Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

As Equações de Navier-Stokes 2D Sobre Alguns Domínios Ilimitados: Existência, Unicidade e Estudo do Atrator Global

José Guilherme Simion Antunes
Orientador: Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto

Florianópolis
Fevereiro de 2019

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

As Equações de Navier-Stokes 2D Sobre Alguns Domínios Ilimitados: Existência, Unicidade e Estudo do Atrator Global

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

José Guilherme Simion Antunes
Florianópolis
Fevereiro de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Antunes, José Guilherme Simion
As Equações de Navier-Stokes 2D Sobre Alguns Domínios Ilimitados : Existência, Unicidade e Estudo do Atrator Global / José Guilherme Simion Antunes ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2019.
94 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equações de Navier-Stokes. 3. Atrator Global. 4. Dimensão do Atrator. 5. Domínios Ilimitados. I. Carvalho Neto, Paulo Mendes de. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

As Equações de Navier-Stokes 2D Sobre Alguns Domínios Ilimitados: Existência, Unicidade e Estudo do Atrator Global

por

José Guilherme Simion Antunes[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
(Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC)

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
(Orientador – UFSC)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC)

Prof. Dr. Thales Maier de Souza
(Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC Joinville)

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
(Coordenador da Pós-Graduação – UFSC)

Florianópolis, 18 Fevereiro de 2019.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu irmão Marcos (In Memorian) e a minha parceira, Jéssica.

Agradecimentos

Agradeço ao bom Deus por todas as bençãos que coloca em minha vida. Ao Coração, a Rosa, a Cruz e ao Monte: instrumentos de Sua magnitude, benevolência e compaixão.

Meus sinceros agradecimentos aos meus pais, Célia Aparecida Simion Antunes e José Figuero Antunes que não mediram esforços para que eu pudesse realizar meu sonho de cursar a Pós-Graduação. Mesmo de longe, sei que nunca deixaram de zelar por mim.

Ao meu irmão, Marcos Wesley Simion Antunes (In Memorian), por desafiar-me ao estudo, pelas boas lembranças e pelo exemplo.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto, por seus ensinamentos e paciência. Sua sede de querer conhecer a matemática é uma inspiração ao pesquisador que almejo ser.

Aos professores de minha graduação. Em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Claiton Petris Massarolo que desde lá, estimulou-me a ir mais longe na vida acadêmica.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da UFSC, em especial, Cleverson Roberto da Luz, Matheus Cheque Bortolan, Eliezer Batista, Ruy Coimbra Charão, Antonio Carlos Gardel Leitão, Ivan Pontual Costa e Silva e Jaúber Cavalcante de Oliveira, este, que mostrou-se um profissional admirável.

Não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que deixaram um pouco de si comigo, em especial, Thiago Valendolf, Cibelly Ribas, Wilson Valiente, Gabriella Mello, Mayara Arévalos, Felipe Araujo, Victor Bruning, Andrielli Jorge, Jonnathan da Silva, Priscila Friedemann, Jean Cardoso, Pamela Patricio, Fernando Kawaji, Paula Schmoeller, Guilherme Galuch e Mariana Lima.

Àqueles que estiveram ao meu lado nessa jornada do mestrado: Elemar Rapachi, João Paulo Silva, Julio Cáceres, Mariana da Veiga, Bruna Caveion, Ever Vásquez, Luis Ortiz e Rafaela Filippozzi, esta, que sempre mostrou-se preocupada e solícita com cada um de nós, além de nos proporcionar grandes momentos de alegria e descontração.

À ela, Jéssica Maiara de Souza Nogueira, minha parceira, confidente, cúmplice e resposta de oração. Com um coração imenso e com fé no por vir, sempre esteve ao meu lado me apoiando, incentivando e sendo forte. Mesmo nas dificuldades, você me foi luz.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a conclusão deste trabalho.

"Se eu cair, bem rápido vou me levantar.
Não vou fugir, a chance pode me escapar.
Sou o maior que já surgiu,
sonhador que conseguiu
voar mais alto que todos.
Vou em direção ao amanhã.
Não penso em parar eu não.
Ninguém me deterá.
Vou ser o maior de todos,
o lendário sonhador."
– Abertura de Digimon Tamers

Resumo

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto (limitado ou ilimitado) sem hipóteses adicionais sobre a regulariadade de sua fronteira $\partial\Omega$, assumindo apenas que vale a desigualdade de Poincaré sobre Ω, ou seja, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \phi^2 \mathrm{dx} \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{dx}, \quad \forall\, \phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,.$$

A formulação variacional do problema de valor inicial e de fronteira para as equações de Navier-Stokes 2D de um fluido homogêneo e incompressível pode ser expressa da seguinte forma: se $f \in V'$ e $u_0 \in H$, então existe uma única função $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+;H)$, $\forall\, T > 0$, que satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu\,((u,v)) + b(u,u,v) = \langle f, v \rangle\,, \quad \forall v \in V,$$
$$u(\cdot,0) = u_0(\cdot).$$

Deste problema podemos definir um semigrupo contínuo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em H, dado por $S(t)u_0 := u(t)$, com u sendo a solução encontrada. Da equação de energia associada, provamos a existência de um conjunto absorvente e mostramos que o semigrupo é assintoticamente compacto, obtendo assim, um atrator global que possui as dimensões de Hausdorff e fractal finitas.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes; Atrator Global; Dimensão do Atrator; Dissipação Fraca; Domínios Ilimitados.

Abstract

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be an open subset (bounded or unbounded) without any regularity assumption on its boundary $\partial\Omega$, in which we only assume that Poincaré's inequality holds, i.e., there exists $\lambda_1 > 0$ such that

$$\int_\Omega \phi^2 \mathrm{dx} \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{dx}, \quad \forall\, \phi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\,.$$

The variational formulation of the initial and boundary value problem to the 2D Navier-Stokes equations of a homogeneous and incompressible fluid can be expressed as follows: if $f \in \mathrm{V}'$ and $u_0 \in \mathrm{H}$, then there exists a unique function $u \in L^2(0, T; \mathrm{V}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathrm{H})$, $\forall\, T > 0$, which satisfies

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu\,((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle\,, \quad \forall v \in V,$$
$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot).$$

This problem allows us to define a continuous semigroup $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ in H, by $S(t)u_0 := u(t)$, where u is the unique solution mentioned above. With the associated energy equation we prove the existence of an absorbing set and that the semigroup is asymptotically compact, thus obtaining a global attractor which has finite Hausdorff and fractal dimensions.

Keywords: Navier-Stokes Equations; Global Attractor; Attractor Dimension; Weak Dissipation; Unbounded Domains.

Sumário

Introdução

As equações de Navier-Stokes foram assim denominadas após Claude Louis Marie Henri Navier e George Gabriel Stokes desenvolverem um conjunto de equações que descreviam o movimento de fluídos e gases.

A primeira descrição matemática do movimento de um fluido ideal foi formulada por Euler [9] em 1755. Essa formulação foi obtida através da segunda Lei de Movimento de Newton em um fluido que se move sob a ação de uma força interna conhecida como gradiente de pressão. Restringindo ao caso em que os fluidos são homogêneos e incompressíveis, isto é, com densidade de massa constante, ocupando todo o $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ com $n = 3$ (ou de forma teórica, $n = 2$), as equações de Euler descrevem a evolução no tempo do campo de velocidade $u = u(x,t)$ e a pressão $p = p(x,t)$ de um fluido e tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u &= -\nabla p, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}},\ t > 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}},\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \end{aligned}$$

com $u(x,0) = u_0(x)$ sendo a condição inicial (com divergente nulo). Estas equações, embora importantes teoricamente, omitem os efeitos das forças de atrito. Para incorporar tais efeitos, Navier publicou em 1823 o trabalho [21] com a dedução da equação do movimento para fluidos viscosos no qual incluiu os efeitos de atração e repulsão entre as moléculas. A partir das considerações feitas por Euler, ele deduziu a seguinte modificação das equações de Euler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u &= \nu \Delta u - \nabla p, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}},\ t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0, & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}},\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \end{aligned}$$

com $u(x,0) = u_0(x)$ sendo a condição inicial com divergente nulo.

Para Navier, ν era simplesmente uma função do meio molecular para o qual ele não atribuiu significado físico algum. Em 1845, Stokes publicou uma dedução das equações para o movimento de fluidos viscosos, as quais são seguidas nos textos atuais. Em oposição à Navier, Stokes tornou claro que o parâmetro ν tem um importante significado físico, ele mede a viscosidade do fluido.

Como as equações de Navier-Stokes incorporam os efeitos do atrito, elas tornam-se fisicamente mais realistas do que as equações de Euler. Contudo, por razões físicas e matemáticas, ambas são importantes.

As equações de Navier-Stokes são usadas para modelar fenômenos climáticos, correntes oceânicas, fluxos de água em canais, fluxos de gás em canos e turbinas, entre outros. Estas equações não procuram estabelecer relação entre as variáveis de interesse (por exemplo, velocidade e pressão); em vez disto, elas estabelecem relações entre as taxas de variação ou fluxos destas quantidades. Além disso é necessário, em geral, levar em conta a compressividade de gás ou mesmo de um líquido.

Um fluido incompressível pode ser visto como um fluido onde as variações da densidade no movimento de uma partícula do fluido são desprezíveis. Nenhum fluido é realmente incompressível; até mesmo líquidos podem ter a densidade aumentada aplicando-se uma pressão suficiente. Em geral, a incompressibilidade é vista como uma propriedade do escoamento. Um escoamento é incompressível quando o divergente da velocidade é nulo $\operatorname{div} u = 0$.

Nas situações práticas, o fluido nunca ocupa todo o espaço $\mathbb{R}^3$ (ou de forma teórica, $\mathbb{R}^2$) e sim uma região com fronteira, digamos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Para determinar o fluxo completamente, algumas considerações sobre a fronteira $\partial\Omega$ desta região devem ser apresentadas. Neste trabalho consideramos uma condição física adequada, a chamada condição de antideslizamento para fluidos viscosos, no qual o fluido terá a velocidade nula na fronteira da região. Conceitualmente, pode-se pensar que as moléculas mais exteriores do fluido estão presas às superfícies por onde escoam. Matematicamente, isso significa que

$$u(x,t) = 0, \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T)\,.$$

Levando em conta a apresentação feita acima, a formulação clássica do problema de valor inicial e de fronteira para as equações de Navier-Stokes de um fluido homogêneo incompressível é: dados $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) aberto com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular, $\nu > 0$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Queremos encontrar uma função vetorial $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p = f, &\qquad \text{em } \Omega \times (0,T)\,, \\
\text{div } u = 0, &\qquad \text{em } \Omega \times (0,T)\,, \\
u = 0, &\qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T)\,, \\
u(x,0) = u_0(x), &\qquad \text{em } \Omega.
\end{aligned}$$

Na equação acima $u(x,t)$ representa a velocidade, ν a viscosidade (constante), $p(x,t)$ a pressão, $u_0(x)$ a velocidade inicial e $f(x,t)$ uma força externa dada.

A primeira equação descreve o balanço das forças que atuam no sistema de acordo com a segunda Lei de Movimento de Newton. O termo div $u = 0$ nos dá a condição de homogeneidade e incompressibilidade do fluido. Os termos $\partial u/\partial t$ e $u \cdot \nabla u$ descrevem a aceleração total da partícula no fluido e o termo $-\nu\Delta u$ descreve a fricção entre as partículas do fluido.

Um avanço importante na teoria das equações diferenciais parciais foi o conceito de soluções fracas introduzidas por Leray (1933) [20], em especial para as equações de Navier-Stokes. Isso permite que objetos em classes muito maiores que o espaço de funções clássicas sejam usados para descrever o movimento de um fluido. É mais fácil provar a existência de uma solução em uma classe maior, mas tal solução pode não ser única. A teoria de Leray fornece a existência de soluções fracas, possivelmente irregulares e possivelmente não-exclusivas para as equações de Navier-Stokes. Sua abordagem é baseada em estimativas de energia (isto é, limites na integral do quadrado da velocidade) e, portanto, requer que os dados iniciais estejam em $L^2(\mathbb{R}^n)$ cartesiano n vezes. Um tratamento mais completo só teve início com os trabalhos de Foias e Prodi (1967) [12], Foias (1973) [11], Foias e Temam (1989) [14], Ladyzhenskaya (1991) [19], dentre outros.

O atrator global das equações de Navier-Stokes 2D foi obtido primeiramente para domínios limitados nos trabalhos de Ladyzhenskaya [18] e Foias e Temam [13], com este último trabalho mostrando também a finitude da dimensão de Hausdorff do atrator.

Ao tomarmos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ilimitado, a imersão compacta de V em H é perdida e assim, algumas propriedades da compacidade assintótica do semigrupo gerado pelas equações de Navier-Stokes deixam de valer. Para contornar este problema, Abergel [1] e Babin [3] trabalharam com o termo de força f em espaços de Sobolev com peso, tais como

$$L^2_\alpha(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^\mathrm{n} \to \mathbb{R} \Big/ \int_{\mathbb{R}^\mathrm{n}} (1 + |x|^2)^\alpha \, |u(x)|^2 \, \mathrm{dx} < \infty \right\},$$

$$H^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n) \middle/ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2_\beta(\mathbb{R}^n),\, i = 1, \cdots, n \right\},$$

para α e β adequados. Para valores apropriados de α e β, a imersão de $H^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ é compacta e as propriedades da compacidade assintótica do semigrupo gerado pelas equações de Navier-Stokes voltam a valer. Contudo, a estimativa da dimensão do atrator neste caso, independe da norma com peso do termo de força e assim, foi natural almejar que haja a existência do atrator global para termos de força mais gerais. De fato, neste trabalho mostramos a existência do atrator global e a finitude de suas dimensões de Hausdorff e fractal para termos de força em V'.

Em [1] e [3] era preciso uma suavidade adequada para a fronteira do domínio, afim de obter a regularidade apropriada do domínio do operador de Stokes. Contudo, como neste trabalho nos baseamos no artigo de Rosa [22], não necessitamos de nenhuma regularidade sobre a fronteira e a única condição que precisamos é de que o domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ seja um aberto arbitrário com fronteira $\partial\Omega$, no qual vale a desigualdade de Poincaré.

O Capítulo 1 tem como objetivo apresentar os principais resultados da análise funcional e os espaços de funções a serem utilizados no trabalho, além de resultados técnicos e considerações sobre a forma trilinear b e o operador B, oriundos da teoria das equações de Navier-Stokes. Por fim, fazemos algumas considerações sobre as dimensões de Hausdorff e fractal de um dado conjunto.

No Capítulo 2 apresentamos as formulações clássica e variacional para o problema de evolução não linear para as equações de Navier-Stokes e ainda, o teorema de existência, unicidade e regularidade de solução fraca para as mesmas com $n = 2$. A existência é baseada na construção de uma solução aproximada dada pelo método de Faedo-Galerkin, então uma passagem ao limite das mesmas, usando uma estimativa a priori sobre a derivada fracionária de Riesz no tempo da solução aproximada, e ainda, um resultado de compacidade. Por fim, apresentamos as considerações a serem feitas ao tratarmos o domínio Ω como sendo um ilimitado do $\mathbb{R}^2$.

O Capítulo 3 é destinado a uma apresentação dos elementos básicos da teoria de semigrupos com o intuito exibir uma caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global, o qual é um dos principais objetivos deste trabalho.

No Capítulo 4 exibimos as considerações do problema central, além de estabelecermos alguns resultados sobre continuidade fraca para o semigrupo correspondente, tudo isso com o intuito de provarmos a compacidade assintótica do semigrupo e deduzirmos a existência do atrator global. Por fim, mostramos estimativas das dimensões de Hausdorff e fractal do atrator global.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste primeiro capítulo apresentamos as notações, conceitos e resultados técnicos acerca dos espaços funcionais que usamos no estudo das equações de Navier-Stokes.

1.1 Um breve estudo da análise funcional

As noções introduzidas nesta seção são clássicas da teoria da análise funcional e podem ser encontradas em [5] e [17]. É por esse motivo que não dedicaremos tempo demasiado nesta apresentação inicial.

Definimos abaixo duas classes importantes de espaços para nosso estudo: os espaços de Banach e de Hilbert.

Definição 1.1. Sejam X um espaço vetorial munido da norma $\|\cdot\|_X$ e Y um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)_Y$. Dizemos que $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,(\cdot,\cdot)_Y)$ são espaços de Banach e de Hilbert, respectivamente, se são espaços completos com respeito a métrica gerada por $\|\cdot\|_X$ e $(\cdot,\cdot)_Y$, respectivamente.

O espaço dual (topológico) de um espaço vetorial normado é essencial para se estudar as distribuições, os espaço de Hilbert entre outros. Além disso, vários resultados são obtidos analisando as características do espaço e do seu dual.

Definição 1.2. Seja X um espaço normado. Denotamos por X' o espaço dual de X, que consiste de todos os funcionais lineares limitados de X. Ainda, X' é um espaço vetorial normado munido da norma

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |\langle f, x\rangle| \,,$$

com o símbolo $\langle f, x\rangle$ significando a avaliação do funcional linear $f \in X'$ no elemento x do espaço X.

Proposição 1.3. O espaço dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach (mesmo que X não o seja).

Apresentamos agora um dos resultados importantes da análise funcional: o Teorema de Representação de Riesz. Com este resultado podemos identificar os funcionais lineares contínuos de um espaço de Hilbert através do produto interno.

Teorema 1.4. (Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert real com produto interno $(\cdot, \cdot)$. Para cada $f \in H'$, existe um único elemento $u_f \in H$ tal que

$$\langle f, v\rangle = (u_f, v)\,, \quad \forall v \in H.$$

Ainda,

$$\|f\|_{H'} = \|u_f\|_H \,,$$

e a aplicação $f \mapsto u_f$ é um isomorfismo linear de H' em H.

Definição 1.5. Seja X um espaço normado. Definimos o espaço bidual de X como sendo o espaço dual de X', ou seja, $(X')' = X''$.

Definimos agora os conceitos de convergência fraca e fraca* em um espaço de Banach. Ambas as convergências possuem diversas aplicações na teoria de equações diferenciais e, em especial neste trabalho, desempenham um papel fundamental nos Capítulos 2 e 4.

Definição 1.6. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge fraco para $u \in X$, e denotamos por $u_k \rightharpoonup u$, se $\langle f, u_k\rangle \to \langle f, u\rangle$, para cada $f \in X'$.

Abaixo seguem algumas propriedades da convergência fraca.

Proposição 1.7. Sejam X um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Valem os seguintes resultados:

(i) Se $u_k \rightharpoonup u$, então u é único.

(ii) Se $u_k \rightharpoonup u$, então toda subsequência $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco para u.

(iii) Se $u_k \rightharpoonup u$, então $(\|u_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Além disso,

$$\|u\| \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| .$$

(iv) Se $u_k \to u$, então $u_k \rightharpoonup u$.

(v) Se $u_k \rightharpoonup u$ e $f_k \to f$ em X', então $\langle f_k, u_k\rangle \to \langle f, u\rangle$.

(vi) Se $\dim X < \infty$, então

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{se, e somente se} \quad u_k \to u.$$

(vii) Se X é um espaço de Hilbert, $u_k \rightharpoonup u$ se, e somente se valer que $(u_k, v) \to (u, v)$, para cada $v \in X$.

Proposição 1.8. Seja X um espaço de Hilbert. Se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é tal que $u_k \rightharpoonup u$ e

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| \leq \|u\| ,$$

então $u_k \to u$.

Observação 1.9. A hipótese de X ser um espaço de Hilbert na Proposição 1.8, pode ser substituída por algo mais geral, a saber, X ser um espaço de Banach uniformemente convexo (encontra-se em [5, p. 76]).

Para aprofundarmos um pouco mais o estudo da convergência fraca, introduzimos a seguinte noção: considere o operador $J : X \to X''$ que satisfaz

$$\langle Jx, f\rangle := \langle f, x\rangle , \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in X'.$$

Observamos que pelo Teorema de Hahn-Banach (encontra-se em [17, p. 223]), J é uma isometria de X sobre sua imagem $J(X)$.

Definição 1.10. Dizemos que um espaço de Banach X é reflexivo se o operador $J : X \to X''$ for um isomorfismo isométrico.

Agora apresentamos um resultado relativo a noção de convergência fraca.

Teorema 1.11. (Compacidade fraca) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é limitada, então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in X$ tais que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u.$$

Ou seja, sequências limitadas em um espaço de Banach reflexivo são fracamente compactas. Em particular, uma sequência limitada em um espaço de Hilbert contém uma subsequência que converge fraco.

Definição 1.12. Sejam X um espaço de Banach e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X'$. Dizemos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco* para $f \in X'$ se $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para cada $x \in X$. Denotamos essa convergência por $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Abaixo seguem algumas propriedades da convergência fraca*.

Proposição 1.13. Sejam X um espaço de Banach e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X'$. Valem os seguintes resultados:

(i) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então $(\|f_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Além disso,

$$\|f\| \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|.$$

(ii) Se $f_k \to f$ em X', então $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(iii) Se $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $u_k \to u$ em X, então $\langle f_k, u_k\rangle \to \langle f, u\rangle$.

Um dos principais objetivos do estudo da convergência fraca* está no fato de que a bola unitária fechada em X', que nunca é compacta na topologia forte (a menos que $\dim X < \infty$), é sempre compacta na topologia fraca*.

Teorema 1.14. (Banach-Alaoglu-Bourbaki) A bola unitária fechada $B_1^{X'}(0) = \{f \in X' / \ \|f\|_{X'} \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca*.

Abaixo faz-se necessário introduzir dois novos conceitos, a fim de termos as ferramenta necessárias para descrever um clássico resultado da análise funcional.

Definição 1.15. Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é separável se existe um conjunto $N \subseteq M$ que seja denso em M e enumerável.

Definição 1.16. Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H^n \to \mathbb{R}$ uma função real definida em $H^n = H \times \cdots \times H$.

(i) Dizemos que a é uma forma multilinear de H^n, se a é linear em cada coordenada.

(ii) Dizemos que a é uma forma multilinear contínua em H^n, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a(u_1, \cdots, u_n)| \leq C \|u_1\|_H \cdots \|u_n\|_H, \quad u_i \in H, \, i = 1, \cdots, n.$$

(iii) Se $n = 2$, dizemos que uma forma bilinear contínua a em $H \times H$ é coerciva se existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

O teorema a seguir, conhecido por Teorema de Lax-Milgram (homenagem aos matemáticos Peter Lax e Arthur Milgram), tem um papel importante na teoria de equações diferenciais. Em especial, através dele, sob certas condições, pode-se demonstrar a existência e unicidade de uma solução fraca do problema elíptico com condição de Dirichlet na fronteira (encontra-se em [15, p. 118]).

Teorema 1.17. (Lax-Milgram) Sejam H um espaço de Hilbert seperável e $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear contínua e coerciva em $H \times H$. Então, para cada $L \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle L, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Ainda mais, a transformação $L \mapsto u$ é um isomorfismo entre H' e H.

Para a passagem de limite na sequência adquirida através do método de Faedo-Galerkin no Teorema de existência e unicidade de Solução para as equações de Navier-Stokes, utilizamos fortemente o conceito de imersões contínuas e compactas. Para isso, fazem-se necessárias tais definições.

Definição 1.18. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que Y está imerso em X, e denotamos por $Y \hookrightarrow X$, se Y for um subespaço vetorial de X. Dizemos ainda que a imersão de Y em X é

(i) contínua, se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_X \leq C \|u\|_Y, \quad \forall u \in Y;$$

(ii) compacta, a qual denotamos por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$, se para toda sequência limitada $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Y, existir uma subsequência $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia forte de X.

1.2 Espaços funcionais e suas propriedades

Nesta seção são apresentadas definições e resultados de certos espaços, tais como os espaços $L^p(\Omega)$, de Distribuições e de Sobolev. Para um estudo mais detalhado dos mesmos, veja [2], [5], [6], [10] e [15]

Definição 1.19. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de todas as classes de equivalência de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que $\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{dx} < \infty$.

Se $p = \infty$, então denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ essencialmente limitadas, isto é

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \, / \, \exists\, C = C(u) \geq 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Em $L^p(\Omega)$, consideramos a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{\Omega} \operatorname{ess} |u|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Riesz-Fischer (encontra-se em [5, p. 93]) temos $L^p(\Omega)$ um espaço de Banach.

Observação 1.20. O supremo essencial de uma função u é dado por

$$\sup_{\Omega} \operatorname{ess} |u| = \inf\{C / \, |u| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Teorema 1.21. Se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ for limitado, então $L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega)$.

Observação 1.22. Se $1 < p < \infty$, o dual de $L^p(\Omega)$ pode ser identificado com o $L^q(\Omega)$, desde que $1/p + 1/q = 1$. Temos ainda que $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo. No caso $p = 1$, o dual de $L^1(\Omega)$ pode ser identificado como o $L^\infty(\Omega)$, contudo o contrário não é válido.

No caso $p = 2$, podemos definir um produto interno em $L^2(\Omega)$, o qual é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, \mathrm{dx}.$$

Disso segue que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo.

Definição 1.23. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções que são localmente p-integráveis, ou seja, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^p(\mathcal{O})$ para todo compacto $\mathcal{O} \subset \Omega$.

Agora introduzimos uma série de desigualdades que serão recorrentemente utilizadas ao longo deste texto.

Teorema 1.24. (Desigualdade de Young) Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Dados $a, b \geq 0$, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.25. (Desigualdade de Hölder geral) Sejam $1 \leq p_i \leq \infty$ com $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, para cada $1 \leq i \leq k$. Se $1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_k = 1$, então $f = f_1 \cdots f_k \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Uma consequência imediata do resultado acima é a famosa desigualdade de Hölder.

Corolário 1.26. (Desigualdade de Hölder) Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Neste ponto se faz necessário abordar o conceito de função teste. Estas funções desempenham um papel vital no estudo de soluções fracas para equações diferenciais parciais.

Definição 1.27. Seja $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O suporte de ϕ é definido como o fecho em $\mathbb{R}^n$ do conjunto no qual ϕ não se anula, ou seja,

$$\operatorname{supp} \phi = \overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se ainda, $\operatorname{supp} \phi$ for compacto, dizemos que ϕ possui suporte compacto.

Definição 1.28. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. O conjunto das funções definidas de Ω em $\mathbb{R}$ que são infinitamente continuamente diferenciáveis com suporte compacto (chamadas de funções teste) será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que uma sequência de funções $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ converge para 0 se existir um compacto fixo $K \subseteq \Omega$ tal que $\operatorname{supp} \phi_m \subseteq K$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e ϕ_m e todas as suas derivadas convergem uniformemente para 0 sobre K.

Definição 1.29. Um funcional linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é dito ser uma distribuição sobre Ω se para toda $\phi_m \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, nós tivermos $T(\phi_m) \to 0$. Definimos o espaço das distribuições em Ω como sendo o dual do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, e o denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em $\mathcal{D}'(\Omega)$ usamos a topologia da convergência pontual sobre o espaço $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, as propriedades vetoriais e de convergência deste espaço são dadas por:

(i) $\langle S+T, \phi\rangle = \langle S, \phi\rangle + \langle T, \phi\rangle\,, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$

(ii) $\langle cT, \phi\rangle = c\,\langle T, \phi\rangle\,, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$

(iii) Dizemos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, se para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tivermos que $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.30. Toda função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição T_u, dada por

$$\langle T_u, \phi\rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)\mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Observação 1.31. Nem toda distribuição é oriunda de uma função localmente integrável. A contrapor, podemos considerar a distribuição delta de Dirac centrada em x_0, denotada por δ_{x_0} e definida por $\langle \delta_{x_0}, \phi\rangle = \phi(x_0), \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Para mais detalhes veja [15, p. 7].

Definição 1.32. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Denotamos a α-ésima derivada distribucional de T por $D^\alpha T$ que é dada através de

$$\langle D^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\,\langle T, D^\alpha \phi\rangle\,, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

com $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e D^α o operador diferencial definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Observação 1.33. Toda distribuição possui infinitas derivadas distribucionais e todas elas são distribuições.

Definição 1.34. Sejam $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções de $L^p(\Omega)$ tal que todas as suas derivadas distribucionais até ordem m também estão em $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para cada } |\alpha| \leq m\}.$$

Com a norma dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} \mathrm{ess}\, |D^\alpha u|, & \text{se } p = \infty, \end{cases}$$

o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é de Banach.

Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$. Ainda, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v) \, \mathrm{dx}.$$

Definição 1.35. Por $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$ denotamos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ e $H^m(\Omega)$, respectivamente, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Proposição 1.36. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, então $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. Já se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ for limitado, então $H_0^m(\Omega)$ é um subespaço próprio de $H^m(\Omega)$.

Observação 1.37. Como $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq W_0^{m,p}(\Omega)$ densamente, um funcional linear limitado em $W_0^{m,p}(\Omega)$ pode ser visto com uma distribuição. Por outro lado, se $f \in L^q(\Omega)$ com $1/p + 1/q = 1$, podemos tomar a distribuição $D^\alpha f$, para $|\alpha| \leq m$, que se estende de forma contínua ao dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Assim, denotamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$. Para mais detalhes veja [15, p. 88].

Agora apresentamos propriedades de imersão relacionadas aos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Para isso, definimos o expoente crítico $p*$ da seguinte forma:

$$\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad p* = \frac{np}{n-p}.$$

Note que $p* > p$. Assim, embora saibamos diretamente da definição que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, é uma informação bastante útil sabermos se as funções de $W^{m,p}(\Omega)$ são mais regulares.

Definição 1.38. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, para algum $n \geq 2$, e assuma que $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Diremos que Ω é de classe C^k (Lipschitz), se para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existir $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k (Lipschitz) tal que, a menos de uma renomeação e reorientação dos eixos coordenados, caso necessário, vale

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r)/x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Teorema 1.39. Sejam $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ um aberto limitado de classe C^1. Então temos as seguintes inclusões contínuas:

(i) se $1 \leq p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$,

(ii) se $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $n \leq q < \infty$,

(iii) se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

Ainda mais, no último caso temos a imersão contínua no conjunto das funções Hölder contínuas de expoente $\alpha = 1 - (n/p)$. Em particular,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}),\ p > n.$$

Demonstração. Encontra-se em [15, p. 78]. □

Teorema 1.40. (Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes inclusões são compactas:

(i) se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p*$,

(ii) se $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$,

(iii) se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Encontra-se em [15, p. 84-85]. □

O Teorema do Traço, que é introduzido logo abaixo, possui consequências importantes, dentre as quais, a obtenção da Fórmula de Green para funções em $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Teorema 1.41. (Traço) Seja Ω um subconjunto aberto limitado e de classe C^1. Então existe um operador linear contínuo

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subseteq L^2(\partial\Omega),$$

chamado operador traço, tal que:

(i) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$, $\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$,

(ii) $\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$.

Se $\nu(x)$ é o vetor unitário ortonormal a fronteira $\partial\Omega$, nós denotamos suas funções componentes por $\nu_i(x)$ e assim, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$.

Teorema 1.42. (Fórmula de Green) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Então para $u, v \in H^1(\Omega)$ e para $1 \leq i \leq n$, temos a identidade

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{dx} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i \mathrm{dS}. \tag{1.1}$$

No que se segue, ao invés de escrevermos $\gamma_0 u$, escrevemos apenas u sobre $\partial\Omega$ e entendemos isto como o traço de u sobre $\partial\Omega$.

Observação 1.43. Se $u \in H^2(\Omega)$ e substituirmos $\partial u / \partial x_i$ no lugar de u em (1.1), obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{dx} = -\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i \mathrm{dS}.$$

Assim, nós temos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{dx} = -\int_\Omega (\Delta u) v \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{dS},$$

com $\partial u / \partial \nu$ sendo o traço da derivada normal de u.

Denotamos por $\mathbb{L}^p(\Omega) := (L^p(\Omega))^n$, ou seja, o espaço das funções vetoriais $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $u_i \in L^p(\Omega)$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Tal espaço é de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

O espaço $\mathbb{L}^2(\Omega)$ é de Hilbert com produto interno denotados por

$$(u, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x) v_i(x) \, \mathrm{dx}.$$

De forma análoga aos espaços $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega)$, denotamos que:

$\mathbb{D}(\Omega) := (\mathcal{D}(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^{\mathrm{m}}(\Omega) := (H^m(\Omega))^n$ e $\mathbb{H}_0^1(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^n$.

Em $\mathbb{H}^{\mathrm{m}}(\Omega)$ o produto interno e a norma são dados, respectivamente, por

$$(u,v)_{\mathbb{H}^{\mathrm{m}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H^m(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u_i, D^\alpha v_i)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{\mathrm{m}}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Apresentamos abaixo a Desigualdade de Poincaré (cujo nome é dado em homenagem ao matemático francês Henri Poincaré). Essa desigualdade nos permite estimar a norma $L^p(\Omega)$ de uma função em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pela norma $L^p(\Omega)$ de seu gradiente com derivada fraca.

Teorema 1.44. (Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $1 \leq p < \infty$. Então, existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^{\mathrm{p}}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 1.45.

(i) Várias generalizações da Desigualdade de Poincaré são possíveis. Por exemplo, se Ω for limitado em (ao menos) uma direção, ou ainda, se as funções não se anulam (no sentido do traço) sobre a fronteira toda, mas somente em uma porção dela em que se tenha uma medida $(n-1)$-dimensional positiva (encontra-se em [15, p. 71]).

(ii) Em geral, a Desigualdade de Poincaré não é válida para domínios ilimitados (encontra-se em [15, p. 71]).

Da Desigualdade de Poincaré, segue que a norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e que o espaço $H_0^1(\Omega)$ é de Hilbert com o produto interno dado por

$$((u,v))_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Neste caso, denotamos o produto interno e a norma em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ respectivamente, por

$$((u,v))_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} ((u_i, v_i))_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos agora outras classes de espaços de funções contínuas e espaços $L^p(\Omega)$, cujos elementos são funções do tempo em um espaço de Banach. Em espaços como estes que as soluções das equações de Navier-Stokes serão encontradas.

Definição 1.46. Sejam X um espaço de Banach, $T > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de todas as funções vetoriais $u : [0,T] \to X$ tais que $\|u(t)\|_X$ é uma função real Lebesgue mensurável e $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$.

O espaço $L^p(0,T;X)$ é de Banach se consideramos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{sup\,ess}_{[0,\mathrm{T}]} \|u(t)\|_X, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.47. Se $1 < p < \infty$ e X é reflexivo, então $L^p(0,T;X)$ também é reflexivo. Se $1/p + 1/q = 1$, o dual de $L^p(0,T;X)$ é identificado como o $L^q(0,T;X')$, e ainda, se $p = 1$, o dual de $L^1(0,T;X)$ pode ser identificado como o $L^\infty(0,T;X')$.

Definição 1.48. Sejam X um espaço de Banach e $T > 0$. Denotamos por $C([0,T];X)$ o espaço das funções vetoriais contínuas $u : [0,T] \to X$.

O espaço $C([0,T];X)$ é de Banach se consideramos a norma

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \sup \|u(t)\|_X.$$

No estudo das equações de Navier-Stokes utilizamos alguns espaços funcionais importantes, os quais denotamos por $\mathcal{V}$, H e V, que são dados por:

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathbb{D}(\Omega) \,/\, \mathrm{div} u = 0\},$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \\
\mathrm{V} &= \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Em V utilizamos o produto interno $((\cdot,\cdot))_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ e a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ herdadas de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e em H, utilizamos o produto interno $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ e a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ herdadas de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Por simplicidade, ao tratarmos dos produtos internos e normas destes espaços, omitiremos a indexação, ou seja, denotamos $((\cdot,\cdot))$ e $(\cdot,\cdot)$ os produtos internos de V e H, respectivamente e $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ serão as normas, respectivamente.

Se Ω for um subconjunto aberto limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, então os espaços H e V possuem caracterizações (cujas provas podem ser encontradas em [26, p. 15-19]) dadas por

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H} = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \,/\, \mathrm{div} u = 0,\ u\cdot\nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \\
&\mathrm{V} = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \,/\, \mathrm{div} u = 0\}.
\end{aligned}
$$

Teorema 1.49. Os espaços V, H e V' são espaços de Hilbert reflexivos quando consideramos V e H munidos dos produtos internos de $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e $\mathbb{L}^2(\Omega)$, respectivamente. Ainda, $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H} \equiv \mathrm{H}' \hookrightarrow \mathrm{V}'$ com a imersão $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H}$ sendo contínua e compacta.

Como consequência das identificações no Teorema 1.49, para cada $u \in \mathrm{V}$ e $f \in \mathrm{H}$, o produto escalar (f,u) em H coincide com o produto de dualidade $\langle f,u\rangle$, quando identificamos f com seu representante em V', ou seja

$$
\langle f,u\rangle = (f,u)\,, \quad \forall f \in \mathrm{H}, \forall u \in \mathrm{V}\,. \tag{1.2}
$$

Agora, para cada $u \in \mathrm{V}$ fixo, o funcional $v \mapsto ((u,v))$ é linear contínuo e injetor em V, e assim, existe um único elemento em V', que denotamos por Au tal que

$$
\langle Au,v\rangle = ((u,v))\,, \quad \forall v \in \mathrm{V}\,. \tag{1.3}
$$

A continuidade do funcional linear se dá pois

$$
\begin{aligned}
&|\langle Au,v\rangle| = |((u,v))| \leq \|u\|\,\|v\| \\
\Rightarrow \|Au\|_{\mathrm{V}'} &= \sup_{\substack{v\in\mathrm{V}\\ \|v\|=1}} |\langle Au,v\rangle| \\
&\leq \sup_{\substack{v\in\mathrm{V}\\ \|v\|=1}} \|u\|\,\|v\| \leq \|u\|\,.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Ainda, temos A sendo um isomorfismo entre V e V$'$. O operador A é chamado de Operador de Stokes e, além disso, se $u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{V}$, temos $Au = -\Delta u$.

1.3 Resultados técnicos

Esta seção é destinada à apresentação de resultados técnicos que usaremos nos capítulos seguintes. Dentre eles, estão a desigualdade de Gronwall e teoremas de imersões compactas necessários para as estimativas a priori na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de solução fraca das equações de Navier-Stokes.

Definição 1.50. Uma função $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ é dita ser absolutamente contínua em $[0, T]$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para toda sequência de subintervalos (s_k, t_k) disjuntos de $[0, T]$ que satisfizerem

$$\sum_k (t_k - s_k) < \delta,$$

tivermos que

$$\sum_k |f(t_k) - f(s_k)| < \varepsilon.$$

O conjunto de todas as funções absolutamente contínuas em $[0, T]$ é denotado por $AC([0, T])$.

Observação 1.51. Sabe-se que o conjunto das funções absolutamente contínuas coincide com o espaço formado pelas primitivas de funções Lebesgue integráveis, isto é,

$$f \in AC([0, T]) \Longleftrightarrow \exists\, \varphi \in L^1(0, T) \ \text{ tal que } \quad f(t) = c + \int_0^t \varphi(s)\, ds, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Para detalhes deste fato veja [16, p. 338].

Na mesma linha da observação anterior, temos o seguinte resultado,

Lema 1.52. Sejam X um espaço de Banach e funções $u, g \in L^1(0, T; X)$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

(i) u é igual q.s. em $[0, T]$ à uma primitiva de g, ou seja, $\exists\, \xi \in X$ tal que

$$u(t) = \xi + \int_0^{\mathrm{t}} g(s) \mathrm{ds} \text{ q.s. em } [0, T].$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} u(t)\phi'(t)\mathrm{dt} = -\int_0^{\mathrm{T}} g(t)\phi(t)\mathrm{dt}, \quad \forall\phi \in \mathcal{D}(0,T).$

(iii) $\dfrac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle = \langle \eta, g(t)\rangle$, $\forall \eta \in X'$ no sentido das distribuições escalares em $(0,T)$.

Se u satisfaz uma (logo, todas) das condições acima, então u é igual q.s. à uma função absolutamente contínua de $[0,T]$ em X.

Demonstração. Encontra-se em [26, p. 250-252]. □

Lema 1.53. (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial) Seja η uma função absolutamente contínua não negativa em $[0,T]$, que satisfaz q.s. em $[0,T]$, a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

com ϕ e ψ funções integráveis e não negativas em $[0,T]$. Então

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^{\mathrm{t}} \phi(s)\mathrm{ds}\right)\left[\eta(0) + \int_0^{\mathrm{t}} \psi(s)\mathrm{ds}\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Se além das hipóteses acima, tivermos que $\eta'(t) \leq \phi(t)\psi(t)$ em $[0,T]$ e $\eta(0) = 0$, então

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0,T].$$

Demonstração. Encontra-se em [10, p. 708-709]. □

Sejam X_0, X e X_1 espaços de Hilbert. Se $v \in L^1(\mathbb{R}; X_1)$, denotamos por $\widehat{v}$ sua transformada de Fourier, dada por

$$\widehat{v}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t\cdot\xi} v(t)\mathrm{dt}.$$

A derivada fracionária de Riesz de ordem $\gamma > 0$ de v é dada pela transformação de Fourier inversa de $(2\pi i\xi)^\gamma \widehat{v}$ (quando existir), ou ainda,

$$\widehat{D_t^\gamma v(\xi)} = (2\pi i\xi)^\gamma \widehat{v}(\xi).$$

Para $\gamma > 0$, consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{v \in L^2(\mathbb{R}; X_0) /\, D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R}; X_1)\}$$

com a norma definida por

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};X_0,X_1)} = (\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + \||\xi|^\gamma \widehat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};X_1)})^{\frac{1}{2}}.$$

Para qualquer conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$, definimos o subespaço $\mathcal{H}^\gamma_K$ de $\mathcal{H}^\gamma$ como sendo o conjunto das funções $v \in \mathcal{H}^\gamma$ com suporte contido em K, ou seja,

$$\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \{v \in \mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1)/ \operatorname{supp} v \subseteq K\}.$$

Assim, podemos enunciar o seguinte Teorema de Compacidade.

Teorema 1.54. Sejam X_0, X e X_1 espaços de Hilbert satisfazendo $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1$. Então para qualquer conjunto limitado $K \subseteq \mathbb{R}$ e qualquer $\gamma > 0$ temos

$$\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R}; X_0, X_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}; X).$$

Demonstração. Encontra-se em [26, p. 274-276]. □

Sejam X_0, X e X_1 espaços de Hilbert com $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1$. Definimos o espaço

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) = \{v \in L^{p_0}(0, T; X_0)/ v' \in L^{p_1}(0, T; X_1)\},$$

com $0 < T < \infty$ e $1 < p_0$, $p_1 < \infty$. O espaço $\mathcal{X}$ munido da norma

$$\|v\|_{\mathcal{X}} = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)},$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.55. (Aubin-Lions) Sobre as condições citadas anterioremente

$$\mathcal{X}(0, T; p_0, p_1; X_0, X_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0, T; X).$$

Demonstração. Encontra-se em [26, p. 271-273]. □

Teorema 1.56. Sejam X, Y e X' espaços de Hilbert que satisfazem $X \hookrightarrow Y \equiv Y' \hookrightarrow X'$. Se $u \in L^2(0, T; X)$ e $u' \in L^2(0, T; X')$, então $u \in C([0, T]; Y)$ e vale que

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2_Y = 2 \langle u'(t), u(t)\rangle$$

no sentido das distribuições escalares em $(0, T)$.

Demonstração. Encontra-se em [26, p. 260-264]. $\square$

Observação 1.57. Note que ao aplicarmos o Lema 1.52 ao Teorema 1.56, garantimos que $\|u\|_Y^2$ é igual q.s. a uma função absolutamente contínua de $[0, T]$ em Y.

Teorema 1.58. Sejam X e Y espaços de Banach com $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$. Considere ainda, B um subconjunto limitado em $L^1(0, T; Y) \cap L^p(0, T; X)$, $T > 0$, $p > 1$ tal que

$$\lim_{a \to 0} \sup_{u \in B} \int_0^{T-a} \|u(t+a) - u(t)\|_X^p \, \mathrm{dt} = 0.$$

Então, B é relativamente compacto em $L^q(0, T; X)$, $\forall q \in [1, p]$.

Demonstração. Encontra-se em [25, p. 100]. $\square$

1.4 Considerações sobre o termo não linear das equações de Navier-Stokes

Nesta seção apresentamos resultados relacionados a forma trilinear correspondente ao termo não linear presente nas equações de Navier-Stokes e ao seu operador associado. Vale frisar que para estes resultados, tomamos a dimensão do espaço como sendo $n = 2$. Um estudo com $n = 3$ pode ser encontrado em [26].

Vale a pena enfatizar que os assuntos discutidos aqui fazem parte do cerne das questões abordadas por esta dissertação. É por isso que faremos as demonstrações de todos os resultados desta seção.

Lema 1.59. (Desigualdade de Ladyzhenskaya) Se $n = 2$ e Ω é um aberto arbitrário, vale

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Considere $x = (x_1, x_2)$ e

$$\widetilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega \end{cases},$$

então

$$\widetilde{\phi}^2(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} \left[\widetilde{\phi}^2(s, x_2)\right] \mathrm{ds} = 2 \int_{-\infty}^{x_1} \widetilde{\phi}(s, x_2) \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s}(s, x_2) \mathrm{ds},$$

e ainda, se definirmos

$$\widetilde{\phi}_1(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{\phi}(s,x_2)\right| \left|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s}(s,x_2)\right| \mathrm{ds},$$

temos

$$\widetilde{\phi}^2(x) \leq 2\widetilde{\phi}_1(x_2).$$

De forma análoga, se

$$\widetilde{\phi}_2(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{\phi}(x_1,w)\right| \left|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s}(x_1,w)\right| \mathrm{dw},$$

temos

$$\widetilde{\phi}^2(x) \leq 2\widetilde{\phi}_2(x_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\phi}^4(x)\mathrm{dx} &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{\phi}_1(x_2)\widetilde{\phi}_2(x_1)\mathrm{dx} \\
&= 4 \left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_1(x_2)\mathrm{dx_2}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\phi}_2(x_1)\mathrm{dx_1}\right) \\
&= 4 \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\widetilde{\phi}(s,x_2)\right| \left|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s}(s,x_2)\right| \mathrm{ds}\,\mathrm{dx_2}\right) \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\widetilde{\phi}(x_1,w)\right| \left|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s}(x_1,w)\right| \mathrm{dw}\,\mathrm{dx_1}\right) \\
{\scriptstyle (\text{Hölder})} &\leq 4 \left\|\widetilde{\phi}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\widetilde{\phi}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
{\scriptstyle (\text{Young})} &\leq 4 \left\|\widetilde{\phi}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left(\frac{\left\|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left\|\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{2}\right) \\
&= 2 \left\|\widetilde{\phi}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\nabla\widetilde{\phi}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\left\|\widetilde{\phi}\right\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \left\|\widetilde{\phi}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\|\nabla\widetilde{\phi}\right\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Como $\widetilde{\phi} \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, resulta que

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|\phi\|^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Das Imersões de Sobolev, segue que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ (pois $n = 2$), assim, por densidade, segue a desigualdade (1.5).

$\square$

Lema 1.60. Sejam $n = 2$ e a função $b : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(u, v, w) = \int_\Omega [(u \cdot \nabla)\, v] w \, \mathrm{dx} = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) w_j \, \mathrm{dx}.$$

Neste caso, b é uma forma trilinear contínua e vale que

$$b(u, v, v) = 0, \quad \forall u, v \in \mathrm{V}; \tag{1.6}$$

$$b(u, v, w) = -\, b(u, w, v), \quad \forall u, v, w \in \mathrm{V}\,. \tag{1.7}$$

Demonstração. A trilinearidade segue imediatamente usando a linearidade do operador derivada, da integral e da somatória.

Para a continuidade da forma trilinear, tome $u, v, w \in \mathrm{V}$ e fixe arbitrariamente $i, j \in \{1, 2\}$. Como $u_i \in H_0^1(\Omega)$, $\partial v_j / \partial x_i \in L^2(\Omega)$, $w_j \in H_0^1(\Omega)$ e vale $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder generalizada segue que

$$\int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| \mathrm{dx} \leq \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}\,, \tag{1.8}$$

e da imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, concluímos

$$\int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| \mathrm{dx} \leq C \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}\,. \tag{1.9}$$

Daí segue que

$$u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \in L^1(\Omega),$$

logo $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ está bem definido e ainda,

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &= \left| \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, \mathrm{dx} \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| \mathrm{dx} \\ &\overset{(1.9)}{\leq} C \sum_{i,j=1}^{2} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$= C\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}\left\|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Da estimativa feitos acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\le C\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}\\
&= C\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\sum_{j=1}^{2}\|v_j\|_{H_0^1(\Omega)}\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}\\
&\le C\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\left(\sum_{j=1}^{2}\|v_j\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2}\|w_j\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= C\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\|w\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\\
&= C\|u\|\,\|v\|\,\|w\|.
\end{aligned}$$

Para mostrar (1.6), considere $\phi,\psi\in\mathcal{V}$. Então, temos (pela Fórmula de Green)

$$\begin{aligned}
b(\phi,\psi,\psi) &= \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \phi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\psi_j\,\mathrm{dx}\\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \phi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi_j^2}{2}\right)\mathrm{dx}\\
&= -\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}\left(\frac{\psi_j^2}{2}\right)\mathrm{dx}+\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\phi_i\left(\frac{\psi_j^2}{2}\right)\nu_i\,\mathrm{dS}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_\Omega(\mathrm{div}\phi)\psi_j^2\,\mathrm{dx} \quad = \quad 0,
\end{aligned}$$

pois $\phi\in\mathcal{V}$. Assim, $b(\phi,\psi,\psi)=0$, para todos $\phi,\psi\in\mathcal{V}$. Agora, dados $u,v\in$ V, existem sequências $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{V}$ tais que $\phi_m\to u$ e $\psi_m\to v$ em V. Daí que, pela continuidade da forma trilinear b e das considerações acima, segue que

$$b(\phi_m,\psi_m,\psi_m)\to b(u,v,v),$$

e

$$b(\phi_m,\psi_m,\psi_m)=0,\quad \forall m\in\mathbb{N},$$

ou seja,

$$b(u,v,v)=0, \quad \forall u,v\in \mathrm{V}\,.$$

Agora, para mostrarmos (1.7), considere $u,v,w\in \mathrm{V}$ e note que

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(1.6)}{=} b(u,v-w,v-w) \\ &= b(u,v,v)-b(u,v,w)-b(u,w,v)+b(u,w,w) \\ &\overset{(1.6)}{=} -b(u,v,w)-b(u,w,v). \end{aligned}$$

Assim,

$$b(u,v,w)=-\,b(u,w,v).$$

□

Definimos agora o operador bilinear $B:\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{V}'$ tal que, dados $u,v\in\mathrm{V}$, temos

$$\langle B(u,v),w\rangle := b(u,v,w), \quad \forall w\in\mathrm{V},$$

e ainda, para cada $u\in\mathrm{V}$, temos

$$Bu=B(u,u)\in\mathrm{V}' \text{ e } \|Bu\|_{\mathrm{V}'}=\sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}}|b(u,u,v)|\,.$$

Como V é subespaço de H, pelo Teorema de Hahn-Banach, temos que existe $\widetilde{Bu}\in\mathrm{H}'$ tal que

$$\left\langle \widetilde{Bu},v\right\rangle = \langle Bu,v\rangle\,, \forall v\in\mathrm{V} \text{ e } \left\|\widetilde{Bu}\right\|_{\mathrm{H}'}=\|Bu\|_{\mathrm{V}'}\,.$$

Agora, do Teorema de Representação de Riesz segue que existe um único $\theta_u\in\mathrm{H}$ tal que

$$\begin{aligned} &\left\langle \widetilde{Bu},v\right\rangle = (\theta_u,v)\,, \forall v\in\mathrm{H}, \text{ e ainda} \\ &|\theta_u|_{\mathrm{H}}=\left\|\widetilde{Bu}\right\|_{\mathrm{H}'}=\|Bu\|_{\mathrm{V}'}=\sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}}|b(u,u,v)|\,. \end{aligned}$$

Lema 1.61. Considere $n=2$.

(i) Se $u\in L^2(0,T;\mathrm{V})$, então Bu dado por

$$\langle Bu(t),v\rangle = b(u(t),u(t),v), \quad \forall v\in\mathrm{V} \text{ e q.s. em } [0,T]\,,$$

pertence a $L^1(0,T;\mathrm{V}')$. Mais geralmente, este resultado segue se $n\le 4$.

(ii) $|b(u,v,w)| \leq 2^{\frac{1}{2}} \, |u|^{\frac{1}{2}} \, \|u\|^{\frac{1}{2}} \, \|v\| \, |w|^{\frac{1}{2}} \, \|w\|^{\frac{1}{2}}$, $\forall u, v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

(iii) Se $u \in L^2(0,T;\mathrm{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathrm{H})$, então $Bu \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$ e ainda,

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} \leq 2^{\frac{1}{2}} \, |u|_{L^\infty(0,T;\mathrm{H})} \, \|u\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})} \, .$$

Demonstração. (i) Note que

$$\begin{aligned} \|Bu(t)\|_{\mathrm{V}'} &= \sup_{\substack{v \in \mathrm{V} \\ \|v\|=1}} |\langle Bu(t), v \rangle| \\ &= \sup_{\substack{v \in \mathrm{V} \\ \|v\|=1}} |b(u(t), u(t), v)| \\ &\leq \sup_{\substack{v \in \mathrm{V} \\ \|v\|=1}} C \, \|u(t)\|^2 \, \|v\| \\ &\leq C \, \|u(t)\|^2 \, , \ \forall t \in [0,T] \, . \end{aligned}$$

Como $u \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, segue que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|^2 \, \mathrm{dt} < \infty$. Logo,

$$\int_0^{\mathrm{T}} \|Bu(t)\|_{\mathrm{V}'} \, \mathrm{dt} \leq C \int_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|^2 \, \mathrm{dt} < \infty,$$

ou seja, $Bu \in L^1(0,T;\mathrm{V}')$.

(ii) Dados $u, v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| &\overset{(1.8)}{\leq} \sum_{i,j=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \left[\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \right], \end{aligned}$$

então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz deduzimos que

$$|b(u,v,w)| \leq \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e que

$$\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \leq \left(\sum_{j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e portanto, juntando essas informações concluímos

$$|b(u,v,w)| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

O primeiro membro da desigualdade acima, nada mais é do que

$$\|v\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{2} \|v_j\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

No segundo membro, usamos a desigualdade de Ladyzhenskaya (1.5) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq 2^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_i\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}} |u| \, \|u\| . \end{aligned}$$

De forma análoga, $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq 2^{\frac{1}{2}} |w| \, \|w\|$. Assim, temos

$$|b(u,v,w)| \leq 2^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \|v\| \, |w|^{\frac{1}{2}} \|w\|^{\frac{1}{2}} , \forall u,v,w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) . \quad (1.10)$$

Ainda, se $u,v,w \in \mathrm{V}$, da relação $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$, temos outra estimativa para b, dada por

$$|b(u,v,w)| \leq 2^{\frac{1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |v|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}} \|w\| , \forall u,v,w \in \mathrm{V} .$$

(iii) De (1.10), temos

$$|b(u,u,v)| \leq 2^{\frac{1}{2}} |u| \, \|u\| \, \|v\| , \forall u,v \in \mathrm{V},$$

e assim,

$$\|Bu\|_{\mathrm{V}'} \leq 2^{\frac{1}{2}} |u| \, \|u\| , \forall u \in \mathrm{V} .$$

Agora, se $u \in L^2(0,T;\mathrm{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathrm{H})$, então $Bu(t) \in \mathrm{V}'$ q.s. em $[0,T]$ e assim,

$$\|Bu(t)\|_{\mathrm{V}'} \leq 2^{\frac{1}{2}} |u(t)| \, \|u(t)\| .$$

Daí que

$$\int_0^{\mathrm{T}} \|Bu(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \, \mathrm{dt} \leq 2 \int_0^{\mathrm{T}} |u(t)|^2 \, \|u(t)\|^2 \, \mathrm{dt}$$

$$\leq 2\,|u|^2_{L^\infty(0,T;\mathrm{H})} \int_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|^2\,\mathrm{dt}$$
$$\leq 2\,|u|^2_{L^\infty(0,T;\mathrm{H})} \|u\|^2_{L^2(0,T;\mathrm{V})},$$

ou seja,

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} \leq 2^{\frac{1}{2}}\,|u|_{L^\infty(0,T;\mathrm{H})} \|u\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})}.$$

Portanto, $Bu \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$. □

Lema 1.62. Se $u_j \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathrm{V})$ e $u_j \to u$ em $L^2(0,T;\mathrm{H})$, então para toda função vetorial w com componentes $C^1(\overline{\Omega \times (0,T)})$, vale que

$$\int_0^{\mathrm{T}} b(u_j(t), u_j(t), w(t))\mathrm{dt} \to \int_0^{\mathrm{T}} b(u(t), u(t), w(t))\mathrm{dt}. \tag{1.11}$$

Demonstração. Escrevemos

$$\int_0^{\mathrm{T}} b(u_j, u_j, w)\mathrm{dt} = -\int_0^{\mathrm{T}} b(u_j, w, u_j)\mathrm{dt}$$
$$= -\sum_{i,k=1}^{n} \int_0^{\mathrm{T}} \int_\Omega (u_j)_i \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right)(u_j)_k\,\mathrm{dxdt}.$$

Das hipóteses de $u_j \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathrm{V})$ e $u_j \to u$ em $L^2(0,T;\mathrm{H})$ usando o item (v) da Proposição 1.7, segue que o somatório de integrais acima converge para

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \int_0^{\mathrm{T}} \int_\Omega u_i \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right) u_k\,\mathrm{dxdt} = -\int_0^{\mathrm{T}} b(u, w, u)\mathrm{dt}$$
$$= \int_0^{\mathrm{T}} b(u, u, w)\mathrm{dt},$$

o que prova o lema. □

1.5 Dimensões de Hausdorff e fractal

Nesta pequena seção apresentamos as noções de dimensão de Hausdorff e dimensão fractal. Aproveitamos ainda para introduzir alguns resultados com o objetivo de estudarmos a finitude destas dimensões para o atrator global das equações de Navier-Stokes, o qual será discutido no Capítulo 4.

Em geral, esta teoria trata de responder se os atratores dos semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita podem ser vistos como objetos em espaços de dimensão finita. Para uma abordagem mais detalhada, veja [23] e [24].

Seja X um espaço métrico e um subconjunto $Y \subseteq X$. Dados $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$ e $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq X$ uma cobertura de Y por bolas, com $r_i > 0$ sendo o raio da bola B_i, definimos

$$\mu_H(Y, \alpha, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} r_i^\alpha \,/\, Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \text{ e } r_i \leq \varepsilon \right\}, \tag{1.12}$$

com a convenção de que $\inf \varnothing = \infty$. Como $\mu_H(Y, \alpha, \varepsilon)$ cresce ou fica constante quando ε decresce, definimos

$$\mu_H(Y, \alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_H(Y, \alpha, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_H(Y, \alpha, \varepsilon).$$

Proposição 1.63. Seja $\wp(X)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de X. Fixados $\alpha \geq 0$ e $\delta > 0$, valem:

(i) $\mu_H(\cdot, \alpha, \varepsilon) : \wp(X) \to [0, \infty]$ é uma medida exterior (para mais detalhes veja [23]).

(ii) $\mu_H(\cdot, \alpha) : \wp(X) \to [0, \infty]$ é uma medida exterior métrica (para mais detalhes veja [23]).

Demonstração. Encontra-se em [23, p. 76]. □

Proposição 1.64. Seja $\alpha' > \alpha$. Se $\mu_H(Y, \alpha) < \infty$, então $\mu_H(Y, \alpha') = 0$ e se $\mu_H(Y, \alpha') > 0$, então $\mu_H(Y, \alpha) = \infty$.

Demonstração. É suficiente mostrar a primeira afirmação, visto que a segunda é sua contrapositiva. Se $\mu_H(Y, \alpha) < \infty$, para todo valor $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_i\}_{i \in I}$ com

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i, \quad r_i \leq \delta \qquad \text{e} \qquad \sum_{i \in I} r_i^\alpha \leq \mu_H(Y, \alpha) + 1.$$

Mas para $\alpha' > \alpha$,

$$\sum_{i \in I} r_i^{\alpha'} \leq \delta^{\alpha' - \alpha} \sum_{i \in i} r_i^\alpha \leq \delta^{\alpha' - \alpha} [\mu_H(Y, \alpha) + 1],$$

logo, $\mu_H(Y, \alpha', \delta) \leq \delta^{\alpha' - \alpha} [\mu_H(Y, \alpha) + 1] \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ e $\mu_H(Y, \alpha') = 0$. □

Definição 1.65. Para qualquer $Y \subseteq X$, a dimensão de Hausdorff de Y é definida pelo número real não negativo dado por

$$\dim_H Y = \inf\{\alpha \geq 0 \,/\, \mu_H(Y, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 \,/\, \mu_H(Y, \alpha) = \infty\}.$$

A dimensão de Hausdorff consegue analisar um conjunto a um nível infinitesimal, pois se vale de ε-coberturas com ε arbitrariamente pequeno. Chegar a tal nível é a chave para detectar as propriedades fractais do mesmo, como irregularidades ou autossimilaridades.

Proposição 1.66. Seja X um espaço métrico. Todo subconjunto enumerável de X possui dimensão de Hausdorff igual a 0.

Demonstração. Note que todo conjunto unitário $\{x\}$ possui dimensão de Hausdorff zero, qualquer que seja $\alpha \geq 0$, pois ele próprio é uma cobertura enumerável para $\{x\}$, a qual é uma ε-cobertura de $\{x\}$, para todo $\varepsilon > 0$, pois o raio de $\{x\}$ é 0. Assim, $\mu_H(\{x\}, \alpha, \varepsilon) = 0$.

O resultado segue da propriedade de subaditividade enumerável de $\mu_H(\cdot, \alpha, \varepsilon) : \wp(X) \to [0, \infty]$ que é uma medida exterior. $\square$

Considere $\varepsilon > 0$ e $Y \subseteq X$. Seja $N_Y(\varepsilon)$ o número mínimo de bolas de raio $\varepsilon > 0$ necessário para cobrir Y.

Uma questão natural que surge é saber quão rápido $N_Y(\varepsilon)$ cresce, quando ε vai a zero; o que em um certo sentido, é investigar como Y adquire alguma regularidade ou não, a medida que observamos o conjunto numa escala maior (ε menor). Dadas duas grandezas $a\varepsilon^\alpha$ e $b\varepsilon^\beta$, note que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log a\varepsilon^\alpha}{\log b\varepsilon^\beta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

de modo que, na escala log por log, conseguimos mensurar de que forma estas grandezas se relacionam quando $\varepsilon \to 0^+$. A função da dimensão fractal é estabelecer, quando for possível, como as grandezas $N_Y(\varepsilon)$ e $1/\varepsilon$ se compensam na escala log por log, quando $\varepsilon \to 0^+$. Como o limite acima pode não existir, dependendo das irregularidades locais de Y, usamos o limite superior.

Definição 1.67. Dados $\varepsilon > 0$, $Y \subseteq X$ e $N_Y(\varepsilon)$. A dimensão fractal de Y (ou capacidade de Y) é definida pelo número

$$\dim_F(Y) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N_Y(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}. \tag{1.13}$$

A diferença entre as dimensões de Hausdorff e a fractal estão no fato de que, na primeira, consideramos a cobertura de Y por bolas de raio menor ou igual a ε, já na segunda, consideramos a cobertura de Y por bolas de raio ε. Assim, podemos definir o número $\mu_F(Y, \alpha, \varepsilon)$ de forma análoga a definição de $\mu_H(Y, \alpha, \varepsilon)$ para a dimensão fractal, ou seja, se em (1.12) considerarmos $\varepsilon = r_i$, $\forall i \in I$, segue que

$$\begin{aligned}\mu_F(Y, \alpha, \varepsilon) &= \inf\left\{\sum_{i\in I} \varepsilon^\alpha \,/\, Y \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i\right\}\\ &= \inf\left\{\varepsilon^\alpha \sum_{i\in I} 1 \,/\, Y \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i\right\}.\end{aligned}$$

Como $N_Y(\varepsilon)$ é o número mínimo de bolas de raio $\varepsilon > 0$ necessário para cobrir Y, segue que

$$\mu_F(Y, \alpha, \varepsilon) = \varepsilon^\alpha N_Y(\varepsilon).$$

Logo, é claro que

$$\mu_H(Y, \alpha, \varepsilon) \leq \mu_F(Y, \alpha, \varepsilon),$$

assim,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \mu_H(Y, \alpha, \varepsilon) = \mu_H(Y, \alpha) \leq \mu_F(Y, \alpha) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^\alpha N_Y(\varepsilon).$$

Portanto,

$$\dim_H Y \leq \dim_F Y.$$

A desigualdade acima pode, de fato, ser uma desigualdade estrita, como apresentamos no exemplo abaixo.

Exemplo 1.68. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $Y = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Se

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4n(n+1)},$$

então os pontos $1, \cdots, 1/n$ pertencem necessariamente a n diferentes bolas de raios ε_n. Daí que $N_Y(\varepsilon) \geq n$ e do lim sup em (1.13), concluímos que $\dim_F Y \geq \frac{1}{2}$.

Por outro lado, como Y é enumerável, da Proposição 1.66 temos que $\dim_H Y = 0$.

Capítulo 2

Um estudo das equações de Navier-Stokes

A formulação clássica do problema de valores iniciais e de fronteira das equações de Navier-Stokes de um fluido homogêneo incompressível em uma região limitada é dada a seguir:

Formulação Clássica: Dados $T > 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular, $\nu > 0$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Queremos encontrar uma função vetorial $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)\, u + \nabla p = f, \qquad \text{em } \Omega \times (0,T)\,, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad \text{em } \Omega \times (0,T)\,, \tag{2.2}$$

$$u = 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T)\,, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \text{em } \Omega. \tag{2.4}$$

Acima $u(x,t)$ denota o vetor velocidade do fluido, $p(x,t)$ a pressão e $f(x,t)$ uma força externa dada.

Em (2.1) temos o balanço das forças que atuam no sistema de acordo com a segunda Lei de Movimento de Newton. O termo div $u = 0$ nos dá a condição de homogeneidade e incompressibilidade do fluido, isto é, uma densidade de massa constante. A constante $\nu > 0$ é chamada de viscosidade do fluido e depende das propriedades físicas do mesmo. Os termos $\partial u/\partial t$ e $u \cdot \nabla u$ descrevem a aceleração total da partícula no fluido. O termo $-\nu\Delta u$ descreve a fricção entre as partículas do fluido. O termo $u = 0$ sobre $\partial\Omega\times(0,T)$ refere-se a condição de antideslizamento do fluido, em que temos a velocidade do fluido em todos os limites da interface fluido-sólido sendo igual à do contorno do sólido, ou seja, as moléculas mais exteriores do fluido agem como presas às superfícies por onde escoam. Por fim, a condição inicial, dada por $u(x,0) = u_0$, representa a velocidade inicial do fluido no espaço $x \in \Omega$ e tempo $t = 0$.

Nosso objetivo neste Capítulo é investigar a formulação fraca para o problema, a existência e a unicidade solução do sistema descrito pelas condições (2.1) – (2.4) para o caso $n = 2$.

2.1 Formulação fraca para as equações de Navier-Stokes

Assuma que u e p são soluções clássicas de (2.1) – (2.4), isto é,

$$u \in C^2\left(\Omega \times (0,T); \mathbb{R}^2\right) \cap C\left(\overline{\Omega \times (0,T)}; \mathbb{R}^2\right)$$

e

$$p \in C^1\left(\Omega \times (0,T); \mathbb{R}^2\right),$$

e satisfazem as equações (2.1) – (2.4).

É claro que $u \in L^2(0,T;\mathrm{V})$ e ainda, se $v \in \mathcal{V}$ segue que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t) - \nu\Delta u(t) + (u(t)\cdot\nabla)\, u(t) + \nabla p(t), v\right) = (f(t), v)\,, \qquad (2.5)$$

q.s. em $(0,T)$.

O termo $(-\Delta u(t), v)$ pode ser visto como $((u(t),v))$. De fato,

$$\begin{aligned}
(-\Delta u(t), v) &= -\sum_{i=1}^{n}(\Delta u_i(t), v_i) = -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \Delta u_i(t)\cdot v_i \mathrm{dx} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \nabla u_i(t)\cdot\nabla v_i \mathrm{dx} - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega} v\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(t)dS \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \nabla u_i(t)\cdot\nabla v_i \mathrm{dx} = \sum_{i=1}^{n}(\nabla u_i(t), \nabla v_i) \\
&= ((u(t), v))\,.
\end{aligned}$$

O termo $(\nabla p(t), v)$ se anula. De fato,

$$\begin{aligned}
(\nabla p(t), v) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(t), v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial p}{\partial x_i}(t)\cdot v_i\,\mathrm{dx} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} p(t)\cdot\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\mathrm{dx} = -\int_{\Omega} p(t)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\mathrm{dx} \\
&= -\int_{\Omega} p(t)\cdot \mathrm{div} v\,\mathrm{dx} = 0.
\end{aligned}$$

Como $u \in C^2\left(\Omega\times(0,T);\mathbb{R}^2\right)\cap C(\overline{\Omega\times(0,T)};\mathbb{R}^2)$, então temos assegurado que vale $\partial u/\partial t \in L^2(0,T;V)$. Mais ainda, do fato de termos $\mathrm{V}\hookrightarrow\mathrm{H}\equiv\mathrm{H}'\hookrightarrow\mathrm{V}'$, então $u\in L^2(0,T;\mathrm{V}')$. Assim, para cada $v\in\mathrm{V}$, a aplicação $t\mapsto\langle\partial u(t)/\partial t, v\rangle$ é $L^2\left(0,T\right)$. Logo, define uma distribuição sobre $(0,T)$ e para cada $\phi\in\mathcal{D}(0,T)$ temos

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}(t), v\right\rangle, \phi\right\rangle &= \int_0^{\mathrm{T}}\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}(t), v\right\rangle\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}}\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}(t)\phi(t), v\right\rangle\mathrm{dt} \\
&= \left\langle\int_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial u}{\partial t}(t)\phi(t)\mathrm{dt}, v\right\rangle = \left\langle -\int_0^{\mathrm{T}} u(t)\frac{d\phi}{dt}(t)\mathrm{dt}, v\right\rangle \\
&= -\int_0^{\mathrm{T}}\left\langle u(t)\frac{d\phi}{dt}(t), v\right\rangle\mathrm{dt} = -\int_0^{\mathrm{T}}\langle u(t), v\rangle\frac{d\phi}{dt}(t)\mathrm{dt} \\
&= -\int_0^{\mathrm{T}}(u(t), v)\frac{d\phi}{dt}(t)\mathrm{dt} = -\left\langle (u(t), v), \frac{d\phi}{dt}\right\rangle \\
&= \left\langle\frac{d}{dt}(u(t), v), \phi\right\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v\right) = \left\langle\frac{\partial u}{\partial t}(t), v\right\rangle = \frac{d}{dt}(u(t), v)\ \text{q.s. em } (0,T),\ \forall v\in\mathcal{V}.$$

Portanto, a Equação (2.5) pode ser reformulada como

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu\left((u(t), v)\right) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle$$

q.s. em $(0,T)$, para todo $v\in\mathcal{V}$. Por densidade a equação acima segue para cada $v\in\mathrm{V}$.

Assim, podemos apresentar a seguinte formulação fraca para as equações (2.1) – (2.4):

Formulação Fraca (1) Dadas f e u_0 com

$$f \in L^2(0,T;\mathrm{V}'), \tag{2.6}$$

$$u_0 \in \mathrm{H}\,. \tag{2.7}$$

Queremos encontrar u satisfazendo

$$u \in L^2(0,T;\mathrm{V}), \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}\,(u(t),v) + \nu\,((u(t),v)) + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t),v\rangle\,, \tag{2.9}$$

q.s. em $(0,T)$, para todo $v \in \mathrm{V}$ e

$$u(0) = u_0. \tag{2.10}$$

Como temos apenas que $u \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, a condição (2.10) não faz sentido. Contudo, se u satisfaz (2.8) e (2.9), usando (1.2), (1.3) e o item (i) do Lema 1.61, podemos escrever (2.9) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\,\langle u(t),v\rangle = \langle f(t) - \nu Au(t) - Bu(t), v\rangle\,,\ \forall v \in \mathrm{V}\,.$$

Do item (i) do Lema 1.61 e como

$$f, Au \in L^2(0,T;\mathrm{V}'),$$

concluímos que

$$f - \nu Au - Bu \in L^1(0,T;\mathrm{V}').$$

Usando agora o item (iii) do Lema 1.52, segue que

$$u' \in L^1(0,T;\mathrm{V}'), \quad \text{já que} \quad u' = f - \nu Au - Bu,$$

e portanto u é igual q.s. a uma função em $C\left([0,T]\,;\mathrm{V}'\right)$ (o que faz (2.10) ter sentido).

Agora, podemos enunciar uma formulação alternativa para a Formulação Fraca (1):

Formulação Fraca (2) Dadas f e u_0 com

$$f \in L^2(0,T;\mathrm{V}'), \tag{2.11}$$
$$u_0 \in \mathrm{H}\,. \tag{2.12}$$

Queremos encontrar u satisfazendo

$$u \in L^2(0,T;\mathrm{V}),\ u' \in L^1(0,T;\mathrm{V}'), \tag{2.13}$$
$$u' + \nu Au + Bu = f \quad \text{em}\, L^1(0,T;\mathrm{V}'), \tag{2.14}$$
$$u(0) = u_0. \tag{2.15}$$

Temos então que toda solução para o Problema (1) é uma solução para o Problema (2). A implicação contrária também é facilmente verificável e assim, os Problemas (1) e (2), são equivalentes.

2.2 Existência e unicidade de solução fraca para as equações de Navier-Stokes

Nesta seção apresentamos o primeiro grande resultado deste trabalho, que diz respeito a existência e unicidade de solução fraca para as equações de Navier-Stokes no caso bidimensional.

Teorema 2.1. (Existência e Unicidade de Solução Fraca) Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e limitado. Sejam $f \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$ e $u_0 \in \mathrm{H}$. Então existe uma única função $u \in L^2(0,T;\mathrm{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathrm{H})$ tal que (2.9) e (2.10) seguem. Além disso, $u' \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$ e $u \in C\left([0,T];\mathrm{H}\right)$.

Demonstração. A demonstração deste teorema é baseada na construção de uma solução aproximada dada pelo método de Faedo-Galerkin; então uma passagem ao limite usando, em particular, uma estimativa a priori sobre a derivada no tempo da solução aproximada e ainda, um teorema de compacidade.

Passo 1: Construção da Solução Aproximada – Faedo-Galerkin

É clássico da teoria das equações de Navier-Stokes (encontra-se em [4, Teorema IV.5.5] para detalhes) que existe $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções ortonormais em H, ortogonais em V e que é total em V. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o espaço $\mathrm{V}_m = \mathrm{Span}\{w_1, \cdots, w_m\}$. Em V_m, considere o problema aproximado de (2.9): queremos encontrar uma função

$$\begin{aligned} u_m : \quad [0,T] &\rightarrow \mathrm{V}_m \\ t &\mapsto u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \end{aligned} \tag{2.16}$$

tal que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ temos

$$(u_m'(t), w_j) + \nu\left((u_m(t), w_j)\right) + b(u_m(t), u_m(t), w_j) \\ = \langle f(t), w_j \rangle, \ t \in [0,T], \ j = 1, \cdots, m, \tag{2.17}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \tag{2.18}$$

com u_{0m} sendo a projeção ortogonal em H de u_0 sobre o espaço V_m, isto é,

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, w_j)\, w_j \rightarrow u_0 \ \text{ em } \ \mathrm{H},$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Observamos que usando (2.16) no problema aproximado dado em (2.17) e (2.18), temos

$$\sum_{i=1}^{m} (w_i, w_j)\, g_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^{m} ((w_i, w_j))\, g_{im}(t) \\ + \sum_{i,l=1}^{m} b(w_i, w_l, w_j) g_{im}(t) g_{lm}(t) = \langle f(t), w_j \rangle,$$

$$g_{im}(0) = (u_0, w_i), \ \text{para } i \in \{1, 2, \ldots\},$$

que nada mais é do que um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares dadas por

$$A_m X_m'(t) + \nu B_m X_m(t) + C_m(t) = F_m(t), \\ X_m(0) = X_{0m},$$

com

$$A_m = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix}, \ X_m(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix}, \ C_m(t) = \begin{bmatrix} b(u_m(t), u_m(t), w_1) \\ \vdots \\ b(u_m(t), u_m(t), w_m) \end{bmatrix},$$

$$F_m(t) = \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m \rangle \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_{0m} = \begin{bmatrix} (u_0, w_1) \\ \vdots \\ (u_0, w_m) \end{bmatrix}.$$

Como $(w_i)_{i=1}^m$ é ortonormal em H, segue que $A_m = Id$, logo reinterpretamos o sistema acima como

$$X'_m(t) + \nu B_m X_m(t) + C_m(t) = F_m(t), \tag{2.19}$$
$$X_m(0) = X_{0m}. \tag{2.20}$$

Por fim, ainda podemos ver (2.19) - (2.20) como

$$\begin{aligned} X'_m(t) &= G_m(X_m(t), t), \\ X_m(0) &= X_{0m}, \end{aligned}$$

com $G_m(X_m(t), t) = F_m(t) - \nu B_m X_m(t) - C_m(t)$. Não é dificil mostrar que a função $G_m(X_m(t), t)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Carathéodory (encontra-se em [7, p. 43]) e, utilizando o mesmo, associado ao teorema de continuação de soluções, existe uma única solução maximal $X_m \in C^1([0, T_m))^m$, para algum $[0, T_m] \subseteq [0, T]$, e portanto segue que $g_{im} \in C^1([0, T_m))$.

A conclusão acima nos diz então que existe uma única solução aproximada $u_m \in C^1([0, T_m); \mathrm{V}_m)$ que satisfaz (2.17) e (2.18) para todo $t \in [0, T_m)$.

Passo 2: Estimativa a Priori (I)

O objetivo deste passo é mostrar que $T_m = T$ e estimar u_m em $L^\infty(0, T; \mathrm{H})$ e $L^2(0, T; \mathrm{V})$.

Ao multiplicar (2.17) por $g_{jm}(t)$ e somar as igualdades para todos $j = 1, \cdots, m$, obtemos

$$\begin{aligned} (u'_m(t), u_m(t)) + \nu\,((u_m(t), u_m(t))) + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) \\ = \langle f(t), u_m(t) \rangle. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Como $u_m \in C^1([0, T_m); \mathrm{V}_m)$, segue que

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 = 2\,(u'_m(t), u_m(t)).$$

Este fato, juntamente com o fato de $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$ nos ajudam a reinterpretar (2.21) como

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\nu\,\|u_m(t)\|^2 = 2\,\langle f(t), u_m(t) \rangle. \tag{2.22}$$

Note que o lado direito de (2.22) pode ser majorado da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
2\langle f(t), u_m(t)\rangle &\leq 2\|f(t)\|_{\mathrm{V}'}\|u_m(t)\| = 2\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}\|f(t)\|_{\mathrm{V}'}\|u_m(t)\| \\
\text{(Young)} &\leq \nu\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 .
\end{aligned}
$$

Assim, segue que

$$
\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 . \tag{2.23}
$$

Considere $0 < s < T_m$. Integrando a Desigualdade (2.23) de 0 até s, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \nu\int_0^s \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \leq \frac{1}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{dt} \\
&\Rightarrow |u_m(s)|^2 \leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{dt} \\
&\qquad \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\sup_{s\in[0,T_m]}|u_m(s)| \leq |u_0| + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} , \tag{2.24}
$$

o que implica que

$$
\lim_{t\to T_m}|u_m(t)| \leq C < \infty,
$$

e juntamente com o teorema de Blow Up para soluções de equações diferenciais ordinárias, concluímos que $T_m = T$. Além disso, através da desigualdade (2.24) obtemos:

A sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ está num subconjunto limitado de $L^\infty(0,T;\mathrm{H})$. (2.25)

Agora, integrando a Desigualdade (2.23) de 0 até T, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \nu\int_0^T \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \leq \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{dt} \\
&\Rightarrow |u_m(T)|^2 + \nu\int_0^T \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{dt} \\
&\Rightarrow \|u_m\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})}^2 \leq \frac{1}{\nu}|u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} ,
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

o que implica que:

A sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *está num subconjunto limitado de* $L^2(0,T;\mathrm{V})$. (2.27)

Passo 3: Estimativa a Priori (II)

Considere $\widetilde{u_m} \in L^2(\mathbb{R};V)$ dada por

$$\widetilde{u_m}(t) = \begin{cases} u_m(t), & t \in [0,T], \\ 0, & t \in \mathbb{R}\setminus[0,T], \end{cases}$$

e tome $\widehat{u_m}$ como a transformada de Fourier de $\widetilde{u_m}$. Neste passo mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\gamma} |\widehat{u_m}(\xi)|^2 \,\mathrm{dt} \le C_2, \quad \text{para } 0 < \gamma < \frac{1}{4}, \tag{2.28}$$

e dai, juntamente com (2.27), concluímos que:

A sequência $(\widetilde{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ *está num subconjunto limitado de* $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H})$. (2.29)

Nesta afirmação acima, $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H}) = \{v \in L^2(\mathbb{R};\mathrm{V})/D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R};\mathrm{H})\}$ está munido da norma $\|v\|^2_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H})} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathrm{V})} + \||\xi|^\gamma \widehat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathrm{H})}$.

Para provar (2.28), observamos que se $(\widetilde{u_m})' \in L^2(\mathbb{R};V')$ e ainda, se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}\widetilde{u_m}(t), \phi(t) \right\rangle &= -\langle \widetilde{u_m}(t), \phi'(t)\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \widetilde{u_m}(t)\phi'(t)\mathrm{dt} = -\int_0^T u_m(t)\phi'(t)\mathrm{dt} \\
&= -u_m(T)\phi(T) + u_m(0)\phi(0) + \int_0^T u_m'(t)\phi(t)\mathrm{dt} \\
&= -u_m(T)\phi(T) + u_m(0)\phi(0) + \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u_m'}(t)\phi(t)\mathrm{dt} \\
&= \left\langle -u_m(T)\delta_T + u_m(0)\delta_0 + \widetilde{u_m'}(t), \phi(t) \right\rangle,
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições em $\mathbb{R}$, com δ_0 e δ_T sendo as distribuições delta de Dirac em $t=0$ e $t=T$. Se denotarmos $f_m = f - \nu A u_m - B u_m$

e

$$\widetilde{f_m}(t) = \begin{cases} f_m(t), & t \in [0,T], \\ 0, & t \in \mathbb{R} \backslash [0,T], \end{cases}$$

da ultima sequência de igualdades, deduzimos que para $j = 1, \cdots, m$,

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{u_m}(t), w_j\right) = \left\langle \widetilde{f_m}(t), w_j \right\rangle + (u_{0m}, w_j)\,\delta_0 - (u_m(T), w_j)\,\delta_T.. \tag{2.30}$$

Ao usarmos a transformada de Fourier em (2.30) e usando as propriedades da transformada de Fourier de funções ($\widehat{du/dt} = 2\pi i\xi u$) e de distribuições ($\widehat{\delta_0} = 1$ e $\widehat{\delta_T} = e^{-2\pi i T\xi}$), segue que

$$2\pi i\xi\left(\widehat{u_m}(\xi), w_j\right) = \left\langle \widehat{f_m}(\xi), w_j \right\rangle + (u_{0m}, w_j) - (u_m(T), w_j)\, e^{-2\pi i T\xi}. \tag{2.31}$$

Multiplicando a igualdade (2.31) por $\widehat{g_{jm}}(\xi)$ (que é a transformada de Fourier de $\widetilde{g_{jm}}(t)$) e adicionando as equações resultantes para cada $j = 1, \cdots, m$, temos

$$\begin{aligned} &2\pi i\xi\left|\widehat{u_m}(\xi)\right|^2 \\ &= \left\langle \widehat{f_m}(\xi), \widehat{u_m}(\xi) \right\rangle + (u_{0m}, \widehat{u_m}(\xi)) - (u_m(T), \widehat{u_m}(\xi))\, e^{-2\pi i T\xi}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Vamos limitar o lado direito da igualdade (2.32). Como u_m está em $L^2(0,T;\mathrm{V})$, para cada $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathrm{T}} \|f_m(t)\|_{\mathrm{V}'}\,\mathrm{dt} &= \int_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - \nu A u_m(t) - B u_m(t)\|_{\mathrm{V}'}\,\mathrm{dt} \\ &\leq \int_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'} + \nu\,\|A u_m(t)\|_{\mathrm{V}'} + \|B u_m(t)\|_{\mathrm{V}'}\,\mathrm{dt}, \end{aligned}$$

e como o item (i) do Lema 1.61, garante que $\|Bu(t)\|_{\mathrm{V}'} \leq C_3\,\|u(t)\|^2$ e (1.4) garante que $\|Au_m(t)\|_{\mathrm{V}'} \leq \|u_m(t)\|, \forall t \in [0,T]$ e $\forall u \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, concluímos que

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mathrm{T}} \|f_m(t)\|_{\mathrm{V}'}\,\mathrm{dt} \\ &\quad \leq \|f(t)\|_{L^1(0,T;\mathrm{V}')} + \nu\,\|u_m(t)\|_{L^1(0,T;\mathrm{V})} + C_3\,\|u_m(t)\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})} \leq C_4, \end{aligned} \tag{2.33}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, já que $f \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$ e a desigualdade (2.26) garante a limitação uniforme dos demais termos.

Agora, usando (2.33) segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\|\widehat{f_m}(\xi)\right\|_{\mathrm{V}'} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left\|\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi t}\widetilde{f_m}(t)\mathrm{dt}\right\|_{\mathrm{V}'} \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left\|\widetilde{f_m}(t)\right\|_{\mathrm{V}'} \mathrm{dt} \\
&= \int_0^{\mathrm{T}} \|f_m(t)\|_{\mathrm{V}'} \mathrm{dt} \leq C_4,\ \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Da estimativa (2.24), segue que

$$|u_m(0)| \leq C_5 \quad \text{e} \quad |u_m(T)| \leq C_5. \qquad (2.35)$$

Por fim, ao usarmos (2.34) e (2.35) em (2.32), concluímos

$$\begin{aligned}
&|\xi|\,|\widehat{u_m}(\xi)|^2 \\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\left(\left\|\widehat{f_m}(\xi)\right\|\|\widehat{u_m}(\xi)\| + |u_{0m}|\,|\widehat{u_m}(\xi)| + |u_m(T)|\,|\widehat{u_m}(\xi)|\right) \\
&\quad\leq \frac{1}{2\pi}\left(C_4\|\widehat{u_m}(\xi)\| + C_5\,|\widehat{u_m}(\xi)| + C_5\,|\widehat{u_m}(\xi)|\right) \\
&\quad\leq C_6\|\widehat{u_m}(\xi)\|. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Agora afirmamos que se $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, então existe $C_\gamma > 0$ tal que

$$|\xi|^{2\gamma} \leq C_\gamma \frac{1+|\xi|}{1+|\xi|^{1-2\gamma}},\ \forall \xi \in \mathbb{R}. \qquad (2.37)$$

De fato, considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|^{2\gamma}\dfrac{\left(1+|x|^{1-2\gamma}\right)}{1+|x|}$ que é contínua em $\mathbb{R}$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} h(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma}\left(1+|x|^{1-2\gamma}\right)}{1+|x|} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma}+|x|}{1+|x|} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma < \frac{1}{4}$, segue que $2\gamma - 1 < 0$ e assim,

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|^{2\gamma-1}+1}{\frac{1}{|x|}+1} = 1.$$

Do mesmo modo, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$. Portanto, h é limitada em $\mathbb{R}$ e (2.37) segue.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\gamma} \left|\widehat{u_m}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi &\overset{(2.37)}{\leq} C_\gamma \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|\xi|}{1+|\xi|^{1-2\gamma}} \left|\widehat{u_m}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq C_\gamma \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{u_m}(\xi)\right|^2}{1+|\xi|^{1-2\gamma}} + \frac{|\xi| \left|\widehat{u_m}(\xi)\right|^2}{1+|\xi|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\xi \right) \\
&\overset{(2.36)}{\leq} C_8 \int_{\mathbb{R}} \left\|\widehat{u_m}(\xi)\right\|^2 \mathrm{d}\xi + C_9 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left\|\widehat{u_m}(\xi)\right\|}{1+|\xi|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Para finalizarmos a prova de (2.28), precisamos mostrar que o lado direito da desigualdade acima é limitado. Da conhecida identidade de Parseval, segue que

$$
\int_{\mathbb{R}} \left\|\widehat{u_m}(\xi)\right\|^2 \mathrm{d}\xi \overset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left\|\widetilde{u_m}(t)\right\|^2 \mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \left\|u_m(t)\right\|^2 \mathrm{dt} \overset{(2.26)}{\leq} C_1. \tag{2.39}
$$

Por outro lado, da desigualdade de Schwarz e da identidade de Parseval, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\left\|\widehat{u_m}(\xi)\right\|}{1+|\xi|^{1-2\gamma}} \mathrm{d}\xi &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{1-2\gamma}\right)^2} \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\widehat{u_m}(\xi)\right\|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{1-2\gamma}\right)^2} \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\widetilde{u_m}(t)\right\|^2 \mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(1+|\xi|^{1-2\gamma}\right)^2} \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\mathrm{T}} \left\|u_m(t)\right\|^2 \mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Resta-nos provar que a primeira integral do lado direito da desigualdade acima é finita. Para isso, note que $\varphi(\xi) = 1/\left(1+|\xi|^{1-2\gamma}\right)^2$ é uma função par, logo

$$
\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^{1-2\gamma}\right)^{-2} \mathrm{d}\xi = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\xi^{1-2\gamma})^2} \mathrm{d}\xi.
$$

Para $0 < \xi < 1$, temos $\xi^{1-2\gamma} = \dfrac{\xi}{\xi^{2\gamma}} > \xi$, logo

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\xi^{1-2\gamma})^2} \mathrm{d}\xi \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+\xi)^2} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}.$$

Para $\xi > 1$, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+\xi^{1-2\gamma})^2} \mathrm{d}\xi < \int_1^\infty \frac{1}{\xi^{2-4\gamma}} \mathrm{d}\xi.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{(1+\xi^{1-2\gamma})^2} \mathrm{d}\xi &= \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{(1+\xi^{1-2\gamma})^2} \mathrm{d}\xi \\
&< \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{\xi^{2-4\gamma}} \mathrm{d}\xi = \lim_{M\to\infty} \frac{\xi^{4\gamma-1}}{4\gamma-1}\Big|_1^M \\
&= \lim_{M\to\infty} \left(\frac{M^{4\gamma-1}}{4\gamma-1} - \frac{1}{4\gamma-1} \right) \\
&= -\frac{1}{4\gamma-1},
\end{aligned}$$

pois $\gamma < 1/4$. Portanto, a primeira integral de (2.40) é finita e assim, de (2.38),(2.39) e (2.40), obtemos (2.28). Daí que, de (2.27) e (2.28), segue que $(\widetilde{u_m})_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H})$, ou seja,

$$\|\widetilde{u_m}\|^2_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H})} = \|\widetilde{u_m}\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathrm{V})} + \||\xi|^\gamma \,\widehat{\widetilde{u_m}}\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathrm{H})} \leq C_{10}. \tag{2.41}$$

Se considerarmos $K = [0,T]$, de (2.25), (2.27) e (2.41), concluímos que

$$\begin{aligned}
&(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;\mathrm{H}),\\
&(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathrm{V}),\\
&(\widetilde{u_m})_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } \mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H}).
\end{aligned}$$

Passo 4: Passagem ao Limite

Pelo Teorema 1.54, temos a imersão $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R};\mathrm{V},\mathrm{H}) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R},\mathrm{H})$. Deste fato, juntamente com os Teoremas 1.14 e 1.11, temos assegurada a existência de uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função $u \in L^2(0,T;\mathrm{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathrm{H})$ tais que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;\mathrm{H}), \tag{2.42}$$

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;\mathrm{V}), \tag{2.43}$$

$$u_k \to u \text{ em } L^2(0,T;\mathrm{H}). \tag{2.44}$$

Através de um argumento de passagem para subsequências, a função u acima, é a mesma para cada uma das convergências.

Fixe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq k$ na equação aproximada (2.17) para a subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mencionada acima. Multiplicando-a por $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 até T, obtemos

$$\int_0^{\mathrm{T}} (u_k'(t), w_j)\, \phi(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u_k(t), w_j))\, \phi(t)\mathrm{dt} \\ + \int_0^{\mathrm{T}} b(u_k(t), u_k(t), w_j)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t), w_j\rangle\, \phi(t)\mathrm{dt},$$

ou ainda,

$$-\int_0^{\mathrm{T}} (u_k(t), w_j)\, \phi'(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u_k(t), w_j))\, \phi(t)\mathrm{dt} \\ + \int_0^{\mathrm{T}} b(u_k(t), u_k(t), w_j)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t), w_j\rangle\, \phi(t)\mathrm{dt}. \tag{2.45}$$

Levando em conta as convergências em (2.42) – (2.44) para os termos lineares e a convergência dada em (1.11) para o termo não linear, podemos tomar o limite quando $k \to \infty$, obtendo assim

$$-\int_0^{\mathrm{T}} (u(t), w_j)\, \phi'(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u(t), w_j))\, \phi(t)\mathrm{dt} \\ + \int_0^{\mathrm{T}} b(u(t), u(t), w_j)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t), w_j\rangle\, \phi(t)\mathrm{dt}.$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto total de V, por densidade temos

$$-\int_0^{\mathrm{T}} (u(t), v)\, \phi'(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u(t), v))\, \phi(t)\mathrm{dt} \\ + \int_0^{\mathrm{T}} b(u(t), u(t), v)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t), v\rangle\, \phi(t)\mathrm{dt}, \quad \forall v \in V.$$

Portanto, a Igualdade (2.9) é satisfeita, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\,(u(t), v) + \nu\,((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v\rangle$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $v \in \mathrm{V}$.

Passo 5: Regularidade

De (2.14), segue que $u' = f - Au - Bu$. Como cada termo do lado direito está em $L^2(0,T;\mathrm{V}')$ (f por hipótese, Au por definição e Bu pelo item (iii) do Lema 1.61), segue que

$$u' \in L^2(0,T;\mathrm{V}'), \tag{2.46}$$

o que prova (2.13).

Agora, de (2.46) e do fato de $u \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, pelo Teorema 1.56, segue que

$$u \in C\left([0,T];\mathrm{H}\right).$$

Além disso, do Teorema 1.56, segue que $\dfrac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$, o qual, usaremos na prova da unicidade, feita no Passo 7.

Passo 6: Condição Inicial

Fixe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq k$ na equação aproximada (2.17) para a subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mencionada no início do Passo 4. Multiplicando-a por $\phi \in C^1([0,T])$ tal que $\phi(0) = 1$ e $\phi(T) = 0$ e integrando de 0 até T, temos

$$\int_0^{\mathrm{T}} (u_k'(t), w_j)\phi(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u_k(t), w_j))\,\phi(t)\mathrm{dt} \\ + \int_0^{\mathrm{T}} b(u_k(t), u_k(t), w_j)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t), w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{T}} (u_k'(t), w_j)\,\phi(t)\mathrm{dt} &= (u_k(T), w_j)\,\phi(T) - (u_k(0), w_j)\,\phi(0) \\ &\qquad - \int_0^{\mathrm{T}} (u_k(t), w_j)\,\phi'(t)\mathrm{dt} \\ &= -\,(u_k(0), w_j) - \int_0^{\mathrm{T}} (u_k(t), w_j)\,\phi'(t)\mathrm{dt},\end{aligned}$$

então temos

$$-\,(u_k(0), w_j) - \int_0^{\mathrm{T}} (u_k(t), w_j)\,\phi'(t)\mathrm{dt} + \nu \int_0^{\mathrm{T}} ((u_k(t), w_j))\,\phi(t)\mathrm{dt}$$

$$+\int_0^{\mathrm{T}} b(u_k(t),u_k(t),w_j)\phi(t)\mathrm{dt}=\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}.$$

Usando as convergências dadas em (2.42) – (2.44) para os termos lineares, a convergência dada pelo Lema 1.11 para o termo não linear e o fato de $u_{0k}\to u_0$, podemos tomar o limite quando $k\to\infty$ na igualdade acima, obtendo assim

$$\begin{aligned}-(u_0,w_j)-\int_0^{\mathrm{T}}(u(t),w_j)\,\phi'(t)\mathrm{dt}+\nu\int_0^{\mathrm{T}}((u(t),w_j))\,\phi(t)\mathrm{dt}&\\ +\int_0^{\mathrm{T}} b(u(t),u(t),w_j)\phi(t)\mathrm{dt}=\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}.&\quad(2.47)\end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.14), temos

$$u'(t)+\nu Au(t)+Bu(t)=f(t)\,\text{em}\;\;\mathrm{V}'\;\;\text{q.s. em}\;\;(0,T)\,.$$

Multiplicando a igualdade acima por uma função $\phi\in C^1([0,T])$ tal que $\phi(0)=1$ e $\phi(T)=0$ e integrando de 0 até T, temos

$$\int_0^{\mathrm{T}} u'(t)\phi(t)\mathrm{dt}+\nu\int_0^{\mathrm{T}} Au(t)\phi(t)\mathrm{dt}+\int_0^{\mathrm{T}} Bu(t)\phi(t)\mathrm{dt}=\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\phi(t)\mathrm{dt}$$

em V'. Além disso, ao integrarmos por partes o primeiro termo da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}-u(0)-\int_0^{\mathrm{T}} u(t)\phi'(t)\mathrm{dt}+\nu\int_0^{\mathrm{T}} Au(t)\phi(t)\mathrm{dt}+\int_0^{\mathrm{T}} Bu(t)\phi(t)\mathrm{dt}&\\ =\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\phi(t)\mathrm{dt}\quad\text{em}\;\;\mathrm{V}'.&\end{aligned}$$

Aplicando $w_j\in\mathrm{V}$ membro a membro, concluímos que

$$\begin{aligned}-\langle u(0),w_j\rangle-\int_0^{\mathrm{T}}\langle u(t),w_j\rangle\,\phi'(t)\mathrm{dt}+\nu\int_0^{\mathrm{T}}\langle Au(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}&\\ +\int_0^{\mathrm{T}}\langle Bu(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}=\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt},&\end{aligned}$$

ou ainda, que

$$-(u(0),w_j)-\int_0^{\mathrm{T}}(u(t),w_j)\,\phi'(t)\mathrm{dt}+\nu\int_0^{\mathrm{T}}((u(t),w_j))\,\phi(t)\mathrm{dt}$$

$$+\int_0^{\mathrm{T}} b(u(t),u(t),w_j)\phi(t)\mathrm{dt} = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f(t),w_j\rangle\,\phi(t)\mathrm{dt}. \quad (2.48)$$

De (2.47) e (2.48), verifica-se que

$$(u(0)-u_0,w_j)=0,$$
$$\Rightarrow u(0)=u_0 \quad \text{em } \mathrm{H}.$$

Passo 7: Unicidade

Suponha que u_1 e u_2 sejam soluções de (2.13)–(2.15). Agora defina $w=u_1-u_2$. Claramente w satisfaz (2.46). Ainda, w satisfaz o seguinte problema

$$\begin{aligned}
&w'(t)+\nu Aw(t) = -Bu_1(t)+Bu_2(t) \quad \text{em } \mathrm{V}',\\
&w(0)=0.
\end{aligned}$$

Como $w\in L^2(0,T;\mathrm{V})$, então $w(t)\in \mathrm{V}$ quase sempre em $[0,T]$, logo

$$\begin{aligned}
&\langle w'(t),w(t)\rangle + \nu\,\langle Aw(t),w(t)\rangle = \langle -Bu_1(t),w(t)\rangle + \langle Bu_2(t),w(t)\rangle\\
\Rightarrow &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|w(t)|^2 + \nu\,\|w(t)\|^2 = b(u_2(t),u_2(t),w(t)) - b(u_1(t),u_1(t),w(t))\\
\Rightarrow &\frac{d}{dt}\,|w(t)|^2 + 2\nu\,\|w(t)\|^2 = 2b(u_2(t),u_2(t),w(t)) - 2b(u_1(t),u_1(t),w(t)).
\end{aligned} \quad (2.49)$$

Note que

$$\begin{aligned}
2b(u_2(t),u_2(t),w(t)) &- 2b(u_1(t),u_1(t),w(t))\\
&= 2b(u_2(t),u_2(t),w(t)) - 2b(u_1(t),u_2(t),w(t))\\
&+ 2b(u_1(t),u_2(t),w(t)) - 2b(u_1(t),u_1(t),w(t))\\
&= -2b(w(t),u_2(t),w(t)) - 2b(u_1(t),w(t),w(t)).
\end{aligned}$$

Mas, como sabemos, se $w\in \mathrm{V}$, então $b(w,v,v)=0$, para todo $v\in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, assim, a igualdade acima fica

$$2b(u_2(t),u_2(t),w(t)) - 2b(u_1(t),u_1(t),w(t)) = -2b(w(t),u_2(t),w(t)).$$

Agora, do item (ii) do Lema 1.61, temos

$$\begin{aligned}
|-2b(w(t),u_2(t),w(t))| &\le 2^{\frac{3}{2}}\,|w(t)|\,\|w(t)\|\,\|u_2(t)\|\\
&= 2\sqrt{\nu}\,\|w(t)\|\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}\,|w(t)|\,\|u_2(t)\|
\end{aligned}$$

$$\leq 2\nu \|w(t)\|^2 + \frac{1}{\nu} |w(t)|^2 \|u_2(t)\|^2 .$$

Usando a desigualdade acima em (2.49), temos

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu} |w(t)|^2 \|u_2(t)\|^2 .$$

Pela Desigualdade de Gronwall, segue que

$$|w(t)|^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T] .$$

Assim, $u_1 = u_2$. □

Observação 2.2. Até o Passo 4 poderíamos melhorar pouco os resultados apresentados de modo que eles valeriam em $\mathbb{R}^n$ com $n \leq 4$. Porém, como isto não faz parte do objetivo principal deste texto, omitimos tais justificativas.

Observação 2.3. (Domínios ilimitados) Quando o domínio Ω é ilimitado, devemos usar V munido do produto interno dado por

$$[[u, v]] = ((u, v)) + (u, v)$$

e norma dada por

$$[[u]]^2 = \|u\|^2 + |u|^2$$

e assim, as imersões $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{H} \equiv \mathrm{H}' \hookrightarrow \mathrm{V}'$ seguem sendo contínuas, contudo, perdemos a imersão compacta de V em H.

Agora, de (2.21), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + 2\nu \|u_m(t)\|^2 &\leq 2 \|f(t)\|_{\mathrm{V}'} [[u_m(t)]] \\
&\leq \nu [[u_m(t)]]^2 + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \\
&\leq \nu \|u_m(t)\|^2 + \nu |u_m(t)|^2 + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu \|u_m(t)\|^2 \leq \nu |u_m(t)|^2 + \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 , \tag{2.50}$$

e assim, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 - \nu |u_m(t)|^2 &\leq \frac{1}{\nu} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 , \\
u_m(0) &= u_{0m},
\end{aligned}$$

o qual podemos usar o método de fator integrante para obtermos uma estimativa do tipo (2.24)

$$
\begin{aligned}
|u_m(t)|^2 &\leq |u_{0m}|^2 e^{\nu t} + e^{\nu t}\frac{1}{\nu}\int_0^{\mathrm{t}} \|f(s)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{ds} \\
&\leq |u_0|^2 e^{\nu T} + e^{\nu T}\frac{1}{\nu}\int_0^{\mathrm{T}} \|f(s)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{ds} \\
\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2 &\leq |u_0|^2 e^{\nu T} + e^{\nu T}\frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')}^2 .
\end{aligned}
$$

Por outro lado, integrando (2.50) de 0 até T, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \nu\int_0^{\mathrm{T}} \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \\
&\qquad\qquad \leq \nu\int_0^{\mathrm{T}} |u_m(t)|^2 \,\mathrm{dt} + \frac{1}{\nu}\int_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|_{\mathrm{V}'}^2 \,\mathrm{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow |u_m(T)|^2 + \nu\int_0^{\mathrm{T}} \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \\
&\qquad\qquad \leq |u_m(0)|^2 + \nu T\left(\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2\right) + \frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')}^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \int_0^{\mathrm{T}} \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} \leq \frac{1}{\nu}|u_0|^2 + T\left(\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2\right) + \frac{1}{\nu^2}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')}^2 .
$$

Por fim, conseguimos uma estimativa do tipo (2.26) dada por

$$
\begin{aligned}
\|u_m\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})}^2 = \int_0^{\mathrm{T}} [[u_m(t)]]^2 \,\mathrm{dt} &= \int_0^{\mathrm{T}} \|u_m(t)\|^2 \,\mathrm{dt} + \int_0^{\mathrm{T}} |u_m(t)|^2 \,\mathrm{dt} \\
&\leq \frac{1}{\nu}|u_0|^2 + T\left(\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{\nu^2}\|f\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')}^2 + T\left(\sup_{t\in[0,T]} |u_m(t)|^2\right).
\end{aligned}
$$

Como antes, podemos extrair uma subsequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfaz (2.42) e (2.43). Porém, como V não está compactamente imerso em H, precisamos usar outra estratégia para obtermos a convergência forte em $L^2(0,T;H)$. Observe que para toda bola $\mathcal{O} \subseteq \Omega$, segue $\mathbb{H}^1(\mathcal{O}) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$ e de (2.29) temos

A sequência $(u_m\big|_{\mathcal{O}})_{m\in\mathbb{N}}$ *está num subconjunto limitado*

de $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R};\mathbb{H}^1(\mathcal{O}),\mathbb{L}^2(\mathcal{O}))$, $\forall \mathcal{O} \subset \Omega$.

Do Teorema 1.54 segue que

$$u_k\big|_{\mathcal{O}} \to u\big|_{\mathcal{O}} \text{ em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O})),$$

ou ainda,

$$u_k \to u \text{ em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega)).$$

Em particular, se $\Omega_j := \operatorname{supp} w_j$, ao fixarmos j, temos

$$u_k\big|_{\Omega_j} \to u\big|_{\Omega_j} \text{ em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_j)),$$

e isso é suficiente para passarmos o limite em (2.45) para este caso de domínio ilimitado.

Observação 2.4. Se Ω é ilimitado, em geral, a norma em V dada por $[[\cdot]]^2 = \|\cdot\|^2 + |\cdot|^2$ não é equivalente à norma $\|\cdot\|$. Contudo, no Capítulo 4, tomamos Ω um domínio qualquer (limitado ou ilimitado) em que vale a Desigualdade de Poincaré, o que torna a norma $[[\cdot]]$ equivalente a norma $\|\cdot\|$. A suposição de no domínio valer a Desigualdade de Poincaré se dá para conseguirmos estimar a equação da energia com o intuito de obtermos o conjunto absorvente necessário para a existência do atrator global e ainda, para estimar as dimensões do atrator global obtido.

Capítulo 3

Elementos da teoria de sistemas dinâmicos

Neste Capítulo apresentamos os conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos, a fim de que possamos tratar de uma caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global.

As principais referências para a elaboração deste capítulo foram [8] e [24] e algumas demonstrações foram omitidas no decorrer do texto por fugirem do escopo do trabalho.

3.1 Semigrupos de operadores

Seja X um espaço métrico com a métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$.

Definição 3.1. Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores contínuos de X em X é dita ser um semigrupo fortemente contínuo (ou apenas semigrupo) em X, quando satisfaz:

(i) $S(0) = Id$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$,

(iii) A aplicação $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)x \in X$ é uma aplicação contínua.

Os semigrupos também são chamados de sistemas dinâmicos autônomos.

Observação 3.2.

(i) Devido a condição (ii) da definição de semigrupo, a família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é comutativa com respeito à operação de composição.

(ii) Se a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ for um semigrupo com a propriedade de que $S(t)$ é um homeomorfismo para cada $t > 0$, então a família $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ com

$$\mathcal{S}(t) = \begin{cases} S(t), & t \geq 0, \\ S(-t)^{-1}, & t < 0, \end{cases}$$

define um grupo em X.

Exemplo 3.3. Seja $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A \neq 0\}$. Considere a família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dada por

$$\begin{array}{rccc} S(t): & GL(n,\mathbb{R}) & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & e^t A \end{array}$$

Segue que $S(t)$ é contínua para cada $t \geq 0$, $S(0)A = e^0 A = A$ e

$$\begin{aligned} S(t+s)A &= e^{t+s}A = e^t e^s A \\ &= S(t)\,(e^s A) \\ &= S(t)\,[S(s)A]\,, \end{aligned}$$

para todo $t, s \geq 0$ e $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Portanto, a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define um semigrupo em $GL(n,\mathbb{R})$.

Definição 3.4. Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo, $u_0 \in X$ e $B \subseteq X$.

(i) Para cada $t \geq 0$, a imagem de B sob $S(t)$ é dada por

$$S(t)B = \{S(t)x \,/\, x \in B\}.$$

(ii) As órbitas positivas por u_0 e B, respectivamente, são dadas por

$$\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t\geq 0} S(t)u_0 \quad \text{e} \quad \gamma^+(B) = \bigcup_{t\geq 0} S(t)B.$$

(iii) As órbitas positivas de $S(s)u_0$ e $S(s)B$, respectivamente, são dadas por

$$\gamma_s^+(u_0) = \bigcup_{t\geq s} S(t)u_0 \quad \text{e} \quad \gamma_s^+(B) = \bigcup_{t\geq s} S(t)B.$$

Definição 3.5. Dizemos que um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado se para cada subconjunto limitado $B \subseteq X$, existe $t_B \geq 0$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado. Ainda, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado para todo subconjunto limitado $B \subset X$.

A seguir definimos um objeto certamente fundamental para o desenvolvimento da teoria, o conceito de ω-limite, o qual, se associado a um semigrupo assintoticamente compacto, goza de propriedades interessantes para o estudo do atrator global.

Definição 3.6. Sejam $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo, $u_0 \in X$ e $B \subset X$. Definimos os conjuntos ω-limite de u_0 e ω-limite de B por

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma_s^+(u_0)} = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)u_0}$$

e

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)} = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)B},$$

respectivamente.

Note que o conjunto ω-limite de qualquer subconjunto $B \subseteq X$ é um conjunto fechado, pois é interseção de fechados.

Ainda, podemos nos referir a definição acima como sendo a definição topológica do conjunto ω-limite. A Proposição 3.7, provada a seguir, nos dá uma caracterização muito útil para o conjunto ω-limite e, consequentemente, uma definição métrica dele.

Proposição 3.7. Se $B \subseteq X$, então o $\omega(B)$ é fechado e

$$\begin{aligned}\omega(B) = \{x \in X \,/\, &\text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty) \text{ e } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B \\ &\text{tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n\}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração. Denotamos por $\widetilde{\omega(B)}$ o conjunto à direita em (3.1).

Por um lado, seja $x \in \omega(B)$, então

$$x \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)},$$

ou ainda, $x \in \overline{\gamma_s^+(B)}$, $\forall s \geq 0$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um elemento $z_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que $d(x, z_n) < 1/n$. Da definição de $\gamma_s^+(B)$, existem $t_n \geq n$ e $x_n \in B$ de maneira que $z_n = S(t_n)x_n$. Daí segue que,

$$x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n,$$

com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, ou seja, segue que $x \in \widetilde{\omega(B)}$.

Reciprocamente, se $x \in \widetilde{\omega(B)}$, então existem $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x = \lim\limits_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Agora, dado $\tau \geq 0$ qualquer, escolhemos $n_\tau \in \mathbb{N}$ de modo que $t_n \geq \tau$ sempre que $n \geq n_\tau$, o que resulta que $\{S(t_n)x_n\}_{t_n\geq\tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$ e $x \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Assim, da arbitrariedade de $\tau \geq 0$, concluímos que

$$x \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)},$$

ou seja, $x \in \omega(B)$. $\square$

O conjunto ω-limite goza de algumas propriedades, a saber:

Proposição 3.8. Sejam $A, B \subseteq X$.

(i) $\omega(\varnothing) = \varnothing$.

(ii) $\omega(S(t)B) = \omega(B)$.

(iii) (Monotonicidade) Se $A \subseteq B$, então $\omega(A) \subset \omega(B)$.

(iv) $\omega(A \cup B) \subset \omega(A) \cup \omega(B)$.

No que segue, abordamos algumas outras noções que juntamente com a definição do conjunto ω-limite nos leva ao principal resultado deste capítulo.

3.2 Conjuntos invariantes e atratores

Definição 3.9. Sejam $A \subseteq X$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Dizemos que A é:

(i) Positivamente invariante pelo semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se

$$S(t)A \subseteq A, \quad \forall t \geq 0;$$

(ii) Negativamente invariante pelo semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se

$$S(t)A \supseteq A, \quad \forall t \geq 0;$$

(iii) Invariante pelo semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se

$$S(t)A = A, \quad \forall t \geq 0.$$

Observação 3.10. Em geral, a interseção de conjuntos invariantes não é invariante. Contudo, se para todo $t > 0$, $S(t)$ for injetor, então, do fato de que

$$S(t)\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S(t)A_\lambda,$$

para qualquer família $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X, a interseção de invariantes é invariante.

Definição 3.11. Um ponto fixo (ou ponto de equilíbrio ou ponto estacionário) por um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um ponto $u_0 \in X$ tal que

$$S(t)u_0 = u_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Note que um conjunto de pontos fixos é invariante e ainda, a órbita e o conjunto ω-limite de um ponto fixo u_0 é igual a $\{u_0\}$.

Para estudar o comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos, uma ferramenta útil é a semidistância de Hausdorff, a qual será responsável por descrever a noção de proximidade entre dois conjuntos.

Definição 3.12. Dados $A, B \subseteq X$ não vazios, definimos a semidistância de Hausdorff de A até B como o número real não negativo

$$\mathrm{dist_H}(A, B) = \sup_{a\in A} \mathrm{d}(a, B),$$

com $\mathrm{d}(a, B) = \inf_{b\in B} \mathrm{d}(a, b)$ indicando a distância usual entre ponto e um conjunto.

Observação 3.13.

(i) Se $A \subseteq B$ então da definição $\mathrm{dist_H}(A, B) = 0$.

(ii) Por outro lado, se $\mathrm{dist_H}(A, B) = 0$, então para qualquer $a \in A$, segue que $\mathrm{d}(a, B) = 0$. Assim, da definição de ínfimo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists b_n \in B$ tal que $\mathrm{d}(a, b_n) < 1/n$, ou seja, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Daí segue que $a \in \overline{B}$, e portanto que $A \subseteq \overline{B}$.

Tendo fixado o conceito de semidistância de Hausdorff, podemos dar sentido a noção de atração e absorção.

Definição 3.14. Sejam $A, B \subseteq X$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo.

(i) Dizemos que A atrai B (ou que B é atraído por A) sob a ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(S(t)B, A) = 0.$$

(ii) Se existir $t_B \geq 0$ tal que $S(t)B \subseteq A$, $\forall t \geq t_B$, dizemos que A absorve B (ou que B é absorvido por A) sob a ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observação 3.15. Se A absorve B, então A atrai B (a recíproca não é verdadeira). De fato, na volta podemos apenas inferir que existe uma certa vizinhança de A que acaba absorvendo B.

Apresentamos agora o conceito de ε-vizinhança de um conjunto, o qual será útil na elaboração de uma caracterização para um conjunto que atrai outro.

Definição 3.16. Dados $A \subseteq X$ e $\varepsilon > 0$. Definimos a ε-vizinhança de A por $\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \{x \in X \,/\, \mathrm{d}(x, A) < \varepsilon\}$ ou equivalentemente, como a união de todas as bolas abertas centradas em pontos de A com raio ε, ou seja,

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A) = \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a).$$

Proposição 3.17. Sejam $A, B \subseteq X$ e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Então A atrai B se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tau = \tau(\varepsilon, B) \geq 0$ tal que

$$S(t)B \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(A), \quad \forall t \geq \tau.$$

Agora, podemos definir o principal objeto de estudo deste trabalho: o atrator global.

Definição 3.18. Um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq X$ é dito ser um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Exemplo 3.19. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo sobre $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{array}{rccc} S(t): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2, \\ & (x,y) & \mapsto & (e^{-t}x, e^{-t}y). \end{array}$$

Segue que $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ é atrator global para este sistema. De fato, claramente $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto e invariante. Resta mostrar que

$\mathcal{A}$ atrai todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado, então existe $C > 0$ tal que $\mathrm{d}\big((x,y),(0,0)\big) \leq C$, para todo $(x,y) \in B$. Dado um valor $\varepsilon \in (0, C)$, tome $t_0 > 0$ tal que $t_0 > -\ln \frac{\varepsilon}{C}$, logo para todo $t \geq t_0$,

$$\mathrm{d}\big(S(t)(x,y),(0,0)\big) = \left\|(e^t x, e^t y)\right\| \leq e^{-t_0} \left\|(x,y)\right\| \leq e^{-t_0} C < \varepsilon.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ (caso seja maior que C basta reescolher ε menor que C), existe $t_0 > 0$ tal que $S(t)B \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$, para todo $t \geq t_0$, isto é, $\mathcal{A}$ atrai B. Observe abaixo a trajetória do sistema.

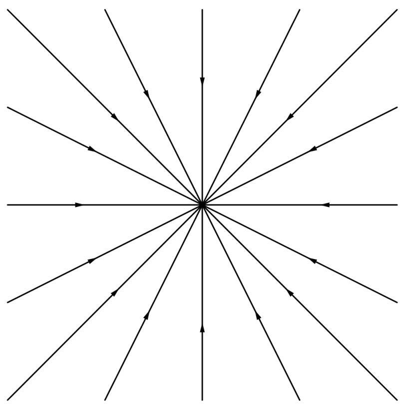

Figura 3.1: Trajetória do sistema.

Seguem algumas propriedades do atrator global.

Teorema 3.20. Se o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$, então vale que:

(i) $\mathcal{A}$ é único;

(ii) $\mathcal{A}$ é o menor fechado e limitado que atrai limitados, em particular, é o menor compacto que atrai limitados;

(iii) $\mathcal{A}$ é o maior limitado que é invariante.

Demonstração.

(i) Suponha que $\widetilde{\mathcal{A}}$ também seja um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Como $\widetilde{\mathcal{A}}$ é compacto, ele é limitado em X e assim, como $\mathcal{A}$ é um atrator global, segue que

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(S(t)\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = 0.$$

Mas a invariância de $\widetilde{\mathcal{A}}$ por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ garante que $S(t)\widetilde{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{A}}$, $\forall t \geq 0$. Assim,

$$0 = \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(S(t)\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) = \mathrm{dist_H}(\widetilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}).$$

Logo, do item (ii) da Observação 3.13, segue que $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}$ é fechado. De forma análoga, $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$.

Portanto, $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$.

(ii) Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado e limitado que atrai limitados. Como $\mathcal{A}$ é compacto, logo limitado, F atrai $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(S(t)\mathcal{A}, F) \\ &\overset{\text{invariância}}{=} \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(\mathcal{A}, F) = \mathrm{dist_H}(\mathcal{A}, F), \end{aligned}$$

e assim, pelo item (ii) da Observação 3.13, segue que $\mathcal{A} \subseteq \overline{F} = F$.

(iii) Seja $B \subseteq X$ um conjunto limitado e invariante. Como B é limitado, $\mathcal{A}$ o atrai, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(S(t)B, \mathcal{A}) \\ &\overset{\text{invariância}}{=} \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist_H}(B, \mathcal{A}) = \mathrm{dist_H}(B, \mathcal{A}), \end{aligned}$$

e assim, pelo item (ii) da Observação 3.13, segue que $B \subseteq \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

$\square$

Agora apresentamos um resultado de caracterização de atratores em termos de subconjuntos invariantes limitados.

Corolário 3.21. Se um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ se exprime como a união de todos os subconjuntos limitados e invariantes de X.

Demonstração. Assuma que $\widetilde{\mathcal{A}}$ seja dado pela união de todos os subconjuntos limitados e invariantes de X. Como $\mathcal{A}$ é atrator, então $\mathcal{A}$ é invariante e limitado e portanto $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. Reciprocamente, seja B um subconjunto limitado e invariante de X. Pelo item (ii) do Teorema 3.20, $B \subseteq \mathcal{A}$ e portanto $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. $\square$

3.3 Compacidade assintótica de semigrupos

Nesta seção introduzimos as ferramentas relacionadas ao estudo do chamado semigrupo assintoticamente compacto, que é um conceito fundamental para abordarmos a existência de atratores globais.

Definição 3.22. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser assintoticamente compacto se para toda sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, tivermos que $(S(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Definição 3.23. Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é dito ser eventualmente compacto se existe $t_0 > 0$ tal que $S(t_0)$ é um operador compacto.

Observação 3.24.

(i) Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo eventualmente compacto e $\tau > 0$ tal que $S(\tau)$ é um operador compacto. Então, como a imagem de compactos por operadores contínuos é compacta e da condição (ii) da Definição de semigrupo, deduz-se que $\forall t \geq \tau$, $S(t)$ é um operador compacto, pois $S(t) = S(t-\tau)S(\tau)$, se $t \geq \tau$.

(ii) Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo eventualmente compacto e eventualmente limitado, então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto. De fato, considere $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ limitada. Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente compacto, $\exists t_0 > 0$ tal que $S(t_0)$ é um operador compacto e ainda, como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é eventualmente limitado, existe $\tau \geq 0$ de maneira que $\gamma_\tau^+(B_0)$ seja limitada, com $B_0 := \{x_n \in X \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

Fixe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ sempre vale que $t_n \geq t_0 + \tau$. Considere agora $B := \{S(t_n - t_0)x_n \,/\, n \geq n_0\} \subseteq \gamma_\tau^+(B_0)$. Fica claro que B é limitado, e portanto segue que $S(t_0)B$ é relativamente compacto. Como a sequência $(S(t_n)x_n)_{n\geq n_0}$ é composta exatamente pelos pontos de $S(t_0)B$, a conclusão segue.

Apresentamos agora as principais propriedades do conjunto ω-limite para semigrupos assintoticamente compactos.

Teorema 3.25. Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo assintoticamente compacto. Para todo conjunto limitado não vazio $B \subseteq X$, seu conjunto ω-limite satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.

(ii) $\omega(B)$ é o menor conjunto fechado de X que atrai B.

(iii) Se B é conexo, ou ainda, se existe um conexo C que contém B e que é atraído por $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo.

Demonstração.

(i) $\underline{\underline{\omega(B) \neq \varnothing}}$: Considere sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$. Da compacidade assintótica, segue que a sequência $(S(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente e da Proposição 3.7, segue que o limite está em $\omega(B)$.

$\underline{\underline{\omega(B) \text{ é compacto}}}$: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \omega(B)$. Da Proposição 3.7, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $(t_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_j^{(n)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $(x_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tais que $x_n = \lim\limits_{j\to\infty} S(t_j^{(n)})x_j^{(n)}$ ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $j_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{d}(x_n, S(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad t_{j_n}^{(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{3.2}$$

Pela compacidade assintótica, podemos extrair uma subsequência

$$\left(S(t_{j_{n_k}}^{(n_k)})x_{j_{n_k}}^{(n_k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \left(S(t_{j_n}^{(n)})x_{j_n}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

que converge para x. Da Proposição 3.7, segue que $x \in \omega(B)$ e de (3.2), temos

$$\mathrm{d}(x_{n_k}, S(t_{j_{n_k}}^{(n_k)})x_{j_{n_k}}^{(n_k)}) < \frac{1}{n_k}.$$

Ao tomarmos o limite quando $k \to \infty$, resulta que $x_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ (usando a desigualdade triangular), o que demonstra a compacidade de $\omega(B)$.

$\underline{\underline{\omega(B) \text{ é invariante}}}$: Sejam $x \in \omega(B)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ de maneira que

$$x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n.$$

Então, dado $t \geq 0$, da continuidade do operador $S(t)$ e da condição (ii) da Definição 3.1, segue que

$$S(t)x = S(t)\left(\lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n\right) = \lim_{n\to\infty} S(t+t_n)x_n$$

com $t+t_n \to \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$, ou seja, $S(t)x \in \omega(B)$ e assim, $S(t)\omega(B) \subseteq \omega(B)$.

Reciprocamente, sejam $x \in \omega(B)$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Fixando $t \geq 0$, vemos que

$$x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} S(t+(t_n-t))x_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n-t)x_n. \tag{3.3}$$

Por outro lado, da compacidade assintótica, existe um elemento $y \in X$ e uma subsequência $\left(S(t_{n_j}-t)x_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(S(t_n-t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y = \lim_{j\to\infty} S(t_{n_j}-t)x_{n_j}$, o que resulta, da Proposição 3.7, que $y \in \omega(B)$. Por fim, usando a continuidade do operador $S(t)$ em (3.3) e do fato de que toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite, obtemos

$$x = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_{n_j}-t)x_{n_j} = S(t)\left(\lim_{n\to\infty} S(t_{n_j}-t)x_{n_j}\right) = S(t)y,$$

ou seja, $x \in S(t)\omega(B)$ e assim, $S(t)\omega(B) \supseteq \omega(B)$.

Portanto, $S(t)\omega(B) = \omega(B)$ e assim, $\omega(B)$ é invariante.

$\underline{\underline{\omega(B) \text{ atrai } B:}}$ Para provarmos esta afirmação, devemos mostrar que $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(S(t)B, \omega(B)) = 0$.

Suponha o contrário, ou seja, $\exists \varepsilon_0 > 0$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(S(t_n)B, \omega(B)) > \varepsilon_0$. Agora, da Definição de semidistância de Hausdorff, $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n \in B$ tal que

$$\mathrm{d}(S(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon_0. \tag{3.4}$$

Note que da compacidade assintótica de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, podemos extrair uma subsequência $(S(t_{n_j})x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(S(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $S(t_{n_j})x_{n_j} \longrightarrow x$ quando $j \to \infty$, em que, pela Proposição 3.7, está em $\omega(B)$. Então, da continuidade de $\mathrm{d}(\cdot, \omega(B))$ e (3.4) segue que $\mathrm{d}(x, \omega(B)) \geq \varepsilon_0$, o que contradiz o fato de $x \in \omega(B)$.

Portanto, $\omega(B)$ atrai B.

(ii) Da Definição, sabemos que o conjunto $\omega(B)$ é fechado e por (i), que $\omega(B)$ atrai B.

Considere $F \subseteq X$ fechado tal que F atrai B. Devemos mostrar que $\omega(B) \subseteq F$.

Suponha que $\omega(B) \nsubseteq F$, ou seja, $\exists x \in \omega(B)$ com $x \notin F$. Como F é fechado, segue que $\mathrm{d}(x, F) = \delta > 0$. Com $x \in \omega(B)$, existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ com $t_n \longrightarrow \infty$ quando $n \to \infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ de maneira que $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Agora, como F atrai B $\Big(\mathrm{dist_H}(S(t)B, F) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big)$, podemos encontrar $T > 0$ tal que $\forall t \geq T$,

$$\mathrm{dist_H}(S(t)B, F) < \frac{\delta}{2}.$$

Logo, escolhendo $n_T \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_T$ tivermos $t_n \geq T$, concluímos que $\forall n \geq n_T$ vale

$$\mathrm{d}(S(t_n)x_n, F) < \frac{\delta}{2}$$

e assim, da continuidade de $\mathrm{d}(\cdot, F)$, após fazermos $n \to \infty$, temos que $\mathrm{d}(x, F) \leq \frac{\delta}{2}$, o que contraria a existência de um tal x.

Portanto, $\omega(B)$ é o menor fechado que atrai B.

(iii) Suponha que exista um conexo C que contém B e que seja atraído por $\omega(B)$, mas que $\omega(B)$ não seja conexo. Assim, existem conjuntos fechados e disjuntos não vazios $F_1, F_2 \subseteq \omega(B)$ em que se tenha $\omega(B) = F_1 \cup F_2$. Como (por (i)) $\omega(B)$ é compacto, segue que F_1 e F_2 também o são, logo $\mathrm{d}(F_1, F_2) = \delta > 0$, com $\mathrm{d}(F_1, F_2) = \inf_{a\in F_1} \inf_{b\in F_2} \mathrm{d}(a, b)$. Agora, como $\omega(B)$ atrai C, $\exists \tau = \tau(\delta, C) > 0$ tal que

$$S(t)C \subseteq \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)), \quad \forall t \geq \tau,$$

logo,

$$\gamma_\tau^+(C) \subseteq \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(\omega(B)) = \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1) \cup \mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2). \tag{3.5}$$

Note que, como $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)x \in X$ é contínua, $[\tau, \infty) \times C$ é conexo e a imagem de $[\tau, \infty) \times C$ por tal aplicação é exatamente $\gamma_\tau^+(C)$, assim, $\gamma_\tau^+(C)$ é conexo. Como $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$ e $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_2)$ são abertos disjuntos e $\gamma_\tau^+(C)$ é conexo, por (3.5), segue que $\gamma_\tau^+(C)$ está inteiramente contido em exatamente um destes conjuntos, suponhamos que em $\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)$. Então,

$$F_2 \subseteq \omega(B) \subseteq \overline{\gamma_\tau^+(B)} \subseteq \overline{\gamma_\tau^+(C)} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\frac{\delta}{2}}(F_1)},$$

ou seja, $\mathrm{d}(F_2, F_1) \leq \frac{\delta}{2}$, o que contradiz a definição de δ.

Portanto, $\omega(B)$ é conexo quando $\omega(B)$ atrai um conexo que contém B.

O caso em que B é conexo segue do caso anterior ao fazermos $C = B$ e usando o item (i).

$\square$

Agora podemos exibir um resultado que assegura a existência de um atrator global para um semigrupo assintoticamente compacto quando há a existência de um conjunto absorvente.

Teorema 3.26. Sejam X um espaço métrico completo e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo assintoticamente compacto. Se existe um conjunto limitado e absorvente $\mathcal{B}$ pelo semigrupo, então $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ possui um atrator global dado pelo conjunto ω-limite de $\mathcal{B}$, ou seja, $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$. Tal conjunto é ainda, o atrator limitado maximal (sob a relação de inclusão). Além disso, se o operador $[0,\infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in X$ é contínuo e $\mathcal{B}$ é conexo, então $\mathcal{A}$ é conexo.

Demonstração. Como $\mathcal{B}$ é limitado (e não vazio) e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto, então do Teorema 3.25 segue que $\omega(\mathcal{B})$ é não vazio, compacto e invariante. Devemos mostrar que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ atrai conjuntos limitados. Suponha o contrário, ou seja, assuma que exista $B_0 \subseteq X$ limitado com $\mathrm{dist_H}(S(t)B_0, \mathcal{A}) \nrightarrow 0$ quando $t \to \infty$, assim $\exists \delta > 0$ e uma sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e

$$\mathrm{dist_H}(S(t_n)B_0, \mathcal{A}) \geq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists b_n \in B_0$ tal que

$$\mathrm{dist_H}(S(t_n)b_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2}. \tag{3.6}$$

Como $\mathcal{B}$ é absorvente, existe $t_0 = t_0(B_0) > 0$ tal que se $t_n \geq t_0$, $S(t_n)B_0 \subseteq \mathcal{B}$ (consequentemente, $S(t_n)b_n \in \mathcal{B}$). Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto e B_0 é limitado, a sequência $(S(t_n)b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, digamos $S(t_{n_j})b_{n_j} \to \widetilde{b}$. Note que

$$\widetilde{b} = \lim_{j\to\infty} S(t_{n_j})b_{n_j} = \lim_{j\to\infty} S(t_{n_j} - t_0)S(t_0)b_{n_j}.$$

Como $S(t_0)b_n \in \mathcal{B}$, da caracterização de ω-limite segue que $\widetilde{b} \in \omega(\mathcal{B})$, o que contradiz (3.6).

$\underline{\underline{\mathcal{A} \text{ é o atrator maximal:}}}$ Seja $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq X$ um atrator limitado com $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$, então para $t \geq 0$ suficientemente grande ($\mathcal{B}$ é absorvente), $S(t)\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$, ou ainda $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$ (devido a invariância de $\widetilde{\mathcal{A}}$). Assim, da monotonicidade do ω-limite, segue que

$$\omega(\widetilde{\mathcal{A}}) \subseteq \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}\,.$$

Por fim, se $\mathcal{B}$ é conexo, do Teorema 3.25, segue que $\omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ é conexo. $\square$

Capítulo 4

Estudo do atrator global das equações de Navier-Stokes 2D sobre alguns domínios ilimitados

Neste capítulo apresentamos as considerações do principal problema deste trabalho, tais como o domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ser um aberto qualquer com fronteira $\partial\Omega$, em que vale a desigualdade de Poincaré. Esta condição é essencial para gerar a equação da energia, o conjunto absorvente e outras estimativas a serem utilizadas na continuidade fraca para o semigrupo gerado pelas equações de Navier-Stokes 2D, com o intuito de obtermos o atrator global. Além disso, fazemos um estudo das dimensões de Hausdorff e a fractal do atrator global, mostrando que elas são finitas.

As principais referências utilizadas na escrita deste capítulo foram [22] e [24].

4.1 Preliminares

Assuma que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ seja um aberto limitado ou ilimitado sem que haja nenhuma suposição sobre a regularidade da fronteira $\partial\Omega$, mas que vale a desigualdade de Poincaré, ou seja, existe $\lambda_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \phi^2 \mathrm{dx} \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \, \mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Mais ainda, segue que

$$|u|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u\|^2 , \forall u \in \mathrm{V}\,. \tag{4.2}$$

Do Capítulo 2, para $f \in \mathrm{V}'$ (ou seja, f não depende de t) e $u_0 \in \mathrm{H}$ a formulação fraca das equações de Navier-Stokes é dada por: encontrar uma $u \in L^\infty(0,T;\mathrm{H}) \cap L^2(0,T;\mathrm{V})$ para cada $T > 0$, tal que

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu\left((u,v)\right) + b(u,u,v) = \langle f, v\rangle\,, \quad \forall v \in \mathrm{V}, \forall t > 0, \tag{4.3}$$

e

$$u(0) = u_0. \tag{4.4}$$

Ainda, sabemos que a formulação fraca dada em (4.3) é equivalente a equação funcional

$$u' + \nu A u + B u = f, \quad \text{em } \mathrm{V}', \text{ para } t > 0. \tag{4.5}$$

Das considerações acima, podemos estabelecer um análogo ao Teorema 2.1 dado por:

Teorema 4.1. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que (4.1) vale. Dadas $f \in \mathrm{V}'$ e $u_0 \in \mathrm{H}$, existe uma única $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}) \cap L^2(0,T;\mathrm{V})$, $\forall T > 0$, que satisfaz (4.3) (logo, (4.5)) e (4.4). Além disso, $u' \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$, $\forall T > 0$ e $u \in C(\mathbb{R}^+;\mathrm{H})$.

Observação 4.2.

(i) Fica claro que como o Teorema 2.1 e a Observação 2.3 valem para todo $T > 0$, o Teorema 4.1 segue como uma consequência imediata.

(ii) Tomamos $f \in \mathrm{V}'$ para podermos gerar um semigrupo, pois se tomássemos $f \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$, geraríamos um processo de evolução que está fora do escopo do estudo desenvolvido neste texto.

Se $u = u(t)$, $t \geq 0$, é a solução do Teorema 4.1, sabemos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}) \cap L^2(0,T;\mathrm{V})$ e que $u' \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$, para cada $T > 0$. Agora, pelo Teorema 1.56 temos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\,\langle u', u\rangle$$

e de (4.5), segue que

$$\begin{aligned} \langle u', u\rangle &= \langle f - \nu A u - B u, u\rangle \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 &= \langle f, u\rangle - \nu\|u\|^2 - b(u,u,u). \end{aligned}$$

Observe ainda que de (1.6) obtemos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2\nu\|u\|^2 = 2\langle f, u\rangle, \quad \forall t > 0, \tag{4.6}$$

em $\mathcal{D}'(0,\infty)$. A igualdade (4.6) é chamada de equação de energia.

Note que podemos majorar o lado direito de (4.6) por

$$\begin{aligned} \langle f, u\rangle &\le \|f\|_{\mathrm{V}'}\|u\| \\ &\le \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{\mathrm{V}'}\|u\| \\ &\le \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\nu}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2 . \end{aligned}$$

As estimativas acima nos levam a desigualdade

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \le \frac{1}{\nu}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2 . \tag{4.7}$$

Usando (4.2), segue que

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\lambda_1|u|^2 \le \frac{1}{\nu}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2 ,$$

e assim, temos a seguinte desigualdade diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\lambda_1|u|^2 &\le \frac{1}{\nu}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2 , \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Esta desigualdade pode ser simplificada através do método de fator integrante, que nos dá

$$|u(t)|^2 \le |u_0|^2 e^{-\nu\,\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2, \quad \forall t \ge 0. \tag{4.8}$$

Agora, se em (4.7) integrarmos de 0 até t, segue que

$$\int_0^{\mathrm{t}} \frac{d}{dt}|u(s)|^2\,\mathrm{ds} + \nu\int_0^{\mathrm{t}}\|u(s)\|^2\,\mathrm{ds} \le \frac{1}{\nu}\int_0^{\mathrm{t}}\|f\|_{\mathrm{V}'}^2\,\mathrm{ds}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow |u(t)|^2 - |u(0)|^2 + \nu \int_0^{\mathrm{t}} \|u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} \leq \frac{t}{\nu} \|f\|_{\mathrm{V}'}^2 \\
&\Rightarrow |u(t)|^2 + \nu \int_0^{\mathrm{t}} \|u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} \leq |u_0|^2 + \frac{t}{\nu} \|f\|_{\mathrm{V}'}^2 \\
&\Rightarrow \nu \int_0^{\mathrm{t}} \|u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} \leq |u_0|^2 + \frac{t}{\nu} \|f\|_{\mathrm{V}'}^2 ,
\end{aligned}
$$

e assim, obtemos

$$
\frac{1}{t} \int_0^{\mathrm{t}} \|u(s)\|^2 \,\mathrm{ds} \leq \frac{1}{\nu t} |u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2} \|f\|_{\mathrm{V}'}^2 , \quad \forall t > 0. \tag{4.9}
$$

Por outro lado, se $u(t)$ é a função que o Teorema 4.1 garante existir, podemos definir uma família de operadores

$$
S(t) : \mathrm{H} \to \mathrm{H},
$$

dada por $S(t)u_0 = u(t)$, para cada $t \geq 0$.

Teorema 4.3. Para cada $t \geq 0$, o operador $S(t) : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ é Lipschitz contínuo sobre limitados de H.

Demonstração. De fato, considere $B \subseteq \mathrm{H}$ limitado e $u_0, v_0 \in B$. Fixado $t \geq 0$, temos $S(t)u_0 = u(t)$ e $S(t)v_0 = v(t)$, com u e v soluções de (4.3) e $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$. Por simplicidade, no que se segue, denotaremos $u = u(t)$ e $v = v(t)$. Note que, como u e v satisfazem

$$
\frac{d}{dt} (w, \theta) + \nu ((w, \theta)) + b(w, w, \theta) = \langle f, \theta \rangle , \quad \forall \theta \in \mathrm{V},
$$

deduzimos

$$
\frac{d}{dt} (u - v, \theta) + \nu ((u - v, \theta)) + b(u, u, \theta) - b(v, v, \theta) = 0. \tag{4.10}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
b(u, u, \theta) - b(v, v, \theta) &= b(u, u, \theta) - b(v, u, \theta) + b(v, u, \theta) - b(v, v, \theta) \\
&= b(u - v, u, \theta) + b(v, u - v, \theta) \\
&= b(u - v, u, \theta) - b(u - v, v, \theta) \\
&\quad + b(u - v, v, \theta) + b(v, u - v, \theta) \\
&= b(u - v, u - v, \theta) + b(u - v, v, \theta) + b(v, u - v, \theta),
\end{aligned}
$$

e assim, (4.10) fica

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u-v,\theta)+\nu\,((u-v,\theta))+b(u-v,u-v,\theta)&\\ =-b(u-v,v,\theta)-b(v,u-v,\theta).&\end{aligned}\tag{4.11}$$

Ao tomarmos $\theta = u - v$ em (4.11), o Lema 1.60 garante que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u-v|^2+\nu\,\|u-v\|^2 &= -b(u-v,v,u-v)\\ &\overset{\text{Lema 1.61}}{\leq} \sqrt{2}\,|u-v|^{\frac{1}{2}}\,\|u-v\|^{\frac{1}{2}}\,\|v\|\,|u-v|^{\frac{1}{2}}\,\|u-v\|^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \sqrt{2}\,|u-v|\,\|u-v\|\,\|v\|\\ &\leq \sqrt{2}\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}}\,|u-v|\,\|u-v\|\,\|v\|\\ &\leq \nu\,\|u-v\|^2+\frac{1}{2\nu}\,|u-v|^2\,\|v\|^2.\end{aligned}$$

Daí que,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2\nu}|u(t)-v(t)|^2\,\|v(t)\|^2\\ \overset{\text{Lema 1.53}}{\Rightarrow}\ &|u(t)-v(t)|^2 \leq |u_0-v_0|^2\exp\left(\int_0^{\mathrm{t}}\frac{1}{2\nu}\,\|v(s)\|^2\,\mathrm{ds}\right)\\ \Rightarrow\ &|u(t)-v(t)|^2 \overset{(4.9)}{\leq} |u_0-v_0|^2\exp\left(\frac{1}{2\nu^2}|v_0|^2+\frac{t}{2\nu^3}\|f\|^2_{\mathrm{V}'}\right).\end{aligned}$$

Portanto, para cada $t \geq 0$,

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| = |u(t)-v(t)| \leq |u_0-v_0|\exp\left(\frac{1}{2\nu^2}|v_0|^2+\frac{t}{2\nu^3}\|f\|^2_{\mathrm{V}'}\right),$$

ou seja, o operador $S(t)$ é Lipschitz contínuo. □

Isto nos permite enunciar o seguinte resultado que decorre diretamente das conclusões dos Teoremas 4.1 e 4.3.

Corolário 4.4. Nas condições apresentadas anteriormente, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define um semigrupo em H.

Neste ponto já temos definido o semigrupo que necessitamos para iniciar o estudo do atrator para as equações de Navier-Stokes 2D apresentadas neste texto. Porém, ainda são necessários alguns resultados preliminares.

Um dos principais pontos para garantirmos a existência de um atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é mostrarmos que existe um conjunto limitado que absorve limitados pela ação do semigrupo. É disto que trata o seguinte resultado.

Teorema 4.5. Defina a constante $\rho_0 := \sqrt{2/(\lambda_1\,\nu^2)}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}$. Se considerarmos o conjunto $\mathcal{B} := \{v \in \mathrm{H}\ /\ |v| \leq \rho_0\}$, então $\mathcal{B}$ absorve limitados de H pela ação do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Demonstração. Seja B um subconjunto limitado de H e tome $u_0 \in B$. Neste caso, de (4.8) obtemos

$$|S(t)u_0| \leq \sqrt{Me^{-\nu\,\lambda_1\,t} + \frac{1}{\nu^2\,\lambda_1}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}^2},$$

com $M = \sup_{b\in B}|b|^2$. Como $Me^{-\nu\,\lambda_1\,t} \to 0$, quando $t\to\infty$, concluímos que existe $t_B > 0$ tal que

$$Me^{-\nu\,\lambda_1\,t} \leq \frac{1}{\nu^2\,\lambda_1}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}^2, \quad \forall t \geq t_B.$$

Mas então obtemos

$$|S(t)u_0| \leq \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}\,\|f\|_{\mathrm{V}'} = \rho_0.$$

Como a escolha do elemento u_0 no limitado B foi arbitrária, concluímos que $S(t)B \subset \mathcal{B}$, $\forall t \geq t_B$. □

Apresentamos agora um lema auxiliar que trata da continuidade fraca do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Lema 4.6. Considere a sequência $(u_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$ em H e $u_0 \in$ H tal que $u_{0n} \rightharpoonup u_0$ em H. Então,

$$S(t)u_{0n} \rightharpoonup S(t)u_0 \text{ em H}, \forall t \geq 0 \tag{4.12}$$

e

$$S(\cdot)u_{0n} \rightharpoonup S(\cdot)u_0 \text{ em } L^2(0,T;\mathrm{V}), \forall T > 0. \tag{4.13}$$

Demonstração. Defina $u_n(t) = S(t)u_{0n}$ e $u(t) = S(t)u_0$, para $t \geq 0$. De (4.8) e da Proposição 1.8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H})$ e ainda, de (4.9) e da Proposição 1.8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;\mathrm{V})$, $\forall T > 0$, ou seja,

A sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}) \cap L^2(0,T;\mathrm{V})$, $\forall T > 0$. (4.14)

Assim, como $u_n' = f - \nu A u_n - B u_n$, Au_n é um funcional linear limitado em V e B satisfaz o item (iii) do Lema 1.61, segue que

$$\textit{A sequência } (u_n')_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é limitada em } L^2(0,T;\mathrm{V}'),\ \forall T>0. \tag{4.15}$$

Então, para cada $v \in \mathrm{V}$ e $0 \le t \le t+a \le T$, com $T > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(u_n(t+a)-u_n(t), v) = \langle u_n(t+a)-u_n(t), v\rangle &= \left\langle \int_t^{t+a} u_n'(s)\mathrm{ds}, v \right\rangle \\
&= \int_t^{t+a} \langle u_n'(s), v\rangle\, \mathrm{ds} \le \int_t^{t+a} |\langle u_n'(s), v\rangle|\, \mathrm{ds} \\
&\le \int_t^{t+a} \|u_n'(s)\|_{\mathrm{V}'} \|v\|\, \mathrm{ds} \\
&\le \|v\| \int_t^{t+a} \|u_n'(s)\|_{\mathrm{V}'}\, \mathrm{ds} \\
&\le \|v\| \left(\int_t^{t+a} 1\, \mathrm{ds}\right)^{\frac12} \left(\int_t^{t+a} \|u_n'(s)\|_{\mathrm{V}'}^2\, \mathrm{ds}\right)^{\frac12} \\
&\le \|v\|\, a^{\frac12} \left(\int_0^{\mathrm{T}} \|u_n'(s)\|_{\mathrm{V}'}^2\, \mathrm{ds}\right)^{\frac12} \\
&\le \|v\|\, a^{\frac12}\, \|u_n'\|_{L^2(0,T;\mathrm{V}')} \\
&\le C_T \|v\|\, a^{\frac12},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

com $C_T > 0$, independente de n, devido a sentença (4.15). Escolhendo $v = u_n(t+a) - u_n(t) \in \mathrm{V}$ em (4.16), obtemos

$$|u_n(t+a)-u_n(t)|^2 \le C_T a^{\frac12} \|u_n(t+a)-u_n(t)\|.$$

Daí que

$$\int_0^{T-a} |u_n(t+a)-u_n(t)|^2\, \mathrm{dt} \le C_T a^{\frac12} \int_0^{T-a} \|u_n(t+a)-u_n(t)\|\, \mathrm{dt}. \tag{4.17}$$

Por fim, como

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-a} \|u_n(t+a)-u_n(t)\|\, \mathrm{dt} &\le \int_0^{T} \|u_n(t+a)-u_n(t)\|\, \mathrm{dt} \\
&\le T^{\frac12}\, \|u_n(\cdot+a)-u_n(\cdot)\|_{L^2(0,T;\mathrm{V})}^2 \qquad (4.18) \\
&\overset{(4.14)}{\le} 2C_T T^{\frac12},
\end{aligned}$$

de (4.17) e (4.18) concluímos que

$$\int_0^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|^2 \, \mathrm{dt} \leq \widetilde{C_T} a^{\frac{1}{2}}, \tag{4.19}$$

com $\widetilde{C_T} > 0$ independente de n.

Considere agora a função truncamento $\tau \in C^1(\mathbb{R}^+)$ que satisfaz $\tau(s) = 1$, se $s \in [0,1]$ e $\tau(s) = 0$, se $s \in [2, \infty)$. Para cada $r > 0$, defina

$$v_{n,r}(x,t) := \tau\left(\frac{|x|^2}{r^2}\right) u_n(x,t), \quad x \in \Omega_{2r},$$

com $\Omega_r = \Omega \cap B_r^{\mathbb{R}^2}(0)$, para cada $r > 0$.

Observe então que

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-a} & \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} \, \mathrm{dt} \\
&= \int_0^{T-a} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_r)} \, \mathrm{dt} \\
&+ \int_0^{T-a} \left\| \tau\left(\frac{|x|}{r}\right) \Big[u_n(t+a) - u_n(t) \Big] \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\sqrt{2}r} \setminus \Omega_r)} \mathrm{dt},
\end{aligned}$$

e portanto, como $\sup_{y \in \mathbb{R}^+} \tau(y) = M < \infty$, de (4.19) deduzimos

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-a} & \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} \, \mathrm{dt} \\
&\leq \max\{1, M^2\} \int_0^{T-a} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\sqrt{2}r})} \, \mathrm{dt} \leq C'_T a^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

com $C'_T > 0$ independente de $n \in \mathbb{N}$.

Da desigualdade acima, segue que

$$\lim_{a \to 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{T-a} \|v_{n,r}(t+a) - v_{n,r}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} \, \mathrm{dt} = 0, \quad \forall T > 0, \forall r > 0.$$

Agora veja que

$$(v_{n,r})_{n \in \mathbb{N}} \textit{ é limitada em } L^\infty(0,T; \mathbb{L}^2(\Omega_{2r})),$$

pois, pela mesma justificativa de antes,

$$\|v_{n,r}(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})} = \|u_n(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_r)} + \left\|\tau\left(\frac{|x|}{r}\right)u_n(t)\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\sqrt{2}r}\setminus\Omega_r)}$$
$$\leq \max\{1, M^2\}\,|u_n(t)|$$

com a última parcela da desigualdade sendo uniformemente limitada em $n \in \mathbb{N}$, graças a (4.14).

Ainda sabemos que

$$(v_{n,r})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega_{2r})).$$

Basta observar que por construção $v_{n,r} \in L^2(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega_{2r}))$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $r > 0$, e ainda

$$\int_0^T \|v_{n,r}(t)\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega_{2r})}\,\mathrm{dt} = \int_0^T \|u_n(t)\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega_r)}\,\mathrm{dt}$$
$$+ \int_0^T \left\|\tau\left(\frac{|x|}{r}\right)u_n(t)\right\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega_{\sqrt{2}r}\setminus\Omega_r)}\mathrm{dt} \leq C(M,N)\int_0^T \|u_n(t)\|\,\mathrm{dt},$$

com $M > 0$ definido anteriormente, $N := \sup_{y\in\mathbb{R}^+}|\tau'(y)|$ e $C(M,N)$ uma constante que depende de tais números. A sentença (4.14) juntamente com a desigualdade acima garante a limitação uniformemente em $n \in \mathbb{N}$ desejada.

É claro que do concluído acima e das imersões entre os espaços L^p, segue que

$$(v_{n,r})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})) \cap L^1(0,T;\mathbb{H}^1_0(\Omega_{2r})).$$

Finalmente aplicando o Teorema 1.58 deduzimos que

$$(v_{n,r})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é relativamente compacto em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_{2r})),$$

para cada $T > 0$ e $r > 0$. Daí segue da construção de $v_{n,r}$ que

$$(u_n\big|_{\Omega_r})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é relativamente compacto em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_r)), \tag{4.20}$$

para cada $T > 0$ e $r > 0$.

Tomando, em particular, $r \in \mathbb{N}$, e $T > 0$ fixo, para $r = 1$, $(u_n\big|_{\Omega_1})_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_1))$, logo existe uma subsequência $(u_{1_n}\big|_{\Omega_1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n\big|_{\Omega_1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, isto é,

$$u_{1_n}\big|_{\Omega_1} \to \widetilde{u}\big|_{\Omega_1}, \text{ em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_1)).$$

Por sua vez, a sequência $(u_{1_n}\big|_{\Omega_2})_{n\in\mathbb{N}}$ está em $(u_n\big|_{\Omega_2})_{n\in\mathbb{N}}$ que é relativamente compacta, logo também possui uma subsequência $(u_{2_n}\big|_{\Omega_2})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{2_n}\big|_{\Omega_2} \to \widetilde{u}\big|_{\Omega_2}, \text{ em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_2)).$$

Continuando o processo, chegamos que, para cada $T > 0$

$$\begin{array}{cccccccc}
u_{1_1}\big|_{\Omega_1} & u_{1_2}\big|_{\Omega_1} & u_{1_3}\big|_{\Omega_1} & \cdots & \to & \widetilde{u}\big|_{\Omega_1} & \text{em} & L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_1)) \\
u_{2_1}\big|_{\Omega_2} & u_{2_2}\big|_{\Omega_2} & u_{2_3}\big|_{\Omega_2} & \cdots & \to & \widetilde{u}\big|_{\Omega_2} & \text{em} & L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_2)) \\
u_{3_1}\big|_{\Omega_3} & u_{3_2}\big|_{\Omega_3} & u_{3_3}\big|_{\Omega_3} & \cdots & \to & \widetilde{u}\big|_{\Omega_3} & \text{em} & L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega_3)) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Tomando então a sequência diagonal

$$(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (u_{1_1}, u_{2_2}, u_{3_3}, \cdots), \text{ considerada em todo o } \Omega,$$

notamos que (a menos de subsequência caso necessáro) $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que de (4.14) e (4.20) obtemos

$$\begin{aligned}
&u_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u} \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}),\\
&u_{n_k} \rightharpoonup \widetilde{u} \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathrm{V}),\\
&u_{n_k} \to \widetilde{u} \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathbb{L}^2(\Omega_r)), \quad \forall r > 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

com

$$\widetilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathrm{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathrm{V}).$$

Das convergências em (4.21), ao passar o limite quando $k \to \infty$ em $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, vemos que $\widetilde{u}$ é solução de (4.3) com $\widetilde{u}(0) = u_0$. Da unicidade de solução dada pelo Teorema 4.1, segue que $\widetilde{u} = u$.

Agora, para termos que a sequência toda $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u, como em (4.21), usaremos o seguinte argumento por contradição. Suponha que não vale a convergência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;\mathrm{V}), \quad \forall T > 0.$$

Então existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não possui nenhuma subsequência que converge fraco para u em $L^2(0,T;\mathrm{V})$. Para essa sequência repetimos todo o processo realizado desde o início da demonstração. Chegamos então que existe uma subsequência $(u_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ que converge fraco para um certo $\widetilde{u_k}$ no sentido (4.21). Novamente, tomando $u = u_{n_{k_l}}$ em (4.3) e fazendo $l \to \infty$ chegamos que $\widetilde{u_k}$ é solução de (4.3) com $\widetilde{u_k}(0) = u_0$. O fato da solução ser única nos garante que

$\widetilde{u_k} = u$, logo $(u_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ converge para u no sentido (4.21), o que é uma contradição. Isto conclui a prova de (4.12).

Para verificar (4.13), observe que da convergência forte dada em (4.21), segue que

$$u_n(t) \to u(t) \text{ em } \mathbb{L}^2(\Omega_r) \text{ q.s. para } t \geq 0 \text{ e } \forall r > 0.$$

Assim, $\forall v \in \mathcal{V}$, como suporte de v é compacto, segue que

$$(u_n(t), v) \to (u(t), v)\,, \quad \text{q.s. } t \in \mathbb{R}^+.$$

Ainda, de (4.14) e (4.16), segue que a sequência $((u_n(t), v))_{n\in\mathbb{N}}$ é equilimitada e equicontínua sobre $[0, T]$, respectivamente, para cada $T > 0$. Assim, usando o Teorema de Arzelá-Ascoli, segue que existe uma subsequência $((u_{n_k}(t), v))_{k\in\mathbb{N}}$ de $((u_n(t), v))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(u_{n_k}(t), v) \to (u(t), v)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall v \in \mathcal{V},$$

e pelo mesmo argumento de contradição acima, deduzimos que

$$(u_n(t), v) \to (u(t), v)\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall v \in \mathcal{V}\,. \tag{4.22}$$

Como $\mathcal{V}$ é denso em H, de (4.22) e do item (vii) da Proposição 1.7, segue que

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \text{ em H}, \quad \forall t \geq 0.$$

Como $S(t)u_{0n} = u_n(t)$ e $S(t)u_0 = u(t)$, temos

$$S(t)u_{0n} \rightharpoonup S(t)u_0 \text{ em H}, \quad \forall t \geq 0.$$

$\square$

4.2 Existência do atrator global

Para garantirmos a existência do atrator global para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, usaremos o Teorema 3.26, ou seja, devemos mostrar somente que o semigrupo é assintoticamente compacto em H, pois no Teorema 4.5 já obtemos o conjunto absorvente $\mathcal{B}$ para o semigrupo.

Proposição 4.7. A função

$$\begin{array}{rccl} [\cdot,\cdot]: & \mathrm{V}\times\mathrm{V} & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \mapsto & \nu\left((u, v)\right) - \nu\frac{\lambda_1}{2}\left(u, v\right) \end{array}$$

é um produto interno em V. Além disso, a norma $[\cdot] = [\cdot,\cdot]^{\frac{1}{2}}$ é equivalente a norma $\|\cdot\|$.

Demonstração.

[·,·] é um produto interno em V:

Sejam $u, v, w \in \mathrm{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $[u,u] = \nu \|u\|^2 - \nu\frac{\lambda_1}{2}|u|^2 \overset{(4.2)}{\geq} \nu\|u\|^2 - \frac{\nu}{2}\|u\|^2 = \frac{\nu}{2}\|u\|^2 \geq 0.$

(ii) $[u,v] = \nu((u,v)) - \nu\frac{\lambda_1}{2}(u,v) = \nu((v,u)) - \nu\frac{\lambda_1}{2}(v,u) = [v,u]\,.$

(iii) $$\begin{aligned}[u+v,w] &= \nu((u+v,w)) - \nu\tfrac{\lambda_1}{2}(u+v,w)\\ &= \nu((u,w)) - \nu\tfrac{\lambda_1}{2}(u,w) + \nu((v,w)) - \nu\tfrac{\lambda_1}{2}(v,w)\\ &= [u,w] + [v,w]\,.\end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned}[\alpha u,v] &= \nu((\alpha u,v)) - \nu\tfrac{\lambda_1}{2}(\alpha u,v) = \alpha\nu((u,v)) - \alpha\nu\tfrac{\lambda_1}{2}(u,v)\\ &= \alpha\left(\nu((u,v)) - \nu\tfrac{\lambda_1}{2}(u,v)\right) = \alpha[u,v]\,.\end{aligned}$$

Portanto, $[\cdot,\cdot]$ é um produto interno em V.

[·] é equivalente a ‖·‖:

De (i) do item anterior, vemos que

$$[u]^2 \geq \frac{\nu}{2}\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathrm{V}\,.$$

Agora, note que

$$[u]^2 = [u,u] = \nu\|u\|^2 - \nu\frac{\lambda_1}{2}|u|^2 \leq \nu\|u\|^2, \quad u \in \mathrm{V}\,.$$

Assim, $\frac{\nu}{2}\|u\|^2 \leq [u]^2 \leq \nu\|u\|^2$, para todo $u \in \mathrm{V}$, o que mostra que a norma $[\cdot]$ é equivalente a norma $\|\cdot\|$. □

Ao somarmos e subtrairmos $\nu\,\lambda_1|u|^2$ na equação de energia em (4.6), temos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\lambda_1|u|^2 + 2\nu\|u\|^2 - \nu\,\lambda_1|u|^2 = 2\langle f,u\rangle\,,$$

e assim,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\,\lambda_1|u|^2 + 2[u]^2 = 2\langle f,u\rangle\,,$$

com $u = u(t) = S(t)u_0$ sendo solução de (4.3) e $u(0) = u_0 \in \mathrm{H}$. Agora, usando a fórmula da variação das constantes da teoria de equações diferenciais, temos

$$|u(t)|^2 = |u_0|^2 e^{-\nu\,\lambda_1 t} + 2\int_0^t e^{-\nu\,\lambda_1(t-s)}\left(\langle f,u(s)\rangle - [u(s)]^2\right)\mathrm{ds},$$

que pode ser reescrito como

$$|S(t)u_0|^2 = |u_0|^2\, e^{-\nu\,\lambda_1\,t} + 2\int_0^t e^{-\nu\,\lambda_1(t-s)}\Big(\langle f, S(s)u_0\rangle - [S(s)u_0]^2\Big)\,\mathrm{ds}, \tag{4.23}$$

para todo $u_0 \in \mathrm{H}$ e $t \geq 0$.

Agora, para mostrarmos a compacidade assintótica do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, considere um subconjunto $B \subseteq \mathrm{H}$ limitado e sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ com $t_n \to \infty$.

Como o conjunto $\mathcal{B}$ definido no Teorema 4.5 é absorvente, existe $T(B) > 0$ tal que $S(t)B \subseteq \mathcal{B}$, $\forall t \geq T(B)$, assim, para $t_n \geq T(B)$,

$$S(t_n)u_n \in \mathcal{B}\,.$$

Então, do Teorema 1.11, a sequência $(S(t_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é fracamente pre-compacta em H, ou seja, existe uma subsequência $(S(t_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ e $w \in \mathcal{B}$ (pois $\mathcal{B}$ é fechado e convexo) tal que

$$S(t_n)u_n \rightharpoonup w \text{ em } \mathrm{H},\ n \in \mathbb{N}'. \tag{4.24}$$

De forma similar, para cada $T > 0$, segue que

$$S(t_n - T)u_n \in \mathcal{B}, \quad \forall t_n \geq T + T(B). \tag{4.25}$$

Então para cada $T > 0$, o Teorema 1.11 nos garante que existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_T \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$S(t_n - T)u_n \rightharpoonup w_T \text{ em } \mathrm{H}, \text{ quando } n \to \infty \text{ em } \mathbb{N}_T$$

e $w_T \in \mathcal{B}$. Tomemos em particular $T \in \mathbb{N}$ e façamos o seguinte processo, para $T = 1$ consideremos o conjunto de índices

$$\mathbb{N}_0^1 = \{n \in \mathbb{N}' \,/\, t_n \geq 1 + T(B)\}$$

e notemos que por (4.25)

$$(S(t_n - 1)u_n)_{n\in\mathbb{N}_0^1} \subseteq \mathcal{B},$$

logo existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_0^1$ tal que

$$S(t_n - 1)u_n \rightharpoonup w_1 \text{ em } \mathrm{H}, \text{ quando } n \to \infty \text{ em } \mathbb{N}_1$$

e $w_1 \in \mathcal{B}$. Para $T = 2$ consideremos o conjunto de índices

$$\mathbb{N}_0^2 = \{n \in \mathbb{N}_1 \,/\, t_n \geq 2 + T(B)\}$$

e notemos que por (4.25)

$$(S(t_n - 1)u_n)_{n\in\mathbb{N}_0^2} \subseteq \mathcal{B},$$

logo existe um subconjunto de índices $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_0^2$ tal que

$$S(t_n - 2)u_n \rightharpoonup w_2 \text{ em } \mathrm{H}, \text{ quando } n \to \infty \text{ em } \mathbb{N}_2$$

e $w_2 \in \mathcal{B}$. Continuando o processo, obtemos

$$\cdots \mathbb{N}_3 \subseteq \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}'.$$

Tomando o conjunto de índices

$$\widetilde{\mathbb{N}} = \bigcap_{T\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_T$$

e denotando seus elementos por n_k, chegamos que a subsequência dada por $(S(t_{n_k})u_{n_k})_{n_k\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ é tal que

$$S(t_{n_k} - T)u_{n_k} \rightharpoonup w_T \text{ em } \mathrm{H}, \forall T \in \mathbb{N} \tag{4.26}$$

com $w_T \in \mathcal{B}$.

Agora, da continuidade fraca de $S(t)$ dada em (4.12), temos

$$\begin{aligned} w &= \lim_{k\to\infty} {}_{\mathrm{H}_w} S(t_{n_k})u_{n_k} = \lim_{k\to\infty} {}_{\mathrm{H}_w} S(T)S(t_{n_k} - T)u_{n_k} \\ &= S(T) \lim_{k\to\infty} {}_{\mathrm{H}_w} S(t_{n_k} - T)u_{n_k} = S(T)w_T, \end{aligned}$$

com $\lim\limits_{k\to\infty} {}_{\mathrm{H}_w}$ denotando o limite tomado na topologia fraca de H. Logo,

$$w = S(T)w_T, \quad \forall T \in \mathbb{N}.$$

De (4.24) e usando o item (iii) da Proposição 1.7, temos

$$|w| \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} |S(t_{n_k})u_{n_k}|.$$

Devemos mostrar que

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} |S(t_{n_k})u_{n_k}| \leq |w|$$

para obtermos a convergência forte desejada.

De (4.23) para $T \in \mathbb{N}$ e $t_n > T$, temos

$$|S(t_n)u_n|^2 = |S(T)S(t_n - T)u_n|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= |S(t_n - T)u_n|^2 \, e^{-\nu\,\lambda_1\,T} \\
&+ 2\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, \langle f, S(s)S(t_n - T)u_n \rangle \, \mathrm{ds} \\
&- 2\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, [S(s)S(t_n - T)u_n]^2 \, \mathrm{ds}. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Agora, fazemos estimativas para cada membro da parte direita da expressão em (4.27).

Como $S(t_n - T)u_n \in \mathcal{B}$ para $t_n \geq T + T(B)$, segue que

$$
\limsup_{k\in\mathbb{N}} \left(|S(t_{n_k} - T)u_{n_k}|^2 \, e^{-\nu\,\lambda_1\,T} \right) \leq \rho_0^2 \, e^{-\nu\,\lambda_1\,T}, \qquad (4.28)
$$

com $\rho_0 = \sqrt{2/(\lambda_1\,\nu^2)}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}$ dado no Teorema 4.5.

Da continuidade fraca do semigrupo dada em (4.13), deduzimos de (4.26) que

$$
S(\cdot)S(t_{n_k} - T)u_{n_k} \rightharpoonup S(\cdot)w_T \text{ em } L^2(0, T; \mathrm{V}).
$$

Como $e^{-\nu\,\lambda_1(T-\cdot)} f \in L^2(0, T; \mathrm{V}')$, temos, da definição de convergência fraca, usando o funcional $e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} f$, que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\in\mathbb{N}} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, \langle f, S(s)S(t_{n_k} - T)u_{n_k} \rangle \, \mathrm{ds} \\
&\qquad = \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, \langle f, S(s)w_T \rangle \, \mathrm{ds}. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Como a norma $[\cdot]$ em V é equivalente a norma $\|\cdot\|$ e

$$
0 < e^{-\nu\,\lambda_1\,T} \leq e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \leq 1, \quad \forall s \in [0, T],
$$

segue que

$$
\{\cdot\}_{L^2(0,T;\mathrm{V})} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, [\cdot]^2 \, \mathrm{ds} \right)^{\frac{1}{2}}
$$

é uma norma em $L^2(0, T; \mathrm{V})$ equivalente a norma usual.

Usando o item (iii) da Proposição 1.7, deduzimos que

$$
\{S(\cdot)w_T\}^2_{L^2(0,T;\mathrm{V})} \leq \liminf_{n\to\infty} \{S(\cdot)S(t_n - T)u_n\}^2_{L^2(0,T;\mathrm{V})},
$$

logo

$$
\int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1(T-s)} \, [S(s)w_T]^2 \, \mathrm{ds}
$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, [S(s)S(t_n - T)u_n]^2 \,\mathrm{ds}.$$

Das propriedade de lim inf e lim sup, segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} -2 \int_0^{\mathrm{T}} & e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, [S(s)S(t_{n_k} - T)u_{n_k}]^2 \,\mathrm{ds} \\
&= -\liminf_{n\to\infty} 2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, [S(s)S(t_{n_k} - T)u_{n_k}]^2 \,\mathrm{ds} \\
&\leq -2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, [S(s)w_T]^2 \,\mathrm{ds}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora, passando o lim sup com $k \to \infty$ em (4.27) e usando (4.28), (4.29) e (4.30), segue que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} |S(t_{n_k})u_{n_k}|^2 \\
&\quad \leq \limsup_{k\to\infty} |S(t_{n_k} - T)u_{n_k}|^2\, e^{-\nu\,\lambda_1\, T} \\
&\quad + \limsup_{k\to\infty} 2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, \langle f, S(s)S(t_{n_k} - T)u_{n_k}\rangle \,\mathrm{ds} \\
&\quad + \limsup_{k\to\infty} -2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)}\, [S(s)S(t_{n_k} - T)u_{n_k}]^2 \,\mathrm{ds} \\
&\quad \leq \rho_0^2\, e^{-\nu\,\lambda_1\, T} + 2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)} \left(\langle f, S(s)w_T\rangle - [S(s)w_T]^2 \right) \mathrm{ds}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por outro lado, usando $w = S(T)w_T$ em (4.23), temos

$$\begin{aligned}
|w|^2 &= |S(T)w_T|^2 \\
&= |w_T|^2\, e^{-\nu\,\lambda_1\, T} + 2 \int_0^{\mathrm{T}} e^{-\nu\,\lambda_1 (T-s)} \left(\langle f, S(s)w_T\rangle - [S(s)w_T]^2 \right) \mathrm{ds}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Assim, usando (4.32) em (4.31), temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} |S(t_{n_k})u_{n_k}|^2 &\leq |w|^2 + \left(\rho_0^2 - |w_T|^2 \right) e^{-\nu\,\lambda_1\, T} \\
&\leq |w|^2 + \rho_0^2 e^{-\nu\,\lambda_1\, T}, \quad \forall T \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Fazendo $T \to \infty$ em (4.33), obtemos

$$\limsup_{k\to\infty} |S(t_{n_k})u_{n_k}|^2 \leq |w|^2 \,, \tag{4.34}$$

que é a desigualdade que queríamos. Como H é um espaço de Hilbert e de (4.24) e (4.34), da Proposição 1.8, segue que

$$S(t_{n_k})u_{n_k} \to w \text{ em } \mathrm{H}\,.$$

Portanto, $(S(t_n)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é precompacto em H, ou seja, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é assintoticamente compacto em H. Como $\mathcal{B}$ é um conjunto absorvente e limitado em H pelo semigrupo, do Teorema 3.26, segue que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ possui um atrator global $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ que é conexo. Assim, podemos exibir o nosso principal resultado.

Teorema 4.8. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto que vale (4.1), $\nu > 0$ e $f \in \mathrm{V}'$. Então o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ associado a equação de evolução (4.3), possui um atrator global $\mathcal{A}$ em H, ou seja, um conjunto compacto invariante que atrai conjuntos limitados de H. Além disso, $\mathcal{A}$ é conexo em H e é maximal pela relação de inclusão entre todos os conjuntos limitados e invariante em H.

4.3 Estimativas das dimensões do atrator global

Nesta seção final lidamos brevemente com a teoria de dimensão de Hausdorff e dimensão fractal do atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ gerado das equações de Navier-Stokes, o qual desejamos mostrar serem finitas. A abordagem desta seção é baseada em [22] e [24].

Sejam $f \in \mathrm{V}'$ e $u_0 \in \mathrm{H}$ dadas e $u(t) = S(t)u_0$, $t \geq 0$, com u sendo solução de (4.5) e $u(0) = u_0$. Como o operador linear $F : \mathrm{V} \to \mathrm{H}$ dado por $F(v) = f - \nu Av - Bv$ é Frechét diferenciável, segue que o fluxo linearizado em torno de u é dado pelo problema de valor inicial linear abaixo

$$\begin{cases} U' + \nu AU + B(u,U) + B(U,u) = 0, \text{ em } \mathrm{V}', \\ U(0) = \xi. \end{cases} \tag{4.35}$$

Assim como no problema não linear, vale o Teorema 4.1, ou seja, dado $\xi \in \mathrm{H}$, existe uma única $U \in L^\infty(0,T;\mathrm{H}) \cap L^2(0,T;\mathrm{V})$, $\forall T > 0$, satisfazendo (4.35). Além disso, $U' \in L^2(0,T;\mathrm{V}')$ e $U \in C([0,T];\mathrm{H})$, $\forall T > 0$.

Para cada $t > 0$, a função $u_0 \in \mathrm{H} \to S(t)u_0 \in \mathrm{H}$ é Frechét diferenciável em u_0 com diferencial dada por $L(t;u_0) : \xi \in \mathrm{H} \to U(t) \in \mathrm{H}$, com U sendo a solução de (4.35), ainda, decorre disto, que $L(t;u_0)$ é limitada e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformemente diferenciável sobre $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{\substack{u_0,v_0\in\mathcal{A}\\ 0<|u-v|\leq\varepsilon}} \frac{|S(t)v_0 - S(t)u_0 - L(t;u_0)\cdot(v_0-u_0)|}{|v_0-u_0|} = 0.$$

Podemos considerar $F'(u)U = -\nu AU - B(u,U) - B(U,u)$ e definir os números inteiros positivos q_m e m por

$$q_m = \limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \sup_{\substack{\xi_i\in\mathrm{H}\\ |\xi_i|\leq 1\\ i=1,\cdots,m}} \frac{1}{t}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{Tr}(F'(S(\tau)u_0)\circ Q_m(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

com $Q_m(\tau) = Q_m(\tau;u_0,\xi_1,\cdots,\xi_m)$ sendo a projeção ortogonal de H no espaço $\mathrm{Span}\{L(t;u_0)\xi_1,\cdots,L(t;u_0)\xi_m\}$. O termo dado dentro da integral refere-se ao traço de $F'(S(t)u_0)\circ Q_m(t)$ e é definido pelo menos em quase todo t e será calculado posteriormente.

As considerações feitas até aqui são essenciais para utilizarmos os argumentos presentes na Seção 3.4 do Capítulo V de [24] em que, se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $q_m < 0$, então o atrator global $\mathcal{A}$ possui dimensões de Hausdorff e fractal finitas e estimadas por

$$\dim_H \mathcal{A} \leq m, \tag{4.36}$$

$$\dim_F \mathcal{A} \leq m\left(1 + \max_{1\leq j\leq m} \frac{(q_j)_+}{|q_m|}\right), \tag{4.37}$$

com $(q_m)_+ = \max\{0, q_m\}$. Assim, nosso objetivo neste ponto é apresentarmos estimativas para m e q_m.

Para estimarmos os números q_m, tomamos $u_0 \in \mathcal{A}$ e $\xi_1,\cdots,\xi_m \in \mathrm{H}$. Fazendo $u(t) = S(t)u_0$ e $U_j(t) = L(t;u_0)\xi_j$, $t \geq 0$, considere o conjunto $\{\phi_1(t),\cdots,\phi_m(t)\}$, $t \geq 0$ sendo uma base ortonormal em H para o subespaço $\mathrm{Span}\{U_1(t),\cdots,U_m(t)\}$. Como $U_i(t) \in \mathrm{V}$, ao menos q.s. em $t \geq 0$, podemos assumir que $\phi_j(t) \in \mathrm{V}$ (pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt).

Agora, para estimarmos $\mathrm{Tr}\, F'(u(\tau))\circ Q_m(\tau)$, por simplicidade, omitiremos a dependência de τ. Assim,

$$\mathrm{Tr}\, F'(u)\circ Q_m = \sum_{j=1}^{m} \langle F'(u)\phi_j, \phi_j\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m} \langle -\nu A\phi_j - B(u,\phi_j) - B(\phi_j,u), \phi_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(-\nu \left((A\phi_j, \phi_j)\right) - b(u,\phi_j,\phi_j) - b(\phi_j,u,\phi_j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Big(-\nu \left\|\phi_j\right\|^2 - b(\phi_j,u,\phi_j)\Big). \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Agora, vamos estimar o último membro da igualdade (4.38).

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{m} b(\phi_j,u,\phi_j)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega \sum_{k,l=1}^{2} \phi_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \phi_{jl}\, \mathrm{dx}\right| \\
&= \left|\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{2} \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{jk}\phi_{jl}\right)\right] \mathrm{dx}\right| \\
\text{(Cauchy-Schwarz)} &\leq \int_\Omega \left(\sum_{k,l=1}^{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j,k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{jk}\phi_{jl}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{dx} \\
\text{(Hölder)} &\leq \left(\int_\Omega \sum_{k,l=1}^{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)^2 \mathrm{dx} \cdot \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{jk}\phi_{jl}\right)^2 \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\| \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} \phi_{jk}^2\right) \left(\sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{m} \phi_{jl}^2\right) \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\| \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{m} |\phi_j|^2\right)^2 \mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\| \, |\rho|_{L^2(\Omega)}, \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

com $\rho(x) = \sum_{j=1}^{m} |\phi_j(x)|^2$.

Como $\{\phi_1, \cdots, \phi_m\}$ é um conjunto ortonormal em H, logo, em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ e está contido em $V \subseteq \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, da Desigualdade de Sobolev-Lieb-Thirring (encontra-se em [24, Teorema. 3.1 do Apêndice, p. 457]) com $n=2$, $p=2$ e $m=1$, temos

$$\begin{aligned}
|\rho|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \rho(x)^2 \mathrm{dx} \\
&\leq \widetilde{\kappa} \sum_{j=1}^m \int_\Omega \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \right|^2 \mathrm{dx} \\
&= \widetilde{\kappa} \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|^2 ,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

para uma constante $\widetilde{\kappa} > 0$ independente de j.

Usando (4.40) e (4.39), temos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^m b(\phi_j, u, \phi_j) \right| &\leq \|u\| \left(\widetilde{\kappa} \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\text{(Young)} &\leq \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu} \|u\|^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|^2 .
\end{aligned}$$

Por fim, (4.38) nos dá

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, F'(u) \circ Q_m &\leq -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|^2 + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu} \|u\|^2 \\
&\overset{(4.2)}{\leq} -\frac{\nu}{2} \lambda_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j|^2 + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu} \|u\|^2 \\
&= -\frac{\nu}{2} \lambda_1 m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu} \|u\|^2,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

com a última igualdade seguindo devido a ortonormalidade em H do conjunto $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^m$.

Para uma melhor notação da estimativa de q_m, defina o fluxo de dissipação de energia como sendo o número ε dado por

$$\varepsilon = \nu \lambda_1 \limsup_{t \to \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{t} \int_0^{\mathrm{t}} \|S(\tau) u_0\|^2 \, \mathrm{d}\tau,$$

que é finito devido a estimativa (4.9). Então, de (4.41), segue que

$$q_m = \limsup_{t \to \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{\substack{\xi_i \in \mathrm{H} \\ |\xi_i| \leq 1 \\ i=1,\cdots,m}} \frac{1}{t} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{Tr}(F'(S(\tau)u_0) \circ Q_m(\tau)) \mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \sup_{\substack{\xi_i\in \mathrm{H}\\ |\xi_i|\leq 1\\ i=1,\cdots,m}} \frac{1}{t}\int_0^{\mathrm{t}} \left[-\frac{\nu}{2}\,\lambda_1\, m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu}\|u(\tau)\|^2\right] \mathrm{d}\tau \\
&= -\frac{\nu}{2}\,\lambda_1\, m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu}\limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \frac{1}{t}\int_0^{\mathrm{t}} \|S(\tau)u_0\|^2\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\frac{\nu}{2}\,\lambda_1\, m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\nu^2\,\lambda_1}\varepsilon, \quad \forall m\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Daí que, se definirmos $m'\in\mathbb{N}$ tal que

$$
m'-1 \leq \frac{\widetilde{\kappa}\varepsilon}{\nu^3\lambda_1^2} < m',
$$

segue que $q_{m'}<0$ e assim de (4.36),

$$
\dim_H \mathcal{A} \leq m' \leq 1 + \frac{\widetilde{\kappa}\varepsilon}{\nu^3\lambda_1^2}.
$$

Além disso, se definirmos $m''\in\mathbb{N}$ por

$$
m''-1 < \frac{2\widetilde{\kappa}\varepsilon}{\nu^3\lambda_1^2} \leq m'',
$$

então do Lema 2.2 do Capítulo VI de [24, p. 303], segue que

$$
q_{m''}<0 \quad \text{e} \quad \frac{(q_j)_+}{|q_{m''}|} \leq 1,\, \forall j = 1,\cdots,m'',
$$

logo de (4.37),

$$
\begin{aligned}
\dim_F \mathcal{A} &\leq m''\left(1 + \max_{1\leq j\leq m''} \frac{(q_j)_+}{|q_{m''}|}\right) \leq m''(1+1) = 2m'' \\
&\leq 2\left(1 + \frac{2\widetilde{\kappa}\varepsilon}{\nu^3\lambda_1^2}\right) \\
&= 2 + \frac{4\widetilde{\kappa}\varepsilon}{\nu^3\lambda_1^2}.
\end{aligned}
$$

Agora, note que podemos estimar o fluxo dissipativo de energia ε usando a estimativa (4.9)

$$
\varepsilon = \nu\,\lambda_1 \limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \frac{1}{t}\int_0^{\mathrm{t}} \|S(\tau)u_0\|^2\,\mathrm{d}\tau
$$

$$\leq \nu\,\lambda_1 \limsup_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \left(\frac{1}{\nu t}\,|u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}^2 \right)$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{\nu}\,\|f\|_{\mathrm{V}'}^2\,. \tag{4.42}$$

Por fim, queremos estimar as dimensões de Hausdorff e fractal usando o coeficiente de Reynolds e o número de Grashof, oriundos da teoria de mecânica dos fluidos.

Para forças em V', tomando $\lambda_1^{1/2}$ como o comprimento característico para o problema (ele tem dimensão de comprimento como dado em (4.2)), podemos considerar $\|f\|_{\mathrm{V}'}^{1/2}\,\lambda_1^{1/4}$ como a velocidade característica e definimos o coeficiente de Reynolds por

$$\mathrm{Re} = \frac{\|f\|_{\mathrm{V}'}^{1/2}}{\nu\lambda_1^{1/4}}. \tag{4.43}$$

Podemos definir também, o número de Grashof, dado por

$$\mathrm{G} = \frac{\|f\|_{\mathrm{V}'}}{\nu^2\lambda_1^{1/2}} \quad \left(= \mathrm{Re}^2\right). \tag{4.44}$$

Assim, usando (4.42), temos provado o principal resultado referente a finitude das dimensões de Hausdorff e fractal do atrator global.

Teorema 4.9. O atrator global $\mathcal{A}$ obtido no Teorema 4.8 possui dimensões de Hausdorff e fractal finitas, que podem ser estimadas em termos do coeficiente de Reynolds (4.43) e do número de Grashof (4.44) por

$$\dim_H \mathcal{A} \leq 1 + \widetilde{\kappa}\mathrm{G}^2 = 1 + \widetilde{\kappa}\mathrm{Re}^4$$

e

$$\dim_F \mathcal{A} \leq 2(1 + 2\widetilde{\kappa}\mathrm{G}^2) = 2(1 + 2\widetilde{\kappa}\mathrm{Re}^4),$$

com $\widetilde{\kappa}$ uma constante absoluta.

Referências Bibliográficas

[1] F. Abergel. Attractor for a Navier-Stokes flow in an unbounded domain. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 23(3):359–370, 1989.

[2] R. A. Adams and J. J. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140. Elsevier, 2003.

[3] A. Babin. The attractor of a navier-stokes system in an unbounded channel-like domain. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 4(4):555–584, 1992.

[4] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[6] M. M. Cavalcanti and V. N. D. Cavalcanti. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2009.

[7] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[8] É. R. A. Costa. *Sistemas Gradientes, Decomposição de Morse e Funções de Lyapunov sob Perturbação.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2012.

[9] L. Euler. Principes Géneraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 11:274–315, 1755.

[10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[11] C. Foias. Statistical study of Navier–Stokes equations initial value problem. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 48:219–348, 1973.

[12] C. Foias and G. Prodi. Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 39:1–34, 1967.

[13] C. Foias and R. Temam. Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations. *Journal de mathematiques pures et appliquees*, 58(3):339–368, 1979.

[14] C. Foias and R. Temam. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. *Journal of Functional Analysis*, 87(2):359–369, 1989.

[15] S. Kesavan. *Topics in Functional Analysis and Applications.* Wiley, New York, 1989.

[16] A. Kolmogorov and S. Fomin. *Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis.* Nauka, Moscow, 1968.

[17] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, volume 1. wiley New York, 1978.

[18] O. Ladyzhenskaya. A dynamical system generated by the Navier-Stokes equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 3(4):458–479, 1975.

[19] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semigroups and evolution equations.* CUP Archive, 1991.

[20] J. Leray. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 12:1–82, 1933.

[21] C. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823):389–440, 1823.

[22] R. Rosa. The Global Attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains. *Nonlinear analysis*, 32(1):71–86, 1998.

[23] A. P. Silva. *Um estudo da teoria das dimensões aplicado a sistemas dinâmicos.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2015.

[24] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, volume 68. Springer-Verlag, 1988.

[25] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, volume 66. Siam, 1995.

[26] R. Temam. *Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.