

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
MARIA EDUARDA PINHEIRO

O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Blumenau

2019

Maria Eduarda Pinheiro

O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Naiara Vergian de Paulo Costa

Coorientador: Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva

Blumenau

2019

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 22:11h do dia 4 de dezembro de 2019.

Pinheiro, Maria Eduarda

O Teorema dos quatro vértices : / Maria Eduarda Pinheiro; Orientadora, Prof. Dra. Naiara Vergian de Paulo Costa; - Blumenau, 22:11, 29 de novembro de 2019.

79 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Curvas Planas. 2. Curvatura. 3. Vértices. I. Prof. Dra. Naiara Vergian de Paulo Costa II. Curso de Licenciatura em Matemática III. O Teorema dos Quatro Vértices.

Maria Eduarda Pinheiro

O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciada em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 29 de novembro de 2019.

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Coordenador do Curso de Licenciatura em
Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Naiara Vergian de Paulo Costa
Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva
Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Bruno Tadeu Costa
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Aos que acreditam na beleza de fazer o que se ama.

AGRADECIMENTOS

Agradeço Àquele, que, na minha concepção, é causa primária de todas as coisas e nos fornece ferramentas para a construção de um mundo melhor, mais justo e fraterno.

À minha mãe Marina, por não medir esforços para que eu tivesse uma boa educação, além do amor e zelo que foram fundamentais na minha formação.

À minha orientadora, professora Naiara Vergian de Paulo Costa, por aceitar o desafio de estudar o assunto deste trabalho, e ao meu coorientador, professor Jorge Luiz Deolindo Silva por me apresentar, um pouco, da pesquisa matemática e me incentivar a seguir nesse caminho. Agradeço ambos pelas conversas e reuniões, principalmente as quais eu estava muito confusa e saía um pouco mais confiante.

Ao meu primo, Luiz Rafael, que sempre acreditou que eu seria matemática, mesmo quando nem eu mesma cogitava essa hipótese. Rafa, obrigada por todos os incentivos.

Agradeço ao corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC Blumenau, em especial ao professor André Vanderlinde, pelo excelente trabalho como coordenador de curso. Professores, a dedicação de vocês pela profissão me inspira a seguir na mesma.

Ao meu namorado, que esteve durante toda a graduação ao meu lado, dentro e fora da universidade. João, obrigada por compartilhar comigo os momentos de ansiedade, mas principalmente os de comemoração, sem teu carinho esses anos não teriam sido os mesmos.

Por fim, agradeço a todos e todas que de alguma maneira me auxiliaram durante a vida acadêmica.

“Tudo o quanto fizerdes, fazei-o de total coração.”

Colossenses 3:23

“A matemática é o alfabeto com qual Deus escreveu o Universo.”

Galileu Galilei

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma demonstração do Teorema dos Quatro Vértices. Para isso, um estudo sobre curvas planas do ponto de vista da geometria diferencial é realizado, buscando entender os principais resultados e definições, tais como o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva, apresentando alguns exemplos. Além disso, é estudado a Forma Canônica e o Teorema Fundamental das Curvas Planas e ainda duas construções para evoluta de uma curva, uma usual e outra a partir de envelopes de retas.

Palavras-chaves: Curvas Planas. Curvatura. Vértice. Evoluta.

ABSTRACT

In this work a proof of the Four Vertex Theorem is presented. In order to achieve that objective it was necessary to study plane curves from the point of view of differential geometry, seeking to understand the main results and definitions, such as the Frenet frame and the curvature of a curve, with some examples. Besides, the Canonical Form and the Fundamental Theorem of Plane Curves were studied, as well as two constructions for the evolute of a curve, one usual and the other from line envelopes.

Keywords: Plane Curves. Curvature. Vertex. Evolute.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	CURVAS PLANAS	19
2.1	CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL	19
2.2	MUDANÇA DE PARÂMETRO E COMPRIMENTO DE ARCO	24
2.3	FÓRMULAS DE FRENET	31
3	TEOREMA FUNDAMENTAL E FORMA CANÔNICA DAS CURVAS PLANAS	39
3.1	TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS	39
3.2	FORMA CANÔNICA LOCAL PARA CURVAS PLANAS	44
4	EVOLUTA DE UMA CURVA	53
4.1	UMA CONSTRUÇÃO USUAL	53
4.2	ENVELOPE DE UMA CURVA	58
5	O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES	65
5.1	CURVAS FECHADAS E CONVEXAS	65
5.2	O VÉRTICE DE UMA CURVA	66
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

A *Geometria Diferencial* é uma subárea da matemática que utiliza técnicas do Cálculo Diferencial, da Álgebra Linear e Multilinear para estudar problemas da geometria. A Geometria Diferencial surgiu e foi se desenvolvendo com o estudo de curvas e superfícies e, de certa forma, respondeu perguntas intrigantes que existiam no cálculo diferencial. Embora o cálculo diferencial responda algumas questões físicas conhecidas como as Leis de Newton, ela não é capaz de responder questões, por exemplo, da Teoria da Relatividade, sendo sanadas somente com o desenvolvimento da geometria diferencial. Hoje a Geometria Diferencial é uma ferramenta essencial para modelagem de problemas em várias áreas, como biologia, física e engenharias.

Neste trabalho estudamos a Geometria Diferencial das curvas planas, com o objetivo de demonstrar o Teorema dos Quatro Vértices. A motivação para estudar este assunto, em especial o teorema, decorre de uma iniciação científica realizada com o professor Jorge durante 2018 e 2019 e conversas sobre as singularidades da curvatura.

O Teorema dos Quatro Vértices afirma que toda curva plana parametrizada regular, fechada e simples, possui, pelo menos, quatro pontos críticos da curvatura (os vértices da curva). Neste trabalho vamos demonstrar esse resultado para curvas convexas.

Uma curva plana regular, como o nome sugere, é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com I um subintervalo da reta real \mathbb{R} tal que as derivadas de todas as ordens existem e são contínuas, com a derivada de primeira ordem diferente do vetor nulo. Essas informações nos permitem criar para α um referencial ortonormal em \mathbb{R}^2 que chamamos referencial de Frenet, o qual nos fornece a curvatura da curva. De maneira intuitiva, a curvatura nos diz o quão "curvada" a nossa curva está, isto é, o quanto ela se desvia de uma reta.

Neste contexto, os Capítulos 2 e 3 deste Trabalho de Conclusão de Curso foram baseados nas obras [6, 10]. No Capítulo 2

apresentamos os conceitos básicos de uma curva em \mathbb{R}^2 bem como o referencial de Frenet, apresentando a definição de curvatura. No Capítulo 3 demonstramos o teorema fundamental das curvas planas, que garante que a curvatura determina uma curva única, a não ser por um movimento rígido. Além disso, exibimos a forma canônica de uma curva plana.

Já o Capítulo 4 foi baseado em [10, 8], nele trabalhamos a evoluta de uma curva de maneira usual e através de envelopes de retas, além disso, demonstramos que um vértice corresponde a uma cúspide (ponto em que a evoluta $E(s)$ da curva α admite ponto crítico). Por fim, no Capítulo 5, baseado em [2, 5, 9], introduzimos o conceito de curvas fechadas convexas e vértices, para enfim demonstrarmos o principal teorema do nosso trabalho, o teorema dos quatro vértices.

Algumas das figuras presentes no trabalho foram encontradas em [8], [9] e [10] enquanto outras foram feitas com o auxílio dos softwares Inkscape e Ipe.

2 CURVAS PLANAS

Na Geometria Diferencial estudamos curvas nos espaços euclidianos. Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados de curvas no \mathbb{R}^2 , em especial a fórmula de Frenet, a definição de curvatura de curvas em \mathbb{R}^2 , bem como sua interpretação são apresentadas. É importante ressaltar que para esse trabalho necessitamos apenas do estudo das curvas em \mathbb{R}^2 , mas existem as curvas diferenciáveis em \mathbb{R}^3 e seu estudo pode ser visto em [10].

2.1 CURVA PARAMETRIZADA DIFERENCIÁVEL

Descrevemos uma curva através das coordenadas de seus pontos, que são dadas por funções de uma variável independentes, da seguinte maneira:

Definição 2.1. Uma *curva parametrizada diferenciável* no plano é uma função $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com I um intervalo em \mathbb{R} tal que para cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, em que $x(t)$ e $y(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ .¹ A variável t é o *parâmetro da curva* e o subconjunto de \mathbb{R}^2 formado pelos pontos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in I$ é o *traço da curva* denotado por $tr(\alpha)$. Ainda podemos dizer que o traço é a imagem da curva.

Em alguns momentos do trabalho, vamos utilizar a palavra curva para a curva parametrizada diferencial.

Fisicamente, conseguimos interpretar o traço da curva como a trajetória que uma partícula percorre entre os instantes a e b para todo $t \in [a, b]$. Além disso a posição $\alpha(t)$ é a posição da partícula no instante t . É possível compreender esta observação nos exemplos a seguir.

¹ Uma função f é diferenciável de classe C^∞ quando as derivadas de todas as ordens de f existem e são contínuas.

Exemplo 2.1. A aplicação α que para cada $t \in \mathbb{R}$ associa

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt),$$

sendo $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b) . Observe a Figura 2.1.

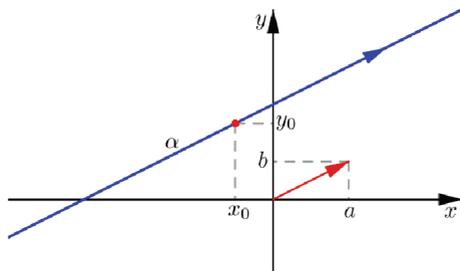


Figura 2.1 – Reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b) .

Exemplo 2.2. A função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|)$$

não é uma curva parametrizada diferenciável, pois temos que α não é diferenciável na origem. Veja a Figura 2.2.

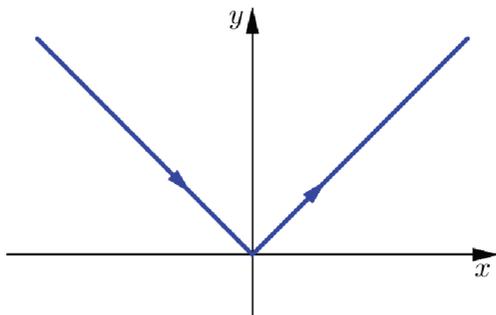


Figura 2.2 – Traço da curva α do Exemplo 2.2.

Entretanto, quando analisamos a trajetória de uma partícula nos preocupamos também com a direção e o sentido em que ela

percorre a curva, por essa razão é importante que $\alpha'(t)$ seja diferente de zero. Por isso, definimos pontos singulares e curvas regulares.

Definição 2.2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável. Um ponto $t \in I$ é *singular* quando $\alpha'(t) = (0, 0)$.

Definição 2.3. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *regular* se $\alpha'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$, ou seja, se α não possui pontos singulares. No caso em que α é regular, o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado de *vetor tangente* à curva α em $t \in I$.

Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 2.3. A função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + (a, b),$$

em que $r > 0$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Veja o traço da curva na Figura 2.3.

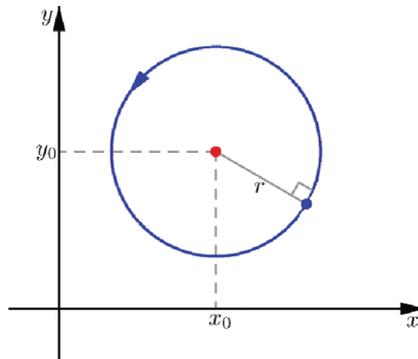


Figura 2.3 – Traço de α do Exemplo 2.3.

Exemplo 2.4. A curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2)$$

é diferenciável mas não é regular, pois $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = (0, 0)$ para $t = 0$, ou seja, $t = 0$ é singular. Veja o traço da curva na Figura 2.4.

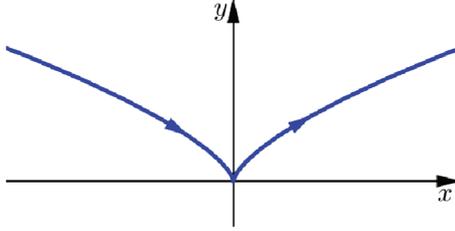


Figura 2.4 – Traço de α do Exemplo 2.4

Além disso, também é importante saber se a trajetória é simples ou não.

Definição 2.4. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *simples* quando α é injetora, isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$, $\forall t_1, t_2 \in I$.

Exemplo 2.5. Note que a circunferência, apresentada no Exemplo 2.3, $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + (a, b)$, não é simples pois seu traço se repete a cada período de 2π .

Exemplo 2.6. Considere a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (\cos(t)(2 \cos(t) - 1), \sin(t)(2 \cos(t) - 1)).$$

Sendo

$$\alpha'(t) = (\sin(t) - 4 \cos(t) \sin(t), -\cos(t) + 2(\cos^2(t) - \sin^2(t))),$$

temos que $\alpha'(t) = (0, 0)$ se, e somente se, $\sin(t) = 0$ ou $\cos(t) = \frac{1}{4}$.

Entretanto,

1. se $\sin(t) = 0$ temos que, pelo Teorema Fundamental da Trigonometria, $\cos(t) = \pm 1$. Se $\cos(t) = 1$, então $-\cos(t) + 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 1$; Se $\cos(t) = -1$, então $-\cos(t) + 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = 3$.

2. Se $\cos(t) = \frac{1}{4}$, $\sin(t) = \pm \sqrt{\frac{15}{16}}$, implicando que $-\cos(t) + 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) = -2$.

Assim, não existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = (0, 0)$. Logo α é uma

curva regular. Além disso, não é simples pois

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)\right) = (0, 0)$$

e

$$\alpha\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right), \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)\right) = (0, 0)$$

Observe a Figura 2.5.

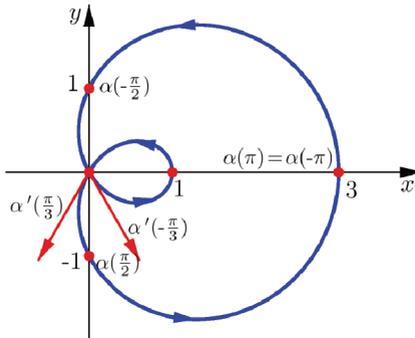


Figura 2.5 – Traço da curva α no Exemplo 2.6

Exemplo 2.7 (Cicloide). *Seja C um círculo de raio $a > 0$ que rola sobre o eixo O_x . Fixando um ponto p desse círculo obtemos a curva chamada cicloide. Suponha que para $t = 0$, p esteja na origem do sistema de coordenadas. Dessa maneira, sendo at o comprimento de segmento de arco pQ_t tal que $Q_t = C_t \cap O_x$ em que C_t é o círculo após rolar sobre O_x de um ângulo t no sentido horário, temos que a curva*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (at - a \operatorname{sen}(t), a - a \cos(t)) \end{aligned}$$

descreve a trajetória do ponto p quando o círculo C rola sobre o eixo O_x . Observe a Figura 2.6.

Ao derivar obtemos $\alpha'(t) = (a - a \cos(t), a \operatorname{sen}(t))$, portanto $\alpha'(t) = (0, 0)$ se, e somente se, $\cos(t) = 1$ e $\operatorname{sen}(t) = 0$, ou seja os pontos $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos singulares e portanto a curva não é regular. Além disso, a curva é simples. De fato, considere s e $t \in \mathbb{R}$

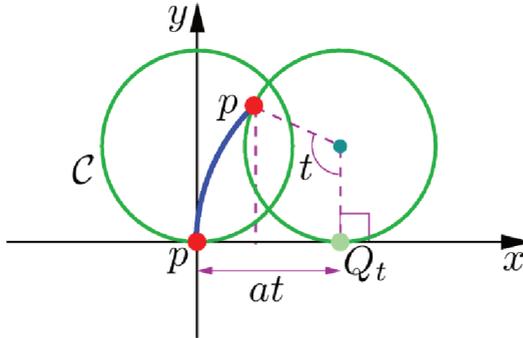


Figura 2.6 – Cicloide

tais que $\alpha(t) = \alpha(s)$, isto é,

$$x(t) = at - a \operatorname{sen}(t) = as - a \operatorname{sen}(s) = x(s) \quad (2.1)$$

e

$$y(t) = a - \cos(t) = a - a \cos(s) = y(s). \quad (2.2)$$

Da Equação (2.1) temos que

$$t - \operatorname{sen}(t) = s - \operatorname{sen}(s). \quad (2.3)$$

Definindo $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$, temos que $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ e $f'(x) = 1 - \cos(x) = 0$ se e somente se $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Assim f é estritamente crescente e portanto injetora. Note que a Equação (2.3) é equivalente a $f(t) = f(s)$ e pela injetividade de f concluímos que $t = s$ e portanto a cicloide é uma curva simples.

Veja Figura 2.7.

2.2 MUDANÇA DE PARÂMETRO E COMPRIMENTO DE ARCO

Duas curvas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. Por exemplo, para as curvas $\alpha(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2)$, $s \in \mathbb{R}$, o traço é a reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2)$.

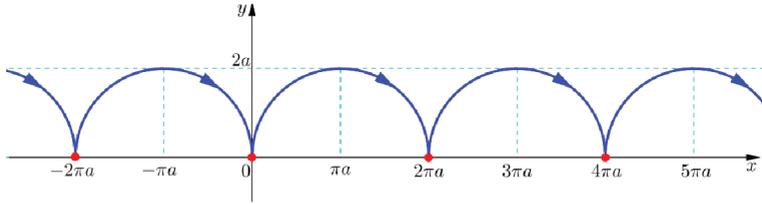


Figura 2.7 – Traço da Cicloide

Matematicamente, podemos explicar esse fato da seguinte maneira.

Proposição 2.1. *Sejam I e J intervalos abertos da reta, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ tal que $h(J) = I$ e $h'(s) \neq 0 \forall s \in J$. Então a aplicação $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular que tem o mesmo traço de α .*

Demonstração. Como α e h são de classes C^∞ temos que $\alpha \circ h$ é de classe C^∞ com $(\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s) \neq (0, 0)$, pois $h'(s) \neq 0$ e $\alpha'(h(s)) \neq (0, 0)$ para todo $s \in J$. Além disso,

$$tr(\beta) = tr(\alpha \circ h) = (\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I) = tr(\alpha).$$

A curva $\beta = \alpha \circ h$ é chamada de uma *reparametrização* de α por h e a função h é dita *mudança de parâmetro*. ■

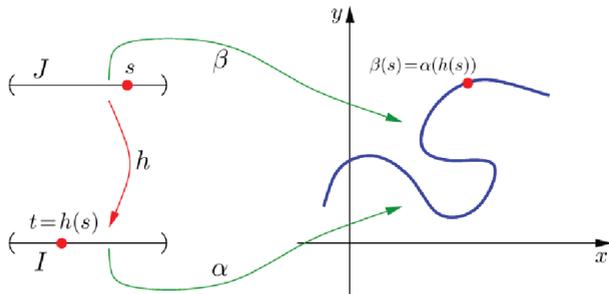


Figura 2.8 – Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem.

Quando observamos o caminho de uma cidade A para outra cidade B e o caminho inverso, temos a mesma curva, entretanto

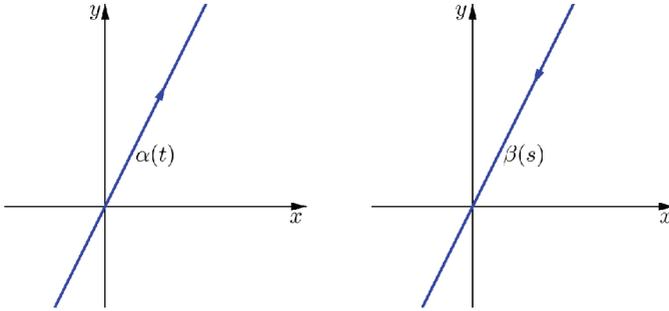


Figura 2.9 – Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem, mas as orientações não.

com sentidos opostos. O que nos motiva a nos preocuparmos com a orientação da curva.

Observação 2.1. *A orientação de uma curva plana α é o sentido de percurso do traço de α .*

Observação 2.2. *Seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização da curva α . Então β e α têm a mesma orientação se $h'(s) > 0$, para todo $s \in J$. As curvas β e α têm orientações opostas se $h'(s) < 0$, para todo $s \in J$. Observe Figura 2.9.*

Exemplo 2.8. *As curvas apresentadas no começo da seção, $\alpha(t) = (t, 2t)$ e $\beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2)$, com $t \in \mathbb{R}$ possuem orientações opostas, pois a mudança de parâmetro $h(s) = -2s + 1$ tem $h'(s) = -2$, para todo $s \in J = \mathbb{R}$.*

Também é interessante saber o “tamanho” da nossa trajetória. Para isso vamos introduzir o conceito de comprimento de arco. Considere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $I = [a, b]$, e uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de I . Ligando de maneira retilínea os pontos $\alpha(t_0), \alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)$ obtemos uma linha poligonal inscrita à curva entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_n)$, como se pode observar na Figura 2.10. Considerando todas as poligonais possíveis entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_n)$ e sendo α diferenciável regular, é possível verificar que existe o limite superior do conjunto dessas linhas poligonais, que é igual ao comprimento de arco. Para maiores detalhes veja [4] para uma construção usual.

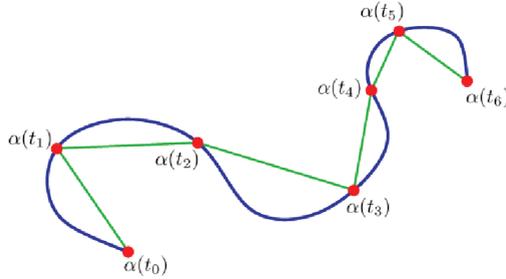


Figura 2.10 – Linha poligonal inscrita entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t_6)$.

Definição 2.5. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada diferenciável regular, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| ds,$$

é chamada *função comprimento de arco da curva α a partir de t_0* , em que $t_0 \in I$. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$$

para todo $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. Ou seja, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Porém, existe outra maneira de garantir que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Da seguinte forma:

Proposição 2.2. *Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está reparametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.*

Demonstração. Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento de arco de α a partir de t_0 . Assim,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon = t - t_0, \text{ se } t \geq t_0,$$

e

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon = - \int_t^{t_0} \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon = -(t_0 - t) = t - t_0, \text{ se } t \leq t_0,$$

isto é, $s(t) = t - t_0 \forall t_0 \in I$. Logo $s'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.

Reciprocamente, se $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I, \int_{t_0}^t \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon = t - t_0$ e está demonstrado. ■

Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 2.9. *Sejam $\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + (a, b)$ a curva do Exemplo 2.3 e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $h(s) = \frac{s}{r}$. Então $\beta = \alpha \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$\beta(s) = \left(r \cos \left(\frac{s}{r} \right) + a, r \sin \left(\frac{s}{r} \right) + b \right)$$

é uma reparametrização de α que tem a mesma orientação que α , pois $h'(s) = \frac{1}{r} > 0$. Além disso, $\beta(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\|\beta'(s)\| = \left\| \left(-r \sin \left(\frac{s}{r} \right) \frac{1}{r}, r \cos \left(\frac{s}{r} \right) \frac{1}{r} \right) \right\| = \sin^2 \left(\frac{s}{r} \right) + \cos^2 \left(\frac{s}{r} \right) = 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Como toda curva admite várias reparametrizações, é natural se questionar se é possível que exista uma reparametrização parametrizada pelo comprimento de arco. A resposta e a demonstração vem a seguir.

Proposição 2.3. *Toda curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite uma reparametrização β , tal que β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos $s: I \rightarrow J = s(I)$, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon$, a função comprimento de arco a partir de t_0 . Como $s'(t) \neq 0, \forall t \in I$, existe $h = s^{-1}: J \rightarrow I$ uma função de classe C^∞ cuja $h'(u) = \frac{1}{s'(h(u))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|}$ para todo $u \in J$. Logo, $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\beta(u) = \alpha \circ h(u)$ é uma reparametrização de α tal que

$$\|\beta'(u)\| = \|\alpha'(h(u)) \cdot h'(u)\| = \left\| \alpha'(h(u)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(h(u))\|} \right\| = 1,$$

para todo $u \in J$. Assim β é uma reparametrização de α que está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Exemplo 2.10. Considere $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva regular dada por $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, sendo $a^2 + b^2 \neq 0$, e seja $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$. Então

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\epsilon = \sqrt{a^2 + b^2} t.$$

A função inversa de s é $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(u) = \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Logo $\beta = \alpha \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(u) = \left(a \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Observação 2.3. É importante ressaltar que a reparametrização de uma curva regular α pelo comprimento de arco não é única. De fato, seja $h_1 : J_1 \rightarrow I$ uma mudança de parâmetro tal que $\beta_1 = \alpha \circ h_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reparametrização de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ pelo comprimento de arco. Logo

$$\|\beta_1'\| = \|\alpha'(h_1(u))\| |h_1'(u)| = 1,$$

isto é,

$$|h_1'(u)| = \frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|}.$$

Logo,

$$h_1'(u) = \frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|}, \quad \forall u \in J_1, \quad (2.4)$$

ou

$$h_1'(u) = -\frac{1}{\|\alpha'(h_1(u))\|}, \quad \forall u \in J_1. \quad (2.5)$$

Agora, considere $f = h_1^{-1} : I \rightarrow J_1$, temos que f é de classe C^∞ , pois a mudança de parâmetro h_1 o é, e $f'(t) = \frac{1}{h_1'(f(t))}$. Pela Equação (2.4)

$$f'(t) = \|\alpha'(h_1(f(t)))\| = \|\alpha'(t)\| = s'(t), \quad \forall t \in I,$$

ou, pela Equação (2.5)

$$f'(t) = -\|\alpha'(h_1(f(t)))\| = -\|\alpha'(t)\| = -s'(t), \quad \forall t \in I,$$

em que $s(t)$ é a função comprimento de arco da Definição 2.5 Isto é, $f(t) = s(t) + M$, $\forall t \in I$ ou $f(t) = -s(t) + M$, $\forall t \in I$, com M uma constante. Considere $h = s^{-1} : J_1 \rightarrow I$. Então, se:

1. $f(t) = s(t) + M, \forall t \in I$, obtemos $h_1(u) = h(u - M)$ para todo $u \in J_1$, pois $f = h_1^{-1}$ e

$$f(h(u - M)) = s(h(u - M)) + M = u - M + M = u, \quad \forall u \in J_1.$$

2. $f(t) = -s(t) + M, \forall t \in I$, obtemos $h_1(u) = h(-u + M)$ para todo $u \in J_1$, pois $f = h_1^{-1}$ e

$$f(h(-u + M)) = -s(h(-u + M)) + M = -(-u + M) + M = u,$$

para todo $u \in J_1$. Dessa maneira, qualquer mudança de parâmetro $h_1 : J_1 \rightarrow I$ tal que $\beta_1 = \alpha \circ h_1$ está parametrizada pelo comprimento de arco, é da forma

$$h_1(u) = h(\pm u + M),$$

com $h = s^{-1}$, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\epsilon)\| d\epsilon$, $t_0 \in I$ e M uma constante.

Agora vamos exemplificar a observação acima.

Exemplo 2.11. Considere a curva do Exemplo 2.3,

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + (a, b)$$

que descreve a circunferência. No Exemplo 2.9 vimos que a aplicação $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\beta(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right) + a, r \sin\left(\frac{s}{r}\right) + b \right)$$

é uma reparametrização de α . Entretanto, se considerarmos a aplicação $\gamma_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma_M(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r} + M\right) + a, r \sin\left(\frac{s}{r} + M\right) + b \right),$$

com $M, s \in \mathbb{R}$ e M constante temos que

$$\begin{aligned} \|\gamma'_M(s)\|^2 &= \left\| \left(-r \operatorname{sen} \left(\frac{s}{r} + M \right) \frac{1}{r}, r \cos \left(\frac{s}{r} + M \right) \frac{1}{r} \right) \right\|^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{s}{r} + M \right) + \cos^2 \left(\frac{s}{r} + M \right) = 1, \end{aligned}$$

para todo $M, s \in \mathbb{R}$, isto é, para todo M fixo, existe a parametrização γ_M que descreve a circunferência e está parametrizada pelo comprimento de arco.

Para os próximos capítulos, consideramos que todas as curvas são regulares e parametrizadas pelo comprimento de arco, a menos que seja dito o contrário.

2.3 FÓRMULAS DE FRENET

Como estamos trabalhando em \mathbb{R}^2 é interessante estabelecermos uma base ortonormal tal que conseguimos escrever os outros vetores como combinação linear da base. Tendo em vista que a nossa curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $\forall s \in I$, está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que para cada $s \in I$, o vetor tangente, $\alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ que denotamos por $t(s)$, é um vetor unitário pois $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$, pela Proposição 2.2.

Seja $n(s)$ o vetor unitário de \mathbb{R}^2 ortogonal a $t(s)$ tal que a base ortonormal $\{t(s), n(s)\}$ tem a mesma orientação da base canônica $\{e_1, e_2\}$. Então $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, pois $\|n(s)\| = 1$, o produto interno usual, $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$ e $n(s)$ está a 90° no sentido anti-horário de $t(s)$.

Para uma interpretação geométrica, observe a Figura 2.11. Dessa maneira, qualquer vetor de \mathbb{R}^2 pode ser escrito como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$.

Como $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, derivando em relação a s em ambos os lados temos

$$\langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle t'(s), t(s) \rangle = 0,$$

ou seja, $\langle t'(s), t(s) \rangle = 0$, o que significa que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Logo, $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$, isto é, existe uma função $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal

que

$$t'(s) = \kappa(s)n(s)$$

para todo $s \in I$, a qual

$$\kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Vamos agora defini-la.

Definição 2.6. A função *curvatura* $\kappa(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ da curva $\alpha = (x(s), y(s))$, em $s \in I$, é definida por

$$\kappa(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s), \quad \forall s \in I.$$

Analogamente, como $n(s)$ é um vetor unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e é, portanto, paralelo a $t(s)$. Ademais, como $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$, temos que

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -\langle n(s), t'(s) \rangle = -\langle n(s), \kappa(s)n(s) \rangle = -\kappa(s).$$

Desse modo, definimos o Referencial de Frenet da seguinte maneira:

Definição 2.7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então o *Referencial de Frenet* $\{t(s), n(s)\}$ satisfaz:

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s)n(s), \\ n'(s) = -\kappa(s)t(s), \end{cases}$$

as quais chamamos de Fórmulas de Frenet da curva plana α .

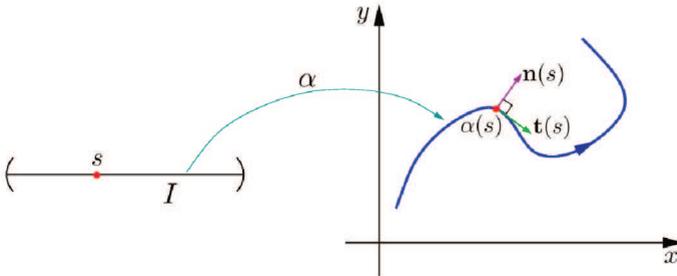


Figura 2.11 – Vetores normal e tangente à curva α em s .

A partir do vetor tangente e do vetor normal conseguimos definir as retas determinadas por eles.

Definição 2.8. A reta $r_t(s_0)$ tangente a α em s_0 passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor tangente $t(s_0)$ é dada por

$$r_t(s_0) = \{\alpha(s_0) + \lambda t(s_0) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

A reta $r_n(s_0)$ normal a α em s_0 passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor normal $n(s_0)$ é dada por

$$r_n(s_0) = \{\alpha(s_0) + \mu n(s_0) | \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 2.4. *Uma informação importante da curvatura é que ela é contínua. Com efeito, seja $\kappa(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$ a curvatura de uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como por definição de curva parametrizada diferenciável, as derivadas de todas as ordens são contínuas. Como a multiplicação e soma de funções contínuas são contínuas, segue que a curvatura $\kappa(s)$ é contínua.*

Vamos calcular a curvatura de algumas curvas nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.12. *Consideremos $\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0)$, $s \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor unitário (a, b) . Observe que, como $t(s) = \alpha'(s) = (a, b)$ é constante, segue que $t'(s) = 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Logo $\kappa(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = -0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.13. *Seja a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco*

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right) + a, r \sin\left(\frac{s}{r}\right) + b \right)$$

em que $s \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, cujo traço é o círculo de centro (a, b) e raio r . Então

$$t(s) = \alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

e

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

Assim, $\kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{r} > 0$, pois $t'(s) = \frac{1}{r}n(s)$, o que significa que α tem curvatura constante igual a $\frac{1}{r}$. Veja a Figura 2.12.

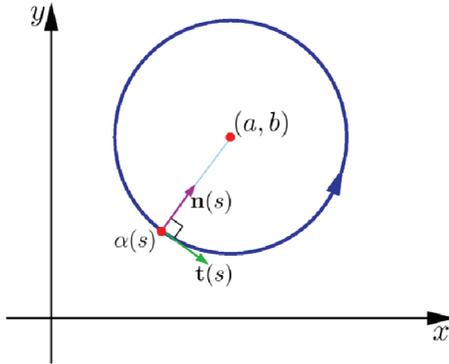


Figura 2.12 – Vetores normal e tangente ao círculo de α em s .

Pelos valores de curvatura que encontramos nestes dois exemplos podemos interpretar intuitivamente a curvatura. Note que a reta, por ser uma reta, não é “curvada” e possui $\kappa(s) = 0$, enquanto a circunferência é “curvada” igualmente em todos os pontos e possui sua curvatura $\kappa(s)$ constante. Em vista disso, podemos dizer que a curvatura $\kappa(s)$ de uma curva nos diz o quão “curvada” ela está nesse ponto.

Vamos demonstrar essa interpretação na seguinte observação.

Observação 2.5 (Interpretação geométrica da curvatura e do seu sinal). *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $s_0 \in I$ tais que $\kappa(s_0) \neq 0$, ou seja, $t'(s_0) \neq 0$.*

Podemos interpretar $\kappa(s)$ geometricamente, isto é, $\kappa(s)$ indica a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção numa vizinhança de s .

Sejam $s_0 \in I$ e $\phi : (-h + s_0, h + s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ a função de classe C^∞ que determina o ângulo entre os vetores $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0 + h)$, isto

é,

$$\alpha'(s_0 + h) = (\cos(\phi(h) + \theta_0), \text{sen}(\phi(h) + \theta_0))$$

em que $\phi(0) = 0$ e $\alpha'(s_0) = (\cos \theta_0, \text{sen} \theta_0)$, note que $\phi'(s_0)$ determina a velocidade com que o ângulo varia no ponto s_0 . Então,

$$n(s_0 + h) = (-\text{sen}(\phi(h) + \theta_0), \cos(\phi(h) + \theta_0))$$

e

$$t'(s_0 + h) = \phi'(h)(-\text{sen}(\phi(h) + \theta_0), \cos(\phi(h) + \theta_0)) = \phi'(h)n(s_0 + h)$$

Logo,

$$\kappa(s_0) = \langle t'(s_0), n(s_0) \rangle = \phi'(s_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(s_0 + h) - \phi(s_0)}{h}$$

Além disso, sabemos que $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0)n(s_0)$. Assim:

1. $\kappa(s_0) > 0$ se, e somente se $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ têm o mesmo sentido;
2. $\kappa(s_0) < 0$, se, e somente se $\alpha''(s_0)$ e $n(s_0)$ possuem sentidos opostos. Observe a Figura 2.13.

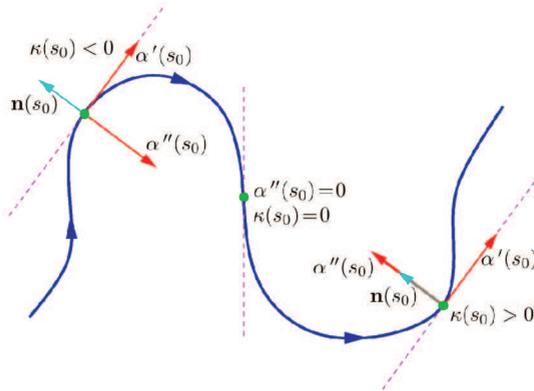


Figura 2.13 – Variação do sinal da curvatura

Não é necessário parametrizar uma curva pelo comprimento de arco para então calcular seu vetor tangente, vetor normal e sua

curvatura, o que facilita bastante os cálculos. A demonstração vem a seguir.

Proposição 2.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(r) = (x(r), y(r))$ uma curva regular, então*

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}} \\ n(r) &= \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}} \\ \kappa(r) &= \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma reparametrização de α pelo comprimento de arco em que $h = s^{-1} : J \rightarrow I$ e $s : I \rightarrow J$ é a função comprimento de arco a partir de $r_0 \in I$. Sendo $\beta(s(r)) = \alpha(r)$, obtemos $\beta'(s(r))s'(r) = \alpha'(r)$ e, assim,

$$\beta''(s(r))s'(r)^2 + \beta'(s(r))s''(r) = \alpha''(r), \quad (2.6)$$

em que $s'(r) = \|\alpha'(r)\|$ e $s''(r) = \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{\|\alpha'(r)\|}$. Logo, pela Equação 2.6

$$\begin{aligned} t(r) &= \frac{\alpha'(r)}{\|\alpha'(r)\|} = \beta'(s(r)) \frac{s'(r)}{s'(r)} = \beta'(s(r)) \\ &= t_\beta(s(r)) = \frac{\alpha'(r)}{s'(r)} = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}, \end{aligned}$$

e

$$n(r) = n_\beta(s(r)) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}}.$$

Então, como $\kappa_\beta(s(r)) = \langle \beta''(s(r)), n_\beta(s(r)) \rangle$, temos:

$$\begin{aligned} \kappa(r) &= \kappa_\beta(s(r)) = \frac{\langle \alpha''(r) - t_\beta(s(r)) \cdot s''(r), n_\beta(s(r)) \rangle}{s'(r)^2} \\ &= \frac{\langle t'(r), n(r) \rangle}{\|\alpha''(r)\|^2} = \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{\|\alpha'(r)\|^2 + \|\alpha'(r)\|^2} \\ &= \frac{(-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r))}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$



Com essa proposição encontraremos a curvatura da espiral logarítmica.

Exemplo 2.14. Consideremos a espiral logarítmica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(r) = (e^r \cos r, e^r \sen r).$$

Como $\alpha'(r) = e^r(\cos r - \sen r, \sen r + \cos r)$,

$$\begin{aligned} t'(r) &= e^r(\cos r - \sen r - \sen r, \sen r + \cos r + \cos r - \sen r) \\ &= e^r(-2 \sen r, 2 \cos r), \end{aligned}$$

temos que $\|\alpha'(r)\| = \sqrt{2}e^r$ o que implica que

$$\begin{aligned} \kappa(r) &= \frac{(2 \sen r e^r (e^r \sen r + e^r \cos r) + (e^r \cos r - e^r \sen r) 2e^r \cos r)}{(\sqrt{2}e^r)^3} \\ &= \frac{2e^{2r}}{2\sqrt{2}e^{3r}}(\sen^2 r + \sen r \cos r + \cos^2 r - \sen r \cos r) \\ &= \frac{e^{2r}}{2\sqrt{2}e^{3r}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^r}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \kappa(r) = +\infty \text{ e } \lim_{r \rightarrow \infty} \kappa(r) = 0.$$

Veja a Figura 2.14.

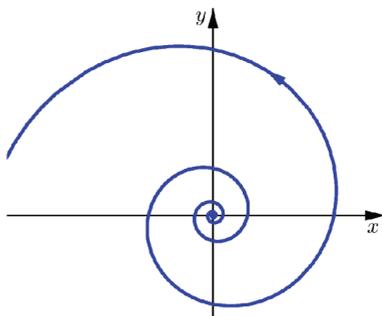


Figura 2.14 – Espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^r \cos r, e^r \sen r)$.

Com as informações obtidas neste capítulo podemos apresentar novas ideias, como o Teorema Fundamental e a Forma Canônica das curvas planas.

3 TEOREMA FUNDAMENTAL E FORMA CANÔNICA DAS CURVAS PLANAS

Neste capítulo apresentamos o Teorema Fundamental e a Forma Canônica das Curvas Planas. As informações sobre o teorema são importantes na demonstração do Teorema dos Quatro Vértices. A Forma Canônica de uma Curva Plana é utilizada para garantir que não existe nenhuma parametrização que descreva a cicloide de forma regular. Por fim a definição de círculo osculador e sua relação com a curva serão descritas.

3.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

De certa maneira, a função curvatura determina uma curva, que é única, a não ser por um movimento rígido de translação e rotação. Este resultado é tão importante que ficou conhecido como o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Antes de enunciá-lo vamos definir o que é um movimento rígido. Uma translação é o movimento que uma objeto faz, de um lugar para outro, em linha reta na mesma direção e no mesmo sentido, mais especificamente, a translação pode ser definida da seguinte forma.

Definição 3.1. Dados uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e um ponto $p = (x_1, y_1)$, a *translação* de α sobre p é aplicação $T_p \circ \alpha(s) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T_p \circ \alpha(s) = \alpha(s) + p = (x(s), y(s)) + (x_1, y_1) = (x(s) + x_1, y(s) + y_1).$$

Observe a Figura 3.1.

Ademais, dado um ângulo θ , a rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o giro que o objeto faz sob um ângulo θ .

Definição 3.2. Uma *rotação* por um ângulo θ é uma aplicação $R_\theta :$

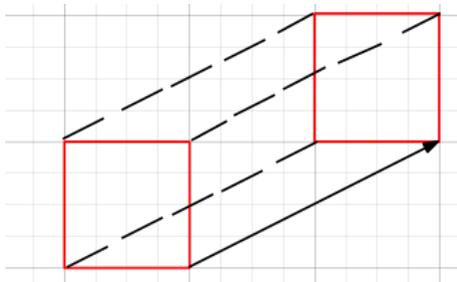
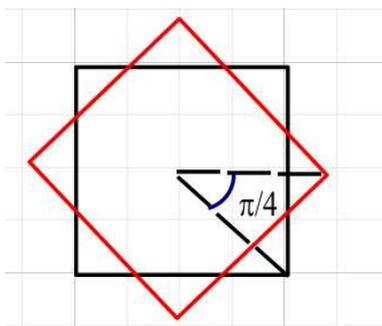


Figura 3.1 – Translação de um quadrado

Figura 3.2 – Rotação de um quadrado sob o ângulo $\frac{\pi}{4}$.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a matriz associada à rotação R_θ é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, dado uma curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, a rotação de α sob um ângulo θ é dada por

$$R_\theta \circ \alpha(s) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$$

$= (\cos \theta x(s) - \text{sen } \theta y(s), \text{sen } \theta x(s) + \cos \theta y(s))$. Observe a Figura 3.2.

Um movimento rígido é a composição de um movimento de translação e rotação.

Definição 3.3. Dada uma curva $\alpha(s)$, um *movimento rígido* é uma aplicação $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $M = T_p \circ R_\theta$ ou $M = R_\theta \circ T_p$ em que T_p é a translação de α sobre p e R_θ a rotação por um ângulo θ .

Com essas definições podemos demonstrar um resultado que é muito importante na demonstração do Teorema dos Quatro Vértices.

Proposição 3.1. *A curvatura κ_α de uma curva $\alpha(s)$ é invariante por um movimento rígido, isto é, se mantém a mesma.*

Demonstração. Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com

$$\kappa_\alpha = -x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)$$

e $\beta(s) = T_p \circ R_\theta \circ \alpha(s)$ isto é, $\beta(s) = p + R_\theta(\alpha(s))$ com $p = (x_1, y_1)$ e R_θ a rotação sob o ângulo θ . Assim,

$$\beta(s) = (x_1, y_1) + (\cos \theta x(s) - \sen \theta y(s), \sen \theta x(s) + \cos \theta y(s)).$$

Denotando $\beta(s) = (x_\beta(s), y_\beta(s))$, temos

$$\begin{aligned} x_\beta(s) &= x_1 + \cos \theta x(s) - \sen \theta y(s), \\ x'_\beta(s) &= \cos \theta x'(s) - \sen \theta y'(s), \\ x''_\beta(s) &= \cos \theta x''(s) - \sen \theta y''(s), \\ y_\beta(s) &= y_1 + \sen \theta x(s) + \cos \theta y(s), \\ y'_\beta(s) &= \sen \theta x'(s) + \cos \theta y'(s), \\ y''_\beta(s) &= \sen \theta x''(s) + \cos \theta y''(s). \end{aligned}$$

Além disso, temos que $\beta'(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco pois

$$\begin{aligned} \|\beta'(s)\| &= \|(\cos \theta x'(s) - \sen \theta y'(s), \sen \theta x'(s) + \cos \theta y'(s))\| \\ &= (\cos \theta x'(s) - \sen \theta y'(s))^2 \\ &\quad + (\sen \theta x'(s) + \cos \theta y'(s))^2 \\ &= \cos^2 \theta (x'(s))^2 \\ &\quad - 2(\cos \theta x'(s) \sen \theta y'(s) + \sen^2 \theta (y'(s))^2 \\ &\quad + \sen^2 \theta (x'(s))^2 + 2(\sen \theta y'(s) \cos \theta x'(s) \\ &\quad + \cos^2 \theta (y'(s))^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

pois $\alpha(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \kappa_\beta(s) &= -x''_\beta(s)y'_\beta(s) + y''_\beta(s)x'_\beta(s) \\
 &= -(\cos \theta x''(s) - \operatorname{sen} \theta y''(s))(\operatorname{sen} \theta x'(s) + \cos \theta y'(s)) \\
 &\quad + (\operatorname{sen} \theta x''(s) + \cos \theta y''(s))(\cos \theta x'(s) - \operatorname{sen} \theta y'(s)) \\
 &= -\cos \theta \operatorname{sen} \theta x''(s)x'(s) - \cos^2 \theta x''(s)y'(s) \\
 &\quad + \operatorname{sen}^2 \theta x'(s)y''(s) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta y''(s)y'(s) \\
 &\quad + \operatorname{sen} \theta \cos \theta x''(s)x'(s) - \operatorname{sen}^2 \theta x''(s)y'(s) \\
 &\quad + \cos^2 \theta y''(s)x'(s) - \cos \theta \operatorname{sen} \theta y''(s)y'(s) \\
 &= -x''(s)y'(s)[\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta] \\
 &\quad + y''(s)x'(s)[\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta] \\
 &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \kappa_\alpha(s).
 \end{aligned}$$

■

Agora vamos demonstrar o teorema que dá o nome a esta seção.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental das Curvas Planas).

1. Dada uma função diferenciável $\kappa(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$, $\forall s \in I$ em que $\kappa_\alpha(s)$ denota a curvatura da curva α .
2. A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é única quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, em que v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .
3. Se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco têm a mesma curvatura, então diferem por um movimento rígido, isto é, existe uma rotação R e uma translação T em \mathbb{R}^2 tais que

$$\beta(s) = (T \circ R) \circ \alpha(s),$$

para todo $s \in I$.

Demonstração. 1. Dada uma função diferenciável $\kappa(s)$, considere $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\epsilon) d(\epsilon)$, em que $s_0 \in I$ é fixo. Fixemos um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(s) =$

$(x(s), y(s))$, em que

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(r) + \lambda) dr \text{ e}$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(r) + \lambda) dr$$

Vamos verificar se a curva está parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\begin{aligned} t(s) &= (x'(s), y'(s)) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \text{sen}(\theta(s) + \lambda)), \\ t'(s) &= (x''(s), y''(s)) \\ &= (-\text{sen}(\theta(s) + \lambda)\theta'(s), \cos(\theta(s) + \lambda)\theta'(s)) \end{aligned}$$

o que implica que $\|t(s)\| = 1$. Além disso,

$$n(s) = (-\text{sen}(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)).$$

Assim, a curvatura de α é dada por

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle &= \text{sen}^2(\theta(s) + \lambda)\theta'(s) + \cos^2(\theta(s) + \lambda)\theta'(s) \\ &= \theta'(s) = \kappa(s), \end{aligned}$$

pela Observação 2.5.

2. Sejam $\kappa(s)$ uma função diferenciável e $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular com $\|t(s)\| = 1$ e curvatura $k(s)$. Pelas equações de Frenet, temos $t'(s) = \kappa(s)n(s)$, ou seja, $(x'', y'') = \kappa(-y', x')$ isto é, $(x(s), y(s))$ satisfazem

$$x'' = -\kappa y' \text{ e } y'' = \kappa x'$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de sistemas de EDO's, que pode ser visto em [3], fixada uma condição inicial $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ temos que a curva α é única.

3. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco tais que $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s)$. Pelo fato de serem parametrizadas pelo comprimento de arco existem funções $\theta, \bar{\theta} : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis tais que

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (\cos \theta(s), \text{sen} \theta(s)), \\ \beta'(s) &= (\cos \bar{\theta}(s), \text{sen} \bar{\theta}(s)), \\ \theta'(s) &= \bar{\theta}'(s) = \kappa(s) \end{aligned}$$

para todo $s \in I$. Logo, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\theta} = \theta + c_0$. Então sendo $\alpha(s_0) = p_0 = (x_0, y_0)$ e $\beta(s_0) = p_1 = (x_1, y_1)$ temos:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \left(x_0 + \int_{s_0}^s \cos \theta(\epsilon) d\epsilon, y_0 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \theta(\epsilon) d\epsilon \right) \\ \beta(s) &= \left(x_1 + \int_{s_0}^s \cos \bar{\theta}(\epsilon) d\epsilon, y_1 + \int_{s_0}^s \operatorname{sen} \bar{\theta}(\epsilon) d\epsilon \right) \\ &= \left(x_1 + \int_{s_0}^s \cos(c_0) \cos(\theta(\epsilon)) - \operatorname{sen}(c_0) \operatorname{sen}(\theta(\epsilon)) d\epsilon, \right. \\ &\quad \left. (y_1 + \int_{s_0}^s \cos(c_0) \operatorname{sen}(\theta(\epsilon)) + \operatorname{sen}(c_0) \cos(\theta(\epsilon)) d\epsilon) \right)\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}\beta(s) &= p_1 + (\cos(c_0)(x(s) - x_0) - \operatorname{sen}(c_0)(y(s) - y_0), \\ &\quad \cos(c_0)(y(s) - y_0) + \operatorname{sen}(c_0)(x(s) - x_0))\end{aligned}$$

Logo

$\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s) - p_0)$ em que $R_{c_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a rotação positiva do ângulo c_0 em torno da origem, cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} \cos c_0 & -\operatorname{sen} c_0 \\ \operatorname{sen} c_0 & \cos c_0 \end{bmatrix}$$

Portanto $\beta(s) = p_1 + R_{c_0}(\alpha(s)) - R_{c_0}(p_0) = T_a \circ R_{c_0}(\alpha(s))$ para todo $s \in I$, em que $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a translação dada por $T_a(p) = p + a$ com $a = p_1 - R_{c_0}(p_0)$.

■

3.2 FORMA CANÔNICA LOCAL PARA CURVAS PLANAS

Como estabelecemos, uma curva plana é de classe C^∞ , e portanto, pode ser calculada através da fórmula de Taylor, nos trazendo resultados e conceitos interessantes, por conta do Referencial de Frenet.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Pela fórmula de Taylor na vizinhança de um ponto, ao fixar um ponto $s_0 \in I$ obtemos:

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \alpha'(s_0)(s - s_0) + \frac{\alpha''(s_0)(s - s_0)^2}{2!}$$

$$+ \alpha'''(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R(s), \quad (3.1)$$

em que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R(s)}{(s - s_0)^3} = 0$. Além disso, pelo Referencial de Frenet, $t'(s_0) = \kappa(s_0)n(s_0)$ e $n'(s_0) = -\kappa(s_0)t(s_0)$. Assim, substituindo em (3.1), encontramos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + t(s_0)(s - s_0) + \kappa(s_0)n(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2!} \\ &+ (\kappa'(s_0)n(s_0) - \kappa(s_0)^2 t(s_0)) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R(s). \end{aligned}$$

Considerando

$$\bar{x}(s) = (s - s_0) - \kappa(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_t(s), \quad (3.2)$$

$$\bar{y}(s) = \kappa(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2!} + \kappa'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_n(s), \quad (3.3)$$

com $R_t(s) = \langle R(s), t(s_0) \rangle$ e $R_n(s) = \langle R(s), n(s_0) \rangle$ obtemos a expressão

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \bar{x}(s)t(s_0) + \bar{y}(s)n(s_0)$$

que é chamada *forma canônica local da curva α em s_0* .

A forma canônica local da curva nos fornece algumas informações interessantes com relação à curva na vizinhança do ponto s_0 . A primeira diz respeito ao sinal da curvatura perto desse ponto.

Observação 3.1. *Note que*

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{x}(s)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} 1 - \frac{\kappa(s_0)^2 (s - s_0)^2}{3!} = 1$$

e

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{y}(s)}{(s - s_0)^2} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\kappa(s_0)}{2} + \frac{\kappa'(s_0)(s - s_0)}{6} = \frac{\kappa(s_0)}{2},$$

pois $\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) = 0$. Assim existe um $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0) \cup (s_0, s_0 + \delta)$ então \bar{x} e $(s - s_0)$ têm o mesmo sinal, $\bar{y} > 0$ se $\kappa(s_0) > 0$ e $\bar{y} < 0$ se $\kappa(s_0) < 0$. Observe a Figura 3.3.

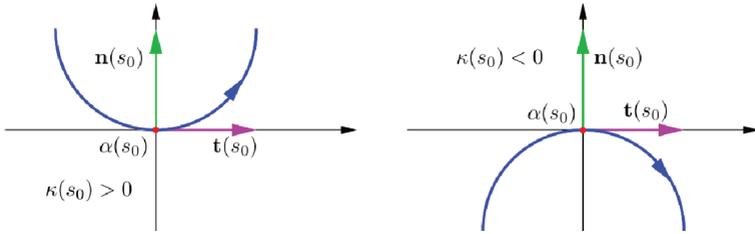


Figura 3.3 – Implicação de forma canônica local de uma curva

Agora, com o auxílio da forma canônica vamos provar que não existe nenhuma curva regular cujo traço é a cicloide. Para isto, vamos verificar, primeiramente, que as retas tangentes à cicloide estão definidas em todos os pontos. Considere a cicloide, curva do Exemplo 2.7 definida por $\alpha(t) = (at - a \operatorname{sen}(t), a - a \operatorname{cos}(t))$. Como, $\alpha'(t) = (a - a \operatorname{cos}(t), a \operatorname{sen}(t))$ os pontos singulares dessa curva acontecem quando $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= (a - a \operatorname{cos}(t))^2 + a^2 \operatorname{sen}^2(t) \\ &= a^2 - 2a^2 \operatorname{cos}(t) + a^2 \operatorname{cos}^2(t) + a^2 \operatorname{sen}^2(t) \\ &= 2a^2 - 2a^2 \operatorname{cos}(t) = 2a^2(1 - \operatorname{cos}(t)). \end{aligned}$$

Vamos verificar o comportamento das retas tangentes a curva em pontos t próximos aos pontos singulares $t = 2k\pi$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{a(1 - \operatorname{cos}(t))}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \operatorname{cos}(t)}}, \frac{a \operatorname{sen}(t)}{a\sqrt{2}\sqrt{1 - \operatorname{cos}(t)}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{cos}(t)}}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen}(t)\sqrt{1 + \operatorname{cos}(t)}}{\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2(t)}\sqrt{2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2\pi k \pm} \left(\frac{\sqrt{1 - \operatorname{cos}(t)}}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen}(t)}{|\operatorname{sen}(t)|} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{cos}(t)}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (0, \pm 1). \end{aligned}$$

Isto é, as retas tangentes a α quando $t \mapsto 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ tendem à reta vertical $r_k : x = 2\pi k$. Observe a Figura 3.4.

Proposição 3.2. *Não existe uma curva parametrizada regular cujo traço é a cicloide.*

Demonstração. Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular, supondo sem perda de generalidade, pela Proposição 2.3, que β es-

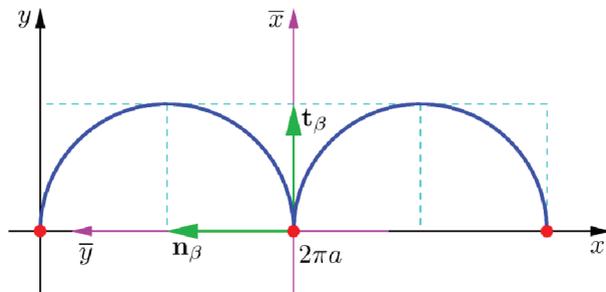


Figura 3.4 – Cicloide

tá parametrizada pelo comprimento de arco. Portanto, pela forma canônica local β em s_0 , em que $\beta(s_0) = (2k\pi a, 0)$, obtemos

$$\beta(s) = \beta(s_0) + \bar{x}(s)t_\beta(s_0) + \bar{y}(s)n_\beta(s_0),$$

em que

$$\bar{x}(s) = (s - s_0) - \kappa_\beta(s_0)^2 \frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_{\bar{x}}(s).$$

Como vimos na Observação 3.1, $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{x}(s)}{s - s_0} = 1$, logo $\bar{x}(s)$ e $(s - s_0)$ devem ter o mesmo sinal próximo a s_0 . Isto é uma contradição (veja Figura 3.4). De fato, sabemos que $\alpha'(s)$ e $\beta'(s)$ são colineares para todo $s \in \mathbb{R}$. Como vimos, as retas tangentes a α tendem a uma reta vertical quando nos aproximamos do ponto $\beta(s_0)$. Logo, a reta tangente a β em s_0 deve ser vertical. Podemos perceber que com a relação ao referencial de Frenet, $\{t_\beta, n_\beta\}$, $\bar{x}(s)$ não muda de sinal como previsto na Observação 3.1. Isso é um absurdo, logo não existe uma curva parametrizada regular cujo o traço é a cicloide. ■

A última informação desta seção está relacionada ao círculo osculador. Para isso, precisamos defini-lo e apresentar algumas implicações.

Definição 3.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) \neq 0, \forall s \in I$. O número $R(s_0) = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}$

é o raio de curvatura. Já $c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0)$ é o centro de curvatura de α em s_0 , enquanto o círculo osculador de α em s_0 é o círculo de centro $c(s_0)$ e raio $R(s_0)$.

Note que o ponto $\alpha(s_0)$ pertence ao círculo osculador de α em s_0 . De fato,

$$\|\alpha(s_0) - c(s_0)\| = \left\| \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0) \right\| = \frac{1}{|\kappa(s_0)|} = R(s_0).$$

Vamos encontrar o raio de curvatura e o centro de curvatura de uma circunferência.

Exemplo 3.1. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = \left(a + r \cos\left(\frac{r}{s}\right), b + r \sin\left(\frac{r}{s}\right)\right)$ a curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço é a circunferência de centro (a, b) e raio $r > 0$. Como vimos no Exemplo 2.13, a curvatura é $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ e o vetor normal, $n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$. Logo $R(s) = r$ e*

$$\begin{aligned} c(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) \\ &= \left(a + r \cos\frac{r}{s}, b + r \sin\frac{r}{s}\right) - r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ &= (a, b), \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, o círculo osculador de uma circunferência é a própria circunferência.

Proposição 3.3. *A curva α e o círculo osculador de α em s_0 são tangentes em $\alpha(s_0)$.*

Demonstração. A reta tangente ao círculo osculador no ponto $\alpha(s_0)$ é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ e é perpendicular ao vetor $c(s_0) - \alpha(s_0) = \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0)$. Logo, essa reta é paralela ao vetor $\alpha'(s_0)$, sendo portanto a reta tangente a α em s_0 . Observe a Figura 3.5. ■

Por fim, vamos provar que dado um ponto p , existem pontos da curva próximos a p que estão dentro do círculo osculador e outros

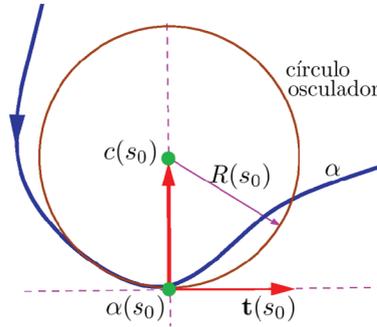


Figura 3.5 – O círculo osculador é tangente à curva em s_0

que estão fora, isto é, que a distância de alguns pontos até o centro do círculo osculador é menor que o raio de curvatura e outros que a distância é maior. Antes disso, vamos apresentar uma observação.

Observação 3.2. *Seja α uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, $t(s)$ e $n(s)$ os vetores tangentes e normais respectivamente e a, b números reais. Então $\|at + bn\|^2 = a^2 + b^2$. De fato,*

$$\begin{aligned} \|at + bn\|^2 &= \langle at + bn, at + bn \rangle = \langle at, at \rangle + 2\langle at, bn \rangle + \langle bn, bn \rangle \\ &= \|at\|^2 + 0 + \|bn\|^2 = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

pois t e n são ortonormais.

Proposição 3.4. *Seja $\alpha(s)$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Se $\kappa(s_0) \neq 0$ e $\kappa'(s_0) \neq 0$, a curva α corta o círculo osculador de α em s_0 .*

Demonstração. Note que, pela forma canônica local de α em s_0 ,

$$\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 = \left\| \alpha(s_0) + \bar{x}(s)t(s_0) + \bar{y}n(s_0) - \alpha(s_0) - \frac{n(s_0)}{\kappa(s_0)} \right\|^2.$$

Pela Observação 3.2 segue que

$$\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 = \bar{x}(s)t(s_0) + \left(\bar{y} - \frac{1}{\kappa(s_0)} \right) n(s_0) \|^2.$$

Das expressões 3.2 e 3.3 obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 &= [(s - s_0) - \frac{1}{6}\kappa(s_0)^2(s - s_0)^3 + R_t(s)]^2 \\
 &\quad + [\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{\kappa'(s_0)(s - s_0)^3}{6} + R_n(s)]^2 \\
 &= (s - s_0)^2 - \frac{1}{3}(s - s_0)^4\kappa(s_0)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{36}\kappa(s_0)^4(s - s_0)^6 + O_4(s) \\
 &\quad + \frac{1}{4}\kappa(s_0)^2(s - s_0)^4 + \frac{1}{6}\kappa(s_0)\kappa'(s_0)(s - s_0)^5 \\
 &\quad + \frac{1}{36}\kappa'(s_0)^2(s - s_0)^6 - (s - s_0)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{3}\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}(s - s_0)^3 + \frac{1}{\kappa(s_0)^2} + O_3(s),
 \end{aligned}$$

em que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{O_4(s)}{(s - s_0)^4} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{O_3(s)}{(s - s_0)^3} = 0$. Assim,

$$\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 = -\frac{1}{3}\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}(s - s_0)^3 + \frac{1}{\kappa(s_0)^2} + R_3(s),$$

com $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{R_3(s)}{(s - s_0)^3} = 0$. Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 - \frac{1}{\kappa(s_0)^2}}{(s - s_0)^3} = \frac{-1}{3} \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa(s_0)}. \quad (3.4)$$

Agora vamos analisar alguns casos:

Caso 1: Quando $\kappa'(s_0) > 0$ e $\kappa(s_0) > 0$, temos que o limite (3.4) é negativo. Logo existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0)$ temos $(s - s_0)^3 < 0$ implicando em $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Além disso, se $s \in (s_0, s_0 + \delta)$, $(s - s_0)^3 > 0$, ou seja, $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Observe a Figura 3.6.

Caso 2: Note que o limite (3.4) também é negativo quando a curvatura no ponto s_0 , $\kappa(s_0)$, e sua derivada são negativas, ou seja,

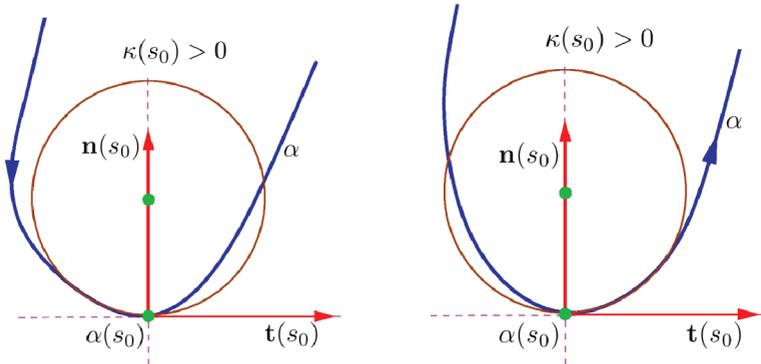


Figura 3.6 – Caso 1: $\kappa'(s_0) > 0$, $\kappa(s_0) > 0$.
 Figura 3.7 – Caso 3: $\kappa'(s_0) < 0$, $\kappa(s_0) > 0$.

existe $\delta > 0$ tal que se $s \in (s_0 - \delta, s_0)$ temos $(s - s_0)^3 < 0$ e portanto, $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Mas, se $s \in (s_0, s_0 + \delta)$, $(s - s_0)^3 > 0$, obtemos $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Observe a Figura 3.8.

Caso 3 e caso 4: Já para que limite (3.4) seja positivo é necessário que o sinal da curvatura $\kappa(s_0)$ e sua derivada tenham sinais opostos. Nos dois casos, existe um δ cujo $s \in (s_0 - \delta, s_0)$ temos $(s - s_0)^3 < 0$ e portanto, $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 < \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Entretanto, se $s \in (s_0, s_0 + \delta)$, $(s - s_0)^3 > 0$, obtemos $\|\alpha(s) - c(s_0)\|^2 > \frac{1}{\kappa(s_0)^2}$. Observe a Figura 3.7 e Figura 3.9.

Dessa maneira, provamos que dado um círculo osculador em s_0 , existem pontos da curva próximos a $\alpha(s_0)$ dentro e fora dele.

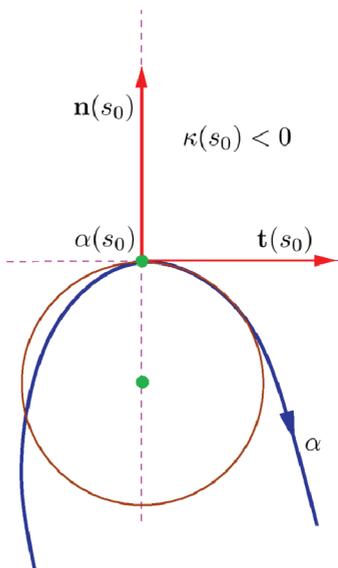
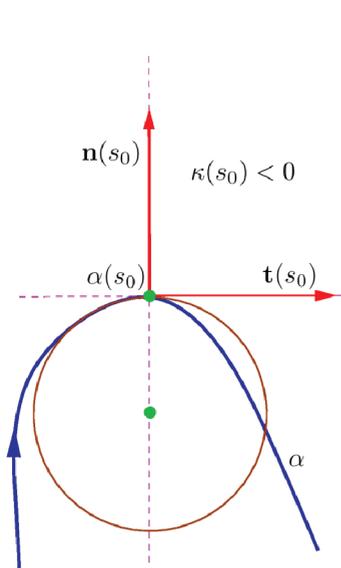


Figura 3.8 – Caso 2: $\kappa'(s_0) < 0$, $\kappa(s_0) < 0$, Figura 3.9 – Caso 4: $\kappa'(s_0) > 0$, $\kappa(s_0) < 0$

■

4 EVOLUTA DE UMA CURVA

A curvatura nos fornece algumas informações sobre a curva, em especial sobre sua evoluta. Vamos apresentar os conceitos e resultados sobre a evoluta de duas maneiras: a primeira, mais conhecida, é a construção usual, enquanto que a segunda é dada por envelopes de uma família de retas.

4.1 UMA CONSTRUÇÃO USUAL

Vamos definir o que é a evoluta de uma curva e apresentar exemplos e informações importantes.

Definição 4.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\kappa(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. Variando o parâmetro $s \in I$, o centro de curvatura $c(s)$, definido na Seção 3.2, descreve uma curva $E : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ chamada de *evoluta de α* , dada por:

$$E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s).$$

Vamos agora encontrar a evoluta da parábola e da elipse.

Exemplo 4.1. Considere $\alpha(t) = (t, t^2)$, com $t \in \mathbb{R}$ que descreve uma parábola. Sendo $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$ obtemos $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$, $y'(t) = 2t$ e $y''(t) = 2$. Dessa maneira, pela Proposição 2.4 temos que

$$n(t) = \frac{(-2t, 1)}{(1 + 4t^2)^{1/2}}; \text{ e } \kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(t) &= (t, t^2) + \frac{(-2t, 1)}{(1 + 4t^2)^{1/2}} \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{2} \\ &= (t, t^2) + (-2t, 1) \frac{1 + 4t^2}{2} \\ &= (t, t^2) + (-t - 4t^3, \frac{1}{2} + 2t^2) \\ &= (-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2). \end{aligned}$$

Observe a Figura 4.1.

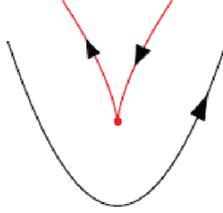


Figura 4.1 – Evoluta da Parábola

Exemplo 4.2. Seja $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$ e $b < a$. Temos que $\alpha'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$ e $\alpha''(t) = (-a \cos(t), -b \sin(t))$. Pela Proposição 2.4 obtemos

$$\kappa(t) = \frac{ab(\cos^2(t) + \sin^2(t))}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}},$$

e portanto

$$\begin{aligned} E(s) &= \left(x(t) - \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)} \right) y'(t), \right. \\ &\quad \left. y(t) + \left(\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)} \right) x'(t) \right) \\ &= \left(a \cos(t) - \frac{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} b \cos(t), \right. \\ &\quad \left. b \sin(t) - \frac{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} a \sin(t) \right) \\ &= \left(\frac{a^2 \cos(t) - a^2 \sin^2(t) \cos(t) - b^2 \cos^3(t)}{b^2 \sin(t) - a^2 \sin^3(t) - b^2 \cos^2(t) \sin(t)} \right) \\ &\quad \left. \frac{b}{b} \right) \\ &= \left(\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \right) \cos^3(t), - \left(\frac{a^2 - b^2}{b} \right) \sin^3(t) \right) \end{aligned}$$

é a evoluta de α . Veja a Figura 4.2.

Observe nas figuras do exemplo anterior que quanto mais próximo a fica de b menor é o traço da evoluta. No caso especial em que $a = b$ isto é, uma circunferência temos que a elipse é o ponto (a, b) .

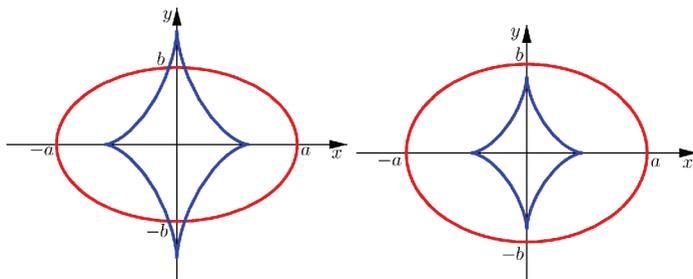


Figura 4.2 – Evolutas das elipses na esquerda $a = \sqrt{2}$ e $b = 0.9$; na direita $a = \sqrt{2}$ e $b = 1.4$.

Exemplo 4.3. *O traço da evoluta de uma circunferência é um ponto (o centro da circunferência). De fato, pelo Exemplo 2.13, $\kappa(s) = \frac{1}{r} \forall s \in I$. Assim, considerando uma parametrização da circunferência $\alpha(s) = (r \cos(\frac{s}{r}) + a, r \sin(\frac{s}{r}) + b)$ de centro (a, b) , temos que a evoluta é dada por*

$$\begin{aligned} E(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s) \\ &= \left(r \cos \frac{s}{r} + a, r \sin \frac{s}{r} + b \right) - r \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r} \right) = (a, b). \end{aligned}$$

Quando consideramos uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, os pontos $s \in I$ singulares da evoluta $E(s)$ possuem um nome especial.

Definição 4.2. Seja $E(s)$ a evoluta de uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Um ponto $s \in I$ é chamado *cúspide* da evoluta E quando $E'(s) = 0$.

Um resultado muito interessante que a evoluta nos dá e importante para a compreensão do conceito de vértice da curva é o seguinte.

Proposição 4.1. *A evoluta $E(s)$ da curva $\alpha(s)$ é regular no ponto s se, e somente se, $\kappa'(s) \neq 0$.*

Demonstração. Pela regra do quociente temos:

$$\begin{aligned} E'(s) &= t(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} n(s) + \frac{1}{k(s)} n'(s) \\ &= t(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} n(s) - \frac{\kappa(s)}{\kappa(s)} t(s) \\ &= -\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} n(s) \neq 0 \end{aligned}$$

se, e somente se, $\kappa'(s) \neq 0$, tendo em vista que $n(s)$ é um vetor unitário. ■

Note, que a função curvatura em um ponto é crítico se, e somente se, a evoluta nesse ponto é singular, ou seja, se esse ponto é uma cúspide da evoluta E .

Vamos agora calcular a cúspide de uma parábola.

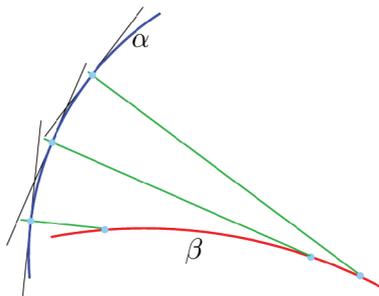
Exemplo 4.4. A parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$, com $t \in \mathbb{R}$ apresentada no Exemplo 4.1 possui evoluta $E(t) = (-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2)$, portanto $E'(t) = (-12t^2, +6t)$, implicando que $t = 0$ é uma cúspide, pois $E'(0) = (0, 0)$.

Outra informação importante é a relação existente entre as retas tangentes à evoluta $E(s)$ e as retas normais da curva α .

Proposição 4.2. A reta tangente à evoluta E no ponto s , em que $\kappa'_\alpha(s) \neq 0$, é a reta normal a α em s .

Demonstração. Como vimos na demonstração da Proposição 4.1, temos que o vetor tangente a E em s , $E'(s)$ é paralelo ao vetor $n(s)$. Ademais, como $E(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)$ pertence a reta tangente a E em s , $r_{t_E} = \{E(s) + \lambda E'(s) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, e a reta normal a α em s , $r_{n_\alpha} = \{\alpha(s) + \mu n(s) : \mu \in \mathbb{R}\}$, temos $r_{n_\alpha} = r_{t_E}$. Observe a Figura 4.3. ■

Além disso, conseguimos garantir que a evoluta é a única curva em que a propriedade acima acontece.

Figura 4.3 – Evoluta E da curva α

Proposição 4.3. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então a evoluta de α é a única curva diferenciável regular cuja a reta tangente em s é igual à reta normal a α em s .*

Demonstração. Seja $E_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva cuja reta tangente em s seja igual à reta normal a α . Então existe uma função diferenciável $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$E_1(s) = \alpha(s) + \lambda(s)n(s)$$

em que $\lambda(s) = \langle E_1(s) - \alpha(s), n(s) \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned} E_1'(s) &= t(s) + \lambda'(s)n(s) + \lambda(s)n'(s) \\ &= t(s) + \lambda'(s)n(s) - \lambda(s)\kappa(s)t(s) \\ &= (1 - \lambda(s)\kappa(s))t(s) + \lambda'(s)n(s). \end{aligned}$$

Como $E_1'(s)$ é paralelo a $n(s)$, temos que $1 - \lambda(s)\kappa(s) = 0$, ou seja, $\lambda(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$. Portanto, $E_1(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$. ■

Observe que a Figura 4.4 que mostra retas normais a uma elipse as quais são tangentes a evoluta.

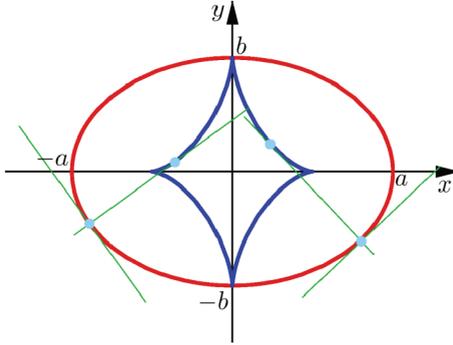


Figura 4.4 – Elipse com $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, sua evoluta e as retas normais a curva.

4.2 ENVELOPE DE UMA CURVA

Vamos agora propor outra construção para a evoluta, através de envelopes de curvas. Para isso vamos definir envelope a partir de uma família de retas.

Definição 4.3. Seja $u \in \mathbb{R}$ e $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação

$$R(x, y, u) = a(u)x + b(u)y + c(u),$$

sendo $a(u), b(u)$ e $c(u)$ funções reais C^∞ com $a(u)^2 + b(u)^2 \neq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Ao restringir o domínio de R para os pontos tais que $R(x, y, u) = 0$ obtemos, genericamente, uma superfície (vide Teorema de Sard que pode ser visto em [1]).

$$S = \{(x, y, u) : R(x, y, u) = 0\}$$

em \mathbb{R}^3 que definimos como *família de retas a um parâmetro u* .

Exemplo 4.5. Considere a aplicação $R(x, y, u) = -x + y + u^2$, a família de retas a um parâmetro é a superfície $S(x, y, u)$ definida por $x = y + u^2$, com $x, y, u \in \mathbb{R}$.

Além disso, supondo sem perda de generalidade que $b(u) \neq 0$ e isolando y em S obtemos

$$S(x, u) = \left\{ \left(x, \frac{-c(u) - a(u)x}{b(u)}, u \right) : (x, u) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Perceba que se $b(u) = 0$ então $a(u) \neq 0$ e isolariamos x . Vamos agora restringir um pouco mais o domínio de R .

Definição 4.4. O conjunto definido por

$$C(x, y, u) = \{(x, y, u) : R(x, y, u) = R_u(x, y, u) = 0\}$$

é chamado *criminante* de R .

Dessa maneira, sabemos que o criminante tem duas restrições em R . A primeira é que C é um subconjunto de S , logo

$$y = \frac{-c(u) - a(u)x}{b(u)}. \quad (4.1)$$

Além disso, ao derivar R em relação a u , substituindo o y e igualando a zero obtemos

$$R_u = a'(u)x + b'(u)\left(\frac{-c(u) - a(u)x}{b(u)}\right) + c'(u) = 0,$$

isto é,

$$\frac{b(u)a'(u)x}{b(u)} - \frac{b'(u)c(u)}{b(u)} - \frac{b'(u)a(u)x}{b(u)} + \frac{c'(u)}{b(u)} = 0,$$

ou seja,

$$x = \frac{-c'(u) + b'(u)c(u)}{a'(u)b(u) - a(u)b'(u)}.$$

Portanto, x e y dependem de u e o criminante

$$C(u) = \{(x(u), y(x(u)), u), u \in \mathbb{R}\},$$

descreve uma curva em $S \subset \mathbb{R}^3$.

Agora vamos definir projeção para finalmente definir o envelope de uma família de retas.

Definição 4.5. A aplicação $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(x, y, u) = (x, y)$ é chamada de *projeção*.

Considerando $\phi(x, u) = (x, \frac{-a(u)x - c(u)}{b(u)}, u)$, demonstramos a seguir a relação entre $\pi \circ \phi$ e R_u .

Proposição 4.4. *A aplicação $\pi \circ \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é singular no ponto (x, u) se, e somente se, $R_u(x, y, u) = 0$.*

Demonstração. Como $\phi(x, u) = \left(x, \frac{-a(u)x - c(u)}{b(u)}, u\right)$, temos que

$$\pi \circ \phi(x, u) = \left(x, \frac{-a(u)x - c(u)}{b(u)}\right).$$

Portanto,

$$d(\pi \circ \phi)(x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a(u)}{b(u)} & \frac{(-a'(u)x - c'(u))b(u) - (-a(u)x - c(u))b'(u)}{b^2(u)} \end{bmatrix}.$$

Dessa maneira, o determinante da matriz $d(\pi \circ \phi)(x, u)$ se anula se, e somente se,

$$\frac{-a'(u)x - c'(u)}{b(u)} - \frac{(-a(u)x - c(u))b'(u)}{b(u)b(u)} = 0$$

Pela Equação 4.1 essa igualdade é equivalente a

$$0 = \frac{-a'(u)x - c'(u) - yb'(u)}{b(u)} = R_u(x, y, u) = 0,$$

que só acontece quando $R_u(x, y, u) = 0$. Isto é equivalente a dizer que $\pi \circ \phi$ é singular apenas nos pontos que pertencem ao criminante C . ■

Essa proposição nos motiva a definir envelope.

Definição 4.6. Dada uma família de retas $R(x, y, u) = a(u)x + b(u)y + c(u) = 0$, com $a(u)^2 + b(u)^2 \neq 0$, a projeção do criminante C , isto é, $E = \pi(C)$ é chamada de *o envelope da família de retas*.

Como o envelope da família de retas é uma curva em \mathbb{R}^2 na variável u , queremos apresentar as coordenadas desta curva em relação a u .

Proposição 4.5. *Com as mesmas notações anteriores, o envelope*

da família de retas $E(u) = (x(u), y(u))$ é dado por

$$x(u) = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \qquad y(u) = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}$$

se $a(u)b'(u) - b(u)a'(u) \neq 0$.

Demonstração. Pela definição de envelope, temos que suas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo a, b, c funções na variável u . Como $a(u)b'(u) - b(u)a'(u) \neq 0$, ao resolver o sistema, multiplicando a primeira equação por b' e a segunda por $-b$ obtemos

$$\begin{cases} b'ax + b'by + b'c = 0 \\ -ba'x - bb'y - bc' = 0 \end{cases} \quad \frac{}{(b'a - ba')x = bc' - b'c}$$

$$\text{Logo } x = \frac{bc' - b'c}{b'a - ba'}.$$

Para resolver y , vamos multiplicar a primeira equação do sistema (4.2) por a' e a segunda por $-a$, dessa maneira

$$\begin{cases} a'ax + a'by + a'c = 0 \\ -aa'x - ab'y - ac' = 0 \end{cases} \quad \frac{}{(a'b - ab')y = ac' - a'c}$$

$$\text{Ou seja, } y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

■

Vamos agora calcular o envelope de retas de algumas famílias de retas.

Exemplo 4.6. Considere a família de retas

$$\cos(u)x + \sin(u)y = 0.$$

Temos que $a(u) = \cos(u)$, $b(u) = \sin(u)$ e $c(u) = 0$, portanto, pela Proposição 4.5, o seu envelope é

$$E(u) = \left(\frac{0 \sin(u) + 0 \cos(u)}{\cos^2(u) + \sin^2(u)}, \frac{-0 \sin(u) - 0 \cos(u)}{\cos^2(u) + \sin^2(u)} \right) = (0, 0),$$

ou seja, a origem do plano.

Exemplo 4.7. Considere a família de retas

$$\cos(u)x + \sin(u)y = c, \quad c \neq 0.$$

Como $a(u) = \cos(u)$, $b(u) = \sin(u)$ e $c(u) = -c$, temos que seu envelope é a circunferência

$$E(u) = \left(\frac{0 \sin(u) + c \cos(u)}{\cos^2(u) + \sin^2(u)}, \frac{c \sin(u) - 0 \cos(u)}{\cos^2(u) - \sin^2(u)} \right) = c(\cos(u), \sin(u)).$$

Exemplo 4.8. Já na família de retas

$$R(x, y, u) = x - uy + \frac{c}{6}u^3 = 0$$

temos que

$$\begin{aligned} E(u) &= \left(\frac{ucu^2}{2} - \frac{cu^3}{6}, \frac{-ucu^2}{2} - \frac{0cu^3}{6} \right) \\ &= \left(\frac{-3cu^3 + cu^3}{-6}, \frac{cu^2}{2} \right) = \left(\frac{cu^3}{6}, \frac{cu^2}{2} \right). \end{aligned}$$

O ponto singular de E é $u = 0$, veja a Figura 4.5.

Com as informações sobre envelope de retas vamos construir evoluta de curvas planas.

Dada uma curva regular $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, considere a família de retas a um parâmetro $R(s, x, y)$ em que a função R é definida por

$$\begin{aligned} R : I \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, x, y) &\mapsto \langle (x, y) - \alpha(s), t(s) \rangle \end{aligned}$$

com $t(s) = \alpha'(s)$. Temos que $R(s, x, y) = 0$ se, e somente se, $\langle (x, y) - \alpha(s), t(s) \rangle = 0$ ou seja, se $(x, y) - \alpha(s)$ é ortogonal ao vetor tangente

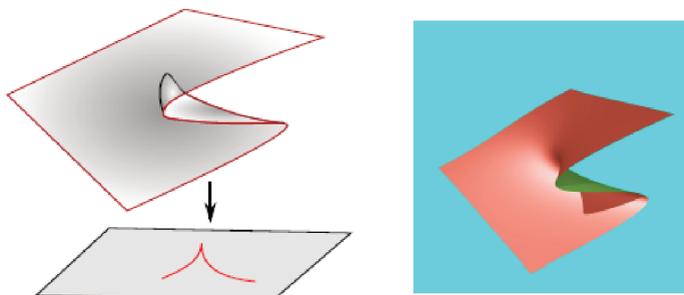


Figura 4.5 – Envelope da família de retas

$t(s)$, que só acontece quando $(x, y) - \alpha(s)$ for paralelo ao vetor normal $n(s)$.

Em outras palavras, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y) - \alpha(s) = \lambda n(s)$, isto é, $(x, y) = \alpha(s) + \lambda n(s)$. Logo (x, y) depende de s e λ . Chamando $(x, y) := \Gamma(s, \lambda)$ temos que se $\Gamma(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda n(s)$ então $\langle \Gamma - \alpha(s), t(s) \rangle = 0$. Dessa forma, obtemos que $R(s, \Gamma(s, \lambda)) = 0$.

Ademais,

$$\begin{aligned} R_s(s, \Gamma) = 0 &\iff \langle -\alpha'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \Gamma - \alpha(s), t'(s) \rangle = 0 \\ &\iff -1 + \langle \Gamma - \alpha(s), \kappa(s)n(s) \rangle = 0 \\ &\iff \kappa(s)\langle \Gamma - \alpha(s), n(s) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Ainda temos que $R(s, \Gamma) = 0$ se, e somente se, $\Gamma(s, \lambda) = \alpha(s) + \lambda n(s)$. Substituindo uma fórmula na outra temos

$$\kappa(s)\langle \alpha(s) + \lambda n(s) - \alpha(s), n(s) \rangle = 1$$

que só ocorre se $\lambda = \frac{1}{\kappa(s)}$ pois $n(s)$ é unitário.

Como o discriminante C associado à família de retas $R(s, \Gamma) = \langle \Gamma - \alpha(s), t'(s) \rangle \leq 0$, com $s \in I$, é definido por

$$C = \{(s, \Gamma) \in I \times \mathbb{R}^2 : R(s, x, y) = R_s(s, x, y) = 0\},$$

logo $C = \{(s, x, y) \in I \times \mathbb{R}^2 : (x, y) = \Gamma(s, \lambda) \text{ e } \lambda(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\}$.

Além disso, temos que o envelope $E = \pi(C)$ associado a essa família de retas é dado por

$$E = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 : p = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s) \right\}.$$

Note que a descrição do envelope E que acabamos de construir coincide com a definição de evoluta da curva α que apresentamos no início da Seção 4.1. Além disso, esta construção é mais sofisticada do que a anterior.

5 O TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Outro teorema relevante da Geometria Diferencial das curvas planas é o Teorema dos Quatro Vértices. Segundo [8] a primeira demonstração para o caso em que a curva é convexa, foi apresentada em 1990 por S. Mukhopadhyaya, já para curvas não convexas a prova foi obtida no começo do século XX.

As diferentes provas para esse teorema, utilizando propriedades analíticas ou geométricas, auxiliaram a desenvolver ideias e conceitos que podem ser generalizadas em outros contextos como curvas em superfícies ou dimensões mais altas.

Para introduzir o teorema que leva o nome deste trabalho vamos definir e apresentar exemplos de curvas fechadas e de curvas convexas.

5.1 CURVAS FECHADAS E CONVEXAS

Imagine um passeio de carro no qual você sai da sua casa, passa em vários lugares e por fim retorna a sua casa, ou seja, seu ponto inicial e final da trajetória são os mesmos. Essa é a ideia de uma curva fechada, que está formalizada em seguida.

Definição 5.1. Uma curva plana *fechada* é uma curva parametrizada regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ e todas as derivadas de α coincidem nos pontos a e b .

Ademais, se uma curva além de fechada não tiver auto-intersecção além das extremidades, ela possui propriedades interessantes e por esse motivo possui uma outra nomenclatura. Um dos resultados obtidos para essas curvas é conhecido como Teorema de Jordan, que garante que o complementar do traço de α é a união de dois conjuntos conexos, não-vazios e com a fronteira de cada um igual ao traço de α , (veja [5]).

Definição 5.2. Uma curva plana $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada re-

gular, simples no intervalo $[a, b)$ e fechada é chamada de *curva de Jordan*.

Exemplo 5.1. *Um exemplo trivial de curva fechada é a elipse, cuja parametrização é $\alpha(t) = (a \operatorname{sen}(t), b \operatorname{cos}(t))$ (Exemplo 4.2). Ainda, se considerarmos $a = b$ temos a parametrização da circunferência, apresentada no Exemplo 2.3.*

Outra definição importante é a de curva convexa. Esse nome relembra o conceito da geometria euclidiana plana de polígonos convexos. A ideia é bem parecida.

Definição 5.3. Uma curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *convexa* se, para todo $s_0 \in [a, b]$, o traço de α está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados pela reta tangente de α em s_0 . Mais precisamente, ser convexa significa que, para todo $s_0 \in [a, b]$, a função h_{s_0} definida por

$$h_{s_0}(s) = \langle \alpha(s_0) - \alpha(s), n(s_0) \rangle$$

não muda de sinal em $[a, b]$, isto é, $h_{s_0}(s) \leq 0$ ou $h_{s_0}(s) \geq 0$ para todo $s \in [a, b]$. Além disso, α é estritamente convexa se para cada $s_0 \in [a, b]$, $h_{s_0}(s) \neq 0$ para todo s .

Exemplo 5.2. *É possível observar na Figura 5.1 que as curvas a, b e d são convexas, enquanto que a curva c não é um exemplo de curva convexa. Já as curvas b, c e d são fechadas, diferente da curva a .*

5.2 O VÉRTICE DE UMA CURVA

Para introduzir o Teorema dos Quatro Vértices é necessário definir o que é um vértice de uma curva. Definimos da seguinte maneira:

Definição 5.4. Um *vértice* s_0 de uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular é um ponto crítico da curvatura $\kappa(s)$, isto é, $\kappa'(s_0) = 0$.

Suponha que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) \neq 0$. Note que, pela Proposição 4.1, um vértice de uma curva é uma cúspide da evoluta

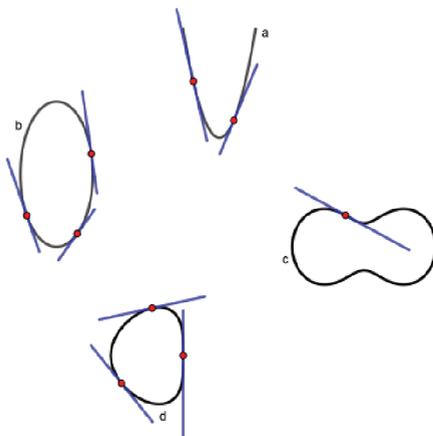


Figura 5.1 – Convexidade de curvas.

$E(s)$. Usando essa informação, vamos calcular os vértices da circunferência e da parábola.

Exemplo 5.3. Considere a circunferência de centro (a, b) , descrita por $\alpha(s) = (r \cos(\frac{s}{r}) + a, r \sin(\frac{s}{r}) + b)$, $s \in \mathbb{R}$. Pelo Exemplo 4.3 a evoluta é dada por $E(s) = (a, b)$. Logo $E'(s) = (0, 0)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, portanto, todo $s \in \mathbb{R}$ é um vértice da circunferência.

Exemplo 5.4. Pelo Exemplo 4.1 temos que a parábola descrita por $\alpha(t) = (t, t^2)$ possui a evoluta

$$E(t) = (-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2).$$

Assim, $E'(t) = (-12t^2, 6t) = (0, 0)$ se, e somente se, $t = 0$.

Logo o ponto $t = 0$ é o vértice da parábola.

Agora observe o exemplo da elipse. Ele nos fornece ideias que sugerem o Teorema dos Quatro Vértices.

Exemplo 5.5. Seja $\alpha(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ e $b < a$, a curva que descreve uma elipse centrada em (x_0, y_0) . Temos que $\alpha'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$ e $\alpha''(t) = (-a \cos(t), -b \sin(t))$.

Pela Proposição 2.4, temos que

$$\kappa(t) = \frac{ab(\cos^2(t) + \sin^2(t))}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \kappa'(t) &= -\frac{3}{2}ab \frac{2a^2 \sin(t) \cos(t) - 2b^2 \cos(t) \sin(t)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{-3ab \sin(t) \cos(t)(a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

então $\kappa'(t) = 0$ se, e só somente se, $\sin(t) = 0$ ou $\cos(t) = 0$.

Ademais, como $b < a$, temos que

$$b^2 \leq a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t) \leq a^2,$$

implicando em $\frac{b}{a^2} \leq \kappa(t) \leq \frac{a}{b^2}$.

Assim, os pontos de máximo da curvatura de uma elipse são $t = 0$ e $t = \pi$ e os pontos de mínimo são $t = \frac{\pi}{2}$ e $t = \frac{3\pi}{2}$.

Observe a Figura 5.2

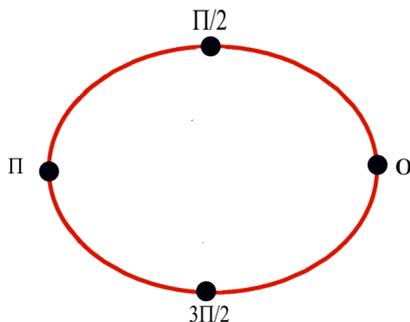


Figura 5.2 – Vértices da elipse

Note que a elipse é uma curva de Jordan convexa e encontramos quatro vértices. Isso não é coincidência, é o que nos garante o Teorema dos Quatro Vértices. Antes de provarmos esse teorema vamos demonstrar um lema auxiliar.

Lema 5.1. *Sejam A, B e C números reais arbitrários e seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada e parametrizada pelo comprimento de arco, definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ cuja curvatura é $\kappa(s)$. Então,*

$$\int_a^b (Ax(s) + By(s) + C)\kappa'(s)ds = 0.$$

Demonstração. Do Teorema Fundamental das Curvas Planas, existe uma função $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x'(s) = \cos(\theta(s))$ e $y'(s) = \sin(\theta(s))$. Assim, $\kappa(s) = \theta'(s)$, $x''(s) = -\kappa(s)y'(s)$ e $y''(s) = \kappa(s)x'(s)$. Como α é fechada, pela Definição 5.1 as funções acima coincidem em a e b e portanto:

$$\begin{aligned} \int_a^b \kappa'(s)ds &= \kappa(b) - \kappa(a) = -x''(b)y'(b) + y''(b)x'(b) \\ &+ x''(a)y'(a) - y''(a)x'(a) = 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do cálculo. Além disso, pela integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b x(s)\kappa'(s)ds &= x(s)\kappa(s)|_a^b - \int_a^b x'(s)\kappa(s)ds \\ &= \kappa(b)x(b) - \kappa(a)x(a) - \int_a^b y''(s)ds \\ &= \kappa(b)x(b) - \kappa(a)x(a) - y'(b) + y'(a) \\ &= x(a)[\kappa(b) - \kappa(a)] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b y(s)\kappa'(s)ds &= y(s)\kappa(s)|_a^b - \int_a^b y'(s)\kappa(s)ds \\ &= \kappa(b)y(b) - \kappa(a)y(a) + \int_a^b x''(s)ds \\ &= \kappa(b)y(b) - \kappa(a)y(a) + x'(b) - x'(a) \\ &= y(a)[\kappa(b) - \kappa(a)] = 0 \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer $A, B, C \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (Ax(s) + By(s) + C)\kappa'(s)ds = 0.$$

■

Vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema dos Quatro Vértices.

Teorema 5.1 (Teorema dos Quatro Vértices.). *Toda curva de Jordan e convexa tem, pelo menos, quatro vértices.*

Demonstração. Consideremos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan convexa parametrizada pelo comprimento de arco definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Se a curvatura $\kappa(s)$ for constante em algum subintervalo de $[a, b]$, todos os pontos desse subintervalo são pontos críticos da função curvatura, ou seja, α possui infinitos vértices, como mostra a Figura 5.3.

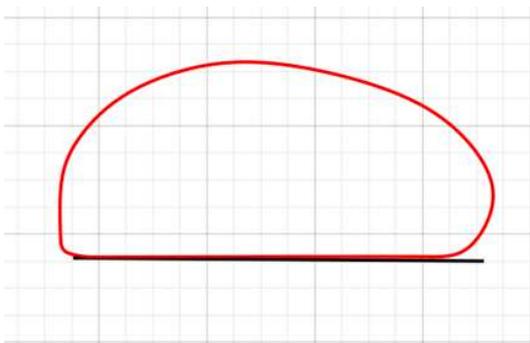


Figura 5.3 – Curva α com um subintervalo onde κ é constante.

Vamos assumir, então, que a curva α não possui segmentos de retas nem arcos de circunferência.

Pela Observação 2.4, $\kappa(s)$, função curvatura de α , é contínua em $[a, b]$ e pelo Teorema de Weierstrass, que pode ser visto [7], ela possui neste intervalo um ponto de mínimo global s_1 e um ponto de máximo global s_2 . Note que $s_1 \neq s_2$ pois, caso contrário, a função curvatura κ seria constante. Portanto α tem no mínimo, dois vértices, $p = \alpha(s_1)$ e $q = \alpha(s_2)$, os quais consideramos o de curvatura mínima e de curvatura máxima, respectivamente.

Transladamos e rotacionamos a curva α de tal maneira que $p = (0, 0)$ e q esteja sob o eixo das abcissas, logo $y(s_1) = y(s_2) = 0$. Note que pela Proposição 3.1, a curvatura se mantém a mesma.

Afirmamos que o eixo das abcissas divide a curva em dois

arcos, β e γ , com cada um deles em um dos lados do eixo das abcissas, ou seja $y(s)$ só muda de sinal em s_1 e s_2 . De fato, suponha que a curva α intersecte o eixo das abcissas em um ponto $r = \alpha(s_*)$ distinto de p e q . Se α fosse tangencial ao eixo das abcissas em $r = \alpha(s_*)$, poderia ser das seguintes formas:

Caso (i): A tangência ocorre de modo que, ao logo de um intervalo aberto I contendo s_* , o traço de α está contido no eixo das abcissas como mostra a Figura 5.4. Note que neste caso $\kappa(s) = 0 \forall s \in I$, o que nos leva ao caso em que $\alpha(s)$ possui um intervalo com curvatura constante.

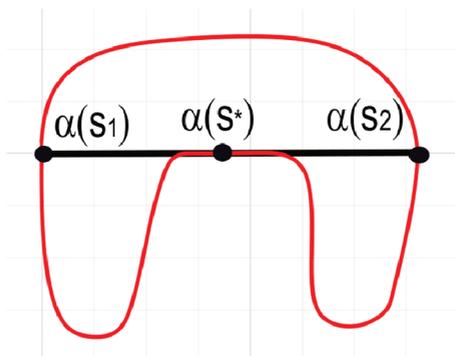


Figura 5.4 – Curva α tangenciando o eixo das abcissas em $r = \alpha(s_*)$ como descrito no Caso (i)

Caso (ii): Se a curva α tangenciasse o eixo das abcissas em $r = \alpha(s_*)$ de forma que localmente (próximo a r) a curva α ficasse acima (ou, analogamente, abaixo) do eixo das abcissas, como nos mostra a Figura 5.5 existiria um ponto m próximo a r tal que a reta tangente à curva em m possuiria inclinação diferente de zero, implicando que p e r (ou q e r) estariam em semiplanos distintos com relação a essa tangente, contradizendo a hipótese de α ser convexa.

Caso (iii) Por fim, a curva α poderia tangenciar o eixo das abcissas em $r = \alpha(s_*)$ de forma que, localmente (próximo a r), parte da curva α ficasse abaixo do eixo e parte acima, como é possível

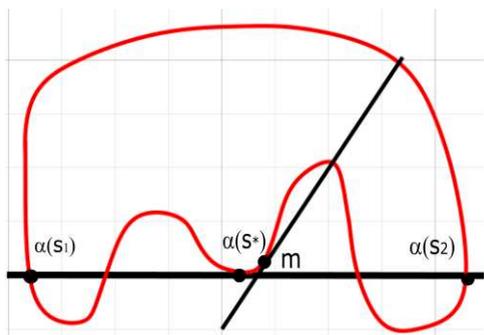


Figura 5.5 – Todos os pontos de α acima do eixo.

observar na Figura 5.6. Nesse caso, a reta tangente no ponto $\alpha(s_*)$ seria o próprio eixo x e tal eixo dividiria a curva α em dois semiplanos, o que também contradiz a hipótese da convexidade. Logo, α não pode ser tangente ao eixo das abscissas em um ponto r distinto de p e q .

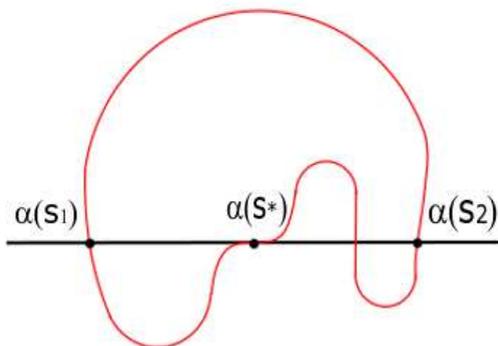


Figura 5.6 – Curva α tangenciando o eixo das abscissas em $r = \alpha(s_*)$ como descrito no Caso (iii)

Se $\alpha(s)$ fosse transversal ao eixo das abscissas em um ponto r distinto de p e q , como nos mostra a Figura 5.7, a reta tangente à curva α no ponto r teria inclinação não nula e separaria os pontos p e q em semiplanos distintos, contradizendo novamente a hipótese

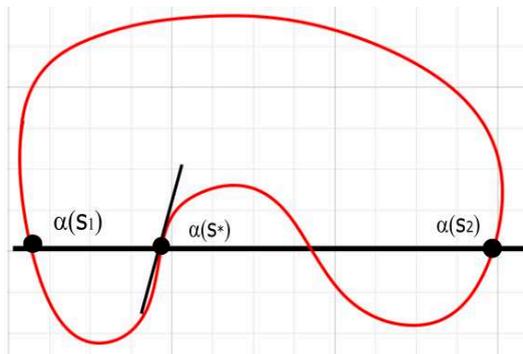


Figura 5.7 – Curva α contida em um dos semiplanos determinados pelo eixo x .

de α ser convexa.

Após esgotar todas as possibilidades de intersecção entre a curva α e o eixo das abcissas em algum ponto r distinto de p e q , concluímos, enfim, que uma tal intersecção não pode ocorrer devido à convexidade da α . Portanto, os únicos pontos de intersecção da curva α são p e q . Além disso, α não poderia estar inteiramente contida em um dos semiplanos determinados pelo eixo x .

De fato, se isso ocorresse, o eixo x seria tangente a α nos pontos p e q e, neste caso, poderíamos usar um argumento análogo ao apresentado no Caso (ii) para chegar a uma contradição. Mais especificamente, próximo ao ponto q , por exemplo, teríamos um ponto sobre a curva no qual a inclinação da reta tangente seria diferente de zero e portanto essa reta tangente separaria os pontos p e q em semiplanos distintos, novamente contrariando a hipótese da convexidade. Observe a Figura 5.8.

Finalmente, podemos concluir que o eixo das abcissas divide a curva α em dois arcos, β e γ , cada um deles contido em um dos semiplanos determinados pelo eixo x . Veja a Figura 5.9. Considerando $y = 0$ a equação do eixo das abcissas temos que, um dos arcos (suponha β) está em $y \geq 0$ e o outro (suponha γ) está em $y \leq 0$.

Se não houvesse mais vértices de α além dos citados, s_1 e

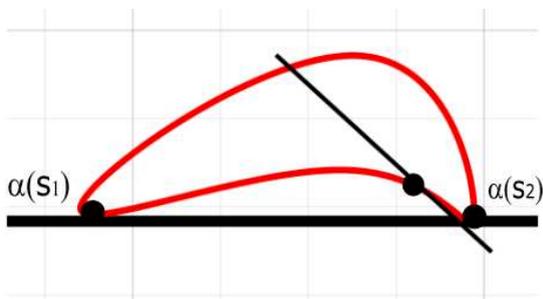


Figura 5.8 – Curva α acima do eixo

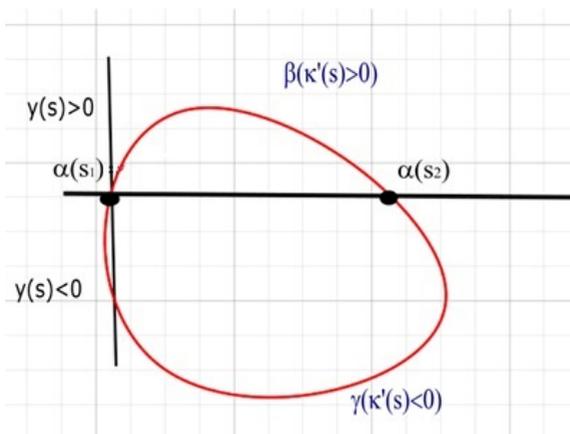


Figura 5.9 – Eixo das abscissas dividindo a curva α em dois arcos, β e γ .

s_2 , a curvatura κ não teria outros pontos críticos além de s_1 e s_2 em $[a, b]$. Conseqüentemente $\kappa'(s)$ não mudaria de sinal ao longo de cada arco β e γ . Como $p = \alpha(s_1)$ é um mínimo global de κ e $q = \alpha(s_2)$ é um máximo global de κ , temos que $\kappa'(s)$ é positivo em β e negativo em γ se a curva possui orientação no sentido horário ou $\kappa'(s)$ é positivo em γ e negativo em β se a curva possui orientação no sentido anti-horário.

Portanto

$$\int_a^b y(s)\kappa'(s)ds \neq 0$$

pois $y(s)\kappa'(s) \neq 0$ em cada um dos arcos β e γ , o que contradiz o

Lema 5.1. Isto mostra que existe um terceiro vértice \bar{s} de α . Se $\kappa'(s)$ não mudasse de sinal em \bar{s} , isto é, se \bar{s} fosse um ponto de inflexão da curvatura ainda teríamos que $y(s)\kappa'(s) \neq 0$ nos arcos β e γ , e novamente $\int_a^b y(s)\kappa'(s)ds \neq 0$, contradizendo o Lema 5.1.

Dessa maneira, $\kappa'(s)$ deve mudar de sinal, pelo menos mais uma vez no arco que contém o terceiro vértice, o que implica existir um quarto vértice. ■

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho possibilitou contato com a Geometria Diferencial, subárea da matemática que não está presente no currículo da graduação em Licenciatura em Matemática da UFSC- Blumenau, apresentando novas oportunidades de pesquisa. Também é importante enfatizar que conteúdos aprendidos no decorrer do curso foram aprofundados ao longo do desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, principalmente os de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, mostrando a importância de uma boa formação acadêmica.

Ademais, para este trabalho foi necessário desenvolver um pouco da interpretação geométrica e formalizá-la através de conceitos matemáticos, principalmente na demonstração do Teorema dos Quatro Vértices, que exigiu pesquisas e persistência para compreender, além das discussões com os orientadores.

Por fim, o Teorema dos Quatro Vértices é importante na introdução de ferramentas matemáticas poderosas que podem ser generalizadas para conceitos mais avançados da Geometria Diferencial.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Abraham, J.E. Marsden e T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1993.
- [2] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfície*. 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008, p. 607.
- [3] H.L. Guidorizzi. *Um curso de cálculo*. v. 4. LTC, 2002.
- [4] H.L. Guidorizzi. *Um curso de cálculo*. v. 1. LTC, 2013.
- [5] Walcy Santos Hilário Alencar. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. XII. Escola de Geometria Diferencial, 2003, p. 255.
- [6] Jorge Delgado Katia Frensel. *Geometria Diferencial*. Notas de Aula. 2003-2009.
- [7] E.L. Lima. *Curso de análise*. v. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.
- [8] Ronaldo Alves Mario J.D. Carneiro. *O Teorema dos Quatro Vértices e Sua Recíproca*. School on Singularity Theory, ICMC-USP, 2018.
- [9] Mariana Mariano de Oliveira. “Curvas pedais e Teorema dos Quatro Vértices : uma introdução à geometria diferencial”. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT. Universidade Federal do ABC(UFABC), 2018.
- [10] Ketí Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2^a ed. São Paulo: Blucher, 2008, p. 270.