

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CLEISON DOS SANTOS RAMTHUN

TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Blumenau

2019

CLEISON DOS SANTOS RAMTHUN

TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Naiara Vergian de Paulo Costa

Blumenau

2019

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 14h do dia 13 de dezembro de 2019.

CLEISON DOS SANTOS RAMTHUN

TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS : / CLEISON DOS SANTOS RAMTHUN; Orientadora, Prof^a. Dr^a. Naiara Vergian de Paulo Costa; , - Blumenau, , 13 de dezembro de 2019.

111 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática (MAT), Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Distância. 2. Espaços Métricos. 3. Abertos. 4. Topologia. 5. Continuidade. 6. Homeomorfismo. 7. Compacidade. 8. Conexidade. I. Prof^a. Dr^a. Naiara Vergian de Paulo Costa II. III. Curso de Licenciatura em Matemática IV. TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

CDU

02:141:005.7

CLEISON DOS SANTOS RAMTHUN

TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática (MAT), Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 13 de dezembro de 2019.

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Coordenador do Curso de Licenciatura em
Matemática

Banca Examinadora:

**Prof^a. Dr^a. Naiara Vergian de Paulo
Costa**
Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Felipe Vieira
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

*Dedico meu trabalho aos meus pais Adilson e Sueli
e ao meu irmão Cristian.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força de cada dia ...

Aos meus pais por além de me darem a vida, carinho e amor, sempre me auxiliaram, deram apoio e incentivo para ir em busca dos meus sonhos.

Ao meu irmão por me ensinar a não perder o brilho no olhar e jamais esquecer a criança que reside dentro de mim.

À minha orientadora, por ser exemplo de profissional, por se dedicar, puxar minha orelha e me ajudar em todos os momentos, e além disso, por ser uma amiga nas horas de desabafo e angústia. Junto a ela, agradeço também ao seu marido Bruno por ter me auxiliado durante o seu afastamento.

Aos professores Felipe e Louise por serem ótimos professores e grandes amigos, por me ajudarem e me aconselharem diversas vezes.

Ao professor Eleomar por ser um professor tão dedicado, preocupado e empenhado. Profissional no qual eu me espelho.

Ao professor André por ser um maravilhoso coordenador de curso e muito empenhado, me trouxe grandes ensinamentos.

A professora Laís por todo zelo e cuidado enquanto professora e por todas as vezes que me auxiliou além da vida acadêmica.

Aos demais professores e servidores da UFSC que de alguma forma contribuíram para minha formação, meu muito obrigado.

Aos meus amigos Everaldo e Larissa por me ajudarem desde o início, quando esse sonho em ser professor surgiu. Obrigado por acreditarem em mim e me fazerem lembrar a cada dificuldade que eu seria capaz de supera-la e ir além. A alegria da nossa amizade foi primordial nesse meu processo de evolução como sujeito.

Aos amigos Bryan, Camila, Fernanda e Luana que a universidade me concedeu, por se fazerem tão presentes em minha vida, e por me proporcionarem momentos de alegria durante a graduação.

Aos amigos que se fizeram presente e aqueles em que fui conhecendo durante a trajetória acadêmica, Aline, Ana, Andreza, Bianca, Bruna, Eloise, Gabriel, Leandro e Suelen, obrigado por tudo, vocês fizeram toda diferença.

A todos os parentes e amigos que ajudaram de alguma forma e entenderam minha ausência durante todos esses anos.

E as demais pessoas que passaram pela minha vida, deixaram suas marcas e ajudaram na minha construção pessoal e acadêmica, meu muito obrigado.

Não é fácil passar por um processo de graduação, no qual você renuncia coisas, momentos e pessoas, mas tenho consciência de que fiz a escolha certa para o ser humano e profissional que sou hoje. Há muito o que evoluir, sonhar e realizar daqui para frente, mas posso dizer que e esses cinco anos foram os melhores anos da minha vida. Houveram espinhos, mas só me fizeram abrir os olhos para as rosas que estavam a surgir!

"Antes de ser um bom profissional, seja um excelente ser humano."

Iago Estéfano Brito da Silva

RESUMO

O objetivo deste trabalho é explorar conceitos topológicos em espaços métricos. Sumariamente, tratamos da definição de métrica, que nada mais é que a maneira de medir a distância entre elementos de um conjunto. Nos deparamos com métricas conhecidas e, algumas incomuns a um primeiro olhar. Com base nos conhecimentos iniciais, trabalhamos com algumas noções topológicas, tais como os conceitos de conjuntos compactos e conexos. Abordamos também o conceito de aplicações contínuas e definimos o que é um homeomorfismo, sendo este o conceito de maior destaque, pois estabelece uma relação entre espaços que são equivalentes sob o ponto de vista topológico. Por fim, exploramos propriedades de aplicações contínuas definidas sobre conjuntos compactos ou conexos. Visando uma melhor compreensão de todos os pontos tratados neste trabalho, procuramos empregar um caráter mais ilustrativo.

Palavras-chaves: Distância, Espaços Métricos, Abertos, Topologia, Continuidade, Homeomorfismo, Compacidade, Conexidade.

ABSTRACT

The goal of this work is to explore topological concepts on metric spaces. In brief, we deal with the definition of metric, which is nothing more than the way of measuring the distance between elements of a set. We come across well known metrics, and some others rather unusual at first look. Based on the initial knowledge, we work with some topological notions. We also approach the concept of continuity and introduce the definition of homeomorphism, which is the most prominent concept since it gives a relation between spaces which are equivalent in the topological point of view. Finally, we present some properties of continuous maps which are defined on compact or connected sets. In order to provide a better understanding of the ideas presented in this work, we sought to employ a more illustrative view.

Keywords: Metric, Metric Spaces, Open Sets, Topology, Continuity, Homeomorphism, Compactness, Connectedness.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESPAÇOS MÉTRICOS	19
2.1	BOLAS	33
2.2	ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS	38
2.3	SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS	41
3	TOPOLOGIA	47
3.1	PONTO INTERIOR E CONJUNTO ABERTO	47
3.2	PONTOS DE ACUMULAÇÃO, ADERÊNCIA E FRONTEIRA	54
3.3	CONJUNTO FECHADO	61
3.4	TOPOLOGIA RELATIVA	67
3.5	CONVEXIDADE E LIMITAÇÃO	70
3.6	COMPACIDADE	72
3.7	CONEXIDADE	79
4	APLICAÇÕES CONTÍNUAS	87
4.1	HOMEOMORFISMO	92
4.2	COMPACIDADE E CONTINUIDADE	98
4.3	CONEXIDADE E CONTINUIDADE	101
4.4	CONEXIDADE POR CAMINHOS	106
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
	REFERÊNCIAS	111

1 INTRODUÇÃO

Medir distância entre elementos de um conjunto sempre foi visto como um conceito de extrema importância. E, apesar das formas mais triviais de realizar essas “medições”, existem maneiras incomuns, que por sua vez, satisfazem as propriedades para que possam ser classificadas como métricas.

Este trabalho tem como um de seus objetivos o estudo dos espaços métricos gerais, partindo inicialmente da definição de métrica no Capítulo 2 que, mais precisamente, trata-se de uma aplicação que associa a um par de pontos de um conjunto, um número real não negativo. Descrevemos que conjuntos, munidos de uma métrica, são chamados de espaços métricos.

Usando os conceitos vistos no Capítulo 2, trabalhamos no terceiro capítulo com conceitos topológicos, definindo inicialmente, na primeira seção, ponto interior de um conjunto, para assim, classificarmos um conjunto que só possui pontos interiores, como, abertos. E, com isso, lidaremos com o teorema fundamental dos conjuntos abertos, que trata das propriedades dos abertos. Tais propriedades nos permitirão dizer que todo espaço métrico está munido de uma topologia, basta apenas colecionar os abertos do espaço métrico para compor a topologia.

Ainda no Capítulo 3, definimos pontos que dispõem de algumas características particulares e, por este motivo, recebem nomes especiais. Neste Capítulo, trabalharemos com pontos de aderência, acumulação e fronteira. Com base nos conhecimentos da definição, veremos que pontos de acumulação são pontos de aderência, entretanto a recíproca nem sempre é satisfeita. Grosso modo, pontos de fronteira, podem ser vistos, em caráter ilustrativo, como pontos da “borda” de um conjunto, de forma que, toda bola aberta centrada nestes pontos, contém pontos do conjunto e de seu complementar.

Conjuntos que contêm todos os seus pontos aderentes serão chamados de conjuntos fechados. Essa é a abordagem inicial

da Seção 3.3, na qual, de maneira equivalente, diremos que um conjunto é fechado, quando seu complementar é aberto. Analogamente aos conjuntos abertos, nesta seção, demonstraremos o teorema fundamental dos conjuntos fechados.

No estudo da topologia é muito comum ouvir que um conjunto é aberto relativamente a outro e, justamente na Seção 3.4, definiremos o conceito de topologia relativa. Logo, na sequência, iremos caracterizar alguns conjuntos como limitados e, trabalharemos com o conceito de convexidade.

As duas últimas seções do Capítulo 3 abordam, respectivamente, conjuntos compactos e conjuntos conexos. Para definir um conjunto compacto usaremos a ideia de cobertura aberta. Já na definição de conjuntos conexos, lidaremos com cisões de conjuntos.

Grosso modo, considere um conjunto, e suponha que você consegue deformá-lo em outro, sem quebrá-lo. Na matemática, essa propriedade é chamada de homeomorfismo. Esse conceito será estudado na Seção 4.1 do Capítulo 4. Para que tenhamos condições de trabalhar com essa noção, primeiramente, estudaremos continuidade de funções. E, então, diremos que espaços métricos são homeomorfos quando conseguimos definir entre eles uma aplicação contínua, cuja inversa é também, contínua.

Fazendo uma ponte entre continuidade, conexidade e compactidade, veremos que funções contínuas, cujos domínios são compactos ou conexos, possuem características particulares. E, por fim, vamos apresentar outra forma de detectar conjuntos conexos. Mais precisamente, definiremos conjuntos conexos por caminhos, noção que generaliza a convexidade de conjuntos.

Este trabalho foi baseado nas seguintes obras: [1], [2], [3], [4] e [5]

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Na matemática, existem algumas ideias que são de extrema relevância, e durante muito tempo, foi reconhecida a importância de generalizar a noção intuitiva de distância, para que assim pudéssemos aplicar em conjuntos não tão triviais. Por exemplo, considere uma função f , definida em um conjunto X , que tomaremos como domínio, e tomando seus valores em um conjunto Y , denominado contradomínio.

A função f é dita contínua em um ponto $a \in X$, se acontecer que para todo $x \in X$, x e a estiverem suficientemente próximos implicar que $f(a)$ e $f(x)$ também estão. Afirmaremos que uma sequência (x_n) em X , com $n \in \mathbb{N}$, converge para um ponto $a \in X$, quando a partir de um certo n consideravelmente grande, os próximos elementos da sequência estão próximos de a . Note que esses conceitos só fazem sentido quando estamos trabalhando em um contexto que nos permite usar a ideia de proximidade, ou melhor, de distância.

Dados três pontos a, b e c pertencentes a um conjunto X qualquer, a maneira mais natural de verificar qual ponto, a ou b está mais próximo de c é medindo as distâncias entre esses pontos até c . Para isso, é necessário que o conjunto X seja munido de uma distância. Conjuntos que têm essa propriedade são casos particulares de espaços topológicos, e denominamos como espaços métricos.

Antes de definir um espaço métrico, precisamos entender o que é uma métrica.

Definição 2.1. Seja M um conjunto. Dizemos que uma **métrica** em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada par de pontos $x, y \in M$ a um número real $d(x, y)$, chamado de distância do ponto x ao ponto y , de tal modo que:

1. $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;

$$3. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

para quaisquer que sejam $x, y, z \in M$.

Uma característica dos triângulos nos garante que um lado é sempre menor que a soma dos outros dois, sendo assim, dizemos que a terceira propriedade de uma métrica é chamada de desigualdade triangular.

Fixada a ideia de métrica, temos a seguinte definição:

Definição 2.2. Um **espaço métrico** é um par (M, d) , formado por um conjunto M não vazio e uma métrica d em M .

A partir de agora, sempre que nos referirmos a um *espaço métrico* M , fica subentendida existência de uma métrica d .

Veremos a seguir alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 2.0.1. Seja $X = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e defina:

$$\begin{aligned} d : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = |x - y|, \end{aligned}$$

em que $|\cdot|$ representa o valor absoluto. Vamos mostrar que X é um espaço métrico.

Para mostrar que X é um espaço métrico, precisamos verificar que a função d satisfaz as três propriedades de métrica apresentadas na Definição 2.1. Tome $x, y, z \in X$. É evidente que $d(x, x) = 0$. De fato, $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$. Temos também que para $x \neq y$, $d(x, y) = |x - y|$, que em particular é o valor absoluto da diferença $x - y$, ou seja, é um número positivo. Portanto $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$. E, além disso, $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x)$. Como sabemos, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $|a + b| \leq |a| + |b|$,

sendo assim,

$$\begin{aligned}
 d(x, z) &= |x - z| \\
 &= |x + y - y - z| \\
 &= |(x - y) + (y - z)| \\
 &\leq |x - y| + |y - z| \\
 &= d(x, y) + d(y, z).
 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que X é um espaço métrico. Essa métrica é conhecida como métrica usual de \mathbb{R} . Perceba que, neste exemplo, em particular, as propriedades da métrica d seguem diretamente das propriedades do valor absoluto de números reais. A figura a seguir representa a métrica em \mathbb{R} , com a métrica usual, sendo $d(-2, 2) = |-2 - 2| = |-4| = 4$.

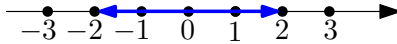


Figura 2.1 – Representação da métrica em \mathbb{R} , com a métrica usual.

Vimos no exemplo anterior que $X = \mathbb{R}$ é um espaço métrico, que é um caso particular de \mathbb{R}^n para $n = 1$. Em nosso próximo exemplo vamos mostrar que $X = \mathbb{R}^n$ é um espaço métrico.

Exemplo 2.0.2. Seja $X = \mathbb{R}^n$, com n um número inteiro positivo qualquer. Vamos mostrar que o conjunto das n -uplas reais $x = (x_1, \dots, x_n)$ munido da função d , de modo que

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ é um espaço métrico. Particularmente, essa métrica é conhecida como *métrica euclidiana (ou métrica usual)* de \mathbb{R}^n . Como anteriormente, para dizer que X é um espaço métrico, precisamos verificar que

d satisfaz as propriedades de métrica. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_1)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in X = \mathbb{R}^n$. É natural que $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e também que $d(x, y) = d(y, x)$. De fato,

$$d(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n 0^2} = 0,$$

caso $x \neq y$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} > 0,$$

uma vez que $(x_i - y_i)$ está elevado ao quadrado. E, além disso,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \\ &= d(y, x). \end{aligned}$$

Sendo assim, resta apenas verificar a desigualdade triangular, ou seja, precisamos mostrar que:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}.$$

Para facilitar os cálculos, tomamos $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, precisamos mostrar que:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade, equivale a mostrar que:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

Mas, note que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n (a_i b_i) &\leq \\ \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}. \end{aligned}$$

Subtraindo os termos semelhantes em ambos os lados da desigualdade, conseguimos reduzir à seguinte inequação:

$$2\sum_{i=1}^n (a_i b_i) \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2}.$$

A última desigualdade obtida, é uma consequência da conhecida desigualdade de Cauchy:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (b_i)^2 \right].$$

Para mostrar a desigualdade de Cauchy, vamos analisar dois casos:

1. se $\sum (b_i)^2 = 0$, então $b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, logo

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i b_i)^2 \right] = 0 = \left[\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (b_i)^2 \right].$$

2. se $\sum (b_i)^2 > 0$, o trinômio do 2º grau em λ :

$$\left[\sum_{i=1}^n (b_i)^2 \right] \lambda^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^n a_i b_i \right] \lambda + \sum_{i=1}^n (a_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 \geq 0$$

para qualquer valor real de λ . Logo, seu discriminante deve ser menor ou igual a zero, ou seja,

$$4 \left[\sum_{i=1}^n a_i b_i \right]^2 - 4 \left[\sum_{i=1}^n (a_i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n (b_i)^2 \right] \leq 0,$$

o que demonstra a desigualdade desejada.

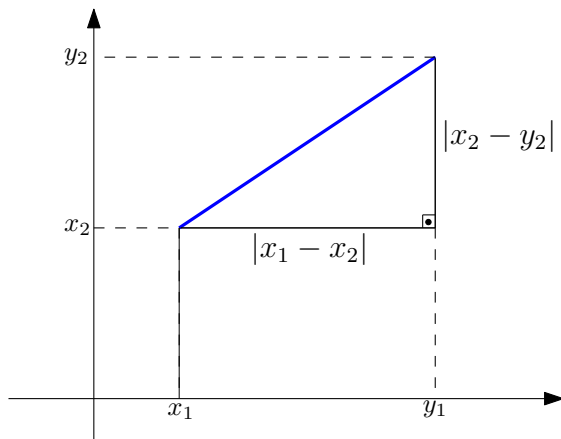


Figura 2.2 – A representação da métrica euclidiana em \mathbb{R}^2 pode ser vista como a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo.

Mostraremos agora espaços métricos mais abstratos.

Exemplo 2.0.3. Seja X um conjunto, qualquer, não vazio. Considere uma função

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dizemos que f é uma função limitada quando existe um número real $k := k_f > 0$, de modo que, para todo $x \in X$, $|f(x)| \leq k$. A notação $B(X, \mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções reais limitadas.

Vale a pena lembrar que a soma e o produto de funções limitadas são também limitadas. De fato, seja $f, g \in B(X, \mathbb{R})$, de modo que $\forall x \in X$ $|f(x)| \leq k_1$ e $|g(x)| \leq k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Note que:

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq k_1 + k_2.$$

Como $|(f + g)(x)| \leq k = k_1 + k_2$, segue que a função $f + g$ é limitada. E, além disso, como

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq k_1 \cdot k_2.$$

Como $|(f \cdot g)(x)| \leq k' = k_1 \cdot k_2$, segue que a função $f \cdot g$ é limitada.

Para $f, g \in B(X, \mathbb{R})$, vamos mostrar que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

define uma métrica em $B(X, \mathbb{R})$, tal métrica é conhecida como métrica do supremo. Para garantir isso, basta verificar que as propriedades de métrica são satisfeitas. Sejam $f, g, h \in B(X, \mathbb{R})$.

1. Suponha que

$$f(x) = g(x), \forall x \in X$$

sendo assim,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = 0.$$

Caso $f(x) \neq g(x)$, para algum $x \in X$, $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| > 0$.

2. Agora, note que a segunda propriedade também é satisfeita. De fato,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f).$$

3. Para verificar a desigualdade triangular usaremos a desigualdade triangular do valor absoluto de números reais e implicitamente duas propriedades de supremo. A primeira garante que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$ limitados superiormente e dado $Z = X + Y \subset \mathbb{R}$,¹ segue que Z é limitado superiormente. E, além disso,

$$\sup Z = \sup X + \sup Y.$$

Já a segunda propriedade de supremo diz que se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente e $Y \subset X$, então $\sup Y \leq \sup X$. Agora, mostraremos que a desigualdade triangular é satisfeita.

Como

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

somando e subtraindo $h(x)$, temos que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|$$

¹ Definimos a soma dos subconjuntos X e Y de \mathbb{R} como $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$.

Usando a desigualdade triangular do valor absoluto, segue que

$$\begin{aligned} d(f, g) &\leq \sup_{x \in X} [|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|] \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Sendo assim, $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ define uma métrica em $B(X, \mathbb{R})$.

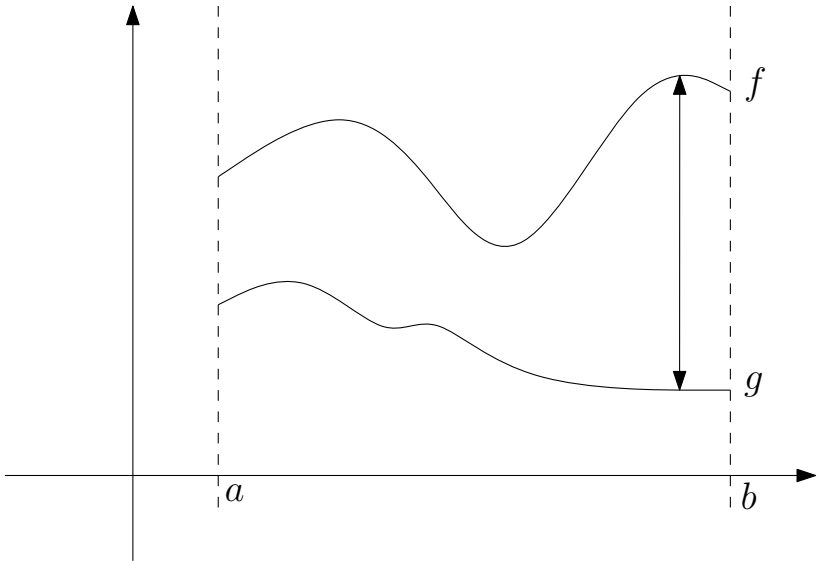


Figura 2.3 – Representação da métrica do supremo em $B(X, \mathbb{R})$.

Podemos definir outras métricas no espaço das funções. Por exemplo, a métrica da integral.

Exemplo 2.0.4. Considere $C(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais contínuas, em que $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Para $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, vamos mostrar que a função d , dada da seguinte forma:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx,$$

define uma métrica em $C(X, \mathbb{R})$.

1. Primeiramente, se $f(x) = g(x)$, para todo x , então:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_a^b |f(x) - f(x)| \, dx \\ &= \int_a^b 0 \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, suponha que $f(x_0) \neq g(x_0)$ para algum x_0 . Como f e g são contínuas, deve existir um intervalo $I \subset X$ contendo o ponto x_0 de modo que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in I$, vide [1]. Logo

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx > 0.$$

2. Note que, como visto no Exemplo 2.0.3, $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, para todo x , então:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_a^b |g(x) - f(x)| \, dx \\ &= d(g, f). \end{aligned}$$

3. Por fim, vide Exemplo 2.0.3, novamente, segue que a desigualdade triangular é satisfeita na função módulo. Ou seja,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \forall x \in X. \end{aligned}$$

Aplicando a integral em ambos os lados, temos que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \leq \int_a^b |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \, dx.$$

E, usando que a integral da soma é igual a soma das integrais, segue que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx &\leq \\ \int_a^b |f(x) - h(x)| \, dx &+ \int_a^b |h(x) - g(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Concluindo assim, que $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Sendo assim, $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$ define uma métrica em $C(X, \mathbb{R})$.

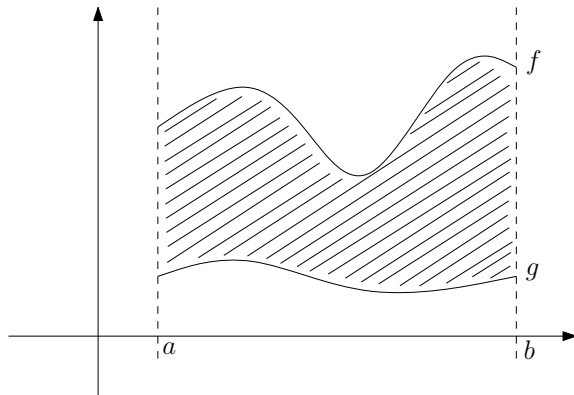


Figura 2.4 – Representação da métrica da integral em $C(X, \mathbb{R})$.

Vimos no Exemplo 2.0.2 a métrica usual de \mathbb{R}^n . No próximo exemplo veremos outras métricas naturais de \mathbb{R}^n , conhecidas como métrica da soma e métrica do máximo.

Exemplo 2.0.5. Dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

São conhecidas como métrica da soma e métrica do máximo, respectivamente. Verificaremos agora as propriedades de métrica. Para isso, considere $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Suponha $x = y$, então,

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - x_i| = 0 \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i| = 0.$$

Entretanto, caso $x \neq y$

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| > 0 \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| > 0$$

pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para algum i .

2. Agora, veja que

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d'(y, x) \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = d''(y, x).$$

3. Por fim, a desigualdade triangular

$$\begin{aligned}
 d'(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| \\
 &= d'(x, z) + d'(z, y)
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 d''(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \\
 &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\
 &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| \\
 &= d''(x, z) + d''(z, y).
 \end{aligned}$$

Assim, garantimos que d' e d'' são métricas em \mathbb{R}^n .

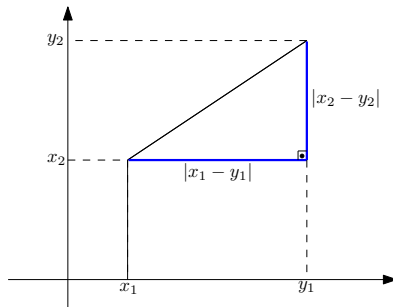


Figura 2.5 – A representação da métrica da soma em \mathbb{R}^2 pode ser vista como a soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo.

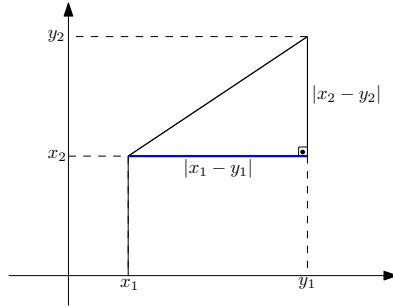


Figura 2.6 – A representação da métrica do máximo em \mathbb{R}^2 pode ser vista como a medida do maior cateto de um triângulo retângulo.

Dado um espaço métrico M , dizemos que todo subconjunto $X \subset M$ possui uma estrutura natural de espaço métrico. Para que isso aconteça, basta definir a distância entre dois pontos de X da mesma forma que a distância está definida em M , pois, os pontos em particular, pertencem ao espaço métrico.

Definição 2.3. Considere M um espaço métrico e seja $X \subset M$. Dados dois pontos $x, y \in X$, defina a distância entre x, y , como a mesma distância entre eles considerados pontos de M , isto é, temos que a distância d_X em X é definida por

$$\begin{aligned} d_X &: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ d_X(a, b) &= d_M(a, b) \end{aligned}$$

onde d_M é a métrica em M . A métrica assim definida em X chama-se **métrica induzida** em X pela métrica de M . Dizemos que o espaço métrico X assim obtido, chama-se **subespaço métrico** de M .

Exemplo 2.0.6. Seja \mathbb{R}^2 munido da métrica usual, ou seja, dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, introduzida no Exemplo 2.0.2. Tome $\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ como subconjunto de \mathbb{R}^2 , perceba que podemos medir distância dos elementos de \mathbb{R} utilizando a métrica de \mathbb{R}^2 . De fato, dados $a = (a_1, 0), b = (b_1, 0) \in \mathbb{R}$, $d(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2} = |a_1 - b_1|$.

Dado qualquer conjunto não vazio, existe uma maneira de torná-lo um espaço métrico, perceba isso no nosso próximo exemplo.

Exemplo 2.0.7. Seja X um conjunto qualquer, não vazio. Defina em X uma métrica d da seguinte forma: $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, com $x, y \in X$.

Chamamos a métrica do exemplo acima como *métrica 0-1* e, podemos perceber que todas as propriedades da definição de métrica são satisfeitas. De fato, considere d a métrica 0-1 em um conjunto X . Sejam $a, b \in X$, veja que $d(a, a) = 0$ e $d(a, b) = 1 > 0$, se $a \neq b$. Note também que $d(a, b) = 1 = d(b, a)$, se $a \neq b$ e, também $d(a, b) = 0 = d(b, a)$, se $a = b$. Para finalizar, basta mostrar que a métrica 0-1 satisfaz a desigualdade triangular $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$. Para isso, iremos separar os casos em dois itens:

- Sejam $a, b, c \in X$, se $a = b$, temos que $d(a, b) = 0$. Observe que neste caso segue que, se c coincide com $a = b$, $d(a, c) + d(c, b) = 0$ ou $d(a, c) + d(c, b) = 2$, se c não coincide com $a = b$. Nas duas possibilidades a desigualdade é satisfeita.
- Suponha agora que $a \neq b$, desta maneira, $d(a, b) = 1$, logo $d(a, c) + d(c, b) = 1$, caso $a = c$ ou $b = c$, ou $d(a, c) + d(c, b) = 2$ se $a \neq c$ e $b \neq c$. A igualdade é verificada em ambas as possibilidades.

E, assim, garantimos que todas as propriedades de métrica são satisfeitas.

2.1 BOLAS

O conceito de bolas é imprescindível no estudo dos espaços métricos. Para as definições dessa seção, usaremos o conceito de métrica. Veremos também, que a forma geométrica das bolas depende da métrica empregada.

Definição 2.4. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados um ponto $a \in M$ e um número real $r > 0$, definimos como **bola aberta** de centro a e raio r , o conjunto dos pontos $x \in M$, para os quais a distância de x ao ponto a é menor que r . Indicaremos este conjunto com a notação $B(a, r)$.

Em termo matemáticos, temos que

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

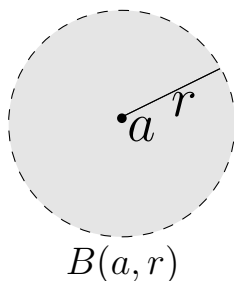


Figura 2.7 – Bola aberta de centro a e raio $r > 0$.

De forma análoga, podemos definir *bola fechada* e *esfera* de centro a e raio r , como:

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\} \text{ e}$$

$$S[a, r] = \{x \in M; d(x, a) = r\}, \text{ respectivamente.}$$

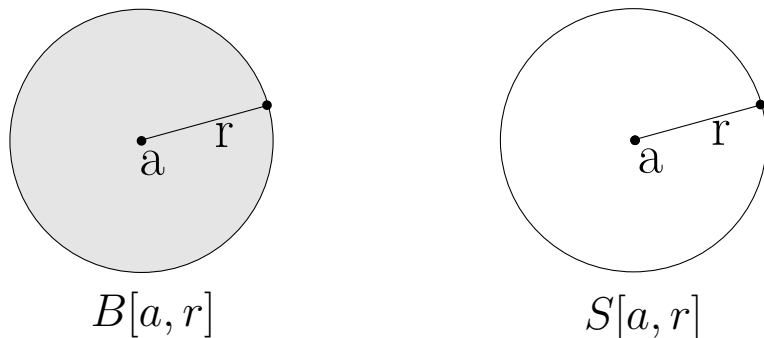


Figura 2.8 – Bola fechada e esfera de centro a e raio $r > 0$.

As formas geométricas das bolas e esferas variam dependendo da métrica que estamos trabalhando. Por exemplo, tome o conjunto \mathbb{R} com a métrica usual. As formas geométricas da bola aberta $B(a, r)$ e da bola fechada $B[a, r]$ são os intervalos $(a - r, a + r)$ e $[a - r, a + r]$, respectivamente. Já a esfera $S[a, r]$ é um conjunto formado apenas por dois pontos, sendo eles $a - r$ e $a + r$. Caso estejamos trabalhando no conjunto \mathbb{R}^2 , com a métrica usual, as formas geométricas das bolas, também chamadas de *discos*, e das esferas se resumem a círculos e circunferências, respectivamente. Para o \mathbb{R}^3 munido da métrica usual, a bola aberta $B(a, r)$ é vista como todo ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < r^2,$$

a bola fechada como todo ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2$$

e, a esfera como todo ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2.$$

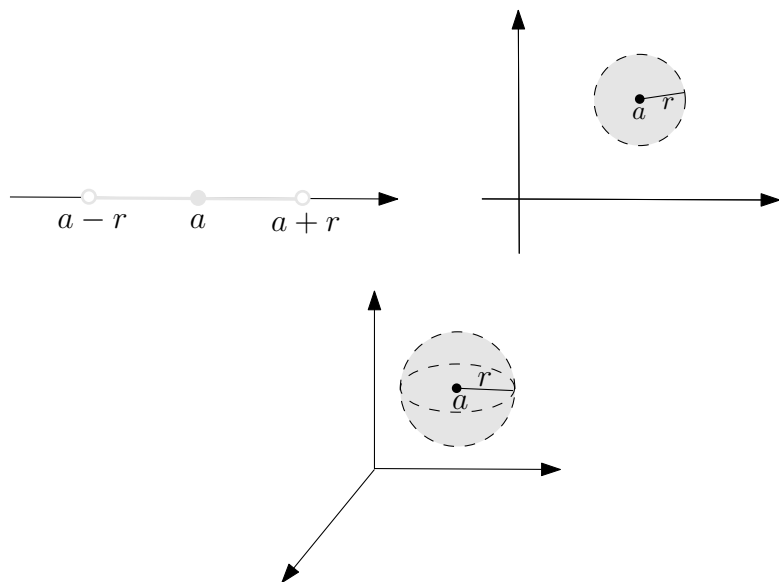


Figura 2.9 – Representações das bolas abertas de centro a e raio $r > 0$ em \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente, munidos da métrica euclidiana.

Considere um conjunto X munido da métrica 0-1. Neste conjunto, em particular, qualquer bola aberta de raio $r < 1$ consiste em apenas um ponto, seu centro. Essa observação nos leva à seguinte definição:

Definição 2.5. Seja X um espaço métrico. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um **ponto isolado** em X , quando existe uma bola aberta de centro x e raio $r > 0$ contendo apenas o ponto x , ou seja, $B(x, r) = \{x\}$. Quando um conjunto é formado apenas por pontos isolados, dizemos que o conjunto é **discreto**.

Veremos a seguir um exemplo da definição acima.

Exemplo 2.1.1. Seja $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Considere em \mathbb{Z} a métrica induzida de \mathbb{R} do Exemplo 2.0.1. Note que, para qualquer ponto $x \in \mathbb{Z}$ a bola $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ contém unicamente no ponto x . Sendo assim, temos que \mathbb{Z} é um conjunto discreto, pois todo ponto é isolado.

Exemplo 2.1.2. Perceba que todo conjunto munido da métrica $0 - 1$ é um conjunto discreto.

Considere um espaço métrico. Sempre que tomarmos dois pontos distintos nesse conjunto, vai existir duas bolas abertas disjuntas com centros nesses tais pontos. O que nos leva ao próximo resultado.

Proposição 2.1. *Seja X um espaço métrico. Dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem, em X , duas bolas abertas disjuntas com centros em x e y , respectivamente.*

Demonstração. Seja r um número real tal que $0 < r \leq \frac{d(x, y)}{2}$. Supondo, por absurdo, que existe um ponto $a \in X$ tal que $a \in B(x, r) \cap B(y, r)$, teríamos que $d(a, x) < r$, $d(a, y) < r$ e, pela desigualdade triangular, segue que

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r,$$

ou seja, $r > \frac{d(x, y)}{2}$. O que é uma contradição. Portanto, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. ■

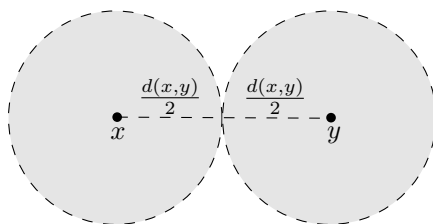


Figura 2.10 – Bolas abertas disjuntas.

No resultado da proposição acima podemos trocar bolas abertas por bolas fechadas. Basta considerar a bola fechada $B\left[a, \frac{r}{2}\right]$.

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

Métricas e normas são conceitos matemáticos diferentes, mas podemos dizer que normas dão origem à métricas e, assim, todo espaço vetorial normado será um exemplo de espaço métrico. Antes de lidar especificamente com normas vamos definir alguns conceitos.

Definição 2.6. Dizemos que um conjunto \mathbb{V} é um **espaço vetorial** sobre um corpo \mathbb{K} se existem operações $+$: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ de modo que, sejam satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$, temos que $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. $\forall u, v \in \mathbb{V}$, temos que $u + v = v + u$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{V}$, tal que $\forall u \in \mathbb{V}$, temos que $u + 0 = 0 + u = u$;
4. $\forall u \in \mathbb{V}$, $\exists(-u) \in \mathbb{V}$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$;
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in \mathbb{V}$, temos que $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $\forall v \in \mathbb{V}$, temos que $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, u e $\forall v \in \mathbb{V}$, temos que $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
8. $\exists 1 \in \mathbb{R}$, tal que $\forall v \in \mathbb{V}$, temos que $1 \cdot (v) = v$.

Definição 2.7. Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma **norma** em \mathbb{V} é uma função real $\| \cdot \|$: $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada elemento $x \in \mathbb{V}$ o número real $\|x\|$, chamado a norma de x , de modo que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. Se $x \neq 0$, então $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 2.8. Um **espaço vetorial normado** é um par $(\mathbb{V}, \| \cdot \|)$, em que \mathbb{V} é um espaço vetorial e $\| \cdot \|$ é uma norma em \mathbb{V} .

A partir das propriedades de norma, podemos notar que espaços normados são exemplos de espaços métricos, ou seja, dada uma norma $\|\cdot\|$, podemos definir uma métrica:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{V}.$$

Além das propriedades da Definição 2.1, a distância definida por uma norma satisfaz outras propriedades, a saber: para quaisquer $x, y, z \in V$

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;
2. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$.

Vamos fazer a verificação dessas propriedades:

1. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} d(x + z, y + z) &= \|(x + z) - (y + z)\| \\ &= \|(x + z - y - z)\| \\ &= \|(x - y) + (z - z)\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y); \end{aligned}$$

2. Por fim, veja que

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda y) &= \|\lambda x - \lambda y\| \\ &= \|\lambda(x - y)\| \\ &= |\lambda|\|x - y\| \\ &= |\lambda|d(x, y). \end{aligned}$$

Veremos a seguir alguns exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.2.1. Seja \mathbb{V} o espaço vetorial formado pelas sequências de números reais em que todos os termos, exceto um número finito deles, são iguais a zero, por exemplo $(0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots)$. Dado um elemento $x = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{V} , vamos mostrar que a função

$$\|x\| = \max\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$$

define uma norma neste espaço. De fato, dados $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{V}$, com $i \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verificam-se as propriedades:

1. $\|x\| = \max\{|x_i|\} \geq 0$ e é igual a zero se, e somente se, $x_i = 0$ para todo i .
2. Temos também que

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \|\lambda x_i\| \\ &= \max\{|\lambda x_i|; i \in \mathbb{N}\} \\ &= \max\{|\lambda| |x_i|\} \\ &= |\lambda| \max |x_i| \\ &= |\lambda| \cdot \|(x_i)\|. \end{aligned}$$

3. E, por fim,

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|(x_i) + (y_i)\| \\ &= \|(x_i + y_i)\| \\ &= \max\{|x_i + y_i|\} \\ &= \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\} \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^n . Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, defina as seguintes normas:

$$\begin{aligned} \|x\|' &= |x_1| + \dots + |x_n| \text{ e} \\ \|x\|'' &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}. \end{aligned}$$

Tais normas dão origem respectivamente às seguintes métricas no espaço \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= \|x - y\|' = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \text{ e} \\ d''(x, y) &= \|x - y\|'' = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, \end{aligned}$$

com $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

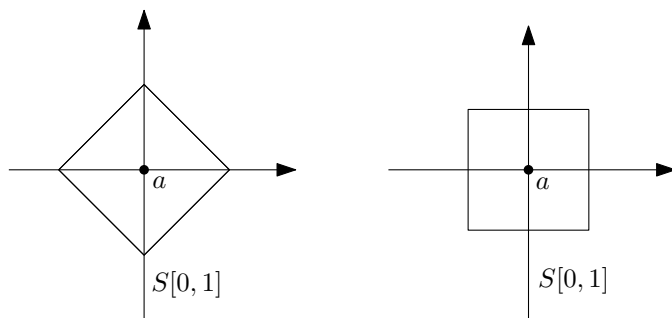


Figura 2.11 – As figuras acima nos mostram o formato de esferas cujas métricas em \mathbb{R}^2 são d' e d'' , respectivamente.

2.3 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Sem grande rigor, sequência é um conjunto de elementos, determinados em uma certa ordem. Vejamos a definição formal.

Definição 2.9. Seja M um espaço métrico. Uma **sequência** em M é uma função

$$x : \mathbb{N} \rightarrow M$$

definida no conjunto dos números naturais. O ponto que a sequência assume em k é indicado por x_k e chama-se *k-ésimo termo* da sequência. Vamos adotar essa representação $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar a sequência cujo k -ésimo termo é $x_k \in M$.

Exemplo 2.3.1. Abaixo seguem alguns exemplos de sequências:

1. $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (-1)^k$ em \mathbb{Z} ;
2. $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)$ em \mathbb{R} ;
3. $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} = (k, k^2)$ em \mathbb{R}^2 .

Ao aplicarmos uma restrição a uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de forma que $k_1 < k_2 < \dots$, obtemos um novo conjunto $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}} \subset (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que chamamos de **subsequência** de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 2.3.2. Considere a sequência (x_k) , em que $x_k = k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_k) = (1, 2, 3, 4, \dots)$, vamos extrair da sequência (x_k) apenas os elementos pares, sendo assim obtemos $(x_{k_i}) = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$. Veja que $(x_{k_i}) \subset (x_k)$, e $k_1 < k_2 < \dots$, portanto, dizemos que (x_{k_i}) é uma subsequência de (x_k) .

Uma sequência em um espaço métrico M é dita *limitada* quando o conjunto de todos os seus pontos é limitado em M . Mais precisamente, dizemos que uma sequência é limitada quando existe alguma bola aberta $B(a, r)$ que contém todos os termos desta sequência.

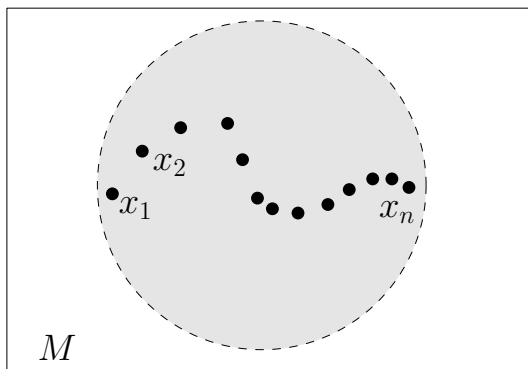


Figura 2.12 – Representação de uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ contida em uma bola $B(a, r)$.

Definição 2.10. Dizemos que o **limite de uma sequência** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico M é o ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a, \epsilon).$$

Quando o limite da sequência (x_k) é igual a a , dizemos que a sequência converge para a , e denotamos por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a.$$

E, assim, dizemos que a sequência é *convergente*, caso contrário, dizemos que a sequência é *divergente*. Segue também que, se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, então toda subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tem o mesmo limite, ou seja, toda subsequência de uma sequência convergente também é convergente e possui o mesmo limite.

Exemplo 2.3.3. Seja a sequência $\{a_k\} = \left\{ \frac{k}{k+1} \right\} \subset \mathbb{R}$ com a métrica usual. Afirmamos que o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$. De fato, dado $\epsilon > 0$, temos

$$d(a_k, 1) = \left| \frac{k}{k+1} - 1 \right| = \left| \frac{k-k-1}{k+1} \right| = \left| \frac{-1}{k+1} \right| = \frac{1}{k+1} < \epsilon \Leftrightarrow k > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Disto segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 = \frac{1}{\epsilon} - 1$ de forma que

$$k > k_0 \Rightarrow d(a_k, 1) < \epsilon,$$

e de acordo com a definição, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$.

Considere agora uma sequência $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, em que $z_k = (z_k^1, \dots, z_k^n)$. Suponha que (z_k) converge para o ponto $a = (a^1, a^2, \dots, a^n, \dots)$, então cada coordenada da sequência (z_k) converge para a coordenada correspondente de a , ou seja, para todo $i = 1, 2, 3, \dots$ podemos dizer que o limite de (z_k^i) , quando k tende ao infinito, é igual a a^i , resultado citado em [2], pag. 16.

Nosso próximo resultado é denominado *Teorema da Unicidade*, pois garante que se o limite de uma sequência existe, então ele é único.

Teorema 2.2. *Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico (M, d) .*

$$\text{Se } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = b, \text{ então } a = b.$$

Demonstração. Sejam $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ e $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_k) + d(x_k, b).$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, a) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, b) = 0$$

temos que $a = b$. ■

A proposição a seguir garante a limitação de toda sequência convergente.

Proposição 2.3. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em M . Suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Tomando $\epsilon = 1$, obtemos $k_0 \in \mathbb{N}$, de modo que, para todo $k > k_0$, $x_k \in B(a, 1)$. Sendo assim, temos que todos os termos da sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pertencem a seguinte união

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{k_0}\} \cup B(a, 1),$$

união esta de dois conjuntos limitados. Portanto, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. ■

Uma relação entre sequências limitadas e convergência de sequências é o enunciado do seguinte teorema:

Teorema 2.4 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.*

A demonstração pode ser encontrada em [2], pag. 17.

Para mostrar os últimos resultados dessa seção, vamos definir uma sequência, de modo que, as distâncias entre seus elementos vão se aproximando de zero. Sequências com essa característica são chamadas de *Sequência de Cauchy*.

Definição 2.11. Uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em um espaço métrico é uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, de modo que se $m, n > k_0$, então a $\|x_m - x_n\| < \epsilon$. E, toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também uma sequência de Cauchy.

Proposição 2.5. *Toda sequência de Cauchy em \mathbb{R}^n é convergente.*

Demonstração. Suponha que (x_k) seja uma sequência de Cauchy em \mathbb{R}^n . Perceba que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, como $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, de modo que, para quaisquer que sejam $m, n > k_0$, $\|x_m - x_n\| < 1$. E, assim, para todo $n > k_0$, $\|x_n\| = \|x_n - x_{k_0} + x_{k_0}\|$, e pela desigualdade triangular, temos que $\|x_n - x_{k_0} + x_{k_0}\| \leq \|x_n - x_{k_0}\| + \|x_{k_0}\| < 1 + \|x_{k_0}\|$. E, assim, fazendo $\gamma = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{k_0-1}\|, \|x_{k_0}\|, 1 + \|x_{k_0}\|\}$, temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|x_k\| \leq \gamma$, ou seja, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Pelo Teorema 2.4 de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência de (x_k) convergente. Tome $x \in \mathbb{R}^n$ como o limite dessa subsequência de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pela Definição 2.10, para todo $\epsilon > 0$ dado, existem $a_1 \in \mathbb{N}_0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} \|x_a - x\| &< \epsilon, \forall a \geq a_1, \text{ com } a \in \mathbb{N}_0 \text{ e} \\ \|x_k - x_a\| &< \epsilon, \forall k, a \geq k_1, \text{ com } k, a \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Defina $k_2 = \max\{a_1, k_1\}$ e considerando $a \in \mathbb{N}_0$, de modo que $a \geq k_2$, temos que $\forall k \geq k_2$,

$$\|x_k - x\| \leq \|x_k - x_a\| + \|x_a - x\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Portanto, concluímos que $x_k \rightarrow x$. ■

Quando falando que uma sequência converge, estamos dizendo que os pontos de uma sequência se aproximam de um determinado ponto. E, para que isso aconteça, temos que os pontos estão se aproximando entre si. Nosso último resultado garante exatamente isso.

Proposição 2.6. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = a$, com $a \in M$, sendo assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $k > k_0$, então $d(x_k, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Considerando $b, c > k_0$, temos pela desigualdade triangular que

$$d(x_b, x_c) \leq d(x_b, a) + d(a, x_c) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Donde temos que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. ■

3 TOPOLOGIA

A topologia é um dos ramos da matemática, cujo objetivo é estudar a estrutura dos conjuntos, sem que tamanhos e formatos sejam relevantes. Os principais objetos de estudo da topologia são os espaços topológicos e os homeomorfismos.

3.1 PONTO INTERIOR E CONJUNTO ABERTO

Usando o conceito de bola aberta visto na Seção 2.1, podemos definir ponto interior e conjunto aberto. Considere um conjunto $X \subset M$, sendo M um espaço métrico. Dizemos que um ponto a é *ponto interior* do conjunto X , quando é centro de uma bola aberta contida em X . Dizemos também que o *interior* do conjunto X é formado por todos os pontos interiores de X e, vamos denotá-lo por $int(X)$. Quando a é ponto interior de um conjunto X , dizemos que o conjunto todo é **vizinhança** de a .

Definição 3.1. Seja $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Dizemos que a é **ponto interior** de X quando existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow x \in X,$$

ou seja, $\exists \delta > 0$, tal que $B(a, \delta) \subset X$.

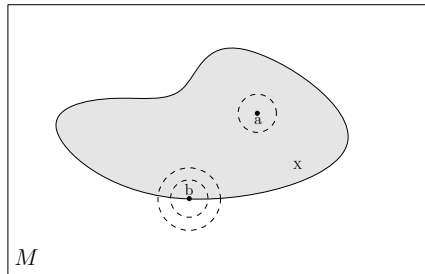


Figura 3.1 – Nessa representação, a é um ponto interior a X e b é um exemplo de ponto que não é interior a X .

Exemplo 3.1.1. Considere um espaço métrico M , todo $x \in M$ é ponto interior de M . De fato, seja $x \in M$, tome $\delta > 0$, com $\delta \in \mathbb{R}$, note que $B(x, \delta) \subset M$, por definição de bola aberta. Logo, $\text{int}(M) = M$.

Exemplo 3.1.2. Seja $X = B(0, 3) \subset \mathbb{R}^3$. Perceba que $a = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ é um ponto interior de X . De fato, $B(a, 1) \subset X$.

Partindo do conceito de ponto interior, podemos definir um conjunto como *aberto* quando todos seus pontos são pontos interiores.

Definição 3.2. Seja M um espaço métrico. Dizemos que $A \subset M$ é **aberto** quando para cada $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$.

Disto segue que, A é aberto $\Leftrightarrow \text{int}(A) = A$. De modo geral, $\text{int}(A) \subset A$ para qualquer A .

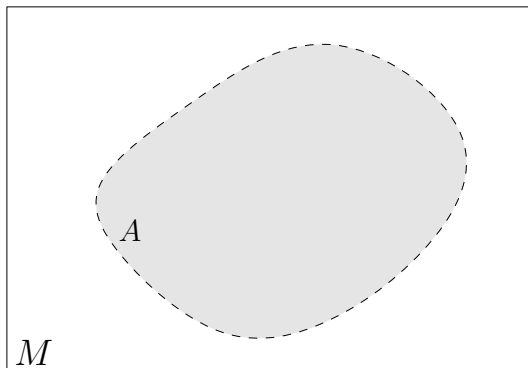


Figura 3.2 – $A \subset M$ é um conjunto aberto.

Exemplo 3.1.3. Toda bola aberta de um espaço métrico (M, d) é um conjunto aberto. Seja $B(a, r)$ uma bola aberta. Vamos mostrar que $B(a, r) \subset \text{int}(B(a, r))$. De fato, seja $x \in B(a, r)$, temos então que $d(x, a) < r$. Tome $\delta = r - d(x, a)$, note que $\delta > 0$. Veja que, se $y \in B(x, \delta)$, então, pela desigualdade triangular,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a) = r \Rightarrow y \in B(a, r).$$

Daí, $x \in \text{int}(B(a, r))$. Logo, $B(a, r) \subset \text{int}(B(a, r))$. Como $\text{int}(B(a, r)) \subset B(a, r)$ obtemos que $\text{int}(B(a, r)) = B(a, r)$, ou seja, concluímos que toda bola aberta é um conjunto aberto.

Exemplo 3.1.4. [Complementar da bola fechada] Sejam M um espaço métrico e $B[a, r]$ uma bola fechada em M . Perceba que o complementar da bola fechada $A = M - B[a, r]$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in A$, disto segue que $d(x, a) > r$. Defina $s > 0$ como sendo um número real tal que $r < s < d(x, a)$ e veja que a bola $B(x, s) \cap B[a, r] = \emptyset$, ou seja, $B(x, s) \subset A$. Logo, x é ponto interior de A . Portanto, $A = M - B[a, r]$ é um conjunto aberto.

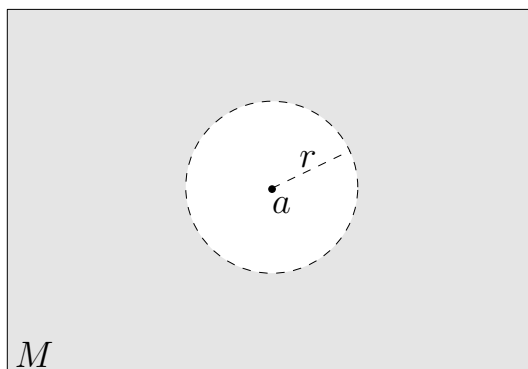


Figura 3.3 – Complementar da bola fechada denotada por $M - B[a, r]$.

É comum fazer a relação entre conceitos. Em nosso próximo resultado, vamos relacionar vizinhança e convergência de sequência em espaços métricos, conceito este visto no Capítulo 2. A relação será basicamente a caracterização topológica de sequências convergentes em espaços métricos.

Proposição 3.1. *Seja M um espaço métrico. Uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em M converge para $a \in M$ se, e somente se, para toda vizinhança V de a em M , existe $k_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in V$.*

Demonstração. Suponha que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em M , satisfazendo $x_k \rightarrow a \in M$. Considere V como sendo uma vizinhança de $a \in M$, então podemos dizer que existe $\epsilon > 0$, de modo que $B(a, \epsilon) \subset V$. Perceba que, para este ϵ , existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $x_k \in B(a, \epsilon) \subset V$, vide Definição 2.10. Reciprocamente, para qualquer vizinhança V de a , sabemos (por hipótese) que existe k_0 , tal que, para todo $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$, $x_k \in V$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, podemos considerar $V = B(a, \epsilon)$, e com isso garantimos que $x_k \rightarrow a$. ■

O resultado a seguir, conhecido como teorema fundamental dos conjuntos abertos, se refere as propriedades dos abertos.

Teorema 3.2. *Os conjuntos abertos em um espaço métrico M possuem as seguintes propriedades:*

1. *O conjunto vazio \emptyset e o espaço métrico M são abertos;*
2. *A interseção $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos A_1, \dots, A_n é um conjunto aberto;*
3. *A reunião $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.*

Demonstração. 1. Note que se o conjunto vazio não fosse aberto, então existiria um elemento $x \in \emptyset$, de tal maneira que nenhuma bola aberta centrada em x estaria nele contida, o que é de fato um absurdo. Considerando a definição de aberto tratada anteriormente, é possível perceber, pelo Exemplo 3.1.1 que dado $x \in M$, $B(x, \delta) \subset M$, para qualquer $\delta > 0$. Disto segue que M é aberto.

2. Sejam os conjuntos abertos $A_1, A_2, \dots, A_n \subset M$ e defina $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Temos, pelo item anterior, que se $A = \emptyset$, então temos que A é aberto. Suponha que $A \neq \emptyset$ e seja $a \in A$. Como cada A_i é aberto, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existem $r_i > 0$, tal que $B(a, r_i) \subset A_i$. Tomando $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$, tem-se $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset A_i$,

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, $B(a, r) \subset A$, portanto A é aberto.

3. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de abertos não todos vazios de M , pois, caso contrário $\bigcup A_\lambda = \emptyset$, e portanto seria a união um aberto. Dado $a \in A = \bigcup A_\lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$, tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $r > 0$, tal que $B(a, r) \subset A_\lambda \subset A$, portanto, conclui-se que A é aberto. ■

Exemplo 3.1.5. Perceba que $X = \{0\} \subset \mathbb{R}$ não é um aberto. De fato, para todo $\delta > 0$, a bola $B(0, \delta)$, dada pelo intervalo $(-\delta, \delta)$, não está contida em X . Portanto $X \subset \mathbb{R}$ não é um aberto.

Exemplo 3.1.6. Veja que a interseção infinita de conjuntos abertos não é necessariamente um conjunto aberto. De fato, seja $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de conjuntos abertos definida por $A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Note que $\bigcap_{i=1}^\infty A_n = \{0\}$. Portanto, como visto no Exemplo 3.1.5, $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ não é um conjunto aberto.

Nossa próxima proposição garante que produto cartesiano de abertos é um conjunto aberto.

Proposição 3.3. *Sejam A_1, A_2 abertos nos espaços métricos (M, d_M) e (N, d_N) , respectivamente. Então $A_1 \times A_2$ é aberto em $(M \times N, d_{M \times N})$, em que*

$$d_{M \times N} = \max\{d_M, d_N\}.$$

Demonstração. Queremos mostrar que $A_1 \times A_2$ é aberto em $M \times N$. Defina a seguinte distância entre elementos de $M \times N$

$$d_{M \times N}((x, y), (a, b)) = \max\{d_M(x, a), d_N(y, b)\}, \\ (x, y), (a, b) \in M \times N.$$

Seja $(x, y) \in A_1 \times A_2$. Como A_1 é aberto em M e A_2 é aberto em N , segue que existem $r_1, r_2 > 0$ de modo que

$$B_1(x, r_1) \subset A_1 \text{ e } B_2(y, r_2) \subset A_2.$$

Defina $r = \min\{r_1, r_2\}$. Vamos mostrar que $B((x, y), r) \subset A_1 \times A_2$. Seja $(m, n) \in B((x, y), r)$. Disto segue que $d_{M \times N}((m, n), (x, y)) = \max\{d_M(m, x), d_N(n, y)\} < r$, sendo assim,

$$\begin{aligned} m &\in B(x, r) \subset B_1(x, r_1) \subset A_1 \\ n &\in B(y, r) \subset B_2(y, r_2) \subset A_2. \end{aligned}$$

Concluimos assim que $(m, n) \in A_1 \times A_2$. Logo, $B((x, y), r) \subset A_1 \times A_2$ e, assim, (x, y) é ponto interior de $A_1 \times A_2$. Portanto, $A_1 \times A_2$ é aberto em M, N . ■

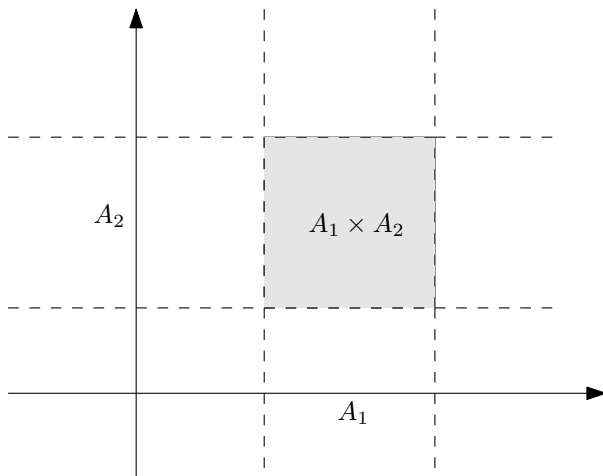


Figura 3.4 – $A_1 \times A_2$ aberto.

Para que possamos definir uma topologia, vamos usar a definição abaixo:

Definição 3.3. Dado um conjunto E , definimos o **conjunto das partes (ou conjunto potência)** de E , como o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto E , denotado por $\mathcal{P}(E)$.

Sendo assim, de modo geral, definimos uma topologia em um conjunto da seguinte maneira:

Definição 3.4. Se E é um conjunto, uma **topologia** em E é um subconjunto $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ tal que

1. $\emptyset, E \in \tau$;
2. se $(A_j)_{j \in J}$ for uma família de elementos de τ , então $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$;
3. se $(A_j)_{j \in J}$ for uma família de elementos de τ e se J for finito, então $\bigcap_{j \in J} A_j \in \tau$.

Um conjunto E munido de uma topologia τ é chamado de Espaço Topológico e denotado por (E, τ) .

Segue diretamente do Teorema 3.2 que, dado um espaço métrico M

$$\tau = \{A \subset M : A \text{ é aberto}\}$$

é uma topologia em M . De modo geral, todo espaço métrico é um espaço topológico, basta tomar os abertos desse espaço para compor a topologia. Sendo assim, podemos dizer que os exemplos do Capítulo 2, em particular:

1. Exemplo 2.0.1: Conjuntos dos números reais, munido da métrica usual.
2. Exemplo 2.0.2: \mathbb{R}^n , com n um inteiro positivo, munido da métrica euclidiana, métrica da soma ou do máximo, conforme Exemplo 2.0.5.

3. Exemplo 2.0.3: $B(X, \mathbb{R})$, conjuntos de todas as funções reais limitadas, munido da métrica do supremo. E, $C(X, \mathbb{R})$, conjunto das funções reais contínuas definidas em um intervalo $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, como no Exemplo 2.0.4, munido da métrica da integral.
4. Exemplo 2.0.7: Um conjunto X qualquer, não vazio, munido da métrica $0 - 1$.
5. Todo espaço vetorial normado. Em particular, o espaço vetorial V , Exemplo 2.2.1, formado pelas sequências de números reais em que todos os termos, exceto um número finito deles, são iguais a zero, em que V está munido da métrica do max.

são exemplos de espaços topológicos. Na sequência veremos também outros exemplos de espaços topológicos.

Exemplo 3.1.7 (Topologia trivial). $\tau = \{E, \phi\}$, em que E é um conjunto qualquer.

Exemplo 3.1.8. Tome o conjunto $E = \{a, b\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{b\}, E\}$. Note que \emptyset e E pertencem a τ . Veja que, dados elementos de τ a união desses elementos pertencem a τ , da mesma forma, a interseção de elementos de τ , pertencem a τ . Portanto, τ é uma topologia em E .

3.2 PONTOS DE ACUMULAÇÃO, ADERÊNCIA E FRONTEIRA

Dado um conjunto $X \subset M$, onde M é um espaço métrico. Existem pontos dispõe de uma caracterização especial e, por esse motivo recebem um nome particular, este é o caso dos *pontos de acumulação*.

Definição 3.5. Seja $X \subset M$, sendo M um espaço métrico. Dizemos que $x \in M$ é um **ponto de acumulação** de X , se toda bola aberta centrada em x contiver algum ponto de X , diferente do ponto x . Denotaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .

Com a definição acima, podemos fazer a seguinte caracterização: $x \in X'$ se $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset$.

Exemplo 3.2.1. Seja a bola $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$. Defina $X = B(0, 1) \cup \{(2, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$. Note que todos os pontos da bola $B(0, 1)$ e da esfera $S = [0, 1]$ são pontos de acumulação de X . Entretanto, nem todos os pontos de X são pontos de acumulação, mais precisamente, veja que $(2, 2, 2) \in X$, não é um ponto de acumulação de X . De fato, a bola $B\left((2, 2, 2), \frac{1}{2}\right)$ não possui nenhum ponto de X diferente de $(2, 2, 2)$. Portanto, $X' = B[0, 1]$.

Exemplo 3.2.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Note que $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$. E, além disso, veja que $f(\mathbb{R})' = [0, 1]$.

Estudamos o conceito de limite de sequência na Seção 2.3. Em particular, o limite de uma sequência recebe um nome especial, no caso, *ponto de aderência*, conforme nossa próxima definição.

Definição 3.6. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é dito **ponto de aderência** de um conjunto $X \subset M$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto. Denominamos **fecho** de X , denotado por \overline{X} , o conjunto formado por todos os pontos de M que são aderentes a X .

Observação 1. Sejam X um conjunto em um espaço métrico (M, d) e $x \in X$. Se tomarmos a sequência constante $x_k = x$, segue que, $x \in \overline{X}$, isto é, $X \subset \overline{X}$.

Observação 2. Sejam $X \subset Y$ conjuntos em um espaço métrico (M, d) e $x \in \overline{X}$. Então, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \in X$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\lim x_k = x$. Como $X \subset Y$, segue que, cada $x_k \in Y$, logo, $x \in \overline{Y}$. Portanto, concluímos que se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 3.2.3. Seja $X = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$. Defina a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$. Note que 0 é um ponto aderente de X , pois $x_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Observe que $0 \notin X$.

Exemplo 3.2.4. Seja $X = \mathbb{R}$. Considere o intervalo $I = (-3, 3) \subset X$. Note que, vide Observação 1, $I \subset \bar{I}$. Além disso, perceba que os pontos 3 e -3 são também pontos de aderência de I . De fato, considere as seguintes seqüências

$$(x_k) = 2 + \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} \subset I \text{ e}$$

$$(y_k) = -2 - \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} \subset I.$$

Note que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 3$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = -3$. Logo, 3 e -3 são pontos de aderência de I . Podemos concluir que $\bar{I} = [-3, 3]$. De fato, pois não existe $x \in \bar{I}$, tal que $x > 3$ ou $x < -3$, uma vez que, toda seqüência em I está contida na $B(0, 3) \subset \mathbb{R}$.

Nossa próxima proposição garante que podemos definir um ponto aderente usando conceitos de bolas.

Proposição 3.4. *Seja $X \subset M$, sendo M um espaço métrico. Então $a \in M$ é um **ponto aderente** de X se, e somente se, toda bola aberta centrada em a contiver algum ponto de X .*

Demonstração. Seja a um ponto aderente de X , então vide Definição 3.6, existe $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, de modo que, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, também pela Definição 2.10, segue que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, tal que, $x_k \in B(a, \epsilon)$, ou seja, toda bola aberta, centrada em a , contém algum ponto de X . Suponha agora que, para todo $\epsilon > 0$, $B(a, \epsilon)$ contém algum ponto de X . Pela Definição 2.10, temos que a é limite de alguma seqüência de X , ou seja, a é um ponto aderente. ■

Podemos notar que dado um conjunto $X \subset M$, sendo M um espaço métrico, todo $x \in X$ é ponto aderente de X e, portanto, $X \subset \bar{X}$. E, além disso, é possível perceber através da

Definição 3.5, todo ponto de acumulação de um conjunto é também um ponto aderente, ou seja, $X' \subset \overline{X}$. Porém a recíproca não é verdadeira, veja nosso próximo exemplo.

Exemplo 3.2.5. Considere $X = (-1, 1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$. Perceba que existem pontos aderentes do conjunto, além dos pontos do próprio conjunto. De fato, note que -1 e 1 não pertencem a X , entretanto, $\forall \delta > 0$, as bolas $B_1(-1, \delta)$ e $B_2(1, \delta)$, contém pontos de X . Portanto, -1 e 1 são pontos aderentes a X , em particular, são pontos de acumulação de X . E, com isso, segue que $\overline{X} = [-1, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$. Além disso, $X' = [-1, 1]$. De fato, note que $\{2\}$ é ponto aderente de X , porém não é ponto de acumulação de X , uma vez que, para $r = \frac{1}{2}$, a $B(2, r) \subset X$, contém apenas o ponto $\{2\}$.

Exemplo 3.2.6. Considere o conjunto usado no Exemplo 3.2.1, $X = B(0, 1) \cup \{(2, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$. Pelo mesmo argumento usado no Exemplo 3.2.5, podemos concluir que $\overline{X} = B[0, 1] \cup \{(2, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ e, além disso, $X' = [0, 1]$.

Nosso próximo resultado apresenta algumas propriedades do fecho de um conjunto.

Proposição 3.5 (Propriedades de Fecho). *Seja X um conjunto em um espaço métrico (M, d) , então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. A Definição 3.6 e a Proposição 3.4 são equivalentes, isto é, dado $x \in M$, temos que x é limite de uma sequência de elementos de X se, e somente se, $B(x, \delta) \cap X \neq \emptyset$, para todo $\delta > 0$.
2. $\overline{X} = M - \text{int}(M - X)$;
3. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração. 1. Seja $x \in \overline{X}$, segue da Definição 3.6 que existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \in X$, para todo k , e

$\lim x_k = x$. Pela Definição 3.6, para todo $\delta > 0$, existe k_0 tal que se $k > k_0$, então $x_k \in B(x, \delta)$. Portanto, $B(x, \delta) \cap X \neq \emptyset$, para todo $\delta > 0$. Reciprocamente, suponha que $x \in M$ e para todo, $\delta > 0$ a bola $B(x, \delta)$ intersecta X , $\forall k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$, de modo que $x_k \in B\left(x, \frac{1}{k}\right)$. Portanto,

$$d(x_k, x) < \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

E, assim, temos que $x_k \rightarrow x$.

2. Seja $x \in \overline{X}$, então $\forall \delta > 0$, a bola $B(x, \delta)$ intersecta X . Logo $x \in M - \text{int}(M - X)$. De fato, pois como $\overline{X} \subset M$, temos que $x \in M$ e, ainda, $x \notin \text{int}(M - X)$, caso contrário, x seria ponto interior de $M - X$ e, assim, existiria $\delta > 0$, tal que a bola $B(x, \delta)$ não intersectaria X , o que não pode acontecer, já que $x \in \overline{X}$. Portanto, $\overline{X} \subset M - \text{int}(M - X)$.

Considere agora, $x \in M - \text{int}(M - X)$. Segue que $x \in M$ e $x \notin \text{int}(M - X)$. Como $x \notin \text{int}(M - X)$, temos que, $\forall \delta > 0$, a bola $B(x, \delta) \not\subset M - X$, logo, temos que, pelo menos um ponto de X pertence a bola $B(x, \delta)$. E, pela Proposição 3.4, x é ponto aderente de X , logo $x \in \overline{X}$, ou seja, $M - \text{int}(M - X) \subset \overline{X}$. Sendo assim,

$$\overline{X} = M - \text{int}(M - X).$$

3. Sejam $x \in \overline{\overline{X}}$ e $\delta > 0$. Pela definição de fecho, segue que existe $x_0 \in \overline{X}$ tal que $x_0 \in B(x, \delta) \cap \overline{X}$. Note que, como $B(x, \delta)$ é um conjunto aberto, vide Exemplo 3.1.3, existe $\delta_0 > 0$, de modo que

$$B(x_0, \delta_0) \subset B(x, \delta).$$

Entretanto, como $x_0 \in \overline{X}$, segue que $B(x_0, \delta_0) \cap X \neq \emptyset$. Portanto, $x \in \overline{X}$. Uma vez que, pela Proposição 3.4, conclui-se que $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$, temos que $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.



Veremos agora a definição de fronteira de um conjunto:

Definição 3.7. Seja M um espaço métrico. Suponha que $A \subset M$ é não vazio. Dizemos que $x \in M$ é **ponto da fronteira** de A se toda bola aberta centrada em x contiver pontos de A e de $M - A$.

Denotaremos a fronteira de A como $Fr(A)$ ou ∂A .

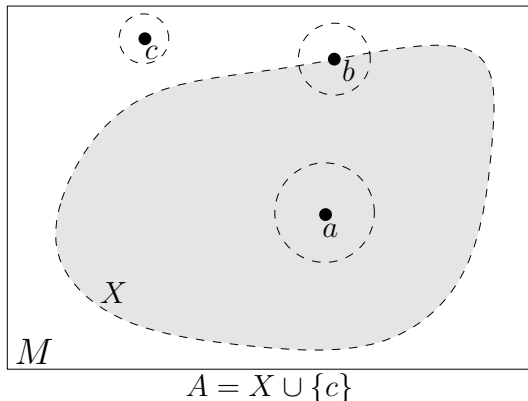


Figura 3.5 – Os pontos a e b são pontos de acumulação de A e o ponto c não é ponto de acumulação de A . O ponto b é ponto de fronteira de A . Os três pontos a, b, c são exemplos de pontos aderentes de A .

Exemplo 3.2.7. Considere o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Z}\}$, conhecido como reticulado de \mathbb{R}^2 . Perceba que todo ponto de X é um ponto da fronteira de X . De fato, para todo $x \in X$, a bola $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$, contém o próprio $x \in X$ e pontos do complementar de X . Mais ainda, observe que, x é um ponto isolado.

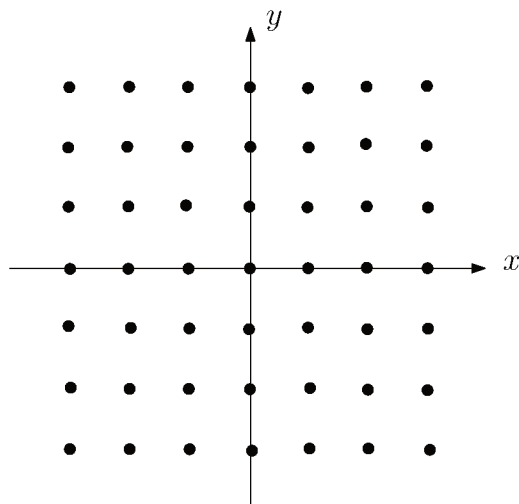


Figura 3.6 – Reticulado de \mathbb{R}^2 .

Usando a definição de fronteira, temos a seguinte caracterização para esse conjunto:

$$x \in Fr(A) \Leftrightarrow \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(x, \delta) \cap M - A \neq \emptyset.$$

Intuitivamente, podemos dizer que um conjunto A é aberto se não possui pontos de sua fronteira. E, isso mostraremos no teorema a seguir:

Teorema 3.6. *Seja $A \subset M$, sendo M um espaço métrico. A é um conjunto aberto, se e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $A \subset M$, sendo M um espaço métrico, um aberto. Suponha que $A \cap \partial A \neq \emptyset$. Então $\exists x \in A \cap \partial A$, ou seja, $x \in A$ e $x \in \partial A$. Como $x \in A$ e A é aberto, $\exists \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$, porém, como $x \in Fr(A)$ e $B(x, \delta) \cap M - A \neq \emptyset$. Contradição, pois $B(x, \delta) \subset A$. Logo, $A \cap \partial A = \emptyset$. Assuma agora que $A \cap \partial A = \emptyset$ e, suponha por absurdo, que A não seja aberto. Como A não é aberto, existe $x \in A$, tal que $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \not\subset A$, ou seja, existe $y \in M - A$ tal que $y \in B(x, \delta)$, o que é um absurdo,

pois assim $B(x, \delta)$ contém pontos de A e $M - A$. Portanto, A é aberto. ■

3.3 CONJUNTO FECHADO

Vamos definir quando um conjunto é dito *fechado*, usando a ideia de conjunto aberto.

Definição 3.8. Um conjunto $F \subset M$, sendo M um espaço métrico, é dito **fechado** quando o seu complementar é aberto em M , ou seja, $M - F$ é aberto.

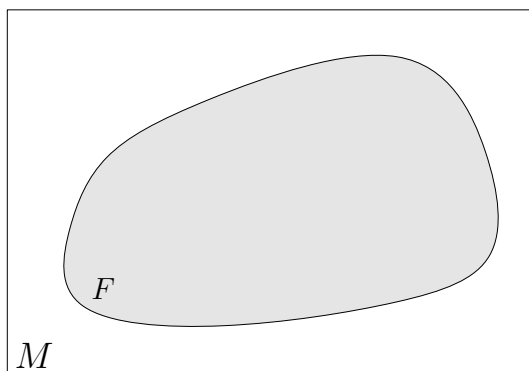


Figura 3.7 – $F \subset M$ é um conjunto fechado.

Podemos definir um conjunto fechado de duas maneiras. Vamos demonstrar, em nosso próximo resultado, que ambas são equivalentes.

Proposição 3.7. *Seja F um conjunto contido em um espaço métrico (M, d) . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $F = \overline{F}$,
2. $M - F$ é aberto.

Demonstração. Seja F um conjunto contido em um espaço métrico (M, d) . Suponha que $F = \overline{F}$. Seja $x \in M - F$, então $x \notin \overline{F}$,

ou seja, existe $\delta > 0$ de modo que, a bola $B(x, \delta) \cap F = \emptyset$. Portanto, $B(x, \delta) \subset M - F$. Logo, x é ponto interior de $M - F$, ou seja, $M - F$ é aberto. Reciprocamente, suponha que $M - F$ seja aberto. Então todos os pontos de $M - F$ são pontos interiores. Suponha por absurdo que $F \neq \overline{F}$, então existe $x \in \overline{F}$, de modo que $x \notin F$, sendo assim, $x \in M - F$. Logo, pela hipótese, existe $\delta > 0$, tal que a bola $B(x, \delta) \subset M - F$. E, portanto, $B(x, \delta) \cap F = \emptyset$, o que é um absurdo, pois $x \in \overline{F}$. Logo, $F = \overline{F}$. ■

Exemplo 3.3.1. Seja M um espaço métrico e $B[a, r]$ uma bola fechada em M . Perceba que $B[a, r]$ é um exemplo de conjunto fechado. De fato, vide Exemplo 3.1.4, sabemos que $M - B[a, r]$ é um conjunto aberto. Sendo assim, pela Definição 3.8 temos que $B[a, r]$ é um conjunto fechado.

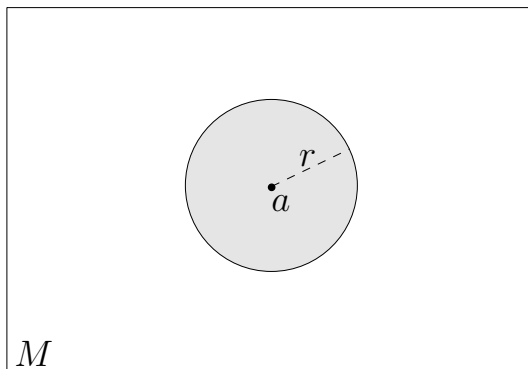


Figura 3.8 – Representação de uma bola fechada de centro a e raio $r > 0$ em M .

Exemplo 3.3.2. Seja M um espaço métrico e $S[a, r]$ uma esfera em M . Note que $M - S[a, r] = (M - B[a, r]) \cup B(a, r)$. Segue pelo Exemplo 3.1.4 que $M - B[a, r]$ é um conjunto aberto. E além disso, temos pelo Exemplo 3.1.3 que $B(a, r)$ é um conjunto aberto. Pelo Teorema 3.2, união de abertos é um conjunto aberto. Portanto, vide Definição 3.8, $S[a, r]$ é um conjunto fechado.

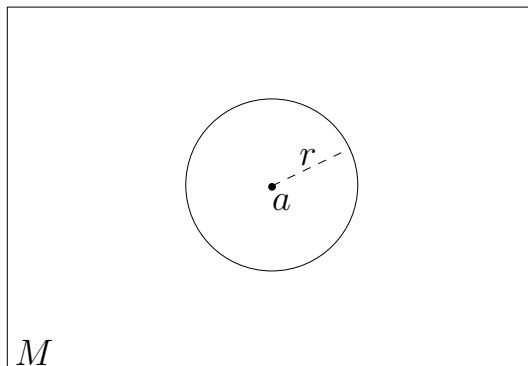


Figura 3.9 – Representação de uma esfera de centro a e raio $r > 0$ em M .

Exemplo 3.3.3. Seja X um conjunto não vazio em um espaço métrico (M, d) . Perceba que a fronteira ∂X é um subconjunto fechado do espaço métrico M . De fato, note que o complementar de ∂X é $(\text{int}X) \cup \text{int}(M - F)$, que é um conjunto aberto.

Com base no exemplo anterior, segue que o reticulado, apresentado no Exemplo 3.2.7, é um conjunto fechado.

Na sequência, apresentaremos outra relação entre conjuntos fechados e fechos.

Proposição 3.8. *Se X um conjunto em um espaço métrico (M, d) então \overline{X} é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja X é um conjunto em um espaço métrico (M, d) . Segue da Proposição 3.5 que $\overline{X} = M - \text{int}(M - X)$. Perceba que $\text{int}(M - X)$ é um conjunto aberto. Sendo assim, vide Definição 3.8, $\overline{X} = M - \text{int}(M - X)$ é um conjunto fechado. ■

Vimos anteriormente que o conjunto vazio e o espaço métrico M são exemplos de conjuntos abertos, a partir da Definição 3.8, concluímos que são ambos exemplos de conjuntos fechados. De fato, como o conjunto vazio pode ser visto como o complementar de M , segue que M é fechado. Analogamente, podemos

dizer que o conjunto vazio é fechado. Sendo assim, concluímos que existem conjuntos que são abertos e fechados simultaneamente.

Veja também que existem conjuntos que não são abertos nem fechados. Por exemplo, seja \mathbb{R}^n munido da métrica usual, tome $a \in \mathbb{R}^n$ e fixe números reais $0 < r_0 < r_1$. Defina o conjunto E , conhecido como anel, em \mathbb{R}^n :

$$E = \{e \in \mathbb{R}^n; r_0 < d(e, a) \leq r_1\} = B[a, r_1] - B[a, r_0].$$

Note que E não é aberto nem fechado, pois se considerarmos um ponto $x \in E$, tal que $d(x, a) = r_1$, $\forall \delta > 0$ a bola $B(x, \delta) \not\subset E$. Portanto, E não é um conjunto aberto. Analogamente, tomando $y \in \mathbb{R}^n - E$, de modo que $d(y, a) = r_0$, $\forall \delta > 0$, a bola $B(y, \delta)$ possui pontos de E , sendo assim, y é um ponto aderente de E . Logo, $E \neq \overline{E}$, ou seja, E não é fechado.

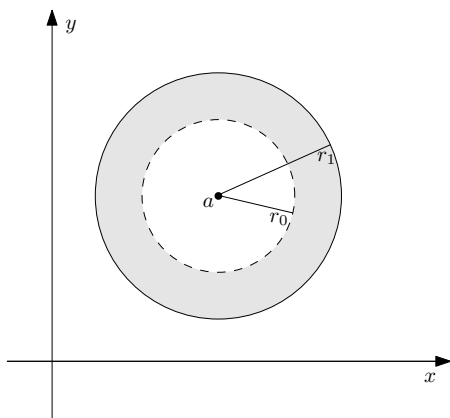


Figura 3.10 – Representação do anel em \mathbb{R}^2 .

A seguir vamos demonstrar o teorema fundamental de fechados.

Teorema 3.9. *Os conjuntos fechados em um espaço métrico M possuem as seguintes propriedades:*

1. O conjunto vazio \emptyset e o espaço métrico M são fechados;
2. A reunião $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados F_1, \dots, F_k é um conjunto fechado;
3. A interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados F_λ é um conjunto fechado.

Demonstração. 1. Foi justificada no início desta Seção.

2. Note que se F_1, F_2, \dots, F_k são fechados, então $A_1 = M - F_1, \dots, A_k = M - F_k$ são abertos, logo o complementar de F_1, F_2, \dots, F_k ,

$$A_1 \cap \dots \cap A_k$$

é aberto pelo Teorema 3.2. Portanto, $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ é fechado.

3.

Por fim, se $F_\lambda, \lambda \in L$, é fechado, então toda $A_\lambda = M - F_\lambda$ é aberto, logo a $\bigcup A_\lambda = \bigcup (M - F_\lambda) = M - \left(\bigcap F_\lambda \right)$ também é aberto, vide Teorema 3.2. Portanto, o conjunto $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.

■

Vale a pena ressaltar que a reunião arbitrária de conjuntos fechados não é necessariamente um conjunto fechado, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.4. Seja F_i um conjunto fechado, para cada $i \in \mathbb{N}$. Note que $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ não é um conjunto fechado. De fato, seja

$$F_1 = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right], F_2 = \left[\frac{-2}{3}, \frac{2}{3} \right], \dots, F_k = \left[\frac{-k}{k+1}, \frac{k}{k+1} \right].$$

Como

visto no Exemplo 2.3.3, sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Portanto,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_k = (-1, 1).$$

Vimos na Proposição 3.3 que o produto cartesiano de abertos é um conjunto aberto. Agora, veremos que o produto cartesiano de fechados é um conjunto fechado.

Proposição 3.10. *Sejam F_1, F_2 conjuntos fechados em M, N respectivamente, em que (M, d_M) e (N, d_N) são espaços métricos. Então $F_1 \times F_2$ é fechado em $(M \times N, d_{M \times N})$.*

Demonstração. Dado $z = (x, y) \in F_1 \times F_2$, temos que $x \in F_1$ e $y \in F_2$. Como F_1 e F_2 são fechados, $F_1 = \overline{F_1}$ e $F_2 = \overline{F_2}$, logo existem sequências $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em F_1 e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em F_2 tais que $\lim x_i = x$ e $\lim y_i = y$. Assim, $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, com $z_i = (x_i, y_i)$, é uma sequência em $F_1 \times F_2$ satisfazendo $\lim z_i = z$. Com isso, concluímos que $F_1 \times F_2 = \overline{F_1 \times F_2}$ e, portanto, $F_1 \times F_2$ é fechado. ■

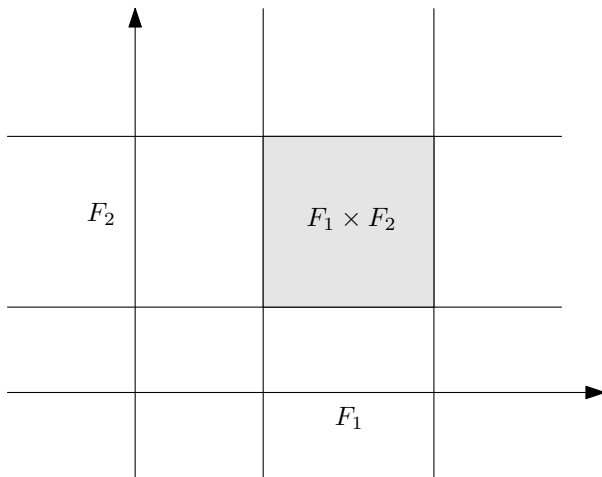


Figura 3.11 – $F_1 \times F_2$ é um conjunto fechado.

3.4 TOPOLOGIA RELATIVA

Entendemos por topologia relativa num subespaço $X \subset M$, sendo M um espaço métrico, o conjunto das interseções de X com os abertos de M . Vamos trabalhar com o conceito de aberto relativo a X .

Definição 3.9. Sejam X um subconjunto do espaço métrico M e $A \subset X$. Dizemos que A é **aberto relativamente** a X , quando existe um aberto U de M , tal que $A = U \cap X$.

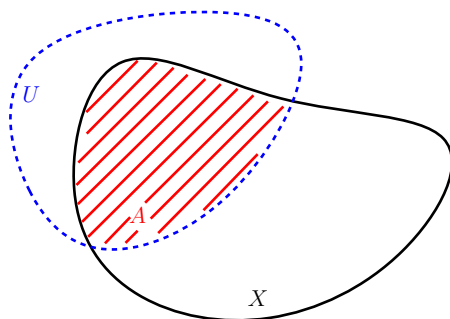


Figura 3.12 – $A = U \cap X$ é aberto em X .

Podemos entender que topologia relativa de $X \subset M$, sendo M um espaço métrico, é a restrição da topologia de M ao conjunto X . Alguns resultados são de verificação imediata, por exemplo, um conjunto $X \subset M$ é aberto em M se, e somente se, é aberto relativamente a X . Pode-se verificar facilmente também que se um conjunto A é um aberto de M e $A \subset X$, então $A = A \cap X$, donde A é aberto em X .

Exemplo 3.4.1. Sejam $X = [1, 3)$ e $A = [1, 2)$. Como $\text{int}(A) = (1, 2) \neq A$, temos que A não é um aberto de \mathbb{R} . Entretanto, tomando o aberto $U = (-2, 2)$ de \mathbb{R} , tem-se que $A = U \cap X$, isto é, A é aberto em X .

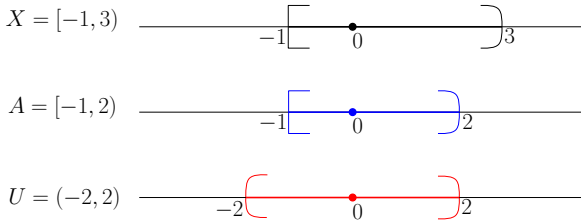


Figura 3.13 – Representação do Exemplo 3.4.1.

Podemos de certa forma, caracterizar conjuntos abertos relativos através de bolas abertas, visto que, bolas abertas são exemplos de conjuntos abertos.

Proposição 3.11. *Dado um conjunto $A \subset X \subset M$, em que M é um espaço métrico. Dizemos que A é aberto em X se, e somente se, para todo $a \in A$, existe $r > 0$, tal que*

$$B(a, r) \cap X \subset A.$$

Demonstração. Suponha que o conjunto A seja um aberto em X , disto segue que existe U aberto em M de forma que $A = U \cap X$. Seja $a \in A$, temos que $a \in U$. Então, existe $r > 0$, tal que $B(a, r) \subset U$, pelo fato de U ser aberto em M . Logo, $B(a, r) \cap X \subset U \cap X = A$. Assuma agora, que para todo $a \in A$, exista $r_a > 0$, tal que $B(a, r_a) \cap X \subset A$. Sabemos que uma união qualquer de abertos é um aberto, temos que $U = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$ é um conjunto aberto de M e, além do mais, temos que $U \cap X = \left(\bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \right) \cap X = \bigcup_{a \in A} (B(a, r_a) \cap X) \subset A$. E, além disso, temos que $A \subset (U \cap X)$. Portanto, $A = U \cap X$, ou seja, A é um aberto em X .

■

De maneira equivalente à definição de aberto relativo, temos condições de definir um conjunto fechado relativamente a

outro. Basta verificar que seu complementar é aberto relativo a tal conjunto.

Definição 3.10. Seja $F \subset X \subset M$, em que M é um espaço métrico. Dizemos que F é um conjunto **fechado relativamente** a X , se seu complementar em relação a X é um aberto relativo a X .

Além do mais, podemos caracterizá-los por meio de seus respectivos fechos.

Proposição 3.12. *Dado $F \subset X \subset M$, em que M é um espaço métrico, dizemos que*

$$F \text{ é fechado em } X \Leftrightarrow F = \overline{F} \cap X.$$

Demonstração. Suponha primeiramente que seja satisfeita $F = \overline{F} \cap X$. Disto segue que $X - F = X - (\overline{F} \cap X) = X - \overline{F} = (M - \overline{F}) \cap X$, e portanto $X - F$ é aberto em X , pois \overline{F} é um conjunto fechado e pela Proposição 3.7, segue que $M - \overline{F}$ é aberto em M . Assim, temos que F é fechado em X . Reciprocamente, suponha que F seja um conjunto fechado em X , sendo assim, temos que $F \subset X$. Como F é fechado em X , segue que $X - F$ é um conjunto aberto em X . Pela Definição 3.9, temos que existe um $U \subset M$ aberto, de tal modo que $X - F = U \cap X$. Sendo assim, como $F \subset X \subset M$, e, além disso, $F \not\subset U$, disto segue que $F \subset M - U$. E, como $M - U$ é fechado em M , temos que $\overline{F} \subset \overline{M - U} = M - U$, vide Observação 2. Por isso, $\overline{F} \cap X \subset (M - U) \cap X = X - U$. E, note que $X - U \subset F$, uma vez que $X = F \cup (X - F) = F \cup (U \cap X)$, se $x \in X$, então $x \in F$ ou $x \in U \cap X$, mas como $x \notin U$, segue que $x \in F$. Além disso, como $F \subset \overline{F}$ e, temos também que $F \subset X$, segue que $F \subset \overline{F} \cap X$. Portanto, $F = \overline{F} \cap X$. ■

Como consequência do resultado anterior, dado $F \subset X \subset M$, em que M é um espaço métrico, temos que se F é fechado em M , então F é um conjunto fechado em X , pois temos que $F = F \cap X = \overline{F} \cap X$.

Exemplo 3.4.2. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$, de modo que, $\forall (a, b) \in X$, $a, b > 0$. Note que $F = B[0, 1] \cap X$ é um conjunto fechado em X , pois $B[0, 1]$ é fechado em \mathbb{R}^2 . Entretanto, F não é fechado em \mathbb{R}^2 , pois se tomarmos o ponto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, podemos notar que $(0, 0) \notin F$, mas toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pelo menos algum ponto de F , sendo assim, $F \neq \overline{F}$.

3.5 CONVEXIDADE E LIMITAÇÃO

Na Seção 2.3 comentamos que uma sequência é limitada quando existe uma bola que contém todos os seus termos. Definiremos nessa seção que um conjunto mais geral com a mesma característica também é dito limitado. Mas, antes dessa abordagem, vamos mostrar que bolas contidas em um espaço vetorial normado têm o fato comum de serem convexas.

Definição 3.11. Sejam $x, y \in \mathbb{V}$, sendo \mathbb{V} um espaço vetorial normado. O **segmento** de extremos x, y é o conjunto

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Definição 3.12. Um subconjunto $X \subset \mathbb{V}$, sendo \mathbb{V} um espaço vetorial normado, é dito **convexo** quando todo segmento de reta definido por dois pontos que pertencem ao conjunto X , estiver totalmente contido em X .

Podemos assim, concluir que toda bola é um conjunto convexo, o que provaremos no teorema a seguir.

Teorema 3.13. *Toda bola aberta $B(a, r)$ contida em um espaço vetorial normado é convexa.*

Demonstração. Seja \mathbb{V} um espaço vetorial normado. Considere a bola aberta $B(a, r)$ de centro $a \in \mathbb{V}$ e raio $r > 0$. Se $x, y \in B(a, r)$ então $\|x - a\| < r$ e $\|y - a\| < r$. Para qualquer $t \in [0, 1]$, temos:

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - a\| &= \|(1-t)x + ty - a + ta - ta\| \\ &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\|. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de norma vistas na Seção 2.2, segue que

$$\begin{aligned} \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| &\leq \|(1-t)(x-a)\| + \|t(y-a)\| \\ &= |(1-t)| \cdot \|(x-a)\| + |t| \cdot \|(y-a)\| \end{aligned}$$

Como $t \in [0, 1]$, $\|x-a\| < r$ e $\|y-a\| < r$, segue que

$$|(1-t)| \cdot \|(x-a)\| + |t| \cdot \|(y-a)\| < (1-t)r + tr = r.$$

Portanto, concluímos que qualquer segmento com extremos $x, y \in B(a, r)$, está totalmente contido na bola aberta. Logo, toda bola aberta em um espaço vetorial normado é convexa. ■

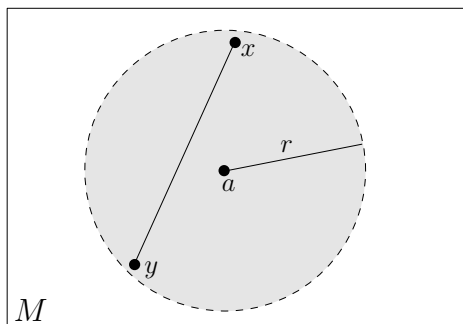


Figura 3.14 – Segmento $[x, y]$ contido na bola $B(a, r)$.

Pode-se realizar uma demonstração análoga para o caso de uma bola fechada. Logo, toda bola fechada em um espaço vetorial normado é convexa.

Conforme comentado no início desta seção, a definição de conjunto limitado segue o mesmo raciocínio empregado na Seção 2.3, ao definir uma sequência limitada.

Definição 3.13. Um conjunto $X \subset M$, sendo M um espaço métrico, é **limitado** se, e somente se, está contido em alguma bola aberta.

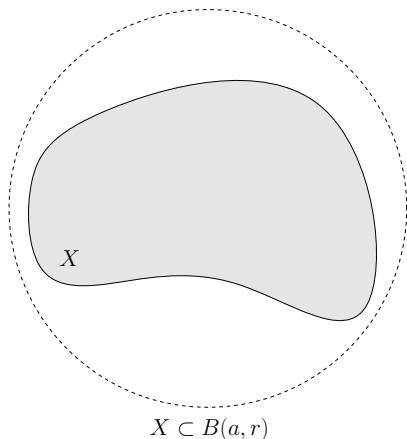


Figura 3.15 – Representação de um conjunto X contido em uma bola $B(a, r)$.

Exemplo 3.5.1. Considere o *cilindro circular reto* definido da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 3\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Note que \mathcal{C} é um conjunto limitado. De fato, pois $\mathcal{C} \subset B(0, 4)$ de \mathbb{R}^3 .

3.6 COMPACIDADE

Iniciaremos agora o estudo do conceito topológico de conjuntos compactos. De modo geral, a noção de compacidade se caracteriza de diversas formas. No decorrer dessa seção, provaremos que todo conjunto compacto de \mathbb{R}^n é fechado e limitado. Entretanto, a maneira que vamos definir os conjuntos compactos requer inicialmente da definição de cobertura e conceitos sequenciais.

Definição 3.14. Dado um conjunto $X \subset M$, em que M é um espaço métrico, dizemos que, uma coleção $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de M , é uma **cobertura** de X se $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Diremos também que uma **subcobertura** de \mathcal{C} é uma subcoleção $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0}$, $\Lambda_0 \subset \Lambda$, de tal forma que $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} C_\lambda$.

Dada uma cobertura \mathcal{C} para o conjunto $X \subset M$, sendo M um espaço métrico, dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura aberta*, quando C_λ é aberto, para todo λ . E, caso Λ seja um conjunto finito, dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura finita* de X . Usando as definições abordadas até então, segue a definição de conjuntos compactos:

Definição 3.15. Seja $X \subset M$, em que M é um espaço métrico. Dizemos que X é um **conjunto compacto** quando toda cobertura aberta $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X admite uma subcobertura finita, ou seja, existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j \in \Lambda$, de modo que $X \subset \bigcup_{i=1}^j C_{\lambda_j}$.

Exemplo 3.6.1. Seja $X = (-1, 0) \subset \mathbb{R}$. Note que $\mathcal{C}_x = \left(-1, \frac{-1}{x}\right)$, com $x \in \mathbb{N}^*$ é uma cobertura aberta para X , pois $X \subset \bigcup_{x \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}_x$. Entretanto, \mathcal{C}_x não possui uma subcobertura finita, pois $\mathcal{C}_x \subsetneq \mathcal{C}_{x+1} \subsetneq X$. Portanto, X não é um conjunto compacto.

Usando o mesmo raciocínio, é possível provar que toda bola aberta de um espaço métrico M não é um conjunto compacto.

Proposição 3.14. *Nenhuma bola aberta de M , em que M é um espaço métrico, é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja $B(a, r)$, com $a \in M$, em que M é um espaço métrico, e $r > 0$. Tome $C_\lambda = B\left(a, r - \frac{r}{\lambda + 1}\right)$, com $\lambda \in \mathbb{N}$. Note que $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $B(a, r)$. Veja que \mathcal{C}

não admite uma subcobertura finita, uma vez que $C_\lambda \subsetneq C_{\lambda+1} \subsetneq B(a, r)$. Portanto, nenhuma bola aberta de M é um conjunto compacto. ■

Veja agora um resultado que nos permite afirmar que todo conjunto compacto de um espaço métrico é um conjunto limitado.

Proposição 3.15. *Seja M um espaço métrico. Se $X \subset M$ é um conjunto compacto, então X é limitado.*

Demonstração. Provaremos esta proposição por contrapositiva. Seja $X \subset M$ um subconjunto ilimitado e fixe $a \in M$. Perceba que

$$\mathcal{B} = \{B(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

compõe uma cobertura aberta de M , pois dado qualquer ponto $x \in M$, temos que $x \in B(a, d(a, x) + 1)$. E, além disso, compõe uma cobertura de X . Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B(a, n) \subset B(a, n + 1)$. Disto segue que X não admite um subcobertura finita, pois não existe nenhuma bola aberta de M que contém X já que estamos supondo que X é ilimitado. E, por consequência temos que X não é um conjunto compacto. E, assim, concluímos a demonstração. ■

Nosso próximo resultado nos garante que, dado um conjunto compacto, podemos afirmar que todo subconjunto fechado deste compacto é também um conjunto compacto.

Proposição 3.16. *Todo subconjunto fechado de um conjunto compacto é compacto.*

Demonstração. Sejam $C \subset M$, um conjunto compacto e $F \subset C$ um conjunto fechado em M . Como F é fechado em M , temos

que $M - F$ é aberto em M . Desse modo, tomando uma cobertura aberta de F , $\mathcal{D} = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, temos que a união dos abertos de \mathcal{D} e $M - F$, formam uma cobertura aberta de C . Como C é um conjunto compacto, podemos extrair uma subcobertura finita, $D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \dots, D_{\lambda_i}, M - F$, que, conseqüentemente, cobre o conjunto F . Uma vez que $(M - F) \cap F = \emptyset$, temos que $\{D_{\lambda_1}, D_{\lambda_2}, \dots, D_{\lambda_i}\}$ é uma subcobertura finita de F . E, assim, concluímos que F é um conjunto compacto. ■

Um teorema que veremos a seguir, conhecido como *Teorema de Heine-Borel*, nos permite caracterizar um conjunto compacto de \mathbb{R}^n como um conjunto fechado e limitado. Mas, antes de tal resultado, veremos duas proposições que nos auxiliarão na demonstração deste teorema.

Proposição 3.17. *Seja K um conjunto em um espaço métrico M . Se K é compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Seja $K \subset M$ um conjunto compacto. Queremos mostrar que K é um conjunto fechado. Suponha que $M - K$ seja um conjunto não vazio (pois caso $M - K = \emptyset$, K seria um conjunto fechado, vide Teorema 3.9) e tome $a \in M - K$. Considere, para cada $k \in K$, a bola aberta $B(k, r_k)$, com centro em k e raio $r_k = \frac{d(k, a)}{2}$. Note que $C = \{B(k, r_k); k \in K\}$ forma uma cobertura aberta de K . Veja que, para todo $k \in K$, $B(k, r_k) \cap B(a, r_k) = \emptyset$. E, perceba também que podemos extrair uma subcobertura finita $\bigcup_{i=1}^j B(k, r_{k_i})$ de C , pois K é um conjunto compacto. Seja $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < \min\{r_{k_1}, \dots, r_{k_j}\}$, então $B(a, \epsilon) \subset M - K$. Logo, a é um ponto interior de $M - K$. Como $a \in M - K$ foi tomado arbitrariamente, podemos concluir que $M - K$ é aberto em M . Portanto, K é fechado em M . ■

Proposição 3.18. *Todo paralelepípedo de \mathbb{R}^n é um conjunto compacto.*

Demonstração. Considere o seguinte paralelepípedo em \mathbb{R}^n

$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

e, γ sendo sua diagonal.

Queremos mostrar que K é um conjunto compacto, para isso, suponha por absurdo que K não é um conjunto compacto em \mathbb{R}^n . Sendo assim, temos que existe um cobertura aberta de K

$$\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

que não admite um subcobertura finita. Tome o ponto $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Perceba que c_i divide o intervalo $[a_i, b_i]$ em dois intervalos fechados de mesmo comprimento. E, assim, temos que os 2^n paralelepípedos

$$[\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n], \text{ tal que } [\alpha_i, \beta_i] = [a_i, c_i] \text{ ou } [\alpha_i, \beta_i] = [c_i, b_i] \text{ para todo } i = 1, \dots, n$$

formam uma decomposição de K .

Para cada um dos paralelepípedos que decompõe K , temos que $\frac{\gamma}{2}$ é sua diagonal. De fato,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(a_i - b_i)^2}{4}} = \frac{\gamma}{2}.$$

E, como K não é compacto, segue que pelo menos um dos paralelepípedos que decompõe K , digamos $K_1 \subset K$, não pode ser coberto por uma quantidade finita de abertos de \mathcal{C} , pois se fosse diferente, conseguiríamos extrair uma quantidade finita de aberto de \mathcal{C} que cobrem K .

Repetindo todo o processo de decomposição indeterminadas vezes, conseguimos obter uma sequência decrescente de paralelepípedos, tais que,

$$\cdots \subset K_k \subset \cdots \subset K_1 \subset K_0 = K,$$

De modo que, $\forall k \in \mathbb{N}$:

1. O paralelepípedo K_k não pode ser coberto por uma quantidade finita de abertos de \mathcal{C} .
2. A diagonal de K_k é igual a $\frac{\gamma}{2^k}$, o que implica que se $x, y \in K_k$ então $d(x, y) \leq \frac{\gamma}{2^k}$.

Consideremos uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$, definida da seguinte forma: $x_k \in K_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, uma vez que percebemos que

$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

é limitado. Pelo Teorema 2.4 de Bolzano-Weierstrass, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admite, sem perda de generalidade, uma subsequência convergente, continuaremos denotando tal subsequência por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Suponha que $x_k \rightarrow a \in \mathbb{R}^n$, como a é ponto aderente de K , segue que $a \in K$, uma vez que K é fechado, vide Proposição 3.10.

Além disso, note que $\forall k_0 \in \mathbb{N}$, a subsequência $(x_k)_{k \geq k_0}$ é uma sequência em K_{k_0} que converge para a . E, com isso, concluímos que $a \in \overline{K_{k_0}} = K_{k_0}$, para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap K_k$. Para chegarmos em um absurdo e concluirmos a demonstração, basta notar que $a \in \mathcal{C}_\lambda$, para algum $\lambda \in \Lambda$, e existe $\epsilon > 0$, de modo que, $B(a, \epsilon) \subset \mathcal{C}_\lambda$. Considerando $k \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{\gamma}{2^k} < \epsilon$, temos, pelo item (2), que para todo $k \in \mathbb{N}$, $d(x, a) < \epsilon$, $\forall x \in K_k$, uma vez que $a \in K_k$.

Concluímos assim, que $K_k \subset B(a, \epsilon) \subset \mathcal{C}_\lambda$, o é um absurdo, vide item (1) e, portanto segue que K é compacto. ■

Teorema 3.19 (Heine-Borel). *Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, é limitado e fechado em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Primeiramente, suponha que $K \subset \mathbb{R}^n$ seja compacto. Pela Proposição 3.17, temos que K é fechado em \mathbb{R}^n , e,

além disso, K é limitado vide Proposição 3.15.

Suponha agora que $K \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto fechado e limitado e, além disso, tome $K \subset X \subset \mathbb{R}^n$, sendo X um paralelepípedo de \mathbb{R}^n . Sendo assim, temos que K é um conjunto fechado em X , como X é um conjunto compacto pela Proposição 3.18, segue que K é um conjunto compacto, vide Proposição 3.16. ■

Podemos também caracterizar um conjunto compacto de \mathbb{R}^n através de seqüências. E, estes resultados são obtidos por consequência do Teorema de Bolzano-Weierstrass 2.4 e do Teorema de Heine-Borel 3.19 demonstrado anteriormente.

Definição 3.16. Dizemos que um conjunto K é **seqüencialmente compacto** se toda seqüência em K possui uma subseqüência convergente para algum elemento de K .

Uma caracterização dos conjuntos compactos em \mathbb{R}^n é dada através do teorema abaixo.

Teorema 3.20. *Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, é seqüencialmente compacto.*

Demonstração. Suponha que $K \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto compacto. Portanto, pelo Teorema 3.19 de Heine-Borel segue que K é fechado e limitado. Como K é limitado, podemos usar o Teorema 2.4 de Bolzano-Weierstrass para concluir que toda seqüência de K possui uma subseqüência convergente, em particular converge para um elemento de K , pois K é fechado. Portanto, K é seqüencialmente compacto.

Suponha agora que K seja seqüencialmente compacto, sendo assim K é um conjunto limitado. De fato, se K não fosse limitado existiria um $k_n \in K$ tal que $d(k_n, 0) > n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. E, assim, a seqüência $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não possuiria subseqüências limitadas e, então teríamos uma contradição com a hipótese, pois não existiria uma subseqüência de (k_n) convergente. Além do mais, temos também que K é um conjunto fechado. De fato, se K não fosse fechado, significa que existiria um $x \in \overline{K} - K$ e, além disso, existiria uma seqüência de elementos de K que iria convergir para

x , o que não acontece pois K é sequencialmente compacto. Por fim, pelo Teorema 3.19 de Heine-Borel, como $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, portanto K é compacto. ■

Vale ressaltar que existem subconjuntos de espaços métricos que são fechados e limitados, entretanto não são conjuntos compactos. O exemplo a seguir, retirado de [5], página 89, nos garante esta afirmação.

Exemplo 3.6.2. Seja \mathbb{V} o espaço vetorial formado pelas sequências de números reais em que todos os termos, exceto um número finito deles, são iguais a zero. Dado um elemento $v = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{V} , a função $\|v\| = \max\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$ define uma norma neste espaço, vide Exemplo 2.2.1. Seja S a esfera de \mathbb{V} com centro na origem e raio 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denote por v_k a sequência de números reais em que o k -ésimo termo é igual a 1 e todos os demais são iguais a zero. Então, (v_k) é uma sequência em S que satisfaz $\|v_k - v_l\| = 1$, para todo $k \neq l \in \mathbb{N}$. Logo, subsequência alguma de (v_k) é de Cauchy, o que implica que (v_k) não possui subsequências convergentes (veja Proposição 2.5). Por outro lado, temos que S é fechada, pois esferas em espaços métricos são fechadas por serem complementar de aberto. E, além disso, S é limitada, pois está contida na $B[0, 2] \subset \mathbb{V}$. Entretanto, S não é um conjunto compacto, pois não é sequencialmente compacta.

3.7 CONEXIDADE

Intuitivamente, dizemos que um conjunto é conexo, quando ele é formado por um único “pedaço”. Para formalizar, faz-se necessário a apresentação de algumas definições.

Definição 3.17. Dado um conjunto $X \subset M$, em que M é um espaço métrico, dizemos que uma **cisão** de X é uma decomposição de X em dois subconjuntos disjuntos, ambos abertos em X , isto é, $A, B \subset X \subset M$ são tais que:

- $X = A \cup B$;

- $A \cap B = \emptyset$;
- A e B são ambos abertos em X .

Vale ressaltar que, na Definição 3.17, estamos considerando a topologia relativa em $X \subset M$. Além disso, segue diretamente da definição que qualquer espaço métrico admite uma cisão. Para isso, basta que tomemos $M = M \cup \emptyset$. Esta cisão é conhecida como *cisão trivial*. Veremos a seguir um exemplo de cisão não trivial.

Exemplo 3.7.1. Seja $X = \{x_1, x_2\} \subset M$, em que M é um espaço métrico e $x_1 \neq x_2$. A decomposição $\{x_1\} \cup \{x_2\} = X$ é uma cisão não trivial de X . De fato, considere a $B(x_1, r)$ e defina $r = \frac{d(x_1, x_2)}{2}$. Note que $\{x_1\} = B(x_1, r) \cap X$ é disjunto de $\{x_2\}$, sendo assim, $\{x_1\}$ é aberto em X . De maneira análoga, $\{x_2\}$ também é aberto em X .

Perceba que podemos definir cisão por meio de fechados em X . De fato, como $X = A \cup B$, sendo que A e B são disjuntos, segue que $A = X - B$ e $B = X - A$, ou seja, A e B são abertos em X se, e somente se, ambos também são fechados em X . Logo, na definição de cisão, podemos trocar o conceito de abertos por *fechados*. Podemos também caracterizar a decomposição por meio de fechados, analisando seus pontos de aderência. Isto é feito a partir da proposição a seguir.

Proposição 3.21. *Uma decomposição $X = A \cup B$ de um conjunto X contido em um espaço métrico é uma cisão se, e somente se, não há pontos de aderência de A em B ou pontos de aderência de B em A , ou seja,*

$$X = A \cup B \text{ é uma cisão} \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Demonstração. Suponha que $X = A \cup B$ seja uma cisão. Disto segue que A e B são ambos fechados em X . Como vimos na Proposição 3.12, segue que $A = \overline{A} \cap X$ e $B = \overline{B} \cap X$. Perceba que

como A e B são disjuntos, temos que $A \cap \overline{B} = (A \cap X) \cap \overline{B} = A \cap (X \cap \overline{B}) = A \cap B = \emptyset$, com o mesmo raciocínio, segue que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Agora, suponha por hipótese que $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$. Sendo assim, temos que $\overline{A} \cap X = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A$ e, também, $\overline{B} \cap X = \overline{B} \cap (A \cup B) = (\overline{B} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = B$, donde segue que A e B são ambos fechados em X . E, além disso, note que $A \cap B \subset \overline{A} \cap B = \emptyset$, ou seja, A e B são disjuntos. Portanto, $X = A \cup B$ é uma cisão. ■

Usando a ideia de cisão trivial, podemos definir quando um conjunto é dito conexo.

Definição 3.18. Um conjunto $X \subset M$, em que M é um espaço métrico, é dito **conexo** quando admite apenas a cisão trivial. Caso admita alguma cisão além da trivial, ele é dito **desconexo**.

Como caso particular do Exemplo 3.7.1, segue que a esfera $S[a, r]$ na reta real é um conjunto desconexo.

Diretamente da definição, segue que alguns conjuntos podem ou não ser considerados conjuntos conexos. Por exemplo, todo conjunto discreto com mais de um elemento é um conjunto desconexo, pelo simples fato de todo ponto de um conjunto discreto ser um ponto isolado. Perceba também que toda bola aberta menos um ponto em \mathbb{R} são exemplos de conjuntos desconexos. Na sequência veremos resultados dos conjuntos conexos.

Proposição 3.22. *A reta \mathbb{R} é um conjunto conexo.*

Demonstração. Suponha por absurdo que \mathbb{R} seja um conjunto desconexo. Sendo assim, existe uma cisão não trivial, tal que, $\mathbb{R} = A \cup B$. Tome $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_1 < x_2$. Considere o conjunto $X = \{x \in A; x < x_2\}$. Perceba X não é um conjunto vazio, pois $x_1 \in X$. Note que x_2 é cota superior de X e, disto segue que existe $y = \sup X$. Como o supremo é a menor das cotas superiores de um conjunto, temos que $y \leq x_2$. Note que pela definição de supremo,

temos que para todo $\lambda > 0$, existe $x \in X$, tal que $y - \lambda < x \leq y$. E, portanto, y pertence ao fecho de A . Sendo A um conjunto fechado em \mathbb{R} , podemos concluir que $y \in A$. E, como $x_2 \in B$, concluimos que $y \neq x_2$, e assim $y < x_2$. Sendo A um conjunto aberto em \mathbb{R} , existe $\lambda > 0$ de modo que $y + \lambda < x_2$ e $B(y, \lambda) \subset A$. Então, todos os elementos de $(y, y + \lambda)$ pertencem a X , contradizendo que y seja o supremo de X . ■

Proposição 3.23. *Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família arbitrária de conjuntos conexos em um espaço métrico. Se todos os C_λ têm um ponto em comum, isto é, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$, então a união dessa família arbitrária é um conjunto conexo.*

Demonstração. Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família arbitrária de conjuntos conexos. Defina $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ e assumamos que $c \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Suponha que a decomposição $C = A \cup B$ seja uma cisão. Como $c \in C$, sem perda de generalidade vamos dizer que $c \in A$. Sendo assim, para todo λ , $A \cap C_\lambda$ e $B \cap C_\lambda$ são abertos em C_λ , pois A e B são abertos em C . Portanto, $C_\lambda = (C_\lambda \cap A) \cup (C_\lambda \cap B)$ é uma cisão de C_λ . Além do mais, como C_λ é conexo, essa cisão é trivial e, $c \in C_\lambda \cap A$, segue que, para todo $\lambda \in \Lambda$, $C_\lambda \cap B = \emptyset$. Daí, temos que $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (C_\lambda \cap B) = \emptyset$ e, por fim, temos que C é conexo. ■

Perceba que, o fato de existir em um espaço métrico M um subconjunto A próprio e não vazio, tal que A é aberto e fechado em M , então a decomposição $M = A \cup (M - A)$ é cisão não trivial de M e, neste caso, M é desconexo.

Conforme comentado anteriormente, toda bola aberta ou fechada em \mathbb{R} menos um ponto é um exemplo de conjunto desconexo. Na sequência, trataremos de um resultado que garante que toda bola aberta ou fechada de um espaço vetorial é um conjunto conexo, pois tratam-se de conjuntos convexos. Vamos usar conceitos vistos na Seção 3.5 sobre convexidade e os resultados abaixo.

Proposição 3.24. *Todo conjunto convexo de \mathbb{V} , sendo \mathbb{V} um espaço vetorial normado, é conexo.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{V}$, sendo \mathbb{V} um espaço vetorial normado, um conjunto convexo. Suponha por absurdo que $A \cup B$ seja uma cisão não trivial de X . Tome $a \in A$ e $b \in B$. Para todo $t \in [0, 1]$, defina $x_t = (1 - t)a + tb \in [a, b]$. Considere o conjunto $\beta = \{t \in [0, 1]; x_t \in A\}$. Veja que $\beta \neq \emptyset$, pois para $t = 0$, $x_0 = a \in A$. Note que como $\beta \subset [0, 1]$ segue que β é limitado, portanto existe $s = \sup \beta$. Tome a sequência $(t_k) \subset \beta$, tal que $t_k \rightarrow s$, então $s \in [0, 1]$, pois $\beta \subset [0, 1]$ que é fechado. Considere a sequência $(x_{t_k})_{t \in \mathbb{N}}$ como uma sequência em A . Note que $x_{t_k} \rightarrow x_s \in [a, b]$. Portanto, $x_s \in \overline{A}$, e pela Proposição 3.21, $x_s \notin B$, por $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Além do mais, $s < 1$, pois se $s = 1$, $x_1 = b \in B$. Perceba que, pela definição de supremo $x_t \notin A$, para todo $t \in (s, 1]$ e, neste caso, $x_t \in B$. Considere a sequência $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset (s, 1]$, tal que $t_i \rightarrow s$, sendo assim, $x_{t_i} \rightarrow x_s$, isto é, $x_s \in \overline{B}$ e, por consequência também da Proposição 3.21, $x_s \notin A$, então $x_s \notin A \cup B = X$, ou seja, $[a, b] \not\subset X$. Absurdo, pois X é convexo. Portanto, X é conexo. ■

Exemplo 3.7.2. Neste exemplo, vamos mostrar que toda bola de \mathbb{R}^n é convexa. De fato, seja B uma bola aberta ou fechada centrada em um ponto c e raio $r > 0$ de \mathbb{R}^n . Se tomarmos os pontos $a, b \in B$, o segmento $s_t = (1 - t)a + tb \in [a, b]$ com $t \in [0, 1]$ e, assumindo $c = (1 - t)c + tc$, temos que $s_t - c = (1 - t)a - (1 - t)c - tc + tb = (1 - t)(a - c) + t(b - c)$. E assim,

$$d(s_t, c) \leq (1 - t)d(a, c) + td(b, c) \leq (1 - t)r + tr = r.$$

Com alguns cuidados, ou seja, caso a bola seja aberta a desigualdade é escrita como estritamente menor. Portanto, $s_t \in B$ para todo $t \in [0, 1]$, o que garante que a bola é convexa.

Proposição 3.25. *Um subconjunto não vazio de \mathbb{R} é conexo se, e somente se, é um intervalo.*

Demonstração. Suponha que $I \subset \mathbb{R}$ seja um conjunto conexo e $I \neq \emptyset$. Precisamos mostrar que I é um intervalo. Se I possuir apenas um elemento, I é um intervalo, o que garantiria a demonstração. Sejam $a, b \in I$, sem perda de generalidade, suponha que $a < b$. Se I não fosse um intervalo, então existiria $a < c < b$ tal que c não está em I . Disto segue que $I = A \cup B$ é uma cisão não trivial de I , pois $A = I \cap (-\infty, c)$ e $B = (c, +\infty) \cap I$ são ambos disjuntos abertos não vazios de I , sendo que $a \in A$ e $b \in B$. Isso contradiz o fato de I ser conexo, logo I é um intervalo. Agora perceba que se I é um intervalo, temos que I é convexo e, pela Proposição 3.24, I é conexo. ■

Exemplo 3.7.3. Queremos mostrar que toda bola aberta ou fechada de \mathbb{R}^n menos um ponto, com $n \geq 2$ é um conjunto conexo. Para que as notações sejam mais simples, usaremos $n = 2$. Primeiramente perceba que cada quadrante de \mathbb{R}^2 menos a origem é um conjunto convexo. Para isso, considere os conjuntos abaixo:

$$A_1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1, a_2 \geq 0\} - \{(0, 0)\};$$

$$A_2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2; a_1 \leq 0, a_2 \geq 0\} - \{(0, 0)\}.$$

Mostraremos que A_1 é um conjunto conexo. Mostrar que os outros quadrantes menos a origem são conexos, seguem de forma semelhante. Para mostrar que A_1 é conexo, considere $a = (a_1, a_2)$, $a' = (a_3, a_4) \in A_1$, precisamos garantir que o segmento $a_t = (1-t)a + ta'$ com $t \in [0, 1]$, está contido em A_1 . De fato, $a_t = (1-t)(a_1, a_2) + t(a_3, a_4) = ((1-t)a_1 + ta_3, (1-t)a_2 + ta_4)$, e como $a, a' \in A_1$ e $t \in [0, 1]$, temos que $a_t \neq (0, 0)$ e $(1-t)a_1 + ta_3, (1-t)a_2 + ta_4 \geq 0$. Portanto, $a_t \in A_1$. Considere $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, com $r > 0$, pelo Exemplo 3.7.2, temos que $B = B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto convexo. Desta maneira, podemos concluir que os conjuntos $C_1 = A_1 \cap B$ e $C_2 = A_2 \cap B$ são convexos, e pela Proposição 3.24 são conjuntos conexos. Além do mais, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, e com isso, temos que $X_1 = C_1 \cup C_2 = \{(a_1, a_2) \in B - \{0 : a_2 \geq 0\}\}$ é um conjunto conexo (veja Proposição 3.23). Usando um raciocínio semelhante, podemos concluir que $X_2 = \{(a_1, a_2) \in B - \{0\}; a_2 \leq 0\}$ é conexo. Devido a

$B - \{0\} = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \{(x_1, x_2) \in B - \{0\}; x_2 = 0\} \neq \emptyset$, segue da Proposição 3.23, que $B - \{0\}$ é um conjunto conexo.

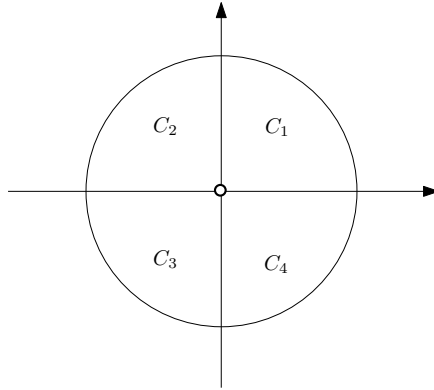


Figura 3.16 – Representação da bola $B - \{0\}$

4 APLICAÇÕES CONTÍNUAS

O conceito de continuidade, indispensável no Cálculo, tem como objeto de estudo as funções. Para falar que uma função é contínua é necessário realizar uma análise em todos os pontos do seu domínio. Grosseiramente, em espaços que conseguimos fazer sua representação, dizemos que uma função é contínua quando ao desenhar seu gráfico, não tiramos o lápis do papel. Uma das maneiras de falar de continuidade, utiliza explicitamente que o conjunto trabalhado seja munido de uma métrica. De fato, pois precisamos matematicamente falar de proximidade, ou seja, medir distâncias. Neste capítulo, vamos trabalhar com a definição de continuidade para funções definidas entre espaços métricos quaisquer.

Definição 4.1. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em um ponto $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que

$$x \in X \text{ e } d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

E, dizemos que f é contínua quando é contínua em todos os pontos de seu domínio.

De maneira equivalente, dizemos que $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ é contínua em um ponto $a \in X$, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B(a, \delta) \cap X \Leftrightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon) \cap Y.$$

Ou, de outra forma, enxergamos a continuidade de f em um ponto a quando

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon) \cap Y.$$

Perceba que o conceito de continuidade em um ponto é um conceito local, ou seja, está vinculado ao comportamento da

função f nas proximidades do ponto de interesse.

O resultado que veremos a seguir, nos garante que qualquer função norma, definida em um espaço vetorial é uma função contínua.

Proposição 4.1. *Seja $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ uma norma definida em um espaço vetorial \mathbb{V} . Então $\|\cdot\|$ é contínua.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{V}$, perceba que $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, ou seja, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Por outro lado, $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$, ou seja, $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Portanto, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Logo, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, então

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \delta = \epsilon$$

isto é, $\|\cdot\|$ é contínua. ■

Vejamos outros exemplos de funções contínuas:

Exemplo 4.0.1. Sejam X, Y espaços métricos e assumamos que $x \in X$ é um ponto isolado. Toda função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em x . De fato, como x é um ponto isolado, existe $\delta > 0$ de tal modo que $B(x, \delta) \cap X = \{x\}$. E, com isso, para todo $\epsilon > 0$

$$f(B(x, \delta) \cap X) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \subset B(f(x), \epsilon) \cap Y$$

E, assim, concluímos que f é contínua no ponto x . À parte, podemos dizer que se X for um espaço métrico discreto, ou seja, todo ponto de X é ponto isolado, então qualquer função $f : X \rightarrow Y$ é contínua.

Exemplo 4.0.2. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função entre espaços métricos. Considere a existência de uma constante $c > 0$ de modo que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Esta constante c é chamada de *constante de Lipschitz* e f é chamada de *função lipschitziana*. Diante disso, temos que f é contínua em todos os

pontos de X . De fato, dado $\epsilon > 0$ e fazendo $\delta = \frac{\epsilon}{c}$, temos que se $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = \epsilon$. O que garante a continuidade de f .

Quando uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ não é contínua em um ponto a , dizemos que f é descontínua em a . Mais precisamente, f é descontínua em a , se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$,

$$\exists x \in X \text{ satisfazendo } d(x, a) < \delta \text{ e } d'(f(x), f(a)) \geq \epsilon.$$

Exemplo 4.0.3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , \text{ se } x \neq 2 \\ 0 & , \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

não é contínua no ponto $x = 2$. De fato, note que para todo $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade $2 < x < 3$, $|f(x) - f(2)| = \left| \frac{1}{x-2} - 0 \right| = \frac{1}{x-2} > 1$. Sendo assim, tomando $\epsilon = 1$, temos que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$, de modo que $|x - 2| < \delta$ e $|f(x) - f(2)| > \epsilon$.

Em nosso próximo resultado, vamos lidar com o conceito de *imagem inversa*. Pensar em imagem inversa é equivalente a pensar de onde vieram tais elementos por determinada função. Mais precisamente, dados $f : X \rightarrow Y$ e $A \subset Y$, temos que:

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

Teorema 4.2. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança V de $f(a)$ em Y , $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a em X .*

Demonstração. Suponha que $f : X \rightarrow Y$, sendo X, Y espaços métricos, seja uma função contínua em um ponto $a \in X$. Tome $V \subset Y$, como sendo uma vizinhança de $f(a)$ em Y , então, existe

$\epsilon > 0$, de modo que $B(f(a), \epsilon) \subset V$, pois, por definição de vizinhança, $f(a)$ é um ponto interior de V . Entretanto, como f é contínua em $a \in X$, segue que, para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon) \cap Y \subset V$, portanto, temos que $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(V)$, o que garante que $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a em X . Agora, suponha que, para toda vizinhança V de $f(a)$ em Y , $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a em X . Queremos garantir que f seja contínua em $a \in X$. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $V = B(f(a), \epsilon) \cap Y$, pela hipótese, $f^{-1}(V)$ é vizinhança de a em X , ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(V) = f^{-1}(B(f(a), \epsilon) \cap Y)$, ou seja, $f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon) \cap Y$. Logo, concluímos que f é contínua em $a \in X$. ■

O teorema acima é uma caracterização topológica de continuidade. A partir dele podemos definir a continuidade de uma função em espaços topológicos.

Definição 4.2. Considere uma função $f : X \rightarrow Y$, sendo X, Y espaços topológicos. A função f é dita **contínua** se para todo aberto U de Y , $f^{-1}(U)$ for um aberto em X .

De fato, todo $U \subset Y$ aberto, U é uma vizinhança de todos os seus pontos. Pelo Teorema 4.2, segue que se f é contínua, então $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança em X , ou seja, $f^{-1}(U)$ é aberto em X . Veja que podemos trocar o termo *aberto* por *fechado* na definição acima. Para isto, basta mostrar que f é contínua se, e somente se, para todo F fechado em Y , $f^{-1}(F)$ é um fechado em X . E, de fato é, pois se F é fechado em Y , então $Y - F$ é um aberto em Y , logo $f^{-1}(Y - F)$ é um aberto em X , e, além disso, $f^{-1}(Y - F) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(F) = X - f^{-1}(F)$, como $f^{-1}(Y - F)$ é um aberto, então, $f^{-1}(F)$ é fechado em X .

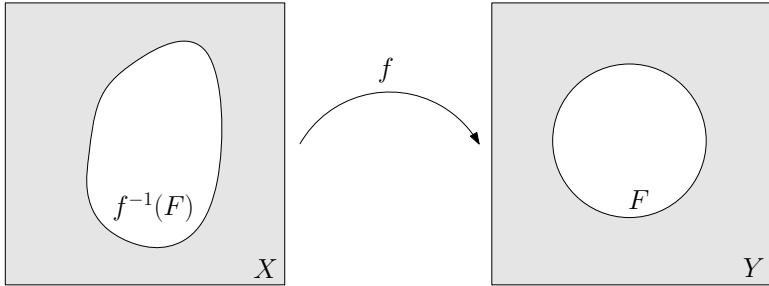


Figura 4.1 – Se f é um função contínua e $Y - F$ é um aberto em Y então $f^{-1}(Y - F)$ é aberto em X .

Exemplo 4.0.4. Considere a função projeção $f : X \times Y \rightarrow X$ dada por $f(x, y) = x$. Note que f é contínua. De fato, dado A aberto em X , temos que $f^{-1}(A) = A \times Y$ é aberto em $X \times Y$, pois, vide Proposição 3.3, produto cartesiano de abertos é aberto. Portanto, f é contínua.

No Capítulo 2, trabalhamos o conceito de convergência de seqüências. É natural relacionar o conceito de convergência com o de continuidade e, faremos isso em nosso próximo resultado.

Proposição 4.3. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para toda seqüência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, de modo que $x_k \rightarrow a$, tem-se que $f(x_k) \rightarrow f(a)$.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços métricos. Primeiramente, suponha que f seja um função contínua em $a \in X$. Então, pelo Teorema 4.2, para toda vizinhança V de $f(a)$ em Y , temos que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a em X . Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência com a seguinte condição $x_k \rightarrow a$ e considere V uma vizinhança qualquer de $f(a)$ em Y . Como $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a , sabemos que existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset f^{-1}(V)$. Para tal ϵ , existe $k_0 \in \mathbb{N}$, de modo que, $k \geq k_0$ implica que $x_k \in B(a, \epsilon) \subset f^{-1}(V) \subset X$. Segue que, $\forall k \geq k_0$, $f(x_k) \in V$ e então, pela Proposição 3.1, temos que $f(x_k) \rightarrow f(a)$. Agora, suponha por contrapositiva que a função f não é contínua em $a \in X$, sendo assim, pelo Teorema 4.2, temos que existe $V \subset Y$,

de modo que V é vizinhança de $f(a)$ em Y , entretanto, $f^{-1}(V)$ não é vizinhança de a em X . Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap X$, de modo que, x_k não pertence a $f^{-1}(V)$. O que garante que $x_k \rightarrow a$, quando $k \rightarrow \infty$, porém $f(x_k)$ não pertence a V . Logo, $f(x_k)$ não converge para $f(a)$. ■

4.1 HOMEOMORFISMO

Dizemos que dois espaços topológicos são homeomorfos quando preservam a mesma estrutura (topológica). De modo geral, podemos entender que dois espaços topológicos são homeomorfos quando é possível deformar um no outro sem “quebras” ou “rupturas”.

Definição 4.3. Dados X, Y espaços métricos, uma bijeção

$$f : X \rightarrow Y$$

é um **homeomorfismo** se, e somente se, f e f^{-1} são ambas contínuas.

A partir dessa definição conseguimos caracterizar muitos espaços topológicos como homeomorfos.

Neste primeiro exemplo, veremos que bolas abertas quaisquer, em um espaço vetorial normado, são homeomorfas.

Exemplo 4.1.1. Dado um espaço vetorial normado X , considere $x \in X$ e $r > 0$. Queremos mostrar que bolas abertas quaisquer, em X , são homeomorfas. Sendo assim, tome a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} f : B(0, 1) &\rightarrow B(x, r) \\ t &\mapsto rt + x \end{aligned}$$

Perceba que f está bem definida, ou seja, $rt + x \in B(x, r)$ para qualquer $t \in B(0, 1)$. De fato, $d(rt + x, x) = ||rt + x - x|| = r||t|| < r$ (pois $||t|| < 1$). Veja também que f é bijetora, pois é injetora e sobrejetora, além disso, tanto f como f^{-1} são ambas contínuas,

pois dado $y = rt + x$, temos que $t = \frac{1}{r}(y - x)$, ou seja, temos que $f^{-1}(y) = \frac{1}{r}(y - x)$, e assim vemos que f e f^{-1} são contínuas. Usando o conceito de transitividade, concluímos que quaisquer bolas, em um espaço vetorial normado, são homeomorfas.

Na sequência, veremos, de forma genérica, que bolas abertas (intervalos abertos) em \mathbb{R} são homeomorfas ao \mathbb{R} , também veremos que bolas abertas em \mathbb{R}^2 são homeomorfas ao \mathbb{R}^2 . E em geral, que uma bola aberta em um espaço vetorial normado é homeomorfo ao espaço todo.

Exemplo 4.1.2. Seja M um espaço vetorial normado, munido da métrica induzida pela norma. E considere a seguinte aplicação:

$$f : B(0, 1) \rightarrow M$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|}$$

Para garantir que $B(0, 1)$ é homeomorfa ao espaço vetorial normado M , primeiramente precisamos garantir que f é bijetora. Para isso, bastar analisar que, dado $y \in M$, $f(x) = y$ possui uma única solução $x \in B(0, 1)$. Perceba que precisamos determinar $x \in B(0, 1)$ de modo que $y = \frac{x}{1 - \|x\|}$, ou seja, $|1 - \|x\|| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, mas, como $x \in B(0, 1)$ temos que, $\|x\| < 1$ e, portanto, $1 - \|x\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, assim, segue que, $\frac{\|x\| - \|x\| \|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|y\|}$, ou seja, $\|x\| = \frac{\|y\|}{1 + \|y\|}$. Sendo, com isso, $x = \frac{y}{1 + \|y\|}$ é a solução procurada. Logo, concluímos que, f é invertível e, além disso,

$$f(y) = \frac{y}{1 + \|y\|}, y \in M.$$

Vamos garantir que f^{-1} é de fato a inversa, para isso vamos calcular as composições e verificar que são identidades. Perceba que durante os cálculos estamos usando que $x \in B(0, 1)$, logo, $\|x\| < 1$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(f(x)) &= \frac{\frac{x}{1 - \|x\|}}{1 + \left\| \frac{\frac{x}{1 - \|x\|}}{x} \right\|} \\
 &= \frac{\frac{x}{1 - \|x\|}}{\frac{1}{1} + \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}} \\
 &= \frac{\frac{x}{1 - \|x\|}}{\frac{1 - \|x\| + \|x\|}{1 - \|x\|}} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 f(f^{-1}(x)) &= \frac{\frac{x}{1 + \|x\|}}{1 - \left\| \frac{\frac{x}{1 + \|x\|}}{x} \right\|} \\
 &= \frac{\frac{x}{1 + \|x\|}}{\frac{1}{1} - \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}} \\
 &= \frac{\frac{x}{1 + \|x\|}}{\frac{1 + \|x\| - \|x\|}{1 + \|x\|}} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Veja também que f e f^{-1} são notavelmente contínuas, uma vez que a função identidade é contínua, a função constante é contínua e pela Proposição 4.1, a função norma é contínua, como composição de funções contínuas é uma função contínua, garantimos a continuidade de f e f^{-1} . Podemos afirmar, usando também o Exemplo 4.1.1, que qualquer bola aberta em M é homeomorfa a M .

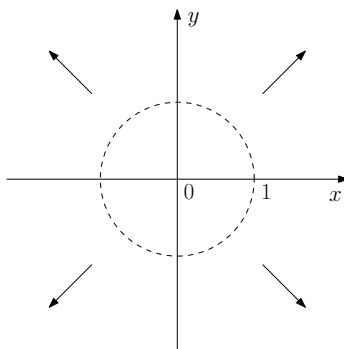


Figura 4.2 – Representação do homeomorfismo entre uma bola aberta e o plano.

O exemplo que veremos na sequência nos mostra que gráficos de aplicações contínuas são homeomorfos aos seus domínios. Pensando na intuição geométrica, podemos considerar o gráfico de um parabolóide de revolução, perceba que, grosseiramente, conseguimos “esticá-lo” de forma que se transforme no próprio \mathbb{R}^2 , ou seja, o gráfico da função

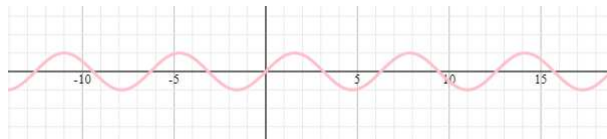
$$f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

é homeomorfo ao \mathbb{R}^2 .

Exemplo 4.1.3. Sejam M, N espaços métricos. Considere a função $f : M \rightarrow N$. Note que o gráfico da função f nada mais é que o conjunto $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}$ que por sua vez está contido no produto cartesiano $M \times N$. Perceba que, quando a função f é contínua, a sua representação gráfica é homeomorfa ao seu domínio. Com efeito, veja que a aplicação $\xi : M \rightarrow \text{graf}(f) \subset M \times N$, dada da seguinte maneira $\xi(x) = (x, f(x))$ é uma aplicação contínua, de fato, pois suas coordenadas são, vide [4], página 39. Perceba também que ξ é bijetiva, pois para todo $a \in \text{graf}(f)$, $a = (y, f(y))$, existe um único $y \in M$ tal que $\xi(y) = a$. Veja que, ξ^{-1} é a projeção ortogonal de $M \times N$ em M , restrita ao gráfico de f , que por sua vez é uma aplicação contínua, vide

Exemplo 4.0.4. Portanto ξ^{-1} é contínua. Sendo assim, temos que ξ é um homeomorfismo.

Na figura a seguir, podemos notar que o gráfico da função seno é homeomorfo ao eixo das abscissas.



Para finalizar essa seção, iremos nos deparar com um exemplo de homeomorfismo entre uma esfera menos um ponto em \mathbb{R}^{n+1} , com \mathbb{R}^n . Esse homeomorfismo é conhecido como projeção estereográfica.

Exemplo 4.1.4. Neste exemplo, queremos mostrar que $S^n - \{p_0\}$, com $\{p_0\} \in S^n$, é homeomorfa a \mathbb{R}^n . Para isso, vamos considerar a seguinte decomposição $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ é da forma (a, b) , sendo que $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. Considere agora a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} centrada na origem, denotada por S^n . Veja agora que $p_0 = (0, 1)$ pertence a esfera, conhecido como polo norte. Além do mais, podemos caracterizar \mathbb{R}^n com o seguinte subespaço:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \times \{0\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1}, b = 0\}.$$

A aplicação $f : S^n - \{p_0\} \rightarrow \mathbb{V}$ é conhecida como projeção estereográfica, definida geometricamente da seguinte maneira: Para qualquer ponto $p \in S^n - \{p_0\}$, a imagem de p pela aplicação f é o ponto de interseção entre uma reta r , determinada pelos pontos p, p_0 , e \mathbb{V} . Nosso objetivo é mostrar que f é um homeomorfismo. Para isso, seja $p = (a, b)$ e, defina a reta r , determinada por p e p_0 da seguinte maneira: $r = (p - p_0)t + p_0$, com $t \in \mathbb{R}$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, só irá pertencer a reta r , se puder ser visto como

$x = (p - p_0)t + p_0$, ou seja, sendo $p = (a, b)$ e $p_0 = (0, 1)$,

$$\begin{aligned} x &= ((a, b) - (0, 1))t + (0, 1) \\ &= ((a - 0)t, (b - 1)t) + (0, 1) \\ &= (at, t(b - 1) + 1) \end{aligned}$$

e, além disso, para que $x \in \mathbb{V}$, precisamos ter que

$$t(b - 1) + 1 = 0,$$

ou seja, $t = \frac{1}{1 - b}$, sendo assim, temos que

$$f(a, b) = \left(\frac{a}{1 - b}, 0 \right), (a, b) \in S^n - \{p_0\}.$$

Para garantir o homeomorfismo, precisamos primeiramente verificar que f é bijetiva, ou seja, dado $(v, 0) \in \mathbb{V}$, temos que mostrar que a equação $f(a, b) = (v, 0)$ admite única solução. Perceba que (a, b) é solução apenas se $\frac{a}{1 - b} = v$ e $\|a\|^2 + b^2 = 1$. Note que

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \frac{a}{1 - b} \right\|^2 \\ &= \frac{\|a\|^2}{|1 - b|^2} \\ &= \frac{1 - b^2}{(1 - b)^2} \\ &= \frac{1 - b^2}{1 - 2b + b^2}. \end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas, obtemos que:

$$b^2(\|v\|^2 + 1) - b2\|v\|^2 + \|v\|^2 - 1 = 0.$$

Perceba que, resolvendo a equação de segundo grau em b

$$b = \frac{2\|v\|^2 \pm \sqrt{(-2\|v\|^2)^2 - 4 \cdot (\|v\|^2 + 1) \cdot (\|v\|^2 - 1)}}{2 \cdot (\|v\|^2 + 1)}$$

admite $b = 1$ (o que não pode acontecer, pois $(0, 1)$ não pertence ao domínio) e, $b = \frac{2\|v\|^2 - 2}{2\|v\|^2 + 2}$ como soluções, e assim, como $a = v(1 - b)$, segue que $a = \frac{v}{1} - \frac{v\|v\|^2 - v}{\|v\|^2 + 1}$, ou seja, $a = \frac{2v}{\|v\|^2 + 1}$. E, assim, é possível notar que f é bijetiva e, além disso,

$$f^{-1}(v, 0) = \left(\frac{2v}{\|v\|^2 + 1}, \frac{\|v\|^2 - 1}{\|v\|^2 + 1} \right), v \in \mathbb{R}^n.$$

Perceba que como as coordenadas, tanto de f como de f^{-1} são contínuas, então ambas também são, vide [4], página 39. Portanto, f é um homeomorfismo.

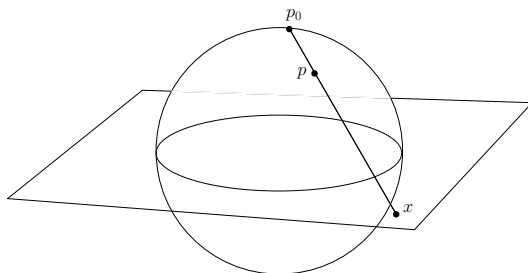


Figura 4.3 – Representação da projeção estereográfica.

4.2 COMPACIDADE E CONTINUIDADE

Após o estudo de funções contínuas podemos notar que se tais funções forem definidas em conjuntos compactos, então elas possuem propriedades particulares. Um dos resultados mais importantes envolvendo continuidade e compacidade é o teorema que nos garante que a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto. Para demonstrar esse resultado, vamos utilizar o lema a seguir.

Lema 4.4. *Sejam M, N espaços métricos, $A \subset N$, $B \subset N$, $C \subset M$ e $f : M \rightarrow N$ uma função.*

1. Se $A \subset B$, então $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

$$2. C \subset f^{-1}(f(C)).$$

$$3. f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda).$$

$$4. f(f^{-1}(A)) \subset A.$$

Demonstração. 1. Seja $x \in f^{-1}(A)$, então segue $f(x) \in A$, como $A \subset B$, temos que $f(x) \in B$ e, portanto $x \in f^{-1}(B)$.

2. Seja $x \in C$, então $f(x) \in f(C)$. Pela definição de imagem inversa, temos que $x \in f^{-1}(f(C))$. Logo, $C \subset f^{-1}(f(C))$.

3. Seja $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right)$, então $f(x) \in \bigcup_{\lambda} A_\lambda$. Assim $f(x)$ está contido em algum A_λ . Logo, x está na imagem inversa de algum A_λ , donde segue que $x \in \bigcup_{\lambda} f^{-1}(A_\lambda)$. Portanto, $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda} f^{-1}(A_\lambda)$.

4. Seja $y \in f(f^{-1}(A))$, então $y = f(x)$, para algum $x \in f^{-1}(A)$. Por definição de imagem inversa, temos que $y = f(x) \in A$. Logo, $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

■

Teorema 4.5. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração. Sejam M, N espaços métricos e $K \subset M$ um conjunto compacto. Considere agora uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$. Tome $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, sendo uma cobertura aberta de $f(K)$. Note que, pela Definição 4.2, $f^{-1}(C_\lambda)$ é aberto em M . Como $f(K) \subset \bigcup_{\lambda} C_\lambda$, pelo Lema 4.4, temos que $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} C_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda} f^{-1}(C_\lambda)$. Uma vez que K é compacto, segue que, $K \subset f^{-1}(C_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(C_{\lambda_i})$. Com isso, temos que $f(K) \subset f(f^{-1}(C_{\lambda_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(C_{\lambda_i})) \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_i}$, o que garante que $f(K)$ é compacto. ■

Em decorrência desse teorema, veremos a seguir um resultado de destaque no ponto de vista topológico. Conhecido como *Teorema de Weierstrass*, é um resultado importante de Cálculo.

Teorema 4.6 (Weierstrass). *Sejam M um espaço métrico, $K \subset M$ um conjunto compacto, e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, então existem $a, b \in K$, de modo que $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in K$.*

Demonstração. Inicialmente, podemos notar que, se K é compacto e f é uma função contínua, então $f(K)$ também é um compacto, vide Teorema 4.5 e, portanto, é um conjunto limitado e fechado, vide Teorema 3.19. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é limitado, suponha que ϕ e ψ sejam ínfimo e supremo de $f(K)$, respectivamente. Sendo assim, temos que, existem sequências $(x_k), (y_k) \subset K$, de modo que $f(x_k) \rightarrow \phi$ e $f(y_k) \rightarrow \psi$, vide definição de ínfimo e supremo. Pelo fato de $f(K)$ ser um conjunto fechado, temos que $\phi, \psi \in f(K)$ e, portanto, existem $a, b \in K$ tais que $\phi = f(a)$ e $\psi = f(b)$. Portanto, como $\phi = f(a)$ e $\psi = f(b)$ são respectivos ínfimo e supremo de $f(K)$, concluímos que $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \forall x \in K$. ■

Nosso último resultado desta seção, relaciona continuidade em um conjunto compacto com homeomorfismo, de modo geral, quando queríamos mostrar que uma bijeção contínua é um homeomorfismo. Precisávamos garantir que sua inversa também seria contínua. Esse resultado, em particular, nos diz que, se nosso domínio for um conjunto compacto, então a função é um homeomorfismo.

Proposição 4.7. *Toda bijeção contínua definida em um conjunto compacto é um homeomorfismo.*

Demonstração. Sejam M, N espaços métricos e $K \subset M$ um conjunto compacto. Considere a função $f : K \rightarrow f(K) \subset N$, uma bijeção contínua. Para garantir que f é um homeomorfismo, precisamos garantir que tanto f quanto f^{-1} são contínuas. Perceba que f , por hipótese, é contínua. Para mostrar que $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ é contínua, pelo comentário logo abaixo da Definição 4.2, basta mostrar

que, para qualquer conjunto F fechado em K , $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ é um conjunto fechado em $f(K)$. De fato, seja $F \subset K$ um conjunto fechado, pela Proposição 3.16, F é compacto. Visto que f é contínua, $f(F) \subset f(K)$ é compacto, vide Teorema 4.5. Logo, pela Proposição 3.17 é fechado. Portanto, f é um homeomorfismo. ■

4.3 CONEXIDADE E CONTINUIDADE

Na seção anterior, vimos como se comportam funções contínuas em conjuntos compactos, de maneira análoga, vamos nos direcionar ao comportamento dessas funções em conjuntos conexos. O resultado primordial desta seção é o teorema a seguir, que diz que se um função contínua for definida em um conjunto conexo, sua imagem é também um conexo. Para provarmos esse teorema, vamos utilizar o lema a seguir.

Lema 4.8. *Sejam M, N espaços métricos tais que $A, B \subset N$ e $f : M \rightarrow N$ é uma função. Se $A \cap B = \emptyset$, então $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $A \cap B = \emptyset$. Suponha por absurdo que exista $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, então $x \in f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$. Com isso, segue que $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$, ou seja, $f(x) \in A \cap B$, absurdo, pois $A \cap B = \emptyset$. Portanto, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. ■

Teorema 4.9. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Sejam M, N espaços métricos e $C \subset M$ um conjunto conexo. Considere a função contínua $f : C \rightarrow f(C) \subset N$. Queremos mostrar que $f(C)$ é um conjunto conexo, então suponha que $f(C) = A \cup B$ seja uma cisão de $f(C)$. Sendo assim, temos que A e B são ambos abertos em $f(C)$ e, além disso, são disjuntos. Perceba que, pelo fato de f ser contínua, e A e B serem conjuntos abertos em $f(C)$, segue que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são ambos abertos em C . Além disso, note que, como $A \cap B = \emptyset$, pelo Lema 4.8, temos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Veja agora que, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = C$. De fato, segue diretamente da definição de imagem inversa que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset C$. Suponha que $x \in C$,

sendo assim, $f(x) \in f(C) = A \cup B$. Como $A \cap B = \emptyset$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f(x) \in A$ e $f(x) \notin B$. Como $f(x) \in A$, podemos concluir que $x \in f^{-1}(A)$. E assim, concluimos que $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = C$. Como C é um conexo, segue que C admite somente a cisão trivial. Portanto, $f^{-1}(A) = C$ e $f^{-1}(B) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = C$ e $f^{-1}(A) = \emptyset$. Se, $f^{-1}(B) = \emptyset$, temos que $B = \emptyset$, e assim, $f(C) = A \cup B$ é cisão trivial. Disto segue que $f(C)$ é conexo. Analogamente, se, $f^{-1}(A) = \emptyset$, temos que $A = \emptyset$, e assim, $f(C) = A \cup B$ é também uma cisão trivial. Concluimos assim, que a imagem de um conjunto conexo, por meio de uma função contínua é sempre um conjunto conexo. ■

Nosso próximo resultado, conhecido como *Teorema do Valor Intermediário*. Ele nos diz que, dada uma função contínua, cujo domínio é um conjunto conexo e o contradomínio é a reta real, se tivermos na imagem da função $f(x) < f(y)$, então para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < c < f(y)$, vai existir um elemento a no domínio da função, de modo que sua imagem será c , isto é, $c = f(a)$.

Teorema 4.10. *Sejam M um espaço métrico, $X \subset M$ conexo e f uma função contínua tal que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se $a, b \in X$ de modo que $f(a) < f(b)$, então para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < c < f(b)$, existe $x \in X$, sendo que $f(x) = c$.*

Demonstração. Primeiramente, como X é um conjunto conexo e f uma função contínua, segue pelo Teorema 4.9, que $f(X)$ é um conjunto conexo. E, ainda, perceba que, pela Proposição 3.25, $f(X) \in \mathbb{R}$ é um intervalo, o que garante a demonstração, pois dados $a, b \in X$ de modo que $f(a) < f(b)$, então $\forall c \in \mathbb{R}$, com $f(a) < c < f(b)$, como $f(a), f(b) \in f(X)$ e $f(X)$ é um intervalo, existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$ ■

Mostraremos agora que toda esfera unitária n -dimensional é um conjunto conexo.

Exemplo 4.3.1. Considere a aplicação $f : B(0,1) - \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n$, definida da seguinte forma, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Note que f é uma função contínua, visto que a norma é uma função contínua, uma vez que, pela Proposição 4.1 a função norma é contínua, a função identidade é contínua e o quociente de função contínuas é uma função contínua. E, além de f ser contínua, é sobrejetiva. De fato, seja $y \in S^n$, então existe $x \in B(0,1) - \{0\}$, de modo que $f(x) = \frac{x}{\|x\|} = y$. Pelo Exemplo 3.7.3 temos que $B(0,1) - \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto conexo. Portanto, pelo Teorema 4.9, segue que S^n é um conjunto conexo.

O resultado que trataremos a seguir, é um caso do famoso *Teorema de Borsuk-Ulam*, que garante que toda função contínua sobre uma esfera n-dimensional, mapeia um par de pontos antípodas, de modo que suas imagens, por meio da função contínua sejam iguais.

Teorema 4.11 (Teorema de Borsuk-Ulam para $n = 1$). *Seja $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $x_0 \in S^1$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.*

Demonstração. De fato, defina $\phi(x) = f(x) - f(-x), \forall x \in S^1$, temos dois casos para analisar. Primeiramente, suponha que ϕ seja nula, então $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in S^1$, o que garante a demonstração. Entretanto, suponha que ϕ não seja nula. Note que, $-\phi(-x) = -f(-x) + f(x)$, portanto, $\phi(x) = -\phi(-x)$ para todo $x \in S^1$. Como ϕ é não nula, existe um ponto $x_1 \in S^1$ tal que $\phi(x_1) \neq 0$. Tendo em vista que $\phi(x_1) = -\phi(-x_1)$, segue que $\phi(x_1)$ e $\phi(-x_1)$ têm sinais contrários. Sendo assim, sabendo que S^1 é um conjunto conexo e ϕ é uma função contínua, pelo Teorema 4.10, existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\phi(x_0) = 0$ e, assim, $f(x_0) - f(-x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = f(-x_0)$. Como queríamos demonstrar. ■

O produto cartesiano de conexos é também um conjunto conexo, e com esse resultado conseguimos mostrar rapidamente que cilindros são conjuntos conexos, dentre outros exemplos.

Proposição 4.12. *Sejam X, Y subconjuntos dos espaços métricos M e N , respectivamente. Então $X \times Y \subset M \times N$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos.*

Demonstração. Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} f &: X \times Y \rightarrow X \\ g &: X \times Y \rightarrow Y \end{aligned}$$

dadas da seguinte maneira, $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = y$. Perceba que f, g são aplicações contínuas, vide Exemplo 4.0.4. Se $X \times Y$ é um conjunto conexo, pelo Teorema 4.9 aplicado para f e g , X e Y também são.

Agora, suponha que X e Y sejam conjuntos conexos. Queremos mostrar que o cartesiano $X \times Y$ é conexo. Então, suponha que $X \times Y = A \cup B$ seja uma cisão do produto cartesiano. Além disso, suponha que $A \neq \emptyset$, e considere que $(a_1, a_2) \in A$. Perceba que os conjuntos $X \times \{a_2\}$ e $\{a_1\} \times Y$, contidos em $X \times Y$, são homeomorfos a X e Y respectivamente. De fato, basta considerar os seguintes homeomorfismos:

$$\begin{aligned} \phi &: X \times \{a_2\} \rightarrow X \text{ dada por } \phi(x, a_2) = x \\ \gamma &: \{a_1\} \times Y \rightarrow Y \text{ dada por } \gamma(a_1, y) = y. \end{aligned}$$

Podemos dizer que $X \times \{a_2\}$ e $\{a_1\} \times Y$ são homeomorfos a X e Y , respectivamente, e portanto são conexos. Como A e B são ambos abertos em $X \times Y$ e disjuntos, temos que os conjuntos $(A \cap (X \times \{a_2\}))$ e $(B \cap (X \times \{a_2\}))$ são ambos abertos em $X \times \{a_2\}$ e disjuntos. Portanto a igualdade

$$X \times \{a_2\} = (A \cap (X \times \{a_2\})) \cup (B \cap (X \times \{a_2\}))$$

é uma cisão trivial, e $X \times \{a_2\} \subset A$. De fato, pois como $(A \cap (X \times \{a_2\})) \neq \emptyset$, pois $a = (a_1, a_2)$ está nessa interseção e $X \times \{a_2\}$ é conexo, logo $(B \cap (X \times \{a_2\})) = \emptyset$. Veja que partimos da suposição que $A \neq \emptyset$. Suponha por absurdo que $B \neq \emptyset$, e considere $(b_1, b_2) \in B$. Analogamente ao parágrafo anterior, podemos concluir que

$\{b_1\} \times Y \subset B$. O contradiz a hipótese de A e B serem disjuntos, pois, assim teríamos $(b_1, a_2) \in A \cap B$. Portanto, $B = \emptyset$, logo, $X \times Y = A \cup B$ é uma cisão trivial. O que garante que $X \times Y$ é um conjunto conexo.

■

Percebe-se naturalmente que o *cilindro circular reto* é um conjunto conexo. Usando alguns resultados vistos anteriormente vamos garantir a veracidade dessa afirmação.

Exemplo 4.3.2. Vimos na Proposição 3.22 e, no Exemplo 4.3.1 que a reta \mathbb{R} e S^n são conjuntos conexos, respectivamente. Tome o *cilindro circular reto* definido da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Considere a seguinte decomposição $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Perceba que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, e além disso, $\mathcal{C} = S^1 \times \mathbb{R}$, e pela Proposição 4.12, segue que \mathcal{C} é conexo.

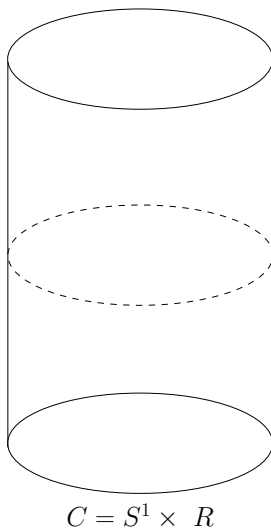


Figura 4.4 – Representação do cilindro circular reto.

4.4 CONEXIDADE POR CAMINHOS

Vimos na Proposição 3.24 que conjuntos convexos são conjuntos conexos. Ou seja, se para todo segmento de reta, cujos extremos pertencem ao conjunto, garantirmos que o segmento está totalmente contido no conjunto, diremos que o conjunto é convexo, e além disso, dizemos que o conjunto é conexo. Entretanto, existem conjuntos que não são convexos mas são conexos por caminho. Neste caso, ainda podemos garantir sua conexidade. Usaremos a ideia de *caminho*.

Considere uma aplicação contínua:

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X,$$

em que X é um espaço métrico. A imagem $\gamma([a, b]) \subset X$ é chamada de **caminho** de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados extremos de γ e, conhecidos como *ponto inicial* e *ponto final* de γ , respectivamente.

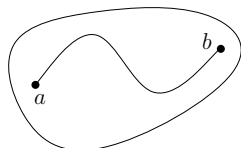


Figura 4.5 – Representação de um caminho do ponto a ao ponto b .

Definição 4.4. Seja M um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é **conexo por caminhos**, quando $\forall a, b \in X$, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$.

Segue diretamente da definição que todo conjunto convexo é um conjunto conexo por caminhos. E, com isso, todos os exemplos de conjuntos convexos, são exemplos de conjuntos conexos por caminhos. Existem conjuntos que são conexos por caminhos, mas não são convexos.

Nosso último resultado diz que todo conjunto conexo por caminhos é um conjunto conexo. Entretanto, a recíproca não é verdade.

Proposição 4.13. *Todo conjunto conexo por caminhos em um espaço métrico é um conjunto conexo.*

Demonstração. Seja M um espaço métrico. Considere o subconjunto $X \subset M$ não vazio conexo por caminhos e tome $a \in X$. Como X é conexo por caminhos, então $\forall x \in X$, existe um caminho $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$, que liga o ponto a ao ponto x . Pela Proposição 3.25, $[0, 1]$ é um conjunto conexo e, como γ_x é uma aplicação contínua por definição de caminho, segue que $\gamma_x([0, 1])$ é um conjunto conexo. Isso decorre do Teorema 4.9. Contudo, $\forall x \in X$, como $a \in \gamma_x([0, 1])$, então X pode ser visto como a seguinte união:

$$X = \bigcup_{x \in X} \gamma_x([0, 1])$$

Logo, X é igual a união de conjuntos conexos, que em particular, têm o ponto a em comum, sendo assim, pela Proposição 3.23, X é conexo. ■

Conforme comentamos anteriormente, a recíproca da Proposição 4.13 não é verdadeira. Nosso último exemplo trata de um conjunto conexo que não é conexo por caminhos.

Exemplo 4.4.1. Considere a função $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, com $x \neq 0$. E, defina o seguinte conjunto:

$$X = \text{graf}(f) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$$

Pela Proposição 3.25, todo intervalo da reta é um conjunto conexo. Pelo Exemplo 4.1.3, temos que o $\text{graf}(f)$ é também um conjunto conexo. Suponha que X não seja um conjunto conexo. Sendo assim, pela Definição 3.18, segue que X admite uma cisão além da trivial. Perceba que essa afirmação é um absurdo, pois como

f é uma função contínua, todo aberto que contenha o intervalo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ é interceptado pelo $\text{gráf}(f)$. Portanto, X é um conjunto conexo. Entretanto, X não é um conjunto conexo por caminhos, pois se a é um ponto do intervalo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ e b é um ponto sobre o gráfico de f , não há caminho em X que os conecte.

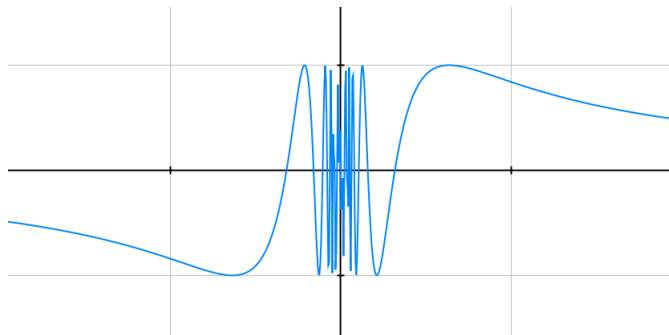


Figura 4.6 – Gráfico da função $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No transcorrer deste trabalho estudamos conceitos topológicos em espaços métricos e, como se trata de um tema muito abrangente, foi possível, através de definições como sequências, bolas e abertos, realizar mais de uma caracterização para a mesma noção, permitindo desta maneira, uma gama de interpretações para diversos conceitos e, além disso, novas visões da matemática, diferentes das intuitivamente comuns.

Dentre os temas abordados, foi proporcionado a exploração de bijeções contínuas, cujas inversas também são, definindo assim homeomorfismos e, perceber que através deste conceito existem espaços que podem ser deformados em outros.

Vale a pena ressaltar a importância que as disciplinas: Álgebra Linear, Cálculo e Introdução à Análise tiveram para a possível efetivação do tema discorrido no desenvolvimento desta monografia.

A produção deste trabalho viabilizou um contato mais aprofundado com alguns conceitos estudados na disciplina de Introdução à Análise do Curso de Licenciatura em Matemática da UFSC- Campus Blumenau. Todos os assuntos estudados neste trabalho poderão ser usados como ferramenta posteriormente para estudar diversos outros assuntos em matemática avançada.

REFERÊNCIAS

- [1] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso De Cálculo Vol. 1 - 5ª Ed. 2011*. GEN, 2011.
- [2] Elon Lages Lima. *Curso de Análise, Vol. 2*. IMPA, 2015.
- [3] Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. SBM, 2014.
- [4] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, 2013.
- [5] Ronaldo Freire de Lima. *Topologia e Análise no Espaço R^n* . SBM, 2015.