Tainá de Oliveira Johnson

Funcionais Lineares em espaços de Hilbert

Florianópolis

2019

Tainá de Oliveira Johnson

Funcionais Lineares em espaços de Hilbert

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido para aprovação na disciplina TCC-II (MTM5604) do curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do Prof. Dr. Danilo Royer.

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Bacharelado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso - II

Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer

Florianópolis

2019

Tainá de Oliveira Johnson

Funcionais Lineares em espaços de Hilbert

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÂO DE CURSO no Curso de Matemática - Bacharelado e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora.

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Danilo Royer
Orientador

Prof. Dra. Flávia Tereza Giordani

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, meu pai, Guillermo, minha mãe, Joaninha e minha irmã, Ana Clara. Que nunca mediram esforços para me ajudar em toda a minha vida, que apesar de todas as fases difíceis, com toda a distância, sempre estiveram presentes e me apoiando. Obrigada por tudo, e acima de tudo, por nunca me deixarem desistir dos meus sonhos. Vocês são meu orgulho, eu os admiro demais e me espelho todos os dias em vocês. Não existem palavras que possam descrever o quanto vocês significam para mim. Eu os amo muito!

Ao meu namorado, Felix, por me suportar quando nem eu mesmo me suporto, por me ajudar todo esse tempo, e por ser compreensivo comigo e nunca me deixar desistir. Obrigada por ser tão compreensivo nesse momento turbulento, e ainda mais, por me fazer feliz, eu te amo muito, meu amor!

Aos meus melhores amigos, Alice, que é praticamente uma irmã, Gabriel Goulart, Thaynara e Gustavo. Cada um, com sua diferente forma, sempre me ajudaram e sei que posso contar com vocês a qualquer momento. Obrigada por tudo em todos esses anos, vocês são muito importantes na minha vida!

À minha amiga, Juliane, que também atura meus choros, assim como os citados acima, que me ajuda a todo momento, e a quem eu sei que também posso contar. O maior presente que a matemática pode me dar foi a sua amizade, somos um combo. Obrigada por tudo, e principalmente, por acreditar e confiar sempre em mim, te amo, amiga!

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos da graduação que me ajudaram, ou ainda ajudam, em toda essa longa fase da graduação, os quais tive o grande prazer de conhecer: Ana Carolina, que mesmo nos conhecendo nessas últimas fases me ajudou imensamente e já se tornou uma grande amiga, Gabriel Cardoso, Letícia, Liana e Victor. Obrigada por tudo, vocês são muito importantes para mim!

Ao meu orientador, professor Dr. Danilo Royer, por ter me dado a honra de ser orientada por você. Sou imensamente grata por toda a sua atenção, sua paciência, seu tempo e dedicação, e principalmente por não desistir de mim!

A todos os grandes professores(as), que tive o prazer de conhecer ou ter aulas, que são o exemplo da profissional que almejo ser: Danilo Royer, Fabio Silva Botelho, Flávia Tereza Giordani, Leandro Batista Morgado, Leonardo Silveira Borges, Maria Inez Cardoso Gonçalves, Marianna Ravara Vago, Melissa Mendonça, Paulo Mendes de Carvalho Neto, Silvia Martini de Holanda e Virgínia Silva Rodriges. Gostaria de frissar o quanto é importante o trabalho de vocês.

Aos professores Leandro Batista Morgado e Flávia Tereza Giordani, meu muito obrigada por aceitarem o convite para minha banca de TCC e por todo o tempo dedicado ao mesmo.

Por último, não menos importante, quero agradecer as minhas psicólogas, Gislaine e Ana Carolina, que em momentos distintos, me ajudaram/ajudam a lidar com minhas crises e comigo mesma. Além de excelentes profissionais vocês são excelentes pessoas.

Sem todos vocês nada disso seria possível.

Resumo

Partimos de um estudo geral sobre os funcionais lineares passando pelos espaços Normados, espaços de Banach, espaços Separáveis e espaços com Produto Interno para então chegar nos espaços de Hilbert. Concluimos a pesquisa com a análise dos funcionais lineares em espaços de Hilbert, e mostraremos que existe uma bijeção conjugado linear isométrica entre todo espaço de Hilbert e seu espaço dual.

Palavras-chave: Funcionais lineares, espaços de Hilbert.

Abstract

We start from a general study on linear functionals passing through Banach spaces, Separable spaces and spaces with Internal Product and Hilbert spaces. We concluded the research with the analysis of linear functionals in Hilbert spaces, and we will show that there is an isometric linear conjugate bijection between all hilbert space and its dual space.

Keywords: Linear functional, Hilbert spaces.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 8

2 FUNCIONAIS LINEARES EM $\mathbb{R}^n$ 9

3 ESPAÇOS NORMADOS E ESPAÇOS DE BANACH 11

3.1 Espaços Normados e espaços de Banach 11

3.2 Espaços Separáveis 19

3.3 Funcionais Lineares Limitados 21

4 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO E ESPAÇOS DE HILBERT 30

4.1 Espaços com Produto Interno e Espaços de Hilbert 30

4.2 Ortogonalidade 36

4.3 Funcionais Lineares em Espaços de Hilbert 37

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 41

Referências 42

1 Introdução

É necessário salientar que para uma melhor compreensão do trabalho partimos da premissa de que deve-se ter conhecimentos prévios em Álgebra Linear e Análise. Estes conteúdos podem ser encontrados em [3], [4], [5], e [6].

O livro utilizado como base é o [1].

Este trabalho tem como objetivo analisar os funcionais lineares em espaços de Hilbert. Dessa forma, no capítulo 2 consideramos $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e vamos definir $(\mathbb{R}^n)'$ como o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Além disso, $(\mathbb{R}^n)'$ é chamado de espaço dual de $\mathbb{R}^n$ e as transformações lineares são funcionais lineares. Abordaremos alguns exemplos e vamos mostrar que existe uma transformação linear bijetora entre $(\mathbb{R}^n)'$ e o próprio $\mathbb{R}^n$. Ou seja, existe uma relação entre o espaço dual do $\mathbb{R}^n$ e o próprio $\mathbb{R}^n$. Será que essa relação é sempre válida para todos os espaços?

Para responder a isso abordaremos no capítulo 3 os espaços Normados e espaços de Banach, com seus respectivos exemplos. Em seguida estudaremos os espaços separáveis e mostraremos que l^∞ não é separável. Concluímos esse capítulo com os funcionais lineares limitados. Aqui veremos sua norma e definiremos o conjunto de todos os funcionais lineares limitados de um espaço Normado X como o espaço dual de X. Usaremos a bijeção provada no capítulo 2 para mostrarmos a isometria isomorfa entre $(\mathbb{R}^n)'$ com $\mathbb{R}^n$. Em seguida, veremos que o espaço dual de l^1 é isometricamente isomorfo a l^∞ e mostraremos que o espaço separável l^1 não é isometricamente isomorfo a l^∞. Temos então o primeiro exemplo de um espaço em que não existe a isometria isomorfa com o seu dual. A partir disso, vamos analisar se existem outros espaços, além de $\mathbb{R}^n$, em que o espaço é isometricamente isomorfo ao seu dual.

No capítulo 4 começamos com estudos preliminares para então estudarmos os espaços com Produto Interno e espaços de Hilbert. Veremos que todo produto interno induz uma norma no espaço, mas nem todos espaços Normados provêm de um produto interno. Mostraremos que o espaço de Banach l^p, com $p \in [1, \infty)$ número real, só é espaço de Hilbert quando $p = 2$.

Por fim, faremos um breve estudo sobre ortogonalidade e em seguida analisaremos os funcionais lineares em espaços de Hilbert. Através do Teorema de Riez faremos uma caracterização dos funcionais lineares no espaço dual dos espaços de Hilbert. Utilizando o mesmo teorema finalizaremos o trabalho mostrando que existe uma bijeção conjugado linear isométrica entre todo o espaço de Hilbert e seu espaço dual.

2 Funcionais Lineares em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo definiremos o espaço dual de $\mathbb{R}^n$, e além disso mostraremos que o espaço dual de $\mathbb{R}^n$ é isomorfo à $\mathbb{R}^n$. Este resultado terá importância no decorrer da seção 3.3.

Definição 2.1. *Um* ***funcional linear em*** $\mathbb{R}^n$ *é uma transformação linear de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$*. O conjunto de todos os funcionais lineares é chamado de* ***espaço dual de*** $\mathbb{R}^n$ *e é denotado por* $(\mathbb{R}^n)'$*.*

Exemplo 2.2. *Seja* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3$*.*

Sejam (x_1, x_2, x_3)*,* $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$*. Então:*

- $f\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = 2\,(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2y_1 + y_2 + y_3$ $= f\,(x_1, x_2, x_3) + f\,(y_1, y_2, y_3)$.
- $f\,(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = 2\,(\lambda x_1) + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda 2x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda\,(2x_1 + x_2 + x_3) = \lambda f\,(x_1, x_2, x_3)$.

Logo, $f \in (\mathbb{R}^3)'$*.*

Exemplo 2.3. *Seja* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por* $g(x_1, x_2) = x_1$*, a projeção canônica sobre o eixo* x_1*. Note que* g *é uma transformação linear de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$*, portanto, um funcional linear em* $(\mathbb{R}^2)'$*.*

Exemplo 2.4. *Para um caso geral, considere* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$*, com* $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$*. Note que*

$$f\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) =< (x_1, x_2, \cdots, x_n), (a_1, a_2, \cdots, a_n) > .$$

Veja que $f \in (\mathbb{R}^n)'$*.*

Observação 2.5. *Note que a soma de dois funcionais lineares é um novo funcional linear, e o produto de um funcional linear por um escalar é um novo funcional linear. Portanto,* $(\mathbb{R}^n)'$ *é um espaço vetorial.*

Proposição 2.6. *Existe um isomorfismo entre* $(\mathbb{R}^n)'$ *e* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Seja $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Considere a função φ: $(\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(f) = (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$, vamos mostrar que φ é transformação linear.

Sejam $f, g \in (\mathbb{R}^n)'$. Então,

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(e_1), (f+g)(e_2), \cdots, (f+g)(e_n))$$

$$= (f(e_1) + g(e_1), f(e_2) + g(e_2), \cdots, f(e_n) + g(e_n))$$

$$= (f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)) + (g(e_1), g(e_2), \cdots, g(e_n))$$

$$= \varphi(f) + \varphi(g).$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\varphi(\alpha f) = ((\alpha f)(e_1), \cdots, (\alpha f)(e_n))$$

$$= (\alpha f(e_1), \cdots, \alpha f(e_n))$$

$$= \alpha(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

$$= \alpha\varphi(f).$$

Vamos mostrar que φ é sobrejetora. Já temos que Im $\varphi \subseteq \mathbb{R}^n$. Agora, precisamos mostrar a outra inclusão.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Então existem $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Considere a transformação linear $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(e_1) = x_1$, $h(e_2) = x_2$,$\cdots$, $h(e_n) = x_n$. Note que $h \in (\mathbb{R}^n)'$. Além disso, $\varphi(h) = (h(e_1), \cdots, h(e_2)) = (x_1, \cdots, x_n) = x$. Logo, $x \in$ Im φ. Assim, Im $\varphi = \mathbb{R}^n$. Portanto, φ é sobrejetora.

Falta mostrar que φ é injetora.

Sejam $f, g \in (\mathbb{R}^n)'$. Suponha que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Então,

$$(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = (g(e_1), \cdots, g(e_n)),$$

ou seja,

$$f(e_1) = g(e_1)$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = g(e_n).$$

Como $\beta = \{e_1, \cdots, e_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$, segue que $f = g$. Portanto, φ é injetora.

Do exposto acima, φ é transformação linear bijetora.

$\square$

3 Espaços Normados e Espaços de Banach

Este capítulo está dividido em três seções, nas quais veremos na seção 3.1 conceitos prévios para os espaços Normados e os espaços de Banach para então defini-los e apresentar exemplos e contra-exemplos. Na seção 3.2 abordaremos os espaços Separáveis com exemplos e um contra-exemplo. Já na seção 3.3 veremos os funcionais lineares limitados, sua norma e então definiremos o espaço dual de um espaço vetorial Normado, com seus respectivos exemplos. Por fim mostraremos o isomorfismo isométrico de $\mathbb{R}^n$ com seu dual e um exemplo de espaço dual que não é isometricamente isomorfo ao seu dual. Então concluiremos que nem sempre esse isomorfismo isométrico existe.

3.1 Espaços Normados e espaços de Banach

Nesta seção apresentaremos os conceitos sobre espaços Normados e espaços de Banach.

Definição 3.1. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma* ***norma em*** X *é uma função* $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\|x\| \geqslant 0,\ \forall\ x \in X$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall\ x \in X$

iii) $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\|,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ *e* $x \in X$

iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,\ \forall\ x, y \in X$ *(Desigualdade Triangular).*

Observação 3.2. *Sejam x e $y \in X$. Note que de iv) e iii) obtemos as seguintes desigualdades:*

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\| \tag{3.1}$$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \tag{3.2}$$

Logo, de (3.1)*:*

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|,$$

ou seja,

$$-(\|x\| - \|y\|) \leqslant \|x - y\|.$$

E de (3.2)*:*

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

Portanto,

$$\mid \|x\| - \|y\| \mid \leqslant \|x - y\|.$$

Proposição 3.3. *Como consequência da desigualdade provada acima (Observação 3.2) mostraremos que a função norma é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X tal que $x_n \to x_0$. Vamos mostrar que $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Utilizando o resultado da Observação 3.2 temos que

$$0 \leqslant \mid \|x_n\| - \|x_0\| \mid \leqslant \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Pelo Teorema do Confronto,

$$\mid \|x_n\| - \|x_0\| \mid \to 0,$$

ou seja,

$$\|x_n\| \to \|x_0\|.$$

□

Observação 3.4. *Um espaço vetorial X com uma norma $\| \ \|$ é chamado de* ***espaço vetorial Normado*** *e denotado por $(X, \| \ \|)$.*

Exemplo 3.5. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a norma usual,*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

em que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Com esta norma, $\mathbb{R}^n$ é espaço Normado.

Vamos provar que são satisfeitas as propriedades $i) - iv)$ da definição de norma. Tome $x = (x_1, \cdots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$.

i) *Veja que para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $|x_i| \geqslant 0$ então $|x_i|^2 \geqslant 0$ e também $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$. Logo, $\|x\|_2 \geqslant 0$.*

ii) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$

iii) *Agora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$,*
$\|\alpha x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^2 |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\ \|x\|_2.$

iv) *Observe que*

$$\|x+y\|_2^2 = | < x+y, x+y > |$$

$$= | < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > |$$

$$= | < x, x > +2 < x, y > + < y, y > |$$

$$\leqslant | < x, x > | + 2| < x, y > | + | < y, y > |$$

$$\leqslant \|x\|_2 + 2 \|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2$$

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.$$

Em que a penúltima desigualdade segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ou seja,

$$\|x + y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2 ,$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ *é espaço Normado.*

Exemplo 3.6. *Seja* $p \in [1, \infty)$ *um número real fixo. Definimos* l^p *como o conjunto das sequências de números reais* $(x_n)_{n\in N}$ *tal que* $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ *converge, ou seja,*

$$l^p = \left\{ (x_n)_{n\in N} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Vamos verificar que l^p *com a norma definida por* $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ *é espaço Normado.*

Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $|x_n|_p \geqslant 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x\|_p \geqslant 0.$

ii) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0 \Leftrightarrow x_n = 0, \forall \ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = (0, 0, \cdots).$

iii) $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|x\|_p .$

iv) É a desigualdade de Minkowski,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

cuja demonstração pode ser vista em [1].

Portanto, $(l^p, \| \ \|_p)$ *é um espaço Normado.*

Observação 3.7. *Veja que para $p < 1$ a função $\| \|_p$ como definida acima não é uma norma.*

Considere, por exemplo, $x = (0, 1, 0, 0, \cdots)$ e $y = (0, 0, 1, 0, \cdots)$. Logo,

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1$$

e

$$\|x + y\|_p = \sqrt[p]{1^p + 1^p} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Então, como $p < 1$,

$$2^{\frac{1}{p}} \geqslant 1 + 1 = 2.$$

Portanto, não é verdade que $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$. Logo, não vale a propriedade iv) de norma.

Exemplo 3.8. *Definimos l^∞ como o conjunto de todas as sequências limitadas de números reais, ou seja,*

$$l^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Vamos mostrar que l^∞ com a norma definida por

$$\|x\|_\infty = sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

é espaço Normado.

Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) *Note que $\|x\|_\infty \geqslant 0$, pois $|x_n| \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \geqslant 0$.*

ii) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |x_n| = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = (0, 0, \cdots)$.

iii) $\|\alpha x\|_\infty = sup\{|\alpha x_n| : n \in \mathbb{N}\} = sup\{|\alpha||x_n| : n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = |\alpha| \|x_n\|_\infty$.

iv) *Primeiro, veja que*

$$\|x + y\|_\infty = sup\{|x_n + y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leqslant sup\{|x_n| + |y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n| \leqslant sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty$$

e

$$|y_n| \leqslant sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|y\|_\infty.$$

Então,

$$|x_n| + |y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty, \forall\ n \in \mathbb{N},$$

e assim,

$$sup\{|x_n| + |y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Logo,

$$\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Portanto, $(l^\infty, \|\ \|_\infty)$ é um espaço Normado.

Definição 3.9. *Seja X um espaço Normado. Dizemos que X é um* ***espaço de Banach*** *se X é completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em X converge em X.*

Exemplo 3.10. *O espaço vetorial Normado $\mathbb{R}^n$ com $\|\ \|_2$ é espaço de Banach.*

De fato, seja $(x^m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ uma sequência de Cauchy. Note que, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que $x^m \in \mathbb{R}^n$, e denote por $x^m = (x_j^m)_j$, com $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Ou seja,

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)$$

$$\vdots$$

$$x^m = (x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m).$$

Então, como $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, k \geqslant n_0$

$$\left\|x^m - x^k\right\|_2 < \varepsilon.$$

Isto é, para todo $m, n \geqslant n_0$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^m - x_j^k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Veja que, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|x_j^m - x_j^k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^m - x_j^k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Logo, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $(x_j^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e como $\mathbb{R}$ é completo, converge em $\mathbb{R}$, digamos,

$$x_j^m \to x_j.$$

Por fim, vamos mostrar que a sequência $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para a n-upla formada pelos elementos x_j, $\forall\ j \in \{1, \cdots, n\}$.
Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$x_j^m - x_j \to 0,$$

ou seja,

$$(x_j^m - x_j)^2 \to 0,$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j^m - x_j)^2 \to 0,$$

então,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j^m - x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Isto é,

$$\|x^m - x\|_2 \to 0,$$

ou seja,

$$x^m \to (x_1, \cdots, x_n).$$

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.11. *O espaço vetorial l^∞ com a norma $\| \ \|_\infty$ é um espaço de Banach.*

Seja $(x^m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq l^\infty$ de Cauchy, em que $x^m \in l^\infty$, e denote $x^m = (x_j^m)_{j\in\mathbb{N}}$. Como $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, para todo ε existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geqslant n_0$

$$\|x^m - x^n\|_\infty < \varepsilon.$$

Isto é,

$$sup\{|x_j^m - x_j^n| : j \in \mathbb{N}\} = \|x^m - x^n\|_\infty < \varepsilon.$$

Então, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_j^m - x_j^n| \leqslant \|x^m - x^n\|_\infty < \varepsilon, \forall\ m, n \geqslant n_0.$$

Note que, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo, $|x_j^m - x_j^n| < \varepsilon$, para todo $m, n \geqslant n_0$, ou seja, $(x_j^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, e como $\mathbb{R}$ é completo, toda sequência de Cauchy é convergente, digamos $x_j^m \to x_j$. Denote $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Agora, vamos mostrar que $x \in l^\infty$. Note que $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada pois é de Cauchy, então existe $M \in \mathbb{N}$, $M > 0$ tal que

$$\|x^m\|_\infty \leqslant M, \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Fixe $j \in \mathbb{N}$. Tome $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_j^{m_0} - x_j^n| < 1$. Note que,

$$|x_j| \leqslant |x_j - x_j^{m_0}| + |x_j^{m_0}| < 1 + \|x^{m_0}\|_\infty \leqslant 1 + M, \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\|x\|_\infty = sup\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\} \leqslant 1 + M.$$

Portanto, $x \in l^\infty$.

Por fim, vamos provar que $x^m \to x$ *em* l^∞. *Fixe* $\varepsilon > 0$ *e tome* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $m, n \geqslant n_0$ *tem-se que*

$$\|x^m - x^n\|_\infty < \varepsilon.$$

Fixe $j \in \mathbb{N}$ *e tome* $\overline{m} \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_j^{\overline{m}} - x_j| < \varepsilon$, *com* $\overline{m} > n_0$. *Então, para* $m \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} |x_j^m - x_j| &\leqslant |x_j^m - x_j^{\overline{m}}| + |x_j^{\overline{m}} - x_j| \\ &\leqslant \left\|x^m - x^{\overline{m}}\right\|_\infty + \varepsilon \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \forall\ m > n_0. \end{aligned}$$

Note que se mudarmos o j *acima teremos outro* $\overline{m}$ *que torna a desigualdade acima verdadeira. Assim, a desigualdade* $|x_j^m - x_j| < 2\varepsilon$ *vale para todo* $j \in \mathbb{N}$, *e então,*

$$sup\{|x_j^m - x_j| : j \in \mathbb{N}\} \leqslant 2\varepsilon.$$

Ou seja,

$$\|x^m - x\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

Portanto, $x^m \to x$, *com a norma* $\| \ \|_\infty$.

Exemplo 3.12. *O espaço vetorial* l^p *com a norma* $\| \ \|_p$ *é um espaço de Banach.*

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq l^p$ *de Cauchy, em que* $x^n \in l^p$, *e denote* $x^n = (x_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$. *Como* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy, para todo* ε *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $m, n \geqslant n_0$

$$\|x^n - x^m\|_p < \varepsilon.$$

Isto é,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Note que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_j^n - x_j^m| = (|x_j^n - x_j^m|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Então, para cada $j \in \mathbb{N}$ *fixo,* $|x_j^n - x_j^m| < \varepsilon$, *para todo* $m, n \geqslant n_0$, *ou seja,* $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é sequência de Cauchy em* $\mathbb{R}$, *e por* $\mathbb{R}$ *ser completo, segue que* $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, digamos,* $x_j^n \to x_j$. *Vamos mostrar que* $x^n \to x$ *em* l^p *e que* $x \in l^p$.

Tome $\varepsilon > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|x^n - x^m\|_p < \varepsilon$ *para todo* $m, n \geqslant n_0$, *isto é,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j^m|^p < \varepsilon^p.$$

Então, fixe $k \in \mathbb{N}$, note que

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j^m|^p < \varepsilon^p, \forall\ m, n \geqslant n_0.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j^m|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Segue que

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j^n - x_j|^p \leqslant \varepsilon^p, \forall\ k \in \mathbb{N},$$

e então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j|^p \leqslant \varepsilon^p, \forall\ n \geqslant n_0.$$

Isto mostra que, por exemplo, $x^{n_0} - x \in l^p$, e $x - x^{n_0} \in l^p$, e $x = (x - x^{n_0}) + x^{n_0} \in l^p$. Da última desigualdade segue que $x^n \to x$ em l^p.

Agora, vamos ver dois exemplos de espaços Normados que não são completos:

Exemplo 3.13. *Seja $C[a, b]$ o espaço das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, com*

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Considere $P[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} :f$ é polinômio$\}$. Vamos mostrar que $P[a, b]$ não é um espaço de Banach.

Pelo teorema de Stone-Weirstrass, toda função contínua é limite uniforme de polinômios. Portanto, $P[a, b]$ não é Banach.

Exemplo 3.14. *Considere C_{00} o espaço das sequências de números reais quase nulas, isto é,*

$$C_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists\ k \in \mathbb{N}\ tal\ que\ x_m = 0\ \forall\ m > k\}.$$

Vamos mostrar que C_{00} não é um espaço de Banach.

Tome $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, \cdots\right)$ em C_{00} e suponha que $m > n$, então

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \left\| \left(0, \cdots, 0, \frac{-1}{n+1}, \cdots, \frac{-1}{m}, 0, \cdots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{n+1}.$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Agora, vamos provar que $x_n \to \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ em l^∞. De fato, isso acontece pois

$$\left\| \left(0, \cdots, \frac{-1}{n+1}, \frac{-1}{n+2}, \cdots\right) \right\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$$

em l^∞.

Como $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right)$ não pertence a C_{00}, segue que C_{00} não é Banach.

3.2 Espaços Separáveis

Nesta seção estudaremos densidade, separabilidade e mostraremos que l^∞ não é Separável.

Definição 3.15. *Seja X um espaço Normado. Dizemos que $D \subseteq X$ é* ***denso*** *se para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $x \in X$ existe $y \in D$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Exemplo 3.16. *Considere $X = \mathbb{R}$ e $D = \mathbb{Q}$, note que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 3.17. *Em l^p, $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p : x_n \neq 0$ só para finitos $n's\}$ é denso.*

Tome $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p < \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} |x^n|^p < \varepsilon^p$. Seja $y = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots)$ o truncamento de x. Então

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Note que $y \in D$.

Definição 3.18. *Seja X um espaço Normado. Dizemos que X é* ***Separável*** *se existe $D \subseteq X$ denso e enumerável.*

Exemplo 3.19. *Seja C_0 o conjunto de todas as sequências de números reais que convergem para zero, ou seja,*

$$C_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_n \to 0\}.$$

Vamos mostrar que C_0 é Separável. Note que pelo fato de toda sequência convergente ser limitada temos que C_0 é subespaço de l_∞, e desta forma definimos em C_0

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos mostrar que C_{00} é denso em C_0.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$, então $x_n \to 0$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $x^m = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots) \in C_{00}$.

$$\|x^m - x_n\|_\infty = \|(0, \cdots, 0, -x_{m+1}, -x_{m+2}, \cdots)\|_\infty \to 0,$$

quando $m \to \infty$, pois $x_n \to 0$.

O conjuto $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00} : x_n \in \mathbb{Q}, \forall\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em C_{00}.
De fato, fixe $\varepsilon > 0$ e seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00}$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 0$ para todo $m > k$, ou seja,

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots).$$

Como para cada $j \in \{1, \cdots, k\}$, $x_j \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, temos que existe $y_j \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x_j - y_j| < \varepsilon.$$

Considere a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com as k-ésimas primeiras entradas dadas como acima e as demais entradas zeros, ou seja,

$$y_n = (y_1, y_2, \cdots, y_k, 0, \cdots).$$

Portanto,

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \varepsilon,$$

isto é,

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Logo, D é denso em C_{00}.

Note que D é enumerável, pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e assim $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ é enumerável. Logo, como existe uma bijeção entre D e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ temos que D é enumerável.

Portanto, C_0 é Separável.

Exemplo 3.20. *O espaço Normado $(l^1, \| \ \|_1)$ é Separável. Em que*

$$l^1 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

Considere

$$D = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 : y_n \in \mathbb{Q} \ e \ y_n \neq 0 \ s \ para \ finitos \ n's\}.$$

Primeiro, note que $D \subseteq l^1$. Vamos mostrar que $D \subseteq l^1$ é denso e enumerável.

Vamos mostrar que D é enumerável.

Pelo fato de $\mathbb{Q}$ ser enumerável, $\mathbb{Q}^n$ é enumerável. Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ é enumerável. Como existe uma bijeção entre D e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ segue que D é enumerável.

Agora, vamos provar que D é denso em l^1.

Fixe $\varepsilon > 0$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente, e pelo critério de Cauchy, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$*, para todo* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *e* $x_i \in \mathbb{R}$*, existe* $y_i \in \mathbb{Q}$ *tal que* $|x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2m}$*. Ou seja, podemos encontrar* $y = (y_1, \cdots, y_m, 0, \cdots) \in \mathbb{Q}$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 &= |(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m, x_{m+1}, \cdots)| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ *e para toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ *existe* $y \in D$ *tal que* $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 < \varepsilon$*, ou seja,* D *é denso em* l^1*.*

De forma análoga, provamos que l^p é Separável.

Vamos ver no próximo exemplo um espaço vetorial Normado que não seja Separável.

Exemplo 3.21. *O espaço Normado* l^∞ *não é Separável.*

De fato, vamos mostrar que não existem conjuntos densos e enumeráveis em l^∞*. Seja* $X \subseteq l^\infty$*,* $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty : x_n \in \{0,1\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$*.*
Considere a função $T : X \to [0,1]$*, dada por* $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{2^n}$ *e note que* T *é sobrejetora. Desta forma,* X *tem pelo menos a cardinalidade de* $[0,1]$*, mas* $[0,1]$ *não é enumerável. Logo,* X *não é enumerável.*

Note que, para todo $x, y \in X$*,* $\|x - y\|_\infty = 1$*, se* $x \neq y$*. Para cada* $x \in X$*, considere a bola aberta centrada em* x *e com raio* $\frac{1}{2}$*. Desta forma, para todo* $x, y \in X$*,* $x \neq y$*, temos que*

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{1}{2}\right) = \emptyset.$$

Seja $D \subseteq l^\infty$ *denso em* l^∞*. Assim, dado* $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, para todo* $x \in X$*, existe* $y_x \in D$ *tal que* $\|x - y_x\|_\infty < \frac{1}{2}$*. Logo, o subconjunto de* D*,* $\{y_x : x \in X\}$*, tem a mesma cardinalidade de* X*, ou seja, não é enumerável. Portanto,* D *não é enumerável.*
Logo, l^∞ *não é Separável.*

3.3 Funcionais Lineares Limitados

Nesta seção veremos os funcionais lineares limitados, sua norma e o espaço dual. Mostraremos que o espaço dual de $\mathbb{R}^n$ é isometricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por outro lado veremos que o espaço dual de l^1 não é isometricamente isomorfo a l^1.

Definição 3.22. *Seja X um espaço vetorial Normado sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que um* ***funcional linear*** *$f : X \to \mathbb{K}$ é* ***limitado*** *se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$*

$$|f(x)| \leqslant c\,\|x\|\,.$$

Além disso, a ***norma de*** *f é*

$$\begin{aligned}\|f\| &= sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}\\ &= sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}.\end{aligned}$$

Note que $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|$, pois dado $x \in X$, $x \neq 0$, $\|f\| \geqslant \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$, e então $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\|\,.$

Exemplo 3.23. *Considere o funcional linear $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, dado por $f(g) = \int_0^1 g(x)dx$. Vamos mostrar que f é limitado e calcular sua norma.*

Primeiro, note que $C[0,1]$ é um espaço Normado com a norma definida por

$$\|x\|_\infty = sup\{f(x) : x \in [0,1]\}$$

e f é um funcional linear, pois a integral é linear. Vamos verificar se f é um funcional linear limitado. Então,

$$\begin{aligned}|f(g)| &= \left|\int_0^1 g(x)dx\right|\\ &\leqslant \int_0^1 |g(x)|dx\\ &\leqslant \int_0^1 \|g(x)\|_\infty\, dx\\ &= \|g(x)\|_\infty\, 1 = \|g(x)\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$|f(g)| \leqslant 1\,\|g(x)\|_\infty\,.$$

Logo, f é um funcional linear limitado, pois $|f(g)| \leqslant 1\,\|g(x)\|$.

Podemos ainda calcular $\|f\|$.
Considere $g \in C[0,1]$, $g(x) = 1, \forall\ x \in [0,1]$. Note que

$$|f(g)| = \left|\int_0^1 1dx\right| = |1| = 1,$$

e como $\|f\| = sup\{|f(g)| : \|g\| = 1\}$ temos que $\|f\| = 1$.

Exemplo 3.24. *Seja $P[0,1]$ o espaço dos polinômios de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, com $\|\ \|_\infty$. Considere $f : P[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(g) = g'(1)$.*

Note que f é funcional linear, pois a derivada é linear.
Considere a função $g_n(x) = x^n$, para todo $x \in [0,1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso,

$$|f(g)| = |g'(1)| = |n1^{n-1}| = |n| = n, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

e $\|g_n\|_\infty = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|f(g)\| = sup\{|f(g)| : \|g\| = 1\} = \infty.$$

Logo, f não é limitado.

Exemplo 3.25. *Seja $\mathbb{R}^n$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com $\| \ \|_2$. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) =< x, y >$, com $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ fixo. Vamos provar que f é um funcional linear limitado e calcular sua norma.*

Lembre que $\mathbb{R}^n$ é espaço Normado com a norma usual e f é funcional linear, pelas propriedades do produto interno.
Pela desigualdade de Cauchy-Scwarz,

$$|f(x)| = |< x, y >| \leqslant \|x\| \|y\| .$$

Portanto,

$$|f(x)| \leqslant \|y\| \|x\| .$$

Logo, f é um funcional linear limitado. E então, $\|f\| \leqslant \|y\|$.

Agora, tomando $x = y$, temos que

$$|f(y)| \leqslant \|f\| \|y\| ,$$

ou seja,

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{|< y, y >|}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\| .$$

Portanto, $\|f\| = \|y\|$.

Exemplo 3.26. *Seja l^1 o espaço das sequências de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ $< \infty$. Considere $f : l^1 \to \mathbb{R}$, dado por $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$, com $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Vamos verificar que f é limitado e calcular sua norma.*

$$\begin{aligned} |f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n\right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||b_n| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \\
&= \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\
&= \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1 .
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$|f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| \leqslant \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_1 ,$$

portanto, f é limitado.

Agora, note que

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\} \geqslant sup\{|f((e_n)_{n\in\mathbb{N}})| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Em que

$$sup\{|f((e_n)_{n\in\mathbb{N}})| : n \in \mathbb{N}\} = \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty .$$

Portanto, $\|f\| = \left\|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty$.

Definição 3.27. *Seja X um espaço vetorial Normado sobre $\mathbb{K}$.*

Definimos

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é funcional linear limitado}\} .$$

*Além disso, X' é chamado de **espaço dual de** X.*

Proposição 3.28. *X' com a norma definida acima é espaço vetorial Normado.*

Demonstração. Note que o conjunto F de todas as funções de X em $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial. Portanto, para ver que X' é espaço vetorial basta ver que X' é subespaço vetorial de F. Para tanto, considere $f_1, f_2 \in X'$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, note que αf_1 e βf_2 são ainda funcionais lineares limitados, e $\alpha f_1 + \beta f_2$ também é. Logo, $\alpha f_1 + \beta f_2 \in X'$.

Agora, vamos mostrar que $\| \ \|_\infty : X' \to \mathbb{K}$ é uma norma, em que

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}.$$

i) Note que dado $f \in X'$,

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\} \geqslant 0.$$

ii) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
($\Leftarrow$) Veja que se $f = 0$ (funcional linear nulo) então $|f(x)| = 0, \forall\ x \in X$, e portanto,

$\|f\| = 0$.
$(\Rightarrow)$ Por hipótese, $\|f\| = 0$. Então,

$$0 = \|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall\ x \in X.$$

$iii)$ Dado $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\|\alpha f\| = sup\{|\alpha f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$= sup\{|\alpha||f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$= |\alpha| sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$= |\alpha|\ \|f\|.$$

$iv)$ Sejam $f_1, f_2 \in X'$. Então,

$$\|f_1 + f_2\| = sup\{|(f_1 + f_2)(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$= sup\{|f_1(x) + f_2(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}$$

$$\leqslant sup\{|f_1(x)| + |f_2(x)| : \|x\| = 1, x \in X\}.$$

Note que, para todo $x \in X$, $\|x\| = 1$,

$$|f_1(x)| \leqslant sup\{|f_1(x)| : \|x\| = 1, x \in X\} = \|f_1\|,$$

e,

$$|f_2(x)| \leqslant sup\{|f_2(x)| : \|x\| = 1, x \in X\} = \|f_2\|.$$

Então, $|f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$. Logo,

$$sup\{|f_1(x)| + |f_2(x)| : \|x\| = 1, x \in X\} \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Ou seja,

$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Portanto, $(X', \|\ \|)$ é espaço vetorial Normado.

□

Lembre que $(\mathbb{R}^n)' \cong \mathbb{R}^n$, via o isomorfismo definido na Proposição 2.6, no capítulo 2. Agora, vamos mostrar que este isomorfismo é isométrico.

Proposição 3.29. *$(\mathbb{R}^n)'$ é isometricamente isormofo a $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Considere, novamente, $\varphi : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\varphi(f) = (f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

Já sabemos que φ é uma bijeção linear.

Agora, vamos mostrar que φ é isometria, ou seja, $\|\varphi(f)\| = \|f\|$, considerando $\mathbb{R}^n$ com a norma usual.
Sejam $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $f \in (\mathbb{R}^n)'$, note que

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \\ &=< (x_1, \cdots, x_n), (f(e_1), \cdots, f(e_n)) >, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x) =< x, (f(e_1), \cdots, f(e_n)) > . \tag{3.3}$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = |< x, (f(e_1), \cdots, f(e_n)) >| \leqslant \|x\| \, \|(f(e_1), \cdots, f(e_n))\| .$$

Seja $\gamma = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$. Mostramos que

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \, \|\gamma\| , \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, como

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in X\},$$

temos que

$$\|f\| \leqslant \|\gamma\| .$$

Agora, considere o vetor $x = \frac{\gamma}{\|\gamma\|}$. Note que $\|x\| = 1$ e de (3.3) temos que

$$f(x) =< x, \gamma >= \left\langle \frac{\gamma}{\|\gamma\|}, \gamma \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma\|} < \gamma, \gamma >= \frac{1}{\|\gamma\|} \|\gamma\|^2 = \|\gamma\| .$$

Logo, $|f(x)| = \|\gamma\|$ e assim $\|f\| = \|\gamma\|$, ou seja,

$$\|f\| = \|\gamma\| = \|(f(e_1), \cdots, f(e_n))\| = \|\varphi(f)\| .$$

Portanto, $\|\varphi(f)\| = \|f\|$, ou seja, φ é isometria. □

Proposição 3.30. *$(l^1)'$ é isometricamente isormofo a l^∞.*

Demonstração. Primeiro, note que, se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$, então $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, em que $e_k = (0, \cdots, \underbrace{1}_{entrada\ k}, 0, \cdots)$.

Seja $f \in (l^1)'$. Então

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k e_k). \end{aligned}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(e_k)| \leqslant \|f\| \, \|e_k\| = \|f\|,$$

ou seja,

$$sup\{|f(e_k)| : k \in \mathbb{N}\} \leqslant \|f\|. \tag{3.4}$$

Defina $T : (l^1)' \to l^\infty$, dada por $T(f) = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. De (3.4) temos que $(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Logo, T está bem definida. Além disso, note que T é linear, e,

$$\|T(f)\|_\infty = \|(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

Afirmação 1. T é sobrejetora.

Seja $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Defina $g : l^1 \to \mathbb{K}$, por

$$g\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, \|b_n\|_\infty = \|b_n\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|b_n\|_\infty \|x\|_1.$$

Portanto,

$$|g(x)| = \left| g\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) \right| \leqslant \|b_n\|_\infty \|x\|_1.$$

Logo, g é limitado. Portanto, $g \in (l^1)'$.

Note que

$$T(g) = (g(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n b_n = b.$$

Logo T é sobrejetora.

Afirmação 2. T é isometria.

Já temos que $T : (l^1)' \to l^\infty$ é tal que

$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1, \forall f \in (l^1)'.$$

Por outro lado, dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in l^1$ e $f \in (l^1)'$, note que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||f(e_n)| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, \|(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \\
&= \|(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\
&= \|(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\
&= \|(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|x\|_1 \\
&= \|T(f)\|_\infty \|x\|_1 .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|f(x)| \leqslant \|T(f)\|_\infty \|x\|_1 .$$

Então,

$$sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in (l^1)'\} \leqslant \|T(f)\|_\infty 1.$$

Isto significa que

$$\|f\| \leqslant \|T(f)\|_\infty .$$

Portanto, $\|T(f)\| = \|f\|$. Segue então que T é isometria. E como T é isometria, temos que T é injetora. $\square$

Temos que $(l^1)'$ é isometricamente isomorfo a l^∞. Mostraremos a seguir que l^1 não é isometricamente isomorfo a l^∞. Portanto, teremos um exemplo em que o espaço dual não é isometricamente isomorfo ao espaço. Para isso será necessário a proposição abaixo.

Proposição 3.31. *Sejam X,Y espaços Normados isometricamente isomorfos, então X é Separável se, e somente se, Y é Separável.*

Demonstração. Seja $T : X \to Y$ isometria. Suponha que X é Separável, vamos mostrar que Y é Separável.

Seja $D \subseteq X$ denso e enumerável. Seja $B = T(D)$. Vamos mostrar que B é denso e enumerável em Y. Note que B é enumerável, pois T é bijetora e D é enumerável.

Vamos provar que B é denso.
Tome $y \in Y$ e $\varepsilon > 0$.
Seja $x = T^{-1}(y)$. Como D é denso em X, existe $d \in D$ tal que

$$\|d - x\| < \varepsilon.$$

Então,

$$\|T(d) - y\| = \|T(d) - T(x)\| = \|d - x\| < \varepsilon.$$

Portanto, como $T(d) \in B$ e $\|T(d) - y\| < \varepsilon$, temos que B é denso em Y. De maneira análoga, como T^{-1} é isomorfismo isométrico, prova-se que se Y é Separável então X é Separável.

□

Segue da Proposição 3.31, que se l^1 e l^∞ fossem isometricamente isomorfos, e como l^1 é Separável, teríamos que l^∞ seria Separável, o que não ocorre. Logo, l^1 não é isometricamente isomorfo a l^∞.
Portanto, concluimos que o dual de l^1, que é l^∞, não é isomorfo a l^1.

Existem outros espaços, além de $\mathbb{R}^n$, em que existe uma isometria isomorfa entre o espaço dual e o próprio espaço? É o que veremos no próximo capítulo.

4 Espaços com Produto Interno e Espaços de Hilbert

Neste capítulo veremos na seção 4.1 os espaços com Produto Interno, também chamados de pré-Hilbert, e os espaços de Hilbert. Na seção 4.2 abordaremos brevemente alguns conceitos sobre ortogonalidade, que serão utilizados na seção 4.3, onde veremos a relação que existe entre um espaço de Hilbert e seu espaço dual.

4.1 Espaços com Produto Interno e Espaços de Hilbert

Nesta seção abordaremos os conceitos sobre os espaços com Produto Interno e os espaços de Hilbert. Entre os resultados, destacamos a Identidade do Paralelogramo, que nos permitirá verificar quando uma norma não é induzida por um produto interno.

Definição 4.1. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um* ***produto interno*** *em X é uma função $< .,. >: X \times X \to \mathbb{K}$ tal que*

i) $< x, x > \geqslant 0$ *e* $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall\ x \in X$

ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}, \forall\ x, y \in X$

iii) $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >, \forall\ x, y \in X,$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$

iv) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, \forall\ x, y, z \in X$

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado de ***espaço com Produto Interno.***

Observação 4.2. *Note que se X é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, temos que o item ii) será o que chamamos de simetria*

$$< x, y >=< y, x > .$$

Exemplo 4.3. *O espaço vetorial $\mathbb{C}^n$, com produto interno dado por*

$$< (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

é um espaço com Produto Interno.

Exemplo 4.4. *Considere l^2, com o produto interno dado por*

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Para ii) note que pela Desigualdade de Minkowski vista em [1],

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2 \, .$$

As demais propiedades seguem diretamente.

Exemplo 4.5. *Seja $C[0,1]$, com o produto interno dado por*

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Note que

$$< f, f >= \int_0^1 f(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geqslant 0.$$

Para mostar que $< f, f >= 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$, observe que se $h \in C[0,1]$ for tal que $h(x) \geqslant 0$, para todo $x \in [0,1]$, então $h \equiv 0 \Leftrightarrow \int_0^1 h(x)dx = 0$.

Lema 4.6. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja X um espaço com Produto Interno. Então, para todo $x, y \in X$,*

$$| < x, x > | \leqslant \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}.$$

Demonstração. Se $y = 0$ segue o resultado.

Suponha então que $y \neq 0$. Note que, para todo $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$0 \leqslant < x + \alpha y, x + \alpha y >=< x, x > +\alpha < y, x > +\overline{\alpha} < x, y > +\alpha\overline{\alpha} < y, y >$$

$$=< x, x > +\alpha(< y, x > +\overline{\alpha} < y, y >) + \overline{\alpha} < x, y > . \tag{4.1}$$

Tome α tal que

$$\overline{\alpha} = -\frac{< y, x >}{< y, y >}.$$

Então, para este $\overline{\alpha}$, (4.1) será

$$0 \leqslant < x, x > +\alpha(< y, x > - < y, x >) - \frac{< y, x >}{< y, y >} < x, y >,$$

ou seja,

$$- < x, x >< y, y > \leqslant - < y, x >< x, y >,$$

desta forma,

$$< y, x >< x, y > \leqslant < x, x >< y, y > .$$

E como $< y, x >= \overline{< x, y >}$, temos que

$$\overline{< x, y >} < x, y > \leqslant < x, x >< y, y >,$$

ou seja,

$$|<x,y>|^2 \leqslant <x,x><y,y>.$$

Portanto,

$$|<x,y>| \leqslant \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}.$$

□

Definição 4.7. *Dado um espaço com Produto Interno, definimos, para todo $x \in X$,*

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}.$$

Proposição 4.8. *A função $X \to \mathbb{K}$ dada por $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ é uma norma em X.*

Demonstração. Vamos verificar os axiomas de norma.
i) Da forma como foi definida, segue que $\|x\| \geqslant 0, \forall\, x \in X$.
ii) Como

$$<x,x>= 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall\, x \in X,$$

temos que

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall\, x \in X.$$

ii) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} \\ &= \sqrt{\overline{\lambda}\lambda <x,x>} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 <x,x>} \\ &= |\lambda|\sqrt{<x,x>} \\ &= |\lambda|\, \|x\|. \end{aligned}$$

iv) Dados $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 =<x,x> + <x,y> + <y,x> + <y,y>$$

$$=<x,x> + <y,y> + <x,y> + \overline{<x,y>}$$

$$=<x,x> + <y,y> + 2Re <x,y>$$

$$\leqslant <x,x> + <y,y> + 2|Re <x,y>|$$

$$\leqslant <x,x> + <y,y> + 2|<x,y>|,$$

por Cauchy-Schwarz,

$$\leqslant <x,x> + <y,y> + 2\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$$

$$= (\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>})^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Portanto,

$$\|x + y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2,$$

e então,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

□

Vamos ver abaixo alguns exemplos de espaços vetoriais cuja norma provêm de um produto interno.

Exemplo 4.9. *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$*, com*

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exemplo 4.10. *O espaço* l^2*, com*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n x_n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 4.11. *Considere* $C[0,1]$*, com*

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 4.12. *(Identidade do Paralelogramo) Seja* X *um espaço Normado cuja norma é proveniente de um produto interno, então para todo* $x, y \in X$*, vale que*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in X$, então

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 =< x + y, x + y > + < x - y, x - y >$$

$$=< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > +$$

$$+ < x, x > + < x, -y > + < -y, x > + < -y, -y >$$

$$= 2 < x, x > + < x, y > + < y, x > - < x, y > - < y, x > +2 < y, y >$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

□

Observação 4.13. *Pela Proposição 4.12, se* $(X, \| \ \|)$ *for espaço normado e existirem* $x, y \in X$ *tais que*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

então a norma não é proveniente de um produto interno.

Podemos concluir que todo produto interno induz uma norma no espaço, porém nem todos espaços Normados são espaços com Produto Interno, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.14. *Note que* $\| \ \|_p$ *em* l^p, *com* $p \neq 2$, *não é induzida por um produto interno.*

De fato, considere $x = (1, 0, 0, \cdots)$ *e* $y = (0, 1, 0, \cdots)$. *Então*

$$\|x+y\|_p = \|(1,1,0,\cdots)\|_p = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|x-y\|_p = \|(1,-1,0,\cdots)\|_p = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

$$\|x\|_p = \|(1,0,0,\cdots)\|_p = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

$$\|y\|_p = \|(0,1,0,\cdots)\|_p = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Logo,

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2\ 2^{\frac{2}{p}}.$$

E,

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4.$$

Portanto, pela Identidade do Paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ \Leftrightarrow 2\ 2^{\frac{2}{p}} &= 4 \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{p}} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{p} &= 1 \\ \Leftrightarrow p &= 2. \end{aligned}$$

Ou seja, $(l^p, \| \ \|_p)$, *com* $p \in [1, \infty)$ *um número real, é espaço Normado, mas a norma só é induzida por um produto interno para* $p = 2$.

Exemplo 4.15. *O espaço vetorial* $C[0,1]$ *com*

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

não é induzida por um produto interno.

Considere $f(x) = x$ *e* $g(x) = 1 - x$. *Então,*

$$\|f+g\|_\infty = sup\{|1| : x \in [0,1]\} = 1.$$

$$\|f-g\|_\infty = sup\{|2x-1| : x \in [0,1]\} = 1.$$

$$\|f\|_\infty = sup\{|x| : x \in [0,1]\} = 1.$$

$$\|g\|_\infty = sup\{|1-x| : x \in [0,1]\} = 1.$$

Logo,

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2 \neq 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 4.$$

Definição 4.16. *Seja H um espaço vetorial com Produto Interno. Dizemos que H é um* ***espaço de Hilbert*** *se é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Exemplo 4.17. *Veja que $\mathbb{R}^n$ é espaço de Hilbert, com*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemplo 4.18. *Considere o espaço l^2 com*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

em que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, é espaço de Hilbert.

Lembre que l^2 é espaço vetorial com Produto Interno. Note que a norma induzida pelo produto interno é a norma definida em l^2, e l^2 com a norma $\| \ \|_2$ é completo, ou seja, é um espaço de Banach. Portanto, l^2 é um espaço de Hilbert.

Note que l^p, com $p \neq 2$, não é espaço com Produto Interno, ou seja, é um espaço de Banach que não é espaço de Hilbert.

Exemplo 4.19. *Seja $C[0,2]$ com*

$$< f, g >= \int_0^2 f(x)g(x)dx.$$

Vamos mostrar que não é espaço de Hilbert.

Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, x \in [0,1] \\ 1, x \in (1,2] \end{cases}$$

de Cauchy que não é converge em $C[0,2]$. Suponha que $f_n \to f$, ou seja, $f_n - f \to 0$, com $\| \ \|_2$. Então,

$$\int_0^2 (f_n - f)^2(x)dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_0^1 (f_n - f)^2(x)dx \to 0 \tag{4.2}$$

$$\int_1^2 (f_n - f)^2(x)dx \to 0. \tag{4.3}$$

De (4.3) *obtemos que*

$$\int_1^2 (1-f)^2(x)dx \to 0 \Rightarrow \int_1^2 (1-f)^2(x)dx = 0 \Rightarrow (1-f)(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1,\ x \in [1,2].$$

Já de (4.2),

$$\int_0^1 (f_n - f)^2(x)dx \to 0 \Rightarrow (f_n - f)^2(x) \to 0 \Rightarrow (x^n - f)(x) \to 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0, \forall\ x \in [0,1).$$

Logo, f não é contínua.

4.2 Ortogonalidade

Nesta seção veremos alguns resultados sobre ortogonalidade que nos serão úteis para o próximo capítulo.

Definição 4.20. *Seja X um espaço com Produto Interno e $x, y \in X$.*

*i) Dizemos que x **e** y **são ortogonais** se $< x, y >= 0$, e escrevemos $x \perp y$.*

*ii) Dizemos que um vetor x **é ortogonal a um conjunto** $Y \subseteq X$ se $< x, y >= 0$, para todo $y \in Y$, e escrevemos $x \perp Y$.*

*iii) Dizemos que dois conjuntos $Y, Z \subseteq X$ **são ortogonais** se $y \perp z$, para todo $y \in Y$ e para todo $z \in Z$, e escrevemos $Y \perp Z$.*

Definição 4.21. *Seja X um espaço vetorial com Produto Interno, $Y \subseteq X$. O **complemento ortogonal de** Y é o conjunto*

$$Y^{\perp} = \{x \in X : x \perp Y\}.$$

Exemplo 4.22. *Seja $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \{(-1,1)\}$.*

Neste caso, $Y^{\perp} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 4.23. *Em l^2, considere $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 : x_1 = x_2 = 0\}$. Vamos determinar $A^\perp$.*

Seja $y \in l^2$ e $a \in A$, se $a \perp y$ então

$$< a, y >= 0 \Leftrightarrow < (0, 0, x_3, \cdots), (y_1, y_2, y_3, \cdots) >= 0,$$

ou seja,

$$\sum_{n=3}^{\infty} x_n y_n = 0, \forall\ y \in l^2.$$

Em particular,

$$< a, e_n >= 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, x_3, \cdots) = 0.$$

Então a penúltima igualdade ocorre se, e somente se, $x_n = 0$ para todo $n \geqslant 3$.

Portanto, $A^\perp = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 : x_n = 0, \forall\ n \geqslant 3\}$.

Definição 4.24. *Seja X um espaço vetorial com $Y, Z \subseteq X$ subespaços. Dizemos que X é **soma direta** de Y e Z se todo elemento de X pode ser escrito de maneira única como soma de elementos de Y e Z, e denotamos $X = Y \oplus Z$.*

Teorema 4.25. *(Soma Direta) Seja H um espaço de Hilbert com $Y \subseteq H$ um subespaço fechado de H. Então*

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Esta demonstração pode ser vista em [1].

Observação 4.26. *Não vale um resutado como no Teorema 4.25 se Y não for completo. Considere, por exemplo, $H = l^2$, $Y = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 : x_n \neq 0,$ só para finitos n's $\}$.*

Vamos mostrar que $Y^\perp = \{0\}$.

Primeiro, note que Y é denso em l^2.

Tome $y \in Y^\perp$. Então, como Y é denso em l^2, existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tal que $y_n \to y$. Assim, $< y, y_n >= 0$, logo

$$< y, y >=< y, \lim_{n\to\infty} y_n >= \lim_{n\to\infty} < y, y_n >= 0.$$

Segue que $y = 0$, e então $Y^\perp = \{0\}$. Logo, $l^2 \neq Y \oplus Y^\perp$.

4.3 Funcionais Lineares em Espaços de Hilbert

Nesta seção estudaremos a relação entre um espaço de Hilbert e seu dual.

Seja H um espaço de Hilbert. Fixe $z \in H$ e defina $f : H \to \mathbb{K}$, por

$$f(x) =< x, z > .$$

Note que f é linear. E, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = |< x, z >| \leqslant \|x\| \, \|z\| \, .$$

Logo,

$$\|f\| = sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in H\} \leqslant 1 \, \|z\| = \|z\| \, .$$

Além disso, considere $x = \frac{z}{\|z\|}$. Então, $\|x\| = 1$ e

$$\left| f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right| = \left| \left\langle \frac{z}{\|z\|}, z \right\rangle \right| = \frac{1}{\|z\|} |< z, z >| = \frac{1}{\|z\|} \|z\|^2 = \|z\| \, .$$

Portanto,

$$\|f\| = \|z\| \, . \tag{4.4}$$

Vamos mostrar, no próximo teorema, que todo funcional linear limitado em H é como definido acima.

Teorema 4.27. *(Teorema de Riez): Seja H um espaço de Hilbert, com $f \in H'$. Então existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) =< x, z > \forall x \in H$$

e

$$\|f\| = \|z\| \, .$$

Demonstração. Se $f = 0$ escolha $z = 0$. Suponha então que $f \neq 0$.

Primeiro, vamos provar que $f(x) =< x, z >$ para todo $x \in H$.
Seja $f \in H$ e $N = Ker(f)$. Veja que N é fechado, pois para cada $x \in \overline{N}$ existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em N tal que $x_n \to x$. Como f é contínua, $f(x_n) \to f(x)$, e temos que $f(x) = 0$ desde que $f(x_n) = 0$, e então $x \in N$. E como N é fechado, podemos escrever $H = N \oplus N^{\perp}$. Como $f \neq 0$ então $N \neq H$ e assim $N^{\perp} \neq \{0\}$, logo, existe $z_0 \neq 0 \in N^{\perp}$. Dado $x \in H$, considere

$$y = f(x)z_0 - f(z_0)x,$$

aplicando f,

$$\begin{aligned} f(y) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= f(f(x)z_0) - f(f(z_0)x) \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in N$. Então, $< y, z_0 >= 0$, ou seja,

$$< f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 >= 0$$

$$\Leftrightarrow < f(x)z_0, z_0 > - < f(z_0)x, z_0 >= 0$$

$$\Leftrightarrow < f(x)z_0, z_0 >=< f(z_0)x, z_0 >$$

$$\Leftrightarrow f(x) < z_0, z_0 >=< f(z_0)x, z_0 >$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{< f(z_0)x, z_0 >}{< z_0, z_0 >}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}z_0}{< z_0, z_0 >} \right\rangle.$$

Seja

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}z_0}{< z_0, z_0 >} = \frac{\overline{f(z_0)}z_0}{\|z_0\|^2}.$$

Então,

$$f(x) =< x, z >, \forall\ x \in H.$$

Vamos mostrar que z é único.

Sejam $z_1, z_2 \in H$ tal que

$$< x, z_1 >= f(x) =< x, z_2 >, \forall x \in H.$$

Então

$$< x, z_1 > - < x, z_2 >= 0 \Leftrightarrow < x, z_1 - z_2 >= 0, \forall\ x \in H.$$

Tomando $x = z_1 - z_2$, temos que

$$< z_1 - z_2, z_1 - z_2 >= 0$$

$$\Leftrightarrow \|z_1 - z_2\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

De (5.1) segue que

$$\|f\| = \|z\|.$$

□

Dado $f \in H'$, pelo Teorema 4.27, existe um único z_f tal que

$$f(x) =< x, z_f >, \forall x \in H.$$

Defina $T : H' \to H$ por $T(f) = z_f$.

Teorema 4.28. *A função T definida acima é bijeção, conjugado-linear e isométrica.*

Demonstração. Primeiro, note que a sobrejeção segue do Teorema 4.27.

Seja $f \in H'$, então

$$\|T(f)\| = \|z_f\| = \|f\|.$$

Logo, T é isometria.

Agora, resta mostrar que T é conjugado-linear.

Sejam $f, g \in H'$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Sabemos que $T(f) = z_f$, $T(g) = z_g$. Vamos mostrar que

$$T(f+g) = z_{f+g} = z_f + z_g$$

e

$$T(\alpha f) = \overline{\alpha} z_f = \overline{\alpha} T(f).$$

Para isso, veja que

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &=< x, z_f > + < x, z_g > \\ &=< x, z_f + z_g > .\end{aligned}$$

Ou seja,

$$T(f+g) = z_f + z_g = T(f) + T(g).$$

Além disso,

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha < x, z_f >=< x, \overline{\alpha} z_f > .$$

Isto é,

$$T(\alpha f) = \overline{\alpha} z_f = \overline{\alpha} T(f).$$

A injetividade segue do fato de T ser conjugado-linear e isométrica.

□

Pelo Teorema 4.28 concluimos que se H é um espaço de Hilbert então existe uma função bijetora, conjugado linear e isométrica entre H' e H.

5 Considerações Finais

As diversas ferramentas analíticas, tanto teoremas, proposições, exemplos e contra-exemplos foram de suma importância para a consecução da pesquisa. Fizemos um percurso pelos estudos na área da Análise Funcional, buscando complementar os estudos direcionados com espaço dual e seu próprio espaço, analisando a isometria isomorfa entre os mesmos, e para isso analisamos os funcionais lineares em espaços de Hilbert, que é o espaço em que essa relação sempre ocorre.

Referências

[1] KREYZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.*, 1ª ed., University of Windsor, Canada: John Wiley & Sons, 1989.

[2] BOTELHO, G., PELLEGRINO D., TEIXEIRA E. *Fundamentos de análise funcional*, 1ª ed., SBM, 2015.

[3] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. 1, Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

[4] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*, volume 3., McGraw-hill New York, 1964.

[5] STEINBRUCH, A., WINTERLE, P. *Álgebra Linear*, 2ª ed., McGraw-Hill, 1987.

[6] STRANG, G. *Álgebra Linear e suas aplicações*, 1ª ed., Cengage do Brasil, 2010.