disso, um homomorfismo entre álgebras (mesmo que limitadas) não precisam ser contrativos. Por exemplo, considere a C^*-álgebra $B(\mathbb{C}^n)$. Pelo Exemplo 2.1.16, a partir de $B(\mathbb{C}^n)$ podemos construir uma álgebra de Banach $(B(\mathbb{C}^n), \| \; \|_1)$, que denotaremos por B_1. Então o homomorfismo

$$id : B(\mathbb{C}^n) \longrightarrow B_1, \quad x \mapsto x,$$

nao é contrativo, já que $\|id\|_1 = 2$. Observe que B_1 não é uma C^*-álgebra. Para C^*-álgebras, vale o seguinte.

Teorema 6.3.1. *Sejam A uma $*$-álgebra de Banach e B uma C^*-álgebra. Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um $*-$homomorfismo, então φ é contrativo.*

Demonstração. Suponha primeiro que A e B são unitais e φ é um homomorfismo é unital. Então para todo $a \in A$, pelo Lema 4.0.9, $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$. Segue que $r(\varphi(a)) \leqslant r(a)$ para todo $a \in A$.

Note que para $a \in A$, $\varphi(a^*a)$ é um elemento autoadjunto em B, já que $\varphi(a^*a)^* = \varphi((a^*a)^*) = \varphi(a^*a)$. Portanto, pelo Teorema 6.1.22, $r(\varphi(a^*a)) = \|\varphi(a^*a)\|$. Então,

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)\|^2 &= \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*)\varphi(a)\| \\ &= \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leqslant r(a^*a). \end{aligned}$$

Como $r(a^*a) \leqslant \|a^*a\|$. Segue que

$$\|\varphi(a)\|^2 \leqslant r(a^*a) \leqslant \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Segue que $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$, para todo $a \in A$. Portanto φ é contrativo.

Suponha agora que φ não é um homomorfismo unital. Considere a $*$-álgebra $\tilde{A}$ de Banach, a C^*-álgebra $\tilde{A}$ e o homomorfismo $\tilde{\varphi}$ do Exemplo 2.1.9. Primeiro vamos mostrar que $\tilde{\varphi}$ preserva adjunto. Isto é, para $(\lambda, a) \in \tilde{A}$, temos

$$(\tilde{\varphi}(\lambda, a))^* = (\lambda + \varphi(a))^* = \overline{\lambda} + \varphi(a^*) = \tilde{\varphi}(\overline{\lambda}, a^*) = \tilde{\varphi}((\lambda, a)^*). \tag{6.7}$$

Como $\tilde{\varphi}$ é unital então $\tilde{\varphi}$ é contrativo. Assim,

$$\|\varphi(a)\| = \|\tilde{\varphi}(0,a)\| \leqslant \|(0,a)\| = \|a\|.$$

Segue que $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$. $\square$

Teorema 6.3.2. *Seja A uma C^*-álgebra e a um elemento autoadjunto de A. Então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha primeiro que A é unital. Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Tome $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = x + iy$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o polinomio $p_n \in \mathbb{C}[z]$, dado por $p_n = z + (-x + iny)$. Então pelo teorema do mapeamento espectral, temos que $p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(a))$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)iy = (x+iy) + (-x+iny) = p_n(\lambda) \in \sigma(p_n(a)).$$

Portanto, $|(n+1)iy| \leqslant \|p_n(a)\|$. Como a é autoadjunto então $(a + (-x + iny)1)^* = a - (x+iny)1$. Logo,

$$\begin{aligned}
(n^2+2n+1)y^2 &= |(n+1)iy|^2 \leqslant \|p_n(a)\|^2 = \|p_n(a)^* p_n(a)\| \\
&= \|(a-(x+iny)1)(a+(-x+iny)1)\| \\
&= \|(a-x)^2 + (ny)^2 1\| \leqslant \|(a-x)^2\| + (ny)^2.
\end{aligned}$$

Segue que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(2n+1)y^2 \leqslant \|(a-x)^2\|.$$

O que implica que $y = 0$. Então $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere agora o caso em que A é não unital. Como a é autoadjunto então o elemento $(0,a) \in \tilde{A}$, é auto adjunto. Como $\tilde{A}$ é uma C^*-álgebra unital então $\sigma((0,a)) \subset \mathbb{R}$. Segue que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. $\square$

Proposição 6.3.3. *Seja A uma C^*-álgebra. Se $\tau \in \Omega(A)$, então τ preserva adjuntos.*

Demonstração. Seja $a \in A$. Vimos na Proposição 6.1.21 que existem $b, c \in A$ autoadjuntos, tais que $a = b + ic$. Pelo Teorema 5.0.4, $\tau(b) \in \sigma(b)$ e

$\tau(c) \in \sigma(c)$. Como b e c são autoadjuntos então pelo teorema anterior, $\sigma(b) \subset \mathbb{R}$ e $\sigma(c) \subset \mathbb{R}$. Logo, $\tau(b), \tau(c) \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}\tau((b+ic)^*) &= \tau(b^* - ic^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c)\\ &= \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(b+ic)} = \tau(b+ic)^*.\end{aligned}$$

Segue que $\tau(a^*) = \tau(a)^*$. □

Pelo Teorema 5.0.3, sabemos que uma álgebra de Banach unital abeliana possui $\Omega(A) \neq \emptyset$. Porém para uma C^*-álgebra abeliana A, $\Omega(A) = \emptyset$ só ocorre quando $A = \{0\}$.

Lema 6.3.4. *Se $A \neq \{0\}$ é uma C^*-álgebra, então $\Omega(A) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como $A \neq \{0\}$, existe $a \in A$ não nulo. Pelo Lema 6.1.21, existem únicos $b, c \in A$, autoadjuntos tal que $a = b + ic$. Caso $b = 0 = c$ implica que $a = 0$, logo, existe um elemento $d \in A$, não nulo e autoadjunto. Pelo Teorema 6.1.22, $r(d) = \|d\|$. Dessa forma, existe $\lambda \in \sigma(d)$ tal que, $\|d\|/2 < |\lambda| \leqslant \|d\|$. Pelo Teorema 5.0.4, existe $\tau \in \Omega(A)$, tal que $\tau(d) = \lambda \neq 0$. Assim, $\tau \neq 0$ e $\Omega(A) \neq \emptyset$. □

O seguinte teorema, que apenas será enunciado, será usado na demonstração do Teorema de Gelfand.

Teorema 6.3.5 (Stone-Weierstrass)**.** *Seja B uma $*$-subálgebra de $C_0(X)$. Se B satisfaz*

1. *Se $x \in X$, então existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq 0$.*

2. *A separa pontos, isto é, para quaisquer $x, y \in X$, existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Então, $\overline{B} = C_0(X)$.

O teorema anterior pode ser visto em (SUNDER, 1998).

Teorema 6.3.6 (Teorema de Gelfand)**.** *Se A é uma C^*-álgebra abeliana não nula então a representação de Gelfand*

$$\gamma : A \longrightarrow C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a},$$

é um $*$-isomorfismo isométrico.

Demonstração. Pelo Teorema 5.0.10, sabemos que γ é um homomorfismo contrativo. Para $\tau \in \Omega(A)$ e $a \in A$, pela Proposição 6.3.3 temos que $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = (\tau(a))^*$, então

$$\gamma(a^*)(\tau) = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \overline{\gamma(a)(\tau)} = (\gamma(a))^*(\tau).$$

Então $\gamma(a^*) = (\gamma(a))^*$ para todo $a \in A$. Vamos mostrar agora que γ é uma isometria. Relembre pelo Teorema 5.0.10, que temos $\|\gamma(a^*a)\|_\infty = r(a^*a)$ e como a^*a é autoadjunto então $r(a^*a) = \|a^*a\|$. Segue que

$$(\|\gamma(a)\|_\infty)^2 = \|(\gamma(a))^*\gamma(a)\|_\infty = \|\gamma(a^*a)\|_\infty = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Portanto γ é uma isometria.

Note que para $\tau \in \Omega(A)$, existe $a_0 \in A$ tal que $\tau(a_0) \neq 0$. Logo, $\gamma(a_0)(\tau) = \tau(a_0) \neq 0$. Sejam $\varphi, \psi \in \Omega(A)$ tais que $\varphi \neq \psi$. Assim, existe $a \in A$, tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$. Então, $\gamma(a)(\varphi) = \varphi(a) \neq \psi(a) = \gamma(a)(\psi)$. Como $\gamma(A)$ é uma $*$-subálgebra de $C_0(\Omega(A))$ então pelo teorema anterior $\overline{\gamma(A)} = C_0(\Omega(A))$.

Pela Proposiçao 6.2.8, $\gamma(A)$ é fechado. Portanto $\gamma(A) = C_0(\Omega(A))$. $\square$

7 Conclusão

A importância do Teorema de Gelfand se apresenta no sentido de que de certa forma o estudo de vários aspectos de $C_0(X)$ são mais simples do que C^*-álgebras abelianas abstratas. Por exemplo, se X é compacto, o espectro de $f \in C_0(X)$ é conhecido. Como neste caso $C_0(X) = C(X)$, pelo Exemplo 3.0.7, para $f \in C_0(X)$, $\sigma(f) = f(X)$.

Além disso, demonstramos teoremas importantes como o Teorema do Mapeamento Espectral, o Teorema de Gelfand-Mazur, o Teorema de Beurling, assim como obtivemos conclusões surpreendentes como a forte relação algébrica de uma C^*-álgebra com a sua norma.

Por meio desse trabalho, é possível perceber que a teoria de álgebra de operadores é mais rica que espaços de Banach, no geral, com vários exemplos interessantes expostos.

Referências

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 50.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1978. Citado 4 vezes nas páginas 9, 23, 36 e 56.

MURPHY, G. *C*-Algebras and Operator Theory*. [S.l.]: Academic Press, Inc, 1990. Citado na página 9.

RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1987. Third Edition. Citado na página 27.

SUNDER, V. *Functional Analysis: Spectral Theory*. [S.l.]: Birkhäuser Advanced Texts, 1998. Citado na página 75.