

William Rafael Tavares

**MÉSONS NEUTROS EM MEIO MAGNETIZADO, QUENTE E
DENSO**

Tese submetida ao Curso de Pós-Graduação
em Física para a obtenção do Grau de Doutor
em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sidney dos Santos
Avancini

Universidade Federal de Santa Catarina

Coorientador: Prof. Dr. Marcus Emmanuel
Benghi Pinto

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Tavares, William Rafael

Mésons neutros em meio magnetizado, quente e denso / William Rafael Tavares ; orientador, Sidney dos Santos Avancini, coorientador, Marcus Emmanuel Benghi Pinto, 2019.

147 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo de Nambu-Jona-Lasinio. 3. Campos magnéticos fortes. 4. Aproximação de Campo Médio. 5. Aproximação de Fase Aleatória. I. Avancini, Sidney dos Santos. II. Benghi Pinto, Marcus Emmanuel. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

William Rafael Tavares

**MÉSONS NEUTROS EM MEIO MAGNETIZADO, QUENTE E
DENSO**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 04 de fevereiro 2019.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Luciano Sonogo Farias
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Jr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Emmanuel Gräve de Oliveira
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Alexandre Magno Silva Santos
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha mãe e ao meu pai (*in memoriam*), cujos incentivos aos estudos desde cedo me trouxeram até este momento.

Ao Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini, pela paciência em todos esses anos de orientação. Todos os trabalhos que desenvolvemos e as discussões geradas certamente enriqueceram a minha formação, e neste sentido posso afirmar que é um profissional exemplar a quem admiro e respeito.

Ao Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto pela coorientação, pelas diversas discussões sobre física e por me ajudar em diversos momentos. Seus ensinamentos certamente contribuíram bastante para a minha formação.

Ao Prof. Dr. Ricardo Luciano Sonogo Farias por confiar no meu trabalho como seu colaborador e pelas inúmeras conversas sobre física.

Aos membros da banca por terem aceitado avaliar o meu trabalho, assim como pelas sugestões feitas.

Ao Antônio, secretário da pós-graduação que me ajudou muito em diversos momentos.

À Joana pela paciência e carinho durante este período.

À todos os meus amigos e colegas que de alguma forma contribuíram para a finalização deste trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro durante todo o doutoramento.

*“A method is more important than a discovery,
since the right method will lead to new and
even more important discoveries.”*

(Lev Davidovich Landau)

RESUMO

Neste trabalho desejamos estudar o comportamento das massas-pólo dos mésons neutros no modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2) magnetizado sob influência de temperaturas e densidades finitas na aproximação de campo médio (MFA). Para tanto, apresentaremos os resultados utilizando as funções de Green dos quarks em meio magnético e, aplicando a aproximação de fase aleatória, obteremos expressões analíticas para os modos coletivos do modelo. Regularizaremos todas as quantidades divergentes utilizando o procedimento chamado *Magnetic Field Independent Regularization-MFIR*. Utilizaremos ainda o formalismo de tempo-imaginário de Matsubara e, assim, estenderemos os resultados para meios densos e quentes derivando também outras quantidades de interesse como a constante de decaimento f_{π^0} e o acoplamento $g_{\pi^0 qq}$.

Com todos estes resultados, nós acrescentaremos um acoplamento dependente do campo magnético, ajustado de maneira a reproduzir o condensado de quarks da QCD na rede. Em comparação com os resultados com a constante de acoplamento fixa, obtemos resultados que se mostram ser mais consistentes com as predições da rede.

De modo a termos um formalismo mais geral e simples numericamente derivaremos as mesmas expressões utilizando o método de regularização zMFIR, que mostramos ser equivalente ao MFIR.

Palavras-chave: Modelo de Nambu-Jona-Lasínio; Campos magnéticos fortes; Aproximação de Campo Médio; Aproximação de Fase Aleatória.

ABSTRACT

In this work we study the behavior of the pole-mass of neutral mesons in the magnetized Nambu–Jona-Lasinio SU(2) model under the influence of finite temperatures and densities in the Mean Field Approximation (MFA).

For this purpose, we present the results using the quarks magnetized Green Functions and applying in the Random Phase Approximation (RPA) we obtain the analytical expressions for the collective modes of the model. We also use the Magnetic Field Independent Regularization-MFIR in all divergent quantities. The Matsubara imaginary-time formalism was employed to extend all results to hot and dense medium and we have obtained other physical quantities like the neutral pion decay constant f_{π^0} and $g_{\pi^0 qq}$.

With all these results, we will include a field dependent coupling constant $G(eB)$, fitted to reproduce recent lattice data for the quark chiral condensate. In comparison with the fixed coupling constant the results turn out to be more consistent with recent lattice predictions.

In order to have a more general and simple formalism for numerical applications, we found the same results using the Zeta-Function-Magnetic Field Independent Regularization- zMFIR, that is equivalent to MFIR.

Keywords: Nambu-Jona-Lasinio Model; Strong magnetic fields; Mean Field Approximation; Random Phase Approximation

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 Possível diagrama de fases da QCD da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons. Para altas temperaturas e baixas densidades explora-se uma transição do tipo <i>crossover</i>. Para baixas temperaturas e altas densidades, espera-se transições de primeira ordem. Para densidades ainda maiores espera-se uma fase de supercondutividade de cor. Figura retirada de [15].</p>	25
<p>Figura 2 Ilustração de uma colisão não-frontal de íons-pesados ultrarelativísticos produzindo matéria de quarks e glúons em um forte campo magnético na direção perpendicular ao plano de reação. Figura retirada de [28].</p>	27
<p>Figura 3 Tempo de duração dos campos magnéticos estimados para diferentes feixes de energia. São considerados um modelo teórico na figura da direita e um modelo numérico na figura da esquerda. Figura retirada de [25].</p>	28
<p>Figura 4 Catálise magnética inversa. Na figura da esquerda a dependência da média dos condensados $\frac{\Delta(\Sigma_u + \Sigma_d)}{2}$ variando com a intensidade do campo magnético para temperaturas fixas. Na figura da direita mostramos a dependência da média dos condensados variando com a temperatura para diferentes valores de campos magnéticos. Figura retirada da referência [54].</p>	30
<p>Figura 5 Regras de Feynman do modelo NJL $SU(2)$.</p>	37
<p>Figura 6 Série de Dyson: Primeiro termo representa o propagador do quark livre somado com um termo de autointeração (<i>Tadpole</i>). Figura retirada da referência [70].</p>	38
<p>Figura 7 Espalhamento de quarks up e anti-down mediante troca de um méson π^+ no lado esquerdo. No lado direito da figura, associa-se o espalhamento em questão à aproximação RPA. Figura retirada de [71].</p>	39
<p>Figura 8 Comparação entre a massa efetiva dos quarks, massas dos mésons π e do méson σ variando com a temperatura. A intersecção entre as duas linhas pretas indica com mais evidência a temperatura de Mott. Verifica-se uma transição do tipo <i>crossover</i> da fase de simetria parcialmente quebrada para a fase de simetria parcialmente restabelecida.</p>	46
<p>Figura 9 Comparação entre a massa efetiva dos quarks, massas dos mésons π e do méson σ variando com o potencial químico. Percebe-se uma transição de primeira ordem na massa efetiva dos quarks da fase de simetria parcialmente quebrada para a fase de simetria parcialmente restabelecida. A massa dos mésons sofrem o salto descontínuo para a</p>	

fase ressonante.	47
Figura 10 Constante de decaimento f_π variando com a temperatura. Percebe-se um enfraquecimento da constante de decaimento à medida que a temperatura aumenta.	48
Figura 11 Acoplamento $g_{\pi qq}$ variando com a temperatura. O acoplamento fica mais fraco à medida que a temperatura aumenta, indicando um enfraquecimento da interação entre píons e quarks na fase de simetria parcialmente restaurada.	48
Figura 12 Dados da rede para a média e a diferença do condensado de quarks [54]. O símbolo (+/2) é associado a média e (-) a diferença entre os condensados Σ_u e Σ_d	65
Figura 13 Média dos condensados do modelo NJL SU(2) com os dados de LQCD. Em vermelho os resultados do modelo com constante fixa e em azul com $G(eB)$	67
Figura 14 Diferença dos condensados do modelo NJL SU(2) com os dados de LQCD. Em vermelho os resultados do modelo com constante fixa e em azul com $G(eB)$	67
Figura 15 Massa constituinte normalizada dos quarks nos conjuntos de parâmetros <i>I</i> e <i>II</i> . Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$	68
Figura 16 Massa-pólo do méson π^0 normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. Em amarelo o resultado para a massa do π^0 da teoria $\bar{q} - q$ [100].	69
Figura 17 Massa-pólo do méson σ normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$	70
Figura 18 Constante de decaimento f_{π^0} normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. O resultado na curva pontilhada ainda diz respeito a uma aproximação utilizada tal que $I_{q,n}(m_{\pi^0}^2) \approx I_{q,n}(0)$. A curva com o resultado sem a aproximação está em amarelo.	71
Figura 19 Acoplamento $g_{qq\pi^0}$ normalizado. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$	72
Figura 20 Massa-pólo do π^0 normalizada comparada com os dados de LQCD. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a	

constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. Os parâmetros agora dizem respeito aos conjuntos III e IV da tabela 1.	73
Figura 21 A função zeta de Hurwitz periódica $\zeta(y, \{x\})$, onde $y = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ foram usados como exemplos.	80
Figura 22 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo dos mésons π variando com a temperatura.	92
Figura 23 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$	93
Figura 24 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$	94
Figura 25 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.0 \text{ GeV}^2$, com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).	97
Figura 26 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$, com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).	98
Figura 27 Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$, com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).	99
Figura 28 Caminho de Hankel.	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Conjunto de parâmetros utilizados para o modelo NJL SU(2). À $T = 0$, $m_\pi(0)$ é a massa do pión neutro para $eB = 0$	66
Tabela 2	Valores dos parâmetros para o ajuste do acoplamento $G(eB, T)$. Unidades em potências de GeV.	96

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	O DIAGRAMA DE FASES DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA	23
1.2	A SIMETRIA QUIRAL	25
1.3	A MATÉRIA DE QUARKS MAGNETIZADA	26
1.3.1	A fenomenologia associada aos campos magnéticos na QCD	29
1.4	O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO MAGNETIZADO	31
2	UMA TEORIA EFETIVA PARA A QCD EM BAIXAS ENER- GIAS	35
2.1	O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO	35
2.1.1	Propriedades básicas do modelo	35
2.1.2	Modos coletivos: as massas-pólo dos mésons π e σ	38
2.1.3	O acoplamento $g_{\pi qq}$ e a constante de decaimento f_{π} no vácuo	41
2.1.4	O modelo de Nambu–Jona-Lasinio sob condições de tem- peraturas e densidades finitas	44
3	O MODELO DE NJL COM CAMPO MAGNÉTICO EX- TERNO CONSTANTE	49
3.1	A LAGRANGIANA DO MODELO DE NJL EM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE	49
3.2	PROPAGADOR DE FEYNMAN NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE	50
3.3	OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DO GAP EM MEIO MAGNÉTICO CONSTANTE	52
3.3.0.1	Regularização	53
3.3.0.2	Cálculo de I	56
3.3.0.3	Cálculo de I_{div}	56
3.4	EXCITAÇÕES MESÔNICAS SOB INFLUÊNCIA DE CAM- POS MAGNÉTICOS CONSTANTES	58
3.4.0.4	A constante de decaimento f_{π^0} e o acoplamento $g_{\pi^0 qq}$ sob in- fluência de campos magnéticos constantes	60
4	MODELO DE NJL SU(2) COM O AJUSTE $G(EB)$	63
4.1	ACOPLAMENTO DEPENDENTE DO CAMPO MAGNÉTICO $G(EB)$	63
4.2	INTERPRETAÇÃO DOS DADOS DE LQCD - AJUSTE DA CONSTANTE $G(EB)$	63
4.3	RESULTADOS	66

5	APLICAÇÃO DO MÉTODO ZMFIR PARA A EQUAÇÃO DE GAP	75
5.1	EQUAÇÃO DO GAP MAGNETIZADA COM T E μ FINITOS	75
5.2	MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REGULARIZAÇÃO UTILIZANDO FUNÇÕES ZETA DE HURWITZ	76
5.2.1	Formalismo zMFIR	77
5.2.2	Equação de gap magnetizada no zMFIR	82
5.3	MODOS COLETIVOS MAGNETIZADOS SOB CONDIÇÕES DE T E μ FINITOS	84
5.3.1	Modos coletivos utilizando o zMFIR	87
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	91
6.1	A CATÁLISE MAGNÉTICA E A MASSA-PÓLO DOS MÉSONS NEUTROS	91
6.1.1	Redução dimensional na fase de Wigner-Weyl	92
6.2	APLICAÇÃO DO ACOPLAMENTO $G(EB)$	96
6.3	COMPARAÇÕES COM A LITERATURA ATUAL	97
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	101
	REFERÊNCIAS	105
	APÊNDICE A – Definições	115
	APÊNDICE B – Modos coletivos no formalismo zMFIR ...	123
	APÊNDICE C – Equivalência entre zMFIR e MFIR	131
	APÊNDICE D – Cálculo do valor principal no MFIR	143

1 INTRODUÇÃO

Compreender as propriedades das diversas fases que a matéria pode assumir devido às mudanças em condições externas como temperaturas, densidades, campos magnéticos e elétricos têm sido sempre de alto interesse científico. Essa curiosidade também se estende para as propriedades dos constituintes fundamentais da matéria, ou seja, tenta-se compreender como as partículas sub-atômicas se comportam sob essas condições externas.

1.1 O DIAGRAMA DE FASES DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

Hádrons são partículas que interagem mediante a força forte, uma interação de curtíssimo alcance responsável por manter os núcleos dos átomos coesos. São exemplos de hádrons os prótons e os nêutrons, que são encontrados nos núcleos atômicos, e os mésons $\vec{\pi}$ que aparecem em raios cósmicos. Porém, os hádrons são também formados por outras partículas, os quarks e os glúons. Esses últimos, por não serem formados por nenhuma outra partícula são até o momento considerados partículas elementares e formam um setor do Modelo Padrão conhecido como Cromodinâmica Quântica (QCD) [1, 2]. Dentre as características mais marcantes da QCD estão o confinamento, propriedade na qual os quarks e glúons sempre estariam confinados formando hádrons (impossibilitando assim, a detecção de quarks livres), a liberdade assintótica [2], que permite analisar o comportamento da constante de acoplamento da teoria para os diversos níveis de energia que os processos de espalhamento podem apresentar, e a quebra espontânea da simetria quiral, que é responsável pela geração dinâmica da massa efetiva dos quarks internos aos hádrons.

Assim, como é possível fazer um diagrama de fases para diversos materiais sujeitos a condições externas, espera-se que sejamos capazes de fazer o mesmo para a matéria nuclear sujeita a temperaturas e densidades bariônicas finitas, condições físicas encontradas em objetos compactos como as estrelas de nêutrons ou no universo primordial. Resultados experimentais do ALICE¹ e do RHIC², através de colisões de íons pesados ultrarelativísticos (como Pb+Pb ou Au+Au) nos mostram que uma nova fase da matéria foi alcançada, chamada de quark-glúon-plasma (QGP) [3]. Nesta fase, os quarks e glúons não formam mais matéria hadrônica e o livre caminho médio destas partículas

¹ALICE - A Large Ion Collider Experiment, no CERN - Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire.

²RHIC - Relativistic Heavy Ion Collider no BNL - Brookhaven National Laboratory.

se torna razoavelmente maior.

As evidências para a possível formação de QGP são diversas. Entre elas podemos começar citando a concordância entre modelos hidrodinâmicos relativísticos utilizando graus de liberdades de quarks e glúons, com e sem viscosidade na previsão do fluxo elíptico v_2 com dados experimentais [4, 5]. Esse tipo de medida infere o quão interagente é o meio formado na colisão. Caso sejam utilizados graus de liberdade hadrônicos nestes modelos, os resultados ficam subestimados quando comparados com os experimentos [6, 7]. Outra evidência que pode ser analisada é a de que espera-se que a densidade de energia associada a matéria formada pelo QGP seja maior do que a matéria do início da colisão. As estimativas numéricas para esse cenário concordam com as previsões dadas pelos dados experimentais [8]. Pode-se citar ainda que o fator de modificação nuclear³ [9] e a correlação angular entre dois hádrons⁴ [10], fornecem evidências fortes a respeito da produção de quarks e glúons nas colisões de íons pesados quando comparadas com os experimentos que supostamente não apresentam o QGP (do tipo p+p, por exemplo). Outras análises mais detalhadas podem ser vistas em [11–13].

Embora fundamentais, os experimentos do RHIC e do LHC exploraram uma região onde a alta energia utilizada produz uma densidade bariônica líquida perto de zero e temperaturas muito altas, sendo esta uma região bastante específica de um possível diagrama de fases $T \times \mu_B$ (sendo μ_B o potencial químico bariônico). Espera-se que transições para a matéria de quarks e glúons também possam ocorrer em regiões de densidade bariônica líquida diferente de zero e temperaturas mais baixas. Um cenário em que isso possivelmente ocorre de forma natural são as estrelas de nêutrons [14]. Entretanto, experimentos com colisões nucleares com energias mais baixas podem proporcionar esse tipo de entendimento. Espera-se que medidas feitas nos futuros experimentos do FAIR⁵ na Alemanha e NICA⁶ na Rússia possam juntos com a colaboração STAR⁷ do RHIC, incrementar o entendimento do diagrama de fases da QCD neste sentido.

O possível diagrama de fases da QCD é dado na figura 1.1. Para baixas densidades bariônicas e altas temperaturas espera-se uma transição de fases de primeira ordem da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons. Em baixas temperaturas e altas densidades bariônicas, espera-se um comportamento de *crossover*. Ainda espera-se que para altíssimas densidades

³Através desta quantidade, pode-se estudar a forma na qual acontece a perda de energia dos quarks no meio formado pelo plasma.

⁴Esta quantidade ajuda a medir a supressão de partículas no plasma a partir de pares de partículas correlacionados através de diferenças angulares.

⁵FAIR - Facility for Antiproton and Ion Research.

⁶NICA - Nuclotron-based Ion Collider fAcility.

⁷STAR - Solenoidal Tracker at RHIC.

bariônicas exista uma fase de supercondutividade de cor, que não será tratada neste trabalho.

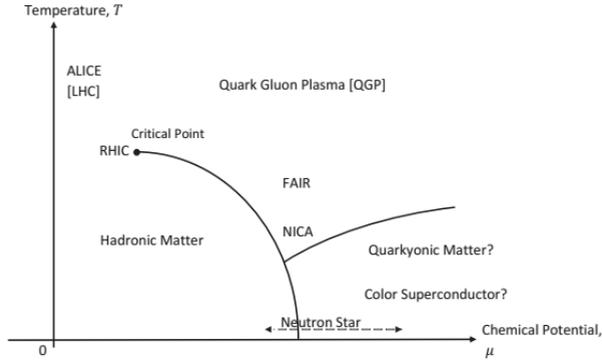


Figura 1 – Possível diagrama de fases da QCD da matéria hadrônica para o plasma de quarks e glúons. Para altas temperaturas e baixas densidades explora-se uma transição do tipo *crossover*. Para baixas temperaturas e altas densidades, espera-se transições de primeira ordem. Para densidades ainda maiores espera-se uma fase de supercondutividade de cor. Figura retirada de [15].

1.2 A SIMETRIA QUIRAL

Como já mencionamos, quarks e glúons, interagem através da interação forte dentro dos hádrons. Via mecanismo de Higgs [1], o quark *up* tem massa de corrente de 2.3 MeV e o quark *down* tem 4.8 MeV. Como os glúons são não-massivos, a massa de um hádron como um próton, que comporta três quarks deveria ser da ordem de 10 MeV, o que não é verdade, já que a massa medida de um próton é de cerca de 938 MeV. Isso acontece devido as interações internas ao hádron, que fazem com que os quarks adquiram uma massa efetiva, tornando o hádron mais massivo. O mecanismo responsável por gerar essa massa efetiva para os quarks está diretamente relacionado com a quebra espontânea da simetria quiral⁸, que é uma das características fundamentais da QCD.

Portanto, a mudança da matéria nuclear para o plasma de quarks e

⁸Esta simetria só é exata num limite em que as massas dos férmions do modelo são nulas. Na QCD, dizemos que a simetria quiral é aproximada devido a pequena massa dos quarks *up* e *down*.

glúons vem acompanhada da mudança de valor na massa dos quarks, onde a massa efetiva na fase hadrônica deve sofrer uma transição para a massa de corrente na fase onde a simetria quiral aproximadamente se reestabelece. Muitas vezes essa mudança é chama de transformação quiral.

O diagrama de fases apresentado não pode ser obtido diretamente de técnicas tradicionais da QCD para processos altamente energéticos, visto que estamos em um regime de baixas energias e a teoria de perturbação tradicional torna-se inviável. Em geral, pode-se utilizar técnicas computacionais como o método de Monte Carlo e calcular propriedades de QCD na rede [16]. Além disso, é possível utilizar técnicas não-perturbativas através de modelos efetivos [17–21], que são teorias que utilizam as características fundamentais da QCD (como é o caso da simetria quiral) para extrair informações de regiões onde a QCD não é capaz de nos informar (setor de baixas enegias), ou até mesmo onde a QCD na rede é incapaz de calcular (com potencial químico finito, devido ao problema do sinal [22]).

Neste trabalho optamos por utilizar o modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2) [17, 18] através da aproximação de campo médio. Este modelo tem obtido bastante sucesso, visto que incorpora como característica fundamental da QCD a quebra dinâmica da simetria quiral. Por ser uma teoria mais simples que a QCD, torna a previsão de alguns resultados de interesse uma tarefa viável, mesmo quando incluímos aproximações e truncamentos não-perturbativos mais complicados. A expansão do modelo para temperaturas e densidades bariônicas finitas pode ser feita através das tradicionais técnicas de Teorias Quânticas de Campos à temperatura finita [23]. Entretanto, sua limitação é bastante evidente ao notarmos que não inclui o confinamento e a liberdade assintótica. Outro problema é que não é uma teoria renormalizável, o que faz com que dependa da escolha adequada de técnicas de regularização que reproduzam bem observáveis como a massa do méson π , e a constante de decaimento $f_{\vec{\pi}}$.

1.3 A MATÉRIA DE QUARKS MAGNETIZADA

A colisões de íons-pesados ultrarelativísticos não-frontais podem gerar campos magnéticos intensos [24, 25], já que os espectadores⁹ de ambas as direções da colisão, devem gerar correntes elétricas que induzem (na média) campos magnéticos perpendiculares ao plano de reação (definido pelo parâmetro de impacto e a direção do feixe). As colisões Au+Au com $\sqrt{s} =$

⁹Partículas que não participam da colisão.

200 GeV¹⁰ no RHIC podem-se atingir campos magnéticos da ordem de $eB \sim m_\pi^2 \sim 10^{18}$ Gauss¹¹ enquanto em colisões do tipo Pb+Pb no LHC com $\sqrt{s} = 2.76$ TeV os campos magnéticos são desta forma cerca de dez vezes maiores que os produzidos no RHIC [27]. Portanto, visto que esses campos magnéticos são da ordem $eB \sim \Lambda_{QCD}^2$, espera-se que importantes ingredientes possam ser explorados na física associada às colisões de íons-pesados.

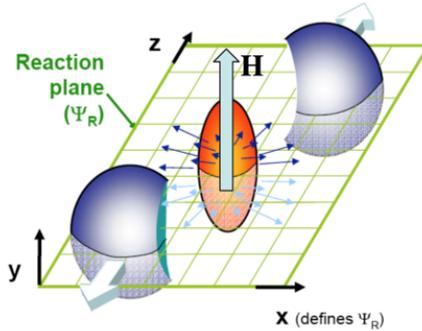


Figura 2 – Ilustração de uma colisão não-frontal de íons-pesados ultra-relativísticos produzindo matéria de quarks e glúons em um forte campo magnético na direção perpendicular ao plano de reação. Figura retirada de [28].

Pode-se analisar o tempo de duração de tais campos magnéticos nessas colisões através dos prótons espectadores, que devem deixar a região da colisão de maneira muito rápida, e como são os principais geradores dos campos magnéticos intensos, deve-se imaginar que os mesmos devem decair muito rápido com o tempo (da ordem de 1 fm/c) [25]. Então, as partículas carregadas remanescentes da colisão, agora em movimento muito mais lento devem ser as principais fontes de campos magnéticos. Simulações numéricas podem confirmar razoavelmente esse paradigma [29]. Porém, vale lembrar, que QGP em equilíbrio, é um condutor elétrico muito bom de acordo com a QCD na rede e outros resultados teóricos [30]. Neste sentido, pela Lei da Indução de Faraday, se a condutividade elétrica σ é grande, então campos magnéticos remanescentes podem durar mais tempo do que os campos gerados unicamente pelos espectadores. Contudo, deve-se ressaltar que se este meio for gerado em condições realistas tratar-se-á de um sistema fora do equilíbrio e,

¹⁰É útil fazer o uso das variáveis de Mandelstam para analisar processos de espalhamento. No caso em questão, s é a raiz quadrada do 4-momento inicial do processo [2].

¹¹Onde usamos para conversão o sistema de unidades Gaussiano na qual $1 \text{ GeV}^2 = 1.44 \times 10^{19}$ Gauss [26].

portanto, de difícil análise.

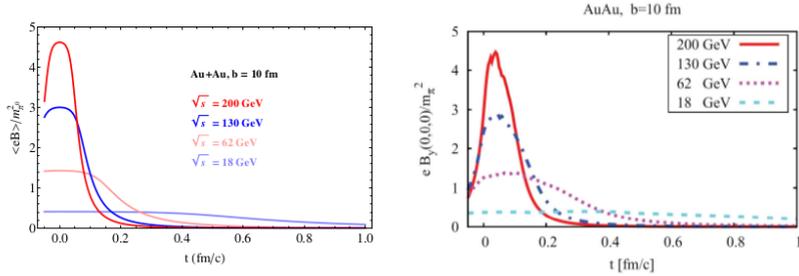


Figura 3 – Tempo de duração dos campos magnéticos estimados para diferentes feixes de energia. São considerados um modelo teórico na figura da direita e um modelo numérico na figura da esquerda. Figura retirada de [25].

Em uma análise alternativa e um pouco mais completa através dos potenciais de Liénard-Wiechert, faz-se o tratamento do quark-gluon plasma formado tanto como um meio estático como um meio que sofre expansão, na qual sua condutividade elétrica depende do tempo [31, 32]. Percebe-se nesses trabalhos que em ambos os cenários, encontra-se como resultado base que campos magnéticos gerados no RHIC variam pouco nas escalas de tempo consideradas para QGP. Um exemplo disso, é o decréscimo de $eB \sim 2.5 m_\pi^2$ para aproximadamente $eB \sim \frac{m_\pi^2}{4}$ em $t \approx 5 fm$. Entretanto, a referência [33] chama atenção para o fato de que a condição utilizada $\sigma \gg \frac{1}{t_c}$ (σ é a condutividade elétrica e t_c é uma escala de tempo característica da QGP) nunca é satisfeita para as condições realistas dos aceleradores e, portanto, a condutividade elétrica σ não deve apresentar papel importante na manutenção de tais campos.

Recentes simulações numéricas associadas com flutuações de evento-por-evento das posições dos prótons nos núcleos que sofrem as colisões do tipo Au+Au (nas energias características do RHIC e LHC já citadas) preveem não somente a produção dos fortes campos magnéticos aqui mencionados, mas também de campos elétricos da mesma ordem de magnitude [29, 34–36]. Em colisões assimétricas do tipo Cu+Au, também são previstos fortes campos elétricos na região de sobreposição dos núcleos [37–39]. Apesar de estarem em estágios iniciais, alguns estudos já estão sendo feitos de modo a tentar incluir o efeito de campos elétricos na previsão de propriedades da matéria nuclear fortemente interagente [40–42].

1.3.1 A fenomenologia associada aos campos magnéticos na QCD

A possibilidade de fortes campos magnéticos se estende também para além dos aceleradores de partículas. Espera-se, por exemplo, que fortes campos magnéticos estejam presentes na evolução do universo primordial [43]. Estrelas de nêutrons conhecidas como magnetares [44, 45] também podem apresentar fortes campos magnéticos, tornando-se assim bons laboratórios naturais para se investigar a influência desses campos na matéria nuclear. Embora os campos magnéticos desses objetos estelares sejam em magnitude muito inferiores aos alcançados nos laboratórios do CERN e BNL (magnetares podem apresentar campos magnéticos da ordem de 10^{14} até 10^{15} Gauss), ainda assim interessantes propriedades podem ser exploradas nesse contexto.

A existência da fenomenologia associada a tais poderosos campos magnéticos abrem a possibilidade para diversos interessantes fenômenos a serem explorados, tais como a catálise magnética na quebra dinâmica da simetria quiral [46–48] que será o tema central desta tese, a condensação de mésons ρ^\pm [49, 50], o efeito magnético quiral (Chiral Magnetic Effect) [51] entre uma vasta gama de diversas outras investigações.

O condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$ guia a restauração da simetria quiral como um parâmetro de ordem aproximado [52]. Ao explorar o diagrama de fases da QCD sob as condições de T , μ e eB , o parâmetro de ordem torna-se peça fundamental. A estrutura não trivial do vácuo da QCD, que engloba interações não-perturbativas entre os constituintes fundamentais, os quarks e os glúons, faz com que os quarks se tornem mais massivos internamente nos hádrons, devido a quebra dinâmica da simetria quiral. Sabe-se que em condições $T = \mu = 0$, de forma não-perturbativa, os campos magnéticos intensificam as interações dos quarks tornando o valor do condensado quiral cada vez maior. A esse fenômeno dá-se o nome de Catálise Magnética. Diversas teorias efetivas, em geral na aproximação de campo médio, prevêem de forma quantitativa esse cenário, assim como diversos cálculos de QCD na rede. Se a estes resultados ainda incluirmos temperaturas finitas e potencial químico, espera-se intuitivamente que a temperatura de *crossover* e a temperatura crítica aumentem à medida que os campos magnéticos aumentam [53]. Entretanto, recentemente a QCD na rede indicou resultados bastante peculiares. A temperatura pseudo-crítica de transição, para campos magnéticos a partir da ordem de $eB \sim 0.1 \text{ GeV}^2$ sofrem um decréscimo a medida que o campos magnéticos crescem [54] como mostra a figura 4. Esse resultado contra-intuitivo tem sido motivo de intensos debates e investigações recentes na literatura, e a este fenômeno dá-se o nome de Catálise Magnética Inversa

(IMC¹²). Existe ainda uma previsão semelhante a esta abordagem, com campos magnéticos mais moderados sob $T = 0$ e $\mu \neq 0$ previstos pelo modelo de NJL [55] e por modelos holográficos [56].

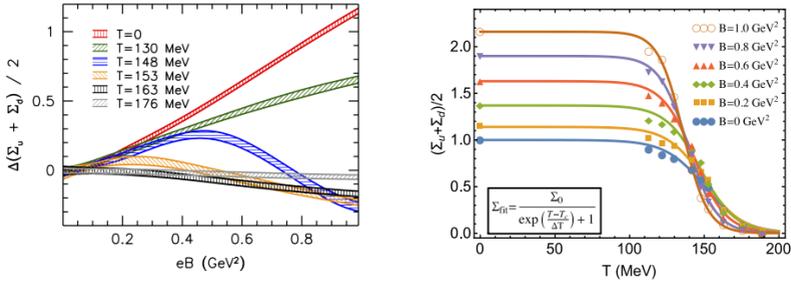


Figura 4 – Catálise magnética inversa. Na figura da esquerda a dependência da média dos condensados $\frac{\Delta(\Sigma_u + \Sigma_d)}{2}$ variando com a intensidade do campo magnético para temperaturas fixas. Na figura da direita mostramos a dependência da média dos condensados variando com a temperatura para diferentes valores de campos magnéticos. Figura retirada da referência [54].

No lado esquerdo da figura 4, vemos que a média dos condensados dos quarks $\frac{\Delta(\Sigma_u + \Sigma_d)}{2}$ é calculada para diversas temperaturas diferentes à medida que o campo magnético aumenta. O gráfico do lado direito mostra a dependência da média dos condensados de acordo com a temperatura para valores fixos de campo magnético. Essa figura foi feita na referência [48] utilizando os dados fornecidos em [54].

Varias são as tentativas de tentar entender as divergências entre as previsões de teorias efetivas e a QCD na rede. Entre elas podemos citar a competição dos efeitos termo-magnéticos na dinâmica subjacente ao mar de quarks e os quarks de valência em simulações de QCD na rede [57, 58]. Nestas simulações, os quarks de valência contribuiriam de forma mais direta para a catálise magnética, enquanto os efeitos térmicos próximos a região crítica $T \sim 140$ MeV são guiados pelo mar de quarks, levando a uma forte supressão do condensado quiral.

Essa supressão do condensado quiral pode ser vista ainda a partir do ponto de vista do efeito de blindagem dos glúons devido ao campo magnético. Como discutido em [47], os glúons se comportam “quase” como ressonâncias massivas com a massa proporcional ao campo magnético, e assim, suprimem a geração da massa efetiva dos quarks. Esse efeito não é suficiente para

¹²*Inverse Magnetic Catalysis.*

anular a catálise magnética em $T = 0$, mas intuitivamente pode-se imaginar que em altas temperaturas este efeito pode ser dominante levando à catálise magnética inversa [47].

Um cenário promissor encontra-se em incorporar os efeitos da catálise magnética inversa através da constante de acoplamento em teorias efetivas. Uma maneira de se fazer isto, que tem sido explorada recentemente de algumas maneiras diferentes, é fazendo-se um ajuste dos dados de rede na constante de acoplamento, incorporando assim os efeitos da IMC [26, 59].

Outras tentativas ainda exploram a possibilidade da supressão do condensado quiral via flutuações topológicas [60, 61], a inclusão do *Loop* de Polyakov na dinâmica da restauração da simetria quiral sob campos magnéticos finitos [62–64] e algumas tentativas através do *bag model* [65].

Uma ideia bastante explorada na literatura recente suporta a possível influência da flutuação de excitações de píons neutros na região da transição de fases. Assim, estas excitações coletivas de baixas energias teriam relações de dispersão altamente não-isotrópicas (na região chamada de acoplamento fraco para o modelo NJL), suprimindo assim, parte do potencial termodinâmico associado aos quarks e anti-quarks próximos a temperatura pseudo-crítica, gerando a IMC. Este efeito foi batizado de Inibição Magnética [66]. Tal ideia ainda sofre resistência pelo fato de que o regime da QCD que nos interessa não pode ser aproximado utilizando a abordagem sugerida (no regime de acoplamento fraco), e mesmo no regime de acoplamento forte, as relações de dispersão deixam de ser altamente não-isotrópicas. Uma análise mais profunda pode ser vista em [47]. Entretanto, esforços recentes tem sido feitos em tentar incluir os efeitos de mésons π^0 e σ no modelo de Nambu e Jona-Lasinio na sua versão de dois sabores [67]. Nessa abordagem, utilizando a regularização de Pauli-Villars, a IMC é encontrada para campos magnéticos da ordem de $eB \sim 20m_\pi^2$, ou seja, muito acima dos valores previstos pela QCD na rede. Vale lembrar que essa abordagem é equivalente a realizar os cálculos numa aproximação além do campo médio, não-usual na literatura.

1.4 O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO MAGNETIZADO

Pretendemos apresentar alguns desenvolvimentos recentes associados ao modelo de NJL SU(2) magnetizado sob condições de temperaturas e densidades finitas. Em geral, esse modelo é estudado através da aproximação de campo médio (MFA¹³) e a aproximação de fase aleatória (RPA¹⁴), sendo possível estendê-lo a temperaturas e densidades finitas através do formalismo

¹³*Mean Field Approximation.*

¹⁴*Random Phase Approximation.*

de tempo imaginário de Matsubara [70, 71].

Assim, no Capítulo 2 deste trabalho mostraremos uma revisão das propriedades básicas do modelo em MFA e RPA no vácuo assim como os seus resultados em meio denso e quente.

Para utilizar a versão magnetizada do modelo NJL $SU(2)$, podemos fazer o uso de resultados de diversos trabalhos [72, 73] que apresentam as soluções da equação de Dirac em meio magnético, e com auxílio de técnicas usuais de Teoria Quântica de Campos, poderemos derivar os propagadores de Feynman magnetizados. Uma vez obtidos estes propagadores, pode-se reproduzir os resultados tradicionais do modelo em meio magnético externo constante.

Como estamos interessados na influência dos mésons neutros na matéria de quarks magnetizada, apresentaremos recentes resultados associados ao cálculos dos modos coletivos magnetizados do modelo associados ao uso do método de regularização MFIR¹⁵ [74, 75]. Este método é fundamental no nosso trabalho, pois faz com que todas as contribuições associadas ao vácuo e ao meio magnético fiquem devidamente separadas.

No Capítulo 3, mostraremos brevemente como obtermos as soluções para a equação de GAP em meio magnético através do uso do propagadores de Feynman magnetizados, e com o auxílio do MFIR [74–77] encontraremos expressões que separam de forma conveniente as contribuições do vácuo e do campo magnético. As excitações mesônicas (modos neutros) do Capítulo 2 serão calculadas em meio magnético da mesma forma.

No Capítulo 4 apresentaremos os resultados obtidos quando incluímos o acoplamento $G(B)$ dependente do campo magnético nos modos coletivos [75]. Como discutido anteriormente, esse acoplamento é escolhido de maneira a reproduzir os recentes dados de QCD na rede para IMC no condensado quiral [54]. Mostraremos que o resultado obtido com o acoplamento G constante difere quantitativamente dos resultados com $G(eB)$ como é o caso da massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do pión neutro, e que este último apresenta uma excelente concordância com os recentes resultados de QCD na rede [78, 79].

Com o objetivo de introduzir uma maneira alternativa de regularizar quantidades divergentes, apresentaremos o zMFIR¹⁶ no Capítulo 5, um método de regularização equivalente ao MFIR, mas que apresenta-se sendo analiticamente mais simples e numericamente mais fácil de ser tratado. Este método é baseado numa formulação alternativa em termos de funções Zeta de Hurwitz [80]. As expressões deste Capítulo ainda contarão com o formalismo de tempo imaginário de Matsubara, de modo a termos a contribuição de

¹⁵Magnetic Field Independent Regularization.

¹⁶zeta function Magnetic Field Independent Regularization.

campos magnéticos, densidades e temperaturas finitas em todos os cálculos apresentados.

No Capítulo 6 apresentaremos os resultados associados ao modelo NJL $SU(2)$ magnetizado sob efeito de temperaturas finitas assim como algumas discussões relevantes, e no Capítulo 7 as devidas conclusões.

2 UMA TEORIA EFETIVA PARA A QCD EM BAIXAS ENERGIAS

2.1 O MODELO DE NAMBU–JONA-LASINIO

Faremos uma revisão dos principais resultados do modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2) no vácuo através do cálculo dos propagadores dos quarks *up* e *down*, utilizando a aproximação de campo médio (MFA). Mostraremos como obter os modos coletivos do modelo através da aproximação de fase aleatória (RPA) e com o auxílio do formalismo de tempo imaginário de Matsubara, calcularemos as mesmas quantidades apresentadas no vácuo sob condições de temperaturas e densidades finitas.

2.1.1 Propriedades básicas do modelo

Em 1961, ainda quando os quarks não eram conhecidos, Yogiuro Nambu e Giovanni Jona-Lasinio propuseram um modelo [17, 18], na qual nucleons interagem mediante a troca de mésons $\vec{\pi}$ e σ . Neste período pré-QCD, o confinamento também não era conhecido, muito embora houvessem indicações de que existia uma conservação parcial da corrente axial (PCAC¹). Posteriormente, a QCD viria a ser a teoria responsável por explicar os fenômenos relacionados a interação forte, mas haviam problemas, como o de entender a geração dinâmica da massa dos quarks, o que entrava em contraste com a grande massa dos nucleons. Neste aspecto, o modelo proposto passou décadas depois a ser interpretado como uma teoria efetiva para QCD em baixas energias (com quarks *up* e *down* na sua versão mais simples, podendo ser estendido com a inclusão do quark *strange* [71]), explicando de modo semelhante aos mecanismos da teoria BCS [81] a geração dinâmica da massa dos quarks, preservando características fundamentais da QCD e que vem se mostrando uma valiosa alternativa para cálculos no regime não-perturbativo.

Vamos iniciar mostrando como é possível através do modelo de Nambu–Jona-Lasinio, encontrar a geração dinâmica da massa dos quarks. A lagrangiana do modelo NJL SU(2) é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\gamma_{\mu} i \partial^{\mu} - m) \psi + G [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2], \quad (2.1)$$

onde, γ são as matrizes gama, $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli e os campos

¹Do inglês para *Partially Conserved Axial Current*.

fermiônicos $\psi \equiv \psi(x)_j$ onde $j = u, d$ representa os espiniores para os campos dos quarks *up* e *down*. Por simplicidade, deixaremos as somas de cor e do espaço de isospin implícitas

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

e suas respectivas massas de corrente, dadas por

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

adotaremos neste trabalho a simetria de isospin, $m_u = m_d = m_0$. Temos também dois canais de interação, um escalar responsável pela existência de mésons σ no modelo, e um canal pseudo-escalar responsável pela existência dos píons. Como veremos na próxima seção, as excitações coletivas de quark-antiquark nos darão as massas dos mésons $\vec{\pi}$ (que serão interpretados como pseudo-bósons de Goldstone a partir da quebra espontânea da simetria quiral) e do méson σ . A constante de acoplamento G tem dimensão de MeV^{-2} no modelo NJL em $3 + 1$ dimensões e, portanto, se apresenta como uma teoria efetiva não-renormalizável [2].

O modelo de NJL SU(2) no vácuo tradicionalmente é estudado na aproximação de campo médio (MFA). Desta maneira, podemos analisar o processo de geração de massa efetiva dos quarks em questão. Fazendo MFA no modelo, ficamos com

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle^2 \approx 2 \langle \bar{\psi} \psi \rangle \bar{\psi} \psi - \langle \bar{\psi} \psi \rangle^2, \quad (2.4)$$

$$\langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle^2 \approx 2 \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi - \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle^2, \quad (2.5)$$

onde podemos definir

$$\sigma \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad (2.6)$$

$$\vec{\pi} \equiv \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle, \quad (2.7)$$

sabendo que $\langle \quad \rangle$ corresponde ao valor esperado do vácuo, e, portanto, a lagrangiana (2.1) pode ser reescrita em MFA

$$\mathcal{L}_{N J L}^{\mathcal{M F A}} = \bar{\psi} (\gamma_\mu i \partial^\mu - m) \psi + G [(2\sigma \bar{\psi} \psi) - \sigma^2 + 2\vec{\pi} \cdot \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi \rangle - \vec{\pi}^2]. \quad (2.8)$$

Por argumentos de simetria por transformação de paridade [71] podemos assumir $\vec{\pi} = 0$, e podemos redefinir o termo de massa da lagrangiana (2.8)

como

$$M = m_0 - 2G\sigma, \quad (2.9)$$

e, portanto, obtemos:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\gamma_\mu i \partial^\mu - M) \psi - G\sigma^2. \quad (2.10)$$

As regras de Feynman para o modelo no espaço dos momentos que utilizaremos neste trabalho são mostradas na figura 5.

$$\begin{array}{l}
 -2iG \\
 iS_F(p) = i \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - M + i\epsilon} \quad \text{---} \bullet \\
 -i\text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - M + i\epsilon} \quad \text{---} \circ \text{---}
 \end{array}$$

Figura 5 – Regras de Feynman do modelo NJL $SU(2)$.

onde o traço Tr que aparece na terceira regra de Feynman na figura 5 é feito no espaço das cores, sabores e de Dirac.

Em termos de regras de Feynman, o cálculo da massa efetiva pode ser interpretado como uma série de Dyson quando percebemos que

$$\sigma \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -i\text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.11)$$

E portanto, a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$M = m_0 + 8GN_c N_f i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (2.12)$$

integrando (2.12) na variável dp_0 e colocando a integral resultante em coordenadas esféricas, obteremos

$$M = m_0 + 8GN_c N_f M \int_0^\infty \frac{dp}{4\pi^2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}. \quad (2.13)$$

Esta expressão é conhecida como a equação de *gap*, onde $N_c = 3$ é o número de cores, $N_f = 2$ é o número de sabores que estamos usando e o traço realizado na expressão (2.11) é feito no espaço de sabores, cores e de Dirac. A equação do *gap* é uma analogia a teoria BCS [81], e nos mostra o



Figura 6 – Série de Dyson: Primeiro termo representa o propagador do quark livre somado com um termo de autointeração (*Tadpole*). Figura retirada da referência [70].

mecanismo de geração dinâmica da massa efetiva dos quarks em termos da massa de corrente e de um termo de auto-interação.

A integral da equação (2.13) é divergente, e como já comentamos o fato de o modelo NJL SU(2) em $(3 + 1)D$ ser não-renormalizável, adotaremos o *3D-cutoff* não-covariante, de modo a incluir um limite superior Λ nas integrais em p . Com isto, incluímos outro parâmetro no nosso modelo além de G e m_0 que são escolhidos de maneira a reproduzir o valor da massa do pión $m_\pi = 135 \text{ MeV}$, a constante de decaimento do pión $f_\pi = 92.6 \text{ MeV}$ e do condensado dos quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ para nos informar as massas de corrente dos quarks de $m_0 = 5.0 \text{ MeV}$ [70, 71].

Ao resolver a integral da equação do *gap* com *3D-cutoff* não covariante, obtemos a seguinte expressão

$$\int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} = \frac{1}{2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right], \quad (2.14)$$

logo, encontramos para a equação do *gap*, que deve ser resolvida de forma auto-consistente para M

$$M = m_0 + \frac{GMN_f N_c}{\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right]. \quad (2.15)$$

Uma escolha tradicional, é escolher o conjunto de valores $\Lambda = 664.3 \text{ MeV}$ e $G = 2.06/\Lambda^2$, que obtemos resolvendo de forma auto-consistente para a solução não-trivial $M = 300 \text{ MeV}$.

2.1.2 Modos coletivos: as massas-pólo dos mésons π e σ

Podemos analisar agora as massas dos mésons presentes no modelo, estudando o canal escalar responsável pela existência de méson σ e o pseudo-

escalar pelos píons. Usando o mesmo método apresentado na referência [71] inspirado em [17, 18], podemos aproximar o propagador do méson em questão através da aproximação de fase aleatória (*Random Phase Approximation-RPA*). Primeiro vamos analisar uma lagrangiana efetiva de interação de píons com nucleons

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = ig_{\pi NN} \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \Psi(x), \quad (2.16)$$

reescreveremos esta lagrangiana de interação em termos de quarks $\mathcal{L}_{\pi NN} \rightarrow \mathcal{L}_{\pi qq}$ e identificando

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} = \tau^+ \cdot \pi^+ + \tau^- \cdot \pi^- + \tau^3 \cdot \pi^3, \quad (2.17)$$

sendo que π^+ e π^- são operadores de criação e aniquilação, dados por

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2). \quad (2.18)$$

O diagrama de espalhamento pode ser representado então da seguinte maneira

$$[\bar{d}' i\gamma_5 \tau^- u] [(ig_{\pi qq})^2] iD_F(k^2) [\bar{u}' i\gamma_5 \tau^+ d]. \quad (2.19)$$

sendo $iD_F(k^2)$ o propagador do méson que media o espalhamento do lado esquerdo da figura 7.

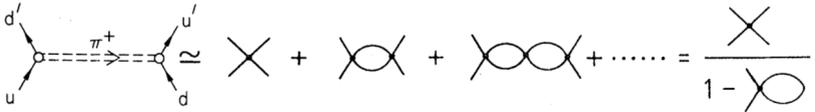


Figura 7 – Espalhamento de quarks up e anti-down mediante troca de um méson π^+ no lado esquerdo. No lado direito da figura, associa-se o espalhamento em questão à aproximação RPA. Figura retirada de [71].

A figura 7 representa o espalhamento genérico $(ud) \rightarrow (u'd')$ com a troca de um π^+ . Este espalhamento (dado pelo lado esquerdo da figura 7) pode ser estudado mediante o modelo NJL utilizando a aproximação RPA, que é uma expansão com diagramas em ordem dominante $1/N_c$ (ou aproximação de campo médio)² de infinitos *loops* de polarização quark-antiquark, que

²A aproximação $1/N_c$ pode ser utilizada no contexto de modelos como Gross-Neveu, que em $1+1$ D apresentam em ordem dominantes interessantes fenômenos como a liberdade assintótica, quebra dinâmica de simetria, transmutação dimensional e confinamento não-perturbativo [82]. Sua aplicação no modelo NJL SU(2) com diagramas em ordem dominante $1/N_c$ é muitas vezes chamada de aproximação de campo médio ou *Hartree Approximation*.

pode ser considerada como uma progressão geométrica

$$\begin{aligned}
 iU_{mn}(k^2) &= (i\gamma_5)T_m \left\{ 2iG + 2iG \left[\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right] 2iG + \right. \\
 &2iG \left[\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right] 2iG \left[\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) \right] 2iG + \dots \left. \right\} (i\gamma_5)T_n \\
 \Rightarrow iU_{mn}(k^2) &= (i\gamma_5)T_m \left[\frac{2iG}{1 - 2G\Pi_{ps}(k^2)} \right] (i\gamma_5)T_n. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Onde U_{mn} corresponde a soma dos diagramas de *loops* de polarização quark-antiquark do lado direito da figura 7 e $T_m = T_n = \tau_3$ são as matrizes de Pauli necessárias para gerar π^0 e $T_m = \tau_{\pm}$ e $T_n = \tau_{\mp}$ para gerar π^{\pm} . O *loop* de polarização para o canal pseudo-escalar é dado por

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[i\gamma_5 T_i S_F(p+k) i\gamma_5 T_j iS_F(p-k)], \quad (2.21)$$

e analogamente para o canal escalar

$$\frac{1}{i}\Pi_s(k^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[T_i iS_F(p+k) T_j iS_F(p-k)]. \quad (2.22)$$

Para obtermos as massas dos mésons π^0 e π^{\pm} , devemos ter

$$1 - 2G\Pi_{ps}(m_\pi^2) = 0. \quad (2.23)$$

Após calcular explicitamente o *loop* de polarização (2.20) [71], obtemos

$$1 - 2G\Pi_{ps}(k^2) = \frac{m_0}{M} + 4iN_c N_f k^2 I(k^2), \quad (2.24)$$

onde definimos $I(k^2)$ da seguinte maneira

$$I(k^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)((p+k)^2 - M^2)}. \quad (2.25)$$

Se tomarmos somente a componente $k_0 \neq 0$, ou seja, $\vec{k}^2 = 0$. Podemos então reescrever a expressão (2.25), fazendo a integral em p_0

$$I(k_0^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - M^2][(p + k_0)^2 - M^2]}, \quad (2.26)$$

$$= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{E(k_0^2 - 4E^2)} \quad (2.27)$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(k_0^2 - 4E^2)}. \quad (2.28)$$

Aplicando $k_0^2 = m_\pi^2$ (que corresponde ao referencial de repouso do pión), e resolvendo para m_π^2 a expressão (2.24), teremos como resultado

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{M} \frac{1}{4iGN_c N_f I(m_\pi^2)}. \quad (2.29)$$

O cálculo desta quantidade está associado ao pólo do propagador em RPA da eq.(2.20). Por este motivo, chamamos a massa do méson calculada desta maneira de massa-pólo.

Se explorarmos o limite em que $m_0 = 0$ na equação (2.24), a massa do pión se anulará, a simetria quiral estará reestabelecida e o pión será um genuíno bóson de Goldstone. Porém, os quarks *up* e *down* têm massas de correntes finitas, embora muito pequenas e neste contexto os pions são comumente chamados de pseudo-bósons de Goldstone.

Utilizando o mesmo procedimento realizado para o *loop* de polarização do canal pseudo-escalar, pode-se obter a expressão para a massa-pólo do méson σ ,

$$m_\sigma^2 = 4M^2 + m_\pi^2. \quad (2.30)$$

O cálculo das massas-pólo destes mésons é feita formalmente de forma auto-consistente, visto que temos dependência nas massas também nas integrais das equações (2.24) e (2.30). Porém, uma boa aproximação é utilizar $I(m_\pi^2) \approx I(0)$, já que esta integral varia muito pouco com o argumento (m_π ou m_σ) e, portanto, o cálculo não se torna mais auto-consistente. Exemplificando, ao calcularmos utilizando $I(0)$ para a massa do pión, obteremos $m_\pi = 137.116$ MeV e $m_\sigma = 135.676$ MeV se utilizarmos $I(m_\pi^2)$.

2.1.3 O acoplamento $g_{\pi qq}$ e a constante de decaimento f_π no vácuo

Os resultados apresentados até aqui podem ser utilizados para analisar a magnitude do acoplamento $g_{\pi qq}$ da expressão (2.19). Fazemos isso associ-

ando o acoplamento $g_{\pi qq}$ com o propagador em RPA da equação (2.20), de maneira a representarmos uma troca efetiva de mésons $\vec{\pi}$ no espalhamento da figura 2.3 [70, 71]

$$D_F^{\mathcal{M}} = \frac{-ig^2_{\mathcal{M}qq}}{k^2 - m_{\mathcal{M}}^2},$$

onde $\mathcal{M} = \{\vec{\pi}, \sigma\}$ representa a partícula mediadora da interação efetiva. Se associarmos este propagador da nossa interação efetiva com o propagador calculado em RPA, obteremos:

$$\frac{-ig^2_{\mathcal{M}qq}}{k^2 - m_{\mathcal{M}}^2} \approx \frac{2iG}{1 - 2G\Pi_{ch}(k^2)}, \quad (2.31)$$

onde indicamos ch o canal de interação associado ao méson em questão. Usando agora uma expansão do denominador de $D_F^{\mathcal{M}}$ que ocorre em $k^2 \approx m_{\mathcal{M}}^2$, e comparando com o propagador em RPA (2.20), obteremos a constante de acoplamento entre quarks e mésons $\vec{\pi}$ [71] da seguinte maneira (utilizaremos o canal pseudoescalar como exemplo, sendo o cálculo análogo para o canal escalar)

$$\Pi_{ps}(k^2) = \Pi_{ps}(m_{\pi}^2) + \frac{\partial \Pi_{ps}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\pi}^2} (k^2 - m_{\pi}^2) + \mathcal{O}(k^4), \quad (2.32)$$

devemos portanto aplicar este resultado no denominador de $D_F^{\mathcal{M}}$. Como $1 - 2G\Pi_{ps}(m_{\pi}^2) = 0$, obteremos

$$\begin{aligned} D_F^{\pi} &= \frac{2iG}{1 - 2G \left[\Pi_{ps}(m_{\pi}^2) + \frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\pi}^2} (k^2 - m_{\pi}^2) \right]}, \\ D_F^{\pi} &= \frac{2iG}{-2G \frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\pi}^2} (k^2 - m_{\pi}^2)}, \\ D_F^{\pi} &= \frac{-i \left(\frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m_{\pi}^2} \right)^{-1}}{(k^2 - m_{\pi}^2)}, \end{aligned}$$

ao compararmos este propagador com o definido em eq.(2.31), obteremos o resultado

$$g_{\pi qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_\pi^2}, \quad (2.33)$$

e da mesma forma para o méson σ

$$g_{\sigma qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_s}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_\sigma^2}. \quad (2.34)$$

Já a constante de decaimento f_π pode ser obtida através do seguinte elemento de matriz

$$\langle 0 | J_{5\mu}^i | \pi^i(k) \rangle, \quad (2.35)$$

o que equivale a realizar o cálculo de

$$ik_u f_\pi \delta^{ij} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[i\gamma_\mu i\gamma_5 \frac{\tau^i}{2} iS_F(p + \frac{1}{2}k) i g_{\pi qq} i\gamma_5 \tau^j iS_F(p - \frac{1}{2}k) \right]. \quad (2.36)$$

Após cálculos semelhantes aos realizados para o *loop* de polarização $\Pi_\pi(k^2)$, obtemos (no limite em que $k^2 \approx 0$)

$$f_\pi^2 = -4iN_c M^2 I(0), \quad (2.37)$$

a partir deste resultado, podemos reproduzir a Relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR) derivada em 1968 [71, 84]

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = m_0 M (2G)^{-1}, \quad (2.38)$$

e através de uma simples aproximação para as massas de corrente físicas, obteremos

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle. \quad (2.39)$$

Com estes resultados, é possível derivar também a relação de Goldberger–Treiman [71]

$$f_\pi^2 g_{\pi qq}^2 = M^2. \quad (2.40)$$

2.1.4 O modelo de Nambu–Jona-Lasinio sob condições de temperaturas e densidades finitas

Utilizaremos o formalismo de tempo imaginário de Matsubara [71, 83, 85] para incluir temperaturas e densidades finitas (potencial químico) nos cálculos da seção anterior. Nas referências citadas, o grau de detalhe nos cálculos para obter as expressões aqui obtidas muitas vezes estará limitado. Por isso, indicamos uma excelente referência, na qual o autor examina com detalhes quase que todos os cálculos para incluir a dependência do meio térmico e denso no modelo NJL SU(2) [86], que será útil não só para a equação de *gap*, mas também para os modos coletivos.

Para passarmos para o meio térmico e denso nas integrações em p_0 (integrois presentes nas equações (2.12) e (2.25)), podemos fazer uso da prescrição

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} F(p) \rightarrow iT \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F[p_0 = (i\omega_\nu + \mu), \vec{p}], \quad (2.41)$$

onde $\omega_\nu = (2\nu + 1)\pi T$, sendo ω_ν as frequências discretas fermiônicas de Matsubara, T a temperatura e μ o potencial químico. Devemos também modificar o 4-momentum $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \rightarrow p^2 = (i\omega_\nu + \mu)^2 - \vec{p}^2$. Assumindo estas substituições, podemos reescrever a equação do *gap*

$$\begin{aligned} M &= m_0 + 8GiN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \\ M &= m_0 + 8GiN_c N_f \\ &\times iT \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{[(i\omega_\nu + \mu)^2 - \vec{p}^2] - M^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

as somas nas frequências de Matsubara podem ser feitas por métodos encontrados em [85]. O resultado para a expressão (2.42) é

$$M = m_0 + 4GN_c N_f M \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} [1 - n(E - \mu) - n(E + \mu)], \quad (2.43)$$

onde $E = \sqrt{p^2 + M^2}$ e $n(x)$ representa a distribuição de Fermi-Dirac, dada por

$$n(x) = \frac{1}{e^{(\frac{x}{T})} + 1}. \quad (2.44)$$

É interessante perceber que se utilizarmos o limite em que $T \rightarrow 0$, reobtemos o nosso resultado da equação do gap no vácuo da equação (2.13).

O mesmo método do tempo imaginário de Matsubara pode ser empregado no cálculo das integrais associadas aos modos coletivos, de modo a estudarmos o comportamento das massas-pólo dos mésons $\vec{\pi}$ e do σ em condições externas.

Podemos agora aplicar as prescrições de temperatura finita definidas em(2.41). Posteriormente ao calcularmos as somas nas frequências de Matsubara na expressão (2.25), obteremos

$$I(k_0^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p_0^2 - E^2][(p_0 + k_0)^2 - E^2]}, \quad (2.45)$$

$$I(k_0^2) = 2\pi iT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(i\omega_\nu + \mu)^2 - E^2][(i\omega_\nu + \mu + k_0)^2 - E^2]},$$

$$I(k_0^2) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{[1 - n(E - \mu) - n(E + \mu)]}{E(k_0^2 - 4E^2)}. \quad (2.46)$$

Aplicando o limite $T \rightarrow 0$, reobtemos então a equação (2.28). Se utilizarmos o mesmo método da seção 2.1.2, fazendo o uso da integral (2.46) nas expressões (2.29) e (2.30), podemos calcular as massas-pólo dos mésons $\vec{\pi}$ e σ quando $k_0^2 = m_\pi^2(T, \mu)$ e $k_0^2 = m_\sigma^2(T, \mu)$, dependentes da temperatura e do potencial químico.

Vamos agora analisar o comportamento das massas dos quarks e dos mésons, utilizando os cálculos numéricos da equação de *gap* (2.9) e as equações para a massa dos mésons $\vec{\pi}$ e σ , com o conjunto de parâmetros apresentados na seção 2.1.1. Na figura 8 vemos que para temperaturas baixas a massa dos quarks permanece aproximadamente no seu valor de vácuo, mas à medida que a temperatura alcança valores maiores, a massa efetiva vai diminuindo, o que significa que a temperatura desfavorece a formação do condensado de quarks até que a massa de corrente dos quarks seja alcançada em temperaturas maiores que $T = 250$ MeV, de modo que a simetria quiral seja aproximadamente restaurada. Nesta figura, vemos o comportamento de um *crossover*, com a transição ocorrendo de forma contínua no limite físico (massa dos quarks sendo finita). Vemos ainda que as massas dos mésons permanecem em seus valores de vácuo em baixas temperaturas, mas sofrem variações

nítidas próximas a temperatura de Mott³, em aproximadamente $T = 179\text{MeV}$, onde $m_\pi \approx 2M$. A partir desta temperatura os mésons tornam-se ressonâncias com comprimento de decaimento Γ finito e é justamente a fase onde a simetria quiral é parcialmente restaurada. A integral (2.46) deve ser interpretada como valor principal de Cauchy($\mathcal{P}.\mathcal{V}$), pois nesta região há divergências quando $p^2 = \frac{m_\pi^2}{4} - M^2$ [87, 88]

$$I(m_\pi^2) = -i \left\{ \mathcal{P}.\mathcal{V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{[1 - n(E - \mu) - n(E + \mu)]}{E(m_\pi^2 - 4E^2)} \right\}. \quad (2.47)$$

Os valores das massas dos dois canais crescem juntos nesta região, devido ao fato de que agora a energia térmica domina o espectro.

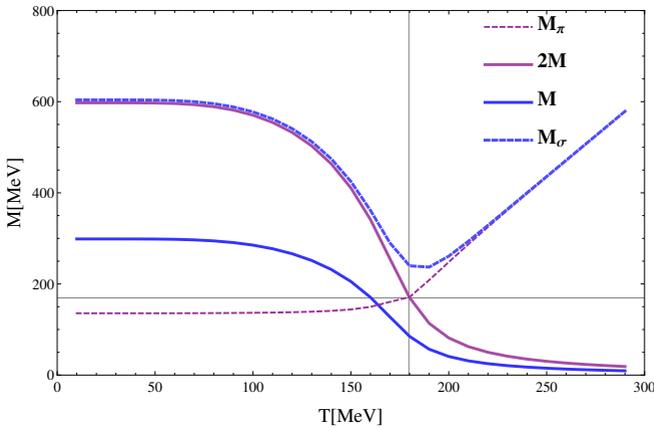


Figura 8 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks, massas dos mésons π e do méson σ variando com a temperatura. A intersecção entre as duas linhas pretas indica com mais evidência a temperatura de Mott. Verifica-se uma transição do tipo *crossover* da fase de simetria parcialmente quebrada para a fase de simetria parcialmente restabelecida.

Na figura 9 vemos novamente a comparação entre a massa efetiva dos quarks, m_π e m_σ , mas agora com dependência no potencial químico. Na massa efetiva dos quarks, temos uma descontinuidade em aproximadamente $\mu \approx 320\text{MeV}$, o que se repete para as massas dos mésons. Essa descontinuidade na massa efetiva dos quarks é a marca de transições de fase de primeira ordem.

³Temperatura de Mott é definida quando ocorre $M_\pi(T) = 2M(T)$. [89]

Outra característica que devemos enfatizar é que as soluções associadas as ressonâncias nas figuras 8 e 9 não são únicas. Determinamos a solução correta pelo mesmo procedimento de [87], escolhendo a solução que apresenta o mais baixo valor acima de $m_\pi \approx 2M$.

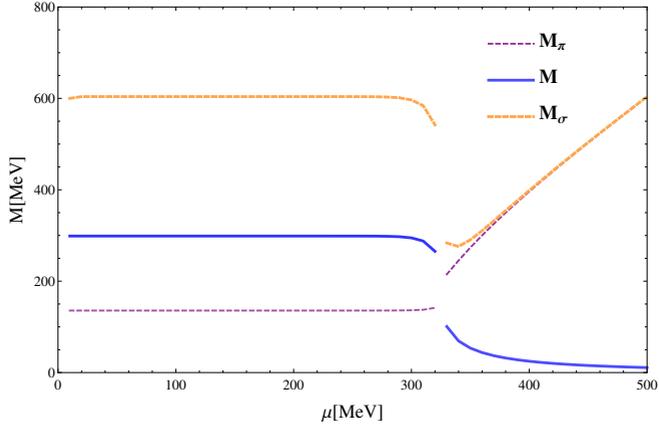


Figura 9 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks, massas dos mésons π e do méson σ variando com o potencial químico. Percebe-se uma transição de primeira ordem na massa efetiva dos quarks da fase de simetria parcialmente quebrada para a fase de simetria parcialmente restabelecida. A massa dos mésons sofre o salto descontínuo para a fase ressonante.

Também incluímos a variação da constante de decaimento f_π e do acoplamento $g_{\pi qq}$ com a temperatura nas figuras 10 e 11, mostrando que ambos apresentam comportamentos dependentes com a temperatura, adquirindo valores cada vez menores à medida que a simetria quiral é parcialmente restaurada. Isso é uma indicação de que os mésons se desacoplam cada vez mais ao se aproximarem da temperatura de dissociação.

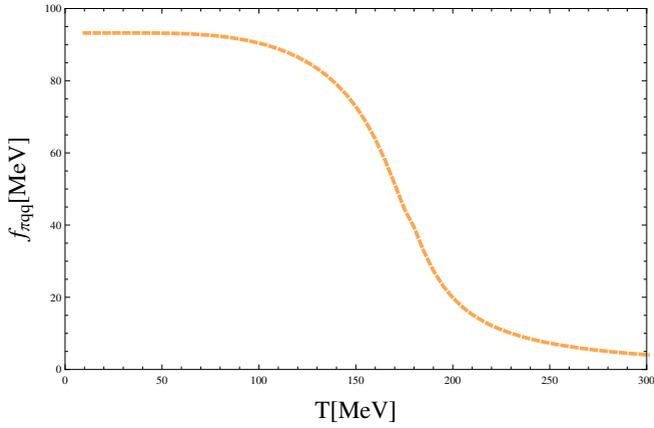


Figura 10 – Constante de decaimento f_{π} variando com a temperatura. Percebe-se um enfraquecimento da constante de decaimento à medida que a temperatura aumenta.

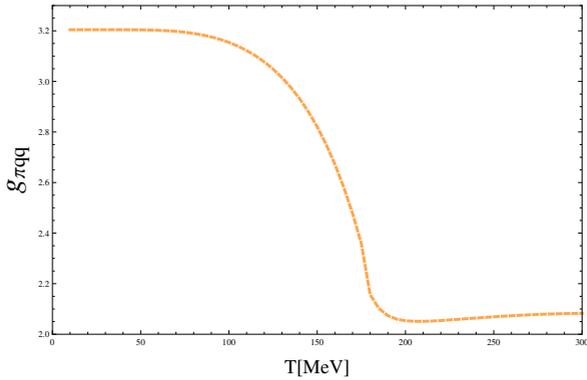


Figura 11 – Acoplamento $g_{\pi qq}$ variando com a temperatura. O acoplamento fica mais fraco à medida que a temperatura aumenta, indicando um enfraquecimento da interação entre píons e quarks na fase de simetria parcialmente restaurada.

3 O MODELO DE NJL COM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE

Este Capítulo será dedicado a explorar o modelo de NJL SU(2) sob influência de um campo magnético externo constante, seguindo os moldes do Capítulo anterior. Para tanto, o tratamento se baseará em mostrar como a equação do *gap* é obtida com a utilização do propagador dos quarks em meio magnético na aproximação de campo médio. Posteriormente, será apresentado como as expressões para os modos coletivos associados aos canais do méson π^0 e do méson σ são obtidas e, portanto, vamos obter suas massas dependentes do campo magnético.

3.1 A LAGRANGIANA DO MODELO DE NJL EM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE

Ao utilizarmos a mesma lagrangiana (2.1) do Capítulo anterior, podemos acoplá-la a um quadrivetor potencial eletromagnético $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ como é feito na QED [2]. Para isso, adicionamos ao modelo a lagrangiana do Campo Eletromagnético

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_N \not{g} \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathcal{E.M.}}, \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} (\gamma_\mu (i\partial^\mu - Q_q A^\mu) - m) \psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5 \vec{\tau} \psi)^2] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

via acoplamento mínimo, e teremos a mudança $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iQ_q A^\mu = D^\mu$, que é a derivada covariante do modelo [2]. O campo eletromagnético é representado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e definido como em [1, 2]. Os campos ψ e a matriz diagonal com simetria de isospin m são definidas como no Capítulo 2. A matriz das cargas dos quarks Q_q é dada por

$$Q_q = e \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

nesta notação, a soma no espaço das cores está implícita, visto que estamos usando notação apenas para os índices de sabores.

Aplicando a aproximação de campo médio em (3.1) e seguindo as mesmas definições feitas no Capítulo 2, obtemos

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}} \mathcal{J} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{N}}^{\mathcal{M}} \mathcal{F} \mathcal{L} = \bar{\psi} (i\overleftrightarrow{D} - M) \psi + G\sigma^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Podemos agora escolher um calibre específico de modo a reproduzir um campo magnético constante em alguma direção específica. Nossa escolha será $A_\mu = \delta_{\mu 2} x_1 B$, que corresponde a $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = B\hat{e}_3$, ou seja, um campo magnético constante na direção z .

A equação do *gap* é obtida como antes,

$$M = m_0 - 2G\sigma = m_0 - 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle. \quad (3.4)$$

Portanto, para prosseguirmos no cálculo da equação de *gap* (3.4), precisamos obter as expressões para o condensado de quarks em meio magnético constante, que como vimos no Capítulo 2, está associado ao propagador dos mesmos.

3.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO CONSTANTE

Como é mostrado em detalhes nas referências [72, 73], pode-se obter a solução da seguinte equação

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - Q_q \delta_{\mu 2} x_1 B \hat{e}_2) - M) \psi(x) = 0, \quad (3.5)$$

que é a equação de Dirac para férmions não interagentes em meio magnético constante, mediante o uso das equações de Euler-Lagrange da expressão (3.1).

Pode-se também, com técnicas tradicionais de Teoria Quântica de Campos [1, 2], derivar uma expressão para o propagador do férmion em meio magnético constante. Ao solucionar a equação (3.5), encontramos que a energia dos quarks depende explicitamente do campo magnético de forma discretizada nos níveis de Landau $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ou seja

$$E_n = \sqrt{p_3^2 + M^2 + 2|Q_q|Bn}. \quad (3.6)$$

Definindo $\beta_q = |Q_q|B$ e a partir da definição do propagador¹ [1]

$$iS_F(x, x') \equiv \langle 0 | T[\psi(x)\bar{\psi}(x')] | 0 \rangle, \quad (3.7)$$

¹Na referência [73], o autor define o propagador de Feynman a menos do número imaginário i , isto é, $S_F(x, x') \equiv \langle 0 | T[\psi(x)\bar{\psi}(x')] | 0 \rangle$.

obtêm-se portanto

$$iS_F(x, x') = i \sum_{n=0}^{\infty} S_{q,n}(x, x'), \quad (3.8)$$

onde $S_{q,n}(x, x')$ depende dos níveis de Landau n e $q = u, d$ representa o sabor dos quarks. A forma matemática explícita de $S_{q,n}(x, x')$ é dada por

$$\begin{aligned} iS_{q,n}(x, x') = & \frac{i}{2^n n!} \sqrt{\frac{\beta_q}{\pi}} \exp\left(-\beta_q \frac{(x^1)^2 + (x'^1)^2}{2}\right) \int \frac{dp_0 dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} \\ & \times \frac{\exp(-i(p \cdot (X - X'))_{\parallel})}{p_{\parallel}^2 - M^2 - 2\beta_q n + i\varepsilon} \exp\left(\frac{-p_2^2}{\beta_q} - p_2[x^1 + x'^1 - i(x^2 - x'^2)]\right) \\ & \times \left\{ [(p\gamma)_{\parallel} + m][\Pi_- H_n(\xi) H_n(\xi') + 2n\Pi_+ H_{n-1}(\xi) H_{n-1}(\xi')] + \right. \\ & \left. + i2n\sqrt{\beta_q} \gamma^1 [\Pi_- H_{n-1}(\xi) H_n(\xi') - \Pi_+ H_n(\xi) H_{n-1}(\xi')] \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Devemos identificar $(a \cdot b)_{\parallel} = a_0 b_0 - a_3 b_3$, $(a \cdot b)_{\perp} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, assim como $(p \cdot (X - X'))_{\parallel} = p_0(x^0 - x'^0) - p_3(x^3 - x'^3)$. Também devemos definir os polinômios de Hermite $H_n(\xi)$ como $\xi = \sqrt{\beta_q}(x^1 + \frac{p_2}{\beta_q})$ e os projetores como Π_{\pm} , que são dados por

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm i\gamma^1 \gamma^2), \quad (3.10)$$

com as condições $\Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}$ e $\Pi_{\pm} \Pi_{\mp} = 0$, onde I é a matriz identidade.

Entretanto, para facilitar os cálculos, é útil mudar da representação do propagador $iS_F(x, x')$ em termos de polinômios de Hermite mostrados anteriormente para uma representação em termos de polinômios de Laguerre, como utilizado na referência [72, 73]. Com esta mudança o propagador (3.9) se torna

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{q,n}(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\Phi(x, x')_q} \hat{S}_{q,n}(x - x'), \quad (3.11)$$

onde o propagador agora é separado em um termo dependente do calibre escolhido e da carga elétrica, que quebra a simetria translacional ($\exp(i\Phi(x, x')_q)$), e um termo invariante por esta mesma simetria. A parte do propagador que é invariante por transformação translacional é dada por

$$\begin{aligned}
i\hat{S}_{q,n}(Z) &= \frac{i\beta_q}{2\pi} \exp\left(-\frac{\beta_q}{4} Z_{\perp}^2\right) \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(p \cdot Z)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - M^2 - 2\beta_q n + i\epsilon} \\
&\times \left\{ \left[(p \cdot \gamma)_{\parallel} + M \right] \left[\Pi_{-} L_n \left(\frac{\beta_q}{2} Z_{\perp}^2 \right) + \Pi_{+} L_{n-1} \left(\frac{\beta_q}{2} Z_{\perp}^2 \right) \right] \right. \\
&\left. + 2in \frac{(Z \cdot \gamma)_{\perp}}{Z_{\perp}^2} \left[L_n \left(\frac{\beta_q}{2} Z_{\perp}^2 \right) - L_{n-1} \left(\frac{\beta_q}{2} Z_{\perp}^2 \right) \right] \right\}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

e nesta representação ainda temos as somas nos níveis de Landau n . Vamos indicar também $Z = x - x'$, de modo que $Z_{\parallel}^2 = (Z_0^2 - Z_3^2)$ e $Z_{\perp}^2 = (Z_1^2 + Z_2^2)$. As funções $L_n(x)$ são polinômios de Laguerre definidos por

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^n \exp(-x)). \quad (3.13)$$

A quantidade $\phi(x, x')_q$ é conhecida como fator de fase de Schwinger, e é dado por

$$\Phi(x, x')_q = -\frac{\beta_q}{2} (x^1 + x'^1)(x^2 - x'^2) \quad (3.14)$$

para os nossos propósitos, e, como discutido em [72–74, 90], esta fase de Schwinger será igual a unidade.

Agora que temos uma expressão para o propagador em meio magnético constante, podemos aplicá-lo diretamente na definição do condensado de quarks [71]

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \lim_{x' \rightarrow x^+} \text{Tr} iS_F(x, x'), \quad (3.15)$$

de modo a obtermos a equação de *gap* em meio magnético externo constante.

3.3 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DO GAP EM MEIO MAGNÉTICO CONSTANTE

Para facilitar o tratamento, tomaremos a identidade

$$\frac{f(\pm E_n)}{2E_n} \exp(\mp i(E_n(x^0 - x'^0))) \Big|_{t \leq t'} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0 f(p_0) e^{-ip_0(x^0 - x'^0)}}{p_{\parallel}^2 - M^2 - 2\beta_q n + i\epsilon}, \quad (3.16)$$

e aplicando a expressão (3.16) no propagador (3.9), realizamos a integração em dp_0 . Pela definição do condensado de quarks, devemos calcular $\text{Tr } iS_F(x, x)$ no espaço de cor, sabor e de Dirac, o que simplifica razoavelmente o propagador apresentado na equação (3.9).

A partir do cálculo do traço de toda a parte matricial de (3.9) e de uma simples integração em p_2 na equação (3.9) [90], pode-se obter

$$i\text{Tr } S_F(x, x) = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sum_{q=u,d} \beta_q \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{\sqrt{p_3^2 + M^2 + 2\beta_q n}}. \quad (3.17)$$

Na expressão acima, definimos

$$\lim_{x' \rightarrow x^+} i\text{Tr } S_F(x, x') \equiv i\text{Tr } S_F(x, x) \quad (3.18)$$

e utilizando este resultado, junto com a equação (3.4) temos a equação do *gap* em um campo magnético externo constante. O fator de degenerescência $g_n = 2 - \delta_{n,0}$ representa o fato de que o nível de Landau $n = 0$ é o único que não é duplamente degenerado.

A integral (3.17) é nitidamente divergente e devemos regularizá-la. O limite $eB = 0$ não é trivial de ser obtido, uma vez que a ordem de divergência da integral é diferente da obtida no vácuo. Entretanto, isso se dá por causa das somas nos níveis de Landau, que devem ser tratadas adequadamente de modo a obtermos o resultado correto para a contribuição do vácuo na equação de *gap*. Para tanto, no método que apresentaremos, faremos a separação explícita entre a contribuição do campo magnético externo constante, que é finita; e do vácuo, que foi tratada no Capítulo anterior.

3.3.0.1 Regularização

Vamos reescrever a integral (3.17) em termos da função zeta de Hurwitz [91, 92]. Para tanto, explicitaremos primeiro o fator de degenerescência

$$i\text{Tr } S_F(x, x) = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{E_n} - \delta_{n,0} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{E_n} \right], \quad (3.19)$$

e colocaremos em evidência o fator $\sqrt{2\beta_q}$ na equação (3.6)

$$E_n = \sqrt{2\beta_q} \sqrt{\frac{p_3^2 + M^2}{2\beta_q} + n}, \quad (3.20)$$

e assim, ao aplicarmos em (3.19), obteremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\beta_q} \sqrt{\frac{p_3^2 + M^2}{2\beta_q} + n}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta_q}} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{p_3^2 + M^2}{2\beta_q}\right), \quad (3.21)$$

onde $\zeta(a, b)$ é a função de Zeta de Hurwitz [91, 92] definida por

$$\zeta(a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}, \quad s > 1. \quad (3.22)$$

Reescrevemos agora a equação (3.19) de acordo com o resultado (3.21)

$$i\text{Tr} S_F(x, x) = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[2 \frac{1}{\sqrt{2\beta_q}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{p_3^2 + M^2}{2\beta_q}\right) - \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{E_0} \right]. \quad (3.23)$$

Podemos fazer uso da seguinte representação de função zeta de Hurwitz [91]

$$\int_0^{\infty} dy y^{z-1} \exp(-\kappa y) \coth(\alpha y) = \Gamma(z) \left[2^{1-z} \alpha^{-z} \zeta\left(z, \frac{\kappa}{2\alpha}\right) - \kappa^{-z} \right], \quad (3.24)$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gama [92]. Definimos também as seguintes quantidades

$$\alpha = |Q_q|B \equiv \beta_q, \quad (3.25)$$

$$\kappa = M^2 + p_3^2, \quad (3.26)$$

$$z = \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

Aplicando estes resultados em (3.23) e sabendo que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, devemos ter

$$i\text{Tr}S_F(x,x) = \frac{MN_c}{(2\pi)^2\sqrt{\pi}} \sum_{q=u,d} \beta_q \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_0^{\infty} dy y^{-1/2} \exp(-\kappa y) \coth(\beta_q y). \quad (3.28)$$

Usando $\kappa = M^2 + p_3^2$ e integrando em dp_3

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \exp(-p_3^2 y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp(-p^2) = \sqrt{\frac{\pi}{y}}, \quad (3.29)$$

a expressão (3.28) pode ser reescrita como

$$i\text{Tr}S_F(x,x) = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \int_0^{\infty} dy y^{-1} \exp(-M^2 y) \coth(\beta_q y). \quad (3.30)$$

Para tratar as divergências dessa integral, podemos fazer uma expansão em série de Taylor da função $\coth(\beta_q y)$ na região próxima da divergência, $\beta_q y \ll 1$, o que nos fornece

$$\coth(\beta_q y) = \frac{1}{\beta_q y} + \frac{\beta_q y}{3} + \mathcal{O}((\beta_q y)^3), \quad (3.31)$$

portanto, ao utilizarmos essa expansão em (3.30) poderemos identificar as quantidades divergentes

$$i\text{Tr}S_F(x,x)_{\beta_q y \ll 1} = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \int_0^{\infty} dy y^{-1} \exp(-M^2 y) \left(\frac{1}{\beta_q y} + \frac{\beta_q y}{3} + \dots \right). \quad (3.32)$$

Percebemos, portanto, que somente a primeira integral é divergente e podemos defini-la como

$$I_{div} \equiv \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \int_0^{\infty} dy \exp(-M^2 y) \frac{1}{\beta_q y^2}. \quad (3.33)$$

Reescrevendo agora $i\text{Tr}S_F(x,x)$ em termos de I_{div} , teremos

$$\begin{aligned} i\text{Tr}S_F(x,x) &= [i\text{Tr}S_F(x,x) - I_{div}] + I_{div}, \\ &= I + I_{div}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde I foi definido como

$$I = [i\text{Tr}S_F(x,x) - I_{div}]. \quad (3.35)$$

Agora nosso trabalho é calcular a integral I e regularizar I_{div} .

3.3.0.2 Cálculo de I

Primeiro colocaremos nossa expressão para I da seguinte forma

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[\int_0^\infty dy y^{-2+\varepsilon} \exp(-M^2 y) \left(y \coth(\beta_q y) - \frac{1}{\beta_q} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Utilizaremos novamente a representação da função zeta de Hurwitz dada em (3.24) e a representação de função gama [92]

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (3.37)$$

de modo a obtermos

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left\{ \Gamma(\varepsilon) \left[2^{1-\varepsilon} \zeta \left(\varepsilon, \frac{M^2}{2\beta_q} \right) \beta_q^{-\varepsilon} - M^{-2\varepsilon} \right] - \frac{\Gamma(-1+\varepsilon)}{\left(\frac{M^2}{\beta_q} \right)^{-1+\varepsilon}} \right\}. \quad (3.38)$$

Utilizando as identidades do apêndice (A), e definindo que $x_q = \frac{M^2}{2\beta_q}$, pode-se realizar o cálculo algébrico explícito [90], e obtemos

$$I = \frac{MN_c}{2\pi^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[\ln \Gamma(x_q) - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} (2x_q - 1) \ln x_q + x_q \right]. \quad (3.39)$$

3.3.0.3 Cálculo de I_{div}

Devemos agora recobrar a expressão (2.13), que foi obtida no Capítulo 2 para a equação do *gap*, onde havíamos limitado superiormente a integração com um *cutoff* Λ

$$M = m_0 + 4GN_c N_f M \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}, \quad (3.40)$$

podemos fazer uso da seguinte representação de função $B(x, y)$ [92]

$$\int_0^\infty dx x^{\mu-1} (1+x^2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} B\left(\frac{\mu}{2}, 1-\nu-\frac{\mu}{2}\right), \quad (3.41)$$

e também a representação da função Beta em termos de funções Gama

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (3.42)$$

e portanto podemos reescrever a integral da expressão (3.40) identificando $\mu = 3$ e $\nu = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(M^2)^{1-s}}{2} B\left(\frac{3}{2}, -1+s\right) &= \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + M^2}}, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(M^2)^{1-s}}{2} B\left(\frac{3}{2}, -1+s\right) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-1+s)}{(M^2)^{-1+s} 4}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Já a integral I_{div} pode ser reescrita também como uma representação de função Gama, visto que

$$\begin{aligned} I_{div} &= \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \int dy \exp(-M^2 y) \frac{1}{y^2}, \\ I_{div} &= \frac{MN_c}{(2\pi)^2 M^{-2}} \sum_{q=u,d} \int_0^\infty du \exp(-u) \frac{1}{u^2}, \\ I_{div} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \frac{\Gamma(-1+s)}{(M^2)^{-1+s}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Portanto, comparando as equações (3.43) e (3.44), a contribuição do vácuo na equação do *gap* pode ser recobrada se a associarmos com a integral I_{div} (como este termo representa a contribuição do vácuo, devemos ter $\sum_{q=u,s} \rightarrow N_f$). Logo podemos fazer a seguinte equivalência

$$\begin{aligned}
I_{div} &\equiv \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} 4 \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + M^2}}, \\
I_{div}^{\text{reg}} &= \frac{MN_c N_f}{(2\pi)^2} 4 \left\{ \frac{1}{2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] \right\}, \\
I_{div} &= \frac{MN_c N_f}{2\pi^2} \left\{ \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] \right\}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

onde, na equação anterior, regularizamos a divergência ultravioleta natural associada ao modelo NJL SU(2) em 3 + 1 D. Para obtermos a equação de *gap* em meio magnético, devemos aplicar a definição já estudada no Capítulo 2

$$\begin{aligned}
M &= m_0 - 2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \\
M &= m_0 + 2Gi \text{Tr} S_F(x, x), \quad (3.46)
\end{aligned}$$

como já regularizamos o propagador $i \text{Tr} S_F(x, x) = I + I_{div}$ em meio magnético constante, basta agora reagruparmos todos os nossos resultados

$$\begin{aligned}
M &= m_0 + \frac{GMN_f N_c}{\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \log \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right] \\
&+ \sum_{q=u,d} GMN_c \frac{\beta_q}{\pi^2} \left[\ln \Gamma(x_q) - \frac{1}{2} \ln 2\pi + x_q - \frac{1}{2} (2x_q - 1) \ln x_q \right]. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Para este método de subtração de divergências, onde é feito o cálculo explícito das contribuições dependentes do vácuo e do campo magnético externo eB , utilizaremos o nome adotado recentemente na literatura, MFIR. Este é um método utilizado por vários autores [74–77], e que pode ser alcançado não só com os métodos aqui apresentados, mas também no formalismo de tempo-próprio de Schwinger [47, 48, 71].

3.4 EXCITAÇÕES MESÔNICAS SOB INFLUÊNCIA DE CAMPOS MAGNÉTICOS CONSTANTES

Apresentaremos os resultados para os modos coletivos sob influência de campos magnéticos constantes, seguindo os resultados do Capítulo 2.

Como utilizaremos a aproximação RPA, deveremos calcular o *loop* de polarização associado ao canal pseudoescalar do modelo NJL SU(2). Na representação no espaço das coordenadas, teremos

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k^2) = \int d^4(x-x') \text{Tr}[i\gamma_5 T_i iS_F(x,x') i\gamma_5 T_j iS_F(x',x)] e^{ik(x-x')}, \quad (3.48)$$

onde, no caso do específico do cálculo do canal associado ao π^0 , usamos as matrizes de Pauli $T_i = T_j = \tau_3$.

O próximo passo é realizar o cálculo dos traços nos espaços de sabor, cor e de Dirac. As integrações em d^2Z_\perp envolverão normalizações dos polinômios de Laguerre e todos os cálculos feitos em detalhes podem ser encontrados em [90]. Obteremos para o *loop* de polarização o seguinte resultado

$$\frac{1}{i}\Pi_{ps}(k_\parallel^2) = -i \left(\frac{M-m_0}{2MG} \right) - \sum_{n=0} g_n \sum_{q=u,d} 2\beta_q N_c \frac{k_\parallel^2}{2(2\pi)^3} I_{q,n}(k_\parallel^2), \quad (3.49)$$

onde temos por definição

$$I_{q,n}(k_\parallel^2) = \int_0^1 dx \int d^2p_\parallel \frac{1}{[p_\parallel^2 - \overline{M}^2(k_\parallel) - 2\beta_q n]^2}. \quad (3.50)$$

Devido a utilização da parametrização de Feynman, temos que $\overline{M}^2(k_\parallel) = M^2 - x(1-x)(k_\parallel^2)$.

De modo geral, o *loop* de polarização $\Pi_{ps}(k_\parallel^2)$ deve ser interpretado de tal modo que estamos interessados somente na componente paralela ao campo magnético do 4-momentum, e para tanto tomamos $\vec{k}_\perp = 0$. Entretanto, para o cálculo da massa-pólo do π^0 devemos ter por definição $\vec{k} = 0$ e $k_0 = m_{\pi^0}$. Resolvendo para m_{π^0} a equação (3.49), teremos

$$m_{\pi^0}^2(B) = -\frac{m_0}{M} \frac{(2\pi)^3}{\sum_{n=0}^\infty g_n \sum_{q=u,d} i2G\beta_q N_c I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)}. \quad (3.51)$$

Para calcularmos o comportamento da massa do π^0 em meio magnético devemos calcular a integral $I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)$, que é uma integral divergente. Utilizaremos o método MFIR para regularizar a integral $I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)$. Detalhes dos cálculos podem ser encontrados em [74, 90] e o resultado para a integral $\sum_{n=0}^\infty g_n I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)$ é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n I_{q,n}(m_{\pi^0}^2) = \frac{i\pi}{\beta_q} \int_0^1 dx \left[-\psi \left(\frac{\overline{M}^2(m_{\pi^0}^2)}{2\beta_q} + 1 \right) + \left(\frac{\beta_q}{\overline{M}^2(m_{\pi^0}^2)} \right) \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\overline{M}^2(m_{\pi^0}^2)}{2\beta_q} \right) + 2 \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + \overline{M}^2(m_{\pi^0}^2)}} - \sinh^{-1} \frac{\Lambda}{\overline{M}^2(m_{\pi^0}^2)} \right) \right], \quad (3.52)$$

onde ψ é a função digama [92]. O último termo entre parêntesis desta expressão reflete a contribuição do vácuo do modelo. A massa-pólo do méson σ é calculada de acordo com o mesmo procedimento, a diferença está apenas no cálculo dos traços devido a definição na equação (2.22) do Capítulo 2. Para o méson σ obtemos portanto

$$m_{\sigma}^2(B) = 4M^2(B) + m_{\pi^0}^2(B). \quad (3.53)$$

Vemos que a maior contribuição para a massa do méson σ vem da massa efetiva dos quarks (como veremos no próximo Capítulo, o campo magnético constante faz com a massa-pólo do méson π^0 seja ainda muito menor em magnitude que a massa efetiva dos quarks). No limite quiral, em que $m_{\pi^0} = 0$, temos que $m_{\sigma} = 2M$, e portanto seu comportamento com o campo magnético é quase que inteiramente determinado conhecendo-se a massa efetiva dos quarks.

3.4.0.4 A constante de decaimento f_{π^0} e o acoplamento $g_{\pi^0 qq}$ sob influência de campos magnéticos constantes

Seguindo os procedimentos do Capítulo 2 e utilizando resultados obtidos até aqui, é possível calcular neste formalismo a constante de decaimento f_{π^0}

$$f_{\pi^0}^2(B) = -i \sum_{u,d} \frac{\beta_q}{(2\pi)^3} N_c M^2 \sum_{n=0}^{\infty} g_n I_{q,n}(0), \quad (3.54)$$

onde $I(0) \approx I(m_{\pi^0}^2)$. Se relacionarmos f_{π^0} com a massa do pión m_{π^0} , vemos que a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner se preserva em meio magnético constante

$$m_{\pi^0}^2(B) f_{\pi^0}^2(B) = -\frac{1}{2} (m_u + m_d) \langle \bar{\psi} \psi \rangle, \quad (3.55)$$

ou seja, deve reproduzir o comportamento do condensado de quarks em meio

magnético. A relação de Treiman-Goldeberger também se preserva

$$f_{\pi^0}^2(B)g_{\pi^0 qq}^2(B) = M^2(B), \quad (3.56)$$

onde $g_{\pi^0 qq}^2(B)$ é o acoplamento do espalhamento de quarks *up* e *down* mediante a troca de um méson π^0 sob influência de um campo magnético externo constante que é definido por

$$g_{\pi^0 qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial k^2} \right)^{-1} \Big|_{k^2=m_{\pi^0}^2} \quad (3.57)$$

Como é explicado nas referências [74, 90], assumir $I(0) \approx I(m_{\pi}^2)$ nos cálculos mostra-se uma boa aproximação neste caso, facilitando o processo de cálculo numérico. Dedicaremos o Capítulo 4 para apresentar os resultados deste Capítulo.

4 MODELO DE NJL SU(2) COM O AJUSTE $G(eB)$

4.1 ACOPLAMENTO DEPENDENTE DO CAMPO MAGNÉTICO $G(eB)$

Embora os cálculos apresentados no Capítulo 3 a respeito da massa efetiva dos quarks, da massa-pólo do méson π^0 , do méson σ e algumas de suas propriedades tenham sido feitos de forma original [74, 90] e ainda estendendo resultados pioneiros [71, 93], estas quantidades carecem de alguma realidade física. Como discutido na Introdução, a QCD na rede apresentou recentemente dados [54] que contradizem os resultados de modelos efetivos como o NJL SU(2) magnetizado na tradicional aproximação de campo médio. No presente Capítulo, mostraremos uma forma de incluir a influência de efeitos que estão além do escopo do modelo através da modificação da constante de acoplamento G , utilizando para este fim os dados fornecidos pela QCD na rede (LQCD)¹. Pretendemos assim comparar os resultados com e sem essa nova constante de acoplamento dependente do campo magnético constante $G(eB)$.

Os resultados apresentados neste Capítulo estão também presentes na referência [59].

4.2 INTERPRETAÇÃO DOS DADOS DE LQCD - AJUSTE DA CONSTANTE $G(eB)$

Recentemente, a aplicação de efeitos termo-magnéticos foram incluídos no modelo de NJL SU(2) através da constante de acoplamento $G \rightarrow G(eB, T)$ [26]. O objetivo é mimetizar os efeitos da catálise magnética inversa (IMC), prevista pelos dados de LQCD para o condensado de quarks. Uma motivação bastante interessante para fazer este ajuste vem de uma investigação a respeito do comportamento da constante de acoplamento da QCD variando com a intensidade dos campos magnéticos [94]. No trabalho citado, é percebido um decréscimo do acoplamento a medida que eB aumenta, o que não é reproduzido pelo modelo de NJL SU(2). Na referência citada, pode-se mostrar que para campos magnéticos altos ($eB \gg \Lambda_{QCD}^2$) o resultado em ordem dominante para a constante de acoplamento é dado por

¹Usaremos o acrônimo LQCD para *Lattice QCD*, do inglês.

$$\frac{1}{\alpha_s} \sim b \ln \frac{|eB|}{\Lambda_{QCD}^2}, \quad (4.1)$$

onde $b = (11N_c - 2N_f)/(12\pi)$ e a escala de energia $\sqrt{|eB|}$ é tal que a correção na aproximação é feita somente até ordem 1 [94]. Portanto, em [26] a proposta é fazer um acoplamento que tenha uma forma funcional e um comportamento semelhante ao previsto por [94].

Assim, a utilização do ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ mostrou resultados associados à termodinâmica em concordância com os dados de LQCD [95]. Alguns outros trabalhos fazem o ajuste da constante de acoplamento com os dados de QCD na rede, fazendo a aplicação para análise de outras quantidades físicas [96,97].

Assim, para fazer o ajuste, utilizamos somente os dados relativos à média dos condensados $\frac{\Sigma_u + \Sigma_d}{2}$ em temperatura zero da figura 12. É importante ressaltar que esses dados são obtidos pela QCD na rede utilizando $N_f = 2 + 1$ sabores de quarks e nós utilizaremos o modelo NJL SU(2). Isso não representa um problema, já que os resultados da QCD na rede separam os dois setores de quarks leves *up* e *down* do quark pesado *strange*.

Outro fator que devemos chamar a atenção é de que os resultados a serem mostrados valem rigorosamente na região $eB \leq 0.4 \text{ GeV}^2$, já que a escala de energia do modelo é escolhida de acordo com a parametrização do *cutoff* $\Lambda^2 \sim 0.4 \text{ GeV}^2$. Além desta região, tomamos os resultados como extrapolações qualitativas.

A equação de Gell-Mann–Oakes–Renner $-2m \langle \bar{\psi}\psi \rangle = m_\pi^2 f_\pi^2$ guia a parametrização feita pelos autores da referência [54], para que tenhamos

$$\Sigma_i(B) = \frac{2m}{m_\pi^2 f_\pi^2} [\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle_B - \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle_{00}] + 1, \quad (4.2)$$

sabendo que $\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle_{00} = (-230)^3 \text{ MeV}^3$ é o condensado do quark com $i = u, d$ em $eB = T = 0$ e $\langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle_B$ o condensado em campo magnético externo finito. Nessas mesmas condições de campo magnético e temperatura, os autores também escolhem a massa do pión como $m_\pi = 135 \text{ MeV}$, a constante de decaimento como $f_\pi = 86 \text{ MeV}$ e a massa de corrente sendo $m = 5.5 \text{ MeV}$.

Tendo os dados de LQCD, o próximo passo é fazer o ajuste do acoplamento $G(eB)$ no modelo NJL SU(2). Associa-se então o condensado de quarks normalizado da equação (4.2), calculado no modelo NJL SU(2) aos dados extraídos da LQCD (figura 12). Fazemos isso numa extensão que vai

²Os autores da referência [98], optam por utilizar um sinal de menos global na relação de Gell-Mann–Oakes–Renner, que é adotada nos trabalhos seguintes.

T (MeV)	$eB = 0$		$eB = 0.2 \text{ GeV}^2$		$eB = 0.4 \text{ GeV}^2$	
	+/2	-	+/2	-	+/2	-
0	1	0	1.14(2)	0.09(2)	1.37(2)	0.28(2)
113	0.90(4)	0	1.01(6)	0.08(2)	1.21(5)	0.25(2)
122	0.84(4)	0	0.96(5)	0.08(2)	1.17(5)	0.24(3)
130	0.80(4)	0	0.93(5)	0.08(3)	1.09(5)	0.22(2)
142	0.68(2)	0	0.78(3)	0.07(2)	0.89(4)	0.19(3)
148	0.57(1)	0	0.65(3)	0.06(2)	0.76(6)	0.17(3)
153	0.49(1)	0	0.56(3)	0.06(2)	0.53(3)	0.14(3)
163	0.26(1)	0	0.25(3)	0.04(2)	0.22(3)	0.07(3)
176	0.08(1)	0	0.07(3)	0.01(2)	0.06(3)	0.03(2)
189	0.00(1)	0	0.01(3)	0.01(2)	0.00(3)	0.02(2)
T (MeV)	$eB = 0.6 \text{ GeV}^2$		$eB = 0.8 \text{ GeV}^2$		$eB = 1.0 \text{ GeV}^2$	
	+/2	-	+/2	-	+/2	-
0	1.63(3)	0.47(3)	1.90(3)	0.67(3)	2.16(3)	0.87(3)
113	1.48(6)	0.41(3)	1.73(6)	0.58(3)	1.95(4)	0.81(3)
122	1.40(5)	0.38(3)	1.63(5)	0.53(3)	1.86(6)	0.70(3)
130	1.23(5)	0.36(3)	1.36(5)	0.49(3)	1.46(5)	0.61(3)
142	0.94(4)	0.30(3)	0.85(4)	0.35(3)	0.68(4)	0.32(3)
148	0.66(5)	0.22(3)	0.50(4)	0.20(3)	0.38(4)	0.18(3)
153	0.43(3)	0.17(3)	0.34(3)	0.15(3)	0.26(3)	0.14(3)
163	0.17(3)	0.09(3)	0.12(3)	0.10(3)	0.09(3)	0.11(3)
176	0.05(3)	0.05(2)	0.04(3)	0.06(2)	0.03(3)	0.06(2)
189	-0.00(3)	0.03(2)	-0.01(3)	0.03(2)	-0.01(3)	0.04(2)

Figura 12 – Dados da rede para a média e a diferença do condensado de quarks [54]. O símbolo (+/2) é associado a média e (-) a diferença entre os condensados Σ_u e Σ_d .

de $eB = 0$ até $eB = 1.0 \text{ GeV}^2$, seguido de uma a interpolação dos dados, e assim, geramos uma grande variedade de valores para a massa efetiva dos quarks. A constante de acoplamento G agora passa a ser $G(eB)$, e podemos determiná-la a partir da equação de *gap* eq.(3.47). Escolhemos a forma funcional de $G(eB)$ de modo a ter uma dependência Gaussiana com o campo magnético

$$G(eB) = \alpha + \beta e^{-\gamma(eB)^2}. \quad (4.3)$$

Esse ansatz é diferente do escolhido na referência [95], visto que nesse artigo, $G(eB, T)$ é feito para $T > 110 \text{ MeV}$. Os valores dos parâmetros são: $\alpha = 1.44373 \text{ GeV}^{-2}$, $\beta = 3.06 \text{ GeV}^{-2}$ e $\gamma = 1.31 \text{ GeV}^{-4}$. Devemos notar

que no limite de campo magnético nulo, teremos $G(0) = \alpha + \beta = G_{II} = 4.50373 \text{ GeV}^{-2}$. O próximo passo é reparametrizar o modelo de acordo com os valores da constante de decaimento f_π , da massa do pión m_π e da massa de corrente m_0 utilizados pela LQCD. Como pode ser visto na tabela 1, utilizamos quatro conjuntos de parâmetros de modo a compararmos os resultados tanto no regime de massa de corrente leve dos quarks (nos conjuntos *I* e *II*) quanto no regime de massa de corrente pesada dos quarks, que é utilizado pela LQCD (nos conjuntos *III* e *IV*). Ressaltamos que a constante $G(eB)$ desenvolvida aqui neste trabalho foi feita de acordo com um trabalho que utilizava a massa de corrente física dos quarks [59].

No conjunto *I* utilizamos a parametrização usual da referência [70]. No Capítulo 3 desta tese utilizamos o método MFIR e os resultados aqui apresentados se baseiam nesta técnica.

Tabela 1 – Conjunto de parâmetros utilizados para o modelo NJL SU(2). À $T = 0$, $m_\pi(0)$ é a massa do pión neutro para $eB = 0$.

Parameter set	$m_\pi(0)$ (MeV)	m_0 (MeV)	$G(\text{GeV}^{-2})$	Λ (MeV)
Set I	135.62	5.0	$G_I=4.67$	664.3
Set II	143.31	5.5	$G_{II}=4.50$	650
Set III	417	48.41	$G_{III} = G_I$	664.3
Set IV	417	50.16	$G_{IV} = G_{II}$	650

Na figura 13 mostramos resultados para a média dos condensados $\frac{\Sigma_u + \Sigma_d}{2}$ e sua dependência com campo magnético no modelo de NJL SU(2) assim como LQCD. A constante de acoplamento fixa G_{II} mostra a clara manifestação da catálise magnética prevista pelo modelo. Com os dados da LQCD e utilizando os parâmetros do conjunto *II* fixamos o acoplamento $G(eB)_{II}$.

Mostramos também como ficou a previsão para a diferença entre os condensados na figura 14 utilizando os mesmos conjuntos de dados.

4.3 RESULTADOS

Vamos investigar agora os diversos resultados obtidos ao utilizar o acoplamento $G(eB)$. Primeiro vamos investigar como a massa constituinte ou efetiva dos quarks se comporta na figura 15. O comportamento mais geral possível e esperado é visto quando utilizamos G fixo nos conjuntos *I* e *II*, e

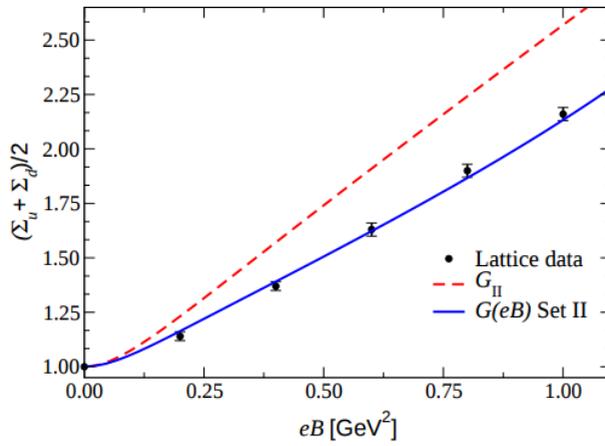


Figura 13 – Média dos condensados do modelo NJL SU(2) com os dados de LQCD. Em vermelho os resultados do modelo com constante fixa e em azul com $G(eB)$.

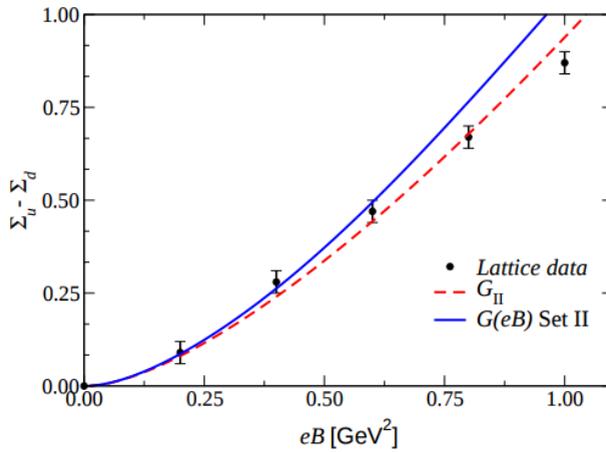


Figura 14 – Diferença dos condensados do modelo NJL SU(2) com os dados de LQCD. Em vermelho os resultados do modelo com constante fixa e em azul com $G(eB)$.

isso é razoável quando lembramos que a catálise magnética é um fenômeno previsto no sentido de que $M \sim G \langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Entretanto, a massa constituinte (não observável) que depende do acoplamento $G(eB)$, tem um comportamento bastante diferente do esperado, e isso pode ser entendido da seguinte maneira. A motivação em utilizar este acoplamento se alicerça em contrabalancearmos o crescimento do condensado de quarks com eB , observando a comparação entre condensados de LQCD e modelo NJL com G fixo. Então pode-se imaginar que M tenha um comportamento diferente do esperado. Além disso, a temperatura pseudo-crítica em geral é proporcional ao valor da massa constituinte em $T = 0$ [99], e portanto o objetivo maior a ser almejado, que é incluir efeitos da IMC, pode ser encontrado incluindo-se efeitos $G(eB, T)$ no cálculo de M .

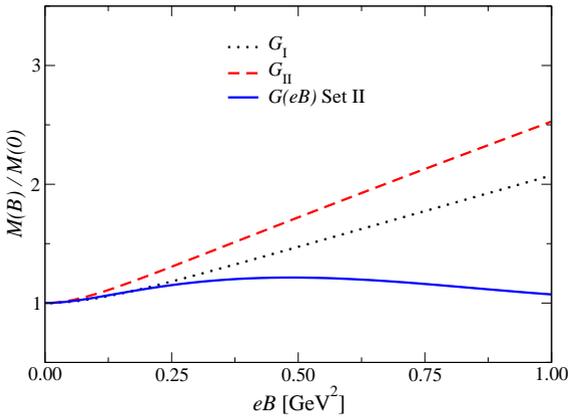


Figura 15 – Massa constituinte normalizada dos quarks nos conjuntos de parâmetros *I* e *II*. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$.

Mostramos agora os resultados para a massa-pólo do méson π^0 normalizada³ do modelo NJL SU(2) e comparações com alguns outros modelos na figura 16. Novamente, usamos os conjuntos *I* e *II* e vemos uma diferença

³Em todos os gráficos, apresentamos resultados associados a quantidades normalizadas de acordo com o valor obtido em $eB = 0$, ou seja, no vácuo. Assim, adota-se $m_{\pi_0}(0)$, $f_{\pi_0}(0)$ e $g_{\pi_0 qq}(0)$ os resultados associados à massa do pión neutro, constante de decaimento do pión neutro e a constante de acoplamento entre píons neutros e quarks, todos calculados em $eB = 0$.

considerável nos resultados. Com G_I e G_{II} fixos os resultados diferem logo após $eB > 0$, embora o comportamento qualitativo seja o mesmo, após um decréscimo no valor da massa, os resultados basicamente estabilizam em $\frac{m_{\pi^0}(eB)}{m_{\pi^0}(0)} \sim 0.75$. No caso G_{II} fixo e $G(eB)_{II}$, a divergência ocorre logo após $eB \sim 0.2 \text{ GeV}^2$, e neste caso a curva continua sofrendo decréscimo. Comparamos com os resultados previstos por Orlovsky e Simonov [100] no formalismo $\bar{q} - q$.

No caso do méson σ na figura 17 a análise é quase que a mesma feita para a massa constituinte dos quarks visto que em geral, $m_\sigma^2 = 4M^2 + m_{\pi^0}^2 \approx 4M^2$, e por isso pode-se esperar um resultado bastante diferente para o comportamento da massa do méson σ com $G(eB)_{II}$ quando comparado com G_{II} e G_I .

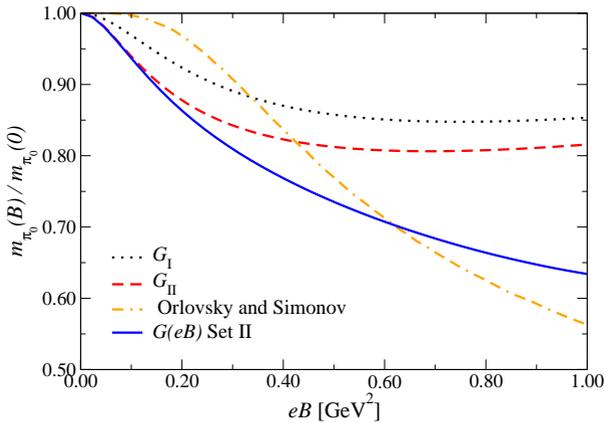


Figura 16 – Massa-pólo do méson π^0 normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. Em amarelo o resultado para a massa do π^0 da teoria $\bar{q} - q$ [100].

Agora mostraremos os resultados para quantidades como a constante de decaimento normalizada f_{π^0} e o acoplamento $g_{qq\pi^0}$, também normalizado. Neste caso, uma nova comparação entra no conjunto de curvas, pois quando incluímos os resultados para f_{π^0} utilizamos tanto a integral $I_{q,n}(m_\pi^2)$ quanto a aproximação $I_{q,n}(m_\pi^2) \approx I_{q,n}(0)$ (ver a integral (3.52) do Capítulo 3). Vemos na figura 18 que esta comparação é feita utilizando G_I e em geral os resul-

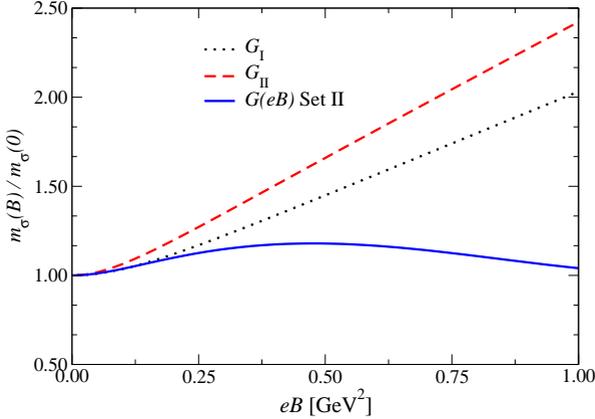


Figura 17 – Massa-pólo do méson σ normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$.

tados são quase que os mesmos, mostrando que a aproximação sugerida é uma boa escolha. O comportamento qualitativo geral de f_{π^0} é o de crescer à medida que eB aumenta em todos os cenários, embora tenha uma variação mais dramática se utilizarmos $G(eB)_{II}$. Na figura 19, o comportamento do acoplamento $g_{qq\pi^0}$ é mostrado. Com as constantes fixas, o comportamento qualitativo é praticamente o mesmo, e vemos uma diferença súbita quando comparamos com o caso $G(eB)_{II}$. Este comportamento poderia ser antecipado, já que pela relação de Goldberger-Treiman $g_{qq\pi^0} \sim \frac{M}{f_{\pi^0}}$, e que como foi discutido, f_{π^0} cresce de forma mais significativa quando G varia com B em comparação aos casos em que G é fixo.

Agora faremos a comparação com os dados fornecidos pela LQCD para a massa do π^0 [78, 79]. Utilizaremos os conjuntos *III* e *IV* com massas de corrente dos quarks mais pesadas e, portanto, isso gerará píons mais massivos como se vê na tabela 1. Em geral a análise é a mesma que foi feita quando discutimos a figura 16, porém como os dados de rede indicam na figura 20, o comportamento quantitativo muda à medida que os campos magnéticos aumentam. Com G_{III} e G_{IV} fixos, há um decréscimo até aproximadamente $\sim 0.5\text{GeV}^2$, seguido de um aumento suave das massas-pólo. O comportamento só é corrigido para o esperado pela LQCD caso utilizemos

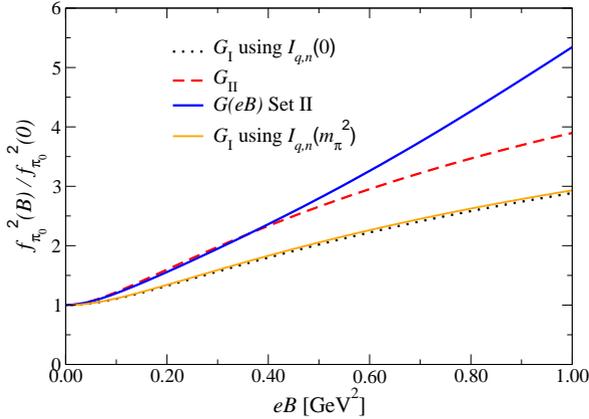


Figura 18 – Constante de decaimento f_{π^0} normalizada. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. O resultado na curva pontilhada ainda diz respeito a uma aproximação utilizada tal que $I_{q,n}(m_{\pi_0}^2) \approx I_{q,n}(0)$. A curva com o resultado sem a aproximação está em amarelo.

$G(eB)$, e como mostra a figura 20, uma excelente concordância é encontrada. Esta também é uma boa evidência de que, resultados mais sofisticados podem ser encontrados, caso assumamos que a constante de acoplamento do modelo NJL SU(2) seja dependente do campo magnético.

Chamaremos um pouco a atenção para o fato de que a formulação de LQCD utilizada por [78, 79] não é única. Os autores dessas referências mostraram seus resultados a respeito da massa do π^0 na formulação de Férmons de Wilson. Nesta formulação, eles atentam que os cálculos para a massa do pión neutro depende da utilização do “*critical hopping parameter*”, e que o impacto dessa formulação tem sido ignorada em trabalhos precedentes [101–104]. Portanto, estamos comparando os nossos resultados com uma formulação de LQCD considerada bastante moderna e confiável.

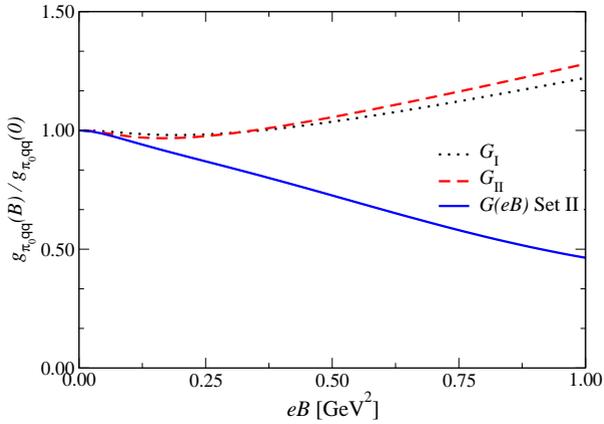


Figura 19 – Acoplamento $g_{qq\pi^0}$ normalizado. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$.

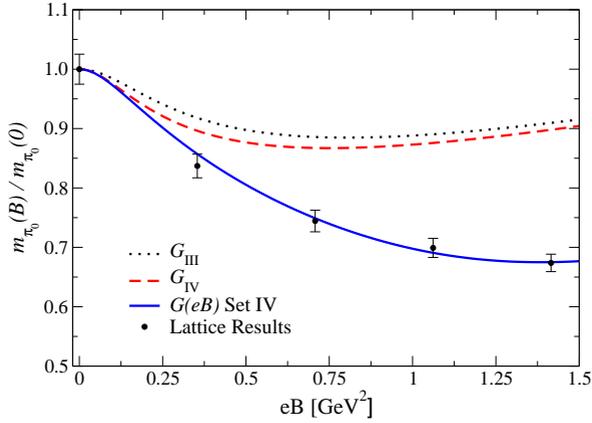


Figura 20 – Massa-pólo do π^0 normalizada comparada com os dados de LQCD. Em vermelho e em pontilhado apresentamos os resultados com a constante fixa em diferentes parametrizações e em azul o resultado com $G(eB)$. Os parâmetros agora dizem respeito aos conjuntos *III* e *IV* da tabela 1.

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO ZMFIR PARA A EQUAÇÃO DE GAP

Neste Capítulo desenvolveremos o estudo do modelo NJL SU(2) sob condição de um campo magnético externo constante, com a adição de temperatura e densidades finitas. Será útil também utilizar um formalismo alternativo de funções zeta de Hurwitz, que chamaremos de zMFIR, que é equivalente ao MFIR utilizado até aqui e que se mostrou uma melhor alternativa para realizar os cálculos numéricos.

Os procedimentos analíticos presentes aqui, assim como os resultados do restante desta tese estão presentes em [105].

5.1 EQUAÇÃO DO GAP MAGNETIZADA COM T E μ FINITOS

Podemos utilizar o formalismo de tempo imaginário de Matsubara como feito no Capítulo 2 e estender os cálculos dos Capítulos anteriores para temperaturas e densidades finitas. As somas nas frequências de Matsubara são análogas as realizadas para o caso em que tínhamos $B = 0$ e, portanto, a nossa equação de *gap* fica reescrita como

$$\frac{M - m_0}{2MG} = I_G(0) + I_G(B) + I_G(B, T, \mu), \quad (5.1)$$

onde $I_G(0)$ é definido por

$$\begin{aligned} I_G(0) &= \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}, \\ &= \frac{N_c}{\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo a contribuição do vácuo. A contribuição puramente magnética é escrita como

$$I_G(B) = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[\ln \Gamma(x_q) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) + x_q - \frac{1}{2} (2x_q - 1) \ln x_q \right], \quad (5.3)$$

enquanto a contribuição termo-magnética é dada por

$$I_G(B, T, \mu) = -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\infty} \frac{dp_3}{E_n} [n(E_n - \mu) + n(E_n + \mu)], \quad (5.4)$$

lembrando que adotamos a definição $x_q = M^2 / (2\beta_q)$ e a função $n(x)$ é a distribuição de Fermi-Dirac da equação (2.44).

5.2 MÉTODO ALTERNATIVO PARA A REGULARIZAÇÃO UTILIZANDO FUNÇÕES ZETA DE HURWITZ

O modelo de Nambu–Jona-Lasinio SU(2) no vácuo em $(3 + 1)$ D é não-renormalizável, como explicado no Capítulo 2 e um método de regularização de integrais que apresentam divergência ultravioleta deve ser escolhido. Na literatura é possível encontrar diversos métodos, entre eles, *3D-cutoff* não-covariante, *4D-cutoff*, Paulli-Villars e tempo-próprio de Schwinger [71, 106] são só alguns exemplos. Em geral, as nossas expressões para T e μ finitos apresentam integrações que separam de forma bem definida a parte divergente associada ao vácuo (e que portanto deve ser regularizada) e a parte térmica que é finita. Ao adicionarmos a influência de campos magnéticos às expressões, diversas dificuldades analíticas surgem. Utilizamos o MFIR, que resume-se em utilizar o método de subtração de divergências associado com a regularização 3D cutoff não-covariante. Por fim, uma expressão bem definida para a contribuição do campo magnético e do vácuo é encontrada. Muitos autores optam por utilizar outros tipos de regularização dependentes de parâmetros extras na teoria, e assim, evitando ter que realizar o processo de regularização de forma analítica, como foi apresentado neste trabalho. Esses métodos se baseiam em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F(p^2) \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F(p^2) U(p^2), \quad (5.5)$$

onde em geral $U(p^2)$ é alguma função que regulariza as integrais divergentes¹. Sabe-se entretanto, como discutido no trabalho [77], que alguns desses métodos introduzem comportamentos não-físicos nos resultados como oscilações ou comportamentos taquiônicos [107].

Em um trabalho relativamente recente [80], uma maneira alternativa de calcular propriedades de um gás de férmions magnetizado foi desenvolvido em termos de funções zeta de Hurwitz. Este método se mostrou mais

¹Estas funções são conhecidas na literatura como *Form-Factors* [107].

eficiente, visto ser mais abrangente e aplicável em muitas situações em que o MFIR é não-aplicável ou é inviável.

Destacamos que neste formalismo, pode-se explorar diversas propriedades analíticas de forma ainda mais simples que no MFIR, pois estaremos tratando de funções mais simples e funções zeta de Hurwitz. Assim, uma vez realizado este procedimento, a mesma separação das quantidades associadas ao vácuo, campo magnético e temperaturas finitas será reproduzida e diversas aproximações ou expansões assintóticas podem ser feitas. Também pode-se chamar a atenção para o fato de que derivadas de funções zeta de Hurwitz são associadas com outra função zeta de Hurwitz (eq.(A.23) do apêndice A) e, portanto, futuramente poderemos explorar diversas quantidades termodinâmicas como a magnetização, o calor específico e a velocidade do som.

No desenvolvimento deste trabalho, os nossos cálculos associados às massas-pólo dos mésons π^0 e σ mostraram-se mais simples no contexto desse formalismo, mas antes de aplicar essa técnica no cálculo dos mesmos, vamos apresentá-lo de um modo geral e através do cálculo da equação de *gap* introduziremos os passos necessários para a sua utilização.

5.2.1 Formalismo zMFIR

A princípio, existem técnicas numéricas capazes de lidar com problemas como este, mas apresentaremos uma alternativa equivalente ao MFIR de realizar as somas nas funções zeta de Hurwitz, e assim obtermos expressões numericamente mais simples de calcular. Chamaremos este método de zMFIR (*zeta function - Magnetic Field Independent Regularization*). Para tanto, aplicaremos esse formalismo para a equação do *gap* e para as integrais associadas aos modos coletivos.

Nos nossos cálculos, como foi apresentado no Capítulo 3, nos deparamos com integrais do tipo

$$I^{NR}(B) = \sum_{q=u,d} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_q g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} f(E_n), \quad (5.6)$$

$$= \sum_{q=u,d} I_q(B), \quad (5.7)$$

onde o índice NR significa que a quantidade não está regularizada. Como veremos mais adiante, após regularizarmos as contribuições puras do campo magnético constante do vácuo e do meio são obtidas separadamente. A quantidade $I_q(B)$ na equação (5.7) é definida por

$$I_q(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_q g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} f(E_n), \quad (5.8)$$

vamos introduzir o formalismo necessário para utilizarmos o método alternativo que se baseia em uma densidade não-normalizada de estados $g_q(E, B)$

$$g_q(E, B) = \frac{2\beta_q}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\infty} dp_3 \delta(E - E_n), \quad (5.9)$$

substituindo diretamente na expressão (5.8), obtemos

$$I_q(B) = \int_M^{\infty} dE g_q(E, B) f(E). \quad (5.10)$$

Utilizando agora, a propriedade da função Delta de Dirac

$$\int_0^{\infty} dx \delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}, \quad (5.11)$$

onde x_i são as raízes de $h(x)$, sendo $h(x_i) = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$ e $h'(x) = \frac{dh(x)}{dx}$. Utilizando essas propriedades podemos integrar a equação (5.9) em p_3 , pois se $h(p_3) = E - E_n$, então

$$\begin{aligned} h(p_3) &= E - \sqrt{p_3^2 + M^2 + 2\beta_q n} = 0, \\ \Rightarrow p_3^2 + M^2 + 2\beta_q n &= \pm E^2, \\ p_3^2 &= E^2 - M^2 - 2\beta_q n, \end{aligned} \quad (5.12)$$

descartamos a solução negativa $-E^2$ pois $p_3 \in \mathfrak{R}^+$. Portanto, ao aplicarmos diretamente esta solução em (5.11), a densidade de estados $g_q(E, B)$ será dada por

$$g_q(E, B) = \frac{2\beta_q}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{n_{max}} g_n \frac{E}{(E^2 - M^2 - 2\beta_q n)^{1/2}} \quad (5.13)$$

onde temos que $n_{max} = \left[\frac{E^2 - M^2}{2\beta_q} \right]$ representa o número máximo de níveis de Landau a serem somados de acordo com o campo magnético aplicado, sendo que $[y]$ representa o maior inteiro $\leq y$. Definindo agora

$$q_E = \frac{E^2 - M^2}{2\beta_q}, \quad (5.14)$$

podemos reescrever a última expressão como

$$g_q(E, B) = \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{(2\pi)^2} E \sum_{n=0}^{[q_E]} g_n \frac{1}{(q_E - n)^{1/2}}. \quad (5.15)$$

Podemos agora utilizar o fator de degenerescência $g_n = 2 - \delta_{n,0}$ explicitamente, e então obteremos

$$\sum_{n=0}^{[q_E]} g_n \frac{1}{(q_E - n)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{2}{(q_E - n)^{1/2}} - \frac{1}{q_E^{1/2}}, \quad (5.16)$$

Faremos o uso também da seguinte manipulação

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{1}{(q_E - n)^{1/2}} &= \sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{1}{(q_E + ([q_E] - [q_E]) - n)^{1/2}}, \\ &= \sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{1}{((q_E - [q_E]) + ([q_E] - n))^{1/2}}, \\ &= \sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{1}{((q_E - [q_E]) + n')^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

na última expressão, podemos definir, por exemplo, $n' = [q_E] - n$, logo teremos $n' = [q_E] - 1, [q_E] - 2, \dots$, logo a soma realizada em n ou n' é a mesma, isto é, $n' = [q_E], [q_E] - 1, \dots, 0$. Como resultado, podemos reescrever (5.17) com auxílio da seguinte propriedade [80]

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{(q+n)^z} = \zeta(z, q) - \zeta(z, q+N+1), \quad (5.18)$$

e então obteremos

$$\sum_{n=0}^{[q_E]} \frac{1}{(q_E - n)^{1/2}} = \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E - [q_E]\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E + 1\right), \quad (5.19)$$

Novamente, podemos reescrever a densidade de estados, agora em termos das funções zeta de Hurwitz

$$\begin{aligned}
g_q(E, B) &= E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{(2\pi)^2} \left\{ 2 \left[\zeta \left(\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) - \zeta \left(\frac{1}{2}, q_E + 1 \right) \right] - \frac{1}{q_E^{1/2}} \right\}, \\
&= E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \left[\zeta \left(\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) - \zeta \left(\frac{1}{2}, q_E \right) + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right], \quad (5.20)
\end{aligned}$$

onde $\{q_E\} = q_E - [q_E]$ é a parte fracionária de q_E na última equação, e fizemos o uso da seguinte identidade [80]

$$\zeta(z, q+1) = \zeta(z, q) - \frac{1}{q^z},$$

enfatizamos que a função $\zeta(x, \{y\})$ é periódica e limitada, como mostra a figura 21. Devemos perceber que em (5.20) não há uma separação explícita das contribuições associadas ao campo magnético e ao vácuo. Para tanto, devemos tomar o limite $B \rightarrow 0$ (e, portanto, $q_E \rightarrow \infty$). Este limite pode ser alcançado utilizando a fórmula assintótica da função zeta de Hurwitz [80]

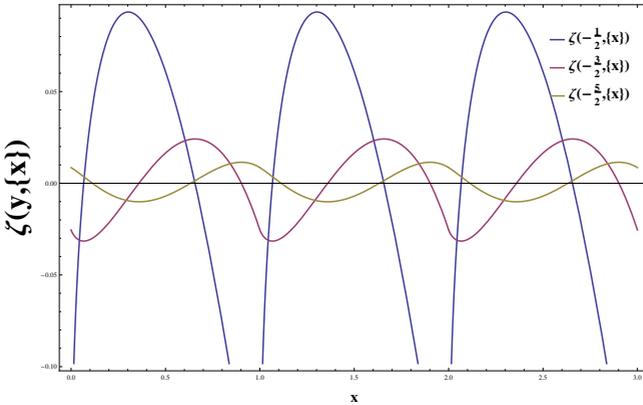


Figura 21 – A função zeta de Hurwitz periódica $\zeta(y, \{x\})$, onde $y = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ foram usados como exemplos.

$$\zeta \left(\frac{1}{2}, q_E \right) = -2q_E^{1/2} + \frac{1}{2}q_E^{-1/2} + \frac{1}{24}q_E^{-3/2} + \mathcal{O}(q_E^{-7/2}), \quad (5.21)$$

usando diretamente esta representação assintótica em $\lim_{\beta_q \rightarrow 0} g_q(E, B)$, obte-

remos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta_q \rightarrow 0} g_q(E, B) &= \lim_{\beta_q \rightarrow 0} E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \left[\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right], \\
 &= \lim_{\beta_q \rightarrow 0} E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} (2q_E^{1/2}), \\
 &= \frac{E\sqrt{E^2 - M^2}}{\pi^2}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

para alcançarmos este resultado, lembramos que $\lim_{\beta_q \rightarrow 0} (2\beta_q)^{1/2} \zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) \rightarrow 0$, pois $\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)$ é uma função limitada. O restante dos limites são triviais de serem obtidos. É útil agora separar a densidade de estados $g_q(E, B)$ em duas contribuições, uma dependente do campo magnético e outra do vácuo. Para tanto, somamos e subtraímos a quantidade $2q_E^{1/2}$ em $g_q(E, B)$ dada pela equação (5.20) e, portanto, obtemos

$$g_q(E, B) = g(E) + \bar{g}_q(E, B), \tag{5.23}$$

onde $g(E)$ é a contribuição não-magnética (5.22)

$$g(E) = \frac{E\sqrt{E^2 - M^2}}{\pi^2}, \tag{5.24}$$

e $\bar{g}_q(E, B)$ representa a contribuição puramente magnética, dada por

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_q(E, B) &= \left[g_q(E, B) - E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} (2q_E^{1/2}) \right], \\
 &= E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \left[\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right], \\
 &= E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E),
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

definimos no último passo a quantidade

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E) = \left[\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right].$$

5.2.2 Equação de *gap* magnetizada no zMFIR

Com os resultados derivados até aqui, podemos calcular a equação do *gap* em $T = 0$, diretamente na expressão

$$\frac{M - m_0}{2GM} = N_c I^{NR}(B) = N_c \sum_{q=u,d} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \beta_q \int \frac{dp_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{E_n} \quad (5.26)$$

onde conseguimos de forma equivalente ao MFIR, separar devidamente as contribuições do campo magnético e do vácuo. Se voltarmos a expressão (5.6), agora podemos adequadamente escrever as contribuições de cada termo

$$I^{NR}(B) = N_c \sum_{q=u,d} \left[\int_M^{\infty} dE g(E) \frac{1}{E} + \int_M^{\infty} dE \bar{g}_q(E, B) \frac{1}{E} \right], \quad (5.27)$$

onde podemos notar agora que as contribuições não-magnéticas da equação (5.24) e puramente magnética da equação (5.25) da densidade de estados $g_q(E, B)$ foi utilizada em (5.27). Dessa maneira, podemos calcular a contribuição do vácuo para a equação de *gap*, dada por

$$\begin{aligned} I_G(0) &= N_c \sum_{q=u,d} I_q(0) = N_c \sum_{q=u,d} \left[\int_M^{\infty} dE g(E) \frac{1}{E} \right], \\ &= 4N_c \int_M^{\infty} dE \frac{E \sqrt{E^2 - M^2}}{2\pi^2} \frac{1}{E}, \quad \text{pois} \left(\sum_{q=u,d} \rightarrow 2 \right), \\ &= \frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^{\Lambda} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde utilizando uma simples mudança de variável de integração, derivamos novamente a contribuição do vácuo para a equação do *gap* calculada no Capítulo 2 e que será regularizada utilizando o *3-D cutoff* não-covariante. Com o mesmo procedimento devemos recobrar a contribuição associada a parte puramente térmica que também derivamos no Capítulo 2

$$I_G(T, \mu) = -\frac{2N_c}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} [n(E + \mu) + n(E - \mu)].$$

Analogamente, definiremos a contribuição puramente magnética da

equação (5.25) como

$$I_G(B) \equiv N_c \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \bar{g}_q(E, B) \frac{1}{E}. \quad (5.29)$$

A contribuição das integrais que incluem campo magnético, temperaturas e densidades finitas² são dadas por

$$I_G(B, T, \mu) = -N_c \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE g_q(E, B) \frac{1}{E} [n(E - \mu) + n(E + \mu)]. \quad (5.30)$$

Agora que calculamos todas as contribuições da equação de *gap*, podemos ainda reescrevê-las de maneira mais conveniente fazendo o uso de uma mudança de variáveis

$$q_E = \frac{E^2 - M^2}{2\beta_q} \rightarrow E dE = \beta_q dq_E, \quad (5.31)$$

onde nos passos seguintes definimos $E(q_E) = \sqrt{M^2 + 2\beta_q q_E}$ e $x_q = \frac{M^2}{2\beta_q}$ e, portanto, obtemos tanto para $I_G(B)$ e $I_G(B, T, \mu)$ as seguintes expressões

$$\begin{aligned} I_G(B) &= N_c \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \left(E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E) \right) \frac{1}{E}, \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)}{(x_q + q_E)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} I_G(T, \mu, B) &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)}{(x_q + q_E)^{1/2}} \\ &\quad \times [n(E(q_E) - \mu) + n(E(q_E) + \mu)]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto, podemos calcular agora a equação de *gap* utilizando zMFIR com as expressões apresentadas anteriormente.

É útil utilizar a seguinte definição na quantidade $I_G(B)$

²A expansão destas integrais para o meio denso e quente são feitas puramente por analogia ao que foi feito no Capítulo 2, onde o formalismo de tempo imaginário de Matsubara foi aplicado. É imediata a inclusão das funções de Fermi-Dirac.

$$I_G(B) = I_G(B)^{per} + I_G(B)^{Nper}, \quad (5.34)$$

onde separamos a contribuição associada ao integrando com a função periódica dada por

$$I_G(B)^{per} = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)}{(x_q + q_E)^{1/2}}, \quad (5.35)$$

do integrando com a função não-periódica

$$I_G(B)^{Nper} = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\left[-\zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}}\right]}{(x_q + q_E)^{1/2}}. \quad (5.36)$$

Estas definições serão úteis para demonstrar a equivalência entre MFIR e zMFIR no apêndice C.

5.3 MODOS COLETIVOS MAGNETIZADOS SOB CONDIÇÕES DE T E μ FINITOS

Aplicando o mesmo formalismo de Matsubara nas expressões para os modos coletivos do Capítulo 3, podemos agora estudar o comportamento da massa dos mésons π^0 e σ com B, T e μ finitos. Os cálculos nas frequências de Matsubara serão feitos na integral $I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)$ da expressão (3.49). Ao fazer isso, percebe-se que essa integral tem a mesma estrutura matemática nas frequências de Matsubara de $I(k^2)$ obtida em (2.46), de modo os resultados das somas de Matsubara serão equivalentes. Ao realizarmos estes cálculos e identificando cada termo, obtemos

$$I_{q,n}(m_{\pi^0}^2) = \int d^2 p_{\parallel} \frac{1}{[p_0^2 - E_n^2][(p_0 + m_{\pi^0})^2 - E_n^2]}, \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi i T \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(i\omega_m + \mu)^2 - E_n^2][(i\omega_m + \mu + m_{\pi^0})^2 - E_n^2]}, \\ &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{[1 - n(E_n - \mu) - (E_n + \mu)]}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

É interessante percebermos que no limite em que $T \rightarrow 0$ teremos a seguinte expressão

$$I_{q,n}(m_{\pi^0}^2) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}. \quad (5.39)$$

Utilizando o método de regularização MFIR associado com os cálculos nas frequências de Matsubara, obtemos uma separação explícita das contribuições de cada uma das condições externas (eB, T, μ) bem definidas. Vamos agora redefinir adequadamente a equação utilizada para o cálculo da massa-pólo do méson π^0 eq.(3.51) da seguinte forma

$$m_{\pi^0}^2 = -\frac{m_0}{M2iGN_c I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)}, \quad (5.40)$$

onde a integral $I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)$ ficou reescrita como

$$\begin{aligned} I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu) &\equiv \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{I_{q,n}(m_{\pi^0}^2)}{(2\pi)^3}, \\ &= -i \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} \frac{[1 - n(E_n - \mu) - n(E_n + \mu)]}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

É útil escrever também esta última expressão no limite em que $T, \mu \rightarrow 0$

$$I(m_{\pi^0}^2, B, 0, 0) = -i \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}. \quad (5.42)$$

Como na seção anterior $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$ pode ser dividida em três partes diferentes [105]

$$I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu) = I_{vac}(m_{\pi^0}^2) + I(m_{\pi^0}^2, B) + I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2, B), \quad (5.43)$$

onde a contribuição do vácuo é dada por

$$I_{vac}(m_{\pi^0}^2) = \frac{i}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\Lambda}{\bar{M}} \right) - \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + \bar{M}^2}} \right], \quad (5.44)$$

a contribuição magnética por sua vez é

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = \frac{i\pi}{(2\pi)^3} \sum_{q=u,d} \int_0^1 dx \left[-\psi(\bar{x}_q + 1) + \frac{1}{2\bar{x}_q} + \ln \bar{x}_q \right], \quad (5.45)$$

e por último, a integral responsável pela parte termo-magnética é dada por

$$I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2, B) = \frac{i}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{[n(E_n + \mu) + n(E_n - \mu)]}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}, \quad (5.46)$$

Nestas últimas expressões utilizamos a parametrização de Feynman adotada nessa tese

$$\bar{M}^2(m_{\pi^0}^2) = M^2 - x(1-x)m_{\pi^0}^2. \quad (5.47)$$

Para calcular as massas dos mésons π^0 e σ , devemos notar que na expressão (5.43) temos algumas dificuldades e uma delas é dada pela divergência presente no denominador de (5.46) que ocorre quando $m_{\pi^0}^2 = 4E_n^2$ em temperaturas tais que $T \geq T_{Motl}$, de modo que como feito no Capítulo 2, devemos interpretar este resultado como o seu valor principal de Cauchy ($\mathcal{P}.\mathcal{V}.$) [87, 105]

$$I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2, B) \equiv i \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathcal{P}.\mathcal{V} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} \frac{[n(E_n - \mu) + n(E_n + \mu)]}{E_n (m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}.$$

As somas nos níveis de Landau devem ser feitas até que se obtenha convergência numérica.

Da mesma forma, as quantidades dadas na expressões (5.44) e (5.45)

também devem ser interpretadas como valores principais de Cauchy assim que $T \geq T_{Mott}$. No Apêndice D, mostramos como obter algumas dessas expressões.

5.3.1 Modos coletivos utilizando o zMFIR

Seguindo os mesmos passos do cálculo para a equação de *gap* derivados até o momento, podemos derivar analogamente a integral $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$ no formalismo zMFIR. Primeiramente, vamos derivar as contribuições de cada integral da equação (5.43) como feito na seção 5.1. Primeiramente identificamos

$$f(E) = \frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \quad (5.48)$$

da equação (5.42), e aplicaremos diretamente na equação (5.6). Assim, começamos o cálculo, analisando $I(m_{\pi^0}^2, B)$ em $T = 0$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} I(m_{\pi^0}^2, B) &= \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE g_q(E, B) \left[\frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)} \right], \\ &= -i \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \frac{[g_q(E) + \bar{g}_q(E, B)]}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

A contribuição do vácuo será dada portanto por

$$\begin{aligned} I_{vac}(m_{\pi^0}^2) &= \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \frac{E(E^2 - M^2)}{\pi^2} \left[\frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)} \right], \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_M^\infty dE E(E^2 - M^2)^{1/2} \frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \\ &= -4i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

que é o resultado para a regularização do vácuo de $I(m_{\pi^0}^2)$ dada em (2.28) com $k_0 = m_\pi$. Novamente, se fizermos os mesmos procedimentos para a contribuição puramente térmica, obteremos o resultado derivado no Capítulo 2

$$I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2) = 4i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{[n(E + \mu) + n(E - \mu)]}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)},$$

Já a integral $I(m_{\pi^0}^2, B, 0, 0)$, que é a contribuição puramente magnética de (5.49), será dada por

$$\begin{aligned} I(m_{\pi^0}^2, B) &= \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \bar{g}_q(E, B) \frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \\ &= -i \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E) \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \\ &= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \int_M^\infty dE \frac{E \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

pode-se fazer o uso da mudança de variáveis (5.31), de modo a obtermos

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)}{\sqrt{M^2 + 2\beta_q q_E (m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E))}}, \quad (5.52)$$

Como foi feito na seção anterior, $I(m_{\pi^0}^2, B)$ será dividida em duas quantidades, uma parte periódica e uma parte não-periódica

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = I^{per}(m_{\pi^0}^2, B) + I^{Nper}(m_{\pi^0}^2, B), \quad (5.53)$$

onde a parte periódica é dada por

$$\begin{aligned} I^{per}(m_{\pi^0}^2, B) &= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)}{\sqrt{M^2 + 2\beta_q q_E [m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E)]}}, \\ &= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)}{E(q_E) [m_{\pi^0}^2 - 4E(q_E)^2]}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

e a parte não-periódica por

$$\begin{aligned}
I^{Nper}(m_{\pi^0}^2, B) &= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\left[-\zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right]}{\sqrt{M^2 + 2\beta_q q_E [m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E)]}}, \\
&= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\left[-\zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right]}{E(q_E) [m_{\pi^0}^2 - 4E(q_E)^2]}. \quad (5.55)
\end{aligned}$$

E a contribuição termo-magnética será dada, por

$$\begin{aligned}
I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2, B) &= -i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)}{E(q_E) [m_{\pi^0}^2 - 4E(q_E)^2]}, \\
&\quad \times [n(E(q_E) - \mu) + n(E(q_E) + \mu)]. \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Há ainda uma maneira alternativa de representar as expressões anteriores, de modo que muitas vezes podem se apresentar mais estáveis numericamente. Estas representações são dadas da seguinte maneira

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = I^{per}(m_{\pi^0}^2, B) + I^{Nper}(m_{\pi^0}^2, B), \quad (5.57)$$

onde a parte periódica é dada por

$$\begin{aligned}
I^{per}(m_{\pi^0}^2, B) &= i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{5/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) \\
&\quad \times \frac{m_{\pi^0}^2 - 12(M^2 + 2\beta_q q_E)}{(M^2 + 2\beta_q q_E)^{3/2} [m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E)]^2}, \quad (5.58)
\end{aligned}$$

e a parte não-periódica por

$$\begin{aligned}
I^{Nper}(m_{\pi^0}^2, B) &= i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{5/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq_E \left[-\zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) - \frac{2}{3} q_E^{3/2} + \frac{1}{2} q_E^{1/2} \right] \\
&\quad \times \frac{m_{\pi^0}^2 - 12(M^2 + 2\beta_q q_E)}{(M^2 + 2\beta_q q_E)^{3/2} [m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E)]^2}. \quad (5.59)
\end{aligned}$$

As demonstrações das integrais (5.58) e (5.59) são feitas no Apêndice B.

Notamos que, este método de reescrever as integrais em termos de funções zeta de Hurwitz nos facilita também no aspecto de que não precisamos mais realizar as somas nos níveis de Landau na parte térmica, que é a

integral $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$. Por conveniência definiremos

$$\mathcal{H}_{-1/2}(q_E) = \left[\zeta \left(-\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) + \zeta \left(-\frac{1}{2}, q_E \right) - \frac{2}{3} q_E^{3/2} + \frac{1}{2} q_E^{1/2} \right], \quad (5.60)$$

e portanto a contribuição $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$ pode ser escrita como

$$I_{T,\mu}(m_{\pi^0}^2, B) = - \sum_{q=u,d} \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{-1/2}(q_E) [m_{\pi^0}^2 - 12(M^2 + 2\beta_q q_E)]}{4(M^2 + 2\beta_q q_E)^{3/2} [m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E)]^2} \times [n(E - \mu) + n(E + \mu)]. \quad (5.61)$$

Assim como no formalismo MFIR, estas integrais podem apresentar pólos no domínio de integração. Para tanto, devemos calcular de forma autoconsistente as equações (5.40) utilizando a integral $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$. Estas integrais aqui apresentadas devem ser lembradas como o valor principal de Cauchy acima da temperatura de Mott, como discutido no Capítulo 2. Estes pólos são dados por

$$\begin{aligned} \frac{m_{\pi^0}^2}{2\beta_q} - 4(x_q + q_E) &= 0, \\ \rightarrow q_E &= \frac{m_{\pi^0}^2}{8\beta_q} - x_q, \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde $x_q = \frac{M^2}{2\beta_q}$. Como $q_E \geq 0$, então $q_E = \frac{m_{\pi^0}^2}{8\beta_q} - x_q \geq 0$ e portanto

$$m_{\pi^0} \geq 2M. \quad (5.63)$$

Portanto, se $m_{\pi^0} < 2M$, não temos pólo do domínio de integração, porém, se $m_{\pi^0} \geq 0$, o pólo aparece e as integrais devem ser interpretadas como valor principal de Cauchy. Vale ressaltar que quando temos $m_{\pi^0} = 2M$ a temperatura de Mott, T_{Mott} , é alcançada no sistema e agora todas as soluções autoconsistentes para $T > T_{Mott}$ são soluções nas quais os mésons são ressonâncias.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste Capítulo apresentaremos os resultados numéricos associados ao Capítulo anterior. A equivalência demonstrada no Apêndice C entre os dois formalismos apresentados (MFIR e zMFIR) fará com que não precisemos repetir os resultados para cada um deles, embora tenha sido verificada com bastante acurácia numérica essa equivalência.

6.1 A CATÁLISE MAGNÉTICA E A MASSA-PÓLO DOS MÉSONS NEUTROS

Na figura 22 reproduzimos o que foi feito no Capítulo 2, onde vimos que o comportamento da massa efetiva dos quarks, assim como a massa-pólo dos mésons em campo magnético nulo. A massa efetiva dos quarks basicamente sofre a restauração parcial da simetria quiral à medida que a temperatura aumenta e essa restauração se dá através de um *crossover* associado a uma temperatura pseudocrítica T_c . No caso dos mésons, até que a temperatura de dissociação T_{Mott} seja alcançada podemos dizer que a massa dos mésons $\vec{\pi}$ (neste caso, podemos tratar os três pions π^\pm e π^0 da mesma maneira) não sofre quase nenhuma variação. Os efeitos térmicos aparecem ao redor de T_{Mott} .

Ao colocarmos um campo magnético $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$ em temperatura finita, como visto na figura 23, observamos o efeito da catálise magnética em temperaturas baixas. O fortalecimento do condensado de quarks faz com que a simetria quiral se restaure em temperaturas pseudocríticas mais altas, como é o comportamento esperado para este tipo de modelo na aproximação de campo médio.

A catálise magnética é entendida de forma intuitiva da seguinte maneira: o condensado de quarks é formado por um par quark-antiquark, onde o quark possui o spin e a carga elétrica fixos, enquanto o anti-quark possui spin e carga opostos. Portanto, espera-se que os momentos magnéticos de cada partícula se alinhem com o campo magnético externo, fortalecendo a interação do par de quarks. Este efeito é contrário ao que ocorre no efeito Meissner, pois o par de Cooper é formado por dois elétrons com spins opostos, porém possuem a mesma carga elétrica e, portanto, os momentos magnéticos são opostos e neste sentido o par de Cooper fica desalinhado em um campo magnético externo, desfavorecendo a interação [46].

Na figura 23 mostramos também o resultado para a massa-pólo do méson π^0 . Na fase de Goldstone, esta massa tem o comportamento quase que

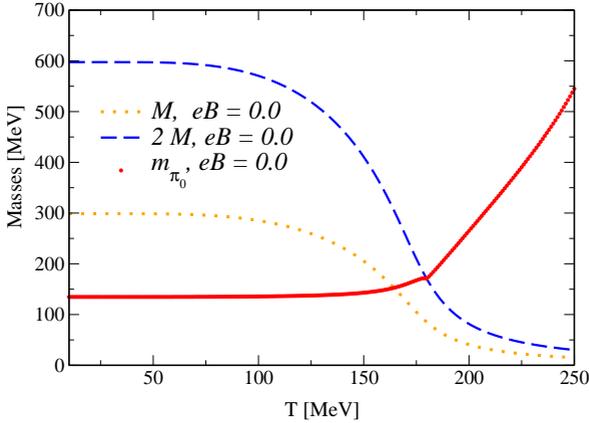


Figura 22 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo dos mésons π variando com a temperatura.

exatamente o mesmo que o obtido em $T = 0$, ou seja, $m_{\pi^0}(B, T) \approx m_{\pi^0}(B, 0)$. Ao nos aproximarmos da temperatura de dissociação, a equação (5.40) não encontra uma solução “contínua” como ocorre no caso $eB = 0$, e a massa-pólo do méson π^0 salta para um valor mais alto. A temperatura de dissociação de Mott neste caso é $T_{Mott} = 195$ MeV.

Mostramos na figura 24 os resultados para $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$. Em comparação à figura anterior, vemos que a massa dos quarks em baixas temperaturas fica ainda maior, pois é um efeito característico da catálise magnética. Este efeito dificulta inclusive a restauração da simetria quiral, fazendo com que a temperatura pseudocrítica fique cada vez maior. A análise física da massa do méson π^0 é basicamente a mesma em baixas temperaturas. Ao atingirmos a temperatura de dissociação $T_{Mott} = 202.2$ MeV, o salto para um valor ainda mais energético é observado para o π^0 .

6.1.1 Redução dimensional na fase de Wigner-Weyl

Discutiremos agora o papel da redução dimensional nos resultados obtidos. A redução dimensional tem um papel determinante nesta análise, e já é há bastante tempo discutida na literatura [47, 48]. Basicamente, um dos fatores fundamentais que ocorre nos nossos cálculos quando vamos passar em

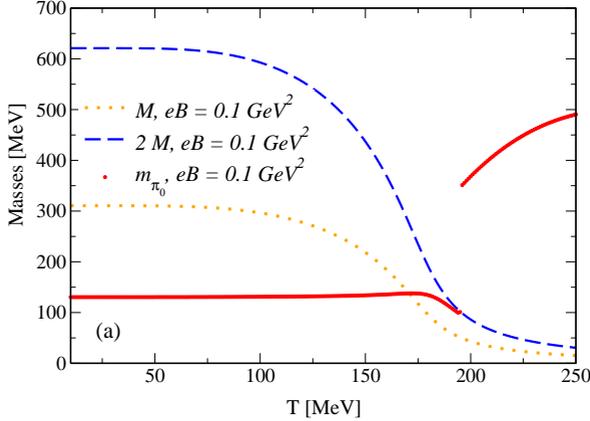


Figura 23 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$.

um domínio de $eB = 0$ para $eB \neq 0$ é a prescrição

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{T \beta_q}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_3}{2\pi}, \quad (6.1)$$

sendo v as frequências de Matsubara. Essa prescrição pode ser observada quantitativamente, mesmo em $T = 0$, se compararmos a integral do propagador dos quarks no vácuo utilizada no Capítulo 2 através da equação (2.14), com o propagador dos quarks em meio magnético, equação (3.17).

Associada a esta prescrição, os níveis de energia agora estão discretizados em níveis de Landau n , ou seja, passamos de $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$ para $E_n = \sqrt{p_3^2 + M^2 + 2\beta_q n}$, sendo que $q = u, d$ indica o sabor de cada quark. Portanto, a inclusão de campos magnéticos finitos induzem a discretização dos *estados de energia*. Essa discretização só aumenta à medida que os campos magnéticos aumentam, fazendo com que cada vez menos níveis de Landau fiquem excitados. Campos muito fortes devem excitar somente o nível de Landau mais baixo $n = 0$. [48]

A temperatura finita por sua vez, à medida que aumenta, enfraquece o condensado de quarks, mesmo em campos magnéticos fortes. O que ocorre

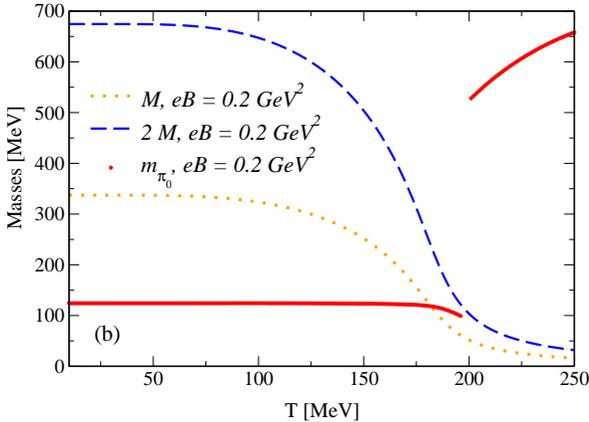


Figura 24 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$.

neste caso é que mais níveis de Landau vão sendo excitados à medida que T aumenta. Uma interessante análise é feita em [108], onde o potencial termodinâmico do modelo de NJL SU(2) é calculado em temperatura finita com campos magnéticos fortes. A análise conclui que a medida que vamos subindo a temperatura, temos que somar cada vez mais níveis de Landau de modo a alcançarmos convergência .

Em $eB = 0$ quando o méson π^0 passa através de T_{Mott} , os estados acessíveis do espaço de fase não sofreram nenhuma mudança (pois não sofreram redução dimensional) e, portanto, possui todos os estados acessíveis. Por sua vez, ele pode encontrar uma solução que satisfaz a condição

$$1 - 2G\Pi_{ps}(m_{\pi^0}) = 0, \quad (6.2)$$

logo após $m_{\pi^0} = 2M$ com mais facilidade.

Por exemplo, em campo magnético $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$ o que ocorre é que a discretização dos estados no plano perpendicular ao eixo p_z , ou seja, $p_x^2 + p_y^2 = 2\beta_q n$ [76] faz com que o espaço de fase fique com menos estados acessíveis, proibindo o méson π^0 de acessar as soluções de eq.(6.2) logo após $m_{\pi^0} = 2M$, tendo este que *saltar* para o próximo estado acessível. O mesmo se dá em $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$.

Vamos a seguir analisar qualitativamente as equações utilizadas neste trabalho. Em $eB = 0$ a função que tínhamos que integrar para obter a massa-pólo dos mésons através de eq.(6.2) era basicamente

$$f(m_{\pi^0}) \sim \int dp \frac{p^2 [1 - 2n(E)]}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \quad (6.3)$$

e esta função possui pólos em $p = \sqrt{\frac{m_{\pi^0}^2}{4} - M^2}$, sendo $n(E)$ a função de Fermi-Dirac. No caso em que temos campo magnético, aplicando a prescrição da redução dimensional, a equação (6.3) será reescrita em $T = 0$ como

$$f(m_{\pi^0})_q \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n \beta_q \int dp_3 \frac{[1 - 2n(E_n)]}{E_n(m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}. \quad (6.4)$$

Por sua vez, esta última integral tem pólos em $p_3 = \sqrt{\frac{m_{\pi^0}^2}{4} - M^2 - 2\beta_q n}$. Ao utilizarmos estas integrais na eq.(6.2), devemos buscar soluções autoconsistentes para m_{π^0} , em especial na região de interesse $T > T_{Mott}$. Um olhar mais minucioso no denominador das integrais apresentadas nos mostrará algumas restrições para as possíveis soluções para m_{π^0} .

Na região $T \gg T_{Mott}$, temos aproximadamente $M \approx m_0$ e, portanto, obteremos singularidade na eq.(6.3) quando $\frac{m_{\pi^0}^2}{4} - m_0^2 \geq 0$. Da mesma forma, na eq.(6.4) teremos singularidades nas integrais (integrais somadas nos níveis de Landau), quando $\frac{m_{\pi^0}^2}{4} - m_0^2 - 2\beta_q n \geq 0$. Podemos então entender que em $eB = 0$ teremos soluções se $m_{\pi^0} > 2m_0$. Em $eB \neq 0$ essas soluções dependerão da intensidade do campo magnético. Para campos magnéticos fracos, poderemos somar muitos níveis de Landau, de modo que a condição $\frac{m_{\pi^0}^2}{4} > m_0^2 + 2\beta_q n_c$ seja verdadeira, onde n_c é o nível de Landau crítico (último nível a ser somado, tal que tenhamos divergência no denominador de (6.4)). Podemos assumir um caso de exemplo em que o campo magnético é suficientemente forte, tal que o nível de Landau $n = 1$ já é suficiente para encontrarmos $\frac{m_{\pi^0}^2}{4} - m_0^2 - 2\beta_q n = 0$ e, portanto, a integral associada a este nível de Landau no somatório em n de (6.4) e os demais não apresentarão singularidade, não necessitando do cálculo de valor principal de Cauchy.

6.2 APLICAÇÃO DO ACOPLAMENTO $G(eB)$

Para ver os efeitos da catálise magnética inversa, implementaremos o acoplamento $G(eB, T)$ [105] de uma maneira semelhante à utilizada no Capítulo 4. O acoplamento, além da dependência com o campo magnético, possui agora uma dependência explícita com a temperatura, e a sua forma funcional é dada por

$$G(eB, T) = c(B) \left[1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(B)[T_a(B) - T]}} \right] + s(B). \quad (6.5)$$

Os valores das quantidades c, s, β são dados na tabela 2 e os parâmetros utilizados para o modelo NJL SU(2) são $\Lambda = 650$ GeV e $m_0 = 5.5$ MeV.

eB	c	T_a	s	β
0.0	0.900	0.168	3.731	40.000
0.2	1.226	0.168	3.262	34.117
0.4	1.769	0.169	2.294	22.988
0.6	0.741	0.156	2.864	14.401
0.8	1.289	0.158	1.804	11.506

Tabela 2 – Valores dos parâmetros para o ajuste do acoplamento $G(eB, T)$. Unidades em potências de GeV.

Com o ajuste no acoplamento $G(eB)$, os resultados numéricos apresentados na figura 25 para a massa efetiva dos quarks e do méson π^0 mudam quantitativamente em $eB = 0$, mas a análise física permanece a mesma das seções anteriores.

Nas figuras 26 e 27, apresentamos os resultados para esta implementação. Como esperado, para a massa efetiva dos quarks em temperaturas baixas, a catálise magnética permanece sendo o efeito principal, embora tenhamos incluído o efeito da catálise magnética inversa quando chegamos em temperaturas próximas da temperatura pseudocrítica. No caso dos mésons, a mesma análise quantitativa feita anteriormente e ao longo da tese se aplica, embora agora possamos prever que a inclusão de $G(eB, T)$ faz com que a temperatura de Mott sofra um decréscimo à medida que o campo magnético aumenta. As temperaturas de Mott para os dois casos são dadas por $T_{Mott} = 166.84$

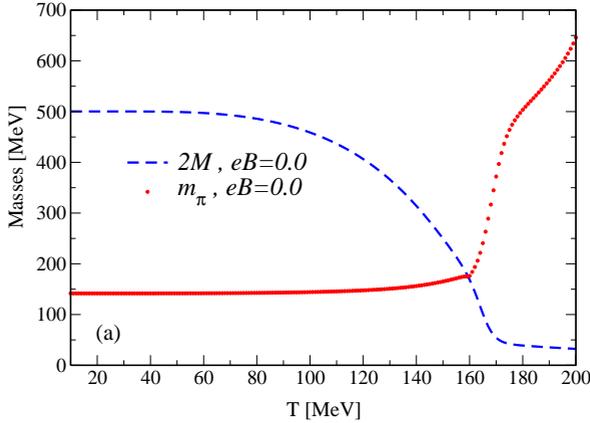


Figura 25 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.0$ GeV^2 , com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).

MeV quando temos $eB = 0.1$ GeV^2 , e $T_{Mott} = 164.9$ MeV quando o campo magnético é $eB = 0.2$ GeV^2 . Ou seja, a dissociação dos modos neutros do modelo NJL SU(2) seguem a restauração parcial da simetria quiral de acordo com a forma que o acoplamento foi construído.

6.3 COMPARAÇÕES COM A LITERATURA ATUAL

A massa dos píons neutros também foi calculada em diversos outros trabalhos envolvendo o modelo NJL SU(2). Resultados podem ser vistos na aproximação onde $I(m_{\pi^0}^2) \approx I(0)$ na regularização com *Form-Factors* [107, 109] e uma versão alternativa de Pauli-Villars [110]. Nesta aproximação, o salto que ocorre na massa do pión após a temperatura de Mott não aparece como nos nossos resultados, e isso é fácil de se entender, visto que na aproximação citada o denominador de (6.4) no limite em que $m_{\pi^0} \rightarrow 0$ não possui a mesma divergência que os nossos cálculos apresentam e, portanto, os vínculos são diferentes. Esta aproximação é útil para o cálculo feito em [67, 107], onde uma expansão além do campo médio é feita, e nesta expansão somente os campos associados aos mésons com momentos externos nulos são utilizados, o que justifica utilizar $I(0)$.

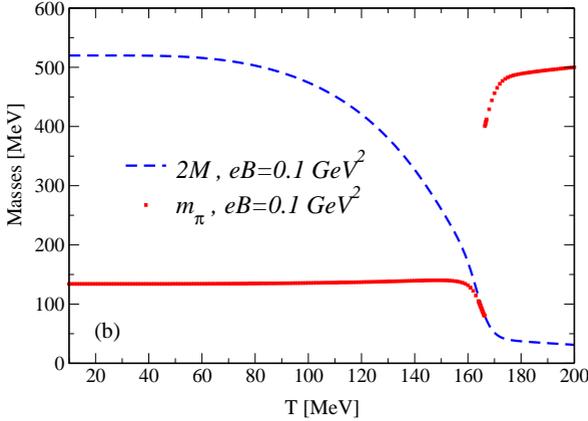


Figura 26 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.1 \text{ GeV}^2$, com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).

Os artigos [110, 111] exploram um cálculo semelhante ao feito aqui nesta tese. Em [110] a regularização de Pauli-Villars de uma maneira alternativa é utilizada, e embora os resultados a respeito da parte ressonante sejam boas previsões, o autor obtém a catálise magnética inversa na temperatura de Mott mesmo utilizando os resultados em aproximação de campo médio (inclusive para campos magnéticos muito altos, da ordem de $eB = 30m_\pi^2 \sim 0.58\text{GeV}^2$). Esse resultado pode estar associado a esta regularização, que remove efeitos do meio magnético. Já em [111], o propagador dos quarks utilizado não parece ser rigorosamente o mesmo obtido para férmions em meio magnético constante [72], embora os resultados deles sejam de certa forma semelhantes aos nossos (utilizando a regularização de *Form-Factor*). Isso pode ser devido ao modo de fazer a prescrição (6.1) nas equações do vácuo para o meio magnético de forma heurística [76].

Essa prescrição é verdadeira em muitos casos, mas deve ser utilizada com cuidado, visto que algumas quantidades importantes podem acabar sendo ignoradas, como é o caso do cálculo envolvendo a contribuição dos fatores de fase $\phi(x, x')_q$ de cada propagador fermiônico no *loop* de polarização Π_{ps} . No caso do *loop* de polarização associado ao canal do pión neutro, não haverá nenhum problema, pois os fatores de fase de cada propagador fermiônico que carregam cargas opostas porém idênticas em módulo se redu-

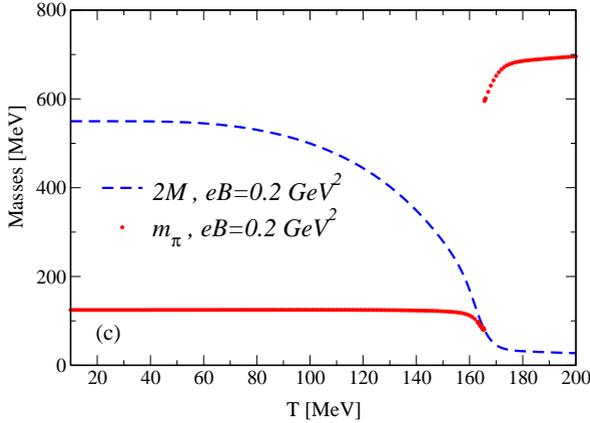


Figura 27 – Comparação entre a massa efetiva dos quarks e a massa-pólo do méson π^0 variando com a temperatura com campo magnético fixo $eB = 0.2 \text{ GeV}^2$, com o ajuste no acoplamento $G(eB, T)$ dado pela equação (6.5).

zem à unidade. Por outro lado, o canal dos píons carregados será mais difícil de ser tratado, principalmente por se tratarem de propagadores fermiônicos com módulos de cargas diferentes (e de fato para qualquer *loop* de polarização que envolva partículas com cargas diferentes [72], este problema irá persistir). O cálculo para a massa-pólo dos píons carregados foi resolvido recentemente na referência [112] com auxílio do formalismo de Ritus e também na aproximação $I(m_{\pi^0}^2) \approx I(0)$ por [109]. O cálculo das massas dos píons carregados em temperatura finita também foi apresentado recentemente por [113] na regularização de Pauli-Villars alternativa.

Ao aplicarmos o acoplamento $G(eB, T)$ utilizando formalismo zMFIR nas equações para as massas-pólo do pión neutro e o méson sigma, podemos prever, como esperado, o decréscimo da temperatura de Mott à medida que o campo magnético aumenta (assim como a temperatura pseudocrítica). Só obtivemos este resultado através da utilização deste acoplamento. Na referência [110], o autor aplica a mesma ideia, embora ele já tenha obtido este mesmo decréscimo em T_{Mott} com a utilização da constante G a nível de campo médio. É importante enfatizar entretanto, que no trabalho citado [110], a regularização utilizada não separa adequadamente os efeitos do vácuo com

a contribuição do meio magnético¹, diferente do procedimento adotado no nosso trabalho.

¹Em [71] a nível de equação de *gap* os efeitos do meio magnético são separados do vácuo. A regularização do vácuo é feita através do método de Pauli-Villars (PV). Em [110] no cálculo da massa-pólo do méson π^0 não é feita a separação do meio magnético do vácuo, de modo a aplicar o método de PV em todas as contribuições.

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O modelo de Nambu-Jona-Lasínio SU(2) mostrou-se uma boa alternativa para realizar cálculos de QCD não-perturbativa, de modo a termos razoável compreensão de quantidades físicas neste regime. Para tanto, implementá-lo junto de outras condições externas (eB, T, μ) de modo a deixá-lo cada vez mais realista e testá-lo frente aos experimentos e aos cálculos da rede vem se tornando um desafio de grande complexidade.

A aproximação de campo médio e a aproximação de fase aleatória são usadas neste trabalho, e no Capítulo 2 o formalismo básico do modelo associado a essas aproximações, com suas extensões para temperaturas e densidades finitas foram realizadas.

Com o auxílio do método de regularização MFIR, que baseia-se no método de subtração de divergências, mostramos no Capítulo 3 como calcular de forma analítica as contribuições do vácuo e campos magnéticos finitos através da equação de *gap*. Tal método mostra-se mais do que satisfatório, visto que na literatura [77] outros métodos de regularização que evitam utilizar esse tipo de regularização acabam encontrando resultados não-físicos. Aplicamos também o mesmo método para o cálculo da massa-pólo dos mésons do modelo de modo a obter o seu comportamento em temperaturas e densidades finitas.

De modo a incrementar o modelo NJL SU(2) e deixá-lo mais realista, incluímos o acoplamento $G(eB)$, escolhido de modo a reproduzir o condensado quiral obtido por dados de LQCD [54], e calculamos as mesmas quantidades feitas do Capítulo 3. Mostramos que ao incluirmos os efeitos deste novo acoplamento, os resultados do modelo passam a ter uma melhor concordância com dados de LQCD para a massa do méson π^0 em meio magnético [78, 79]. Em geral, ainda devemos citar que esses resultados de LQCD não são únicos e que os dados utilizados nesta tese resultam de uma forma mais moderna de realizar os cálculos na rede.

Neste trabalho, ainda procuramos mostrar os recentes desenvolvimentos a respeito dos cálculos das massas dos mésons neutros do modelo NJL SU(2) magnetizado, estendendo cálculos para condições de temperaturas e densidades finitas, que foi feito no Capítulo 3. Dentre as dificuldades encontradas, pode-se citar o cálculo numérico das mesmas quantidades. Neste sentido implementamos o método de regularização das quantidades divergentes associado ao formalismo de funções zeta de Hurwitz [80], que se mostrou mais apropriado. A implementação de rotinas numéricas também mostrou-se uma tarefa não-trivial, visto que em boa parte dos cálculos necessita-se utilizar o cálculo do valor principal de Cauchy. Para este método, demos o nome

de zMFIR.

Ao analisarmos os resultados referentes a aplicação do zMFIR ao cálculo da massa-pólo dos mésons neutros, percebemos um rico ambiente a ser explorado, na qual, a restauração parcial da simetria quiral associada ao fenômeno de catálise magnética e redução dimensional são os ingredientes fundamentais para se entender como se dá a dissociação dos mésons neutros em uma teoria efetiva quiral em temperatura finita sob efeitos de um campo magnético externo constante. Os resultados aqui obtidos, não só entraram em algum contraste com outros já conhecidos recentemente [110, 111], como estenderam resultados prévios, mesmo quando aplicamos o acoplamento $G(eB, T)$ nas rotinas numéricas [74, 75, 90].

Em geral, o cálculo das massas-pólo dos mésons neutros além de enriquecer o conhecimento a respeito de como as excitações coletivas do modelo se comportam nas mais variadas condições, nos dão também condições para no futuro estender o modelo NJL SU(2), que em geral é estudado na aproximação de campo médio. Em [67, 107], uma abordagem além de campo médio pode ser explorada de modo a incluir o efeito dos mésons no modelo, porém na abordagem escolhida existe a limitação de que não é a massa-pólo de fato que é utilizada nas equações, e sim a massa associada à curvatura do potencial termodinâmico (isso implica entre outras coisas, na aproximação $I(m_\pi^2) \approx I(0)$). Também devemos citar que o trabalho [67] superestima a previsão para a catálise magnética inversa, como foi comentado ao longo do texto. Portanto, uma abordagem completa com as massas calculadas de forma totalmente autoconsistentes podem fornecer no futuro mais ferramentas para estender o modelo NJL SU(2) (ou a sua versão SU(3) [71]), e explorar, por exemplo, a catálise magnética inversa e propriedades de transporte, tão importantes para se observar assinaturas reais dos efeitos dos campos magnéticos na matéria produzida nas colisões de íons pesados.

O interesse pelo cálculo das massas dos mésons sob campos magnéticos é recente, e diversos trabalhos tanto de LQCD [78, 79, 101, 102, 114] quanto de modelos efetivos [74, 75, 107, 109–113, 115–117], tem se direcionado a este tema. O presente trabalho apresenta ferramental que pode ser aplicado também ao cálculo do problema da condensação dos mésons ρ^\pm [49, 50] que já tem sido investigado por diversos trabalhos de LQCD [79, 101, 102]. Na mesma linha, o cálculo da massa dos mésons π^\pm carregados também tem sido de interesse recente na literatura [112, 113]. Propriedades associadas ao decaimento destas partículas em meio magnético, que incluem diversas técnicas aqui presentes são de intenso interesse recente, exemplo disso é a constante de decaimento dos π^\pm [118, 119] e o comprimento de decaimento de mésons ρ^\pm e ρ^0 [120, 121].

Apresentamos também, uma gama de equações que podem ser aplica-

das para densidades finitas e que não foram devidamente exploradas. Esperamos que com o tempo possamos mostrar na literatura os resultados associados a esses desenvolvimentos.

Espera-se portanto que as técnicas e os resultados aqui apresentados incrementem a literatura científica a respeito da influência de campos magnéticos e temperaturas finitas em um meio composto por quarks e mésons no modelo NJL $SU(2)$, e assim contribuir para o refinamento de resultados mais sofisticados de futuros trabalhos.

REFERÊNCIAS

- [1] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory - 2nd Edition*, John Wiley & Sons, 2010.
- [2] M.E. Peskin, D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, 1984.
- [3] Helmut Satz, Int. J. Mod. Phys. E **21**, 1230006 (2012).
- [4] de Oliveira R. A. N. Estudo da energia transversal em colisões Au+Au para energias entre 7.7 e 200 GeV. 130p. Departamento de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.
- [5] B. Schenke, et al., Physics Letters B **702**, 59, (2011).
- [6] P. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz and H. Heiselberg, Phys. Lett.B **500** 232 (2001). [arXiv:hep-ph/0012137 [hep-ph]].
- [7] P. F. Kolb and U. Heinz, arXiv:0305084 [nucl-th].
- [8] K. Adcox, et al., Nucl. Phys. A **757**, 494 (2005).
- [9] A. O. Velasquez, EPJ Web of Conferences **71**, 00101 (2014).
- [10] J. Adams, et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 072304 (2003).
- [11] BRAHMS Collaboration, I. Arsene et al., Nucl. Phys. A **757** 1-27 (2005). [nucl-ex/0410020].
- [12] B. B. Back et al., Nucl. Phys. A **757** 28-101 (2005). [nucl-ex/0410022].
- [13] ALICE Collaboration, B. Abelev et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 072301 (2012). [arXiv:1202.1383].
- [14] P. M. Pizzochero. arXiv:1609.07587[astro-ph.HE].
- [15] Brett McInnes, Nucl.Phys. B **911**,173 (2016). arXiv:1604.03669 [hep-th]
- [16] M. Creutz, *Quarks, gluons and lattices*, Cambridge University Press, 1985.
- [17] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, **345** (1961).
- [18] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 124, **246** (1961).

- [19] A. J. Mizher, M. N. Chernoub and E. S. Fraga, Phys. Rev. D **82** 105016 (2010).
- [20] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, Phys. Rev. D **10**, 2599 (1974).
- [21] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. **158**, 142 (1984).
- [22] K. Splittorff and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **98**, 031601 (2007). [arXiv:hep-lat/0609076].
- [23] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory, Revised Edition*, Institute of Physics Pub., 1993.
- [24] V. V. Skokov, A. Yu. Illarionov, and V. D. Toneev, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 5925 (2009).
- [25] Koichi Hattori, Xu-Guang Huang, arXiv:1609.00747 [nucl-th].
- [26] R. L. S. Farias, K. P. Gomes, G. I. Krein and M. B. Pinto, Phys. Rev. C **90**, 025203 (2014). [arXiv:1404.3931 [hep-ph]].
- [27] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A **803**, 227 (2008).
- [28] D. E. Kharzeev, Prog. Part. Nucl. Phys. 75, **133** (2014). [arXiv:1312.3348].
- [29] W.-T. Deng and X.-G. Huang, Phys. Rev. C **85**, 044907 (2012). arXiv:1201.5108 [nucl-th].
- [30] H.-T. Ding, F. Karsch, and S. Mukherjee, Int. J. Mod. Phys. E **24**, 1530007 (2015). arXiv:1504.05274 [hep-lat].
- [31] K. Tuchin, Adv. High Energy Phys. 2013, 490495 (2013). arXiv:1301.0099 [hep-ph].
- [32] T. Lappi and L. McLerran, Nucl. Phys. A **772**, 200 (2006). [hep-ph/0602189].
- [33] L. McLerran and V. Skokov, Nucl. Phys. A **929**, 184 (2014). arXiv:1305.0774 [hep-ph].
- [34] A. Bzdak and V. Skokov, Phys. Lett. B **710**, 171 (2012).
- [35] J. Błoczyński, X. G. Huang, X. Zhang, and J. Liao, Phys. Lett. B **718**, 1529 (2013).

- [36] J. Błoczyński, X. G. Huang, X. Zhang, and J. Liao, Nucl. Phys. A **939**, 85 (2015).
- [37] Y. Hirono, M. Hongo, and T. Hirano, Phys. Rev. C **90**, 021903(R) (2014).
- [38] V. Voronyuk, V. D. Toneev, S. A. Voloshin, and W. Cassing, Phys. Rev. C **90**, 064903 (2014).
- [39] W. T. Deng and X. G. Huang, Phys. Lett. B **742**, 296 (2015).
arXiv:1411.2733 [nucl-th].
- [40] W. R. Tavares and S. S. Avancini Phys. Rev. D **97**, 094001 (2018).
- [41] G. Cao and X. G. Huang, Phys. Rev. D **93**, 016007 (2016).
- [42] B. C. Tiburzi, Nucl. Phys. A **814**, 74 (2008).
- [43] Rubinstein H. R., Int. J. of Theor. Phys. **38**, 1315 (1999).
- [44] Duncan, Robert C., Nature **497**, 574-576 (2013)
- [45] S. Mereghetti, J. A. Pons, A. and Melatos, Space Sci Rev **191**, 315 (2015).
- [46] I. A. Shovkovy, Lect. Notes Phys. **871**, 13 (2013). [arXiv:1207.5081 [hep-ph]].
- [47] V.A. Miransky, I. A. Shovkovy. Phys.Rept. **576**, 1-209 (2015).
- [48] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy.Nucl.Phys. B **462**, 249-290 (1996).
- [49] M. N. Chernodub, Phys. Rev. D **82**, 085011 (2010). [arXiv:1008.1055 [hep-ph]].
- [50] M. N. Chernodub, Phys. Rev. Lett. **106** 142003 (2011).
[arXiv:1101.0117 [hep-ph]].
- [51] K. Fukushima, D.E. Kharzeev, and H.J. Warringa Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
- [52] K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept. Prog. Phys. **74**, 014001 (2011).
- [53] J. O. Andersen, W. R. Naylor and A. Tranberg, Rev. Mod. Phys. **88**, 025001 (2016).

- [54] G. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. Katz, et al., Phys. Rev. D **86**, 071502 (2012).arXiv:1206.4205 [hep-lat].
- [55] T. Inagaki, D. Kimura and T. Murata, Prog. Theor. Phys. **111**, 371 (2004).
- [56] F. Preis, A. Rebhan and A. Schmitt, JHEP **1103**, 033 (2011). [arXiv:1012.4785 [hep-th]].
- [57] F. Bruckmann, G. Endrődi, T. G. Kovacs, JHEP **1304** 112 (2013). arXiv:1303.3972 [hep-lat].
- [58] F. Bruckmann, G. Endrődi, T. G. Kovacs, arXiv:1311.3178.
- [59] R. L. S. Farias, V. S. Timóteo, S. S. Avancini, M. B. Pinto, and G. Krein, Eur. Phys. J. A **53**, 101 (2017).
- [60] J. Chao, P. Chu, M. Huang, Phys. Rev. D **88**, 054009 (2013). arXiv:1305.1100.
- [61] L. Yu, H. Liu, M. Huang, Phys. Rev. D **90**, 074009 (2014). arXiv:1404.6969.
- [62] R. Gatto, M. Ruggieri, Lect. Notes Phys. **871**, 87-119 (2013). arXiv:1207.3190.
- [63] M. Ferreira, P. Costa, O. Lourenço, T. Frederico, C. Providência, Phys. Rev. D **89**, 116011 (2014). arXiv:1404.5577.
- [64] J. O. Andersen, W. R. Naylor, A. Tranberg, JHEP **1404**, 187 (2014). arXiv:1311.2093.
- [65] E. S. Fraga, L. F. Palhares, Phys. Rev. D **86** 016008 (2012) . arXiv:1201.5881.
- [66] K. Fukushima and Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110**, 03160 (2013).
- [67] S. Mao, Phys. Lett. B **758**, 195 (2016).
- [68] H.Liu, L. Yu and M.Huang, Phys. Rev. D **91**, 014017 (2015).
- [69] D. C. Duarte, P. G. Allen, R. L. S. Farias, P. H. A. Manso, R. O. Ramos, and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **93**, 025017 (2016). arXiv:1510.02756 [hep-ph] .
- [70] M. Buballa, Phys. Rep. **407**, 205 (2005). arXiv:hep-ph/0402234v2.
- [71] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).

- [72] A. Kuznetsov, N. Mikheev, *Electroweak Processes in external electromagnetic field*, Springer, 2004.
- [73] A. V. Kuznetsov and A. A. Okrugin, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 2725 (2011).
- [74] S. S. Avancini, W. R. Tavares and M. B. Pinto, *Phys. Rev. D* **93**, 014010 (2016).
- [75] S. S. Avancini, R. L. Farias, M. B. Pinto, W. R. Tavares, and V. S. Timteo, *Phys. Lett. B* **767**, 247 (2017).
- [76] D. P. Menezes, M. B. Pinto, S. S. Avancini, A. Pérez Martínez and C. Providência, *Phys. Rev. C* **79**, 035807 (2009).
- [77] P. G. Allen, A. G. Grunfeld and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **92**, 074041 (2015).
- [78] G. Bali, B.B. Brandt, G. Endrődi, and B. Gläbke, PoS LATTICE2015. arXiv:1510.03899 [hep-lat].
- [79] G. S. Bali, B. B. Brandt, G. Endrődi and B. Gläbke, *Phys. Rev. D* **97**, 034505 (2018).
- [80] C. O. Dib , O. Espinosa. *Nucl.Phys. B* **612**, 492-518 (2001).
- [81] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer. *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
- [82] Coleman. *S. Aspects of Symmetry*. Cambridge Universisty Press, 1985.
- [83] L. Dolan, R. Jackiw. *Phys. Rev. D* **9**, 332 (1974).
- [84] M. Gell-Mann, R. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968).
- [85] A.L. Fetter, J.D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Dover Books on Physics, 2003.
- [86] Möller, S. Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model.(Corrected and Extended Version: A Guide to the Nambu–Jona-Lasinio Model). 166f. Darmstadt. Germany. 2013.
- [87] M. Azakawa, K. Yazaki. *Nucl. Phys. A.* **504**, 668 (1989).
- [88] E. Butkov. *Mathematical Physics*(Addison Wesley Publishing Company, 1973).
- [89] A. Wergieluk, D. Blaschke, Yu. L. Kalinovsky, A. V. Friesen, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **10** 660 (2013).

- [90] Tavares, W.R. Excitações Mesônicas sob influência de campos magnéticos fortes. 2015. 123f. Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.
- [91] Jonathan Sondow and Eric W. Weisstein, “*Hurwitz Zeta Function.*” From MathWorld-A Wolfram Web.Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/HurwitzZetaFunction.html>.
- [92] G. B. Arfken, H. Weber, *Física Matemática*, Elsevier, 2007.
- [93] S.P. Klevansky and R.H. Lemmer, Phys. Rev. D **39**, 3478 (1989).
- [94] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **66**, 045006 (2002).
- [95] R. L. S. Farias, V. S. Timóteo, S. S. Avancini, M. B. Pinto, and G. Krein, Eur. Phys. J. A **53**, 101 (2017).
- [96] A. Ayala, C. A. Dominguez, L. A. Hernández, M. Loewe, A. Raya, J. C. Rojas, and C. Villavicencio, Phys. Rev. D **94**, 054019 (2016).
- [97] Li Yang and Xin-Jian Wen Phys. Rev. D **96**, 056023 (2017).
- [98] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, S. D. Katz and A. Schaefer, JHEP **1408**, 177 (2014). [arXiv:1406.0269 [hep-lat]].
- [99] J. L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. C **81**, 065205 (2010).
- [100] V.D. Orlovsky and Yu.A. Simonov, Nambu-Goldstone mesons in strong magnetic field, JHEP **1309**, 136 (2013). [arXiv:1306.2232]
- [101] E. V. Luschevskaya et al, Nucl. Phys. B **898** 627 (2015). [arXiv:1411.4284].
- [102] Y.Hidaka, A.Yamamoto, Phys. Rev. D **87**, 094502 (2013).
- [103] S. R. Beane et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 252001 (2014). [arXiv:1409.3556].
- [104] W. Detmold, K. Orginos, A. Parreno, M. J. Savage, B. C. Tiburzi, S. R. Beane, and E. Chang, Phys. Rev. Lett. **116**, 112301 (2016). arXiv:1508.05884 [hep-lat].
- [105] Sidney S. Avancini, Ricardo L. S. Farias, William R. Tavares. arXiv:1812.00945 [hep-ph].

- [106] H. Kohyama, D. Kimura, and T. Inagaki, Nucl. Phys. B **896**, 682 (2015).
- [107] Sh. Fayazbakhsh, S. Sadeghian, N. Sadooghi, Phys.Rev. D **86**, 085042 (2012).
- [108] Garcia, A. F., Transição quirial na matéria de quarks magnetizada. 107f. Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.
- [109] Z. Wang and P. Zhuang, Phys. Rev. D **97**, 034026 (2018).
- [110] S. Mao and Y. Wang, Phys. Rev. D **96**, 034004 (2017).
- [111] R. Zhang, W. j. Fu and Y. x. Liu, Eur. Phys. J. C **76**, 307 (2016).
- [112] M. Coppola, D. Gómez Dumm, and N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **782**, 155 (2018).
- [113] S. Mao, arXiv:1808.10242.
- [114] E. V. Luschevskaya, O. E. Kochetkov, O. V.Larina and O. V. Teryaev, Nucl. Phys. B **884**, 1 (2014).
- [115] Alejandro Ayala, Ricardo L. S. Farias, S. HernandezOrtiz, Luis A. Hernandez, D. Manreza Paret, R. Zamora, arXiv:1809.08312 [hep-ph].
- [116] G. Colucci, E .S. Fraga and A. Sedrakian, Phys. Lett. B **728**, 19 (2014).
- [117] R. M. Aguirre Phys. Rev. D **96**, 096013 (2017).
- [118] G. S. Bali, B. B. Brandt, G. Endrődi and B. Glöbble, Phys. Rev. D **97**, 034505 (2018).
- [119] M. Coppola, D. Gomez Dumm, S. Noguera, N. N. Scoccola, arXiv:1810.08110.
- [120] S. Ghosh, Arghya Mukherjee, M. Mandal, S. Sarkar, and P. Roy, Phys. Rev. D **94**, 094043 (2016).
- [121] A. Bandyopadhyay, S. Mallik, Eur. Phys. J. C **77** ,771 (2017).
- [122] Gamma Function. Wolfram Research. Disponível em : <http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Gamma/06/01/04/01/0002/>. Acesso em 10 de dezembro de 2018.
- [123] E. T Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Universisty Press, 1950.

- [124] I. S. Gradshteyn. and I. M. Ryzhik , *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 2007.
- [125] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.
- [126] N.M.Temme. *Special Functions A introduction to the classical functions of mathematical physics*, John Wiley & Sons , 1996.
- [127] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976.

APÊNDICE A – Definições

Neste texto adotamos o sistema de unidades naturais, seguindo a definição [1] tal que

$$\hbar = c = 1, \quad (\text{A.1})$$

percebendo que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Plank, e c a velocidade da luz. Por análise dimensional teremos neste sistema de unidades

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

A carga elétrica ficará adimensional, $\frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137.04}$.

A massa das partículas é igual a sua massa de repouso, e neste sistema teríamos $mc^2 \rightarrow m$.

A.0.1 A métrica

A métrica aqui utilizada é a de Minkowsky, definida como

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde os índices presentes no texto, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e os índices latinos $a, b, c = 1, 2, 3, \dots$

Assim, o tratamento com quadrivetores fica definido da seguinte maneira

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\mathbf{x}), \quad (\text{A.4})$$

e também

$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{A.5})$$

Adotamos a convenção de Einstein de que índices repetidos indicam uma soma implícita sobre estes índices.

A.0.2 As matrizes de σ , γ e λ

As matrizes de Pauli τ serão definidas como

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

As Matrizes γ de Dirac admitirão a seguinte representação, onde abaixo cada elemento matricial é uma matriz 2×2 .

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \gamma^0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad (\text{A.8})$$

estas matrizes respeitam a seguinte relação de anticomutação

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}, \quad [\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0, \quad (\text{A.9})$$

com a condição de Hermiticidade

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{A.10})$$

Se um produto de matrizes gama contém um número ímpar delas o traço se anula.

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Se temos o produto de quatro matrizes gamma, teremos

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}), \quad (\text{A.12})$$

em particular

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.13})$$

A.1 RELAÇÕES MATEMÁTICAS

A expansão da função Gama

$$\Gamma(-n + \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(n+1) + O(\varepsilon) \right], \quad (\text{A.14})$$

onde ψ é a função digama, definida por

$$\psi_1(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d \ln(z)}{dz}, \quad (\text{A.15})$$

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E, \quad (\text{A.16})$$

com γ_E sendo a constante de Euler-Mascheroni [2]. Portanto, no Capítulo 3 utilizamos as seguintes expressões

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon), \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma(-1 + \varepsilon) = - \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \right]. \quad (\text{A.18})$$

onde usa-se o fato de que $\psi_1(1) = -\gamma_E$.

Outra expansão utilizada é a de que

$$a^{-\varepsilon} = 1 - (\ln a)\varepsilon, \quad (\text{A.19})$$

onde expansão da seguinte forma [122]

$$\Gamma(\varepsilon + 1) = \Gamma(\varepsilon)[1 + \psi(1)\varepsilon], \quad (\text{A.20})$$

A função zeta de Hurwitz representou um papel fundamental nesta tese, e uma das relações mais utilizadas foi a seguinte [123]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta(a, 1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_0(a). \quad (\text{A.21})$$

Com $\gamma_n(x)$ sendo a constante de Stieltjes generalizada, que admite a identidade $\gamma_0(1) = \gamma_E$ [123].

Também foi bastante utilizada nesta tese, a seguinte relação de recorrência

$$\zeta(s, q+1) = \zeta(s, q) - \frac{1}{q^s}, \quad (\text{A.22})$$

assim como a relação entre funções zeta de Hurwitz através de uma derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial y} \zeta(z, y) = -z \zeta(z+1, y). \quad (\text{A.23})$$

A.2 REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO ZETA DE HURWITZ

Neste trabalho, utilizamos diversas representações da função zeta de Hurwitz, aqui apresentaremos algumas que serão utilizadas para demonstrar a equivalência entre a equação de *gap* da forma tradicional eq.(5.1) em $T = 0$ e no formalismo com zMFIR que envolve funções zeta de Hurwitz periódicas e não-periódicas eq.(5.34). A representação a seguir pode ser encontrada em [124]

$$\zeta(s, q) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-xq}}{1 - e^{-x}} dx, \quad \text{Re}(s) > 1, \quad \text{Re}(q) > 0 \quad (\text{A.24})$$

A próxima identidade é uma continuação analítica da função zeta de Hurwitz para valores negativos de s . Esta é entendida como uma integral de caminho, realizada no contorno de Hankel \mathcal{L} no plano complexo percorrendo os valores reais negativos, como mostra a figura 28. Este caminho não pode passar por nenhum dos pontos $s = \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$ [125, 126].

A curva \mathcal{L} divide-se em três, os caminhos C_1 e C_3 abaixo e acima do eixo real negativo e o semi-círculo C_2 positivamente orientado com raio $r < 2\pi$.

$$\zeta(s, q) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} dz \frac{z^{s-1} e^{zq}}{1 - e^z}, \quad \text{Re}(s) \neq 1, \quad \text{Re}(q) > 0, \quad (\text{A.25})$$

onde o caminho de Hankel \mathcal{L} pode ser visto na figura

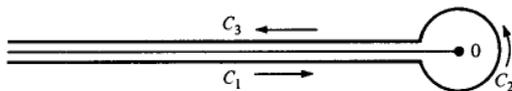


Figura 28 – Caminho de Hankel.

Ressaltamos que é comum ver a seguinte nomenclatura nos livros-texto para a integral eq.(A.25)

$$\int_{\mathcal{L}} dz \frac{z^{s-1} e^{zq}}{1 - e^z} \equiv \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1} e^{zq}}{1 - e^z}. \quad (\text{A.26})$$

Além desses resultados nesta tese, também faremos uso da seguinte identidade

$$\frac{1}{(q+a)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dx x^{s-1} e^{-x(q+a)}, \quad \text{Re}(s) \geq 1, \quad \text{Re}(q) > 0. \quad (\text{A.27})$$

APÊNDICE B – Modos coletivos no formalismo zMFIR

Nesta seção faremos a demonstração das equações (5.58) e (5.59). Para iniciarmos, utilizaremos a representação integral com as somas nos níveis de Landau utilizada na equação (5.42) para o loop de polarização pseudoescalar:

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = -i \sum_{q=u,d} \beta_q \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{E_n(m_{\pi^0}^2 - 4E_n^2)}, \quad (\text{B.1})$$

utilizando a densidade de estados $g_q(E, B)$,

$$g_q(E, B) = \frac{2\beta_q}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\infty} dp_3 \delta(E - E_n), \quad (\text{B.2})$$

obteremos a seguinte expressão para a integral $I(m_{\pi^0}^2, B)$

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = -i \sum_{q=u,d} \int_M^{\infty} \frac{g_q(E, B) dE}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}. \quad (\text{B.3})$$

Como já foi visto anteriormente, a densidade de estados pode ser dividida em duas partes, uma dependente do vácuo e outra do campo magnético, de forma a podermos escrever $g_q(E, B) = g(E) + \bar{g}_q(E, B)$. Obteremos, portanto

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = -i \sum_{q=u,d} \left[\int_M^{\infty} dE g(E) \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)} + \int_M^{\infty} dE \bar{g}_q(E, B) \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)} \right]. \quad (\text{B.4})$$

O primeiro termo do lado direito da última equação é o termo de vácuo do loop de polarização do canal pseudoescalar, equação (5.50). O termo restante depende do campo magnético e definiremos como

$$\begin{aligned} \bar{I}(m_{\pi^0}^2, B) &= -i \sum_{q=u,d} \int_M^{\infty} dE \bar{g}_q(E, B) \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}, \\ &= \sum_{q=u,d} \int_M^{\infty} dE g_q(E, B) f(E), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde definimos $f(E) = \frac{-i}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)}$. Lembrando agora que a densidade de

estados $\bar{g}_q(E, B)$ e a função $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E)$ são dadas por

$$\bar{g}_q(E, B) = E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E),$$

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E) = \left[\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2q_E^{1/2}} \right].$$

Agora faremos o uso da integração por partes para reescrever a integral (B.5)

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = \sum_{q=u,d} \left[\bar{G}_q(E, B) f(E) \Big|_M^\infty - \int_M^\infty dE \bar{G}_q(E, B) \frac{d}{dE} f(E) \right], \quad (\text{B.6})$$

onde definimos

$$\bar{G}_q(E, B) = \int dE \bar{g}_q(E, B),$$

$$\bar{G}_q(E, B) = \int dE \left\{ \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} E \left[\zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right) - 2q_E^{1/2} + \frac{1}{2} q_E^{-1/2} \right] \right\}.$$

Para realizarmos a integral acima e obtermos a densidade de estados $G_q(E, B)$, faremos o uso da relação, do apêndice (A.23). Logo, obteremos

$$\frac{2\beta_q}{E} \frac{\partial \zeta(-\frac{1}{2}, q_E)}{\partial E} = \zeta\left(\frac{1}{2}, q_E\right), \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{2\beta_q}{E} \frac{\partial \zeta(-\frac{1}{2}, \{q_E\})}{\partial E} = \zeta\left(\frac{1}{2}, \{q_E\}\right), \quad (\text{B.8})$$

devemos tomar um cuidado na última derivada, pois $\frac{\partial \{q_E\}}{\partial E} = \frac{\partial (q_E - [q_E])}{\partial E}$. Esta derivada parcial em relação a $q_E = \frac{E^2 - M^2}{2\beta_q}$ nós já conhecemos e para determinar a derivada em $[q_E]$ aplicamos diretamente a definição

$$\frac{\partial [q_E]}{\partial E} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{[q_E + \eta] - [q_E]}{\eta} \rightarrow 0. \quad (\text{B.9})$$

Faremos também o uso das identidades

$$\frac{2\beta_q}{E} \frac{dq_E^{1/2}}{dE} = q_E^{-1/2}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{2\beta_q}{3E} \frac{dq_E^{3/2}}{dE} = q_E^{1/2} \quad (\text{B.11})$$

Reescrevendo agora a densidade de estados $\bar{G}_q(E, B)$ em termos das quantidades derivadas anteriormente

$$\begin{aligned} \bar{G}_q(E, B) &= \int dE \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \left[\frac{2\beta_q}{E} \frac{\partial}{\partial E} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\beta_q}{E} \frac{\partial}{\partial E} \zeta \left(-\frac{1}{2}, q_E \right) - \frac{4\beta_q}{3E} \frac{dq_E^{3/2}}{dE} + \frac{2\beta_q}{2E} \frac{dq_E^{1/2}}{dE} \right], \\ \bar{G}_q(E, B) &= \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \left[\zeta \left(-\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) - \zeta \left(-\frac{1}{2}, q_E \right) - \frac{2}{3} q_E^{3/2} + \frac{1}{2} q_E^{1/2} \right], \\ \bar{G}_q(E, B) &= \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde definimos

$$\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E) = \left[\zeta \left(-\frac{1}{2}, \{q_E\} \right) - \zeta \left(-\frac{1}{2}, q_E \right) - \frac{2}{3} q_E^{3/2} + \frac{1}{2} q_E^{1/2} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Agora podemos retornar na integração por partes feita na expressão (B.6), calculando o primeiro ao termo do lado direito

$$\lim_{E \rightarrow \infty} (\bar{G}_q(E, B)f(E)) - \bar{G}_q(M, B)f(M) \quad (\text{B.14})$$

Ao fazer isso, devemos verificar nesta expressão se a função $f(E)$ é uma função tal que $\lim_{E \rightarrow \infty} f(E) = 0$. No nosso caso, verifica-se

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{1}{E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)} = 0. \quad (\text{B.15})$$

da mesma forma, se $E \rightarrow \infty$, vale a pena utilizarmos a expansão assintótica da função zeta de Hurwitz [80]

$$\zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) = -\frac{2}{3}q_E^{2/3} + \frac{1}{2}q_E^{1/2} + \mathcal{O}(q_E^{-1/2}), \quad (\text{B.16})$$

com o uso desta expansão, obteremos

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \bar{G}_q(E, B) = \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \left[\zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) + \frac{2}{3}q_E^{3/2} - \frac{1}{2}q_E^{1/2} - \mathcal{O}(q_E^{-1/2}) \right. \\ \left. - \frac{2}{3}q_E^{3/2} + \frac{1}{2}q_E^{1/2} \right],$$

e, portanto,

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \bar{G}_q(E, B) = \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \left[\zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) \right]. \quad (\text{B.17})$$

Como visto na figura 21, a função zeta de Hurwitz $\zeta(-\frac{1}{2}, \{q_E\})$ é periódica e limitada.

Se $E = M$, teremos $q_E = 0$ e, portanto, podemos deduzir que

$$\bar{G}_q(M, B) = \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \left[\zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) - \zeta\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \right] = 0. \quad (\text{B.18})$$

Portanto, pode-se concluir que

$$f(E)\bar{G}_q(E, B) \Big|_M^\infty = 0 \quad (\text{B.19})$$

para funções $f(M)$ bem comportadas e com o limite $f(E) \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow 0$.

O resultado que obtemos é para a integral $I(m_{\pi^0}^2, B)$ é

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = - \int_M^\infty dE \bar{G}_q(E, B) \frac{df(E)}{dE}. \quad (\text{B.20})$$

A derivada de $f(E)$ é elementar, e é dada por

$$\begin{aligned}\frac{df(E)}{dE} &= -i \frac{d}{dE} [E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)]^{-1}, \\ \frac{df(E)}{dE} &= i [E(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)^{-2} 4(m_{\pi^0}^2 - 12E^2)], \\ \frac{df(E)}{dE} &= i \frac{(m_{\pi^0}^2 - 12E^2)}{E^2(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)^2}.\end{aligned}\quad (\text{B.21})$$

Portanto obteremos como resultado final

$$I(m_{\pi^0}^2, B) = i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \int_M^\infty dE \frac{\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E) [(m_{\pi^0}^2 - 12E^2)]}{E^2(m_{\pi^0}^2 - 4E^2)^2}, \quad (\text{B.22})$$

fazendo o uso da mudança de variáveis $q_E = \frac{E^2 - M^2}{2\beta_q}$ e portanto $\beta_q dq_E = E dE$, obtemos o conjunto de equações (5.58) e (5.59), onde separamos $I(m_{\pi^0}^2, B)$ em uma parte periódica e uma parte não-periódica

$$\begin{aligned}I(m_{\pi^0}^2, B) &= I(m_{\pi^0}^2, B)^{per} + I(m_{\pi^0}^2, B)^{Nper}, \\ I(m_{\pi^0}^2, B)^{per} &= i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{5/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta(-\frac{1}{2}, \{q_E\}) [(m_{\pi^0}^2 - 12(M^2 + 2\beta_q q_E))]}{(M^2 + 2\beta_q q_E)^{3/2} (m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E))^2}, \\ I(m_{\pi^0}^2, B)^{Nper} &= i \sum_{q=u,d} \frac{(2\beta_q)^{5/2}}{4\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{(-\zeta(-\frac{1}{2}, q_E) - \frac{2}{3} q_E^{3/2} + \frac{1}{2} q_E^{1/2})}{(M^2 + 2\beta_q q_E)^{3/2} (m_{\pi^0}^2 - 4(M^2 + 2\beta_q q_E))^2}, \\ &\quad \times [(m_{\pi^0}^2 - 12(M^2 + 2\beta_q q_E))].\end{aligned}\quad (\text{B.23})$$

APÊNDICE C – Equivalência entre zMFIR e MFIR

Demonstraremos aqui a equivalência entre os dois formalismos apresentados nesta tese para a equação de *gap*.

Do formalismo zMFIR apresentado no Capítulo 5, sabemos a partir da equação (5.29)

$$I_G(B) = N_c \sum_{q=u,d} \int_M^\infty dE \left[E \frac{(2\beta_q)^{1/2}}{2\pi^2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(q_E) \right] \frac{1}{E}, \quad (\text{C.1})$$

faremos uso da integração por partes como no apêndice B

$$I_G(B) = N_c \sum_{q=u,d} \left[\bar{G}_q(E, B) f(E) \Big|_M^\infty - \int_M^\infty dE \bar{G}_q(E, B) \frac{d}{dE} f(E) \right], \quad (\text{C.2})$$

como $f(E) = \frac{1}{E}$ é uma função bem comportada tal que $f(E) \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow \infty$ como discutido no apêndice B, o primeiro termo do lado direito da equação anterior se anula e, portanto, obtemos

$$I_G(B) = N_c \sum_{q=u,d} \left[- \int_M^\infty dE \bar{G}_q(E, B) \frac{d}{dE} f(E) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Agora, tomando a derivada de $f(E)$, teremos $\frac{dE^{-1}}{dE} = -\frac{1}{E^2}$. Já calculamos $\bar{G}_q(E, B)$ na expressão (B.12). Usando estes resultados, obtemos

$$I_G(B) = N_c \sum_{q=u,d} \left[\int_M^\infty dE \frac{(2\beta_q)^{3/2}}{2\pi^2} \frac{\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E)}{E^2} \right]. \quad (\text{C.4})$$

Se fizermos a mudança de variáveis $q_E = \frac{E^2 - M^2}{2\beta_q} \Rightarrow \beta_q dq_E = E dE$, obteremos

$$I_G(B) = N_c \sum_{q=u,d} \frac{2\beta_q}{4\pi^2} \int_0^\infty dq_E \frac{\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E)}{(x_q + q_E)^{3/2}}, \quad (\text{C.5})$$

onde $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}}(q_E)$ é definido em (B.13).

Podemos então separar $I_G(B)$ em uma integral periódica e outra não-periódica da seguinte maneira

$$I_G(B) = I_G(B)^{per} + I_G(B)^{Nper}, \quad (C.6)$$

onde, definimos cada um dos termos

$$I_G(B)^{per} = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)}{(x_q + q_E)^{3/2}}, \quad (C.7)$$

$$I_G(B)^{Nper} = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\left[-\zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) - \frac{2}{3}q_E^{3/2} + \frac{1}{2}q_E^{1/2}\right]}{(x_q + q_E)^{3/2}}. \quad (C.8)$$

Podemos, entretanto, reagrupar $I_G(B)^{osc}$ e $I_G(B)^{Nosc}$ em (C.6)

$$I_G(B) = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \left\{ \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right)}{(x_q + q_E)^{3/2}} - \int_0^\infty dq_E \frac{\zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right)}{(x_q + q_E)^{3/2}} \right\},$$

$$- \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{\left[\frac{2}{3}q_E^{3/2} - \frac{1}{2}q_E^{1/2}\right]}{(x_q + q_E)^{3/2}},$$

na primeira integral da última expressão, usaremos a seguinte propriedade cíclica

$$\int_0^\infty dx f(x) = \int_0^1 dx f(x) + \int_1^2 dx f(x)$$

$$+ \int_2^3 dx f(x) + \dots = \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 dx f(x+k), \quad (C.9)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária, e uma mudança de variáveis foi feita de modo a mudar os limites de integração de 0 até 1. Então poderemos identificar a função zeta de Hurwitz se identificarmos

$$\int_0^\infty dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) \frac{1}{(x_q + q_E)^{3/2}} =$$

$$\int_0^1 dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x_q + q_E + k)^{3/2}}. \quad (C.10)$$

e portanto, obteremos

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, \{q_E\}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x_q + q_E + k)^{3/2}} \\
&= \int_0^1 dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) \zeta\left(\frac{3}{2}, x_q + q_E\right). \quad (\text{C.11})
\end{aligned}$$

Usando o último resultado, podemos reescrever $I_G(B)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
I_G(B) &= \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \left[\int_0^1 dq_E \zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right) \zeta\left(\frac{3}{2}, x_q + q_E\right) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} dq_E \frac{\zeta\left(-\frac{1}{2}, q_E\right)}{(x_q + q_E)^{3/2}} \right] - \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^{\infty} dq_E \frac{[\frac{2}{3}q_E^{3/2} - \frac{1}{2}q_E^{1/2}]}{(x_q + q_E)^{3/2}}. \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$

que como comentado no apêndice B, esta representação é equivalente a anterior, mas algumas vezes pode ser mais estável numericamente e para os nossos propósitos será mais conveniente para os cálculos que serão demonstrados a seguir.

C.1 INTEGRAIS ENVOLVENDO AS FUNÇÕES ZETA DE HURWITZ

Agora podemos fazer a demonstração da equivalência entre o formalismo zMFIR com zMFIR. Para tanto, resolveremos a primeira linha da expressão anterior de uma maneira mais geral ¹

$$\begin{aligned}
I(x, k, s) &= \int_0^1 dq \zeta(s, q) \zeta(k, q + x) \\
&\quad - \int_0^{\infty} dq \frac{\zeta(s, q)}{(x + q)^k}, \quad \text{Re } s \neq 1, \text{Re } k \geq 1, \text{Re } x > 0, \quad (\text{C.13})
\end{aligned}$$

ao final, tomaremos o limite em que $s = -\frac{1}{2}$ e $k = \frac{3}{2}$, recobrando as integrais associadas à eq.(5.34) e assim alcançaremos a equação de *gap*, dada pela eq.(5.1).

¹No presente apêndice, com o intuito de fazer uma demonstração mais geral, adotaremos a notação nas integrais das quantidades $x_q \rightarrow x$ e $q_E \rightarrow q$. Entretanto, devemos perceber que ao tratar as integrais que foram construídas ao longo da tese, de modo a fazer a equivalência entre os dois formalismos, utilizaremos novamente a notação q_E e x_q . O coeficiente $\frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{u,d}$ também não aparecerá para não carregar a notação.

Aplicando a eq.(A.25) para $\zeta(s, q)$, a eq.(A.24) para $\zeta(k, q+x)$ e a eq.(A.27) para $(x+q)^{-k}$ obteremos para a expressão eq.(C.13)

$$I(x, k, s) = \left[\int_0^1 dq \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1} e^{zq}}{1-e^z} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\Gamma(k)} \frac{y^{k-1} e^{-y(q+x)}}{1-e^{-y}} \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} dq \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1} e^{zq}}{1-e^z} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y(q+x)} \right],$$

vamos rearranjar a expressão acima de modo a integrarmos primeiro na variável q

$$I(x, k, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i \Gamma(k)} \int_0^{\infty} dy y^{k-1} e^{-yx} \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1}}{1-e^z} \times \\ \left[\frac{1}{1-e^{-y}} \int_0^1 dq e^{-q(y-z)} - \int_0^{\infty} dq e^{-q(y-z)} \right], \quad (C.14)$$

a integração do termo entre colchetes é elementar, e obteremos como resultado

$$\left[\frac{1}{1-e^{-y}} \int_0^1 dq e^{-q(y-z)} - \int_0^{\infty} dq e^{-q(y-z)} \right] = \frac{1}{1-e^{-y}} \frac{1-e^{-y}e^z}{y-z} - \frac{1}{y-z}, \\ = \frac{1}{y-z} \left[\frac{1-e^{-y}e^z}{1-e^{-y}} - 1 \right], \\ = \frac{1}{y-z} \left[\frac{1-e^{-y}e^z}{1-e^{-y}} - \frac{1-e^{-y}}{1-e^{-y}} \right], \\ = \frac{1}{y-z} \left[\frac{\cancel{1} - e^{-y}e^z - \cancel{1} + e^{-y}}{1-e^{-y}} \right], \\ = \frac{1}{y-z} \left[\frac{-e^{-y}(-e^z+1)}{1-e^{-y}} \right], \\ = \frac{1}{y-z} \left[\frac{1-e^z}{e^y-1} \right]. \quad (C.15)$$

Retornando a equação (C.14), obteremos

$$\begin{aligned}
 I(x, k, s) &= \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i \Gamma(k)} \int_0^\infty dy y^{k-1} e^{-yx} \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} \frac{1}{y-z} \left[\frac{1-e^{-z}}{e^y-1} \right] \\
 I(x, k, s) &= \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i \Gamma(k)} \int_0^\infty dy \frac{y^{k-1} e^{-yx}}{e^y-1} \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} y^{-1} \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

A integral de caminho deve ser realizada no cotorno de Hankel da figura 28. Portanto devemos realizar o cálculo sobre a curva $\mathcal{L} = C_1 + C_2 + C_3$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} &= \int_{C_1} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} + \int_{C_2} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} + \int_{C_3} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}}, \\
 \int_{-\infty}^{0+} dz \frac{z^{s-1}}{1-\frac{z}{y}} &= - \int_0^\infty dx e^{-i\pi} \frac{(e^{-i\pi} x)^{s-1}}{(1-\frac{e^{-i\pi} x}{y})} + \int_0^\infty dx e^{i\pi} \frac{(e^{i\pi} x)^{s-1}}{(1-\frac{e^{i\pi} x}{y})},
 \end{aligned}$$

na curva C_1 usamos a parametrização $z = xe^{-i\pi} \rightarrow dz = dx e^{-i\pi}$ e na curva C_3 usamos $z = xe^{i\pi} \rightarrow dz = dx e^{i\pi}$. Em ambas as curvas C_1 e C_3 temos que $0 < x < \infty$. O caminho C_2 é o semi-círculo em torno da origem. Como estamos utilizando a extensão analítica da função zeta de Hurwitz o cálculo no caminho C_2 não precisa ser realizado². A contribuição dos dois caminhos C_1 e C_3 será dada por

$$- \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{(1+\frac{x}{y})} e^{-i\pi s} + \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{(1+\frac{x}{y})} e^{i\pi s} = 2i \sin(\pi s) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{(1+\frac{x}{y})},$$

ao fazermos a mudança $\frac{x}{y} = \mu \rightarrow \frac{dx}{y} = d\mu$, teremos

$$\begin{aligned}
 2i \sin(\pi s) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{(1+\frac{x}{y})} &= 2i \sin(\pi s) y^s \int_0^\infty d\mu \frac{\mu^{s-1}}{(1+\mu)}, \\
 2i \sin(\pi s) \int_0^\infty dx \frac{x^{s-1}}{(1+\frac{x}{y})} &= 2i \sin(\pi s) y^s B(s, -s+1). \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

onde $B(a, b)$ é uma representação de função Beta [125]

²Em geral, a função $\zeta(s, a)$ é definida com s sendo um número complexo, $s = \sigma + i\tau$ para $\sigma > 1$. Como é demonstrado em [127] para o caso $\sigma > 1$, o caminho de Hankel no semi-círculo C_2 é nulo. A continuação analítica para $\sigma \leq 1$ utiliza a demonstração prévia, para encontrar inclusive a expressão (A.25).

$$B(a, b) \equiv \int_0^\infty \frac{d\mu \mu^{a-1}}{(1+\mu)^{a+b}}. \quad (\text{C.18})$$

A integral $I(x, k, s)$ pode então ser reescrita

$$I(x, k, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi\Gamma(k)} \int_0^\infty dy \frac{y^{k-1} e^{-yx}}{e^y - 1} y^{-1+s} B(s, -s+1) \sin(\pi s). \quad (\text{C.19})$$

Faremos o uso de outra representação da função Beta [92]

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

onde vale a continuação analítica para valores negativos do argumento da função Gama

$$I(x, k, s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi\Gamma(k)} \int_0^\infty dy \frac{y^{k+s-2} e^{-yx}}{e^y - 1} \frac{\Gamma(s)\Gamma(-s+1)}{\Gamma(1)} \sin(\pi s). \quad (\text{C.20})$$

Agora vamos tomar $s = -\frac{1}{2}$ e $k = \frac{3}{2}$. Com isso, teremos que aplicar os resultados $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $\Gamma(1) = 1$. Obteremos assim

$$I(x, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy \frac{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2} e^{-yx}}{e^y - 1} \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} \sin(-\frac{\pi}{2}), \quad (\text{C.21})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{e^{-yx} y^{-1}}{e^y - 1} [\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}], \quad (\text{C.22})$$

$$= \int_0^\infty dy \frac{e^{-yx} y^{-1}}{e^y - 1}. \quad (\text{C.23})$$

tomaremos por simplicidade agora $I(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \equiv I(x)$. Esta última quantidade é divergente, e podemos eliminar as divergências associadas ao integrando percebendo que esta integral tem comportamento singular próximo da origem. Se fizermos uma expansão em série de Taylor da seguinte função

$$\frac{1}{e^y - 1} \approx \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(y), \quad y \ll 1 \quad (\text{C.24})$$

podemos somar e subtrair o lado direito da expressão acima em eq.(C.23), de

modo a obtermos

$$I(x) = \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y} \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) + \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y^2} - \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{2y},$$

$$I(x) = I(x)_{reg} + I(x)_{div}. \quad (\text{C.25})$$

onde na última expressão, separamos a quantidade regularizada da quantidade divergente. As quantidades são definidas por

$$I(x)_{reg} = \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y} \left(\frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{C.26})$$

$$I(x)_{div} = \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y^2} - \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{2y}. \quad (\text{C.27})$$

Agora podemos reescrever a quantidade $I(x)_{reg}$ em termos de uma função $\coth(y)$ se lembrarmos que

$$\coth\left(\frac{y}{2}\right) = 1 + \frac{2}{e^y - 1}, \quad (\text{C.28})$$

$$\rightarrow \frac{1}{e^y - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth\left(\frac{y}{2}\right),$$

aplicando este resultado em eq.(C.26)

$$I(x)_{reg} = \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y} \left(-\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \coth\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{y} + \cancel{\frac{1}{2}} \right), \quad (\text{C.29})$$

$$= \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y} \left(\frac{1}{2} \coth\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{y} \right), \quad (\text{C.30})$$

$$= \int_0^{\infty} dy \frac{e^{-yx}}{y^2} \left(\frac{y}{2} \coth\left(\frac{y}{2}\right) - 1 \right). \quad (\text{C.31})$$

Agora precisamos comparar este resultado com os que já temos de conhecido na tese. Para tanto, precisaremos indicar que $x \rightarrow x_q = \frac{M^2}{2\beta_q}$ em eq.(C.31). Do formalismo zMFIR, sabemos que

Agora podemos incluir o resultado obtido neste apêndice para as integrais envolvendo as funções zeta de Hurwitz. Ao aplicarmos na equação (C.12) o resultado (C.25), obteremos

$$I_G(B) = \frac{N_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \left[\int_0^\infty dy \frac{e^{-yx_q}}{y^2} \left(\frac{y}{2} \coth\left(\frac{y}{2}\right) - 1 \right) + I(x)_{div} \right],$$

$$- \frac{N_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} 2\beta_q \int_0^\infty dq_E \frac{[\frac{2}{3}q_E^{3/2} - \frac{1}{2}q_E^{1/2}]}{(x_q + q_E)^{3/2}}. \quad (C.32)$$

Nesta última expressão, $I(x)_{div}$ cancela os dois últimos termos(vamos mostrar isso!), mas vamos antecipar o resultado final, que em linhas gerais já está esboçado na equação acima. Basta percebermos que a mudança de variáveis $\frac{y}{2\beta_q} = \mu \rightarrow \frac{y}{2\beta_q} = d\mu$, fará com que eq.(C.32) fique

$$I_G(B) = \frac{N_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[\int_0^\infty d\mu \frac{e^{-\mu M^2}}{\mu^2} \left(\mu \coth(\beta_q \mu) - \frac{1}{\beta_q} \right) \right]. \quad (C.33)$$

Se agora reescrevermos a equação de *gap* (5.1) em $T = 0$ da seguinte maneira

$$\frac{M - m_0}{2G} = MI_G(0) + MI_G(B), \quad (C.34)$$

recobrarremos o resultado obtido no Capítulo 3 para a integral I da eq.(3.36) quando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$MI_G(B) \equiv I = \frac{MN_c}{(2\pi)^2} \sum_{q=u,d} \beta_q \left[\int_0^\infty d\mu \frac{e^{-\mu M^2}}{\mu^2} \left(\mu \coth(\beta_q \mu) - \frac{1}{\beta_q} \right) \right] \quad (C.35)$$

E portanto, fica demonstrada a equivalência da equação de *gap* entre os dois formalismos MFIR e zMFIR.

C.2 PARTE DIVERGENTE DE $I(X)$

Os termos remanescentes da eq.(C.32) que aparecem devido a contribuição não-periódica $I_G^{Nper}(B)$ vamos definir por

$$\bar{I}(x_q) = -\frac{2}{3} \int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{3}{2}} (x_q + q_E)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{1}{2}} (x_q + q_E)^{-\frac{3}{2}}, \quad (C.36)$$

faremos o uso da identidade (A.27) nas duas integrais da expressão anterior de modo a obtermos

$$\begin{aligned}
\bar{I}(x_q) &= -\frac{2}{3} \int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y(q_E+x_q)} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y(q_E+x_q)} \right), \\
&= -\frac{2}{3\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-yx_q} \left(\int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{3}{2}} e^{-yq_E} \right) \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}} e^{-yx_q} \left(\int_0^\infty dq_E q_E^{\frac{1}{2}} e^{-yq_E} \right),
\end{aligned}$$

fazendo o uso de uma simples mudança de variáveis $yq_E = \mu \rightarrow dq_E = \frac{d\mu}{y}$, teremos

$$\begin{aligned}
\bar{I}(x_q) &= -\frac{2}{3\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-yx_q} \left(\int_0^\infty d\mu y^{-\frac{5}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} e^{-\mu} \right) \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-yx_q} \left(\int_0^\infty d\mu y^{-\frac{3}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} e^{-\mu} \right), \\
&= -\frac{2}{3\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{-4/2} e^{-yx_q} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{-2/2} e^{-yx_q} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Usa-se agora a identidade $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$, e obteremos como resultado

$$\begin{aligned}
\bar{I}(x_q) &= -\frac{2}{3\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty dy y^{-2} e^{-yx_q} \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{-1} e^{-yx_q}, \\
&= -\int_0^\infty dy y^{-2} e^{-yx_q} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{-1} e^{-yx_q}, \\
&= -I(x_q)_{div},
\end{aligned}$$

portanto a quantidade que definimos $\bar{I}(x_q)$, presente na integral não-periódica da eq.(C.32) cancela a contribuição $I(x_q)_{div}$.

APÊNDICE D – Cálculo do valor principal no MFIR

Em temperaturas finitas tais que $T \geq T_{Mott}$, o cálculo da massa dos mésons passa a ser interpretado através do cálculo do valor principal de Cauchy, como foi explorado no Capítulo 2. No formalismo zMFIR isso é feito diretamente nas representações integrais de forma numérica. No MFIR, podemos calcular analiticamente o cálculo de valor principal de algumas quantidades que serão mostradas nesta seção. Entretanto, o cálculo de valor principal é feito numericamente na parte térmica da integral $I(m_{\pi^0}^2, B, T, \mu)$, que é dada pela equação (5.46) e na integral da função digama presente na equação (5.45).

Para começar, na região em que $m_{\pi^0} > 2M$, podemos observar que a função $\bar{M}^2 = \frac{M^2}{m_{\pi^0}^2} - x(1-x)$ possui as raízes

$$x_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m_{\pi^0}^2}},$$

$$x_- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m_{\pi^0}^2}}.$$

estas raízes só aparecem quando $T > T_{Mott}$. Assim, as equações (5.44) e (5.45) passam a apresentar um comportamento singular e nestas regiões devemos fazer o cálculo do valor principal de Cauchy.

Vamos começar integrando o termo

$$\int_0^1 dx \frac{1}{2\bar{x}_q} = \beta_q \int_0^1 \frac{dx}{M^2 - x(1-x)m_{\pi^0}^2},$$

$$= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2} \int_0^1 \frac{dx}{a^2 - x + x^2}, \quad a^2 = \frac{M^2}{m_{\pi^0}^2}. \quad (\text{D.1})$$

que está presente na equação (5.45). Agora, com auxílio das raízes x_+ e x_- , fatoramos o polinômio de segundo grau do denominador. Em seguida fazemos o uso das frações parciais

$$\int_0^1 dx \frac{1}{2\bar{x}_q} = \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2} \int_0^1 \frac{dx}{(x-x_-)(x-x_+)},$$

$$= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x-x_+} - \frac{1}{x-x_-} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Agora as integrais são resolvidas com o método de substituição. Na

primeira delas, $x - x_- = u \Rightarrow dx = du$ e analogamente na segunda, $x - x_- = u \Rightarrow dx = du$ de modo que ficaremos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{1}{2\bar{x}_q} &= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} \left[\int_{-x_+}^{1-x_+} du \frac{1}{u} - \int_{-x_-}^{1-x_-} du \frac{1}{u} \right]. \\ &= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-x_+}^{0-\varepsilon} dx \frac{1}{u} + \int_{0+\varepsilon}^{1-x_+} dx \frac{1}{u} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-x_-}^{0-\varepsilon} du \frac{1}{u} - \int_{0+\varepsilon}^{1-x_-} du \frac{1}{u} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

na equação anterior aplicamos diretamente a definição de valor principal. Ao realizar as integrais teremos como resultado

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{1}{2\bar{x}_q} &= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(-\varepsilon) - \ln(-x_+) + \ln(1-x_+) - \ln(\varepsilon) \\ &\quad - \ln(-\varepsilon) + \ln(-x_-) - \ln(1-x_-) + \ln(\varepsilon)], \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

não é difícil de ver $1 - x_+ = x_-$ e que $1 - x_- = x_+$. Utilizando esses resultados, obteremos

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{1}{2\bar{x}_q} &= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} [-\ln(-x_+) + \ln(x_-) + \ln(-x_-) - \ln(x_+)], \\ &= \frac{\beta_q}{m_{\pi^0}^2(x_+ - x_-)} \ln \left(\frac{x_-}{x_+} \right)^2, \\ &= \frac{2\beta_q}{m_{\pi^0}^2 \left(\sqrt{1 - \frac{4M^2}{m_{\pi^0}^2}} \right)} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m_{\pi^0}^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{m_{\pi^0}^2}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

A outra integral que vamos resolver é dada por

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \ln(\bar{x}_q) &= \int_0^1 dx \ln \left(\frac{M^2 - x(1-x)m_{\pi^0}^2}{2\beta_q} \right), \\
&= \int_0^1 dx \ln(a^2 - x + x^2) \left(\frac{m_{\pi^0}^2}{2\beta_q} \right), \\
&= \int_0^1 dx \ln(a^2 - x + x^2) + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m_{\pi^0}^2}{2\beta_q} \right), \\
&= \int_0^1 dx \ln(a^2 - x + x^2) + \ln \left(\frac{m_{\pi^0}^2}{2\beta_q} \right), \tag{D.6}
\end{aligned}$$

como feito anteriormente, vamos fatorar novamente o polinômio de segundo grau e resolver o valor principal da integral em eq.(D.6)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \ln(a^2 - x + x^2) &= \int_0^1 dx \ln[(x - x_-)(x - x_+)], \\
&= \int_0^1 dx \ln(x - x_-) + \int_0^1 dx \ln(x - x_+), \\
&= I_+ + I_-, \tag{D.7}
\end{aligned}$$

onde separamos as duas contribuições

$$\begin{aligned}
I_+ &= \int_0^1 dx \ln(x - x_+), \\
I_- &= \int_0^1 dx \ln(x - x_-),
\end{aligned}$$

essa separação será útil, visto que o resultado delas é o mesmo, fazendo apenas a troca $x_- \rightarrow x_+$. Vamos resolver primeiramente I_+ , fazendo a substituição $x - x_+ = u \Rightarrow dx = du$, e então teremos

$$\begin{aligned}
I_+ &= \int_0^1 dx \ln(x - x_+), \\
&= \int_{-x_+}^{1-x_+} du \ln u, \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-x_+}^{0-\varepsilon} du \ln u + \int_{0+\varepsilon}^{1-x_+} du \ln u \right), \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon - 2\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon i\pi + i\pi x_+ - x_+ - x_- + x_+ \ln x_+ + x_- \ln x_-),
\end{aligned}$$

a partir deste resultado, podemos inferir diretamente I_-

$$I_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon i\pi + i\pi x_- - x_- - x_+ + x_- \ln x_- + x_+ \ln x_+).$$

Portanto, podemos agora calcular quanto vale $I_- + I_+$

$$I_- + I_+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [4\varepsilon - 4\varepsilon \ln \varepsilon - 2\varepsilon i\pi + i\pi(x_+ + x_-) - 2(x_+ + x_-) + 2x_+ \ln x_+ + 2x_- \ln x_-].$$

O limite $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}}$, que pode então ser calculado pela regra de L'Hospital e portanto, obtemos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} \rightarrow 0$.

Não é difícil de ver também que $x_- + x_+ = 1$

$$\begin{aligned}
I_- + I_+ &= [i\pi(x_+ + x_-) - 2(x_+ + x_-) + 2x_+ \ln x_+ + 2x_- \ln x_-], \\
&= [i\pi - 2 + 2x_+ \ln x_+ + 2x_- \ln x_-], \\
&= \left[i\pi - 2 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4a^2} \right) \ln x_+ + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4a^2} \right) \ln x_- \right], \\
&= \left[i\pi - 2 + (1 + \sqrt{1-4a^2}) \ln x_+ + (1 - \sqrt{1-4a^2}) \ln x_- \right], \\
&= \left[i\pi - 2 + \ln(x_+ x_-) + \sqrt{1-4a^2} \ln x_+ - \sqrt{1-4a^2} \ln x_- \right], \\
&= \left[i\pi - 2 + \ln \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} (\sqrt{1-4a^2})^2 \right) + \sqrt{1-4a^2} \ln \left(\frac{x_+}{x_-} \right) \right], \\
&= \left[i\pi - 2 + \ln(a^2) + \sqrt{1-4a^2} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-4a^2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4a^2}} \right) \right]. \quad (D.8)
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos como resultado

$$\operatorname{Re}(I_- + I_+) = \left[-2 + \ln(a^2) + \sqrt{1 - 4a^2} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4a^2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4a^2}} \right) \right]. \quad (\text{D.9})$$