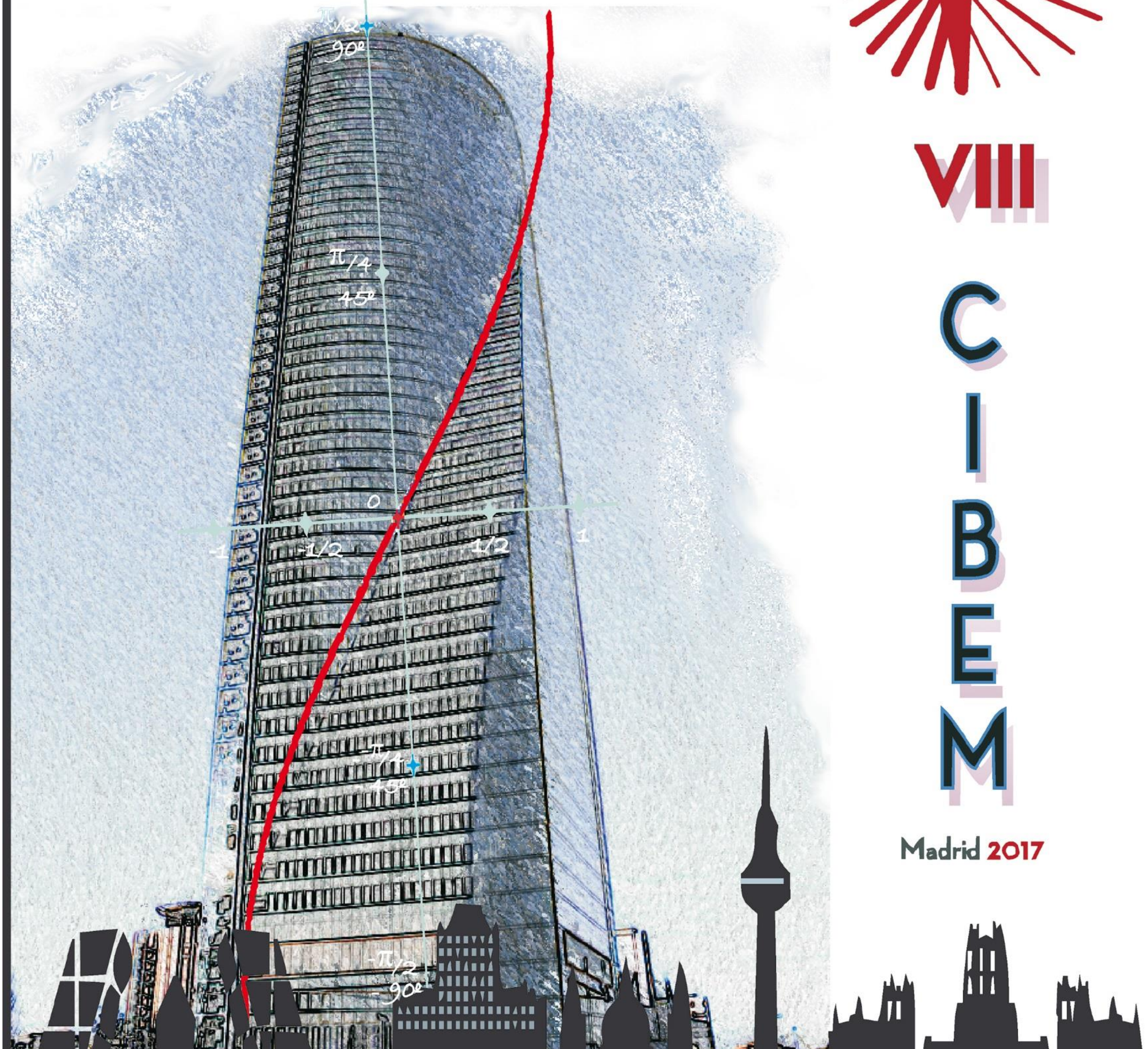
CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del 10 al 14 de Julio



VIII CIBEM

Madrid 2017

LIBRO DE ACTAS

" Miramos con ilusión

hacia el futuro

de la educación matemática "

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LIBRO DE ACTAS

Editado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
C/ H. Carvajal, 5. 23740 Andújar (Jaén) España

www.fespm.es

ISBN: 978-84-945722-3-4

VIII CIBEM

Madrid 2017

CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COMUNICACIONES BREVES 801-900

CB-802

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO Y NOCIÓN DE EQUIPARTICIÓN EN ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA

Luis Alexander Conde Solano
lconde@udem.edu.co
Universidad de Medellín, Colombia

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Básica Primaria
Palabras clave: equipartición, representaciones, fracciones, música

Resumen

Desde el contexto interdisciplinario, se considera que al incluir en el aula algunos vínculos matemáticos-musicales pueden favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Estos vínculos aportan representaciones por medio de las cuales los estudiantes logran construir significados alrededor de la noción de equipartición. Las experiencias que aquí se presentan hacen parte de una investigación de corte cualitativa que consiste en proveer a los estudiantes de experiencias en el estudio del campo rítmico para ofrecer un acercamiento a la noción del tiempo desde dos perspectivas de forma simultánea: la medida del tiempo físico y la medida del tiempo musical estructurado por fracciones. Estas ideas de medición de tiempo a través de fracciones promueven en los estudiantes procesos cognitivos para la construcción de nociones de unidad, equipartición, operaciones, equivalencias y relaciones de orden. Uno de los resultados que se exhiben en esta comunicación, atañe en que las formas de percibir –visual, auditiva y gestual– el objeto (fenómeno acústico) proporcionan a los estudiantes herramientas de comprobación y argumentación para dar cuenta, por sus propios medios, sobre la construcción y el significado de la noción de equipartición.

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones representan una temática de gran riqueza y complejidad. Es frecuente que los estudiantes extienden propiedades de los números naturales a las fracciones, como la idea de que la “multiplicación hace más grande una cantidad” o que la equipartición es interpretada como una partición arbitraria. Para Kieren (1983) la acción de equipartir, es la base fundamental para la creación y aplicación del conocimiento de las fracciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

A pesar de que en el currículo de matemáticas en México (SEP, 2004) se incluye el estudio de las fracciones en los primeros años, se observa en diversos reportes de investigación que los estudiantes al término de la primaria e incluso en la secundaría muestran dificultades en el reconocimiento de la unidad, equipartición, equivalencias y operaciones entre fracciones. Tal vez los métodos tradicionales usados para la enseñanza de éste tema, como el uso del pastel o la pizza, puede estar comprometiendo un aprendizaje significativo de la fracción. Según Naik y Subramaniam (2008) si se opera con números enteros que consistiría en sólo contar el número de partes sombreadas, y el número total de partes, como suele usarse en el modelo del pastel, los niños pasan por alto el tamaño de las partes. En cambio, en contextos de medición, el tamaño de la unidad es indispensable. Desde la perspectiva aquí propuesta, si se provee a los estudiantes de experiencias como el estudio del campo rítmico musical se les está ofreciendo un acercamiento a la noción del tiempo desde dos perspectivas de forma simultánea, la medida del tiempo físico y la medida del tiempo musical estructurado por fracciones (Conde, 2011). Estas ideas de medición de tiempo a través de las fracciones pueden favorecer nociones de unidad, equipartición y equivalencias para la construcción de las fracciones. En esta comunicación se exhibirán experiencias sobre el tratamiento de la noción de equipartición.

2. Aproximación Teórica

En el campo rítmico se enfatiza en la necesidad de posibilitar experiencias sensoriales (virtuales y reales) donde los estudiantes las perciben de tres maneras: visual, auditiva y gestual. La articulación de las percepciones puede construir un significado sobre la noción de equipartición en el contexto de la música aplicable en la matemática escolar. La actividad matemática y musical se vale de la percepción visual para representar y comunicar los procesos realizados con dichos objetos. De Guzmán (1986) señala que los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales para exponer sus trabajos, aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista. Naturalmente los objetos matemáticos carecen de medios de representación auditiva. Sin embargo, en esta investigación se quiere insinuar que si se articulan los sistemas matemático y musical de signos, mediados por representaciones virtuales dinámicas se podría lograr dar significado auditivo a un objeto matemático en el espacio musical (Vygotsky, 1986, p. 106). Es decir, si el estudiante interactúa con

ISBN 978-84-945722-3-4

representaciones dinámicas de la construcción de las figuras musicales asociadas a la estructura fraccionaria, de cierta manera el estudiante está asignando un fenómeno acústico como forma de representación e identificación de una fracción. La organización e interpretación de las sensaciones que provienen de un ambiente visual y aditivo, se convierte en un estímulo como objeto significativo para el estudiante.

En la interpretación musical el gesto es un elemento inherente que puede ser relacionado corporalmente con el ritmo. Por lo tanto, la experimentación sensorial de fenómenos sonoros permite al estudiante reconocer estructuras rítmicas por medio de actividad corporal (Lakoff & Núñez, 2000). De esta forma es posible establecer un vínculo entre las estructuras rítmicas y las fracciones. Al realizar la interpretación corporalmente (gesto) el estudiante puede experimentar la sensación de equipartición determinada por la duración de tiempo. Así como puede determinar si en un patrón patrones rítmico existe una equiparttición entre los compases que lo conforman.

3. Metodología

Esta comunicación hace parte de una investigación compuesta por una primera fase de diseño y desarrollo curricular porque se ha construido una propuesta didáctica interdisciplinaria entre las matemáticas, la física y la música (Conde 2009). La segunda parte se ubica dentro de una perspectiva cualitativa de análisis, dado que el interés se orienta a describir las formas cómo los estudiantes usan las nociones construidas sobre la equipartición por medio de experiencias virtuales -Ambiente Computacional- y reales -exploraciones de fenómenos físicos- (Conde 2013). La aplicación se realizó con estudiante de sexto grado (11 y 14 años de edad) en una institución pública de la Ciudad de México. Este trabajo se realizó en 13 sesiones con una duración aproximada de dos horas cada una. En estas sesiones se aplicó en su totalidad la propuesta didáctica interdisciplinaria antes mencionada. Para efectos de la presente comunicación se tomaron evidencias sobre las experiencias de las estudiantes relacionadas con la noción de equipartición.

4. Discusión de Resultados

Del campo rítmico se centró la atención en lo que llamamos un sistema musical de signos (SMuS) compuesto por las figuras y silencios musicales, porque cuenta con una estructura matemática asociada al sistema matemático de signos (SMS) de las fracciones que cumple la propiedad siguiente: “cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente”

ISBN 978-84-945722-3-4

siguiendo el orden en el que aparecen los signos musicales en la Figura 1. En este SMuS convergen aspectos de las tres disciplinas mencionadas en contenidos específicos como: el sonido (contenido de la física), medida del tiempo y fracciones (contenido de las matemáticas) y figuras y silencios musicales (contenido de la música); esas nociones se vinculan por medio de un sistema que determina el tiempo de duración de un sonido.

La identificación de la unidad en la cual se realiza la equipartición, se puede identificar de manera natural en estos sistemas de signos. La unidad determinada por el tiempo de duración del sonido asociado a la figura redonda. A través del valor de la figura redonda se pueden deducir los valores de las demás figuras musicales.

Símbolo	Nombre	Equivalencia
	Redonda	1
	Blanca	$\frac{1}{2}$
	Negra	$\frac{1}{4}$
	Corchea	$\frac{1}{8}$
	Semicorchea	$\frac{1}{16}$
	Fusa	$\frac{1}{32}$
	Semifusa	$\frac{1}{64}$

Símbolo	Nombre	Equivalencia
	S. Redonda	1
	Silencio de Blanca	$\frac{1}{2}$
	Silencio de Negra	$\frac{1}{4}$
	Silencio de Corchea	$\frac{1}{8}$
	Silencio de Semicorchea	$\frac{1}{16}$
	Silencio de Fusa	$\frac{1}{32}$
	Silencio de Semifusa	$\frac{1}{64}$

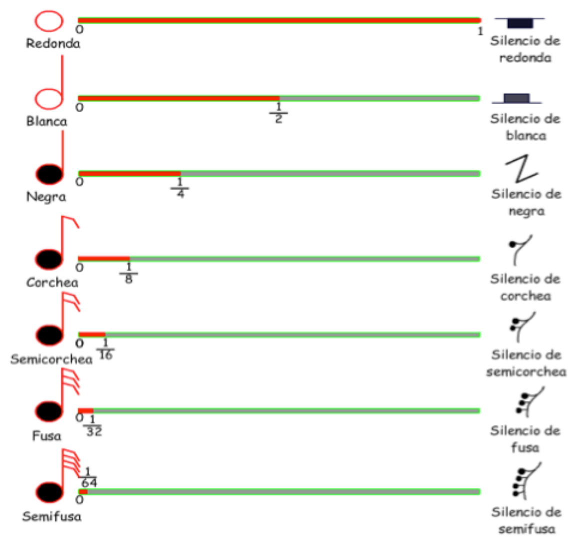


Figura 1. Sistema de Signos Musicales (SMuS) de figuras y silencios musicales (Conde, Parada y Liern, 2016, p 6)

A través del valor de la figura redonda se pueden deducir los valores de las demás figuras musicales. Teniendo en cuenta que nuestra unidad posee un valor relativo en tiempo físico y un valor constante de cuatro pulsos en tiempo musical. Es decir, la unidad puede tener un valor de 3, 1.5, 4 segundos de acuerdo a la velocidad de la interpretación de una obra. Es por esta razón que a la unidad se le ha denominado "unidad relativa". Para ilustrar la relatividad de la unidad se le muestra al estudiante tres representaciones dinámicas donde se articula el sonido con el recubrimiento de una barra junto al tiempo físico en segundos y el tiempo musical en pulsos como se muestra en la Figura 2 correspondiente al módulo V. Escena 7 de la propuesta Conde (2009).

ISBN 978-84-945722-3-4

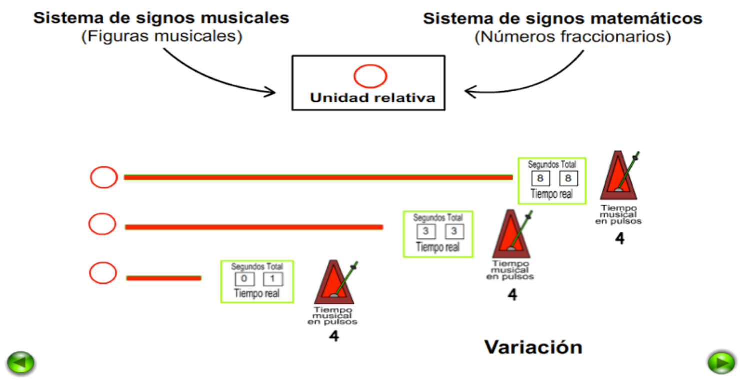


Figura 2. Representación de la Unidad relativa

Al intentar medir el tiempo de duración de la unidad relativa se observaron en los estudiantes algunas estrategias para medir el tiempo de duración de un sonido. Por ejemplo, algunos estudiantes siguen el sonido con un conteo sobre las pulsaciones del metrónomo acompañado por movimientos corporales como: de la cabeza, de las manos, los pies, etc. Otros estudiantes seguían el sonido contando en voz alta, mientras que los demás oían el sonido sin alguna manifestación corporal a la vista. Sobre este fenómeno Cox (2003) argumenta que comprendemos los sonidos musicales a través de actividades que nosotros mismos hacemos. El uso de diferentes tipos de representaciones dinámicas visuales, auditivas y gestuales. Generan en los estudiantes una estructura de la unidad diferente de “uno”. El hecho de que la unidad puede adquirir otras designaciones numéricas distintas de “uno” crea en el estudiante la idea de relatividad de la unidad como lo señala Galperin y Georgiev (1969).

Para la construcción del sistema los estudiantes aplican a la unidad relativa la propiedad siguiente: “cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente”. Bajo este sistema los estudiantes aplican una partición a la unidad relativa, justificada en la articulación de los diferentes sistemas de representación. Los estudiantes articulan las figuras asociadas a expresiones fraccionarias para realizar particiones de la unidad. Cada vez que se hace una partición, los estudiantes identifican la unidad que se está partiendo, éste hecho orienta a que cada figura musical se convierte también en unidad como se observa en la Figura 3.

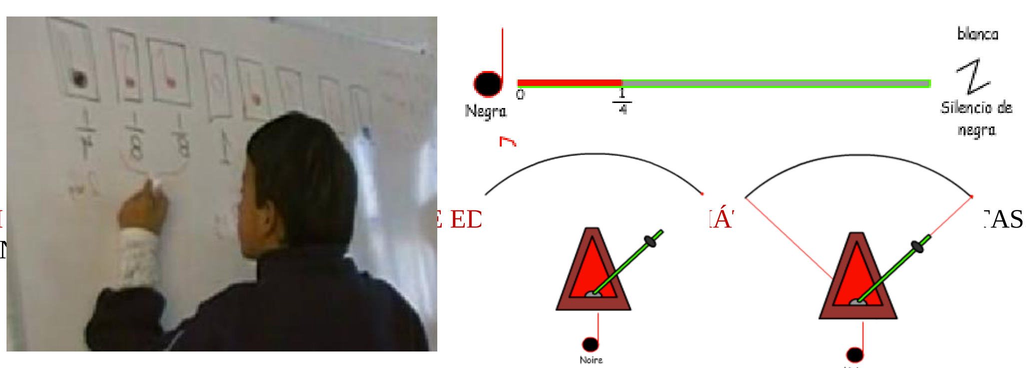


Figura 3. Parte de parte de la unidad relativa

Las inquietudes sobre la noción de equiparación (Figura 4) empieza a cobrar sentido para los estudiantes cuando se abre la discusión alrededor de preguntas como:

¿Cuántas negras necesito para obtener una redonda?, ¿cuántas redondas necesito para obtener una negra?, ¿las negras que usamos para completar una redonda, tiene la misma duración?, ¿qué pasaría si no tienen la misma duración?

La experimentación sensorial de fenómenos sonoros expresados en representaciones dinámicas para atender los cuestionamientos anteriores (Figura 4) les permiten a los estudiantes dar cuenta por sus propios medios sobre las implicaciones temporales cuando la misma figura negra tiene diferente duración. Es decir, cuando una de las figuras de la misma clase dura más o menos tiempo que las demás, existe un efecto acústico que les sugiere a los estudiantes que algo no encaja y que necesariamente esa figura "diferente" debe tener las mismas condiciones de tiempo de duración que las otras de la misma especie. Estas consecuencias temporales además de ser percibidas de forma visual y auditiva, también son experimentadas a la vez mediante la interpretación corporal (gesto) ya que si no se cumple con la propiedad de equipartición, en su interpretación "sobra" o "falta" tiempo. Precisamente, la discusión y experiencias sensoriales alrededor de estos efectos acústicos, visuales y corporales ayudan a los estudiantes a dar significado y sentido a la equipartición.

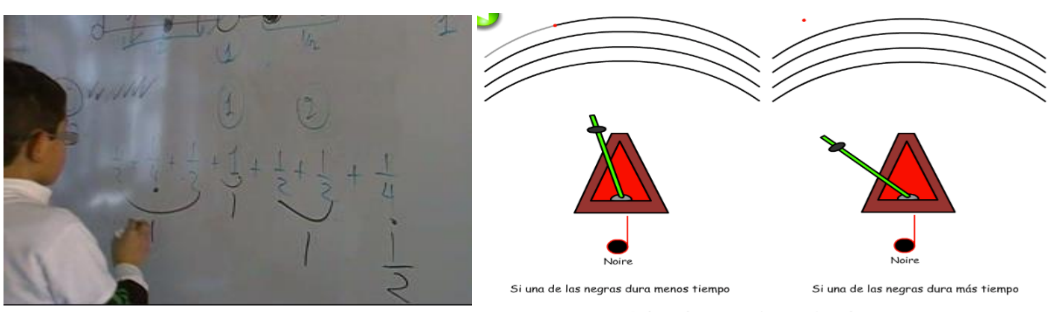


Figura 4. Significado de equipartición en contexto matemático-musical

ISBN 978-84-945722-3-4

La noción de equipartición se va reforzado en el proceso de construcción de las siete figuras y silencios musicales bajo el criterio utilizado para deducir las figuras blanca y negra referidas en párrafos anteriores.

Posteriormente la noción de equipartición cimentada en la construcción de las figuras y silencios musicales es trasladada para la construcción e interpretación de los estudiantes de compases de patrones rítmicos (ver Figura 5).

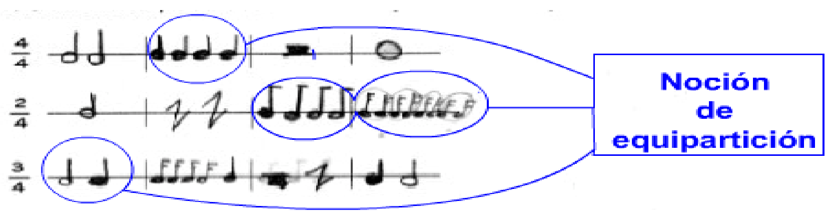


Figura 5. La equipartición un patrones rítmicos construidos por los estudiantes

Los patrones rítmicos se encuentran en la música que normalmente escuchamos. Por lo general se pueden agrupar los tiempos o pulsaciones en grupos de 2, 3 ó 4. Por ejemplo, cuando se escucha un vals, se percibe un patrón rítmico de tres pulsos o tiempos. Durante todo el transcurso de la interpretación del vals se puede sentir que los patrones rítmicos están basados en el conteo: un, dos, tres. Esto indica que el patrón rítmico está agrupado en 3 pulsaciones con un acento en el primer pulso.

Al percibir patrones rítmicos (Figura 5) se crea una sensación de partición determinado por un fenómeno acústico. Esta partición cumple con la propiedad de equipartición entre los compases ya que se divide el patrón en partes con igual tiempo de duración. A la vez, cada compás está dividido en tiempos iguales fijado con una figura como unidad de medida expresada en la fracción colocada al principio del pentagrama. Por ejemplo, en el patrón rítmico llamado compás de 3/4 (Figura 5), el numerador 3 indica que cada compás tendrá tres pulsos o tiempos, y la fracción 1/4 indica la unidad de tiempo o duraciones equivalentes de ésta unidad. Aquí se refiere a la cuarta parte del tiempo de duración de una redonda, es decir, la figura negra será la unidad de medida. Pero si ésta figura negra es la unidad se está identificando que la medida se refiere a la concepción de fracción como las iteraciones de una fracción unidad, más que partes de un todo. Esto quiere decir que 3/4, es entendido como tres iteraciones de 1/4, más que tres de cuatro partes iguales, según Olive & Vomvoridi (2006) y Tzur (1999).

ISBN 978-84-945722-3-4

Bajo los criterios anteriores de construcción de compases, los estudiantes pueden controlar, modificar y justificar por sus propios medios la existencia de la equipartición entre los compases que componen un patrón rítmico como se observa en la Figura 5.

5. Discusión final

La forma de hacer discreto el tiempo de duración del sonido por medio del conteo puede generar en los estudiantes una sensación de equipartición del campo temporal, fundamentada en la percepción visual (sistema de representación gráfica), gestual (movimientos corporales) y auditiva (sonido).

Las diferentes representaciones articuladas para cumplir con ciertas propiedades temporales sujetas a la métrica musical, alcanzan a convertirse en instrumento para que los estudiantes logren crear conjeturas de acuerdo a sus diversas experiencias alrededor de la noción de equipartición. En consecuencia, las formas de percibir –visual, auditiva y gestual– el objeto (fenómeno acústico) proporcionan al estudiante herramientas de comprobación y argumentación para dar cuenta, por sus propios medios, sobre la construcción y el significado de la noción de equipartición. Significado imperceptible en situaciones tradicionales para el estudio de las fracciones. Estos diferentes acercamientos y representaciones que el estudiante tiene con los objetos matemático-musicales caracterizan los procesos que hacen concretos dichos objetos.

Referencias bibliográficas

Conde, A., Parada, S. y Liern, V. (2016). Estudio de fracciones en contextos sonoros. *Revista Actualidades Investigativas en Educación* 16(2), 1-21. http://dx.doi.org/10.15517/aie.v16i2.23933

Conde, A. (2013). *La unidad relativa como vínculo cognitivo entre el tiempo y las fracciones*. (Tesis doctoral sin pública). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Conde, A. (2011). Une approche méthodologique pour l'amélioration de l'apprentissage des fractions au travers des éléments musicaux. *Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation*, p. 215-217. Lyon, France. ISBN: 978-2-84788-337-4

Conde, A. (2009). *Las fracciones al ritmo de la música.* (Tesis de Maestría sin pública). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Cox, A. (2003). "Metaphor theory´s leap of faith: From embodied experience to asbstract thought". *Proceedings of the International Conference Music and Gesture* (pp 28-31). Norwich, Inglaterra.

De Guzmán, M. (1986). Los pitagóricos. *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII* (pp. 11-35*).* Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Galperin, P., & Georgiev, L. (1969). The formation of elementary mathematical notions. In J. Kilpatrick & L. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol 1, pp. 189-216). Chicago, USA: The University of Chicago.
Kieren, T. (1983). La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales. In M. Zweng, T. Green y J. Kilpatrick (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 506-508). Estados Unidos.
Lakoff, G. & Nuñez, F. (2000). *Where Mathematics comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.
Naik, S. & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. *Proceedings of the 32rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp 17-24). Morelia, México: PME 32 and PME-NA XXX.
Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior,* 25(1), 18–45.
Secretaría de Educación Pública de México (2004). *Plan y programas de estudios para la educación básica primaria 2004*. México, D.F.: SEP.
Steffe, L., Cobb, P., & Glasersfeld, E. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies* (p. 343). New York: Springer-Verlag.
Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390–416.
Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Boston: MIT Press.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-804

APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: INTERPRETAÇÃO DE SÍMBOLOS E APLICAÇÃO DE REGRAS

Marisa Rosâni Abreu da Silveira
marisabreu@ufpa.br
Universidade Federal do Pará – Brasil

Núcleo temático: **Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos**
Modalidad: CB.
Nivel educativo: No específico.
Palabras clave: Textos matemáticos. Regras matemáticas. Filosofia da linguagem.

Resumen

Os textos matemáticos podem ser escritos por meio da linguagem natural e/ou da linguagem matemática. A primeira é polissêmica, a segunda é codificada e pretende ter um sentido único. A linguagem matemática não possui oralidade e utiliza a linguagem natural para ser lida. Textos matemáticos possuem um resíduo - aquilo que foi extinto no processo de formalização - que precisa ser interpretado para que o texto tenha sentido. Estes textos são governados por regras matemáticas e regras gramaticais que subtendem conceitos matemáticos, pois a matemática é um jogo de signos segundo regras relacionadas com a formação de conceitos. Aplicar uma regra de decodificação é traduzir o texto que está codificado para descobrir uma determinação conceitual e transforma-lo em palavras com sentido. Um dos problemas de aprendizagem na matemática é a interpretação de seus enunciados e assim, nos propomos analisar a tradução de códigos matemáticos por palavras da linguagem natural, porém elas mudam de sentido conforme o contexto em que são empregadas. Nosso referencial teórico está pautado na filosofia da linguagem de Ludwig Wittgenstein, bem como em algumas pesquisas de educadores matemáticos que trabalham nesta perspectiva.

INTRODUÇÃO

Este texto tem o objetivo de discutir a compreensão do aluno quando trabalha com textos matemáticos em situação de aprendizagem. O referencial teórico adotado é a filosofia da linguagem de Wittgenstein, bem como algumas pesquisas de educadores que trabalham na perspectiva de buscar a linguagem como fonte de informações de análise para compreender os problemas de aprendizagem do aluno quando estuda matemática. Para Wittgenstein (1987), a matemática faz parte do aparelho da linguagem e sua aplicação faz dela uma linguagem propriamente dita. Nesse sentido, a aritmética é a gramática dos números. A

ISBN 978-84-945722-3-4

gramática é o conjunto de regras que governam a aritmética. Estas regras não podem ser modificadas porque elas nasceram do acordo entre homens e posteriormente passaram a ser consideradas normas. Um cálculo aritmético deve obter o resultado que já está previsto. 2 + 3 deve ser igual a 5 porque existe uma regularidade na forma de fazer este cálculo. Podemos perceber que Wittgenstein se preocupa com a linguagem e com as regras de sua gramática. Assim, o filósofo austríaco não quis tratar de processos mentais. Ele diz saber de sua existência, mas não quis se preocupar com eles. Sabedores desta filosofia, alguns educadores se engajaram à sua filosofia para tratar dos problemas da educação matemática via processos linguisticos.

Para atingirmos nosso objetivo, em primeiro lugar analisamos as características da linguagem matemática e da linguagem natural. Essas linguagens configuram os textos matemáticos que são regidos por regras matemáticas e regras gramaticais. A primeira é polissêmica e a segunda é codificada por meio de símbolos matemáticos que precisam ser interpretados, bem como pretende ter um único sentido para não haver ambiguidades. Em segundo lugar, buscamos compreender como as regras matemáticas devem ser seguidas, bem como o que caracteriza os seus usos em diferentes contextos de aplicação. E finalmente buscamos algumas pesquisas no âmbito da educação matemática para ilustrar nosso estudo.

LINGUAGEM NATURAL E LINGUAGEM MATEMÁTICA

Os textos matemáticos podem ser escritos por meio da linguagem natural e/ou da linguagem matemática. A primeira é polissêmica e a segunda é codificada e pretende ter um sentido único. A linguagem matemática não possui oralidade e utiliza a linguagem natural para que o texto possa ser lido, ou seja, o texto escrito em linguagem matemática precisa ser traduzido para a linguagem natural, porém, ele possui um resíduo que fica subentendido no processo de tradução. Tal resíduo precisa ser interpretado para que o texto tenha sentido. O resíduo é aquilo que foi extinto pelo processo de formalização da linguagem natural, tal como afirmar que $x \in N / x \geq 2$ subentende que $x = 2, 3, 4, \ldots$

Os textos matemáticos são governados por regras matemáticas e estão envolvidos por uma rede de conceitos, ou seja, a matemática é um jogo de signos segundo regras relacionadas com a formação de conceitos. Aplicar uma regra de decodificação é traduzir o texto que está

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

codificado. Neste sentido, decodificar é descobrir uma determinação conceitual. É transformar o texto codificado em palavras com sentido, de certa forma é traduzir de uma língua para outra. Esta tradução é um jogo de linguagem que podemos encontrar usos equivalentes com palavras da linguagem natural, porém essas palavras podem ter mais de um sentido, já que nossa linguagem é polissêmica e muda conforme o contexto em que as palavras são empregadas.

Jogo de linguagem para Wittgenstein é a analogia entre jogo e linguagem, palavras com sentido que possuem uma forma de vida nas palavras pronunciadas. Os participantes do jogo se compreendem mutuamente, tal como quando um pedreiro ao dizer "lajota!" seu colega lhe entrega uma lajota, ou quando o professor diz um triângulo retângulo, seu aluno desenha um triângulo com um ângulo de noventa graus.

> Apresentam-me uma sentença em um código desconhecido, juntamente com a chave para decifrá-lo. Então, em certo sentido, tudo o que é exigido para o entendimento da sentença me foi dado. E, contudo, se me perguntassem se entendi a sentença, eu deveria responder "Tenho de decodificá-la primeiro" e, apenas quando a tivesse decodificada diante de mim, como uma sentença em inglês, eu diria "agora a entendo". Se agora levantarmos a questão "Em que momento da tradução para o inglês começa o entendimento?", obteremos um vislumbre da natureza do que é chamado "entendimento" (Wittgenstein, 2010, p. 30).

O entendimento é necessário para que haja aprendizagem. Uma proposição matemática apresentada em códigos matemáticos precisa ser decodificada, tal como quando nos deparamos com uma frase em língua estrangeira. Não basta apenas substituir os códigos por palavras, é necessário dar sentido ao texto conforme o contexto matemático de sua aplicação. A expressão $x \in N / x \geq 2$ corresponde a diversas constatações subentendidas, a saber, *x* pertence ao conjunto dos números naturais, *x* é maior que dois incluindo 2, assim como *x* não pode ser um número que pertence ao conjunto dos números irracionais, etc.

Para Wittgenstein (1989), traduzir de uma língua para outra é uma tarefa matemática porque como vimos é necessário traduzir o texto codificado para a linguagem natural para que o texto tenha sentido. Não existe um único método porque todo o jogo de linguagem depende do contexto em que está sendo empregado, bem como dos participantes do jogo. O uso dos signos constitui a matemática como uma linguagem. "Tratam as matemáticas acerca dos signos no papel? Esses signos são seus objetos tanto como as figuras de madeira são o objeto

ISBN 978-84-945722-3-4

do xadrez” (Wittgenstein, 2014, p. 496). A linguagem da matemática não é a própria matemática, pois se faz matemática, no uso dos signos. A matemática é uma atividade humana. Proposições matemáticas são regras gramaticais, tais como 2 + 2 = 4. As proposições matemáticas apontam para uma necessidade objetiva, enquanto que as proposições empíricas são atendidas por acordos entre os homens. A proposição empírica duas maçãs mais duas maçãs pode ser quatro maçãs mesmo que falte um pedaço em uma das maçãs, já a proposição matemática 2 + 2 deve ser igual a 4 porque é uma proposição normativa. Neste sentido, o ensino e a aprendizagem da matemáca constitui-se em jogos de linguagem entre professor e alunos quando buscam um mesmo universo discursivo com palavras que tenham sentido como uma forma de vida.

Para Wittgenstein (1996, § 496), “a gramática descreve o emprego dos signos, mas de maneira alguma os elucida”, ela é a composição de regras que descreve o emprego, o uso dos signos de nossa linguagem. A linguagem tem a função de comunicação. “A comunicação oral deixa na memória uma impressão muito mais frágil que a visualização da palavra” (Wittgenstein, 1986, p. 237). É por isso que precisamos escrever no quadro quando estamos ensinando. Dizemos o triângulo é um polígono de três lados e ao mesmo tempo desenhamos o triângulo no quadro. E aí reside também a importância do gesto ostensivo, tal como discutido por Oliveira e Silveira (2016), pesquisa com o objetivo de tratar da utilização de gestos ostensivos como auxiliares do professor no processo de mostrar provas matemáticas aos seus alunos.

De acordo com Wittgenstein, a comunicação é mais eficaz por meio da expressão escrita que pode ser salientada por meio do gesto ostensivo, como também é mais fácil de memorizar. Neste sentido, o aluno literalmente cego ou o aluno cego para alguns aspectos fica prejudicado e aí sim, é mais eficaz a comunicação oral.

“Os jogos primitivos são jogados sem que suas regras sejam codificadas e até mesmo sem a formulação de uma única regra” (Wittgenstein, 2010, p .44). Quando uma criança aprende a falar, ela utiliza jogos primitivos, após ela aprender a falar começa a compreender a gramática e assim aprende o uso das palavras em diferentes contextos, da mesma forma que aprende na escola novas palavras, novos conceitos. Para esta aprendizagem é necessário a prática do uso das palavras que governam estes conceitos. É no uso da palavra que aprende o seu significado, no uso de regras da gramática que subentendem nossos conceitos. A objetividade

ISBN 978-84-945722-3-4

da matemática pressupõe um conjunto de conceitos que possui uma oraganização interna, tal como o conjunto dos números naturais que está contido no conjunto dos números inteiros e por sua vez, o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais e assim por diante. De certa forma, nós criamos a objetividade por meio da linguagem, objetividade que faz parte do automimento da matemática – movimiento intra-teórico da matemática.

SEGUIR REGRAS MATEMÁTICAS

Para Wittgenstein, nós não interpretamos regras, nós as seguimos. Quando interpretamos fazemos hipóteses que podem se revelar falsas ou verdadeiras. Seguir uma regra é um livre jogo da imaginação (Benoist, 2011).

"A proposição: os signos..., decodificados de acorco com esta regra, dão por resultado..., é uma proposição matemática" (Wittgenstein, 1987, p. 218). Uma regra de decodificação é similar a uma regra de tradução. "Encontrar o produto lógico oculto é uma tarefa matemática" (Wittgenstein, 2014, p. 129), tal como encontrar o produto lógico da operação 753:3. O professor não pode antecipar todos os casos de aplicação de uma regra, como também não pode antecipar os casos em que não se aplicam tal regra. O professor explica uma regra, mas o aluno pode aplica-la de modo errado devido a incompreensão do sentido das palavras pronunciadas.

Aprendemos o significado de uma palavra no seu uso da mesma forma que aprendemos aplicar a linguagem no cálculo de uma multiplicação. O uso efetivo de uma palavra depende do contexto em que ela está sendo aplicada. A letra 'b' é a sucessora de 'a' considerando nosso alfabeto, já no conjunto das vogais seria 'e'. No meio político dizemos que o presidente Trump é o sucessor de Obama. O sucessor de 'x' no universo da matemática é 'x+1' e assim podemos fazer muitos outros usos da palavra 'sucessor', porém não temos como regular seu uso. A codificação de um de seus usos característicos tais como na linguagem matemática é mostrado na escola, mas não impede que o aluno confunda com outros usos que não pertencem à matemática.

Wittgenstein não se preocupa com os processos mentais. Quando estamos interessados em compreender o que os alunos pensam precisamos escutar o que eles dizem ou ver o que eles escrevem enquanto fazem exercícios matemáticos. Eles aprendem a descrever o que é visto

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

utilizando palavras e assim vão se apropriando de diferentes jogos de linguagem nas aulas de matemática.

“”Estou fazendo contas de cabeça”? A dificuldade com que se topa aqui é a vagueza nos critérios para a existência do processo mental.” (Wittgenstein, 2006, § 649). Fazer cálculos de cabeça é similar a fazer cálculos no papel. As regras utilizadas para os dois tipos de cálculos são as mesmas. As técnicas desenvolvidas servem para ambos casos. A diferença dos cálculos produzidos no ofício de construção de imóveis e os cálculos realizados em atividades escolares está na objetivação de sua escrita. Feirantes, por exemplo, têm dificuldades de fazer cálculos escritos porque não dominam as técnicas de desenvolvimento da escrita matemática (Silveira, Silva, 2016).

PESQUISAS EDUCACIONAIS COM ÊNFASE NA LINGUAGEM

Em sua pesquisa Oliveira (2012) constatou que alunos de uma escola técnica não tiveram problemas de aprendizagem com geometria espacial pelo fato de terem em seu currículo a disciplina de desenho técnico e assim ter o conhecimento das técnicas de desenho de sólidos geométricos, já estudantes de escolas de cursos não técnicos tiveram muita dificuldade de aprendizagem. O autor em suas análises utilizou um dos conceitos de Wittgenstein *ver* e *ver como*. Ver para Wittgenstein é uma forma de interpretar. Ver a apótema de uma pirâmide como a hipotenusa formada pelo triângulo com catetos iguais a altura e apótema da base e o apótema da pirâmide. Esta forma de ver exige o conhecimento de técnicas para ver o sólido e desenhá-lo no espaço da forma que consiga destacar aspectos relacionados com conceitos matemáticos que envolve a figura.

De forma similar Souza e Silveira (2015) mostram que as técnicas desenvolvidas por um engenheiro e um mestre de ofício são semelhantes, porém o engenheiro consegue sistematizar seus conhecimentos por meio de um documento escrito. A pesquisa teve como objetivo investigar a relação entre linguagem e os saberes de física do mestre de ofício na construção de canoas, bem como investigar como os construtores de canoas expressam seus saberes sobre o conceito de flutuabilidade. Ao relacionarem esses saberes aos saberes científicos, os pesquisadores evidenciam que o mestre de ofício usa em sua prática os mesmos princípios físicos sobre densidade e empuxo que usaria um engenheiro ou professor para falar sobre flutuabilidade, porém com um outro vocabulário. Os saberes do mestre de ofício aparecerem

ISBN 978-84-945722-3-4

subentendidos nos jogos de linguagem estabelecidos com os pesquisadores. Esta pesquisa denota os diferentes jogos de linguagem em que palavras do universo da física podem ter semelhanças de família com a física estudada na escola.

Savietto (2013) afirma que uma das dificuldades dos estudantes relacionadas a compreender conceitos físicos e interpretar o mundo do ponto de vista da Física, está no fato desta utilizar a linguagem matemática. Assim, o ensino da Física, muitas vezes, se resume ao ensino da própria linguagem matemática. Nesta pesquisa, o autor destaca que a noção de jogos de linguagem, com suas regras próprias e semelhanças de família, colaboram para o entendimento da significação do uso que se faz da linguagem matemática. Para tanto, analisou as aulas de um professor que foi caracterizado por dar aulas de forma diferenciada. Os episódios analisados evidenciaram jogos de linguagem estabelecidos pelo professor e seus alunos.

Barata (2017) em sua pesquisa mostra não só a dificuldade dos alunos em lidarem com expressões algébricas, como também em seguirem as regras de desenvolvimento de produtos notáveis. Os alunos não compreendem os significados das letras das expressões, pois a álgebra lhes parece uma língua estrangeira.

Essas quatro pesquisas apontam para a importância dos alunos desenvolverem capacidades, tais como compreender enunciados e seguir regras corretamente. A aplicação de regras matemáticas está atrelada ao uso sistemático, o treino do uso de determinadas regras em diferentes contextos de aplicação e são fatores associados na interpretação de textos matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas educacionais pautadas no uso da linguagem natural e linguagem matemática pretendem apontar os problemas que os estudantes encontram em lidar com textos matemáticos. Partimos do pressuposto que não temos acesso ao pensamento do aluno, e assim, nos resta analisar suas verbalizações e suas escritas. É recomendável que o profesor forneça a oportunidade do aluno se expresar oralmente, pois na linguagem oral podemos nos expresasr mais fácilmente, bem como retomar a palavra quando percebemos que nossa exposição não foi adequada. O profesor também pode compreender as dúvidas dos alunos,

ISBN 978-84-945722-3-4

as suas confusões na interpretação das palavras utilizadas no momento de uma explicação do profesor ou de um texto escrito no livro didático.

Sabemos que muitos conflitos na comunicação das pessoas são originários da interpretações das palavras. Num debate, nos perguntamos dos motivos pelos quais nosso adversario pronunciou determinadas palavras. O debate continua na tentativa de esclarecermos o uso de algunas palabras, isso é uma prova que nosso discurso pode ser mal interpretado. Da mesma forma na sala de aula, não estamos isentos dos efeitos da polissemia de nossa linguagem natural e nada melhor que um bom diálogo para que sejam dissolvidos tais conflitos.

Referencias bibliográficas

Barata, R. C. (2016). *A compreensão de expressões algébricas na filosofia da linguagem de Wittgenstein*. Dissertação de mestrado, Educação Matemática. Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

Benoist, J. (2011). Les limites de l'interprétation. En *Wittgenstein et les questions du sens*. n. 20, 2ª. Série, pp. 147-162, Paris: L'art du compreendre.

Oliveira, R. R. N. (2012). *"Ver como": uma vivência do olhar para a aprendizagem de geometria*. Dissertação de mestrado, Educação Matemática. Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil.

Oliveira, M. S. y Silveira, M. R. A. (2016). Falar e mostrar para provar: uma contribuição teórica sobre a utilização dos gestos ostensivos wittgensteinianos como auxiliares na prova matemática. *Alexandria*, Florianópolis, v. 9, n. 2, 271-285.

Savietto, N. (2013). *Jogos de linguagem e significação em aulas de Física no ensino médio*. Dissertação de mestrado. Educação Cientifica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Silveira, M. R. A. e Silva, P. V. (2016). O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v.18, n.1, 469-483.

Souza, E. S. R. e Silveira, M. R. A. (2015). Etnofísica e linguagem. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v. 12, n. 23, 103-117.

Wittgenstein, L. (2014). *Escrito a máquina [The Big Typescript*]. Madrid: Editorial Trotta.

Wittgenstein, L. (1989). *Fichas* (Zettel). Lisboa: Edições 70.

Wittgenstein, L. (2010). *Gramática Filosófica*. São Paulo: Edições Loyola.

ISBN 978-84-945722-3-4

Wittgenstein, L. (1996). *Investigações Filosóficas*. Rio de Janeiro: Coleção Pensamento Humano.

Wittgenstein, L. (2006). *Observaciones sobre la filosofía de la psicología*. México: Instituto de Investigaciones Filosóficas, v. 1.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Wittgenstein, L. (1986). Vocabulaire à l'usage des écoles primaires. (Tradução de Jean-Pierre Cometti. In.: Ludwig Wittgenstein. Marseille: SUD. *Revue Litteraire Bimestrielle*, 233-244.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-805

PERCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE AS POTENCIALIDADES DAS TECNOLOGIAS DIGITIAS NA FORMAÇÃO CONTINUADA[1]

Tiago Giorgetti Chinellato – Sueli Liberatti Javaroni
tiagogiorgetti@gmail.com – suelilj@fc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista – Júlio de Mesquita Filho - Brasil

Núcleo temático: V - Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: 5 Formação e atualização do ensino
Palavras chave: GeoGebra; Atividades investigativas; Produção de vídeos educativos.

Resumo
Neste artigo apresentaremos um recorte dos dados de uma pesquisa de doutoramento em andamento que tem por objetivo analisar as percepções de professores de Matemática ao utilizarem o software GeoGebra e vídeos educativos no desenvolvimento de atividades matemáticas inspiradas do Caderno do Professor/Aluno, material pedagógico oficial da rede estadual paulista do Estado de São Paulo (Brasil). Desse modo, a pesquisa está sendo desenvolvida na perspectiva qualitativa. Assim, foi realizado um curso de formação continuada com professores da Diretoria de Ensino de Guaratinguetá-SP/Brasil onde esses trabalharam as atividades matemáticas do respectivo material. Os procedimentos metodológicos adotados para a produção dos dados foram: gravações em vídeos, dos encontros do curso e, em áudios, de relatos do pesquisador, aplicação de questionários e entrevista aos docentes, produção dos vídeos educativos e atividades realizadas com os Cadernos. A partir da análise inicial desses dados, temos observado que temas como a formação de professores para o uso das TD, a obrigatoriedade do uso do Caderno do Professor/Aluno, o software GeoGebra e a produção de vídeos educativos para o ensino de Matemática estão se fazendo presentes dentre os resultados da pesquisa, cujos recortes estamos aqui discutindo.

Introdução

Na pesquisa realizada em Chinellato (2014), buscou-se indícios acerca do uso (ou não) dos computadores em aulas de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental de escolas públicas paulistas da cidade de Limeira, São Paulo, Brasil. Essa pesquisa de mestrado foi desenvolvida de março de 2012 a março de 2014, e teve como procedimentos metodológicos: a visita a laboratórios de informática de escolas assistidas pelo Programa

1 O presente trabalho foi realizado com o apoio da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltado para a formação de recursos humanos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Acessa Escola[2] (http://blueonline.fde.sp.gov.br), aplicação de questionários e entrevistas com professores de Matemática de escolas vinculada à Diretoria de Ensino da Regional de Limeira.

Dentre os resultados evidenciados, foi constatado que há um baixo número de computadores comparados ao número de estudantes por sala, dificuldade de acesso ao laboratório de informática, falta de monitor do laboratório e, também há deficiência na formação inicial e continuada dos professores de Matemática para o uso das tecnologias digitais. Os resultados dessa pesquisa de mestrado colaboraram com o desenvolvimento de um projeto de maior envergadura intitulado "Mapeamento do uso de tecnologias nas aulas de Matemática no Estado de São Paulo[3]".

Esse projeto vem sendo desenvolvido em duas fases, sendo que na primeira foram desenvolvidas pesquisas de Iniciação Cientifica e Mestrado que se preocuparam em analisar as condições físicas dos laboratórios de informática, saber se os professores utilizam, ou não, as Tecnologias Digitais (TD) em suas aulas e quais seriam as dificuldades existentes para tal uso. Esses levantamentos foram feitos nas Diretorias de Ensino de Bauru, Guaratinguetá, Registro, Presidente Prudente, São José do Rio Preto e Limeira, que são abrangidas pelo Projeto Mapeamento (Andrade et al., 2016). Já a segunda fase está voltada para a formação continuada de docentes, na qual cursos de extensão universitária foram realizados, tendo as TD, em particular o software GeoGebra, papel principal nessas ações. Essas atuações da segunda fase podem ser observadas nos trabalhos de Zampieri e Javaroni (2014), Faria et al. (2015), Braga (2015) e Andrade et al. (2016).

Justamente a essa segunda fase que a pesquisa de doutorado, aqui apresentada, se insere, adotando uma metodologia de pesquisa qualitativa apoiada em Goldenberg (2004) e tendo por objetivo identificar e discutir qual é o discurso dos professores de Matemática da rede pública paulista sobre as potencialidades do uso das TD para realizar atividades inspiradas no Caderno do Professor (CP) e Caderno do Aluno (CA). Esses Cadernos constituem um material didático disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de

[2] http://blueonline.fde.sp.gov.br Acesso 20.4.17

[3] Projeto de pesquisa coordenado pela Profa. Dra. Sueli Liberatti Javaroni e aprovado sob nº 16429 no Edital 049/2012/CAPES/INEP/OBEDUC – http://www.capes.gov.br/educacao-basica/observatorio-da-educacao. Acesso em 14.4.17. Denominaremos ao longo desse texto por Projeto Mapeamento.

ISBN 978-84-945722-3-4

São Paulo (SEESP)[4] nas escolas públicas para o desenvolvimento do conteúdo programático.

Como parte dos procedimentos metodológicos realizados para a produção de dados, elaboramos e desenvolvemos um curso de extensão, intitulado "As potencialidades das tecnologias digitais em atividades investigativas de conteúdos matemáticos do Currículo Estadual Paulista", para professores de Matemática ligados à Diretoria de Ensino de Guaratinguetá (DEG), cujo foco principal foi o desenvolvimento de atividades inspiradas no material didático já mencionado, com o GoeGebra e a produção de vídeos do desenvolvimento de tais atividades. A seguir, destacamos algumas particularidades da DEG e justificamos o porque da sua escolha dessa Diretoria para a realização da formação continuada com os docentes.

A Diretoria de Ensino de Guaratinguetá

Uma das primeiras ações desenvolvidas na DEG foi uma pesquisa de Iniciação Científica que tinha como objetivo "conhecer as condições e o uso dos laboratórios de informática das escolas públicas do município de Guaratinguetá, em São Paulo" como mencionam Firme e Paulo (2011, p. 4704). Nessa pesquisa de caráter qualitativo, as autoras realizaram entrevistas com diretores das escolas, professores de Matemática e estagiários do Programa "Acessa Escola" buscando atingir o objetivo da pesquisa.

Nessa pesquisa, Firme e Paulo (2011, p. 4710) abordam que os diretores "declaram que a maioria dos professores não teve capacitação para usar o laboratório de informática". Os professores dialogam na mesma linha de pensamento e dizem "não se sentirem seguros para desenvolver atividades de ensino no laboratório de informática" (Firme & Paulo, 2011, p. 4710).

Essa primeira pesquisa vinculada ao Projeto Mapeamento, realizada na DEG mostra que há problemas relacionados com a formação continuada desses professores, no que diz respeito ao uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática. E na fala dos próprios docentes isso é ressaltado quando esses mencionam que não se sentem preparados para lidar com os

[4] http://www.educacao.sp.gov.br/sao-paulo-faz-escola. Acesso em 14.4.17

ISBN 978-84-945722-3-4

computadores. Desse modo, podemos inferir que esse despreparo está diretamente ligado a formação deficitária desses professores.

A realização do curso de formação continuada para o uso de TD se deu também para preencher uma lacuna apontada pela pesquisa de mestrado de Anderson Luis Pereira, colaborador do Mapeamento, que em sua pesquisa de campo havia observado que a maioria das escolas daquela região possui Datashow e Lousa Digital, porém os professores diziam que não se sentiam aptos a utilizarem já que não tinham formação para tal uso (Pereira; Javaroni, 2016).

Com os fatos anteriormente mencionados, o curso "As potencialidades das tecnologias digitais em atividades investigativas de conteúdos matemáticos do Currículo Estadual Paulista" foi realizado nessa região visando incentivar o uso das TD nas aulas de Matemática. Para a realização dessa ação, fizemos uma parceria com a SEESP para a certificação dos profesores cursistas.

O curso de extensão "As potencialidades das tecnologias digitais em atividades investigativas de conteúdos matemáticos do Currículo Estadual Paulista"

Esse curso foi desenvolvido em 8 encontros de 4 horas cada, aos sábados nos meses de maio e junho de 2016, no período da manhã. Os encontros aconteceram no laboratório de informática da DEG. Tivemos a participação de 34 professores cursistas que residem e ministram aulas nas cidades de Aparecida, Cachoeira Paulista, Cruzeiro, Cunha, Guaratinguetá, Lavrinhas e Lorena todas pertencentes a DEG. Como procedimentos metodológicos, fizemos videogravações de todos os encontros do curso e gravações em áudios de relatos do pesquisador após cada encontro, compondo assim um caderno de campo em formato digital. Além desses procedimentos, também aplicamos um questionário aos professores cursistas no início do primeiro encontro do curso, que teve por finalidade traçar o perfil de cada professor. No final do curso, aplicamos um segundo questionário buscando evidências nas respostas dos participantes sobre sua avaliação e participação no curso. No decorrer do curso emergiu, por meio da solicitação dos docentes, a produção de vídeos educativos das atividades que estavam sendo desenvolvidas. E a partir disso, os vídeos foram elaborados e disponibilizados aos professores para que eles pudessem acompanhar e realizar as atividades propostas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Dessa forma, os vídeos gravados dos encontros do curso com os professores, os vídeos educativos produzidos, as atividades realizadas do CP/CA com o GeoGebra, os áudios gerados e os questionários compõem os dados dessa pesquisa, que estão sendo organizados e analisados buscando responder, a partir do discurso dos professores cursistas sobre as potencialidades do uso das TD ao desenvolver atividades inspiradas no Caderno do Professor (CP) e Caderno do Aluno (CA).

A escolha do GeoGebra se deu por entendermos que esse software também pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e reúne Geometria, Álgebra, Gráficos, Probabilidade e Cálculos Simbólicos.

Assim, para o desenvolvimento desses conteúdos matemáticos no software GeoGebra, a cada encontro do curso, estavam presentes uma aluna de graduação do curso de Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) campus de Guaratinguetá, que auxiliava no posicionamento das câmeras e na gravação dos vídeos e um dos pesquisadores, colaboradores do Mapeamento, entre os mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da UNESP, campus Rio Claro, que auxiliavam como monitores junto aos professores cursistas, em dúvidas acerca do software e das atividades realizadas.

Após a aplicação do primeiro questionário, iniciamos o curso com algumas atividades que havíamos elaborado em conjunto com colaboradores do Projeto Mapeamento. Contudo, os professores cursistas apresentaram dificuldades no encaminhamento do que estava proposto. Tal situação pode ter sido decorrência do fato que a maioria dos professores cursistas não conhecia o GeoGebra. Assim, na tentativa de amenizar tal problema, sugerimos a eles a possibilidade de elaboração de vídeos educativos contendo as instruções das construções dos objetos no GeoGebra, necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas, ou seja, o roteiro das construções envolvidas em cada atividade seria feito por meio de um roteiro digital, por meio dos vídeos educativos. Tal sugestão foi bem avaliada pelo participantes e, a partir de então, o doutorando elaborou os vídeos de todas as construções necessárias para os próximos encontros. Dessa forma, a partir do segundo encontro do curso, os professores assistiam os vídeos elaborados e iam desenvolvendo as atividades solicitadas e discutindo acerca das potencialidades tanto do software quanto da utilização dos vídeos no desenvolvimento de atividades matemáticas inspiradas no Caderno do Professor/Aluno.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esses vídeos não foram pensados a priori mas sim, foram emergentes do cenário de investigação que se constituiu no curso de formação continuada com os professores. Assim, sendo uma característica do design emergente, no qual se temu m planejamento flexível, tanto nos procedimentos de produção dos dados quanto da análise dos dados, essa flexibilidade caracteriza o "design emergente" da pesquisa (Souto, 2011).

É justamente essa flexibilidade, sem passos rígidos que permitiu que o uso de vídeos, a partir do segundo encontro, se tornasse um elemento fundamental do cenário de investigação, e assim, em todas as semanas eram realizados alguns vídeos com as atividades que seriam desenvolvidas nos encontros seguintes, muitas delas por indicação dos próprios professores. A utilização do vídeo possibilita um nova elemento, onde esse é diferente do uso dos libros, com isso as estratégias de ensino e aprendizagem precisa ser pensadas levando em conta essa diferença, no qual o vídeo vem complementar os recursos já existentes disponíveis na sala de aula (Menezes, 2013).

Assim, essa tecnologia também se mostrou como mais um instrumento que pode ser utilizado nas aulas de Matemática e foi bem aceita pelos professores cursistas durante a realização das atividades. A seguir apresento alguns dados do curso, que já foram transcritos e estão sendo analisados.

Alguns dados da pesquisa

O curso foi pautado na realização de atividades inspiradas do Caderno do Professor/Aluno com o auxílio do software GeoGebra e dos vídeos educativos. Os professores foram questionados sobre esse material do estado de São Paulo no começo do curso e dois deles defenderam o seu uso, porque, segundo eles, as questões que estão ali presentes caem no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e na Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP). A professora Aneti[5] comenta que "o Caderno do Professor/Aluno deve ser trabalhado e é de extrema importância porque aparecem questões na AAP". O professor Guilherme também concorda com Aneti e diz que "é importante o seu uso porque são cobrados na AAP e SARESP".

Mas, nem todos os professores cursistas mostraram-se adeptos desse material do currículo do estado de São Paulo, como por exemplo, podemos observar na fala de Amélia

[5] Nomes fictícios utilizados para representar os docentes.

ISBN 978-84-945722-3-4

ao comentar que “esses cadernos são ruins, contem atividades, repetitivas e linguagem complicada”. Já Jorge aponta que “faltam muitos conceitos elementares no desenvolvimento de alguns conteúdos, pressupõem que o aluno já sabe aquele conteúdo”. Lilian corrobora Jorge dizendo que é “muito vago, com situação de aprendizagem desnecessárias, precisa de muito complemento”. Esses comentários acerca do material nos levam a pensar sobre a necessidade de adaptações, pois como destaca Jorge quando aponta que são cobrados conteúdos prévios dos alunos, ou seja, as atividades que estão propostas nesse material seguem um sistema espiral como menciona o professor. Wanderlei, também fala desse sistema espiral que “dificulta principalmente com o aluno de pouca base”, Valery também menciona que “o Caderno segue o modelo espiral e nossos alunos não tem o hábito de estudar”[6].

Desse modo, observamos que o conteúdo explicitado naquela parte do caderno pressupõe um certo conhecimeto prévio do estudante, já que segue um modelo espiral de ensino. Importante destacar o apontamento de Lilian que fala que esse material tem situações de aprendizagem desnecessárias e se sugere a complementação de alguns conteúdos.

Visando amenizar essas dificuldades apontadas pelos professores cursistas que desenvolvemos atividades com o GeoGebra e durante o curso os professores apresentaram questões que eram do seu dia-a-dia. O professor Guilherme, questionou no primeiro dia do curso se seria possível trabalhar com a Progressão Geométrica, na qual desenharíamos triângulos equiláteros inscritos um dentro do outro como aponta o Caderno do Aluno na página 52 e 53. O docente estava trabalhando com aquele contexto na semana e gostaria de trabalhar com essa atividade no software. O vídeo da construção dessa atividade está disponível no link a seguir (https://www.youtube.com/watch?v=lLcU6xlGBl8). Os cursistas receberam muito bem o uso do vídeo e a professora Amélia comenta que foi “excelente a criação do vídeo, muito pedagógico, esclarecedor uma ótima ferramenta para a sala de aula onde o aluno compreende facilmente o que se objetiva”. Aneti aponta que “com o uso do vídeo ficou evidente a atividade se compreende com facilidade o que está sendo passado e o passo a passo para execução das atividades”. A cursista Izabel destaca que “os vídeos ajudam muito, pois muitas vezes tiemos dificuldades nas construções, e com o auxílio dos vídeos

[6] Os conteúdos devem ser trabalhados es espiral, ou seja, trabalhados periodicamente com cada vez mais profundidade, para que os alunos modifiquem continuamente as representações mentais que vão construindo. https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_ensino Acesso em 18.4.2017.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

podemos sanar as dúvidas". O professor César ressalta que "o uso do vídeo facilitou o curso, gostei muito de aprender como fazer um vídeo". A aceitação do vídeo foi tanta que foi ensinado aos docentes como realizar a construção de vídeos, desse modo, pequenos grupos de 3 a 4 cursistas para ensiná-los a fazer essas produções.

Considerações Finais

Apresentamos nesse artigo alguns dados oriundos de uma pesquisa de doutorado que se iniciou em 2016. Para dar andamento à pesquisa, desenvolvemos um curso de formação continuada com professores vinculados à DEG com intuito de fomentar a discussão do uso do GeoGebra no desenvolvimento de atividades investigativas de conteúdos matemáticos inspirados no material do currículo oficial paulista. No decorrer do curso surgiu a necessidade da elaboração de vídeos educacionais que serviram de suporte aos professores cursistas na construção de objetos matemáticos no GeoGebra. A pesquisa, aqui relatada nesse recorte, está em fase de análise dos dados produzidos e até o momento podemos observar que o uso de softwares como o GeoGebra e/ou uso de vídeos atrelados ao Caderno do Aluno/Professor podem auxiliar no desenvolvimento de conteúdos matemáticos, desde que os docentes sintam-se aptos na apropriação de novos elementos em sua sala de aula.

Referências bibliográficas

Andrade, P. F.; Zampieri, M. T.; Javaroni, S. L.; Castro, A. L.; Chinellato, T. G.; Pereira, A. L. (2016). AÇÕES DE FORMAÇÃO CONTINUADA E O DESENVOLVIMENTO DE PESQUISAS DO PROJETO MAPEAMENTO. *ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*: *12*. (pp.1-12). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

Braga, L. (2015). PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS E A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. *ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: 19.* (pp.1-12). Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora.

Chinellato, T. G. (2014). *O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Faria, R. W. S. C.; Chinellato, T. G.; Maltempi, M. V.; Javaroni, S. L. (2015). REFLEXÕES SOBRE UM CURSO DE EXTENSÃO UNIVERSITARIA A PARTIR DA AVALIAÇÃO DOS PROFESSORES CURSISTAS. *CONGRESSO DE EXTENSÃO DA UNESP "DIALOGOS DA EXTENSÃO: DO SABER ACADEMICO A PRATICA SOCIAL*: *8*. (pp. 1-8). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista.

ISBN 978-84-945722-3-4

Firme, I. C.; Paulo, R. M. (2011). O laboratorio de informática nas escolas públicas: um olhar compreensivo para o projeto acessa escola. *CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES:12*. (pp. 4701-4711). Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil.

Goldenberg, M. (2004). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 8. ed. Rio de Janeiro: Record.

Menezes, L. (2016) .O vídeo nos processos de ensino e aprendizagem. http://proec.ufabc.edu.br/uab/prodvideo/TEXTO 4 VIDEO E ENSINO.pdf Consultado 16/9/2016.

Pereira, A. L.; Javaroni, S. L. (2016). A UTILIZAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS EM AULAS DE MATEMÁTICA: O QUE PENSAM OS PROFESSORES. *CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES: 13.* (pp. 1-13). Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil.

Souto, D. L. (2011). FORMAÇÃO CONTINUADA ON-LINE DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ASPECTOS RELATIVOS AO DESIGN EMERGENTE DE UMA PESQUISA. *ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: 14.* (pp1-12), Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba.

Zampieri, M. T.; Javaroni, S. L. (2014). FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADE DE UM CURSO SEMIPRESENCIAL. *SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA:2* (pp.1-6). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-806

AS POTENCIALIDADES DE UM GRUPO DE ESTUDOS DESENVOLVIDO NA PRÓPRIA ESCOLA: REFLEXÕES DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Diná da Silva Correia – Angélica da Fontoura Garcia Silva
dina.uesc@gmail.com – angelicafontoura@gmail.com
Universidade Anhanguera de São Paulo – Brasil

Núcleo temático: Formação de Professores de Matematica.
Modalidade: CB
Nivel educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: Grupos de estudo; Configuração Retangular; Reflexão sobre a prática

Resumo:
Esta comunicação visa analisar reflexões geradas em um grupo de estudos constituído na própria escola na qual, os professores de matemática, participantes desta investigação trabalham. A formação envolveu seis professores em 12 sessões de estudos e focou na Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud, em especifico, as Estruturas Multiplicativas. Durante a formação fomentou-se as discussões acerca da teoria e das estratégias para o seu ensino. Houve a participação da pesquisadora em todos os encontros. Para esta comunicação é analisada a sessão que tratou de situações envolvendo Produto de Medidas, sobretudo a Configuração Retangular. A coleta de dados foi gerada pelas gravações dos depoimentos dos professores os quais foram transcritos integralmente. Teoricamente, para a análise desses depoimentos, utilizou-se as ideias de Schön, Zeichner e Serrazina. A pesquisa mostrou como potencialidades do estudo em grupo, a possibilidade de reflexões sobre a própria prática a partir do compartilhamento de experiencias entre os participantes. Para favorecer aproximação com a prática, o estudo da teoria foi articulado com a análise de estratégias de ensino para o entendimento da configuração retangular, permitindo ao grupo refletir sobre ações que viessem a contribuir para o aprendizado de seus estudantes.

Introdução

Este artigo analisa as reflexões de professores que ensinam matemática, a partir da constituição de um grupo de estudo formado em uma escola no sul do estado da Bahia – Brasil, acerca do Campo Conceitual Multiplicativo, à luz da Teoria dos Campos Conceituais – TCC –, defendidas por Vergnaud (1991, 2009). Os dados para essa investigação foram coletados em uma sessão de estudos na própria escola e as reflexões que foram geradas pelos professores participantes do grupo e a pesquisadora.

Relevância

ISBN 978-84-945722-3-4

O professor que ensina nos anos iniciais tem em sua prática diária necessidade de planejar, executar e avaliar em diferentes áreas de conhecimento, entre elas a matemática. Concordamos com Vergnaud (2009) que “somente um conhecimento claro das noções a ensinar, pode permitir ao professor compreender as dificuldades encontradas pela criança e as etapas pelas quais ela passa” (VERGNAUD, 2009, p.15). A literatura aponta que muitas pesquisas brasileiras e internacionais discutem sobre o Campo Conceitual Multiplicativo e o seu ensino. No Brasil, Nunes, Campos, Bryant e Magina (2002), por exemplo, apresentam um estudo amplo que discute possibilidades de trabalho com essas estruturas desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Os autores fundamentados em Vergnaud (1983, 1987, 1991) apresentam resultados de pesquisa e propõem ao professor um maior protagonismo, chamando sua atenção para a necessidade de que reflitam mais sobre como o aluno aprende e que “[...] procure cumprir o currículo” e ainda “[...] os alunos aprendem melhor quando o ensino começa de onde estão para levá-los a alcançar novos níveis de raciocínio¨ (NUNES et al., 2002, p.190). Vale destacar que o currículo brasileiro utiliza Vergnaud como referência chamando a atenção do professor para a necessidade de trabalhar com as diferentes categorias das estruturas multiplicativas.

Aliado a isso, investigações como as de Fosnot e Dolk (2001) chamam a atenção para a necessidade de o professor quando propõe situações problemas ir além da diversidade do contexto, é necessário também que estruturem a multiplicação de forma progressiva, começando a organizar objetos com o mesmo cardinal e avançando para situações relativas a grupos de objetos por meio dos quais se associe uma disposição retangular. Como, por exemplo, ao quantificar os comprimidos em uma cartela, verificar a quantidade de frutas organizados em uma caixa, ovos em um tabuleiro.

Fundamentação Teórica

São duas as vertentes teóricas que norteiam este trabalho. Uma é relativa a TCC de Vergnaud, em especifico o Campo Multiplicativo. A outra está ligada a formação de professores, em específico a questão da reflexão sobre a prática e para tanto nos apoiamos em Schön (1987), Zeichner (1993, 2008) e Serrazina (1999, 2012).

A Teoria dos Campos Conceituais

Mesmo não sendo uma teoria especifica da matemática, a TCC, foi idealizada com o objetivo de propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos em crianças e adolescentes (VERGNAUD, 1991). Essa teoria possibilita estudar a relação entre os conceitos a partir da análise de conhecimentos explicitados e de invariantes operatórias que estão implícitos nos esquemas e comportamentos das crianças e adolescentes observados em diferentes situações (VERGNAUD, 1991). Para efetivar esse estudo, o autor se utiliza dos princípios de Piaget, e adota como referência o conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do seu domínio. Vergnaud entende como

ISBN 978-84-945722-3-4

conhecimento “tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1991, p.155).

Campo Conceitual Multiplicativo

Vergnaud (1991) considera o Campo Conceitual como um conjunto de situações. E o Campo Conceitual Multiplicativo como “um conjunto de situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações” (VERGNAUD, 1991, p.167). As Estruturas Multiplicativas apresentam em seu campo de estudo a resolução de problemas envolvendo as categorias: Isomorfismo de Medidas, Produto de Medidas, Comparação e Proporcionalidade múltipla. Como para este estudo utilizaremos somente situações envolvendo a categoria de *Produto de medidas* nos ateremos a sua descrição. Vergnaud (2009) considera o *Produto de Medidas* como a segunda grande forma de relação multiplicativa que consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional. A medida de área está inserida nessa categorização e a noção de produto cartesiano de conjuntos explica a estrutura do produto de medidas.

Reflexões sobre a prática e sua relação com o conhecimento profissional

A proposta para um estudo que envolve discussões geradas em torno de uma teoria e a prática posta na sala de aula, com participantes de um grupo de professores que estuda na própria escola foi o ponto de partida desta investigação. Com isso buscamos caminhos para que a teoria auxilie a prática profissional dos professores participantes. Nosso intuito é dialogar com a literatura que versa acerca da reflexão. Reiteramos que este estudo se fundamentou nas ideias de Schön (1987), Zeichner (1993, 2008) e Serrazina (1999, 2012), os quais descreveremos a seguir.

Schön (1987) considera que o saber profissional se traduz num conjunto de competências marcadas pela prática da reflexão em diferentes níveis: Conhecimento na ação – é o conhecimento que os profissionais demonstram na execução da ação; Reflexão na ação – são descrições verbais ocorridas enquanto os profissionais atuam; Reflexão sobre a ação – é a reconstrução mental da ação para tentar analisá-la retrospectivamente. Neste estudo nos ateremos, sobretudo, a reflexão que o professor faz sobre sua ação pedagógica.

Zeichner (1993, 2008), amplia os estudos de Schön, na medida que defende, dentre outros elementos, aquele por meio da qual a prática reflexiva consiste no compromisso em favor da reflexão enquanto prática social. Neste estudo utilizamos Zeichner (1993) como marco teórico, especialmente porque ele ocorreu no seio de um grupo de estudo e por concordarmos com suas concepções acerca da formação docente. Assim, levamos a ideia da reflexão como prática social em consideração para organização da formação. Para o autor o processo de aprender a ensinar, não ocorre somente na formação inicial: “(...) se prolonga durante toda a carreira do professor e de que, independentemente do que fazemos nos programas de formação de professores e do modo como o fazemos, no melhor dos casos só podemos preparar os professores para começarem a ensinar” e complementa: “Os formadores de professores têm a obrigação de ajudar os professores a interiorizarem a disposição e a capacidade de estudarem a maneira como ensinam e de melhorar com o tempo, responsabilizando pelo seu próprio desenvolvimento profissional”. (ZEICHNER, 1993, p. 32). Assim, procuramos, durante o processo formativo no grupo de estudo incentivar o protagonismo dos participantes. Já Serrazina (1999) nos ajuda a relacionar reflexão sobre a prática com o grau de consciência do professor. Sobre o tema a autora expõe:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> (...) a idéia que mudanças nas práticas parecem ocorrer quando os professores ganham autoconfiança e são capazes de reflectir nas suas práticas. Isto pressupõe um elevado grau de conscientização que os ajude a reconhecer as suas falhas e fraquezas e a assumir um forte desejo de ultrapassá-las (SERRAZINA, 1999, p. 168).

Para a autora o grau pelo qual o professor aceita nova informação ou mudança conceitual acontece, em grande parte, determinado por um conjunto de fatores: congruência entre as ideias pré-existentes do professor, suas perspectivas no domínio profissional, e aquelas expressas na formação. Portanto, acreditamos que estudar as estruturas multiplicativas e sua aplicação na prática dos professores dos anos iniciais, oportuniza aos participantes de um grupo de estudos, ampliação do conhecimento matemático e seu ensino, gerado pela reflexão individual e coletiva dentro de um contexto de formação, daí a importância dessa investigação.

Procedimentos Metodológicos

Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa. A coleta de dados se deu por meio dos registros em áudio, feitos pelos professores em conjunto com a pesquisadora, em uma sessão das 12 sessões de estudos em grupos na escola onde os participantes trabalham nos anos de 2015 e 2016. Cada sessão teve em média 02 horas as quais eram organizados de acordo com a disponibilidade de horários dos participantes. Analisamos os depoimentos gravados e transcritos, coletados de 04 professores dos anos iniciais do ensino fundamental, acerca da configuração retangular, uma das categorias descritas como Produto de Medidas, por Vergnaud (2009). Apresentamos estes depoimentos analisados à luz das teorias que norteiam a reflexão sobre a prática.

Análise e Discussão dos Dados

No início do processo formativo foi solicitado aos participantes a elaboração de situações que envolvessem as estruturas multiplicativas. Foi observado que 62,5% das situações elaboradas (20) envolviam isomorfismo de medida, sobretudo, proporcionalidade simples (8 situações de Multiplicação, 12 de Divisão por Partição e 01 de quarta proporcional). Assim inferimos que, as situações foram criadas de acordo com as operações que as resolviam, todavia nenhuma delas tratava da ideia de área. Observamos, então, a necessidade deste grupo discutir e refletir sobre a categoria *Produto de Medidas* e, sobretudo, medida de área. Em decorrência, durante os estudos a respeito da TCC, propusemos focar esse tema. No início, os professores argumentaram terem dificuldade para explorar esse conteúdo. O Professor Gerson (Os nomes apresentados neste estudo são fictícios para preservar a identidade dos participantes), ao analisar uma das ações pedagógicas do processo formativo na qual ele elaborou situações envolvendo estruturas multiplicativas, afirma:

> *Naquela situação, foi o tempo, em que a gente tinha que montar o problema, resolver, imaginar o nível do aluno para o qual vai ser aplicado[referindo-se ao tempo proposto para elaboração – 10 minutos]...quando montamos, entra a questão da matemática, a multiplicação, (...) oito vezes três vai dar vinte e quatro, é mais fácil. Mas quando entra a questão da medida (...) comprimento, largura, tudo isso, ficou uma dúvida na cabeça da gente: imagine passar isso pro aluno;.. A gente tava quebrando a cabeça, imagine pro aluno como seria? Isso eu observei muito na hora de elaborar as questões. (Professor Gerson, 4º ano)*

Analisando esse depoimento é possível observar que esse participante reconhece que as situações que tratavam diretamente da multiplicação (ou divisão) eram mais próximas a sua

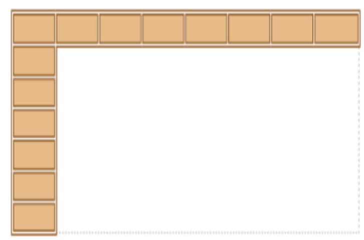
ISBN 978-84-945722-3-4

prática, ele reconhece ainda as que envolviam medidas de superfície (ou área) não eram utilizadas corriqueiramente, isso comprova o que já havíamos observado, anteriormente, durante a elaboração das situações. Além disso, outros depoimentos foram registrados também com essa caraterística, o que entendemos que, nesse compartilhar, a dificuldade de um pode ser reconhecida como a dificuldade da maioria. Essa reflexão compartilhada entre professores é discutida por Serrazina (2012) quando aponta um possível caminho para promover o pensamento no aprendizado dos diferentes conteúdos matemáticos, estabelecendo conexões entre eles. Isso pode surgir quando discutimos em grupos por meio da experiência do outro. O grupo propôs um estudo o uso da malha quadriculada como estratégia de introdução da ideia de área de uma figura retangular, uma vez que ele possibilitaria ao professor uma discussão com seus alunos sobre o produto entre duas dimensões em uma figura plana.

Em outro momento foi solicitado que os professores analisassem como seus alunos responderiam uma atividade, apresentada a seguir no Quadro 1.

Quadro 01 – Atividade 01 apresentada aos participantes do grupo de estudo

O desenho ao lado mostra um trecho de ladrilhamento de uma calçada em que foram colocados os primeiros ladrilhos. a) É possível saber quantos ladrilhos serão usados no total? b) Como você pode obter esse resultado? c) Se você tivesse 36 ladrilhos, como poderia organizá-los para compor um ladrilhamento retangular?



Fonte: EMAI - Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (2013)

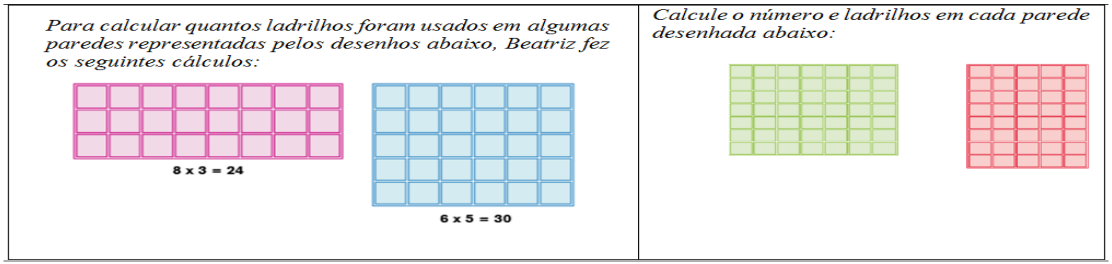
Dentre as respostas apresentadas pelos professores, selecionamos duas exemplares:

> "*Eu acho que ele diria sim (referindo-se as letras A e B) Eles tentariam completar o desenho; Um ou outro poderia até nos surpreender em fazer essa contagem, mas eu acho que de início eles iriam completar esses desenhos*" (Professora Janaína, 3º e 4º ano)
>
> "*Eles iriam completar o quadro e iam somar. Eles usariam a soma e não a multiplicação.*" (Professor Gerson, 4º ano)

No geral, observamos nas respostas apresentadas que a previsão era que os alunos reconheceriam que seria possível fazer a contagem dos ladrilhos. Para calcular os ladrilhos eles consideram que as crianças completariam o quadro utilizariam da contagem. Nesse momento, a pesquisadora aproveitou, inspirada em Fosnot e Dolk (2001), e promoveu a discussão com o grupo de professores sobre as diferentes estratégias que poderiam ser utilizados nessa contagem: contagem um a um (referenciado por eles); adição das parcelas (considerando as parcelas ou o comprimento ou a largura) e a multiplicação. Foi discutida a mudança do grau complexidade em cada estratégia. Para esse propósito analisamos outra situação que também tratava de procedimentos de cálculo na malha quadriculada.

Quadro 02: Atividade 02 apresentada aos participantes do grupo de estudo

ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: EMAI - Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (2013)

Para esta situação os professores, a partir de um modelo pronto, sentiram-se seguros em definir o que os seus estudantes responderiam. Segundo a professora Janaina,

> "*Acho que eles não vão ter dificuldades não, pois eles têm o exemplo lá de cima, e eles vão percebendo o que precisa ser feito nos outros. Quando eles associam para chegarem a um resultado mais fácil. Você vê a diferença deste para a letra C do anterior. Na letra C do anterior, eles vão ter que fazer, nesse tem o modelo para eles associarem.* " (Profa. Janaína)

Aproveitamos esse depoimento para refletir sobre a questão de apresentar um modelo pronto para o aluno. Chegamos à conclusão que esse não seria o caso, chamamos a atenção do grupo para a necessidade de o professor, durante suas aulas, promover a troca de informações entre os alunos sobre as diferentes estratégias utilizadas por eles e leva-los a avançar nesse processo. A introdução do conceito do produto de medidas exige passar por um processo exploratório que promova o avanço das estratégias. Na situação apresentada no Quadro 2 o modelo está pronto, o ideal seria que os estudantes fossem experimentando e chegassem a multiplicação como uma forma mais rápida de cálculo, essa atividade poderia ser apresentada aos alunos pelo professor, depois da experimentação. Entendemos que, nesse momento, os participantes do grupo apresentam evidencias que estão refletindo sobre a prática, a partir de situações vivenciadas na formação. Diante disso, concordamos com Zeichner (2008), quando afirma que ao instigarmos a reflexão do indivíduo sobre a experiência vivida e favorecemos o protagonismo do professor. Dessa forma, estamos contribuindo para que essa prática seja parte integrante no processo formativo reflexivo, na realidade social do indivíduo. Corroboramos com Serrazina (1999), quando enfoca que o comportamento do professor é também influenciado pelo seu conhecimento do conteúdo matemático a ser ensinado, como os alunos devem aprender ou compreender esse conteúdo e ainda os seus mecanismos de ensino. Isso se torna, para a autora, uma característica do desenvolvimento profissional do professor.

Já na questão C, apresentada no Quadro 1, os professores foram unânimes em afirmar que seus alunos não a responderiam com correção. Isto posto, a pesquisadora questionou como eles resolveriam esse item. Observamos que as respostas dadas não foram imediatas, a professora Janaína, inicia as discussões propondo que os 36 ladrilhos pudessem ser organizados apenas na forma quadrada 6 vezes 6, resposta aceita pelos demais participantes. A pesquisadora insistiu indagando outras formas de representação da figura retangular formada pelos 36 ladrilhos. Após algum tempo, a professora Cláudia (5º ano) sugere "9 vezes 4" e assim, os outros professores começaram a apresentar outras possibilidades, como o 2 vezes 18, 12 vezes 3, gerando também outro questionamento do professor Gerson: "*Será que meu aluno chegaria a isso?*" Essa pergunta suscitou no grupo outra discussão sobre procedimentos de ensino. Nesse momento, chegamos à conclusão que uma possibilidade de intervenção seria oferecer uma malha quadriculada para que as crianças desenhassem as diferentes possibilidades. O professor Gerson reflete sobre

ISBN 978-84-945722-3-4

dificuldades que o seu aluno poderia ter ao responder à questão proposta, a partir de uma reflexão sobre a sua própria dificuldade, isso fomenta o repensar em estratégias diferenciadas para abordar o conteúdo. Essa investigação nos fez entender que, neste processo formativo foi oportunizado aos participantes momentos de estudos e reflexões sobre a prática, e isso nos deu indícios de ter contribuído para o desenvolvimento profissional do professor.

Considerações Finais

A análise deste estudo nos permitiu perceber a importância de dar voz ao professor dos anos iniciais durante as discussões em um grupo de estudos acerca da TCC, sobretudo a categoria *configuração retangular*. A oportunidade de conhecer, por meio do estabelecimento de relações entre as vivências ocorridas no grupo (sugestões de procedimentos metodológicos) e experiências advindas da prática de cada um dos participantes, suas reflexões individuais e coletivas, possivelmente, promoveram mudanças na prática docente. É preciso também pensar em criar ambientes de estudos na própria escola que favoreçam o compartilhar das experiências do grupo à luz de teorias e de pesquisas que possibilitem reflexões continuas.

Referencias. Bibliográficas

Fosnot,C.T. Dolk,M.(2001). *Young Mathematicians at work. Constructing Multiplication and Division*. Heinemann. Portsmouth,NH

Nunes, T. Campos,T.M.M. Magina, S. Bryant (2002). *Introdução à Educação Matemática. Os números e as operações numéricas*.2ª Ed. São Paulo. Proem.

São Paulo (2013). Secretaria da Educação. EMAI: Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Schön, D.(1992). Formar professores como reflexivos. En: Nóvoa A. (Org) . Os professores e sua formação. Lisboa: Dom Quixote. pp.79-91

Schön, D (1987). *Educating the reflective practtioner – toward a new design for teaching e learnig the professions.* San Francisco: Jossey Bass

Serrazina, M.L. (1999). Desenvolvimento Profissional do Professor: Contributos para Reflexão.En I.Vale e J.Portela (Eds). IX SIEM Actas (pp.63-78).Lisboa:APM

Serrazina, M.L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores.266-283

Vergnaud, G. (1991). A Teoria dos Campos Conceituais. En:Recherches en didactique das mathématiques, Grenoble.V10, 133-170

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba: Ed. da UFPR.

Zeichner, K.(1993). *A formação reflexiva de professores: ideias e práticas.* Lisboa: EDUCA.

Zeichner, K.(2008). Uma análise crítica sobre a "Reflexão" como conceito estruturante na Formação Docente. Campinas/SP, vol. 29, n. 103, p. 535-554.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-807

O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Graciela Moro – Floriano Viseu – Ivanete Zuchi Siple
gracimoro@gmail.com – fviseu@ie.uminho.pt – ivazuchi@gmail.com
UDESC, Brasil – CIEd, Universidade do Minho, Portugal – UDESC, Brasil

Núcleo temático: V. Recursos para o ensino e a aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Universitário
Palavras chave: GeoGebra, Transformação Linear, Aprendizagem, Alunos do ensino superior.

Resumo

No estudo de tópicos de Álgebra Linear os alunos do ensino superior tendem a manifestar dificuldades devido à natureza abstrata de muitos dos seus conceitos, como se verifica na aprendizagem de transformação linear. Recorrendo ao GeoGebra, procuramos averiguar o seu contributo na aprendizagem de transformação linear de alunos dos cursos de Engenharia Elétrica e de Ciência da Computação. Os dados foram recolhidos através da resolução de duas questões de uma tarefa e de uma entrevista semiestruturada. Dos resultados obtidos, constata-se que os alunos utilizaram o GeoGebra para, através da manipulação dinâmica, efetuarem aplicações de transformações lineares no plano e no espaço. Nessas aplicações, a maior parte dos alunos estabeleceu conexões entre diferentes representações (algébrica, geométrica e matricial) e criou condições para generalizar a transformação efetuada em detrimento de recorrer somente a casos particulares, tal como aconteceu com alguns alunos. Os alunos que não estabeleceram a conexão entre as diferentes representações denotam ter uma conceção frágil do conceito de transformação linear. As maiores dificuldades ocorreram na implementação do cisalhamento no espaço. A utilização do GeoGebra contribuiu para visualizar as transformações realizadas, através da alteração dos valores dos parâmetros envolvidos, e para promover o raciocínio lógico-dedutivo na análise de propriedades dessas transformações.

Introdução

As transformações lineares exercem um papel central no estudo da teoria da Álgebra Linear e é um conteúdo que se encontra em aplicações contextualizadas de diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, na computação gráfica as transformações lineares são usadas para esticar, encolher, girar, deformar, cada pixel da imagem, até que toda a imagem tenha um mesmo padrão. Na matemática, dentre outras aplicações, as transformações lineares, no plano ou no espaço, podem representar algumas deformações como a dilatação, a contração, a reflexão, a rotação e o cisalhamento.

A Álgebra Linear pode simplificar a solução de numerosos problemas, de uma maneira geral e unificada, que poderiam ser resolvidos por outros métodos mais complexos (Harel & Trgalová, 1996). O caráter unificador e generalizador é o que torna difícil o estudo dos seus

ISBN 978-84-945722-3-4

conceitos, atendendo às suas características de abstração, formalismo e à centralidade da prova. O uso de diferentes linguagens, representações, símbolos e o tratamento axiomático, que são necessários em Álgebra Linear, acabam por gerar obstáculos na aprendizagem de conceitos dessa disciplina denominados por *obstáculos do formalismo* (Dorier et al., 2000). Tais obstáculos desafiam o professor que leciona Álgebra Linear a definir a melhor estratégia que promova a aprendizagem desses conceitos. Uma alternativa para apoiar a aprendizagem dos alunos é o uso das tecnologias de geometria dinâmica, por permitir a visualização de diferentes características dos objetos matemáticos, não perceptíveis nos registros de natureza algébrica.

Nesse contexto, apresentamos um estudo que tem por objetivo averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de transformação linear por meio de uma tarefa proposta aos alunos de dois cursos de graduação que frequentaram a disciplina de Álgebra Linear. Tal tarefa consistia no reconhecimento, pelo aluno, do conceito de transformação linear, no plano e no espaço, em diferentes representações: algébrica (vetorial/matricial) e geométrica, com o apoio do GeoGebra.

A Aprendizagem de Transformação Linear apoiada pelo GeoGebra

O conteúdo de transformação linear faz parte do currículo dos cursos de Matemática, Engenharia, Ciências da Computação e áreas afins, sendo os conhecimentos básicos sobre esse tópico essenciais para a compreensão de aplicações da Álgebra Linear em diversos contextos. No ensino de transformação linear adotamos a definição de Anton (2012):

> Se $T: V \to W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada transformação linear de V em W se as duas propriedades seguintes forem válidas com quaisquer vetores u e v em V e qualquer escalar k: i) $T(kv) = kT(v)$ [homogeneidade]; ii) $T(u + v) = T(u) + T(v)$ [aditividade]. No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada operador linear do espaço vetorial V. (p. 433).

Se V e W são subespaços vetoriais de dimensão finita, então uma transformação linear poderá ser representada matricialmente por $T(\boldsymbol{v}) = A.\boldsymbol{v}$, onde A é a matriz na base canônica associada a essa transformação. Assim, muitos problemas associados às transformações lineares podem ser resolvidos com a teoria de matrizes. Em nossa prática, observamos que a compreensão dessa definição, em termos de representação algébrica de vetores, como a transição para a representação algébrica matricial, não é tarefa trivial para os alunos. Não é

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

raro que os alunos operem mecanicamente os vetores desses espaços vetoriais sem estabelecerem as conexões com as aplicações dessas operações.

Os diferentes modos de descrição das transformações lineares– *o abstrato, o algébrico e o geométrico* – são apontados como uma das dificuldades conceituais para a aprendizagem nessa disciplina (Hillel, 2000). Assim, é importante que a abordagem desse assunto propicie a exploração e transição entre essas diferentes representações (Dreyfus, Hillel & Sierpinska, 1998).

Uma das maneiras de promover a exploração das diferentes representações é aliar aos processos de ensino e aprendizagem as potencialidades dos softwares de geometria dinâmica, como, por exemplo, o GeoGebra. Nesse ambiente, podemos explorar simultaneamente um objeto matemático em diferentes representações, tais como o algébrico e geométrico. Por exemplo, num cisalhamento pode-se estabelecer, de maneira dinâmica, o fator de cisalhamento de uma determinada figura, por meio do controle deslizante, visualizando o impacto dessa interação tanto pela representação algébrica do cisalhamento (vetorial/matricial) quanto pelo efeito gráfico na figura. Também é possível entrar com a transformação em representação matricial e utilizar a ferramenta de "AplicarMatriz" para realizar o cisalhamento na figura. Assim, o aluno pode simular a variação do fator de cisalhamento, visualizando o que essa mudança provoca nos diferentes registros de representação. Essa potencialidade da variação dinâmica de uma variável é de suma importância para os alunos explorarem situações particulares, estabelecendo conjecturas que possam auxiliar na compreensão genérica de certas propriedades (Turgut, 2017). Pesquisas em Educação Matemática apontam a importância da visualização no ensino de Matemática (Arcavi, 2003; Diković, 2007; Tall, 1991), defendendo que não é apenas para fins ilustrativos mas que quando utilizada de forma adequada pode ser reconhecida como uma componente importante do raciocínio, possibilitando formas diferenciadas da compreensão conceitual.

Método

Com este estudo pretende-se averiguar o contributo do GeoGebra na aprendizagem de transformação linear por meio de uma tarefa proposta a alunos de dois cursos de graduação que frequentaram a disciplina de Álgebra Linear. A tarefa foi aplicada por duas professoras em duas turmas de graduação, uma em Engenharia Elétrica e outra em Ciência da

ISBN 978-84-945722-3-4

Computação, contemplando 55 alunos matriculados, sendo que 40 alunos (20 duplas) entregaram a atividade no ambiente lápis e papel e 38 (19 duplas) no ambiente computacional. A tarefa contemplou operadores lineares no plano e no espaço, envolvendo dois momentos: o primeiro no ambiente lápis e papel (ver Anexo A) e o segundo no ambiente computacional (ver anexo B) . No primeiro momento o objetivo era propiciar a transição do registro algébrico para o registro geométrico, aferindo o efeito geométrico quando aplicamos uma transformação linear em um objeto geométrico do plano. O segundo momento, no ambiente computacional, envolvia a implementação de forma dinâmica da questão apresentada na Tabela 1 (Anexo A) e ainda implementar no $\mathbb{R}^3$, de forma também dinâmica, um entre os operadores lineares: Rotação em torno de um eixo, Reflexão através de um plano qualquer, Reflexão através de uma reta qualquer que passe pela origem e Cisalhamento nas direções xy, xz ou yz. O objetivo dessa segunda etapa era propiciar ao aluno a visualização de forma dinâmica do efeito geométrico dos operadores lineares envolvidos sobre um objeto geométrico, além da transição do registro algébrico para o geométrico. A Tabela 2 (Anexo A) ilustra a atividade proposta.

Na busca de identificarmos como os alunos fazem a transição nos diferentes registros de representação, a identificação da aplicação e a interação com o Geogebra, adotamos uma abordagem qualitativa e interpretativa na análise de conteúdo dos registros produzidos pelos alunos e das entrevistas semiestruturadas realizadas a 10 alunos.

Resolução da tarefa pelos alunos

Na questão 1 (Tabela 1, Anexo A), realizada primeiramente com lápis e papel, pretendia-se que o aluno encontra-se a solução simplesmente pela observação de que a *reflexão através do eixo* x transforma cada vértice (x, y) do polígono em $(x, -y)$ e que na reflexão através do eixo y a imagem resultante é da forma $(-x, y)$. Já para a reflexão através da reta $y = ax$, a imagem resultante não é óbvia. Nesse caso, os alunos deveriam encontrar de forma genérica a lei da transformação linear e então encontrar a imagem de cada um dos vértices, transitando da representação algébrica da transformação linear para a geométrica. Analisando os registros escritos dos alunos observamos que 9 duplas conseguiram fazer a transição da representação algébrica para a geométrica, sendo que 8 duplas apenas fizeram o registro geométrico da imagem sem apresentar os cálculos de como chegaram à imagem resultante.

ISBN 978-84-945722-3-4

Verificamos que em alguns registros os alunos utilizaram a ferramenta pronta no Geogebra de reflexão através de uma reta. Uma dupla fez apenas o registro algébrico da questão, não conseguindo transitar para o geométrico e 2 duplas não fizeram a questão.

Na análise da questão 2 (Tabela 1, Anexo A), realizada no GeoGebra, que nada mais é do que a implementação de forma dinâmica da questão 1, observamos que os alunos não tiveram dificuldade de a executar. Embora no enunciado da questão não se exigisse a representação matricial da transformação, a maioria dos alunos apresentou-a. Como deveriam implementar de forma dinâmica, não poderiam usar a ferramenta pronta do software para a reflexão através da reta (que funciona para a reta estática). Assim, tiveram que criar um parâmetro a para o coeficiente angular da reta genérica $y = ax$ para poder fazer a variação, obtendo a reflexão através de qualquer reta que passe pela origem ($a \neq 0$). Assim, com lápis e papel os alunos obtiveram a lei da transformação linear definida pela reflexão através de uma reta específica.No ambiente computacional, foi necessário encontrar a lei da transformação e a representação matricial para um a qualquer, pois para obter a imagem da transformação do polígono tiveram que aplicar a matriz em cada vértice do polígono. Aqui se verifica a transição entre a representação algébrica (vetorial/matricial) e a geométrica, como ilustra a Figura 1.

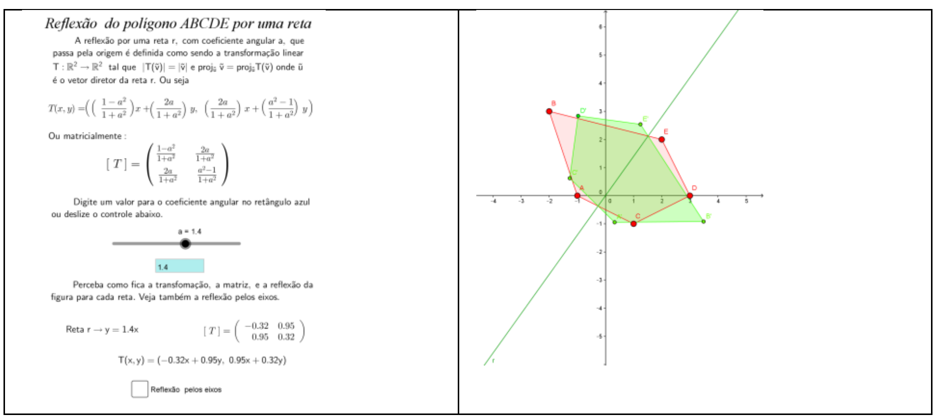


Figura 1: Reflexão através de uma reta qualquer que passa pela origem (Fonte: Produção dos alunos M e LF da graduação em Engenharia Elétrica)

A questão 3 (Tabela 2, Anexo A) envolvia a exploração do ambiente 3D do GeoGebra, que não era familiar aos alunos. De forma geral, os alunos têm dificuldade em visualizar as transformações no espaço quando se trabalha, em sala de aula, com quadro e giz. A ideia dessa questão era, além de proporcionar a visualização das transformações em diferentes perspectivas e possibilitar aos alunos transitar entre as diferentes representações como na

ISBN 978-84-945722-3-4

questão 2, desafiar os alunos a construir uma aplicação, com as ferramentas 3D do GeoGebra, usando os conhecimentos adquiridos sobre transformações lineares. Diković (2007) considera que o professor tem o papel de estimular os estudantes no processo de construção de conhecimento, mas que simplesmente falando, fazendo cálculos e mostrando, no quadro ou no software, o efeito de uma transformação numa aplicação construída por ele é diferente do aluno ter que mobilizar os seus conhecimentos para implementar tal aplicação. Embora seja no $\mathbb{R}^3$, visível aos alunos, são conceitos abstratos. Concordamos com o autor de que os alunos têm que adquirir conhecimento por si mesmo e esse foi nosso objetivo ao propor a tarefa. Essa ideia foi corroborada pelos alunos, na entrevista realizada, que consideram de que aprendem mais quando têm um problema para resolver ao invés de ver a solução já pronta:

> *Eu aprendo muito mais quando tenho que interagir com o problema, quando tenho um problema para resolver. No quadro vês, até entendes, mas não é tão aprofundado quanto ter que resolver um problema. (Aluno R, Elétrica)*
>
> *É esse tipo de atividade que ajuda a gente a pensar. (Aluno V, Computação)*

Na questão 3, os alunos deveriam escolher um objeto para aplicar a transformação, construí-lo graficamente, obtendo de forma genérica a matriz da transformação. Observamos que apenas uma dupla não usou o conceito de transformação linear para obter a rotação em torno de um eixo, usou a ferramenta de giro do GeoGebra. Os demais conseguiram fazer a transição entre as representações algébrica (matricial) e geométrica como era exigido. Para algumas transformações, as professoras em sala de aula já haviam encontrado a matriz, então os alunos usaram este resultado. Mas acreditamos que alguns alunos foram além disso, conseguiram a transição entre representações (vetorial/matricial e geométrica), como evidenciam os alunos L e M:

> *Primeiro fizemos os cálculos para encontrar a matriz da transformação e depois colocamos no GeoGebra. (Aluno M, Elétrica)*
>
> *Também fizemos as contas no papel, calculamos a transformação de cada ponto para depois conferir no computador. (Aluno L, Elétrica)*

No caso do cisalhamento, só havia sido explorado no plano. Como na questão 3 foi exigido no espaço, essa foi a questão de maior dificuldade, pois a quem coube trabalhar com essa operação tiveram que pesquisar como seria a sua “lei”. Por exemplo, na direção do plano xy, a transformação é descrita por $T(x, y, z) = (x + az, y + az, z)$, onde a é o fator de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

cisalhamento, conforme ilustrado na Figura 2. A dificuldade aqui foi que alguns alunos consideraram fatores de cisalhamento distintos nas direções x e y.

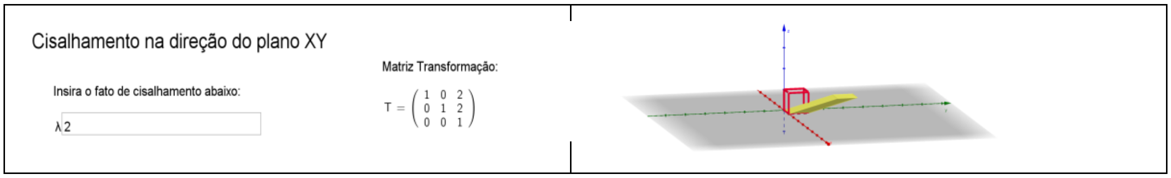


Figura 2: Cisalhamento na direção xy (Fonte: Produção dos alunos V e B da graduação em Ciência da Computação)

Na opinião de alguns alunos, a execução da tarefa no GeoGebra contribuiu para a visualização, em diferentes perspectivas, do efeito de uma transformação linear sobre um objeto.

> *Uma das contribuições é poder visualizar o que está acontecendo. Quando por exemplo você faz uma reflexão através de uma reta y=2x, encontra só para esse valor a imagem, não consegue variar o "a". Você consegue dar mais possibilidades para a mesma transformação, consegue ver de forma dinâmica a transformação. Você representa a matriz genérica da transformação e só faz variar o parâmetro. (Aluno F, Elétrica)*

> *Quando você está fazendo apenas no papel tem que ir imaginando, no computador conseguimos ver o 3D que não conseguimos ver no papel. Você até consegue fazer um desenho, mas é estático. (Aluno LF, Elétrica)*

A partir da manipulação o aluno pode experimentar as diversas formas de representação de um objeto matemático, além de poder variar as entradas de uma matriz, para visualizar o que essa mudança provoca nos diferentes registros de representação. Além disso, permite que o estudante veja e explore relações matemáticas e conceitos que para ele são difíceis de entender com lápis e papel, como declara o aluno F:

> *Contribuiu para a visualização. Em sala de aula é muito abstrato, às vezes não dá para entender direito e ali ficou muito mais fácil...quando fica apenas na teoria fica muito mais complicado... (Aluno C, Computação)*

Os alunos tiveram dificuldade em lidar com o GeoGebra. Em algumas aulas de Álgebra Linear foram mostradas algumas interpretações geométricas utilizando o software, mas não foi proposto uma tarefa antes dessa para os alunos manipularem. Como mencionamos antes, foi deixado como um desafio para os alunos reconhecerem as potencialidades do software. De acordo com alguns alunos,

> *A maior dificuldade foi o software. Os professores costumavam mostrar em sala de aula para visualizar alguma coisa, mas a gente nunca tinha usado efetivamente. (Aluno C, Computação)*

> *A parte mais difícil foi encontrar todas as ferramentas no GeoGebra, como adicionar matriz, como adicionar as barras deslizantes, porque eu praticamente nunca tinha usado o software. (Aluno M, Elétrica)*

> *A parte computacional demandou bastante tempo para aprender como funciona o GeoGebra... no final foi muito bom fazer o trabalho e ver funcionando. (Aluno B, Computação)*

ISBN 978-84-945722-3-4

Assim, a tarefa possibilitou aos alunos explorar as potencialidades do GeoGebra para o ensino de transformação linear, permitindo o uso simultâneo das representações vetoriais, matriciais e gráfica, de forma relacionada ou articulada dinamicamente.

Considerações finais

A tarefa proposta possibilitou aos alunos trabalhar simultaneamente com as representações algébrica (vetorial/matricial) e geométrica de algumas transformações lineares especiais no plano e no espaço. Interagir com os objetos dinamicamente, podendo arrastá-los e modificá-los, enriqueceu a própria concepção do objeto, pois estes mantiveram propriedades somente quando foram construídos corretamente, quando os alunos mobilizaram os conhecimentos matemáticos inerentes ao conceito de transformação. Além da interatividade, a possibilidade de visualização, no plano e no espaço, que o GeoGebra apresenta, permitiu aos alunos explorarem o impacto geométrico das transformações que eram difíceis de mostrar apenas com lápis e papel. Assim, aliar as ferramentas que possibilitam explorar as diferentes representações de um determinado conceito matemático, trabalhando com exemplos visualmente concretos de objetos e conceitos lineares pode ser uma ponte para ultrapassar o obstáculo do formalismo e dar uma abordagem mais adequada para um curso de Álgebra Linear.

Apesar das dificuldades que os alunos enfrentaram na manipulação do software e mesmo com o cisalhamento no espaço, eles se sentiram desafiados para a resolução da tarefa pois tiveram a possibilidade de reconhecer, pesquisar e ativar novos conhecimentos para propor a solução. Essa é a grande vantagem em relação a uma aula em que o professor propõe e resolve exercícios ou usa a ferramenta tecnológica e o aluno apenas observa. A socialização da prática também foi importante no processo de aprendizagem pois permitiu a visualização das diferentes transformações implementadas pelos colegas sobre várias perspectivas, bem como foi um momento para os colegas e professoras contribuírem em relação ao que poderia ser melhorado no trabalho e detectar possíveis erros de implementação e interpretação. Foi nesse momento que foram identificados os erros de interpretação em relação ao cisalhamento no espaço. Com base nas contribuições obtidas na apresentação foi oportunizado aos alunos entregarem uma nova versão da tarefa e após isso foi atribuída uma classificação.

Referências

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anton, H. (2012). *Álgebra linear com aplicações*. Howard Anton, Chris Rorres: tradução técnica: Claus Ivo Doering. 10 ed.-Porto Alegre: Bookman.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, pp. 215–241. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: some examples. *The Teaching of Mathematics*, vol. X, 2, 109–116.

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, pp. 85–124. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri based Linear Algebra: transformations. In *Proceedings of the First Conference on European Research in Mathematics Education*, v. 1, pp. 209-220, Osnabruek.

Harel, G., Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. In: A. J. bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 675-700. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hillel, J (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, pp.191-207. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

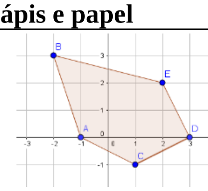
Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus. *In*: W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, pp. 121-126. Washington: MAA.

Turgut, M. (2017). Students' reasoning on linear transformations in a DGS: a semiotic perspective. *CERME 10- 10th Congress of European Research in Mathematics Education*, Dublin, Ireland.

Anexo A: Atividade proposta aos alunos no ambiente lápis e papel

Tabela 1. Interpretação geométrica da reflexão no plano (2-D) com lápis e papel

1. Dado o polígono ABCDE, na Figura 1. Represente geometricamente a imagem desse polígono nas seguintes transformações:



a) reflexão em torno do eixo x

b) reflexão em torno do eixo y

c) reflexão em torno da reta $y = kx$

Para a escolha do k, verifique quais são as vogais presentes no primeiro nome dos membros da equipe, e use o maior valor numérico associado, conforme abaixo:

A	E	I	O	U
1	2	3	4	5

Por exemplo: Gabriel e Róger. Usar k=4.

Tabela 2. Questões da tarefa proposta no ambiente computacional em duas e três dimensões

2. Escolha uma ferramenta tecnológica para representar dinamicamente as transformações ocorridas no polígono ABCDE (da questão 1).

3. Utilizar uma ferramenta tecnológica para implementar um dos operadores lineares no $\mathbb{R}^3$: Rotação em torno do eixo x, Rotação em torno do eixo y, Rotação em torno do eixo z, Reflexão através de um plano que passa pela origem, Reflexão através de uma reta que passa pela origem, Cisalhamento na direção xy, Cisalhamento na direção yz, Cisalhamento na direção xz.

Diretrizes para a questão 3:

ISBN 978-84-945722-3-4

Escolha um objeto geométrico para aplicar o referido operador no $\mathbb{R}^3$ e apresente a atividade, na ferramenta tecnológica, de maneira organizada, dinâmica e interativa. (Deve ficar claro qual o papel do operador linear ao transformar o objeto escolhido). A implementação deve atender os requisitos:

i. Rotação em torno de um eixo coordenado: apresentar campo de entrada para o ângulo de rotação, fazer a transformação do objeto geométrico para cada ângulo e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação para cada ângulo.

ii. Reflexão através do plano: apresentar campo de entrada para a equação do plano, fazer a transformação do objeto geométrico para o plano qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente a transformação.

iii. Reflexão através da reta: apresentar campo de entrada para a equação da reta, fazer a transformação do objeto geométrico para a reta qualquer da entrada e apresentar a matriz do operador correspondente à transformação.

iv. Cisalhamento: apresentar campo de entrada para o fator de cisalhamento, fazer a transformação do objeto geométrico e apresentar a matriz do operador correspondente para cada fator de cisalhamento.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) e dos grupos de pesquisa PEMSA e NEPesTEEM e ao grupo colaborativo de Ensino de Álgebra Linear - ECOA pelas discussões das atividades.

CB-809

EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DURANTE LA FORMACIÓN DEL FUTURO LICENCIADO EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Leidy Hernández Mesa – Gricelda Mendivil Rosas – Mario García Salazar – Karla Lizeth Lugo González
leidyhm@uabc.edu.mx – gmendivil@uabc.edu.mx – mariogs@uabc.edu.mx – lugo.karla@uabc.edu.mx
Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa de la Universidad Autónoma de Baja California, México

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Proceso EA, Comprensión Matemática, formación docente.

Resumen
La metodología propuesta para estudiantes en formación docente en Matemática, es el resultado obtenido al analizar y describir cómo se da la comprensión matemática en el estudiante en formación para licenciado en Docencia de la Matemática (LDM) de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México, dentro de la asignatura de Diseño de Actividades Didácticas en Matemáticas (DADM), en un momento de su carrera en el que comienza a introducirse en la práctica profesional, lo cual lo lleva a generar actividades didácticas para la enseñanza de la Matemática. Parte de la metodología "Me descubro-Aprendo-Enseño" busca que el futuro docente descubra sus áreas de oportunidad y las trabaje colegiadamente en su clase buscando mejorar su proceso de aprendizaje y por ende su proceso de enseñanza. Lograr entender, desde la formación docente el porqué debemos preguntarnos: qué tanto sabe mi estudiante del contenido a aprender, qué tanto sé yo, como docente, de lo que voy a enseñar y para qué le servirá dichos saberes a mi educando; es uno de los propósitos fundamentales de la metodología presentada, la cual se ha estado utilizando con éxito en un contexto donde se forman docentes.

La educación de calidad es tema recurrente en México pues busca formar personas competentes dentro de diversas áreas, pero ante todo que sean personas activas dentro de su medio y que, mediante el respeto, la tolerancia, el trabajo en equipos, etc., puedan encontrar soluciones o presentar propuestas que ayuden a construir entre todo un país con más oportunidades y para todos y por todos.

ISBN 978-84-945722-3-4

La educación va de la mano con los valores, aportando sin duda al crecimiento de un país en tanto permite formar personas no sólo capaces de ejercer una profesión sino de ser ejemplo en materia de ética, responsabilidad, tolerancia, del saber y promoción del trabajo en equipos. Ejercer con calidad no siempre garantiza el logro de la totalidad de las metas propuestas y el desarrollo de seres competentes para un contexto determinado; sin embargo, paulatinamente crea bases sólidas, permitiendo obtener multiplicadores de buenas costumbres, conocimientos, habilidades. Lo mencionado no constituye una excepción en el campo de las matemáticas, por lo que el proceso enseñanza-aprendizaje es uno de los temas a tratar de forma constante dentro de las situaciones que aquejan a la educación, más aún en estos tiempos donde se busca que el educando no sólo se dote de conocimientos, habilidades, destrezas, sino también de actitudes y valores que le permitan ser competentes en un contexto dado.

El tema de investigación se centra en analizar y describir cómo se da la comprensión matemática en el estudiante de sexto semestre de la Licenciatura en Docencia de la Matemática (LDM) de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE) de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), que cursa la asignatura de Diseño de Actividades Didácticas en Matemáticas (DADM). En este momento de su carrera, a partir de sexto semestre, comienza a introducirse en la práctica profesional, generando actividades didácticas para la enseñanza de la Matemática.

Se encuentra un área de oportunidad, la cual se observa al comienzo de sexto semestre en la asignatura DADM cuando el docente de dicha unidad de aprendizaje realiza un diagnóstico a principios de semestre y observa que en la mayor parte los estudiantes saben resolver los ejercicios, los problemas matemáticos, pero con muchas deficiencias en el poder explicar, no sólo de dónde proviene ese contenido matemático, sino qué relación podemos hacer con dicho contenido para generar actividades didácticas que se acomoden al contexto propio de sus educandos, o relacionados de una forma u otra con aspectos cotidianos que a su vez ayuden a resolver problemáticas reales a través de las matemáticas y así diseñar procesos de aprendizaje significativos

Lo anterior nos lleva a indagar, no tanto los porqué sino el cómo generar en los estudiantes un conocimiento y desarrollo de habilidades que les permita implementar estrategias y actividades didácticas acordes al enfoque constructivista, para desarrollar competencias en

ISBN 978-84-945722-3-4

sus educandos, siendo la intervención educativa la que nos ayudará a concluir cómo se puede dar un crecimiento en el futuro docente de matemáticas y cómo apoyarlo desde su formación. De ahí que el objeto de estudio sea observar y analizar todo el proceso de aprendizaje y enseñanza en dicho estudiante en cuanto a la comprensión de definiciones, conceptos y procedimientos matemáticos fundamentales en orden de generar actividades didácticas desde un enfoque constructivista, dirigido a favorecer el aprendizaje de sus educandos desde una posición de guía-asesor, por lo que debe diseñar estrategias para que ambas partes del proceso educativo se cumplan.

La estrategia tiene varios momentos los cuales pueden verse en el instante de la asesoría a alumnos del mismo nivel educativo, de nivel secundaria o de preparatoria; en la misma clase de DADM cuando el docente genera una problemática buscando encontrar el desequilibrio cognitivo para con ello provocar un momento de análisis, reflexión y trabajo colegiado que apoyará a dicho estudiante en formación docente a vivenciar cómo trabajar sus áreas de oportunidades.

Cada momento de la estrategia la convierten en una metodología de enseñanza que busca que el estudiante/futuro docente de matemáticas detecte sus áreas de oportunidades desde su formación y refuerce desde la guía/asesoría del docente de didáctica o materias afines cómo profundizar en el contenido matemático, cómo analizar el cómo aprende nuestros educando y el cómo diseñar el proceso de enseñanza sin descuidar el contexto, los estilos de aprendizaje y la diversidad socio-económica-cultural-política que se encuentra inmersa dentro de los sujetos que son parte del proceso enseñanza-aprendizaje.

Se busca analizar y describir cómo se va dando el aprendizaje en los estudiantes de la Licenciatura en Docencia de la Matemática, así como la importancia de llevar al futuro docente de matemáticas a un nivel de desequilibrio cognitivo que le despierte la necesidad de profundizar en aquello que debe enseñar, logrando con ello implementar una metodología de enseñanza (en tres momentos) donde el educando se Descubra (descubra sus áreas de oportunidades) – Aprenda (analice, investigue, trabaje en equipos colaborativos, etc.) – Enseña (es capaz de lograr mayor nivel en los saberes para así poder generar aprendizajes significativos en sus educando o en sus compañeros en las asesorías entre pares)

Con los cambios que se han dado en la enseñanza y aprendizaje a través de la implementación de las reformas educativas, se ha generado una necesidad de actualización docente y

ISBN 978-84-945722-3-4

acompañamiento en torno a la enseñanza bajo un enfoque constructivista para desarrollar competencias. Cuando mencionamos constructivista lo hacemos desde el momento en que se busca que el educando busque asimilar el conocimiento en un proceso de anclaje de los conocimientos previos con los que va construyendo a través de la interacción entre él y sus compañeros o entre él y su medio, así como la relación que va haciendo a través de lo que ha aprendido convirtiéndose ello en su experiencia vivida que lo ayudará a poder encontrar el cómo anclar y así lograr la asimilación del conocimiento y encontrar su aplicación para poder resolver una problemática propia de su cotidianidad.

Según Hernández (2004), el éxito o el fracaso de una clase están condicionados por una variedad considerable de factores. Estos factores se manifiestan tanto en el momento de la clase, como en etapas anteriores a ella y están relacionados unos con el profesor, otros con los estudiantes y otros tantos con la situación de enseñanza en el sentido más amplio; es decir, considerando también todas las situaciones ambientales y materiales que pueden intervenir.

Hernández (2004), clasifica a las funciones didácticas, como partes integrantes del proceso de enseñanza-aprendizaje, en:

a) La motivación.

b) La orientación hacia el objetivo.

c) El aseguramiento del nivel de partida

d) La elaboración del nuevo contenido.

e) La fijación.

f) El control y valoración del rendimiento.

Lo anterior nos lleva a la reflexión de que, si un futuro docente no puede llevar a cabo con claridad dichas funciones, entonces debemos detenernos y analizar qué tan profundo es el conocimiento sobre la disciplina a enseñar, en nuestro caso las matemáticas.

Asegurar el nivel de partida no es informar o mandar a investigar, sino es indagar sobre lo que se propone como aprendizaje esperado en los educandos y, a partir de ello, generar una serie de preguntas, reflexiones que lleven a que el docente encuentre los aspectos necesarios en los esquemas cognitivos que se ha formado a lo largo de su educación y lo relacione con su experiencia para poder lograr el mejor diseño posible de enseñanza-aprendizaje para su asignatura.

ISBN 978-84-945722-3-4

¿Qué sucede si un docente al momento de impartir una clase no puede generar preguntas que guíen al estudiante para que logre el aprendizaje esperado?

Lo anterior implica no sólo el conocimiento didáctico sino también en la especialización de la enseñanza de la disciplina, en este caso la Matemática.

De ahí las preguntas de investigación que nos hicimos en esta experiencia que se presenta: ¿Cuál es el grado de comprensión en cuanto a conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos de los estudiantes de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC, y qué significados e implicaciones conlleva a la hora de desarrollar actividades didácticas para llevarlas a cabo en su práctica profesional?

Preguntas secundarias:

- ¿Cómo se desarrolla el conocimiento matemático en el estudiante de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC?
- ¿Cómo interpreta los conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos el estudiante de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC al momento de explicar los porqué de lo que va aprendiendo o planeando?
- ¿Cómo se da la interacción con el contenido matemático y sus implicaciones entre el docente de DADM y el estudiante de la LDM de la FPIE de la UABC en sexto semestre?

La investigación pretendía describir, analizar e interpretar el grado de comprensión de los estudiantes de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC en cuanto a definiciones, conceptos, procedimientos matemáticos y sus implicaciones en su quehacer como futuros docentes.

Desde la perspectiva del docente investigador se buscaba generar mecanismos de enseñanza y aprendizaje que apoyen a que el estudiante, futuro docente de matemática, no sólo tenga el conocer, sino que llegue al Saber hacer y así poder completar los cuatro saberes de la educación (Saber (Conocer), Saber hacer, Saber Convivir y Saber Ser) dentro de su propio proceso de enseñanza y aprendizaje (hoy analizados desde el Saber hacer y Saber ser, los cuales incluyen los otros dos)

La preparación del docente, la calidad educativa se debe buscar desde la formación inicial donde interviene todo los contenidos teóricos-metodológicos que instruyen a un docente, pero cuidando no quedarnos en el qué tengo que enseñarle como formador de formadores,

ISBN 978-84-945722-3-4

sino en qué tengo que observar en ese futuro docente que evidencie un trabajo profundo que realmente forme a un docente preparado en lo disciplinar y didáctico.

Los propósitos u objetivos que se tomaron en cuenta fueron:

Propósitos:

Describir, analizar e interpretar el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto semestre de la Licenciatura en Docencia de la Matemática de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa de la Universidad Autónoma de Baja California en cuanto a conceptos, definiciones, procedimientos matemáticos que les apoyará al momento de impartir una clase en su práctica profesional.

Propósitos específicos:

- Proponer una estrategia para el aprendizaje como para la enseñanza de las matemáticas en el estudiante de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC.
- Describir y analizar el proceso de interpretación de los conceptos, definiciones y procedimientos matemáticos en el estudiante de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC al momento de preparar un tema para impartirlo en su práctica profesional.
- Describir la interacción con el contenido matemático y analizar e interpretar sus implicaciones entre los docentes y estudiantes de sexto semestre de la LDM de la FPIE de la UABC y desde su práctica profesional en séptimo semestre.

La investigación se llevó a cabo desde la metodología de una investigación cualitativa interpretativa no experimental longitudinal; desde el modelo investigación-acción participativa, siendo lo anterior método inductivo, ya que todos los que intervinieron, en el proceso investigativo, son parte del proceso de mejora, de cambio, yendo de lo particular a lo general.

Pueden entonces existir numerosos estudios en los que se analice y proponga una estrategia para enseñar y aprender matemáticas, algunos autores como Chevallard (1998) quien propone la transposición didáctica como un método a tener en cuenta cuando se enseña Matemática. Dicha estrategia está descrita por este autor como la transformación del conocimiento del "saber sabio" al "saber enseñado".

Es entonces al aplicar dicha estrategia que el conocimiento del docente se presenta en un escenario en el que el alumno es quien lo manejará, se rompe con toda la enseñanza

ISBN 978-84-945722-3-4

tradicionalista en la que el alumno debía comprender el lenguaje del maestro y no el docente quien se adaptara al lenguaje de los alumnos. Esta postura alimenta la idea principal de crear conciencia de parte de los docentes, los formadores de docentes, pero sobre todo el sujeto que interesa analizar, que es el futuro docente.

La SEP (2017) menciona que hoy en día ya no es suficiente con aprender de memoria y vaciar contenido en la mente de los alumnos, se necesita reflexionar, atender tareas más complejas, competir con herramientas tecnológicas, globalización, etc. El mundo es otro y la manera de aprender por obvias razones debería atender estas diferencias de contextos.

Refiriendo al modelo educativo que en mayo 2017 se presenta en México, vemos que en su apartado 1.6 sobre los principios pedagógicos que debe contener la labor docente, el número 12 menciona que:

> El estudiante cuenta con oportunidades de repensar, reconsiderar y rehacer; fomenta el desarrollo de productos intermedios y crea oportunidades de retroalimentación copiosa entre pares. Esto ayuda a que los niños y jóvenes sean conscientes de su aprendizaje. El docente da voz al estudiante en su proceso de aprendizaje y reconoce su derecho a involucrarse en éste, cultivando su participación activa y su capacidad de autoconocimiento. (SEP, 2017).

Todo lo anterior describe una metodología de la enseñanza en la cual el docente se ve participante de dos escenarios; el primero donde es capaz de crear un ambiente de participación con sus alumnos y en cualquier tema que se presente, el segundo donde conoce vías alternativas para la solución de problemas, situaciones reales o planteadas por el mismo; ésto pone a cargo al docente aún con más énfasis del aprendizaje del alumno y de las posibles respuestas que este llegue a obtener.

La metodología **"Me descubro-Aprendo-Enseño"** busca que el futuro docente descubra sus áreas de oportunidad y las trabaje colegiadamente en su clase buscando mejorar su proceso de aprendizaje y por ende su proceso de enseñanza. Lograr entender, desde la formación docente el porqué debemos preguntarnos: qué tanto sabe mi estudiante del contenido a aprender, qué tanto sé yo, como docente, de lo que voy a enseñar y para qué le servirá dichos saberes a mi educando; es uno de los propósitos fundamentales de la metodología presentada, la cual se ha estado utilizando con éxito en un contexto donde se forman docentes y que analizadas desde el 2014 donde se viene desarrollando, hoy nos

ISBN 978-84-945722-3-4

percatamos que las nuevas reformas tanto en México como en el mundo necesitan que desde las universidades o centros donde se forman docentes se tomen posturas metodológicas que hagan desde sus inicios lograr un desequilibrio constante en el educando en formación para que éste desde su propio proceso vaya logrando trabajar sus áreas de oportunidades, obligando a su vez instituciones capaces de seleccionar a sus docentes formadores de formadores con un perfil inicial al del educando que forma.

Cuando se enseña a través de esta metodología no se atiende sus partes en clases diferentes sino que en cada clase, en cada sesión se dan los tres momento los cuales se pueden repetir al lograr que el educando crezca cognitivamente y además se busca una evidencia constante de su crecimiento a través de propuestas didácticas que realice el docente para lograr observar si éste no sólo aprendió a repetir aquello que identificó como área de oportunidad sino cuando es capaz de enseñarlo o explicarlo delante de su grupo o entre pares, y de comprender y expresar el cómo logró cada momento buscando una fundamentación teórica que le apoye explicar el proceso y encontrar su aplicación. Posteriormente, en sus prácticas profesionales buscará percatarse que tanto su descubrir y aprender le ayudó a enseñar mejor; llevando a las siguientes clases sus experiencias y mejoras que propone en aquello que vivió durante el proceso de enseñanza que llevó a cabo en el centro donde práctica la docencia.

Desde que se ha venido trabajando dicha metodología en la formación de los futuros docentes en las asignaturas de didácticas específicas se ha podido constatar una mejora constante y un desarrollo del pensamiento crítico del alumno que no sólo se evidencia en su quehacer docente o de aprendizaje dentro de dichas clases sino ante las demás asignaturas, obligando con ello, a que los docentes formadores de formadores estén cada vez más capacitados no sólo en lo disciplinar (matemáticas) sino también en lo didáctico pues cada vez aceptan menos procesos de resolución de ejercicios o exposiciones sin una retroalimentación profunda o un análisis adecuado del contenido que los ayude, no sólo, aplicarlo sino lograr el aprender a aprender.

Pensamos, desde una postura humilde y respetuosa, que los centros de formadores podemos tomar esta metodología como estrategia y validar que tan efectiva es tanto en el proceso enseñanza-aprendizaje como en los aspectos valorales del que enseña y aprende porque se trabaja lo cognitivo, lo emocional y el respeto al alumno que enseñas, así como el trabajo colegiado entre pares…

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. (2002). *La trasposición didáctica*. Argentina: AIQUE.

Hernández, R. (2004). Las funciones didácticas en la enseñanza de la Matemática. http://www.bibliociencias.cu/gsdl/collect/libros/import/Funciones_Didacticas_Matematica.pdf Consultado (12/02/2015)

Secretaría de Educación Pública (2017). Modelo educativo. Para la educación obligatoria, educar para la libertad y la creatividad. https://docs.google.com/gview?url=http://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo_Educativo_OK.pdf Consultado 25/05/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-810

MATEMÁTICA INFANTIL CON LEWIS CARROLL EN “LA CAZA DEL SNARK”

Carlos de Castro Hernández – Mónica Ramírez García
carlos.decastro@uam.es – monica.ramirez@edu.ucm.es
Universidad Autónoma de Madrid y Universidad Complutense de Madrid, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Inicial (3 a 5 años)
Palabras clave: Geometría, literatura infantil, número natural, resolución de problemas.

Resumen

Describimos una propuesta para el aprendizaje de las matemáticas en el aula de 5 años de Educación Infantil. Las actividades se articulan en torno a una adaptación de “La caza del Snark” de Lewis Carroll, dentro del proyecto “A contar. Matemáticas para Pensar”. La propuesta, de 4 semanas de duración, está compuesta por actividades con diferentes contenidos y procesos matemáticos: lectoescritura de numerales en juegos, práctica del conteo a través de juegos de tablero, composición y descomposición de figuras geométricas con el tangram, diseño e interpretación de mapas y resolución de problemas verbales. Las actividades matemáticas están diseñadas siguiendo orientaciones de investigación sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil. Mostramos cómo la adaptación de la obra de Lewis Carroll está realizada, desde el punto de vista de la educación matemática, para potenciar al máximo la actividad matemática infantil a través del texto e ilustraciones. Presentamos detalles de dicha actividad matemática aportando análisis de fotografías del aula, ejemplos de material curricular, y muestras de trabajo del aula de 5 años, incidiendo especialmente en aspectos didáctico matemáticos. Concluimos con reflexiones sobre cuestiones metodológicas y en torno a los planteamientos sobre literatura infantil del proyecto.

Introducción: El proyecto “A contar”

El proyecto “¡A Contar! Matemáticas para pensar” se centra en desarrollar los contenidos matemáticos importantes para la educación infantil. Se trata de contenidos y procesos matemáticos adecuados al desarrollo infantil, aplicables a situaciones cotidianas y que preparan a niñas y niños para el aprendizaje matemático que tendrá lugar en la etapa posterior de educación primaria (De Castro y Hernández, 2015).

El nombre del proyecto “¡A contar! Matemáticas para pensar” apunta a una doble acepción del verbo “contar”. Por un lado, el conteo es quizá el paradigma de contenido matemático

ISBN 978-84-945722-3-4

importante para la educación infantil; por otro, contar cuentos se convierte en el eje vertebrador del proyecto a través de todas las actividades que lo integran. Por otra parte, nuestra concepción de la infancia nos hace concebir a niños y niñas como capaces de una actividad matemática intensa y profunda. Cuando hablamos de matemáticas de 3 a 6 años, nos referimos a una actividad alejada de los ejemplos más triviales en los que un alumno pega gomets dentro de un círculo o realiza caligrafía de números. Hablamos de unas matemáticas para *pensar* que parte de contextos familiares facilitados por el cuento y donde las intuiciones infantiles y los conocimientos informales a veces requieren del apoyo de recursos manipulativos.

La adaptación "La caza del Snark" de Lewis Carroll

En el proyecto "A Contar", la literatura infantil no juega el papel de mero recurso auxiliar de apoyo al aprendizaje matemático. La selección de los textos sigue, principalmente, criterios literarios y el primer objetivo del proyecto es disfrutar con el cuento; que la obra pueda tener un genuino interés en sí misma, fuera de cualquier proyecto para aprender matemáticas. Una apuesta arriesgada en este sentido ha sido la adaptación de "La caza del Snark", de Lewis Carrol, para la educación infantil. Con ella hemos pretendido ofrecer al público infantil otra obra del famoso autor, más allá de los libros sobre su personaje más ilustre: Alicia.

Los cuentos pueden facilitar la reflexión sobre aspectos matemáticos como las regularidades, el número en su aspecto cardinal y ordinal, situaciones aritméticas, reconocimiento de formas y sentido espacial fundamentales en la actividad matemática infantil (Aguilar, Ciudad, Láinez y Tobaruela, 2010). Estos aspectos pueden además reflejarse en las ilustraciones mostrando cantidades, patrones, formas y mapas que permiten a los niños imaginar las ideas y relaciones presentadas (De Castro y Ramírez, 2016). A continuación, presentamos contenidos y procesos matemáticos reforzados con el contexto y las ilustraciones del cuento "La caza del Snark" de Lewis Carroll.

Aspectos matemáticos en el álbum ilustrado "La caza del Snark"

El aprendizaje de la geometría se entiende como la comprensión del mundo físico (Van den Heuvel-Panhuizen y otros, 2012) desglosada en tres aspectos fundamentales: orientar, construir, y operar con cuerpos y formas. La localización de objetos, como componente de

ISBN 978-84-945722-3-4

la orientación, se desarrolla en ambientes familiares y a través de las posiciones relativas como detrás, delante, derecha, izquierda, y puntos de referencia, con representaciones espaciales en mapas sencillos. Aguilar, Ciudad y otros (2010) realizan juegos con el plano del aula de 4 y 5 años en el que se marca el lugar donde se esconde un objeto que los pequeños deben localizar. Las características del plano (el número de referencias representadas, si debemos seguir o no un itinerario marcado) son variables didácticas empleadas para adaptar la actividad al desarrollo infantil (Ruiz-Higueras, García y Lendínez, 2013).

En la Figura 1 mostramos dos ilustraciones de “La caza del Snark”. En la primera, aparece un ejemplo de representación de un espacio, la isla, adonde conduce a la tripulación la búsqueda del Snark. La ilustración contiene lugares y elementos presentados en el cuento, que permitirían recrear una “caza del Snark” en el contexto familiar del aula. En la imagen de la derecha, vemos el mapa en blanco del capitán, con el que este trataba de dar caza al Snark.

Figura 1. Escenario para mapas y juego de tablero y mapa en blanco del capitán.

Construir implica crear objetos con materiales libres, con papel, o con figuras geométricas, como el tangram. La realización de mosaicos, por ejemplo, supone construir y operar con figuras. Dos actividades básicas importantes son crear formas y patrones (Van den Heuvel-Panhuizen y otros, 2012). Además, el descubrimiento de regularidades, relaciones y patrones incide en el desarrollo de la competencia matemática. Crear y buscar regularidades forma parte del proceso de matematización y ayuda a explicar una situación y generalizarla. En la imagen de la izquierda de la Figura 2 se pueden observar los patrones en distintas partes del barco y en el mar.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2. Patrones y la relación parte-todo en la ilustración

Otro contenido matemático que comienza a desarrollarse en la educación infantil es la relación parte-todo. Los niños primero aprenden que un total se compone de partes más pequeñas que inicialmente no cuantifican; más tarde, pueden desarrollar el conocimiento intuitivo de la propiedad conmutativa combinando las partes en distintos órdenes. La comprensión de la composición aditiva requiere la capacidad de razonar sobre la relación parte-todo, que juega un papel importante en el aprendizaje de la suma y la resta. En la imagen de la derecha de la Figura 2, se observa una ilustración del cuento "La caza de Snark" donde algunos marineros permanecen tumbados y otros sentados. Esta situación permite a los niños imaginar la relación que hay entre el total de marineros y las partes en las que se puede descomponer, formando una idea de la relación parte-todo.

El diseño de la propuesta de actividad matemática

En el Proyecto ¡A contar!, cada cuento sirve durante cuatro semanas como vehículo contextual para nuestra aventura matemática. En la Tabla 1 mostramos la organización de las actividades del cuento "La caza de snark"; en los apartados siguientes mostraremos sus características principales y su desarrollo en el aula.

Tabla 1. Organización cronológica de las actividades sobre el cuento "La caza de snark".

Semana 1	*Semana 2*	*Semana 3*	*Semana 4*
1. Mapa del tesoro 2. Bingo 3. Tangram	4. Taller de problemas 5. Juego del tablero 6. Tangram	7. Mapa del tesoro 8. Bingo 9. Tangram	10. Taller de problemas 11. Juego del tablero 12. Tangram

El juego del bingo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el proyecto “A Contar” utilizamos un bingo adaptado, con numerales del 1 al 15 en 4 años y hasta el 30 en 5 años, para practicar la lectura de los numerales escritos con cifras y la escritura (el copiado) de numerales con cifras como respuesta a la lectura de un numeral. La dinámica del juego comienza repartiendo a cada alumno un cartón con numerales para copiar en una cuadrícula con ilustraciones del cuento (Figura 3).

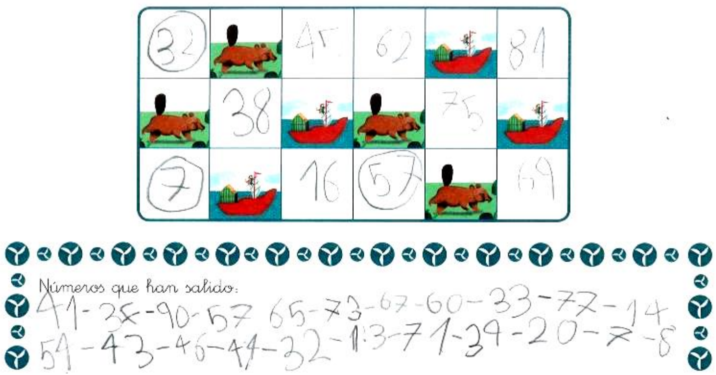


Figura 3. Juego del bingo

A continuación, por turnos, cada niño extráe una bola numerada, lee en voz alta el numeral y lo copia en la pizarra. El alumnado dispone de tablas 100 y bandas numéricas hasta el 30 como recurso auxiliar. Si no se sabe leer un numeral escrito con cifras, se localiza en la tabla o la banda numérica y se van contando casillas hasta llegar al numeral escrito en la bola. Esta correspondencia uno a uno entre numerales orales y escritos proporciona una estrategia básica para pasar de unos a otros.

Durante la partida, niñas y niños van anotando los numerales que escuchan en la parte inferior de su hoja de trabajo (Figura 3). Alternativamente, pueden copiarlo de la pizarra una vez que el encargado de “cantar el número” lo ha copiado de la bola. Después, comparan el numeral escrito con los anotados en su propio cartón y van marcando los números que han salido. Con este juego practicamos el paso de la numeración oral a la escrita y viceversa, apoyándonos en recursos didácticos e interpretando el copiado de numerales escritos como un antecedente didáctico de su escritura, que consideramos un copiado de la imagen mental del numeral interiorizada.

El juego del tablero

Los juegos de tablero que proponemos presentan sus casillas numeradas hasta el 30 (Figura 4), en consonancia con otros recursos del proyecto como el bingo. La cantidad de puntos del

ISBN 978-84-945722-3-4

dado puede identificarse mediante el conteo, considerado como estrategia base, o por subitización, la estrategia óptima. El avance por las casillas del tablero sirve como práctica de la correspondencia uno a uno entre los numerales enunciados y las casillas señaladas al contar. Este juego favorece además la elaboración de la secuencia de las palabras número y facilita el desarrollo de estrategias infantiles de conteo para la resolución de problemas aritméticos (Carpenter, Fennema y otros, 1999).

Figura 4. Juego de tablero inspirado en el escenario de la isla

Taller de problemas

La resolución de problemas la planteamos en dos momentos diferentes: en la asamblea, resolviendo problemas sencillos en gran grupo, o en formato de taller, con la disposición de materiales para favorecer estrategias de modelización intuitivas inventadas y compartidas dentro del aula. Los problemas contextualizados en el cuento atrapan el interés de los niños (De Castro, 2015b). Estos emplean estrategias de modelización directa y conteo para resolver los problemas aritméticos verbales (Carpenter, Fennema y otros, 1999). Los talleres de problemas los desarrollamos en fases de resolución individual, comunicación y debate sobre las estrategias, y explicación escrita del proceso, que implica un proceso de articulación de mayor nivel cognitivo y reflexión acerca del proceso (metacognitivo). Toda esta metodología de trabajo supone el desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales que conforman la competencia matemática (De Castro y otros, 2012; Ramírez, 2015).

A los 5 años de edad pueden resolverse problemas aritméticos verbales de estructura aditiva y multiplicativa, incluso de descomposición aditiva y multiplicativa (De Castro y Hernández, 2014). Ejemplo de descomposición aditiva es el problema que vemos resuelto en la Figura

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

5: “En la playa, algunos marineros se tumbaron y otros se sentaron. Había 10 marineros. ¿Cuántos crees que se tumbaron? ¿Cuántos se sentaron?”. Como vemos, en primera instancia es común que niñas y niños elijan una única descomposición entre las posibles: 10 = 7 + 3 o 10 = 4 + 6.

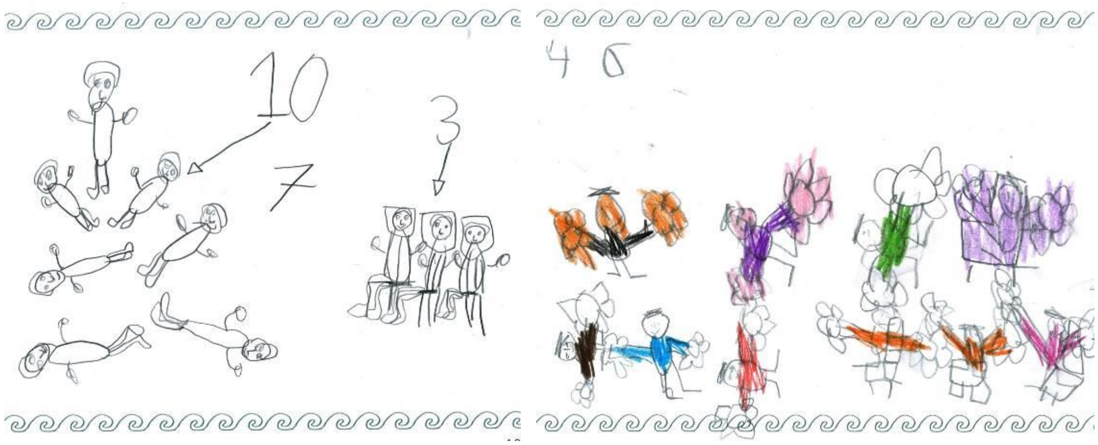


Figura 5. Dos resoluciones infantiles del problema de descomposición

Otros problemas aritméticos verbales planteados en el contecto de este cuento son: (1) El marinero al que llamaban «¡Eh!» llevaba puestos 7 abrigos. Se quita 4. ¿Cuántos le quedan puestos? (Problema de estructura aditiva de cambio decreciente); (2) Llevaban navegando durante 5 meses cuando desembarcaron en la playa. Si cada mes tiene 4 semanas, ¿cuántas semanas navegaron? (Problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales de multiplicación); y (3) Si hubieran navegado 21 días, y cada semana tiene 7 días, ¿cuántas semanas habrían navegado? (Problema de estructura multiplicativa, de grupos iguales de división medida).

El mapa del tesoro

Esta actividad consiste en la elaboración de un mapa que representa un lugar familiar y de un tamaño adecuado, como el aula para niños de 4 y 5 años. Los alumnos suelen dibujar los objetos más representativos y marcan la localización de uno “tesoro” escondido, que será algo que llame la atención de niñas y niños, posiblemente vinculado al cuento. En 5 años los niños elaboran su propio mapa del tesoro en una hoja de trabajo en blanco reflejando, mediante un dibujo, algunos de los objetos más relevantes del aula, sin respetar las proporciones entre ellos y obviando el resto de elementos del aula (Figura 6, imagen

ISBN 978-84-945722-3-4

izquierda). Con algún tipo de marca señalan el lugar donde han escondido el “tesoro”. Los dibujos de objetos del aula sirven después como puntos de referencia para la localización del tesoro por parte de los alumnos que reciben el mapa.

Figura 6. Mapa de la clase elaborado por los alumnos y figura para componer con el tangram

El Tangram

El aprendizaje de la geometría implica algo más que reconocer y nombrar formas. Las fichas de los métodos tradicionales para identificar una figura geométrica es un contexto muy alejado de las actividades manipulativas y de exploración (Aguilar, Ciudad y otros, 2010). El aprendizaje requiere el desarrollo de procesos, como los de composición y descomposición, de “romper y recrear formas” (De Castro, 2015a). Un recurso didáctico muy conocido para la composición y descomposición de formas geométricas es el tangram, puzzle de origen chino de siete piezas que permite comparar (en infantil de forma directa y mediante superposiciones) longitudes, superficies, amplitudes angulares, etc. Los puzzles que proponemos en “A Contar” aparecen dentro de una ilustración que permite establecer la relación, no evidente para los niños de educación infantil, entre la figura real del cuento y el contorno geometrizado de dicha figura que aparece en los problemas de tangram. Tras la resolución, los niños reflejan en su cuaderno el trabajo realizado con pegatinas (Figura 6, imagen derecha).

Conclusiones

El cuento de “La caza del Snark” es el contexto e hilo conductor de la propuesta matemática. Sus ilustraciones están diseñadas para activar y potenciar la actividad matemática infantil. El relato del cuento aporta situaciones y relaciones que niñas y niños pueden imaginar. El

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

planteamiento de las tareas matemáticas busca que, a través de la evocación de la situación del cuento y las imágenes los conceptos y procesos matemáticos puedan ser aprendidos por los alumnos de educación infantil con sentido.

Referencias bibliográficas

Aguilar, B., Ciudad, A., Láinez, M.C. y Tobaruela, A. (2010). *Construir, jugar y compartir: Un enfoque constructivista de las matemáticas en Educación Infantil*. Jaén: Enfoques Educativos.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., y Empson, S.B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

De Castro, C. (2015a). Romper para conocer: Procesos de composición y descomposición en la geometría infantil. *Aula de Infantil, 79*, 18-21.

De Castro, C. (2015b). Sentido e interés en la actividad matemática infantil: El aprendizaje de la lectoescritura de numerales. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70,* 43-47.

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA*, *8*(3), 99-114.

De Castro, C. y Hernández, E. (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar*. Madrid: Santillana.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S., Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números, 80*, 53-70.

De Castro, C. y Ramírez, M. (2016). El uso de álbumes ilustrados para potenciar el aprendizaje matemático en las primeras edades. *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 33*(3), 61-80.

Ramírez, M. (2015). *Desarrollo de conocimientos matemáticos informales a través de la resolución de problemas aritméticos verbales en primer curso de educación primaria*. Tesis doctoral. Madrid: UCM. Recuperada el 3-10-2016 de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=47140

Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 95-118.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veltman, A., Janssen, C. y Hochstenbach, J. (2012). La geometría en preescolar. En M. Van den Heuvel-Panhuizen y K. Buys (Coords.), *Los niños pequeños aprenden medida y geometría* (pp. 141-215). México: Correo del Maestro/La Vasija.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-811

EVALUACIÓN DE RESULTADOS EN TAREAS DE ESTIMACIÓN NUMÉRICA-GRÁFICA

Mª Macarena Fariña – Rut Almeida – Josefa Perdomo-Díaz – Alicia Bruno
macarena.farcast@gmail.com – rutalca@gmail.com – jperdomd@ull.edu.es – abruno@ull.edu.es
Universidad de La Laguna. España

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Estimación, representaciones gráficas

Resumen
Se presenta una investigación sobre estimaciones numéricas de fracciones y porcentajes a través de representaciones gráficas. El objetivo del estudio es analizar el éxito y las estrategias de alumnado de 2º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La metodología de investigación es cuantitativa sobre datos de un cuestionario contestado por 248 alumnos/as de 2º ESO y 199 de 4º ESO. Los resultados reflejan dificultades conceptuales sobre las fracciones que impiden aplicar correctas estimaciones sobre gráficas o construir representaciones aproximadas. Asimismo, se presentan los argumentos y justificaciones de futuros profesores de matemáticas al analizar las respuestas del alumnado de Secundaria al citado cuestionario, y evaluar lo razonable de las mismas, para lo cual se ha seguido una metodología cualitativa.

1. Introducción

En las dos últimas décadas, cuando se hace referencia al aprendizaje numérico surge el término *sentido numérico* que se define como *la comprensión personal de los números y las operaciones, junto con la capacidad para usar esta comprensión de forma flexible, de modo que se puedan hacer juicios y desarrollar estrategias adecuadas a cada problema* (Sowder, 1992). Las investigaciones realizadas con alumnado de Primaria y Secundaria muestran que tienen un escaso desarrollo del sentido numérico, prefiriendo el uso de procesos, reglas y algoritmos mecánicos, antes que usar otro tipo de conocimiento, en cierta medida, más complejo, creativo o flexible que involucre relacionar conceptos y/o los procesos (Yang, Hsu & Huang, 2004). Por otro lado, los estudios no muestran consenso sobre si los estudiantes

ISBN 978-84-945722-3-4

incrementan su sentido numérico a medida que avanzan en los niveles educativos (Akkaya, 2016).

El sentido numérico se ha caracterizado por distintas componentes: *Comprender el significado de los números; Reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números; Usar puntos de referencias; Usar representaciones gráficas, pictóricas o manipulativas de los números y las operaciones; Identificar el efecto relativo de las operaciones; Establecer las relaciones entre las operaciones; Hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico; Estimar el resultado de operaciones; Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; Ser consciente de que existen múltiples estrategias; Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable.* (McIntosh et al., 1991).

Aunque estas componentes se presenten separadas, están fuertemente interrelacionadas, siendo normal que en una misma tarea matemática se vean involucradas varias de ellas~~,~~ de forma conjunta.

Este trabajo se centra en la estimación y reconocimiento de respuestas razonables en tareas numéricas con representaciones gráficas. Su interés radica en que la estimación de cantidades es un importante proceso matemático que implica razonamientos no rutinarios y requiere aplicar flexibilidad de pensamiento (Siegler and Booth, 2005), mientras que reconocer respuestas razonables ayuda a mejorar los resultados de cálculos, incluyendo los exactos y la estimación (Alajmi y Reys, 2010). Por tanto, la investigación pone especial interés en las componentes: *Usar representaciones gráficas, pictóricas o manipulativas de los números y las operaciones*; *Estimar el resultado de operaciones;* y *Reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable.*

La primera parte de este trabajo analiza la estimación numérica en representaciones gráficas por parte de estudiantes de Secundaria, etapa en la que encontramos menos investigaciones que en alumnado de Primaria. Se muestran resultados de una prueba escrita contestada por alumnado de 2º y 4º de ESO. La segunda parte es un estudio con futuros profesores de Secundaria, quienes evaluaron algunas respuestas de los estudiantes de la ESO de la prueba anteriormente citada. Se les pidió que valorasen si las respuestas de los estudiantes eran razonables o no. La finalidad de esta segunda parte del estudio es indagar las creencias de los

ISBN 978-84-945722-3-4

futuros profesores sobre la importancia de la razonabilidad de las repuestas de los alumnos en tareas numéricas.

2. Estimación numérica en representaciones gráficas de estudiantes de Secundaria

Se realizó una prueba escrita compuesta por 12 preguntas, que contestaron 248 alumnos de 2º ESO y 199 de 4º ESO, de 7 centros públicos de Tenerife (España). Las preguntas correspondía a contenidos numéricos no superiores a 1º ESO: Ordenar, operaciones, estimar cantidades, estimar longitudes (con números naturales, fracciones, decimales). Cada pregunta se presentó en una hoja separada. Se les indicó que tenían 3 minutos para contestar cada pregunta y que para resolverlas no era necesario realizar cálculos exactos. Además debían escribir todo lo que realizaran, aunque no formara parte de su respuesta final. En esta comunicación se seleccionan los resultados correspondientes a las preguntas de fracciones y porcentajes en las que el alumnado debía realizar o interpretar una estimación gráfica.

Resultados del cuestionario de estudiantes de Secundaria

Los resultados son consecuentes con el curso de los estudiantes, ya que los porcentajes de éxito de 2º ESO son inferiores a los de 4º de ESO en todos las preguntas. Sin embargo, el éxito en 4º no puede considerarse adecuado, considerando que las tareas numéricas analizadas correspondían a 1ºESO y el mayor porcentaje de éxito fue 57.3% (Tabla 1).

Preguntas de la prueba	2º ESO	4º ESO
1. Estimar una representación gráfica de fracción menor que 1	25.8	45.2
2. Representar gráficamente una fracción – Reconstruir la unidad	21.8	40.7
4. Estimar una representación gráfica de suma de fracciones	44.8	57.3
5. Estimar una representación gráfica de multiplicación de fracciones	12.9	19.6
6. Estimar y representar porcentajes de “actividades durante un día completo”	12.5	27.1

Tabla 1. Porcentaje de respuestas correctas a las 6 preguntas de fracciones de la prueba

Como ejemplo del proceso de análisis realizado, mostramos los resultados de la pregunta 6 que denominamos a partir de ahora “Actividades durante un día completo” (Tabla 2), cuyas respuestas se usan además en la segunda parte de este trabajo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Aproximadamente ¿qué porcentaje dedicas a las siguientes actividades durante un día completo? Represéntalo gráficamente.

Dormir:…………………. %

Comer:………………....%

Estar en clase:………..…%

Resto de actividades:..….%

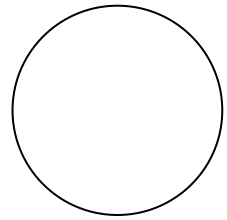


Tabla 2. Enunciado de la pregunta: “Actividades durante un día completo”

El porcentaje de respuestas correctas fue bajo en ambos cursos, 12.5% y 27.1%, en 2º y 4º respectivamente (Tabla 3). El error que apareció con mayor frecuencia fue dar porcentajes que no eran razonables respeto a su actividad cotidiana, por ejemplo, estar en clase un 60% del tiempo, comer un 50% o dormir un 15% del día. Otro error común fue que los cuatro porcentajes no sumaran 100 (Tabla 4)

Estimación de porcentajes de las actividades diarias		**Representación gráfica**		**Respuestas correctas en ambos apartados**	
2º ESO	**4º ESO**	**2º ESO**	**4º ESO**	**2º ESO**	**4º ESO**
29.8	45.2	27.8	42.7	12.5	27.1

Tabla 3. Porcentaje de éxito en “Actividades durante un día completo”

	2º ESO	**4º ESO**
Porcentajes no razonables en las actividades diarias	33.1	29.6
Los porcentajes suman más de 100	14.9	7.5
Los porcentajes suman menos de 100	9.3	5
Otros errores	6.4	5

Tabla 4 Tipos de errores en los porcentajes propuestos por los estudiantes en la pregunta “Actividades durante un día completo”

ISBN 978-84-945722-3-4

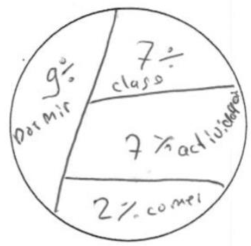
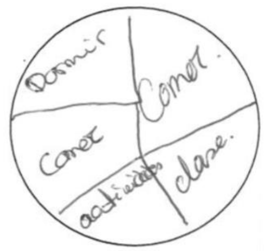
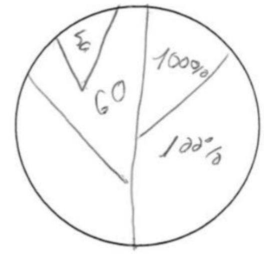
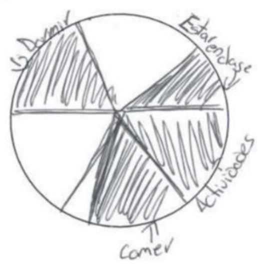
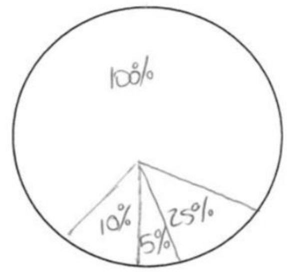
		
Gráficos incorrectos y que no son diagramas de sectores		
		
Sectores desproporcionados	Mayor número de sectores	Sectores no centrados

Tabla 5. Ejemplos de errores en la pregunta "Actividades durante un día completo"

La representación gráfica en el diagrama de sectores fue fuente de dificultad, especialmente en 2º de ESO. Las dificultades en algunos casos pueden considerarse de tipo procedimental (no entender cómo se construye un diagrama de sectores) y, en otros, reflejan una desconexión con los porcentajes dados por el estudiante sobre su actividad diaria. En cierta medida, el gráfico no ayuda al estudiante a corregir el error cometido en su estimación de porcentajes. En la Tabla 5 pueden verse algunos ejemplos de representaciones gráficas erróneas.

3. Cuestionario a futuros profesores de Matemáticas de Secundaria

La segunda parte del trabajo consistía en estudiar el análisis que realizaban ocho estudiantes (E1 a E8) del *Máster en Formación del Profesorado de ESO, Bachillerato, FP y Enseñanza de Idiomas* de la Universidad de La Laguna, Tenerife, de lo razonable de la respuesta de los estudiantes de secundaria. Para ello se seleccionaron 6 ejemplos de respuestas a la pregunta "Actividades durante un día completo" (Anexo 1).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En primer lugar, se pidió a los futuros profesores que resolvieran la actividad, indicándoles que pensaran como si su vida fuera la de un estudiante de Secundaria. A continuación, se les presentaron los seis ejemplos de respuestas (Anexo 1) con una serie de preguntas para indagar en cómo sería su evaluación de la actividad y cómo les explicarían los errores cometidos al alumnado (Anexo 2).

Resultados del cuestionario de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria

Los futuros profesores de Matemáticas de Secundaria establecieron unos porcentajes razonables de la actividad diaria y solo uno se excedió en el tiempo dedicado a comer. No obstante, hay que destacar que seis sujetos recurrieron al uso de reglas para calcular los porcentajes exactos a partir de las horas dedicadas a cada actividad.

La Tabla 6 recoge las respuestas de los futuros profesores a las tres primeras preguntas del cuestionario que son las siguientes:

1. ¿Crees que los resultados dados por el estudiante son razonables? (**R**)
2. ¿Consideras correcta la respuesta del estudiante en el apartado de completar porcentajes? (**%**)
3. ¿Consideras correcto el gráfico de sectores realizado por el estudiante? (**G**)

	Ej1			**Ej2**			**Ej3**			**Ej4**			**Ej 5**			**Ej6**		
	R	**%**	**G**	**R**	**%**	**G**	**R**	**%**	**G**	**R**	**%**	**G**	**R**	**%**	**G**	**R**	**%**	**G**
E1	N	C	I	N	I	I	N	C	I	S	C	C	N	C	I	S	C	I
E2	N	C	I	N	I	I	N	C	I	S	C	C	N	C	I	S	C	I
E3	S	C	I	S	I	C	N	C	I	S	C	C	N	C	I	S	C	I
E4	N	I	I	N	I	I	N	I	I	S	C	C	N	I	I	S	C	I
E5	S	C	C	S	I	I	N	I	I	S	C	C	N	I	I	S	C	I
E6	N	C	I	S	I	I	N	I	I	S	C	C	N	C	I	S	C	I

ISBN 978-84-945722-3-4

E7	N	C	I	N	I	I	N	C	I	S	C	C	N	C	I	S	C	I
E8	N	-	I	N	I	I	N	I	I	S	C	C	N	I	I	S	C	I
N: No **S:** Sí **C:** Correcto **I:** Incorrecto																		

Tabla 6. Resultados del cuestionario a futuros profesores de Matemáticas de ESO

Hay muchas coincidencias en las respuestas de los futuros profesores en todos los ejemplos. Las diferencias se deben a los rangos que ellos mismos establecen para considerar una distribución horaria del día razonable o no y si tienen en cuenta ese realismo horario para evaluar las respuestas o si, por el contrario, solo tienen en cuenta que se cumplan propiedades matemáticas como que la suma de los porcentajes sea 100. También cambia su exigencia de exactitud en la representación gráfica.

Las respuestas argumentadas de los futuros profesores de Matemáticas de Secundaria reflejan ciertas tendencias al evaluar las actividades y su grado de exigencia.

En primer lugar, destaca el alto grado de exigencia al considerar lo razonable de una respuesta valorando lo realista de las respuestas de los estudiantes de Secundaria. Por ejemplo, no consideran correcto que los estudiantes indiquen que duermen más de ocho horas o que están en clase más de seis. En el ejemplo 4, el sujeto E2 afirma: *"En este caso sí parecen razonables salvo las horas de estar en clase ya que si estamos en Secundaria el horario lectivo es de 8:00-14:00 en centros públicos, eso son 6h, sin embargo, el 30% del día se corresponde a 7'2h"*.

En segundo lugar, se distinguen tres tendencias de evaluación en los futuros profesores. La tendencia predominante es evaluar, por un lado, lo realista de las respuestas del alumnado de Secundaria y, por otro lado, el que los porcentajes sumen 100 y las áreas de los sectores gráficos sean proporcionales a los correspondientes porcentajes.

Otra tendencia radica en la exigencia de "exactitud". Es el caso del sujeto E5, quien, en repetidas ocasiones, solicita al alumnado que en su respuesta aparezcan cálculos exactos y no solo una aproximación, aunque ésta esté bien. Este mismo sujeto realizó la primera actividad especificando todos los cálculos.

La última tendencia es valorar el currículo correspondiente al curso de Secundaria para considerar una respuesta correcta o no. Destacamos aquí al sujeto E4 que considera en el Ejemplo 1 que *"La respuesta de completar porcentajes matemáticamente es correcta, pero*

ISBN 978-84-945722-3-4

no se ajusta a la vida real. Por lo que si mi intención era evaluar el bloque de números y álgebra y el de métodos y procesos, la respuesta no es correcta, no lo adecúa a la vida real". Este es el motivo de que este sujeto considere incorrectas todas las respuestas de los estudiantes, salvo en el ejemplo 4.

La forma de explicar de los futuros profesores a los estudiantes los errores cometidos y cómo corregirlos es hacerlos reflexionar sobre el número de horas que dedican a una actividad y ver que ese número de horas no se corresponde ni aproxima con el porcentaje que han dado. Por ejemplo, a aquellos estudiantes que pusieron que dedicaban un 50% del día a dormir, les harían pensar en que ellos no duermen 12h. El sujeto E8 también indica que trabajaría con los estudiantes las horas en forma de fracciones para a continuación pasar a los porcentajes.

Con respecto a los errores cometidos en la representación gráfica se dan pocos argumentos para explicar cómo corregirlos de forma aproximada, se basan en enseñar al alumnado a hacer diagramas de sectores exactos. Solo el sujeto E8 indica que utilizaría una representación rectangular para pasar luego a la circular para facilitar la comprensión.

Conclusiones

El estudio realizado con alumnado de Secundaria en España, ratifica los resultados encontrados en otros países sobre el escaso uso de sentido numérico del alumnado. Observamos que aunque los resultados mejoran de 2º ESO a 4º ESO, no se pueden considerar adecuados para estos niveles. Los estudiantes tuvieron errores considerables en las estimaciones de representaciones numéricas de fracción y sus operaciones que reflejan dificultades conceptuales notables.

Con respecto al grupo de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria, los resultados son positivos, ya que reconocen las respuestas razonables y, en mayor o en menor medida, lo tienen en cuenta para evaluar las actividades del alumnado. Así, consideran que aunque una actividad esté resuelta de forma matemáticamente correcta, si los resultados no son realistas no puede considerase del todo correcta. Este resultado es contrario al que obtuvo Alajmi (2007) en su estudio con profesores de Secundaria de Kuwait. En dicho estudio concluyó que la mayoría del profesorado consideraba que una respuesta era razonable si se había seguido el procedimiento correcto aunque un error de cálculo nos diera una respuesta bastante alejada de la esperada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado bajo la financiación del Proyecto de Investigación del Ministerio de Economía y Competitividad. Madrid. España. EDU2015-65270-R: “Una perspectiva competencial para la formación matemática y didáctica de profesores de educación Primaria y Secundaria: implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje”.

Referencias bibliográficas

Akkaya, R. (2016). An Investigation into the Number Sense Performance of Secondary School Students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies*, 4(2), 113-123.

Alajmi, A.; Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers’ perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 77-94.

Alajmi, A.; Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students’ recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139.

McIntosh, A.; Reys, B. J.; Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.

Siegler, R.S.; Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

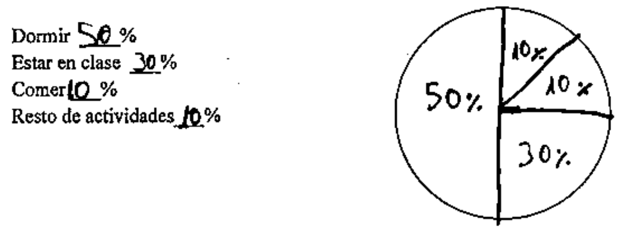
Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.

Yang, D. C., Hsu, C. J. y Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 407-430.

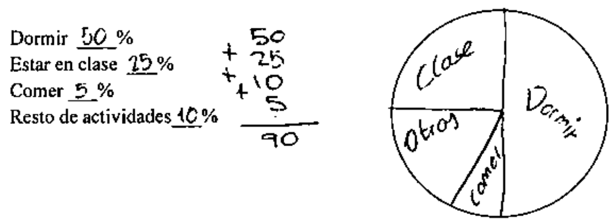
Anexo 1. Ejemplos de respuestas de estudiantes de la ESO analizadas por futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria

Ejemplo 1

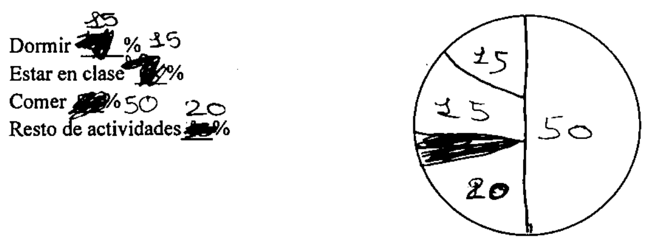
ISBN 978-84-945722-3-4



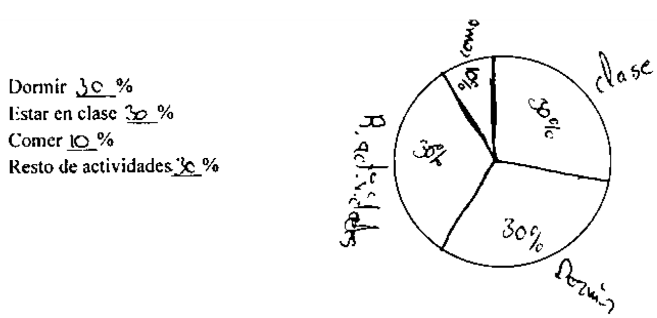
Ejemplo 2



Ejemplo 3

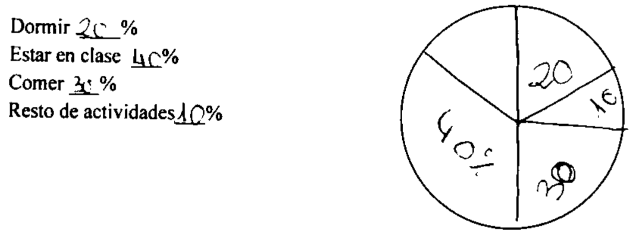


Ejemplo 4

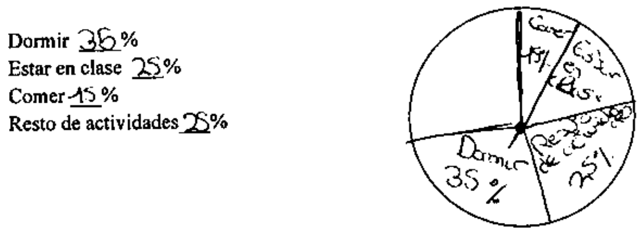


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplo 5



Ejemplo 6



Anexo 2. Preguntas de la segunda parte del cuestionario realizado a los futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria

1. ¿Crees que los porcentajes dados por el estudiante son razonables? ¿Por qué?

2. ¿Consideras correcta la respuesta del estudiante en el apartado de completar porcentajes? Justifica tu respuesta.

3. ¿Consideras correcto el gráfico de sectores realizado por el estudiante? Justifica tu respuesta.

4. Evalúa el ejercicio de forma global:

Fracaso	Insuficiente	Satisfactorio	Bien	Excelente

5. ¿Qué argumentos utilizarías para justificar tu evaluación ante el estudiante? ¿Cómo le explicarías, si fuera el caso, los errores cometidos?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-812

ASPECTOS DEL DISCURSO DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS CUANDO CONSTRUYEN DEFINICIONES MATEMÁTICAS

Alfonso J. González-Regaña – Verónica Martín-Molina – Aurora Fernández-León
Rocío Toscano-Barragán – José María Gavilán-Izquierdo
agonzalez@us.es – veronicamartin@us.es – aurorafl@us.es – rtoscano@us.es –
gavilan@us.es
Universidad de Sevilla. España

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la Educación Matemática
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: Formación Universitaria
Palabras clave: comognición, discurso, definir, estudiantes universitarios

Resumen
En este trabajo estudiamos el proceso de definir de estudiantes universitarios para profesor a través del análisis del discurso matemático. Concretamente, nos centraremos en los resultados que hemos obtenido al analizar dicho discurso cuando los estudiantes definen cuerpos geométricos tridimensionales. Nuestra investigación adopta una perspectiva sociocultural. En particular, el marco teórico que utilizamos es el de la comognición (commognition, unión de communication y cognition), propuesto por Sfard (2008), que considera que el aprendizaje matemático es un cambio en el discurso matemático.

Introducción

La investigación en educación matemática a nivel universitario ha adquirido una gran importancia en los últimos años. Por ejemplo, Rassmusen, Zandieh, King y Teppo (2005) han caracterizado el *pensamiento matemático avanzado*, que incluye prácticas matemáticas como definir, probar, simbolizar, etc. En este trabajo, nos centramos en la práctica de definir, que numerosos autores consideran tan importante como, por ejemplo, la práctica de probar. En efecto, Freudenthal (1973) afirma que establecer una definición puede ser una proeza esencial, incluso más que encontrar una proposición o una prueba.

Por otro lado, hay diversos investigadores que estudian la educación matemática a nivel universitario mediante el marco comognitivo (unión de comunicación y cognitivo) de Sfard (2008). Dicho marco es un marco sociocultural que considera las matemáticas como un discurso (el pensar es entendido como hablar con uno mismo) y el aprendizaje como un cambio en dicho discurso. Por tanto, estudiar el aprendizaje de los alumnos universitarios es equivalente a estudiar los cambios en su discurso.

En este trabajo estudiamos el proceso de definir de estudiantes universitarios a través del análisis del discurso matemático, específicamente cuando describen y definen cuerpos geométricos tridimensionales.

Marco Teórico

El marco comognitivo de Sfard (2008) establece las características del discurso matemático a partir de los siguientes elementos: *uso de palabras* (que incluye las palabras clave usadas, que pueden ser tanto propias del vocabulario matemático, como por ejemplo *polígono*, como palabras del lenguaje ordinario que son usadas en un contexto matemático, como *lado* de una figura), *mediadores visuales* (los objetos visibles que son usados como parte de la comunicación, como pueden ser las figuras, los gráficos o los símbolos), *narrativas* (cualquier secuencia de sentencias que describen objetos, relaciones y procesos, tal como definiciones, teoremas y pruebas), y *rutinas* (patrones característicos del discurso matemático).

Otra de las nociones importantes dentro del marco comognitivo son las *reglas del discurso*, entre las que se distingen *reglas a nivel objeto* y *reglas a nivel meta* (que denominaremos *meta-reglas*). Las reglas a nivel objeto son definidas como narrativas acerca de las regularidades y el comportamiento de los objetos, mientras que las meta-reglas definen patrones en la actividad de los implicados en el discurso tratando de producir y sustanciar narrativas a nivel *objeto.*

Metodología

Participantes y contexto

Este estudio forma parte de otro más amplio acerca del proceso de definir en el que se estudia el discurso de grupos de alumnos del Grado en Educación Primaria y del Máster en Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES). Como parte de su formación, los alumnos del Grado en Educación Primaria deben cursar una asignatura sobre contenido matemático específico en Primer Curso y otra sobre educación matemática en Segundo Curso. Los participantes en este estudio eran estudiantes de la asignatura de contenido matemático específico de Primer Curso del Grado en Educación

ISBN 978-84-945722-3-4

Primaria. Estos habían recibido ya instrucción sobre geometría de figuras 2D pero no sobre geometría de figuras 3D. Por otra parte, los estudiantes estaban organizados en 12 grupos de 3 a 6 alumnos (que llamaremos en cada grupo A1, A2, A3,…, A6). Concretamente, en este trabajo vamos a presentar los resultados relativos a cuatro de los 12 grupos de estudiantes, que llamaremos G1, G2, G3 y G4.

Instrumento

Se diseñó una tarea que consistía en nueve preguntas sobre la descripción y definición de tres cuerpos geométricos cuyas representaciones planas aparecían en el enunciado de la tarea. Concretamente, los cuerpos geométricos eran: un cubo; un prisma recto y convexo que no era un cubo; y un prisma oblicuo y cóncavo.

Algunas de las preguntas de la tarea eran:

- En los cuerpos anteriores se pueden identificar elementos básicos como caras, vértices, aristas, etc. ¿Qué propiedades o características relativas a esos elementos observáis en cada uno de estos cuerpos?
- De las propiedades o características anteriores, ¿podéis identificar, si es posible, aquellas que son comunes solo a dos de los tres cuerpos?
- Definid cada uno de los cuerpos.

Datos

Los datos utilizados en este trabajo son las grabaciones en audio y las transcripciones del diálogo entre los alumnos de cada uno de los grupos cuando resuelven la tarea mencionada en el apartado anterior. También consideramos las respuestas escritas que fueron finalmente consensuadas por el grupo.

La primera de estas fuentes nos permite acceder a la discusión y negociación que llevaron a cabo los estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea. Para nosotros, el discurso de cada uno de los grupos en su totalidad es una unidad de análisis, sin hacer distinciones entre los roles específicos que pudiesen asumir cada uno de los estudiantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

La segunda fuente es igualmente importante porque los estudiantes reflejan a través de sus respuestas escritas el consenso acerca de lo que constituía una respuesta correcta. En este sentido, validaron los acuerdos alcanzados durante el proceso de negociación y discusión.

Análisis

El análisis de los datos se ha realizado en dos fases. En la primera transcribimos las grabaciones en audio de cada uno de los grupos y, posteriormente, identificamos las cuatro características discursivas de las que habla Sfard (2008), y las meta-reglas. En la segunda fase, clasificamos las características discursivas y las meta-reglas, y estudiamos cuáles de los tipos encontrados aparecen en cada uno de los grupos.

En el presente trabajo, presentamos exclusivamente qué palabras y narrativas son utilizadas por los cuatro grupos de alumnos que forman parte de este estudio. A continuación, ilustramos a través del grupo G1 cómo se han llevado a cabo las dos fases de este análisis.

Para ejemplificar la primera fase de análisis, mostramos un extracto de la transcripción de la respuesta del grupo G1 (compuesto por los alumnos A1, A2, A3, A4) a la primera pregunta que aparece en la sección de Instrumento. En dicho extracto hemos identificado las palabras (señaladas en negrita) y las narrativas (en itálica):

15: A4: *La **arista** es lo que une un **punto** con otro*.
16: A2: Este tiene ocho...
17: A4: y la **cara** es lo que está dentro de...
18: [varios al mismo tiempo]
19: A3: *todos tienen ocho **vértices***
20: A2: *tienen todos ocho...**vértices***.
21: A4: ¿Seguro? *1, 2, 3, 4...*
22: A1: *Es un **cubo***.
23: A4: *...5, 6 **caras***, ¿no?

Posteriormente, en la segunda fase de análisis clasificamos las narrativas según su naturaleza en cuatro tipos principales, con algunos subtipos. En el extracto anterior podemos ver ejemplos de:

N1. Narrativas que recogen una definición de un concepto: línea 15.

ISBN 978-84-945722-3-4

N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos: línea 22.

N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos: líneas 19, 20, 21, 23.

Resultados

Mostramos a continuación los resultados del análisis de los cuatro grupos considerados. Con respecto al *uso de palabras***,** identificamos primero qué palabras aparecen y después las clasificamos según su uso. Concretamente, hacemos referencia a *para qué* se usan y *cómo* se usan. Los resultados obtenidos se exponen a continuación:

- *Para qué* se usan:
  1. Para etiquetar la figura o sus elementos:

     Cubo, prisma, lados, diagonales, vértices, ángulos, caras, bases.
  2. Para describir la figura o sus elementos:

     No consecutivos (referido a vértices); recto, poliédrico, agudo, obtuso (referido a ángulos); iguales, simétricas o semejantes (referido a caras); cuadrangulares (referido a bases); regular o irregular, oblicuo, ladeado, cuadrado, cóncavo y convexo, planos, tridimensionales (referido a cuerpos).

- *Cómo* se usan:

1. De forma correcta. Por ejemplo, la palabra cubo en el grupo G3:

   21: A2: Yo creo que era un, que es un cubo ¿no? […]

   22: A1: Un cubo, ¿no?

   23: A2: Eah, un cubo.

   24: A1: Con todos los lados iguales.
2. De forma errónea. Por ejemplo, cóncavo y convexo en el grupo G1:

   138: A1: […] cóncavo era cuando tienen todos los lados y los ángulos iguales, convexos cuando no son iguales.
3. De forma coloquial. Uso de una palabra coloquial con sentido matemático. Por ejemplo, la palabra daleado (expresión andaluza para ladeado) en el grupo G2:

   71: A3: Yo creo que el cuerpo 2 es un prisma que tiene su base cuadrada, aunque esté así un poquillo daleado sigue siendo un prisma […].

ISBN 978-84-945722-3-4

Con respecto a las *narrativas*, identificamos cuatro categorías (N1, N2, N3 y N4), con la cuarta divida en cuatro subcategorías (N4a, N4b, N4c y N4d). Describimos a continuación cada una de ellas, junto con ejemplos representativos.

N1. Narrativas que recogen una definición de un concepto. En este tipo de narrativas, los alumnos definen explícitamente un concepto matemático.

En el grupo G1, se definen aristas y diagonales:

> 15: A4: La arista es lo que une un punto con otro.
>
> […]
>
> 53: A1: las diagonales son las que unen dos vértices no consecutivos.

N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos. Se usan para asignarle un nombre a un cuerpo geométrico o a un elemento de él.

En el grupo G3 se etiquetan las caras de las figuras:

> 31: A1: Pero eso es un rombo […].

En el grupo G4, los miembros etiquetan las figuras y sus caras:

> 167: A2: un prisma rectangular
>
> 168: A4: y el otro es un cuerpo irregular.
>
> […]
>
> 391: A1: sus caras son rectángulos. Las caras… es que no sé cómo decir, llamar a estas caras, las caras que no son las bases.

N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos. Estas propiedades pueden ser *numéricas* (los estudiantes cuantifican el número de caras, vértices, etc.) o *cualitativas* (el ángulo es recto, caras iguales dos a dos, caras simétricas, etc.). Mostramos a continuación un ejemplo representativo del G3 en el que aparecen propiedades de los dos tipos:

> 29: A2: El cuerpo dos tiene lo mismo.
>
> 30: A3: Caras, claro, seis caras.
>
> […]
>
> 32: A2: Ocho vértices.
>
> […]
>
> 37: A2: Doce aristas.
>
> 38: A1: Tiene cuatro caras iguales y dos diferentes.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el grupo G4 también hemos identificado narrativas que describen ambos tipos de propiedades, numéricas y cualitativas.

62: A3: son, son seis caras.

[…]

66: A4: Son seis caras, y tiene dos iguales, dos iguales y dos iguales.

[…]

180: A3: […] Cuerpo formado por seis caras, doce aristas y ocho vértices.

N4. Narrativas sobre qué significa definir. En esta categoría se recogen aquellas narrativas en las que aparece explícitamente una declaración sobre qué entienden por definir. Distinguimos cuatro subcategorías dependiendo de las declaraciones que hicieron los alumnos.

N4a. Definir es decir el nombre y las características. Encontramos un ejemplo en la línea 213 del grupo G1:

211: A2: Profesora, ¿en el 5 qué hay que poner? [Se refieren a qué deben responder a la pregunta "Definid cada uno de los cuerpos"].

212: Profesora: mi pregunta a vosotros es: ¿qué consideráis que es una definición? […].

213: A2: el nombre y… las características… es la definición.

N4b. Definir es explicitar solo las características. En el grupo G2:

98: A2: Pues yo lo definiría con las características que tenía en la primera pregunta. La primera pregunta te pide las características de eso, eah, pues las mismas características es lo que define la figura […].

N4c. Definir no es solo explicitar sus propiedades. En la línea 209 del grupo G1:

206: A3: Definid cada uno de los cuerpos.

207: A1: Si hablamos de prismas, es un prisma hexagonal, pero...

208: A4: Ya la hemos definido antes, en…

209: A3: No, hemos dicho qué es lo que tiene.

N4d. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden ser inclusivas o exclusivas. Por ejemplo, en el grupo G2:

ISBN 978-84-945722-3-4

134: A3: Es que lo que pasa es como con los triángulos y los rombos y todo eso, que dentro del rombo están también los cuadrados. Pues a lo mejor dentro de la definición de este cabe este, pero no tiene por qué.

A continuación, resumimos en una tabla las narrativas identificadas y los grupos en los que aparecen:

<table>
<tr><th colspan="2">NARRATIVAS</th><th>Grupos en los que aparecen</th></tr>
<tr><td colspan="2">N1. Narrativas que recogen una definición de un concepto</td><td>G1</td></tr>
<tr><td colspan="2">N2. Narrativas en las que se etiquetan figuras o sus elementos</td><td>G1, G2, G3, G4</td></tr>
<tr><td colspan="2">N3. Narrativas en las que se describen propiedades de los cuerpos</td><td>G1, G2, G3, G4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">N4. Narrativas sobre qué significa definir</td><td>N4a. Definir es decir el nombre y las características</td><td>G1</td></tr>
<tr><td>N4b. Definir es explicitar solo las características</td><td>G2, G4</td></tr>
<tr><td>N4c. Definir no es solo explicitar sus propiedades</td><td>G1</td></tr>
<tr><td>N4d. Narrativas en las que se discute si las definiciones pueden ser inclusivas o exclusivas</td><td>G1,G2, G4</td></tr>
</table>

Tabla 1. Resumen de narrativas identificadas

Conclusiones

En este trabajo hemos analizado el discurso de grupos de estudiantes para maestro de Educación Primaria cuando describen y definen cuerpos geométricos tridimensionales. Hemos usado para este análisis el marco comognitivo de Sfard (2008). En particular, nos hemos centrado en el uso de palabras y las narrativas encontradas.

Con respecto al uso de palabras matemáticas, hemos identificado para qué se usan (para etiquetar y describir) y cómo (de forma correcta, errónea y coloquial).

Centrándonos en las narrativas, hemos determinado la existencia de cuatro categorías: las que recogen la definición de un concepto, las que etiquetan figuras o sus elementos, las que describen propiedades de los cuerpos y aquellas en las que se discute sobre qué significa definir. Dentro de esta última categoría hemos distinguido cuatro subcategorías dependiendo del significado que los alumnos dan a definir un concepto.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los resultados encontrados nos proporcionan indicadores sobre el conocimiento matemático de los alumnos del grupo y las carencias que tienen. Por ejemplo, el uso de palabras erróneas o palabras coloquiales usadas con significado incorrecto nos indica carencias en el vocabulario matemático de todos los grupos. Por otra parte, el análisis de las narrativas nos muestra que el grupo G1 no tenía claro cómo definir varios conceptos previos o qué significaba definir. El grupo G2 sí parecía tener claras las definiciones de conceptos previos pero no qué significaba definir. El grupo G3 no discutió explícitamente el significado de la palabra definir, aunque uno de sus miembros puso de manifiesto que desconocía en qué consiste dar una definición. Finalmente, el grupo G4 consideró que para definir solo es necesario explicitar las propiedades, y que pueden darse diferentes definiciones de un concepto.

Actualmente, este trabajo está siendo ampliado con el estudio de las rutinas y meta-reglas que aparecen en el discurso de los estudiantes. Los resultados presentados aquí han sido clave para la identificación de ambas, puesto que las narrativas pueden ser indicadores de la existencia de meta-reglas (rutinas si se observa un patrón de comportamiento repetido) y viceversa, es decir, las meta-reglas y las rutinas producen narrativas.

Referencias bibliográficas

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. Mathematical thinking and learning, 7, 51-73. doi:10.1207/s15327833mtl0701_4

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-813

EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LA ALEATORIEDAD EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Luis Serrano[1], Carmen Batanero[1], Rodrígo Esteban[2]
lserrano@ugr.es, batanero@ugr.es, counterodrigo@hotmail.com
[1]Universidad de Granada (España), [2]Universidad de Zaragoza (España)

Modalidad: Comunicación breve (CB)
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Nucleo Temático: Investigación en Educación Matemática
Palabras clave: Aleatoriedad; Comprensión, Estudiantes, Educación Secundaria

Resumen

Diferentes currículos han incidido en la importancia de la probabilidad para la formación del estudiante y recomiendan proporcionarle experiencia aleatoria por medio de la realización de experimentos y simulaciones, usando la tecnología. Estas propuestas requieren que el alumno comprenda las características de las secuencias aleatorias, tema analizado por Batanero y Serrano (1999) utilizando experimentos con sólo dos resultados posibles. El objetivo de este trabajo fue completar dicha investigación analizando la comprensión de secuenciascon más de dos resultados posibles y comparando nuestros resultados con los de Batanero y Serrano. Para ello se proponen a 159 alumnos de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria cinco ítems donde se pide decir si una secuencia de resultados es aleatoria, analizando también sus argumentos.

Introducción

Ha venido siendo habitual el tratar la enseñanza de la probabilidad según unos principios psicopedagógicos condicionados por el desarrollo cognitivo del alumno y por la dificultad de su conceptualización. Pero en las últimas décadas diferentes currículos (por ejemplo, CCSSI, 2010) han incidido en la necesidad de introducir cambios metodológicos en su enseñanza y en la importancia de la probabilidad para la formación del estudiante, recomendando que lo estudiantes realicen experimentos aleatorios con material manipulativo o mediante simulación, obtengan datos empíricos de los mismos y comparen los resultados obtenidos con sus predicciones. En esta línea, en España la enseñanza de estos contenidos se adelantó al último curso de Educación Primaria en el anterior currículo (MEC, 2006), tendencia que se continúa en el actual currículo (MECD, 2014).

ISBN 978-84-945722-3-4

El punto de partida para el aprendizaje de estos contenidos debe ser la comprensión del concepto de aleatoriedad, ya que es el origen de la construcción de la teoría de la probabilidad. Pero el concepto de aleatoriedad puede sugerir gran diversidad de interpretaciones, como lo indican Batanero y Serrano (1995) y esto hace que surgan errores y sesgos subjetivos en su percepción e interpretación. En este trabajo tratamos de completar las investigaciones previas, en las que los alumnos no habían estudiado probabilidad en la educación primaria, usando para nuestra actual investigación una muestra de estudiantes que sí tuvieron ese aprendizaje previo. Además utilizamos una tarea ligeramente diferente de las usadas en dichas investigaciones a fin de detectar la complejidad del razonamiento aleatorio al usar secuencias de varias opciones en lugar de solo dos.

Fundamentos

Las principales investigaciones sobre desarrollo de la idea de azar fueron llevadas a cabo por Piaget e Inhelder (1975) y Fischbein (1975). Los primeros supusieron que la comprensión del azar es complementaria a la idea de causa y efecto y requiere de razonamiento combinatorio y proporcional, lo cual supone una lenta maduración de la idea de azar. Por el contrario Fischbein supone intuiciones parcialmente formadas sobre la aleatoriedad en los niños y sugiere adelantar cuanto antes la enseñanza del tema.

Green (1983) preparó un cuestionario donde trataba de reproducir en forma escrita los experimentos de Piaget e Inhelder y lo pasó a 2930 estudiantes ingleses entre 11 y 16 años. Uno de sus ítems pide a los niños decidir cuál entre dos niñas que han lanzado una moneda equilibrada 150 veces ha hecho trampas (inventó los resultados) explicando el por qué. Observa que la mayoría de los niños considera aleatoria precisamente la secuencia que es inventada, porque esperan un balance de caras y cruces muy cercano al 50% y porque no aceptan las rachas de más de dos o tres resultados iguales. En la argumentación de la elección se consideran propiedades como la frecuencia de resultados, longitud de las rachas, patrón de la secuencia o impredecibilidad de resultados.

Serrano (1996) diseñó un cuestionario con tareas de reconocimiento y generación de secuencias aleatorias en experimentos con dos resultados equiprobables (lanzar una moneda) y lo pasó a 277 estudiantes españoles de 13 (147) y 17 años (130). El autor indica tres puntos para comprender las secuencias aleatorias: variabilidad local (frecuentes alternancias entre distintas posibilidades y ausencia de patrones establecidos), regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica) y diferencia entre valores teóricos y observados. Entre los errores mostrados por estos estudiantes, el autor resalta la creencia en que los datos deben ser erróneos, si no corresponden a las expectativas; confusión entre alta probabilidad y certeza y búsqueda de razones causales para un resultado inesperado. En lo que sigue tratamos de completar las investigaciones previas utilizando secuencias con más de dos resultados aleatorios.

Método

Para este estudio hemos utilizado una muestra de 159 alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, distribuidos en los siguientes cursos: 2º curso (n = 51), 3er curso (n = 64), 4º curso (n = 44), estando las edades de estos alumnos comprendidas entre 13 y 17 años.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Hemos de considerar que en Educación Primaria y en los cursos anteriores de Educación Secundaria habían recibido enseñanza de contenidos de Estadística y Probabilidad.
La tarea planteada a los estudiantes, que se presenta en la Figura 1 y consta de sus cinco ítems, ha sido adaptada de la investigación de Chernoff (2011) que utilizó un problema parecido en una investigación con 163 futuros profesores de educación primaria en Canadá, dentro de un curso de Didáctica de la Matemática. La diferencia entre ambos es que el autor usó sólo tres letras, mientas que en la prueba aleatoria que ahora consideramos hay cuatro resultados posibles. Todas las secuencias que proponemos tienen 10 resultados y hemos cambiado las características de las secuencias en cada uno de los items propuestos, destaquemos por ejemplo que Chernoff siempre usó las mismas frecuencias de resultados.

Ítems 1 a 5. Un examen tiene 10 preguntas, cada una con cuatro posibles respuestas, A, B, C y D. Solo una respuesta es correcta en cada pregunta.
Te mostramos continuación las respuestas que eligieron algunos estudiantes a las 10 preguntas:
Item 1. Ana: A C C B D C A A D B
Item 2. Borja: C C C B B B B B B B
Item 3. Carlos: C B C B B C B B B B
Item 4. Danilo: A A A C C C B B D D
Item 5. Emilia: A B C B A C D A C D
Rodea con un círculo los nombres de los alumnos o alumnas que podrían estar respondiendo al azar.

Figura 1. Tarea usada en la evaluación.

En los cinco ítems se presenta un conjunto de experimentos, cada uno de los cuáles podría ser aleatorio o no. Basándonos en que un profesor no pone las preguntas del examen siguiendo un patrón evidente que los alumnos puedan adivinar, los estudiantes deben aplicar su conocimiento del contexto de un “examen” para responder en cada uno de los ítems propuestos. Según esto y suponiendo que los cuatro resultados son equiprobables, ya que el profesor usualmente trata de usar las cuatro opciones posibles como correctas en alguno de los ítems, observamos que:

- La secuencia de Ana sigue lo esperado en una aleatoria; aparecen todas las opciones, no hay un orden evidente y aparece alguna racha (se repite algún resultado).
- La secuencia de Borja sólo contiene dos de las cuatro opciones. La respuesta esperada es diferente de lo que se espera en un proceso aleatorio. Además hay una racha muy larga.
- La secuencia de Carlos también tiene sólo dos opciones únicamente; aunque tiene rachas no demasiado largas. La respuesta esperada es que no es aleatorio.
- La de Danilo contiene todas las opciones e incluso tiene alguna racha larga. Sería típicamente una secuencia aleatoria.
- La secuencia de Emilia contiene todas las opciones, no hay un orden evidente, pero no contiene rachas.

Resultados

De acuerdo a lo esperado, observamos en la Figura 2 que la mayoría de alumnos consideran se está respondiendo al azar en los ítems 1 (Ana), 4 (Danilo) y 5 (Emilia) donde se

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

presentan todos los tipos de resultados. Los estudiantes utilizan acá su conocimiento del contexto, pues es difícil que un profesor prepare un examen de opciones múltiples con respuestas que sigan un patrón dado. Además en estas secuencias aparecen todas las opciones y no hay un orden evidente. Por otro lado, se rechazan con más frecuencia como aleatorios los ítem 2 y 3; en el primero nunca se dan ni la opción A ni la D, es decir, nunca aparecen dos de los resultados posibles. El resultado en este ítem coincide con lo expuesto en otro similar (con tres opciones de Chernoff, 2011) en que la mayoría de los futuros profesores consideran que la secuencia no puede ser aleatoria si los resultados no reflejan la equiprobabilidad de sucesos en la población. Al comparar por curso encontramos diferentes patrones de respuesta. Los alumnos de segundo curso encuentran más aleatorio que sus compañeros el ítem 2 donde claramente no hay aleatoriedad; los de tercero el 4 y 5 donde aparecen todos los resultados y hay rachas largas; los de cuarto el último. Observamos que, conjuntamente, los alumnos de tercero muestran mejores intuiciones para detectar la aleatoriedad en estas preguntas.

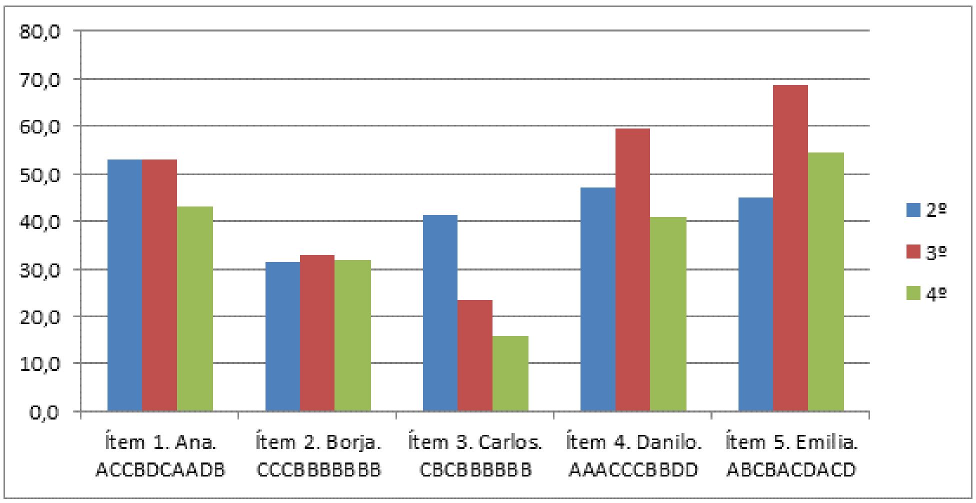


Figura 2. Porcentaje de alumnos que consideran se responde al azar en cada ítem.

Los argumentos usados por los alumnos para razonar la existencia de aleatoriedad se presentan en la Figura 3. En el análisis de los argumentos dados por los estudiantes para justificar sus respuestas observamos las propiedades de las secuencias seleccionadas que les parecen que han sido generadas al azar. Estoa argumentos los clasificamos en la forma siguiente:

Frecuencias: Si los estudiantes consideran que hay una distribución equilibrada en la secuencia de todas las opciones posibles (A, B, C y D), o no se contemplan todas alternativas de respuesta en la secuencia: “*porque responden C y B sólo*” (Alumno 30); “*porque han respondido muchas veces la misma letra*” (Alumno 64); “*porque el número de letras que aparecen en las series está equilibrado*” (Alumno 31). Este argumento aparece más en los ítems 1 y 5.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Patrones: Si, en las secuencias seleccionadas como aleatorias, se mencionan regularidades o patrones irregulares: "*porque están todas las letras más ordenadas*" (Alumno 1, 2º curso); "*porque siguen un orden*" (Alumno 10, 2º curso); "*porque se ocupan de seleccionar una distinta cada vez y no repetir mucho la misma letra*" (Alumno 8, 4º curso). Se asocia a los ítems 2 y 4.

Rachas: Cuando los alumnos reconocen esta característica en las secuencias seleccionadas como aleatorias: "porque repiten mucho las letras" (Alumno16, 2º curso); "porque casi nunca responden con la misma letra en dos o tres ocasiones seguidas" (Alumno 23, 3º curso); "porque se repite mucho la respuesta" (Alumno 8, 3º curso). Lla existencia de rachas largas se asocia sobre todo a los ítems 2 y 4.

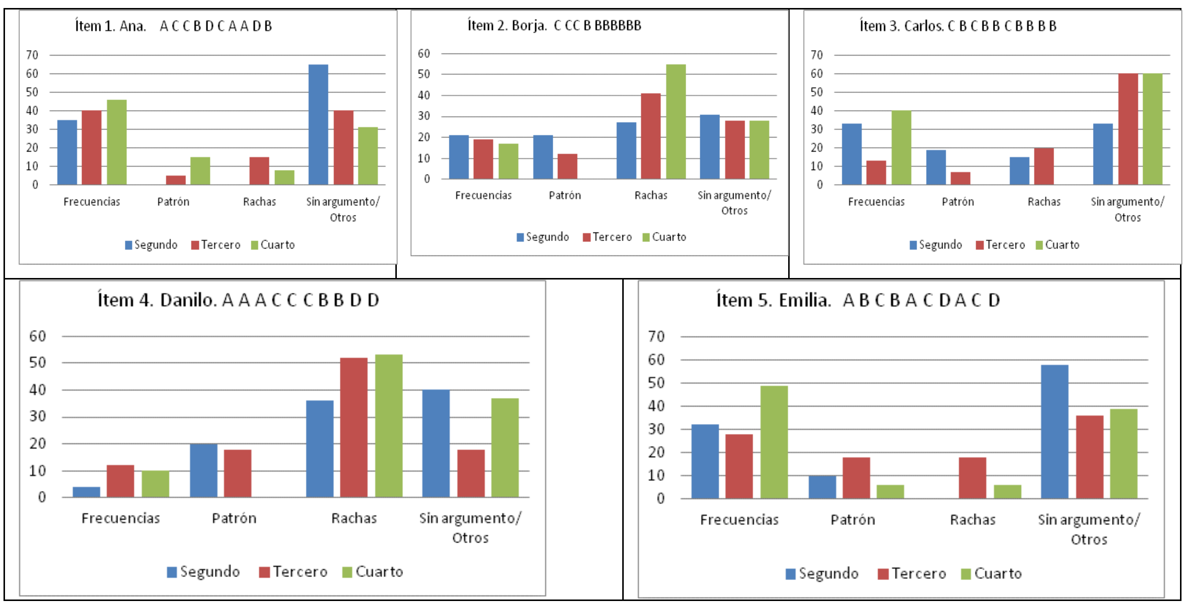


Figura 3. Porcentaje de alumnos que consideran se responde al azar en cada ítem.

Sin argumentos/otros argumentos: Cuando los alumnos no expresan ningún tipo de razonamiento sobre las secuencias de resultados aleatorios seleccionados o bien realizan razonamientos no clasificados anteriormente:"todos responden al azar" (Alumno 6, 2º curso); "porque pueden ser todas probables porque es azar" (Alumno 39, 2º curso); "porque en un examen no suelen poner muchas respuestas de la misma letra" (Alumno 3, 3º curso).

ISBN 978-84-945722-3-4

Observamos que en todos los ítems hay un alto porcentaje de estudiantes que no son capaces de razonar la aleatoriedad o emplean argumentos no pertinentes.

En general los estudiantes han reconocido las características de las secuencias propuestas. Por otro lado, al comparar por curso son los alumnos de segundo los que con más frecuencia no saben dar un argumento en los ítems 1 y 5, y los de tercero los que identifican con más facilidad las rachas largas.

Implicaciones para la enseñanza

El cuestionario ha sido sencillo de completar para los estudiantes e interesante para ellos, sirviendo la discusión posterior para mejorar su aprendizaje. Además, nos ha proporcionado bastante información para el análisis. Por tanto, pensamos que se ha cumplido nuestro objetivo, pues hemos analizado las intuiciones de los alumnos y comparado las respuestas por ítem y curso. Además, al utilizar secuencias con más de dos resultados posibles, ampliamos la información respecto al estudio de Serrano (1996) donde solo se consideraron dos sucesos elementales.

Los resultados nos sugieren que, a pesar de haber sido objeto de enseñanza, es necesario afianzar y proporcionar a los estudiantes un conocimiento más exhaustivo y preciso de las propiedades de las secuencias aleatorias, puesto que en algunos casos no saben razonar su elección y en otros, consideran no aleatorias las secuencias con rachas largas. Una sugerencia didáctica sería partir de la experimentación y simulación en actividades y problemas que se planteen, tal como se establece en los nuevos diseños curriculares. También sería importante utilizar una metodología activa, exploratoria, manipulativa y por descubrimiento, que facilite la comprensión de la noción de aleatoriedad y sus propiedades, partiendo del contexto y de la experiencia del alumno para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de estos contenidos. En este sentido, este trabajo nos da una pauta de los conocimientos previos sobre la aleatoriedad en los cursos segundo a cuarto.

Dada la importancia de la comprensión de este concepto para el aprendizaje de otros contenidos curriculares, es importante conocer y tener presente los resultados de investigaciones como la actual, donde se proporciona información sobre las concepciones previas y sesgos subjetivos del alumnado. La discusión en clase de ítems parecidos a los nuestros sería un buen medio de hacer florecer sus argumentaciones y llevarlos a reconocer las que son incorrectas.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO, 5,* 15-28.
Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education,30* (5), 558-567.
Chernoff, E. J. (2011). Investigating relative likelihood comparisons of multinomial, contextual sequences. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of European Research in Mathematics Education* (591-600). Reszlow: ERME.
Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math Standards.pdf. Consultado 15/12/2015.
Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.
Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783).University of Sheffield.
Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in students*. New York: Norton.
Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-815

¡NO SOLO ECUACIONES! LA POTENCIA DEL LENGUAJE ALGEBRAICO. ACTIVIDADES DE INVESTIGACIÓN PARA EL AULA.

Mireia López Beltran – Cyntia Riquelme Carvallo
mireia.lopez.beltran@upc.edu – criquelme@padredamiansscc.net
ICE de la UPC, España y Padre Damián Sagrados Corazones, España

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundario - Primario
Palabras clave: Lenguaje algebraico, patrón, resolución de problemas, tareas ricas

Resumen

La introducción y adquisición del lenguaje algebraico nos brinda una magnífica oportunidad para trabajar actividades ricas en el aula. El trabajo del álgebra no se puede limitar a la resolución ecuaciones, sino que debemos presentar toda su potencia con actividades motivadoras. En esta comunicación presentamos una selección de actividades del blog Banco de recursos del FEM Matemàtiques (http://bancfm.blogspot.com.es/) que permiten a los alumnos trabajar el álgebra de una manera significativa a partir de las investigaciones que se les proponen.

En la mayoría de libros de matemáticas el trabajo de álgebra se limita en exceso a una serie de contenidos con gran protagonismo en el planteamiento y la resolución de ecuaciones de diferentes tipos. Desde este enfoque, la introducción al álgebra del alumnado se realiza a partir de ejercicios de operaciones con expresiones algebraicas cada vez más complicados, acabando con el aprendizaje de la resolución de ecuaciones y su función para resolver problemas con esta herramienta.

En este planteamiento, la resolución de problemas no está en la introducción ni en el núcleo del aprendizaje sino que se trabaja en la parte final de aplicación y sólo después de que el alumnado haya mecanizado la resolución de las ecuaciones pertinentes. De esta manera muchos de los alumnos se introducen en el álgebra como un lenguaje abstracto y sin significado para ellos, lleno de letras, números y operaciones cada vez más complejas. Además, este planteamiento no suele dar suficiente protagonismo a otro tipo de trabajo que

ISBN 978-84-945722-3-4

también debemos realizar con nuestros alumnos y que encontramos, por ejemplo, en los contenidos del currículum español en los cursos de 1º y 2º de la ESO (12-14 años): “El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades” (BOE, 2015).

Creemos que es fundamental dotar de significado a las expresiones algebraicas y que los alumnos experimenten la necesidad de su utilización para facilitar lo que quieren comunicar. Como todo lenguaje tiene un carácter o sentido comunicativo “que nos permite expresar de manera general e interpretar de forma sintética propiedades y relaciones numéricas conocidas o desconocidas” (Calvo et al., 2016). En el caso de la investigación de patrones hacemos que los alumnos puedan dotar de significado a las expresiones algebraicas ya que las necesitan para expresar aquellas relaciones que ellos mismos han elaborado. También encontramos fundamental que los alumnos deban argumentar “al desvelar relaciones nuevas, buscar equivalencias entre expresiones aparentemente diferentes y justificar las relaciones, afirmaciones o conjeturas que realizan dando razones matemáticas en todo el proceso” (Calvo et al., 2016).

Podemos enseñar contenidos y procesos matemáticos a partir de la Resolución de Problemas (RP) ya que ésta “no tiene que ser una tarea a realizar al final del proceso de aprendizaje, sino que puede ser perfectamente el desencadenante del proceso” (Burgues y Sarramona, 2013). Los problemas a trabajar no pueden ser de cualquier tipo, es importante que sean “actividades competencialmente ricas formulando preguntas que promuevan conexiones, reflexiones y argumentaciones” (Calvo et al., 2016, p.254)[7]

En esta comunicación presentamos una serie de problemas (actividades competencialmente ricas) seleccionadas de nuestro blog que ayudarán a dotar de significado el trabajo del álgebra y a trabajar los procesos de comunicación y argumentación.

Investigación de patrones

Los problemas que hemos seleccionado trabajan el álgebra a partir del planteamiento de investigaciones en que los alumnos deben conjeturar y buscar un patrón. Hemos escogido

[7] Para más información sobre activitades competencialmente ricas ver la introducción del blog: http://bancfm.blogspot.com.es/p/blog.html

ISBN 978-84-945722-3-4

este enfoque ya que “el estudio de patrones es clave para desarrollar el pensamiento algebraico y crítico para la abstracción de la idea de relación” (Burgués, 2011). Además, siguiendo a la autora, “existe en el hombre una tendencia natural a utilizar patrones (nos gusta la repetición, sensibilidad artística, para recordar...) ya que están presentes en la naturaleza, tendemos a la generalización y los buscamos para clasificar.” Por eso la autora nos recomienda que aprovechemos esta “tendencia natural”. Otra característica que hace atractivo el uso de patrones en el aula es que “nos permiten predecir, saber lo que puede ocurrir gracias a establecer fórmulas o reglas…”. De hecho, en parvulario y primeros cursos de primaria se realiza un trabajo de series y patrones, con material y sin, que después desaparece en los cursos posteriores.

Este tipo de actividades también comporta una metodología de aula y un papel del profesor enfocado a “ayudar a nuestros alumnos a matematizar el patrón” con el uso del lenguaje algebraico y “mostrando las virtudes” de este lenguaje (Burgués, 2011).

En muchos de los problemas del *Fem Matemàtiques* se trabaja la identificación de patrones y de sus reglas en contextos numéricos y geométricos (en el plano y en el espacio). Ser capaz de resolverlos es una indicación del trabajo con un tipo de pensamiento funcional que permite generalizar y desarrollar una regla algebraica o fórmula que nos permita predecir comportamientos.

La investigación pasaría por diferentes fases: Darse cuenta de las semejanzas (módulos o tipos de cambio); Recoger datos y organizarlos; Realizar pruebas y conjeturas; Expresar las relaciones y reglas; Comprobar y justificar. (Burgués, 2011)

Darse cuenta de las semejanzas (módulos o tipos de cambio)

Los alumnos deben darse cuenta de las semejanzas o características que se repiten (módulo) o de un tipo de cambio (por tanteo operativo u observación de las formas de las figuras):

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

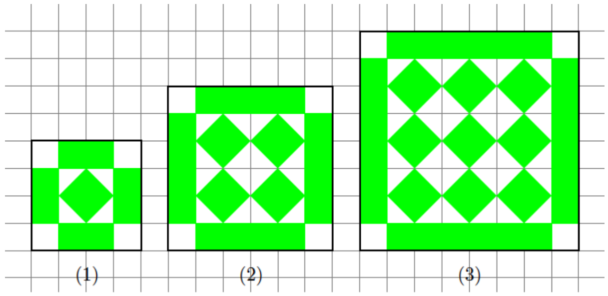


Figura 1: Patrón geométrico

En este caso podríamos ayudar en la tarea a los alumnos con una pregunta como: *¿Qué permanece igual y qué cambia al aumentar el nivel?*

En el siguiente ejemplo encontramos un patrón numérico muy sencillo:

División decimal

Si calculas, con la calculadora, el cociente con decimales de la división 9: 37, la pantalla te mostrará, como mucho, trece cifras decimales. Con estas cifras se puede deducir la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto suman las 14 primeras cifras decimales del cociente?

b) ¿Cuánto suman las 100 primeras cifras decimales del mismo cociente?

En la siguiente respuesta de un alumno vemos como éste ha detectado la repetición del patrón numérico (“*los números 243 se repiten constantemente”*):

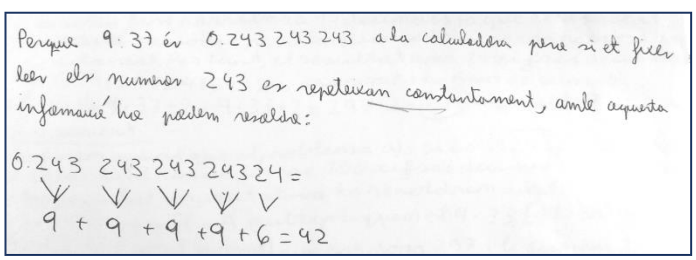


Figura 2: Patrón numérico

Recoger datos y organizarlos

Para poder ver esta repetición los alumnos deben recoger datos y organizarlos: empezar con esquemas y dibujos para llegar a la construcción de tablas que favorecen la observación de

ISBN 978-84-945722-3-4

pautas de crecimiento, un puente claro para el estudio posterior de funciones y para poder dar el paso de las relaciones reiterativas o recursivas a las relaciones funcionales.

Invito a magdalenas

Con 6 tiques, 1 magdalena gratis. Con 51 tiques, ¿a cuántos amigos puedo invitar gratis con los tiques que tengo?

En este caso vemos como un buen esquema les ayuda a organizar las ideas y ver las relaciones. Puede haber diversas estrategias de ataque que nos permitan recoger datos y que nos vienen dadas por diferentes perspectivas, visiones, manipulaciones o dibujos.

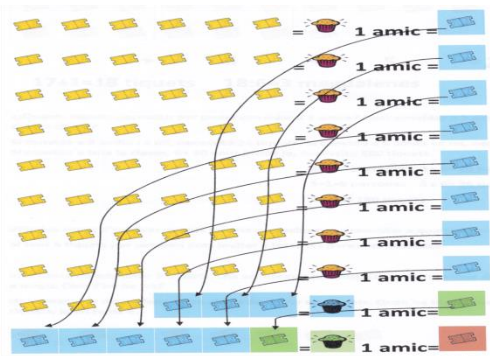


Figura 3: Esquema resolución problema Invito a magdalenas

Realizar pruebas y conjeturas

A partir de la realización de pruebas en el proceso de investigación los alumnos deben ir planteando sus hipótesis y conjeturas. Luego ponerlas a prueba y según el éxito o no, repetir el proceso o realizar un trabajo de abstracción.

Las pruebas sirven para poder dar razones matemáticas y justificar la conjetura. En este proceso de búsqueda del patrón los alumnos deben utilizar diferentes estrategias como, por ejemplo, coger casos más simples. Estas pruebas se deben ordenar, se debe realizar un trabajo sistemático y exhaustivo, de manera que no se escape nada. Una buena manera es la realización de listas ordenadas o tablas (que se ha de enseñar o sugerir porque no sale de manera natural en el alumnado) que nos ayudaran a ver relaciones verticales u horizontales entre los números que aparecen, como se ve en el ejemplo siguiente:

Una escultura cúbica

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Un artista dispone de 14 cubos de un metro de arista. Con estos 14 cubos hace una escultura. Para protegerla, la pintan.

a) ¿Cuál es, en metros cuadrados, el área que tienen que pintar?

b) Y, ¿en una figura de 5 pisos?

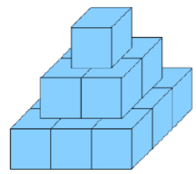


Figura 4

Para encontrar la regla general se tiene que hacer un salto de la recurrencia a la regla funcional: de la visión vertical de la tabla a la horizontal, es decir, de conocer un término sabiendo el anterior a conocerlo directamente en función de n.

Pis	Cares laterals pintades	Cares superiors pintades	Total m^2	
1	4	1	5	
2	8	3	11	+6
3	12	5	17	
4	X4 16	7	23	
5	20	9	29	
			85	

Figura 5: Tabla de una escultura cúbica

En esta parte, el profesor debe estar atento y en caso que el alumno no logre encontrar las relaciones puede, mediante buenas preguntas guiarles para matematizar la regla y poder predecir el patrón.

Expresar las relaciones y reglas

Una vez el alumnado ha sido capaz de visualizar un patrón o relación, ahora le surge la necesidad de expresarlo, es decir, de la utilización del lenguaje algebraico para expresar de una manera más sintética las relaciones y patrones que han encontrado. Un lenguaje algebraico que tiene sentido para ellos ya que las fórmulas y expresiones han sido encontradas de manera personal e intentan expresar como han interpretado las relaciones o la estrategia utilizada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Contamos baldosas

El siguiente mosaico está formado por baldosas blancas y negras. Tiene una anchura de 9 baldosas.

Figura 6

(…) f) Explica cómo se encuentra el número de baldosas necesarias a partir del número de anchura del mosaico.

En este problema se les pide el salto a la abstracción al tener que calcular las baldosas para un ancho que no pueden dibujar ni contar. Para expresar la relación nos podemos encontrar, según el nivel competencial del alumnado, con: una expresión verbal (oral o escrita), una semifórmula donde se incluyen ya elementos algebraicos o una fórmula algebraica.

Expresión verbal:

L'amplada del mosaic es el resultat de la suma de rajoles negres i blanques.
Hi ha una rajola mes de negres que de blanques a l'amplada del mosaic.
El nombre total de rajoles del mosaic es la suma de les àrees dels dos quadrats que estan formats per rajoles negres i blanques.

Figura 7

Semifórmula

amplada : 2 = nombre de rajoles blanques (b) (un número enter, sense decimals)
b + 1 = nombre de rajoles negres (n)

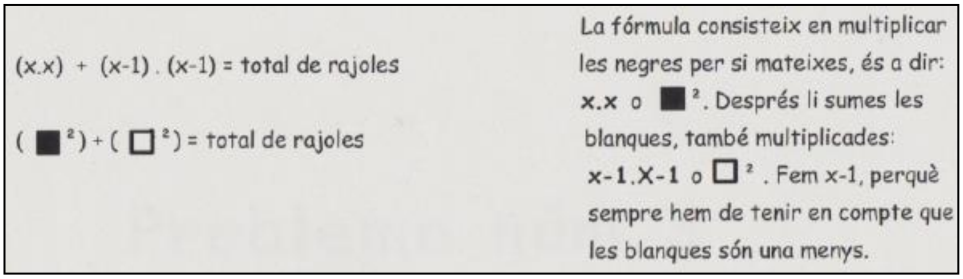
Després, per saber el nombre total de rajoles hem de fer el següent:

$b^2 + n^2$ = nombre de rajoles totals.

Figura 8

Fórmula con su justificación (6º de primaria)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



$(x.x) + (x\text{-}1) . (x\text{-}1)$ = total de rajoles

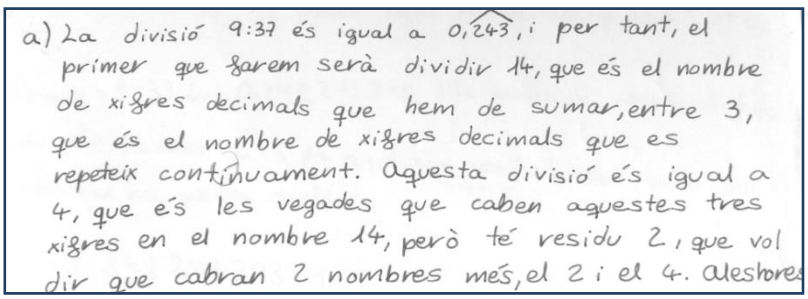
($■^2$) + ($□^2$) = total de rajoles

La fórmula consisteix en multiplicar les negres per si mateixes, és a dir: x.x o $■^2$. Després li sumes les blanques, també multiplicades: x-1.X-1 o $□^2$. Fem x-1, perquè sempre hem de tenir en compte que les blanques són una menys.

Figura 9

Comprobar y justificar.

Finalmente, es muy importante la justificación y argumentación del proceso: razonar el porqué del patrón. Por ejemplo, en el problema de la división decimal vemos como el concepto de división entera y el residuo le sirve al alumno para razonar y justificar el lugar que ocupa la cifra en el ciclo inacabado:



a) La divisió 9:37 és igual a $0,\widehat{243}$, i per tant, el primer que farem serà dividir 14, que és el nombre de xifres decimals que hem de sumar, entre 3, que és el nombre de xifres decimals que es repeteix continuament. Aquesta divisió és igual a 4, que és les vegades que caben aquestes tres xifres en el nombre 14, però té residu 2, que vol dir que cabran 2 nombres més, el 2 i el 4. Aleshores

Figura 10

"*La división 9:37 es igual a* $0'\widehat{243}$, *y por tanto, lo primero que haremos será dividir 14, que es el número de cifras decimales que hemos de sumar, entre 3, que es el número de cifras decimales que se repite continuamente. Esta división es igual a 4, que son las veces que caben estas tres cifras en el número 14, pero tiene residuo 2, que quiere decir que cabrán 2 números más, el 2 y el 4.*"

Tener que explicar a los demás es muy bueno para trabajar la argumentación. También tener que responder a preguntas clave: *¿Cómo lo has visto? o ¿Cómo convencerías al compañero de la mesa de al lado de que eso es cierto?* Y también preguntas en que deban interpretar fórmulas y expresiones*: ¿Por qué en esta fórmula se divide entre 2? o ¿Por qué se multiplica por 3?*

ISBN 978-84-945722-3-4

En el Anexo se incluyen dos ejemplos más: *Estrellas de fútbol* (anexo 1) y *Cubos agujereados* (anexo 3). Se incluyen producciones de alumnos sobre los patrones encontrados. También se aportan respuestas de los alumnos a la generalización pedida en el problema de *Invito a magdalenas* (anexo 2).

Conclusión

A partir de situaciones competencialmente ricas hemos visto producciones de alumnos que muestran como son capaces de introducirse en el lenguaje algebraico dotándolo de sentido para ellos con poco o ningún conocimiento previo de las reglas algebraicas. A partir de la resolución de problemas, las reglas expresadas ya no son un montón de letras, números y operaciones abstractas sino un lenguaje que pueden aprender de modo intuitivo al intentar expresar la relación matemática que observan en un patrón. Con este planteamiento se da mucho peso al trabajo de la competencia comunicativa ya que los alumnos deben argumentar y justificar a los demás los resultados que han encontrado.

Bibliografía

Boletín Oficial del Estado (BOE) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 3, 169-546. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Burgués, C. (2011). *Constant o variable, el canvi depèn de tu. Relacions i canvi, un bloc fonamental del currículum* [Vídeo]. http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/formacio-creamat/conferencies/771-constant-o-variable-el-canvi-depen-de-tu-relacions-i-canvi-un-bloc-fonamental-del-curriculum-

Burgués, C. i Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l'ESO*. Generalitat de Catalunya Departament d'ensenyament.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. i Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Síntesis.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 1 – ESTRELLAS DE FÚTBOL[8]

d) ¿Cuántas trayectorias diferentes de la pelota puede haber en un rondo de 5 jugadores?

e) ¿Sabríais encontrar una manera de determinar el número de trayectorias diferentes para un rondo de cualquier número de jugadores? Indica el resultado para 47 jugadores.

El esquema les ayuda a responder fácilmente la pregunta d).

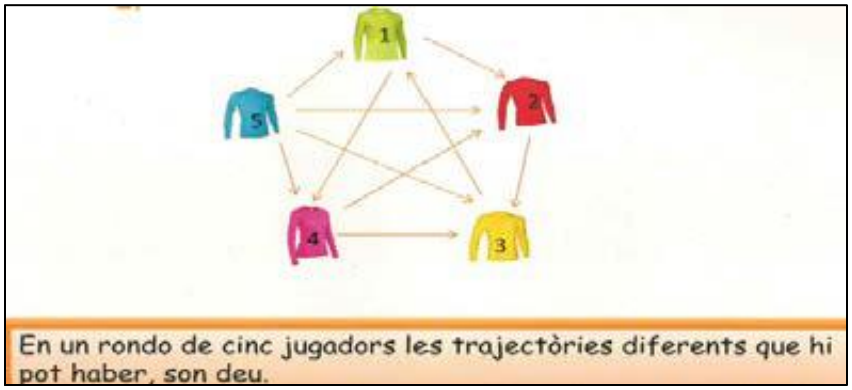


Figura 11

Otros dan una respuesta lógica a partir de las pasadas que puede hacer cada jugador.

El jugador A té 4 opcions de passada
El jugador B té 3 opcions diferents
El jugador C té 2 opcions
El jugador D té 1 sola passada
El jugador E ja no en pot fer cap de difernent
Total: 4+3+2+1= 10 passades

Figura 12

Al hacerlo así, en seguida pueden ver el patrón para la pregunta d) que elevan el número de jugadores a 47 y su generalización para cualquier número de jugadores.

En el siguiente ejemplo encontramos ya una expresión semialgebraica.

També es podria pensar d'una altra manera: cada jugador pot passar a 4 jugadors. Per tant es podrien passar 4x5 vegades, si no fos perquè d'A a cap B és igual a B cap a A. Per tant, hem de dividir per dos. (4x5)/2=10.
És a dir (nº jugadors)x(nº jugadors -1)/2

Figura 13

[8] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2015/09/estrelles-de-futbol.html

ISBN 978-84-945722-3-4

A partir de aquí se podría trabajar, por ejemplo, la fórmula para sumar los *n* primeros números naturales: *1+2+3+…+n= n·(n+1)/2*.

ANEXO 2 – INVITO A MAGDALENAS[9]

Con 6 tiques, 1 magdalena gratis. (…) ¿Cuántos tiques necesito para cualquier número n de amigos?

La continuación del problema de las magdalenas para un número cualquiera de amigos, está preguntando por la regla que nos permita predecir el número de tiques.

La solución que dan estos alumnos seria la expresión semialgebraica. Lo justifican diciendo que "*el nº de amigos x 6 = nº de tiques que se necesitan*", al que "*hemos de restar el número de amigos (…) si pueden deber*" (se dan cuenta que cada amigo que han invitado a una magdalena, esta tendrá un tique, pero claro el último tique lo "debes" porqué has conseguido la magdalena sin tenerlo, por eso dicen "si puedo deber". Entonces acaban el razonamiento que "*Para saber los tiques necesarios para no deber nada, hemos de sumar 1 al último resultado*". De esta manera obtienen: 6x – x + 1 que sería 5x + 1.

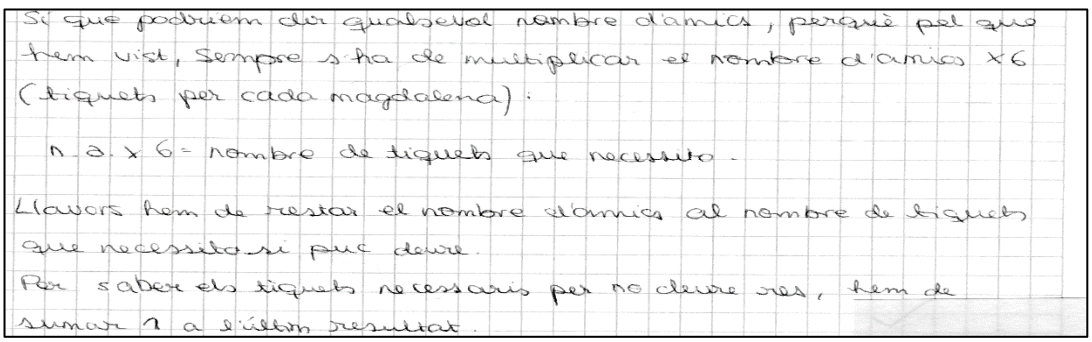


Figura 14

Este sería otro ejemplo que ya expresa la relación con una fórmula:

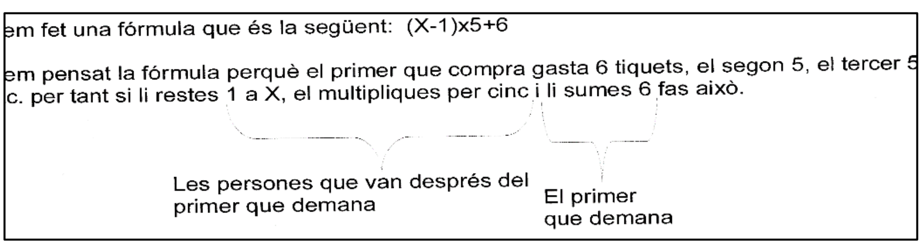


Figura 15

"*Hemos hecho un fórmula que es la siguiente: (X-1)x5+6*

[9] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2016/01/convido-magdalenes.html

ISBN 978-84-945722-3-4

Hemos pensado la fórmula porqué el primero que compra gasta 6 tiques, el segundo 5, el tercero 5, por tanto si le restas 1 a X, el multiplicas por cinco y li sumas 6 haces esto.”. Luego indican que la parte de (X-1)x5 son “*las personas que van después del primero que pide”* y sumar 6 corresponde a “*el primero que pide”.*

Notamos como los alumnos han llegado a expresiones equivalentes por razonamientos diferentes con la riqueza que esto nos supone para poder ser trabajada en el aula.

ANEXO 3 – UN CUBO AGUJEREADO[10]

Cogemos un cubo formado por 27 cubitos más pequeños, 3 por arista, y le sacamos las tres filas centrales de cubitos como se muestra en la figura

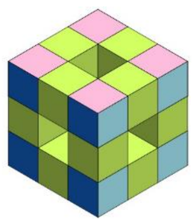


Figura 16

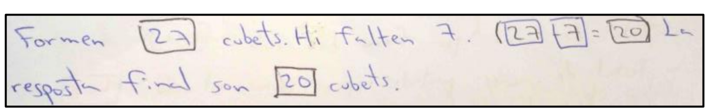
a) ¿Cuántos cubitos forman la figura resultante?

c) ¿Tomemos ahora un cubo formado por 5 cubitos de arista y le sacamos la fila central de cada cara, cuántos cubitos forman la figura resultante?

f) ¿Podéis descubrir qué pasará con un cubo formado por un número impar de cubitos cualesquiera de arista?

Este problema es un buen ejemplo para trabajo del bloque Espacio y forma en 3D. Invita a explorar la búsqueda de un patrón y permite plantear la actividad con material manipulativo (construcciones con cubitos) para ayudar en la abstracción.

Algunos, hacen un recuento ayudándose de la figura que da el enunciado:


Formen 27 cubets. Hi falten 7. 27-7=20 La resposta final son 20 cubets.

Figura

[10] Enunciado y ficha completa en: http://bancfm.blogspot.com.es/2016/06/cubs-foradats.html

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Otros ven una regularidad en cada una de las filas que se sacan y el cubito central: *“20 cubos forman la figura resultante, ya que si en total sacamos 7 (6 cubitos de cada una de las filas y 1 en el que coinciden todas las filas, el punto central del cuadrado) nos quedan 20”*

20 cubets formen la figura resultant, ja que si en total en treiem 7 (6 cubets de cadascuna de les files i 1 en el que coincideixen totes le[s] fileres, és a dir, el punt central del quadrat) ens en queden 20.

27- (2+2+2+1)= 27-7= 20 cubets

Figura 18

Los siguientes dan un paso más en la abstracción de una posible fórmula ya que lo expresan de manera que después se podría aplicar a cualquier medida de cubo (nº arista impar). Se dan cuenta del patrón y lo expresan en lenguaje semialgebraico:

3^3 és el nombre de cubets que estan format el cub, és a dir 27.
Com que traiem les 3 files centrals però aquestes tenen un cubet en comú, diem que en contes de tenir 3 cubets cada fila, té 2. A continuació faríem: $\boxed{3^3\text{-}(2\cdot3+1)= 20}$

Figura 19

Traducción: “*3^3 es el número de cubitos que están formando el cubo, es decir 27. Como que traemos las 3 filas centrales pero estas tienen un cubito en común, decimos que en lugar de tener 3 cubitos cada fila, tiene 2. A continuación haríamos: $3^3 – (2·3+1)=20$*”

Esta sería una semifórmula algebraica. Es un paso importante de abstracción y visualización de las relaciones en el patrón:

[nº de cubets totals] - [(nº de cubets per aresta - 1 cubet comú) · 3 dimensions + 1 cubet comú]

Figura 20

Traducción: “*[nº de cubitos totales] – [(nº de cubitos por arista – 1 cubito en común) · 3 dimensiones + 1 cubito en común]*”

Finalmente, la fórmula. En este caso, faltaría un 6 multiplicando a $\frac{n-1}{2}$

f) Per fer aquest càlcul amb qualsevol nombre imparell de cubets de l'aresta hem fet aquesta formula: (n=nombre de cubets per aresta)

$$n^3 - \left[\frac{n-1}{2} + 1\right]$$

Figura 21

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-816

EL LENGUAJE DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

Juan J. Ortiz – Veronica Albanese – Nordin Mohamed
jortiz@ugr.es – vealbanese@ugr.es – nmohamed@ugr.es
Universidad de Granada, España

Resumen
En este trabajo analizamos el lenguaje utilizado para presentar la estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles de bachillerato publicados el pasado año 2016. De las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS), por la importancia que otorga al lenguaje. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales, tanto del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, como propias de la estadística y probabilidad y otras que se refieren a ejemplos de material que se utiliza en los juegos de azar. Hay predominio de lenguaje formal y lenguaje simbólico complejo y variado. El lenguaje numérico contempla todos los sistemas numéricos y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas, algunas de ellas específicas del tema. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Introducción

La enseñanza de la inferencia es un tema fundamental de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, por la importancia que tiene en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016). Además, en segundo curso de Bachillerato (17-18 años) de esta modalidad (MECD, 2015, p. 389), en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes contenidos de inferencia:

> Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Para responder al cambio de directrices curriculares, en 2016 se han editado nuevos libros de texto. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).
Una característica importante del libro de texto de matemáticas es el lenguaje, por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. En este trabajo pretendemos analizar el lenguaje en el tema de estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, publicados según la nueva normativa. La finalidad es comparar con otros estudios previos y las directrices curriculares citadas.

Marco teórico

Un desafío en la enseñanza de las matemáticas es el uso de un lenguaje múltiple, que incluye el lenguaje verbal, los símbolos y expresiones algebraicas, las representaciones gráficas y las tablas (Scheleppegrell, 2007). Entre los diversos modelos disponibles para realizar un análisis de los libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), por el papel predominante que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático (Godino, Batanero y Font, 2007).

Antecedentes

Son escasas las investigaciones sobre la presentación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto, y menor aún la relacionada con el lenguaje. Respecto a la probabilidad, Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad. Observan mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar en uno de los textos, con una gama más

ISBN 978-84-945722-3-4

variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística.

Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado en el tema de probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria. Sus resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El trabajo anterior es completado por Ortiz, Albanese y Serrano (2016) quienes analizaron el lenguaje de la probabilidad en tres libros de texto españoles de Educación Secundaria publicados en 2015. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas.

García y García (2009) realizaron un estudio pormenorizado de los términos específicos relacionados con la inferencia estadística. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que según el autor no es adecuado ya que el libro de texto, como herramienta de trabajo en el aula, debe presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta. Nuestro trabajo trata de completar los anteriores, analizando tres libros de texto españoles de segundo curso de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias Sociales, publicados en 2016.

Metodología

Se analizaron tres libros de texto, publicados en 2016, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional. Se trata de una muestra intencional, puesto que el estudio es exploratorio, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se

ISBN 978-84-945722-3-4

denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la proporción muestral, estudiando las variables determinadas en Gómez et al. (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas.

Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados.

Resultados y discusión

Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron las expresiones verbales. Siguiendo a Shuard y Rothery (1984), hemos tenido en cuenta, las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad (ver Tabla 1).

Tabla 2. Expresiones distintas y frecuencia en los libros de texto según categoría

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Expresiones cotidianas	14	12	8
Específicas probabilidad	21	14	12
Específicas estadística	42	27	35
Juegos de azar	3	4	0

En ella observamos una gran variedad de términos: encontramos palabras que se usan para indicar resumidamente un procedimiento o hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad. El mayor número de expresiones diferentes son las específicas

ISBN 978-84-945722-3-4

de estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, y en Ortiz et al. (2016) con textos de secundaria. Observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en Bachillerato. No obstante, todavía hay una gran variedad de expresiones del lenguaje ordinario usadas con sentido específico, lo que puede ocasionar conflictos semióticos (Godino et al., 2007), debido a problemas de ambigüedad (Barwell, 2005).

Entre las específicas de probabilidad, las más utilizadas están relacionadas con el cálculo de probabilidades, variable aleatoria, las distribuciones normal y binomial y las distribuciones muestrales. La distribución de las proporciones muestrales se trata en los tres textos. El texto [T3], es el único que destaca la idea de incertidumbre como una característica de los estudios sobre poblaciones. Respecto al estudio de Ortiz et al. (2001), con textos de secundaria dirigido a alumnos de 14 años, el lenguaje ha variado bastante ya que aparecen conceptos más complejos.

Los términos específicos de estadística son muy variados, destacando los conceptos de población y muestra, estimación de la proporción muestral, inferencia estadística e intervalos de confianza, que aparecen en los tres textos. En ningún texto se da una definición explícita del concepto de inferencia que es fundamental, lo que hacen, los textos [T1] y [T3], es utilizar la palabra inferir como sinónimo de deducir que, según García y García (2009), está más relacionado con el contexto cotidiano, ya que en matemáticas son dos términos opuestos con significados distintos, lo que puede generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado.

Al comparar el contenido de los textos con las indicaciones del currículo, se observa que por ejemplo, el texto [T1] trata los test de hipótesis (T1, p.316), concepto no contemplado en los documentos curriculares. Otros textos omiten contenidos que sí están incluidos en el currículo, como el análisis de los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico, siendo el texto [T3] el único que lo trata. En el texto [T2] no se hace ninguna referencia a expresiones relacionadas con las tecnologías y la simulación tal y como se recomienda en dichos documentos.

Lenguaje numérico

ISBN 978-84-945722-3-4

En los tres libros de texto encontramos los mismos tipos de números: Números enteros que suelen expresar el tamaño de la muestra o el valor de los parámetros de las distribuciones; decimales y fracciones que a veces aparecen en la misma expresión: "$p = \frac{30}{150} = 0.2$" (T3, p.303). Los porcentajes se utilizan para expresar probabilidades o para indicar el nivel de confianza. Los irracionales aparecen en el cálculo del error máximo admisible en la estimación de la proporción muestral, en el cálculo del tamaño mínimo de una muestra para que se cumplan las condiciones fijadas, o en la fórmula de la desviación típica de la distribución de la proporción muestral: "$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$" (T2, p.290), al contrario que en Ortiz et al. (2016) que no se presentaban.

Lenguaje simbólico

Se ha encontrado una gran variedad de lenguaje simbólico en todos los textos analizados. En todos ellos aparecen las operaciones aritméticas, igualdades y desigualdades. La notación conjuntista se presenta en todos los textos excepto en [T3]: el símbolo {}, para presentar los elementos de un conjunto "*Si* $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *es una muestra*"(T2, p. 290) o el símbolo de pertenencia $\in$, para expresar la probabilidad de que un parámetro pertenezca a un intervalo de confianza, con nivel de confianza (1-α):

"$P\left[p \in \left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\right] = 1 - \alpha$" (T1, p. 324)

El símbolo ~ para indicar que una distribución binomial se aproxima a una normal: "$B(n, p) \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right)$ " (T1, p.312), o el símbolo ≡ para indicar que la distribución de la proporción muestral $\hat{P}$ sigue una distribución normal:"$\hat{P} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ "(T2, p. 290). Los símbolos de implicación suelen indicar cálculos encadenados. El texto [T3] es el único que presenta una sumatoria (T3, p.303). Es muy amplia la presencia de símbolos literales en todos los textos.

En los tres textos queda reflejada la gran riqueza y complejidad del lenguaje simbólico, como en el trabajo de Ortiz et al. (2066), pero con mayor complejidad, indicador del alto grado de formalización que se pretende alcancen los estudiantes del Bachillerato.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Lenguaje tabular

El empleo de lenguaje tabular es muy escaso sino ausente en este tema de proporción muestral. El único texto que presenta tablas es el [T1]: una tabla resumen de niveles de confianza e intervalos de confianza (Figura 1.a), y otra tabla con datos de proporción en la población y tamaño de la muestra (Figura 1.b), ambas en la sección de ejercicios. En los otros dos textos hay algunas tablas, pero ninguna especifica de proporción muestral.

RESUMEN		
	NIVEL DE CONFIANZA	INTERVALO DE CONFIANZA
a)	90 %	(0,54; 0,70)
b)	95 %	(0,525; 0,715)
c)	99 %	(0,495; 0,745)

a. Tablas de resultados (T1, p.317)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, *p*, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, *n*, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

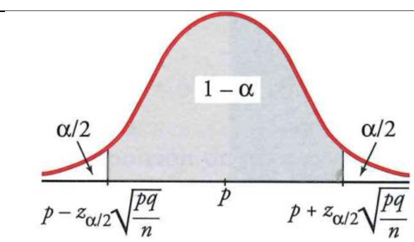
b. Tabla de datos (T1, p.320)

Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos

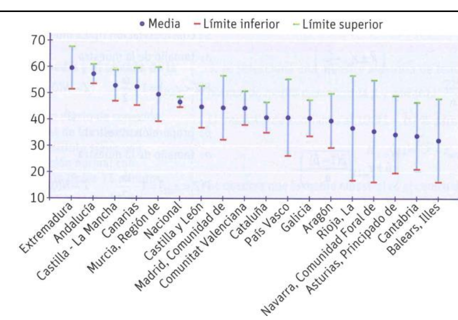
Destacar que la presencia de tablas es casi nula, al contrario que en Ortiz et al. (2016), donde sí había una gran variedad de lenguaje tabular.

Lenguaje gráfico

En los tres textos aparecen las gráficas de la normal y de la binomial, aunque en algunos de ellos en un tema previo al de la estimación de la proporción muestral. En particular para la proporción solo hemos encontrado dos gráficas: En el texto [T1] se presenta un ejemplo del intervalo de confianza para la proporción, con un nivel de confianza (1-α) construido con una muestra de tamaño n (Figura 2.a), y en el texto [T3], en la sección de aplicaciones, hay una gráfica donde se muestra el intervalo de confianza para la proporción poblacional de parados en el tercer trimestre de 2015 (Figura 2.b).



a.Interv.confianza proporción (T1, p. 314)



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	b. Intervalos de confianza (T3, p.327)

Figura 2. Ejemplos de gráficos en los textos

Se observa también que el empleo de gráficas disminuye con respecto a textos de niveles inferiores (Ortiz et al., 2016), aunque son de mayor complejidad, como es esperable en este nivel educativo.

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que si aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). En contra de lo especificado en las orientaciones curriculares hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología.

Para que los estudiantes consoliden un lenguaje matemático más avanzado, los profesores deben cuidar el lenguaje formal que se utiliza en el aula, evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado (García y García, 2009).

Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, en el Bachillerato, así como facilitar la labor del profesorado, siendo necesario ampliar el estudio con otros textos.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyectos EDU2013-41141-P, EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education 19*(2), 118–126.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: Sense Publishers.

ISBN 978-84-945722-3-4

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 344-369.
García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. *Educación Matemática, 21* (3), 95-126.
Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.
Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.
MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*.
Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.
Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38*, 5-14.
Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23,*139-159.
Shuard, H. & Rothery, A (Eds) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.
Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

ANEXO: Textos empleados en el análisis.

[T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.

[T2]. Gámez, J., Marín, S., Martin, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

[T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-820

LOS LANZAMIENTOS EN EDUCACIÓN FÍSICA: UN CONTEXTO PARA REFORZAR LAS MEDIDAS DE LONGITUD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Susana Nieto Isidro – María de los Ángeles Moro Domínguez
sni@usal.es – mamoro@educa.jcyl.es
Universidad de Salamanca, España

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Educación Primaria
Palabras clave: Educación Primaria, Educación Física, Medida, Investigación multidisciplinar

Resumen

Cuando se introducen las medidas de longitud (metro, centímetro, kilómetro) en los primeros cursos de Educación Primaria las actividades prácticas de medición propuestas en los libros de texto de matemáticas consisten habitualmente en medir longitudes representadas en el propio texto utilizando una regla escolar, generalmente inferiores a 15-20 centímetros. En este trabajo se presenta una experiencia interdisciplinar que proporciona a los niños de 7-8 años una oportunidad de medir por sí mismos longitudes superiores al metro dentro del entorno escolar, utilizando como contexto el Aula de Educación Física y como tema los lanzamientos propios del currículum de Educación Física. Las actividades propuestas siguen un esquema narrativo basado en las Olimpiadas para fomentar la motivación de los niños y dar sentido y coherencia interna a las mediciones realizadas, y como instrumentos de medida se emplean elementos propios del Aula de Educación Física, como cuerdas y pañuelos. Esta propuesta proporciona a los niños de 7-8 años una oportunidad cercana y realista de realizar mediciones diversas en un contexto dinámico, de competición y juego en grupo. El esquema narrativo de las Olimpiadas fomenta además que cobren conciencia de los requisitos de una buena medición mediante una experiencia personal de carácter multidisciplinar.

Introducción

Uno de los contenidos comunes de la asignatura de matemáticas en Educación Primaria en España es el referido a la Medida, que es uno de los Bloques temáticos desarrollados en la actual legislación educativa. El acto de medir y el uso de unidades de medida convencionales tiene una gran importancia social, tanto actualmente como a través de la historia (Frías, Gil y Moreno, 2001), y la legislación educativa vigente remarca el interés que tiene para los niños el que las medidas se correspondan con su entorno y estén basadas en la realidad: así, el Real

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Decreto 126/2014, de 28 de febrero, indica que los niños deben "*expresar con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo, en contextos reales*".

En España la introducción a estos contenidos se realiza generalmente comenzando por las medidas sencillas del tiempo en el primer curso de Educación Primaria. En el segundo curso de Educación Primaria (7-8 años), se da el primer contacto de los niños con las medidas de longitud (metro, centímetro, kilómetro), las medidas de peso/masa (kilogramos y sus subdivisiones) y las de capacidad (litros y sus subdivisiones).

Para evaluar la forma en la que estos contenidos son introducidos en el aula, se ha realizado un primer trabajo de revisión de diferentes libros de texto de Matemáticas de segundo curso de Educación Primaria, elaborados por un total de 5 editoriales españolas especializadas (Anaya, Edelvives, Santillana, SM y Vicens Vives). En todos ellos se presentan los contenidos anteriores de una forma similar, aunque el orden en el que se introducen puede variar de unos a otros.

En el caso de las medidas de longitud, en los manuales consultados se comienza por introducir el metro y el centímetro y se indica a los niños la relación que hay entre ellos (1 m.=100 cm.) y para qué tipo de medidas se utiliza cada una de ellas. A continuación se introduce el kilómetro como unidad de medida para distancias muy grandes (por ejemplo, distancias entre poblaciones) pero sin dar su relación con el metro, pues en estos niveles los niños manejan las centenas pero no los millares. Se proponen también una serie de actividades prácticas de medida en el aula, que se realizan utilizando una regla escolar. Estas medidas se refieren tan solo a longitudes pequeñas, típicamente desde 2-3 a 15-20 centímetros, debido al tamaño del soporte (el cuaderno de actividades y/o el libro de texto en el que están representadas las longitudes a medir) así como al instrumento de medida que manejan los niños, reglas escolares de 20 o 30 centímetros.

Así, encontramos actividades para la medida en centímetros como las siguientes:

- Medir las distancias entre elementos representados en el texto (estrellas, astronautas, casas) y a partir de esas medidas realizar diversas operaciones: sumarlas para obtener una distancia total, buscar el camino más largo o más corto entre dos elementos, restar las medidas para obtener la diferencia, etc.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Medir con la regla la longitud de elementos diversos, algunos realistas (barras de pegamento, lápices, sacapuntas, etc.) y otros representados en el texto (vallas, peces, barcos, etc.). En ocasiones se pide realizar una comparación entre ellos para determinar cuál es el mayor o el menor.

Sin embargo, en el caso del metro, las actividades que se proponen son de tipo especulativo, puesto que no disponen de instrumentos de medida adecuados. Así, nos encontramos con actividades como las siguientes:

- Indicar en qué ocasiones utilizarían el metro para realizar medidas: por ejemplo, se da un listado de elementos (un cuaderno, una manguera, un coche, un billete…) y deben escoger si se medirían en metros o en centímetros.
- Indicar medidas aproximadas de algunos elementos: por ejemplo, escoger si un autobús medirá 10 o 100 metros o si una farola medirá 3 metros o 30 centímetros; o clasificar elementos según midan más o menos de un metro: un árbol, un bolígrafo, un semáforo, etc.

Estas actividades referidas a elementos externos, aunque correctas, no proporcionan experiencias de medición que los niños puedan realizar de forma sencilla, y están planteados de forma muy amplia y poco precisa. La experiencia de medición y el manejo de las unidades de longitud quedan entonces muy limitados, porque los niños no llegan a medir por sí mismos longitudes superiores a lo que permite su regla escolar.

Por todo ello, en esta propuesta, se pretende proporcionar a los niños de 7-8 años un contexto cercano, en el propio centro escolar, en el que sí puedan realizar por sí mismos medidas prácticas de longitudes superiores al metro. Para ello, proponemos aprovechar las posibilidades dinámicas y espaciales que ofrece el aula de Educación Física, sus instalaciones (gimnasio, patio, polideportivo) y las actividades realizadas en las horas de Educación Física para el refuerzo de estos contenidos matemáticos, mediante un planteamiento interdisciplinar que permita compatibilizar los objetivos de ambas áreas.

En nuestro planteamiento, el Aula de Educación Física resulta ser un entorno muy adecuado para el aprendizaje y refuerzo de las matemáticas a estas edades, pues el contexto dinámico y de juego proporcionado por las actividades físicas y deportivas permite introducir elementos lúdicos y afectivos en este aprendizaje. Los niños a estas edades adquieren

ISBN 978-84-945722-3-4

conocimientos muchas veces mediante el juego, que es su principal vehículo de aprendizaje (Baroody, 1994; Bishop, 1998), y en el aprendizaje de las matemáticas tiene una gran importancia el aspecto afectivo (Blanco, 2012). La introducción de elementos de juego y de tipo manipulativo aumenta el rendimiento en la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos (Fernández-Bravo, 2007, Sánchez-Pesquero y Casas-García, 1998).

Esta propuesta forma parte de un proyecto de innovación didáctica de mayor alcance diseñado por las autoras, que pretende reforzar e integrar diversas competencias matemáticas en Educación Primaria utilizando como contexto el Aula de Educación Física. Este proyecto, llevado a cabo en el colegio de Educación Infantil y Primaria "Campo Charro" de Salamanca, resultó ganador de la XIV Edición del Premio/Beca de Magisterio "Perfecta Corselas", concedido por la Fundación Vicente y García Corselas (Universidad de Salamanca).

Contexto y material empleado

Las actividades de medida propuestas se enmarcan dentro de un esquema narrativo que se ha desarrollado como hilo conductor de la Unidad Didáctica diseñada. Este esquema narrativo está centrado en las Olimpiadas, al tratarse de una actividad deportiva en la que la medida (en este caso, de longitud) cobra una importancia vital y que permite además introducir este planteamiento interdisciplinar de una forma muy natural dentro del Aula de Educación Física.

Dentro de los objetivos propios del Aula de Educación Física, el más adecuado para esta propuesta es el referido a los lanzamientos, puesto que permite medir las longitudes alcanzadas por las pelotas de forma sencilla, sin requerir grandes precisiones, y con mayores longitudes que las alcanzadas por otras actividades (como los saltos). Entre las actividades de lanzamiento que los niños deben realizar se encuentran lanzamientos de pelotas de tenis con una mano, lanzamientos de pelotas de tenis lo más próximos posible a un cono, y lanzamientos de pelotas de baloncesto con dos manos desde diferentes posiciones (sentados y de rodillas), superando obstáculos o sin obstáculos.

Estos lanzamientos se han realizado siguiendo un planteamiento de "competiciones olímpicas" entre equipos: así, esta competición forma el contexto en el que la toma de medidas de longitud cobra sentido. Los equipos participantes (cinco en total) se han escogido de forma aleatoria, se mantienen durante toda la experiencia y están formados por 4-5 niños

ISBN 978-84-945722-3-4

y niñas de segundo curso de Educación Primaria (7-8 años). Todos los equipos pasan por todas las actividades del circuito de lanzamiento diseñado, anotando los resultados obtenidos en cada una de las actividades propuestas.

Los instrumentos de medida empleados también son elementos propios del Aula de Educación Física: se han empleado cuerdas (de 2 metros) o medias cuerdas (1 metro), así como pañuelos (de 50 centímetros de diagonal). Evidentemente la medida de longitud obtenida utilizando estos instrumentos no posee una gran precisión, pero sí permite a los niños realizar medidas aproximadas de longitudes superiores a un metro y comparar sus resultados dentro de la competición "olímpica" diseñada.

Los instrumentos utilizados se muestran en la figura 1

Figura 1: cuerdas y pañuelos empleados como instrumentos de medida de longitud[11].

Descripción de las actividades propuestas

En las siguientes imágenes, mostramos algunas de las actividades de medida realizadas por los grupos de niños que han realizado la experiencia. Las medidas a realizar se han planteado de dos formas: en el caso de los lanzamientos libres con balones de baloncesto o pelotas de tenis, se mide la longitud final alcanzada. En el caso de los lanzamientos de pelotas de tenis cercanos a un cono, se han utilizado las cuerdas y pañuelos para situar el cono a la distancia

[11]Todas las fotos mostradas en el trabajo han sido tomadas por Mª de los Ángeles Moro Domínguez en el transcurso del Proyecto

ISBN 978-84-945722-3-4

prefijada. Todas las medidas se han realizado utilizando una línea base realizada también con una de las cuerdas.

En primer lugar, mostramos algunas imágenes de los lanzamientos realizados por los niños en la figura 2, tanto con balones de baloncesto como con pelotas de tenis:

Figura 2: ejemplos de algunos lanzamientos realizados por los niños con balones de baloncesto (izquierda) y pelotas de tenis (derecha)

Veamos también algunas imágenes de las medidas realizadas de la distancia alcanzada mediante estos lanzamientos libres, utilizando tanto cuerdas como combinaciones de cuerdas y pañuelos en función de la longitud, como puede verse en la figura 3:

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3: ejemplos de medidas realizadas por los niños utilizando cuerdas y/o pañuelos

En segundo lugar, en la figura 4 se muestran ejemplos de las medidas realizadas por los niños para situar el cono de referencia en los lanzamientos de proximidad: en este planteamiento, la medida es previa a los lanzamientos. Se indicó a los niños que los conos debían de ser colocados a metro y medio de la línea de lanzamiento, por lo que optaron por utilizar una media cuerda (1 metro) y un pañuelo (50 centímetros):

Figura 4: utilización de los instrumentos de medida para colocar el cono de referencia en los lanzamientos de proximidad

Discusión y conclusiones

Las actividades que se han propuesto constituyen una oportunidad para que los niños de 7-8 años, que están empezando a tratar con el tema de las unidades de medida de longitud en el Aula de matemáticas, amplíen sus experiencias de medidas prácticas de longitudes diversas en un entorno cercano y realista, dentro del centro educativo. Se consigue así superar las limitaciones de los libros de texto y cuadernos de actividades matemáticas: por una parte, las pequeñas dimensiones de medida práctica propuestas, que no superan en general los 15-20

ISBN 978-84-945722-3-4

centímetros debido a las dimensiones de los textos y del instrumento de medida (la regla escolar). Y por otra parte, los ejemplos especulativos y a veces poco realistas de longitudes superiores a un metro, que generalmente no se corresponden con medidas que los niños puedan realizar.

Este acercamiento multidisciplinar permite generalizar el acto de medir en contextos reales, distintos del aula de matemáticas, aprovechando las posibilidades dinámicas y de espacio que ofrecen las instalaciones y actividades propias del Aula de Educación Física. Para ello se ha seleccionado el tema de los lanzamientos como el más adecuado para facilitar estas experiencias de medida, puesto que las longitudes alcanzadas por el lanzamiento de pelotas de baloncesto o tenis están en unos intervalos que los niños pueden manejar y medir por sí mismos.

Las actividades propuestas se han encuadrado dentro de un esquema narrativo centrado en las Olimpiadas, como una forma de dar coherencia a las medidas realizadas y de aumentar la motivación de los niños hacia la experiencia. En las competiciones deportivas de tipo atlético, como es el caso de las Olimpiadas, la medición (de tiempo, de distancia, etc.) está en la base de su planteamiento, por lo que los niños aprenden la importancia de realizar medidas correctas y sin ambigüedades. La utilización de una línea base, la correcta colocación de las cuerdas y pañuelos, la suma total de las cantidades, etc., hacen que los niños cobren conciencia por sí mismos de los requisitos de una buena medición mediante una experiencia personal en un contexto lúdico y de competición.

Los instrumentos utilizados son propios del Aula de Educación Física (cuerdas y pañuelos), lo que también permite generalizar el concepto de instrumento de medida. La precisión alcanzada por dichos instrumentos no es muy grande, pero son adecuados y naturales en el entorno en el que se realizan las actividades, no representan peligro para los niños y, sobre todo, pueden manejarlos con autonomía en las actividades diseñadas.

En conclusión, el Aula de Educación Física y dentro de ella la actividad de lanzamientos resultan ser un entorno muy adecuado para dar a los niños de 7-8 años, que están adquiriendo el concepto de medida de longitud, una oportunidad de experimentar por sí mismos la medida de longitudes superiores a un metro. Los niños realizan estas medidas de una manera

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

autónoma y con un importante componente lúdico y afectivo, superando las limitaciones del Aula de matemáticas y reforzando el concepto de medida de longitud de una forma dinámica y adecuada a su edad.

Finalmente, las autoras agradecen a la Fundación Vicente y García Corselas (Universidad de Salamanca) el soporte para la realización del proyecto de innovación docente en el que se enmarca esta experiencia, mediante la concesión del Premio/Beca de Magisterio "Perfecta Corselas" en su XIV Edición.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Editorial Graó.

Baroody, A. J. (1994). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Editorial Visor.

Bishop, A. J. (1998). El papel de los juegos en la educación matemática. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9-19.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas, *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* pp. 171-182. Barcelona: Editorial Graó.

Fernández-Bravo, J. A. (2007). Metodología didáctica para la enseñanza de la matemática: variables facilitadoras del aprendizaje. En J. A. Fernández-Bravo, *Aprender matemáticas: metodología y modelos europeos* pp. 9-26. Madrid: Secretaría General de Educación, Ministerio de Educación y Ciencia..

Frías, A., Gil, F. y Moreno, M.F. (2001). Introducción a las magnitudes y a la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria,* pp. 477-502. Madrid: Síntesis.

Sánchez-Pesquero, C.S. y Casas-García L.M. (1998). *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: CIDE (Centro de Investigación y Documentación Educativa), Ministerio de Educación.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-821

REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS NO LINEALES POR MÉTODOS NUMÉRICOS: DOS ASPECTOS COMPLEMENTARIOS. APLICACIÓN EN EL CASO DEL SISTEMA MATHEMATICA

Higinio Ramos Calle – Susana Nieto Isidro
higra@usal.es – sni@usal.es
Universidad de Salamanca, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Educación Universitaria
Palabras clave: Resolución de ecuaciones y sistemas, cálculo numérico, representación gráfica, sistema Mathematica

Resumen

En este trabajo se aborda la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales en el dominio de los números reales en aquellos casos en los que no resulta sencillo determinar si existe solución, en los que no conocemos a priori cuál es el número de soluciones existentes, o en los que no hay una forma evidente de proporcionar un punto inicial para la aplicación de los métodos numéricos de resolución. Para ello, se propone la utilización de las capacidades gráficas de los programas de cálculo simbólico, y en particular del sistema Mathematica*, como herramienta complementaria que permite afrontar de manera más efectiva este tipo de problemas. Se presentan diversos ejemplos, que incluyen ecuaciones en una variable así como sistemas de dos y tres ecuaciones no lineales en los que el uso de la representación gráfica de las ecuaciones del problema permite visualizar las soluciones como los puntos de corte de una función con el eje OX, como los puntos de intersección de dos curvas planas o como los puntos de intersección para diversas superficies, y así obtener visualmente y de forma sencilla la información necesaria para abordar con éxito su resolución, además de otra información relevante.*

Introducción

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en el dominio de los números reales es una cuestión que aparece con frecuencia en las tareas de ingeniería. En algunos casos se puede recurrir a un software específico que solucione el problema hallando las soluciones buscadas mediante métodos exactos, pero la mayoría de las veces hay que recurrir a métodos aproximados utilizando diferentes algoritmos numéricos. Sin embargo, el uso de métodos numéricos para resolver ecuaciones o sistemas requiere en general que tengamos información sobre el número de soluciones existentes, su localización, y que para cada una de ellas proporcionemos al algoritmo elegido un punto de comienzo, que no siempre es sencillo de obtener. En ocasiones, además, el comenzar con un valor inicial inadecuado puede llevarnos a soluciones erróneas, o bien a soluciones correctas pero inadecuadas para nuestro problema. En este trabajo, presentamos varios ejemplos donde nos hemos servido de las capacidades gráficas del sistema *Mathematica* para realizar una representación gráfica de diferentes problemas de resolución con una, dos o tres ecuaciones no lineales. Veremos cómo esta representación gráfica nos va a permitir determinar visualmente si el problema tiene solución, obtener el número de soluciones que tiene la ecuación o el sistema, comprobar la adecuación de esas soluciones al problema planteado, y proporcionar puntos adecuados de arranque para inicializar los algoritmos numéricos. La representación gráfica se muestra entonces como una herramienta complementaria de gran potencia para obtener soluciones adecuadas de la ecuación o sistema de ecuaciones que pretendemos resolver.

El sistema *Mathematica*

Uno de los paquetes de cálculo simbólico más potentes que existen actualmente es el sistema *Mathematica* (www.wolfram.com). Se trata de un sistema muy extendido para su uso en la docencia de las matemáticas a nivel universitario y que integra cálculo simbólico, numérico y representaciones gráficas.

Mathematica contiene diferentes algoritmos para la resolución exacta y numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, siendo los comandos más utilizados los siguientes:

- *Solve[{ec1,ec2,..},{x,y,z,…}]* permite obtener, cuando es posible, las soluciones exactas del sistema de ecuaciones en las variables indicadas.
- *FindRoot[{ec1,ec2,..},{{x,x0},{y,y0},…}]* proporciona soluciones aproximadas del sistema de ecuaciones utilizando los valores de arranque indicados.

Además, posee un paquete gráfico muy potente, que permite realizar representaciones gráficas en dos y tres dimensiones de funciones dadas en forma explícita, paramétrica, en coordenadas polares, etc. Los comandos gráficos básicos que utilizaremos son:

- *Plot[f[x],{x,x0,x1}]* representa la gráfica de una función de una variable.

ISBN 978-84-945722-3-4

- *ContourPlot[f[x,y],{x,x0,x1},{y,y0,y1}]* representa las curvas de nivel de una función de dos variables, o bien la gráfica de una curva del plano dada en forma implícita, escribiendo *f[x,y]==c* en lugar de *f[x,y]*.
- *ContourPlot3D[f[x,y,z],{x,x0,x1},{y,y0,y1},{z,z0,z1}]* representa las superficies de nivel de una función de tres variables, o bien la gráfica de una superficie del espacio dada en forma implícita, escribiendo *f[x,y,z]==c* en lugar de *f[x,y,z]*.

Ejemplo de resolución con una sola ecuación:

Consideremos la ecuación cúbica siguiente:

$$x^3-1.89x+1.00009399558=0$$

que necesariamente tendrá al menos una solución real. Si queremos obtener su solución de forma exacta, podemos escribir la ecuación anterior como:

[x]=0, siendo [x_]:=x^3−189/100 x+100009399558/100000000000.

y utilizar el comando *Solve*. Sin embargo, la instrucción *Solve[f[x]==0,x]* proporciona tres soluciones exactas que contienen todas ellas unidades imaginarias, con lo que no podemos estar seguros de que todas las soluciones sean reales, y caso de serlo, si hay raíces repetidas. Para resolver esta situación, vamos a realizar la representación gráfica de la función mediante la orden:

Plot[f[x],{x,−2,2},PlotRange→2]

Obtenemos entonces la gráfica de la Figura 1:

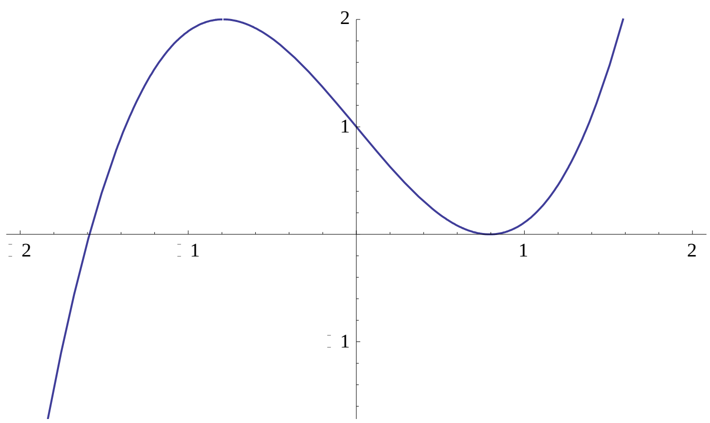


Figura 1: gráfica de la función cúbica f[x]

ISBN 978-84-945722-3-4

Observando la Figura 1, podemos intuir que esta función tiene tres raíces reales, una de las cuales se encuentra con toda seguridad entre -2 y -1. Esta raíz se obtiene fácilmente mediante un método numérico si proporcionamos un punto inicial adecuado. Analizando la gráfica es fácil escoger un punto cercano a la raíz, por ejemplo x_0=-1,6. Obtenemos entonces la siguiente solución mediante el comando *FindRoot*:

$$\text{FindRoot}[f[x]{=}{=}0,\{x,-1.6\}] \quad \rightarrow \quad \{x \to -1.5874507866383285\}.$$

Aún nos queda una región en el intervalo [0,1] donde puede haber una raíz real doble o bien dos simples, o puede que ninguna. Podemos ampliar el dibujo en esa región escogiendo un intervalo más reducido, por ejemplo Plot[$f[x]$,{x,0.7936,0.79385}], pero la gráfica que obtenemos todavía no nos permite decidir sobre si son una o dos las posibles raíces reales que nos faltan determinar, como se puede observar en la Figura 2:

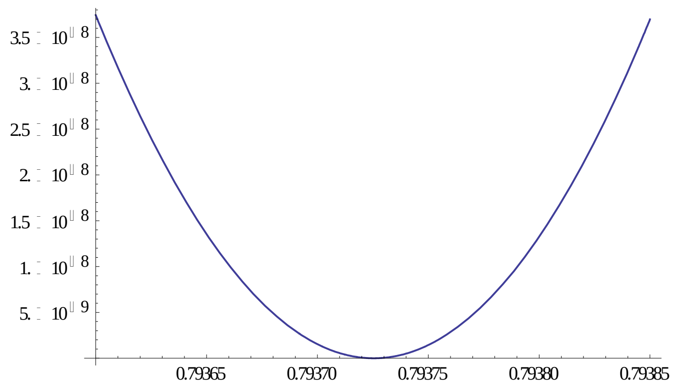


Figura 2: gráfica ampliada de la función f[x]

Sin embargo, la gran capacidad gráfica de *Mathematica* nos permite ampliar aún más el intervalo de dibujo incluyendo una limitación del rango de la gráfica mediante la opción *PlotRange*, utilizando la siguiente orden:

$$\text{Plot}[f[x],\{x,0.793722,0.793728\}, \text{PlotRange} \to 10^{-11}].$$

Obtenemos entonces la gráfica de la Figura 3, que nos permite observar que se trata en realidad de dos raíces reales, que se pueden obtener mediante métodos numéricos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

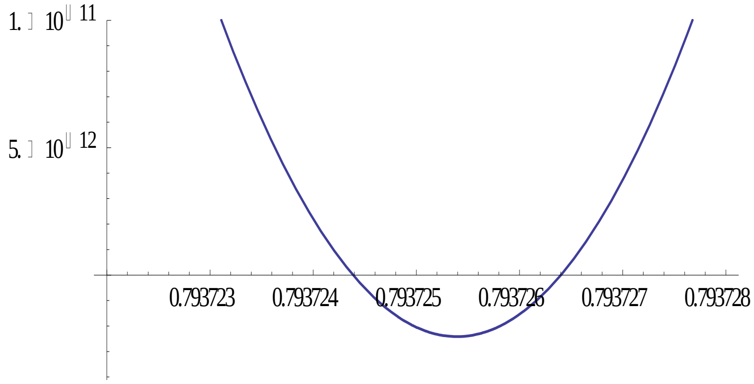


Figura 3: gráfica más ampliada de la función f[x]

Esta Figura 3 nos permite además considerar puntos adecuados para inicializar el método numérico para hallar cada raíz, por ejemplo:

FindRoot[f[x]==0,{x,0.793723}] → {x→0.7937243860984319}

FindRoot[f[x]==0,{x,0.793728}] → {x→0.7937264004465107}.

Por lo tanto, vemos cómo la potencia gráfica del sistema *Mathematica* nos permite determinar que esta ecuación cúbica tiene tres raíces reales, y nos permite hallar puntos adecuados para utilizar como valores iniciales para los métodos numéricos de solución de dicha ecuación.

Ejemplo de resolución de un sistema con dos ecuaciones:

Consideremos el problema de encontrar las raíces del sistema de ecuaciones dado por Nowak y Weimann (1991):

{Exp[x^2+y^2]-3=0, x+y-Sin[3(x+y)]=0}.

Con una sencilla manipulación podemos ver que la primera ecuación corresponde a una circunferencia centrada en el origen de radio $r=Log(3)^{1/2}$. Sin embargo, no resulta tan fácil dar una interpretación geométrica de la segunda ecuación, por lo que no podemos saber a priori de forma sencilla si el sistema tiene solución, cuántas soluciones hay y cómo podemos determinar puntos iniciales adecuados para hallar dichas soluciones.

Para resolver estos problemas, vamos a dar una representación gráfica de las dos curvas planas que constituyen el sistema mediante la orden:

ContourPlot[{Exp[x^2+y^2]-3=0,x+y-Sin[3(x+y)]=0},{x,-2,2},{y,-2,2}]

ISBN 978-84-945722-3-4

que da lugar a la gráfica de la Figura 4:

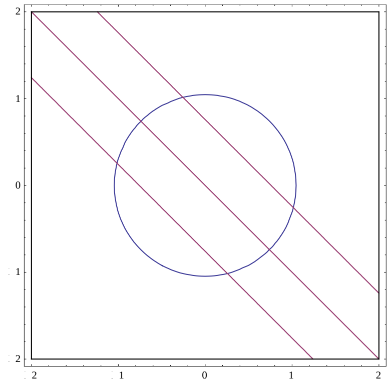


Figura 4: representación gráfica de las dos ecuaciones del sistema

En la Figura 4 podemos observar que la gráfica que corresponde a la segunda ecuación (en color rojo) se corresponde con tres rectas paralelas. Además esta representación nos permite visualizar que el sistema tiene solución, cuántos puntos son (seis) y dónde se sitúan, lo que nos permite determinar de forma aproximada puntos de inicio adecuados para el método iterativo empleado por *FindRoot*. Por ejemplo, tomando como valor inicial el punto $\{x_0=1, y_0=-0.2\}$ se obtiene mediante la orden:

$$\text{FindRoot}[\{\text{Exp}[x^2+y^2]-3=0, x+y-\text{Sin}[3(x+y)]=0\},\{x,1\},\{y,-0.2\}]$$

que una de las soluciones buscadas es: $\{x=1.01625, y=-0.256625\}$.

Las cinco restantes se pueden obtener de manera similar. De nuevo la representación gráfica nos ha facilitado la información imprescindible para poder abordar con éxito el cálculo de todas las raíces.

Ejemplo de resolución de un sistema con tres ecuaciones:

Vamos a considerar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, ya que las posibilidades gráficas del *Mathematica* permiten representar tales sistemas. Se trata de una variante del sistema publicado por Nikkhah-Bahrami y Oftadeh (2009), dado por:

$$\{\text{Cosh}[y]-\text{Sinh}[x]=0,\ yz^x+1=y,\ \text{Exp}[x]-z^2=0\}.$$

Si intentamos resolver este sistema de manera exacta mediante la orden

$$\text{Solve}[\{\text{Cosh}[y]-\text{Sinh}[x]==0, yz^x+1==y, \text{Exp}[x]-z^2==0\},\{x,y,z\}]$$

obtenemos tan solo una advertencia indicando que *Mathematica* no puede resolver dicho sistema con los métodos de que dispone. Por otro lado, para intentar obtener alguna raíz

ISBN 978-84-945722-3-4

aproximada mediante la orden *FindRoot* carecemos de ninguna indicación de dónde buscar dicha raíz, e incluso no sabemos si tal raíz existe.

En este caso particular, podríamos intentar una aproximación algebraica. Vemos que hay dos superficies cilíndricas, una que tiene como base la curva del plano OXY de ecuación Cosh[y]−Sinh[x]=0, y otra cuya base es la curva del plano OXZ de ecuación Exp[x]−z^2=0. Estas dos superficies se pueden parametrizar fácilmente considerando un mismo parámetro para las dos (la coordenada x), y a partir de ellas obtener la curva intersección de las dos superficies, también en forma paramétrica. La sustitución de las coordenadas de esta curva en la tercera ecuación del sistema da lugar a una única ecuación en el parámetro. La resolución de esta ecuación utilizando *FindRoot*, después de realizar una representación gráfica para obtener un valor de arranque según se vio en el apartado anterior, mediante la orden

FindRoot[1−ArcCosh[Sinh[x]](Exp[x])$^{x/2}$==−ArcCosh[Sinh[x]],{x,1}]

nos permite obtener la raíz {x→1.19415382492818}. A partir de ella y de las ecuaciones paramétricas de la curva intersección se obtienen los valores correspondientes para las otras dos incógnitas, resultando que una raíz del sistema es

{x=1.19415382492818, y=−0.9614406354526684, z=1.8168003645498196}.

Sin embargo, este procedimiento no es general, y no está exento de complicaciones, primero porque la parametrización no siempre será posible (o fácil de realizar), y también porque aun en el caso de que sea posible, hay que elegir dicha parametrización de forma adecuada. Tampoco sabemos a priori cuántas son las soluciones que posee este sistema ni dónde se sitúan.

Ante esta situación, vamos a realizar una aproximación gráfica aprovechando las capacidades gráficas del *Mathematica* para representar las superficies que constituyen el anterior sistema. Para ello utilizamos el comando:

ContourPlot3D[{Cosh[y]−Sinh[x]==0,yz^x+1==y,Exp[x]−z^2==0},{x,−5,5},
{y,−5,5},{z,−5,5},ContourStyle→{Red,Green,Blue},BoxRatios→{1,1,1},
AxesLabel→{"x","y","z"}]

que da lugar a la gráfica de la Figura 5:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

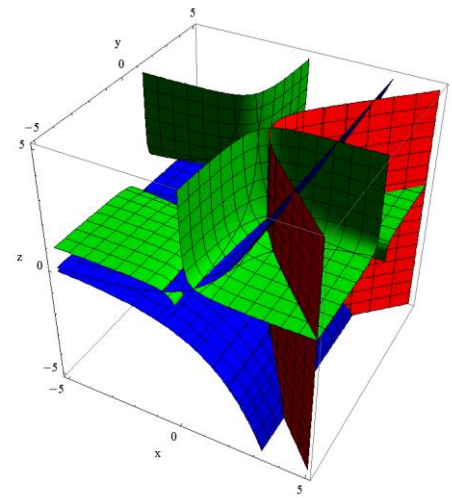


Figura 5: representación gráfica de las tres ecuaciones del sistema

La Figura 5 nos permite ver dónde se sitúan los puntos de corte solución del sistema, y las capacidades gráficas de *Mathematica* nos permiten limitar aún más la región del dibujo para tener una mayor precisión. Así, podemos visualizar el comportamiento de las ecuaciones en la región x>0, z>0, con la instrucción

ContourPlot3D[{Cosh[y]−Sinh[x]==0,yz^{x}+1==y,Exp[x]−z^{2}==0},{x,0,2},{y,−1.5,0.5},{z,0.5,2.5},ContourStyle→{Red,Green,Blue},BoxRatios→{1,1,1},AxesLabel→{"x","y","z"}]

y obtenemos la gráfica más detallada de la Figura 6:

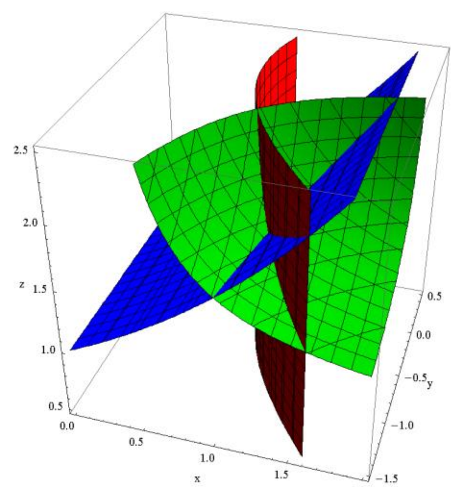


Figura 6: representación gráfica ampliada para x>0, z>0

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta Figura 6 más detallada nos permite dar valores aproximados para el punto inicial del método numérico. Así, podemos calcular una solución aproximada con la orden:

FindRoot[{Cosh[y]−Sinh[x]==0,yz^x+1==y,Exp[x]−z^2==0},{{x,1},{y,−0.6},{z,1.5}}]

que nos proporciona la solución buscada:

{x→1.19415382492818, y →−0.9614406354526687, z→1.8168003645498196},

la cual coincide con la hallada antes de forma algebraica. Además, analizando las representaciones gráficas en distintas regiones, podemos ir estudiando la existencia de otras posibles soluciones y dar valores iniciales para su resolución: en el caso que nos ocupa es fácil ver con la ayuda del *Mathematica* que sólo hay una solución del sistema.

Discusión y conclusiones

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales no es una tarea exenta de complicaciones. Es necesario determinar previamente la existencia o no de solución, el número de soluciones posibles y, al menos de forma aproximada, en qué región debemos buscar la raíz o raíces, así como los valores de arranque adecuados para los diversos algoritmos numéricos. En general, estas tareas no son sencillas ni fácilmente abordables por métodos algebraicos. Proponemos entonces que a la hora de resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones no lineales con dos o tres incógnitas se utilice como herramienta complementaria una aproximación gráfica previa, y es aquí donde entran en juego las potentes capacidades gráficas de los sistemas integrados de cálculo, en particular el sistema *Mathematica*. Esta aproximación gráfica nos proporciona toda la información necesaria para resolver con éxito los problemas planteados, como se pone de manifiesto en los ejemplos mostrados.

Agradecemos la financiación del MINECO/FEDER (Proyecto EDU2015-64524-P).

Referencias bibliográficas

Ramos, H. y Vigo-Aguiar, J. (2015). The application of Newton’s method in vector form for solving nonlinear scalar equations where the classical Newton method fails, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 275, 228–237.

ISBN 978-84-945722-3-4

Nikkhah-Bahrami, N. y Oftadeh, R. (2009). An effective iterative method for computing real and complex roots of systems of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 215, 1813–1820.

Nowak, U. y Weimann, L. (1991). A family of Newton codes for systems of highly nonlinear equations, *Technical Report TR-91-10*.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-822

REPRESENTACIÓN INTERACTIVA DE RECTAS Y PLANOS Y SUS POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO AFÍN UTILIZANDO *MATHEMATICA*

Susana Nieto – Higinio Ramos
sni@usal.es – higra@usal.es
Universidad de Salamanca, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB.
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Representación gráfica, visualización, sistema Mathematica, manipulación dinámica.

Resumen
Tratar de representar gráficamente los objetos matemáticos facilita su visualización, su comprensión y su memorización. Así, la docencia de las matemáticas se apoya frecuentemente en diagramas, dibujos y representaciones gráficas diversas. Si estas representaciones gráficas son interactivas y pueden ser manipuladas en tiempo real, resultarán aún más eficaces. El sistema Mathematica *ofrece herramientas gráficas de gran potencia y versatilidad para representar objetos matemáticos en dos y tres dimensiones, y su comando* Manipulate *permite modificar dichas representaciones en tiempo real utilizando cursores móviles interactivos. Esta posibilidad de manipulación dinámica, junto con las opciones de programación de* Mathematica*, se ha aplicado al estudio de posiciones relativas en el espacio afín: dado un plano, analizamos sus posiciones relativas con una recta móvil, y posteriormente, con otro plano móvil. En ambos casos* Mathematica *representa tridimensionalmente las rectas y planos, y permite modificar de forma dinámica estas representaciones, informa sobre las diferentes posiciones relativas y proporciona los puntos o rectas de corte, si existen. Esta manipulación en tiempo real permite a los alumnos visualizar de manera clara, sencilla y con un alto poder didáctico las consecuencias de los cambios en los coeficientes de las rectas y planos representados: distintas orientaciones, traslaciones, diferentes posiciones relativas, etc.*

Introducción

Las habilidades de visualización en dos y en tres dimensiones son uno de los aspectos básicos para la formación de muchos estudiantes de ingeniería, especialmente para aquellos relacionados con la construcción, la arquitectura, o el diseño de maquinaria, entre otros (Hsi, Linn y Bell, 1997). En nuestra experiencia docente hemos constatado que las capacidades gráficas de los estudiantes de primer año de los grados de ingeniería en España son en general

ISBN 978-84-945722-3-4

bastante limitadas. Por ejemplo, cuando se les pide representar la gráfica de una función escalar simple, un alto porcentaje de ellos no es capaz de representar correctamente las gráficas de funciones tan conocidas como el seno, la exponencial o el logaritmo (Nieto y Ramos, 2012).

Es indudable que la representación gráfica de los objetos matemáticos facilita la comprensión de los mismos (Arcavi, 2003). Tratar de representar un concepto por algún procedimiento favorece su visualización, su comprensión y su memorización. Es difícil encontrar un libro de matemáticas que no tenga algún dibujo, diagrama o esquema gráfico, y los profesores los usan constantemente en sus explicaciones. Si además estas representaciones gráficas son interactivas, resultarán claramente más eficaces.

El sistema *Mathematica* (www.wolfram.com) ofrece herramientas gráficas de gran potencia y versatilidad para representar elementos geométricos en dos y tres dimensiones (Trott, 2004). El objetivo de esta propuesta es utilizar estas enormes capacidades del sistema *Mathematica* para visualizar en dos y tres dimensiones objetos matemáticos cuyas características dependen de uno o más parámetros. Estas capacidades gráficas y de representación se han ampliado desde la versión 8.0 mediante la introducción del comando *Manipulate*, que permite interacciones dinámicas entre el usuario y el *kernel* de *Mathematica*. Este comando muestra las consecuencias de la variación de uno o varios parámetros en los resultados de *Mathematica* mediante la modificación de estos parámetros en tiempo real utilizando cursores de diferente tipo que el usuario puede manipular de forma dinámica.

Nuestro objetivo específico es adaptar y ampliar las capacidades de este comando *Manipulate* mediante las posibilidades de programación dadas por *Mathematica*, aplicándolas en este trabajo al estudio de posiciones relativas de una recta y un plano o de dos planos en el espacio afín tridimensional. Este trabajo constituye una ampliación del estudio dinámico de las posiciones relativas de dos y tres rectas en el plano que fue presentado en Ramos y Nieto (2016).

Estudiaremos primero las posiciones relativas entre un plano dado y una recta móvil, y posteriormente, entre un plano dado y otro plano móvil. En ambos casos *Mathematica* representa tridimensionalmente los planos y/o rectas definidos por el usuario, y según se modifican los valores de los parámetros muestra las variaciones de posición de la recta o el

ISBN 978-84-945722-3-4

plano móvil, informa en tiempo real sobre las posiciones relativas de los elementos representados y proporciona las distancias o los puntos de corte, si existen. Esta manipulación dinámica e interactiva se puede utilizar fácilmente en el aula y permite visualizar de manera muy clara y con un alto poder didáctico las consecuencias de los cambios que se realizan en los coeficientes de las rectas y planos representados.

El sistema *Mathematica*

El sistema *Mathematica* (www.wolfram.com) es un paquete de cálculo simbólico de gran potencia que está muy extendido para su uso en la docencia de las matemáticas a nivel universitario. Integra cálculo simbólico, numérico y representaciones gráficas, y posee un lenguaje de programación propio que permite ampliar las posibilidades del programa. Presenta unas excelentes capacidades gráficas que lo convierten en nuestra opinión en una de las mejores opciones para intentar mejorar la visualización de objetos matemáticos tridimensionales como los que se consideran en este trabajo.

Los comandos principales para representar objetos tridimensionales en *Mathematica*, y que utilizamos en nuestra propuesta, son los siguientes:

- *Plot3D[f[x,y],{x,x_0,x_1},{y,y_0,y_1}]*, que permite generar la gráfica de una función de dos variables *f[x,y]* en la región señalada.
- *ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]},{t,t_0,t_1}]*, permite representar la gráfica de una curva en el espacio dada por unas ecuaciones paramétricas *x=x[t],y=y[t],z=z[t]*, para unos valores del parámetro *t* que varía entre t_0 y t_1.
- *ContourPlot3D[f[x,y,z]==k,{x,x_0,x_1},{y,y_0,y_1},{z,z_0,z_1}]*, permite representar la superficie dada por la ecuación *f[x,y,z]=k* .

Existen también otros comandos de *Mathematica* que se han utilizado para realizar el análisis de las posiciones relativas de rectas y planos:

- *MatrixRank[matrix]*, calcula el rango de la matriz elegida.
- *Solve[{equations},{variables}]*, trata de resolver un sistema de ecuaciones, expresando la solución en términos de las variables indicadas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Una descripción más detallada merece el comando *Manipulate*. A partir de la versión 8.0, *Mathematica* ha incorporado contenidos dinámicos mediante el comando *Manipulate*. Este comando genera automáticamente una interfaz, que permite al usuario variar los parámetros entre algunos valores pre-especificados para cualquier expresión que contenga parámetros simbólicos. Esta manipulación se puede realizar de diferentes maneras: usando el ratón, manipulando el teclado, programando una variación continua o a saltos de los parámetros, o escribiendo valores específicos para dichos parámetros.

Las expresiones que contienen parámetros simbólicos aceptados por *Manipulate* pueden ser de diferentes tipos: representaciones gráficas en dos o tres dimensiones, funciones, operaciones matemáticas, tablas, expresiones lógicas, matrices, objetos gráficos, etc. Por otro lado, el tipo principal de controlador es un deslizador de una dimensión, pero se puede modificar para mostrar casillas de verificación, botones, menús emergentes o controles deslizantes 2D o 3D si los parámetros están relacionados. Todos estos tipos de controladores admiten también valores numéricos introducidos desde el teclado.

Estas características hacen de *Manipulate* una excelente herramienta para visualizar el cambio de comportamiento de todo tipo de expresiones matemáticas cuando los parámetros cambian sus valores. La fácil gestión de los controladores hace muy sencilla y eficaz la experimentación y la visualización de los cambios. Por lo tanto, es especialmente adecuado para lograr los objetivos de aprendizaje, ya que no se requiere que el usuario posea ningún conocimiento previo del lenguaje *Mathematica*.

Posiciones relativas de una recta y un plano del espacio:

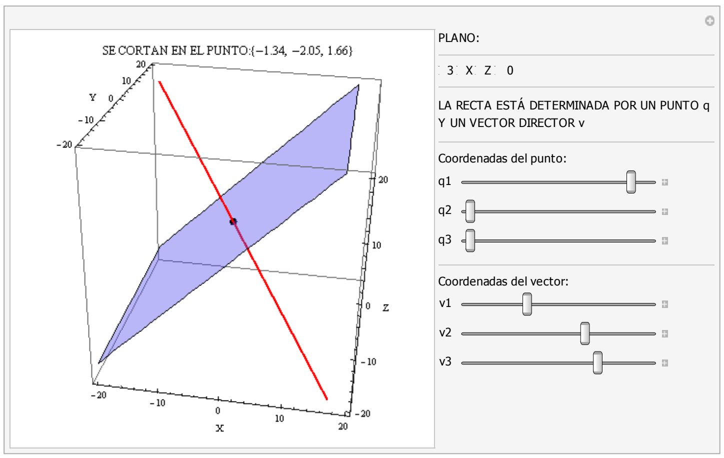
En este caso consideraremos un plano fijo dado por la ecuación $ax+by+cz=d$, información que será introducida en el programa como la lista $\{a,b,c,-d\}$, y una recta determinada por un punto q=$\{q1,q2,q3\}$ y su vector director v=$\{v1,v2,v3\}$. La variación de cada uno de estos parámetros está fijada entre -10 y 10, pero puede modificarse por el usuario, según convenga.

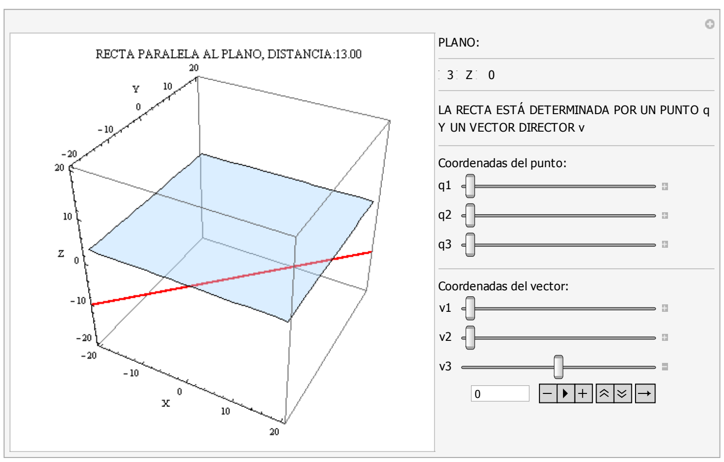
El programa que se ha desarrollado determina dos planos cuya intersección da lugar a la recta, y considera la matriz de coeficientes de los tres planos (el dado y los dos que ha determinado) y la matriz ampliada. Según se estudia en la asignatura de Álgebra Lineal,

ISBN 978-84-945722-3-4

dependiendo de cómo sean los rangos de estas matrices, se tendrán las distintas posibilidades. Al ir moviendo los cursores que se observan en la Figura 1, la recta se irá desplazando en un sentido u otro: si movemos alguno de los correspondientes al punto resultarán rectas paralelas, puesto que el vector director sigue siendo el mismo. Pero si movemos alguno de los correspondientes al vector director de la recta, entonces ésta girará en función de cómo movamos el cursor.

Como puede verse en la Figura 1, el programa informa en la parte superior del gráfico de la situación en que nos encontramos, en el caso en que recta y plano sean paralelos indica a qué distancia se encuentran (panel central de la Figura 1), en el caso en que se corten nos da el punto de corte (panel superior de la Figura 1), y si la recta está contenida en el plano nos informa de este hecho (panel inferior de la Figura 1).





VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

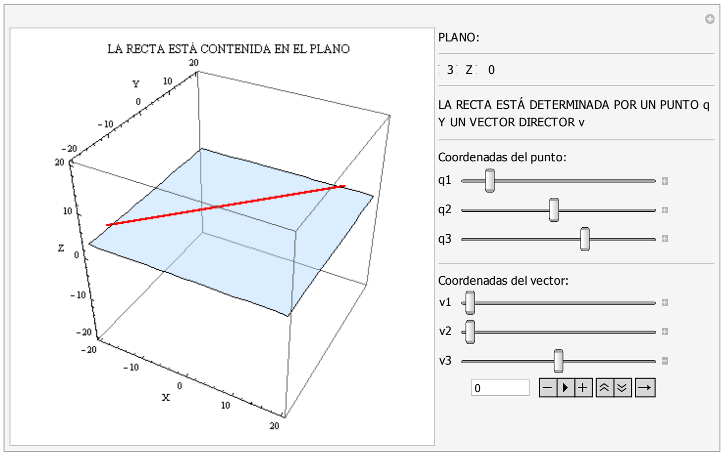
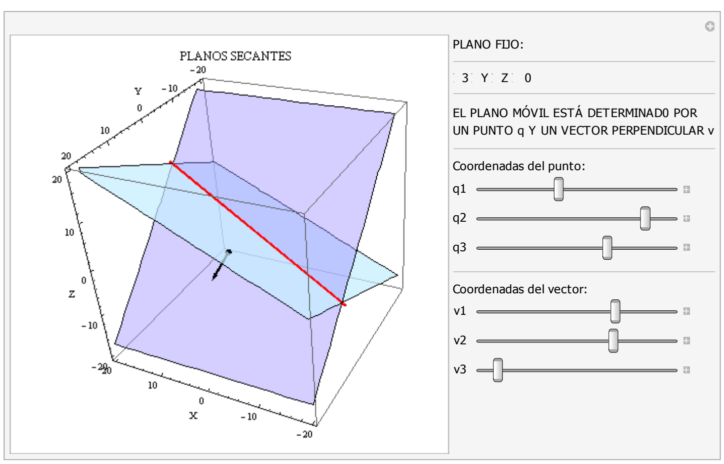


Figura 1: posiciones de la recta móvil respecto del plano: la recta corta al plano (panel superior), es paralela al plano (panel central) o está contenida en él (panel inferior)

Posiciones relativas de dos planos del espacio:

En este caso se considera un plano fijo, que se introduce como una lista *{a,b,c,-d}*, y otro plano determinado por un punto q=*{q1,q2,q3}* y un vector perpendicular v=*{v1,v2,v3}*. Estos últimos datos, que son variables, son los parámetros que utilizará el comando *Manipulate*. El estudio de los rangos de la matriz de coeficientes de los dos planos y de su matriz ampliada nos dará la clave para saber la posición relativa de dichos planos. El programa desarrollado analiza los rangos, y realiza una gráfica, indicando en la parte superior del mismo la situación en la que se encuentran los planos, como podemos ver en la Figura 2.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

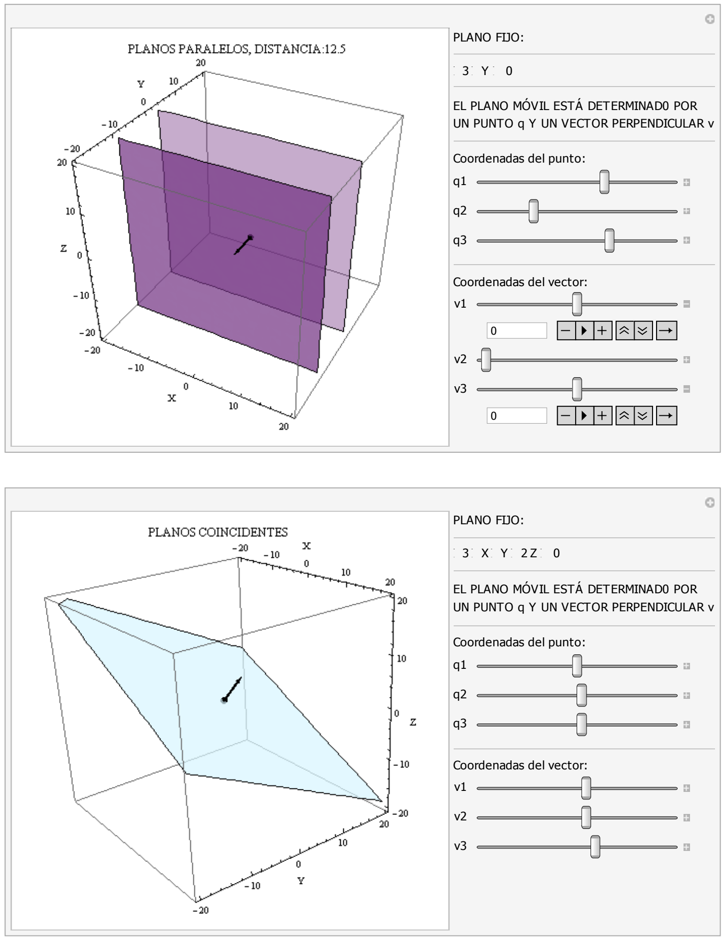


Figura 2: posiciones relativas de dos planos: planos secantes (panel superior), planos paralelos (panel central) y planos coincidentes (panel inferior)

Como se puede ver en la Figura 2, el programa permite manipular los parámetros utilizando los cursores para obtener planos coincidentes, paralelos o secantes, y en el caso de ser secantes se dibuja además la recta intersección. En todos los casos, en el plano variable (determinado por un punto y un vector perpendicular) se dibuja sobre el punto ese vector perpendicular, para así tener información gráfica de dónde se sitúan estos elementos. Cuando los planos son paralelos se indica además la distancia a la que se encuentran.

En estos ejemplos, los valores de los parámetros se pueden modificar utilizando los cursores del comando *Manipulate*, desplazándolos con el ratón de un lado a otro. Pero, además, el comando presenta ventanas desplegables donde se puede introducir manualmente cualquier valor elegido por el usuario, o bien se pueden realizar modificaciones continuas o a saltos de los parámetros implicados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Conclusiones

1. Hemos ampliado la potencialidad de interacción dinámica ofrecida por el comando *Manipulate* del sistema *Mathematica*, para mejorar la visualización y la comprensión de algunos elementos de la geometría euclídea. En concreto, hemos desarrollado el estudio de la posición relativa de una recta y un plano, y de dos planos del espacio.

2. Las potentes capacidades gráficas de *Mathematica* y la facilidad de manipulación de los parámetros, que se pueden modificar simplemente moviendo con el ratón un cursor deslizante, hacen que nuestra propuesta sea una herramienta interesante para profesores y estudiantes de matemáticas. Este programa puede ser utilizado para analizar las consecuencias de variar los parámetros que intervienen (por ejemplo, para obtener una línea paralela a un plano dado, o perpendicular, etc.), para estudiar las diferentes posiciones relativas de rectas y planos, o para comprobar los resultados de un ejercicio realizado a mano a partir de un conjunto de valores específicos de los parámetros.

3. El programa también incluye una cuantificación matemática de la posición relativa de los objetos que se estudian; por ejemplo, dando la distancia entre una recta paralela a un plano y dicho plano, o la distancia entre dos planos paralelos; y en su caso, también calcula las coordenadas del punto de intersección entre una recta y un plano. Esta capacidad permite al usuario enfocar el problema desde otras perspectivas: por ejemplo, determinar los parámetros adecuados para obtener un punto de intersección dado, o para representar dos planos paralelos a una distancia específica, etc. Este razonamiento "inverso" mejora la comprensión de las relaciones geométricas y enriquece el conocimiento matemático de la situación.

4. El programa permite incorporar fácilmente nuevos cálculos, como la determinación del ángulo entre plano y recta o entre dos planos. El usuario también puede modificar el tamaño de la ventana de visualización, puede ampliar o reducir los rangos de variación de los parámetros, puede cambiar los valores iniciales del plano que se considera fijo, e incluso podría cambiar este plano fijo y hacerlo variable, sin más que introducir nuevos parámetros en el comando *Manipulate*. Es decir, es un programa muy flexible que puede adaptarse para cubrir una amplia gama de situaciones geométricas.

ISBN 978-84-945722-3-4

En definitiva, hemos desarrollado un programa versátil utilizando *Mathematica* debido a sus capacidades gráficas y su poder como lenguaje de programación. Nuestra propuesta está diseñada para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos (en este caso, elementos de geometría euclídea en el espacio), y también para mejorar las habilidades de visualización de los estudiantes de ingeniería (Nieto y Ramos, 2017). Este objetivo se logra mediante la interacción dinámica entre el usuario y el *kernel* de *Mathematica* proporcionada por el comando *Manipulate* y un desarrollo propio a partir de las opciones de programación del sistema *Mathematica.*

Agradecemos la financiación del MINECO/FEDER (Proyecto EDU2015-64524-P).

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52 (3), 215-241.

Hsi, S., Linn, M. C., & Bell, J. E. (1997). The role of spatial reasoning in engineering and the design of spatial instruction. *Journal of Engineering Education* 86, 151-158.

Nieto, S., y Ramos, H. (2012). Pre-knowledge of basic mathematics topics in engineering students in Spain. *16th SEFI-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*.

Nieto, S., y Ramos, H. (2017). Use of a symbolic computation program to reinforce the spatial abilities of engineering students. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje*, 12 (1), 37-44.

Ramos, H. y Nieto, S. (2016). Dynamic visualization of the relative position of straight lines on the plane using Mathematica. *Proceedings TEEM'16*, pp. 831-838.

Trott, M. (2004). *The Mathematica guidebook for graphics. Vol. 1*. Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-823

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SUCESIÓN NUMÉRICA EN ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

José Mariano Bajo Benito-José María Gavilán Izquierdo-Gloria Sánchez-Matamoros García.
jbajo@us.es – gavilan@us.es-gsanchez@us.es
Colegio San José SS.CC. Universidad de Sevilla. España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Medio o secundario (12 a 15 años).
Palabras clave: Sucesiones numéricas, Enseñanza Secundaria, Esquemas, Progresiones, Modos de representación.

Resumen

La comprensión del concepto de sucesión numérica presenta dificultades para los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) (14-16 años). Este hecho unido a que este concepto es la base de otros conceptos matemáticos como límites, derivadas, integrales justifica su relevancia y por tanto nuestro estudio para caracterizar la compresión del concepto de sucesión numérica en E.S.O.

Las aportaciones de Piaget y García en relación al desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter y trans, nos proporciona información sobre la comprensión del concepto de sucesión numérica a través del uso que los estudiantes hacen de los modos de representación, los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre ellos en la resolución de tareas matemáticas.

Nuestra metodología es cualitativa usando como datos dos cuestionarios de distinta naturaleza. A partir del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestado por cada estudiante, nos permitió inferir el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica a partir de la caracterización de los niveles. Los resultados nos han permitido identificar algunos indicadores de comprensión del concepto de sucesión numérica, como son el uso de las progresiones y el uso de los modos de representación.

Introducción

Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal en estudiantes de enseñanza secundaria obligatoria, muestran la dificultad en la comprensión de estos conceptos. Estas dificultades pueden provenir, como resalta Artigue (1995), del uso mecánico de algoritmos, sin hacer hincapié en la comprensión conceptual.

La relevancia del estudio de las sucesiones se pone de manifiesto en diferentes trabajos, así una buena comprensión del concepto de sucesión es fundamental para la comprensión del concepto de límite (Mamona-Downs, 2001; Roh, 2008), y para la comprensión de la sucesión de sumas parciales, en relación a las series numéricas (Codes y González-Martín, 2017).

ISBN 978-84-945722-3-4

Por otro lado en relación con los modos de representación, diferentes investigaciones (Cañadas, 2007; González, Medina, Vilanova y Astiz, 2011; Przenioslo, 2006), muestran que para la comprensión del concepto de sucesión numérica, es fundamental establecer relaciones entre las distintas representaciones de dicho concepto, y en particular la necesidad de profundizar en las relaciones entre los modos algebraico y numérico.

Esta comunicación forma parte de un trabajo de investigación más extenso, sobre la caracterización de la comprensión del concepto de las sucesiones numéricas. En esta investigación mostramos el uso de dos indicadores para caracterizar algunos aspectos de la comprensión del concepto de sucesión numérica. El primero, relativo a la relación entre los conceptos sucesión numérica y progresión. El segundo, relativo a los modos de representación.

Marco Teórico

Para caracterizar la comprensión del concepto de sucesión numérica, hemos adoptado como marco teórico la teoría APOS (Arnón et al, 2014) sobre el desarrollo de un esquema. En dicho marco se define un esquema "*como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática*" (Trigueros, 2005, p. 11).

Un esquema es una herramienta para comprender como se estructura el conocimiento y su desarrollo (Arnón et al, 2014). En relación al desarrollo de un esquema, la teoría APOS, basándose en las aportaciones de Piaget y García (1983) considera que, se desarrolla pasando por tres niveles: intra, inter y trans.

Los niveles se caracterizan a través del uso que los estudiantes hacen de los modos de representación (numérico, algebraico y gráfico), los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre ellos en la resolución de tareas matemáticas:

Intra: uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Un individuo en el nivel intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos.

Inter: uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y establecimiento de relaciones en el mismo modo de representación. Este nivel está

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

Trans: uso de elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y establecimiento de relaciones entre elementos matemáticos. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto cognitivo y son conscientes de las relaciones que se establecen entre diferentes modos de representación llegando a la síntesis de los modos de representación. La estructura coherente subyacente de su esquema le ayudará a utilizar este esquema en nuevas situaciones.

En este trabajo nos centramos en caracterizar algunos indicadores de los niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica, en particular, los modos de representación, y el papel que desempeña el concepto de progresión (aritmética o geométrica).

Metodología

En este apartado describiremos los participantes y contexto, instrumentos de recogida de datos y procedimiento de análisis de nuestro trabajo.

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de 2º ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), (14-16 años), de un instituto de la ciudad de Sevilla: A estos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica, estrategias para buscar regularidades numéricas en sucesiones de números enteros y fraccionarios, y progresiones aritméticas y geométricas como casos particulares de sucesiones (BOE, 5 del 5 de enero de 2007, p. 756) y (BOJA, 2007).

Instrumentos de recogida de datos

Como instrumentos de recogida de datos, usamos dos cuestionarios. Un primer cuestionario con cuatro tareas, y un segundo cuestionario diseñado para cada estudiante, a partir de las respuestas dadas al primer cuestionario, para profundizar en aquellas respuestas que no habían sido explicadas.

Las tareas fueron diseñadas, a partir de la revisión de la literatura, considerando los elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica y las relaciones que se podían establecer entre ellos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En esta comunicación, nos vamos a centrar en la tarea 1 (figura 1), en las que se pone de manifiesto diferentes características de la comprensión en estudiantes de secundaria, a través del uso que hacen de los modos de representación, y del concepto de progresión.

TAREA 1

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

a) $a(n) = \frac{1}{5 - n}$ b) $a(n) = \frac{1}{n^2 + 1}$ c) $a(n) = \sqrt{1 - n}$

d) $a(n) = 3n - 2$ *e)* $a_1 = 1, a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ f) 16, 8, 4, 2, 1,...

Figura 1: tarea 1 del primer cuestionario.

La tarea 1 es similar a una tarea de Przenioslo (2006), adaptada para nuestro trabajo, donde hemos suprimido algunas representaciones por no ser relevantes para nuestra investigación. A continuación mostramos los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la tarea 1 (figura 2),estos elementos matemáticos pueden estar representados en los diferentes modos de representación. Por tanto, la resolución de una misma tarea por parte de distintos estudiantes, puede poner de manifiesto el uso de los mismos elementos matemáticos en distintos modos de representación.

ELEMENTOS DE SUCESIONES.

E1 Sucesión (como lista): secuencia de números Reales dispuestos en un orden, es decir, Para todo número natural n existe un número real.
E2 Términos: se definen como los integrantes de la sucesión, el lugar que ocupa lo determina su posición que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
E3 Término general: se define como el término que dependiendo de su posición, es decir, subíndice sabemos su valor, y se denota por " a_n" (con n perteneciente a los naturales)
E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
E5 Progresión Geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad fija que denominamos razón.
E6 Sucesión Recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.

Figura 2: elementos matemáticos de la tarea 1.

Procedimiento de análisis

Para el procedimiento de análisis se consideraron las respuestas de los estudiantes a los dos cuestionarios de forma conjunta. Esto permitió inferir el nivel de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica puesta de manifiesto por cada uno de ellos a partir de la caracterización de los niveles intra, inter y trans.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El procedimiento para analizar los datos se realizó en dos etapas adaptando el esquema de análisis de Sánchez-Matamoros (2004). En la primera etapa, para cada uno de los estudiantes se analizó independientemente cada una de las tareas, obteniéndose una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión para cada una de ellas. Y en la segunda etapa, a partir de los resultados obtenidos en la primera, se analizaron de forma conjunta la resolución de todas las tareas por un mismo estudiante. Esto nos permitirá obtener una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión numérica movilizado por los cuestionarios.

Resultados

En esta sección de resultados mostramos dos indicadores de la comprensión del concepto de sucesión numérica, el uso de las progresiones y el uso de los modos de representación.

A continuación vamos a mostrar como el uso que hacen los estudiantes de los elementos matemáticos referidos a las progresiones, y las traslaciones entre los distintos modos de representación, puestos de manifiesto en la resolución de la tarea 1, permiten diferenciar niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica.

Uso correcto de los modos de representación y de las progresiones

A continuación mostramos el análisis de las respuestas de un estudiante que hace uso correcto de ambos indicadores.

Mediante la respuesta del estudiante 3b14 al resolver el apartado b) de la tarea 1 del primer cuestionario, podemos comprobar que hace una traslación del modo de representación algebraico al numérico (figura 3) de forma correcta: ya que a través de la expresión algebraica de la sucesión dada en el apartado b), calcula los ocho primeros términos. Además, a través de la respuesta dada en el segundo cuestionario, se pone de manifiesto que este estudiante hace uso correcto de la relación entre progresiones y sucesiones:

> *Pregunta: Explica la diferencia entre sucesión y progresión*
>
> *3b14: Una progresión es una secuencia de números en el que para hallar sus términos hay que sumar o multiplicar, en cambio una sucesión sigue una regla por la que se averiguan sus términos.*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

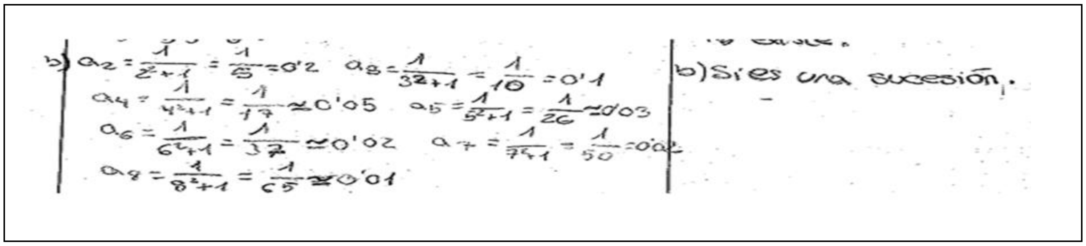


Figura 3: respuesta del estudiante 3b14 al apartado b) de la tarea 1.

De las respuestas se puede inferir que este estudiante considera las progresiones como un caso particular de sucesiones, hecho que confirmamos en el apartado f) al responder de forma afirmativa que es sucesión por ser una progresión (figura 4)

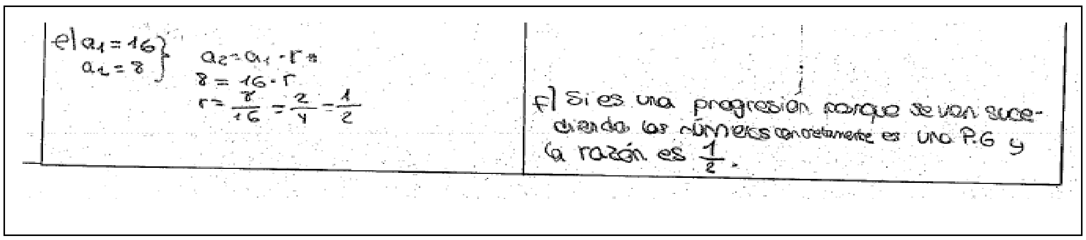


Figura 4: respuesta del estudiante 3b14 al apartado f) de la tarea 1.

Además, en el apartado f) el estudiante 3b14 hace uso de la traslación del modo numérico al algebraico, traslación recíproca del apartado b).

A partir del análisis realizado, se infiere que el estudiante 3b14 hace uso correcto de las traslaciones entre los modos numérico y algebraico. Y además hace uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones, viendo las progresiones como un caso particular de sucesión.

Uso correcto de los modos de representación e incorrecto de las progresiones

A continuación mostramos el análisis de las respuestas de un estudiante que hace uso correcto de los modos de representación e incorrecto de la relación entre las progresiones y sucesiones.

En las respuestas del estudiante 3b2 al resolver los apartados de la tarea 1, comprobamos que hace uso correcto de las traslaciones del modo de representación algebraico al numérico (figura 5) de forma correcta: ya que a partir de las expresiones algebraicas y de recurrencia obtiene los primeros términos de cada expresión.

ISBN 978-84-945722-3-4

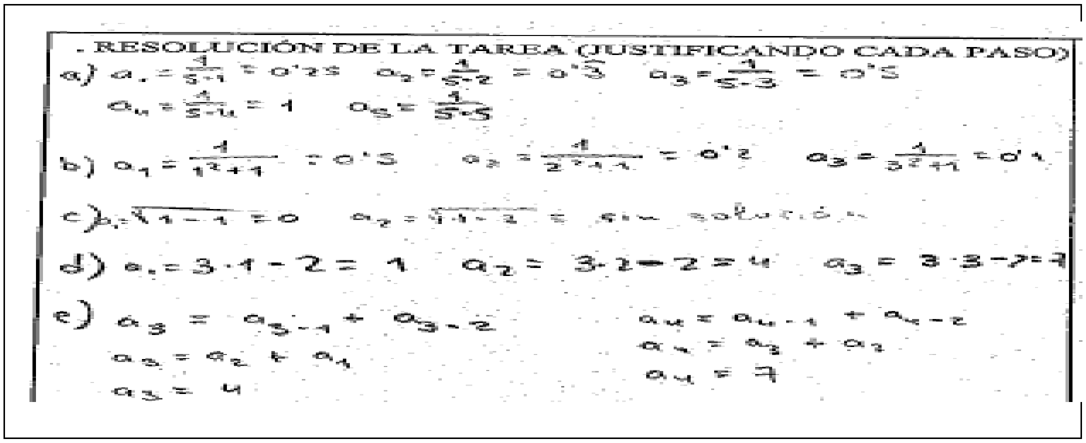


Figura 5: respuesta del estudiante 3b2 a la tarea 1.

Sin embargo, a pesar de obtener los primeros términos, no responde de forma correcta cuando tiene que identificar las sucesiones que no son progresiones, es decir, no hace un uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones.

Para este estudiante las progresiones son los únicos tipos de sucesiones, como podemos comprobar en la respuesta dada al primer cuestionario:

> *3b2: No es una sucesión ya que la razón de la progresión o la diferencia según sea una PA (progresión aritmética) o una PG (progresión geométrica) no es la misma ya que cambia al hallar el siguiente término.*

Para profundizar en esta respuesta del primer cuestionario, en el segundo cuestionario le pedimos que nos aclarase qué quería decir al mencionar la razón o diferencia:

> *Pregunta: ¿Qué significa que no encuentras la razón o la diferencia en el apartado b)?*
>
> *3b2: Como del primero al segundo la diferencia es 0,3 y del segundo al tercero es 0,1, la diferencia cambia por lo que no hay ninguna razón o diferencia que cumpla esa progresión.*

A partir del análisis realizado, se infiere que el estudiante 3b2 hace uso correcto de la traslación del modo algebraico al numérico. Sin embargo no hace uso correcto de las relaciones entre sucesiones y progresiones, identificando las progresiones con las sucesiones.

Por lo tanto, el solo hecho de usar de forma correcta las traslaciones, en los distintos apartados, del modo algebraico al numérico, no le da la consistencia necesaria para responder de forma correcta a los apartados donde no son progresiones, debido al uso incorrecto de las relaciones entre progresiones y sucesiones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Conclusiones

A partir de los análisis de esta tarea, hemos obtenido que el uso correcto de ambos indicadores (el primero, relativo a la relación entre los conceptos sucesión numérica y progresión y el segundo, relativo a los modos de representación), permiten diferenciar distintos niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica.

A través de esta investigación, podemos dar algunas respuestas a los investigadores que demandan una mayor comprensión del concepto de sucesión numérica, como Mamona-Downs (2001) y Roh (2008), mostrándole unos indicadores para inferir el grado de comprensión del concepto y proporcionando una herramienta para profundizar en las relaciones entre los distintos modos de representación, como nos argumentaba González, Medina, Vilanova y Astiz (2011).

Mediante estos indicadores podemos empezar a considerar para futuras investigaciones subniveles dentro de los niveles (INTRA, INTER o TRANS) considerados por Piaget y García (1983) donde consideraban que cada fase o nivel implican a su vez algunos subniveles siguiendo el mismo orden de progresión.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P. (ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* pp. 97-140.Méjico DC: Grupo editorial Iberoamérica.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin, Alemania: Springer.

Boletín Oficial del Estado (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.(BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Consejería de Educación.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*.Granada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Codes Valcarce, M., González-Martín, A. S. (2017) .Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1),89-110.

Gonzalez, J., Medina, P., Vilanova, S., y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, 26, 1-19.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259–288.

Piaget, J. y García R. (1983), *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, Siglo XXI Editores.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(7), 805–823.

Roh, K.H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 217-233.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Sevilla.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-824

LA FENOMENOLOGÍA Y EL LENGUAJE DEL AZAR EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Elena Hernández-Salmerón[1] – María del Mar López-Martín[2] – Carmen Batanero[2]
elena.hernandez.salmeron@gmail.com - mariadelmarlopez@ugr.es - batanero@ugr.es
[1] IES Mediterráneo de La Línea de la Concepción, España [2] Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Comunicación Breve (CB).
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años).
Palabras clave: Azar, Probabilidad, Educación secundaria, Lenguaje matemático.

Resumen
En este trabajo presentamos un estudio orientado a evaluar la comprensión de la fenomenología y el lenguaje del azar y la probabilidad en una muestra de 89 alumnos de primero y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Los resultados muestran algunos errores en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas y dificultades, para ofrecer ejemplos de fenómenos aleatorios fuera de los juegos de azar y para ofrecer sinónimos de expresiones probabilísticas. Por último algunos estudiantes tratan los términos imposible e improbable como sinónimos. Observamos mejores resultados en los estudiantes de segundo curso, lo que evidencia la influencia de la enseñanza.

1. Introducción

En el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Secundaria los contenidos de probabilidad son incluidos en el bloque, denominado *Estadística y Probabilidad*, (MEC, 2006, pp. 754-760) desde primer curso, pero no es hasta tercero donde son trabajados con mayor detalle. El paso de la LOE a la LOMCE ha supuesto un cambio tanto en los contenidos a tratar como en los cursos donde se aborda la Probabilidad. En concreto, se incluye el tema de probabilidad en el segundo curso y, entre las dos posibles orientaciones de la enseñanza en tercer curso, sólo se introduce el tema en las matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. En los primeros dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO), las normativas curriculares incluyen los siguientes contenidos:

> Fenómenos deterministas y aleatorios. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y

ISBN 978-84-945722-3-4

> diagramas de árbol sencillos. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos (MECD, 2015, p. 413).

Dentro de este tema destacamos el importante papel dado al lenguaje y otras representaciones de los objetos matemáticos por Duval (1993), no sólo son indispensables para la comunicación del trabajo matemático, sino también para el desarrollo de la misma actividad matemática. Esta normativa ponen de manifiesto la importancia de que el estudiante pueda "comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas" (p.407) y "[…] leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos" (p.408). Con el fin de asegurar un correcto conocimiento sobre probabilidad, es necesario que el estudiante adquiera de una forma adecuada el lenguaje y la fenomenología asociada a los fenómenos aleatorios y la probabilidad.

La doble función, representacional e instrumental, del lenguaje matemático es también resaltada por Godino, Batanero y Font (2007), pues el lenguaje permite designar objetos abstractos que no podemos percibir y además ayuda a operar con ellos. Por ello, los alumnos deben tener suficiente dominio del lenguaje para entender los problemas que se les plantean, resolver las tareas, comunicar las soluciones encontradas y justificarlas a otras personas o al profesor. Este dominio, en el caso particular de la probabilidad elemental, es el que tratamos de evaluar para los estudiantes de nuestra muestra.

El presente trabajo está enfocado en evaluar el nivel del lenguaje del azar de los estudiantes de los dos primeros cursos de ESO, que han seguido la normativa LOE. Concretamente se analiza, a través de un cuestionario, si los alumnos cuentan con vocabulario probabilístico, comprenden expresiones numéricas de la probabilidad e identifican, junto a las características que asignan a los sucesos aleatorios y deterministas, la graduación de las probabilidades asociadas a dichos sucesos.

Nos basamos en trabajos previos de síntesis, desarrollados por Green (1983) y Cañizares (1997), que recurrieron al uso de cuestionarios escritos. Dichos autores desarrollan un cuestionario con un contenido más amplio de la probabilidad para estudiantes con edades comprendidas entre 10 y 14 años, los cuales no habían recibido ninguna formación en el tema a evaluar. En el presente trabajo, se ha propuesto un ítem no tenido en cuenta por estos autores y por tal motivo, el trabajo que aquí se presenta contribuye a ampliar las investigaciones que se han llevado a cabo alrededor de este tema.

ISBN 978-84-945722-3-4

2. Fundamentos

Son numerosas las investigaciones que se han realizado sobre los principales elementos que favorecen el aprendizaje de los contenidos probabilísticos. En el desarrollo de la idea de azar en los niños destacamos las investigaciones de Fischbein (1987) e Inhelder y Piaget (1955).

Inhelder y Piaget (1955) identifican cuatro fases por las que pasan los niños para desarrollar ese razonamiento en relación a diferentes contenidos de Ciencias y Matemáticas: Periodo sensorio-motor (0-2 años); Periodo pre operacional (2-7 años); Periodo de las operaciones concretas (7-11 años) y Período de las operaciones formales (11-15 años). Sin embargo, estas investigaciones han sido discutidas por Fischbein (1987), creando el autor su propio marco teórico mediante el concepto de intuición. Concretamente, el autor divide las intuiciones en *primarias* (provienen a partir de la experiencia) y *secundarias* (se forman a través de la formación en los centros educativos). Nótese que las ideas de Fischbein contrastan con las de Piaget e Inhelder, en cuanto al momento de desarrollo de los conceptos de aleatoriedad y probabilidad. Puede que un niño en edades anteriores a los 11 años no conozca todavía contenidos matemáticos suficientes como para establecer el valor de probabilidad de un suceso, o como para diferenciar los fenómenos aleatorios y los deterministas, pero es posible que intuya y compare la probabilidad de dos sucesos por simple experiencia, como intuición primaria. Fischbein sitúa esta intuición previa en relación a la aleatoriedad a los 7 años de edad, algo que contrasta fuertemente con los estudios de Piaget e Inhelder, que lo centran en edades a partir de los 11 años. En nuestro estudio, los alumnos con los que se está llevando a cabo la investigación se encontrarían en etapa donde se supone que el estudiante tiene la madurez necesaria para comprender los contenidos abstractos relativos a la probabilidad, la combinatoria y la correlación.

Con respecto al desarrollo sobre la idea de probabilidad, tanto en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) como en Fischbein (1975) se observó que en el período de operaciones concretas mejoraba el resultado de la estimación de la frecuencia relativa en los sucesos debido al desarrollo de su intuición, mientras que en el periodo de las operaciones formales se concluyó que los niños eran capaces incluso de pensar estrategias relacionadas con la diferente frecuencia e identificar la probabilidad como fracción.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por otro lado, Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías en el análisis del lenguaje probabilístico: 1) Términos o expresiones de la vida cotidiana, cuyo significado no varía al utilizarlos en matemáticas; 2) Aquellas expresiones o palabras usadas en la vida diaria, pero cuyo significado puede variar cuando se utilizan en las matemáticas; 3) Términos que sólo se utilizan en la matemática.

En nuestro estudio nos centramos en la segunda categoría, es decir, consideramos aquellos términos que aun formando parte del lenguaje cotidiano, también tienen un significado probabilístico bien marcado, y que muchas veces el alumnado confunde con el atribuido en la vida real. La dificultad ligada a la interpretación de estos términos ha sido remarcada por algunos investigadores. Ejemplo de ello son las investigaciones llevadas a cabo entre 1978 y 1981 por Green (1983) quien analizó el grado de conocimientos en conceptos probabilísticos e intuiciones aleatorias de estudiantes de 11 a 16 años. Como réplica de esta investigación, Cañizares (1997), identifica el grado de comprensión del lenguaje probabilístico de un grupo de alumnos de varios centros públicos de Jaén, obteniendo resultados peores a los de Green (1983) e identificando cierta dificultad al diferenciar entre "imposible" e "improbable" y entre "muy probable" y "seguro" o la comprensión de "sucede al azar".

3. Metodología

El estudio realizado se enmarca dentro de la investigación descriptiva y aplicada. El objetivo que se plantea es la evaluación de los conocimientos básicos que tienen los estudiantes con respecto el lenguaje y fenomenología del azar. Puesto que la muestra se ha seleccionado de una forma intencional, no se pretende confirmar estadísticamente hipótesis.

Para llevar a cabo la investigación se ha contado con la participación de 89 estudiantes (56 de primero y 33 de segundo), con edades comprendidas entre 12 y 15 años, de un centro público de Educación Secundaria de La Línea de la Concepción (Cádiz). Los alumnos del primer curso de ESO provienen de tres centros de Enseñanza de Educación Primaria distintos de la ciudad, y como consecuencia el nivel de conocimientos matemáticos ha sido muy diverso entre ellos. Por otro lado, aunque todos los estudiantes de segundo cursaron primero en el mismo instituto, algunos no llegaron a estudiar estadística y probabilidad puesto que tuvieron en primero distintos profesores.

ISBN 978-84-945722-3-4

Durante el proceso de recogida de datos se contó con la colaboración de los docentes de estos grupos y se les explicó a los estudiantes la importancia que tenía realizar de una forma adecuada el cuestionario. Además, en la sesión posterior a la realización del cuestionario, se discutió junto a los estudiantes los resultados obtenidos, sirviendo como actividad formativa.

3.1 Instrumento

La herramienta empleada en la investigación ha sido elaborada en base a los trabajos de Batanero y Godino (2004), Cañizares (1997) y Green (1993). El cuestionario, en términos generales, se puede dividir en dos grandes bloques: un primer bloque centrado en abordar la discriminación de fenómenos aleatorios y deterministas e indirectamente las características y fenomenología que los alumnos atribuyen al azar y un segundo bloque donde se pretende conocer el lenguaje (palabras, expresiones verbales que se utilizan para plantear cuestiones, símbolos matemáticos, representaciones gráficas, diagramas y tablas) que los alumnos asocian a las situaciones aleatorias y la probabilidad. En este trabajo analizamos un ítem de cada uno de los bloques, que se recogen en la Figura 1.

El ítem 1 está dirigido a evaluar el reconocimiento de la aleatoriedad en distintos contextos, es decir, se espera que los estudiantes den algún ejemplo distinto a los ejemplos relacionados con el azar. Posteriormente clasificamos los contextos de los ejemplos propuestos de acuerdo a los contextos considerados en las Pruebas PISA (OCDE, 2013): Personal; Profesional; Social y Científico.

El segundo ítem ha sido adaptado de un ejercicio propuesto por Batanero y Godino (2004) y cuyo objetivo está centrado en que los estudiantes usen el vocabulario probabilístico (trabajado durante la realización de la prueba) para dar una valoración cualitativa de probabilidad. Señalamos que las respuestas ofrecidas vienen condicionadas por la época en la que se llevó a cabo el cuestionario (meses de abril y mayo) y por la climatología de la zona.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ítem 1. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.

Ítem 2. El profesor ha pedido a Daniel que prepare un pronóstico del tiempo que hará mañana en La Línea de la Concepción ofreciéndole varias opciones: a) Lloverá todo el día; b) Lloverá solo un rato; c) La temperatura a mediodía será 40 grados o mayor; d) Habrá una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados; e) Mañana nevará en La Línea; f) Lloverá tanto que habrá inundaciones

Completa cada frase según la posibilidad que crees de que ocurra (o usando las frases del Ítem 2). Usa como ejemplo la siguiente: "**Es poco probable** que llueva todo el día".

a) ____ que llueva solo un rato.
b) __________________ que la temperatura a mediodía sea 40 grados o mayor.
c) ______________que haga una temperatura a mediodía entre 10 y 20 grados.
d) _____________ _______________________ que mañana nieve en La Línea.
e) ______________________________que llueva tanto que haya inundaciones.

Figura 1. Ejemplos de algunas de las tareas propuestas en el cuestionario

4. Resultados

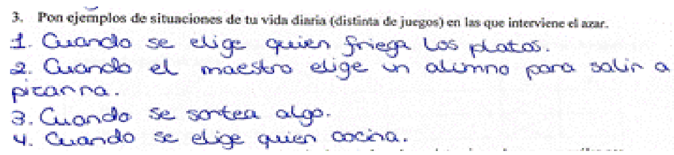
A partir del análisis del ítem 1 (Tabla 1), se ha observado que el número de respuestas correctas por el alumnado es similar en ambos cursos con un número medio de ejemplos (0,94 en 1º y 0,93 en 2º curso) que no llega a la unidad. Aunque en el ítem se ha indicado que los ejemplos debían ser distintos del azar, son muchos los alumnos que han contestado con ejemplos de este tipo.

Tabla 1. *Resumen de respuestas al ítem 1*

	1º curso (n=56)	2º curso (n=33)
Número de ejemplos correctos	52	31
Número de ejemplos incorrectos	14	2
No responden	15 alumnos	10 alumnos

Por otro lado, señalamos el alto porcentajes de estudiantes de primero (27%) y de segundo (30%) que no han sabido responder con algún ejemplo de su vida cotidiana. Este hecho es destacable ya que sería importante que los alumnos lleguen a reconocer situaciones aleatorias de su vida diaria, diferentes a los juegos de azar, donde puede aplicarse el cálculo de probabilidades. Entre los ejemplo correctos destacamos una variedad de ellos relacionados con los contextos "Personales" o "Escolares", la mayoría indica situaciones obtenidas de su propia experiencia y en la que claramente inferimos que comprenden el significado del azar (Figura 2).

ISBN 978-84-945722-3-4



3. Pon ejemplos de situaciones de tu vida diaria (distinta de juegos) en las que interviene el azar.
1. Cuando se elige quien friega los platos.
2. Cuando el maestro elige un alumno para salir a pizarra.
3. Cuando se sortea algo.
4. Cuando se elige quien cocina.

Figura 2. Respuesta al ítem1 de la alumna 20 (1ºESO B)

Tras una primera lectura de las respuestas del ítem 2 (Tabla 2) observamos que los alumnos diferencian principalmente tres niveles de probabilidad: “Probable”, “Imposible” o “Seguro”. Las expresiones más empleadas han sido “Puede” y “Es imposible”, además, destacamos la asociación de las expresiones “Seguramente que no” y “Es poco probable” como expresiones cercanas a imposible.

Tabla 2. *Porcentaje de alumnos que califica cada suceso con diferente probabilidad*

	Imposible		Poco probable		50%		Muy probable		Seguro	
	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º	1º	2º
Llover un rato	13,7	18,2	21,6	30,3	52,9	48,5	9,8	3,0	0,0	0,0
Más de 40º	54,9	48,5	29,4	24,2	5,9	27,3	0,0	0,0	5,9	0,0
10º-20º	5,9	9,1	11,8	9,1	54,9	57,6	19,6	15,2	7,8	9,1
Nevar	88,2	100,0	9,8	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0
Inundaciones	45,1	51,5	35,3	18,2	13,7	30,3	2,0	0,0	3,9	0,0

Se ha observado que más de la mitad del alumno de ambos cursos han asignado la probabilidad de 50% a los sucesos “Llover un rato” y “10-20 grados”, por lo que se deduce que no han sabido precisar el grado de probabilidad asociada a cada uno de los sucesos (véase Figura 3).

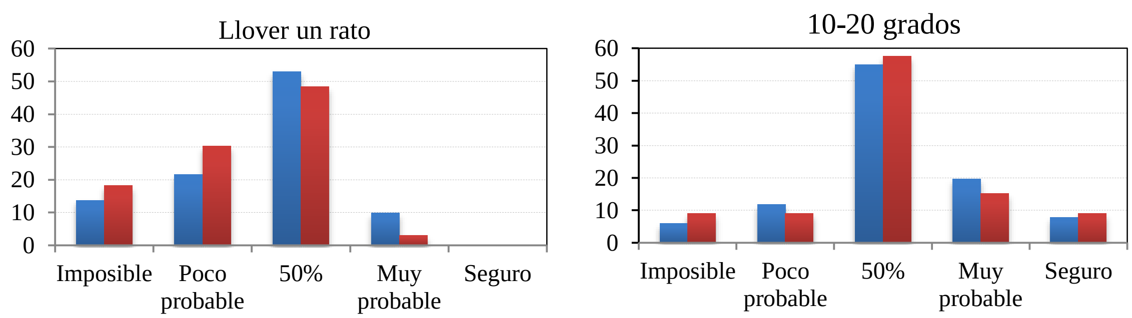


Figura 3. Sucesos considerados equiprobables (en azul 1º ESO y en rojo 2º ESO)

Por otro lado, los sucesos “Más de 40 grados” y “Nevar” han sido clasificados por la mayoría de los estudiantes como una situación “Imposible” (véase Figura 4). Este último resultado,

ISBN 978-84-945722-3-4

pone de manifiesto la confusión de suceso imposible por suceso improbable, conclusión también obtenida por Cañizares (1997).

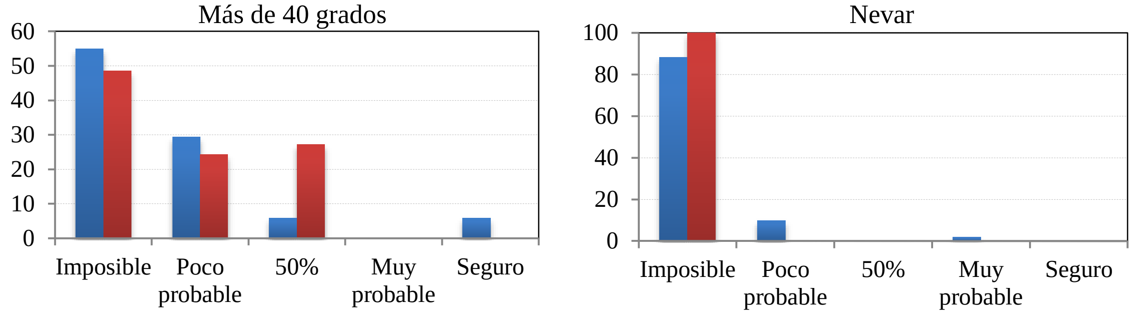


Figura 4. Confusión entre suceso improbable e imposible (azul 1º ESO y rojo 2º ESO)

Por último, en el caso del suceso “Inundaciones” la mayoría de los alumnos de 2º ESO colocan la situación como “Imposible” (de nuevo confusión con muy poco probable) y casi la mitad de los alumnos de primero así lo corroboran. Sin embargo, debido a la situación específica del campo de Gibraltar y que en algunas ocasiones llueve con mucha fuerza, hay alumnos que lo sitúa como una situación “Muy probable” o “Segura”.

5. Conclusiones e implicaciones docentes

La herramienta utilizada en la investigación nos ha permitido evaluar los conocimientos presentes en el alumnado participante sobre la fenomenología del azar y el lenguaje de la probabilidad, así como las carencias que éstos tienen principalmente en lo que a lenguaje probabilístico se refiere. Los resultados en general han sido buenos, ya que los alumnos han mostrado conocimientos de la fenomenología del azar, más allá de los juegos. Por otro lado, las principales carencias detectadas han sido: 1) Errores en la distinción de fenómenos aleatorios y deterministas; 2) Carencia de vocabulario relativo al azar y dificultad en la búsqueda de sinónimos de expresiones relacionadas con la probabilidad a distintos niveles; 3) Confusión entre los términos “Imposible” e “Improbable”, coincidiendo con los resultados obtenidos por Cañizares (1997). Los resultados presentados en este trabajo pueden ser tenidos en cuenta con el fin de mejorar la enseñanza de la probabilidad.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). *Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática*, Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis.* México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics (Vol.2, pp.766-783). Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. París: Presses Universitaires de France.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencias (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. España: Ministerio de Educación y Cultura.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: Autor.

OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Readings, Sciencce, Problem Solving and Financial Literacy,* OECD Publishing.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-825

COLABORACIÓN INTERDISCIPLINAR ENTRE MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN FÍSICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Luis J. Rodríguez-Muñiz – Iván Sánchez-Díaz
luisj@uniovi.es – UO242099@uniovi.es
Universidad de Oviedo (España)

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Educación Física, Interdisciplinariedad, Matemáticas, Revisión Bibliográfica

Resumen
En este trabajo se presenta una revisión bibliográfica sobre el estado del arte del trabajo interdisciplinar entre las materias de Educación Física y Matemáticas en el ámbito de la Educación Primaria. Podemos afirmar que son escasas las referencias que tengan una relación directa con el tema y que presenten conexiones entre ambas disciplinas, destacando los autores de origen norteamericano. Los artículos analizados y comparados coinciden en que un aprendizaje basado en una metodología interdisciplinar entre las dos materias, Educación Física y Matemáticas, produce que el alumnado adquiera las competencias deseadas de una forma más significativa. La razón que se señala como primordial para justificar este hecho es que al presentar los contenidos relacionados a través de actividades que exigen el movimiento y la participación activa del alumnado, se activan otros tipos de memoria, como es la kinestésica. Otra premisa imprescindible que la literatura señala en este tipo de colaboraciones es que exista un intercambio bidireccional y ambas materias se nutran mutuamente. Aquellas colaboraciones unidireccionales entre ambas materias no son entendidas como un trabajo interdisciplinar propiamente dicho.

Criterios de búsqueda

Se ha realizado una búsqueda exhaustiva, a través de las plataformas Google Académico, Scopus, Science Citation Index, Scocial Sciences Citation Index y DICE (plataforma en español) de trabajos que relacionen, en el ámbito de la Educación Primaria, las matemáticas y la educación física. Por lo tanto, las claves iniciales en la búsqueda han sido las competencias básicas y la educación física, al estar inscrita la competencia matemática dentro de aquellas. Esta primera aproximación nos ha llevado a varios refinamientos en la búsqueda que han proporcionado resultados adicionales. Se han utilizado términos tanto en español (para buscar trabajos relacionados con la Educación Primaria en España) como en inglés.

ISBN 978-84-945722-3-4

La integración de competencias

El trabajo de Molina Alventosa y Antolín Jimeno (2008) lleva a cabo una revisión bibliográfica bajo el punto de vista de las competencias básicas introducidas por la Ley Orgánica de Educación (LOE) en España, y su tratamiento desde el ámbito de la educación física. Los autores defienden, respaldados por los trabajos que analizan, una educación basada en competencias, buscando una colaboración entre las competencias básicas que «*en el marco de la interdisciplinariedad de las competencias promueva el movimiento del cuerpo y el movimiento en la escuela, no solo desde la Educación Física sino también desde el resto de materias escolares*» (Molina Alventosa y Antolín Jimeno, 2008, p. 83).

En Méndez-Giménez, López-Téllez y Sierra-Arizmendiarrieta (2009) se realiza una revisión sobre competencias básicas en la LOE y su relación con la educación física. Con la entrada en vigor de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) las competencias han pasado de "competencias básicas" a "competencias clave", una de las cuales consiste en "competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología".

En Ruiz Pérez (2004), cit. por Méndez Giménez et al. (2009), se establece una relación directa entre la competencia motriz y una inteligencia sobre las acciones, cuya idea concuerda con el planteamiento de Gardner (1983), quien postula la existencia de una inteligencia corporal-kinestésica entre las ocho inteligencias múltiples que forman parte de su bien conocido modelo.

En Méndez Giménez et al. (2009) también se cita a Martínez Seijas y Barreiro García (2003) defienden que la interdisciplinariedad y la integración de las diferentes áreas de conocimiento son la solución a los problemas que genera el abordaje del conocimiento de manera fraccionada por las distintas áreas, y la imposibilidad de disponer de las horas necesarias en el aula. Esta idea se ve reforzada por Siedentop, Hastie y Van der Mars (2004), quienes apuestan por el desarrollo del currículo interdisciplinar, en el que desde una asignatura determinada se pueden realizar actividades que traten de reforzar las competencias de otras áreas curriculares. A estos efectos, Cone et al. (1998) establecen tres niveles de colaboración interdisciplinar (conectada, compartida y asociada), de creciente integración e interdependencia entre las áreas curriculares. Placek (1996) coincide también en la idea de que toda experiencia interdisciplinar debe implicar un esfuerzo bidireccional. Ese tratamiento bidireccional en la interdisciplinaridad desde la educación física debería ser llevado a cabo

ISBN 978-84-945722-3-4

reforzando o enseñando contenidos de la educación física en otras áreas y, por otro lado, se deberían usar las actividades motrices de las sesiones de educación física para abordar contenidos de otras áreas del currículo.

Respecto a la percepción que tienen los docentes acerca de la integración de las competencias básicas (LOE) y de las competencias clave (LOMCE) en el currículo, autores como Barrachina Peris y Blasco Mira (2012), Caballero (2013), Hortigüela, Abella y Pérez Pueyo (2014), Hortigüela (2014), Méndez-Alonso, Méndez-Giménez y Fernández-Río (2016), o Monarca y Rappoport (2013) aportan evidencias acerca de que los especialistas de educación física se encuentran inseguros para preparar sus sesiones a partir de una metodología competencial y consideran que la mayor problemática se encuentra en la precariedad de recursos y de formación que recibe el profesorado, además la poca implicación del profesorado, de los tutores y del alumnado, la dificultad por interpretar la legislación y la necesidad de crear proyectos educativos por competencias. Esta perspectiva del profesional que realiza el trabajo día a día debe ser tenida en cuenta en cualquier propuesta de innovación que se lleve a cabo.

Por último, Méndez-Giménez et al. (2009) afirman que al utilizar la actividad motriz como medio para aprender, aumenta la participación activa y refuerza la memoria al utilizar cuerpo y mente en las actividades. Finalmente, exponen una serie de ejemplos respecto al tratamiento de la competencia matemática en el ámbito de la educación física, aunque son ejemplos solamente unidireccionales. Sería necesario ejemplificar también ese camino de regreso en el que en las otras áreas se trabajen o refuercen contenidos del área de la educación física.

La integración de educación física y las matemáticas

Cone, Werner y Cone (2009) afirman que los contenidos de todas las áreas tienen importancia pero también tiene importancia el hecho del trabajo interdisciplinar. Aportan cuatro beneficios del trabajo interdisciplinar: proporcionar nuevas formas de presentar y usar información, fomentar el pensamiento crítico al tiempo que fomenta el pensamiento creativo, fomentar un enfoque colaborativo del aprendizaje, y enseñar a los estudiantes a utilizar múltiples fuentes al resolver un problema. Uno de los principales problemas de la integración de competencias a este tipo de enfoques se encontraba en que algunos maestros de educación física dejaran de lado la acción motriz para dar cabida a otros contenidos de otras áreas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para intentar no caer en esta problemática, Graham, Holt-Hale y Parker (2009) elaboraron un enfoque llamado "enfoque de vinculación de contenido". En él, tanto el contenido de las matemáticas como el de la educación física se realizan mediante una actividad o un ejercicio físico, que se desarrolla en las sesiones de educación física. Kitchen y Kitchen (2013) proponen varias estrategias para asegurar que el trabajo entre las áreas sea realmente colaborativo y que no se merme la importancia de ninguna de ellas:

- El rincón de colaboración: lugar de compartición de contenidos, información o normas que sean fáciles de integrar en otras áreas. También se puede utilizar para colocar las diferentes programaciones. De esta manera se facilita la comunicación.
- Reuniones: los contenidos deben ser el punto de partida para plantearse posteriormente los objetivos y el plan de trabajo. Cada docente debe tratar los contenidos de ambas áreas durante toda la unidad interdisciplinar, evaluando si se han cumplido los objetivos del proyecto.
- Evaluación del aprendizaje: puede ser útil la elaboración de hojas de tareas para que el alumnado se autoevalúe.
- Tareas de aplicación: lo aprendido en el proyecto interdisciplinar le servirá al alumnado para aplicarlo a su día a día, lo que demostrará que el aprendizaje habrá sido significativo.

Buchanan et al. (2002) proponen un proyecto integrado sobre las áreas de ciencias, lengua y educación física, con una metodología de tareas cooperativas a través de la resolución de problemas. La estrategia se denominó "*Fit Newton's Great Adventure*" y fue llevada a cabo con éxito en un grupo de riesgo del quinto grado de una escuela primaria rural en Estados Unidos. El "*Fit Newton's Great Adventure*" integra las ciencias y la educación física, mientras que utiliza la escritura, el trabajo cooperativo y la resolución de problemas son actores secundarios del proyecto para facilitar su puesta en escena. Las tareas fomentan la cooperación entre el alumnado y se van implantando de forma progresiva, aumentándolas en dificultad y ampliando el tamaño de los grupos de trabajo. La denominación "*Fit Newton's Great Adventure*" surge de la integración de las tres leyes de Newton a partir de ejercicios prácticos que involucran las habilidades motrices o la actividad física para explicar la fuerza o la ley de la inercia.

ISBN 978-84-945722-3-4

Rauschenbach (1996) afirma que para que una integración sea exitosa debe maximizar el aprendizaje de los estudiantes en todas las áreas y debe ser vista como un intercambio de conocimientos entre las diversas áreas. Propone tres tipos de tareas integradas: incrustadas (que incorporan otras asignaturas en tareas cotidianas de la educación física), de práctica (que ayudan a los estudiantes a interactuar con las otras áreas mientras se trabaja con las actividades motrices) y de descubrimiento (diseñadas para cumplir los objetivos que supongan habilidades de pensamiento complejo).

DeFrancesco y Casas (2004) también abordan diversas estrategias para llevar a cabo con éxito la colaboración entre el área de educación física y matemáticas. Estas estrategias fueron llevadas a cabo en una escuela de primaria pública urbana de Estados Unidos entre un maestro de educación física y dos maestros de matemáticas. Son las siguientes:

- Desarrollar el interés colaborativo entre los educadores: algo útil puede ser invitar a otro profesores a ver las sesiones de educación física y que observen que actividades pueden ser potencialmente útiles para integrar conceptos matemáticos en dichas actividades sin descuidar la acción motriz.
- Programar reuniones una vez a la semana entre los maestros del proyecto.
- Incluir objetivos tanto del área de matemáticas como de educación física en las programaciones semanales o diarias.
- Ser persistente y resaltar el logro de los estudiantes, mediante proyectos duraderos, que den tiempo a adaptarse.
- Ser consciente de los beneficios de incluir las matemáticas en las sesiones de educación física, en aspectos como la motivación, la aplicación de contenidos en otros contextos y el uso de otros métodos de trabajo, poniendo en juego otras estrategias de aprendizaje más eficaces.

Wade (2016) afirma que el reto no está en que los docentes presenten proyectos interdisciplinares dentro de sus programas anuales, sino más bien en que estos docentes además sean capaces de hacerlo sin sacrificar los aspectos relativos a la acción motriz que tan importante es para la salud y que es la que debe sostener un buen programa de educación física. Para ello nos presenta una propuesta llamada *"Maths & Movements"*. Este proyecto permite al alumnado trabajar las matemáticas al mismo tiempo que se realizan estiramientos,

ISBN 978-84-945722-3-4

movimientos transversales o yoga. Para llevarlo a cabo se emplea material como alfombras y tapices muy coloridos donde el alumnado tiene la oportunidad de gatear, saltar, bailar y caminar a medida que van aprendiendo, utilizando diferentes canales para recibir la información: kinestésico, auditivo, motor, visual (Koontz, 2010).

El programa de Wade (2016) en su origen fue pensado para el espacio físico del aula pero posteriormente se adaptó a las sesiones de educación física. En el proyecto es usada una técnica llamada *"whisper/loud movements"* que consiste en dominar el conteo de los pasos a la vez que incorporamos movimientos transversales. Los movimientos transversales ayudan al funcionamiento del cerebro, activando más vías neuronales, lo que mejora el aprendizaje y la memoria (Malm, 2008).

Veamos con detalle un ejemplo práctico de esta técnica, mediante el lanzamiento de balón a una mano. Para ello se desglosa la técnica necesaria en tantos pasos como se considere, por ejemplo en seis pasos. Cada paso será trabajado individualmente hasta que sea superado, y en ese momento el alumno o la alumna susurrará (*whisper*) el número que corresponda, por ejemplo el número "uno". Así se hará con todos los pasos, y cuando se produzca el lanzamiento se gritará en alto "seis" (*loud*) y así se comprueba que se han cubierto los seis pasos necesarios para el lanzamiento de balón a una mano. Para seguir trabajando este ejercicio se repetirá hasta un tope, por ejemplo el número 30, sabiendo que en cada múltiplo de 6 se deberá realizar un lanzamiento del balón, si no es realizado en un múltiplo de 6 significará que se habrá realizado mal la técnica.

En Hatch y Smith (2004) se menciona el proyecto de la *National Association of Sport and Physical Education* (NASPE, 1995) en 1995 estudiando el movimiento de los proyectiles y combinando las áreas de física, matemáticas y educación física en cursos que podrían ser los últimos de Primaria o primeros de Secundaria en España. Sería un trabajo por proyectos, analizando en cada asignatura la parte correspondiente. En matemáticas se estudiarían las ecuaciones de segundo grado que aparecen involucradas, y en educación física las técnicas de lanzamiento de pista y campo, incluyendo la biomecánica involucrada en un tiro. Los autores concluyen que "a través del plan de estudios integrado, los estudiantes obtienen una comprensión de la conexión entre la educación física y las otras disciplinas y la ven como una parte integral del plan de estudios de la escuela" (Greg, Hatch y Smith, 2004, p. 50).

ISBN 978-84-945722-3-4

Graham, Holt-Hale y Parker (2001) y Pangrazi (2000) señalan que una de las posibles dificultades para la interacción entre los docentes de educación física y el resto de los participantes en el proyecto es la diferencia de los espacios, ya que los docentes de educación física suelen impartir sus clases en lugares diferentes del aula. Otro problema posible radica en que los contenidos que pueden ser integrados no siempre son evidentes.

Además, encontramos diversos autores que afirman que la educación física favorece aspectos matemáticos como la toma de decisiones acerca de medidas y distancias en el contexto del juego, registro de resultados y cálculo de porcentajes de acierto tanto individual como grupal en acciones deportiva, el cálculo de la frecuencia cardiaca y posteriores actividades a partir de los resultados obtenidos. Respecto a esto son reseñables las contribuciones de Gómez Rijo et al. (2008), López Pacheco (2010) o Sierra-Arizmendiarreta, Méndez-Giménez y Mañana-Rodríguez (2012).

Conclusiones

El estudio de los trabajos nos da una perspectiva de cómo se está abordando la integración de competencias entre dos materias a priori dispares como matemáticas y educación física. Hemos constatado a nivel internacional la existencia de problemas similares a los que se dan en España a la hora de coordinar al profesorado y de definir con claridad los objetivos. Las propuestas que se han analizado nos servirán como base para definir una innovación educativa que integre contenidos de ambas materias de manera recíproca y que pretendemos aplicar en un aula de Primaria de España.

Referencias bibliográficas

Barrachina Peris, J., & Blasco Mira, J.E. (2012). Análisis del desarrollo de las competencias básicas en el currículum de la Educación Física en la ESO en la Marina Baixa. Un estudio de caso. *Apuntes. Educación Física y Deportes* (110), 36-44.

Buchanan, A., Martin, E., Childress, R., Howard, C., Williams, L., Bedsole, B., & Ferry, M. (2002). Integrating elementary Physical Education and Science: a cooperative problem-solving approach. *Journal of Physical Education, Recreation & Dance,* 73, 31-36.

Caballero, J.A. (2013). La contribución del área de Educación Física a las competencias básicas: opinión de los docentes. *EmásF: Revista Digital de Educación Física*, 21, 41-58.

Cone, T.P., Werner, P., Cone, S.L., & Woods, A.M. (1998). *Interdisciplinary teaching through physical education.* Champaign, IL: Human Kinetics.

Cone, T. P., Werner, P., & Cone, S. L. (2009). *Interdisciplinary elementary physical education* (2nd ed.). Champaign, IL: Human Kinetics.

DeFrancesco, C. & Casas, B. (2004). Elementary physical education and math skill devolpment. *Strategie*s, 18, 21-23.

Gardner, H. (1983). *Frames of the mind: The theory of multiple intelligences.*New York: Basic Books.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gómez Rijo, A., Díez Rivera, L.J., Fernández Cabrera, J.M., Gorrín González, A., Pacheco Lara, J.J., & Sosa Álvarez, G. (2008). Nueva propuesta curricular para el área de Educación Física en la Educación Primaria. *Revista Internacional de Medicina y Ciencias de la Actividad Física y el Deporte*, 8(29), 93-108.

Graham, G.M., Holt-Hale, S.A., & Parker, M.A. (2001). *Children Moving: a reflective approach to teaching physical education* (5th ed.). Mountain View, CA: Mayfield.

Graham, G.M., Holt-Hale, S.A., & Parker, M.A. (2009). *Children moving* (8th ed.). Columbus, OH: McGraw-Hill.

Hatch, G.M. & Smith, D.R. (2004). Integrating Physical Education, Math, and Physics, *Journal of Physical Education*, *Recreation & Dance*, 75 (1), 42-50.

Hortigüela, D. (2014). *Estudio sobre el proceso de implantación y seguimiento de las competencias básicas en los centros educativos de Educación Secundaria de la ciudad de Burgos. Análisis desde la perspectiva de los equipos directivos y los docentes de educación física*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Burgos.

Hortigüela, D., Abella, V., & Pérez Pueyo, A. (2014). ¿Trabajamos para evaluar las Competencias Básicas? Estudio de la percepción del profesorado sobre la implantación en los centros educativos. *REVALUE*, 3(1).

Kitchen, D. & Kitchen, J.K. (2013). Integrating Physical Education and Mathematics. A collaborative approach to student learning. *Strategies*, 26, 31-38.

Koontz, S. (2010). *Math & Movement training manual for elementary schools.* Ithaca, NY: Suzanne Kuntz.

López Pacheco, J. (2010). Contribución de la Educación Física a la adquisición de las competencias básicas en Bachillerato. *EmásF:Revista Digital de Educación Física,* (6), 36-46.

Malm, D. (2008). Get your students more "prepared" for learning by obtaining the full benefit from movement activities. *VAHPERD Journal*, 29(3), 36.

Martínez Seijas, M.P. & Barreiro García, J.S. (2003) *Sportdoc*. Disponible en http://www.sportsciences.com/sportdoc/Detalle/427.html

Méndez-Alonso, D., Méndez-Giménez, A., & Fernández-Río, J. (2016). Incorporación de las competencias básicas a la educación física en educación primaria. *Revista Internacional de Medicina y Ciencias de la Actividad Física y el Deporte*, 16 (62), 457-473.

Méndez-Giménez, A., López-Telléz, G., & Sierra-Arizmendiarreta, B. (2009). Competencias básicas: sobre la exclusión de la competencia motriz y las aportaciones desde la Educación Física. *Retos. Nuevas tendencias en Educación Física, Deporte y Recreación*, 16, 51-57.

Molina Alventosa, J.P & Antolín Jimeno, L. (2008). Las competencias básicas en Educación Física: Una valoración crítica. *Cultura, Ciencia y Deporte*, 8, 81-86. Disponible en http://ccd.ucam.edu/index.php/revista/article/view/200

Monarca, H. & Rappoport, S. (2013). Investigación sobre los procesos de cambio educativo: El caso de las competencias básicas en España. *Revista de Educación*, Núm. Extraordinario, 54-78.

National Association for Sport and Physical Education, NASPE (1995). *Moving into the future: National physical education standards: A guide to content and assessment*. Reston, VA:NASPE.

Pangrazi, R. (2000). *Dynamic physical education for elementary school children* (13th ed.). San Francisco, CA: Benjaming Cummings.

ISBN 978-84-945722-3-4

Placek, J. (1996). *Integration as a curriculum model. Student learning in physical education: Applying research to enhance instruction*. Champaign, IL: Human Kinetics.
Rauschenbach, J. (1996). Tying it all together integrating Physical Education and other subject areas. *Journal of Physical Education, Recreation & Dance*, 67, 49-51.
Ruiz Pérez, L.M. (2004). Competencia motriz, problemas de coordinación y deporte. *Revista de Educación*, 335, 21-33.
Siedentop, D., Hastie, H., & Van der Mars, H. (2004). *Complete Guide to Sport Education*. Champaign, IL: Human Kinetics.
Sierra-Arizmendiarrieta, B., Méndez-Giménez, A., & Mañana-Rodríguez, J. (2012). Necesidad y propuesta de un procedimiento para programar por Competencias Básicas. *Aula Abierta*, 40(3), 33-46.
Wade, M. (2016) Math and Movement: Practical Ways to Incorporate Math Into Physical Education. *Strategies*, 29 (1), 10-15.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-826

OS JESUÍTAS E O ENSINO DE ARITMÉTICA NO SUL DO BRASIL NOS SÉCULOS XIX E XX

Dr. Silvio Luiz Martins Britto – Dr. Arno Bayer

silvio@dorothea.com.br – bayer@ulbra.com

Faccat, Centro Sinodal Dorothea Schäfke -Taquara/RS/Brasil – ULBRA/Canoas/RS/Brasil
Núcleo temático: Aspectos Socioculturais da Educação Matemática
Modalidade: Comunicação Breve – CB
Nível educativo: Não específico
Palavras-chave: Pesquisa Histórica, Ginásio Conceição, Jesuítas, Ensino da Matemática.

Resumo
O artigo é um recorte da tese de doutorado sobre o ensino da Aritmética no Ginásio Nª Sª da Conceição, em São Leopoldo-RS, no século XIX e início do século XX, nas comunidades de imigração alemã. Por meio de um estudo qualitativo e documental, investigou-se como a Aritmética era ensinada nesse Ginásio dos jesuítas. Analisou-se um artigo do padre, Pedro Browe S.J[12]., professor do Ginásio, em que ele analisa, criticamente, o ensino da Matemática no curso ginasial no Brasil, fazendo comparações com outros países. Estudaram-se livros de Aritmética utilizados no Ginásio Conceição de autoria de padres jesuítas, professores desse educandário. Os livros analisados apresentam parte teórica e prática. Inicialmente, os livros focam as demonstrações e os critérios para a sua compreensão, seguido de exercícios e situações-problemas, voltados ao dia a dia dos alunos. Assim, com esta investigação, pretende-se contribuir para a compreensão do processo histórico de ensino e de aprendizagem da Aritmética no Rio Grande do Sul.

Introdução

Segundo Rabuske (1988), a cidade de São Leopoldo, ao longo dos anos, constitui-se em um importante centro de colégios da região. A fama de vários deles tem seu início na segunda metade do século passado. As suas origens e seu sustento foram, exclusivamente, da iniciativa particular. Segundo o autor, um dos mais tradicionais foi o Ginásio Nossa Senhora da Conceição, dirigido por jesuítas alemães. O objetivo inicial da escola era a

[12] S.J. é o distintivo da ordem, Societas Jesus. Societas→ Companhia de Jesus, são da companhia de Jesus, nome da ordem em Português. (LEITE, 2005).

ISBN 978-84-945722-3-4

formação de padres e professores para as colônias de imigrantes alemães em cidades próximas a São Leopoldo, visto que essas comunidades eram atendidas por padres jesuítas alemães.

Partindo-se de uma investigação documental, identificaram-se os relatórios anuais do Ginásio, a sua rotina diária, cursos e conteúdos ministrados. No campo da Aritmética, foi possível identificar os conteúdos trabalhados em cada ano e os livros didáticos e seus autores, observando-se uma forte tendência para autores locais, comprovado através dessas obras.

A partir de um artigo, publicado no relatório anual do ano de 1906, escrito pelo Pe. Pedro Browe S.J, destaca-se a opinião do autor em relação ao ensino da Matemática no Brasil. No texto do padre, evidencia-se a importância dessa disciplina, indispensável na formação do homem, e uma inquietude em relação ao tempo em que esses conteúdos previstos no programa oficial devem ser ministrados. O autor expressa claramente, através dos programas de outros países, a sua discordância quanto a esse curto período de tempo destinado, no Brasil, à aplicabilidade do conteúdo matemático, já que os mesmos conteúdos são ministrados em um espaço de tempo maior em outros países.

Para abordar o contexto da Matemática trabalhada no Ginásio, analisaram-se alguns conteúdos abordados no Livro “Ensino de Arithmetica Parte Teórica e Prática”, de Luiz Schuler S.J e Pedro Browe S.J, para o primeiro e o segundo ano ginasial, destacando os conteúdos trabalhados e as estratégias utilizadas pelos autores na apresentação dos conteúdos.

O Ginásio Nossa Senhora da Conceição

O Ginásio Nossa Senhora da Conceição foi, segundo Leite (2005), o grande gerador da formação dos jesuítas no sul do Brasil, com professores extremamente qualificados. Essa escola tornou-se, por um grande período, no final do século XIX e início do século XX, o grande precursor da pedagogia jesuítica no sul do Brasil. Era nessa escola que os estudantes vivenciavam essa experiência de ensino e, na sequência, multiplicariam, em outros colégios, o ensino recebido, tornando-se a grande matriz geradora de educadores para os jesuítas no sul do Brasil, formando educadores extremamente qualificados para suas escolas e seminários.

ISBN 978-84-945722-3-4

No início, o programa pedagógico dessa escola priorizava, com certa nitidez, a tendência a uma educação religiosa e cristã, alicerçado na *Ratio Studiorum*[13]. Tanto na ordem doméstica, quanto na prática do colégio, mostrava-se isso em toda parte.

De acordo com Rabuske (1988), pouco ou nada se sabe sobre a estruturação curricular do Colégio Conceição em seus anos iniciais. Segundo Bohnen e Ullmann (1989), há um documento elaborado para o reconhecimento oficial do colégio cujo cabeçalho indica tratar de um mapa das matérias ensinadas em 1869. Nesse material, observam-se: Língua Portuguesa, Francesa, Alemã, Inglesa, Latina, Grega e Tupi; e Cosmografia, Geografia Geral, Corografia do Brasil, História Geral, História do Brasil, Retórica e Poética, Literatura Portuguesa e Brasileira, Filosofia, Matemáticas Elementares, Elementos de Ciências Naturais, Desenho, Música e Ginástica.

Já no ano de 1898, começam a aparecer, de forma mais específica, relatórios anuais do Colégio Conceição. Esses documentos eram impressos ao término do ano letivo. Neles eram destacados os objetivos da escola, matérias de ensino, carga horária semanal e cursos oferecidos pela escola. No ano de 1900, o Colégio Conceição obteve o caráter e os direitos de Ginásio equiparado. Com a equiparação, o Colégio Conceição obteve não apenas o direito de efetuar os exames parcelados, como ainda conferir o grau de bacharel a seus alunos.

Livros didáticos adotados para os anos letivos de 1901 a 1906 e seus cursos

Segundo relatórios anuais, no campo da Matemática, notou-se, conforme os relatórios, os livros utilizados pelo curso durante o período de seis anos. Verificou-se que o ginásio seguia a rigor as matérias apontadas no programa oficial na ordem e seriação exigida. Porém, vale ressaltar a escolha em relação aos livros de Matemática utilizados pelos seus professores, priorizando autores locais, como Pedro Browe S.J e Luiz Schuler S.J.

Nesta investigação, que prima pela Educação Matemática, destacam-se as produções destinadas, especificamente, ao campo da Aritmética, entre elas o livro de Arithmetica - Parte Teórica por Luiz Schuller S.J e Parte Prática compilada por Pedro Browe S.J, ambos padres jesuítas. Conforme Leite (2005), o Padre Pedro foi um dos pioneiros do ensino da Matemática

[13] A palavra *Ratio* em latim possui várias acepções, sendo a mais conhecida "razão". Porém, a acepção mais apropriada é a de "ordem", no sentido de organização e sistematização. O *Ratio Studiorum* é, pois, a sistematização, a organização e o método de estudos dos Colégios e Universidades da Companhia de Jesus.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

no Rio Grande do Sul, publicando diversos livros didáticos de Matemática. Além disso, o Padre Pedro foi o precursor no Estado sobre Didática da Matemática, sendo um dos primeiros responsáveis pelos estudos realizados no Rio Grande do Sul sobre o ensino de Aritmética no curso secundário.

Análise do artigo do Pe. Pedro Browe, em relação ao ensino da Matemática no Ensino secundário no Brasil

No ano de 1906, no relatório anual do ginásio, apresenta-se um artigo referente ao ensino da Matemática no curso Ginasial, descrito pelo Padre Pedro Browe S.J em relação ao ensino de Matemática. Nesse artigo, o autor faz referência aos reais objetivos do ensino da Matemática e suas contribuições, apresentando essa área do conhecimento bastante apropriada para desenvolver, nos discípulos, o raciocínio, a autonomia e a razão. De acordo com Browe:

> O fim próximo que visa o ensino da mathemática, como parte do curso gymnasial é subministar ao discípulo aquelle conhecimento da matéria que é indispensável ao homem bem preparado. Com este fim tem relação mais directa o que se ensina. E como, porém, visará alvo mais elevado, uma como formação e educação das faculdades, da intelligencia não menos que da vontade. Não ser o programma official alheio a estas vistas ideas manifesta-o claramente, chamando o ensino mathematico "um poderoso meio de cultura mental tendente a desenvolver a faculdade do raciocínio". Que tão alto fim possa ser atingido, ahi está a prática de todos os dias a confirmal-o. (Browe, 1906, p.7).

Portanto, segundo o autor, essa ciência visa desenvolver o raciocínio, ressaltando, por isso, a importância da prática da Matemática diária. O padre segue, em seu artigo, declarando que:

> E não admira. Pois pelo rigor de sua estructura systemática em geral e de suas deduções lógicas em particular, é este ramo do ensino summamente apropriado para desenvolver a intelligencia e a razão. Deslindar constantemente o que já foi provado do que ainda está por provar, necessariamente dara ao raciocínio um alto gráo de precisão, excluindo por completo o diffuso dos argumentos e o vago das repetições. Não há encobrir, com phrases mal entendidas e ocas de sentido, a falta de conhecimentos claros e sólidos. Alem disto a applicação continua de theoria á solução individual de problemas praticos, acabará por desenvolver uma certa autonomia espiritual que, não contente com a reproducção fiel do arrazoado alheio, fa-lo-á passar por um exame crítico, substituindo-o quiçá por outro mais fundamentado.A constancia e energia do esforço que tão methodo impõe á vontade juvenil, não pode deixar de educar e robustecer nella a ação perseverante e conscienciosa.
> Resumindo o que acabamos de esboçar afigura-se-nos como objectivo do ensino mathematico:
> a) A reflexão logicamente correta e nítida.
> b) A autonomia do trabalho mental.
> (Browe, 1906, pp.7-8).

ISBN 978-84-945722-3-4

O autor defende a ideia da relação contínua da teoria com situações de problemas práticos, favorecendo o desenvolvimento da autonomia dos discípulos. Dessa forma, evitar-se-á a simples reprodução mecânica, favorecendo o exercício de uma criticidade e fundamentação da teoria aplicada.

Observa-se uma inquietude do autor em relação ao ensino de Matemática ministrado pelo programa oficial, pois, para Browe, aos alunos dos anos inferiores, caberia um ensino mais prático, devido à dificuldade de abstração, uma vez que esses necessitam de atividades práticas e contextualizadas. Já aos educandos dos anos finais, que apresentam maior capacidade de abstração, é possível uma exigência mais aprofundada dos conteúdos, visto que eles já apresentam um conhecimento intelectual mais desenvolvido

O autor defende a ideia de que o ensino não pode ser limitado apenas à decoreba. É importante que o aluno, efetivamente, demonstre o que entendeu e como chegou a tal resultado. Esse sucesso matemático é alcançado a partir de um esforço individual e independente, não simplesmente reproduzindo a demonstração de tal teorema, mas compreendendo as diferentes etapas do processo.

Segundo o autor, cabe ao professor, ao ministrar os conteúdos, dar ênfase àqueles que conduzem o aluno a encontrar os resultados, tornando-o, assim, autor das metas, ou seja, produtor do seu conhecimento. As aplicações práticas e quotidianas facilitam a compreensão e o entendimento do discente possibilitando que alcance as metas estabelecidas. Vale ressaltar que a metodologia utilizada pelo professor contribui para despertar e aguçar no aluno o desejo de alcançar o conhecimento matemático. Diante disso, o autor destaca também que:

> Com o interesse que assim se despertar, ganhara também a comprehensão theorica em firmeza e profundez. Com efeito, não se terá idéia do valor e do âmbito de muitas formulas e theoremas sem múltiplas e variadas applicações. Haverá outro meio, para dar ao discípulo o conceito nítido v. g. da posição central do theorema de Pythagoras? Tão pouco, que sem esta comprehensão, chega até a ser refractario a uma prova consciente. Eis ahi a theoria fiscalisada pela pratica. Elimine-se, portanto, quando não admittir applicação pratica, quer por sua natureza, quer pela pouca idade do alumno. (Browe, 1906, p.11).

Um exemplo destacado no artigo trata-se do ensino de trigonometria. Não raro, segundo o autor, esse conteúdo matemático é centrado, inicialmente, em definições e fórmulas, o que pode tornar o aluno apático e sem interesses pelo assunto a ser desenvolvido.

ISBN 978-84-945722-3-4

O autor propõe, por isso, um ensino voltado à prática de exemplos contextualizados, uma vez que, a partir de situações práticas, o aluno compreenderá a teoria.

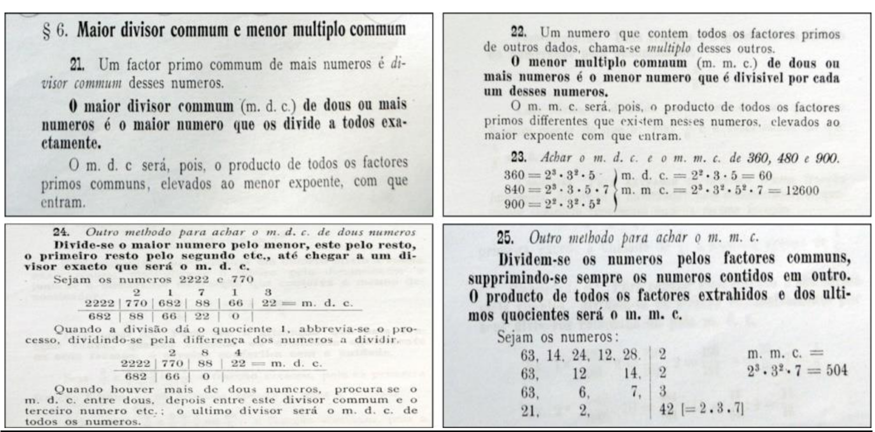
Na sequência, segue o relato do autor em relação aos conteúdos trabalhados no curso ginasial. Para o autor, o programa de Matemática oficial vigente apresenta um excesso de conteúdos, não privilegiando um tempo maior para refletir a sua real aplicabilidade em sala de aula, priorizando um conhecimento não alicerçado em situações completas e aplicáveis.

Análise dos livros de Aritmética utilizados no Conceição

Nos registros dos relatórios do Ginásio Nossa Senhora da Conceição, identificou-se o livro Arithmetica (Parte Teórica por Luiz Schuller e Parte Prática por Pedro Browe). O livro encontra-se dividido em oito capítulos (parte teórica) abordando os seguintes conteúdos: números inteiros, frações, potências e raízes, medidas, razões e proporções, aplicações das proporções, progressões e logaritmos. Em todos os itens, o autor, inicialmente, apresenta a sua definição e, posteriormente, apresenta exemplos práticos, identificando a sua utilização.

Em diversos momentos, o autor utiliza-se de mais de uma possibilidade para apresentar o conteúdo. Isso ficou evidenciado no capítulo inicial, ao introduz o maior divisor comum e o menor múltiplo comum. Além de definir de forma clara os dois tópicos abordados, o autor recorre a dois modos distintos de encontrar o seu resultado final.

Figura 1- m.m.c e m.d.c de dois ou mais números.



§ 6. **Maior divisor commum e menor multiplo commum**

21. Um factor primo commum de mais numeros é *divisor commum* desses numeros.

O maior divisor commum (m. d. c.) **de dous ou mais numeros é o maior numero que os divide a todos exactamente.**

O m. d. c será, pois, o producto de todos os factores primos communs, elevados ao menor expoente, com que entram.

22. Um numero que contem todos os factores primos de outros dados, chama-se *multiplo* desses outros.

O menor multiplo commum (m. m. c.) **de dous ou mais numeros é o menor numero que é divisivel por cada um desses numeros.**

O m. m. c. será, pois, o producto de todos os factores primos differentes que existem nesses numeros, elevados ao maior expoente com que entram.

23. *Achar o m. d. c. e o m. m. c. de 360, 480 e 900.*

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

m. d. c. $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
m. m c. $= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 12600$

24. *Outro methodo para achar o m. d. c. de dous numeros*

Divide-se o maior numero pelo menor, este pelo resto, o primeiro resto pelo segundo etc., até chegar a um divisor exacto que será o m. d. c.

Sejam os numeros 2222 e 770

	2	1	7	1	3
2222	770	682	88	66	22 = m. d. c.
682	88	66	22	0	

Quando a divisão dá o quociente 1, abbrevia-se o processo, dividindo-se pela differença dos numeros a dividir.

	2	8	4
2222	770	88	22 = m. d. c.
682	66	0	

Quando houver mais de dous numeros, procura se o m. d. c. entre dous, depois entre este divisor commum e o terceiro numero etc.; o ultimo divisor será o m. d. c. de todos os numeros.

25. *Outro methodo para achar o m. m. c.*

Dividem-se os numeros pelos factores communs, supprimindo-se sempre os numeros contidos em outro. O producto de todos os factores extrahidos e dos ultimos quocientes será o m. m. c.

Sejam os numeros:

63, 14, 24, 12, 28.	2
63, 12 14,	2
63, 6, 7,	3
21, 2,	42 [= 2 . 3 . 7]

m. m. c. = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$

Fonte: Schuler e Browe (1904, p.10).

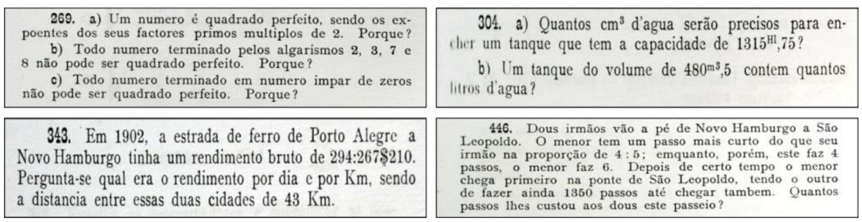
ISBN 978-84-945722-3-4

Observa-se a preocupação do autor em apresentar aos discípulos diferentes caminhos para a compreensão do conteúdo, exemplificando criteriosamente a sua obtenção.

Ao término da parte teórica, elaborado por. Luiz Schuler S.J, segue a parte prática, compilada por Pedro Browe S.J. Na análise desse material, destaca-se que o autor recorre, em sua grande maioria, a um grande número de exercícios a serem desenvolvidos pelo aluno. Conforme o autor, para atingir os objetivos estabelecidos, era necessário que as atividades fossem praticadas através de muito treino e de forma contínua, contribuindo, assim, para a sua fixação.

Ao término de cada capítulo, o autor recorre a situações-problemas, contextualizando os conteúdos trabalhados. Dessa forma, de acordo com o autor, o aluno compreenderá a teoria, pois ela pouco contribuirá com longas demonstrações se os alunos não tiverem a oportunidade de confrontá-la com situações práticas relacionadas ao seu dia a dia.

Figura 2 - Exemplos de problemas, segundo Browe.


269. a) Um numero é quadrado perfeito, sendo os expoentes dos seus factores primos multiplos de 2. Porque?
b) Todo numero terminado pelos algarismos 2, 3, 7 e 8 não pode ser quadrado perfeito. Porque?
c) Todo numero terminado em numero impar de zeros não pode ser quadrado perfeito. Porque?

304. a) Quantos cm^3 d'agua serão precisos para encher um tanque que tem a capacidade de $1315^{Hl},75$?
b) Um tanque do volume de $480^{m^3},5$ contem quantos litros d'agua?

343. Em 1902, a estrada de ferro de Porto Alegre a Novo Hamburgo tinha um rendimento bruto de 294:267$210. Pergunta-se qual era o rendimento por dia e por Km, sendo a distancia entre essas duas cidades de 43 Km.

446. Dous irmãos vão a pé de Novo Hamburgo a São Leopoldo. O menor tem um passo mais curto do que seu irmão na proporção de 4 : 5; emquanto, porém, este faz 4 passos, o menor faz 6. Depois de certo tempo o menor chega primeiro na ponte de São Leopoldo, tendo o outro de fazer ainda 1350 passos até chegar tambem. Quantos passos lhes custou aos dous este passeio?

Fonte: Schuler e Browe (1904, pp. 135, 152,2 69, 304).

Portanto, pode-se concluir que o autor recorre com frequência a situações- problemas destacando a realidade dos alunos, pontuando aspectos locais. Essa prática é observada por A.B.R. Rambo (2013) quando se refere às escolas paroquiais. Segundo o autor, no último decênio do século XIX, essas escolas deixam de utilizar livros provenientes da Alemanha e passam a elaborar as matérias contemplando a realidade local.

Considerações Finais

O surgimento de um Colégio dos Jesuítas e, posteriormente, Ginásio contribuiu fortemente para consolidar o trabalho desenvolvido pela Ordem nessa região do Estado do Rio Grande do Sul, principalmente no campo da educação. Norteado pela fé católica, o colégio alcançou grandes resultados ao longo dos seus 43 anos de existência. Verificou-se que o Ginásio Conceição obteve resultados animadores através das atividades pedagógicas

ISBN 978-84-945722-3-4

desenvolvidas, constatado através dos resultados obtidos pelos seus alunos nos exames parcelados. Esse fato deve-se ao trabalho dos jesuítas e a sua formação.

Em relação ao ensino da Matemática, Pedro Browe, em seu artigo, critica o ensino de Matemática no Brasil. Em sua opinião, em quatro anos, não é possível trabalhar os conteúdos previstos no programa devido ao curto tempo. Como consequência, o aluno não fixará esses conteúdos, acarretando, em sua grande maioria, um desamor pela ciência dos números.

A partir do estudo realizado, registra-se que a Matemática presente nos livros analisados estava centrada no ensino de Aritmética e nas estratégias utilizadas pelos autores na apresentação desses conteúdos. Na parte prática, observa-se a insistência do autor, através de regras e exemplos. Na parte prática, nota-se um elevado número de exercícios de repetição e de memorização. Acrescenta-se, ainda, que os problemas ministrados envolviam a realidade dos alunos, contextualizando os conteúdos estudados. Essa tendência pode estar relacionada ao fato do Ginásio priorizar autores locais em relação aos livros utilizados.

Essa breve contribuição para a Educação Matemática ressalta a Matemática trabalhada no Ginásio através dos materiais coletados. E, assim, ao mostrar o trabalho desenvolvido pelos jesuítas no Rio Grande do Sul, pode-se estabelecer comparações entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente. Dessa forma, o educador atual, certamente, tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis à aprendizagem do aluno, diante do conhecimento histórico matemático.

REFERÊNCIAS

Bohnen, A., & Ullmann, R.A. (1989). *A Atividade dos Jesuítas de São Leopoldo***.** São Leopoldo: UNISINOS.

Browe, P. (1906). *A mathematica no curso gymnasial. Relatório do Gymnasio Nª. Sª. da Conceição*. Porto Alegre: Typographia do Centro.

Leite, L. O. (2005). *Jesuítas cientistas no sul do Brasil*. São Leopoldo: UNISINOS.

Rabuske, A. (1988). *A Estrela do Conceição Leopoldense de 1869 a 1879*. São Leopoldo: UNISINOS.

Relatórios do Gymnasio Nª. Sª. da Conceição. (1904-1911). Porto Alegre: Typographia do Centro.

ISBN 978-84-945722-3-4

Schuler, L., & Browe, P. (1904). *Ensino de Arithmetica Parte Teórica e Parte Prática*. Porto Alegre: Selbach & Mayer.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-827

¿TIENEN FORMA LAS SUMAS? UNA PROPUESTA DE INTEGRACIÓN DE MATEMÁTICAS Y ARTE EN PRIMÁRIA

Montserrat Torra – Joan Jareño - Ester Forné – Neus Suriñac
mtorra@axtec.cat – jjareno@xtec.cat – eforne@xtec.cat – nsurinac@xtec.cat
CESIRE (ámbitos de matemáticas y educación artística) – Escola Bogatell

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario (6 a 11 años)
Palabras clave: Interdisciplinariedad, Arte, Cálculo

Resumen

Es importante precisar qué condiciones debería reunir una propuesta para considerar que promueve realmente la integración de conocimientos de más de un área. Para identificar algunas de estas condiciones y ayudar a diseñar actividades con este objetivo, en el CESIRE hemos trabajado en el diseño y monitorización de una actividad que trata de integrar matemáticas y arte. Mostraremos el proceso seguido en la programación de esta actividad, en su implentenación en el aula y los resultados obtenidos. Señalaremos también los aspectos que consideramos determinantes para identificar si una propuesta favorece o no la integración de contenidos de diferentes áreas.

A modo de introducción…

Actualmente está suficientemente contrastado que establecer conexiones entre diferentes tipos de conocimientos favorece el aprendizaje. Por otro lado sabemos que el trabajo en contexto conlleva, casi siempre, el establecimiento de relaciones entre contenidos de áreas distintas. Sin embargo, a menudo encontramos ejemplos de situaciones de aprendizaje en las que, a pesar de trabajar conjuntamente diferentes áreas, no se consigue suficientemente integrar los conocimientos y aprender contenidos de todas ellas. Lo más habitual es centrar el aprendizaje en una determinada área y utilizar contenidos de otras como auxiliares, sin tener como objetivo provocar también aprendizaje en ellas. Es habitual que las matemáticas se encuentren en el grupo de las áreas que solo tienen una función auxiliar. Se usan para contar, medir o describir formas en un contexto no matemático, pero no se pretende introducir conocimiento nuevo ni hacer progresar los contenidos conocidos. Simplemente se aplica lo ya aprendido, potenciando, de forma colateral, una visión sesgada de las matemáticas hacia su uso meramente instrumental. Algo parecido ocurre con las áreas del ámbito artístico: música y visual y plástica en las que, en el mejor de los casos, se complementa el contenido con una canción o una representación a través del dibujo.

En el CESIRE (Centre de Recursos Pedagògics Específics de Suport a l'Educació i la Recerca Educativa, una unidad del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya) estamos interesados en encontrar formas de avanzar hacia tareas en las que intervengan y se relacionen conocimientos de distintas áreas, y se produzca aprendizaje en todas y cada una de ellas. Y no solo eso, sino también que, al finalizar el proyecto, los alumnos sean conscientes del papel que han jugado las distintas áreas en el desarrollo y resolución de la tarea.

Con el objetivo de dar a conocer prácticas sobre cómo integrar contenidos de distintos ámbitos en el aula, hemos trabajado en diversos frentes. El que describimos en el presente documento ha consistido en el diseño y monitorización de una propuesta integradora de conocimientos de matemáticas y arte, en el transcurso de la cual se aprendan claramente contenidos de las dos áreas, manteniendo las peculiaridades de cada una de ellas y sin supeditar la una a la otra.

Diseño de la propuesta

La experiencia presentada se está llevando a cabo, en el momento de la redacción de este documento, con 25 alumnos de 2º curso de primaria de l'Escola Bogatell, un centro de Barcelona del barrio del Poblenou. El hecho de que el centro esté situado en la zona de confluencia de zonas históricas del barrio con zonas absolutamente renovadas favorece la heterogeneidad del alumnado. La maestra que está implementándola es Neus Suriñach, participante también de la elaboración de esta comunicación. Los resultados y producciones de los alumnos se mostrarán durante la comunicación presencial.

ISBN 978-84-945722-3-4

Como precedente inspirador de la propuesta que se presenta tenemos un módulo del MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya) en el que se muestra el paraboloide hiperbólico que generan los resultados de los productos de los números enteros (Figura 1).

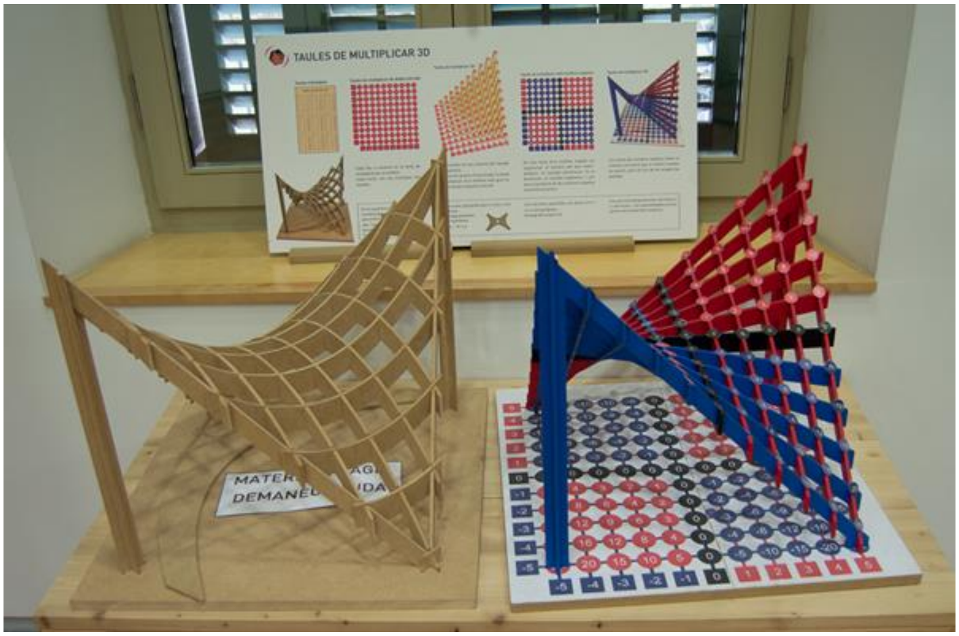


Figura 1. Paraboloide hiperbólico que representa el producto de enteros (MMACA)

El diseño empezó por pensar una pregunta y unos objetivos en que estuvieran presentes las matemáticas y la educación visual y plástica desde el inicio. La pregunta elegida fue: *¿Tiene forma la suma?* Se trata de una pregunta corta que contiene la palabra *suma*, en referencia al contenido matemático, y la palabra *forma*, que invita a pensar en la representación de la operación. Nos parece importante remarcar que la idea no surgió del alumnado sino que fue diseñada para conseguir que, después de este aprendizaje, los niños y niñas fueran capaces de:

- Comprender y sistematizar los resultados de las sumas de dos sumandos de números de una sola cifra.
- Mostrar más fluidez en la suma por la mejora de las estrategias de cálculo basadas en los patrones observados.
- Representar con lenguaje visual y plástico las regularidades que se dan al realizar sumas de dos sumandos de números de una sola cifra.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Valorar la contribución del lenguaje visual y plástico a la identificación de regularidades.
- Relacionar la experiencia realizada con elementos artísticos y matemáticos significativos en modelos de contemporaneidad artística.
- Planificar y realizar un proyecto artístico multidisciplinario.

Conscientes de que era posible que la interpretación de la pregunta por parte del alumnado nos llevara a realizar cambios, convinimos tener en consideración sus interpretaciones y, si fuera preciso, modificar la propuesta de actividades pero no los objetivos fijados, ya que el dominio de estos resultados es clave para el cálculo y una oportunidad muy valiosa para trabajar distintos aspectos del lenguaje visual y plástico.

A continuación planificamos las actividades empezando por la representación en forma de tabla de las sumas. Representar la tabla de sumar de los nueve primeros números (Tabla 1) es una primera forma de observar el orden que se quiere visualizar. Resulta fácil observar sobre ella algunas regularidades como:

- la existencia de distintas sumas con el mismo resultado.
- sumas con el mismo resultado y mismos sumandos aunque situados en distinto orden. (propiedad conmutativa).
- sumas de números repetidos.
- el 10 como resultado más repetido

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

ISBN 978-84-945722-3-4

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabla 1. Sumas de 1 a 9

En el caso de que los alumnos no dominen las tablas de doble entrada se pueden indicar la suma y el resultado en cada celda (7+8=15 en lugar de solo un 15)

Para facilitar y profundizar en la lectura de la tabla resulta muy útil el uso de estrategias. Con este objetivo se planificó el uso del lenguaje visual y plástico. Algunos conceptos como el volumen, el tono y la gama de los colores, así como también sus atribuciones psicológicas, pueden fusionarse con los conceptos del ámbito matemático para facilitar la visualización a los alumnos. Planificamos concretamente dos tipos de representación considerando el ámbito artístico: una basada en las relaciones que se establecen al representar en volumen las sumas de la tabla, la otra basada en el color. Cada representación se está trabajando con una mitad del grupo-clase y después se discutirán y contrastarán las producciones de ambos

Para la representación de las relaciones basadas en el volumen se planificó el uso de piezas de madera de color blanco y marrón preparadas para ser enhebradas con palillos de madera colocados sobre la tabla. La figura 2 es una muestra de cómo se pensó esta propuesta, que reduce intencionadamente a la mínima expresión el color con el objetivo de eliminar distractores y centrar toda la atención en el volumen.

ISBN 978-84-945722-3-4

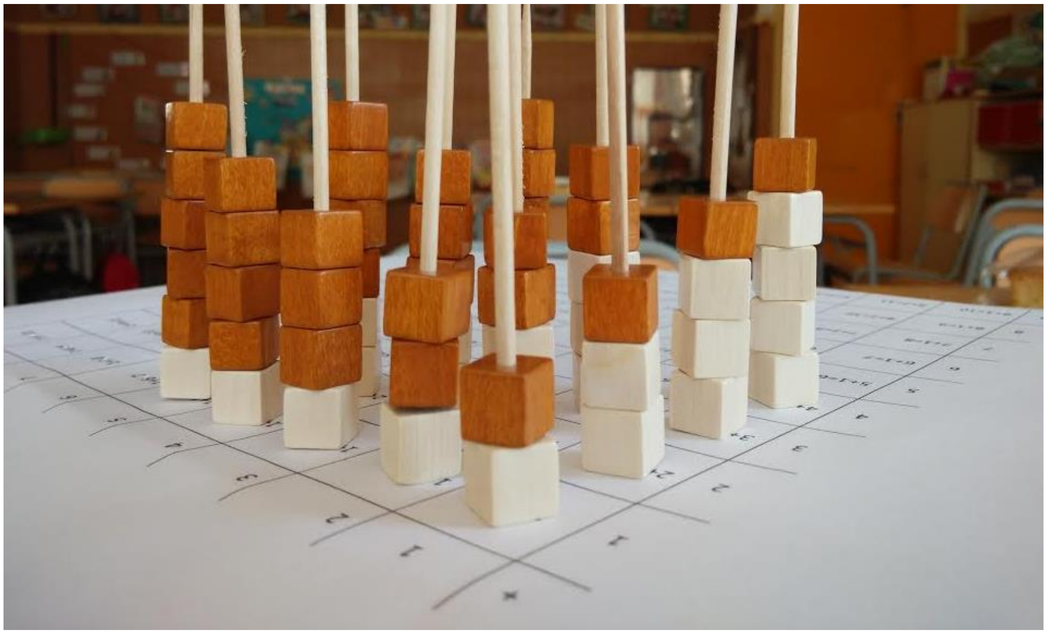


Figura 2. Tabla de suma en volumen

Para la representación basada en el color se pensó en resaltar que la creación de una tonalidad entre dos colores también es un proceso de adición, en este caso de pigmento. El trabajo con el color, nos podía llevar al estudio formal de éste y a tratar aspectos como:

- el tono o matiz que da el nombre específico e identificativo de cada color
- el valor o luminosidad de un color
- la percepción del color dependiendo de la iluminación, de la superficie que ocupa o de los colores que lo rodean.
- la armonía de colores o colores cercanos en el círculo cromático

Imaginamos una escala de color desde el amarillo pálido hasta el rojo para ayudar a ver la coincidencia de color entre distintos resultados y su distribución espacial, concentrando la atención en el color rojo en la diagonal para resaltar el resultado más repetido: 10 Un resultado clave en la construcción del cálculo. También se redujo la cantidad de resultados de la tabla (Tabla 2).

ISBN 978-84-945722-3-4

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1+1=2	1+2=3	1+3=4	1+4=5	1+5=6	1+6=7	1+7=8	1+8=9	1+9=10
2	2+1=3	2+2=4	2+3=5	2+4=6	2+5=7	2+6=8	2+7=9	2+8=10	
3	3+1=4	3+2=5	3+3=6	3+4=7	3+5=8	3+6=9	3+7=10		
4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8	4+5=9	4+6=10			
5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10				
6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10					
7	7+1=8	7+2=9	7+3=10						
8	8+1=9	8+2=10							
9	9+1=10								

Tabla 2. Sumas del 1 al 9 con gama de colores

El material sugerido para hacer la representación ha sido pinturas plásticas, soporte de papel de dibujo o cartulina y fotocopia de la tabla de las sumas. En ambas representaciones se ha optado por representar tan solo los resultados hasta 10 para hacer la propuesta más manejable.

Otra propuesta sobre la forma de los números

La propuesta que hemos presentado es la que se está experimentando. Otra propuesta que quedó “en cartera” fue la creación de formas artísticas a partir del estudio de todas las descomposiciones aditivas de números pequeños. Este problema, conocido como “el problema de las particiones” aumenta su complejidad de forma exponencial a mesura que aumenta el tamaño de los números, pero con cantidades pequeñas es perfectamente asumible al principio de la primaria y tiene el interés matemático de observar que no se haya olvidado ningún caso. En la figura 3 tenemos pequeñas composiciones con las siete particiones del cinco.

ISBN 978-84-945722-3-4

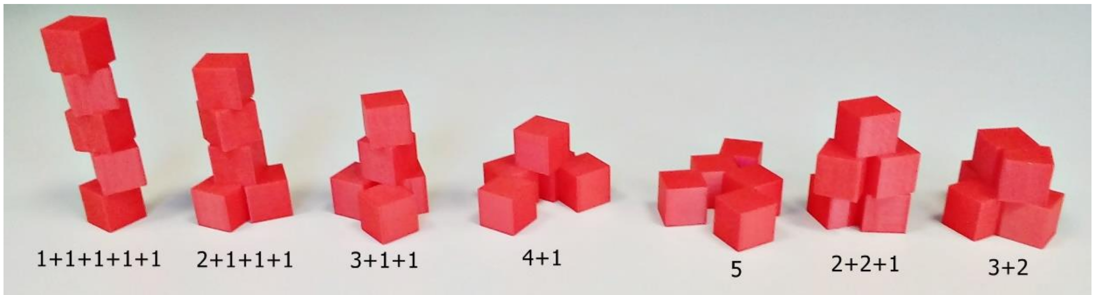


Figura 3. Particiones del 5

Algunas consideraciones finales

La propuesta comentada hasta aquí es la compartida de matemáticas y arte. Sin embargo creemos que después del trabajo conjunto hay que considerar algunos aspectos importantes:

- Hay que trabajar para que el alumnado valore que el resultado conseguido se debe a la colaboración de las dos áreas, no habría sido posible sin ella. Si remarcamos este hecho es para poner en valor estas situaciones que estamos convencidos que deberían aparecer con más frecuencia en las clases.
- Cada una de las dos áreas debe salir beneficiada de esta colaboración y volver al trabajo específico del área con un bagaje nuevo. En este sentido desde el área de matemáticas se puede aplicar el lenguaje plástico a otras representaciones. En el área visual y plástica, después de ceñir el uso del color y el volumen a una representación regular al servicio de la comprensión del contenido matemático, se prepararon actividades para profundizar más en los contenidos específicos del ámbito, dar a conocer referentes artísticos y culturales contemporáneos próximos a su realidad cotidiana para que resultasen significativos para los niños y niñas.

Por otro lado, llega un punto en el que el trabajo de cada ámbito puede tomar distintas vías para el desarrollo de los objetivos específicos de cada área. Una de las peculiaridades de trabajar a partir de cuestiones y problemas es la diversidad de respuestas para la resolución de las investigaciones, por lo que las propuestas de continuidad acostumbran a ser diversificadas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Partiendo de la pregunta inicial, *¿Tienen forma las sumas?*, y considerando el trabajo de la tabla de las sumas, el estudio de algunas de las propiedades del color y el volumen como una introducción, se pasará a profundizar en los contenidos específicos del área de visual y plástica. Las actividades han sido preparadas para que se pueda acompañar a los alumnos en la adquisición de los contenidos de forma consecutiva. Para enmarcar las actividades se dan a conocer también referentes artísticos y culturales contemporáneos y próximos a su realidad cotidiana para que les resultasen significativas a los niños y niñas. Algunas de las actividades propuestas han sido:

- La creación de una escultura a partir del trabajo con cubos. Por ejemplo la inversión del volumen creado de las sumas a modo de lámpara o cortina. (Referentes artísticos - RA: https://goo.gl/w6tvWt)
- Crear una composición con palos decorados a modo de móvil o lámpara dónde cada decoración representará una suma. (RA: https://goo.gl/45aDaV)
- Analizar desde un punto artístico de la superficie del trabajo de la tabla de las sumas con cubos y contextualizarlo con obras del entorno. (RA: Enric Miralles. Les Corbetes - https://goo.gl/LJAQdZ)
- Crear de una instalación en el patio a partir de la obra de Agustín Ibarrola (RA: El bosque pintado de Oma / Agustín Ibarrola https://youtu.be/BhejgafKEgw)

Referencias bibliográficas

- Barba, D. y Calvo, C (2017). Tareas ricas para practicar sumas. Suma, 85, 57-63.
- Hernández F. (2007). *Espigador@s de la cultura visual*. Madrid: Ocatedro.
- Acaso, M. (2013). *rEDUvolution: hacer la revolución en la educación*. Madrid: Paidós Ibèrica
- Decora Premium (2017). Lámpara Estratos 90 cm Schuller. https://www.decorapremium.com/epages/ec5668.sf/es_ES/?ObjectPath=/Shops/ec5668/Products/%22L%C3%A1mpara%2059%22 Consultado 30/10/2017
- Pinterest Eva Formiga (2017) Fustes. https://www.pinterest.es/evaformiga/fustes/ Consultado 30/10/2017
- Arquitectura en red (2009). María Romero Garduño. Carme Pinós, Corbetes de Avenida Icaria. http://www.arqred.mx/blog/2009/12/01/carme-pinos-corbetes-de-avenida-icaria/ Consultado 30/10/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

- Youtube (2010). Paco Rodríguez. Bosque pintado de Oma. https://youtu.be/BhejgafKEgw Consultado 30/10/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-828

PROPUESTAS DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE INFANTIL Y PRIMARIA ADAPTADAS A NECESIDADES CONCRETAS

Joan Jareño Ruiz – Montserrat Torra Bitlloch
jjareno@xtec.cat – mtorra12@xtec.cat
CESIRE-CREAMAT, Catalunya, España

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primario (6 a 11 años)
Palabras clave: Formación, Acuerdos de centro

Resumen

Se exponen dos experiencias de formación del profesorado que tratan de atender dos tipos de necesidades diferentes. La primera es una modalidad de formación que se orienta a la mejora del conocimiento de los contenidos matemáticos del profesorado, pensando que un conocimiento más profundo del contenido matemático ayuda a planificar de forma más eficiente su enseñanza. No se trata de una formación puramente teórica sino basada en la realización de actividades de aprendizaje. La segunda trata de facilitar que un claustro de profesores llegue a acuerdos entorno a alguno de los temas, como el cálculo o la resolución de problemas, que requieren que todo el centro actúe de forma coordinada. Es una modalidad que no cuenta con un formador externo sino que la coordina un equipo de profesorado del propio centro a partir de itinerarios guiados.

Los cambios sociales reclaman cambios educativos y estos una nueva caracterización de la definición del perfil profesional de los educadores. Un ejemplo claro de ello lo tenemos en las nuevas orientaciones de los currículos hacia un enfoque donde se empieza a hablar más de competencia que de conocimiento, entendiendo la primera como un uso funcional del segundo. Es evidente que este cambio de paradigma educativo conlleva modificaciones en nuestra manera de proceder en el aula que se orientará hacia el objetivo del desarrollo de la competencia matemática del alumnado partiendo de su propia acción y experiencia. Para conseguirlo propondremos en el aula diferentes tipos de actividades y las trabajaremos también de forma diversa utilizando una gama variada de recursos. Por otro lado, la actuación del maestro consistirá en acompañar a los alumnos en la realización de las tareas, en orientarlos, en proponer ampliaciones de las actividades o seguir los nuevos interrogantes

ISBN 978-84-945722-3-4

que se planteen. Conduciremos debates y discusiones, ayudaremos a contrastar argumentaciones… De vez en cuando también "explicaremos", por ejemplo cuando sea necesario formalizar. En conjunto, una manera de hacer compleja y que, por el hecho de que se propicie que sea el alumno el que construya su propio conocimiento, no reduce nuestro papel activo en el aula. El cambio más notable se refiere a nuestra manera de interactuar a través de intervenciones que tengan como objetivo la producción de aprendizajes matemáticos. Para conseguirlo, necesitamos un doble conocimiento sobre las matemáticas que deben aprender nuestros alumnos: el de los conceptos y procedimientos que queremos trabajar y el de su didáctica. Y este doble conocimiento debe ser equilibrado. Si no conocemos la matemática subyacente en una actividad no la conduciremos de una forma adecuada en el aula. Si no tenemos una idea clara sobre cómo conducir las actividades tampoco nos será útil saber mucha matemática. Uno de los temas que nos debe preocupar y ocupar debe ser que, tanto la formación inicial de maestros y profesorado como en la continuada, de la que trataremos en esta comunicación, garanticen este doble conocimiento profesionalmente necesario.

En los últimos años se han constatado ciertos déficits en la formación matemática del profesorado de primaria. No es nuestro objetivo analizar las causas pero, como mínimo, apuntaremos algunas. En primer lugar, se puede observar que gran parte de los aspirantes a maestros han tenido una pérdida de contacto con las matemáticas durante la educación secundaria postobligatoria. En segundo lugar vemos también que en los actuales grados de maestro, bajo una perspectiva de formación generalista, no existe una especialización en educación matemática. A todo ello le podemos añadir, como tercer motivo, que en los centros de primaria ha ido desapareciendo la figura de referencia que solían ocupar los especialistas en ciencias y matemáticas de la antigua EGB.

El panorama que se dibuja es que, a pesar de la inquietud creciente en la escuelas por mejorar la enseñanza de las matemáticas, no se sabe muy bien cómo hacerla. En parte porque no se dominan los propios contenidos matemáticos, en parte porque no se acaba de comprender del todo el nuevo enfoque competencial y, en parte también, porque los cambios no pueden ser individuales sino de centro y se ha de construir una cultura compartida al respecto. Una vez hecho el diagnóstico es papel de la formación permanente intentar aportar soluciones. A continuación expondremos dos modelos de formación creados por el *Departament*

ISBN 978-84-945722-3-4

d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya para atender estas problemáticas. En ambos el CESIRE del ámbito de matemáticas (CREAMAT), una unidad del propio Departament, ha tenido un papel importante en su diseño e implementación.

AraMAT - "Ahora matemáticas"

Durante el curso 2014-2015, a partir de la preocupación percibida por los propios maestros "de no saber suficientes matemáticas", el Departament de Ensenyament, del que formamos parte, toma la iniciativa para sentar las bases de un proyecto general para la mejora de las matemáticas en la educación primaria que, entre otros aspectos como la promoción de la Proves Cangur de Primaria, por citar uno, atendiese una formación en contenidos. Esta formación se concretó el curso 2015-16 en el diseño y pilotaje de un primer módulo formativo que se llamó: "Ara Matemàtiques: Saber-ne més per ensenyar-les millor" (Ahora Matemáticas: saber más para enseñarlas mejor). La forma en que se preparó y llevó a cabo esta formación se describe a continuación. Se hará un cierto énfasis en cuestiones organizativas porque pensamos que pueden ser de interés tanto para destacar la atención hacia los aspectos cualitativos del diseño de las diferentes sesiones y módulos del itinerario formativo, como para exponer su planificación extensiva que intenta llevar, progresivamente, esta formación a más maestros de todo el territorio de Catalunya:

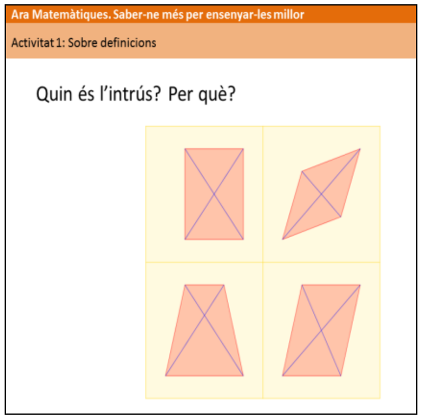
- *Cursos 2014-2015 y 2015-2016*

En una primera fase, con la colaboración más que desinteresada de los profesores eméritos en formación inicial Carme Burgués y David Barba, se acordó un marco general basado en ciertas ideas clave. Destacamos algunas:

  - en el curso, a pesar de tener como eje central la mejora en contenidos, deberían tener un peso capital los aspectos didácticos relacionados.
  - se tendría que basar en actividades de carácter abierto y que permitieran el desarrollo competencial.
  - de forma transversal se debería destacar el papel de los *procesos* (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación, conexiones).
  - se potenciaría el uso de materiales manipulativos y herramientas digitales.
  - se analizarían producciones de alumnos.

ISBN 978-84-945722-3-4

También se decidieron los temas de cada una de las cinco sesiones de este primer módulo: sentido numérico, operaciones (multiplicación y división), geometría plana y del espacio, patrones y relaciones.



Ejemplo de actividad del curso

En una segunda fase se creó un grupo de trabajo, de amplia representación territorial, formado por diez parejas de formadores. Cada pareja estaba formada por una persona con un perfil más orientado hacia la formación inicial y otra directamente relacionada con el aula y experiencia en formación continuada. Debemos destacar y agradecer la gran implicación en el proyecto de todo el equipo de formadores. Para preparar los materiales de cada sesión específica se formaron subgrupos que después compartieron sus propuestas con el resto del equipo. Esta fase ocupó todo el primer trimestre. Finalmente, durante el segundo y tercer trimestre, se programaron, en fase de pilotaje, cursos de 20 horas (15 presenciales y 5 para la experimentación en el aula). Estos se realizaron en centros de recursos de cada uno de los diez servicios territoriales existentes en Catalunya, algunos de los cuales se duplicaron por su gran demanda. En cada curso estaban presentes los dos formadores y en todos, con pequeñas adaptaciones, se utilizaron los mismos materiales de base. De esta forma se creó un modelo de curso unificado pero no monolítico, dotado también de una cierta flexibilidad. Las valoraciones generales del curso fueran muy positivas y, en todo caso, se constató que las 15 horas de duración quedaban cortas y había que ampliarlas. Estas valoraciones, junto a la de los formadores, nos permitieron confirmar su necesidad y ver que la diagnosis previa del problema no iba desencaminada.

- *Curso 2016-2017*

ISBN 978-84-945722-3-4

Durante el primer trimestre, además de la repetición de los cursos del primer módulo, con un solo formador y aumentados en cinco horas (la mitad de ellas no presenciales), se ha organizado un curso paralelo para incorporar nuevos formadores y ampliar la cobertura territorial. Además de la realización de algunas sesiones específicas con todo el grupo, esta formación se ha realizado básicamente incorporándolos como formadores-colaboradores en los cursos del primer módulo que se han desarrollado en los diferentes Servicios Territoriales.
También durante el primer trimestre se ha diseñado un segundo módulo, de 20 horas, dedicado a otros campos de contenidos como las transformaciones geométricas, la medida, estadística y probabilidad, así como profundización en otros aspectos del sentido numérico o las operaciones. Este segundo módulo se ha realizado en los mismos lugares que el primero para propiciar la continuidad.
Por otro lado, se ha intentado crear una línea de continuidad con el profesorado ya formado en los dos módulos enviándole actividades para su experimentación en el aula y recogiendo ejemplos de producciones de su alumnado que pudieran ser analizadas posteriormente para compartir este análisis en la red. Durante el curso se han enviado dos actividades cuyo análisis está pendiente de publicación en la web del CREAMAT.
Se ha avanzado también en la planificación de un tercer y cuarto módulos con una orientación diferente, especialmente el cuarto, que se diseñarán y pilotarán de una forma similar a los actuales. El módulo 3 se centrará en los *procesos* matemáticos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y comunicación-representación). En el currículum actual de Catalunya estos procesos aparecen de forma prescriptiva en forma de *dimensiones* que agrupan las competencias específicas relacionadas con cada proceso. Desde este curso 2016-2017 además, se evaluan obligatoriamente, una vez por curso, en el informe de final de nivel. De ahí que una formación en esta línea adquiera más sentido. El módulo 4 se orientará al análisis de contenidos, secuenciación, conocimiento de bancos de recursos, al uso materiales manipulables y herramientas TAC como applets específicos, GeoGebra, Scratch, hojas de cálculo, etc. El objetivo de este último módulo se orienta a formar posibles maestros o maestras que puedan convertirse en referentes en sus centros sobre todos los aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La FIC (Formación Interna de Centro)

ISBN 978-84-945722-3-4

Otro de los modelos formativos promovidos por el Departament d'Ensenyament, y en los que hemos participado, ha sido la elaboración de tres itinerarios guiados de Formación Interna de Centro (FIC) para Primaria dedicados a la educación matemática. La FIC es un modelo de "formación sin formador" que pretende ser una ayuda para la construcción de acuerdos de centro sobre determinados temas, y que pueden vertebrar el enfoque global de la escuela sobre la forma de trabajar, en nuestro caso las matemáticas, con unos criterios unificados y consensuados por todo el mundo. Existen dos tipologías de FIC: itinerarios guiados e itinerarios propios. Los primeros itinerarios se empezaron a implementar en el curso 2013-2014. Se puede ampliar la información general sobre este modelo formativo en el siguiente enlace: http://xtec.gencat.cat/ca/formacio/formaciogeneralprofessorat/capacitats_competencies_curriculum/fic/ .

Es un modelo de formación complejo que se basa en la discusión puramente interna sin más acompañamiento, en su puesta en práctica, que la existencia en internet de un itinerario guiado, acompañado de actividades y materiales. Sí que es necesaria la figura de una persona coordinadora del propio centro, que no tiene por qué ser del equipo directivo, y un cierto seguimiento por parte del Centro de Recursos al que el centro está adscrito.

El itinerario tiene cuatro fases, siendo la tercera la principal y la que ocupa una fase de tiempo más larga.

- *fase inicial*, en la que el centro debe analizar su realidad con relación al tema del itinerario y los resultados de las pruebas de evaluación externas e internas para poder establecer unos objetivos de mejora.
- *fase de planificación*, para dibujar un plan de acción con relación a los objetivos de mejora.
- *fase de construcción y experimentación*, en la que a partir del contraste con "voces expertas" en forma de aportes teóricos, cada uno de los participantes debe diseñar o adaptar una propuesta didáctica y llevarla a la práctica.
- *fase de evaluación*, en el que se analiza y reflexiona conjuntamente sobre la experimentación realizada y se llega a acuerdos que se concretarán y se consolidarán en el centro y, por tanto, quedarán reflejados en la documentación final.

Los itinerarios incorporan:

ISBN 978-84-945722-3-4

- herramientas de autodiagnóstico (herramientas de análisis de las pruebas de competencias básicas, elementos de análisis, etc.).
- materiales de formación (orientaciones, actividades, enlaces, ideas clave y bibliografía).
- instrumentos de evaluación (criterios e indicadores) del proceso formativo y de la transferencia en el aula de los contenidos de la formación y su contribución a la mejora de los resultados.
- orientaciones para la dinamización de las actividades formativas por parte de los equipos de coordinación.

En concreto desde el CESIRE-CREAMAT hemos preparado tres itinerarios guiados para primaria y dos para secundaria. Los guiones y materiales de los itinerarios son públicos. Los tres de primaria son los siguientes:

- Cómo ayudar a desarrollar la competencia matemática en educación infantil y primaria (http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma01/index)
- El cálculo en la educación infantil y primaria (http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma03/index)
- Resolución de problemas en la educación infantil y primaria (http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma05/index)

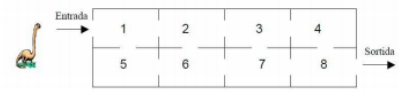
ISBN 978-84-945722-3-4

La resolució de problemes a l'educació infantil i primària

Propostes d'exploracions i investigacions

En DINO i les magdalenes

Cal buscar l'itinerari que faci que en DINO reculli més magdalenes. Només es pot passar una vegada per cada habitació. Després es poden variar les quantitats de magdalenes, d'habitacions, buscar camins mínims (si en DINO es posa a règim), canviar les habitacions d'entrada i sortida...

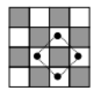


Conjectura i comprovació

Es demana als nens i nenes quantes vegades poden fer una cosa en un temps determinat. Després es demana que ho comprovin. Per exemple que diguin quantes vegades poden tancar i obrir els ulls en 15 segons (o en 30, o en 60...), fer petar els dits, donar un cop de peu a terra, escriure el seu nom, comptar fins a deu, cordar-se la sabata...

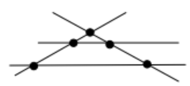
Comptar quadrats

Quants quadrats es poden formar col·locant quatre fitxes que siguin els vèrtexs en un tauler com el del joc de dames, però més petit, de 4x4.



Punts d'encreuament

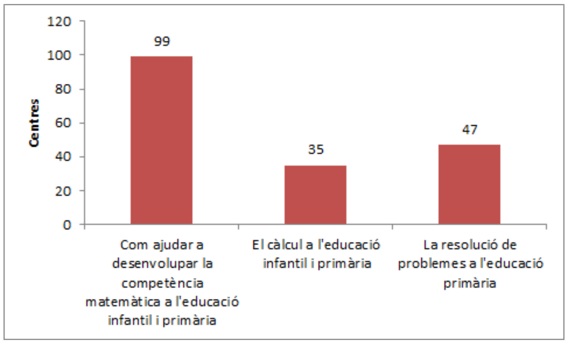
Donat un grup de rectes qualssevol, quants punts d'encreuament es poden formar. Establir el mínim i el màxim. Investigar també si són possibles totes les solucions entre aquest mínim i aquest màxim o si es produeixen salts.

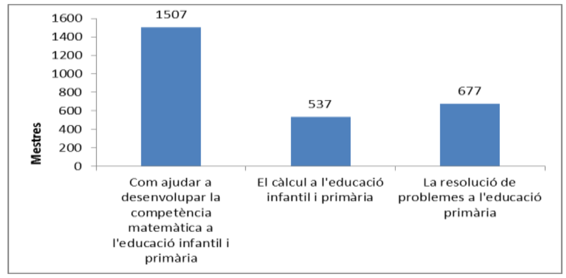


Ejemplo de ficha con propuesta de exploraciones e investigaciones

Ya se ha comentado anteriormente que la mayoría de centros han mostrado un elevado grado de satisfacción con los itinerarios, si bien han hecho constar que no siempre se han podido desarrollar por completo o, en algunos casos, han manifestado que en ciertos momentos se ha echado en faltaun asesoramiento *in situ* de alguna persona externa, de forma especial cuando se ha sentido la necesidad de una ampliación. Por ejemplo, una vez experimentada las ventajas de trabajar con materiales manipulativos para favorecer la representación y la exploración en el aula, se sentía la necesidad de ahondar más en el conocimiento y uso de diferentes materiales como el geoplano, los cubos encajables, etc... Por contra otros centros han manifestado que ha sido muy positivo no tener formador externo porque han podido discutir los temas con mayor libertad. En todo caso, todos han coincidido en la oportunidad que les ha dado la FIC para llegar a acuerdos de centro, construidos desde dentro y garantizando que sus significados sean compartidos por todos. También han coincidido en lo positivo y mutuamente enriquecedor que ha sido intercambiar, comparar y analizar experiencias de aula de los diversos niveles de una misma escuela, ya que, normalmente, la gestión del "día a día" no ayuda a crear estos espacios de reflexión compartida sobre la propia práctica educativa.

ISBN 978-84-945722-3-4





Centros y maestros de primaria que han realizado FIC de matemáticas (2013-2017)

Referencias bibliográficas:

- XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (2015). Formació interna de centre (FIC). http://xtec.gencat.cat/ca/formacio/formaciogeneralprofessorat/capacitats_competencies_curriculum/fic/ Consultado 30/10/2017
- Ateneu XTEC (2012). Com ajudar a desenvolupar la competència matemàtica a l'educació infantil i primària http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma01/index Consultado 30/10/2017
- Ateneu XTEC (2013). El càlcul a l'educació infantil i primària http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma03/index Consultado 30/10/2017
- Ateneu XTEC (2013). Resolució de problemes a l'educació infantil i primària http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma05/index Consultado 30/10/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-830

TECNOLOGIAS DIGITAIS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Adriana Fátima de Souza Miola – Tiago Dziekaniak Figueiredo – Juliana Leal Salmasio
adrianamiola@ufgd.edu.br – tiagofigueiredo@ufgd.edu.br - jusalmasio@hotmail.com
Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD - Brasil

Núcleo temático: Formacão de professores de Matemática.
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras-chave: Formação de professores; Tecnologias digitais, Discurso coletivo

Resumo
Na atualidade, um dos grandes desafios que os professores enfrentam é fazer uso das tecnologias digitais de forma pedagógica, problematizando seu uso e procurando mecanismos para criar situações que possam gerar aprendizagens, uma vez que a diversificação e o acesso aos mesmos ocorrem de forma muito rápida e não podem ser desconsiderados (BETTEGA, 2004). Assim, estudos que possibilitem compreender qual a concepção dos alunos do curso de Matemática sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais tornam-se cada vez mais importantes para subsidiar ações que potencializem a prática. O trabalho apresenta resultados parciais de um projeto de pesquisa que visa compreender qual a concepção sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais emerge nos discursos coletivos dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados. Os sujeitos de pesquisa são 14 alunos que cursaram no primeiro semestre de 2016 a disciplina de Informática na Educação Matemática. Para compreender o que pensa e faz este coletivo, encontramos no Discurso do Sujeito Coletivo (DSC) de Lefèvre e Lefèvre (2000, 2005a, 2005b, 2010) uma proposta de análise. Compreender esta concepção servirá para potencializar futuras práticas pedagógicas mediatizadas pelos recursos digitais, contribuindo para a formação dos futuros professores de Matemática.

Introdução

Pensar a escola nos dias de hoje, é pensar em um espaço que faz parte de uma sociedade que está em constante transformação. A escola como parte dessa sociedade não pode ficar inerte a este movimento e isso reflete diretamente na atuação e na formação do professor.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para Sancho (2006, p. 18), “as tecnologias da informação e comunicação estão aí e ficarão por muito tempo, estão transformando o mundo e deve-se considerá-las no terreno da educação.”, o que corrobora com as ideias de Bettega (2004), ao expressar que o acesso aos recursos tecnológicos acontece de forma muito rápida e não devem ser desconsiderados.

> O âmbito da educação, com suas características específicas, não se diferencia do resto dos sistemas sociais no que se refere à influência das TIC e o contexto político e econômico que promove seu desenvolvimento e extensão. Muitas crianças e jovens crescem em ambientes altamente mediados pela tecnologia, sobretudo a audiovisual e a digital. Os cenários de socialização das crianças e jovens de hoje são muito diferentes dos vividos pelos pais e professores. (SANCHO, 2006, p. 19).

Pensar sobre o uso pedagógico das tecnologias digitais deve ser assumido como parte fundamental na formação dos professores para que estes ao assumirem as salas de aula sejam capazes de incorporá-las em suas práticas docentes na busca pela criação de espaços de convivência comprometidos com a aprendizagem dos alunos no Século XXI, os quais segundo Lévy (1999) toleram cada vez menos seguir cursos rígidos e que estejam distantes de suas realidades.

Desta forma, buscamos neste trabalho compreender qual a concepção dos alunos de Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD sobre o uso das tecnologias digitais, uma vez que olhar para formação inicial dos professores de matemática poderá contribuir para a construção de um espaço de formação mais amplo e condizente com as demandas impostas pela vida em sociedade.

Metodologia do trabalho

O trabalho é de cunho qualitativo (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008), pela necessidade de compreender como as pessoas experimentam, interpretam e atuam com as tecnologias digitais constituindo e modificando uma cultura, porque queremos entender o fenômeno a partir da perspectiva de um grupo de 14 futuros professores de matemática, que são alunos da UFGD e cursaram a disciplina de Informática na Educação Matemática no primeiro semestre letivo do ano de 2016.

Para Oliveira (2014, p. 37),

ISBN 978-84-945722-3-4

> Entre os mais diversos significados, conceituamos abordagem qualitativa ou pesquisa qualitativa como sendo um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação.

Para coleta de dados, foi entregue aos alunos uma folha de papel contendo alguns excertos sobre as tecnologias digitais, bem como um questionamento para que eles após a leitura e com base nos seus conhecimentos sobre o tema pudessem responder (Quadro 1).

Atividade

"Vivemos em uma época de grandes e de rápidas transformações. Novas informações jorram a todo instante pela televisão, pelo rádio e pela Internet. As mudanças promovidas pelas tecnologias das comunicações e da informação são muito marcantes, e seus efeitos acabam se espalhando por todos os campos do saber e da vida humana. A escola é, especialmente, o lugar aonde isso pode ser sentido e vivido, como reflexo da sociedade em que os jovens estão inseridos." (BETTEGA, 2004, p. 13).

"Os instrumentos tecnológicos de comunicação se desenvolvem e se diversificam sem parar. Eles se impõe a todos na vida diária e não podem ser ignorados nem considerados com desprezo." (BETTEGA, 2004, p. 15).

"A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores." (BETTEGA, 2004, p. 16).

Referência

BETTEGA, Maria Helena. **A educação continuada na era digital**. São Paulo: Cortez, 2004. (Coleção questões da nossa época; v. 116).

Com base nos excertos acima, com suas experiências e seus conhecimentos sobre o tema, elabore um texto argumentativo com relação às influencias das tecnologias na sociedade, a chegada das mesmas na escola e o seu uso de forma pedagógica.

Quadro 1 – Material de coleta de dados
Fonte: Os autores.

Como nossa intenção era compreender o que pensam sobre o uso das tecnologias digitais, encontramos na metodologia do Discurso do Sujeito Coletivo – DSC de Lefèvre e Lefèvre (2005a, 2005b, 2010), uma proposta de análise.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para construir um DSC, é necessário identificar quatro operadores, que são as Expressões-Chave (E-Ch), as Idéias Centrais (ICs), as Ancoragens (ACs) e finalmente os Discursos do Sujeito Coletivo (DSCs).

As E-Ch são os trechos selecionados do material coletado no estudo. No caso do nosso estudo são as respostas dos alunos. As ICs são expressões linguísticas que expressam o sentido das E-Ch, ou seja, uma interpretação sobre o que o aluno escreveu. As ACs são as teorias, as crenças, os valores, as ideologias e etc. que podemos identificar nas escritas. E por fim, os DSCs são a reunião das expressões –chave de mesmo sentido ou complementares.

O uso do DSC possibilita dar voz aos alunos que estão no processo inicial de formação. Porém não é uma única voz, mas sim uma voz que reúne as falas singulares abrindo espaço para o eu coletivizado, o eu que emerge como uma representação social da cultura que será estudada, sobre as demandas da própria formação, encontrando respaldo em Lefèvre e Lefèvre (2000, p. 19), ao expressarem que "O DSC é, assim, uma estratégia metodológica com vistas a tornar mais clara uma dada representação social e o conjunto das representações que conforma um dado imaginário".

Com base nas respostas dos alunos utilizando a técnica do DSC, construímos o discurso coletivo que intitulamos "A percepção dos alunos ao uso das tecnologias digitais – DSC1" (Quadro 2).

O uso de tecnologia digital, pedagogicamente, no planejamento de aulas, faz as aulas terem características mais atrativa, já que sabemos que a tecnologia digital está inserida no cotidiano de todos, principalmente dos alunos. O uso de tecnologias nas escolas e nas aulas de matemática necessita do uso de propostas metodológicas diferenciadas. Infelizmente ainda ha uma resistência no uso das tecnologias digitais na sala de aula, quando se tem, nem sempre o uso é pedagógico. Nas universidades, muitos professores não tem conhecimento de nada sobre tecnologias. Se considerarmos as tecnologias como computador, software e hardwares (como o projetor multimídia) podemos dizer que os professores fazem pouco uso desses meios, mesmo o projetor sendo disputado entre os docentes da faculdade. Além disso, é preciso pensar quanto à metodologia e fins que serão usados, como serão usados. Alguns professores de certa forma tentam lutar contra o avanço dessas tecnologias, algo quase impossível nos dias atuais. As reclamações são as mesmas dos professores do ensino básico: não há tempo, não há conhecimento e formação para o uso destas, falta de recursos. É notório que os cursos superiores ainda carecem de uma grade que alie o uso de metodologias às matérias específicas, também podemos dizer que a formação continuada de professores do ensino superior é necessária, assim também como o interesse em novos conhecimentos. O uso da tecnologia vem ampliando com o decorrer do tempo tanto nas escolas quanto nas

ISBN 978-84-945722-3-4

universidades, porém há uma grande maioria de professores que não gostam de utilizar esse recurso, na grande maioria das vezes o discurso destes é que a tecnologia digital ocupa muito tempo da aula dele e com este tempo ele já teria avançado no conteúdo.

Quadro 2 – A percepção dos alunos ao uso das tecnologias digitais – DSC1
Fonte: Os autores.

Discussão

No DSC1, é possível destacar que os alunos consideram importante o uso das tecnologias digitais em sala de aula e percebem a necessidade de se pensar sobre isso ainda na formação inicial, uma vez que ao expressarem que “O uso de tecnologia digital, pedagogicamente, no planejamento de aulas, faz as aulas terem características mais atrativa, já que sabemos que a tecnologia digital está inserida no cotidiano de todos, principalmente dos alunos” (DSC1), ou seja, percebem que as tecnologias fazem parte do contexto de todos e que não podem ser desconsideradas no processo educativo.

Quando afirmam que “O uso de tecnologias nas escolas e nas aulas de matemática necessita do uso de propostas metodológicas diferenciadas” (DSC1), fica muito claro a necessidade de se pensar o uso da tecnologia de forma pedagógica, ou seja, usar a tecnologia como ferramenta capaz de potencializar os processos de ensinar e aprender e não apenas como uma troca de suporte. O uso da tecnologia deve ser pensado e ter seu valor definido na capacidade em que estas ferramentas possuem para seu uso.

Para Rodrigues (2007), o trabalho mediatizado pelo uso das tecnologias digitais, portanto, necessita ser aliado ao uso de propostas metodológicas capazes de ampliar as ações dos professores e criar ambientes de aprendizagens significativos que favoreçam a autonomia, a criticidade e a reflexão sobre as experiências que vivem.

Para Moran (2013, p. 11),

> O avanço do mundo digital traz inúmeras possibilidades, ao mesmo tempo em que deixa perplexas as instituições sobre o que manter, o que alterar, o que adotar. Não há respostas simples. É possível ensinar e aprender de muitas formas, inclusive da forma convencional. Há também muitas novidades, que são reciclagens de técnicas já conhecidas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ao mesmo tempo que percebem a importância do uso das tecnologias digitais, relatam que seu uso ainda é bastante restrito e, na maioria das vezes não possui um caráter pedagógico que justifique seu uso, uma vez que:

> Infelizmente ainda ha uma resistência no uso das tecnologias digitais na sala de aula, quando se tem, nem sempre o uso é pedagógico. Nas universidades, muitos professores não tem conhecimento de nada sobre tecnologias. Se considerarmos as tecnologias como computador, software e hardwares (como o projetor multimídia) podemos dizer que os professores fazem pouco uso desses meios, mesmo o projetor sendo disputado entre os docentes da faculdade. (DSC1).

Em relação ao não uso das tecnologias digitais por seus professores, os mesmos expressam que “As reclamações são as mesmas dos professores do ensino básico: não há tempo, não há conhecimento e formação para o uso destas, falta de recursos.” (DSC1), ou seja, a resposta dada ao questionarem-se sobre o não uso recai diretamente na falta de formação para o uso das tecnologias. Algo já enraizado no senso comum e possibilita o pensar que por trás do não saber está muito do não querer.

Para Maturana (2009), o não querer fazer é o lado oculto da emoção que expressamos ao afirmar que não sabemos fazer alguma coisa, ou seja, podemos dizer que não sabemos usar as tecnologias digitais em nosso fazer pedagógico, entretanto, por trás disso, o que está oculto na emoção do não saber é a emoção de não estar motivado a fazer, a emoção de não querer mudar, de não querer aprender, e isos fica bastante claro quando expressam que:

> O uso da tecnologia vem ampliando com o decorrer do tempo tanto nas escolas quanto nas universidades, porém há uma grande maioria de professores que não gostam de utilizar esse recurso, na grande maioria das vezes o discurso destes é que a tecnologia digital ocupa muito tempo da aula dele e com este tempo ele já teria avançado no conteúdo. (DSC1).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Por outro lado, é relevante pensarmos na necessidade da ampliação da discussão sobre o uso das tecnologias digitais ainda no curso de formação inicial dos professores, uma vez que ao expressarem que "é notório que os cursos superiores ainda carecem de uma grade que alie o uso de metodologias às matérias específicas, também podemos dizer que a formação continuada de professores do ensino superior é necessária, assim também como o interesse em novos conhecimentos" (DSC1), é possível perceber que os cursos de graduação ainda não se adaptaram a um novo modo de formar professores, um outro modelo que seja capaz de prepara os futuros professores para atuarem na formação de sujeitos imersos em um mundo digital.

Neste mesmo sentido, Moram (2013) expressa que "tudo o que for previsível será cada vez mais realizado por aplicativos, programas, robôs. Nosso papel fundamental na educação escolar é de ser mediadores interessantes, competentes e confiáveis [...]", ou seja, precisamos pensar a verdadeira essência de ser professor em um contexto que demanda a criatividade e a inovação.

Pensar nos processos de ensinar e aprender usando a tecnologia, é pensar que uns sabem alguma coisa e outros sabem tantas outras. É permitir-se viver em um processo de interação, em que os alunos podem atuarem de forma colaborativa com os professores.

Para Tardif (2014, p. 49),

> O docente raramente atua sozinho. Ele se encontra em interação com outras pessoas, a começar pelos alunos. A atividade docente não é exercida sobre um objeto, sobre um fenômeno a ser conhecido ou sobre uma obra a ser produzida. Ela é realizada concretamente numa rede de interações com outras pessoas, num contexto onde o elemento humano é determinante e dominante e onde estão presentes símbolos, valores, sentimentos, atitudes, que são passíveis de interpretação e decisão, interpretação e decisão que possuem, geralmente, um caráter de urgência.

Ou seja, pensar a formação de professores necessita ser um processo colaborativo, em que os alunos sejam capazes de opinar e contribuir para o desenvolvimento das aulas, na busca por uma formação mais ampla e coerente com as atuais demandas.

Considerações Finais

ISBN 978-84-945722-3-4

Olhar para nossa sala de aula e perceber o quanto há uma preocupação sobre o uso das tecnologias digitais nos espaços educativos é um fator extremamente importante para potencializar discussões acerca do mesmo e, consequentemente, propor ações que visem contribuir para a formação destes sujeitos enquanto futuros professores que irão atuar em um mundo extremamente tecnológico.

Os cursos de formação de professores devem estarem preocupados com a formação dos sujeitos que o constituem, tendo em vista a necessidade de prepará-los para atuarem de forma significativa nos espaços educativos.

No discurso é possível compreender essa demanda por parte dos alunos, os quais sentem a necessidade um maior preparo para o uso das tecnologias digitais de forma pedagógica, ou seja, eles sabem usar muitas tecnologias mas almejam uma formação que os preparem para usarem essas tecnologias de forma pedagógica, como ferramenta potencializadora e não apenas como uma troca de suporte para facilitar o trabalho do professor.

As tecnologias se diversificam a todo instante, os alunos estão imersos no contexto digital e cabe a nós professores e futuros professores fazer uso dessas tecnologias em nossa ação docente. A escola ao longo dos anos mudou, está mudando e irá mudar de forma muito rápida e necessitamos estarmos preparados para lidar com estas mudanças se quisermos continuar capazes de fazer com que nossos alunos aprendam e se desenvolvam.

Referencias bibliográficas

BETTEGA, M. H. (2004). A educação continuada na era digital. São Paulo: Cortez, 2004. (Coleção questões da nossa época; v. 116).

LANKSHEAR C, KNOBEL M. (2008). Pesquisa Pedagógica: do projeto a implementação. Porto Alegre, RS: Artmed.

LEFÈVRE F, LEFÈVRE A. M. (2005b). Discurso do Sujeito Coletivo: um novo enfoque em pesquisa qualiquantitativa (Desdobramentos). 2. Ed. Caxias do Sul, RS: Educs. 256 p. (Coleção Diálogos).

ISBN 978-84-945722-3-4

__________. (2005b). Depoimentos e discursos: uma proposta de análise em pesquisa social. Brasília: Líber Livro Editora.

__________. (2010). Pesquisa de representação social: um enfoque qualiquantitativo: a metodologia do Discurso do Sujeito Coletivo. Brasília: Líber Livro Editora.

LÉVY, P. (1999). Cibercultura. Rio de Janeiro: Editora 34.

MORAN, J. M. (2013). Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias. In: MORAN, J. M; MASSETO, M. T; BEHRENS, M. A. Novas tecnologias e mediacao pedagógica. 21. ed. Campinas, SP: Papirus.

OLIVEIRA, M. M. (2014). Como fazer pesquisa qualitativa. 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

RODRIGUES, S. C. (2007). Rede de conversação virtual: engendramento coletivo-singular na formação de professores. 2007. 150p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SANCHO, J. M. (2006). De tecnologias da informação e comunicação a recursos educativos. In: SANCHO, J. M; HERNÁNDEZ, F. Tecnologias para transformar a educação. Porto Alegre: Artmed.

TARDIF, M. (2014). Saberes docentes e formação profissional. 16. ed. Petrópolis, RJ: Vozes.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-832

EL SÉTIMO ARTE: UTILIZAR PELÍCULAS PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Marger da Conceição Ventura Viana- Roseana Moreira de Figueiredo Coelho

margerv@terra.com.br - roseanana@yahoo.com.br
Universidade Federal de Ouro Preto - Brasil

Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Formación y actualización docente
Modalidad: CB
Palabras clave: matemáticas, enseñanza, películas, clase.

Resumen

Desde los albores del cine, las películas han incorporado las cuestiones que involucran situaciones de la vida que se pueden conectar a varios campos de la ciencia, incluyendo las matemáticas. Existen investigaciones que justifican el uso de las películas en el aprendizaje y la enseñanza de diversas disciplinas, en tanto se han comprobado resultados satisfactorios. Sin embargo, en la didáctica de las matemáticas estas investigaciones son escasas. Sin embargo, la literatura respecto al cine en la educación ha cobrado fuerza. Teniendo en cuenta una investigación sobre las tesis y disertaciones sobre el uso del cine en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de la hipótesis de trabajo acerca de la importancia de los recursos materiales para el aprendizaje de contenidos matemáticos, se pregunta ¿Cómo el cine como una herramienta educativa puede ayudar en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas? Se cree que las películas constituyen importante ayuda como mediador en el proceso de aprendizaje, motivan la realización de investigaciones, desarrollan el sentido crítico y el razonamiento lógico. La cuestión es cómo hacerlo en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Introducción

Teniendo en cuenta una investigación sobre las tesis y disertaciones sobre el uso del cine en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de la hipótesis de trabajo acerca de la importancia de los recursos materiales para el aprendizaje de contenidos matemáticos, se formuló el problema de la investigación presentada en este artículo: ¿Cómo el cine como una herramienta educativa puede ayudar en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas?

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta investigación se encuentra en el área de la investigación Educación Matemática, más específicamente en las tecnologías en la educación matemática y enseñanza/aprendizaje. La revisión de la literatura realizada en el Banco de tesis de la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior (CAPES) concluyó que solo había dos investigaciones sobre el uso de películas en el aprendizaje de las matemáticas, pero que trataban de formación de profesores de matemáticas.

Antecedentes

En el año 2010, para responder a la pregunta central de su tesis de graduación: "¿Cómo se han utilizado las películas como medios de enseñanza en la educación superior?" la segunda autora seleccionó una universidad pública y eligió una de sus unidades académicas para investigar. Concluyó que, aunque la película fue aceptada por los encuestados como un material educativo importante, había resistencia con respecto a su uso como una herramienta alternativa en el proceso de enseñanza por falta de conocimiento de cómo hacerlo (Coelho & Viana, 2011).

Por otro lado, el discurso de los encuestados mostró que las películas pueden servir como un enlace entre los aspectos prácticos y teóricos de ciertos temas con objetivos que van más allá del arte o del entretenimiento. La pregunta es descubrir cómo las clases de matemáticas pueden ser favorecidas por este recurso, ya que el proceso de enseñanza con soporte de película puede ser beneficiado.

Según Santos:

> (...) el vídeo [película] parte de lo concreto, visible e inmediato que actúa en todos los sentidos, siempre tenemos a nuestro alcance recortes visuales que ofrece esta tecnología. El vídeo [película] es un medio tecnológico que nos permite experimentar sentimientos de los demás, del mundo y de nosotros mismos. (Santos, 2010, p.10).

Siendo las matemáticas un campo de conocimiento que requiere la abstracción y el razonamiento, a veces avanzados, para su comprensión, es el cine un medio de enseñanza que puede apoyar el aprendizaje. Para Santos (2010) el cine puede ser útil para la ilustración de los objetos solamente imaginables y comúnmente citados en el aula. Así, sugiere que el profesor seleccione los vídeos que permiten el movimiento a los objetos gráficos manipulables (...) “[Pero también] a trabajar con el video específicamente para empezar

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

temas relacionados con el área de Historia de las Matemáticas, simetría, mosaicos y perspectivas"(Santos, 2010,p.21)

La película también puede ayudar a los estudiantes a conocer la diversidad cultural de los matemáticos creadores de las teorías relevantes en la evolución de las matemáticas, para lo que el profesor que quiera usar este recurso debe tratar de ser creativo, para disfrutar mejor de este medio, relacionándolo con un contenido de la enseñanza (Viana & Teixeira, 2009).

Vale la pena señalar que la película, que es un arte visual, permite al espectador abstenerse temporalmente del lenguaje escrito. Con la alta tasa de analfabetismo en el país (Brasil), Alencar (2007) afirma que el uso del cine es una forma de instrucción

> porque la imagen despierta la curiosidad, genera interés y facilita el aprendizaje, ya que mantiene mejor aquello que se ve. Y explica que: La película permite el encuentro entre las personas, expande el mundo de cada uno, muestra en la pantalla lo que es familiar y lo desconocido y estimula el aprendizaje. Creo que la película agudiza la percepción, la convierte en un razonamiento más ágil en la medida que, para comprender el contenido de una película, es necesario concatenar todos los recursos del lenguaje cinematográfico utilizados en la evolución del espectáculo y que se desarrollan rápidamente (Alencar, 2007, p.137).

Es así porque la información que debe ser extraída de la película no siempre está explícita en las escenas, pudiendo estar implícita en un discurso, en un escenario, en una manera de actuar de los personajes, etc. (Viana y Pinto, 2013; Cipolini, 2008).

Además, Oliveira (2006), señala que la película puede ser considerada un instrumento científico pues

> posibilita diversos tipos de experimentos y el registro de acontecimientos históricos en condiciones inhóspitas o no, discernible a los ojos desnudos, permitiendo observaciones repetidas y análisis detallados con la separación de los momentos (Oliveira, 2006, p.134).

El cine como medio de enseñanza

La educación está pasando por una fase en la que el profesor debe desplegar la atención y los esfuerzos para lograr su objetivo, teniendo en cuenta la variedad de ambientes de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes porque:

> Aprender hoy ocurre no sólo en la escuela sino también fuera de ella, principalmente a través de los medios de comunicación de masas, incluyendo el

> cine. Nada mejor entonces, que aprovechar para educar y formar a los jóvenes con imágenes, sonidos y el lenguaje cinematográfico como una fuente adicional de conocimiento (Alencar, 2007, p.15).

Por lo tanto, para tener éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje el profesor tiene que recurrir a diferentes métodos que requieren la inclusión de los medios de enseñanza también diferenciados.

Para discutir los métodos y medios de enseñanza, es necesario presentar las definiciones que permean el trabajo: "Los métodos de enseñanza son las formas en que losprofesores trabajanlos distintos contenidos con el finde alcanzar los objetivos

propuestos" (Machado, 2002, p. 12). Y este autor completó, añadiendo que:

> La definición del método de enseñanza fue desarrollado de esta manera, comprende los métodos en sus dos dimensiones: como el plan ideal de la acción a realizar por los profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y cómo se ha desarrollado con eficacia sus propias actividades. Estas dos dimensiones por lo general no son coincidentes en una evaluación del proceso, pero se revelan como etapas inseparables del mismo sistema (Machado, 2002, p. 12).

Mediante el desarrollo de un método apropiado para la enseñanza de contenidos específicos (y para determinados alumnos), el profesor puede sentir la necesidad de utilizar herramientas apropiadas para lograr su objetivo. Estas herramientas son los medios de enseñanza que para Machado (2002) son:

> (…) los recursos materiales portadores de información que utilizados por los profesores y los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje con ciertas condiciones previamente planificadas, facilitan la comunicación docente y el aprendizaje, ya sea mediante la presentación o representación de aspectos de la realidad concernientes al plan de estudios, ya sea por mediación de los sistemas simbólicos que permiten una relación crítica-activa de los estudiantes con su entorno - el ambiente físico y el espacio sociocultural (Machado, 2002, p.16).

Por lo tanto, considerando la película como un medio de enseñanza, el educador puede desarrollar un método de enseñanza apoyado en él, descubriendo en las películas el proceso de escolarización, extrayendo reflexiones que animen a los estudiantes a pensar más profundamente, pues ahí se encuentra la clave del uso de la película en clase.

ISBN 978-84-945722-3-4

> El cine puede cumplir un papel saludable y enriquecedor en el proceso de escolarización. No hay manera de entender la comunicación de imágenes sin pensamiento, sin esfuerzo intelectual. El fácil acceso a las imágenes no significa una fácil comprensión de sus formas (Carmo, 2003, p.79).

Para ello, es importante que el profesor actúe como el mediador, el fundador y director de las actividades que se van a realizar,"que revisa constantemente sus prácticas pedagógicas, que no impone verdades y que no es una autoridad absoluta en esta propuesta pedagógica" (Viana, Rosa &Orey, 2014, p.140).

Por otro lado, tanto el cine como cualquier otra herramienta que ayuda o proporciona el aprendizaje deben ser planeados de antemano y adecuados al público objetivo. El cine, en particular, requiere más atención en cuanto a su uso, como explica Viana (2010, p.12): (...) "las películas deben ser elegidas por la articulación de los contenidos y

conceptos trabajados (o a ser trabajados) teniendo en cuenta el conjunto de metas a alcanzaren la disciplina".

Además, es necesario que al profesor le guste el cine; puede elegir entre muchas películas una que le sirva o una sugerida por colegas. Y como dice Viana et al (2010), no siempre para determinados contenidos hay una película que le sirva como herramienta educativa adecuada.

Investigaciones sobre el cine en la educación matemática

Mirando los bancos de tesis y catálogos de libros, no hay trabajos relacionados con el uso de películas en las clases de matemáticas, es decir, sobre el cine como un medio para la enseñanza de conceptos matemáticos. Tesis y disertaciones, casi siempre, están dedicadas a la educación en general.

El uso de películas en la formación de profesores de matemáticas, en particular, en las clases de matemáticas, en Brasil, es nuestra iniciativa. Orientamos la primera disertación en maestría que se ocupa, exactamente, de las películas en las clases de matemáticas (Coelho, 2015), aunque ya orientamos varias monografías sobre el tema, al igual que Teixeira (2008) y Pinto (2012).

Pero no tenemos la intención de presentar propuestas e ideas para el trabajo como únicas, estáticas o definitivas: apoyamos la investigación y la experiencia. Es un proceso que depende, por lo tanto, la explotación de las películas y mucha (un montón de) experimentación, todavía en todavía en construcción. No hay una receta para encontrar la

ISBN 978-84-945722-3-4

película adecuada para cierto contenido; es incluso posible que no haya o si la hay, no sea conocida por el profesor. Para utilizar una película, debe tenerse en cuenta el contenido que se va a presentar. Tiene que haber una razón y un *script* para el desarrollo de las actividades, como ejemplo el guión de actividades en el cuadro siguiente:

Cuadro- Guión de actividades para a película Cadena de Favores

1-¿Usted ha percibido el mensaje de la película? ¿Qué le ha parecido? 2-¿Le ha gustado? ¿Por qué? 3-Si ha entendido bien la idea de Trevor: explíquela matemáticamente. De 3 buenas acciones o beneficios prestados pasaríamos en una segunda etapa para 9, de los 9 para 27 y así sucesivamente. En grupo, investiguen sobre este asunto para presentarlo en seminario durante la clase. 4-Ustedes ya deben conocer las famosas cadenas de dinero, donde los finalistas siempre pierden. Al contrario de estas, en grupo, piensen en una cadena del bien e intenten ejecutarla. Presentar los resultados en seminario durante la clase.

Fuente: Pinto (2013).

El proceso de utilización de una película en una clase de matemáticas se ejemplifica con la que utilizó Pinto (2012) en su investigación en una clase del 1er año de la Enseñanza Media con 30 alumnos, con la película Cadena de Favores (2000). De hecho se trata de una sucesión, los estudiantes investigaron el significado matemático de las acciones en cadena. Los alumnos realizaron seminarios, trabajos escritos y respuestas a dos pequeños cuestionarios que además del cuaderno de campo del investigador y de la entrevista al profesor del aula, fueron instrumentos de recoleta de datos.Los alumnos identificaron la corriente como una progresión geométrica de razón tres, y esto les llevó a investigar sobre el tema y a solicitar al profesor, de la clase, iniciar el estudio y que usara más películas en la clase (Viana & Pinto, 2013).

De la entrevista con el profesor del aula fue posible saber: que los participantes de la investigación quedaran admirados de haber una idea matemática en una película; después de la exhibición de la película y realización de las actividades, los alumnos estaban contentos y listos para el estudio de las progresiones; ellos dijeron que deseaban estudiar el asunto, pues ya conocían la idea principal y ofrecieron sugerencia que él también utilizase más películas pues les gustaran los resultados.

El profesor del aula dijo también que los estudiantes se han vuelto más interesados en conocer el contenido. También fue notable que desarrollaran mejor, incluso en comparación con otros grupos con los que he trabajado. No fue sólo el uso sino también el conocimiento de los conceptos que estaban mejor. Algunos incluso llevaron sus casos del día a día a las aulas. Y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

además creo que es una gran estrategia para mostrar a los estudiantes la oportunidad de aprender el contenido dejando un poco de teoría y pasar a la práctica. Ellos entienden un poco más cómo funciona la ciencia. Y fomentar la ciencia, en mi opinión, es el principio de todo el estudio.

Además,el uso de la película promovió también el incentivo a la lectura, pues los participantes tuvieron que consultar materiales, leer e interpretar lo que estaba escrito. La importancia de la solidaridad fue fuertemente demostrada en la idealización de las cadenas. Cómo se decidió por una película que sirviese a los dos objetivos: introducir un contenido y posibilitar la formación de valores, se concluyó que ambos fueron alcanzados en totalidad.

Consideraciones Finales

La investigación que se presenta requiere tareas como levantar un marco teórico sobre el uso de herramientas de enseñanza de contenidos matemáticos, del papel del cine en este marco teórico y el desarrollo de actividades relacionadas a esta teoría con el fin de examinar su práctica.

En las actividades de enseñanza en general es siempre bienvenido todo lo que la mejore, haciendo que el alumno aprenda. Pero la teoría y la práctica deben ir de la mano, de modo que una complemente a la otra. Dijo Pimenta (1997, p.53): “La práctica se entiende, entonces, como la relación entre la comprensión y la acción”. Por lo tanto, es necesario promover la actividad de los estudiantes, que no pueden recibir pasivamente una lección. Las películas, además de aumentar su interés para las clases, pueden hacer de ellos personas más críticas, establecer relaciones entre lo que ven y cómo viven. (Machado, 2002). Es posible ver que películas en clase pueden servir como fuente de análisis y de discusión de temas relacionados también con las matemáticas.

También pueden servir como un enlace entre los aspectos prácticos y teóricos de cierto tema y, por lo tanto, se pueden utilizar en clase películas que pongan de relieve diferentes aspectos y temas con objetivos que van más allá del arte o del entretenimiento (Viana, 2010). La pregunta es desentrañar cómo las clases de matemáticas pueden favorecerse con este recurso. Con todo lo que se ha producido hasta ahora nos damos cuenta de que la película ya se acepta como una herramienta útil para tener éxito en el ámbito escolar, y se presenta con buenos

ISBN 978-84-945722-3-4

resultados en la enseñanza de Historia, Biología, Literatura, Medio Ambiente y otras (Coelho & Viana, 2011).

Como no se encontraron disertaciones y tesis (en Brasil) que consideren el cine como una herramienta de enseñanza para el aprendizaje de contenidos matemáticos, el tema de nuestra obra es inédito, lo que confirma la necesidad de llevar a cabo nuestra investigación.

Referencias bibliográficas

Alencar, S. E. P. (2007). *O cinema na sala de aula*: uma aprendizagem dialógica da disciplina história. Tesis de maestría no publicada. Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza. CE. Brasil.

Cadena de Favores (2000). Direção: Mimi Leder. Produção: Peter Abrahms, Robert Levy e Steven Reuther. EUA: Warner Bros.

Carmo, L.(2003). O cinema do feitiço contra o feiticeiro. *OEI – Revista Iberoamericana de Educación*, 32,pp. 71-94.

Cipolini, A. (2008). *Não é fita, é fato: tensões entre instrumento e objeto. Um estudo sobre a utilização do cinema na educação*. Tesis de maestría no publicada. Faculdade de Educação da USP. São Paulo.

Coelho, R. M. F.& Viana, M. C. V. (2011). A utilização de filmes em sala de aula: um breve estudo no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da UFOP. *Revista da Educação Matemática da UFOP*, 1, 89 – 97.

Coelho, R. F. M.(2015). *O uso do cinema como ferramenta educativa no ensino de Matemática: uma experiência com alunos do Ensino Médio de Ouro Preto-MG.Tesis de maestria no publicada*. Instituto de ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

Machado, A. V. (2002). *La utilización de películas históricas comerciales para el desarrollo de la crítica en la enseñanza de la Historia en el nivel medio*. Tesis doctoral no publicada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.

Oliveira, B. J. (2006). Cinema e imaginário científico. *História, Ciências, Saúde,* 13,p. 133-50.

Pinto, R. A. (2012). *A utilização de filmes em sala de aula para a aprendizagem de Matemática.*Trabajo final deGraduaciónno publicada. Instituto de ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

Pimenta, S. G., (org.) (1997). *Didática e Formação de Professores*: percursos e perspectivas no Brasil e em Portugal. São Paulo: Cortez.

ISBN 978-84-945722-3-4

Santos, A. L. S. (2010). *O uso de vídeos na escola de tempo integral.* Trabalho de Conclusão de Curso (Mídias na Educação -Lato - Sensu) – Secretaria de Educação a Distância – SEED/MEC, Universidade Federal do Rio Grande, Florianópolis, Brasil.

Viana, M. C. V.&Teixeira, A., F. (2009*). A História da Matemática vai ao cinema. En: Annales del VIII Seminário Nacional* de História da Matemática. Belém-PA: SBHMAT.

Viana, M. C. V., (2010). *O Cinema na Sala de Aula e a Formação de Professores de Matemática*. Minicurso oferecido aos alunos do Curso de Matemática na UFRRJ. Seropédica- RJ.

Viana, M. C. V.(2011). *A formação de professores vai ao cinema*: 51 roteiros de filmes para serem usados na sala de aula. Ouro Preto: UFOP.

Viana, M. C. V**.**& Pinto, R. A. (2013). A corrente do bem: um filme pode motivar a aprendizagem de progressões geométricas. En: *Annales del XI Encontro Nacional* de Educação Matemática – ENEM. Curitiba, PR: SBEM.

Viana, M. C. V.; Rosa, M; & Orey, D. C. (2014). O cinema como uma ferramenta pedagógica na sala de aula: um resgate à diversidade cultural. *Ensino em Re-vista*, 21, 137 – 144.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-834

COMPETÊNCIAS GERAIS DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE COMPARATIVA CURRICULAR

Daniela Jéssica Veroneze – Nilce Fátima Scheffer
dveroneze@hotmail.com – nilce.sheffer@uffs.com.br
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI Frederico Westphalen, Brasil – Universidade Federal Fronteira Sul – UFFS Chapecó, Brasil

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: 3. Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Competências gerais. Documentos Curriculares. Matemática no Ensino Fundamental.

Resumen
Contemporaneamente, busca-se, orientar as finalidades da educação formal, por meio de currículos e documentos. Para garantir a qualidade desta, são elaboradas leis, resoluções, diretrizes e documentos, os quais norteiam a organização dos currículos sendo, na maioria das vezes, discutidos democraticamente. Ao analisar documentos nacionais e internacionais, observam-se características similares. Uma dessas características corresponde à definição de objetivos/competências gerais para a educação básica, bem como para os níveis de ensino e disciplinas. Esta produção, de caráter bibliográfico e documental, tem por objetivos explicitar o conceito de competências, gerais e específicas, apresentar as competências gerais atribuídas por diferentes documentos e currículos nacionais e internacionais (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura - UNESCO (1996), Projeto Definição e Seleção de Competências (2002), Currículo Vasco (2006), Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e Base Nacional Comum Curricular (2016)), assim como, destacar as competências gerais para a área de matemática no Ensino Fundamental. O estudo a ser apresentado tem por objeto de trabalho, expor que as competências gerais são aquelas que expressam o perfil a ser formado, os permanentes debates e as reformulações devido às mudanças sociais, buscando, formar cidadãos de forma integral tendo em vista as abordagens pessoal, social e profissional.

1 Introdução

Os documentos nacionais e internacionais que buscam orientar a elaboração dos currículos da Educação Básica têm, como característica comum, o desenvolvimento integral dos alunos e o bom funcionamento escolar. Dentre esses documentos, destacam-se: o relatório enviado à Comissão Internacional da Educação para a UNESCO (1996),

ISBN 978-84-945722-3-4

os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998)[14], o Projeto Definição e Seleção de Competências Chaves (DeSeCo) (2002), Currículo Vasco para a escolaridade obrigatória (2006) e a nova Base Nacional Comum Curricular (2017). Estes documentos, entre outras coisas, elencam as competências ou objetivos que devem ser desenvolvidos e atingidos em toda escolaridade.

Entende-se que o conceito de competências é polissêmico, porém neste trabalho, assume-se a definição de Perrenoud (1999, p. 7), quando afirma que uma competência é a "[...] capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada de conhecimentos, mas sem limitar-se a eles". Ou seja, competências, são capacidades (atitudes, habilidades, procedimentos e conhecimentos) que são mobilizadas e acionadas em diferentes situações.

Este artigo de caráter bibliográfico e documental tem por objetivos explicitar o conceito de competências, competências gerais e específicas, apresentar as competências gerais atribuídas por diferentes documentos e currículos nacionais e internacionais, assim como destacar as competências gerais para a área de matemática no Ensino Fundamental.

2 Competências gerais: uma visão ampla

Caracteriza-se como competência geral, segundo Zabala e Arnau (2010) observam que competências gerais são aquelas que possuem intervenção eficaz nos diferentes âmbitos da vida, as quais possam mobilizar atitudes, procedimentos e conceitos para responder situações complexas e inusitadas. Para os autores as competências devem favorecer o desenvolvimento das dimensões necessárias à função humana, sendo elas de nível social, interpessoal, pessoal e profissional. No que tange as competências específicas, estas são interpretadas como competências relacionadas a apenas uma disciplina.

Para os organizadores do relatório entregue para a UNESCO, Delors et al. (1996), as competências devem ser desenvolvidas em quatro fundamentais pilares, que são: saber conhecer, saber fazer, saber ser e saber conviver. Este documento foi nomeado como

[14] Com a apresentação da nova Base Nacional Comum Curricular no Brasil em abril de 2017, este trabalho dispensará a análise dos PCN.

ISBN 978-84-945722-3-4

“Educação: um tesouro a descobrir”, deliberando a educação como um dos grandes trunfos indispensável para construção da paz, da justiça e da liberdade.

A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) – instituinte das provas do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA) – declarou que o êxito dos alunos nas provas e na vida fora da escola, depende de uma gama de competências. Dessa maneira, no ano de 2002, criou o Projeto DeSeCo (2002), para que pudesse fornecer mais orientações para o desenvolvimento das competências.

O Currículo Vasco para escolaridade obrigatória (2006) propôs um currículo de base comum, buscando melhor desenvolvimento da sociedade vasca. O documento levou em consideração os quatro pilares da educação construídos pela UNESCO. Propõe-se nele, além de definir, apresentar e explicar as competências gerais para educação, as competências específicas de cada disciplina, assim como seus conteúdos atitudinais, conceituais e procedimentais de cada matéria.

Em 2015 o governo brasileiro decidiu em colaboração com os entes federados e com associações educacionais, reformular a base comum curricular, esta que excluirá os PCN e o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCNEI). A BNCC, em sua terceira versão enviada para aprovação do Conselho Nacional de Educação, propõe uma base comum aos currículos escolares do país, igualando os objetivos e competências das escolas nacionais em 60%. Com a mudança inesperada de presidente, no ano de 2016, sua estruturação sofreu algumas modificações, uma vez que sancionou-se a Reforma do Ensino Médio. Assim a última versão não apresenta o último nível do ensino básico. A BNCC apresenta para o Ensino Fundamental, as competências gerais para este nível, bem como, as competências específicas para cada disciplina.

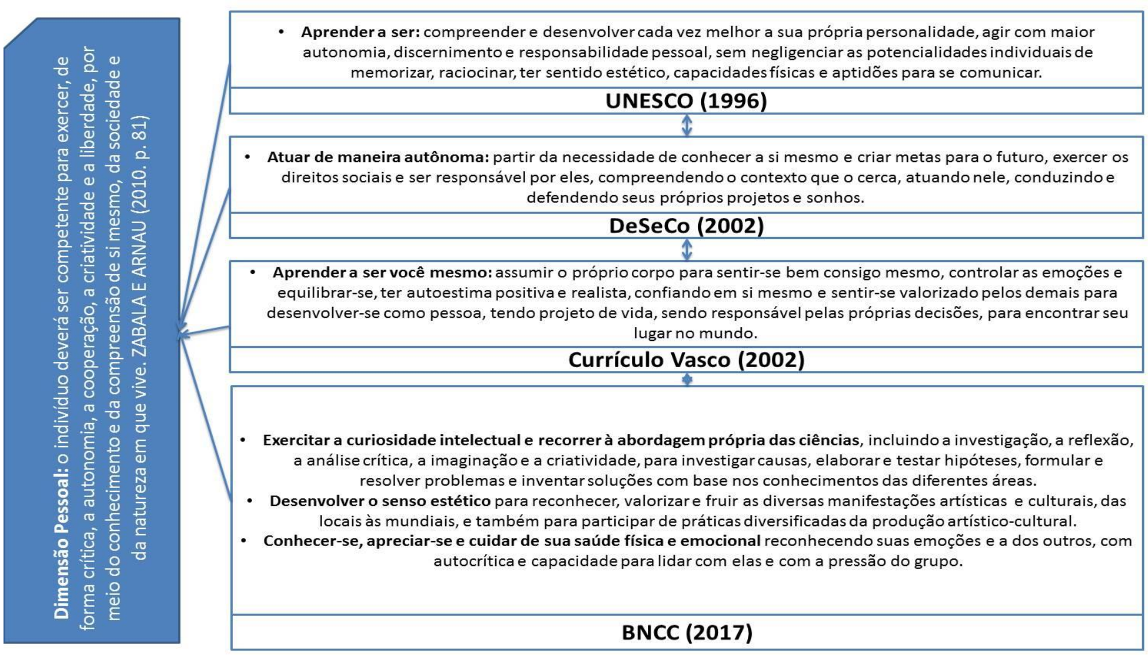
Ao analisar os referidos documentos e estudar os diferentes autores, nota-se que, entre estes, existe certa correlação – não fechada – em torno das competências gerais e estas voltam-se às quatro dimensões do desenvolvimento humano citadas por Zabala e Arnau (2010), isso que pode ser visto nas Figuras 1, 2 e 3.

Figura 1: Correlação entre as competências gerais apresentadas pela UNESCO, DeSeCo, Currículo Vasco, BNCC e a dimensão “social e interpessoal” de Zabala e Arnau (2010).

ISBN 978-84-945722-3-4

Fonte: OS AUTORES (2017).

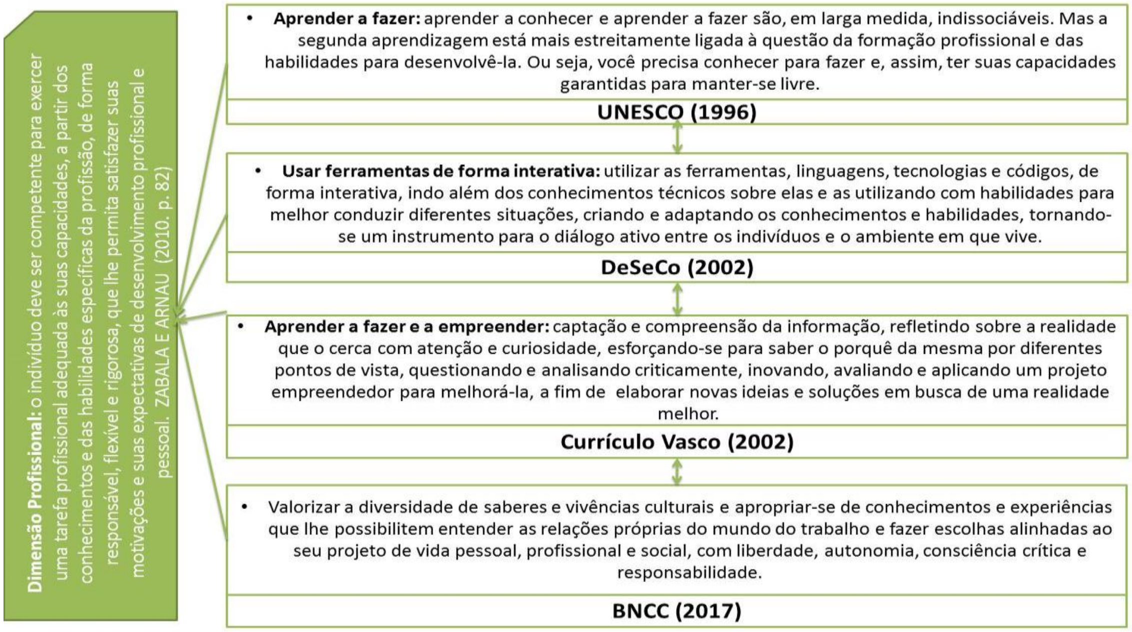
Figura 2: Correlação entre as competências gerais apresentadas pela UNESCO, DeSeCo, Currículo Vasco, BNCC e a dimensão "pessoal" de Zabala e Arnau (2010).



Fonte: OS AUTORES (2017).

Figura 3- Correlação entre as competências gerais apresentadas por UNESCO, DeSeCo, Currículo Vasco, BNCC e a dimensão "profissional" de Zabala e Arnau (2010).

ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: OS AUTORES (2017).

Ao observar as figuras e analisar os documentos, entende-se, pois, a necessidade de mediação das escolas, pela busca do desenvolvimento integral do aluno, conduzindo-o a conhecer a si mesmo, sua personalidade, auxiliando e mediando o desenvolvimento de conhecimentos, habilidades e atitudes que possam levá-lo ao bom convívio com o outro, contribuindo para a criação de plano individual para a vida, a qual envolva tanto seu perfil cidadã como o profissional. Observa-se igualmente que, as competências gerais, nada mais são do que as finalidades da educação – básica e/ou superior – e/ou das instituições profissionais, pois elas representam parte do perfil a ser formado.

A partir das competências gerais apresentadas pelos autores e documentos, pode-se perceber que as mesmas complementam-se e relacionam-se, demonstrando que o papel da escola deve estar além da transmissão sequencial de conhecimentos acadêmicos. Essa complementação ocorre tendo em vista que as competências gerais, são compostas por competências específicas de cada disciplina e de competências não-disciplinares, torando-se assim, dependentes entre si.

3 Competências gerais de matemática

ISBN 978-84-945722-3-4

De acordo com o Currículo Vasco para escolaridade obrigatória (2006)[15], a Educação Básica deveria focar no desenvolvimento de seis grandes competências gerais na área de Matemática, as quais visam: planejar e resolver, individual e coletivamente,
diferentes problemas e situações do cotidiano, vinculados a matemática e a outras áreas do conhecimento, resolvendo este problemas e situações por meio de diferentes estratégias, assim como refletindo sobre as respostas encontradas, com a finalidade de atuar de forma responsável no meio social (1); identificar, relacionar, descrever e representar os elementos matemáticos presentes no campo científico e social, com a intensão de analisa-los criticamente, a fim de compreender melhor as informações e conhecimentos (2); utilizar autonomamente e criativamente ferramentas matemáticas e tecnológicas, visando explicar o próprio pensamento (3); representar e descrever os objetos e situações matemáticas, assim como a composição e a configuração espacial, partindo das informação dadas para o contexto, compreendendo, analisando e resolvendo problemas do mundo físico por meio do conhecimento geométrico (4); realizar com confiança e segurança cálculos, utilizando-se de procedimentos mais adequados a cada situação, como também efetuar estimativas, para interpretar e avaliar situações reais (5); e raciocinar e argumentar matematicamente de forma adequada, em diferentes contextos, buscando compreender e criticar os próprios e os demais argumentos (6).

A BNCC (2017) têm nove competências de aprendizagem para a matemática no Ensino Fundamental, sendo eles: identificar os conhecimentos matemáticos como meios de compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes (1); estabelecer relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento e comunicá-las por meio de representações adequadas (2); fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para

[15] **Entende-se que a faixa etária e a nomenclatura atribuída para o Ensino Fundamental proposta no Currículo Vasco (2006) é diferente da do Brasil, porém, tentou-se elencar aquelas que mais pertencem ao mesmo nível nacional.**

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes (3); enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de textos escritos na língua materna (4); utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (5); agir individual ou coletivamente com autonomia, responsabilidade e flexibilidade, no desenvolvimento e/ou discussão de projetos, que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza (6); interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (7); Sentir-se seguro da própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (8); reconhecer que a matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções inclusive com impactos no mundo do trabalho (9).

Analisando as competências gerais para a área da Matemática, podemos notar que estas buscam atender as quatro dimensões expressas por Zabala e Arnau (2010) e, consequentemente, as demais competências gerais descritas pelos documentos citados. Nessa ótica, compreende-se que as competências gerais da Matemática apresentadas pelos documentos norteadores do ensino a serem desenvolvidas, voltam-se a: interpretar e resolver problemas e situações utilizando-se de elementos matemáticos, buscando e aplicando estratégias matemáticas para solucioná-los; ser autônomo e criativo para explicar problemas e situações; argumentar matematicamente; utilizar tecnologias para visualizar, representar, compreender e demonstrar os conhecimentos matemáticos; possuir segurança ao utilizar a linguagem, os conceitos e os procedimentos matemáticos; estabelecer conexões entre a

ISBN 978-84-945722-3-4

Matemática e outras disciplinas, bem como com a realidade que o cerca. Para isso, os alunos necessitam estimar resultados, deduzir fórmulas, calcular mentalmente, calcular corretamente, representar geometricamente e algebricamente, criar hipóteses, utilizar as tecnologias a favor do conhecimento, como também avaliar e analisar as respostas encontradas com criticidade.

3 Considerações finais

Ao analisarmos os documentos apresentados, que contemplam competências gerais transversais, gerais de cada área e disciplina e as específicas, reiteramos que as competências possuem uma função dialética e que estas interagem entre si, sendo que cada uma delas possui papel fundamental na vida do alunado. Porém, para o bom desenvolvimento destas, deve-se rever não só os currículos, mas também o trabalho do professor e as condições que a escola e o meio social oferecem.

Sem conhecimentos profundos sobre conteúdos e procedimentos, assim como sem prover de atitudes éticas e responsáveis, torna-se mais complexo mobilizar e responder a problemas e situações com eficiência. Deste modo, é necessário desenvolver atividades por meio de diversas metodologias, levando o aluno a pensar, interagir com o meio, buscar soluções autônomas e coletivas, com criticidade e criatividade, curiosidade vislumbrando a justiça e a equidade social.

Quanto aos documentos curriculares, observa-se que suas competências gerais têm por finalidade, formar cidadãos emancipados, conhecedores do mundo, que busquem suas metas, possuam habilidades, uma profissão e sejam feliz nela, assim como saibam trabalhar juntos e queiram o bem comum. No que diz respeito à matemática, observa-se que ambos os currículos analisados pretendem formar os alunos competentes em matemática, conhecedores da área e que tenham a capacidade de relacionar seus conhecimentos com os demais campos do saber e com o mundo físico, resolvendo problemas e situações que necessitam dos conhecimentos com eficiência.

Referências bibliográficas

BRASIL. (2017). Ministério da Educação. Base Nacional Curricular Comum: documento preliminar. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Consultado 13/04/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

DELORS, J. (Coord.). (1996). *EDUCAÇÃO:* um tesouro a descobrir - Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. São Paulo: Cortez.

OCDE. (2002) Proyecto: Definitions et selection des competences. Fondements theoriques et conceptuels. Document de strategie. http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco. Consultado 15/03/2017.

PERRENOUD, P. (1999). *Construir competências desde a escola.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

UNIÃO EUROPÉIA. (2006). Departamiento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Currículo Vasco para el periodo de la escolaridad obligatoria: propuesta para su valorización y mejora. [s.n.]. 2006. http://www.euskalcurriculuma.eus/sites/default/files/dokumentuak/CASTELLANO.pdf. Consultado 15/03/2017.

ZABALA, A.; ARNAU, L. (2010). *Como aprender e ensinar competências*. Porto Alegre: Artmed.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-835

CÁLCULO MENTAL E CALCULADORA: POSSIBILIDADES NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Vanessa de Oliveira – Rosa Monteiro Paulo – Raissa Samara Sampaio
vanessadeoliveira31@yahoo.com – rosamonteiropaulo@gmail.com – raissa.samara@yahoo.com.br
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" / Brasil

Núcleo temático: V - Recursos para ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário
Palavras chave: Ensino de Matemática; Estratégias; Educação Matemática; Fenomenologia

Resumo

Neste artigo apresentam-se alguns aspectos relativos ao trabalho com cálculo mental e calculadora nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O interesse pelo tema originou-se na pesquisa de Conclusão de Curso na qual algumas tarefas de Cálculo Mental foram desenvolvidas com alunos do 5º ano. O uso da calculadora permitiu que os alunos explorassem caminhos, possibilidades e conteúdos matemáticos em tarefas que envolviam o cálculo mental. O objetivo era a análise de estratégias pessoais, usadas pelos alunos, para a resolução de problemas. Para o planejamento das tarefas estudamos documentos que orientam as práticas pedagógicas nesse nível da escolaridade como os Parâmetros Curriculares Nacionais, as Orientações Curriculares do Estado de São Paulo para Anos Iniciais do Ensino Fundamental – Matemática e o Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. A partir desse estudo pudemos compreender como o trabalho com a calculadora e o cálculo mental são tratados e, a partir dai, elaborar tarefas. Neste texto discutimos os modos de expressão do raciocínio, a estruturação da argumentação e a justificativa utilizada pelos alunos ao realizarem tarefas que envolvem o cálculo mental com uso da calculadora.

Introdução

Diariamente somos confrontados com um grande volume de informações. Ao direcionarmos nosso olhar para as informações numéricas que possuem diversas representações – gráficos, tabelas, diagramas, porcentagens, entre outros, ressaltamos a importância do desenvolvimento de habilidades que permitam a interpretação e a tomada de decisões fundamentadas e críticas.

Refletindo sobre a importância dos alunos reconhecerem as possibilidades que existem dentro e fora da sala de aula entendemos que o Cálculo Mental merece destaque nas aulas de

ISBN 978-84-945722-3-4

matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que promove um ambiente de aprendizagem cujo aluno e professor se tornam protagonistas do processo de produção de conhecimento matemático.

Por muito tempo, as aulas de matemática dos anos iniciais foram pautadas no ensino precoce de algoritmos. Esse fazer tornou-se mecânico e, por meio dos algoritmos, manteve "os alunos a margem do pensamento crítico, desvinculado com às necessidades de uma formação para a cidadania" (PAVÃO e MÜLLER, 2005, p. 1797). As palavras dos autores nos instigam e questionamos: será que apenas habilidades em técnicas operatórias são suficientes para a aprendizagem matemática nos anos iniciais?

Isso nos leva à pesquisa e este artigo tem como objetivo expor o compreendido acerca da literatura que trata do ensino de matemática nos anos iniciais bem como trazer parte da experiência vivida com alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Taubaté, São Paulo. Essa experiência fez parte do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática que objetivou compreender como alunos do 4º e 5º ano expressam seu raciocínio na resolução de situações envolvendo Cálculo Mental. A vivência nos inspirou a aprofundar os conhecimentos sobre o trabalho com calculadora e Cálculo Mental levando-nos, inclusive, à pesquisa de mestrado.

Dialogando com a literatura

Diante de situações que exigem avaliar possibilidades, ponderar opções e tomar decisão cada pessoa elege um modo próprio de caminhar. Na sala de aula esse procedimento não é distinto. Por isso, o ensino de matemática, em especial nos anos iniciais do Ensino Fundamental, deve valorizar e priorizar as justificativas e a exposição dos caminhos escolhidos que permitam aos alunos apresentar a compreensão matemática. Esse modo de pensar leva-nos à autores que discutem o ensinar e aprender matemática nesse nível da escolaridade e, mais especificamente, o Cálculo Mental.

As leituras efetuadas nos mostram que não há uma definição para Cálculo Mental, porém podem-se destacar algumas de suas características.

Teixeira e Rodrigues (2015) destacam que o Cálculo Mental "é um cálculo pensado, e não mecanizado, pressupõe o domínio das propriedades das operações, dos números e das relações que podem ser estabelecidas entre os mesmos" (p. 252). Valorizando-se, na sala de

ISBN 978-84-945722-3-4

aula, um trabalho com o Cálculo Mental que o conceba desse modo, ele se torna um "cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números" (BUYS, 2001 apud TEIXEIRA e RODRIGUES, 2015, p. 252.) em que é necessário um "conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados" (PARRA, 1996, p.195).

Desse modo pode-se compreender que o Cálculo Mental não pressupõe uma estratégia específica – ou particular - a ser utilizada e isso permitindo ao aluno se lançar na busca de um procedimento de resolução de um problema ou de um desafio. Ou seja, "o Cálculo Mental está sempre subjacente à ideia de seleção de uma estratégia a usar, a qual varia de acordo com os números e as operações envolvidas nos cálculos" (TEIXEIRA e RODRIGUES, 2015, p.253).

As possibilidades de escolhas permitem que cada aluno assuma uma maneira consciente e crítica de resolver um problema. Viabiliza a formação da consciência critica que não é relevante apenas no ambiente escolar, mas em toda a vida podendo "enfrentar um mundo que cada vez mais exige criatividade autonomia e segurança para realizar atividades diversas" (FONTES, 2010, p.40).

É nessa sociedade em constante transformação, onde as tecnologias estão presentes, que o Cálculo Mental precisa ser visto. Mas como se pode compreender a convergência entre um trabalho que valorize o Cálculo Mental e o uso de tecnologias como, por exemplo, a calculadora? Segundo o que compreendemos a resposta a essa questão depende do que se compreende por desenvolvimento do Cálculo Mental, isto é, do significado assumido para Cálculo Mental. Vamos, embora de modo breve, elucidar alguns aspectos que permitam compreender essa aproximação do Cálculo Mental com as tecnologias.

Costa e Carvalho (2014) afirmam que o uso de tecnologias na sala de aula tem ganhado destaque, fazendo parte da realidade dos alunos. No entanto o modo pelo qual ele é usado nos cotidiano não tem o mesmo sentido com o qual elas são empregadas em sala de aula. Logo a presença dos recursos tecnológicos em sala de aula tem merecido atenção de modo que seja possível explicitar o "papel que eles desempenham ao fornecer subsídios ao professor em sua tarefa de ensinar e ao disponibilizar suporte aos alunos" (COSTA e CARVALHO, 2014, p.2) para a aprendizagem.

ISBN 978-84-945722-3-4

Arruda (2010), afirma que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) "constituem um conjunto [...] de ferramentas, suportes e canais, cujo núcleo central consiste na capacidade cada vez maior de tratamento da informação, ou seja, de dar forma, registrar, armazenar e difundir conteúdos informacionais" (ARRUDA, 2010, p. 27). Assim compreendidas, as TIC podem ser vistas como relevantes ao ensino de matemática tanto quanto, por exemplo, o giz, a lousa ou o livro didático.

O uso da calculadora em sala de aula é evidenciado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como uma forma de possibilitar a compreensão dos procedimentos de cálculos ou como estratégia para a verificação de resultados ou mesmo seu controle. "A calculadora será usada como recurso, não para substituir a construção de procedimentos de cálculo pelo aluno, mas para ajudá-lo a compreendê-los" (BRASIL, 1997, p.49).

Nas Orientações Curriculares Do Estado De São Paulo Anos Iniciais Do Ensino Fundamental – Matemática, documento que orienta a elaboração de propostas didáticas e organização de práticas pedagógicas de professores e gestores, o trabalho com a calculadora é essencial ao desenvolvimento das competências de cálculos e de habilidades para lidar com situações do cotidiano. Ou seja, a calculadora contribui para o desenvolvimento das habilidades de cálculo uma vez que permite ampliar o repertório de estratégias dos alunos. Apesar das recomendações dos documentos oficiais a calculadora na sala de aula tem gerado grande discussão, principalmente no que se refere a sua inserção no ensino de matemática para alunos dos anos iniciais.

> O preconceito e a crença de que o Cálculo Mental e o raciocínio lógico possam ficar prejudicados se o aluno utiliza a calculadora, levam muitos professores, sobretudo os dos anos iniciais, a rejeitarem seu uso como recurso para auxiliar a construção de conhecimento numérico pelos alunos (COSTA e CARVALHO, 2014, p. 6)

Porém, se compreendemos que ao trabalhar com a calculadora os alunos precisam tomar decisões, uma vez que "a calculadora não opera por si mesma" (SELVA e BORBA, 2010, p.11), vê-se que o recurso não limita a autonomia do aluno. Ao contrário ela "proporciona ao aluno [oportunidades para fazer] experimentações e investigações, para auxiliá-lo na descoberta de singularidades e regularidades, para fazer generalizações e observar particularidades" (COSTA e CARVALHO, 2014, p. 6) sendo, portanto, importante a produção de conhecimento.

ISBN 978-84-945722-3-4

Isso vai mostrando que o trabalho em sala de aula deve voltar-se para a proposta de situações que levem o aluno a promover a articulação entre estratégias, conhecimentos, recursos e habilidades que lhe permitam compreender-se fazendo matemática.

A Experiência Vivida

A pesquisa que subsidia a escrita deste texto foi desenvolvida em uma escola pública municipal de Taubaté, interior de São Paulo, com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental para o Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica na qual foram investigadas estratégias de Cálculo Mental utilizadas por alunos do 5º ano ao se envolverem com a resolução de problemas.

A escola na qual a pesquisa foi desenvolvida é de período integral e no período contrário às aulas regulares há atividades diversificadas como teatro e dança. Nossa pesquisa deu-se nesse espaço diversificado, portanto, fora do contexto das aulas regulares ou de conteúdos disciplinares. Para o desenvolvimento das tarefas da pesquisa foram cedidas pela escola seis aulas de 50 minutos cada. A turma com a qual trabalhamos foi composta por cerca de 10 a 15 alunos, na faixa etária de 9 a 12 anos. Elegemos nomes fictícios visando preservar a identidade dos alunos.

As tarefas propostas aos alunos foram elaboradas considerando-se a leitura de documentos oficiais que apresentam propostas de trabalho com o Cálculo Mental em sala de aula. Os encontros com os alunos foram filmados para a produção de dados da pesquisa. A filmagem foi transcrita e considerada juntamente com os registros escritos dos alunos. Elaboramos termos de consentimento da filmagem que foram assinados tanto pela escola quanto pelos responsáveis dos alunos.

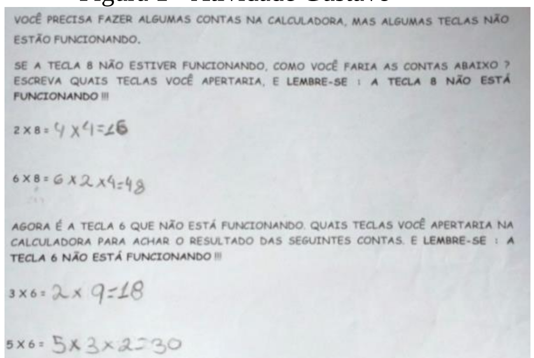
Neste artigo trazemos as atividades desenvolvidas com os alunos que envolviam a calculadora na expectativa de expor os modos pelos quais os alunos se expressam nas atividades relacionadas ao Cálculo Mental.

Na tarefa intitulada “Calculadora com defeito, e agora?” cada aluno recebeu uma folha com algumas multiplicações que deveriam ser realizadas com o auxílio da calculadora. Porém, em cada situação havia uma restrição para o uso de determinada tecla da calculadora exigindo

ISBN 978-84-945722-3-4

que o aluno buscasse modos de resolver o que lhe era proposto. Abaixo temos um exemplo do que foi feito por um dos alunos.

Figura 1 - Atividade Gustavo


VOCÊ PRECISA FAZER ALGUMAS CONTAS NA CALCULADORA, MAS ALGUMAS TECLAS NÃO ESTÃO FUNCIONANDO.

SE A TECLA 8 NÃO ESTIVER FUNCIONANDO, COMO VOCÊ FARIA AS CONTAS ABAIXO ? ESCREVA QUAIS TECLAS VOCÊ APERTARIA. E LEMBRE-SE : A TECLA 8 NÃO ESTÁ FUNCIONANDO !!!

2 x 8 = 4 x 4 = 16

6 x 8 = 6 x 2 x 4 = 48

AGORA É A TECLA 6 QUE NÃO ESTÁ FUNCIONANDO. QUAIS TECLAS VOCÊ APERTARIA NA CALCULADORA PARA ACHAR O RESULTADO DAS SEGUINTES CONTAS. E LEMBRE-SE : A TECLA 6 NÃO ESTÁ FUNCIONANDO !!!

3 x 6 = 2 x 9 = 18

5 x 6 = 5 x 3 x 2 = 30

Fonte: Autoria própria

Este tipo de tarefa é comum em livros didáticos e optamos por seu desenvolvimento por considerar, como afirmam Selva e Borba (2010) que isso leva os alunos a analisarem a proposta e se envolverem na busca de alternativas. Pode-se dizer que o objetivo da proposta é fazer com que os alunos pensem sobre as relações numéricas.

Uma estratégia possível para a solução da tarefa proposta é, inicialmente, determinar o produto da multiplicação e depois buscar fatores cujo produto seja o mesmo valendo-se da decomposição numérica. Por exemplo, para determinar o produto entre 5 e 6 sem utilizar a tecla 6, Gustavo decompõe o número 6 usando os fatores 3 e 2 e obtém como resultado que 5 x 6 pode ser igualado a 5 x 3 x 2 que dá 30.

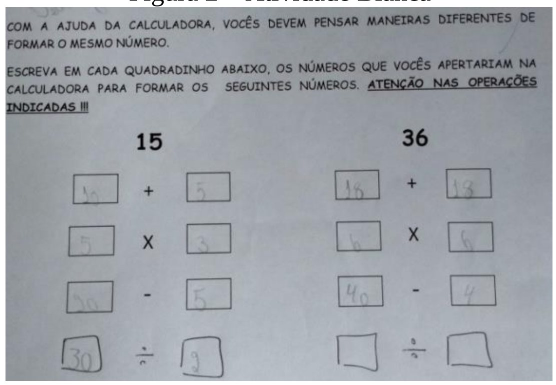
As distintas estratégias revelam que as tarefas permitiram aos alunos buscar caminhos que os assegurassem um resultado válido, como destaca Parra (1996). Esse lançar-se na busca de soluções para os problemas propostos permite que os alunos levantem hipóteses e com o auxílio da calculadora procurem testá-las e validá-las (ou não).

As escolhas dos alunos revelam compreensões sobre o Sistema de Numeração Decimal, propriedades operatórias e composição numérica. Gustavo opta, em dois casos, por decompor os números referentes a tecla que não pode ser utilizada na calculadora dando indícios de um processo investigativo que experimenta propriedades do sistema de numeração, mesmo que não as sistematize. A composição numérica favorece a compreensão do aluno sobre os números e não apenas sobre os algarismos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Na tarefa intitulada "Escrevendo de maneiras diferentes" os alunos deveriam compor o mesmo número de formas diferentes, podendo usar a calculadora. Isto é, cada número precisava ser escrito como resultado de uma adição, uma subtração, uma multiplicação e uma divisão, quando possível. Abaixo temos um exemplo de solução de um aluno.

Figura 2 – Atividade Bianca



Fonte: Autoria própria

Percebeu-se, no desenvolvimento da atividade, a dificuldade dos alunos com a operação divisão. Entretanto, no desenvolvimento da tarefa desafiamos os alunos a pensarem sobre a divisão e obtivemos algumas respostas, como se vê na figura 2.

Um fala que nos chamou atenção durante a atividade foi a da aluna Laís: *"Tia eu já percebi o 36 (na multiplicação de dois números que resulte em 36, 6 multiplicado por 6)".* Com isso a aluna procurou dizer que usava fatos conhecidos, como os oriundos das tabuadas, para resolver os problemas que lhe eram propostos, sem que fosse necessário ficar investigando com a calculadora. Fontes (2010) destaca que,

> As crianças precisam utilizar certos fatos de memória para enfrentarem com mais autonomia e segurança as situações-problemas. Mas como memoriza-los? Não de maneira mecânica e repetitiva, sem a compreensão de cada um, mas construindo as listas de fatos fundamentais ao longo das séries, discutindo suas relações e contextualizando-os em problemas. (FONTES, 2010, p.62).

Os cálculos memorizados pelos alunos, quando possuem significado, permite-lhe focar sua atenção em outros aspectos dos problemas. A calculadora, como um instrumento que favoreceu a investigação, não foi usada de maneira mecânica, exigiu reflexão sobre os dados do problema e análise do objetivo. A habilidade de realizar vínculos entre o que se tem e o que se deseja obter é, de acordo com Parra (1996), um dos objetivos do Cálculo Mental que permite às crianças aumentarem o repertório de estratégia.

ISBN 978-84-945722-3-4

Considerações

O Cálculo Mental, segundo o que compreendemos deve ser enfatizado no trabalho com a matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois é uma fase em que os alunos estão conhecendo e experimentando, desenvolvendo habilidades e buscando superar limitações. No movimento de (re)conhecer-se elas vão construindo seu repertório de estratégias e mobilizando diferentes conhecimentos a cada problema proposto, analisado e resolvido.

O trabalho com a calculadora abre possibilidades, uma vez que promove a busca de caminhos variados para a solução de um problema e da validade de sua resposta. Nossa experiência com os alunos do 5º ano mostra a pluralidade de se fazer matemática trabalhando com o Cálculo Mental e a calculadora, onde cada aluno vai, em seu ritmo, procurando aprender matemática.

Na pesquisa tivemos a intenção de abrir caminhos para que novos modos de se pensar as aulas de matemática dos anos inicias sejam discutidos, enfatizando a importância de se valorizar as escolhas dos alunos bem como os incentivando a argumentar sobre elas e validá-las. Esse é, segundo nossa compreensão, um processo no qual o conhecimento vai sendo produzido e que, ao aluno e ao professor é permitido estarem juntos enfrentando os desafios do ensinar e aprender matemática.

Referências

ARRUDA, R. D. (2010). *As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na formação docente no Programa de Pós-graduação em Educação Ambiental da FURG, no Brasil, e no Doutorado Interuniversitário em Educação Ambiental, na Espanha.* 218 f. Tese (Doutorado em Educação Ambiental) - Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande.

BRASIL (1997). *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: SEC/SEF. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Consultado 20/04/2017

COSTA, N. M. L e CARVALHO, M. C. P. (2014). Recursos Tecnológicos em aulas de matemática: o uso de calculadora nos anos iniciais. *Revista Paranaense de Educação Matemática***,** Paraná, v. 3, n.4, jan./jun. http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/905 Consultado 20/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

FONTES, C. G. (2010) *O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais***.** 220 f. Dissertação (Mestre em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

PARRA, C. (1996) Cálculo Mental na Escola Primária. En: PARRA, C. e SAIZ, I. (Orgs.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. ed. 18. Porto Alegre: Artmed, 258 p.

PAVÃO, Z. M. e MÜLLER, P. M. (2005) O uso da calculadora nas aulas de matemáticas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. En.: V EDUCERE – III CONGRESSO NACIONAL NA ÁREA DE EDUCAÇÃO, 5., Curitiba: PUCPR. *Anais*... Curitiba, p. 1791-1810. http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI095.pdf Consultado 20/04/2017

SÃO PAULO. (2014) *Orientações Curriculares do Estado de São Paulo Anos Iniciais do Ensino Fundamental Matemática (versão preliminar):* Coordenadoria de Gestão da Educação Básica CGEB. São Paulo: Secretaria da Educação. http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/962.pdf Consultado 20/04/2017

SELVA, A.C.V. e BORBA, R.E.S.R. (2010). *O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. 127 p.

TEIXEIRA, R. e RODRIGUES, M. (2015) Evolução de estratégias de cálculo mental: um estudo no 3.º ano de escolaridade. En: 3º Seminário de Investigação "Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar as Práticas em Contexto. 3. Setúbal. *Anais*...Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal. p. 249-267.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-836

POSSIBILIDADES NO ENSINO DE VOLUME COM O GEOGEBRA 3D

Raissa Samara Sampaio – Rosa Monteiro Paulo – Vanessa de Oliveira
raissa.samara@yahoo.com.br – rosamonteiropaulo@gmail.com –
vanessadeoliveira31@yahoo.com
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Brasil

Núcleo temático: V. Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Primário
Palabras clave: Visualização; Geometria; *Software;* Ensino Fundamental.

Resumo
Este artigo apresenta elementos relativos ao trabalho com o software GeoGebra no ensino de geometria. O interesse pelo assunto surgiu na graduação em Matemática quando foram discutidas as potencialidades do software GeoGebra e sua janela de visualização 3D para a aprendizagem geométrica, em especial para o desenvolvimento da habilidade de visualização. Nosso objetivo é discutir o modo pelo qual, com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), pode-se trabalhar atividades na sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental explorando a visualização. A metodologia assumida na pesquisa é de cunho qualitativo com abordagem fenomenológica. Elegemos atividades propostas aos alunos para analisar a expressão do raciocínio quando há manipulação do software. No decorrer da pesquisa e na análise do feito pelos alunos, o uso do software permitiu que os alunos expressassem seus raciocínios de maneira distinta ao trabalhar com o mesmo. Os alunos levantaram hipóteses, conjecturaram, testaram e concluíram conceitos a partir da investigação no software. Dessa forma, tiveram uma postura crítica, argumentando frente à questões propostas justificando com a ajuda de sua construção.

1. Introdução

As tecnologias ocupam um espaço de destaque no cotidiano das pessoas, permeando relações de trabalho e mesmo atividades pessoais. Pensar nas relações que podem ser estabelecidas entre a tecnologia e o ambiente escolar é urgente. Porém, esse pensar dever ser crítico. Ou seja, não se trata simplesmente de assumir o uso de determinado recurso tecnológico, pois há diferença entre a familiaridade cotidiana com as tecnologias e seu uso didático. Simplesmente inserir a tecnologia no ambiente escolar não garante que o ensino sofrerá alterações ou que a aprendizagem terá maior êxito. O avanço da tecnologia na educação tem sido muito discutido e, em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já traziam a importância da

ISBN 978-84-945722-3-4

informática na educação, afirmando que elas poderiam ampliar o desenvolvimento de habilidades como a escrita, a leitura, a visão, a audição, a criação e proporcionar um ambiente de aprendizagem em que se desenvolvam “novas formas de comunicar e conhecer” (BRASIL, 1998, p. 34). Mas, a pergunta central é “como?”. Isto é, embora se tenha clareza das mudanças que podem ocorrer com a presença das tecnologias no ambiente escolar, o modo pelo qual elas poderão contribuir para uma forma de ensino diferenciada ainda não é consenso. Se, por exemplo, simplesmente se transferir o que é feito com lápis e papel ou na lousa para o computador, nada além da forma de apresentação do conteúdo estará sendo alterado. Para que as tecnologias transforme o ambiente de ensino é preciso ter clareza de suas potencialidades e das possibilidades de elas contribuírem para a aprendizagem.

Neste artigo focamos o ensino da geometria, particularmente o desenvolvimento da visualização propiciado pelas tecnologias e, particularmente, por um software de geometria dinâmica – o GeoGebra 3D. Para compreender e explicitar o sentido das tecnologias no ambiente escolar buscamos alguns referencias como os PCN, acima citado, que destacam a importância do ensino de geometria e do desenvolvimento de situações-problemas para favorecer a introdução da demonstração e do raciocínio dedutivo no ensino de geometria. O enfoque, portanto, é o pensamento geométrico que, segundo os PCN, “desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas.” (1998, p. 39).

A visualização como destacada anteriormente é discutida por Costa (2000) que argumenta sobre a valorização de aspectos visuais para o ensino de geometria. A autora defende o ensino de geometria através de manipulações, onde o aluno é posto a levantar, conjecturar, testar e validar hipóteses.

A tecnologia mostra-se como uma aliada ao ensino da matemática, permitindo a exploração e investigação de conceitos e formas, ampliando as possibilidades de trabalho com a visualização, especialmente os *software* de geometria dinâmica.

Este artigo tem como objetivo discutir a possibilidade de trabalho com a visualização favorecida pelo *software* GeoGebra ao se trabalhar com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular de ensino do munícipio de São José dos Campos, São Paulo, Brasil. Para a construção da proposta nos voltamos para o sentido da visualização e as potencialidades do trabalho com resolução de problemas. Escolhemos o

ISBN 978-84-945722-3-4

software GeoGebra por entender que ele nos permite explorar figuras tridimensionais que irão permear o trabalho com “volume”.

2. O sentido das tecnologias e a visualização na produção de conhecimento matemático

O avanço da tecnologia tem provocado grandes alterações na sociedade e no desenvolvimento humano, segundo Ponte (2000), especialmente se considerarmos o modo pelo qual as informações são transmitidas. Atualmente as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) são chamadas de Tecnologias Digitais e Informação e Comunicação (TDIC), especialmente após a popularização da internet com a qual surge uma nova sociedade chamada de muitos nomes, dentre os quais se podem destacar sociedade em rede, sociedade da informação, sociedade do conhecimento, cibercultura.

No âmbito educacional é preciso que as TDIC não sejam vistas apenas com os aspectos técnicos uma vez que o viés pedagógico é fundamental para a produção do conhecimento. Os *software* matemáticos, por exemplo, são TDIC de grande discussão em Educação Matemática já que não basta que sejam atraentes, eles devem possibilitar a investigação, aguçar a curiosidade, dar oportunidade de exploração, incentivar a iniciativa e o aumento da autoestima, além de ter uma interface interativa.

A escolha do *software* deve considerar, além das vantagens de sua utilização em termos de organização da informação, de oportunidade de colaboração e sociabilidade, o potencial investigativo. É importante notar que o uso do *software* não pode ser algo isolado do contexto da aula ou dos recursos do professor, ele deve estar integrado às aulas para que sua utilização possa ser também avaliada.

Na pesquisa que retratamos neste texto, pensando no objetivo do trabalho proposto aos alunos, buscamos um *software* que possibilitasse explorar os conceitos de volume de sólidos geométricos a partir da visualização. Considerando a relevância da investigação e a possibilidade de movimentação de um sólido geométrico construido, optamos pelo GeoGebra. Este *software* matemático nos permite relacionar aspectos da álgebra e da geometria. Possui constantes atualizações e, atualmente, traz a janela 3D (isto é, de visualização tridimensional). Disponível para uso desde 2013, o GeoGebra é um *software* gratuito, o que torna viável sua instalação, por exemplo, em escolas da rede pública de ensino.

ISBN 978-84-945722-3-4

Autores como Costa (2000), Paulo (2006) e Flores, Wagner e Burato (2012) vêm discutindo as possibilidades da visualização no ensino de geometria. Costa (2000) salienta a importância de ver a matemática através da compreensão do espaço em que se vive. Ou seja, a autora defende um trabalho de descobertas, que sendo feitas também “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes” (COSTA, 2000, p. 157). Do que é dito pela autora compreendemos que as “descobertas com os olhos” dizem da visualização e as “descobertas com as mãos” da manipulação do objeto, ambos entendidos como modos de o sujeito investigar para aprender.

Os PCN, em concordância com a autora, afirmam que o trabalho realizado pela “exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato /.../ permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.” (1998, p. 39). Ou seja, esses documentos reforçam a ideia do ensino de geometria através da exploração.

Paulo (2006), ao tratar da visualização, interroga o sentido que as figuras têm para a produção do conhecimento matemático e afirma que “as figuras são um apelo visual relevante para a atribuição de significados às situações geométricas.” (PAULO, 2006, p. 4). Ou seja, a figura é relevante para a compreensão de um problema devendo ser objeto que desencadeia o pensar. Isso porque, segundo a autora, caso o aluno tome, para realizar uma investigação, uma figura inicial que seja particular, ele poderá negligenciar hipóteses e partir para uma solução equivocada do problema. O aluno deve, portanto, ao explorar aspectos figurais – ou possibilitados pela visualização, por figuras - ser capaz de “ver” a figura em sua potencialidade para iniciar a investigação e, ainda segundo Paulo (2006), o sentido desse “ver” “não é apenas o ato de visão atribuído ao órgão sensorial “olho” . O “ver” está relacionado à capacidade de o sujeito pensar sobre a situação. Ou, como diz Santos (2009), “analisar o que se percebe como parte do mundo real e memorizar aspectos que caracterizem os objetos vistos.” (SANTOS, 2009, p.21).

Porém, é preciso cuidado com a “memorização” dos aspectos visto. Tal qual destacam Flores, Wagner e Burato (2012), acerca do sentido da visualização em matemática, apenas montar a imagem mentalmente não é suficiente para a compreensão. É “na habilidade demonstrada pelo aluno em lidar com aspectos visuais para alcançar o entendimento matemático” (FLORES, WAGNER, BURATO, 2012, p. 34) que se podem ver indícios da compreensão.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ou seja, a visualização entra como uma forma de aprendizagem, uma forma de o aluno construir a sua compreensão matemática que fundamentalmente passa pelo processo investigativo que permite generalizar. Nisso vimos a relevância de um *software* geométrico como um potencializador para o desenvolvimento da habilidade da visualização e investigação.

Vale ainda destacar que na pesquisa que nos dispomos a discutir neste texto, optamos pela metodologia qualitativa de abordagem fenomenológica cujo objetivo é compreender o que é feito pelos alunos ao investigarem situações matemática com o *software* Geogebra. A fenomenologia, mais do que um método de pesquisa, é uma postura do pesquisador que influencia desde a seleção/elaboração das tarefas à própria dinâmica da proposta didática que visa à aprendizagem do aluno.

3. Desenvolvimento das atividades e análise dos dados

Para o trabalho sobre volume desenvolvido com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (faixa etária de 11-12 anos) foram realizados sete encontros com duração de uma hora cada. Para este texto selecionamos uma tarefa proposta aos alunos para discussão. Procurando preservar a identidade dos mesmos usamos pseudônimos. Para o desenvolvimento das tarefas os alunos foram, inicialmente, apresentados ao *software* visando o conhecimento das ferramentas disponíveis e como utilizá-las. No primeiro encontro, após a apresentação do *software* e a sua manipulação livre, propusemos uma tarefa sobre planificações. Para realizá-la os alunos tiveram contato com as duas janelas do *software*: a janela de visualização 2D e a 3D.

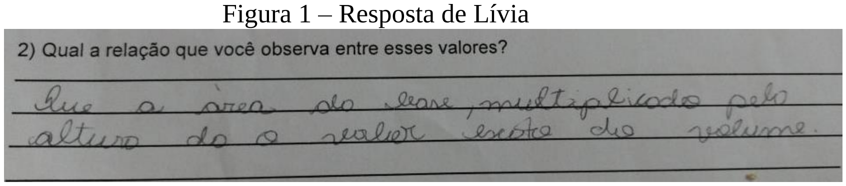
No terceiro encontro foi iniciado o trabalho com volume. A primeira tarefa tinha como objetivo a "contagem da quantidade de "cubinhos" que havia no cubo maior". A segunda tarefa envolveu o estudo dos prismas de base retangular tendo como objetivo a generalização para a fórmula do cálculo de volume. Os alunos construíram o seu prisma no *software* e, a partir dele, levantaram hipóteses.

Por fim, trabalhou-se uma tarefa cujo objetivo era generalizar a fórmula da área de um prisma cuja base é um polígono de n lados. Os alunos, utilizando as ferramentas do *software*, construíram um sólido com controles deslizantes. Esse modo de construção permitiu ver que, ao se alterar o número de lados do polígono da base e a altura do prisma, o volume e a área da base se modificavam.

ISBN 978-84-945722-3-4

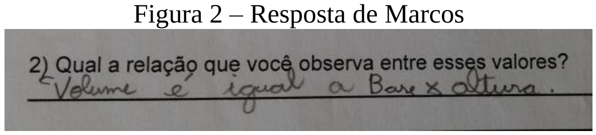
Procurando “fazer ver” o que acontecia, incentivamos os alunos com algumas questões acerca do que percebiam sobre os valores exibidos no *software*. Para organizar as descobertas os alunos foram orientados a registrar em uma tabela os valores obtidos para a área da base, a altura e o volume do sólido – dados exibidos pelo *software* a partir da manipulação do controle deslizante. A intenção era que os alunos percebessem a relação entre tais valores. Após a exploração de algumas situações pelos alunos interrogamos: “Qual a relação que você observa entre esses valores?”. Selecionamos duas repostas para discussão neste texto.

Figura 1 – Resposta de Lívia



Fonte: arquivo da pesquisadora

Figura 2 – Resposta de Marcos



Fonte: arquivo da pesquisadora

De modo geral, vimos que as repostas dos alunos se dividiram em respostas como a de Lívia ou como a de Marcos. Visando compreender o sentido do que Marcos dizia ao escrever “base x altura” o questionamos: Marcos, em sua resposta você escreveu “Volume é igual a Base x altura”. Esse modo de escrever “base x altura” é igual ao que fazemos para determinar a área do retângulo? Marcos respondeu: “Não, professora! É toda a base! [fazendo gestos com a mão como tendo a intenção de mostrar o espaço ocupado – área - do polígono da base], e depois vezes a altura” (MARCOS, 2016).

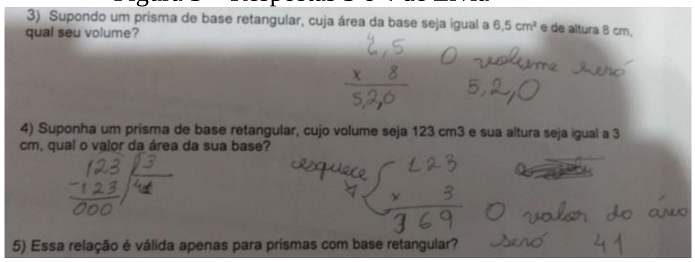
No diálogo com Marcos percebemos que, como Paulo (2006) destaca, a imagem do sólido serve de base para a investigação do aluno levando-o a recorrer a ela para “mostrar” a professora o que havia pensado ao escrever “base x altura”. O aluno, apesar de não estar de frente para a imagem na tela do computador, estava vendo-a. Ou seja, ele toma-a como referência para responder o questionamento que lhe é feito.

Em seguida à exploração com o *software* passamos a algumas tarefas convencionais do livro didático em que é requerido a medida do volume de um determinado sólido geométrico. A

ISBN 978-84-945722-3-4

maioria dos alunos responde de forma convencional, isto é, a questão 3 pela multiplicação e a 4 pela divisão. No entanto, uma resposta no chama a atenção, conforme mostra a figura 4.

Figura 3 – Respostas 3 e 4 de Lívia

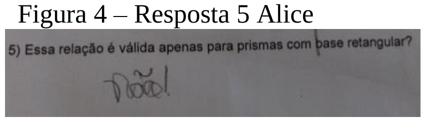


Fonte: arquivo da pesquisadora.

Nota-se no registro de Lívia que ela inicia um raciocínio que abandona. No diálogo com a aluna vê-se que, motivada pela leitura da questão 3, ela tende a usar o mesmo raciocínio. Porém, diz que ao pensar em como o *software* lhe dava a resposta relativa ao volume e analisando seus registros na tabela, notou o engano e percebeu que a solução não poderia ser essa. Inferimos que o trabalho feito com o *software* possibilitou-lhe analisar o feito e traçar novo caminho para a solução do problema.

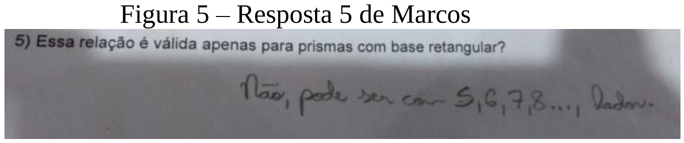
Visando uma generalização do que havia sido explorado no *software*, questionamos os alunos acerca da relação que “descobriram” para o volume. Separamos as respostas dadas em dois grupos que exemplificamos pelas imagens abaixo.

Figura 4 – Resposta 5 Alice



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Figura 5 – Resposta 5 de Marcos



Fonte: arquivo da pesquisadora.

Percebemos nas respostas como as de Alice que há uma exclamação que procura realçar a negação da resposta. Esse realce pode ser visto, segundo o que interpretamos, como uma estranheza relativamente à pergunta já que anteriormente haviam comparado os valores e percebido que a relação era entre área da base e altura, independente do polígono da base.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

O grupo que respondeu como Marcos opta por explicitar o percebido. Ou seja, indicam que o polígono da base pode ter um número variado de lados como haviam explorado pelo controle deslizante no *software*. Podemos perceber que Marcos, em sua resposta, usa estritamente os valores que o *software* possibilita visualizar. Ou seja, os valores possibilitados pela investigação do controle deslizante varia o número de lados do polígono entre 3 e 8. Mas, as reticências indicam que o aluno vai além do que é visto na tela do computador, indicando que poderá haver um número qualquer de lado para o polígono.

4. Considerações Finais

A importância das tecnologias nos é ressaltada através dos estudos realizados para desenvolver o trabalho em sala de aula. A exploração possibilitada pelas tecnologias, em conjunto com a investigação matemática, possibilita que o aluno seja ativo no processo de produção de conhecimento. A vivência da exploração do *software* GeoGebra para o trabalho com volume de sólidos geométricos leva-nos a identificar que, por meio das explorações que o *software* favorece, o aluno é levado a analisar as propriedades do objeto matemático e avaliar o resultado exibido na tela do computador confrontando-o com o que é solicitado no problema. Há, manifesto pelos alunos, o movimento do pensar que os leva a buscar caminhos próprios para aprender, que os faz compreender os conteúdos que estão sendo propostos na aula de matemática. O uso de *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, promove um ambiente de aprendizagem no qual o professor atua junto ao aluno e não para o aluno.

Aluno e professor são desafiados, a refletir sobre os modos pelos quais é possível dar uma resposta ao que é perguntado. O que na tela do computador se mostra torna-se abertura ao pensar favorecendo ao aluno o entendimento da matemática para além da fórmula escrita na lousa possibilitando o desenvolvimento de habilidades que, no processo investigativo, contribuem para a formação do sujeito levando-o a ultrapassar os limites da sala de aula ou da transmissão de informações pelo professor.

5. Referências

BICUDO, M. A. V. (2012). A pesquisa em educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. *Revista Brasileira de Ciência e Tecnologia, v.5*, n. 2, p. 15-26, mai-ago.

ISBN 978-84-945722-3-4

BRASIL. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN. Matemática). Brasília: MEC/SEF.

COSTA, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 157-184, Fundão, Portugal.

FLORES, C. R e WAGNER, D. R e BURATTO, I. C. F. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, *v. 14*, n. 1, p. 31-45.

PAULO, R. M. (2006). O Significado Epistemológico dos Diagramas na Construção do Conhecimento Matemático e no Ensino de Matemática. 192 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

PONTE, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Iberoamericana de Educación, n. 24*, p. 63-90, set./dez.

SANTOS, C. O. (2009). A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial. 2009. 49 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Unidade Universitária de Jussara, Universidade Estadual de Goiás, Jussara.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-837

A PRESENÇA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNESP/SP/BRASIL

Maria Francisca da Cunha – Sueli Liberatti Javaroni
mfrancisca7@hotmail.com – suelilj@fc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Brasil

Núcleo Temático: IV - Formación del Profesorado
Modalidade: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palavras chave: Projeto Político Pedagógico; Tecnologias Digitais; Formação Inicial de Professores.

Resumo

Esta comunicação tem por objetivo apresentar resultados parciais de uma pesquisa de doutorado que se encontra em andamento. A pesquisa é de cunho qualitativo e tem como objetivo geral investigar de que forma as tecnologias digitais (TD) estão presentes nos cursos de formação inicial de professores de Matemática nas Licenciaturas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), a partir da análise dos projetos políticos pedagógicos (PPP) implantados, bem como da análise dos relatos dos professores que lecionam nesta universidade e das respostas oriundas da aplicação de um questionário a estudantes que estão matriculados no 4º ano desses cursos. Com essa investigação pretende-se responder à pergunta: Qual o papel que as tecnologias digitais têm desempenhado nos cursos de formação inicial de professores de Matemática nas licenciaturas da UNESP? Para buscar indícios de respostas a essa questão, delineamos o cenário de investigação, que é composto pelos cursos de Licenciatura em Matemática pertencentes aos câmpus de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto, situados nas cidades do estado de São Paulo, Brasil. Nesta comunicação apresentamos os procedimentos metodológicos adotados já realizados e discutimos alguns dados oriundos da análise dos PPP e dos questionários que foram aplicados.

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo apresentar resultados parciais de uma pesquisa de doutorado que se encontra em andamento. Para isso, abordaremos no texto os procedimentos metodológicos já realizados e alguns dados oriundos da análise dos PPP e dos questionários que foram aplicados. O referencial teórico para dialogar com esses dados ainda está sendo construído, então nesse texto traremos impressões acerca dos dados obtidos até o presente momento.

ISBN 978-84-945722-3-4

A pesquisa em desenvolvimento é de cunho qualitativo e investiga de que forma as tecnologias digitais (TD) estão presentes nos cursos de formação inicial de professores de Matemática nas Licenciaturas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP). Por tecnologia concordamos com a definição de Leite (2011), que a define como "construção sociotécnica cujos usos e aplicações são definidos pela atuação direta dos sujeitos com que interage" (p. 61).

Corrobora essa definição Kenski (2012), ao explicitar que "o conceito de tecnologia engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações" (p. 23).

Ribeiro (2014) avança nesse conceito ao afirmar que tecnologia digital é "um conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1)" (p.1). De acordo com essa autora, qualquer imagem, som, texto, podem ser traduzidos em números, que são lidos por dispositivos variados, que podemos chamar, genericamente, de computadores.

De todo modo, sendo a tecnologia digital ou não, sua presença continua em expansão nas mais variadas áreas da sociedade. Indagamos-nos então, se a presença dessas tecnologias também está em expansão em nossas instituições escolares, sejam essas de ensino fundamental, médio ou superior.

Assim sendo, torna-se objetivo de nossa pesquisa investigar o uso das TD no desenvolvimento de um curso superior, conforme o que for explicitado no Projeto Político Pedagógico (PPP), bem como nas percepções anunciadas pelos docentes e acadêmicos que compõem as respectivas comunidades dos cursos investigados.

Dessa forma, para atender ao objetivo proposto trabalhamos em três frentes na pesquisa de campo. Uma delas foi a busca e análise dos PPP dos cursos, a segunda delas foi a aplicação de questionários aos estudantes do 4º ano do curso e, finalmente, a terceira foi a entrevista com alguns dos docentes que ministram disciplinas nos respectivos cursos. Após a realização dos três procedimentos, realizaremos a triangulação dessas três fontes de dados. Nesse trabalho traremos um recorte dessa triangulação, buscando entrelaçar a análise dos PPP e as respostas dos discentes dos cursos.

Segundo Araújo e Borba (2013), a triangulação consiste na utilização de vários e distintos procedimentos metodológicos para a composição dos dados da pesquisa, na modalidade

ISBN 978-84-945722-3-4

qualitativa. Ainda, segundo esses autores "não se trata aqui de julgar os procedimentos como certos ou errados, mas de sugerir que a utilização de múltiplos procedimentos possa favorecer a confiabilidade da pesquisa" (p. 39).

Com esta investigação buscamos por indicações de respostas para a pergunta diretriz: *Qual o papel que as tecnologias digitais têm desempenhado nos cursos de formação inicial de professores de Matemática nas licenciaturas da UNESP?* Para buscar indícios de respostas a essa questão, realizamos um trabalho de campo no cenário de investigação que é composto por 6 cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), situados respectivamente nos câmpus de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto, cidades do estado de São Paulo, Brasil.

No trabalho de campo, como afirma Barros e Lehfeld (2005), "o pesquisador assume o papel de observador e explorador, coletando diretamente os dados no local (campo) em que se deram ou surgiram os fenômenos" (p.75).

Com a ida a campo, foram analisados 6 projetos políticos pedagógicos e aplicados 60 questionários nos cursos investigados. A escolha dos estudantes para responderem ao questionário se deu pelo fato de eles estarem cursando o 4º ano do curso, na UNESP, a licenciatura em Matemática é de quatro anos. Elegemos a disciplina de Estágio Supervisionado 2, para que o professor dessa disciplina pudesse autorizar a aplicação do questionário. O questionário que foi aplicado, continha 11 questões, sendo 5 objetivas e 6 discursivas. Além da parte de identificação dos sujeitos, como gênero, idade, semestre atual e ano de ingresso no curso, o questionário possuía questões sobre as tecnologias digitais na Matemática, contribuições que o curso de graduação ofereceu com a relação ao uso de tecnologias digitais para os licenciandos, bem como o sentimento de estar ou não preparado para atuar na educação básica fazendo uso dessas mesmas tecnologias.

Esses foram os procedimentos adotados nesta exploração, a busca e análise dos projetos políticos pedagógicos (PPP) e os questionários que foram aplicados aos estudantes dos cursos observados. Nossa impressão sobre a análise desses dados apresentamos a seguir.

Projetos políticos pedagógicos dos cursos investigados e aplicação de questionários

Baseando-se nos projetos políticos pedagógicos dos 6 cursos analisados, destacamos alguns

ISBN 978-84-945722-3-4

aspectos que são comuns: a explicitação do histórico do curso; a justificativa de sua elaboração; perfil do egresso; o que se pretende alcançar, levando em consideração o perfil desejado para o egresso, bem como o contexto de sua atuação profissional; disciplinas ofertadas; estágios; orientações para elaboração do trabalho de conclusão de curso (TCC); atividades de pesquisa; extensão; participação em congressos e seminários; metodologia de trabalho adotada; sistemática de avaliação tanto do processo ensino e aprendizagem como a do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE); recursos humanos; e infraestrutura do câmpus (física, tecnológica, bibliográfica).

Assim, a partir de seus elementos constitutivos, o projeto político pedagógico foi entendido pelos que constituíram o Fórum de Pró-Reitores de Graduação (Forgrad, 1999) como "um instrumento de balizamento para o fazer universitário, concebido coletivamente no âmbito da Instituição, orientado para esta, como um todo, e para cada um de seus cursos, em particular" (p. 7). Dessa forma, acreditamos que o projeto político pedagógico de um curso, configura-se como uma ferramenta tanto de planejamento quanto de avaliação, por trazer consigo tantas informações relevantes.

Nos projetos analisados, há indicação do uso das tecnologias digitais, por meio do exame, reflexão e discussão sobre seus impactos nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos; há também indicações para o uso de softwares matemáticos e da internet para efetivação do processo ensino e aprendizagem de Matemática.

Acreditamos que as oportunidades de discussão e viabilização de uso das tecnologias nas aulas desses estudantes vão ao encontro do que é preconizado nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), em especial no que é explicitado no capítulo sobre a formação dos profissionais do magistério para Educação Básica.

De acordo com Brasil (2002), essas diretrizes fazem referência "ao uso competente das tecnologias de informação e comunicação (TIC) na perspectiva de aprimoramento da prática pedagógica e da ampliação da formação cultural dos/das professores/as e estudantes" (p. 6).

Ao analisarmos as respostas dos estudantes, quando indagados sobre o uso das tecnologias no curso, apenas dois estudantes afirmaram que a universidade em que estudam não faz uso das tecnologias digitais em suas atividades de ensino. Isso aconteceu no câmpus de Bauru e em São José do Rio Preto. Nos câmpus de Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente e Rio Claro, todos os estudantes foram unânimes ao afirmarem que a universidade, por meio

ISBN 978-84-945722-3-4

de seus professores, faz uso das tecnologias digitais.

Borba e Penteado (2012) afirmam que “a inserção de TI no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade” (p. 65).

Com base na afirmação desses autores, podemos completar que a inserção das tecnologias na universidade, possibilita alguns dos estudantes que não tiveram oportunidade de vivenciar na educação básica o uso de tecnologias, conhecer recursos e metodologias diversificadas de ensino.

Verificamos isso, ao lermos a resposta de alguns dos estudantes que responderam ao questionário. Dos sessenta estudantes, dezessete responderam que não apresentavam nenhum conhecimento de tecnologias ao entrar na universidade; dois estudantes responderam que possuíam conhecimento amplo, e os demais responderam que tinham conhecimento básico sobre o uso dessas tecnologias. Podemos afirmar com base em suas respostas que esse conhecimento básico engloba o uso de ferramentas do pacote do Office como o Word, Power point e o Excel.

Sobre a planilha eletrônica Excel, apenas no projeto político pedagógico de Presidente Prudente é que ela é mencionada para o desenvolvimento de atividades envolvendo os conceitos abordados na disciplina de tópicos de Matemática Financeira.

Pudemos identificar indicações do uso de alguns softwares como: Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica, Octave que aparecem nos vários PPP analisados.

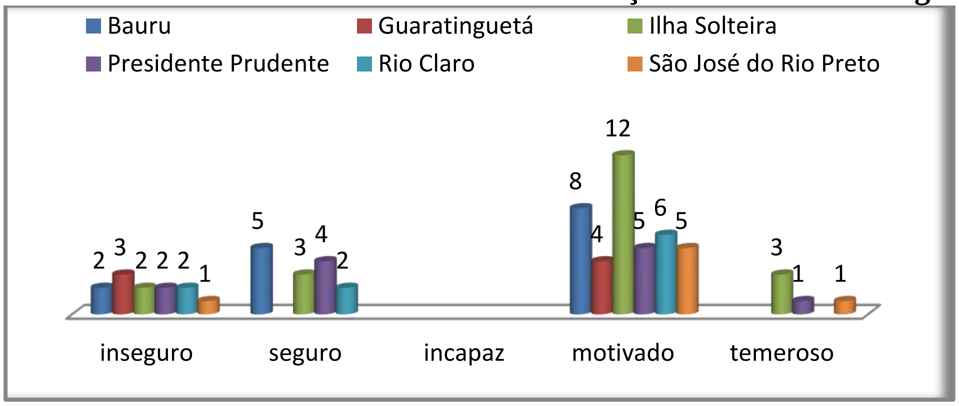
Apenas no câmpus de Bauru, onde é ministrada a disciplina de Cálculo Numérico Computacional tem-se a utilização de microcomputadores para desenvolver programas computacionais utilizando a Linguagem de Programação Pascal.

Defendemos que oferecer oportunidade aos licenciandos de dominar em profundidade as funcionalidades e potencialidades de um software favorece a mudança no processo tradicional do ensino de Matemática, uma vez que os estudantes poderão sentir-se mais seguros em trabalhar com tais tecnologias.

No questionário os estudantes tinham que responder como futuros professores de Matemática para ensinar fazendo uso de tecnologias digitais, como eles se sentiam. As respostas podem ser conferidas no gráfico 1.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gráfico 1 – Sentimento do estudante com relação ao uso da tecnologia



Fonte: Dados da pesquisa

No câmpus de Bauru, os estudantes se encontram em sua maioria, motivados e seguros para esse uso. No câmpus de Guaratinguetá, os estudantes também se encontram motivados, porém inseguros quanto ao uso da tecnologia nas suas aulas de Matemática. Em Ilha Solteira e Presidente Prudente encontramos maior diversidade de sentimentos dos estudantes com relação ao uso da tecnologia em suas aulas, como futuros professores de Matemática da educação básica. Apontaram sentimentos de insegurança, segurança, motivação e de temor quanto a esse uso. Em Rio Claro, os sentimentos são similares à Ilha Solteira e Presidente Prudente com exceção do sentimento de temor. Em São José do Rio Preto, os estudantes se dizem, inseguros e temerosos para o uso das tecnologias, porém mantém-se motivados para esse uso.

Vale destacar que por mais motivados que os estudantes possam parecer, é função da universidade, envolver tais estudantes em atividades diferenciadas, possibilitar metodologias variadas, para que o paradigma da teoria versus prática possa ser rompido, contribuindo para a efetivação do processo ensino e aprendizagem.

Nos PPP dos cursos investigados era recomendado que a inserção das tecnologias também fosse instalada em aulas práticas e teóricas de diversas disciplinas. Essas aulas deveriam ocorrer quando estudantes são levados aos laboratórios de computação para o desenvolvimento de exercícios baseados na teoria estudada ou para a utilização de softwares matemáticos utilizados em disciplinas tanto de cunho pedagógico quanto de cunho específico. Além da ida a laboratórios de computação, nos câmpus de Bauru e Presidente há também a indicação do uso de calculadora científica e financeira para atividades

ISBN 978-84-945722-3-4

desenvolvidas em sala de aula.

Sobre isso, foi perguntado aos estudantes de que forma acontecia a inserção das tecnologias digitais em seus cursos. Eles responderam que acontecem de três formas: de maneira prática (com uso de softwares matemáticos); de maneira teórica (por meio de leitura de textos e debates) e também a inserção acontecia de maneira mista (por meio de leituras de textos que abordam o assunto, mescladas com a utilização de softwares).

Por meio das respostas dos estudantes, verificamos que nos câmpus de Bauru e de Rio Claro, praticamente as três formas são apresentadas simultaneamente. No câmpus de Guaratinguetá não há exposição teórica do uso das tecnologias. Já no câmpus de Ilha Solteira a exposição prática sobressai em muito a exposição teórica. A prevalência das atividades práticas também é apresentada pelos estudantes do câmpus de São José do Rio Preto. No câmpus de Presidente Prudente, a exposição mista, de prática e teoria é o que sobressai em uso. Essa diversidade de abordagens favorece a segurança dos estudantes ao se deparem com situações que exijam deles, o uso das tecnologias voltadas para atividades práticas de ensino.

Outra questão abordada no questionário era sobre o que os estudantes entendem por ensinar Matemática com uso de tecnologias digitais. De maneira geral afirmam que as TD podem ser usadas como um recurso bastante rico em possibilidades e contribuir para a melhoria do nível da motivação dos alunos para a aprendizagem em Matemática.

A nosso ver, torna-se incipiente delinear qual o papel das tecnologias utilizadas nos cursos da UNESP tomando como base apenas a análise dos PPP e as respostas dos questionários aplicados a estes estudantes, por isso avançamos em mais uma etapa para produção de nossos dados que é a entrevista semiestruturada aos professores para saber até que ponto eles utilizam ou não essas tecnologias.

Para completar a realização da triangulação das três fontes de dados, resta-nos ainda a conclusão das entrevistas semiestruturadas apenas com os professores. O término das entrevistas está previsto para o primeiro semestre do corrente ano. A seleção desses professores deu-se a partir da resposta dos estudantes à questão 6 do questionário: *No seu curso de graduação qual (is) professores utilizaram-se de tecnologias digitais para ministrar suas aulas?* Os professores que obtiveram maior número de indicação sobre o uso de tecnologias digitais em suas aulas foram os selecionados, obtivemos um total de 20 professores.

ISBN 978-84-945722-3-4

Considerações finais

Nesse trabalho apresentamos resultados parciais de uma pesquisa de doutorado que se encontra em andamento. Tais resultados foram oriundos da análise dos PPP dos cursos de Licenciatura em Matemática da Unesp do câmpus de Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto, situados nas cidades do estado de São Paulo, Brasil e da análise dos questionários que foram aplicados a estudantes que estão matriculados no 4º ano desses cursos.

Nos projetos analisados, há a indicação do uso das tecnologias digitais, por meio do exame, reflexão e discussão sobre seus impactos nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos; há também indicações para o uso de softwares matemáticos e da internet para efetivação do processo ensino e aprendizagem de Matemática.

Os estudantes confirmam esse uso ao responderam sobre como a utilização de tecnologias digitais vem sendo desenvolvida em suas atividades. Mesmo obtendo respostas como de forma prática, teórica e mista (mistura da prática e teórica), podemos afirmar que essa utilização depende muito do planejamento que os professores fazem de inseri-las ou não em suas atividades diárias.

Apesar da afirmação por parte dos estudantes que a utilização das TD nas aulas de Matemática possa ser empregada como um recurso bastante rico em possibilidades e contribuir para a melhoria do nível da motivação dos alunos para a aprendizagem em Matemática, na verdade, ainda é o professor que direciona seu uso.

Embora tenhamos encontrado várias indicações de uso de tecnologias digitais apresentadas nos projetos políticos pedagógicos dos seis cursos investigados e da afirmação da maioria dos estudantes que comentaram que os professores fazem uso de tecnologias em suas aulas, o próximo passo da pesquisa que se encontra em andamento é dar continuidade a realização das entrevistas com os professores, que foram indicados pelos alunos ao responderem o questionário, para saber acerca do uso das TD em suas aulas.

Esperamos com esse trabalho suscitar discussões e reflexões acerca do uso de tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática com o intuito de coletivamente repensarmos a nossa prática de professores formadores de futuros professores de Matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referências bibliográficas

Brasil (2002). Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena. Brasília: Ministério da Educação.

Borba, M. d., & Araújo, J. d. (2013). Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: M. d. Borba, J. d. Araújo, D. Fiorentine, A. V. Garnica, & M. A. Bicudo, *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 31-51). Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. d., & Penteado, M. G. (2012). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Forgrad - Fórum de Pró-Reitores de Graduação. (1999). *Do pessimismo da razão ao otimismo da vontade: referências para a construção dos projetos pedagógicos nas IES brasileiras.* Curitiba, Paraná, Brasil.

Kenski, V. M. (2012). *Educação e Tecnologias:o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus.

Lehfeld, N. A., & Barros, A. d. (2005). Projeto de Pesquisa: propostas metodológicas. Petrópolis, RJ: Vozes.

Leite, L. S. (2011). Mídia e a perspectiva da tecnologia educacional no processo pedagógico contemporâneo. In: W. Freire, D. Amora, E. O. Santos, L. S. Leite, M. Silva, & V. Filé, *Tecnologia e Educação: As mídias na prática docente* (pp. 61-78). Rio de Janeiro: Wak.

Ribeiro, A. E. (2014). Tecnologia Digital. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil. http://ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/tecnologia-digital Consultado 03/05/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-839

O USO DA CALCULADORA CIENTÍFICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: INVESTIGANDO CONCEPÇÕES E EXPLORANDO POTENCIALIDADES NUMA OFICINA

José Edivam Braz Santana – Kátia Maria de Medeiros
edivamsantana@hotmail.com – katiamedeirosuepb@gmail.com
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB - Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Terciário (16 a 18 anos)
Palavras chave: Calculadora Científica. Resolução de Problemas. Ensino Médio. Oficina

Resumo

Esta pesquisa teve por objetivo explorar as concepções sobre o uso da Calculadora Científica e possiblidades deste uso no processo de resolução de problemas matemáticos. Foi realizada com alunos de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola da Rede Estadual de Ensino da cidade de Afogados da Ingazeira-PE, Brasil, no período de setembro/2014 a maio/2015. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, o estudo de caso foi a metodologia de estudo adotada. Nesta Comunicação Breve focaremos numa Oficina, para Apresentação da Calculadora Científica. Os resultados apontam para a não utilização da calculadora na sala de aula, pela professora de Matemática da turma pesquisada. Os alunos consideram que usar a calculadora faz com que desaprendam a fazer cálculos manuscritos, tornem-se dependentes da máquina. A Oficina teve como objetivo a apresentação da calculadora científica como ferramenta de trabalho nas aulas de Matemática do Ensino Médio, proporcionando aos alunos o manuseio da mesma e a descoberta de utilidades e funções, mostrando algumas potencialidades de uso, algumas das funções disponíveis e, possivelmente, mais utilizadas neste nível de ensino. Com esta apresentação percebemos que a calculadora foi uma "novidade" para os alunos, que ficaram curiosos por compreender sobre seu funcionamento.

Introdução

Presenciamos, nos últimos anos, um avanço tecnológico muito grande nas mais diversas áreas. O computador, o celular, a calculadora, a TV, o DVD passaram a fazer parte do cotidiano de muitas pessoas e, é claro, estão presentes em, praticamente, todas as escolas do país. No entanto, este fato não significa que o desempenho escolar dos alunos tenha sofrido melhorias, principalmente na área das Ciências Exatas. A Matemática é uma das disciplinas

ISBN 978-84-945722-3-4

que mais reprova e uma das mais rejeitadas pelos alunos, o que tem causado evasão e repetência nas escolas.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (Brasil, 2006), o processo de ensino e aprendizagem, historicamente construído, e mais presente nas salas de aula de Matemática, concebe o ensino como "transmissão de conhecimento", e a aprendizagem como "mera recepção de conteúdos", sendo esta uma visão tradicionalista, na qual "a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento, por parte do professor" (Brasil, 2006, p. 80).

Esta é uma concepção de ensino e aprendizagem muito comum no campo educacional, por apresentar a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que toda atividade educativa fica sob a responsabilidade do professor, por outro lado, "demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações" (idem).

Portanto, a escola precisa se atualizar e repensar estas concepções ainda arraigadas à forma tradicional de ensinar e aprender. Para D'Ambrósio (1986): "A escola deve se antecipar ao que será o mundo de amanhã. É impossível conceber uma escola cuja finalidade maior seja dar continuidade ao passado. Nossa obrigação primordial é preparar gerações para o futuro" (p. 42). Desta forma, faz-se necessário atentarmos para o uso da tecnologia na sala de aula, porque fora dela, já está tomando o espaço de brinquedos pelas crianças e se firmando como artigo indispensável para os jovens e adultos.

Buscando responder à seguinte Questão Norteadora: Como o uso da calculadora científica pode auxiliar os alunos de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio em relação à resolução de problemas matemáticos em sala de aula?

Tivemos como Objetivo Geral explorar as concepções sobre o uso da Calculadora Científica e possiblidades deste uso no processo de resolução de problemas matemáticos.

A Calculadora na Sala de Aula de Matemática

Diversos estudos (Albergaria & Ponte, 2008; Fedalto, 2006; Guinther, 2009; Medeiros, 2003; Mercê, 2008; Mocrosky, 1997; Oliveira, 1999; Ruthven, 2009; Selva & Borba, 2010) têm

ISBN 978-84-945722-3-4

tratado sobre o uso da calculadora nas aulas de Matemática e apontado para uma preocupação em comum (ainda que implícita): "*quando e como a calculadora poderá ser considerada um instrumento de construção do conhecimento*?".

Desta forma, o ensino da Matemática deve possibilitar ao aluno fazer o melhor uso da calculadora, incentivando-o a investigar propriedades, verificar possibilidades de manipulação, tomar decisões em contextos variados, tendo como efeito importante e decisivo o desenvolvimento de uma atitude de pesquisa e investigação.

O uso planejado e criativo da calculadora nas escolas pode potencializar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, favorecendo a busca e a percepção de regularidades e o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas.

Conforme Oliveira (1999) afirma:

> O uso da calculadora em sala de aula de Matemática é um dos meios que o professor de Matemática pode se utilizar para criar situações que levem a ele e seus alunos a refletir sobre a construção do conhecimento matemático e a socialização do saber, transformando a sala de aula em um ambiente propício à discussão, troca de experiências e de elaboração de estratégias para se construir uma nova sociedade brasileira. (p. 124-125)

Portanto, cabe ao professor criar situações que instiguem os alunos a investigar, conjecturar, fazer estimativas, buscar alternativas para melhorar a situação do ensino da Matemática, que não pode ser vista apenas como uma disciplina descontextualizada, que venera a memorização de fórmulas, que não aguça o raciocínio dos alunos. O uso da calculadora em sala de aula permite criar situações em que os alunos desenvolvam estratégias de resolução de problemas, percepção dos conceitos matemáticos aplicados nas situações vivenciadas, desenvolvendo também a pesquisa, a discussão de resultados, ou seja, o uso da calculadora oferece inúmeras contribuições importantes para o ensino da Matemática.

Vale salientar que não é a simples utilização de algum recurso tecnológico que tornará mais fácil algum conteúdo matemático ou tornará a aula mais atraente, ou ainda que fará com que os alunos aprendam mais. No entanto, o uso das tecnologias pode favorecer o

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

desenvolvimento de habilidades e competências necessárias ao convívio dos alunos, tanto na escola quanto na sociedade. No caso específico da calculadora, diversos estudos (Albergaria & Ponte, 2008; Guinther, 2009; Medeiros, 2003; Selva & Borba, 2010) têm apontado para a importância da sua utilização nas aulas de Matemática para o aprendizado de diversos conteúdos matemáticos.

De maneira particular, nessa pesquisa, defendemos o uso da calculadora científica nas aulas de Matemática do Ensino Médio, para a resolução de problemas, por entender que esta pode propiciar, dentre outros, tempo para analisar a razoabilidade das respostas encontradas.

Um olhar sobre a resolução de problemas

Citada por pesquisadores (Oliveira, 1999; Albergaria & Ponte, 2008; Guinther, 2009; Fedalto, 2006; Ruthven, 2009) como metodologia que pode ser potencializada com o uso da calculadora, a resolução de problemas pode ser entendida, segundo Boavida et al (2008) como um,

> processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma atividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a racionar matematicamente. (p. 14)

Assim, o próprio processo de utilização da calculadora poderá constituir-se numa tarefa de resolução de problemas quando considerarmos o manuseio do instrumento, a descoberta de funções, particularmente ao tratarmos da calculadora científica, objeto da nossa pesquisa.

Desta forma, a resolução de problemas deve ser tomada na sala de aula de Matemática como um “processo de importância crucial” (Boavida et al, 2008), como “o coração da Matemática” (Halmos, 1980 citado por Schoenfeld, 2013), “o motor” para a aprendizagem da Matemática (Medeiros, 2001).

Concordando com estas ideias, Bravo e Sanchez (2012) (p. 40) asseguram que,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> A resolução de problemas matemáticos é uma fonte inesgotável de conhecimento matemático que, [...] deveria ser trabalhada em sala de aula fazendo os alunos protagonistas de seus acertos e erros. As situações problemas abertas fomentam no aluno o desenvolvimento de sua criatividade fazendo-o mais competente na sociedade atual.

Portanto, a resolução de problemas é de fundamental importância no ensino e aprendizagem da Matemática por proporcionar ao aluno possibilidades de compreender a Matemática e, sobretudo, saber "aplicá-la" em situações do cotidiano. No entanto, para que possam motivar o aluno e despertar sua criatividade, curiosidade e capacidades de argumentação, as atividades propostas pelo professor não devem se caracterizar apenas como aplicação direta de algum algoritmo ou fórmula, mas devem favorecer ao aluno a elaboração de estratégias de resolução.

A Pesquisa desenvolvida

Esta pesquisa apresenta um trabalho de investigação acerca do uso da calculadora científica nas aulas de Matemática, através da resolução de problemas. Foi desenvolvida com alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Afogados da Ingazeira – PE, Brasil, no período de Setembro/2014 a Maio/2015, buscando responder à seguinte questão norteadora: *Como o uso da calculadora científica pode auxiliar os alunos de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio em relação à resolução de problemas matemáticos em sala de aula?*

Segundo Bogdan e Biklen (1994) na perspectiva da abordagem qualitativa,

> Os dados recolhidos são [...] ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenômenos em toda a sua complexidade e em seu contexto natural. (p. 16)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Desta forma, foram considerados não os fins, mas os meios, os processos decorrentes da pesquisa, proporcionando um elo entre o pesquisador e os participantes, visto que estes não são abordados por aquele de forma neutra (Bogdan & Biklen, 1994). Entretanto, neste tipo de pesquisa o pesquisador normalmente,de acordo com Stake (2011), "tenta assegurar ao leitor de que o objetivo não é alcançar uma generalização, mas fornecer exemplos situacionais à experiência do leitor." (p. 33-34).

O estudo de caso é a metodologia de estudo adotada, pois, tratando-se de um processo de investigação de abordagem qualitativa, este permite, segundo André (2008), "retratar situações da vida real, sem prejuízo de sua complexidade e de sua dinâmica natural" (p. 34). O estudo de caso proporciona ao pesquisador/investigador a possibilidade de análise aprofundada da realidade estudada, propiciando uma descrição "densa" do fenômeno em estudo o que favorece a compreensão do leitor sobre o mesmo.

Durante a pesquisa foi realizada uma "*Oficina*" de 4 horas/aula de 50 minutos cada, para apresentação da calculadora científica, mostrando algumas de suas potencialidades de uso nas aulas de Matemática do Ensino Médio e algumas das funções disponíveis e, possivelmente, mais utilizadas neste nível de ensino. Em seguida, foram realizadas entrevistas semiestruturadas, sendo uma com a professora da turma, objetivando identificar as suas *concepções* sobre o uso da calculadora científica nas aulas de Matemática do Ensino Médio, bem como sobre a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas e outra, com os mesmos objetivos, com quatro alunos que constituíram os estudos de caso.

Considerações finais

Os resultados sugerem que a professora da turma seja indiferente ao uso da calculadora (até mesmo a básica) na sala de aula. Os resultados apontam ainda para concepções de ensinar e aprender arraigadas a posturas tradicionais, não favorecendo a autonomia dos alunos nem o uso de tecnologias essenciais ao seu convívio em sociedade. A exemplo do que encontramos em Selva e Borba (2010) e em Fedalto (2006), mesmo apontando inúmeras vantagens de uso da calculadora na sala de aula, a professora praticamente não a utiliza com seus alunos.

Quanto à resolução de problemas, a professora da turma pesquisada não demonstrou clareza quanto a este tema, confundindo-a com a realização de exercícios (em sua maioria fechados) em sala de aula (Medeiros, 2001; 2003). A professora também apresenta, em seu discurso,

ISBN 978-84-945722-3-4

concepções sobre o uso de calculadora que já não condizem com o momento atual, no qual a tecnologia se faz presente em todos os contextos da sociedade.

Em relação aos alunos, os resultados mostram que a maioria destes considera que usar a calculadora faz com que desaprendam a fazer cálculos manuscritos, tornam-se dependentes da máquina. Entretanto, esta pesquisa corrobora outras (Ruthven, 2009; Selva & Borba, 2010), mostrando que, na verdade, os alunos que não utilizam a calculadora também não sabem fazer cálculo melhor e com mais consciência do que aqueles que a utilizam.

A Oficina desenvolvida na sala de aula teve por objetivo apresentar a calculadora científica como ferramenta de trabalho nas aulas de Matemática do Ensino Médio, proporcionando aos alunos o manuseio da mesma e a descoberta de utilidades e funções. Pudemos perceber, quando da sua realização, que a Oficina proporcionou uma melhor familiarização dos alunos com a calculadora científica, a qual foi uma "novidade" para todos.

No transcorrer da Oficina, apesar do sentimento de novidade, alguns alunos conseguiram perceber que a calculadora científica utilizada na Oficina era a "mesma" que eles já conheciam dos seus celulares, entretanto, no início dos trabalhos não conseguiram fazer esta associação. Os alunos foram muito receptivos, demonstraram curiosidade, ansiedade e contentamento perante aquela ferramenta "tão encantadora". Os mesmos se mantiveram atentos durante as explanações, exibição do vídeo e realização dos exercícios de aplicação, até mesmo aqueles alunos que costumavam "dar trabalho" nas aulas (segundo a professora da turma) mantiveram-se atentos e engajados nas tarefas propostas, alguns destes concluindo as tarefas antes mesmo que os outros alunos ("os mais comportados!").

Pensamos ser importante desenvolver este trabalho, porque percebemos a presença deste instrumento cada vez mais frequente no nosso dia a dia e, consequentemente, no dia a dia de nossos alunos. É fato também que, corriqueiramente, nos deparamos com situações que exigem o desenvolvimento de capacidades e habilidades concernentes ao uso dos instrumentos tecnológicos, como a calculadora, por exemplo, para resolvermos problemas do cotidiano.

Assim, espera-se que este trabalho contribua para a discussão em torno do assunto e possa, dessa forma, também contribuir para uma melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem da Matemática em nosso país, desmitificando algumas concepções ainda arraigadas às

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

formas tradicionais de ensinar e aprender, nas quais o uso da calculadora não é permitido nas aulas de Matemática.

Referências bibliográficas

Albergaria, I.S.; Ponte, J.P. (2008). Cálculo mental e Calculadora. Tecnologias e educação matemática. Lisboa: SEM-SPCE. pp. 92-103.

André, M.E.D.A. (2005). Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional. Brasília: Liberlivros, 2005. 68 p. - (Série Pesquisa; vol. 13)

Boavida, A.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Pimentel T. (2008). Resolução de Problemas em Matemática. A experiência matemática no ensino básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa. 133 p.

Bogdan, R.C.; Biklen, S.K. (1994). Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Coleção Ciências da Educação. Portugal: Porto Editora. 337 p. Tradução de: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista.

Brasil. (2006). Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação. 135 p. Volume 2.

Bravo, J.A.F.; Sánches, J.J.B. (2012). Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Nº 32, pp. 29-43.

D' Ambrósio, U. (1986). Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus: UNICAMP.

Fedalto, D.L. (2006). O Imprevisto Futuro das Calculadoras nas Aulas de Matemática no Ensino Médio. Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 161 p. (Dissertação de Mestrado).

Guinther, A. (2009). Análise do Desempenho de Estudantes do Ensino Fundamental em Jogos Matemáticos: reflexões sobre o uso da Calculadora nas aulas de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo. 182 p. (Dissertação de Mestrado).

Medeiros, K.M. (2001). O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula. Educação Matemática em Revista, SBEM, nº 9/10, 20.

Medeiros, K.M. (2003). A influência da Calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. Educação Matemática em Revista. SBEM – Ano 10 – nº 14. pp. 19-28.

Mercê, C.C.F. (2008). Concepções e práticas lectivas dos professores de matemática do 2.º ciclo em relação à Calculadora: Contributos da formação para a reflexão. Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Departamento de Educação. 130 p. (Dissertação de Mestrado).

Mocrosky, L.F. (1997). Uso de Calculadoras em aulas de Matemática: o que os

ISBN 978-84-945722-3-4

professores pensam. Rio Claro: UNESP. 119 p. (Dissertação de Mestrado).

Oliveira, J.C.G. (1999). A visão dos professores de matemática do estado do Paraná em relação ao uso de Calculadoras nas aulas de matemática. Campinas – SP. 160 p. (Tese de doutorado).

Ponte, J.P; Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge And Practices. En: A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future. (pp. 461-494).

Ruthven, K. (2009). Towards a calculator-aware number curriculum. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 8, 1, X-X.

Schoenfeld, A.H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. The Mathematics Enthusiast (TME). Vol. 10, n^{os}1&2, pp. 9-34.

Selva, A.C.V.; Borba, R.E.S.R. (2010). O uso da Calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental. Belo Horizonte: Autêntica. 1 ed. 128 p. (Coleção Tendências em educação matemática).

Stake, R.E. (2011). Pesquisa qualitativa: como as coisas funcionam. En: Coleção Métodos de Pesquisa. Pesquisa Qualitativa: estudando como as coisas funcionam. Editora: Penso.

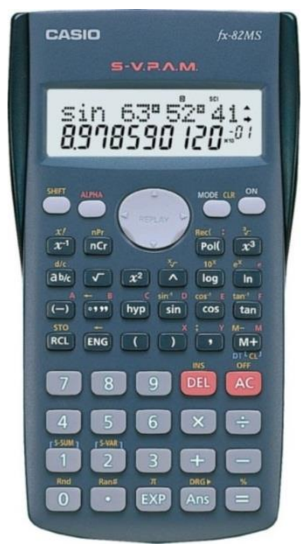


Imagem da Internet: www.google.com.br
(Modelo de Calculadora Científica idêntico ao utilizado na pesquisa, que pertence ao Laboratório de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba-UEPB)

1ª Sessão

Problema 1[16]:

[16] Adaptado de: **Proposta de atividades com a calculadora no ensino fundamental.** Mario André de Oliveira. Campina Grande, 2013. TCC/PROFMAT. Universidade Federal de Campina Grande, 048p.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1: Problema 01 da 1ª e 4ª Sessões

O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida do grau de obesidade de uma pessoa, mas pouco preciso sobre a acumulação de gordura nos tecidos (adiposidade), uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Com base em estudos populacionais o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) é uma alternativa mais fiel para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura abaixo mostra como calcular essas medidas.

O velho IMC
(Índice de Massa Corporal)

O novo IAC
(Índice de Adiposidade Corporal)

$$\text{Índice de Massa Corporal} = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura X altura (m)}}$$

$$\text{\% de Gordura Corporal} = \frac{\text{Circunferência do quadril (cm)}}{\text{Altura X } \sqrt{\text{altura}}\text{ (m)}} - 18$$

Sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%, responda:

a) Uma mulher com 1,65m de altura, massa de 68 kg e 102 cm de circunferência nos quadris está dentro ou fora dos padrões normais?
b) Uma mulher adulta é considerada dentro dos padrões normais se seu IMC estiver entre 19 e 23. Considerando-se o Índice de Adiposidade, uma mulher que se encontra nesta faixa do IMC pode ser considerada dentro dos padrões normais de adiposidade?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Problema 2[17]:

Figura 2: Problema 02 da 1ª e 4ª Sessões

O salicilato de bismuto composto é um remédio capaz de neutralizar o excesso de acidez estomacal. Cada 5g do pó contém:

Componente	Qde presente (em g)
Sais componentes da água de Vichy	3,325
Salicilato de bismuto monobásico	0,175
Óxido de magnésio	0,200
Carbonato de cálcio	0,375
Carbonato de magnésio	0,310
Hidróxido de magnésio	0,250
Hidróxido de alumínio (gel a seco)	0,350
Atropa beladona em pó (em folhas)	0,015

Observando as quantidades dos componentes presentes na fórmula podemos afirmar que esta está correta? Justifique.

Problema 3[18]:

Figura 3: Problema 03 da 1ª e 4ª Sessões

As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sócio demográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento ao dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

Segundo o IBGE, a população de certa cidade, no ano 2010 era de aproximadamente 35.000 habitantes e está crescendo a uma taxa média anual de 1,1%.

Pergunta-se:

a) Qual era a população estimada da cidade em 2011? Em 2013? Em 2015? Para 2016, 2018 e 2020 qual será a população estimada?
b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva esta lei.
c) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
d) Quando a população da cidade será de aproximadamente 50 mil habitantes?

2ª Sessão

Problema 1[19]:

Figura 4: Problema 01 da 2ª e 5ª Sessões

[17] Adaptado de: **Proposta de atividades com a calculadora no ensino fundamental.** Mario André de Oliveira. Campina Grande, 2013. TCC/PROFMAT. Universidade Federal de Campina Grande, 048p.

[18] Adaptado de: **O Estudo de Logaritmo por Meio de uma Sequência de Ensino: A Engenharia Didática como Apoio Metodológico.** Ronize Lampert Ferreira; Eleni Bisognin – UNIFRA [s.l/s.d].

[19] Adaptado de: **Uma Sequência de Ensino para a Introdução de Logaritmo: Estudo Exploratório Usando a Calculadora**. Monica Karrer e Sandra Magina, PUC/SP. [s.l/s.d].

ISBN 978-84-945722-3-4

O valor de um certo automóvel (em reais) sofre uma depreciação de 10% ao ano. A função que representa o valor deste automóvel após "t" anos é dada por: $f(t) = 10000 \cdot (0{,}9)^t$, $0 \leq t \leq 20$. Sabendo que a vida útil deste carro é de 20 anos, determine:

a) o valor deste carro hoje.
b) o valor deste carro após um ano e meio, 2, 3, 10 e 20 anos, respectivamente.
c) utilizando a função dada, tente calcular o valor de "t", para que o valor do carro seja de 8.000 reais.
d) que dificuldades você encontrou para resolver este item?

Problema 2[20]:

Um grupo de colecionadores de selos tem 2 018 selos. 13 desses colecionadores têm 86 selos cada um. Os demais têm quantidades iguais. Qual é a quantidade de selos que cada um possui?

Figura 5: Problema 02 da 2ª e 5ª Sessões

Problema 3[21]:

Um engenheiro, com sua equipe, portando instrumentos de trabalho, como um teodolito, uma trena, calculadora, lápis e papel para anotações, deseja medir a largura aproximada de um rio sem ter que atravessá-lo. O engenheiro criou um esquema, como o representado na figura abaixo, sendo o segmento AB paralelo à margem do rio, e o segmento BC perpendicular à mesma margem, C representa um ponto na margem oposta do rio, e A e B duas estacas fincadas adequadamente na margem adjacente. A partir dos dados da figura, suponha que você seja esse engenheiro, e calcule a largura do rio.

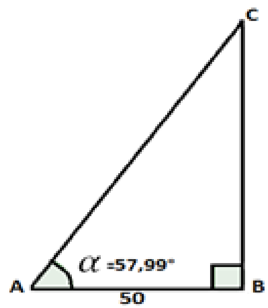


Figura 6: Problema 03 da 2ª e 5ª Sessões

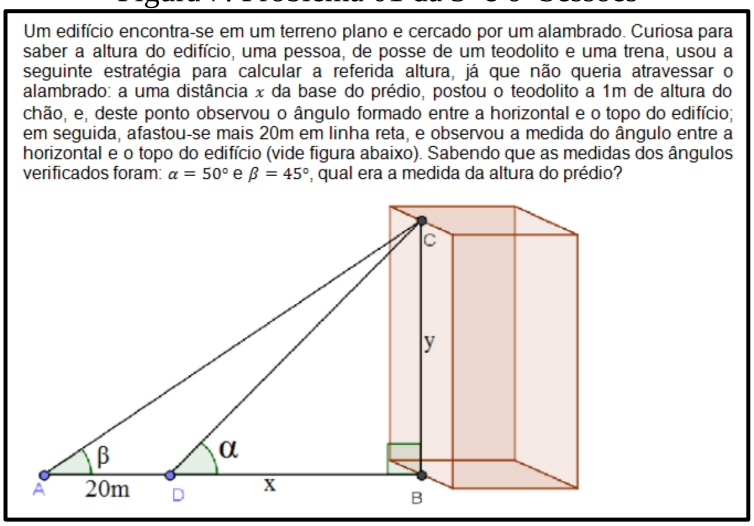
[20] Extraído de: **Obstáculos com os Números Inteiros e a Calculadora**. Janaina Cardoso da Silva. Monografia de Graduação. Campina Grande/PB. 2011. 54 f.
[21] Extraído de: **Atividades em sala de aula para o ensino de trigonometria e avaliação de resultados**. Edmar Floriano Amaro. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2013. 55 f.

ISBN 978-84-945722-3-4

3ª Sessão

Problema 1[22]:

Figura 7: Problema 01 da 3ª e 6ª Sessões


Um edifício encontra-se em um terreno plano e cercado por um alambrado. Curiosa para saber a altura do edifício, uma pessoa, de posse de um teodolito e uma trena, usou a seguinte estratégia para calcular a referida altura, já que não queria atravessar o alambrado: a uma distância x da base do prédio, postou o teodolito a 1m de altura do chão, e, deste ponto observou o ângulo formado entre a horizontal e o topo do edifício; em seguida, afastou-se mais 20m em linha reta, e observou a medida do ângulo entre a horizontal e o topo do edifício (vide figura abaixo). Sabendo que as medidas dos ângulos verificados foram: $\alpha = 50°$ e $\beta = 45°$, qual era a medida da altura do prédio?

Problema 2[23]:

Figura 8: Problema 02 da 3ª e 6ª Sessões

[22] Extraído de: **Atividades em sala de aula para o ensino de trigonometria e avaliação de resultados**. Edmar Floriano Amaro. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2013. 55 f.

[23] Extraído de: **Guia do Professor: Trigonometria na Ponte – Calculando distâncias indiretamente com a Lei dos Senos**. RIVED – Rede Interativa Virtual de Educação. [s.l/s.d].

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a 50m de distância. Sabemos que o ângulo formado pelas direções (caixa d'água - casa) e (casa - bomba) é de 45° e que o ângulo formado pelas direções (bomba - caixa d'água) e (caixa d'água - casa) é de 60°. Se pretendermos bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

Problema 3[24]:

Figura 9: Problema 03 da 3ª e 6ª Sessões

Minha calculadora tem visor com capacidade para digitar oito algarismos. Digitei nela o maior número possível, do qual subtraí o número de habitantes de certa cidade no ano de 2013, obtendo 61 290 679 como resultado. Qual é a população dessa cidade?

[24] Criada pelo próprio pesquisador.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-841

A ORQUESTRAÇÃO DA DISCUSSÃO COLETIVA NA AULA DE MATEMÁTICA DO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE E O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO QUANTITATIVO

Margarida Rodrigues[1] - Lurdes Serrazina[2] - Ana Caseiro[3]
margaridar@eselx.ipl.pt[1] - lurdess@eselx.ipl.pt[2]-- anac@eselx.ipl.pt[3]
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal[123]
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal[12]

Modalidade - Comunicação Breve (CB)
Nível educativo- Primário (6 a 11 anos)
Núcleo Temático - Investigação em Educação Matemática
Palavras-chave: Práticas profissionais de professores, Orquestração de discussão coletiva, Raciocínio quantitativo aditivo.

Resumo

Esta comunicação insere-se no Projeto em desenvolvimento Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo, o qual tem por objetivo caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos desde os 6 aos 12 anos e descrever e analisar as práticas dos professores que facilitam esse desenvolvimento. Nesta comunicação, centramo-nos nas práticas de uma professora do 2.º ano de escolaridade numa aula de Matemática em que se explorou uma tarefa que visava o desenvolvimento nos alunos do seu raciocínio quantitativo aditivo. Começamos por discutir o que designamos por raciocínio quantitativo aditivo, discutindo depois as práticas de professores relativas à orquestração da discussão coletiva. A metodologia adotada no projeto é a de experiência de ensino. Foi usada a técnica de recolha de dados de observação participante de aulas com vídeo e audio gravação do trabalho desenvolvido pelos alunos bem como dos momentos de discussão das tarefas. Os resultados apresentados nesta comunicação sugerem que a prática de desafiar os alunos a justificarem as suas afirmações, a argumentarem entre si e a validarem o seu conhecimento, é promotora do raciocínio quantitativo aditivo dos alunos.

Introdução

Este estudo está a ser desenvolvido no âmbito do Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* cujos membros de equipa incluem docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre. Tem como objetivo caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos desde os 6 aos 12 anos e descrever e analisar as práticas dos professores que facilitam esse desenvolvimento.

ISBN 978-84-945722-3-4

O raciocínio quantitativo aditivo foca-se nas relações entre quantidades (Thompson, 1993). Estas incluem os resultados das operações quantitativas, como sejam as diferenças quantitativas resultantes de encontrar o excesso nas comparações aditivas entre duas quantidades.

Um dos aspetos da prática profissional do professor mais exigente é o da orquestração de discussões coletivas. O momento da aula da discussão deve ter como protagonistas os próprios alunos, tendo o professor um papel fundamental na gestão das intervenções dos alunos, pelas questões que coloca, e pelo modo como os envolve na discussão, promovendo a argumentação sustentada pelos mesmos, e a qualidade e a sistematização das aprendizagens realizadas na exploração da tarefa (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013; Silva & Rodrigues, 2016; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

A tarefa aqui analisada (anexo 1) foca o raciocínio quantitativo aditivo, tendo sido a quinta de uma sequência de 11 tarefas que foram aplicadas no contexto de uma experiência de ensino desenvolvida numa turma do 2.º ano, com 26 alunos, numa escola pública de Lisboa. Este artigo apresenta resultados relativos à exploração pelos alunos dessa tarefa bem como à forma como a professora conduziu a discussão, visando o desenvolvimento do raciocínio quantitativo .

Raciocínio quantitativo

O raciocínio quantitativo incide nas relações entre quantidades, consistindo na análise de uma situação numa *estrutura quantitativa* (Thompson, 1993). Este tipo de estrutura constitui uma rede de quantidades e de relações quantitativas. Thompson (1993) distingue conceptualmente quantidade de número, considerando este mais abstrato.

> Uma pessoa constitui uma quantidade concebendo uma qualidade de um objeto de tal modo que compreenda a possibilidade de o medir. (...) Quantidades, quando medidas, têm um valor numérico, mas nós não precisamos de as medir ou saber quais as suas medidas para raciocinar sobre elas. Uma pessoa pode pensar sobre a sua altura, sobre a altura de outra pessoa, e a quantidade pela qual uma é mais alta do que a outra sem ter que conhecer os valores reais. Quantidades são mais concretas do que números. (Thompson, 1993, pp. 165-166)

Para o mesmo autor, quando uma situação envolve, pelo menos, 6 quantidades e 3 operações quantitativas pode ser considerada como relacionalmente complexa. Comparar duas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra é um exemplo de uma operação quantitativa. No âmbito do raciocínio quantitativo aditivo, o resultado da operação quantitativa de comparar aditivamente duas quantidades é *a diferença quantitativa*, ou seja, o excesso encontrado.

Thompson (1993) conduziu um estudo com 6 alunos de 5.º ano, com os objetivos de investigar (a) as capacidades das crianças em lidar com a complexidade relacional em situações e suas descrições, e (b) as conceções de diferença enquanto estrutura quantitativa. Os resultados deste estudo evidenciam que, para os alunos, uma quantidade não pode ser o resultado de uma operação quantitativa independente de um cálculo com valores concretos para o realizar, uma vez que sentiam necessidade de saber o valor dos números iniciais, nas tarefas propostas.

As práticas profissionais dos professores e os desafios de condução da discussão

O tipo de discurso desenvolvido na sala de aula constitui um aspeto essencial das práticas dos professores (Fey, 1981; Boaler, 2003). Assim, as decisões que os professores tomam são cruciais, nomeadamente as que são tomadas ao longo das discussões coletivas. É importante que sejam considerados diferentes pontos de vista e que os alunos sejam encorajados a explicitar e a justificar os seus raciocínios e resoluções, desenvolvendo, deste modo, e com o apoio do professor, a sua compreensão (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011). Assim, é da responsabilidade do professor o estabelecimento de “condições favoráveis ao desenvolvimento normal do processo de negociação de significados matemáticos na sala de aula. Ele deve estimular os alunos a falar e contribuir com frequência” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 124).

Um dos aspetos fundamentais do discurso é o questionamento do professor. Ponte e Serrazina (2000) referem a importância de os professores levarem os alunos a justificar as suas opções, incentivando a que todos participem nas discussões ocorridas na aula. Também a importância de processos como redizer, interrogar o significado e apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos são sublinhados por Franke, Kazemi, e Battey (2007).

Como regulador do processo de comunicação na sala de aula, o professor depara-se constantemente com diversos dilemas: “o que deve ser aprofundado, quando se devem introduzir convenções matemáticas e linguagem matemática, quando deve fornecer

ISBN 978-84-945722-3-4

informação, quando deve deixar os alunos lutarem com uma dada dificuldade, etc.” (Ponte & Serrazina, 2000, p. 118). A comunicação é, deste modo, um aspeto decisivo nas práticas dos professores, devendo ter-se em atenção a qualidade do discurso partilhado entre professores e alunos, uma vez que o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos também é um tema curricular a ser trabalhado.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa enquadrada num paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Está focado nos processos educacionais e nos significados dos participantes no estudo. Adota a modalidade de experiência de ensino concebida com o fim de desenvolver nos alunos a flexibilidade de cálculo e o raciocínio quantitativo. Os dados contemplados neste artigo foram recolhidos nos dias 18 e 25 de novembro de 2015. Os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade.

A recolha de dados foi feita através da observação participante pelas duas primeiras autoras deste artigo, complementada com notas de campo e com videogravação das aulas, incluindo as discussões coletivas. Foram ainda recolhidas as produções dos alunos. Na parte da exploração das tarefas, a videogravação incidiu em dois pares de alunos, Luís e Lúcia, e Paulo e João, selecionados por habitualmente verbalizarem entre si os seus raciocínios. A análise incidiu nas produções dos alunos, nas notas de campo, nos registos vídeo e respetivas transcrições.

Exploração da tarefa pelos alunos

No dia 18, o par Luís e Lúcia realiza as 1.ª e a 2.ª partes da tarefa *Mais? Ou menos?* de forma consecutiva, previamente à discussão da 1.ª parte. Quando recebem a folha da 2.ª parte, Luís questiona a razão da presença dos quadrados pretos: "Porque é que aqui tá [sic] preto?". Apesar de informados que não deveriam escrever lá nada, Luís escreve os diversos resultados dentro dos quadrados pretos, não obstante a reação de Lúcia: "Não podemos!", abordando, assim, a 2.ª parte, do mesmo modo da 1.ª. Para efetuar os cálculos, utilizam estratégias de compensação, adicionando primeiro 10. Por exemplo, 12+10=22; -2=20, em 12+8. Também o par Paulo e João efetua todos os cálculos, tal como na 1ª parte. Ao serem interpelados por uma das investigadoras sobre o quadrado preto — "Vocês têm de descobrir uma maneira sem

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

terem que saber este número." —, Paulo relaciona o colocado no quadrado de baixo (+3) com os ganhos e perdas das setas em cima, fazendo um gesto na horizontal num local e noutro, na primeira situação.

Na fase da discussão coletiva, a professora pede a diferentes pares para irem ao quadro apresentar as suas soluções da 1ª parte da tarefa – um par para cada situação. É de realçar a postura da professora que não se limitou a validar a solução apresentada, mas questionou os alunos levando-os a um aprofundar dos resultados apresentados.

> Nádia- Aqui é 15. Depois somámos mais 8 que dá 23. Menos 5 ia dar 18.
> Professora - Sim?... Então e como é que descobriram o de baixo?
> Nádia - Porque aqui (*apontando para o 15*) para chegar ao 18 é +3.
> Santiago - Aqui é mais 3.
> Professora - Então bastava o primeiro e o último, os saltos em cima não interessam?
> (*Maria hesita*)

A professora solicita outros alunos:

> Professora- Quero saber se os saltos em cima também ajudam.
> Paulo - Sim, ajudam.
> Professora - Porque?
> Paulo - (*dirige-se ao* quadro) Porque se ao 8 se tirar 5, ficam só 3 daqui (*aponta para o quadrado de baixo*). E sabendo que só faltavam 3, aqui do primeiro para chegar ao último só precisávamos também de mais 3. Para o último.
> Professora - Então ganharam ou perderam?
> Guilherme - Ganharam porque ficaram com mais 3.

O questionamento da professora levou os alunos a focarem-se no balanço entre ganhos e perdas de berlindes, e não tanto nos cálculos numéricos.

Na aula do dia 25, quando a professora distribui a 2ª parte da tarefa, já os dois pares mencionados anteriormente a tinham realizado na aula do dia 18, embora isso não tivesse acontecido com a maioria dos alunos. A professora solicitou a quem já tinha resolvido a tarefa, que conversasse entre si sobre o modo como o tinham feito. Luís e Lúcia verbalizam os cálculos efetuados: 12+8=20; 20-5=15; 12+3=15, na primeira situação; fazendo o mesmo para as restantes situações. Num dado momento, a professora aproxima-se do par, perguntando como é que tinham pensado. Ao ouvir os cálculos efetuados, em que os alunos verbalizam o número de berlindes correspondente ao quadrado do meio preto, a professora interpela-os:

> Professora - Faz falta este quadrado do meio?
> Luís e Lúcia - Não.

ISBN 978-84-945722-3-4

Professora - Digam-me lá outra maneira de chegar a isto sem dizer o número no meio. Se ele está pintado de preto, se calhar não faz falta.
Luís - Oito menos cinco dá três (*apontando para as setas*).
Professora - Ganhos ou perdas?
Luís - Ganhos. Mais três.
Professora - E aqui? (*apontando para a situação em baixo*)
Luís - 15 + 9...
Professora - Mas é preciso o quadrado do meio?
Luís - Mais nove menos dez. (*impercetível*)
Professora - Ok. (*afasta-se*)

Depois da professora se afastar, Luís apaga os números escritos nos quadrados pretos, parecendo assim seguir a orientação da professora de que esses números não seriam necessários. Contudo, não voltam a verbalizar entre si esse processo para as outras duas situações. Luís revela ser capaz de se focar na diferença quantitativa entre os ganhos e as perdas no total dos dois jogos, assim que incentivado nesse sentido pela professora. No entanto, na segunda situação volta a verbalizar os cálculos, sendo precisa nova intervenção da professora, para se focar de novo na diferença quantitativa, menos um, como resultado da comparação aditiva de 9 ganhos e 10 perdas. No que respeita ao outro par, Paulo evidencia focar-se no balanço entre os ganhos e perdas, tanto autonomamente, interpelando o colega nesse sentido, como explicitando esse processo à professora ("Quando olhámos para os saltos") quando esta se aproxima do par para perceber como é que eles tinham pensado. Depois, Paulo resolve inventar outras duas situações, uma com quadrado preto, e outra com as setas sem números para o colega determinar os saltos, acabando por apagar no final. Quando a investigadora se aproximou, Paulo explica para a situação -6 +4:

Paulo - É seis menos quatro. Vai dar um número negativo. (*impercetível*)
Investigadora - Aqui acabou por no final dos dois jogos, ficou a perder 2 berlindes. Foi isso? Muito bem.

Quando da apresentação à turma, a professora solicita a ida ao quadro a um par que rapidamente coloca os números corretos nos quadrados em branco. A professora questiona:

Professora- Porque é que acham que o quadrado está pintado de preto?
Aluno – É para adivinharmos o número e guardá-lo na nossa cabeça.
Professora – Faz sentido?
Gil – Para não se escrever.
Maria – Para nos ajudar a pensar.
Paulo – O quadrado está pintado porque o número que está debaixo desse quadrado não deve interessar.
Professora: Então como se resolve?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Luís- É +8-5 que dá +3.
Professora - (*regista no quadro*) Porque dá +3?
Luís – Porque 3+5 são 8.
Prof – Ganhou-se ou perdeu-se, Gil?
Gil - Ganhou-se +3
Professora. – Sem olhar para os saltos como se pode ver se se ganhou?
Alunos – Vê-se nos números, do 12 para o 15.

A professora procura que os alunos compreendam como podem resolver o problema relacionando os dois números que correspondem aos ganhos e perdas, terminando com uma chamada de atenção para um novo olhar para os números e, em especial, para a diferença entre 12 e 15.

Depois de apresentadas e discutidas as diferentes situações, a professora aproveita para introduzir a 3.ª parte da tarefa, questionando os alunos:

Professora – E se não se pusesse nenhum número nem no início nem no fim?
Luís – É só para descobrir se se ganha ou perde e quanto.
Professora – (*Introduzindo a 3ª parte da tarefa*) Esta nova proposta tem apenas os ganhos e as perdas em diferentes jogadas, vamos ver o que acontece ao fim cada dia.

Paulo parece lidar com facilidade com a diferença quantitativa tanto no caso de a mesma ser um excesso como um défice. Essa facilidade torna-se mais evidente na resolução da 3ª parte que foi realizada pelo par muito rapidamente, no espaço de dois minutos, embora o João tenha seguido os registos feitos por Paulo (tendo escrito "+8" ao fim de 3 dias, e retificado depois para "+1", ao olhar para a folha de Paulo). Quando a investigadora se aproxima, Paulo explica que olhou para os que se anulam ("estes anulam-se"; por exemplo, -2, +2), tendo calculado apenas os restantes.

O par Luís e Lúcia aborda a 3ª parte usando uma estratégia diferente. Juntam os ganhos, juntam as perdas, e só depois é que fazem a comparação. Luís circunda os números com linhas, de modo a separar os ganhos das perdas, acabando por as apagar. Na situação relativa à 4ª feira, os alunos circundam a cara triste, compreendendo que no final do dia, perdia berlindes. Mas ficaram num impasse quanto ao registo numérico por se tratar de uma perda. Com a orientação da investigadora quando esta se aproximou, registam "-17; +9".

Na discussão coletiva, a estratégia mais apresentada foi a de adicionar, por um lado, os ganhos, e por outro, as perdas, e determinar depois a diferença. Por exemplo, para a terça-feira, o par Marta e Mónica rapidamente registou no quadro"+9 – 6 = +3" e desenhou o ‘sorriso’.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Mónica- Fizemos +9 que é o que ganhou +6+3.
Professora – E o outro 6?
Mónica- Do que perdeu: o 4 e o 2.
Professora – Como chegaram ao 3? (*dirigindo-se à turma*)
Alunos – A diferença entre o 9 e o 6 é 3 a ganhar.

Aqui os alunos pareciam dominar a situação, adicionando, por um lado, os ganhos, por outro, as perdas, e calculando a diferença entre as duas quantidades.

Mas a professora questiona de novo a turma:

Professora – Há outra explicação?
Paulo – Sim, o +6, -4 e -2 anulam-se.
[A professora regista no quadro: +6-4-2=0]
Paulo – E só sobra +3.

Esta ideia do 'anular' foi usada por outros alunos nas situações seguintes e muitos deles usavam-na de forma correta.

Conclusões

Os resultados deste estudo mostram como os alunos são capazes de se focar na diferença quantitativa, olhando para os ganhos e perdas, e operando, de forma natural e compreensiva, com expressões incluindo a notação de números negativos. Assim, estes alunos foram capazes de estabelecer relações entre quantidades, sem terem necessidade de conhecer os valores iniciais e finais, contrariamente ao que sucedeu com alunos do 5.º ano, no âmbito do estudo de Thompson (1993). Mas, esta situação está intrinsecamente ligada ao papel que a professora exerceu em todo o processo, colocando as questões adequadas para que os alunos se sentissem desafiados a avançar no seu processo de pensamento e até a propor novas situações, como no caso do Paulo. Esse questionamento parece ter sido fundamental para a compreensão das perdas e dos ganhos e para o entendimento que foi sendo construído da ideia de diferença quantitativa.

Referências bibliográficas

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the dance of agency. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu: PME.

Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fey, J. T. (1981). *Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys*. Reston,VA: NCTM.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22*(2), 55-82.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

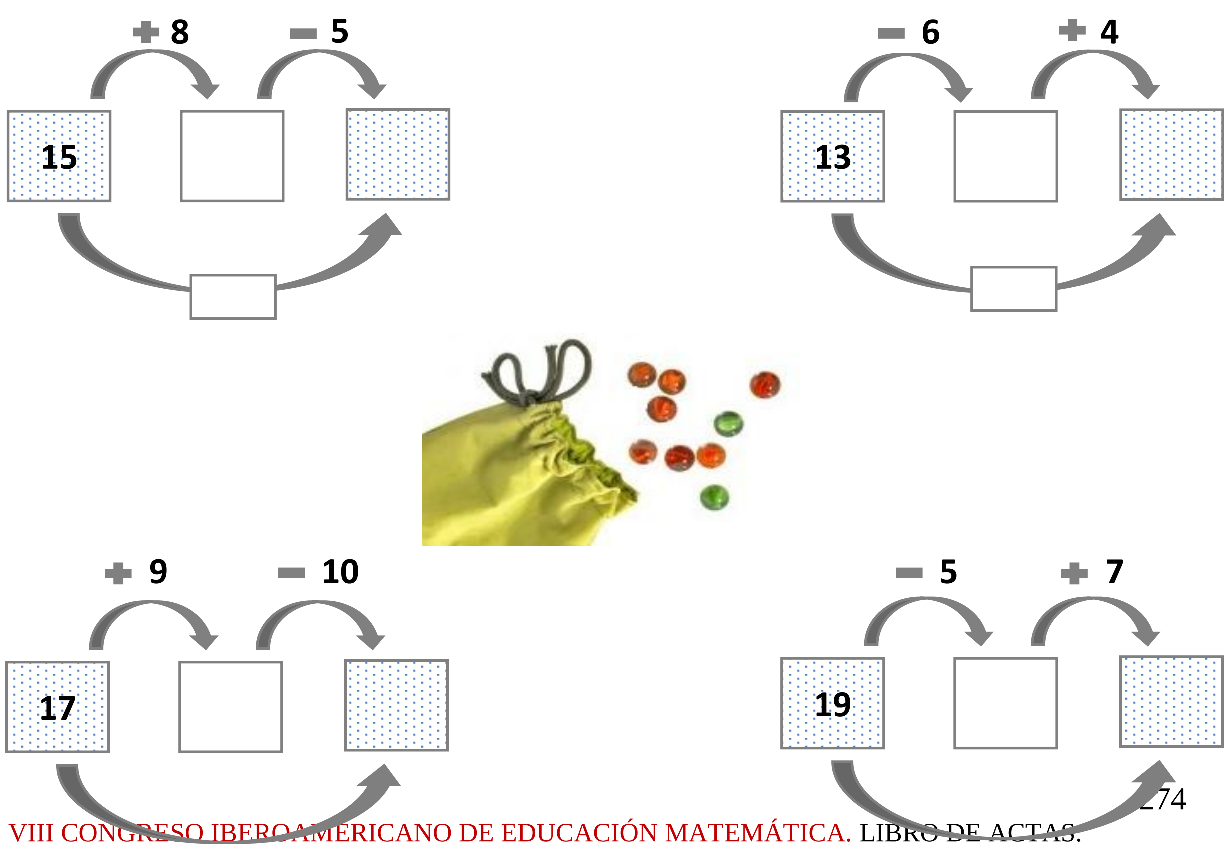
Silva, R., & Rodrigues, M. (2016). A organização da discussão nas aulas de matemática na Prática de Ensino Supervisionada: Um estudo no 1.º ano de escolaridade. *Educação e Fronteiras On-Line*, *6*(17), 114-131.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Anexo 1

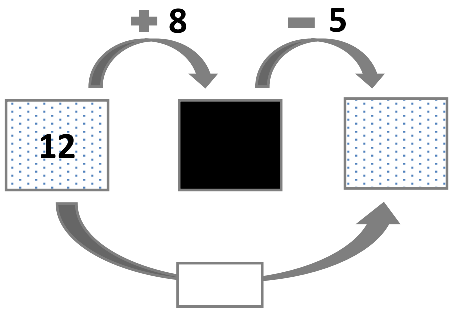
Mais? Ou Menos?

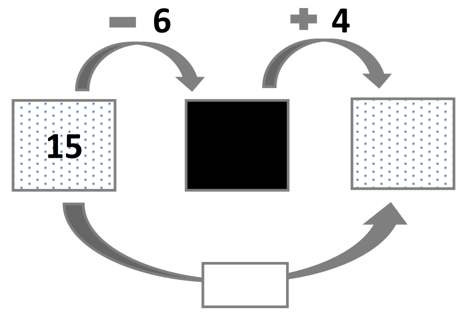


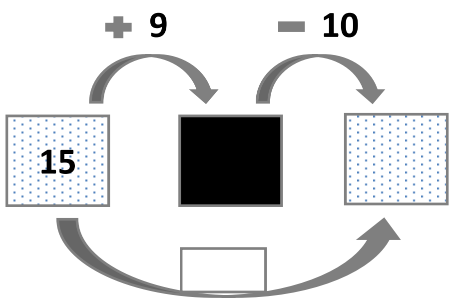
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

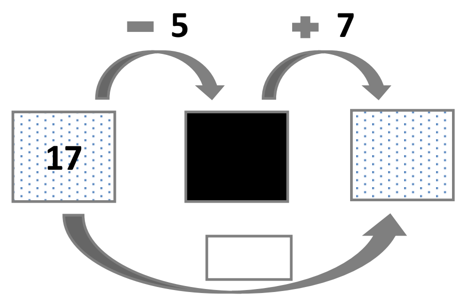
Nota: Conceção da tarefa: Jean Marie Kraemer

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

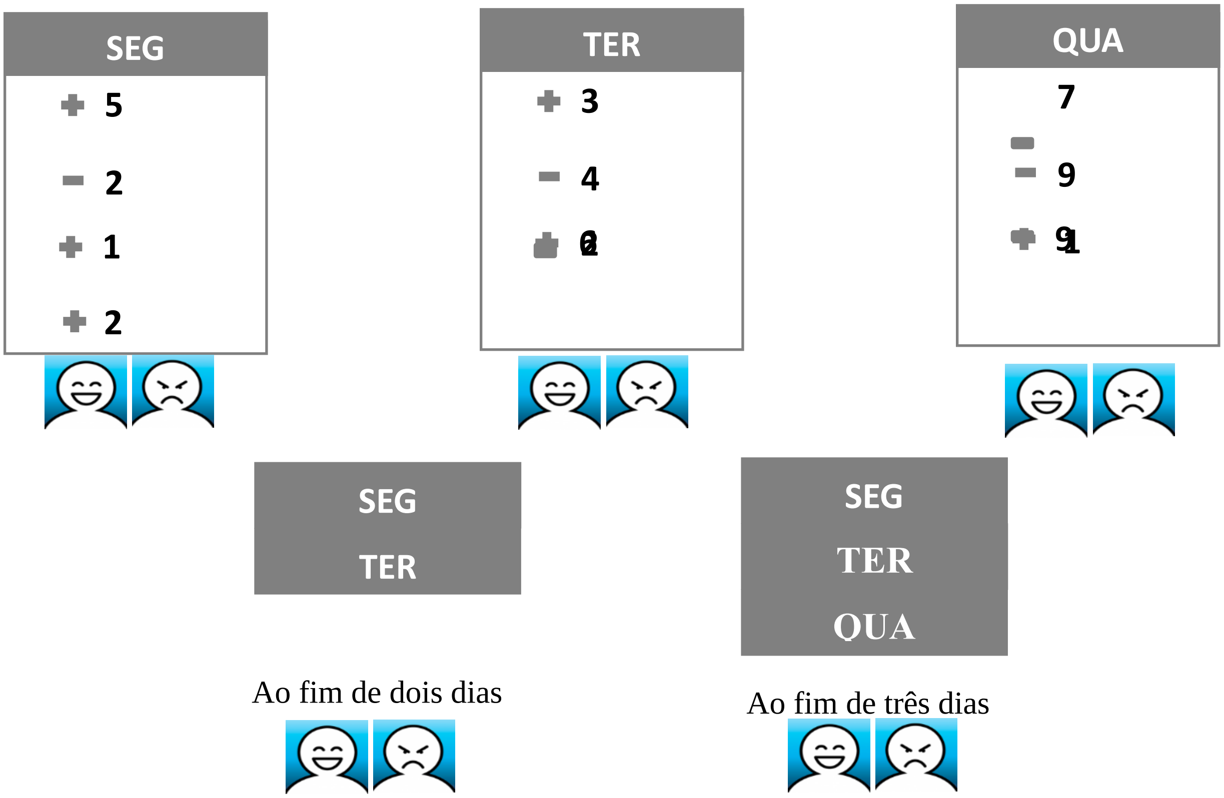








VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-843

LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. PLAN DE ESTUDIOS 2012

Edith Arévalo Vázquez – Hilda Alicia Guzmán Elizondo
edith.arevalo@enmfm.edu.mx – hilda.guzman@enmfm.edu.mx
Normal "Miguel F. Martínez", México – Normal "Miguel F. Martínez", México

Nancy Bernardina Moya González
nancy.moya@enmfm.edu.mx
Normal "Miguel F. Martínez", México

Núcleo temático: La formación del Profesorado en Matemáticas
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: formación docente, práctica profesional, enseñanza de matemáticas

Resumen

En México, se implementó en las instituciones formadoras de docentes el Plan de estudio 2012, con la finalidad de ofrecer una educación estratégica e integral caracterizada por la innovación, calidad y pertinencia social. En espera que los estudiantes normalistas sean partícipes activos en la práctica docente y hagan uso de sus conocimientos como elementos claves para una enseñanza efectiva, a fin de ofrecer una ayuda pedagógica más ajustada a las necesidades académicas de los alumnos que atienden durante las jornadas de práctica en las escuelas primarias y jardines de niños.

En este sentido, la presente investigación tiene como objetivo analizar las fortalezas y debilidades a las que se enfrentan los estudiantes de sexto semestre de las Licenciaturas en Educación Primaria y Educación Preescolar de la Normal "Miguel F. Martínez", con respecto a su práctica profesional, específicamente en la enseñanza de las matemáticas. Representa un estudio cualitativo y de diseño exploratorio. Los instrumentos para la recogida de datos fueron cuestionarios a estudiantes, videograbaciones de clases y producciones de los alumnos de Educación Básica. El estudio nos ha permitido conocer el estado actual sobre la enseñanza que los normalistas realizan, en torno a los contenidos matemáticos escolares del grado que atienden.

Introducción

En México, las escuelas normales han cumplido con la tarea trascendental de formar a los docentes de la Educación Básica (EB) en el país. En el año 2012 en este tipo de instituciones se puso en marcha una nueva reforma curricular, atendiendo a la imperiosa necesidad de

ISBN 978-84-945722-3-4

incrementar los niveles de calidad y equidad de la educación y asumiendo el reto de formar docentes capaces de responder a las demandas y requerimientos que plantea la EB, sobre todo en los niveles de educación preescolar y primaria.

Los planes de estudio para la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) y Licenciatura en Educación Preescolar (LPP), se sustentan en las tendencias de las diversas perspectivas teórico-metodológicas de las disciplinas que son objeto de enseñanza en la EB; así como de aquéllas que explican el proceso educativo, de las que atienden a la naturaleza y desarrollo de las prácticas pedagógicas actuales y las emergentes que surgen ante los nuevos requerimientos y problemas que el maestro enfrenta. Estas acciones son resultado de los múltiples cambios en los contextos actuales e impactan de manera notable, en el servicio educativo que se debe ofrecer.

El Plan de estudios 2012 retoma los enfoques didáctico-pedagógicos de corte constructivista. A través del tratamiento de los cursos que forman parte de su malla curricular, se espera que los futuros docentes se apropien de métodos de enseñanza, estrategias didácticas, formas de evaluación, uso de las TIC; así como el desarrollo de la capacidad para crear ambientes de aprendizaje que respondan a las finalidades y propósitos de la educación básica, y a las necesidades de aprendizaje de los alumnos, del contexto social y su diversidad. Asimismo, con la implementación de este plan de estudios, se aspira a contribuir a la formación de docentes que utilicen argumentos científicos, pedagógicos, metodológicos, técnicos e instrumentales para entender y hacer frente a las complejas exigencias que la docencia plantea.

Particularmente en el trayecto formativo *Preparación para la enseñanza y el aprendizaje*, los estudiantes tienen la posibilidad de capacitarse a través de cursos en los que profundizan en el estudio de la asignatura de Matemáticas. Los cursos para la LEP son *Aritmética: su enseñanza y aprendizaje; Álgebra: su enseñanza y aprendizaje; Geometría: su enseñanza y aprendizaje;* y *Procesamiento de información estadística* (SEP, 2012a). Para LPP la malla incluye *Pensamiento cuantitativo; Forma, espacio y medida;* y *Procesamiento de información estadística* (SEP, 2012b). Los cursos proporcionan herramientas para el desempeño profesional del futuro docente con respecto al manejo de contenidos matemáticos y al análisis de los múltiples usos que tienen las matemáticas en los contextos educativo, científico, social y económico.

ISBN 978-84-945722-3-4

Se pretende además que los estudiantes normalistas desarrollen competencias que les permitan diseñar y aplicar estrategias didácticas eficientes para que los alumnos que atienden en EB, se apropien de las nociones, conceptos y procedimientos que favorezcan la asignación de significados a los contenidos matemáticos que se abordan en los jardines de niños o escuelas primarias, y aprendan a usarlos con propiedad y fluidez en la solución de problemas que se les presenten.

En este sentido, y con la intención de hacer una valoración sobre las experiencias docentes que los estudiantes han vivenciado hasta el momento, en la Escuela Normal "Miguel F. Martínez" se ha iniciado el presente estudio cuyo objetivo es analizar las fortalezas y debilidades que presentan los normalistas de sexto semestre de las Licenciaturas en Educación Primaria y Educación Preescolar, con respecto a su práctica profesional, específicamente en la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, se especifica que como primera etapa del estudio, solamente se presenta la información recuperada de la Licenciatura en Educación Primaria.

Metodología

El estudio que se presenta es de cote cualitativo y de diseño exploratorio (Hernández, 2008). La muestra está integrada por noventa estudiantes normalistas que cursan el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP). Los instrumentos para la recogida de datos utilizados fueron un cuestionario a estudiantes, videograbaciones de clases recuperadas de las jornadas de Práctica profesional y producciones de los alumnos de EB incluidas fichas de trabajo, ejercicios en el cuaderno, en el libro de texto, entre otras. Para el tratamiento y análisis de la información, los datos fueron agrupados en matrices por licenciatura y estudiante/categoría, efectuando registros descriptivos en cada una de las celdas en torno a lo focalizado en los cuestionarios y en los videos de clase.

Las categorías de análisis utilizadas son las siguientes: Metodología didáctica, Recursos didácticos, Formas de organización social de la clase, Empleo de tecnología, Uso del tiempo y Técnicas e instrumentos de evaluación. Para la estructuración y precisiones de las mismas se tomaron como referencia, diversas fuentes bibliográficas y materiales de apoyo que integran el acervo que debe poseer el docente en servicio para organizar su enseñanza. Ente

ISBN 978-84-945722-3-4

ellos se destacan el Plan de Estudios (SEP, 2011), Programa de Matemáticas (SEP, 2012c) y Guía para el Maestro (SEP, 2014), Texto Desafíos matemáticos (SEP, 2013). Las categorías fueron elaboradas a partir de las propuestas y sugerencias de los autores revisados en el marco teórico de este trabajo y validadas por expertos en la materia.

La presentación de los resultados la hemos organizado por categorías, contrastando e incluyendo en ellas, la información recuperada de ambos instrumentos. La inicial representa a la categoría (C) y el número, la asignación de cada una de ellas (C1, C2, C3, C4, C5 y C6).

Resultados

A manera de síntesis, se presentan los primeros resultados a la fecha con una interpretación de tipo cualitativo, esperando en la siguiente etapa de la misma, ofrecer resultados más robustecidos en torno a cada una de las categorías recuperados para el análisis de la información.

C1. Sobre la Metodología didáctica: En respuestas del cuestionario, los estudiantes normalistas manifiestan que trabajar bajo el enfoque propuesto desde el Plan de estudios 2011 es adecuado, ya que favorece el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos de educación básica. Aluden a la recuperación de los conocimientos previos, al uso de secuencias de situaciones problemáticas trabajadas en contexto, llevar las matemáticas al aula, promover la participación de los alumnos en clase, socializar procesos y plantear preguntas que lleven a sus alumnos a la construcción de conocimiento matemático (SEP, 2012c). Como es de observarse, desde el decir, los estudiantes tienen claridad en los aspectos que caracterizan al enfoque didáctico actual; sin embargo, en la práctica profesional identificamos, aunque en un bajo porcentaje, estudiantes que trabajaron bajo una forma instructiva y explicativa con características distantes a lo propuesto para el tratamiento de las matemáticas escolares. En los más de los estudiantes, identificamos coincidencia en su *decir y hacer*; es decir, trabajaron bajo las características sugeridas desde el enfoque didáctico. Aunque de este sector de estudiantes, también ubicamos a aquellos que tuvieron dificultad para la implementación de sus actividades. Las problemáticas que experimentaron, giraron en torno al tipo de situaciones de aprendizaje utilizadas (inadecuadas para la cantidad de alumnos en el grupo, complejas para algunos), tipo de preguntas planteadas (uso de preguntas

ISBN 978-84-945722-3-4

básicamente cerradas), limitados espacios para socialización de argumentos por parte de los alumnos (pocos alumnos participantes).

C2. Recursos didácticos: La mayoría de los estudiantes normalistas elaboró e hizo uso de material didáctico, como dibujos o carteles con imágenes. Asimismo, se observó en los videos que los alumnos utilizaron durante el inicio o desarrollo de la clase, material manipulable/concreto. Entre los manipulados se pueden citar monedas del material recortable del libro de texto, el Tangram, fichas de colores, corcholatas para el conteo, regletas, productos de uso diario para compra-venta, dados, ábaco, "El caminito", entre otros. En respuesta al cuestionario, la mayoría de los estudiantes manifestó que implementa este tipo de recursos tomando en consideración las recomendaciones expresadas desde la Guía para el Maestro de Matemáticas, espacio en el que se hace referencia a que en los diversos grados, pero preferentemente en el primer ciclo de educación primaria, la mayor parte de los contenidos matemáticos se deben introducir con actividades que impliquen el uso de material concreto, pues la forma en que los alumnos utilizan dichos materiales determina, en gran medida, la posibilidad de comprender/aprender el contenido que se trabaja (Chamorro, 2004; SEP, 2014).

C3. Formas de organización social de la clase: En la presente categoría, se identificó que un alto número de estudiantes -setenta y seis- utilizaron variadas formas de organización para que sus alumnos llevaran a cabo las actividades planeadas. Hicieron uso de actividades de forma grupal, en la que participaron alumnos al frente con la finalidad de resolver situaciones de aprendizaje o bien para socializar procesos y resultados. También organizaron a los alumnos para trabajar de forma colaborativa o en pequeños grupos al trabajar con juegos matemáticos o resolver algún desafío matemático, tal como se promueven desde el enfoque didáctico de la asignatura (Arends, 2007; SEP, 2012c; SEP, 2014). Quienes no utilizaron esta forma de trabajo manifestaron en respuesta del cuestionario que una de sus preocupaciones es perder el control de grupo, inversión de tiempo excesivo o no lograr el aprendizaje esperado. Por su parte, el trabajo individualizado también fue frecuente dentro de sus clases, las actividades para esta forma de organización se basó en contestar fichas de trabajo, ejercicios en el cuaderno y en el libro Desafíos matemáticos.

C4. Empleo de la tecnología: Un limitado número de estudiantes -veintidós- incorporaron el uso de tecnología en la clase, debido a que en los más de las aulas se carece de este recurso.

ISBN 978-84-945722-3-4

En las aulas en las que se cuentan con computadora y proyector, los estudiantes utilizaron este recurso para proyectar videos, juegos matemáticos interactivos, ejercicios a resolver o bien para mostrar imágenes ampliadas de las páginas del libro de texto y ser contestadas en algunos casos, de forma grupal. Sin duda, el abastecimiento tecnológico en los salones de clase, sigue representando un área de oportunidad en las instalaciones educativas en la entidad. Asimismo, y pese a que la mayoría de los estudiantes refirieron desde su respuesta en cuestionario que el uso de la tecnología es importante y necesaria para favorecer la enseñanza y motivar el aprendizaje de los alumnos, se debe señalar que limitados estudiantes por iniciativa propia -ocho-, incorporaron este recurso a sus clases trasladando su equipo personal al aula.

C5. Uso del tiempo: Para cuarenta y dos estudiantes, el tiempo efectivo de clase representa una debilidad, manifestando tener dificultades para su administración durante el desarrollo de las actividades; pues se debe considerar que la relevancia del tiempo escolar no se encuentra en su dimensión cronológica, sino en su potencial como medio para generar oportunidades de aprendizaje (Razo y Cabrero, 2015). Al respecto, algunos refirieron dedicar mucho tiempo a una misma actividad, limitando el tiempo para la realización del resto de la clase; otros más manifiestan que dan más del tiempo debido a los alumnos para que resuelvan algún ejercicio; unos más refieren que llevar a la práctica cierto juego matemático, siempre les implica invertir más del tiempo necesario porque no quieren interrumpir la actividad. Decisiones que manifiestan, les han llevado a realizar ajustes a sus planificaciones, y en algunos de los casos, reducir considerablemente el número de actividades que habían planeado. Hechos que se pudieron corroborar en las observaciones de clase realizadas a través de los videos, lo que nos permite afirmar que, como lo refieren Antúnez, Imbernón, Carmen, Parcerisa y Zabala "…programar la enseñanza se convierte en un proceso de investigación y no una formalización rígida" (2000, p.107).

C6. Técnicas e instrumentos de evaluación: La evaluación de los aprendizajes, también es considerada por la mayoría de los estudiantes -cincuenta y uno- como una debilidad. Expresan tener dificultad desde la elección de los instrumentos más adecuados que les permitan valorar los aprendizajes matemáticos esperados; la elaboración de los mismos; consideran que son limitados los tipos de instrumentos que utilizan, remitiéndose

ISBN 978-84-945722-3-4

básicamente al uso de listas de cotejo y escalas estimativas; otros más consideran el uso de fichas de trabajo y producciones en los cuadernos como referentes de evaluación, sin contar con un instrumento para su valoración. A los estudiantes les queda claro su papel como evaluadores del proceso, ya que la conceptualizan tal como lo sugiere Airasian (2002), como el proceso que posibilita obtener, sistematizar e interpretar información para facilitar la toma de decisiones con respecto a los aprendizajes de los alumnos.

A manera de conclusión

El estudio ha permitido conocer el estado actual sobre la enseñanza que los normalistas realizan en torno a los contenidos matemáticos escolares del grado que atienden. Se identifican como fortalezas entre los estudiantes, el conocimiento y atención que prestan a los aspectos que caracterizan a la metodología didáctica para la enseñanza de las matemáticas, sugerida desde el Plan de estudios de educación básica. Asimismo, el uso variado de recursos didácticos también se considera como una fortaleza a destacar, ya que se pudo corroborar que los estudiantes dedicaron especial atención a su diseño, he hicieron un uso adecuado de los mismos con la intención de favorecer la construcción de conceptos matemáticos. Las formas de organización de la clase, viene a representar otra de las fortalezas, ya que en buena medida hicieron un uso variado en torno al trabajo grupal, colaborativo e individual; sin embargo, se puede valorar como una categoría en la que hace falta que la totalidad de los estudiantes favorezcan el trabajo colaborativo, con la finalidad de que se posibilite la construcción social del conocimiento matemático.

Por su parte, para menos de la mitad de la muestra, el uso del tiempo representa un reto a vencer, su experiencia al momento todavía no les alcanza para tomar decisiones que les posibiliten optimizar los tiempos de clase; al respecto, será necesario trabajar desde los cursos en la institución, técnicas efectivas que puedan llevar a la práctica durante sus jornadas. El uso de la tecnología fue limitado entre los estudiantes, se requiere que desde *su hacer* busquen la forma de incorporar este recurso al aula, ya que desde *su decir* reconocen la importancia de la misma como forma de favorecer aprendizajes en sus alumnos, en tiempos actuales. Por su parte la evaluación de los aprendizajes, también viene a formar parte de una de las debilidades de los futuros maestros, requiriendo desde la institución buscar los

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

mecanismos necesarios, como talleres complementarios y seminarios con especialistas, para atender y fortalecer este importante rubro en el proceso formativo que reciben los estudiantes. Se cierra este apartado destacando lo importante y necesario que es trabajar las matemáticas con apego a los fundamentos pedagógicos y metodológicos propuestos desde el plan de estudio vigente; hecho que garantizará sin duda, mejores resultados en el nivel educativo con el que se trabaje. Las experiencias que vivan los futuros maestros al estudiar y trabajar las matemáticas en las escuelas primarias les traerá en consecuencia el gusto, la creatividad para encontrar soluciones, la búsqueda de explicaciones y en consecuencia, la toma de las mejores decisiones que impactarán sin duda alguna en los aprendizajes y la actitud de sus alumnos, hacia las matemáticas escolares.

Referencias bibliográficas

Airasian, P. (2002). *La evaluación en el salón de clases*. México: Mc Graw Hill Interamericana Editores.

Antúnez, S., Imbernón, F., Carmen, L., Parcerisa, A., Zabala, A. (2000). *Del Proyecto Educativo a la Programación en el Aula*. España: Graó.

Arends, R. (2007). *Aprender a enseñar*. Séptima Edición. México: Mc Graw Hill.

Chamorro, M. C. (Coord.) (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2008). *Metodología de la Investigación*. Chile: McGraw-Hill.

Razo, A. y Cabrero, I. (2015). *Uso y organización del tiempo en aulas de educación media superior*. México: SEP.

SEP. (2011). *Plan de Estudios 2011. Acuerdo por el que se establece la Articulación de la Educación Básica*. Subsecretaría de Educación Básica. México: SEP.

__. (2012a). Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria. http://www.dgespe.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/plan_de_estudios/ Consultado 8/01/2017

__. (2012b). Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Preescolar. http://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/lepre/descargar/ Consultado 10/02/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

__. (2012c). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro*. Educación Básica. Primaria. Primer grado. México: SEP.

___. (2013). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno*. Primer grado. México: SEP.

___. (2014). *Desafíos Matemáticos. Guía para el maestro*. México: SEP.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-844

TAREAS DE VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN PARA UNA PRIMERA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO

Eddie Aparicio Landa – Landy Sosa Moguel
alanda@correo.uady.mx, landy.sosa@gmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán, Universidad Autónoma de Guerrero, México

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Superior
Palabras clave: Cálculo, variación, acumulación, tareas

Resumo

Se presenta un trabajo en el que se tuvo como objetivo, analizar en qué medida se favorece una adecuada articulación entre las ideas de variación y acumulación en la introducción al estudio formal del cálculo escolar en educación superior, ello mediante tareas de interpretación y representación de lo variable en un ambiente contextual y de simulación dinámica computacional. Se asumió como premisa fundamental que la conceptualización de los saberes en cálculo está estrechamente relacionada con el carácter empírico y situacional del conocimiento matemático, sin embargo, en la enseñanza aprendizaje se continúa excluyendo prácticas, actividades, y en general, contextos socioculturales entorno al desarrollo de tales nociones. A partir de los datos recabados del trabajo realizado por diez estudiantes se pudo identificar que ellos fueron capaces de establecer relaciones adecuadas entre algunas formas de variación y formas de acumulación, esto, mediado por la naturaleza icónica-dinámica de la situación variacional planteada, así como de la actividad de representación geométrica.

Presentación

Diversos investigadores (Schwarzenberger, 1980, Tall & Vinner, 1981; Tall 1990, 1993; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Thompson, 1994; Artigue 1995; Dreyfus, 1999; Muñoz 2007; Mahir, 2009; Aparicio & Cantoral, 2014) indican que una de las principales problemáticas en la enseñanza aprendizaje del cálculo es la poca o nula conceptualización de éste. Grebe (2013), expone que tradicionalmente las definiciones formales de diferenciación e integración se basan en lo algebraico y que el uso de las interpretaciones geométricas solo es para ayudar a su entendimiento, limitando no solo el acceso a la dimensión conceptual de los saberes, sino también, al desarrollo de un pensamiento variacional, siendo ambos aspectos fundamentales en el aprendizaje y uso adecuado de los conceptos del cálculo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Asimismo, curricularmente el cálculo se ha organizado y difundido en dos partes: cálculo diferencial y cálculo integral, induciéndose la idea equívoca de que el cálculo versa sobre los conceptos de derivada e integral, más que en el estudio y establecimiento de relaciones funcionales entre variación y acumulación de lo variable. Ejemplo de ello es cuando escolarmente el Teorema Fundamental del Cálculo es tratado como una técnica de integración y el argumento con el cual se concibe a la integral definida en dos de sus formas más usuales de representación: operación inversa de la derivada y, el método de determinación del área bajo una curva para funciones continuas sobre intervalos cerrados (Cabañas & Cantoral, 2007), reduciéndose la conceptualización de dicho teorema y del cálculo en general.

En nuestra opinión, favorecer la conceptualización del cálculo demanda analizar formas de organizar y socializar escolarmente los saberes más allá de lo exclusivamente matemático, lo estático y lo algorítmico, se requiere tratar con las ideas y relaciones entre variación y acumulación de lo variable para posibilitar la comprensión del cálculo, pues su estudio escolar centrado en lo memorístico, repetitivo y la aplicación de técnicas de derivación e integración algebraica, ha sido poco eficiente para conceptualizar.

Gray & Tall (1994), Cordero (2003), citados en Muñoz (2007), consideran que el estudio de la integral e integración, debiera centrarse en la idea de acumulación, más que en la función derivada o en la suma de Riemann. Thompson & Silverman (2008) refieren que será precisamente en el entendimiento de la acumulación donde, de manera coherente, los estudiantes vean la conexión entre la razón de cambio de cantidades y la acumulación de esas cantidades. Schnepp & Nemirovsky (2001), sugieren que en lugar de aprender cálculo partiendo de la diferenciación hacia la integración, se debe aprender acerca de la diferenciación en relación con la integración, y viceversa. Esto es, cuando los estudiantes discutan la integración, deben reconocer que la acumulación siempre ocurre con una cierta razón de cambio, y que esta razón es el valor de la función siendo integrada. Complementariamente, cuando se discuta la diferenciación se debe reconocer que la razón de cambio es acumulativa y lo que se ha acumulado hasta cierto instante, es el valor de la función siendo diferenciada.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Es en este contexto que el propósito con este trabajo fue analizar en qué medida, mediante tareas de interpretación y representación de lo variable en un ambiente contextual y de simulación dinámica computacional, se favorece una adecuada articulación entre las ideas de variación y acumulación.

Marco conceptual

Conceptualmente el cálculo es un cuerpo de conocimientos (herramientas matemáticas) útiles para cuantificar los cambios en situaciones o fenómenos de variación continua presentes en la naturaleza, sin embargo, en la escuela se ha ocultado, por un lado, la importancia de la relación variacional para representar y cuantificar cambios. La derivada y la integral mayormente son presentadas como procesos relacionados inversamente. Por otro lado, se excluyen contextos socioculturales que medien el desarrollo de una forma variacional de pensar (Aparicio & Cantoral, 2006).

Radford (2003, p.41) señala que en un proceso de objetivación interviene la creatividad para darse cuenta de algo, en vinculación con los esfuerzos reflexivos y mediadores, orientados a la consecución del objetivo de una actividad. Para él, la naturaleza reflexiva es una relación entre la conciencia individual y una realidad construida culturalmente, mientras que la naturaleza mediadora son los medios que orientan el pensamiento y posibilitan a los individuos tomar conciencia de, y comprensión de la realidad cultural.

Radford & Puig (2007, p. 148) utilizan la idea de " embedment principle" para enlazar los mecanismos cognitivos (percepción, abstracción, simbolización), con las prácticas sociales, los signos y artefactos que ellos median, y con base en ello, dar cuenta del papel que tienen las situaciones culturales en procesos de construcción de significados. Cantoral (2004, p.1), refiere que el desarrollo y el estudio del pensamiento y lenguaje variacional es un medio para entender los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten significados cuando emplean diferentes estructuras y lenguajes variacionales.

Así, en este estudio se reconoce un entramado de lo cognitivo con lo social, asociado a la naturaleza conceptual del cálculo, asumiéndose en consecuencia que la conceptualización de los saberes en cálculo está estrechamente relacionada con el carácter empírico y situacional del conocimiento matemático, en donde lo *situacional* implica una relación tríadica entre un

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contexto, una *actividad humana* y *lo matemático*. El contexto es lo que posibilita estudiar el pensamiento y la acción de los individuos cuando éstos construyen su conocimiento bajo condiciones y circunstancias socioculturales específicas. La actividad humana es donde el conocimiento matemático adquiere significados propios, una historia e intencionalidad, favoreciéndose versiones diferentes de una misma noción matemática (Cordero, 2005). Finalmente, en lo matemático se inscribe la especificidad de las acciones matemáticas que componen una situación y de las cuales se logra, o es posible abstraer un aprendizaje o conocimiento matemático concreto, es decir, es la expresión socio cognoscente de un conocimiento matemático formalmente instituido o en vías de instituirse.

En la Tabla 1 se representa lo *situacional* del conocimiento matemático desde una perspectiva social de la construcción de dicho conocimiento y como una relación tríadica entre *contexto, actividad humana y lo matemático*, en el campo conceptual del cálculo.

Lo situacional		
Contexto	*Actividad humana*	*Lo matemático*
Situación variacional	Cuantificar lo cambiante	Variación y acumulación como nociones matemáticas

Tabla 1. Lo situacional en el estudio de la construcción social del conocimiento matemático en cálculo

Método

En el estudio participaron diez estudiantes de nuevo ingreso a estudios superiores. Su participación fue voluntaria y sin algún beneficio o prejuicio académico en sus actuales o posteriores cursos. Sus conocimientos matemáticos incluían un curso de cálculo diferencial de variable real. Se conformaron en cinco binas para la realización de tareas relacionadas con la interpretación y representación de lo variable en simulación dinámica computacional. Los recursos disponibles fueron la proyección de dos simulaciones y hojas de trabajo. El tiempo total empleado para concluir las tareas fue de sesenta minutos.

En las dos simulaciones se representaba una situación de variación y acumulación de un líquido en dos recipientes A y B. Fue así por considerar que visualmente es más perceptible el hecho de que el acumulado de una variable tiene consigo una rapidez de acumulación y

ISBN 978-84-945722-3-4

viceversa (toda rapidez de cambio en la variable genera un tipo de acumulado). No obstante, por la importancia de favorecer la naturaleza intrínseca de la relación inversa entre rapidez de cambio y acumulación, las tareas se enmarcaron en dos etapas cognoscitivas: una para favorecer visual y cualitativamente el reconocimiento de un estado en el que dos acumulados distintos ocurren con una rapidez constante empero, con valores distintos (primera simulación), y la otra para reconocer un estado en el que dos acumulados iguales ocurren con una rapidez variable (segunda simulación).

El trabajo de los estudiantes estuvo centrado en analizar, representar y relacionar la variación y acumulación en cada par de recipientes para cada una de las dos simulaciones antes descritas. En la imagen 1 se muestra el tipo de simulación presentada para la primera etapa cognoscitiva, y en la imagen 2, lo presentado para la segunda etapa.

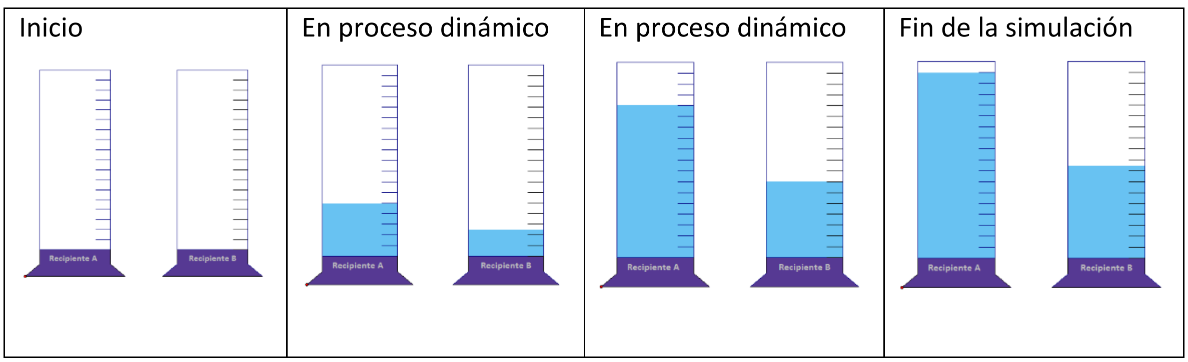


Imagen 1. Primera etapa cognoscitiva. Simulación con dos acumulados de rapidez constante

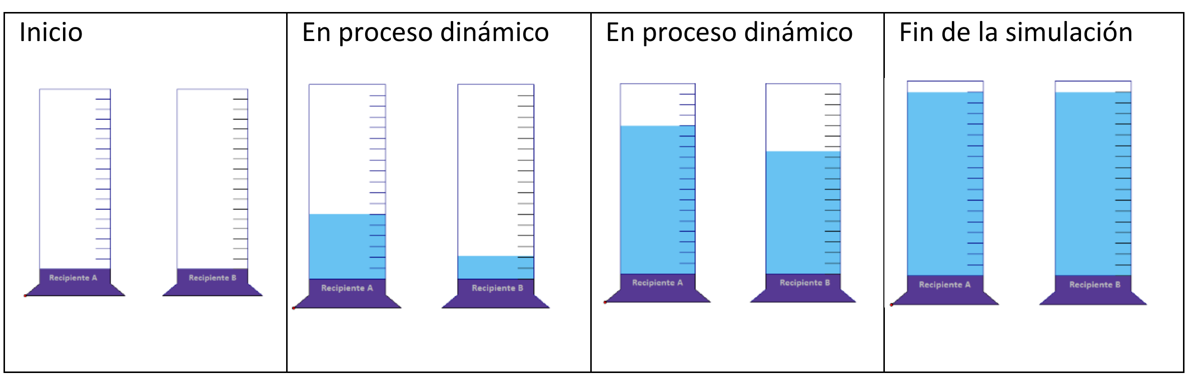


Imagen 2. Segunda etapa cognoscitiva. Simulación de dos acumulados con rapidez variable.

En la Tabla 2 se muestran las tareas planteadas a los estudiantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Instrucción. Observen las simulaciones uno y dos, del llenado de dos recipientes A y B, para realizar las siguientes tareas.

1. Para cada recipiente en las dos simulaciones, bosquejar las gráficas que representen:
   a) la rapidez de llenado;
   b) la acumulación.

2. Supongan que se pueden realizar otras dos simulaciones como la uno y dos:
   a) Para la nueva simulación 1, supóngase que la rapidez de llenado en cada uno de los dos recipientes está dada por las siguientes funciones:

$$f_1(t) = 3 \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = 5$$

   Determinar las funciones y sus respectivas gráficas de la cantidad acumulada de líquido para cada recipiente.

   b) Para la nueva simulación 2, supóngase que la rapidez de llenado en cada uno de los dos recipientes está modelada por las siguientes funciones:

$$g_1(t) = 2t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = t^2$$

Tabla 2. Tareas de análisis, representación y relación de variaciones y acumulaciones

Una adecuada conjunción cognoscitiva de las tareas supondría el desarrollo de las nociones de variación y acumulación y su relación inversa.

Datos y resultados

Para la tarea 1 de la primera simulación, los estudiantes fueron capaces de establecer una relación entre la rapidez de llenado y cantidad acumulada (altura alcanzada por el líquido en los recipientes). La rapidez es referida con la expresión "llenado". Por ejemplo, dijeron que ambos recipientes tienen un llenado constante. Algunos asocian una función lineal al comportamiento de llenado en ambos recipientes y establecen que la rapidez en un recipiente (recipiente A) es el doble que la del otro (recipiente B). En general las gráficas dadas son adecuadas, empero con errores (ver anexo).

Para la tarea 1 de la segunda simulación, se reconoce que en uno de los recipientes hay una rapidez constante y lenta (recipiente A), mientras que en el otro (recipiente B), se presenta una rapidez exponencial. Las gráficas dadas en general son adecuadas, empero, también se detectaron errores respecto a la inclinación (valor de las pendientes).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el inciso *a*) de la tarea 2, cuatro binas lograron establecer una relación entre variación y acumulación, bosquejan adecuadamente dicha relación mediante gráficas y reconocen que a variación constante le corresponde una acumulación lineal. Para el inciso b) de la tarea 2, solo dos binas lograron generalizar adecuadamente sus relaciones, dando gráficas adecuadas y el resto, su conceptualización si bien adecuada y sus relaciones también, tuvieron dificultades para generar las gráficas, dado que no había sistema numérico y se trataba de funciones exponenciales en ambos casos.

De los datos recabados se identifica que lo situacional de un proceso de construcción social de conocimiento matemático, favorece que mediante la actividad humana de cualificar y cuantificar lo variable en un contexto específico de interpretación y representación gráfica de lo cambiante, mediado por lo icónico-dinámico computacional, se establezcan relaciones matemáticas funcionales tales como la relación inversa entre variación y acumulación, accediendo así a un primer acercamiento al campo conceptual del cálculo.

No obstante, cabe decir que los errores de graficación detectados en las gráficas de los estudiantes, sugiere dificultades conceptuales para representar gráficamente y en forma adecuada, relaciones variacionales. Lo que refuerza expuesto por Grebe (2013), cuando menciona que el uso de las interpretaciones geométricas en la enseñanza del cálculo, solo es para ayudar al entendimiento de los conceptos de derivada e integral.

Conclusión

Se considera que la relación tríadica de lo situacional en la construcción social de conocimiento matemático, también podría servir como guía para organizar escenarios de aprendizaje matemático en contextos funcionales, ya que cognitivamente posibilita articular nociones matemáticas con elementos contextuales de significación social a partir de una actividad humana matemática específica. Pensamos, por ejemplo, el caso de la modelación gráfica, pues si bien no fue una tarea explícita para los estudiantes, es claro que el significado y uso dado a la gráfica por parte de ellos fue el de un modelo variacional, más que el de organizar o presentar (visualmente), información.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Aparicio, E. & Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(1), 7 – 30.
Aparicio, E. & Cantoral, R. (2014). The Social Construction of Mathematical Continuity: A Socioepistemological. *Baskent University Journal of Education 1*(1), 123 – 135.
Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds). Ingeniería didáctica en educación matemática, capítulo 6, pp. 97 – 140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Cabañas, G. & Cantoral, R. (2007). La conservación en el estudio del área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano, capítulo 11, pp. 199 – 226. España: Ediciones Díaz de Santos, Clame AC.
Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*(1), 1 – 9.
Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una Socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8(3), 265 – 292.
Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can’t prove. Educational studies in mathematics 38 (1-3), 85 – 109.
Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in Mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, pp. 25–37. Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.
Grebe, A.V. (2013). A geometric approach to calculus. Intenational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 721 – 732.
Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. Intenational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(2), 201 – 211.
Muñoz, G. (2007). Rediseño del cálculo integral escolar fundamentado en la predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds.). Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula. pp. 27-76. Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.
Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the sprouting of signs: A semiotic – cultural approach to students’ type s of generalization. Mathemtical thinking and Learning, 5(1), 37 – 70.
Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as Sensuous, Visual, Historical forms of Algebraic Thinking. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 145 – 164.
Schnepp, M., & Nemirovsky, R. (2001). Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The roles of representation in school mathematics, yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 90–102. Reston, VA: NCTM.
Schwarzenberger, R. (1980). Why Calculus Cannot Be Made Easy. The Mathematical Gazette, 64(429), 158 – 166.
Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. Proceedings of Working Group 3, ICME-7, Quebec, Canada, pp. 13 - 28. Recuperado de:

ISBN 978-84-945722-3-4

https://pdfs.semanticscholar.org/0a98/a317d021c28987f24f1189a9f994ee7be97c.pdf el 15 de marzo de 2016.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 229 –274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics, MAA Notes, Vol. 73, pp. 43–52. Washington, DC: Mathematical Association of America.

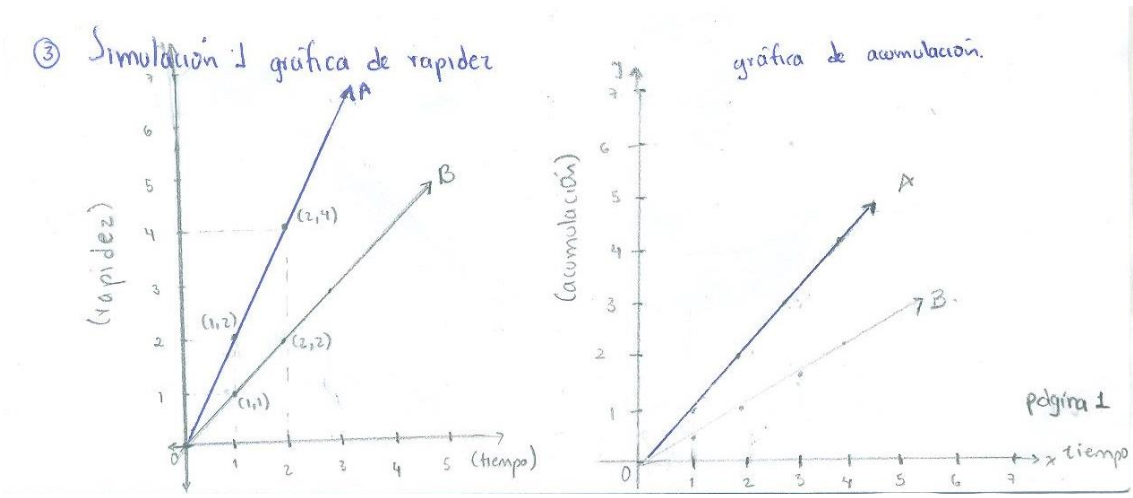
TAREAS DE VARIACIÓN Y ACUMULACIÓN PARA UNA PRIMERA CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO

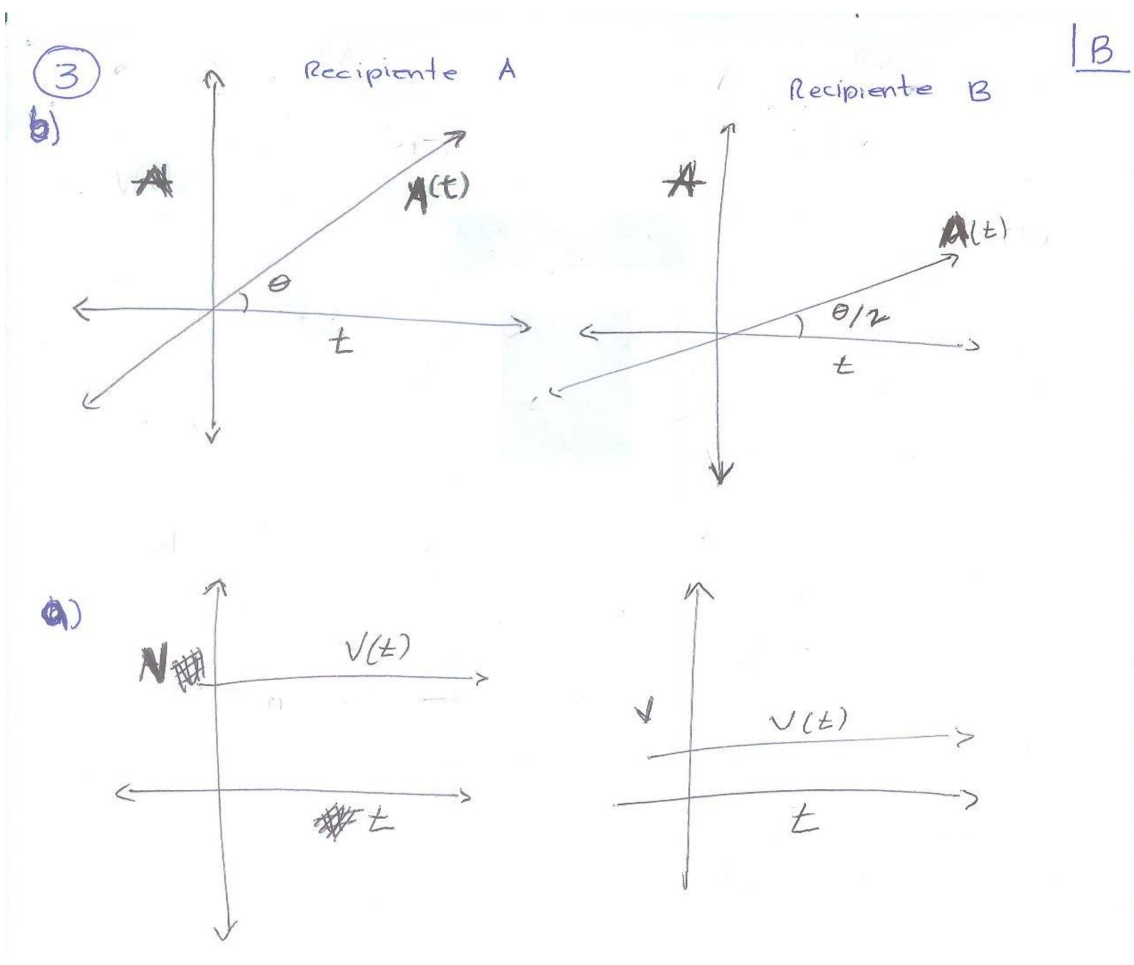
ANEXO

Relación de gráficas realizadas por estudiantes en las tareas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

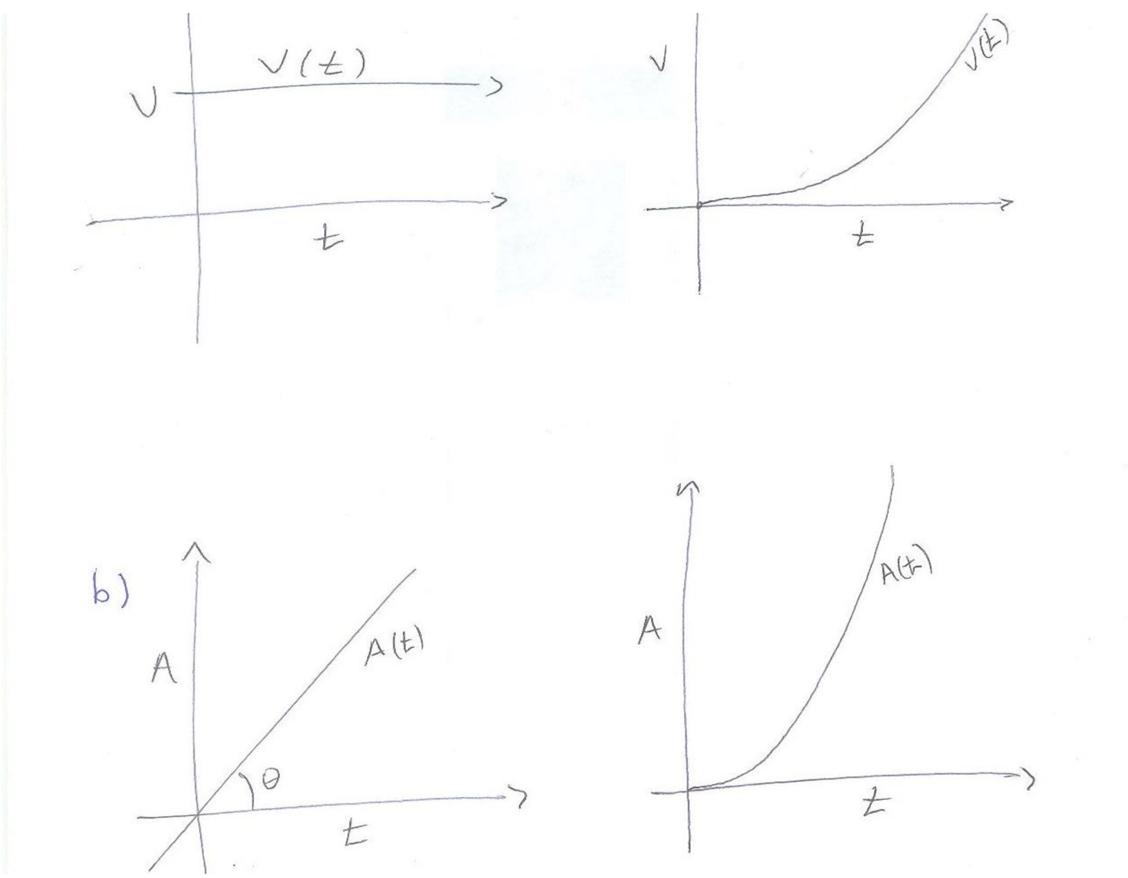
Tarea 1, Simulación 1.





VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

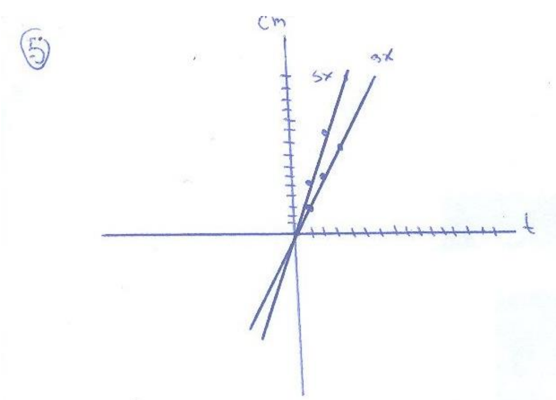
Tarea 1, Simulación 2.

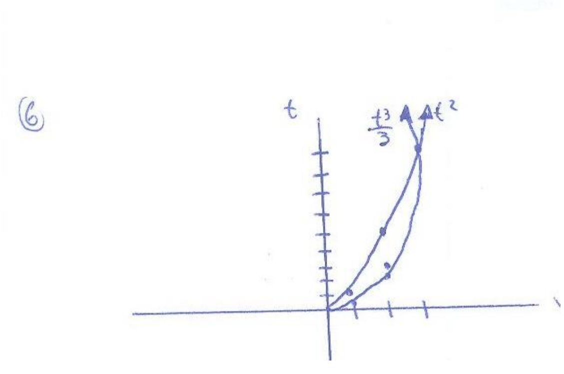


297

ISBN 978-84-945722-3-4

Tarea 2, Inciso a)





VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-846

MODELACIÓN EN FÍSICA CON GEOGEBRA

Juan Guillermo Toro Martínez
jtoro@ccbenv.edu.co
Colegio Colombo Británico, Envigado, Colombia

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato
Palabras clave: física, Geogebra, modelación, aprendizaje significativo

Resumen

El papel de Geogebra en la educación se ha expandido hacia áreas en las que, inicialmente, no se había pensado, como las ciencias naturales, en donde aparecen constantemente nuevas investigaciones y aplicaciones. En este reporte nos interesa considerar, específicamente, el papel cada vez más relevante de Geogebra en la enseñanza de la física. En esta ciencia, tradicionalmente Geogebra se ha empleado como simulador de procesos físicos, emulando el comportamiento de un fenómeno. El formato educativo tradicional ha llevado a los docentes a usar Geogebra para analizar el comportamiento de algunas variables físicas, proponiendo a los estudiantes interactuar con una simulación construida previamente por el profesor o por algún investigador ajeno a la institución educativa. En la experiencia de aula que presentamos pretendemos ir más allá: explorar metodologías basadas en la modelación y proponer unas actividades en la que sean los mismos estudiantes quienes diseñen, construyan con el auxilio de Geogebra y evalúen los modelos matemáticos de los procesos físicos objeto de estudio. Se espera que al seguir este proceso de modelación desarrollen una forma científica de razonar y que el aprendizaje tenga lugar tanto en el diseño y la construcción del modelo como en su uso y evaluación.

Introducción.

Contrario a lo que cabría esperar, la enseñanza de las ciencias naturales, como en el caso de otras áreas del conocimiento, continúa haciendo énfasis en la transmisión de conocimiento a pesar, incluso, de la gran cantidad de recursos económicos y humanos que los estados, corporaciones y la empresa privada han invertido en el uso de nuevas tecnologías y didácticas novedosas en la escuela. Esta situación ha conducido a que la escuela entregue a la sociedad jóvenes que, en un número significativo, carecen de las competencias que se esperan para los ciudadanos del siglo XXI, como tanto ha resaltado la Unesco en varios de sus informes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Desde esta perspectiva, es claro que es necesario intervenir el currículo de las ciencias naturales, en general, y de la física, en particular. Como pregonan Derek Hodson y otros investigadores, es hora de promover una educación científica que permita a los estudiantes desarrollar una comprensión más amplia, profunda y crítica de la naturaleza, del rol del hombre en su interacción con ella y del uso -y sus consecuencias -de la tecnología (Hodson, 2003).

Sin duda, el cambio en el currículo no debe ser sólo en los contenidos, sino que debe incluir nuevos enfoques metodológicos que consideren, en el caso de la física, la comprensión de los conceptos científicos y su papel en el desarrollo de la civilización, además de dotar de sentido el uso de las matemáticas en su relación con la ciencia.

Es, justamente, en este último punto – la relación entre la física y las matemáticas en la enseñanza -en donde creemos que el desarrollo de actividades de modelación por parte de los alumnos puede ser muy útil. De acuerdo con algunos investigadores, los modelos, como instrumentos mediadores, permiten que el aprendizaje se presente en dos momentos: primero, cuando el alumno crea el modelo, pues se enfrenta a la tarea de imaginar y crear una estructura representativa, permitiéndole desarrollar una manera científica de pensar; y luego, cuando el estudiante usa el modelo, aprende una vez más, esta vez sobre el fenómeno que el modelo representa (Justi, 2006).

Objetivo.

Estudiar el impacto que produce en el aprendizaje el diseño, construcción y evaluación de actividades de modelación matemática por parte de los estudiantes, en el área de física, con el uso de Geogebra como mediador didáctico.

Marco teórico.

Entre los muchos problemas con los que nos encontramos en la enseñanza de la física, uno de los más evidentes se encuentra en el hecho de que el modelo conceptual matemático que usamos en la escuela está "vacío" de significado para los estudiantes. En la enseñanza tradicional, la mente de los alumnos no tiene muchas oportunidades de hacer la conexión entre las ecuaciones del modelo matemático que les ha presentado el profesor con la realidad que representan, por ejemplo, en la resolución de problemas. Como profesores de física, nos encontramos en la muy común situación de que los estudiantes reducen su actividad en la resolución de problemas a "buscar la fórmula" que mejor se adapte a los datos del problema

ISBN 978-84-945722-3-4

en cuestión, sin preocuparse por comprender cuáles son las relaciones causales entre el fenómeno objeto de estudio y las herramientas matemáticas que pretende utilizar para resolver el problema presentado.

Desde las teorías cognitivas, los investigadores creen que los modelos pueden ser importantes para el logro de la comprensión conceptual en la ciencia a un nivel que va más allá de los hechos, las ecuaciones o los procedimientos memorizados. Se espera que tales comprensiones no sólo conduzcan a una percepción del estudiante de que la ciencia puede tener sentido por medio de las explicaciones satisfactorias, sino también incorporar una forma de conocimiento flexible que se pueda aplicar a la transferencia del conocimiento mediante problemas (Clement, 2000).

Varias publicaciones sobre la enseñanza de la física apuntan a la necesidad de involucrar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, dándoles la oportunidad de desarrollar las habilidades asociadas con el proceso de investigación científica. Como apunta Justi (2009), modelar es uno de los procesos esenciales en la producción, validación y diseminación del conocimiento científico. Detrás de esta idea, muchos investigadores han enfatizado la importancia de una enseñanza de las ciencias basada en modelos como una forma de estimular la comprensión científica.

Varios enfoques se han propuesto para ofrecer a los estudiantes oportunidades de modelar situaciones físicas a través de diferentes mediadores didácticos tecnológicos, los cuales, de una u otra manera, les permiten a los estudiantes crear sus propios modelos, de forma que se involucran en su diseño y modificación con el propósito de comprender el fenómeno. El objetivo más importante es lograr que los estudiantes se comprometan en la comprensión del mundo físico construyendo, usando o escogiendo modelos que describan, expliquen, predigan y controlen fenómenos físicos. (Ornek, 2008).

Aunque muchos opinan que no hay unas reglas generales, ni estandarizadas, para la construcción de modelos, y que es más un asunto de creatividad, varios autores, entre ellos Rosária Justi (2006), basada en Clement (2000), presentan un modelo cognitivo para el proceso de construcción de modelos.

Aunque no es una receta, ni podría serla, en su forma más simple, el proceso propuesto por Justi sigue los siguientes pasos:

ISBN 978-84-945722-3-4

1. Definición de un objetivo. Es natural que las personas involucradas en la creación de un modelo deban definir un objetivo, que les permitan buscar observaciones iniciales sobre lo que se pretende modelar.
2. Selección de los elementos de la realidad que se van a usar. La descripción de un fenómeno puede ser muy compleja. Es una tarea del modelador seleccionar los aspectos más relevantes que usará para describir el objeto a modelar, por ejemplo, recursos matemáticos.
3. Modelo mental inicial. Aquí entran en juego la creatividad y el razonamiento crítico de quien modela. En el caso de nuestra experiencia, es una etapa que, generalmente, hicimos cooperativamente entre todos los alumnos del grupo.
4. Forma de representación. Existen diversas formas de representar el fenómeno (concreta, visual, verbal, matemática, computacional); es la etapa en la que se elige cómo lucirá el modelo. En nuestro caso, la representación estaba determinada por la herramienta utilizada.
5. Elaboración del modelo. En esta etapa se concreta, en la representación elegida, el modelo mental del paso 3.
6. Comprobación del modelo. Etapa final de ajustes, en la que se analiza que tan cerca está el modelo definitivo en referencia al modelo mental inicial. Es etapa propicia para "jugar" con el modelo y ver qué tan bien representa el fenómeno en estudio. También es una etapa que presenta al estudiante la oportunidad no sólo de ver las respuestas que ofrece el modelo sobre el fenómeno sino, frecuentemente, para proponer nuevas preguntas.

Hay antecedentes significativos del uso de Geogebra como herramienta didáctica que permite la modelación de fenómenos físicos, dada su capacidad para representar funciones de todo tipo, lo cual le proporciona a esta aplicación una excelente oportunidad para representar modelos de la física mediante la construcción de escenarios apropiados con el uso de deslizadores. Sin embargo, en todos los casos que hemos documentado, el trabajo de los alumnos con Geogebra se ha reducido a utilizar un modelo previamente construido por otros. Nos parece que Geogebra presenta grandes posibilidades para proponer actividades de modelación con el estudiante en el rol central de creador de modelos matemáticos, no sólo como su usuario. En otras palabras, creemos que Geogebra es la herramienta de mediación

ISBN 978-84-945722-3-4

didáctica apropiada para que los alumnos aprendan a modelar fenómenos físicos. Con ella, el alumno tendrá la facilidad de representar apropiadamente el modelo mental que haya diseñado previamente, observar qué cambios se producen mediante la modificación de variables y deducir el significado físico de esos cambios (Carrillo de Albornoz, 2012).

Metodología.

Tomada la decisión de realizar esta experiencia en el Colegio Colombo Británico, en Envigado, Colombia, donde el investigador es docente de física, se eligió como muestra uno de los cuatro grupos del grado décimo para iniciar la investigación. La decisión de qué grupo elegir se tomó de común acuerdo con el coordinador académico del colegio. El criterio usado para esta selección se basó en la pretensión de realizar la experiencia con un grupo que estuviera bien dispuesto para el trabajo curricular. El grupo elegido, 10C (hoy 11C) consta de 28 estudiantes, 18 hombres y 10 mujeres.

En el caso de esta propuesta, dado que en nuestro país no existe una cultura escolar extendida en el uso de Geogebra, fue necesario incluir, inicialmente, la preparación de los estudiantes en el uso de la aplicación durante dos meses (octubre, noviembre de 2016), limitándonos a los aspectos de la herramienta necesarios para llevar a cabo modelaciones. Durante esa primera etapa se desarrollaron tres sesiones en una de las aulas de informática del colegio, en donde se contaba con un ordenador con acceso a internet por estudiante. Cada una de esas sesiones presentó, primero, un tema sobre Geogebra y, luego, les ofreció un taller en el que practicaron con la aplicación el tema explicado. Los temas específicos de las tres sesiones iniciales fueron:

Sesión 1. Descubrimiento de la aplicación. Se les dio a conocer Geogebra (la cual conocían sólo gracias a su uso por el profesor de Geometría en el mismo año lectivo). La práctica planteada a los estudiantes fue la de reconocimiento de las herramientas de la vista gráfica.

Sesión 2. Uso de deslizadores. Se les dio a conocer este recurso fundamental de Geogebra. La práctica que se desarrolló fue sobre el uso de deslizadores para graficar y manipular una función cuadrática.

Sesión 3. Parámetros de una ecuación lineal. Práctica sobre la pendiente de una función lineal.

A partir de enero de 2017 se comenzó el trabajo de creación de modelos con el grupo (ya en el grado undécimo, último de la educación media del sistema escolar colombiano). Para

ISBN 978-84-945722-3-4

avanzar en la propuesta, se ha avanzado en la creación de las unidades didácticas necesarias. Como ya señalamos, existen diferentes metodologías de uso de modelos en la enseñanza de las ciencias naturales. Para esta experiencia de aula nos decidimos por la propuesta de Rosária Justi, en una de cuyas versiones dividimos el proceso en las seis etapas que identificamos anteriormente (Justi, 2006, pág. 180). Las unidades que se han elaborado (ver anexo 1 para un ejemplo) procuran seguir estas etapas. Por la edad de los estudiantes con quienes se lleva a cabo la experiencia quienes carecen, a ojos de muchos investigadores, de la madurez intelectual necesaria (opinión que compartimos parcialmente) para un ejercicio de modelación completamente autónomo se decidió ir aumentando gradualmente la autonomía de los jóvenes en la realización de las actividades de modelación propuestas en las unidades didácticas. A modo de ilustración, la etapa 5, de elaboración del modelo gráfico, inicialmente se hizo mediante una actividad completamente guiada por el docente, en el que cada paso era validado hasta alcanzar un modelo definitivo. A medida que van avanzando en la experimentación con las unidades didácticas, este paso se ha ido liberando, hasta deshacerse, al momento de escribir esta ponencia, de la opinión del docente quien sólo tangencialmente aporta a la discusión.

Las unidades didácticas elaboradas y llevadas a la práctica con los estudiantes hasta el momento son las siguientes:

- **Modelación Cinemática**. Ecuaciones del movimiento de una partícula en movimiento uniformemente acelerado. Se decidió comenzar la experiencia de modelación con un tema ya desarrollado por los estudiantes en la asignatura de física durante el año lectivo anterior.
- **Modelación Proceso isocórico**. Esta unidad corresponde ya a uno de los temas que están desarrollando en la asignatura durante el presente año lectivo (termodinámica, primer período).
- **Modelación Movimiento armónico simple**. Corresponde al segundo período del año lectivo actual. Se les pide modelar el movimiento armónico simple de una partícula, tema previo a movimiento ondulatorio.
- **Modelación Diferencia de fase**. Basándose en la unidad anterior y acudiendo a sus conocimientos previos de funciones trigonométricas se les pide a los alumnos

ISBN 978-84-945722-3-4

modelar el movimiento armónico simple de dos partículas desfasadas en su movimiento.

- **Modelación Hacer una onda**. En esta actividad se les pide extender el movimiento armónico simple de una partícula a varias partículas para modelar el movimiento de una onda transversal.

Esperamos continuar la elaboración de las unidades didácticas durante todo el año lectivo que culmina en noviembre de 2017.

Resultados.

Probablemente es muy pronto para hablar de resultados. Las hipótesis que esperamos comprobar son las de que la creación de modelos por parte de los estudiantes les abre nuevas posibilidades para pensar como científicos y es una oportunidad para profundizar en el conocimiento, que la experiencia en modelación es una actividad que puede cambiar la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje de la física y que Geogebra es un mediador didáctico adecuado para lograr tal apropiación del conocimiento.

Sin embargo, durante la aplicación de las unidades didácticas realizadas hasta ahora con los estudiantes hay algunas observaciones que vale la pena mencionar y que esperamos evaluar mediante la aplicación de los instrumentos adecuados en el resto de la experiencia:

En primer lugar, percibimos diferencias individuales en la capacidad para proponer modelos, tanto mentales como gráficos, que tienen que ver con la autoestima de los estudiantes y, creemos, tienen relación con sus experiencias pasadas en la asignatura. Se está considerando el uso de entrevistas semiestructuradas para verificar esta hipótesis.

Nos ha parecido que los estudiantes muestran una actitud positiva hacia el aprendizaje de la física mediante actividades de modelación con Geogebra. Como una forma de evidenciarlo aplicamos un cuestionario sobre actitudes, el cual fue elaborado por el docente tomando elementos del cuestionario Me interesa tu opinión, de la investigadora María del Mar García para su tesis doctoral (García, 2011). El análisis del cuestionario aplicado arrojó los siguientes resultados, que muestran un perfil del grupo francamente favorable a la experiencia realizada (ver anexo 2 para conocer los resultados en detalle)

ISBN 978-84-945722-3-4

PREGUNTAS	% de acuerdo
El uso de Geogebra me ayuda a entender mejor los conceptos físicos	78,6
Construir un modelo me permite comprender la conexión entre las fórmulas que usamos en física y los conceptos	85,7
Crear modelos en Geogebra NO me ayuda a mejorar mi comprensión de la física	25,0
El uso de Geogebra no me ha motivado	25,0
Usando Geogebra he aprendido con mayor rapidez	60,7
Usando Geogebra es más fácil aprender física	66,7
Me ha gustado más la fisica cuando usamos Geogebra	85,2
Ni usando Geogebra logro entender la física	22,2
Este modo de trabajo no facilita la comunicación con los compañeros	42,9
He confiado más en mi mismo trabajando física con Geogebra	61,5

Figura 1. Actitud positiva frente a la modelación con Geogebra

En el anexo 3 se puede apreciar una de las simulaciones elaboradas por uno de los estudiantes y en la dirección web allí indicada la simulación en funcionamiento.

Conclusiones.

Existen pocos antecedentes del uso de Geogebra para el diseño y la creación de modelos de fenómenos físicos (y no sólo en Iberoamérica) y ninguno, que hayamos conocido, en el que se plantee la posibilidad de dar a los estudiantes la oportunidad de ser ellos mismos los encargados de diseñar y construir la modelación. ¿Quizá creemos que los estudiantes de educación básica y media (bachillerato) no están lo suficientemente maduros para hacerlo? Algunos parecen ser de esta opinión. A nuestro modo de ver, siempre y cuando las actividades se elaboren con los criterios didácticos suficientemente claros y precisos, es una oportunidad que no les podemos negar a nuestros alumnos.

Las investigaciones que los profesores de ciencias podamos llevar a cabo en tal sentido pueden enriquecer el conocimiento del cuerpo docente sobre nuevas estrategias didácticas que propicien el aprendizaje significativo de la física mediante la modelación. Esperamos que con la presentación de esta propuesta en el VIII CIBEM podamos movilizar a otros docentes a unirse a experiencias de este tipo, tan necesarias para la educación en ciencias naturales en Iberoamérica.

Referencias bibliográficas

Carrillo de Albornoz, A. (2012). El dinamismo de Geogebra, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo5.pdf/ Consultado 10/10/2015

Clement, J. (2000). Model based learning as a key research area for science education. *International Journal of science education*.

ISBN 978-84-945722-3-4

http://www.ecent.nl/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=9&supportId=1599
Consultado 03/06/2015

García, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula (tesis doctoral). Universidad de Almería.

Hodson, D. (2003). *Time for action: science education for an alternative future*. http://ssi-group.wikispaces.com/file/view/SE_Renewal_Hodson.pdf. Consultado 22/10/2016

Justi, R. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. *Investigación didáctica*, *24(2), 173 – 184*.

Justi, R. (2009). Learning how to model in science classroom: key teacher´s role in supporting the development of students´ modelling skills. *Educación Química, 32 – 40*.

Ornek, F. (2008). Models in science education: Applications of models in learning and teaching science. International *Journal of Environmental and Science Education, 3(2), 35 – 45*.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 1, Ejemplo de unidad

UNIDAD 5, Modelación del movimiento armónico simple

1. **Objetivo:**

Diseñar una simulación del movimiento armónico simple de una partícula, dada su representación matemática.

2. **Modelo matemático:**

Cuando una partícula se mueve en movimiento armónico simple, su desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$y = A sen(2\pi f t)$$

Donde A es la amplitud del movimiento y f es su frecuencia.

3. **Selección de aspectos a usar:**

¿Cuáles son las variables y constantes a considerar?

____

____

____ .

4. **Modelo mental (obtenido grupalmente):**

¿Para quiénes creen que se deben crear deslizadores?

____

____

________ .

5. **Forma de representación:** gráfica.
6. **Elaboración del modelo gráfico, de acuerdo con el modelo mental elegido socialmente:**

- Abre Geogebra, adáptala a tus requerimientos y crea tus deslizadores. Puedes comentar con tus vecinos.
- ¿Cómo vas a representar la partícula?

  ____ .
- ¿Cómo vas a hacer para que la partícula oscile con movimiento armónico simple? (Pista 1: algo habrá qué hacer con las coordenadas de la partícula… Pista 2: en una actividad anterior se utilizó esta estrategia.)

  ____

  __

ISBN 978-84-945722-3-4

____

_ .

- Juega con tus deslizadores. Observa detenidamente qué cambios ocurren al modificar los valores de cada uno de los deslizadores:

  Deslizador ____: ____.

  Deslizador ____: ____.

  Deslizador ____: ____.

  Deslizador ____: ____.

  Deslizador ____: ____.

- ¿Concuerda con lo que esperabas? ______.
- Guarda la animación. En otra actividad podríamos necesitarla de nuevo.

Anexo 2, Resultados Cuestionario sobre actitudes

TABULACIÓN ACTITUDES HACIA EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA USANDO MODELACIÓN EN GEOGEBRA

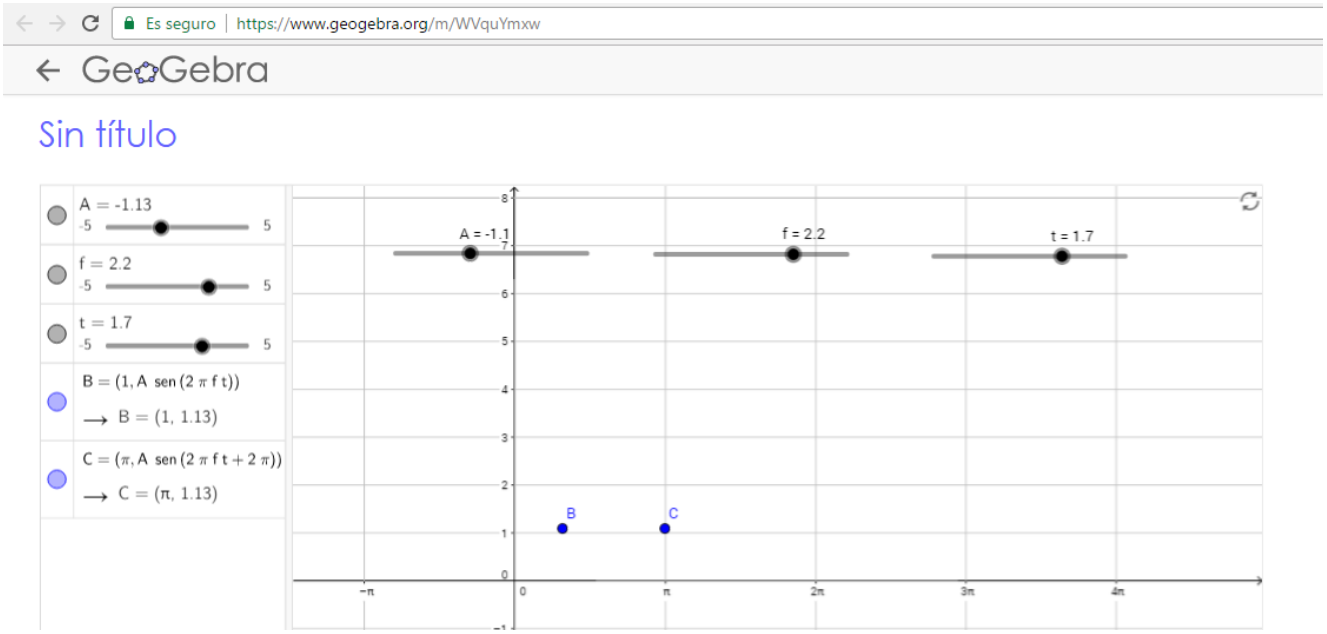
PREGUNTAS	1	2	3	4	5	n	FAVORABLE	%
El uso de Geogebra me ayuda a entender mejor los conceptos físicos	3	0	3	9	13	28	22	**78,6**
Construir un modelo me permite comprender la conexión entre las fórmulas que usamos en física y los conceptos	3	0	1	8	16	28	24	**85,7**
Crear modelos en Geogebra NO me ayuda a mejorar mi comprensión de la física	14	7	2	1	4	28	21	**75,0**
El uso de Geogebra no me ha motivado	17	4	3	3	1	28	21	**75,0**
Usando Geogebra he aprendido con mayor rapidez	4	1	6	7	10	28	17	**60,7**
Usando Geogebra es más fácil aprender física	3	2	4	6	12	27	18	**66,7**
Me ha gustado más la fisica cuando usamos Geogebra	2	0	2	6	17	27	23	**85,2**
Ni usando Geogebra logro entender la física	15	6	3	2	1	27	21	**77,8**
Este modo de trabajo no facilita la comunicación con los compañeros	13	3	8	3	1	28	16	**57,1**
He confiado más en mi mismo trabajando física con Geogebra	2	4	4	5	11	26	16	**61,5**
								72,3

1. Totalmente en desacuerdo
2. Bastante en desacuerdo
3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo
4. Bastante de acuerdo
5. Totalmente de acuerdo

Nota: se tomó como actitud favorable la suma de 4 y 5 en el caso de afirmaciones positivas y la suma de 1 y 2 en el caso de afirmaciones negativas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 3, Ejemplo de modelo creado por un estudiante del grupo



Se usó información de la simulación creada por Chris Hamper, en www.thinkib.net/physics

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-847

EL USO DE CONTEXTOS HISTÓRICOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA: EL CASO CONCRETO DE LA VISUALIZACIÓN EN LA CONEXIÓN GEOMETRÍA-ÁLGEBRA

Iolanda Guevara Casanova – Carme Burgués Flamarich
iguevara@xtec.cat – cburgues@ub.edu
Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya y Universidad Autònoma de Barcelona, Spain – Universidad de Barcelona, Spain

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Educación secundaria obligatoria
Palabras clave: lenguaje algebraico, visualización, historia de las matemáticas

Resumen

En este trabajo se plantea la idoneidad de relacionar el lenguaje simbólico del álgebra con la geometría, con la intención de potenciar el pensamiento y el razonamiento visual de los alumnos, para mejorar el aprendizaje de este nuevo lenguaje a base de hacerlo más significativo. La herramienta utilizada para establecer la conexión geometría-álgebra son los diagramas. Los diagramas introducidos provienen de la historia de las matemáticas y se usan para resolver problemas clásicos relacionados con triángulos rectángulos y ecuaciones de segundo grado que actualmente se resuelven algebraicamente.
Los resultados obtenidos muestran que los alumnos han sido mayoritariamente capaces de resolver los problemas planteados con este recurso, los diagramas históricos. Han producido razonamiento diagramático y se ha visto que este tipo de razonamiento es potente, tiene muchas posibilidades porque conecta álgebra y geometría, pero también se ha visto que requiere de un cierto entrenamiento. Es decir, que hace falta más razonamiento visual en las actividades dirigidas a los alumnos de secundaria, porque todavía hoy la tendencia es que en el aula de matemáticas se propongan muchas actividades para razonar con tablas y con secuencias sintácticas pero menos con imágenes.

La introducción de diagramas como recurso para apoyar el razonamiento de los alumnos en los inicios de la introducción del lenguaje simbólico del álgebra pretende conectar el pensamiento simbólico algebraico con el pensamiento visual relacionado con formas geométricas. Los historiadores (Fauvel & Maanen, 2000), (Jankvist, 2009), los educadores (Katz & Barton, 2007) y muchos especialistas en la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2000), (Giaquinto, 2001, 2007), (Niss, 2011), (Burgués, 2008), (Burgués & Sarramona 2013)

ISBN 978-84-945722-3-4

defienden la conexión entre temas aparentemente diferentes como uno de los procesos matemáticos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

Katz & Barton (2007) describen las diversas etapas de la historia del desarrollo del álgebra que, según los autores, conducen a implicaciones en la enseñanza/aprendizaje. El aprendizaje del álgebra debe comenzar estrechamente relacionado con la geometría y la resolución de problemas. Los nuevos elementos matemáticos introducidos deben ser discutidos oralmente en clase por los estudiantes. Katz pregunta: ¿por qué no comenzar álgebra pensando en figuras geométricas? Esta investigación apoya claramente esta opción.

En la historia de las matemáticas, Radford & Puig (2007) asocian el razonamiento algebraico con el razonamiento geométrico, en al menos dos momentos: en algunos de los problemas de las tablillas cuneiformes mesopotámicas de los escribas (1900-1600 aC) y con al-Khwarizmi (s. IX) en el estudio y clasificación de las ecuaciones de primer y segundo grado en *Hisâb al-jabr wal-muqqabala*. Este último momento es exactamente la fuente de la segunda actividad de esta investigación. Siu (2000) también reivindica el razonamiento visual y el uso de textos históricos. Afirma que los antiguos problemas matemáticos chinos —y lo ejemplifica con los *Nueve Capítulos sobre Procedimientos Matemáticos* (s. I)— proporcionan evidencias a través de dibujos, analogías, ejemplos de cálculos generales y de algoritmos. Según el autor, todo esto puede ser de gran valor educativo para complementar la enseñanza de las matemáticas con énfasis en el pensamiento lógico deductivo tradicional.

Los diagramas introducidos en la investigación siguen la clasificación de Barwise y Etchemendy (1996) y la nomenclatura de Mason y Graham Johnston-Wilder (2005) y Giardino (2009, 2014). A partir de los análisis de estos autores, se han tomado dos rasgos que se relacionan con los diagramas introducidos y analizados en esta investigación: la eficacia expresiva del diagrama —la capacidad de expresar propiedades semánticas— y la eficiencia computacional —la capacidad de inferir nueva información—. A los diagramas del primer tipo se les ha denominado en la investigación diagramas de datos y a los segundos diagramas de cálculo.

Desde el punto de vista del uso de los diagramas, Barwise y Etchemendy (1996) argumentan que la inferencia y el razonamiento no sólo se da en expresiones lingüísticas sino que el uso de diagramas y gráficos es un legado histórico. Citan como ejemplos las innumerables

ISBN 978-84-945722-3-4

pruebas del teorema de Pitágoras que se producen a lo largo de la historia y en diferentes culturas alrededor del mundo.

En el pasado, la autora ha utilizado actividades históricas en el aula para situar a los alumnos en el contexto en el que se han desarrollado las matemáticas que estudian y ponerlos en contacto con otras formas de pensar o razonar matemáticas (Guevara et al., 2006) (Guevara, 2009), sin proceder a una recolección sistemática de datos y su análisis detallado. Los diagramas introducidos en esta investigación corresponde a los diagramas históricos tomados de las culturas árabe (siglo IX) y chino (siglo I). Además, otros autores también los han considerado muy útiles para la enseñanza/aprendizaje del álgebra (Siu 2000, Demattè 2010, Puig 2008-11).

Los problemas propuestos a los estudiantes, en la primera parte de la investigación, corresponden al capítulo 9 de los *Nueve Capítulos* —problemas 4 al 12— en la versión de Chemla & Shuchun (2005). Los diagramas utilizados provienen de la justificación del procedimiento de cálculo del texto clásico del siglo I que hizo Lui Hui hizo en el año 263 a través de descripciones de áreas y figuras geométricas de cuadrados, gnomos y rectángulos. Estas figuras geométricas han sido estudiadas y transcritas por los historiadores Cullen (1996), Chemla & Shuchun (2005) y Dauben (2007). Chemla & Shuchun las resumen en dos que denominan primera y segunda figuras fundamentales. Cada problema se resuelve utilizando una de las dos figuras —4, 5, 11 y 12 con la primera; 6, 7, 8, 9 y 10 con la segunda—.

Por ejemplo, para resolver el problema 6 (figura 1) cuyo enunciado dice: «Supongamos que tenemos un estanque cuadrado de lado 1 zhang[25] en el centro del cual hay una caña que sobresale del nivel de agua 1 chi. Cuando se tira de la caña hacia el extremo, la caña queda justo toda sumergida. ¿Cuál es la profundidad del lago y la longitud de la caña?».

[25] Zhan, chi, cun son unidades de medidas de longitud en base decimal, ordenadas de mayor a menor. Así 1 zhan = 10 chi; 1 chi = 10 cun.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

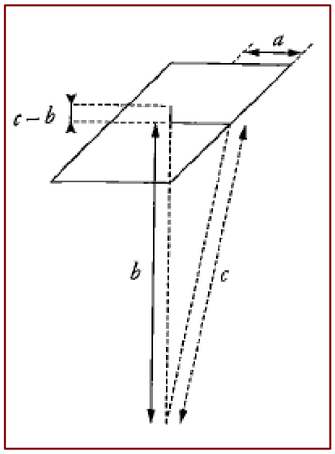


Fig. 1: Diagrma de datos del problema 6 (Chemla & Shuchun, 2005, 667)

Liu Hui introdujo la segunda figura fundamental: «Multiplicando la base por sí misma, se obtiene el área del gnomon. Lo que sobresale del agua es la diferencia entre la altura y la hipotenusa. Se le resta el cuadrado de esta diferencia al área del gnomon y luego se divide. La diferencia es el ancho del área del gnomon, la altura es la profundidad del estanque». (Chemla - Schuchun, 2005, 711).

De la transcripción de Chemal & Shuchun (Chemla-Schuchun, 2005, 673-676), se reconstruyeron las explicaciones de Liu Hui en la secuencia de diagramas de la figura 2.

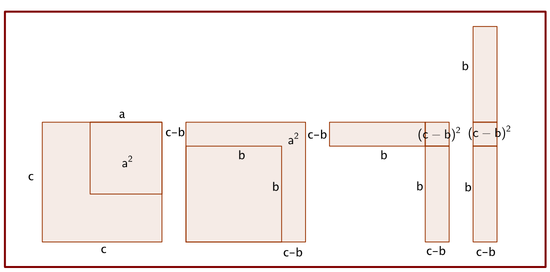


Fig. 2. La segunda figura fundamental

La figura 3 contiene la resolución del problema 6 realizada por un estudiante usando la segunda figura fundamental.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

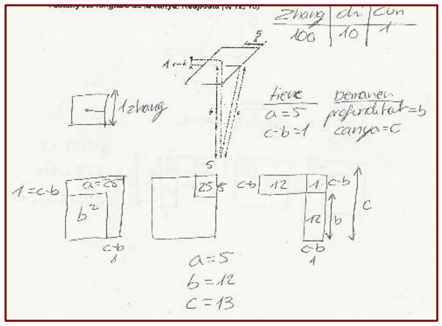


Fig. 3. Resolución del problema 6 por una alumna

De manera análoga, se preparó el material para la unidad de resolución de ecuaciones de segundo grado. En este caso, se basa en la justificación de una ecuación geométrica con cuadrados y rectángulos. La figura 4 muestra un diagrama de al-Khwarizmi, según la edición de F. Rosen (1831).

Giardino (2009) identifica dos tipos de elementos en la secuencia de resolución de problemas con diagramas de cálculo, los diagramas propiamente dichos y las acciones involucradas. Las acciones son cuatro: construcción, transformación, interpretación y lectura. A partir de estas cuatro acciones se han agrupado los objetivos específicos de la investigación en tres: traducción, transformación y razonamiento diagramático, ya que lo que se pretende es identificar las posibles oportunidades de aprendizaje, y sus respectivos efectos, al introducir diagramas geométricos históricos en las tareas de los estudiantes. Las conclusiones se han organizado en los mismos bloques, además de añadir uno más general sobre las virtudes y los problemas del uso de diagramas.

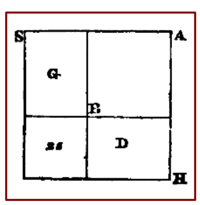


Fig. 4: Al-Khwārizmī (813) *The treatise Hisab al-jabr w'al-muqabala*

De las seis conclusiones relacionadas con la traducción (Guevara, 2015: 428-435), se destaca la tercera como la más importante: los estudiantes asocian términos de primer grado con coeficiente unitario (x) a longitudes, los de primer grado con otros coeficientes (6x) a las

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

áreas y los de segundo grado también áreas. En relación a los valores numéricos con longitudes o áreas, en función del contexto del problema. En la Figura 5 se pueden ver las equivalencias que un estudiante establece entre los términos 6x, x, 40 y lados y áreas de la figura, usando las etiquetas correspondientes. Lo coloca dentro de la figura o fuera, sobre el lado si es una longitud, dentro de la figura si se corresponde con una área.

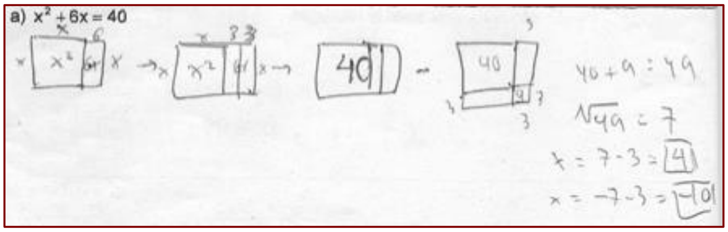


Fig. 5. Resolución de la ecuación x2 + 6x = 40, según un alumno

De las cuatro conclusiones relacionadas con la transformación (Guevara, 2015: 435-445) destaca la primera como la más importante: el hilo conductor que guía los procesos de transformación de los diagramas es la transformación de las áreas de las figuras (cuadrados y rectángulos) que contienen diagramas.

En la figura 3, en la resolución del problema 6 sobre triángulos rectángulos, el hilo conductor es el área 25. En la figura 5, en la resolución de una ecuación de segundo grado x2 + 6x = 40 la guía es el área 40.

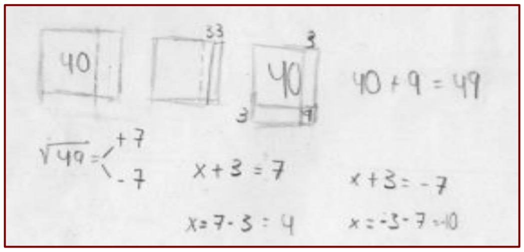
Mancosu (2001) distingue entre visualización y razonamiento diagramático. Utiliza el término visualización cuando se refiere a los trabajos de Giaquinto (1992, 2007) que defiende los diagramas como herramienta de descubrimiento. Sin embargo, utiliza el razonamiento diagramático cunado se refiere a Barwise y Etchemendy (1996), que avalan los diagramas herramientas de demostración. En la investigación se utiliza la expresión razonamiento diagramático en estos mismos términos.

De las tres conclusiones relacionadas con el razonamiento diagramático (Guevara, 2015: 428-435), destaca la segunda como la más importante: las etiquetas esenciales que usan los estudiantes son las etiquetas numéricas por encima de las algebraicas. Sin ellos, el diagrama no ayuda a resolver el problema.

En la figura 6 se puede ver el proceso de resolución de un estudiante para la ecuación

ISBN 978-84-945722-3-4

$x^2 + 6x = 40$, que no usa etiquetas algebraicas.



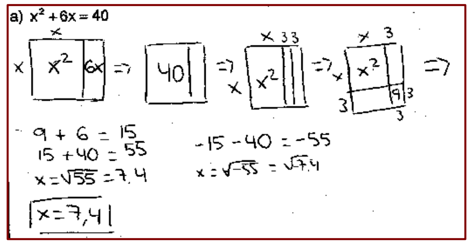


Fig. 6. Sin etiquetas algebraicas **Fig. 7. Sumando longitudes y áreas**

Por último, el cuarto bloque de conclusiones es más general y se centra en las ventajas y puntos a considerar en el uso de diagramas. De las cuatro conclusiones relacionadas con las ventajas en el uso de diagramas (Guevara, 2015: 452-458) destaca la tercera como la más importante: para poder manipular diagramas con facilidad es necesario distinguir entre el concepto de perímetro y área, y también entre la medida de una longitud y de una superficie. En la figura 7 se puede ver la solución de un estudiante que mezcla en una suma valores correspondientes a longitudes con valores correspondientes a áreas. Esto le impide alcanzar el resultado final correctamente.

A partir de los resultados contenidos en el análisis de las actividades de los estudiantes y de las conclusiones generadas, puede decirse que la enseñanza del lenguaje algebraico en los primeros cursos de su introducción debe ir de la mano de argumentos visuales y del uso de diagramas: es decir, la introducción del lenguaje algebraico, además de ser una generalización del lenguaje de la aritmética, un modelo en el que las reglas de los números se convierten en reglas con letras también debe tener una componente visual, la que proviene de interpretar las fórmulas en términos de longitudes y áreas de figuras formadas por cuadrados y rectángulos. En este paradigma las expresiones lineales se pueden interpretar, dependiendo de la situación, como áreas o longitudes de segmentos, y las expresiones cuadráticas se interpretan como áreas. Todas las operaciones y reglas para operar con letras tienen su interpretación en el modelo geométrico. De esta manera, las propiedades de las operaciones no se justifican únicamente con reglas gramaticales de símbolos sino que tienen un equivalente en el modelo geométrico.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pasar de la aritmética al álgebra saltando la geometría se podría considerar como un error pedagógico e histórico. En el contexto del siglo XVII, la fuerza del nuevo lenguaje simbólico del álgebra reemplazó al razonamiento geométrico visual (Katz y Barton, 2007) pero tal vez la conexión álgebra-geométrica se debería recuperar, en el siglo XXI, en los primeros cursos de la enseñanza del álgebra. Durante muchos siglos la humanidad, en ausencia del álgebra formal y con sólo las cuatro operaciones aritméticas básicas, ha sido capaz de resolver algunos problemas que ahora se resuelven con ecuaciones. Hay una parte significativa de estudiantes que no resuelven problemas porque no han comprendido completamente las reglas de este lenguaje y son analfabetos, desde el punto de vista de las matemáticas. Tal vez, al comienzo del aprendizaje del álgebra, es necesario volver al razonamiento de los matemáticos antiguos. Los matemáticos antiguos calcularon sobre la base de modelos geométricos para justificar la validez de sus operaciones.

Referencias bibliográficas

Al-Khwarizmi (1986). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Rosen, F. (ed. i trad.), (1a ed., Londres, 1831) Hildesheim/Zürich/Nova York: George Olms Verlag.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Visual Information and Valid Reasoning. En: G. Allwein & J. Barwise (Eds.), *Logical Reasoning with Diagrams* (pp. 3-23). New York: Oxford University Press.

Burgués, C. (2008). La representación de las idees matemáticas. In: M.M. Hervás Asenjo, (Ed.), *Competencia matemàtica e interpretación de la realidad*. Madrid: Secretaria General Técnica del MEC, 23-40.

Burgués, C.; Sarramona, J. (Eds.) (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Barcelona: Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf/ Consultado 11/01/2016.

Chemla, K., & Shuchun, G. (Eds.) (2005). *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* París: Dunod.

Cullen, C. (1996). *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge/New York: Cambridge University Press.

Dauben, J. W. (2007). Chinese Mathematics. In: V. J. Katz, (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*. A sourcebook (pp. 187-384). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Demattè, A. (2010). *Vedere la matematica. Noi, con la storia*. Trento: Editrice UNI Service.

Fauvel, J., &; Maanen, J.V. (Ed.) (2000). *History in Mathematics Education*. The ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

ISBN 978-84-945722-3-4

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford Univ. Press.

Giardino, V. (2009). Towards a diagrammatic classification. *The Knowledge Engineering Review*, 00(0), 1-13.

Giardino, V. (2014). *Diagram Based Reasoning* https://diagrambasedreasoning.wordpress.com/ Consultado 11/01/2017

Guevara, I; Massa, M.R.; Romero, F. (2006). Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas. In: J.A. Pérez-Bustamante, et al. (Eds.), *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* (pp. 1301-1304). Cádiz: SEHCYT.

Guevara, I. (2009). La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària: La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per a millorar la competència matemàtica. http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200809/memories/1864m.pdf/ Consultado: 11/01/2017.

Guevara, I (2015). L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra. (Tesi doctoral). Universitat de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/301766/ Consultado: 11/01/2017.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71 (3), 235-261.

Katz, V. J.Barton, Bill (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185 –201.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: SAGE Publications.

Mancosu, P.(2005). Visualitzation in Logic and Mathematics. En: P.Mancosu et al. (Eds), *Visualitzacion, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 13-30). Netherlands: Springer.

Niss, M., & Hojgaard, T. (Ed.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University: Department of Science, Systems and Models, IMFUFA tekst nr. 485. http://diggy.ruc.dk/bitstream/1800/7375/1/IMFUFA_485.pdf/ Consultado: 11/01/2017.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 145-164.

Siu, M.K. (2000). An Excursion in Ancien Chinese Mathematics. In: V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective* (pp. 159-166). Washington: The Mathematical Association of America.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-848

DESERCIÓN UNIVERSITARIA ¿QUÉ RESPONSABILIDAD TIENE LA MATEMÁTICA EN CARRERAS ORIENTADAS A LA SALUD?

Walz, María Florencia – Contini, Liliana Ester – Ávila, Olga Beatriz
florencia.walz@gmail.com – lecontini@gmail.com – olga.beabriz.avila@gmail.com

Departamento de Matemática, Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (F.B.C.B.) - Universidad Nacional de Litoral (U.N.L.) Santa Fe - Argentina

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Universitario

Palabras Claves: deserción universitaria – matemática – rendimiento académico

Resumen

La deserción universitaria es un problema de larga data que acontece casi en igual medida en todas las universidades argentinas. La diversidad de factores involucrados obstaculiza su definición, análisis y planteo de políticas tendientes a evitarla. En general, la responsabilidad de este fenómeno recae en los factores sociales o las circunstancias particulares de los alumnos. Sin embargo, las aptitudes y actitudes personales hacia las cuestiones académicas impactan en el desempeño académico.

La Matemática, inserta en el ciclo básico de carreras experimentales, podría ser un factor perturbador, dado que se aleja del perfil profesional; además, generalmente, no resulta amigable ni sencilla.

Con este trabajo se pretende interpretar, a través de un estudio descriptivo, el rol de la Matemática en el rendimiento académico y su relación con la deserción en dos cohortes de alumnos de Bioquímica separadas diez años y con cambio de plan de carrera que involucró modificaciones en Matemática. Se siguió a ambas cohortes diez años. También se describen: rezago, momento de la carrera en el cual se produce el abandono, clasificándoselo en temprano o tardío. En particular, se analiza el rendimiento académico en Matemática de los alumnos egresados y desertores estableciéndose asociaciones dentro de este contexto.

Introducción

La deserción universitaria es un problema de larga data que acontece casi en igual medida en todas las universidades argentinas, tanto públicas como privadas (Genuth, 2012).

Son numerosos los factores que se cree están involucrados en este fenómeno, lo cual obstaculiza su definición, análisis y planteo de políticas tendientes a evitarlo; pero en general, la responsabilidad recae en razones sociales o personales. Sin embargo, las aptitudes y actitudes individuales hacia determinadas cuestiones académicas también deben ser atendidas, dado que impactan en el desempeño del alumno en el quehacer universitario (Pascua-Cantarero, P.M., 2016).

Según una encuesta realizada a 5000 estudiantes argentinos (a través de una red social gratuita: InterUniversidades.com), el 58,2% abandona la carrera elegida durante el primer año y la razón primordial es el enfrentamiento con una realidad no imaginada. Al respecto, Alexis Genuth expresa. "En el primer año, los alumnos tienen un contacto más real con otros alumnos, la universidad y los docentes. Y se encuentran con otra realidad: no es el imaginario que ellos esperaban", (Genuth, 2012). A su vez, la decepción provocada por un mal desempeño académico también tiene su impacto negativo en el ánimo y la actitud del estudiante para continuar. A criterio del Ministerio de Educación de la Nación, la deserción está vinculada al hecho que después de un año de haber estado en la universidad estatal, 44 de cada 100 alumnos no aprobaron más de una sola materia (Guadagni, 2015).

La Matemática, inserta en el ciclo básico de carreras orientadas a las ciencias biológicas o de la salud, podría ser un factor perturbador dado que se aleja del perfil vocacional; además, generalmente, no resulta ni amigable ni sencilla para este tipo de alumnado, sumado al hecho de que recién se están iniciando en la vida universitaria, lo que implica asumir grandes cambios y adaptaciones (Walz, M. F. & Contini, L. & Bergesio, A. & Colombini, M., 2009).

Es sabido que las cuestiones afectivas tienen un rol importante en el aprendizaje de la Matemática. Reiterados fracasos en la aprobación de esta asignatura pueden deberse a actitudes negativas de los alumnos hacia ella (Gómez Chacón, 1997).

Por otra parte, un número elevado de aplazos aumenta el riesgo del abandono en la universidad (Vaira, S. & Avila, O. & Ricardi, A. & Bergesio, A., 2010).

ISBN 978-84-945722-3-4

Así, el hecho de las expectativas no satisfechas y la falta de integración académica adecuada que esto provoca son consideradas hoy en día como un factor importante en la decisión de abandonar los estudios universitarios en los primeros años de la carrera (Pascua-Cantarero, 2016).

En función de tener en cuenta lo arriba expresado, se deriva la necesidad de evaluar cuáles son las materias iniciales en las carreras universitarias, cómo se enseñan, qué grado de dificultad le ocasionan a los alumnos, qué actitud generan en ellos, qué porcentaje de estudiantes se retrasan por no poder aprobar las materias básicas, entre muchas otras preguntas que podrían formularse.

En particular, en la carrera de Bioquímica de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (FBCB) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), Santa Fe, Argentina, en el primer año del primer cuatrimestre se dictan las asignaturas Matemática General (MG) y Química General. Considerando que la primera es la más alejada del perfil vocacional de los ingresantes, es que los docentes del Departamento de Matemática de la mencionada facultad y responsables de la enseñanza de tal disciplina se plantearon como objetivo dilucidar si es posible considerar que hay relación entre el actuar matemático en la trayectoria académica y su influencia en la toma de decisión de abandonar la carrera de Bioquímica de la FBCB. Al respecto, es válido aclarar que son pocas las investigaciones abocadas a dilucidar esta cuestión, con el agravante que los estudios hechos están acotados a poblaciones específicas.

En la carrera analizada, MG se dicta en el primer semestre del primer año de la carrera Bioquímica de la FBCB; su perfil profesional está, socialmente entendido, ligado al área de salud. Su inserción obligatoria en el plan de estudio no siempre es bien comprendida y aceptada por el alumnado; generando ocasionalmente rechazo hacia la misma. Esto no es extraño, ya que, según se interpreta en el trabajo de Tinto (1988), todo lo relacionado con el inicio del proceso de inserción del estudiante al nivel universitario es un período crítico, en el que las metas estudiantiles son sensibles y vulnerables, pudiendo influir en la toma de decisión de abandonar los estudios. Es por esto que esta cuestión es importante de atender, dado que es susceptible de ser intervenida institucionalmente, principalmente dando lugar preponderante a las acciones de articulación.

Metodología

ISBN 978-84-945722-3-4

Se seleccionaron para este estudio dos cohortes de alumnos (1997 y 2007) inscriptos en la carrera Bioquímica de la FBCB de la UNL.

La elección se debió a que en ambos años se comenzó una nueva planificación. El plan 1997 implicaba una carga horaria para MG de 135 horas totales y en el plan 2007 se reduce a 120 horas sin cambiarse los contenidos conceptuales. A su vez en el plan 1997 se elimina el dictado de la asignatura en ambos cuatrimestres de un mismo año; quedando establecido su dictado, solamente, para el primer cuatrimestre de cada ciclo lectivo. Modalidad que continúa a la fecha.

El seguimiento de cada cohorte fue por diez años consecutivos.

Se consideraron dos tipos de egresados: *Egresado a término*, es aquel alumno que a los seis años de su ingreso ha egresado (como marca el plan) y *Egresado tardío*, es aquel alumno que finalizó los estudios entre los siete y diez años desde su ingreso.

Se definió como *Desertor* a quien no registró inscripción al año académico en la facultad en el año 2006 (para la cohorte 1997) y en el año 2016 (para la cohorte 2007).

Se consideraron tres tipos de desertores: a) *Desertor Preliminar,* alumno que solamente registró como actividad académica universitaria la aprobación de alguno de los cursos de ingreso; b) *Desertor Iniciado,* alumno que abandona la facultad antes de iniciar el segundo año de la carrera y habiendo registrado algún tipo de actividad académica, como haber adquirido la figura de alumno regular en alguna asignatura, haber sido aplazado o aprobado en un examen final, etc. y c) *Desertor Tardío,* alumno que abandona la facultad después del segundo año lectivo, habiendo registrado algún tipo de actividad académica.

La información académica recabada para cada alumno fue obtenida del sistema de información universitaria único (SIU). Para cada cohorte se registró el número de: inscriptos, egresados a término, egresados tardíos, desertores preliminares y desertores iniciados.

En el grupo de alumnos egresados se contabilizó: a) cuántos de ellos aprobaron MG antes del turno de exámenes intermedio del segundo cuatrimestre del año de inicio (esto permitió evaluar quienes cumplían con los plazos fijados en el plan de carrera); b) cuántos aprobaron MG en el primer intento (sin aplazos); c) el número promedio de aplazos en MG y d) la nota promedio de aprobación de MG.

En el grupo de los desertores se contabilizó la cantidad de desertores preliminares e iniciados.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el grupo de desertores iniciados se registró: a) la cantidad de desertores con MG aprobada; b) promedio de aplazos en MG; c) nota promedio de aprobación de MG; d) cantidad de desertores que aprobaron MG antes del turno de exámenes intermedio de setiembre del año de inicio; e) cantidad de desertores que aprobaron MG sin aplazos; f) promedio de aplazos en MG en el grupo de desertores que no aprobaron la asignatura; g) cantidad de desertores con menos del 10% de las materias del plan aprobadas; h) cantidad de desertores que abandonaron antes de iniciar el segundo año sin haber aprobado MG (sin reinscripción anual en 1998 y 2008, respectivamente para cada cohorte) e i) cantidad de desertores que abandonaron antes de iniciar el segundo año habiendo aprobado MG.

Resultados y Discusión

En la siguiente tabla se muestran los resultados observados en cada situación analizada.

	Cohorte 1997	Cohorte 2007
Número de inscriptos	190	88
Número de graduados a término	21 (11%)	6 (7%)
Número de graduados tardíos	21 (11%)	12 (14%)
Cantidad de alumnos que siguen en carrera (inscriptos al año académico 2007 o 2017, según cohorte de estudio)	17	11
Grupo de egresados	**42 (22%)**	**18 (21%)**
Cantidad de egresados que aprobaron MG antes del turno intermedio de setiembre del año de inicio	33 (79%)	15 (83%)
Cantidad de egresados sin aplazo en MG	21 (50%)	13 (72%)
Promedio de aplazos en MG	0,35	2,25
Nota promedio de aprobación de MG	7,20	7,12
Grupo de desertores	**131 (69%)**	**59 (67%)**
Cantidad de Desertores Preliminares	55 (4%)	4 (7%)
Cantidad de Desertores Iniciados y Tardíos	76	55

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cantidad de Desertores con MG aprobada	43	37
Promedio de aplazos en MG	1,36	2,6
Nota promedio de aprobación de MG	6,58	6,54
Cantidad de Desertores que aprobaron MG antes del turno intermedio de setiembre del año de inicio	18 (14%)	7 (12%)
Cantidad de Desertores que aprobaron MG sin aplazos	21 (16%)	17 (29%)
Promedio de aplazos en MG en el grupo de desertores que no aprobaron la asignatura	6,5	3,25
Cantidad de desertores con menos del 10% de las materias del plan aprobadas	79	30
Cantidad de Desertores Iniciados	22 (17%)	22 (37%)
Cantidad de Desertores Iniciados que abandonaron sin haber aprobado MG	13 (59%)	15 (68%)
Cantidad de Desertores Iniciados que abandonaron habiendo aprobado MG	8 (36%)	7 (32%)

De lo recabado se aprecia que aproximadamente se gradúa un 20% de los ingresantes (no resultaron diferentes estadísticamente, las proporciones de egresados en cada cohorte: 0,22 y 0,21, valor p= 0,76). De éstos, un 10% aproximadamente termina la carrera en tiempo y forma (sin diferencias significativas en las proporciones: 0,11 y 0,07, valor p= 0,27). Resultados que se asemejan a los de muchas carreras técnicas de facultades estatales argentinas, donde se ha evidenciado que el tiempo promedio para la graduación es de ocho años.

La proporción de desertores preliminares observada en este estudio es baja y no es preocupante, puesto que es habitual que los jóvenes se inscriban en más de una carrera en las universidades estatales argentinas, rindan el curso de ingreso común a ellas y luego opten por una. Tinto (1993) denomina este abandono como *deserción voluntaria* vinculada sobre todo

ISBN 978-84-945722-3-4

a lo vocacional y no es debida a cuestiones que atañen a la institución y que provocan el *despido académico*, razón por la cual deben ser analizadas.

En relación al desempeño académico en MG y su relación con la deserción, se describe que en ambas cohortes la proporción de alumnos que aprueba MG antes del turno intermedio de examen de setiembre (del mismo año lectivo del ingreso) es significativamente distinta entre los grupos de egresados y desertores iniciados (79% vs 14%, valor $p<10^{-3}$ y 83% vs 12%, valor $p<10^{-3}$). Considerándose iguales las proporciones de los que aprueban en tiempo según plan entre cohortes, en cada grupo de alumnos (egresados y desertores).

La proporción de alumnos que aprueba MG sin aplazos difiere significativamente entre los egresados y los desertores en ambas cohortes (50% vs 16%, valor $p<10^{-3}$ y 72% vs 29%, valor $p<10^{-3}$). Por otra parte, el promedio de aplazos en MG es más alto en el grupo de desertores que en el grupo de egresados y la nota promedio de aprobación de la asignatura es más baja en desertores con MG aprobada.

Lo relevante de los resultados obtenidos en este estudio es el hecho de que la proporción de Desertores Iniciados con MG sin aprobar es el doble de aquellos con MG aprobada; fenómeno que hace pensar que no alcanzar el éxito en Matemática podría ser un factor desalentador. En tal sentido, Tinto (1993) aduce que el sentimiento de no remuneración por el esfuerzo realizado genera desmotivación.

Las proporciones de alumnos que dejan sus estudios con menos del 10% de materias aprobadas (esto equivale a abandonar antes de comenzar el tercer año del plan de carrera) observadas en este estudio en ambas cohortes fueron entre 50 y 60%, valores semejantes a los observados por Chaves Esquivel (2003). El mencionado autor expresa que el porcentaje de deserción en el primer y segundo año corresponde a un 52.8%.

Conclusiones

La Matemática del primer cuatrimestre del primer año de la carrera Bioquímica podría ser considerada un factor asociado con la deserción universitaria temprana, en cuanto las expectativas insatisfechas se traducen en un estado de frustración o desmotivación. No obstante se observa que el alumno que logra culminar con éxito el primer cuatrimestre donde se encuentra MG, logra graduarse en el tiempo estipulado por el plan de estudios; coincidiendo esto con la percepción del grupo de docentes-investigadores que participa de esta investigación. La deserción universitaria no voluntaria en esta carrera no difiere de la

ISBN 978-84-945722-3-4

deserción general observada en las carreras técnicas o experimentales de universidades estatales argentinas. Lo cual impone un estudio más amplio que permita evaluar la acción de la Matemática en todas ellas.

Referencias bibliográficas

Chaves Esquivel, E. (2003). Graduación y deserción en la escuela de matemática de la UNA: Cohortes 1995 a 1998. Uniciencia, 20(1), 115-122. Recuperado de http://www.fcen.una.ac.cr/uniciencia/ Vol_20_N1%28Paper_09%29.pdf.

Genuth, A. (2012, Marzo 26). La Deserción afecta tanto a la Universidad pública como a la privada. *Clarin*. Recuperado de https://www.clarin.com/sociedad/primer -estudiantes-dejan-cambian-carrera_0_r1Cm3yI3Pmx.html.

Gómez Chacón, I.M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *Revista Uno*, 13, 7-22.

Guadagni, A.A. (2015, Abril). Nuestra graduación universitaria es menor que la de nuestros vecinos Brasil y Chile. *Cea*. Recuperado de www.ub.edu.ar/centros_de_estudio/cea/cea_numero_34.pdf.

Pascua-Cantarero, P.M. (2016, Enero-Abril). Factores relacionados con la deserción en el primer y segundo año de estudio en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Revista Electrónica Educare. Recuperado de http://4www.redalyc.org/articulo.oa?id=194143011005.

Tinto V. (1988). Stage of Student Departure: Reflections on the longitudinal character of student leaving. *Journal of Higher Education*, 59(4), 438-455.

Tinto, V. (1993). *Leaving College: Rethinking the Causes and Cures of Student Attrition* [*Abandonando la universidad; repensando las causas y curas de la deserción estudiantil*] (2a ed.). Chicago: The University of Chicago Press.

Vaira, S., Avila, O., Ricardi, P. y Bergesio, A. (2010). Deserción universitaria. Un caso de estudio: variables que influyen y tiempo que demanda la toma de decisión. *FABICIB*, 14, 107-159.

Walz, M. F., Contini, L., Bergesio, A., y Colombini, M. (2009, Agosto). Factores académicos en la deserción universitaria de una carrera que tiene a la matemática en su currículo. [Ponencia]. III *Congreso internacional de educación: Construcciones y perspectivas. Miradas desde y hacia América Latina*. Santa Fe, Argentina.

ISBN 978-84-945722-3-4

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-849

CONCEPÇÕES DE FUNÇÃO APRESENTADAS POR ESTUDANTES DE BIOLOGIA

Rogério Fernando Pires – André Lúcio Grande
rfpires25@hotmail.com – andremath@uol.com.br
Amari Goulart
moivre2@yahoo.com.br
Universidade Federal de Uberlândia/ Brasil

Núcleo temático: Investigação em Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Sem especificar
Palabras clave: Função; Concepções; Reificação do Conceito; Biologia

Resumo

O presente estudo teve o objetivo de investigar as concepções de função manifestadas por um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Biologia de uma Universidade Pública localizada no interior de São Paulo, em dois momentos distintos, quais sejam: no início do primeiro semestre do curso e ao final desse período letivo. Para analisar as concepções apresentadas foi utilizada a categorização adotada por Sfard (1992) para a concepção de um objeto matemático (operacional e estrutural). Tratou-se de uma pesquisa de cunho qualitativo em que os dados foram coletados por meio do seguinte questionamento: o que você entende por função? Os resultados mostraram que inicialmente a concepção predominante dos sujeitos investigados foi a operacional e, no final do processo, houve uma mudança nessas concepções que se aproximavam da estrutural, porém, não foi possível observar a reificação do conceito.

Introdução

O conceito de função é um tema amplamente debatido no âmbito da Educação Matemática. Questões referentes ao ensino e a aprendizagem das noções inerentes a esse conceito frequentemente motivam a realização de pesquisas na área.

Uma das explicações para o grande volume de produções a respeito da temática pode estar no fato de que, embora seja um assunto bastante discutido, os fenômenos ligados ao ensino e aprendizagem das noções relacionadas ao conceito função apresentam características intrínsecas que contribuem para a constituição de um campo fértil para a investigação. De fato, vários aspectos já foram desvelados, porém ainda existem muitas questões a serem investigadas sobre o tema.

ISBN 978-84-945722-3-4

Assim, as dificuldades apresentadas pelos estudantes com as noções relacionadas à função têm sido foco de diversos estudos que tratam tanto do ensino quanto da aprendizagem. Sfard (1992), por exemplo, ressalta que, na maioria das vezes, os estudantes não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações (gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações), tampouco a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem representam funções, tais como: $f(x), x \mapsto y, sen(x+t)$. Contudo, fazer essas relações e manipular tais símbolos não é tarefa simples, pois o que gerencia essas ações é o processo de compreensão que se trata de algo um tanto quanto complexo que é motivado e administrado pelas ações do professor.

Assim, procuramos corroborar as investigações que tratam desse objeto matemático do ponto de vista daquele que aprende Matemática, pois acreditamos que os resultados aqui apontados podem, de certa forma, contribuir para a formação de professores. Pactuamos da ideia de que essas informações tragam implicações diretas em sala de aula. Assim, a partir da análise de nossos dados, procuramos promover uma reflexão sobre o conceito de função, no sentido de repensar a forma que ese conceito é abordado para os alunos do Ensino Superior.

O proceso de concepção em Matemática

Quando o indivíduo faz o exercício de conceber um objeto matemático, entra em jogo o que Sfard (1992) chama de dualidade ontológica das concepções matemáticas. Ela destaca que, normalmente, um novo conceito é introduzido a partir de outro já conhecido, e cita como exemplo a introdução dos números complexos que, comumente, é apresentado como um par ordenado (x, y) de números reais.

Essa abordagem, que utiliza um conceito já conhecido como ponto de partida para chegar a outro, é chamada por Sfard (1992) de estrutural. Aqui, os conceitos familiares são tidos como os tijolos da construção de uma casa que vão se encaixando visando ao produto final, que é a casa. Na Matemática esses conceitos conhecidos vão sendo utilizados para surgimento de um novo conceito. Todavia, esse tipo de abordagem não possibilita um posicionamento crítico por parte de quem aprende, uma vez que o ponto de partida normalmente é um conceito já conhecido e é considerado algo pronto e acabado.

A autora ainda destaca que a concepção estrutural parece prevalecer entre os matemáticos, não sendo aceitas definições que admitam abordagens diferentes, como a operacional, em

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

que uma noção é concebida como um processo operacional, e não como uma construção estática. Esse tipo de dualidade é muito frequente no tratamento de função, que, em alguns casos, descreve processos computacionais e em outros, relações estáticas.

Ao nos referirmos sobre a concepção operacional e a estrutural, estamos nos reportando às crenças implícitas sobre a natureza das construções matemáticas, e não às habilidades e competências relacionadas ao lidar com o objeto matemático. Ainda, de acordo com Sfard (1992), há a existência de uma concepção inferior à estrutural, a pseudoestrutural, que se manifesta quando o indivíduo descreve função como uma fórmula computacional, isto é, ao associar tal objeto a uma expressão algébrica, por exemplo.

Assim, com as ideias aqui apresentadas procuramos evidenciar alguns aspectos envolvidos no processo de concepção de função que revelaram as crenças implícitas relativas às construções dos indivíduos. Portanto, analisamos os dados coletados no estudo aqui descrito amparados nesses aspectos.

Metodologia

A pesquisa, de cunho qualitativo (CRESWELL, 2010), contou com a participação de 17 estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Biologia em uma univesidade pública localizada no interior de São Paulo. Esses estudantes cursavam a disciplina Fundamentos de Matemática Elementar I, que tinha por objetivo abordar o conceito de função durante todo o semestre.

Os dados da pesquisa foram coletados em dois momentos, o primeiro foi na primeira semana de aula que durante a realização de uma lista com 13 atividades sobre função afim e quadrática, uma das questões pedia para os estudantes escreverem o que entendiam por função. O segundo momento aconteceu no último dia de aula, em que os estudantes realizaram as mesmas atividades do início do semestre e responderam uma questão, que precisavam explicitar os entendimentos que tinham sobre função.

Ao pedir para os estudantes realizarem tais atividades no início e no final da disciplina e, em especial, pedir para que eles explicitassem o que entendiam por função era conhecer as concepções desse estudantes no início do curso e, ao final da disciplina evidenciar se houveram e como foram as transformações dessas concepções.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para efeito desse relato, iremos analizar somente as respostas dadas pelos estudantes nos dois momentos quando questinados sobre o que entendiam por função. Portanto, procuramos desvelar as concepções de função desses estudantes e, ainda, investigar qual e como foi a contribuição da disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar I na maneira de conceber tal objeto matemático por parte desses indivíduos.

Análise e discussão dos resultados

Com o intuito de organizar as informações recolhidas junto aos estudantes de maneira sintética e ao mesmo tempo explorar esse material à luz dos subsídios teóricos em que nos respaldamos, decidimos categorizar as respostas dadas pelos participantes da investigação em três categorias, de acordo com os tipos de concepção de função proposto por Sfard (1992), quais sejam:

- operacional – quando o indivíduo concebe o objeto como um processo dinâmico, no qual ocorrem transformações; ou como uma ferramenta para realizar cálculos;
- pseudoestrutural – quando a concepção fica restrita às maneiras de representar esse objeto (algébrica, gráfica, tabular etc.);
- estrutural – quando a concepção ocorre de maneira estática, as noções matemáticas são tratadas como se referissem a entidades permanentes, que podem ser manipuladas e combinadas em estruturas mais complexas.

Nesse sentido, o quadro a seguir nos dá um panorama geral de como se apresentaram as concepções de função desses estudantes em ambos os momentos, no início da disciplina e no final.

Momento I		
operacional	**pseudoestrutural**	**estrutural**
4	5	4
Momento II		
operacional	**pseudoestrutural**	**estrutural**
3	3	7

Quadro 1[26]: Síntese das concepções apresentadas pelos participantes

[26] Os números tratam da quantidade de respostas enquadradas em cada uma das categorias de concepção.

ISBN 978-84-945722-3-4

Os dados apresentados no Quadro 1 mostram um panorama das concepções manifestadas por esses estudantes nos dois momentos em que questionamos seus entendimentos de função. Pelo exposto, inicialmente é possível perceber que quatro deles não manifestaram suas concepções em nenhum dos momentos (momento I e II) e, ainda, fica evidente uma mudança nas concepções, com destaque para a estrutural que salta de 4 para 7 estudantes que manifestaram esse tipo de concepção no momento II.

De posse desses dados numéricos que evidenciaram uma possível mudança nas concepções dos estudantes, decidimos realizar uma análise mais detalhada acerca das respostas apresentadas por esses sujeitos, na tentativa de compreender como essas concepções foram manifestadas.

Ao apreciar os protocolos em que os participantes responderam aos questionamentos, percebemos que seis dos dezessete participantes no momento I concebiam função como a relação de elementos dois conjuntos, concepção essa que classificamos como estrutural. A figura 1 a seguir traz um exemplo desse tipo de resposta.

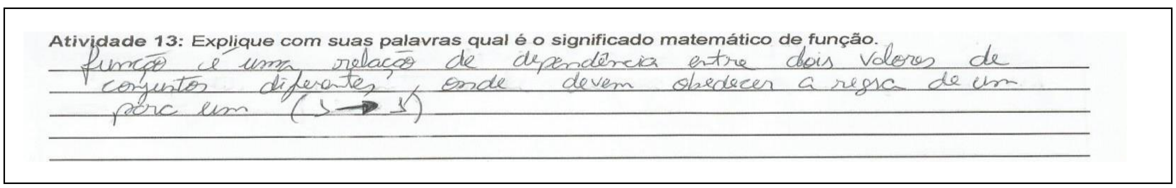
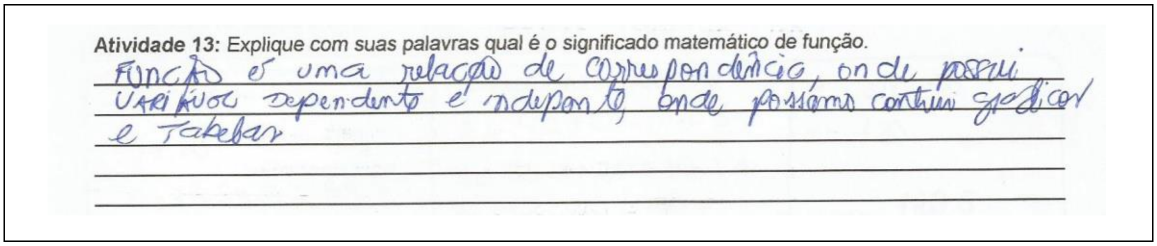

Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.
função é uma relação de dependência entre dois valores de conjuntos diferentes, onde devem obedecer a regra de um para um (1 → 1)

Figura 1: Resposta dada pelo estudante E6

A Figura 1 contém um exemplo das respostas que clasificamos como concepção estrutural no momento I. Destacamos, em especial, o entendimento explicitado pela utilização do termo “um para um”, o que é acontece apenas nas funções injetoras. Ao utilizar esse termo, implicitamente faz menção a um grupo específico de funções, aquelas que são injetoras. Assim, apesar de seu entendimento apontar para uma concepção estrutural, seus dizeres trazem alguns vestígios de uma transição da concepção pseudoestrutural para a estrutural, pois seu entendimento está limitado em um grupo específico de funções.

Ainda quanto às respostas obtidas no momento I, foi possível evidenciar que cinco Estudantes entendiam função como como uma correspondencia que pode ser explicitada em gráficos e tabelas, como pode ser observado na figura a seguir.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



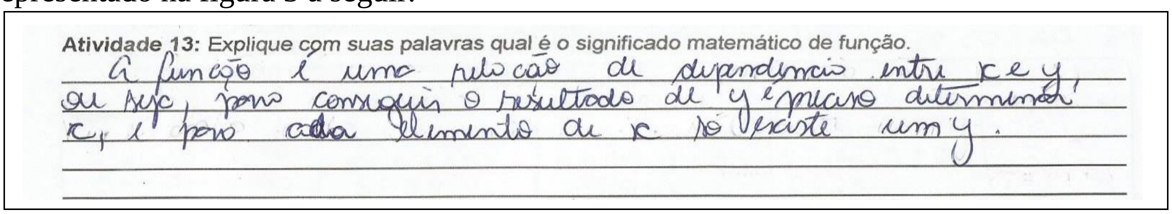
Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.

Função é uma relação de correspondência, onde possui variável dependente e independente onde possamos construir gráficos e tabelas

Figura 1: Resposta dada pelo estudante E14

Essas cinco respostas foram classificadas como concepção pseudoestrutural, como mostra a Figura 2, em que o participante associa função às suas possíveis representaçãoes (gráficos e tabelas). Isso revela que a concepção manifestada pelo estudante está ancorada nas representações desse objeto matemático, o que segundo Sfard (1992) é uma evidencia forte da concepção pseudoestrutural.

Ainda no tocante às respostas dadas no momento I, gostaríamos por fim de pontuar a presença de uma que enquadramos na categoria de concepção operacional, cujo protocolo está representado na figura 3 a seguir.



Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.

A função é uma relação de dependência entre x e y, ou seja, para conseguir o resultado de y é preciso determinar x, e para cada elemento de x só existe um y.

Figura 1: Resposta dada pelo estudante E15

O protocolo mostra que o estudante concebe função como uma relação de dependência totalmente voltado à processos computacionais, no qual ocorrem transformações, e, para que estas aconteçam, são necessárias ações causadoras. Isso fica evidente quando ele afirma que “para conseguir o resultado de y é preciso determinar x”. Salientamos também que o uso do termo resultado, que possivelmete está relacionado a valor, o que pode indicar que para ele essa relação é estritamente numérica, na qual dado um número, e sobre ele aplicada uma ação, é possível fazer uma transformação. No entanto, destacamos que o entendimento explicitado por ese estudante em termos de valores, que parece indicar uma relação numérica, pode ser um empecilho para a compreensão do conceito de função, uma vez que os dizeres dele parecem convergir para uma percepção de relação entre termos discretos, não deixando evidente que essa relação também se estabelece e é bastante comum com as grandezas contínuas.

ISBN 978-84-945722-3-4

No momento II, conforme apresenta o Quadro 1, as respostas classificadas como estrutural saltaram de 4 para 7 e as concepções operacional e pseudoestruturam reduziram de 4 para 3 e de 5 para 3 respectivamente. Isso revela que os estudos realizados durante a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar I contribuiram para a alteração das concepções o objeto de estudo manifestadas pelos estudantes no início da disciplina.

Além dessa mudança no entendimento de função, pudemos notar algumas alterações nas respostas dos estudantes, e muitas delas passaram a ser mais consistentes apresentado termos como associação, relação, dependêcia, dominio, contadomínio, etc., o que evidencia uma certa maturação e proceso de transição de concepção desses sujeitos.

Considerações finais

A realização desse estudo permitiu ao final da análise do material coletado realizar uma reflexão acerca das concepções manifestadas pelos estudantes. Esse processo reflexivo nos permitiu compreender um pouco mais a respeito da ação de conceber um objeto matemático, e que nele não estão envolvidos apenas os conhecimentos do indivíduo referentes ao objeto em questão, mas também o contexto em que o sujeito está inserido e suas crenças.

Nessa perspectiva, destacamos que as concepções evidenciadas nas respostas dos estudantes, de certa forma, estão diretamente relacionadas com as suas experiências com o objeto de estudo, pois compreendemos que os entendimentos manifestados por eles, além de estarem assentados no conhecimento matemático de cada um, podem ser fruto de suas experiências enquanto aluno, sendo que o contato com o objeto matemático, as diferentes situações de ensino e a aprendizagem são elementos que contribuem para a composição de determinadas crenças que, de maneira implícita ou explícita, estão presentes em suas concepções.

Identificar e classificar uma concepção não foi tarefa simples, pois muitos indivíduos, principalmente no momento II, mostraram que a compreensão de função estava num processo de construção, o que evidenciou maior incidência de uma fase de transição entre as concepções de acordo com as categorias propostas por Sfard (1992), e, como em toda transição cognitiva, os encadeamentos não seguem uma única direção.

A disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar I pode não ter acarretado alterações nas concepções que todos os professores traziam consigo. Contudo, julgamos que houve contribuição para que eles, no segundo momento, incorporassem em suas respostas termos

ISBN 978-84-945722-3-4

ou expressões que possibilitaram evidenciar a maior incidência de um estágio de transição entre as categorias de concepções. Eles apresentaram respostas mais concisas, as quais traziam elementos que apontaram para mais de um tipo de concepção.

Desse modo, salientamos que a alteração da concepção de um indivíduo sobre um objeto matemático não acontece em um curto espaço de tempo, como foi o caso do encontro da disciplina em que o estudo foi realizado. Acrescenta-se ainda que uma formação, por si só, não garante que as concepções dos participantes sejam modificadas; ela pode, sim, potencializar essa mutação. Portanto, proporcionar aos participantes a possibilidade de incorporar em suas respostas no momento II termos e expressões que as deixaram mais consistentes foi, a nosso ver, uma contribuição significava aos estudantes.

Por fim, destacamos que os apontamentos aqui presentes se constituem em interpretações possíveis nos limites desta pesquisa. Logo, mesmo acreditando nos argumentos e achados que explicitamos, existe a necessidade de vislumbrar os resultados alcançados com certa criticidade em razão do caráter desta pesquisa, uma vez que outros estudos podem ser realizados e trazer elementos que ampliem ou até mesmo consolidem as ideias aqui defendidas.

Referencias bibliográficas

Creswell, J. W. (2010) *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Magda Lopes. Porto Alegre: Artmed.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the quandary of reification – The case of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25, p. 59-84.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-850

CONTRIBUCIONES DE D. MANUEL DE TOLOSA PARA LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX

Elenice de Souza Lodron Zuin
elenicezuin@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – Brasil

Núcleo temático: VIII. Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica
Modalidad: CB
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Sistema métrico decimal. Historia de la Matemática escolar. España. Siglo XIX.

Resumo

El sistema métrico decimal, producto de los trabajos científicos, realizados por la Academia de las Ciencias de París, a finales del Ochocientos, ha sido adoptado en España en 1949. A partir de enero de 1852, el sistema métrico debería ser incluido en el sistema educativo – instrucción primaria y educación secundaria – como un nuevo contenido; una prioridad política para su transmisión, adquisición y difusión en la sociedad. Nuevos libros de texto eran necesarios para la enseñanza y aprendizaje del nuevo sistema metrológico y muchos manuales han sido editados en España para cumplir esa finalidad. Este artículo encuadrase en la Historia de la Matemática escolar. Tenemos como objetivo presentar los resultados de nuestro estudio, a través de un análisis descriptivo de un libro de texto del español D. Manuel de Tolosa, publicado en 1857, aprobado por el real Consejo de Instrucción Pública. El autor presenta un texto distinto de los demás, pues, como inventor del Cubo generador-métrico, hace, en su libro, una descripción del uso de ese aparato para la enseñanza del sistema métrico decimal. Utilizamos el Análisis de Contenido, parte del Análisis Didáctico, como una herramienta técnica que establece y analiza los significados de los contenidos del libro.

Introducción

Los textos de la matemática escolar publicados en Brasil y Portugal en el siglo XIX han sido las principales fuentes de mis investigaciones con foco en el análisis del tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal en los libros. Ahora, mi mirada se vuelve a los textos matemáticos publicados en España que han incluido el Sistema Métrico.

En España, la Ley de Pesas y Medidas de 19 de Julio de 1849 fijó las determinaciones para la adopción del sistema métrico decimal en el país y sus dominios ultramarinos. El Ministerio

ISBN 978-84-945722-3-4

de Comercio, Instrucción y Obras Públicas hizo publicar las nuevas determinaciones de las pesas y medidas en la Gaceta de Madrid. Por su artículo 11º:

> En todas las escuelas públicas o particulares, en que se enseñare o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas, será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde primero de Enero de 1852, quedando facultado el Gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no cumplan con aquella obligación. (Gaceta de Madrid, 1849).[27]

A la escuela delegase el papel de ser unas de las principales promotoras del cambio cultural y social en el país con la llegada de los patrones de medidas decimales.

Uno de los obstáculos: la ruptura con toda una cultura y tradición de la población conectada a las antiguas medidas. Para el *metro* entrar en la escuela, eran necesarios nuevos textos matemáticos.[28] Los autores de los manuales se esforzaron por poner en sus textos metodologías adecuadas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje del sistema métrico y muchos manuales han sido editados en España para cumplir esa finalidad. Uno de los libros de texto que se destacó, en mis búsquedas, ha sido del español D. Manuel de Tolosa, publicado en 1857, aprobado por el real Consejo de Instrucción Pública: "Sistema legal de pesas y medidas ó nuevo método teórico y práctico para enseñar el sistema métrico decimal con facilidad y prontitud demostrado por el cubo-generador-métrico y aplicado á los pesos específicos de los cuerpos".

¿Quién fue D. Manuel de Tolosa? El inventor del Silabario-Compositor y de varios aparatos para facilitar la instrucción de la infancia, un profesor premiado en la Exposición Universal de Paris y por varias sociedades científicas de Francia. Era también miembro de la Sociedad Libre de Bellas Artes y de la Sociedad de los Inventores de Paris. Estos datos están en su libro y no hemos encontrado más ninguna información sobre este inventor premiado.

Para este estudio, utilizamos el Análisis de Contenido, parte del Análisis Didáctico, como una herramienta técnica que establece y analiza los significados de los contenidos del libro, según Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008).

El libro Sistema legal de pesas y medidas de Tolosa

[27] La Ley ha sido publicada en la Gaceta de Madrid, n. 5428, 22 de Julio de 1849.

[28] Antes de la adopción del sistema métrico en España, "ya en 1836, en el programa de los conocimientos que se exigen para la admisión en el Colegio Científico de Madrid, se incluía el Sistema Métrico Decimal y la reducción de unas medidas a otras". (González Ruiz, 2016, p. 53).

ISBN 978-84-945722-3-4

El autor dedica su libro a D. Alonso Correa, informando que:

> El amor que me anima por la infancia y el noble deseo de ser útil á la juventud española, facilitándole el estúdio del sistema métrico decimal, tan útil para las ciencias, las artes y el comercio, me decidieron á reunir los elementos que pudiesen contribuir al logro de este fin. Para ello invente el Cubo-Generador-Métrico que llena el objeto que me habia propuesto. La presente obrita es la teoría que sirve para la explicación de tan útil sistema de pesas y medidas, y el Cubo-Generador-Métrico, para la demonstración material, el desarrollo y enlace de todas las medidas métricas, haciéndolo palpable y quitando todo lo que puede ser difuso para la inteligencia de la juventud.
> V. E. sabe apreciar de un modo justo la importancia que tendrá en nuestro pais, estender el conocimiento de este sistema, en todas las clases de la sociedad, y reconocerá lo provechoso de un método sencillo para su propagacion. (Tolosa, 1857).

Tolosa, en la presentación de su libro, dice que siempre intentó destruir las dificultades que los niños tienen en los principios de su instrucción. En este sentido, él había inventado el Silabario-Compositor para facilitar la enseñanza de la lectura, entonces surgió la idea de combinar el Compositor-aritmético para el estudio de la ciencia de los números. Pero, no dejó de llamar su atención la enseñanza del sistema métrico. Para esto, combinó una serie de piezas y creó el Cubo-Generador-Métrico. “La composición y la descomposición del cubo sirve de tipo y generador para la demostración teórica y práctica de las diferentes medidas que constituyen el sistema métrico”.

En la descripción del Cubo-Generador-Métrico y de las diferentes piezas que sirven para la demonstración del sistema métrico, Tolosa informa que el aparato consta de:

I. 2 centímetros cúbicos, colocados en dos cajitas de la misma dimensión
II. 10 bastoncitos ó prismas cuadrangulares de un decímetro de largo, compuesto cada uno de 10 centímetros cúbicos, unidos los unos á otros, alternando uno blanco y otro negro para que se distingan bien las divisiones. Una cara de uno de los centímetros está dividida en milímetros lineales y otra en milímetros cuadrados.
III. 10 planchetas compuestas cada una de 10 bastoncitos como los anteriores, unidos por su ancho formando cada una un decímetro cuadrado, dividido en cien centímetros cuadrados teniendo un centímetro de grueso.
IV. Con las 10 planchetas anteriores; colocada las unas sobre las otras, se forma un decímetro cúbico.
V. 1 caja en la cual está colocado el Cubo-generador-métrico: los seis lados que la componen se abren ó separan para explicar la formación y desarrollo superficial del Cubo.
VI. 1 caja hecha de zinc, de la capacidad de 1 decímetro cúbico, en la cual se ponen las 10 planchetas para demostrar que es equivalente al decímetro cúbico.
VII. 1 cilindro de zinc, equivalente á un decímetro cúbico, el cual está puesto en una caja de la misma forma. El cilindro es para demostrar que su volumen es equivalente á un decímetro cúbico sólido; y la caja para probar que su capacidad es igual á la de un decímetro cúbico cóncavo ó litro.
VIII. De una esfera equivalente á un decímetro cúbico, la cual está hueca y la terminan dos ejes, uno de ellos entra en el agujero que tiene practicado el pié donde está colocada para poderla hacer girar sobre ella misma. Los ejes tienen dos orificios para poder introducir el agua en su

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

interior. Para llenar la esfera con facilidad, se tiene una vasija llena de agua de suficiente profundidad para sumergirla. Por el orificio inferior entra el agua, y por el superior sale el aire para facilitar su entrada: cuando está llena se tapa el orificio inferior con un dedo y para trasvasar el agua á la caja cuadrada ó cilíndrica, se retira el dedo y se deja salir el líquido. Dos arcos ó círculos la cruzan en toda su circunferencia pasando por ambos polos dividiéndola en cuatro partes iguales ó meridianos. Otro círculo perpendicular al eje la divide en dos hemisferios para denotar lo que se entiende por ecuador. La esfera sirve para demostrar la forma de la tierra, su movimiento lo que es ecuador, polos, meridiano y cuarta parte del meridiano terrestre, y como se ha determinado la longitud del metro.

IX. 1 metro que se dobla en diez partes, y está dividido en decímetros, centímetros y milímetros. (Tolosa, 1857, p. 2-3).

Notase que Tolosa tiene una idea, al principio, sencilla, pero muy didáctica para la enseñanza del sistema métrico. El conjunto de piezas del Cubo-Generador-Métrico propician que los alumnos puedan materializar las medidas lineales, de superficie y de volumen.

La esfera es utilizada para mostrar la forma de la Tierra, ecuador, polos, meridiano y, principalmente, a cuarta parte del meridiano (ya que la Academia de Ciencias francesa eligió como unidad de longitud la diez millonésima parte del cuarto del meridiano terrestre, al que denominó *metro*). Otra pieza es el metro que se dobla en 10 partes y está dividido en decímetros, centímetros y milímetros – tratase de una regla articulada, el metro de carpintero.

El libro contiene 48 páginas. Después de presentar el Cubo-Generador-Métrico, siguen las lecciones. Hay una lección preliminar sobre los aspectos históricos del sistema métrico decimal, su nomenclatura y los diferentes tipos de medidas. En las siete lecciones siguientes el autor aborda las medidas lineales; de superficie; de volumen; de capacidad; ponderales; medidas de valor o monedas, sistema monetario francés y, en la última lección, pesos específicos o densidad de los cuerpos, incluyendo una tabla de pesos específicos de los cuerpos más usuales en las Artes, en la Industria y en el Comercio; pesos específicos de diferentes cuerpos, líquidos, gases. Por fin, una comparación del Cubo-Generador-Métrico con el peso específico de los diferentes cuerpos que son dados en una de las tablas y la comparación de las diferentes piezas que componen el Cubo-Generador-Métrico con el peso específico de varios metales.

Tolosa hace opción de no "hablar de las medidas antiguas para evitar la confusión que naturalmente produciría en la inteligencia de los discípulos al darles á conocer al mismo tiempo las pesas y medidas de las diferentes provincias del reino." Para el autor, solamente después que el alumno tenga conocimiento del sistema métrico, debe "entrar en el estudio

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

comparativo de las medidas antiguas, con relación á las métricas y vice-versa". (Tolosa, 1857, p. 47).

Sigue el análisis del libro, en relación a los conceptos, procedimientos, sistemas de representación, aspectos de la fenomenología y consideraciones didácticas.

- Conceptos

Tolosa no integra los números y fracciones decimales porque su intención es solamente abordar el sistema métrico decimal con la utilización de su Cubo-Generador-Métrico. El autor se preocupa con los conceptos de magnitud (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa, densidad). Para los múltiplos y submúltiplos hay la información que son derivados del sistema decimal y formados por prefijos griegos y latinos. Las unidades de medida son: *metro, metro cuadrado, área, metro cúbico, litro y kilogramo*.

El metro es presentado según un punto de vista científico-técnico, a partir de su definición basada en una parte del cuadrante de meridiano terrestre; etimológicamente, tomado del griego, con el significado de *medida*; e instrumental, como un aparato material utilizado para mediciones de longitud. Para cada una de las demás unidades de medida, se presentan sus múltiplos o divisores y sus respectivas equivalencias con la unidad básica y, de forma detallada, su utilización.

Elegimos la transcripción de las medidas lineales:

> El metro y sus divisiones sirven para medir todos los objetos de poca extensión, como son las cintas, las telas, etc., etc. Los múltiplos del metro se emplean para apreciar las grandes distancias; como la que hay de un pueblo á otro, la longitud de los caminos, etc. etc. (…)
> El metro de que se sirven los comerciantes, tiene una forma cuadrangular, es de madera y está dividido en decímetros y centímetros.
> Los artesanos usan un metro de forma plana, como una regla, dividida en milímetros, sino en toda su longitud, al menos en el primer decímetro. Hay otro que se dobla en diez partes para poderlo llevar en el bolsillo, el que no solo es usado por los artesanos, si no también por todas las personas que tienen necesidad de medir, ó que quieren llevar consigo el metro, para lo que se les ocurra apreciar.
> Se fabrican metros redondos en forma de bastón, los cuales están divididos en decímetros y centímetros, y los usan los maestros de obras.
> Los sastres, costureras, etc., se sirven para sus medidas de unas cintas de hilo impermeables ó de tafilete de una longitud de 1 metro 50 centímetros ó de dos metros, divididos en centímetros. (Tolosa, 1857, p. 10-11).

El sistema monetario presentado sigue las determinaciones del Decreto de 15 de Abril de 1848, siendo el *real* la unidad monetaria y, por el Decreto de 30 de Diciembre de 1855, se le divide en cien céntimos, los múltiplos del *real*, el *Escudo* (10 rs.), en plata; y el *doblón de*

ISBN 978-84-945722-3-4

Isabel (100 rs.), en oro; los submúltiplos, la décima, moneda de cobre, y los céntimos, con la utilización de las monedas auxiliares (*duros, pesetas, medias pesetas, medio real, doble-décimas* y *medias décimas*). Presentase las equivalencias entre las monedas españolas y, después, informes acerca del sistema monetario francés.

- Procedimientos

No hay en el libro ninguna actividad relacionada a la lectura o escritura de las medidas, tan poco hay reducciones de medidas. Como el autor no trata de las medidas antiguas, no incluye ejercicios de conversión de medidas.

Para concretizar los conceptos de las medidas, Tolosa describe cómo utilizar el Cubo-Generador-Métrico. Para la medida lineal (con bastoncillos y regla articulada); de superficie (con bastoncillos y planchetas) y utilizando las planchetas, el cilindro y la esfera, volúmenes (o sólidos, el metro cúbico) y capacidad (o arqueo, el litro). Una característica importante es que el cubo, el cilindro y la esfera tienen, todos ellos, una capacidad de $1dm^3$, posibilitando otros experimentos para los alumnos.

- Los Sistemas de Representación

Tolosa realiza la presentación de conceptos de forma textual, numérica, simbólica y tabular. No se encuentran ilustraciones en el libro.

Para las definiciones y procedimientos la forma textual es la empleada.

> Si se quiere saber el peso de una peso de 5000 litros de vino de Oporto, sabiendo que cada litro de vino pesa 997 gramos se tendrá que los 5000 litros, pesarán 4985 kilógramos, y de agua 5000 kil. y como cada litro es lo mismo que un decímetro cúbico, los 5000 litros equivaldrán á 5 metros cúbicos. (Tolosa, 1857, p. 47).

La representación numérica se utiliza para las cantidades métricas.

La representación simbólica incluye la combinación de letras o números para hacer, por ejemplo, las correspondencias entre las unidades de medida, incluyendo sus abreviaturas.

MEDIDAS AGRARIAS
Unidad.
Area..................... a.
Múltiplos.
Hectárea................ H. a.
Divisores.
Centiárea..................c. a. (Tolosa, 1857, p. 34).

La representación tabular comparece en la utilización de tablas o cuadros, como se presenta en la figura 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Precio del marco de materias de		Descuento único que se huce en las casas de monedas para la compra de pastas.		Ley de las monedas de oro y plata.	Permiso en la ley en mas ó en menos.	
Oro á 1,000 milésimos á rs.	Plata á 1,000 milésimos á rs.	Oro 1 por 100	Plata 2 por 100	900 milésimos de fino	Oro 2 milésimos	Plata 3 milésimos
3018	194					

Figura 1 – Detalle de la tabla de monedas utilizadas conforme la Ley vigente

- La fenomenología

El autor incluye la indicación de variados usos de las medidas, con un gran relieve para los usos comerciales y usos específicos de algunos profesionales.

Hay representaciones relacionadas a física-natural:

> Con el fin de evitar todo error, y que en todo tiempo y lugar, se pudiese verificar este tipo en las mismas condiciones, se estudiar las propiedades físicas del agua, y se observó que á la temperatura de 4º centígrados, es el punto en que sus moléculas están mas cerradas entre sí, y por consiguiente ocupan menos volumen, con la particularidad de que cuando la temperatura baja, sus moléculas se separan y su volumen aumenta proporcionalmente hasta 0º, que es el punto de su congelación. (...) su peso no seria el mismo que á 4º centigrados, término del máximo de su dendidad, y por esto se peso á 4º sobre cero. (Tolosa, 1857, p. 20).

- Las consideraciones didácticas

Las consideraciones didácticas están situadas en la utilización del Cubo-Generador-Métrico para el concepto de longitud, área, volumen, capacidad y algunas relaciones entre las unidades de medida. Elegimos una de las recomendaciones para el concepto de volumen:

> Un cubo es una figura geométrica que tiene la forma de um *dado*, las faces que le componen son seis cuadrados iguales. Para demostrarlo, se toma la cajá en que está encerrado el Cubo-generador-métrico, se van abriendo sus lados y se verá que está compuesta de seis cuadrados; haciendo notar, que el cubo desarrollado forma una cruz con los seis cuadrados, cuatro de ellos forman el cuerpo y dos los brazos. Reuniendo cada cuadrado con el que le corresponde, se vuelve á obtener el cubo.
> Comprendido esto, se toma el centímetro cúbico, haciendo ver que cada una de sus seis caras tiene un centímetro cuadrado. Si se compara con los diez bastoncitos, se verá que cada uno se compone de diez centímetros cúbicos, unidos los unos á los otros en la misma línea. Reuniendo estos diez bastoncitos por su ancho como se há hecho para la formación del cuadrado, tendremos una superfície de un decímetro cuadrado y de un centímetro de grueso, ó lo que es lo mismo, cien centímetros cúbicos. Cada una de las diez planchetas es igual á la que se ha formado con los diez bastoncitos; resultando tener cada una tres dimensiones: diez centímetros de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> longitud, diez de latitud y uno de grueso, ó de altura, formando un volumen de cien centímetros cúbicos.
> Colocando las diez planchetas, las unas sobre las otras, se formará un cubo de un decímetro cúbico, el cual se compondrá de mil centímetros cúbicos, y el centímetro cúbico de mil milímetros cúbicos. Si ahora suponemos que cada centímetro cúbico representa un decímetro cúbico, tendremos que cada plancheta representará un metro cuadrado, de un decímetro de grueso, ó cien decímetros cúbicos, y las diez reunidas en pila, un metro cúbico. (Tolosa, 1857, p. 14-15).

Consideraciones finales

Hemos encontrado la mención del Cubo-Generador-Métrico y de su creador en dos publicaciones. El *Boletín Bibliográfico Español*, de 1º de Diciembre de 1863, informa que el aparato de Tolosa muestra buenos resultados, fue adoptado por los RR. PP. Escolapios y por las hermanas de San Vicente de Paul y otros muchos establecimientos de educación. *El Magisterio: periódico de educación y enseñanza*, afirma que, con el aparato de Tolosa, la enseñanza del sistema métrico se hace fácil con las demonstraciones que se pueden realizar. Este periódico era del año de 1864. Entonces, el Cubo-Generador-Métrico estaba a la venta, por lo menos, durante siete años.

El libro de Tolosa tiene características de un manual destinado a los maestros, con una variedad de informaciones con respecto a las medidas, incluyendo los aspectos históricos. Su principal objetivo es tornar la enseñanza y aprendizaje del sistema métrico más sencilla, proporcionando a los alumnos una real comprensión de los conceptos a través de materiales concretos específicos.

El trabajo con el Cubo-Generador-Métrico con sus bastoncitos, planchetas y el cubo tiene una propuesta similar a las que pueden realizarse con algunos de los materiales desarrollados por María Montessori, pero, esta educadora nasció en 1870, mucho después que Tolosa había creado su Cubo-Generador-Métrico.

Tolosa, al proponer la enseñanza del sistema métrico con su aparato, sigue una propuesta pedagógica que tiene aproximación con el método intuitivo de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) en los aspectos de la enseñanza de los niños basada en el estudio de las cosas y en la experiencia; la relación del conocimiento con actividades prácticas, siendo fundamentales los materiales concretos. Peslalozzi concibe la experiencia sensorial como un proceso activo. Esa idea no estaba expresa exactamente en el libro de Tolosa, pero, las actividades con su aparato permitirían al estudiante acercarse a los conceptos de área,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

volumen, haciendo experiencias con materiales concretos. Una propuesta innovadora para aquella época.

Referencias bibliográficas

El Magisterio: periódico de educación y enseñanza (1865). Tomo VII. Ciudad Real: Imp. de C. Clemente Rubisco.

Hidalgo, D. (1863). *Boletín Bibliográfico Español*. Madrid: Imprenta de Las Escuelas Pías. Tomo IV. Año IV, n. 23.

Ley de Pesas y Medidas, de 19 de Julio de 1949. *Gaceta de Madrid*.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/533/

González Ruiz, J. (2016). De la vara al metro: la recepción del Sistema Métrico Decimal en la escuela española del siglo XIX. *Revista Muesca*, junio, 43-87.

Tolosa, M. de. (1857) *Sistema legal de pesas y medidas o Nuevo Método teórico y práctico para enseñar el Sistema Métrico Decimal...*. Madrid: Imprenta del colegio de Sordo Mudos.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-851

CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS EN *LOS NIÑOS: REVISTA DE EDUCACIÓN Y RECREO,* DEL ÚLTIMO TERCIO DEL SIGLO XIX EN ESPAÑA

Elenice de Souza Lodron Zuin
elenicezuin@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – Brasil

Núcleo temático: VIII. Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica
Modalidad: CB
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Geometría elemental. Prensa infantil. España. Siglo XIX.

Resumo

La prensa infantil ha empezado en España con la publicación del periódico La Gaceta de los niños en 1798. Entre las publicaciones dirigidas al público juvenil, Los Niños: revista de educación y recreo *ha surgido en 1870. La revista ilustrada y con una manifiesta intención pedagógica ha sido publicada y dirigida por D. Carlos Frontaura (1835-1910), siendo premiada en la Exposición de Viena en 1873. A partir de una investigación, que tuvo como fuente los ejemplares de Los Niños, tengo como objetivo presentar una descripción y un análisis cualitativo de algunos de los artículos, presentes en la referida publicación, dedicados a la geometría escolar. El autor, Eduardo Thuillier, sigue por una línea claramente apoyada en la enseñanza intuitiva, exponiendo los tópicos secuenciados en diversos números de la revista, a través de una historia ilustrada, en la cual los personajes son niños. Aunque la revista sea un agente educativo informal, este tema aporta gran interés para la Historia de la Matemática Escolar y para la Historia de la Educación, pelo propósito didáctico y pedagógico presente en los artículos de la sección "Geometría de los niños".*

Introducción

En la segunda mitad del siglo XVIII aparecen las revistas para niños, hay un crecimiento de este tipo de publicación en algunos países europeos.

La prensa infantil ha empezado en España con la publicación del periódico *La Gaceta de los niños* en 1798. En general, tenemos impresos que son dirigidos a un público lector infantil y/o juvenil con el objetivo de instruir y entretener sus lectores. Pero, "este producto estético pretende dirigirse en el siglo XIX y albores del siglo XX, a un receptor cuyas necesidades de

ISBN 978-84-945722-3-4

ocio y recreativa aún no están muy reconocidas" en España (López Romero & Borda Crespo, 2015, p. 1083).

Entre las publicaciones dirigidas al público juvenil, *Los Niños: revista de educación y recreo* ha surgido en 1870. La revista ilustrada y con una manifiesta intención pedagógica ha sido publicada y dirigida por D. Carlos Frontaura y Vázquez (1835-1910), siendo premiada en la Exposición de Viena en 1873.[29] En *Los Niños*, se utilizan "las primeras viñetas con gran expresividad gráfica vinculada para contar historias". (López Romero & Borda Crespo, 2015, p. 1083). Frontaura tuve por modelo el periódico parisino *Magasin d'Éducation et récréation* (1863).

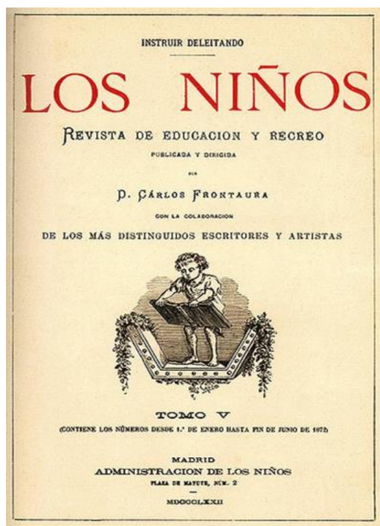


Figura 1 – Portada del Tomo V de "Los Niños" (1872)

Pilar (2005) apunta una escasez de libros para la infancia en la sociedad española en el siglo XIX, pero, según nuestro punto de vista, los periódicos destinados a los niños y adolescentes, de cierta forma, han intentado llenar este vacío.

[29]Carlos Frontaura nació en Madrid. "Abogado de profesión, fue un escritor polifacético, dramaturgo, novelista y periodista español. Ocupa un lugar notable como una de las figuras sobresalientes dentro del panorama literário del último tercio del siglo XIX, tanto por su labor periodística como literaria. Tempranamente comenzó a colaborar como redactor en algunos diarios como *La España*, *El Estado*, *El Gobierno* y *El Día.* Su implicación política se hizo patente desde sus escritos em algunos diarios, donde se mostro partidario de la Restauración. Carlos Frontaura tuvo una presencia activa en numerosos periódicos de la época". (Recuperado de http://gicesxix.uab.es/showAutor.php?idA=315).

Un análisis general apunta que *Los Niños* tenía una clara intención pedagógica, con lecciones moralizadoras. En su portada estaba impreso "instruir deleitando" – lo que describía muy bien la real intencionalidad del editor. Su finalidad era ofrecer una "buena educación religiosa, moral, científica, artística y literaria". Entre los colaboradores de la revista estaban "los más distinguidos escritores y artistas".

A partir de una investigación, que tuvo como fuentes los ejemplares de *Los Niños*, tengo como objetivo presentar una descripción y un análisis cualitativo de algunos de los artículos, presentes en la referida publicación, dedicados a la geometría escolar – los artículos de la sección "*Geometría de los niños*", de autoría de Eduardo Thuillier. Ha sido utilizado el método de análisis didáctico, que "tiene como propósito establecer los significados de los conceptos y aprehender la intencionalidad educativa del discurso de las matemáticas escolares". (Rico, 2013, p. 21).

Nuestro objetivo es traer más elementos para una discusión de algunos aspectos relacionados con la Historia de la Educación primaria en España, más específicamente, con la Historia de la Educación Matemática.

El período en que nuestro estudio se inserta estaba en vigor la reforma educativa de 1857 del Ministro de Fomento Claudio Moyano Samaniego – ley con "aspiraciones del sistema educativo liberal, que a la postre serviría para normalizar durante más de un siglo el ordenamiento general de la educación en España". (Garrido Palacios, 2014, p. 91). El estudio de la geometría estaba prescrito ya para la primera enseñanza superior.

El siglo XIX se describe como el siglo de la pedagogía escolar. A mediados del siglo XVIII comienzan a ser publicados libros de geometría propiamente escolares como los de Rosell (1784) o Hijosa (1784). (Sierra, Rico, Gómez, 1997).

Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) concebía el estudio de la geometría empezando por la geometría del plano, proponiendo el uso de material manipulativo, la observación era una prioridad, explicaciones y descripciones sencillas, y es así que Thuillier conduce los contenidos que incluye en los capítulos de su historia.

Como dice Chavannes (1807), Pestalozzi se vale, en su método, de una geometría sensible y palpable, que está acomodada a la capacidad y comprensión de los niños. Después del niño se familiarizar con las dos especies de extensión, se le enseña a conocer los cuerpos que reúnen tres dimensiones, sus denominaciones, sus propiedades.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para la instrucción intuitiva de la relación de las formas, Pestalozzi propone “un medio artificial para ejercitar la vista del niño en percibir las formas y en determinar las dimensiones de los objetos, que la simple intuición le echo conocer, y para agilitar su mano á delinearlas” (Chavannes, 1807, pp. 127-128). Por su vez, también en Thuillier hay la semilla lanzada por Comenius: ¿por qué no se aprende jugando?

La Geometría en *Los Niños: revista de educación y recreo*

Eduardo Thuillier empieza su cuento “Geometría de los niños” en la revista publicada en mayo de 1871 y escribe la última parte en la edición de junio de 1872 – al todo, treinta dos “capítulos”. En su historia, el protagonista:

> Carlitos es un amiguito que yo tengo. Niño de doce años, hijo de un hombre que cifra toda su dicha en instruir á sus hijos, es Cárlos un sabio pequeñito, un niño instruido como yo quisiera que fuerais todos, queridísimos lectores. (…)
> Mi querido amiguito es muy estudioso; no hay día que no sepa perfectamente todas sus lecciones; no hay noche que no estudie siquiera durante dos horas… (...)
> Cárlos quiere seguir la carrera de ciencias, pues dice que tiene vocación para la enseñanza, y quiere ser catedrático. De aquí viene que sus amigos y camaradas le llamen Cárlos el profesor, nombre que este admite gustoso, y que me parece querer justificar, puesto que no pierde ocasión de instruir á sus amigos…
> E Cárlos, a pedido de sus amigos, empieza a enseñarles geometría. (Thuillier, 1971).

En la historia, Carlitos será o maestro de sus amigos y enseña los conceptos de la Geometría utilizándose de materiales que están a su disposición, sean barras de yeso, madera; un ramo de un arbusto, para describir las líneas; una pelota, para hablar de la esfera; un pilón de azúcar, para ejemplificar lo que es un cono; un libro abierto para ejemplificar un ángulo diedro; papel recortado para representar un ángulo triedro y, en la ausencia de elementos concretos, él hace dibujos. Algunas veces, el protagonista hace dibujos en la tapa de la mesa. Muchas propiedades de polígonos, por ejemplo, comparecen en los diálogos de los personajes de la historia

El autor incorpora también en su narrativa los valores considerados importantes en aquella época en la sociedad española, siendo evidentes aspectos que se vuelven para la educación moral de los niños, con fuerte apelo para el compromiso con la escuela y los estudios, para la cooperación con los amigos y los colegas. Observase una intención de homogeneizar a la infancia en los valores, conductas y hábitos. Además esa formación moral se encuentra en otras secciones de la revista.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Hay una tentativa de diálogo con los lectores; en algunos momentos, el autor les llama a participar de la narrativa. Son desarrollados todos los principales contenidos elementales de la geometría plana y espacial. Las ilustraciones dan suporte para la comprensión de los conceptos y definiciones.

Un breve análisis

Para el análisis, tomase como referencia los principios del Análisis Didáctico.

Estructura conceptual: Thuillier incluye términos para hacer las definiciones y ninguna notación para puntos, rectas, etc.

Convenios: Algunos de los convenios presentes en la historia: - ángulo (*la abertura formada por dos líneas que se encuentran*); - triángulo rectángulo *(tiene un ángulo recto)*; - paralelogramo (*cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos e iguales);* - base de un polígono *(lado sobre que descansa);*- altura de un polígono *(perpendicular, bajada a la base desde el vértice a ella más distante*); - perímetro *(suma de* la medida de *los lados de un polígono*); - *polígono regular (el que tiene iguales sus ángulos y sus lados);* - arco *(porción cualquiera de la circunferencia)*; - círculo *(espacio comprendido dentro de la circunferencia).*

Resultados: Algunos de los resultados que se pueden encontrar en la narrativa: - *tres ángulos de un triángulo valen precisamente tanto como dos ángulos rectos;* - en los paralelogramos *sus diagonales los dividen en triángulos iguales; - el cuadrado y rombo* tienen sus *diagonales respectivamente perpendiculares en su punto medio*; - la suma de *los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen cuatro rectos*; - *la perpendicular al radio* de una circunferencia *en su extremo es tangente a la circunferencia*; - *el área de un trapecio es igual al producto de su altura por la mitad de la suma de las bases*; *es decir, de los lados paralelos.*

Sistemas de Representación:

Estas son representaciones de las notaciones simbólicas o gráficas/ilustraciones a través de las cuales el autor expresa los conceptos y procedimientos, características y propiedades más relevantes. Las representaciones encontradas son de los tipos verbales, numéricas y gráficas. Thuillier utiliza las expresiones verbales para exponer los conceptos y definiciones, como, por ejemplo:

ISBN 978-84-945722-3-4

“*Polígono regular es el que tiene iguales sus ángulos y sus lados, llamándose irregular el que carezca de alguna de estas dos condiciones*”.
“*... la suma de todos los ángulos de un polígono es igual a tantas veces dos rectos como lados tenga menos dos*”.

Para las representaciones gráficas/geométricas, considerase que el autor utiliza figuras, algunas pueden ser caracterizadas como formales y otras informales – las últimas, cuándo lo hace a partir de objetos comunes o tomados de la naturaleza para ejemplificar una situación o para aclarar una afirmación o definición (figuras 2, 3, 4, 5).

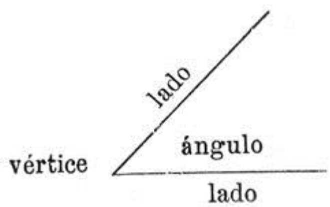


Figura 2 –Ángulo

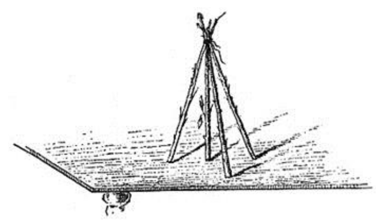


Figura 3 – Cuatro varillas del jardín para ejemplificar que la perpendicular es la más corta

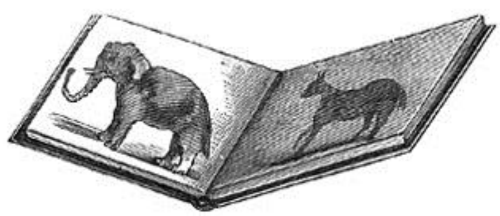


Figura 4 – Ejemplificando un ángulo diedro

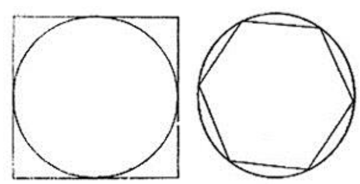


Figura 5 – Circunferencias inscrita y circunscrita

La forma numérica se expresa en determinados cálculos, sin un contexto particular que no sea estrictamente aritmético, como el área de un triángulo que tiene “27 metros de base por 22 de altura: tenemos que multiplicar 27, longitud de la base, por 11, mitad de la altura: 27 x 11” – o “2 rectos + 2 rectos = 4 rectos”.

Fenomenología:

A través del análisis fenomenológico se describen cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos (Puig, 1997). Es verificar la construcción de imágenes mentales – los fenómenos del mundo real que necesitan ser organizados y que son interpretados a través de conceptos de la geometría. En “Geometría para los Niños” es evidenciado el aspecto educativo, tomando los

ISBN 978-84-945722-3-4

objetos concretos para que se pueda introducir los conceptos y definiciones geométricas. En general, el autor inicia el proceso por los conceptos y no por las aplicaciones.

> "Una barra redonda os presenta un perfecto cilindro. (…) Un rodillo, un lápiz ordinario y otros muchísimos cuerpos, tienen una figura cilíndrica"

- Situación laboral/técnica:

> "Suponeos ingenieros; arquitectos, directores de una obra en construcción y en la necesidad de hacer un muro ó cosa cualquiera de piedra, sabéis el tamaño del muro, es decir, su ancho, su largo y s grueso, presentándose entonces una cuestión que pude expresarse en estos términos: Se desea saber la piedra que se necesita para construir el muro, pared ó lo que sea."

- Situación personal/fenómeno natural:

> Para circunferencias concéntricas, "Cuando estéis a la orilla de un río o lago, al borde de un estanque, o cerca de cualquier sitio en que haya agua tranquila, tirada una piedra al agua; veréis dibujarse en la superficie de esta un número considerable de circunferencias, que tendrán todas por centro el punto en que la piedra desapareció de nuestra vista."

En los capítulos de la historia hay fenómenos o situaciones: geométricos, de medida, aritméticos. En ciertas circunstancias se muestra la funcionalidad de un determinado objeto. Algunas veces, Thuillier utiliza objetos naturales añadidos a un contexto cultural y social. La imagen mental de un instrumento musical, por ejemplo: "Ese es un triángulo, exclamó Esteban, porque tiene la misma forma que uno que me compró mi papá en la última feria, y que, me sirve para formar la orquesta acompañado **de** mis hermanitos".

A modo de cierre

Ese estudio ha posibilitado un acercamiento de las preocupaciones con las instrucciones infantil y juvenil, en la segunda mitad del siglo XIX, en España, reflejadas en la publicación de la Revista *Los Niños*.

El estilo innovador de Thuillier muestra un conocimiento de los principios propuestos por Pestalozzi, que tienen en cuenta la psicología del niño. Los capítulos de la historia "Geometría de los Niños" transcurren en un contexto claramente basado en las prerrogativas de la enseñanza intuitiva, cuando se plantea una nueva situación, un nuevo concepto, habiendo representaciones con utilización de dibujos, materiales concretos u objetos cercanos en el escenario presentado. Evidenciase el objetivo del autor: que los niños lectores se pongan en el lugar de los personajes, como ocurre con otros cuentos infantiles. La perspectiva visible es la construcción del conocimiento de los saberes geométricos.

Según nuestro punto de vista, Thuillier conduce su historia teniendo en mente las dificultades que la geometría ofrece como un saber en la escuela. Él hace hincapié en la actividad de sus personajes, destacándose siempre la observación y experimentación de los niños, el despertar de la curiosidad. Su estilo denota una gran preocupación con los saberes geométricos elementares, los cuales procura concretizar en su manera de presentar los conceptos y definiciones.

El autor también busca motivar a sus lectores. Un ejemplo es cuando el protagonista de la historia encarga a sus amigos por la construcción de *las figuritas que podían representar ya cuadriláteros, ya círculos, en fin, cualquier cosa de las que en la cátedra se habían visto*; las figuras podrían ser de papel, cartón o madera. Esta propuesta, según el autor, tenía un fin muy importante: conseguir de los niños *que se fijasen perfectamente en las diferentes figuras que conocían para apreciar mejor sus conocimientos*. Esto podría ser una indicación metodológica para los padres y maestros.

Hay una graduación de las dificultades, partiendo de los elementos más sencillos para los más complejos, con la enseñanza intuitiva de la geometría, sin eliminar los aspectos formales de la teoría con una sistematización. Los objetos y dibujos utilizados tendrían un reflejo en la mente de los niños que podrían llegar a una abstracción.

Las imágenes mentales que se pueden formar de los objetos o sus representaciones son mucho explotadas en la historia. Los niños lectores podrían siempre acordarse de los tópicos presentados porque los asociarían a los episodios de la trama.

La historia, "Geometría de los Niños", serviría también a los maestros, para cambiar su práctica en el aula, haciendo así una ruptura con los modelos tradicionales de enseñanza y aprendizaje. Por la historia, habría una centralidad en la actividad del alumno y el maestro actuaría como un orientador, estimulando la participación y la actividad indagadora de los niños. Aunque la revista *Los niños* sea un agente educativo informal, el tema tratado aporta gran interés para la Historia de la Matemática Escolar y para la Historia de la Educación, pelo propósito didáctico y pedagógico, con una propuesta de enseñanza intuitiva, presente en los artículos de la sección "Geometría de los niños".

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Chavannes, D. A. (1807). *Exposición del método elemental de Henrique Pestalozzi*. Traducción Don Eugenio de Luque. Madrid: Imprenta de Goméz Fuentenebro.

Garrido Palacios, M. *Historia de la educación en España (1857-1975) una visión hasta lo local*. Contraluz (2), 89-146.

López Romero, L. y Borda Crespo, I. (2015). La prensa infantil y juvenil como fenómeno educativo en España. *Estudios sobre el Mensaje Periódico,* v. 21, n.2, 1081-1097.

Pilar, M. F. (2005). Para que lean los niños: II República y promoción de la literatura infantil. En Desvois, Jean-Michel. *Prensa, impresos, lectura en el mundo hispánico contemporáneo:* homenaje a Jean-François Botrel. pp. 251-272. Pessac: Presses Universitaires de Bordeaux/ De las Voces.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, Luis (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. pp. 61-94. Barcelona: Horsor.

Rico Romero, L. (2013). El método del Análisis Didactico. *Unión,* n.33, 11-27.

Sierra Vázquez, M.; Rico Romero, L.; Gómez Alfonso, B. El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Escolano Benito, A. (coord.). *Historia ilustrada del libro escolar en España:* del Antiguo Régimen a la Segunda República. pp. 373-398. Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Thuillier, E. (1871-1872). Geometría de los niños. *Los Niños:* revista de educación y recreo, Madrid. Tomos III-VI.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-852

UMA ATIVIDADE PRÁTICA DE FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS DE PLATÃO

Samilly Alexandre de Souza– Kátia Maria de Medeiros
samilly.alexandre@gmail.com – katiamedeirosuepb@gmail.com
Universidade Estadual da Paraíba-Brasil

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciário (16 a 18 anos)
Palabras clave: Ensino-Aprendizagem de Geometria. Formulação e Resolução de Problemas Geométricos. Materiais Manipuláveis.

Resumo

A Geometria é uma área muito importante do conhecimento matemático, mas seu ensino-aprendizagem, quando é realizado, na maioria das escolas no Brasil, ainda é fragilizado e os alunos apresentam dificuldades muito grandes em compreender esse conteúdo. Um modo que encontramos para possibilitar mudanças na atual realidade é propor o uso de atividades práticas com materiais manipuláveis com a formulação e resolução de problemas geométricos pelos alunos. Nesta pesquisa, buscamos analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio numa escola pública de Campina Grande-PB, Brasil, com base em atividades com os Sólidos de Platão. Focamos num Grupo. Os resultados indicaram que os alunos do Grupo formularam problemas geométricos com dados numéricos, isto é, um problema fechado ou exercício com uma aparente ligação entre o contexto, a realidade do cotidiano e a linguagem Matemática utilizada. O problema formulado é geométrico, por que envolve o conceito de cubo ou hexaedro, um dos Sólidos de Platão, porém não apresenta uma clareza nas últimas informações, uma vez que a aluna utiliza elementos do quadrado, ao invés do cubo na resolução, como lado, ao invés de aresta. Tais resultados sugerem limitações no conhecimento geométrico dos alunos.

Introdução

A Geometria é uma área importante da Matemática, pois ela exige do aluno uma maneira diferente de raciocinar.

Procuramos atualmente, novas propostas metodológicas que facilitem o ensino e a prática dos conteúdos disciplinares na Matemática, quais instrumentos devem ser utilizados para que os alunos sintam-se motivados a aprender e, quanto aos professores, como lecionar de maneira adequada à realidade dos alunos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Nos documentos oficiais do Brasil, como os PCN (Brasil, 1998, 2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio OCEM (Brasil, 2006) é dada uma ênfase maior no trabalho de Resolução de Problemas matemáticos. Essa metodologia, embora não seja tão efetiva nas aulas de Matemática, é conhecida por muitos professores. Já a formulação de Problemas ainda é uma metodologia bastante nova no Brasil, mas que vem recebendo maior atenção no currículo escolar de vários países para que seja dada aos alunos a oportunidade de criarem seus próprios problemas a partir de situações que lhes sejam dadas em um contexto matemático.

Um problema, segundo Onuchic (1999) problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver. Na formulação de problemas, por sua vez, de acordo com Medeiros e Santos (2007), o aluno irá formular o seu próprio problema, se tornará, dese modo, um produtor de textos. Partindo desse pressuposto, apresentamos neste trabalho, um recorte de nossa pesquisa de mestrado, na qual tivemos como objetivo geral analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Campina Grande-PB, com base em atividades com materiais manipuláveis.

A Geometria e seu ensino-aprendizagem no Brasil

O estudo dos conceitos geométricos constitui parte importante do ensino-aprendizagem de Matemática, pois propicia aos alunos desenvolver pensamentos que permitem compreender e descrever o mundo onde vivem e facilitam a compreensão de questões tanto da Matemática como de outras áreas do conhecimento (Brasil, 1998). Além de ser um campo que permite trabalhar diversas situações problemas que possivelmente envolvam os alunos, tornando o estudo interessante. Se bem trabalhada, estimula os alunos a observar e explorar o espaço a sua volta, perceber semelhanças e diferenças entre figuras, observar padrões, proporciona o trabalho com construções de objetos tridimensionais, além de servir como uma ferramenta importante para outras áreas do conhecimento. Por isso, ela não só deve fazer parte dos currículos das escolas, mas ser trabalhada efetivamente através de metodologias que promovam a aprendizagem geométrica. Contudo, algumas pesquisas Lorenzato (1995) e Pavanello (1993) tem mostrado que o ensino de conceitos geométricos ainda é ausente nas salas de aula da Educação Básica no Brasil e, quando é oferecido, geralmente é de forma mecânica através da apresentação de fórmulas e aplicação das mesmas para resolver exercícios, tornando-se desligado da realidade. Tal realidade nas aulas de Matemática ainda persiste nos días de hoje.

A formulação e resolução de problemas geométricos e os sólidos geométricos

O problema é o ponto de partida para que em seguida, sejam introduzidos os conceitos e, mesmo em meio a algumas dificuldades, ele possa facilitar a aprendizagem Matemática dos alunos. Podemos destacar as concepções de alguns autores brasileiros sobre problema. Segundo Onuchic (1999) problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver. Para Polya (1995) a resolução de problemas é a espinha dorsal da Matemática.

Por sua vez, a formulação de problemas, segundo Brown e Walter (2005), pode ocorrer a partir de muitos recursos. Oliveira e Gazire (2012) apresentam uma pesquisa na qual os Sólidos Geométricos são utilizados para o estudo da geometría plana. Análogamente poderíamos também formular e resolver um problema geométrico a partir destes sólidos, o que pode contribuir para o aluno perceber aspectos destes processos metacognitivos envolvidos nestas atividades, que antes não tinha compreenssão.

Escolhas metodológicas

Optamos inicialmente, por uma pesquisa de natureza qualitativa que, de acordo com Bogdan & Biklen (1994) "(...) A fonte direta de dados é o ambiente natural, o investigador torna-se o instrumento principal de recolha de dados (p. 16). A base para a aquisição e análise dos dados dessa pesquisa se deu por meio de um estudo de caso interpretativo que, segundo Ponte (2006), esse tipo de estudo busca compreender detalhadamente o "como" e os "porquês" do acontecimento de determinado fato.

A coleta de dados foi realizada durante quatro meses, de Junho a Setembro do ano letivo 2015. No decorrer da coleta dos dados, interessava-nos as características dos problemas formulados e resolvidos pelos alunos da turma a partir das atividades de formulação e resolução de problemas geométricos por meio de tarefas que envolviam materiais manipuláveis, os Sólidos de Platão em Acrílico. Nesse sentido, nos preocupamos em utilizar variados instrumentos de coleta de dados, como *a*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

gravação em vídeo e áudio de todos os encontros realizados na turma que foram um total de oito, *as notas de campo* da pesquisadora a partir da observação participante, *o registro dos alunos* realizado durante a realização das cinco tarefas que propomos e *a entrevista semiestruturada* tanto com o professor da turma como com uma aluna de um dos grupos que mais se destacou ao longo das atividades e quanto à formulação e resolução de problemas geométricos.

Observamos, inicialmente, com mais atenção, dois grupos com quatro alunos cada, os quais nomeamos de G2 e G5. Esses dois grupos possuíam alunos comunicativos, com rendimentos variados e tinham pelo menos um aluno que mais se destacava entre os demais. Porém, para a análise dos dados, optamos por escolher apenas uma aluna que, dentre todos os outros alunos, não faltou nenhuma das atividades, prestava bastante atenção, tirava dúvidas, buscava interagir com seus colegas de grupo mesmo tendo que desenvolver as atividades praticamente só. Essa aluna, como já adiantamos, chamamos pelo pseudônimo de Samara..

Enfatizamos, em particular, tarefas com formulação e resolução de problemas geométricos que envolvem a utilização de materiais manipulativos como Sólidos Geométricos em Acrílico e em cartolina polígonos regulares em cartolina, (ver Anexos). Tal importância se dá ao fato de que esses materiais permitem aos alunos uma manipulação e visualização de características como os elementos básicos dos Poliedros, o que favorece a uma análise e surgimento de ideias criativas.

Outro fator a ser considerado é que ainda existem poucas pesquisas com formulação e resolução de problemas nas aulas de Matemática no Brasil. Por meio de atividades diferenciadas como esta, saímos um pouco da rotina mecânica de somente propor que os alunos resolvam exercícios nas aulas de Matemática e aos alunos é dada a oportunidade de demonstrar a compreensão de conceitos matemáticos no ato da formulação de problemas.

Foram desenvolvidas cinco tarefas de forma sequencial em 10 horas/aula com atividades aplicadas de forma hierárquica para que os alunos pudessem identificar os sólidos geométricos e distingui-los em duas classes, os Poliedros e os Corpos Redondos e, em seguida, analisar as características dos Poliedros. Essas atividades, adaptadas de Oliveira e Gazire (2012), serviram como revisão para os alunos que já haviam estudado esse assunto e, ao mesmo tempo, serviu de aprendizagem para a maioria, que mesmo no 3º Ano do Ensino Médio, ainda não havia estudado sobre os sólidos geométricos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Em seguida, foram realizadas mais três tarefas com atividades introdutórias às formulações e resoluções dos problemas geométricos, com o objetivo de fornecer uma melhor preparação para o surgimento de ideias dos alunos. Todas as atividades foram realizadas em grupos com quatro alunos e alguns em trios, apresentamos algumas atividades de alguns grupos, mas destacamos as formulações e resoluções dos problemas geométricos apresentados por Samara, aluna do Grupo 02, que, em meio às suas dificuldades, mais se destacou por ter participado ativamente de todas as atividades que foram propostas e que apresentou um desenvolvimento considerado satisfatório ao longo das atividades, formulando e resolvendo melhores problemas geométricos em relação aos demais alunos da turma.

Análise dos dados e suas categorias

Para analisar os problemas que foram formulados por esse grupo e suas respectivas respostas, procuramos observar a quantidade, a qualidade e a complexidade deles em relação à turma como um todo.

Ao darmos continuidade em nossa intervenção, percebemos a importância do estabelecimento de uma análise qualitativa para interpretar a estrutura dos problemas formulados e suas respectivas resoluções. Estabelecemos uma categoria de análise a Posteriori para os problemas formulados pelos alunos que foi *Problemas não geométricos* e *Problemas geométricos*. Os *problemas não geométricos*, caracterizamos por questões em forma de texto que não podem ser considerados problemas ou que não são resolvidos por mecanismos matemáticos. E os *problemas geométricos*, caracterizamos como questões que utilizem em seu contexto objetos e propriedades do espaço geométrico. Os problemas geométricos foram analisados e divididos em *Problemas geométricos com dados numéricos* e *Problemas geométricos sem dados numéricos*, ambos respeitam as condições de um problema geométrico e podem aparentemente serem resolvidos.

Porém, *Problemas geométricos com dados numéricos* foram analisados em relação à estrutura do problema, isto é, se era um problema fechado ou exercício ou um problema aberto (Medeiros e Santos, 2007) uma aparente ligação entre o contexto, a realidade do cotidiano e a linguagem Matemática utilizada. Já os *Problemas geométricos sem dados numéricos* foram analisados a partir das informações específicas do problema com a utilização ou não dos dados e da incógnita para a solução.

ISBN 978-84-945722-3-4

Resultados e discussões

Apresentaremos o resultado de um dos grupos, o Grupo 02, referente a quarta e penúltima atividade que tinha por título: Construindo representações dos Poliedros de Platão e formulando e resolvendo problemas geométricos, cujo objetivo principal era propor que eles construíssem as representações dos Poliedros de Platão a partir de suas planificações e estimulassem a visualização geométrica para favorecer o surgimento de ideias quando chegasse o momento de formular e resolver os problemas geométricos. Inicialmente, levamos os Sólidos de Platão em Acrílico do Laboratório de Matemática da UEPB, Campus de Campina Grande, e utilizamos os slides para lhes mostrar a associação que Platão fez entre esses sólidos e os elementos da natureza, relembramos os elementos básicos dos Poliedros e, em seguida, propomos que os alunos construíssem seus sólidos a partir da planificação.

Ao levarmos para os alunos os moldes de cada um dos Sólidos de Platão para que eles pudessem construí-los, buscamos privilegiar o desenvolvimento da visualização geométrica que segundo Kaleff (2003), baseada no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento em Geometria, a visualização e a organização informal das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento de um conceito. Antes de formularem seus problemas, os alunos tiveram a oportunidade de construir esses sólidos ricos de características geométricas e realizar cinco atividades baseados neles para que pudessem revisar ou vivenciar de maneira dinâmica, a partir da manipulação dos Poliedros de Platão, as principais características desses sólidos e, com isso, pudessem ter um suporte prévio para suas formulações e resoluções de problemas.

A penúltima atividade dessa quarta tarefa se referia à formulação e resolução dos problemas, então pedimos aos alunos que utilizassem o potencial criativo que há em cada um deles para explorar os Sólidos de Platão que construíram e assim formularem bons problemas matemáticos. Para motivá-los, demos a dica: formulem um bom problema como se vocês fossem desafiar outro grupo de colegas para resolvê-lo.

Samara rabisca algumas possibilidades de dados e resolução. Repete oralmente várias vezes sobre o que estava pensando, muda a estratégia que seria o cálculo de área para o cálculo do volume, pois lembrou que sabia como calcular o volume de um cubo. Nesse caso, a aluna realizou o processo que Brown e Walter (2005)

ISBN 978-84-945722-3-4

denomina de “What if?” ou “What-if-not?” e que consiste em examinar as condições do problema e alterar livremente com base em seus conhecimentos. Como a aluna conhecia a fórmula do cálculo do volume do cubo, ela criou apenas um problema que o envolvesse.

Constatamos que Samara se destacou em relação a seu grupo, pois ela acabava realizando as atividades sozinha. Criou um problema geométrico com dados numéricos que envolvem um projeto interdisciplinar entre duas disciplinas para a produção de um perfume, Química e Matemática. Além disso, utilizou o conceito matemático de cálculo de volume que, neste caso seria o do Hexaedro (Cubo). O problema formulado é geométrico, por que envolve o conceito de volume, porém não apresenta uma clareza nas últimas informações, uma vez que o a aluna utiliza elementos do quadrado, ao invés do cubo na resolução, como lado, ao invés de aresta.

Entendemos que Samara utilizou a informação “para a produção de 1L de perfume era necessário um cubo de essência” sem relevância para a resolução do problema, pois o que é pedido mesmo no problema em nada se relaciona com essa informação. Além do mais, ela poderia ter formulado esse problema com mais clareza de informação e também de dados.

Na resolução desse problema, em um dos diálogos, ela deixa claro que sabe que o cubo apresenta três dimensões, porém, faz o esboço de um quadrado e representa seus quatros lados pelo valor de 6 cm e o substitui na fórmula do cálculo do volume. Um detalhe importante é que ela utiliza a escala de centímetros no problema, mas na solução aparece mL sem que a aluna tenha realizado cálculos de convenção de cm para mL. Ela finaliza justificando por escrito o que fez como forma de provar que sua solução está correta e não apresentou outra estratégia em sua resolução.

Atribuímos a utilização de apenas uma estratégia na resolução ao fato de os alunos não estarem acostumados a esse tipo de atividade e, por isso, consideram-na difícil. Apesar de termos insistido, a aluna não conseguiu resolver os problemas utilizando estratégias diferentes.

Conclusões

A aprendizagem Matemática dos alunos deve ir além de tarefas rotineiras como meras resoluções de exercícios e ser enriquecida por meio de tarefas e atividades desafiadoras, como a Formulação e Resolução de Problemas. Um bom ensino de Matemática deve

ISBN 978-84-945722-3-4

propiciar aos alunos a exploração do seu raciocínio, o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas e o potencial criativo dos alunos.

Apesar de no Brasil e, principalmente na Paraíba, a literatura que trata da formulação e resolução de problemas ainda ser praticamente inexistente e, pelo fato de termos utilizado um conteúdo de Geometria, especificamente os Poliedros de Platão que também é raro ser ensinado nas escolas públicas, acreditamos que à medida que iam sendo estimulados, os alunos iriam produzindo ideias para formularem seus próprios problemas. Esse estímulo partiu das atividades que foram realizadas como o uso de materiais manipuláveis como os Sólidos Geométricos em Acrílico e a própria construção dos Sólidos de Platão pelos alunos. Mas, pudemos perceber que além do estímulo, era necessária uma boa base matemática e, principalmente em Geometria, pois os alunos da turma e, em especial Samara, só formularam problemas os quais, soubessem antecipadamente responder.

Ao longo das atividades Samara apresentou algumas dificuldades em relação à Geometria. Em nossa pesquisa, pudemos observar que, ao propor aos alunos a formulação de problemas geométricos baseados nas atividades, eles sentiram-se menos intimidados pela Matemática e, apesar de considerarem essa atividade uma tarefa difícil, os alunos alegaram que a Matemática não é uma disciplina apenas de números e contas. Eles perceberam que as formas geométricas estão representadas em vários lugares do cotidiano, desde a estrutura de uma sala de aula, até um aparelho eletrônico, como o Tablet. Os alunos estudaram e/ou relembraram conceitos e conteúdos geométricos por meio das atividades e formularam e resolveram problemas relacionados à Geometria, percebendo também que a Matemática está intimamente ligada à Língua Portuguesa com a criação de textos. Acreditamos que a capacidade de formulação e resolução de problemas é uma rica potencialidade que pode e deve ser explorada nas aulas de Matemática e, em especial, de Geometria.

Referências bibliográficas

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos.* Porto: Porto Editora.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF.

ISBN 978-84-945722-3-4

Brasil. (2006). Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB).Departamento de Políticas de Ensino Médio. Orientações Curriculares do Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB.

Brown, S.; Walter, M. (2005). *The art of problem posing.* (3ª ed.). New York: Routledge.

Kaleff, A. M.(2003). *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra cabeças e outros materiais concreto***s.** Niterói: EDUFF.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar geometria? Educação Matemática em Revista 4, 3-13.

Medeiros, K. M.; Santos, A.J.B. (2007). Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos. Zetetiké, 15, 87-118.

Oliveira, M. C.; Gazire, E. S. (2012). *Ressignificando a Geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de van Hiele.* http://www.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf?PHPSESSID=fdb6d12870c8aaf4688b74f0ad0dd734. Consultado 22/09/2015.

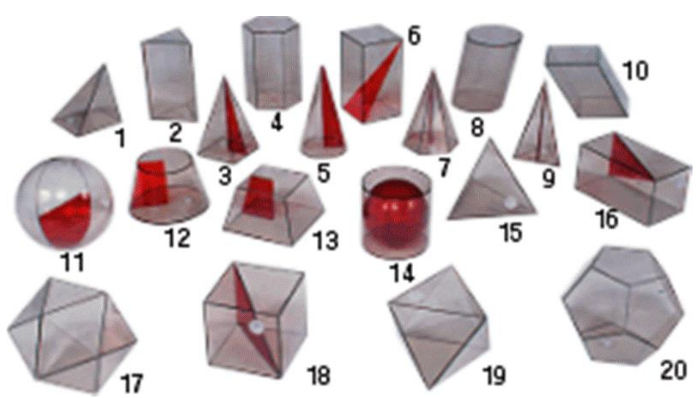
Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. En: M. A. V. Bicudo. (Eds.). Pesquisa em educação Matemática, Cap. 12 p. 199-218. São Paulo: Editora da UNESP.

Pavanello, R.M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetiké. Campinas, SP, p.7-17.

Polya, G. (1997). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciências.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação Matemática. (pp. 105-132). BOLEMA, 25.

Figura 1: Sólidos geométricos em Acrílico do Laboratório de Ensino de Matemática da UEPB



ISBN 978-84-945722-3-4

Fonte: Registro nosso

Figura 010: Alunos manipulando os sólidos e preenchendo a Ficha de Registro

Fonte: nossos registros

Figura 011: Alunos agrupando os sólidos geométricos.

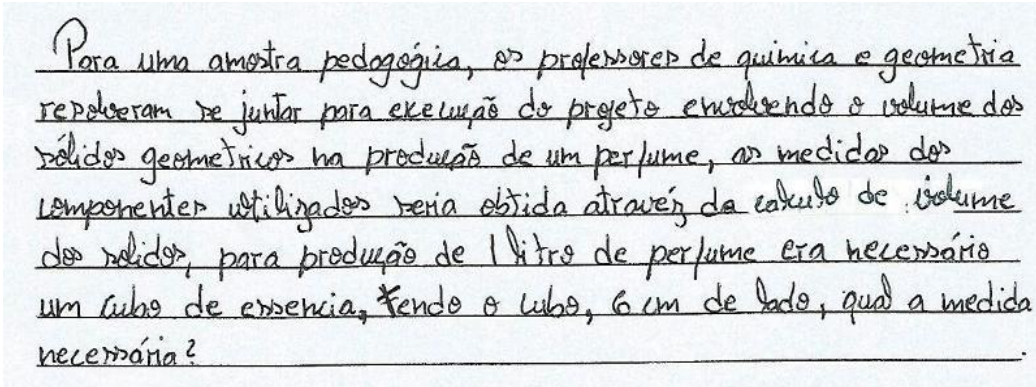
ISBN 978-84-945722-3-4

Fonte: nossos registros

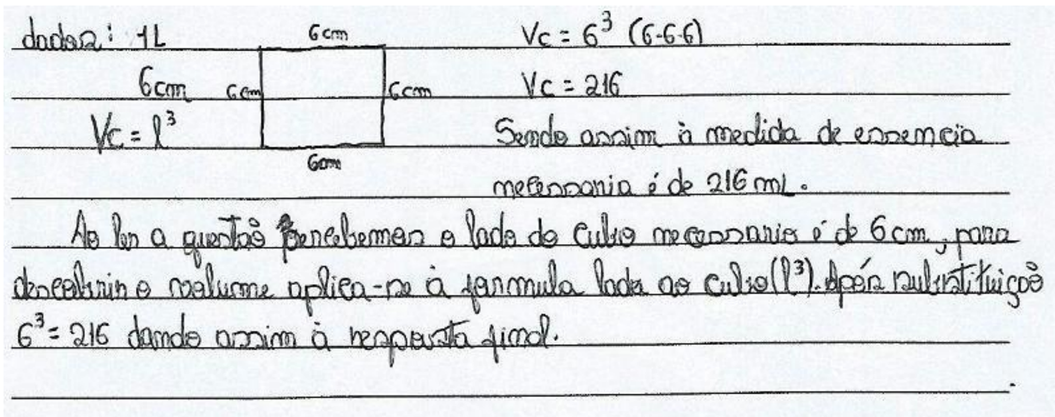
Figura 03: Alunas do Grupo 04 construindo os Poliedros de Platão

Figura 04: Formulação e resolução do problema referente à quarta atividade

ISBN 978-84-945722-3-4



Para uma amostra pedagógica, os professores de química e geometria resolveram se juntar para execução do projeto envolvendo o volume dos sólidos geométricos na produção de um perfume, as medidas dos componentes utilizados seria obtida através do cálculo de volume dos sólidos, para produção de 1 litro de perfume era necessário um cubo de essencia, tendo o cubo, 6 cm de lado, qual a medida necessária?



dados: 1L

6cm

$Vc = l^3$

$Vc = 6^3$ (6·6·6)

$Vc = 216$

Sendo assim à medida de essencia necessaria é de 216 mL.

Ao ler a questão percebemos o lado do cubo necessario é de 6 cm, para descobrir o volume aplica-se à formula lado ao cubo (l^3). Após substituição $6^3 = 216$ dando assim à resposta final.

Fonte: Registro da aluna

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-853

O ESTUDO DE CASO ROBERTO: EXPLORANDO SIGNIFICADOS SOBRE CÁLCULO DE VOLUMES POR MEIO DE FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR FUTUROS PROFESSORES

Kátia Maria de Medeiros – Janaína Cardoso da Silva
katiamedeirosuepb@gmal.com – janainacardoso70@gmail.com
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)-Secretaria de Educação do Estado da Paraíba-SEE-PB-Brasil

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Significados, Cálculo de Volumes, Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos, Geogebra 3D.

Resumo

Este trabalho tem por Objetivo Geral analisar como o futuro professor de Matemática formula e resolve problemas matemáticos com o conteúdo Cálculo de Volumes a partir do aplicativo Geogebra 3D, explorando os significados formal e referencial. A pesquisa, um estudo de caso, foi desenvolvida no Laboratório de Informática do Instituto Federal da Paraíba, Campus Campina Grande, Brasil, com futuros profesores de Matemática. Os dados foram coletados por meio da observação participante, entrevista semi-estruturada e registros das formulações e resoluções de problemas e das reflexões sobre as tarefas. Nesta Comunicação Breve focaremos sobre o Estudo de Caso Roberto. As formulações e resoluções de problemas envolveram os sólidos geométricos: cilindro, esfera, cone e paraboloide. Neste trabalho focaremos sobre as formulações e resoluções referentes ao cilindro e à esfera. Os resultados apontam que o futuro profesor, nestas sessões, buscou atribuir o aspecto semântico ao problema, bem como o aspecto sintático com o uso da fórmula, para sua segunda resolução de cada problema. Ao refletir sobre suas formulações e resoluções descreve seu conhecimento sobre o volume dos sólidos e intercala suas ideias entre os aspectos semânticos e sintáticos de cada problema formulado e resolvido. Portanto, envolvendo os significados formal e referencial destes conteúdos matemáticos.

Introdução

Tendo em vista a pouca significância que a disciplina de Cálculo desenvolve nos alunos, durante o seu curso, vinculada à utilização de uma metodologia fechada a discussões, percebemos a importância de buscar práticas auxiliares que possibilitem, em paralelo à tradicional, instigar uma nova visão para tal disciplina. Neste sentido, esta pesquisa teve como Questão Norteadora: *Como Formular e Resolver Problemas Matemáticos com o*

ISBN 978-84-945722-3-4

conteúdo Cálculo de Volumes a partir do aplicativo Geogebra 3D (com o intuito de explorar os significados formal e referencial) contribuí para a compreensão semântica deste conteúdo por parte do futuro professor de Matemática? Neste sentido, o *Objetivo Geral* foi Analisar como o futuro professor de Matemática formula e resolve problemas matemáticos com o conteúdo Cálculo de volumes a partir do aplicativo Geogebra 3D, explorando os significados formal e referencial.

Roberto é um futuro professor de Matemática com 20 anos. Possui uma personalidade segura, aparentemente calmo e com um discurso claro e direto. No decorrer das observações, revela sua atenção e cuidado com as atividades, muito organizado e preocupado com suas estratégias de resolução. Aceita desafios para se auto desafiar e testar seus limites e conhecimentos. Gosta de curso de Licenciatura em Matemática, no qual se encontra no quarto período. No entanto, inicialmente, queria cursar Engenharia Elétrica, desistindo da ideia no segundo período do curso. Afirma sempre ter se dado muito bem com as disciplinas da área de exatas na sua Educação Básica, mas não se imaginava como um professor, "*eu olhava os professores, achava massa, mas nunca tive aquela vontade de ser um*", afirma Roberto. Ao aceitar para si que estava no curso que aprendeu a gostar, faz com muita vontade e dedicação.

Ensino do cálculo voltado para o curso de licenciatura em matemática

Os alunos que ingressam na Universidade, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, encaram diversas disciplinas de cunho específico, pedagógico e de Educação Matemática, porém, não se encontram totalmente preparados para se defrontar com tais disciplinas. Em primeiro momento, com dificuldades nas leituras e depois, na pouca, ou nenhuma compreensão nas disciplinas de Cálculo.

A necessidade de buscar novas metodologias auxiliares à tradicional, ajuda na adequação da realidade e motiva os alunos para um ensino mais compreensível, obtido, de forma óbvia numa melhoria na aprendizagem e, por isso, tem consequências positivas no Ensino Superior, pois os alunos só começam a ver teorias axiomática- dedutivas apenas nos cursos universitários, principalmente nos cursos de Matemática (Barufi, 2002). Tal deficiência didática na aprendizagem reflete-se na grande dificuldade que os futuros professores

ISBN 978-84-945722-3-4

apresentam nos cursos de Cálculo, isto por que estes tem o intuito de apresentar uma teoria lógico-formal dedutiva desde o seu início até o fim.

Diante de tamanha dificuldade na compreensão e na aprendizagem, os alunos sentem-se desmotivados e seus professores, em sua maioria, não os motivam, apenas mantém um curso limitado, restringindo-o à memorização de técnicas, e deixa que eles próprios descubram o significado dos conceitos e da utilização das técnicas repassadas na disciplina de Cálculo.

Contudo, Barufi (2002) afirma que, para resolver problemas é necessário ter ideias e conhecer o verdadeiro significado das ferramentas disponíveis. Tendo em vista que outras disciplinas e profissionais necessitam do Cálculo para a essência do seu trabalho, este poderia ser um dos principais motivos para que houvesse uma interação interdisciplinar, na qual explora o máximo de riqueza e importância desta disciplina. Desse modo, os alunos podem conseguir enxergar o significado do conteúdo, que poderá ser desenvolvido em sua totalidade, estabelecendo relações com o conhecimento adquirido.

Aplicativos auxiliares à compreensão do cálculo, o geogebra 3D e as formulações e resoluções de problemas

Os aplicativos tecnológicos, atualmente, tem sido bastante úteis em diversos contextos do cotidiano, alguns destes são vistos nas salas de aula, e mesmos nas mãos dos alunos, em na forma de aparelhos portáteis. Logo, a tecnologia adentrou nossas vidas, de maneira a termos que nos acostumarmos com algumas mudanças dentro e fora do universo escolar.

Por sua vez, o GeoGebra é um aplicativo matemático que junta Geometria, Álgebra e Cálculo. O Instituto Geogebra, em Portugal, permite mostrar algumas aplicações do Geogebra que vão além da geometria plana, extraindo o máximo da pontecialidade que este aplicativo nos permite no processo de ensino/aprendizagem, despertando, segundo as pesquisas feitas pelo Instituto, mais interesse nas comunidades que se preocupam com o ensino e as pesquisas matemáticas.

O Geogebra 3D é, além de um aplicativo de geometria, algo que permite a transparência de implementação de situações geométricas que unem figuras á representação do plano, modelos numéricos, no qual, de acordo com Blossier e Richard (2011), possibilitam uma viagem algébrica para o cálculo formal e a representação dinâmica no espaço.

Com o uso dos aplicativos podemos adentrar no mundo dos modelos matemáticos necessários ao rigor matemático, logo, observamos que tal aplicativo permite esta interação

ISBN 978-84-945722-3-4

com o indivíduo em situações didáticas ou em atividades com a metodologia Resolução de Problemas, através de formulações feitas com algum tema ou conteúdo trabalhado.

O trabalho com um aplicativo em sala de aula requer um planejamento prévio, um bom conhecimento sobre o que será estudado e, segundo Blossier e Richard (2011), ter interações a priori com os alunos, as quais se iniciam com uma boa relação professor-aluno. Desta forma, o conhecimento não se torna inato e permite que os alunos analisem, argumentem e comuniquem suas ideias, relacionando-as com os conteúdos matemáticos, envolvendo quantidade, variações e relações, além de espaço e formas.

As formulações e resoluções dos problemas matemáticos podem ser obtidas por diversos meios (Brown e Walter, 2005) e estimuladas para que seja dada ênfase ao conteúdo requerido em sala. Quando utilizamos o GeoGebra para estas formulações e resoluções de problemas, de acordo com Nóbriga e Araújo (2010), pode ser com formas geométricas, aritméticas, ou mesmo de uma figura que retrate a realidade, o que permite explorar não apenas um único conteúdo, mas um vasto conhecimento sobre conteúdos intercalados. Este fato ainda permite aos alunos uma reflexão sobre o que é feito e, ao professor, a reflexão fornece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas, e isto proporciona a ambos oportunidades para seu desenvolvimento.

Os significados em uma aprendizagem matemática produtiva

Ao modo que a sociedade se torna mais complexa e acelerada, o conhecimento sobre a Matemática torna-se imprescindível. Com o avanço tecnológico aumentou a necessidade da Matemática em quase todos os setores sociais, profissionais e, principalmente, no campo das ciências, incluindo as ciências humanas e sociais.

Gómez-Granell (2008) relata sobre a preocupação do ensino-aprendizagem relacionado ao nível dos alunos, afirmando que os mesmos não alcançam o nível de alfabetização funcional mínimo para desenvolver-se numa sociedade moderna. Tal problema, devido às dificuldades encontradas no estudo da Matemática, pois a maioria das pessoas não se identifica com a disciplina e, portanto, falta interesse para buscar o aprendizado sobre a mesma. Outro motivo identificado entre os alunos salienta a autora, é a falta de autoconfiança para resolver problemas, mesmo estes sendo muito simples.

ISBN 978-84-945722-3-4

Outro fator que enriquece a Matemática e, ao mesmo tempo, a torna abstrata, é a sua pura dependência de uma linguagem própria, cheia de símbolos decifráveis e bem diferentes das demais linguagens, de caráter formal, essencial para abstrair as relações Matemáticas, potencializando o seu grau de generalização e convertendo-o na criação de um novo conhecimento. Desta maneira, segundo Goméz-Granell (2008) “A linguagem matemática envolve a ‘tradução’ da linguagem natural para a linguagem universal formalizada, permitindo a abstração do essencial das relações matemáticas envolvidas, bem como o aumento do rigor gerado pelo estrito significado dos termos” (p.260).

Ao buscarmos significados no conhecimento matemático, nos deparamos com uma dura predominância das concepções sobre a Matemática, uma destas, a concepção formalista influenciou bastante no ensino de Matemática, baseado, segundo Goméz-Granell (2008) na manipulação sintática de símbolos e regras, deixando em segundo plano o significado destas regras. A manipulação destes símbolos leva os alunos a cometerem erros até mesmo em regras simples, tal fato ocorre porque eles não se detêm ao significado do conteúdo, assim como não tem incentivo em sala de aula para buscá-los. Nesta perpectiva temos *o significado formal* das ideias matemáticas.

Como os professores não incentivam a busca por significados, não é de se estranhar que os alunos não façam esta busca sozinhos. Como afirma Gómez-Granell (2008), com o intuito de minimizar os prejuízos do ensino/aprendizagem da Matemática foram aparecendo alternativas para melhorar o ensino, as tendências denominadas como conceituais ou semânticas. Nesta perpectiva temos *o significado referencial* das ideias matemáticas.

Opções metodológicas da pesquisa

O estudo aborda analisar como o futuro professor vai formular e resolver os problemas matemáticos com o conteúdo de Integral de Volumes, tendo como auxiliar o aplicativo Geogebra 3D, na busca pelos significados formal e referencial. Foi desenvolvido no Instituto Federal da Paraíba Campus Campina Grande, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, dando atenção à forma como os mesmos formulam e resolvem os problemas a partir de uma imagem do gráfico de alguns sólidos geométricos visualizados no Geogebra 3D. Procuramos observar como utilizavam seus conhecimentos para atribuir mais significados (formal e referencial) ao que estava sendo produzido, e como refletem sobre sua formulação e resolução.

ISBN 978-84-945722-3-4

O estudo de caso, opção escolhida, pois a consideramos como mais adequada para observar o uso da metodologia Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos. Como indica Ventura (2007) o estudo de caso pode ser classificado, entre outros, como intrínseco ou particular, quando procura compreender melhor um caso particular em si. Todo caso pode ser decomposto em suas partes constituintes. Os dados foram coletados por meio da observação participante, entrevista semi-estruturada e registros das formulações e resoluções de problemas e das reflexões sobre as tarefas. De acordo com Yin (2010), a Observação Participante: “A observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é simplesmente um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir vários papéis na situação de estudo de caso e participar realmente nos eventos sendo estudados” (p.138).

Ao iniciar a coleta de dados da pesquisa, foram feitas entrevistas (no mês de julho de 2014), nas quais foram colocadas perguntadas um pouco sobre seus aspectos pessoais e profissionais, como também sobre a metodologia Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos. Sendo que os participantes futuros professores do Instituto Federal da Paraíba Campus Campina Grande, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I, escolha feita por o professor da disciplina, colaborador do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade* - OBEDUC/CAPES, no âmbito do qual a pesquisa se desenvolvenu.Nestas entrevistas percebemos que os futuros a professores já tinham um pouco de conhecimento sobre a metodologia sugerida, bem como sobre o aplicativo Geogebra 3D.

Instrumentos e categorias de análise dos dados

No presente estudo, as técnicas de coleta de dados foram a *observação*, *a entrevista* e a a formulação e resolução de problemas matemáticos a partir do GeoGebra 3D. Nesta Comunicação Breve focamos apenas no Caso Roberto.

Os momentos de observação foram calendarizados com o dois futuro professor de Matemática. Na observação das aulas utilizamos gravações de áudio, fotografias e notas de campo referentes a cada aula observada, que também foram fontes de evidencia para a escrita do caso. *As Categorias de Análise: Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(Registro o modo como o futuro professor de Matemática formulam e resolvem problemas Matemáticos a partir de imagens de gráficos).

1- *Formulação: Geração*: Formular a partir de imagens de sólidos de revolução um problema que possibilite visualizar os significados semânticos e sintáticos em cada problema construído; *Aceitação:* Construir um problema aceitando-o como importante e fundamental no processo de aprendizagem do conteúdo de Cálculo; *A Estratégia: O que seria se não fosse assim:* Buscar meios e ideias para formular e resolver problemas com mais de uma estratégia;

2- Resolução: A interpretação do enunciado: Interpretar o enunciado significa o primeiro momento para a resolução do problema; *As estratégias de resolução do problema*: os modos de resolução do problema.

2- Formulação e Resolução de problemas matemáticos e desenvolvimento de significados: Registro como o futuro professor de matemática formula, resolve problemas matemáticos e consegue interligar conteúdos a imagens dos gráficos. Sobre formular e resolver enfatizamos: Transferência da imagem gráfica para o conteúdo; Aspectos de conhecimento prévio sobre conteúdos matemáticos durante as formulações e resoluções; tipo de significado atribuído às ideias matemáticas (formal ou referencial); As conexões estabelecidas entre as ideias matemáticas e os significados.

O estudo de caso Roberto

Na *primeira sessão* sobre o Cilindro, Roberto conseguiu formular um problema interligando a imagem do gráfico a fórmula de volume do sólido com as coordenadas cilíndricas, formulando e resolvendo um problema com ênfase no significado formal, utilizando duas estratégias para a resolução (Ver Anexos).

A *segunda sessão* foi iniciada com uma *reflexão sobre a tarefa anterior,* na qual os casos expressaram o interesse sobre a metodologia utilizada, bem como um pouco de dificuldade em sua primeira formulação e resolução. Durante os questionamentos feitos, observamos que os casos não se prenderam à imagem gráfica, mostraram possibilidades de criação de outros problemas, assim como outros materiais a serem utilizados, como a régua, objetos com forma cilíndrica. No entanto, com certa dificuldade nas estratégias de resolução.

Ao iniciar a *sessão da esfera,* os casos sentiram-se mais entrosados com a formulação dos problemas matemáticos, nelas surgiram situações de semi-realidade, visualização da figura

ISBN 978-84-945722-3-4

plana (Ver Anexos). As formulações foram mais elaboradas, exigindo deles um pouco mais de tempo para desenvolvê-las, Roberto demonstrou certa facilidade relacionada ao conteúdo de Volumes da Esfera, formulou um problema com uma situação na qual valorizou o uso da imagem e a utilização das fórmulas e integrais.

Considerações Finais

A necessidade de buscar novas metodologias auxiliares à tradicional, ajuda na adequação da realidade e motiva os alunos para um ensino mais compreensível, obtido, de forma óbvia numa melhoria na aprendizagem e, por isso, tem consequências positivas no Ensino Superior, pois os alunos só começam a ver teorias axiomática- dedutivas apenas nos cursos universitários, em principal nos cursos de Matemática (Barufi, 2002). De maneira positiva podemos confirmar esta afirmação, de modo que os alunos se sentem desafiados e tentam vencer seus próprios limites para buscar algo novo.

Vinculado ao aplicativo GeoGebra 3D (Blosier & Richard, 2011), percebemos durante toda a pesquisa que foi trabalhada a metodologia formulação e resolução de problemas matemáticos, nos quais propicia alunos desenvolveram e construiram seus conhecimentos, levantaram hipóteses e chegaram às conclusões, em sua maioria (Brown & Walter, 2005). O futuro professor Roberto elaborou seus problemas utilizando os significados formal, com fórmulas e cálculos, bem como o significado referencial, com enunciados diversos de ideias significativas, o que deixou revelar a relevância dos conteúdos para sua vida. Em nosso último encontro, foi pedido para que fizesse uma breve reflexão escrita sobre os aspectos semânticos e sintáticos das formulações e resoluções dos problemas matemáticos.

Referencias bibliográficas

Barufi, M. C. B.; Lauro, M. M. (2001). *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador.* CAEM – IME/USP.

Bishop, A.; Goffree, F. (1986). *Classroom organization and dynamics*. En B.Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematicseducation (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Blosier, M., Richard, P.R. (2011). Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution: Un tour en géométrie dynamique

ISBN 978-84-945722-3-4

tridimensionnelle. In *Actes des journées mathématiques de l'Institut français de l'Éducation,* 15 et 16 juin 2011, Lyon.

Brown, S., Walter. M. (2005). *The art of problem posing.* (3ª ed). New York: Routledge.

Gómez-Granell, C. (2008). A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. En A. Teberosky y L. Tolchinsky (Eds.), Além da alfabetização – A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática, Capítulo 11, pp. 257-282. São Paulo: Ática.

Nóbriga, J. C. C.; Araújo, L. C. L. (2010*). Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. Brasília: Editora Exato.

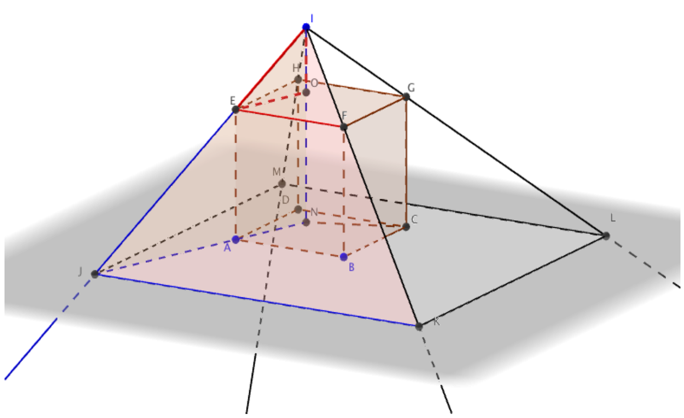
Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do Ensino e aprendizagem do Cálculo. Revista: Educação Matemática em Pesquisa, São Paulo, 13, 393-413.

Ventura, M. M. (2007). O Estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa. Revista SOCERJ. 20, 383-386.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. 4ª ed. Tradução Ana Thorell. São Paulo: Bookman.

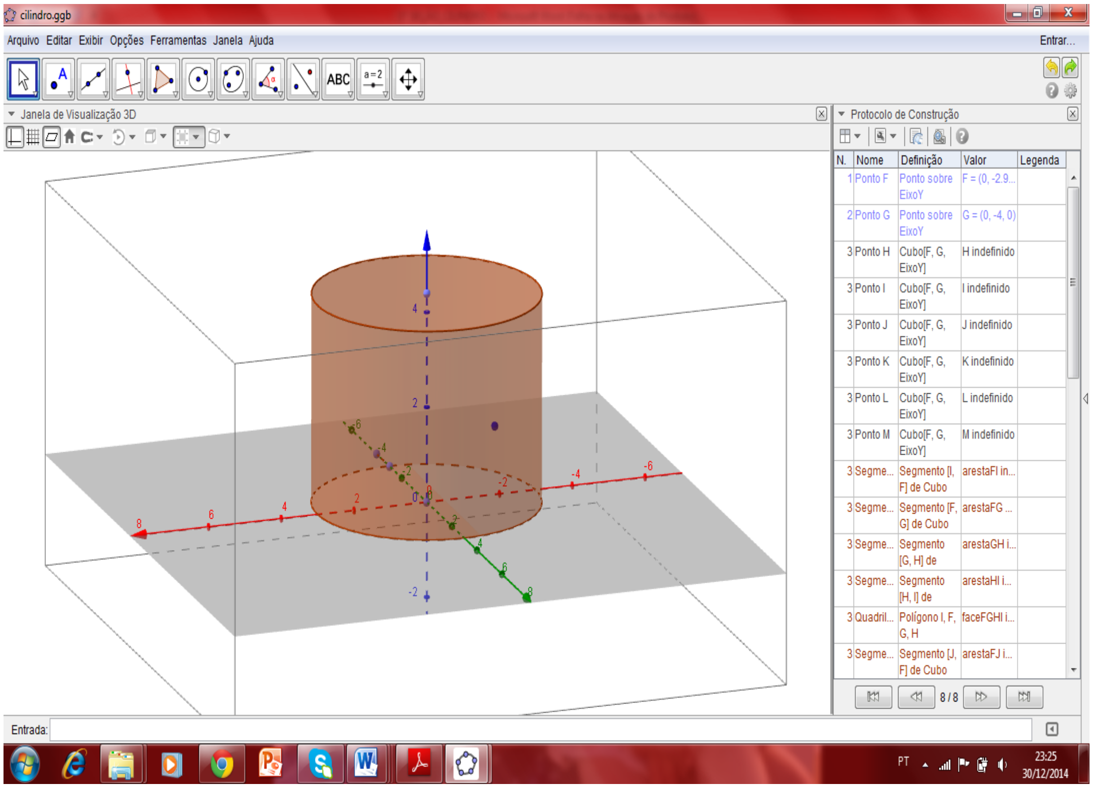
ANEXOS

Figura 1: Visualização de funções no Geogebra 3D



Fonte: www.conferencias.ulbra.br em 10/07/2015

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



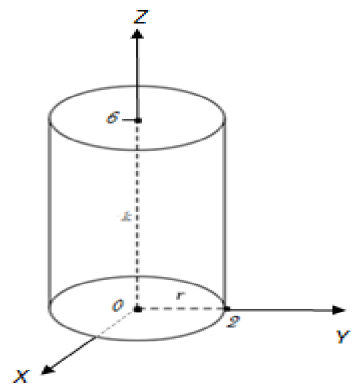
Fonte: Autoria de Janaína Cardoso da Silva

Figura 2: Primeira estratégia de resolução do problema formulado por Roberto

ISBN 978-84-945722-3-4

Formulação do Cilindro

Questão: Em uma indústria de peças, pretende-se construir uma peça cilíndrica com o raio da base de 2m, sabendo que a altura total do cilindro é dada por $z = k$, descubra o volume deste cilindro, onde o valor da constante k está dada na figura.



Solução pela equação do volume de cilindro.

Temos que a expressão para calcular o volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 z$$

Substituindo os valores

$$V = \pi(2)^2 x6$$

$$V = \pi x4x6$$

$$V \cong 75.4\,m^3$$

Figura 312: Segunda estratégia de resolução do problema formulado por Roberto

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Em coordenadas cilíndricas temos que o volume de um cilindro pode ser dado por:

$$V = \iiint dv \quad ; dv = \rho d\rho dz d\varphi$$

Temos que o limite de integração para cada coordenada, de acordo com a figura, vai ser dado por:

$$0 \leq \rho \leq 2$$
$$0 \leq z \leq 6$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Então temos que:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \int_0^2 \rho d\rho dz d\varphi$$

Integrando em relação ao raio:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 dz d\varphi$$

Integrando em relação à altura:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \frac{4}{2} dz d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi} 2\, z \Big|_0^6 d\varphi$$

Integrando em relação ao ângulo φ:

$$V = \int_0^{2\pi} 12\, d\varphi$$

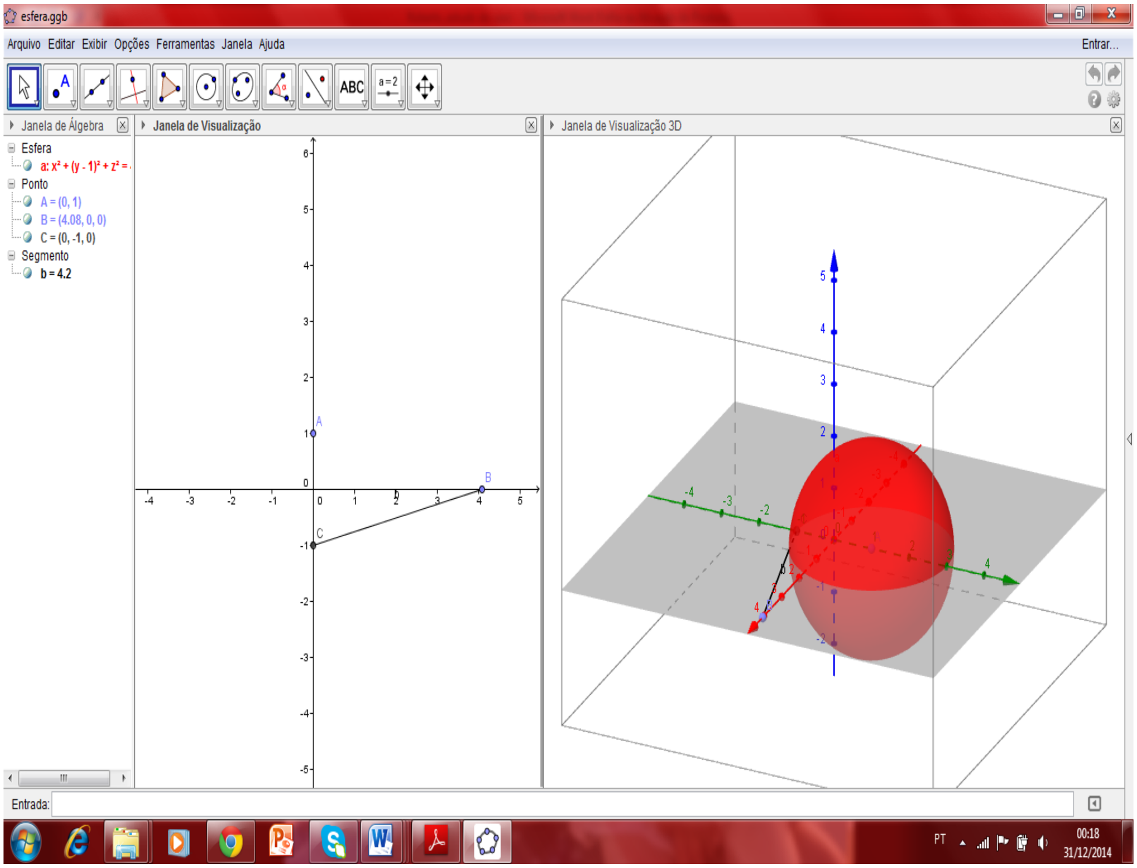
$$V = 12\, \varphi \Big|_0^{2\pi}$$

Então temos que:

$$V = 12x2\pi$$
$$V \cong 75.4m^3$$

Figura 4: Figura da esfera apresentada na segunda sessão de formulação

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: Autoria de Janaína Cardoso da Silva

Figura 5: Primeira resolução do problema sobre a esfera formulado por Roberto

ISBN 978-84-945722-3-4

Questão: em uma metalúrgica, um funcionário procura fundir duas esferas de ferro, com objetivo de transformar em uma única esfera, cada uma tem volumes diferentes, sabendo que os raios de cada são de 30 cm e 50 cm, como podemos encontrar o volume para a esfera transformada.

Solução pela equação do volume da esfera:

Calculando o volume de cada esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para a esfera de raio de 0,30 m:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(0{,}30)^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(0{,}027)$$

$$V_1 \cong 0{,}11\, m^3$$

Para a esfera de raio de 0,50 m:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(0{,}50)^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(0{,}125)$$

$$V_2 \cong 0{,}52\, m^3$$

Então para o volume da esfera transformada temos que será a soma do volume das duas esferas

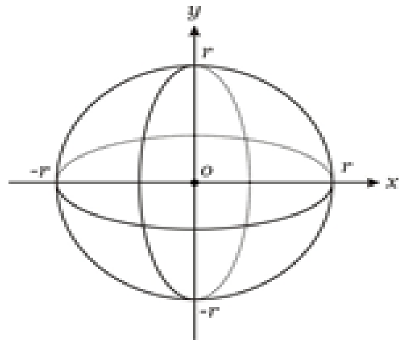
$$V = V_1 + V_2$$
$$V = 0{,}11 + 0{,}52$$
$$V = 0{,}63\ m^3$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 6: Segunda resolução do problema sobre a esfera formulado por Roberto

Solução por integral:

Considerando a figura:



Como a esfera está com a origem no centro a equação de sua circunferência será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Então,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Para encontrar o volume da esfera vamos supor fatias de larguras infinitesimais **dx** e raio **y**, logo podemos dizer que a esfera é formada por infinitos cilindros de alturas infinitesimais **dx** em que o raio **y** vai variar de acordo com cada cilindro.

Então o volume do cilindro será:

$$Vc = \pi y^2 dx$$

Logo para calcular o volume da esfera temos:

$$V = \int Vc$$

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-854

Conhecimento matemático para o ensino dos números racionais: discussão na/da formação de professores

Francisco José Brabo Bezerra – Henrique Rizek Elias – Debora da Silva Souza
francisco.bezerra@ufabc.edu.br – henriqueelias@utfpr.edu.br – deborasou.za@hotmail.com
Universidade Federal do ABC – Santo André. Brasil
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Londrina. Brasil

Núcleo temático: IV Formación del profesorado em Matemáticas
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: 5 - Formación y actualización docente
Palabras clave: Educação Matemática. Formação Continuada. Números Racionais. Conhecimento Matemático para o Ensino.

Resumo

O presente artigo visa discutir aspectos do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Com base no referencial teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino de Ball, Thames e Phelps (2008), analisamos as produções escritas de três professores participantes de um curso de formação continuada na Universidade Federal do ABC – Brasil. Do ponto de vista da formação tínhamos a expectativa de discutir diferentes questões sobre os números racionais relacionadas especificamente ao seu ensino, como formas de se trabalhar seus diferentes significados e representações, dificuldades frequentes de estudantes, etc., mas percebemos, pelas produções escritas, que alguns dos professores que atuam na Educação Básica não dominavam o conceito. Selecionamos duas questões respondidas pelos participantes que evidenciam: i) fragilidades na compreensão do conceito de número racional; ii) a não inclusão do zero como um elemento do conjunto dos números racionais. Isso indica que, em cursos de formação, assumir que há um domínio do conteúdo dos números racionais, seja por estudantes a professor ou por professores em atuação, pode, muitas vezes, ocultar insuficiências no chamado conhecimento comum do conteúdo.

Introdução

Não são recentes e nem poucas as pesquisas sobre os números racionais. Kieren (1976, 1980), ao apresentar o que chamou de subconstrutos dos números racionais, permitiu uma ampla discussão acerca dos diferentes significados atribuídos a esses números. O grupo *The Rational Number Project* (RNP) contribuiu amplamente para as discussões, trazendo considerações que são, por diversas vezes, citadas em trabalhos que tratam dos números racionais: os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que os estudantes encontram ao longo dos primeiros anos de

ISBN 978-84-945722-3-4

escolarização (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983). Trabalhos que se fundamentam em Raymond Duval para discutir os diferentes registros de representações semiótica também são frequentes, segundo Fávero e Neves (2012).

Aliado às pesquisas que reconhecem a complexidade dos números racionais, sejam relacionados aos seus diferentes significados e diferentes representações, ou pela sua relevância na aprendizagem de tópicos matemáticos mais avançados pelos estudantes, além das que se debruçam a discutir o conhecimento matemático necessário ao professor para ensinar os números racionais. Zakaryan e Ribeiro (2016), Pinto e Ribeiro (2013) e Rangel, Giraldo e Filho (2014) são alguns exemplos dessas pesquisas que nos permitem conhecer mais profundamente aspectos desse conhecimento matemático que é específico para o ensino dos números racionais e, portanto, diferente do conhecimento matemático de outros profissionais que não o professor.

Com esse amplo espectro de pesquisas em mãos, levamos o tema "números racionais" para a discussão em um curso de formação continuada realizado na Universidade Federal do ABC – Brasil. Naquele momento, tínhamos a expectativa de levantar questões a respeito de diferentes aspectos dos números racionais relacionadas ao seu ensino, como formas de trabalhar seus diferentes significados e representações, dificuldades frequentes de estudantes, abordagens de ensino utilizadas pelos professores para minimizar tais dificuldades, além de erros frequentes relacionados com o conceito de número racional, sua escrita e operações. Contudo, percebemos, pelas produções escritas, que alguns professores não dominavam o conceito, levando-nos a rever algumas ações planejadas e gerando reflexões acerca de cursos de formação (inicial ou continuada) de professores e a maneira como têm sido abordado os números racionais.

Diante disso, buscamos discutir aspectos do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais, dando ênfase no cuidado que se deve ter ao assumir, em cursos de formação de professores, que há um domínio do conteúdo dos números racionais, seja por estudantes a professor ou por professores em atuação, que, muitas vezes, pode ocultar insuficiências no chamado conhecimento comum do conteúdo.

As bases teóricas

ISBN 978-84-945722-3-4

No presente artigo, estamos tomando o Conhecimento Matemático para o Ensino[30] (MKT) na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008). Esse grupo focou no trabalho do professor ao ensinar matemática, analisando a prática do professor para, então, analisar as demandas matemáticas para o ensino. Além disso, desenvolveram um levantamento sobre formas para se medir o conhecimento do conteúdo para o ensino de matemática. Estas medidas proporcionam uma forma de investigar a natureza, o papel, e a importância de diferentes tipos de conhecimento matemático para o ensino. A teoria do MKT tem sua origem no trabalho de Shulman (1986), quando introduziu o termo conhecimento pedagógico do conteúdo, o que significou o reconhecimento de que o conhecimento de conteúdo dos professores tem sua especificidade, e essa implicações na prática e na formação do professor (RANGEL; GIRALDO; FILHO, 2014). O MKT, nessa perspectiva, envolve os conhecimentos matemáticos necessários para que o professor possa exercer seu papel de ensinar. Trata-se de uma modelo teórico baseado na prática docente, a partir das demandas matemáticas para o ensino.

Na tentativa de ampliar e aprofundar os trabalhos de Shulman, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem que o conhecimento matemático para o ensino é composto pelos subdomínios: (i) Conhecimento Comum do Conteúdo é o conhecimento do conteúdo necessário, mas não exclusivo ao ensino. Reconhecer uma resposta incorreta é uma tarefa do professor, mas um engenheiro também é capaz de reconhecer quando o resultado de uma multiplicação está incorreto; (ii) Conhecimento Especializado do Conteúdo é o conhecimento matemático não tipicamente necessário para outros fins além do ensino. Avaliar rapidamente a natureza de um erro, especialmente um erro não familiar, é um exemplo do Conhecimento Especializado do Conteúdo; (iii) Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes é o conhecimento que combina saber sobre os estudantes e saber sobre matemática. Os professores devem antecipar a forma como seus alunos podem pensar e as dificuldades que podem encontrar em determinadas situações matemáticas. Ter familiaridade com os erros comuns e saber a razão disso fazem parte deste conhecimento; (iv) Conhecimento do Conteúdo e do Ensino é o conhecimento que combina saber sobre o ensino e sobre matemática. Professores precisam estabelecer uma sequência específica do conteúdo para o ensino, escolher exemplos mais pertinentes para introduzir um conceito e que levem os alunos a se aprofundarem no conteúdo; (v) Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, Trata-

[30] No original: *Mathematical Knowledge for Teaching – MKT*. Ao longo do artigo, usaremos a sigla MKT quando nos referirmos ao Conhecimento Matemático para o Ensino.

ISBN 978-84-945722-3-4

se do conhecimento sobre a maneira como a matemática está organizada ao longo do currículo; (vi) Conhecimento do Conteúdo no Horizonte é o conhecimento matemático que permite ao professor ter uma consciência de como temas matemáticos estão relacionados ao longo do currículo. Por exemplo, professores de séries iniciais precisam saber como a matemática que ensinam está relacionada com o que os alunos irão aprender em anos posteriores.

Longe de tomarmos a abordagem do MKT como um prescrição do que o professor precisa saber para ensinar, admitimos sua proposta como um quadro de referência que nos permite compreender e pesquisar a ação docente e (re)pensar os cursos de formação de professores de matemática. Nesse sentido, propomos uma reflexão sobre o conhecimento comum do conteúdo, enquanto conhecimento necessário para o ensino, em cursos de formação de professores a partir de uma experiência que relatamos, brevemente, na próxima seção.

Contexto e método

A experiência a que nos referimos aconteceu no curso de extensão *O Ensino de Álgebra para a Educação Básica*, realizado em 2016 na Universidade Federal do ABC, em que os autores do presente artigo compunham a equipe realizadora.

Com o curso, buscávamos propiciar um ambiente de formação de professores de matemática que se discutisse conhecimentos algébricos desenvolvidos pelos professores ao ensinar Álgebra na Educação Básica e, também, investigar diferentes significados de conceitos matemáticos do campo da Álgebra que emergem nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, no âmbito dos Ensinos Fundamental e Médio. Além disso, era nossa intenção investigar como as Estruturas Algébricas (anel, corpo e grupo) se relacionam com a álgebra ensinada na Educação Básica.

Com carga horária de 180 horas divididas em 40 encontros, o curso contou com a participação de professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Além de professores com licenciatura em Matemática, tínhamos, em menor número, professores com formação em Pedagogia. Nos encontros foram discutidos diferentes conteúdos matemáticos, como os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), equações e funções. Destinou-se cinco dos 40 encontros para o tema números racionais.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por se tratar de um curso de longa duração, houve desistentes. Das 40 vagas oferecidas e preenchidas, somente 11 professores participaram dos encontros referentes aos números racionais, e destes, trouxemos a produção escrita de três deles, que ilustram a discussão neste artigo. Essas produções escritas são de atividades desenvolvidas no primeiro dos cinco encontros previstos para discutirmos os números racionais.

Buscou-se discutir acerca dos números racionais, cujas intenções (como, discutir os diferentes significados e representações, algumas dificuldades frequentes de estudantes, abordagens de ensino utilizadas pelos professores para minimizar tais dificuldades etc.) vinham acompanhadas de pesquisas (KIEREN, 1976, 1980; BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983; ZAKARYAN; RIBEIRO, 2016; PINTO; RIBEIRO, 2013; RANGEL, GIRALDO, FILHO, 2014) que nos orientariam nesse objetivo. Pressuponhamos que os professores participantes responderiam adequadamente o que entendem por número racional e que saberiam reconhecer os elementos do conjunto Q.

No primeiro encontro destinado à discussão dos números racionais, propusemos duas atividades: uma individual e outra em grupo. Na primeira atividade, realizada individualmente, pedimos aos professores que respondessem indicando não apenas suas concepções acerca dos números racionais, mas também, e principalmente, que manifestassem características do conhecimento matemático para o ensino desses números. Dentre essas questões, destacamos duas para nossas análises[31].

Os dados analisados são, portanto, produtos das respostas de três professores – cujos nomes fictícios são Marcos, Cláudio e Mirian – às questões 1, item a), e 4, item a). Marcos e Cláudio são Licenciados em Matemática e Miriam em Pedagogia.

Análises

Com relação à questão 4, item a), apresentamos a maneira como os três professores responderam à pergunta *o que você entende por número racional?*

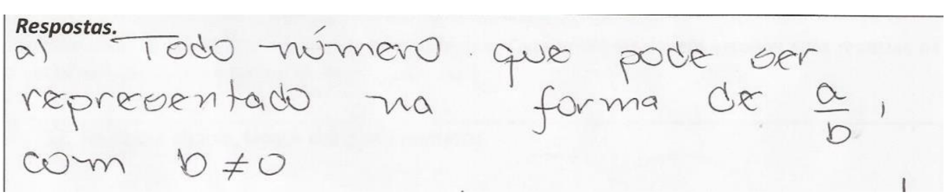

Respostas.
a) Todo número que pode ser representado na forma de $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$

Figura 1: resposta da questão 4, item a), do professor Marcos

[31] Tais questões podem ser observadas no apêndice deste artigo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2: resposta da questão 4, item a), do professor Cláudio

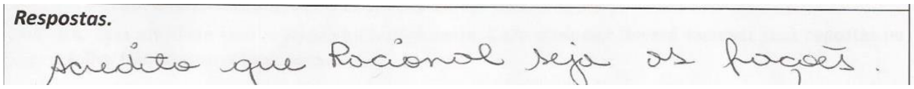


Figura 3: resposta da questão 4, item a), da professora Mirian

As figuras 1, 2 e 3 mostram as concepções equivocadas dos professores. Marcos não considera que a e b ($b \neq 0$), na representação $\frac{a}{b}$, precisam ser números inteiros. Não explicitar isso gera a possibilidade de considerarmos $\frac{\pi}{2}$ um número racional, o que não é verdade. Cláudio, sucintamente, considera que um número racional é aquele *com fração*, como se a fração fosse um atributo do número, não uma forma de representação. A definição dada por Cláudio incorre no mesmo erro de Marcos, ao considerar um número irracional (como $\frac{\pi}{2}$) como racional. A definição dada por Mirian também leva a esse erro, pois esta professora considera que os números racionais sejam as frações.

No ensino dos números racionais na Educação Básica, sob o ponto de vista do conhecimento comum do conteúdo, o professor precisa reconhecer que a fração é uma forma de representar números e expressões algébricas, como: $\frac{3}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{x^2+1}{2x-1}$.

Com relação à resposta da questão 1, item a), os três professores cometeram um equívoco em comum: não incluir o zero entre os números racionais. Esse foi o único erro do professor Marcos, como pode ser visto na figura 4.

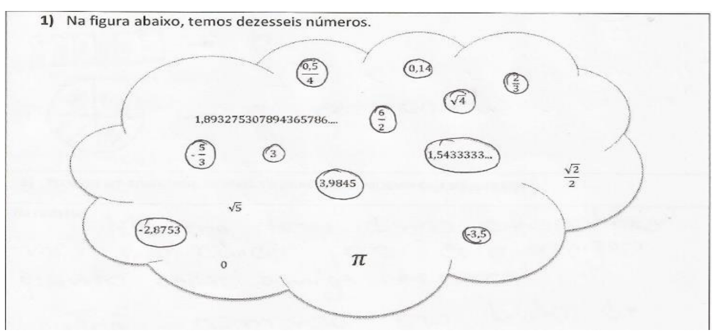


Figura 4: resposta da questão 1, item a), do professor Marcos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

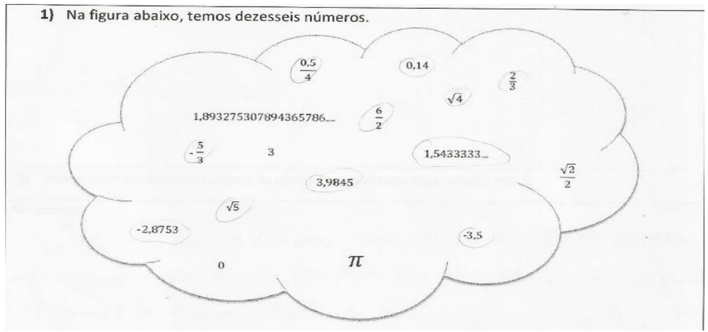


Figura 5: resposta da questão 1, item a), do professor Cláudio

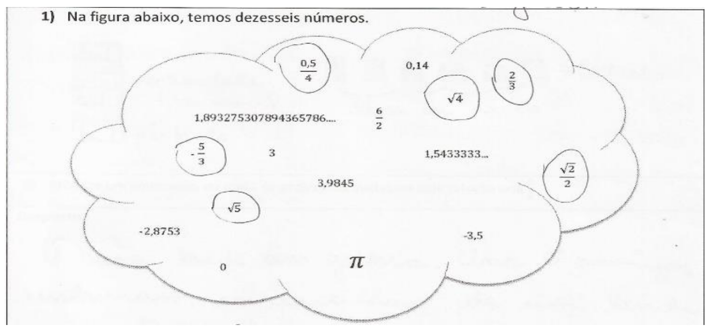


Figura 6: resposta da questão 1, item a), do professor Mirian

Já os professores Cláudio e Mirian cometeram outros, vide as figuras 5 e 6.

É possível fazer um paralelo entre as respostas dos professores sobre o que entendem por número racional e os números que circularam na questão 1. E vale observar que pela definição apresentada pelo professor Marcos na questão 4, mesmo que incorreta, seria possível perceber que o zero é, sim, um elemento do conjunto dos números racionais. Porém, parece que o professor não fez essa relação.

Já o professor Cláudio, além do excluir o zero, cometeu outro erro: incluiu o $\sqrt{5}$ entre os elementos do conjunto dos números racionais. Apesar das definições de Cláudio e de Marcos possibilitarem dizer, incorretamente, que $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$, nenhum dos dois professores circulou o $\frac{\sqrt{2}}{2}$. No caso da professora Mirian, parece que sua concepção de que os números racionais são as frações a levou a circular todos os números escritos na forma de fração, como o $\frac{\sqrt{2}}{2}$, como elementos de $\mathbb{Q}$. Por outro lado, essa mesma concepção não a impediu de circular corretamente o $\sqrt{4}$ e incorretamente o $\sqrt{5}$.

Considerações finais

ISBN 978-84-945722-3-4

Nesse artigo, nos propusemos a discutir aspectos do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Apresentamos alguns erros cometidos por professores em formação continuada que nos levaram a problematizar cursos de formação (inicial e continuada) de professores. Do mesmo modo que tínhamos expectativas de que os professores participantes, por já atuarem na Educação Básica, dominassem o conteúdo em questão, de maneira que pudéssemos avançar nas discussões acerca de diferentes aspectos do ensino dos números racionais na escola, percebemos, pela literatura científica, que os cursos de formação inicial de professores também têm tomado os números racionais como conhecidos pelos licenciandos, ignorando a possibilidade de que esse conceito não seja dominado dos futuros professores. Chamamos a atenção para a constatação de Damico (2007), quando afirma que cursos de Licenciatura em Matemática não têm oferecido aos futuros professores uma preparação sobre os números racionais com a abrangência e o cuidado que este assunto requer.

Referências bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Berh, M. J.; Lesh, R; Post, T. R.; Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In: Lesh, R.; Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and process*. 91-126.

Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Favero, M. H.; Neves, R. S. P. (2012). A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, 20, n. 37.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, R. (Ed.) *Number and measurement*: papers from a research workshop. 101-144.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms. In: Kieren, T. (Ed.) *Recent Research on Number Learning*. 125-150.

Pinto, H. G.; Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido dos números racionais. *Da investigação às práticas*, 3, 77-96.

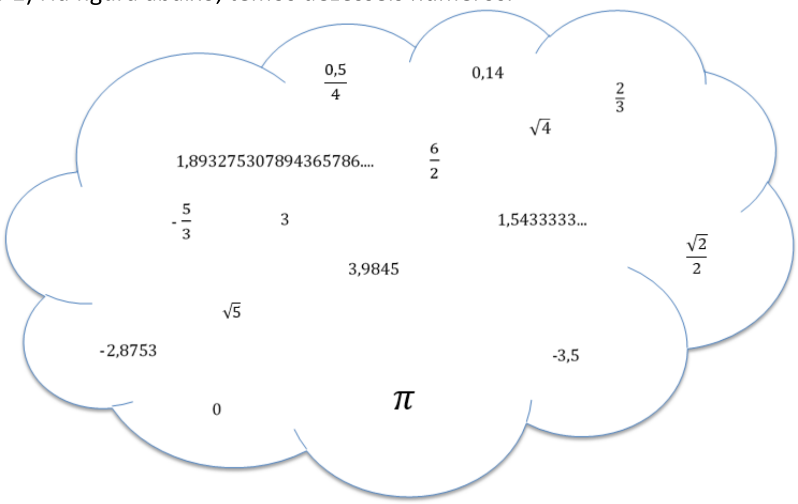
Rangel, L.; Giraldo, V.; Filho, N. M. (2014). Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8.

ISBN 978-84-945722-3-4

Zakaryan, D.; Ribeiro, C. M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24, 301-321.

Apêndice

(**Questão 1**) Na figura abaixo, temos dezesseis números.



a) Circule os números que pertencem ao conjunto dos números racionais;

b) Dentre os números apresentados, quais você acredita que os estudantes têm mais dificuldade em identificar como sendo um número racional? Por quê?

(**Questão 4**) Escreva um pequeno texto que contemple os seguintes aspectos:

a) o que você entende por número racional?

b) quais as principais dificuldades que seus alunos apresentam quando lidam com este conceito?

c) que dificuldades você, enquanto professor, percebe ter ao ensinar números racionais ou ao trabalhar situações que envolvam estes números?

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-855

COMPRENSIÓN DE ESTUDIANTES DE NIVEL BACHILLERATO SOBRE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS A PARTIR DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA

Viana Nallely García Salmerón – Ángel Jiménez Marín – Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
viana_nallely@hotmail.com – chelitozumjm@gmail.com – flormonr@hotmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Palabras clave: división sintética, división convencional, comprensión

Resumo

Este trabajo surge por nuestra inquietud como docentes al observar las dificultades que tienen los estudiantes de bachillerato al dividir polinomios. Consideramos que el algoritmo de división sintética es una forma más fácil, rápida y compacta para dividir dos polinomios. En esta investigación pretendemos analizar cómo comprenden los estudiantes la división sintética a partir de la división convencional de polinomios. Usamos la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas (Ballester, Santana, Hernández, Cruz, Arango, García, Álvarez, Rodríguez, Batista, Villegas, Almeida y Torres, 1992), para identificar las características esenciales del algoritmo de la división convencional y vincularlo con la división sintética. Se diseñaron actividades considerando estas características para analizar cómo comprenden los estudiantes, desde cuatro categorías de evidencia: concepciones, representaciones, conexiones y aplicaciones.

Introducción

Basados en nuestra experiencia como profesores de matemáticas de nivel bachillerato, hemos observado que los estudiantes de dicho nivel presentan dificultades en relación al tema de polinomios, ésto pese a que dicho tema es tradicional en nivel básico. Consideramos que lo anterior afecta a los estudiantes cuando se aborda la división convencional entre dos polinomios y por ende presentan dificultades en la comprensión de la división sintética, la cual es más práctica que la división convencional para dividir dos polinomio. En Fonseca, Bosch y Gascón (2010), se señala que en la mayoría de los casos la división sintética de trabaja de manera estereotipada, sin ninguna variación que permita evidenciar las limitaciones de dicha división.

ISBN 978-84-945722-3-4

En México, el programa de estudios de nivel bachillerato no contempla que se proporcione al estudiante un apoyo teórico para vincular ambas divisiones, ocasionando un tratamiento limitado del algoritmo de división sintética. Lo anterior provoca que el estudiante no reconozca las características invariantes de la división sintética y en acuerdo con Fonseca, Bosch y Gascón (2010), no se abordan las limitaciones de ésta.

En esta investigación propusimos algunas actividades didácticas para la enseñanza del algoritmo de división sintética utilizando la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas (Ballester et al., 1992), con la intención de que los estudiantes reconozcan sus características invariantes. Asimismo, que comprendan el algoritmo de división sintética y su relación con la siguiente proposición: Sea (x) cualquier polinomio y sea g (x) un polinomio no nulo. Sólo hay dos polinomios, $q\ (x)$ y $r\ (x)$, de tal manera que: a) $f\ (x) = g\ (x)\ q\ (x) + r\ (x)$; b) r grado (x) <g grado (x). Los polinomios (x) y $r\ (x)$ son el cociente y el resto de la división de $f\ (x)$ entre $g\ (x)$. (Cárdenas, Lluis, Raggi y Tomás, 2007).

Objetivo

Elaborar una secuencia de actividades didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la división sintética a partir del algoritmo de la división convencional de polinomios en nivel bachillerato.

Marco Metodológico

Este trabajo se enmarcó dentro de la Metodología de la Enseñanza de la Matemática, la cual se ocupa de los procesos pedagógicos que transcurren en la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades y capacidades necesarias para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje en la matemática.

De acuerdo a Jungk (1985) un concepto es un reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características esenciales. También, en relación inmediata al concepto están la extensión y el contenido. La extensión es la clase de objetos a los que se refiere el concepto y el contenido es la totalidad de las características esenciales a todos los objetos.

Para efectos de la investigación tomamos la clasificación de los conceptos que se propone en la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (Jungk, 1985), son tres clases de conceptos: de objetos, de operaciones y de relaciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

En particular debido a la naturaleza de la investigación trabajaremos con los conceptos de operaciones los cuales designan las acciones que se efectúan con los objetos. Ejemplos, adición, biseca a, divide a.

La estructura metodológica de la formación de un concepto se lleva a cabo por dos vías: la vía inductiva y la vía deductiva. Para fines de este trabajo se ha de utilizar la vía deductiva en la que se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y la extensión del concepto. Esta vía conduce, por tanto, de lo general a lo particular. (Ballester et al, 1992).

Las etapas que se van a seguir para la formación del concepto por la vía deductiva son las siguientes:

•Aseguramiento del nivel de partida. Consiste en asegurar que los estudiantes dispongan de los conocimientos matemáticos previos necesarios para actuar sobre la situación. En este caso, conocimientos matemáticos relacionados con las características de un polinomio (etimología, nomenclatura, coeficiente, valor numérico, grado, etc.), operaciones entre polinomios (suma, resta, multiplicación y división). Esta etapa, se previó a través de la revisión de los programas de enseñanza.

•Motivación y orientación hacia el objetivo. Se motivó a través de un problema sobre el área de un jardín, el cual se espera que el alumno resuelva usando la división entre los polinomios que intervienen. Posteriormente resolvieron una división entre polinomios pero ahora de mayor complejidad. Se discutió en plenaria cuales fueron las dificultades que tuvieron para resolver cada una de las situaciones anteriores.

•Partir de la definición y analizar el significado de cada una de las partes (definiendum y definiens). Se proporcionó al estudiante el procedimiento para realizar la división sintética, la cual les facilitarán las divisiones entre dos polinomios.

•Poner a disposición de los estudiantes ejemplos y contraejemplos del concepto (objetos de investigación) que deben ser examinados uno a uno de acuerdo a las características (contenido) del concepto, expresadas en el definiens. Los estudiantes reconocieron cuales son los elementos de la división convencional de polinomios que son necesarios para efectuar la división sintética, así como las condiciones necesarias para ejecutar el procedimiento de la misma.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

•Analizar con los estudiantes cuál sería la consecuencia si se omitiese alguna de estas características. En una última parte los estudiantes identificaron cuando es posible dividir dos polinomios usando la división sintética. Aquí el objetivo fue que los estudiantes reconozcan las características invariantes del objeto de estudio.

La situación de aprendizaje y contexto de aplicación

La propuesta del diseño se constituye por cinco actividades, de las cuales las actividades uno y dos están diseñadas para que el estudiante identifique algunas de las dificultades que se pueden presentar durante el procedimiento de la división de polinomios, y las actividades tres, cuatro y cinco están diseñadas para que el estudiante reconozca las características invariantes de la división sintética, y la relación de ésta con la división convencional de polinomios.

Las actividades se realizaron en un ambiente de lápiz y papel, durante tres sesiones de una hora con 30 minutos cada una, con estudiantes de cuarto semestre de nivel bachillerato. El papel de los investigadores fue importante para orientar a los estudiantes, esto por tratarse de la introducción de un concepto.

Los participantes

Se aplicó la propuesta de diseño a una muestra de 22 alumnos de cuarto semestre de entre 16-17 años de una institución privada que se encuentra ubicada en la Ciudad de Chilpancingo, Gro. Los estudiantes requirieron conocimientos previos sobre las características de un polinomio (etimología, nomenclatura, coeficiente numérico, valor numérico, grado, etc.), operaciones entre polinomios (suma, resta, multiplicación y división).

Características invariantes del objeto de estudio

Se pretendió que los estudiantes reconocieran las siguientes características que definen al objeto de estudio.

•El divisor debe ser un polinomio lineal de la forma x-a.

•El dividendo debe ser un polinomio no nulo P(x)>0.

•Forma de representación de la división sintética.

•Algoritmo (procedimiento).

Características de la propuesta de diseño

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La propuesta de diseño para la introducción del concepto de división sintética constó de cinco actividades que se detallan en la Tabla 1, asimismo se considera el papel del investigados. Lo anterior está adjunto en el Anexo 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ACTIVIDAD		LO QUE SE QUIERE LOGRAR	EL PAPEL DEL INVESTIGADOR	CARACTERÍSTICAS INVARIANTES
1		Resolver un problema del contexto usando la división convencional entre polinomios. Resolver una división entre dos polinomios sin contexto.	Reconocer los conocimientos previos de estudiante sobre el procedimiento de la división convencional.	
2		Comparar resultados e identificar las dificultades que se presentaron durante el procedimiento.	Dar tratamiento a las dificultades que se presentaron en la actividad anterior para consolidar el procedimiento de la división convencional de polinomios. Ya que es necesario para abordar el algoritmo de división sintética.	
3	A	Conocimientos generales de la división sintética.	Plantear el algoritmo, las condiciones y las ventajas de la división sintética.	
	B	Reconocer el proceso que se sigue a partir de la división convencional de polinomios hasta llegar a la división sintética.	Orientar al alumno acerca del procedimiento y recalcar los elementos necesarios para trabajar la división sintética.	*Algoritmo (procedimiento).
	C	Reconocer las características de la división convencional de polinomios que se conservan en el algoritmo de división sintética.	Orientar al estudiante para que identifique los elementos de la división convencional que se conservan en la división sintética.	*El divisor es un polinomio lineal de la forma *x-a*. *El dividendo es un polinomio no nulo *P(x)>0.* *Algoritmo de la división sintética.
4		Identificar los elementos de la división sintética con respecto a la convencional, así como la construcción polinómica del resultado a partir de sus elementos.	Verificar que los estudiantes construyan correctamente el resultado. de la división sintética.	*Algoritmo de la división sintética.
5		Completar el algoritmo de la división sintética a partir de la división de dos polinomios e identificar las condiciones para llevar acabo la división sintética.	Verificar que ejecuten correctamente el procedimiento para completar el algoritmo de la división sintética y resaltar las condiciones para que esta se lleve a cabo.	*El divisor es un polinomio lineal de la forma *x-a*. *El dividendo es un polinomio no nulo *P(x)>0.*

Tabla 1. Características de la propuesta de diseño

ISBN 978-84-945722-3-4

Comentarios finales

Estamos en el análisis de resultados de nuestra propuesta de actividades, sin embargo hemos observado que los estudiantes al menos logran identificar las características invariantes de la división sintética, aunque algunos de ellos aún conservan la noción que podrán aplicar la división sintética para dividir polinomios de cualquier naturaleza.

Referencias Bibliográficas

Ballester, S., Almeida, B., Álvarez, A., Arango, C., Cruz I., García, M., González, J., Hernández, S., Santana, H., Torres, P., Villegas, E. y Machado A. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática Tomo I.* Cuba: Pueblo y Educación.

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. *Educación matemática*, *22*(2), 5-34.

Jungk, W. (1982). *Conferencias sobre metodología de enseñanza de la Matemática 2*. Playa, Ciudad de la Habana : Pueblo y Educación.

Buriticó, B. Universidad de Antioquia- Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Medellín 2004. *División Sintética.* Recuperado el 18 de enero del 2016, de http://docencia.udea.edu.co/cen/AlgebraTrigonometria/Archivos/capi05/capi05_6.html.

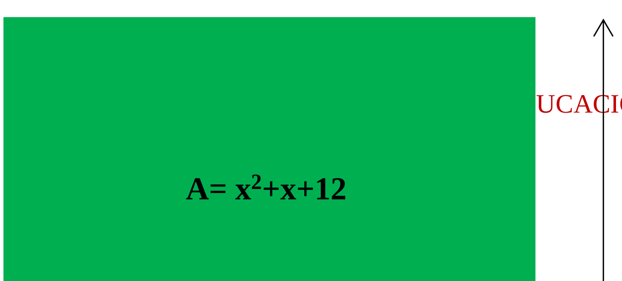
Departamento de Ciencias Exactas, Puerto Rico (2012).*Funciones y ecuaciones polinómicas.* Recuperado el 18 de enero del 2016, de http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/division_sintetica/Dsintetica_home.html.

Anexo 1

Se presentan algunas de las actividades que son parte del Diseño de la propuesta.

ACTIVIDAD 1

1.- El área de un jardín rectangular es x^2+x-12 como se muestra en la figura, y se sabe que uno de los lados del jardín mide x+4. ¿Cuál es la medida del otro lado?



¿?

2.- Realiza la siguiente división entre polinomios:

$$x-3 \,\overline{\big)\; 2x^4-5x^3+2x^2-x+9}$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

B.-Indicaciones: Los esquemas A, B y C pertenecen al procedimiento convencional de dividir el polinomio $x^3 - 8\ entre\ x - 2$, analízalos y contesta las preguntas:

A

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+4 \\
\hline
x-2 & x^3+0x^2+0x-8 \\
 & -\ x^3+2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 2x^2+0x-8 \\
 & \quad -\ 2x^2+4x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 4x-8 \\
 & \qquad -\ 4x+8 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

B

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 2\ \ 4 \\
\hline
1-2 & 1\ \ 0\ \ 0\ \ -8 \\
 & -\ 1+2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2+0-8 \\
 & \ -\ 2+4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4-8 \\
 & \quad -\ 4+8 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\ 0
\end{array}
$$

C

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 2\ \ 4 \\
\hline
2 & 1\ \ 0\ \ 0\ -8 \\
 & \quad 2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2 \\
 & \qquad 4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4 \\
 & \qquad\ 8 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\ 0
\end{array}
$$

i. ¿Qué cambio observas que sucedió al esquema A para pasar al esquema B?
ii. ¿Qué características del esquema A se conservan en el esquema B?
iii. Identifica el divisor en el esquema A y escríbelo.
iv. ¿Qué cambio observas en el divisor al pasar del esquema A al esquema B?
v. ¿Qué cambio observas que sucedió al esquema B para pasar al esquema C?
vi. ¿Qué características del esquema B se conservan en el esquema A?
vii. ¿Qué cambio observas en el divisor al pasar del esquema B al esquema C?
viii. El primer término del cociente es 1 ¿aparecerá en los términos del dividendo?¿en qué lugar o posición?
ix. ¿Encuentras alguna semejanza del cociente con algunos otros elementos de la
x. división?¿Cuál es?

C.- Indicaciones: Ahora observa y compara los siguientes esquemas:

C

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1\ \ 2\ \ 4 \\
\hline
2 & 1\ \ 0\ \ 0\ -8 \\
 & \quad 2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2 \\
 & \qquad 4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 4 \\
 & \qquad\ 8 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\ 0
\end{array}
$$

D

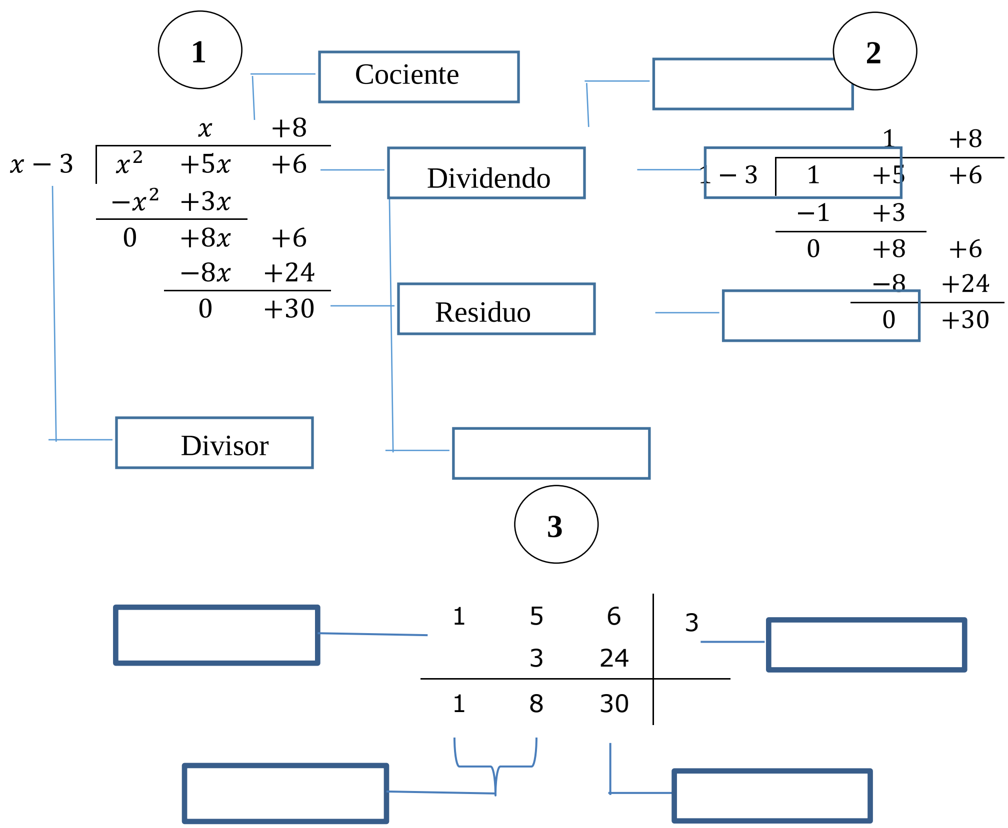
$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -8 & \\
 & 2 & 4 & 8 & 2 \\
1 & 2 & 4 & 0 & \\
\hline
 & & & &
\end{array}
$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

a. ¿Qué cambio sucedió al esquema C para pasar al esquema D?
b. ¿Cuáles son las semejanzas que observas entre el esquema C y el esquema D?
c. Los números 1,2 ,4 se encuentran en el esquema D, ¿podrías identificarlos en el esquema C?¿qué representan en la división?
d. Los números 1, 0, 0, 8 que se encuentran en el esquema C, ¿podrías identificarlos en el esquema D?

ACTIVIDAD 4

1.-Indicaciones: El esquema 1 corresponde al desarrollo de una división convencional del polinomio $x^2 + 5x + 6$ *entre el polinomio lineal* $x - 3$ en el cual se muestran los elementos que la conforman, compara este esquema con los esquemas 2 y 3 y anota en los espacios los nombres de los elementos que se corresponden.



A partir del esquema 3 anota el polinomio que corresponda a los elementos que se mencionan a continuación:

Cociente:________________
Dividendo:_______________
Residuo:_________________
Divisor:__________________

¿A partir de estos elementos como expresarías el resultado de la división?
____

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2.- Indicaciones: Analiza los esquemas y completa los datos que hacen falta.

$$\begin{array}{r|l} & x-7 \\ \hline x+4 & x^2-3x-10 \\ & -\,x^2-4x \\ \hline & 0-\;7x-10 \\ & \quad -\;7x+28 \\ \hline & \quad 0+18 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 1-\boxed{} \\ \hline 1+\boxed{} & 1-\boxed{}\;-10 \\ & -1-\;\;4 \\ \hline & 0-7\;\;\boxed{} \\ & \quad 7+\boxed{} \\ \hline & \quad 18 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -10 & -4 \\ & -4 & 28 & \\ \hline 1 & -7 & 18 & \end{array}$$

A partir del esquema de la división sintética anota el polin ue corresponda a los elementos que se mencionan a continuación:

Cociente:________________
Dividendo:_______________
Residuo:_________________
Divisor:_________________

¿A partir de estos elementos como expresarías el resultado de la división?
____

ACTIVIDAD 5

1.-El siguiente esquema representa la división sintética del polinomio $x^2 + 2x - 15$ entre el polinomio lineal $x - 5$. Completa los datos que hacen falta.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{} & 5 \\ & \boxed{} & 35 & \\ \hline 1 & 7 & \boxed{} & \end{array}$$

Construye el polinomio que corresponde al resultado_______________________________________

2.- ¿Es posible utilizar el algoritmo de división sintética para realizar la división del polinomio $x^2 + 5$ entre el polinomio $2x + 8$?. Justifica tu respuesta____

3.- ¿Será posible utilizar el algoritmo de división sintética donde el dividendo sea el polinomio *P(x) =0?*.Justifica tu respuesta____

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-856

TECNOLOGIAS DIGITAIS E A PRÁTICA DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Jonson Ney Dias da Silva- Ana Paula dos Santos Malheiros
jonson.dias@uebs.edu.br - malheiros.anapaula@gmail.com
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia(UESB)/Brasil – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP)/Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Níveleducativo: Educação de Adultos
Palavras-chave: Educação Matemática Jovens e Adultos; Tecnologias; Ensino de Jovens e Adultos; Prática Docente

Resumo

O presente trabalho apresenta uma pesquisa de doutorado, em andamento, que visa investigar como ocorrem as práticas pedagógicas de professores que ensinam Matemática com o uso das Tecnologias Digitais (TD) na Educação de Jovens e Adultos (EJA). Para tal propósito, será utilizada uma abordagem qualitativa e os dados estão sendo produzidos por meio de entrevistas e observações (diários de campos e filmagens) em turmas de EJA do Centro Integrado de Educação de Jovens e Adultos (CIEJA)/ Campo Limpo, situado na Zona Sul na cidade de São Paulo – SP - Brasil. Ao longo do estudo será discutido o uso de TD na prática pedagógica de professores que ensinam matemática no contexto da EJA, estabelecendo um diálogo entre esses campos de pesquisa. Tal investigação visa contribuir com a discussão na área de estudos sobre a Educação Matemática de Jovens e Adultos e TD, além de evidenciar subsídios para pensar e discutir sobre aspectos da formação e do desenvolvimento profissional de professores que lecionam matemática na EJA.

1. Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil, se constitui uma modalidade de ensino, que oferece o acesso a educação regular para pessoas que, por qualquer motivo, não concluíram o ensino fundamental e/ou o médio na idade apropriada. Esta modalidade se diferencia, por apresentar um público particular, que possui características diferentes aos alunos do "ensino regular" (CEMBRANEL, 2009), e por proporcionar oportunidades educacionais adequadas em relação a interesses, condições de vida e de trabalho desses alunos, mediante cursos e exames próprios.

ISBN 978-84-945722-3-4

Os jovens e adultos de classe populares caracterizam a EJA com suas especificidades constituídas pela diversidade, pelas diferenças entre eles. Um público formado por trabalhadores proletariados, desempregados, donas de casa, jovens, adultos, idosos, pessoas com necessidades especiais, privados de liberdades, indígenas, afrodescendente, imigrantes, entre outros, de diferentes culturas, etnias, religiões, crenças, os quais constituem abrangentes formas de ser, de viver, de pensar e de agir.

Compreendendo adiversidade existente nas salas da EJA, na Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (BRASIL, 2002) é sugerido queo ensino de Matemática,desta modalidade, deve contribuir para a valorização da diversidade sociocultural. Sendo assim, os professores podem criar condições para que os alunos utilizem do conhecimento prévio ese tornem agentes da transformação de seu ambiente, participando mais ativamente no mundo do trabalho, das relações sociais, da política e da cultura.

Desse modo, as aulas de matemática podem proporcionar situações, que explorem o *background* dos alunos (SKOVSMOSE, 2014), o qual pode variar de acordo com as experiências matemáticas, tanto individual quanto coletiva. Segundo Fonseca (2011), os alunos em função das demandas e experiencias de vida no mundo adulto, já apresentam modospeculiares de resolver problemas, de organizar e analizar situações criando conceitos ou procedimentos matemáticos, os quais foram adquiridos em diversas instâncias da vida social e cultural.

Esses modos, denomidados pela autora, de*matematicar* dos alunos da EJA, são muito mais amplos do que terem habilidades para resolver problemas (como medir, comparar, analisar). É um conjunto de práticas, que faz parte do cotidiano deste sujeito, úteis para as relações sociais, as quais constituem e refletem sua identidade sociocultural.

Portanto, o professor pode desenvolver uma proposta de trabalho, na qual os conceitos se formem a partir das vivências, interações sociais e experiências pessoais dos jovens e adultos. Estimulando a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas, não apenas numéricas, mas também aquelas relativas à geometria, às medidas e à estatística, incorporando sempre contextos do cotidiano, para que os alunos adquiram diferentes formas de perceber a realidade.

Para Brasil(2002), a EJA também têm o desafio de promover o acesso à tecnologia, sua apropriação na resolução de problemas, desenvolvendo saberes matemáticos em um

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

mundo tecnológico. As Tecnologias Digitais (TD) devem contribuir para as necesidades educacionais e nas interações pedagógicas, incentivando a aprendizagem em pares, o trabalho colaborativo, a reorganização, o desenvolvimento e a flexibilidade curricular, com a proposição de pesquisas e projetos que atendam às expectativas do ensino e apredizagem da EJA (BRASIL, 2002).

Kenski (2012) afirma que a escola tem o desafio de se adaptar aos avanços das tecnologias e orientar seus alunos no caminho para o domínio e apropriação crítica desse meio. Segundo a autora, é uma oportunidade que o homem tem para acompanhar o movimento dinâmico do mundo moderno, adaptando-se aos avanços tecnológicos.

Para Borba, Scugulia e Gardanidis (2015), as TD têm modificado aspectos sociais dos seres humanos, como o trabalho, a comunicação e o tempo. Para esses autores, sua utilização altera comportamentos, pois impõe-se à cultura existente e transforma não apenas a conduta individual, mas de todo um determinado grupo social. As TD podem modificar o desenvolvimento do raciocínio, por possibilitarem a experimentação e uma comunicação dinâmica que envolve escrita, oralidade e imagens (BORBA; VILLARREAL, 2005).

No que tange a EJA cabe reforçar o quão é importante o trabalho com as TD, devido ao fato de estarem incorporadas nas práticas desenvolvidas no trabalho, na feira livre, nas relações cotidiana nas práticas de fazer Matemática. Percebe-se que o uso de celulares, aplicativos, calculadoras, notebook, etc, se fazem presentes dentro e fora de sala de aula de uma parte dos professores e alunos dessa modalidade.

Sendo assim, o professor da EJA pode utilizar as TD no trabalho docente, pois a inserção das mesmas nas suas práticas pedagógicas pode incentiva os alunos a interagir com os objetos do conhecimento de maneira mais rica, além de sua utilização estar presente na maior parte do cotidiano da sociedade (VALENTE, 1999).

Portanto, pode-se utilizá-las no sentido cultural, científico e tecnológico, de modo que os alunos adquiram condições para enfrentar os problemas e buscar soluções para viver no mundo contemporâneo (BAIRRAL, 2013). Para Moran, Masseto e Behrens (2000), existe uma necessidade de se educar para os usos democráticos, mais progressistas e participativos das tecnologias que facilite uma evolução das pessoas.

Entretanto, ainda existe uma parcela dos professores, de todos os níveis e modalidades, que sente dificuldades para realizar um trabalho interativo com essas

ISBN 978-84-945722-3-4

tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática (BORBA, SCUCUGLIA, GARDANIDIS, 2015, BORBA, PENTEADO, 2007; KENSKI, 2012). Para Kenski (2012), o professor, superando tais dificuldades, pode utilizar essas tecnologias no sentido de dominar os recursos tecnológicos, (re)significando as práticas pedagógicas no processo de ensino e aprendizagem, elaborando projetos que integrem a escola e seus participantes tendo as TD como estruturantes desse processo.

A inserção das TD, naprática pedagógica desenvolvida na EJA, pode definir as relações entre o conhecimento a ser ensinado, a mediação do professor e a maneira de exploração das tecnologias disponíveis, possibilitando uma possível melhora da aprendizagem desses alunos. Diante dessas constatações, o presente trabalho tem por finalidade apresentar uma pesquisa de doutorado em andamento, a qual objetiva *investigar como ocorrem as práticas pedagógicas de professores que ensinam Matemática com o uso das Tecnologias Digitais (TD) na Educação de Jovens e Adultos (EJA).*

Investigar as práticas pedagógicas do professor, traz reflexões para discutir sobre aspectos como a formação e o desenvolvimento profissional de professores que lecionam Matemática na EJA, e como asTD estão inseridasou como modificam suas ações pedagógicas.Esse fato possibilita ao professor pensar de forma crítica sobre sua prática, tendo uma visão ampla sobre a sala de aula e a escola que irá atuar.Principalmente aquele que se propõe a trabalhar com jovens e adultos, tendo que refletir sobre o ensinar, analisando sua prática pedagógica. Dessa forma, a pesquisa fortalece a construção de alternativas ao cenário educacional corrente.

2. Metodologia e Contexto

Entre os quadros teórico-metodológicos disponíveis, a abordagem qualitativa foi a mais adequada para este estudo, já que o objetivo é analisar um determinado fenômeno em seu ambiente natural (DENZIN; LINCOLN, 2005).Mais especificamente, entender como ocorrem as práticas pedagógicas de professores que ensinam Matemáticacom o uso das TD na EJA.

Genericamente, podemos compreender uma pesquisa qualitativa como uma atividade situada, que localiza o observador no mundo, composta de práticas materiais e interpretativas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

que dão visibilidade a esse contexto (DENZIN; LINCOLN, 2005). Nessa direção,tal abordagem pode ser compreendida como um processo dinâmico, que engloba as concepções de mundo e a experiência intuitiva do pesquisador, bem como o fenômeno, o método, os dados e a teoria (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

A produção de dados foi realizada em duas turmas da EJA do Centro Integrado de Educação de Jovens e Adultos (CIEJA)/Campo Limpo situado na Zona Sul na cidade de São Paulo – SP– Brasil. Essa instituição atende jovens e adultos em três períodos (manhã, tarde e noite), em seis turnos diários, articulando em seu projeto politico pedagógico o Ensino Fundamental e a Qualificação Profissional em Informática.

A escolha do contexto da pesquisa se deu pelo fato da escola ter um projeto de trabalho que vem se sobressaindo como um centro de referência da EJA no país, merecendo a inclusão no banco de dados da Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura (UNESCO) como referência mundial dessa modalidade.

Para alcançar o objetivo da pesquisa,como procedimentos de produção de dados,foram utilizados entrevistas, observações e gravações de vídeos das práticas pedagógicas dos professores.

As observações foram realizadas em duas turmas e registradas em diários de campos e nas filmagens nas salas de aula da EJA, nas quais os professores que ensinam Matemática estavam desenvolvendo atividades. Tal procedimento permitiu recolher impressões do mundo circunvizinho por meio de todas as faculdades humanas relevantes (ADLER; ADLER, 1994). Além de possibilitou um contato direto com o fenômeno pesquisado (AGROSINO, 2005), na tentativa de compreender como ocorrem as práticas pedagógicas de professores que ensinam Matemática com o uso das TD na EJA.

As entrevistas realizadas foram semiestruturadas, permitirando umroteiro aberto de perguntas proporcionando aliberdade nas respostas dos participantes.A entrevista adquiriu contornos mais elaborados do que uma conversa informal entre duas ou mais pessoas, e teve o objetivo de conhecer os professores e o contexto estudado. Para Fontana e Frey (1994), a

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

entrevista é como um instrumento, podendo possibilitar o acesso a informações não disponíveis por outros meios, permitindo o esclarecimento sobre o que é verbalizado, dando ao entrevistador condições de entender as visões dos participantes.

Nesse sentido, os professores verbalizaram aquilo que lhe vieram à mente, sendo possível conhecer: a sua formação, o tempo de atuação e perceber as concepções da EJA, TD e ensino de Matemática.Além de explanar suas opiniões sobre como ocorrem o uso das TD e a relação entre elas e o ensino de Matemática na EJA, bem como a influência em sua práticas pedagógicas.

Segundo Borba e Villarreal (2005), a pesquisa qualitativa desenvolvida por meio de entrevistas, filmagem e outros procedimentos de investigação, permite ao pesquisador construir uma compreensão mais profunda sobre a questão escolhida, condicionada pelo meio onde ele ou ela está envolvida. Nesta perspectiva epistemológica, o conhecimento é visto como contingente, conforme negociado entre as comunidades diferentes.

Entendendo que tal pesquisa procura trazer uma compreensão de como as práticas pedagógicas dos professores de Matemática podem ser modificadas quando as TD são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem da EJA. A visão de produção do conhecimento é consistente com a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), a qual entende que os seres humanos produzem conhecimento e mudam suas práticas junto com determinadas mídias.

Pode-se compreender, que as TD no contexto da EJA podem interagir com os alunos na construção do conhecimento, possibilitando a mudança da natureza do que é produzido, reorganizando o pensamento. A razão disso é que, de acordo com Borba e Villarreal (2005), os seres humanos são constituídos por tecnologias que alteram o seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses são constantemente transformados por essas tecnologias, que também são modificadas pelo homem. Dessa forma, os procedimentos adotados na produção dos dados estão em sintonia com a noção de um coletivo seres-humanos-com-mídias que produz conhecimento.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Próximos Passos

A pesquisa supracitada está em fase de análise de dados. Inicialmente, está sendo feito a leitura de todos os materiais produzidos (entrevistas, filmagens e diario de campo)na procura de regularidades e padrões para, consequentemente, desenvolver a produção de um conjunto de categorias iniciais descritivas de codificação, baseada no referencial teórico do estudo. Vale ressaltar que, a estratégia de análise de dados a luz de uma teoría, será utilizada para compreensão de como acontecem as práticas pedagógicas de professores que ensinam Matemática na EJA com o uso das TD.

Esse tipo de procedimento de multiplicidade é denominado triangulação, processo que pode auxiliar na compreensão do fenômeno pesquisado. Segundo Araújo e Borba (2004), esse tipo de procedimento pode aumentar a credibilidade da pesquisa que adota a abordagem qualitativa, sendo essa entendida como a plausibilidade, para os sujeitos envolvidos, dos resultados e interpretações desenvolvidas pelo pesquisador.

Espera-se, ao final deste trabalho de pesquisa, gerar contribuições teóricas à área científica, levando em consideração que as pesquisas, as quais relacionam TD e EJA vinculado ao Ensino de Matemática ainda são incipientes, como já apontava Borba (2004) e os estudos recentes de Ribeiro (2014) e Soares (2011). Além de trazer implicações para a prática do professor, ou seja, os professores passarão a compreender como ocorrem as práticas pedagógicas com o uso das TD e de que forma essa utilização pode influenciar na formação dos alunos da EJA. Tal reflexão pode contribuir com as discussões relacionadas a formação e do desenvolvimento profissional de professores que lecionam Matemática na EJA.

4. Referências bibliográficas

Adler, P. A.; Adler, P. (1994) Observational techniques. En: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. *Handbook of qualitative research*. cap. 23, p. 377-392, Thousand Oaks: Sage

Agrosino, M. V. (2005) Recontextualizing observation: ethnography, pedagogy and the Prospects for a Progressive Political Agenda. En: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. The Sage

ISBN 978-84-945722-3-4

Handbook of Qualitative Research. Third Edition, p. 729-745. London: Sage Publications: Thousand Oaks.

Araújo, J. L.; Borba, M. C. (2004) Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. En:Borba, M. C.; Araújo, J. L.(Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, p. 25-45, Belo Horizonte: Autêntica

Bairral, M. A. (2013). As TIC e a licenciatura em matemática: Em defesa de um currículo focado em processos. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 6, p. 1-20.

Bogdan, R. C. Biklen, S. K. (1994) Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.Porto: Porto Editora.

Borba, M.C. (2004) Brasil, alfabetismo matemático e tecnologias da inteligência. En: Fonseca, M.C.F.R.(Org.) Letramento no Brasil: Habilidades Matemáticas.Global, p.201-212, São Paulo: Paulo Montenegro.

Borba, M. C.; Villarreal, M. E.(2005)Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. 232 p.New York: Springer.

Borba, M. C.; Scucuglia, R.; Gadanidis, G. (2015)Fases das Tecnologias Digitais: Sala de Aula e Internet em Movimento.1ª Edição. 1ª. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil (2002)Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos: segundo segmento do ensino fundamental - 5a a 8a série. V.3, Brasília: Ministério da Educação e Cultura (MEC) /Secretaria de Educação Fundamental (SEF).

Cembranel, S. M. (2009)O ensino e a aprendizagem da Matemática na EJA. Bento Gonçalves, RS;. Disponível em: <http://bento.ifrs.edu.br/site/midias/arquivos/20105112711984simone_meireles_cembranel.pdf>. Consultado: 25/05/2015.

Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (2005) Introduction: The Discipline and the Practice of Qualitative Research. En: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. The Sage Handbook of Qualitative Research. Third Edition. P. 1- 32, London: Sage Publications: Thousand Oaks.

Fonseca, M. C. F. (2011) Educação Matemática de Jovens e Adultos: discurso, significação e constituição de sujeitos nas situações de ensino-aprendizagem escolares. En: Soares, Leôncio (Org.). Diálogos na educação de jovens e adultos.– 4. ed. P.225-242, Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Fontana, A.; Frey, J. H. (1994) Interviewing: the art of science. En: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. Handbood of qualitative research.cap. 22, p. 361-376.Thousand Oaks: Sage.

ISBN 978-84-945722-3-4

Kenski, V. M. (2012) Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação – 8ª Ed. – Campinas, SP: Papirus.

Moran, J.M.; Masseto, M.T.; Behrens, M.A. (2000) Novas tecnologias e mediação pedagógica. Campinas: Papirus.

Ribeiro, E. S. (2014)Estado da Arte da pesquisa em Educação Matemática de Jovens e Adultos: Um estudo das teses e dissertações defendidas no Brasil na Primeira Década do Século XXI.Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso.

Skovsmose, Ole. (2014) Um convite à educação matemática crítica. Campinas – SP: Papirus.

Soares, L. (2011) Analisando pesquisas de Educação de Jovens e Adultos. En: Soares, L.(Org.). Educação de Jovens e Adultos: o que revelam as pesquisas.P.15-22.Belo Horizonte: Autêntica.

Valente, J. A. (1999) Formação de professores: diferentes abordagens pedagógicas. In. Valente, J. A. (Org.). O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: Unicamp/Nied.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-857

CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DE UN PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL DE PRIMARIA PARA ABORDAR LA RAZÓN COMO SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN

Ana María Reyes Camacho – Leticia Sosa Guerrero
anyreca0712@hotmail.com – lsosa@mate.reduaz.mx
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", México. Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Núcleo temático: Formación del Profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación inicial de profesores, primaria, MTSK, razón.

Resumen

En este trabajo identificamos el conocimiento de un profesor en formación inicial de primaria para enseñar la razón como significado de la fracción a través de un estudio cualitativo. Esta investigación toma como referente el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés – Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) para obtener información sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés – Knowledge of Mathematics Teaching), al abordar el significado razón, a partir de un plan de clase y entrevistas semiestructuradas que permiten explorar conocimientos de actividades, tareas, ejemplos y ayudas. Así, identificamos conocimientos de tareas específicas para trabajar la razón que se proponen en el libro de texto de matemáticas de quinto grado de educación primaria (2012) en México y en un volumen de la serie Matemáticas para Educación Normal que incluye libros japoneses; sobre el conocimiento que el futuro profesor evidencia para seleccionar tareas del libro de texto, destaca identificar aquellas que abordan la razón como el cociente entre dos cantidades, mientras que la selección de tareas del volumen, atiende al conocimiento de la representación de razones en fracciones, decimales y rectas numéricas al realizar comparaciones del tipo parte-todo.

Planteamiento del problema

En México, la formación didáctica y disciplinar de los futuros profesores de primaria es un tema de discusión; en el campo de las matemáticas ha llevado al diseño de diferentes programas que intentan potenciar alguna de las líneas anteriores o establecer un equilibrio; sin embargo, las últimas reformas (SEP, 1997; DOF, 2012) dan cuenta que se ha privilegiado alguno de los extremos, es decir, en el Plan de estudios 1997 permeaba lo didáctico, mientras que, en el Plan de estudios 2012, el conocimiento disciplinar. Es en este contexto, donde

ISBN 978-84-945722-3-4

emerge el estudio de las fracciones y sus significados, como un tema central en el currículo de los profesores en formación inicial (Aguayo, 2005).

Para algunos investigadores (Fandiño, 2009; Llinares & Sánchez, 1997) las fracciones son vistas como un tema complejo por la diversidad de interpretaciones o significados que poseen, entre ellos: parte-todo, medida, cociente, razón y operador; mismos que se abordan en los planes de estudio de las instituciones de educación primaria (Lizarde, 2013), por lo cual, es necesario que los futuros profesores adquieran dichos conocimientos para favorecer su enseñanza y aprendizaje.

Actualmente, la mayoría de las investigaciones que se realizan sobre las fracciones apelan a la noción de fracción o la interpretación parte-todo; temas que se estudian en los primeros años en las escuelas primarias; mientras que el significado razón es uno de los menos explorados y que con frecuencia se aborda en los últimos grados. En este sentido, en este trabajo pretendemos identificar el conocimiento de un profesor en formación inicial de primaria para enseñar la razón como significado de la fracción, en un grupo de quinto grado de educación primaria, a través de un plan de clase y dos entrevistas semiestructuradas.

Referente teórico

Existen diferentes investigaciones sobre el estudio del conocimiento del profesor al momento de enseñar que han definido sus componentes, tal es el caso de los trabajos realizados por Shulman (1986). En la presente investigación, el modelo denominado el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés- *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), presentado por Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán (2013), se convierte en el referente teórico para el desarrollo de este trabajo. En la Figura 1 se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés. Cabe hacer mención que al interior de cada subdominio se han definido diferentes categorías que se presentan como producto de la elucubración teórica y de los datos empíricos trabajados en algunas investigaciones (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). Sin embargo, en la Figura 1 no se incluyen las categorías de cada subdominio.

El dominio conocimiento matemático (MK), considera tres subdominios de conocimiento: conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento de la estructura matemática

ISBN 978-84-945722-3-4

(KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). En el dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK) se integran los subdominios: conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) y conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT); este último es el objeto de estudio en el presente trabajo, desde donde se intenta profundizar en la categoría conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y ayudas, de manera concreta, en las tareas que emplea un profesor en formación inicial para abordar la razón como un significado de la fracción en un grupo de quinto grado de educación primaria en México.

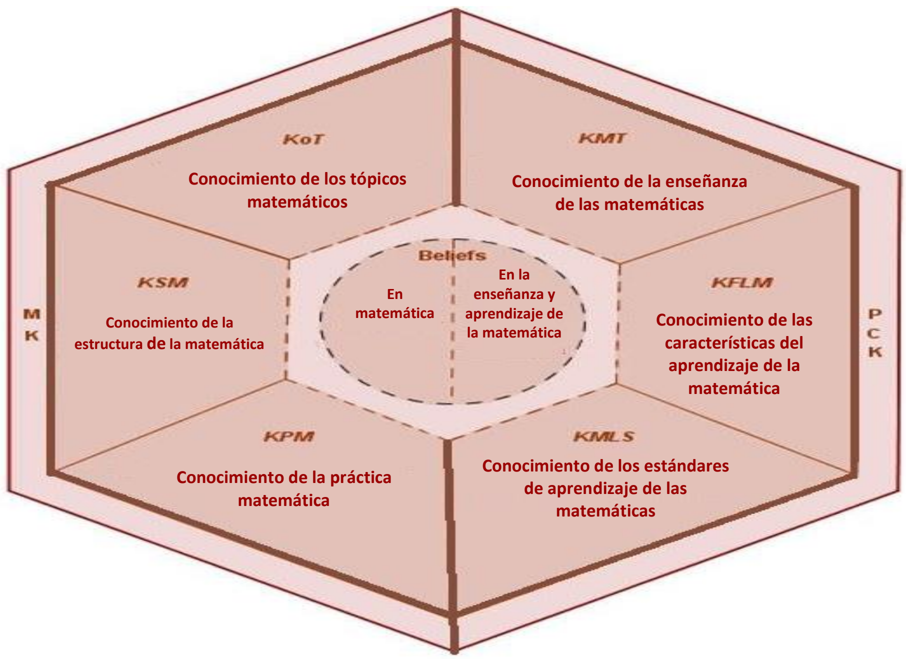


Figura 1: Diagrama del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK)* (Carrillo, Contreras & Flores, 2013).

Referente metodológico

El presente estudio atiende a una investigación cualitativa (Rodríguez, Gil & García, 1996), donde participa un Profesor en Formación Inicial (PFI) que cursa el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria bajo el Plan de Estudios 2012, el cual llevó todos los programas del área de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo preparación para la enseñanza y el aprendizaje: Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su

ISBN 978-84-945722-3-4

aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza y Procesamiento de la información estadística.

Las fuentes para la recogida de la información son un plan de clase (SEP, 2011) y dos entrevistas semiestructuradas (Álvarez-Gayou, 2012) donde el PFI tiene como propósito favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la razón como significado de la fracción.

Avances

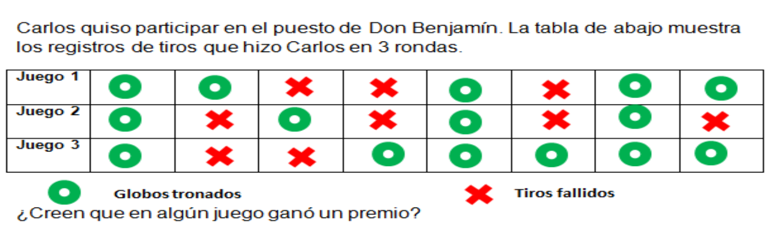
En este trabajo se avanza en la caracterización del KMT de un PFI para abordar el significado razón a partir de la información que arroja un plan de clase y dos entrevistas semiestructuradas. Enseguida se presentan los indicadores de conocimiento de tareas específicas: a), b) y c), que corresponden a la categoría actividades, tareas, ejemplos y ayudas, los cuales son acompañados de una explicación y una evidencia de la misma.

a) **Indicador de conocimiento:** Conocer tareas para abordar la representación de razones en fracciones y decimales a partir de la comparación parte-todo.

Para el caso del indicador anterior, el PFI recurre a un volumen de la serie Matemáticas para Educación Normal que incluye libros japoneses, sólo que cambia el contexto de las tareas, tal y como lo expresa en un fragmento de entrevista:

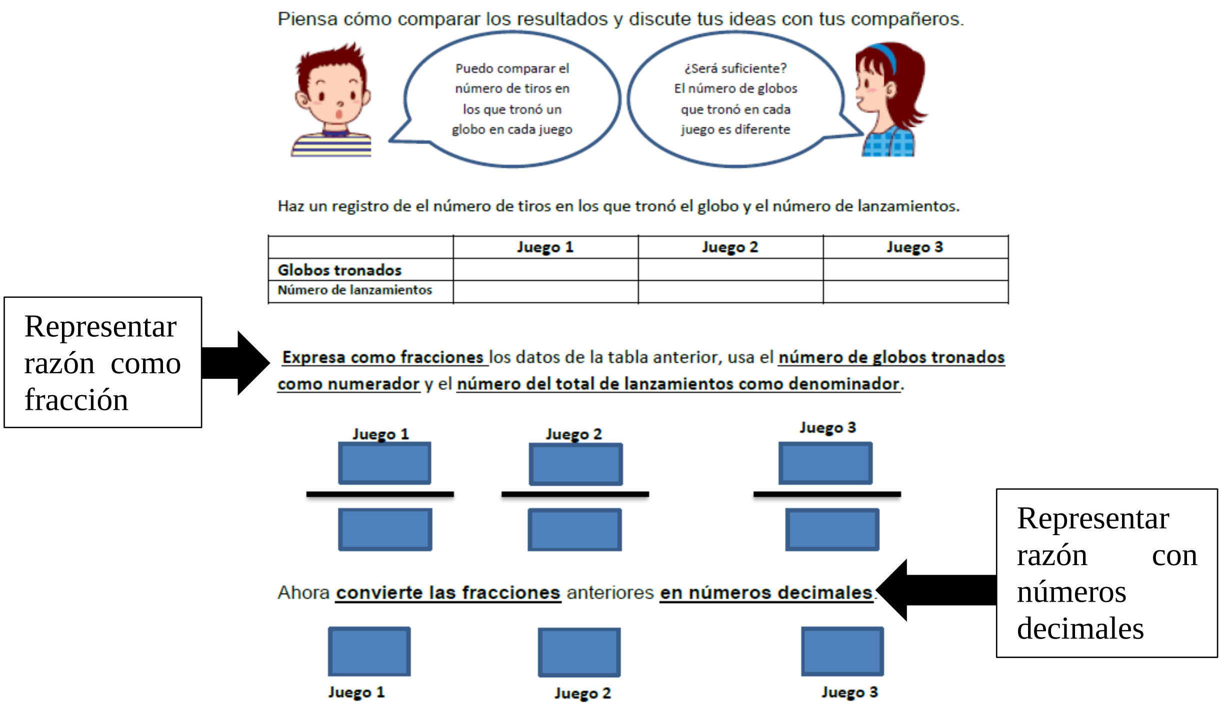
"…para el diseño de las actividades me apoyé en unos libros japoneses que vimos en los primeros semestres, sólo cambié el contexto en el que se desarrollan las tareas, por ejemplo, se habla de una gran fiesta que quiere realizar un alcalde para el Capitán "R""… "Encontré algunas actividades para representar las razones en fracciones, en decimales y en una recta…"

En el indicador de conocimiento a), el PFI privilegia el acomodo de las razones en fracciones, precisando que el número de globos tronados corresponde al numerador y el total de lanzamientos al denominador (parte-todo), además, en la última parte de la actividad solicita conviertan las fracciones a decimales; situación que los lleva a establecer una comparación de dos cantidades mediante un cociente (Cedillo, Isoda, Chalini, Cruz & Vega, 2012), lo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

cual se encuentra en las siguientes evidencias:



	Juego 1	Juego 2	Juego 3
Globos tronados			
Número de lanzamientos			

b) Indicador de conocimiento: Conocer tareas para abordar la representación de razones en decimales y recta numérica a partir de la comparación parte-todo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el segundo indicador de conocimiento b), sobre tareas específicas para abordar la razón en un grupo de quinto grado, nuevamente, el PFI toma como referente las actividades propuestas en un volumen de la serie Matemáticas para Educación Normal. En este sentido, el PFI también recurre al empleo de tareas a partir de una comparación parte-todo (número de personas-número de asientos); sin embargo, la pregunta que aparece después de la primer tabla que se presenta (¿qué mesa se encuentra más llena?), puede llevar a los alumnos a realizar una comparación aditiva o multiplicativa, lo cual define cuando aborda los términos "grado de aglomeración", guiándolos a que realicen una comparación multiplicativa, donde el valor de la razón está dado entre el 0 y el 1, porque la parte es menor que el todo; respecto a esto, en una de las entrevistas expresa que en la recta que plantea en la última parte de la hoja, corresponderá 0.8, es decir, 8 de cada 10 asientos están ocupados en la mesa grande. Enseguida se presentan las actividades propuestas para este segundo indicador de conocimiento:

Hoja de trabajo 2

Para rentar el mobiliario (mesas y sillas) el Alcalde visitó varias tiendas de renta, en la tienda "Fiesta Alegre" le rentaron una mesa "chica" para 130 personas y en la tienda "Todo para tu fiesta" le rentaron una mesa "grande" para 520 personas. Carlos y sus amigos registraron el número de personas que se sentaron en las dos mesas.

Número de personas y asientos

	Mesa "Chica"	Mesa "Grande"
Número de personas	117	416
Número de asientos	130	520

¿Qué mesa se encuentra más llena?

____

____

____

Para saber que tan lleno se encuentra cada mesa, el grado de aglomeración se describe como un número que permite comparar el número de personas sentadas respecto al número de asientos.

Grado de aglomeración = Número de personas ÷ Número de asientos

Cantidad que está siendo comparada

Cantidad de referencia

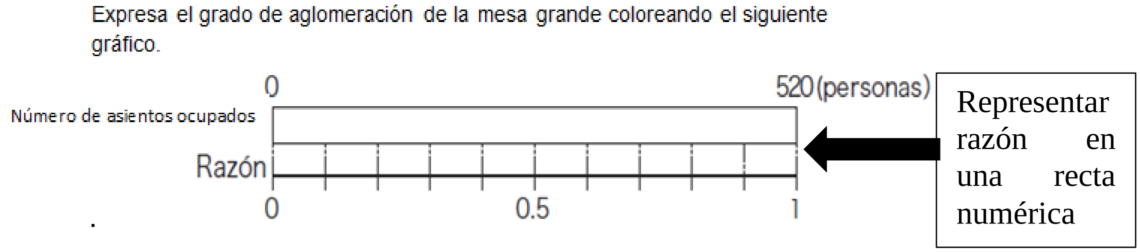
Encuentra que tan cerca están cerca están de agotar su capacidad las mesas.

Mesa chica 117 ÷ 130 = $\square$

Mesa grande $\square$ ÷ $\square$ = $\square$

Representar razón con números decimales

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



c) Indicador de conocimiento: Conocer tareas para trabajar la razón como cociente.

Las tareas que el PFI plantea en la última parte del plan de clase, denominada como institucionalización, son retomadas del libro de texto de matemáticas de quinto grado, lo cual expresa en un fragmento de entrevista:

"También revisé el libro de matemáticas de quinto grado para sacar unas actividades donde se trabajara la razón como cociente, ya que una razón es eso: el cociente de dos cantidades, yo investigué…"

En el tercer indicador de conocimiento c), las tareas propuestas por el PFI coinciden en trabajar la razón como cociente, lo cual se expresa textualmente en el plan de clase; dicha actividad es tomada del libro de texto de matemáticas de quinto grado (2012) de educación primaria. Como se puede apreciar, el PFI expresa conocimiento de la razón como cociente, es decir, como razón geométrica (Block, Mendoza &Ramírez, 2010) que lleva a los alumnos a

Fase de institucionalización:

En este último momento se les hablará a los alumnos que lo que estuvimos realizando fue comparar razones y se dará la siguiente definición más sintética:

Una razón es el cociente entre dos cantidades.

Se pondrá un ejemplo:

En el ejercicio del pozole la razón entre la cantidad de maíz y el número de personas es:

Cantidad de maíz   1000
--------------------------   =   -------
Número de personas   5

El número obtenido al simplificar la fracción anterior es el maíz añadido para cada persona.

Así es más fácil saber la cantidad de maíz por ejemplo para 7 personas.

pues simplemente se calcula:

7 x 1000/5 = 1.4 kg. o 7 x 200gr. = 1400 gr. O 1.4 Kg.

Podemos realizar el mismo procedimiento para saber la cantidad unitaria, ya teniendo esta cantidad es más fácil saber las demás.

Para comprobar lo anterior y como última actividad se les presentará la Diapositiva 5 en donde los alumnos tratarán de encontrar la cantidad de ingredientes del pozole para una persona.

ISBN 978-84-945722-3-4

expresar cuántas veces una cantidad es la otra, por ejemplo, cuántas veces cabe el 5 (número de personas) en el 1000 (cantidad de maíz en gramos), con el propósito de guiarlos a obtener el valor unitario y definir, posteriormente, la cantidad de maíz que se puede requerir para cualquier número de personas; lo anterior se encuentra en la siguiente evidencia tomada del plan de clase:

Conclusiones

A partir de la información arrojada por un plan de clase y las entrevistas semiestructuradas, se identifica que el PFI evidencia conocimientos del KMT, de manera concreta sobre tres tipos de tareas que contribuyen a la enseñanza y el apr[illegible]o significado de la fracción en un grupo de quinto grado: conoc[illegible]ara abordar la representación de razones en fracciones y decimales a partir de la comparación parte-todo, conocimiento de tareas para abordar la representación de razones en decimales y recta numérica en función de la comparación parte-todo y conocimiento de tareas para trabajar la razón como cociente; las primeras dos tareas tienen una secuencia porque su diseño tomó como referente un libro japonés de la serie Matemáticas para Educación Normal, mientras que la última tarea, es retomada del libro de texto de matemáticas de primaria (2012) de México.

Representar razón como cociente

Es conveniente hacer mención que los materiales anteriores se abordan en el curso aritmética: su aprendizaje y enseñanza, en el primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria, que es donde se estudian las fracciones y sus significados.

Por último, al igual que en otros avances de investigación que hemos presentado, nos permitimos citar que este trabajo contribuye a la identificación del KMT en un PFI, sin embargo, sólo es un reporte parcial de una investigación que está en curso y pretende caracterizar el MTSK de cuatro profesores en formación inicial de primaria, donde todos los subdominios son posibles guías para caracterizar el conocimiento disciplinar y didáctico que manifiesten al abordar el significado razón en un grupo de quinto grado.

Referencias bibliográficas

Aguayo, L. M. (2005). *La transposición del "saber didáctico". Un estudio con profesores en formación en el marco de los números racionales*. México: UPN (Tesis doctoral).

Álvarez-Gayou, J. (2012). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós Educador.

ISBN 978-84-945722-3-4

Block, D., Mendoza, T. & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cedillo, T., Isoda, M., Chalini, A., Cruz, V. y Vega, E. (2012). *Matemáticas para la Educación Normal: guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética*. México: Pearson/ SEP

Diario Oficial de la Federación. (2012). Acuerdo 649 por el que se establece el Plan de Estudios para la Formación de Maestros de Educación Primaria. México: Autor.

Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Magisterio.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Isoda, M. & Cedillo, T. (Eds.). (2012). *Matemáticas para la Educación Normal*. Tomo V, Vol. 2. México: Pearson, SEP.

Lizarde, E. (2013). *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico. Representaciones y prácticas en la formación inicial de profesores*. Tesis de doctorado publicada en http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/3/browse?value=Lizarde+Flores%2C+Eugenio&type=author. Huelva, España: Universidad de Huelva.

ISBN 978-84-945722-3-4

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.

Secretaría de Educación Pública. (1997). *Plan de estudios 1997. Licenciatura en educación primaria.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Acuerdo número 592 por el que se establece la articulación de la educación básica.* México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2012). *Matemáticas. Quinto grado. Libro del alumno.* México: Autor.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-860

DESARROLLO DEL BLOQUE DE ANÁLISIS EN 1º DE BACHILLERATO DESDE UNA PERSPECTIVA GLOBAL, CONECTANDO CONTENIDOS

Cristina Sánchez González
cris.sangon@gmail.com
I.ES. Maestro Juan Rubio (La Roda -Albacete-). España.

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato.
Palabras clave: Currículo, Matemáticas I, conexiones matemáticas, contextos.

Resumen

En el presente trabajo se realiza una propuesta para desarrollar el bloque de análisis de la materia de Matemáticas I de 1º de bachillerato en base a estas dos ideas:

- Utilizar de manera conjunta e integradora las herramientas del análisis (límites, continuidad y derivadas) para construir y estudiar las distintas familias de funciones (polinómicas, racionales, irracionales, ...) y estructurar el análisis en base al estudio de cada una de esas familias y de los contextos que las motivan. Y no en base al estudio independiente de dichas herramientas.

- Integrar el estudio del bloque de números y álgebra en el bloque de análisis en particular y, en general, en el resto de bloques del currículo.

1.- Hacia un enfoque más transversal e integrador.

En el Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, se puede leer:

"El currículo básico de Matemáticas no debe verse como un conjunto de bloques independientes. Es necesario que se desarrolle de forma global pensando en las conexiones internas de la asignatura tanto a nivel de curso como entre las distintas etapas".

Sin embargo, en el Currículo de Matemáticas I de 1º de bachillerato aparecen bloques completamente independientes (Bloque I: Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas. Bloque II: Números y Álgebra. Bloque III: Análisis. Bloque IV: Geometría. Bloque V: Estadística y Probabilidad), con estándares de aprendizaje diseñados a partir de los contenidos, que para nada favorecen "*el desarrollo global del currículo pensando en las conexiones internas de la asignatura"*.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Por otro lado, en los libros de texto de Matemáticas I de editoriales muy extendidas como Oxford, SM, Anaya, Editex y Santillana tampoco aparece un enfoque integrador sino que, de nuevo, se desarrollan los distintos bloques de manera independiente, comenzando por números y álgebra, seguido de geometría, análisis, estadística y probabilidad.

Bajo mi punto de vista, podemos integrar gran parte de los contenidos del bloque de números y álgebra en el resto de bloques del currículo y, en particular, en el bloque de análisis, lo cual potencia el estudio del álgebra desde una perspectiva más gráfica y dinámica y favorece la comprensión y visualización de relaciones algebraicas.

Por ejemplo, no es lo mismo resolver una ecuación o una inecuación de forma algebraica, sin más, que desde una perspectiva gráfica hallando, respectivamente, los puntos de corte con el eje X o el signo de la función correspondiente, función asociada a un contexto y con una gráfica que permite visualizar la situación y dotar de significado gráfico a las soluciones obtenidas.

Es por este poder de visualización por lo que considero que el bloque de análisis es un escenario ideal para trabajar gran parte de los contenidos de números y álgebra.

Por otro lado, he estructurado el bloque de análisis en base al estudio de las distintas familias de funciones y de los contextos que las motivan. Y no en base, como viene siendo habitual en libros de texto como los anteriormente citados, al estudio independiente de límites, continuidad y derivabilidad. Considero que lo importante no son las herramientas en sí sino utilizarlas de manera conjunta e integradora para construir y estudiar los distintos modelos de funciones, los cuales están presentes en multitud de situaciones reales. Y nuestro objetivo no es otro que el de tratar de comprender la realidad que nos rodea, creando los modelos oportunos.

2.- Propuesta de desarrollo del bloque de Análisis en la materia de Matemáticas I de 1º de bachillerato.

Tomando como referencia el Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, elaboro la programación didáctica de la materia de Matemáticas I de 1º de bachillerato. En dicha programación, la distribución de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en el bloque de análisis queda del modo siguiente:

ISBN 978-84-945722-3-4

UNIDAD 1: FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. FUNCIONES POLINÓMICAS.	
CONTENIDOS	
▪ Funciones reales de variable real. ▪ Funciones elementales: polinómicas. ▪ Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Límites laterales. ▪ Cálculo de límites de funciones de forma gráfica. Cálculo de límites de funciones polinómicas. ▪ Continuidad de una función. Estudio de discontinuidades de forma gráfica. ▪ Ecuaciones polinómicas. Inecuaciones. Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss. Problemas de aplicación.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
3.1. Identificar funciones, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.	3.1.1 Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales. 3.1.4 Estudia y analiza funciones en contextos reales.
3.2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	3.2.1 Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. 3.2.2 Determina la continuidad de la función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función. 3.2.3. Conoce las propiedades de las funciones continuas y reconoce los distintos tipos de discontinuidad de forma analítica y gráfica
2.4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.	2.4.1. Plantea, clasifica y resuelve un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas usando el método de Gauss. 2.4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.

UNIDAD 2: INTRODUCCIÓN A LA DERIVADA.	
CONTENIDOS	
▪ Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal. ▪ Función derivada. Cálculo de derivadas de funciones polinómicas. ▪ Aplicaciones de las derivadas. Optimización. ▪ Representación gráfica de funciones polinómicas.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	3.3.1 Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
3.4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	3.4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.

ISBN 978-84-945722-3-4

UNIDAD 3: FUNCIONES RACIONALES E IRRACIONALES.	
CONTENIDOS	
▪ Funciones elementales: racionales e irracionales. ▪ Cálculo de límites de funciones racionales e irracionales. Indeterminaciones. ▪ Estudio de discontinuidades de funciones racionales e irracionales. ▪ Cálculo de derivadas de funciones racionales e irracionales. Regla de la cadena. Aplicaciones de las derivadas. ▪ Representación gráfica de funciones racionales e irracionales. ▪ Ecuaciones racionales e irracionales. Problemas de aplicación.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
3.1. Identificar funciones, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.	3.1.1 Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales. 3.1.4 Estudia y analiza funciones en contextos reales.
3.2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	3.2.1 Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones. 3.2.2 Determina la continuidad de una función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función. 3.2.3 Conoce las propiedades de las funciones continuas y reconoce los distintos tipos de discontinuidad de forma analítica y gráfica.
3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	3.3.1 Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 3.3.2 Deriva funciones usando la regla de la cadena.
3.4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	3.4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis.
2.4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.	2.4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.

UNIDAD 4: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.	
CONTENIDOS	
▪ Sucesiones numéricas. Monotonía y acotación. Convergencia. El número e. ▪ Logaritmos decimales y neperianos. ▪ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. ▪ Funciones elementales: exponenciales y logarítmicas. ▪ Cálculo de límites de funciones exponenciales y logarítmicas. Indeterminaciones. ▪ Estudio de discontinuidades de funciones exponenciales y logarítmicas. ▪ Cálculo de derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones de las derivadas. ▪ Representación gráfica de funciones exponenciales y logarítmicas.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
2.3. Conocer el número e como límite de una sucesión y resolver problemas extraídos de contextos reales utilizando logaritmos.	2.3.1 Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas asociados a fenómenos físicos, biológicos o económicos. 2.3.2 Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas. 2.3.3. Reconoce sucesiones monótonas y acotadas y entiende, de manera intuitiva, el concepto de límite de una sucesión.
2.4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados.	2.4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas o no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema.
3.1. Identificar funciones, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.	3.1.1 Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales. 3.1.4 Estudia y analiza funciones en contextos reales.
3.2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	3.2.1 Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones.
3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	3.3.1 Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
3.4. Estudiar y representar gráficamente funciones obteniendo información a partir de sus propiedades y extrayendo información sobre su comportamiento local o global.	3.4.1. Representa gráficamente funciones, después de un estudio completo de sus características mediante las herramientas básicas del análisis. 3.4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

UNIDAD 5: FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.	
CONTENIDOS	
▪ Funciones elementales: valor absoluto y definidas a trozos. ▪ Operaciones y composición de funciones. Función inversa. ▪ Cálculo de límites de funciones definidas a trozos. ▪ Estudio de discontinuidades de funciones definidas a trozos. ▪ Cálculo de derivadas de funciones definidas a trozos. Aplicaciones de las derivadas. ▪ Representación gráfica de funciones definidas a trozos.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**
3.1. Identificar funciones, dadas a través de enunciados, tablas o expresiones algebraicas, que describan una situación real, y analizar, cualitativa y cuantitativamente, sus propiedades, para representarlas gráficamente y extraer información práctica que ayude a interpretar el fenómeno del que se derivan.	3.1.1 Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales. 3.1.2. Conoce las operaciones con funciones y las aplica en el cálculo de dominios. 3.1.3 Realiza composiciones de funciones y cálculo de funciones inversas. 3.1.4 Estudia y analiza funciones en contextos reales.
3.2. Utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.	3.2.2 Determina la continuidad de una función en un punto a partir del estudio de su límite y del valor de la función. 3.2.3 Conoce las propiedades de las funciones continuas y reconoce los distintos tipos de discontinuidad de forma analítica y gráfica.
3.3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	3.3.1 Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 3.3.3 Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

3.- Aclaraciones respecto al desarrollo de esta propuesta.

3.1.- En este enfoque se va dosificando el grado de dificultad y los contenidos se introducen, se retoman y se van ampliando a lo largo de las unidades: límites, continuidad, derivabilidad y cálculos algebraicos todo el tiempo presentes. Por ello, se da la circunstancia de que un mismo estándar de aprendizaje puede aparecer en más de una unidad didáctica.

3.2.- No se calcula por calcular. Los cálculos de cualquier tipo (límites, derivadas, ecuaciones, ….) están justificados. Además, los cálculos a un nivel razonable, poniendo más el énfasis en los contextos.

3.3.- Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje están redactados en las distintas unidades didácticas tal cual aparecen en el Real Decreto por el que se establece el currículo de ESO y bachillerato en Castilla-La Mancha. En cambio, los contenidos sí han sido adaptados a cada unidad didáctica. Por tanto, el grado de profundidad de cada estándar viene marcado por los contenidos. Por ejemplo, el estándar "*3.1.4 Estudia y analiza funciones en contextos reales"* que aparece en todas las unidades didácticas, hay que concretarlo, en cada unidad, a la familia de funciones objeto de estudio.

3.4.- A su vez, también puede ocurrir que en una unidad didáctica no aparezca algún estándar y, sin embargo, en el estudio de dicha unidad sí se trabaje dicho estándar en cierta medida. Esto ocurre, por ejemplo, con los estándares 3.1.2 y 3.1.3 relacionados con las operaciones con funciones. El estudio más formal de dichos estándares se realiza en la unidad 5, pero en

ISBN 978-84-945722-3-4

unidades anteriores ya se ha trabajado con ellos a un nivel más intuitivo. Por ejemplo, ya en las unidades 3 y 4 se trabaja con la idea de función inversa para introducir la función raíz cuadrada de x y la función logarítmica como inversas de la función cuadrática $y = x^2$ y de la función exponencial $y = e^x$, respectivamente.

3.5.- Las funciones trigonométricas se estudian en la unidad didáctica de trigonometría.

3.6.- Objetivos de cada unidad didáctica:

Objetivos Unidad 1: funciones reales de variable real. Funciones polinómicas.

- Estudiar las propiedades globales y locales de gráficas cualesquiera: dominio, recorrido, monotonía y ext. relativos, límites, continuidad, …... Solo cálculo algebraico de límites y continuidad para funciones polinómicas.
- Esbozar gráficas de funciones polinómicas de grado superior a partir del estudio de los límites en el infinito, P. C. ejes (se resuelven ecuaciones polinómicas) y signo (se resuelven inecuaciones polinómicas). Extremos relativos, todavía no.
- Conocer muy bien las funciones potenciales de exponente natural. Y saber moverlas para generar otras funciones polinómicas.
- Analizar situaciones vida real donde intervienen funciones polinómicas.

Respecto al estándar *"Plantea, clasifica y resuelve un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas usando el método de Gauss"*, si bien lo he incluido en esta unidad didáctica, dejo su estudio para 2º de bachillerato, nivel en el que, de nuevo, se trabajan estos sistemas de ecuaciones y el método de Gauss.

Objetivos Unidad 2: Introducción a la derivada.

- Primer acercamiento a la idea de derivada, desde la velocidad instantánea (funciones espacio-tiempo), algo muy próximo al alumno que tiene existencia real.
- Profundizar en el significado de la derivada y en su interpretación geométrica estudiando el ritmo de cambio instantáneo en diversidad situaciones reales que no son espacio-tiempo:

Centrados en trabajar el significado de la derivada, no en las reglas de cálculo de derivadas. Éstas, poco a poco y sin perder de vista el significado de la derivada.

- Generar una nueva función, función derivada f', que indica la pendiente de la curva en cada punto. Relacionar las gráficas de f y f '.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Representar funciones polinómicas de forma más precisa, determinando sus extremos relativos. Para ello, es necesario introducir el cálculo de derivadas de funciones polinómicas. Y solo de polinómicas.

- Primeros contextos de optimización con funciones polinómicas.

- Identificar gráficamente funciones no derivables en un punto.

Objetivos Unidad 3: Funciones racionales e irracionales.

- Conocer muy bien las funciones potenciales de exponente entero negativo. Y saber moverlas para generar otras funciones racionales.

- Esbozar gráficas de funciones racionales más complejas a partir del estudio del dominio (se resuelven ecuaciones polinómicas), continuidad y asíntotas (aparecen los primeros límites indeterminados), P. C. ejes (de nuevo, se resuelven ecuaciones polinómicas) y signo (inecuaciones racionales). Extremos relativos, todavía no.

- Realizar gráficas de funciones racionales más precisas determinando sus extremos relativos. Para ello, es necesario introducir el cálculo de derivadas de funciones racionales.

Con las funciones irracionales se sigue el mismo esquema:

- Conocer muy bien las más sencillas del tipo $y = x^{m/n}$ y saber moverlas para generar otras funciones irracionales. En particular, se introduce $y = x^{1/2}$ como la función recíproca de $y = x^2$, $x > 0$.

- Realizar gráficas de funciones irracionales más complejas a partir del estudio del dominio (se resuelven inecuaciones), continuidad, asíntotas, P. c. ejes (se resuelven ecuaciones irracionales) y monotonía y extremos relativos. Para ello, es necesario introducir el cálculo de límites y derivadas de funciones irracionales.

- Analizar situaciones vida real donde intervienen funciones racionales e irracionales. Profundizamos en la optimización de funciones.

Objetivos Unidad 4: Funciones exponenciales y logarítmicas.

- Retomar las funciones exponenciales y logarítmicas elementales ya estudiadas en 4º eso y, a partir de ellas, generar con movimientos otras funciones exponenciales y logarítmicas.

- Esbozar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas más complejas a partir del estudio del dominio, continuidad, P. C. ejes (se resuelven ecuaciones exponenciales y logarítmicas y se estudian las propiedades de los logaritmos), asíntotas y monotonía y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

extremos relativos. Necesario introducir el cálculo de límites y derivadas de este tipo de funciones.

- Analizar situaciones vida real donde intervienen funciones exponenciales y logarítmicas.

Respecto a las sucesiones, tan solo se introduce la sucesión $(1+1/n)^n$ para definir el número e. Una sucesión se entiende como un tipo particular de funciones de N en R, por lo que el límite de una sucesión no es más que el límite de una función en el infinito.

Obetivos Unidad 5: Funciones definidas a trozos.

En esta última unidad a la vez que se sigue profundizando en el estudio de las funciones, se retoman las técnicas y los modelos de funciones estudiados en las unidades anteriores, lo cual favorece la conexión de todos los contenidos. Objetivos:

- Representar gráficamente funciones a trozos. En particular, la función valor absoluto.
- Analizar situaciones de la vida real donde intervienen funciones a trozos.
- Profundizar en el estudio de la continuidad y derivabilidad de una función en un punto. Casos de funciones continuas en un punto pero no derivables.
- Formalizar las operaciones con funciones.

4.- Dificultades de aplicación.

En la puesta en práctica de esta propuesta he encontrado, principalmente, dos dificultades. La primera de ellas tiene que ver con la poca globalidad de los estándares de aprendizaje. Éstos están formulados en el Decreto pensando en contenidos, no en competencias. Por ejemplo, en la unidad 4 donde se trabajan de forma globalizada todas las herramientas relacionadas con las funciones exponenciales y logarítmicas, ¿qué sentido tiene utilizar toda esta cantidad de estándares que propone el currículo: *"Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas….", "Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas", "Resuelve problemas en los que se precisa el planteamiento y resoluciones de ecuaciones no algebraicas….", "Estudia y analiza funciones* (exponenciales y logarítmicas) *en contextos reales"* cuando, en realidad, todos están absolutamente relacionados porque persiguen un objetivo común que no es otro que el de estudiar situaciones que pueden modelizarse a través de funciones exponenciales y logarítmicas? Estos estándares así formulados solo tienen sentido si los logaritmos se estudian cuando se estudian números, las ecuaciones cuando se estudian ecuaciones y las funciones cuando se estudian funciones; pero no, cuando todo esto se trabaja de forma conjunta. Lo peor de todo

ISBN 978-84-945722-3-4

es, como ya he referido en puntos anteriores, que el currículo defiende un desarrollo global de la materia. Desde luego, estos estándares, no facilitan ni potencian este desarrollo global y, a su vez, complican la evaluación y calificación porque, en gran medida, nuestro referente para evaluar y calificar son los problemas y, en éstos, todas las herramientas se utilizan de manera combinada con el objetivo común de resolver el problema.

La segunda dificultad encontrada tiene que ver con la imposibilidad de dar cumplimiento a la enorme extensión de la programación didáctica. Por eso, hay contenidos como resolución de sistemas por el método de Gauss, sucesiones e incluso determinación de puntos de inflexión que no he podido abordar este curso por falta de tiempo. Son demasiadas ideas que generar. No disponemos del tiempo que sería necesario para reflexionar, para descubrir, para verles trabajar y adaptar el ritmo a sus necesidades. Esto es fundamental y nuestros currículos son tan exigentes que dificultan enormemente estas metodologías activas y potencian, en cambio, un trabajo rápido y superficial que está afectando al rendimiento de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

- Decreto 40/2015, de 15/06/2015, por el que se establece el currículo de ESO y Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha.

- Azcárate, C. (2010). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

- Grupo Cero (1981). *Matemáticas de Bachillerato. Volumen 2.* Barcelona: Teide.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-861

HABILIDADES MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS DE PRIMER CURSO DEL GRADO EN ADE

– M. Victoria Caballero – Matilde Lafuente – Valentina Alacid
mvictori@um.es – mati@um.es – alacid@um.es
Universidad de Murcia

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: 4º
Palabras clave**:** Destrezas matemáticas; conceptos básicos; prueba test.

Resumen

Este trabajo es el resultado de la preocupación por la formación matemática con la que entran en la Facultad de Economía y Empresa nuestros estudiantes, y su objetivo es evaluar las destrezas y las deficiencias de los conocimientos matemáticos de los alumnos de primer curso. Esta inquietud nos ha llevado a formar parte de un grupo de innovación educativa creado en la Universidad de Murcia, que tiene como objetivo la elaboración de materiales para ayudar a los alumnos a superar sus carencias formativas en matemáticas, expresión oral y escrita,....y las conclusiones de este trabajo formarán parte de la memoria final de este grupo. Para cuantificar esta falta de habilidades hemos elaborado una serie de baterías de preguntas tipo test correspondientes a los distintos aspectos que queríamos evaluar: simplificaciones, propiedades aritméticas básicas, operaciones con potencias, resolución de ecuaciones e inecuaciones.... y a partir de ellas~~,~~ hemos creado pruebas tipo test que se han pasado a nuestros alumnos a través de la herramienta exámenes del aula virtual.

El análisis de las pruebas realizadas y las conclusiones obtenidas se muestran en este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años hemos observado que los alumnos de primer curso del grado en Administración y Dirección de Empresas (ADE) y también, aunque en menor medida los del

ISBN 978-84-945722-3-4

doble grado en ADE y Derecho, tienen importantes carencias de las destrezas en matemáticas básicas que debían de haber sido adquiridas en los cursos de enseñanza previos al comienzo de sus estudios de grado, y que son la base de un buen número de las asignaturas de estos estudios.

Estas carencias hacen que algunos alumnos tengan dificultades en superar las asignaturas de carácter cuantitativo y otros alumnos, aunque aprueben, obtienen peores calificaciones que las que alcanzarían si hubieran tenido los mínimos conocimientos matemáticos que creemos necesarios para superar estas materias. Muchos de nuestros alumnos perciben estas dificultades como insalvables, lo que les desmotiva y les conduce, en muchas ocasiones, al abandono de sus estudios. Pero las deficiencias matemáticas no son las únicas carencias de estos estudiantes, los profesores de las demás asignaturas de estos grados sostienen que los alumnos de nuevo ingreso también adolecen de falta de destrezas en expresión oral y escrita, compresión lectora,…

Para intentar paliar esta situación en julio de 2016 se crea en la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Murcia el grupo de Innovación Docente “Acciones para la mejora del rendimiento de los estudiantes de primer curso de la Facultad de Economía y Empresa”, del que formamos parte. Dentro de él y para este curso 2016-17, nos ha sido concedido el proyecto de innovación docente “Elaboración de materiales interactivos sobre conceptos básicos de Matemáticas para las Ciencias Sociales”, en el que participan también otros profesores del grupo.

La tarea principal del proyecto es la elaboración de presentaciones interactivas y de video tutoriales, donde se recuerden los conceptos matemáticos básicos que se aplican en la resolución de problemas. Antes de llevarla a cabo se hacía necesario concretar cuáles son las carencias de nuestros alumnos y cuantificarlas de alguna manera. Para ello, hemos utilizado pruebas test y hemos calculado el grado de dificultad de los resultados obtenidos. En la sección 2, definimos el grado de dificultad y mostramos los resultados de la prueba test realizada el primer día de clase. A mitad del cuatrimestre, realizamos una segunda prueba test, que hemos llamado prueba de seguimiento, está vez a través del aula virtual de la Universidad de Murcia, los resultados se presentan en la sección 3. Por últimos en la sección 4, realizamos una serie de reflexiones sobre la situación de nuestros alumnos y cómo abordar posibles soluciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

2. PRUEBA INICIAL

Para cuantificar el grado de dificultad que tiene una pregunta test o una batería de preguntas test (se utilizan en la prueba de seguimiento) para los alumnos se define ***grado de dificultad*** de la misma como el porcentaje de preguntas con respuestas incorrectas o sin respuesta sobre el total de preguntas. Por tanto,

$$Grado\,dificultad = \frac{n^{o}\,de\,respuestas\,erroneas + n^{o}\,de\,preguntas\,\sin\,respuesta}{n^{o}\,total\,de\,preguntas} \times 100$$

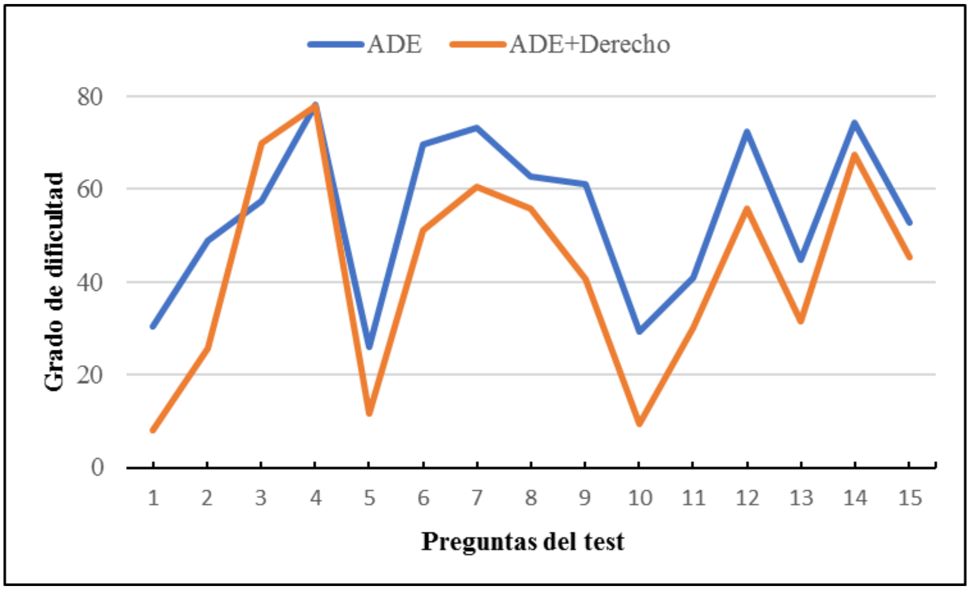
Esta forma de medir la dificultad se utiliza en las pruebas test del aula virtual de la Universidad de Murcia. Además, nos parece especialmente conveniente en esta ocasión, dado que las preguntas se refieren a cuestiones que los alumnos deberían conocer bastante bien y “en teoría” no deberían dudar.

En la primera semana del presente curso realizamos una prueba presencial de conceptos básicos que los estudiantes deberían conocer una vez que han accedido a los estudios universitarios. El objetivo fundamental de esta prueba era conocer las carencias matemáticas que tenían nuestros estudiantes de nuevo ingreso para poder actuar sobre ellas. La prueba estaba formada por 15 preguntas test sobre cuestiones sencillas relacionadas con la aplicación de las propiedades básicas de las operaciones con polinomios o con potencias, simplificaciones, ecuación de una recta y de una parábola, etc. La prueba inicial se muestra en el anexo I. Cada una de las preguntas test tiene tres opciones, de las que solo una es correcta y la penalización aplicada es eliminar una pregunta bien por cada dos que se contesten mal. Las preguntas sin respuesta no penalizan.

La prueba la hicieron 174 alumnos (35% de los nuevos matriculados) del grado en ADE y 86 alumnos (94% de los nuevos matriculados) del doble grado en ADE+Derecho.

Gráfico 1. Grado de dificultad de la prueba inicial

ISBN 978-84-945722-3-4



El grado de dificultad de cada pregunta, para cada titulación, lo recogemos en el Gráfico 1. Todas las preguntas, salvo la número 3, tienen un grado de dificultad superior para los alumnos de ADE que para los alumnos del doble grado. Las diferencias se recogen en el gráfico 2. La pregunta 4, que tiene por objetivo saber si los alumnos conocen la propiedad que verifica el producto de potencias de la misma base, tiene el mayor grado de dificultad (el 78,16% para ADE y el 77,91%, para ADE y Derecho). Creemos que se debe a que en la expresión de los exponentes aparece la raíz cuadrada y los estudiantes se confunden debido al escaso manejo que tienen del lenguaje algebraico.

Preguntas con un elevado grado de dificultad son la 7, que implica simplificaciones polinómicas (73,29% frente a 60,61%), la 12, que analiza la solución de una inecuación (72,41% frente a 55,81%) y la 14, donde tienen que señalar la pendiente de una recta (74,14% frente a 67,44%).

Mención especial, por la simplicidad de la pregunta y el elevado grado de dificultad es la pregunta número 6:

"La expresión $-x^2$, con $x \neq 0$,

a) es siempre positiva.
b) es siempre negativa.
c) puede ser negativa o positiva, dependiendo del signo de x."

ISBN 978-84-945722-3-4

El grado de dificultad para los alumnos de ADE fue del 69,54% (53 alumnos contestaron bien esta pregunta, 111 mal y 10 la dejaron en blanco); y para los alumnos del doble grado del 51,16% (42 estudiantes marcaron la opción correcta y 44 una incorrecta).

El grado de dificultad de la pregunta número 3, que consiste en calcular $16^{1/2}$, para los estudiantes del doble grado es de 69,77% frente al 57,47% para los de ADE.

3. PRUEBA DE SEGUIMIENTO

Para la configuración de la prueba de seguimiento se crearon 14 baterías de preguntas test que abordaban los siguientes aspectos:

Batería1: Simplificación (5 preguntas).

Batería 2: Ecuaciones logarítmicas y exponenciales básicas (5 preguntas).

Batería 3: Ecuaciones logarítmicas y exponenciales (7 preguntas).

Batería 4: Factorización de polinomios de grado 2 (3 preguntas).

Batería 5: Factorización de polinomios de grado 3 (4 preguntas).

Batería 6: Inecuaciones lineales (3 preguntas).

Batería 7: Inecuaciones cuadráticas (5 preguntas).

Batería 8: Aritmética básica (11 preguntas).

Batería 9: Aritmética (5 preguntas).

Batería 10: Otras inecuaciones (5 preguntas).

Batería 11: Parábolas (4 preguntas).

Batería 12: Potencias, nivel básico (8 preguntas).

Batería 13: Potencias (5 preguntas).

Batería 14: Rectas (6 preguntas).

La prueba constaba de un total de 17 preguntas test que se seleccionaron de forma aleatoria. Se tomaron dos preguntas de las baterías 3, 8 y 12, y una pregunta de cada una de las baterías restantes.

Esta prueba tuvo lugar a principios del mes de noviembre (ya llevábamos 6 semanas de clase), y se llevó a cabo a través de la herramienta "exámenes" del aula virtual. Los estudiantes podían elegir cuándo y dónde realizar la prueba, pero una vez comenzada disponían como máximo de 50 minutos para hacerla.

ISBN 978-84-945722-3-4

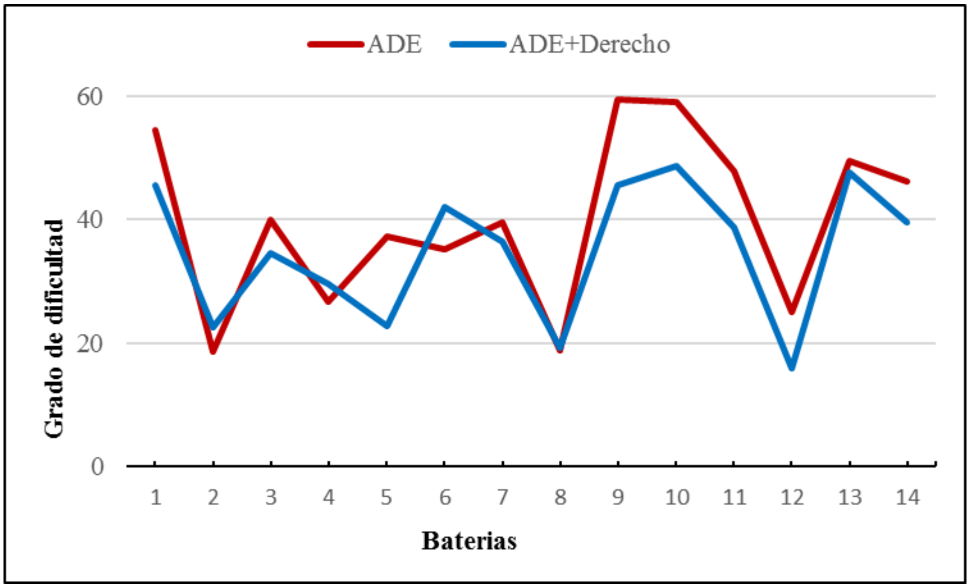
Ya habíamos acabado el tema 1, cuyos contenidos deberían ser conocidos en su mayor parte por los estudiantes, pues son un repaso de funciones reales de una variable. Además, en este tema, se incluye una primera sección de preliminares, donde se repasan la mayor parte de los conceptos básicos que formaban la prueba inicial. Se advirtió a los alumnos que estos conocimientos debían de haber sido adquiridos en cursos anteriores y que debían repasarlos. Realizaron esta prueba test un total de 180 estudiantes del grado en ADE y 44 del doble grado en ADE y Derecho. Por otra parte, somos consciente de que parte de los alumnos seguramente contaron con ayuda para realizar el test, pues se trata de una prueba virtual, y como consecuencia los grados de dificultad obtenidos estarán sesgados a la baja. Aun así pensamos que el análisis de estos resultados proporciona información útil acerca de la situación de nuestros estudiantes en lo que a destrezas matemáticas se refiere.

El gráfico 4 muestra el grado de dificultad de las distintas baterías para los alumnos de los dos grados. El mayor grado se alanza en la batería 9, Aritmética, para el grado en ADE y en el grupo de "otras inecuaciones" para el doble grado. Lo primero que se advierte es que la dificultad sigue siendo mayor para los alumnos del grado en ADE, en casi todos los casos.

En ambas titulaciones las baterías 1, 9, 10 y 13 son las que presentan grados de dificultad mayores. De ellas la 1, la 9 y la 10 en ADE tienen una dificultad superior al 54% y en el doble grado entre el 45% y el 49. Las preguntas de las baterías 1 y 9 son cuestiones relativas a la simplificación y manejo de expresiones algebraicas, que ya presentaron grados de dificultad altos en el test inicial en todos los grupos que hicieron la prueba.

Gráfico 4. Grado de dificultad de las baterías de preguntas test

ISBN 978-84-945722-3-4



La batería 13 contiene preguntas sobre potencias, dado que las propiedades de las potencias se repasan en el tema 1 de Matemáticas para la empresa I, cabría esperar que los resultados fueran mejores.

En las preguntas de la batería 10 se piden las soluciones de inecuaciones del tipo de las que los estudiantes tienen que resolver para hallar el dominio de una función o para estudiar la monotonía y curvatura de las funciones de una variable. Es fundamental que este tipo de cuestiones las resuelvan correctamente, pero no lo hacen. Otras baterías relativas a inecuaciones son la 6, inecuaciones lineales, y la 7, sobre inecuaciones cuadráticas. En la batería 6, el grado de dificultad es más de 6 puntos porcentuales superior para los alumnos del doble grado que para los alumnos de ADE, llegando casi al 42%. Recordamos que en el test inicial la pregunta 13, en la que se pedía la solución de una sencilla inecuación lineal también resultó ser de las más complicadas.

Las dos baterías sobre ecuaciones logarítmicas y exponenciales son la 2 (nivel básico) y la 3. La batería 2 es la que tiene un grado de dificultad menor para los alumnos de ADE, un 18,2%, y para los estudiantes de ADE y Derecho, 22,5%. Las propiedades de los logaritmos, las funciones exponencial y logarítmica, sus propiedades y la relación entre ellas, se repasan a principio de curso. Además, en la primera relación de problemas se propone la resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Pensamos que este puede ser el motivo por el que

ISBN 978-84-945722-3-4

la batería 2 haya resultado menos complicada. Sin embargo, en cuanto las cuestiones requieren un poco más de aritmética, la dificultad sube, de ahí los resultados de la batería 3. Las baterías 4 y 5 relativas a la factorización de polinomios de grado 2 y 3 respectivamente tienen grados de dificultad que varían entre el 22,7% (batería 3, ADE+Derecho) y el 37,2 (batería 3, ADE), un poco alto este último valor a nuestro parecer, para ser cuestiones tan fáciles. Por último, tanto la batería 8, sobre cuestiones de aritmética básica, como la 12, con preguntas sobre potencias a nivel básico han resultado con grados de dificultad relativamente bajos.

4. Reflexiones

Los resultados de las pruebas que hemos pasado a nuestros alumnos muestran que las mayores dificultades las encuentran en las cuestiones relativas a simplificaciones y operaciones con expresiones algebraicas y resolución de inecuaciones, así como en cuestiones relativas a rectas y parábolas en el plano, resultados parecidos a los obtenidos en el estudio realizado por Martín-Caraballo et. al. (2007).

La no obligación de examinarse de la materia de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales para acceder al grado de ADE ha favorecido que los alumnos no la cursen en el último curso de bachillerato, de modo que cuando acceden a este grado hace años que no han visto nada de matemáticas y han olvidado hasta las cuestiones más elementales. Además, tal como lo expresan Gómez-Déniz et al. (2015), es posible que en los propios centros de bachillerato se anime a los estudiantes, que tienen dificultades en matemáticas, a abandonar estas asignaturas, si van a realizar un grado de ciencias sociales:

> *"En este sentido es cada vez más frecuente tener en nuestras aulas estudiantes que en su formación previa han evitado cursar las asignaturas de matemáticas. Como manifiestan los estudiantes: "en sus centros de estudio preuniversitarios son orientados a no elegir las matemáticas porque les han comentado que no son necesarias para los estudios de empresa, y de ese modo, si no la cursan, las posibilidades de alcanzar una mejor nota en las Pruebas de Acceso a la Universidad son mayores".*

ISBN 978-84-945722-3-4

Creemos que el hecho de que en las nuevas pruebas de acceso a la universidad, al menos en la Región de Murcia, todos los alumnos que quieran cursar ADE, Economía o Marketing tengan que examinarse de matemáticas en la fase general va a favorecer una mayor preocupación de los estudiantes por esta materia y una implicación, aún mayor, si cabe, de los profesores de bachillerato en la formación matemática de sus estudiantes, previa a la entrada en la Universidad. Por nuestra parte queremos incluir una prueba relativa a conceptos básicos a principio de curso, como parte de la evaluación continua de la asignatura Matemáticas para la Empresa I, que debería tener un peso de alrededor del 4% en la nota final de la asignatura y que podría ser una forma de favorecer que nuestros alumnos se preocuparan por mejorar su formación básica en matemáticas.

Con el fin de ayudar a conseguir este objetivo estamos preparando, dentro de un proyecto de innovación docente, materiales interactivos donde se repasan estos conocimientos básicos y se muestra la necesidad de conocerlos bien en muchas asignaturas de los grados que se imparten en la Facultad de Economía y Empresa. Estarán disponibles para nuestros estudiantes a partir del próximo curso y se centran en los conceptos en los que tienen nuestros estudiantes tienen más problemas, que han sido señalados en este trabajo. La participación en el proyecto de profesores de otras asignaturas hace posible la realización de materiales multidisciplinares donde se señala la importancia del conocimiento de las cuestiones matemáticas sencillas que se muestran aquí para la superación de dichas materias.

5. Referencias

- GÓMEZ-DENIZ, E., GARCÍA-ARTILES, M.D. y DÁVILA CÁRDENES, N. (2015). "Estudio de los factores determinantes de las notas de Matemáticas Empresariales". Anales de ASEPUMA, 23. Recuperado de: http://urls.my/A4clqO.

- MARTÍN-CARABALLO, A.M., MELGAR-HIRALDO, M.C., PARALERA-MORALES, C., ROMERO-PALACIOS, E., TENORIO-VILLALÓN, A.F., (2007). "Un estudio sobre conocimientos matemáticos básicos en alumnos de nuevo ingreso en

ISBN 978-84-945722-3-4

la universidad”. En Actas del II Encuentro del Profesorado de Matemáticas de Sevilla, pp.177-185.

Anexo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1. Señale cual de las siguientes expresiones es cierta:

   a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
   b) $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$
   c) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

2. Sean $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$, la propiedad algebraica que se utiliza y el resultado de la operación $\lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ son:

   a) Propiedad distributiva y resultado $\lambda(x+y)$.
   b) Propiedad distributiva y resultado $\lambda(x \cdot y)$.
   c) Propiedad asociativa y resultado $\lambda^2(x+y)$.

3. $16^{1/2}$ es lo mismo que:

   a) $1/8$
   b) 8
   c) 4

4. Cuál de las siguientes ecuaciones es válida para cualquier valor:

   a) $4^{\sqrt{x}} \cdot 4^{\sqrt{y}} = 4^{\sqrt{x+y}}$
   b) $4^{\sqrt{x}} \cdot 4^{\sqrt{y}} = 4^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
   c) $4^{\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{y}} = 4^{\sqrt{x+y}}$

5. Señala la opción correcta

   a) $a + bc^2 = (a+b)c^2$
   b) $a + bc^2 = a + (bc)^2$
   c) $a + bc^2 = a + [b(c^2)]$

6. La expresión $-x^2$, con $x \neq 0$

   a) es siempre positiva.
   b) es siempre negativa.
   c) puede ser negativa o positiva, dependiendo del signo de x.

7. Señale cual de las siguientes igualdades es cierta:

   a) $\frac{x^2+y^2}{x+y} = x + y$
   b) $\frac{x^2-y^2}{x+y} = x - y$
   c) $\frac{x^2.y^2}{x+y} = x.y$

8. La expresión $\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x}$ es equivalente a

   a) $\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$
   b) $\frac{-1}{\sqrt{x}}$
   c) $\frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$

9. Un alumno ha escrito en un examen la igualdad $\frac{1}{1+y} = 1 + \frac{1}{y}$ que es

   a) falsa porque $\frac{1+y}{y} = 1 + \frac{1}{y}$.
   b) verdadera solo si $y > 0$.
   c) verdadera para cualquier valor de y.

10. La ecuación $4 + x^2 = 0$ tiene como solución.

    a) $x = -2$
    b) $x = \frac{1}{2}$
    c) no tiene solución

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

11. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a la ecuación $4x - 2 = x^2$?

    a) $x - \frac{1}{2} = x^2$.
    b) $x - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4}$.
    c) $2x - 2 = x^2$.

12. La solución de la inecuación $-3x + 6 < 9$ es

    a) $x \in (1, +\infty)$.
    b) $x \in (-1, +\infty)$.
    c) $x \in (-\infty, -1)$.

13. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 3)$ es:

    a) $2x - y = 1$
    b) $-x + y = 4$
    c) $x + y = 2$

14. La pendiente de la recta $-x + y = 4$ vale

    a) 1
    b) -1
    c) 0

15. La parábola $y = x^2 - 2x + 3$ corta a los ejes de coordenadas en

    a) el punto $(3, 0)$.
    b) el punto $(0, 3)$.
    c) **No** corta a los ejes en ningún punto.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-862

DIVERSIFICAR LA EVALUACIÓN Y NO MORIR EN EL INTENTO

Olga del Pino Medina – Maria del Carmen García González
Mª Montserrat Tacoronte Padrón
opinmed@gmail.com – mcarmengon@gmail.com
montsetacoronte@gmail.com

IES Schamann- Las Palmas de G.C. España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: 3
Palabras clave: evaluación, estándares, metodologías, diversificar

Resumen

En los últimos dos años hemos intentado dar un cambio real a la evaluación, preocupadas por mejorar el aprendizaje de las matemáticas en nuestro centro. Esto ha significado repensar los criterios, los estándares y los indicadores de evaluación, diversificar los instrumentos y los registros; lo que nos ha llevado a redefinir los agentes de la evaluación y, por lo tanto, la evaluación en sí misma.
Buscando simplificar la ingente tarea de evaluar por estándares, criterios y competencias, nos metimos en una espiral donde aparecían rúbricas, TICs, teorías de evaluación, junto con el diseño de situaciones de aprendizaje, manejo de distintas metodologías (flipped learning, ABP, aprendizaje colaborativo), eliminación de los porcentajes asignados a los instrumentos de evaluación, y todo ello, regado con una buena dosis de malos resultados en PISA.
En esta comunicación pretendemos desenmarañar el embrollo, exponer variados y sencillos instrumentos y registros de evaluación, compartiendo el camino en el que estamos que creemos está en la vía de aportar alguna mejora en esto del difícil y complejo proceso de la enseñanza-aprendizaje y, sobre todo evaluación, de las Matemáticas.

1. Introducción

El IES Schamann es un centro público con 496 estudiantes de línea 4. Se encuentra en el barrio de Schamann, en Las Palmas de G.C., en Canarias. El barrio, relativamente céntrico, tiene un alto índice de paro, sobre el 30%. Con unos 50 años de antigüedad; las infraestructuras son bastante antiguas. La dotación en TICs sa ha quedado muy anticuada; sin fibra óptica, baja velocidad, sin wifi en las aulas y una dotación de 10 tabletas para todo el centro. No existen acuerdos comunes relativos a directrices metodológicas, instrumentos de evaluación ni criterios de calificación.

ISBN 978-84-945722-3-4

Una característica de nuestro alumnado es la enorme diversidad, en particular existe un número significativo con necesidades educativas de tipo social. Con un índice alto de fracaso escolar (40%) y de absentismo (en torno al 25%), la desmotivación es alta y sobre todo, la disfunción entre sus intereses y la oferta formativa del centro. De igual forma, el apoyo familiar es muy escaso. La falta de hábitos de trabajo, la baja autoestima y el escaso interés por su futuro académico es una constante en un sector amplio del alumnado.

El departamento de Matemáticas, con cinco profesoras, es estable desde hace cuatro años. Hace dos cursos, con la introducción de un nuevo Proyecto denominado Travesía, nos asignaron horas destinadas a la docencia compartida. En ese momento, empezamos a ser conscientes de que mientras no viviéramos como propios el fracaso escolar de nuestro alumnado, su desmotivación y su desafección, no seríamos capaces de incorporar cambios en nuestro día a día. Comenzamos a reflexionar colectivamente y a formarnos en profundidad sobre los fines de la evaluación y en TIC, decidiendo entonces explicitar los estándares de evaluación del currículo LOMCE en los exámenes escritos, a incorporar las TIC y otras formas de evaluación y a asumir que otros modelos han de ser posibles. Como resultado de todos estos cambios, en este curso 2016/17 hemos decidido "diversificar la evaluación".

La evaluación ha sido siempre un elemento importante para nuestro departamento. El objetivo prioritario de nuestra programación didáctica ha sido (y lo sigue siendo) mejorar las tasas de fracaso escolar. En estos dos cursos intentamos responder a las preguntas: qué y cómo evaluamos. Sus respuestas nos ayudan a poner sobre la mesa nuestras ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje en general, y de las Matemáticas en particular. Como señala Carlos Magro: "Evaluar es importante, también, porque la evaluación de los alumnos es un sistema de meta evaluación de nuestra actividad como profesores". Magro Mazo, C. (2016). A su vez, es también imprescindible ser muy transparentes en la comunicación de todo el proceso (avances y dificultades) al alumnado y sus familias. "La evaluación no sólo dice si se han alcanzado los fines sino por qué no (o sí) se han conseguido" (Santos Guerra, 2012).

Otro aspecto que no puede eludirse y que los estudios internacionales de rendimiento subrayan, es que la varianza entre centros es muy inferior a la que existe dentro de un mismo centro; lo que significa que hay mucha variabilidad entre las concepciones de los profesores de un mismo centro (y departamento) y, por lo tanto, en el efecto que tienen sobre el aprendizaje de los estudiantes (Tourón, J. 2017). En los últimos dos años hemos reflexionado

ISBN 978-84-945722-3-4

mucho sobre todo esto en nuestras reuniones con el fin de acercar nuestras posiciones como docentes, en un proceso de investigación-acción. Suscribimos lo que señala Fernando Trujillo: "El cambio exige de nosotros, individuos y organizaciones, al menos, dos cuestiones fundamentales: trabajo colaborativo y estar aprendiendo constantemente. El desarrollo profesional junto a nuestros compañeros y compañeras no es ya sólo un elemento más de los factores de motivación en el trabajo pues se ha convertido, junto al desarrollo de la organización en su entorno, en la estrategia fundamental para estar a la altura de los retos que nos propone una sociedad cambiante". (Trujillo Sáez, 2017).

Por último, debe leerse en profundidad el currículo; en particular, hacer una lectura comparativa de los criterios de evaluación, las explicaciones de los criterios y los estándares de evaluación. Hemos analizado los currículos de otras comunidades y no aparecen las explicaciones de los criterios. Creemos que son una buena ayuda para el proceso tanto de elaboración de las Situaciones de Aprendizaje como para el diseño de la evaluación. Las explicaciones son el resultado de la puesta en práctica de la evaluación; en tanto que su objetivo principal, es la descripción y la interpretación más que la valoración y la predicción. En las explicaciones se intentan identificar los procedimientos metodológicos y de evaluación que permiten lograr los resultados deseados.

2. Modelos de evaluación

Desde que aparecen las competencias clave y los estándares en el currículo, surge un "caos" entre el profesorado a la hora de evaluar: ¿cuántos registros debemos tener en cuenta: criterios, estándares, competencias? ¿cómo pasamos de la evaluación a la calificación?

Con el fin de orientarnos en este difícil proceso, la Dirección General de Innovación en Canarias nos ofreció este curso, a los coordinadores del Proyecto Travesía, formación sobre evaluación, mostrando que no apuestan por un único modelo de evaluación. Existen diferentes formas de evaluar y no hay una mejor que la otra: todas son válidas y pueden complementarse. Todos los modelos están fundamentados curricularmente, porque evidencian los aprendizaje, y desarrollan un modelo pedagógico competencial.

A través de dichos modelos analizaremos, a continuación, la trayectoria de nuestro departamento desde hace unos años:

Evaluación por instrumentos

ISBN 978-84-945722-3-4

Para cada situación de aprendizaje se asignan unos instrumentos con un valor diferente cada uno. La calificación de la materia se obtiene de la ponderación de estos instrumentos.

Es la evaluación que más se parece a la que teníamos hace unos años. Utilizando este modelo nos aclaramos con qué es un instrumento de evaluación, y qué no lo es. Por ejemplo, el cuaderno y comportamiento en clase, tal y como la entendíamos antes, no son instrumentos para evaluar el aprendizaje de un alumno.

Evaluación por estándares

Se definen situaciones de aprendizaje que parten de los criterios de evaluación pero, el profesorado usa como indicadores los estándares de evaluación asociados a cada criterio. Todos los estándares valen lo mismo y se realiza, al final, una media aritmética.

Esta evaluación la adoptamos el curso pasado después de muchos debates internos y, realmente fue la que nos hizo dar un cambio en el modelo de evaluación que queríamos. Es donde se produce el gran punto de inflexión en nuestra manera de trabajar. Comenzamos a leer y releer los estándares asociados a cada criterio. Teníamos claro lo que queríamos que el alumnado aprendiera y, en cada instrumento de evaluación (pruebas escritas, trabajos, presentaciones, actividades de trabajo cooperativo…) sabíamos qué estándar estábamos trabajando y evaluando a la vez.

El alumnado comenzó a familiarizarse con este tipo de evaluación y, en las pruebas escritas, les aparece, desde entonces, el estándar que trabajamos. Para darle los resultados, les calificamos cada estándar con 4 niveles de adquisición de conocimientos (excelente, bien, regular, mal). Esta manera de evaluar nos ayudó mucho a la hora de preparar cualquier prueba, porque hacemos pruebas mucho más cortas y focalizadas a lo que nos interesa. Fuimos conscientes de que, muchas veces, preparábamos unas pruebas escritas larguísimas, con preguntas que se repetían, y con otras que no tenían ningún estándar asociado.

Evaluación por criterios

En cada criterio se definen una serie de producciones del alumnado que evidencian su aprendizaje. Estas producciones se convierten en los instrumentos de evaluación. La calificación de la materia se obtiene tomando en consideración los descriptores de la rúbrica general.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Los criterios de evaluación en Canarias, constan de dos partes indisolublemente relacionadas, que integran los elementos prescriptivos establecidos en el currículo básico: el enunciado, elaborado a partir de los criterios de evaluación establecidos en el mencionado currículo básico y la explicación del enunciado, elaborada a partir de los estándares de aprendizaje evaluables establecidos para la etapa, graduados en cada curso mediante una redacción holística.

Quizás la evaluación anterior nos quedaba un poco pobre de registros, por lo que este curso nos hemos acercado más a este modelo. Para ello, al comenzar una situación de aprendizaje, asociada a uno o varios bloques de aprendizaje del currículo, analizamos los criterios, sus explicaciones, sus estándares y los contenidos asociados y buscamos todas las relaciones posibles entre ellos, sin perder de vista los aprendizajes evaluables.

Evaluación por situaciones de aprendizaje

La situación de aprendizaje tiene diferentes momentos donde se registran los valores de cada indicador de aprendizaje y se toma como referencia el grado mayor de calificación obtenido.

Esta evaluación es la que menos experimentada tenemos. La vamos incluyendo en algunos momentos del curso y, estamos en la vía de generalizar; ya que entendemos que es donde pueden quedar reflejados de forma globalizada los criterios (que ya incluyen las competencias clave), la metodología y los instrumentos de evaluación.

3. Instrumentos de evaluación

Presentamos los instrumentos que estamos utilizando en el departamento, y que en el presente curso escolar se han incorporado de forma regular en nuestra práctica evaluativa. Las rúbricas se han convertido en el instrumento central que nos clarifica qué es lo que queremos con la evaluación y para qué estamos evaluando; además de ayudarnos tanto a programar las Situaciones de Aprendizaje como para explicarles a nuestros alumnos qué esperamos de ellos. Los instrumentos se han agrupado en tres grupos: aplicaciones web (y en dispositivos móviles), registros digitales (o escritos) y presentaciones orales. En cada uno describiremos en qué consisten; cuándo y para qué los utilizamos, ventajas e inconvenientes.

Aplicaciones web

ISBN 978-84-945722-3-4

Kahoot: lo utilizamos en cualquier momento de la unidad para comprobar la adquisición de conocimientos. Ventajas: existe una gran base de datos que te permite importar cualquier cuestionario y modificarlo a tu gusto. Es muy motivador para el alumnado más pequeño y es divertido. En cada pregunta les informa del alumno que va en cabeza y compiten mucho entre ellos. Muy adecuado que sean ellos los propios creadores de sus kahoots. Podemos añadir vídeos a las preguntas. Obtenemos feeback de los alumnos en tiempo real. Permite un registro global de los resultados. Inconvenientes :necesitan un dispositivo electrónico con conexión a internet o un ordenador para responder. La pregunta no les aparece en su pantalla, sólo en la pantalla grande del profesor, por lo que hay que garantizar que todos ven bien la pantalla para leer la pregunta.

Plickers: lo usamos para evaluar conocimientos previos, si están comprendiendo lo trabajado hasta el momento, si han visto un vídeo que se ha propuesto o al final de una clase o actividad. Ventajas: No necesita conexión a internet. Es mucho más tranquilo que el kahoot. Responde cada uno cuando tiene clara la respuesta. Hasta que no respondan todos no pasamos de pregunta. Al finalizar cada pregunta da tiempo de hacer un feedback con ellos y aclarar las respuestas. Se recogen datos de los estudiantes en tiempo real. Inconvenientes: el profesor necesita internet en su ordenador para proyectar las preguntas y un móvil o tablet con conexión para captar y registrar las respuestas a través de unos códigos previamente impresos.

Socrative: Permite crear actividades motivadoras dando un feedback inmediato y la participación activa del alumnado. Ventajas: Resulta muy motivador. Se puede realizar individualmente o en grupo. Existe la opción de lanzar el test como una carrera espacial en la que el alumnado compite con el resto por llegar a la meta si va acertando las preguntas. Resultados de forma inmediata. Inconvenientes: se necesita un dispositivo electrónico con conexión a internet.

Edpuzzle: permite incluir preguntas mientras se visiona un vídeo. No se puede avanzar si no las responden. Ventajas: Se puede hacer un seguimiento exhaustivo de lo que el alumno ha visto en casa. Es muy fácil editar vídeos e insertar preguntas. Inconvenientes: no todos los alumnos suelen ver los vídeos en casa.

Formularios de Google: se pueden crear exámenes tipo test de ideas previas, de cierre de una unidad, cuestionarios de coevaluación, etc. La versatilidad es enorme. Ventajas: se pueden aprovechar todas las herramientas de Google. La hoja de cálculo asociada permite

ISBN 978-84-945722-3-4

obtener las notas finales rápidamente. Inconvenientes: el editor de texto no está actualizado para fórmulas matemáticas, por lo que hay que insertarlas como imágenes.

Plataforma Edmodo: sirve de comunicación entre todos enviando cualquier información que nos pueda resultar interesante. Ventajas: el alumno está conectado siempre mś allá del aula, pues dispone de todo el material necesario para trabajar (ficheros,archivos,enlaces,vídeos..). Permite estar al día al alumno que por distintas circunstancias no asista a clase. Se pueden realizar también test para que ellos respondan en cualquier momento. Inconvenientes: si no tienen activada las notificaciones no saben si hemos subido algo o no hasta que no entren, por lo que si dejas un tiempo de usarla pierden el hábito de entrar.

Plataforma Intermatia: permite dar de alta al alumnado previo pago (muy económica) y hacer un seguimiento de los ejercicios que realizan. La mayoría con tres o cuatro niveles de dificultad. Ventajas: Buena para hacer realizar ejercicios de repetición, con explicaciones de los mismos por si se equivocan. Inconvenientes: plataforma de pago y si algún alumno no lo usa hay que contactar con ellos para que te dejen cambiar la cuenta de usuario.

Registros digitales (o escritos)

Vídeos: Pueden ser el producto final de un trabajo o Situación de Aprendizaje. Tienen que llevar rúbrica previa, donde se les aclara qué es lo que se quiere exactamente. Imprescindible autoevaluación y coevaluación. También se les puede pedir video-tutoriales para explicar un contenido a otros compañeros. Los enlaces a los vídeos pueden enviarse por la plataforma Edmodo; o bien por Google Drive.

Listas de cotejo: se pueden utilizar cuando realizan un informe escrito en el que se les ha pedido muchos ítems; sirve para darle un registro de lo que contiene o no su informe y la justificación de su nota. Esta lista de cotejo se les puede dar previamente a la entrega del informe.

Portfolios: (blogs individuales, drive). A lo largo del curso se les puede ir pidiendo que suban entradas donde explican lo que hayan aprendido en clase, o bien, informes parciales o finales de un determinado trabajo. Posibilita la creatividad del alumnado.

Exámenes por parejas: Permite dar confianza al alumnado cuando hace un examen escrito, así como discutir sobre sus posibles soluciones. Según convenga, las parejas pueden ser heterogéneas u homogéneas. Debe evitarse que se distribuyan el examen y que cada alumno

ISBN 978-84-945722-3-4

haga una parte; ya que la riqueza está en la comunicación entre ellos. **Cuestionarios de coevaluación y autoevaluación:** Los de autoevaluación permiten la metacognición y los de coevaluación profundizan en la comprensión de los estudiantes de su propio aprendizaje y permiten que se involucren de manera más activa en la realización de las tareas. Les permite ser conscientes "del trabajo del otro".

Presentaciones orales: explicación a otros compañeros, cursos, tutorías a otros alumnos.

4. Conclusiones

Después de estos dos años de bastante reflexión, podemos concluir:

La incorporación de las parejas pedagógicas a nuestra práctica de aula nos ha hecho madurar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Evaluación, enseñanza-aprendizaje son dos caras de la misma moneda.

El trabajo cooperativo por parte del profesorado del departamento es fundamental ya que, el trabajo en equipo, no solo es importante para el alumnado.

Tenemos que diversificar los instrumentos con los que registramos las evidencias del aprendizaje y con los que informamos al alumnado de su avance y sus dificultades.

Las nuevas tecnologías nos ofrecen una variedad de herramientas mucho más cercanas al alumnado y, nos ayudan en el proceso de evaluación.

El modelo de evaluación que parte de las Situaciones de Aprendizaje, analizando en profundidad los criterios, sus explicaciones y estándares de evaluación, incorporando las rúbricas como instrumento central de evaluación nos parece, hoy por hoy, el más completo y ajustado.

La calificación final se obtiene contrastando la información que se obtiene de los instrumentos de evaluación pero no del cálculo de porcentajes de ellos.

Referencias bibliográficas

Dirección General de Innovación Educativa del Gobierno de Canarias (2017). Material entregado en formación a los coordinadores del Proyecto Travesía.

Boletín Oficial de Canarias (2016). Decreto 83/2016 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Canarias (Decreto 83/2016 de 4 de julio). BOC nº 136 de 15 de julio de 2016.

ISBN 978-84-945722-3-4

Magro Mazo, C. (2016). Evaluar es aprender.
https://carlosmagro.wordpress.com/2016/12/01/evaluar-es-aprender/
Santos Guerra, M.A. (2012). Una flecha en la diana. La evaluación como aprendizaje. Andalucía Educativa, 34, 7-9.
Tourón, J. (2017). 8 postulados que te pueden ayudar como profesor.
http://www.javiertouron.es/
Trujillo Sáez , F. (2017). Asesorías para el siglo XXI.
http://fernandotrujillo.es/category/destacadas/ Consultado 08/05/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-863

DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM CONTEXTOS COLABORATIVOS: um olhar para as pesquisas acadêmicas brasileiras

Adriana Fátima de Souza Miola – Patricia Sandalo Pereira
drica220@yahoo.com.br – patriciasandalop@uol.com.br
UFGD – Brasil UFMS - Brasil

Núcleo temático: IV – Formação de Professores de Matemáticas
Modalidade: CB
Nivel educativo: 5
Palavras chave: Educação Matemática, Formação de Professores, Desenvolvimento Profissional, Colaboração.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar a compreensão dos conceitos de colaboração e desenvolvimento profissional presentes nas pesquisas brasileiras. Esses resultados fazem parte do levantamento bibliográfico de uma pesquisa de doutorado em andamento no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UFMS/Brasil. Os dados foram levantados a partir do Banco de Teses da Capes e dos Programas de Pós-Graduação. A análise deste mapeamento foi realizada por meio de duas perspectivas: a) Apresentação geral das pesquisas e b) Descrição das compreensões dos conceitos de Colaboração e Desenvolvimento Profissional. Para aprofundamento dos conceitos, durante a análise buscamos identificar e descrever: 1) as definições e características do conceito de desenvolvimento profissional; 2) as definições e características do conceito de colaboração; e 3) algumas recomendações feitas por esses estudos. Como resultados, as pesquisas apontam que: a) Consideram o conceito de desenvolvimento profissional como um movimento contínuo relacionado com a aprendizagem, com a mudança e com um aspecto cultural; b) O conceito de colaboração é apresentado como: um clima de camaradagem que resista aos desafios profissionais; uma forma de organização de um grupo; troca de experiências; partilha do conhecimento e a produção de novos saberes.

Introdução

A formação continuada de professores começou a institucionalizar em alguns países, a partir dos anos de 1970, com a intenção de adaptar os professores aos tempos atuais. Até então, as formações propostas eram autoritárias, classistas, uniformizadoras e seletivas, predominando um modelo individual de formação.

ISBN 978-84-945722-3-4

Com a crise da institucionalização da formação continuada, a partir dos anos de 2000, surgiu à necessidade de novas formas de ver a formação, o aluno e o papel do professor. Com isso, novas possibilidades de programas vinculados a prática da formação ganharam espaço. Nesse momento, não se analisa mais a formação somente como domínio de conteúdos, mas sim o que se aprende e o que se falta aprender, conforme Imbernón (2010).

Desse modo, buscava-se um trabalho de caráter coletivo, na perspectiva colaborativa, em que os participantes pudessem refletir em equipe e encontrar soluções para as situações-problema do cotidiano da sala de aula que, por sua vez, fez com que o caráter individualista atribuído à atuação docente fosse abandonado.

Diante disso, não se espera que uma pessoa, supostamente detentora de mais conhecimento, instrua os colegas. Espera-se que os docentes se assumam como protagonistas, e que todos sejam sujeitos e possam trabalhar juntos e se desenvolverem profissionalmente.

Nesse sentido, muitas pesquisas brasileiras foram desenvolvidas no campo da Educação Matemática sobre a formação continuada de professores de Matemática. Para descrever e sistematizar o que tem sido produzido no Brasil sobre esse tema, este estudo realizou um levantamento bibliográfico, buscando contribuir para o avanço desse campo de pesquisa.

Aspectos Metodológicos do Levantamento Bibliográfico

Para conhecer as produções brasileiras a respeito do desenvolvimento profissional de professores de Matemática em contexto colaborativo, realizamos uma pesquisa na modalidade do estado da arte por ser:

> [...] a caracterização de um processo num período histórico e que permite fazer correlações entre as pesquisas produzidas. As pesquisas do estado da arte buscam compreender os conhecimentos acumulados, sobretudo quando se realiza um mapeamento, além de inventariar, sistematizar, compilar, descrever, analisar e avaliar a produção cientifica numa determinada área de conhecimento, apontando tendências teórico-metodológicas e temáticas mais frequentes e problemas investigados (Melo, 2006, p. 62).

A busca por pesquisas que tivessem como objeto de estudo, o Desenvolvimento Profissional e a Colaboração, ocorreu no segundo semestre de 2015 até o primeiro semestre de 2016, por meio do Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(Capes), a partir das palavras chave: Colaborativo, Colaboração e Desenvolvimento Profissional. Considerando que o Banco de Teses da Capes, havia disponibilizado até aquele momento, trabalhos concluídos até o ano de 2012, fez-se necessário à busca por trabalhos mais recentes em Programas de Pós-Graduação relacionados às áreas de interesse.

Optamos em analisar apenas as pesquisas que envolviam professores licenciados em Matemática, pois, abordaremos no trabalho a formação continuada de professores de Matemática. Com isso, foram analisadas na íntegra 12 pesquisas, as quais foram fichadas por meio dos seguintes descritores: questão de pesquisa; objetivos; metodologia; referências teóricas e resultados.

Com esse mapeamento desenvolvemos uma análise por meio de duas perspectivas: a) Apresentação geral das pesquisas e b) Descrição das compreensões dos Conceitos de Colaboração e Desenvolvimento Profissional tratado pelas pesquisas analisadas.

Descrição geral das teses e dissertações brasileiras que abordam o Desenvolvimento Profissional e a Colaboração envolvendo professores de Matemática

Para identificar e analisar as pesquisas que tratam do tema, organizamos no Quadro 1, a seguir.

Autor	Titulo	Data/ Titulação	Instituição
Ana Cristina Ferreira	Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo	2003/ Doutorado	UNICAMP/ SP
Armando Traldi Júnior	Formação de Professores de Matemática: Identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos	2006/ Doutorado	PUC/SP
Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto Coelho	Os Saberes Profissionais dos Professores: a problematização das práticas pedagógicas em Estatística mediadas pelas práticas colaborativas	2006/ Doutorado	UNICAMP/ SP
Renata Prenstteter Gama	Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos: O caso de professores de Matemática em início de carreira	2007/ Doutorado	UNICAMP/ SP
Sandra Gonçalves Vilas Boas Campos	Trabalho de projetos no processo de ensinar e aprender estatística na universidade	2007/ Mestrado	UFU/MG
Melanie Lerner Grinkraut.	Formação de professores envolvendo a prova Matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional	2009/ Doutorado	PUC/SP

ISBN 978-84-945722-3-4

Denilson Goncalves Pereira	Um estudo da reta no Ensino Médio utilizando trajetórias hipotéticas de aprendizagem	2011/ Mestrado	PUC/ SP
Marilia Lidiane Chaves da Costa	Colaboração e Grupo de Estudos: perspectivas para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática no uso de tecnologia	2011/ Mestrado	UEPB/PB
José Antônio Araújo Andrade	O Estágio na Licenciatura em Matemática: um espaço de formação compartilhada de professores	2012/ Doutorado	UFSCAR/ SP
Leila Cunha de Albuquerque	Avaliação da Aprendizagem: concepções e práticas do professor de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental	2012/ Mestrado	UnB/DF
Ronaldo Barros Orfão	Professores de Matemática em um grupo de estudos: uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas	2012/ Mestrado	UNIBAN/ SP
Emerson Batista Gomes	Aprendizagem Docente e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: investigação de experiências colaborativas no contexto da Amazônia Paraense	2014/ Doutorado	REAMEC/BELÉM-PA

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 1: Apresentação das pesquisas analisadas

Com a leitura, podemos observar que nove pesquisas envolveram professores atuantes na Educação Básica, duas tiveram como sujeitos graduandos e outra teve professores do Ensino Superior. O foco de investigação da maioria dos trabalhos centrou-se na formação continuada, apenas Campos (2007) e Gomes (2014) olharam para a formação inicial.

Do ponto de vista metodológico, constatamos que todas as pesquisas são de natureza qualitativa. Cabe observar que seis foram do tipo interpretativa, seis fizeram observação e quatro dessas utilizaram entrevistas. Todas realizaram encontros em grupos no período de no mínimo seis meses, no caso de Albuquerque (2012), Campos (2007) e Orfão (2012) até dois anos, nos casos de Grinkraut (2009) e Traldi Junior (2006).

Os aspectos mais abordados nas pesquisas foram às contribuições do trabalho em grupo/colaborativo para o desenvolvimento profissional. Outros aspectos como, concepções, saberes e aprendizagem também foram investigados.

De maneira geral, todos os resultados reafirmaram a importância do trabalho colaborativo para o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores por trazerem melhorias tanto para a formação inicial quanto continuada.

ISBN 978-84-945722-3-4

Com essa fase do trabalho, foi possível levantar dados que relacionam tais pesquisas e permitem apontar definições e características dos conceitos de colaboração e desenvolvimento profissional, como faremos a seguir.

A Compreensão dos Conceitos de Colaboração e Desenvolvimento Profissional tratado pelas pesquisas analisadas

Para aprofundamento da revisão das pesquisas sobre desenvolvimento profissional em contextos colaborativos, buscamos identificar e descrever as definições e características do conceito desenvolvimento profissional e, a seguir as definições e características do conceito de colaboração.

1) As definições e características do conceito de Desenvolvimento Profissional

Percebemos que muitos trabalhos discutiram esses conceitos a partir de vários autores, como Day, Fiorentini e Ponte. Porém não apresentaram de que forma esses conceitos foram tratados nas pesquisas que realizaram. Os estudos que apresentaram de forma mais especifica sua compreensão sobre desenvolvimento profissional foram: Gama (2007), Grinkraut (2009), Órfão (2012), Traldi Junior (2006) e Gomes (2014).

> [...] um processo pessoal, interativo, dinâmico, contínuo, evolutivo e sem fim, que envolve aspectos conceituais e comportamentais (Gama, 2007, p. 29).
>
> [...] como um processo longo, contínuo, que se inicia em uma fase anterior à da formação inicial e que se estende por toda a sua vida profissional (Grinkraut, 2009, p. 34).
>
> [...] Trata-se de um processo não linear, de idas e vindas, de avanços e retrocessos, cada vez mais amplos e completos, de reflexão sistemática sobre a ação educativa (Orfão, 2012, p. 21).
>
> [...] não queremos correr o risco de conceituá-lo como um continuum linear, pois, apesar de superficialmente atrativa e plausível, é demasiadamente simplista e inviável essa conceituação (Traldi Junior, 2006, p. 39).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> [...] Um processo contínuo de experiências significativas sobre a docência em que, invariavelmente, ocorrem mudanças de forma (Gomes, 2014, p. 244).

Esses autores definem esse conceito como um movimento contínuo.

Outra interpretação encontrada foi em relação à aprendizagem e mudança, apresentada por Ferreira (2003) e Gama (2007).

> Desenvolver-se profissionalmente pode ser entendido com aprender a caminhar para a mudança, ampliar aprofundar e ou construir os próprios saberes e pratica e desenvolver formas de pensar e agir assim mudança e desenvolvimento profissional se entrelaça (Ferreira, 2003, p. 36).
>
> [...] São de natureza pessoal, profissional, institucional, social e acontecem ao longo da trajetória de vida de cada um (Gama, 2007, p. 29).

Outro aspecto que foi ressaltado é o cultural, conforme podemos observar nos fragmentos dos autores: Traldi Junior (2006), Andrade (2012) e Gama (2007).

> Ao analisarmos o desenvolvimento profissional do professor, devemos considerar o indivíduo e sua cultura neste processo (Traldi Junior, 2006, p. 39).
>
> As influências sociais e culturais podem contribuir para que ocorra o desenvolvimento profissional para determinados sujeitos que sejam descolados de uma atuação ou envolvimento em uma comunidade de aprendizagem, mas, em geral, é essa condição que se apresenta como a mais favorável ao desenvolvimento profissional dos professores (Andrade, 2012, p. 43).
>
> Depende também das políticas e dos contextos escolares nos quais realizam a sua atividade docente (Gama, 2007, p. 29).

2) As definições e características do conceito de Colaboração

Em relação ao conceito de colaboração, encontramos denominações como grupos colaborativos, trabalhos colaborativos e práticas colaborativas, conforme podemos observar nos fragmentos dos autores: Traldi Junior (2006), Campos (2007) e Ferreira (2003).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> [...] preocupa-se primeiramente com questões imediatas e práticas, excluindo pesquisa sistemática e crítica. A preocupação dos envolvidos é a de se manter um clima de camaradagem pessoal, mas que resista aos desafios profissionais (Traldi Junior, 2003, p. 43).

> [...] colaboração forma-se um rico contexto de aprendizagem para os envolvidos, uma vez que o grupo tem a oportunidade de compartilhar um objetivo comum (Campos, 2007, p. 98).

> [...] como forma de organização de um grupo, caracterizado pelo respeito, confiança e autonomia, além de oferecer condições motivadoras, também contribui para o desenvolvimento de um rico ambiente de aprendizagem (Campos, 2007, p. 98).

> Grupo colaborativo no sentido de comunidade de pratica, com as características de participação voluntaria, co-laboração por um objetivo comum, participantes a vontade para se expressar, sem existir verdade ou orientação única (Ferreira, 2003, p. 109).

Outros autores afirmam que o trabalho colaborativo favorece a troca de experiências, a partilha do conhecimento e a produção de novos saberes, que são necessários à formação contínua do professor, a partir do estabelecimento de situações de diálogo e negociação.

Os autores Costa (2011) e Órfão (2012), apontam em suas pesquisas o fortalecimento dos laços de amizade que se fortaleceram, reforçando ainda mais as características de um trabalho colaborativo**.**

Com relação ao grupo colaborativo, os demais autores falam a partir de outros pesquisadores, principalmente, Fiorentini (2004). Encontramos também autores como, Albuquerque (2012) que relata que em sua pesquisa apresentou traços de uma pesquisa do tipo colaborativa, assim como Gomes (2014), que para mobilizar a conversão catastrófica do grupo de professores de Matemática em formação inicial, assumiu a pesquisa-ação colaborativa como estratégia formativa. Nesses dois últimos casos, entendemos o termo "colaborativa" como uma abordagem da pesquisa qualitativa. Além dessas evidencias, no intuito de contribuir com pesquisas futuras e com o estudo em questão, destacaremos a seguir algumas recomendações das pesquisas analisadas.

Considerações Finais

ISBN 978-84-945722-3-4

Na revisão notamos que todos os trabalhos, tiveram um tempo de até dois anos com o grupo de professores, para conseguirem apontar indícios do tema abordado. Porém, percebemos que muitos desses trabalhos, partem de conceituações já realizadas, e não apresentam o que a pesquisa está compreendendo por Desenvolvimento Profissional e Colaboração, talvez por não ser o objeto central de suas investigações.

Com isso, destacamos a recomendação de Albuquerque (2012), quando sugere que outras propostas de investigação sejam pensadas e que a metodologia seja planejada com objetivos para que possibilitem aos professores participantes desenvolver-se profissionalmente.

No projeto de tese em desenvolvimento, utilizamos a pesquisa colaborativa (Ibiapina, 2008) como metodología, que está fundamentada na Teoria Histórico Cultural e no Materialismo Histórico Dialético, sendo essa uma contribuição para o tema. Desse modo, partimos da necessidade do grupo, e não como nos estudos analisados, em que partiram de uma inquietação do pesquisador.

Referências

Albuquerque, L. C. (2012). *Avaliação da Aprendizagem: concepções e práticas do professor de matemática dos anos finais do ensino fundamental.* (Dissertação de Mestrado) - Universidade de Brasília - DF.

Campo, S. G. V. B. (2007). *Trabalho de projetos no processo de ensinar aprender Estatística na Universidade.* (Dissertação de Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia - MG.

Costa, M. L. C. (2011). *Colaboração e Grupo de Estudos: perspectivas para o desenvolvimento profissional de professores de matemática no uso de tecnologia.* (Dissertação de Mestrado) - Universidade Estadual da Paraíba - PB.

Coelho, M. A. V. M. P. (2010). *Os Saberes Profissionais dos Professores: a problematização das práticas pedagógicas em estatística mediadas pelas práticas colaborativas.* **(**Tese de Doutorado**) -** Universidade Estadual de Campinas - SP.

Ferreira, A. C. (2003). *Metacognição e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: uma experiência de trabalho colaborativo.* **(**Tese de Doutorado**) -** Universidade Estadual de Campinas - SP.

Ghedin, E. (2002). Professor reflexivo: da alienação da técnica à autonomia da crítica. In: S. G. Pimenta e E. Ghedin (org). Professor reflexivo no Brasil – gênese e crítica e um conceito, Capítulo 6, pp. 129-150. São Paulo: Cortez.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: M. C. Borba; J. L. Araújo (Org.). Pesquisa qualitativa em Educação Matemática, pp. 47 – 76, Belo Horizonte: Autêntica.

Gama, R. P. (2007). *Desenvolvimento Profissional com apoio de Grupos Colaborativos: o caso de professores de matemática em inicio de carreira.* **(**Tese de Doutorado**) -** Universidade Estadual de Campinas - SP.

Gomes, E. B. (2014). *Aprendizagem Docente e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática: investigação de experiências colaborativas no contexto da Amazonia Paraense.* (Tese de Doutorado) - REAMEC, Bélem - PA.

Grinkraut, M. L. (2009). *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional.* (Tese de Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica - SP.

Imbernón, F. (2010). Formação Continuada de Professores. Porto Alegre: Editora Penso.

Traldi Júnior, A. (2006). *Formação de Formadores de Professores de Matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.* (Tese de Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica - SP.

Melo, M. V. (2006). *Três Décadas de Pesquisa em Educação Matemática: um estudo histórico a partir teses e dissertações.* (Dissertação de Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas - SP.

Orfão, R. B. (2012). *Professores de Matemática em um Grupo de Estudos: uma investigação sobre o uso de tecnologia no ensino de funções trigonométricas.* Dissertação de Mestrado) – Universidade Bandeirantes - SP.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-864

ESTUDO DE COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDADE DIDÁTICA DE UM CURSO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NUMA INSTITUIÇÃO BRASILEIRA

José Fernandes da Silva - Ruy César Pietropaolo
jose.fernandes@ifmg.edu.br - rpietropaolo@gmail.com
Instituto Federal de Minas Gerais – Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

Núcleo temático: Formação de Professores de Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formação inicial de professores de Matemática, Idoneidade didática, Conhecimento didático-matemático.

Resumo
O propósito desta investigação, qualitativa, foi analisar e compreender como os componentes e indicadores de idoneidade didática se fazem presentes no âmbito do Projeto Político Pedagógico de Curso - PPC de um curso de formação inicial de professores de matemática, numa instituição pública brasileira. Os resultados apontam que o programa de formação apresenta elementos relacionados às facetas do conhecimento didático-matemático do professor - CDM. O destaque foi para a faceta epistêmica e ecológica que se apresentam de forma mais densa no contexto da proposta formativa de futuros professores de matemática. Os componentes e indicadores de idoneidade didática se constituem em elementos importantes para avaliar propostas de formação de professores de matemática.

1. Introdução

Muitos estudos têm-se debruçado a complexidade dos conhecimentos necessários aos futuros professores, em especial, os professores de Matemática. Pode-se afirmar que é uma discussão recente no âmbito da academia, porém, se apresenta densa e com muitas linhas e correntes teóricas que tratam do assunto. Neste estudo, buscamos empreender uma breve compilação teórica sobre as discussões relacionadas aos conhecimentos necessários aos professores de Matemática, e a partir daí, compreender a realidade investigada.

Buscamos explicitar dados de uma pesquisa, na qual investigou-se as componentes e indicadores de idoneidade presentes num programa de formação de professores de uma instituição pública brasileira.

ISBN 978-84-945722-3-4

Como ponto de partida, elaboramos a questão norteadora *"Que facetas se fazem presentes no âmbito do projeto político pedagógico de um curso de formação inicial de professores de Matemática de uma instituição pública brasileira?"*

2. Marco teórico

Até a década de 80 poucos estudos buscavam investigar a formação de professores. Shulman (1986) destacou que o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do currículo seriam necessários para ao professor desenvolver sua profissão. Em 1987, Shulman, no seu artigo *"Conhecimento e ensino: fundamentos para uma nova reforma"* ampliou os conhecimentos necessários ao professor para ensinar.

Ball, Thames e Phelps (2008), propuseram as seguintes categorias de conhecimento: I) Conhecimento comum do conteúdo - referindo-se a um conhecimento que não é característico apenas do professor, mas comum às profissões que se valem dos conhecimentos matemáticos para desenvolver suas funções; II) Conhecimento especializado do conteúdo - podendo ser definido como o conhecimento do conteúdo para a condução do trabalho docente. Esse é o tipo de conhecimento usado unicamente pelos professores; III) Conhecimento horizontal do conteúdo – descreve como os temas matemáticos estão relacionados entre si, seja dentro da disciplina matemática ou não. Para tanto, o professor deve conhecer as possíveis conexões e articulações dos conteúdos matemáticos; IV) Conhecimento de conteúdo e de alunos - o professor deve possuir habilidades para lidar com o saber dos alunos e o saber da Matemática; V) Conhecimento de conteúdo e de ensino – evidencia o diálogo entre o saber matemático e o saber sobre o ensino.

Para Godino (2009), não existe um consenso na literatura disponível para apontar os conhecimentos e as competências que os professores mobilizam durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

> Seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se põem em jogo num ensino efetivo (proficiente, eficaz, idôneo) da Matemática. Ele permitiria orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor. (p.19)

Como aprofundamento sobre os conhecimentos necessários ao professor, Godino (2009) propõe um conjunto de facetas que são categorias que organizam e estendem estes conhecimentos. São elas: - *Epistêmica:* está relacionada com os conhecimentos matemáticos envolvidos no contexto educacional e sua organização para o processo de ensino. Fazem

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

parte dessa faceta os problemas selecionados, a linguagem elaborada, os procedimentos, as definições e os argumentos utilizados pelo professor; - *Cognitiva:* esta faceta possibilita que os professores tenham conhecimentos que lhes permitam conhecer melhor seus alunos, pois, com a reflexão e a avaliação, é possível, do ponto de vista da instituição educativa, acompanhar o processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o professor pode realizar um bom planejamento das suas aulas prevendo possíveis erros e dificuldades dos alunos; - *Afetiva:* é a faceta que permite os professores lidarem com a parte afetiva que está compreendida por elementos como atitudes, emoções, crenças e valores dos alunos em relação ao ambiente de estudos relacionados à Matemática; - *Mediacional*: refere-se aos conhecimentos do professor relacionados à capacidade de articular materiais e tecnologias para o ensino. Além disso, o professor necessita ter condições de delimitar tempo para as ações no âmbito do processo de ensinar um conteúdo; - *Interacional*: trata-se da capacidade de o professor compreender, prever, implementar e avaliar as interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem. Neste processo, as relações se estabelecem em contexto: entre professores e alunos, entre os alunos, entre alunos e os recursos estabelecidos e entre os professores, os recursos e os alunos e - *Ecológica*: o professor que dispõe de conhecimentos no âmbito desta faceta é capaz de perceber o currículo como uma janela que estabelece enlaces com o entorno social, político e econômico.

O modelo CDM evoluiu desde que foi proposto por Godino (2009) passando por outras investigações como Pino-Fan e Godino (2015). Tais estudos propõem uma reestruturação mais refinada dos componentes do MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*), propostos por Ball, Thames e Phelps (2008) onde deixam claro o vínculo e interações entre as proposições e as seis facetas do CDM.

A relação estabelecida entre os conhecimentos necessários para o professor ensinar Matemática e as facetas do CDM pode ser observada na figura 1:

ISBN 978-84-945722-3-4

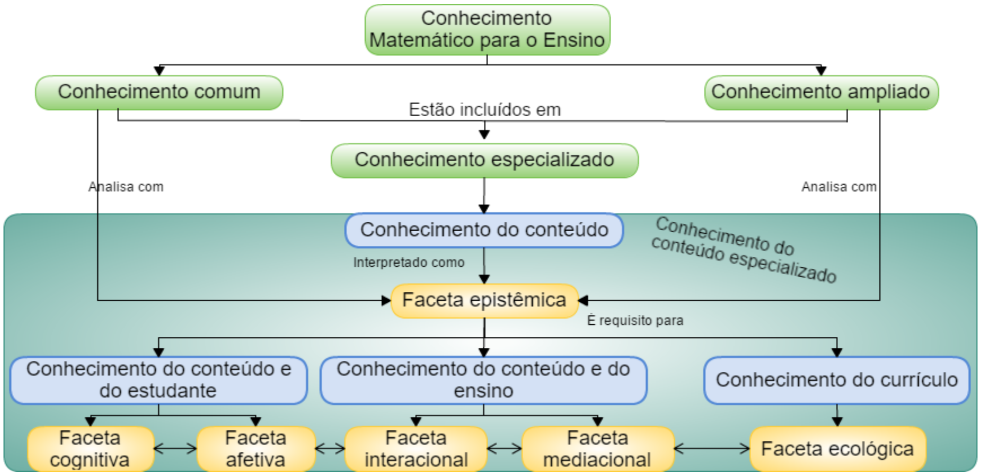


Figura 1: Relação entre as categorias do conhecimento do MKT e o CDM

Nesta perspectiva da idoneidade didática, Godino et al (2013), propuseram uma adaptação do conceito de idoneidade didática, visando criar instrumentos para a avaliação de planos de formação de professores de Matemática.

A seguir (Tabela 1), apresentamos as facetas e seus indicadores:

Tabela 1: Guia para a avaliação de idoneidade didática nos processos de formação de professores

FACETA EPISTÊMICA
(Conteúdo Didático-Matemático, entendido do ponto de vista institucional) *Conteúdo matemático:* Problemas, linguagens, conceitos, procedimentos, proposições, argumentos, conexões *Conteúdo cognitivo:* Conhecimentos prévios, adaptações curriculares, aprendizagem do conteúdo matemático por parte dos alunos *Conteúdo afetivo:* Interesses, atitudes, emoções frente a aprendizagem do conteúdo matemático dos alunos *Conteúdo interacional:* Modos de interação do discurso no processo de ensino e aprendizagem da matemática *Conteúdo mediacional:* Uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da matemática *Conteúdo ecológico*: Currículo, inovação didática, adaptação sócio profissional, conexões interdisciplinares
OUTRAS FACETAS IMPLICADAS NA FORMAÇÃO DIDÁTICA E MATEMÁTICA
Faceta cognitiva: Aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos professores. Faceta afetiva: Crenças, valores, interesses, atitudes, emoções dos professores diante da aprendizagem do conteúdo didático-matemático. Faceta interacional: Modos de interação e discurso no processo de formação de professores. Faceta *mediacional:* Uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores. Faceta ecológica: Currículo, inovação didática na formação de professores, conexões interdisciplinares.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Metodologia

A pesquisa, realizada, é de cunho qualitativo, tendo sido realizadas análises documentais do Projeto Pedagógico de um curso de formação inicial de professores de Matemática - PPC. O PPC é o documento oficial do curso, onde ficam estabelecidas as diretrizes do curso, proposta curricular, a concepção do curso, os fundamentos da gestão acadêmica, pedagógica e administrativa.

O contexto é uma instituição pública, brasileira, que atua na formação inicial de professores de Matemática desde o ano de 2010.

4. Resultados e discussões

4.1. Faceta epistêmica - Conteúdo matemático

No que concerne aos aspectos do conhecimento didático-matemático dos professores, o PPC, em seus princípios norteadores destaca importância da indissocialibilidade entre o saber e o fazer pedagógico:

> A superação entre o saber e o fazer pedagógico, daí o processo pedagógico ser encarado como uma totalidade na qual ocorre a articulação de diferentes áreas do saber, exigindo na formação docente uma sólida base humanística, científica e tecnológica articulada com a ação pedagógica, através de um processo dinâmico de apropriação e produção do conhecimento. (p.18)

Quanto aos objetivos voltados para a formação dos futuros professores o PPC destaca:

> Dominar os conteúdos específicos, compreendendo as questões envolvidas em seu trabalho, sua identificação e resolução, autonomia para tomar decisões e responsabilidade pelas opções feitas; produzir e socializar os conhecimentos matemáticos construindo novas possibilidades para o ensino-aprendizagem; (p.19)

Em relação às competências a serem desenvolvidas pelos futuros professores de Matemática o PPC enumera um conjunto delas, levando em consideração a legislação do Ministério da Educação do Brasil.

> - Pensamento heurístico: capacidade de resolver e formular problemas, explorar, estabelecer relações, conjecturar, argumentar e validar soluções;
> - Domínio dos raciocínios algébrico, geométrico, combinatório e não determinista, de modo a poder argumentar com clareza e objetividade dentro destes contextos cognitivos. Ou seja, os alunos devem desenvolver capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos, percepção geométrico-espacial, capacidade de empregar ensaio e erro como procedimento de busca de soluções e segurança na abordagem de problemas de contagem, probabilísticos e estatísticos;
> - Habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
> - Conhecimento das regulamentações pertinentes, das propostas ou parâmetros curriculares, bem como das diversas visões pedagógicas e vivência direta com a estrutura escolar vigente no país; (p.21)

4.2. Faceta cognitiva

ISBN 978-84-945722-3-4

Um dos aspectos importantes de um processo de formação de professores é o contexto da avaliação que norteia o processo. Neste sentido buscamos explicitar as propostas do PPC para a avaliação dos futuros professores, a qual se apresenta com a seguinte perspectiva:

> A avaliação é parte integrante do processo de construção do conhecimento e instrumento diagnosticador, com vistas ao desenvolvimento global do aluno e à construção das competências requeridas para o desempenho profissional de cada período.
> A avaliação do desempenho dos educandos será contínua, gradual e cumulativa, sendo importante a valorização de aspectos qualitativos e quantitativos.
> Numa ação contínua, o aluno será observado com relação à apropriação de competências e habilidades e será avaliado como um todo, em quaisquer situações que envolvam aprendizagem e aplicabilidade da mesma.
> Deverão ser priorizados instrumentos de avaliação estimuladores, que envolvam atividades realizadas individualmente ou em grupo e que forneçam indicadores da aplicação no contexto profissional das competências adquiridas. (p.137)

4.3. Faceta afetiva

Esta faceta está muito pouco caracterizada no PPC analisado. O que encontramos se refere às questões gerais que mencionam à formação humana do futuro professor, diante da complexidade no exercício da docência.

> Os jovens professores sentem-se assustados com o local de trabalho, pois na sua formação inicial foi apresentada a ele uma "escola ideal". Isto faz com que o novo professor entre em estado de choque com a realidade, pois neste momento aparece a "escola real" com todas as suas contradições, crenças, valores e mazelas advindas de diferentes contextos sociais. Todo esse processo ainda é agravado pelo não reconhecimento de prestígio da carreira e a desvalorização salarial. (p.142)

4.4. Faceta interacional

Os apontamentos em âmbito da faceta interacional se constituem muito amplos, não explicitando como as relações serão estabelecidas. O PPC destaca que o diálogo entre as áreas da formação deve ocorrer, principalmente, pela interdisciplinaridade.

4.5. Faceta *mediacional*

Os dados analisados, levando em consideração esta faceta, permitem afirmar que o PPC busca, em suas diretrizes, promover o uso de diferentes recursos tecnológicos na formação dos futuros professores de matemática.

> - Capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias da comunicação e da informação para a resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem;
> - Capacidade de desenvolver projetos, avaliar livros, textos, softwares educacionais e outros materiais didáticos e analisar currículos da escola básica, bem como capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão. (p. 21)

Sobre o uso dos recursos tecnológicos o PPC aponta:

> A inovação tecnológica em um contexto de formação de professores se caracteriza pela capacidade de utilizar, inventar e reinventar os recursos tecnológicos para a sala de aula. O desenvolvimento

ISBN 978-84-945722-3-4

tecnológico e os avanços científicos impactam sobremaneira o ambiente da escola. Diante disso, o IFMG/SJE tem investido na inserção das tecnologias na prática pedagógica do professor de Matemática. Exemplos destas práticas são:

- Construção, pelos alunos, de seus materiais didáticos;
- Realização de oficinas tecnológicas voltadas para aprendizagens diversas: o uso da pipa em conhecimentos geométricos, a construção de jogos, estudos e práticas de novas possibilidades em prática pedagógica de matemática;
- Uso de novos softwares de aprendizagem dinâmica;
- Exploração de laboratórios virtuais de aprendizagem: projeto UNIJUÍ, Laboratório CDME da UFF, Recursos Laboratoriais do Portal do Professor do MEC e RIVED (Rede Internacional Virtual de Educação). (p.136)

4.6. Faceta ecológica

No âmbito da faceta ecológica destacamos os aspectos do currículo que estabelece relações com o entorno, as propostas de inovações e as conexões interdisciplinares.

De acordo com PPC o curso deve propiciar aos futuros professores vivências de diálogo entre as diferentes disciplinas que compõem o currículo:

> A interdisciplinaridade é elemento fundamental no âmbito da Licenciatura em Matemática. O diálogo entre as diferentes disciplinas se constitui em experiências enriquecedoras e motivadoras no processo de ensino aprendizagem. Neste sentido, as disciplinas do campo teórico específico precisam dialogar com as de natureza instrumentais e pedagógicas e vice e versa. As abordagens da Prática Pedagógica buscam subsídios em todas as outras disciplinas para se constituir num elemento fundamental e articulador da formação profissional. Este diálogo se efetiva na perspectiva de Paulo Freire, onde a relação entre teoria e prática através de temas geradores é essencial para a consolidação das aprendizagens significativas. (p.91)

Um outro aspecto sobre o contexto do programa de formação, que é importante destacar, é o conjunto de políticas públicas que compõe o percurso formativo dos futuros professores de matemática, no que concerne à extensão e à pesquisa. Tais políticas públicas, pelo PPC, têm possibilitado um diálogo entre a formação dos professores e a escola de educação básica.

5. Considerações finais

Pelas análises, é possível apontar que o PPC, apresenta elementos contemporâneos relacionados à formação de professores.

A faceta epistêmica está delineada, em maior grau, que as demais. Os objetivos e as competências, no âmbito desta faceta, estão muito bem enumerados e explicados.

A faceta cognitiva aparece, sutilmente, nos aspectos relacionados aos processos de avaliação que deverão ocorrer ao largo dos períodos formativos.

As facetas afetiva e interacional, estão pouco representadas no PPC. Poucos elementos apontam preocupação com os aspectos afetivos na formação dos futuros professores de matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

Quanto à faceta *mediacional*, esta, se faz presente de forma bastante significativa no PPC. As sugestões e orientações para o uso da tecnologia e dos recursos materiais no processo de ensino e aprendizagem são evidentes. Além disso, o PPC pressupõe que o futuro professor deve saber construir seus materiais para desenvolver o ensino de conteúdos matemáticos.

Por último, a faceta ecológica, constitui, junto à faceta epistêmica, as duas que ocuparam mais espaço e importância para a formação dos futuros professores de Matemática.

Diante do exposto, esta análise, permite apontar que os aspectos relacionados às facetas epistêmica, ecológica e *mediacional* são preocupações muito fortes no programa de formação de professores em questão. O que justificaria tal fato? Inicialmente, no que concerne ao epistêmico, pela própria história de preocupação dos cursos de formação de professores em ter uma base densa de conteúdos matemáticos e, mais recentemente, pela força da lei, a obrigatoriedade de outros conteúdos didáticos pedagógicos. À faceta ecológica e *mediacional*, pode-se inferir que, se trata de um reflexo à adequação, dos programas de formação, às novas diretrizes, que demandam, o estabelecimento do diálogo entre a formação e o entorno social, político e econômico pelas políticas existentes no seio do programa de formação, além da existência de um Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática que agrega atividades de ensino, pesquisa e extensão.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*. *59*, 389-407.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. e Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*, (1), 46-74.

Pino-Fan, L., Font, V. e Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, e L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L. e Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

ISBN 978-84-945722-3-4

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

CB-865

MATHS & CRAFTS: UNA MANERA DE APRENDER INGLÉS EN MATEMÁTICAS

Marta Argudo Ortiz – Laura Villanueva Che
m.argudo@fundacionpjo.es – l.villanueva@fundacionpjo.es
Colegio Sagrada Familia P.J.O. Valencia (España)

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y el parendizaje de las matemáticas
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: CLIL, TIC, materiales manipulativos

Resumen

Esta comunicación trata una experiencia de bilingüismo en la asignatura de Matemáticas (especialmente en el bloque de Geometría) con alumnado de 1ºESO. Este proyecto denominado Maths & Crafts sigue la metodología CLIL (Content and Language Integrated Learning) que favorece el uso del inglés de forma natural ya que los alumnos se centran en los contenidos que se les imparte y no tanto en el idioma. Por tanto tiene un doble objetivo, usamos el inglés y trabajamos las Matemáticas mediante materiales manipulativos, TICs, trabajos de investigación… Haciendo al alumno protagonista de su propio aprendizaje. Se presentará el vocabulario matemático en inglés y la forma de introducirlo, además de la metodología, actividades y recursos utilizados.

Desarrollo del trabajo

¿Qué es el método CLIL?

CLIL son las siglas en inglés de Content and Language Integrated Learning que significa Aprendizaje Integrado de Contenidos en Lengua Extranjera (AICLE). Este método favorece el aprendizaje de una lengua de forma natural, como una herramienta de comunicación y no solos como una asignatura. Para trabajar en una clase con el método CLIL nos centramos más en el vocabulario que queremos que el alumno aprenda que en las estructuras gramaticales, que se trabajarán más profundamente en la clase de la asignatura específica, en nuestro caso el inglés.

ISBN 978-84-945722-3-4

Queremos que el alumno sea protagonista de su propio aprendizaje por eso las actividades al inicio son más sencillas, y poco a poco se va aumentando el grado de dificultad, para evitar la frustración del alumno al trabajar en una lengua diferente de la materna, además el aprendizaje es más interactivo y autónomo ya que se suele trabajar en grupos o parejas, desarrollando trabajos por descubrimiento e investigación y usando materiales manipulativos y TICs.

El aprendizaje de lenguas extranjeras siempre ha sido la asignatura pendiente de los españoles, y en un mundo globalizado conocer una lengua extranjera es imprescindible, sobre todo el inglés que actualmente es requerido en un 70% de las ofertas laborales. Richard Vaughan opina que debemos aprovechar la etapa escolar para que los alumnos aprendan inglés y lo usen ya que después de la pubertad se hace más difícil el aprendizaje. El método CLIL intenta superar las limitaciones de los planes de estudio tradicionales evolucionando hasta la integración curricular.

¿Cómo surgió y en qué consiste el proyecto Maths & Crafts?

Al comienzo del curso 2013/2014, el colegio Sagrada Familia PJO, donde se ha realizado esta experiencia, recibió la propuesta de tener un Auxiliar de Conversación en Inglés enviado por la Consejería de Educación durante todo el curso en todas las etapas educativas. Este hecho unido a la idea de hacer un cambio metodológico en las Matemáticas de 1º ESO para hacer la asignatura más atractiva a los alumnos usando materiales manipulativos TICs, trabajos de investigación ... hizo que creáramos el proyecto Maths & Crafts.

Este proyecto se realizó durante todo un curso escolar, en una sesión de 55 min por semana con alumnado de 1ºESO. Principalmente se basa en trabajar los bloques de aritmética y sobre todo de geometría utilizando como lengua de comunicación el inglés.

Maths & Crafts presentó dos novedades respecto a cómo se impartía la asignatura de Matemáticas en el colegio:

La primera novedad como ya hemos dicho es que se impartía en inglés, gracias a la auxiliar de conversación en inglés que Consejería concedió al colegio pudimos introducir sin ningún problema el vocabulario necesario para cada sesión (no más de 7 palabras nuevas por sesión) y trabajar durante toda la clase en este idioma. El tipo de metodología favoreció el que la asignatura se impartiera en inglés ya que no eran necesarias largas explicaciones de nuevos

ISBN 978-84-945722-3-4

conceptos por parte del profesor, sino que los alumnos iban aprendiendo los nuevos contenidos conforme iban realizando el taller de la sesión. Al principio de cada clase se le entregaba al alumnado una hoja del vocabulario que se iba a utilizar, y lo practicábamos durante unos 5/10 minutos, después el profesor hacía una breve explicación, se realizaba el taller, y al final una ficha para evaluar si el alumnado había sido capaz de conseguir las competencias de la sesión.

La segunda novedad fue la metodología y los recursos que utilizamos, cada sesión era totalmente práctica fomentando la autonomía en el aprendizaje, la colaboración y cooperación entre compañeros ya que muchas de las sesiones fueron en grupo, queríamos una metodología activa y participativa que fomentara que los alumnos fueran los protagonistas de las Matemáticas que estaban aprendiendo. Para ello se utilizaron recursos manipulativos, la mayoría de ellos creados por los propios alumnos, además de recursos digitales como el ordenador del aula o la pizarra digital interactiva.

Objetivos del proyecto

Los principales objetivos del proyecto son:

- Capacitar al alumnado para que adquiera las destrezas matemáticas necesarias en 1ºESO, parcialmente en inglés.
- Utilizar la lengua inglesa no sólo en las clases específicas de inglés, sino también en otras materias, de forma que se convierta en un instrumento, no un fin en sí misma.
- Incorporar la terminología matemática tanto en español como en inglés en el lenguaje habitual a fin de mejorar el rigor y la precisión en la comunicación.
- Integrar la enseñanza de las matemáticas en un marco más amplio, como es el currículo integrado, por lo que superamos los tradicionales compartimentos estancos del conocimiento.
- Capacitar al alumnado para funcionar en el mundo actual a través del conocimiento de los datos numéricos y geométricos del entorno, en distintas unidades, formas y sistemas.
- Fomentar el aprendizaje de la asignatura a través de las TIC y la manipulación, desde un punto de vista recreativo.
- Despertar la curiosidad del alumnado y hacerlo protagonista de su propio aprendizaje.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Fomentar el trabajo en equipo, la cooperación y colaboración entre compañeros.

Materiales manipulativos y TICs

Para poder dar las clases en inglés por supuesto no podían tratarse de clases magistrales con largas explicaciones por parte del profesor, por lo tanto desde el principio el profesor se centró en ser el guía de los alumnos para que estos pudieran ser los verdaderos protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje, para ello en todas las sesiones utilizaremos materiales manipulativos o las TICs ya que esto incentiva la creatividad, autonomía, participación activa y cooperación entre compañeros. Han sido muchos los pedagogos y matemáticos que han enfatizado en la necesidad de aprender haciendo, manipulando e incluso jugando:

Para Piaget y Inhelder a partir de la acción sobre los objetos los niños aprenden, ya que la manipulación permite hacer representaciones mentales que ayudan a la construcción y la interiorización de conceptos.

Al igual que para Puig Adam que establece que "... no hay aprendizaje donde no hay acción y que en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumnado en su acción de aprendizaje" .

Además de los materiales manipulativos debemos tener en cuenta el uso de las TICs, en este proyecto hemos trabajado en varias sesiones con el programa de geometría dinámica GeoGebra, la ventaja más clara que ofrece este software de acuerdo con Mora J. A. es que la geometría deja de ser estática y se puede manipular, podemos ver la geometría desde otras visiones e interactuar con ella. Con esto conseguimos uno de los objetivos básicos del proyecto Maths & Crafts, hacer al alumno protagonista de su propio aprendizaje aumentando su autonomía e iniciativa.

Ejemplos de actividades

A continuación mostramos algunas de las actividades realizadas en el proyecto durante el curso 2013/2014:

Actividad 1: MAGIC MATHS

Esta fue la primera sesión del proyecto, quisimos introducir el vocabulario básico de matemáticas en inglés y hacer una clase divertida para conseguir que los alumnos se

ISBN 978-84-945722-3-4

implicarán en el proyecto desde un primer momento, para ello realizamos unos trucos de Matemagia en los que los alumnos solo necesitaban hacer unas simples operaciones, después de hacer cada truco reflexionábamos sobre los contenidos matemáticos utilizados.

Figura 1: Una de las diapositivas utilizadas para la sesión.

Vocabulario de la sesión:

-
- Equals igual
- To sum / To add sumar
- + plus más
- To subtract restar
- − minus menos
- To divide by dividir
- To multiply by multiplicar
- × times por

Objetivos específicos:

- Conocer el vocabulario básico matemático en inglés (sumar, restar ...)
- Mejorar el cálculo mental de los alumnos.
- Llamar la atención de los alumnos utilizando unes matemáticas recreativas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Enlaces de interés:

- http://www.slideshare.net/martuxi9/math-magic-1st (presentación con los trucos de *matemagia*)

Actividad 2: KIRIGAMI

Esta sesión la dividimos en dos partes: en la primera les dimos a los alumnos un folio en sucio, doblando y haciendo solo un corte en el papel tenían que conseguir una de las figuras, clasificadas en tres niveles de dificultad, como las que se muestran a continuación y que aparecen en un artículo de la revista SUMA escrito por el Grupo
Alquerque de Sevilla (se incluye en los enlaces de interés)

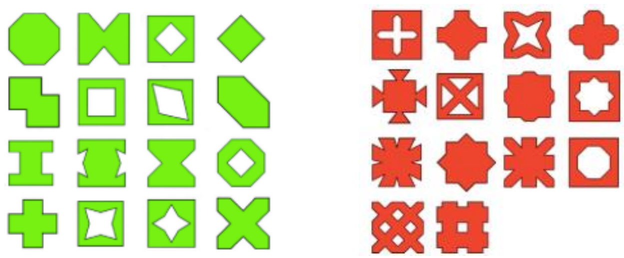


Figura 2: Patrones geométricos que los alumnos tenían que conseguir doblando y cortando.

En la segunda parte, la más creativa, debían doblar (siempre por la mitad) las veces que quisieran el cuadrado de papel y realizar los cortes que quisieran para crear la figura que ellos quisieran. La mayoría se dieron cuenta rápido de que cuantas más veces doblaban el papel más ejes de simetría tenía su figura, y por tanto más detalles y originalidad tenía. Además los alumnos también tuvieron que encontrar la medida del ángulo que había entre dos ejes de simetría adyacentes, y entre todos obtuvieron que era:

$\frac{180°}{nº\ ejes\ de\ simetría}$.

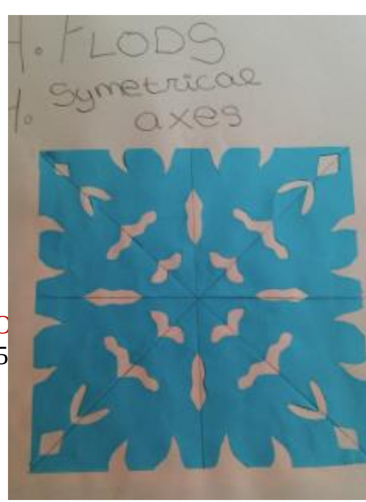


Figura 3: Ejemplos de las creaciones con kirigami de los alumnos.

Vocabulario de la sesión:

- Fold/Bend — doblar
- Symmetry — simetría
- Angle — ángulo
- Point — punto
- Axis/Axes — eje/ejes
- Adjacent axes — ejes adyacentes

Objetivos específicos:

- Reconocer cuando una figura plana es simétrica.
- Encontrar los ejes de simetría de una figura simétrica.
- Relacionar el número de ejes de simetría con el ángulo que forman entre ellos.
- Construir una figura con varios ejes de simetría.

Enlaces de interés:

- http://revistasuma.es/IMG/pdf/59/055-058.pdf (artículo revista SUMA)

Conclusiones

Los beneficios de este proyecto que se llevo a cabo durante dos cursos escolares, fueron notables para el alumnado. Primero por el glosario de vocabulario matemático en inglés que se crearon ya que la mayoría de las palabras aprendidas las utilizaban en todas las sesiones, y un idioma se aprende cuando se usa. Segundo porque el cambio de metodología les hizo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ver las matemáticas desde una visión más práctica y divertida, comprobaron que las matemáticas se pueden tocar y crear, y que no todo es cálculo y algoritmos estancos.

Es verdad que al principio los alumnos les costó adaptarse al proyecto, y cumplir la norma de que el vocabulario de la sesión debían comunicarlo en inglés tanto con sus compañeros como con los profesores, las primeras sesiones solo decían las palabras de la sesión en inglés y en el resto de conversación hablaban en castellano, pero poco a poco se fueron soltando al utilizar el inglés cuando querían preguntar o establecer alguna conclusión. También supuso un cambio para ellos el hecho de que el profesor solo explicará la actividad en 5/10 minutos y luego fueran ellos los que tenían que averiguar cómo se hacían la mayoría de cosas y analizar los resultados que obtenían, algunos alumnos incluso le decían al profesor que por qué no les quería explicar cómo se hacía, o porque no les decía a que resultado debían llegar. Pero al igual que con el idioma, con el paso de las sesiones los alumnos se fueron haciendo más autónomos, desarrollando su pensamiento y razonamiento matemático y llegando antes a los resultados esperados.

Al finalizar ambos cursos se les entregó un cuestionario a los alumnos para analizar los resultados del taller, que actividades les habían gustado más, si creían que habían aprendido más con esta metodología, que opinaban de que el proyecto fuera en inglés ... y la gran mayoría valoraron muy positivamente Maths & Crafts y pidieron volver a realizar el proyecto el curso siguiente.

Referencias bibliográficas

Arranz J.M., Losada R., Mora J.A., Sada M. (2011). *Realidades de GeoGebra.* Revista SUMA, 67, pp. 7-20.

Coyle, D. (2007). *Content and language integrated learning: Towards a connected research agenda for CLIL pedagogies*. International Journal of Bilingual Education and Bilingualism 10(5), 543-562.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1975). *Psicología del niño*. Ediciones Morata. Madrid (España)

Pérez Torres I. (2016). CLIL/AICLE. http://www.isabelperez.com/clil.htm Consultat 15/07/2016

ISBN 978-84-945722-3-4

Planas, N. & Setati, M. (2009). *Bilingual Students using their Languages in the Learning of Mathematics*. Mathematics Education Research Journal 21(3), 36-59.

Puig Adam, P. (1956). *Didáctica matemática heurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-866

Artigo: Um olhar sobre o conhecimento matemático Kaingang

Raquel Polizeli – Valdeni Soliane Franco
raquelpolizeli.rp@gmail.com – vsfranco@uem.br
Universidade Estadual de Maringá-UEM, Brasil

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de la Educación Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente
Palabras clave: Educação Matemática, Educação Matemática Indígena, Etnomatemática, Kaingang.

Resumo:
Este artigo é fruto de uma pesquisa que busca conhecer a matemática utilizada pelos indígenas Kaingang da região central do Paraná-Brasil. Esses métodos e técnicas matemáticas, segundo a concepção de D'Ambrósio, é chamada de Etnomatemática. O conhecimento da Etnomatemática do grupo pode auxiliar os membros dessa comunidade no aprendizado da matemática institucionalizada e levar a novos conceitos e conhecimentos úteis para a Educação Matemática, bem como contribuir para uma consciência coletiva a respeito da importância desse povo. Utilizou-se recursos da História Oral para a coleta de dados. A entrevista foi realizada com um indígena Kaingang e com uma pedagoga que trabalha com crianças Kaingang. Como resultado obteve-se algumas informações, que através do olhar da matemática institucionalizada nos conduz aos conteúdos relacionados a números, formas e medidas e lógica. Para este artigo destacam-se o uso de um sistema de numeração de base cinco, o método para construção de retas baseados na propagação do som e indicios de uma lógica distinta da convencional. Com isso pressupõe-se a existência de uma matemática própria do povo Kaingang e sua importância, o que instiga a continuar a busca por mais elementos da Etnomatemática desse povo.

Introdução

O presente artigo é fruto de uma pesquisa realizada a partir de uma intervenção proposta em uma disciplina do Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência e Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Essa, busca conhecer um pouco dos métodos e técnicas matemáticas utilizada pelos Kaingang oriundos das Terras Indígenas do Ivaí e de Faxinal, no estado do Paraná. De acordo com a concepção de D'Ambrosio esses métodos e técnicas matemáticas são chamados de Etnomatemática, que segundo esse autor é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupos

ISBN 978-84-945722-3-4

de trabalhadores, classes profissionais, crianças de certa faixa etária, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos. (D'AMBROSIO, 2002, p.9).

Segundo o Portal Brasil (2010) o presidente da Fundação Nacional do Índio (Funai), Márcio Augusto Meira afirma que "as cidades brasileiras estão cada vez mais recebendo integrantes de povos indígenas". A cidade de Maringá é uma das que vivenciam essa realidade. Maringá tem recebido a cada ano um número maior de indígenas, que vem à cidade principalmente para vender o artesanato confeccionado por eles. Para efetuar suas vendas eles precisam operar com dinheiro, ou seja, entender um pouco de matemática. Para muitos deles essa matemática não é a habitualmente usada no dia-a-dia na Terra Indígena (T I), tal situação levou-nos a indagar qual o conhecimento matemático desses indígenas.

A partir daí nasceu a questão de pesquisa: Quais são os métodos e técnicas matemáticas utilizada pelos indígenas Kaingang?

Tal pesquisa contribui para documentar o conhecimento matemático Kaingang; para que se crie uma consciência coletiva a respeito da importância do passado desse povo; para que os professores das escolas indígenas possam utilizar os saberes Kaingang para aproximar os conhecimentos de seus alunos àqueles propostos para o ensino da matemática, favorecendo uma aprendizagem mais significativa. Além disso, o estudo e a difusão de novas matemáticas como as dos Kaingang, podem levar a novos conceitos e conhecimentos úteis a Educação Matemática.

Visando essas contribuições o objetivo desse trabalho é documentar e discutir alguns dos métodos e técnicas matemáticas utilizadas pelos indígenas Kaingang.

Referenciais Teóricos

A Etnomatemática foi instituída como um programa de pesquisa nos anos 70, porém essa ligação entre a Matemática e a Cultura vinha sendo explorada tempos antes por pesquisadores de todo o mundo. Segundo Gerdes (1996), D'Ambrosio teve um papel dinamizador, ao propor a Etnomatemática como programa de pesquisa, sendo uma metodologia para descobrir as pistas e analisar os processos de origem, transmissão, difusão e institucionalização do conhecimento matemático em diversos sistemas culturais.

Para D'Ambrosio (1993):

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> [...] *etno* é hoje aceito como algo muito amplo, referente ao contexto cultural, e portanto, inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; *matema* é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; e tica vem sem dúvida de *techne*, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, poderíamos dizer que etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Nessa concepção, nos aproximamos de uma teoria de conhecimento ou, como é modernamente chamada, uma teoria de cognição. (D'AMBROSIO, 1993, p. 5)

Há diferentes correntes no âmbito da pesquisa em etnomatemática. Vithal e Skovsmose (1997) destacam quatro dessas correntes: a primeira é uma crítica às correntes de história da matemática, que ignoram, distorcem e marginalizam as contribuições matemáticas de culturas externas ao contexto europeu ocidental, chamada de Matemática Ocidental; a segunda, considerada antropológica, analisa a matemática de diferentes povos, que, ainda que colonizados, mantêm suas práticas originais; a terceira corrente explora a matemática presente no cotidiano de um grupo social, revelando que ela pode ser gerada em uma gama grande de contextos; por fim a quarta fala da articulação entre etnomatemática e educação matemática. Esse trabalho pauta-se na corrente antropológica, já que visa conhecer a matemática do povo Kaingang da T I de Faxinal e do Ivaí, Paraná. Essa corrente tem como objeto de estudo o homem, a humanidade e as características de sua evolução física, social ou cultural.

Nesse trabalho, busca-se apresentar alguns conhecimentos etnomatemáticos nas comunidades Kaingang, como na pesquisa de George (2011) que propõe levantar indícios acerca dos conhecimentos (etno)matemáticos das comunidades indígenas Guarani, por meio de seus docentes, a fim de que possam ser utilizados pelos professores indígenas para o ensino de Matemática nas escolas das aldeias. Porém o foco desse artigo é apresentar os indícios observados através da fala de um professor indígena que é parte do povo Kaingang. O conhecimento Kaingang buscado está vinculado a oralidade e memória das pessoas desse povo, principalmente as mais antigas, por isso assim como George (2011) acredita-se que a História Oral é uma forma de melhor captar esses conhecimentos, além disso, favorece que movimentos de minorias culturais e discriminadas, como os indígenas, encontrem espaço para validar suas experiências, dando sentido social aos lances vividos sob diferentes circunstâncias como enfatizam Meihy e Holanda (2007, p. 26-27).

ISBN 978-84-945722-3-4

A Etnomatemática, ainda contribui com a sociedade, se usada com o objetivo de fazer com que as diferentes matemáticas sejam respeitadas e vistas de forma mais humanitária, pode também promover o respeito ao contexto e aos indivíduos de diferentes grupos, povos e nações Silva (2010, p 18).

Métodos

Esta é uma pesquisa qualitativa, na modalidade de estudo de caso, no âmbito da Etnomatemática, em que foi realizada uma entrevista semiestruturada, como um procedimento de coleta de informações. Por entender do mesmo modo como Duarte (2004),

> Entrevistas são fundamentais quando se precisa/deseja mapear práticas, crenças, valores e sistemas classificatórios de universos sociais específicos, mais ou menos bem delimitados, em que os conflitos e contradições não estejam claramente explicitados. Nesse caso, se forem bem realizadas, elas permitirão ao pesquisador fazer uma espécie de mergulho em profundidade, coletando indícios dos modos como cada um daqueles sujeitos percebe e significa sua realidade e levantando informações consistentes que lhe permitam descrever e compreender a lógica que preside as relações que se estabelecem no interior daquele grupo, o que, em geral, é mais difícil obter com outros instrumentos de coleta de dados. (DUARTE, 2004, p. 216)

A entrevista foi concedida na Associação Indigenista de Maringá - ASSINDI, instituição que acolhe indígenas artesãos que comercializam suas peças em Maringá e região, e acadêmicos indígenas em formação. A escolha de tal associação deveu-se por ser um local que reúne indígenas e é localizado na cidade de Maringá.

A coleta de dados deu-se por meio de entrevista semiestruturada, pautada em recursos da História Oral. Para Meihy e Holanda (2007), são três questões que norteiam a efetivação da história oral: De quem? Como? Por quê?

Respondendo a essas questões, as pessoas escolhidas para esta pesquisa foram um indígena Kaingang e uma pedagoga. O indígena foi professor da escola localizada nessa TI, que é formado em magistério bilíngue (português e Kaingang), cursa o terceiro ano de Pedagogia, sua escolha deveu-se por ele compreender e falar português, ter vivido e convivido em uma TI, por conhecer bem os costumes e a tradição do povo Kaingang. A pedagoga trabalha na associação, com as crianças indígenas, ela conhece um pouco da língua Kaingang, aprendeu por conta própria para se comunicar melhor com as crianças e suas famílias, ela foi escolhida por ser funcionária da ASSINDI.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A elaboração da entrevista seguiu as orientações da professora da disciplina em que foi proposta a intervenção. Uma das orientações era que se buscasse observar a matemática utilizada pelos indígenas, tentando se possível não mencionar ou relacionar com a matemática institucionalizada e não comentar ou explicar inicialmente o que é Etnomatemática. Assim buscou-se preparar um roteiro, em que o ambiente criado e as perguntas abertas buscavam levar os entrevistados a sentirem-se à vontade.

Durante a entrevista, notada a desinibição dos participantes, em meio as questões sobre a instituição, foi perguntado ao entrevistado indígena, onde era sua T I, para buscar saber mais sobre como era a vida naquele local. A partir daí o indígena passa a relatar suas memorias de forma espontânea e a pesquisadora passa a balizar as falas com questões que o levasse a falar mais sobre a etnomatemática do grupo, mas sem utilizar o termo claramente, como por exemplo: "Como funcionam as coisas na aldeia, na terra indígena, como é o dia-a-dia? Como as pessoas lidam, por exemplo, com medição? Como funciona, como é pensado [...]?". Somente no final da entrevista é que foi explicado aos entrevistados sobre Etnomatemática e o objetivo da entrevista.

Resultados e Discussões

Embasados nos referenciais teóricos escolhidos e na entrevista, segue a descrição de três dos resultados e discussões referentes aos conteúdos relacionados a números, formas e medidas e a lógica.

Pôde-se constatar por meio dos relatos do indígena que os Kaingang da TI de Faxinal, utilizam números de um a dez, com um sistema de numeração de base cinco, em que não há representação escrita, somente a representação oral desses números, como afirma o próprio indígena no fragmento:

> "Nóis temo número só até dez só, e só na oralidade. É "ûmpiri" que é número 1 pra nóis, "Orai-garê" dois, "Touõntô" trêis, "veincon-gra" quatro, "pet-car" é cinco, "pet-car-cûmpiri" seis, "pet-car-cum-orai-garê" sete, "pet-car-cri-Touõntô" oito, "pet-car-cri-veincon-gra" nove, "pet-car - pet-car" é 10." (Indígena, 2016, p. 6) (Essa referência é da transcrição da entrevista, que está no anexo)

Os nomes atribuídos aos números de um a cinco, segundo os relatos do entrevistado e pelo que diz Sufiatti e Duarte (2015), são os mesmos utilizados pelos Kaingang que vivem em Santa Catarina. Os números maiores do que cinco podem mudar dependendo da T I, que

ISBN 978-84-945722-3-4

é evidenciado pela seguinte fala: “Mas só que cada Terra Indígena se adaptou diferente a esses número, lá na região central do Paraná se adaptaram dessa forma na escola indígena, por exemplo, em Ivaí, Faxinal, Ortigueira, Marrécas se adaptaro deste jeito”.

Quando se refere a T I de Apucaraninha, de onde veio sua esposa, o indígena diz: “[...] lá os dialetos muda, então lá ele fala assim depois do cinco eles fala em cima dos animais que é ´chê` sete, o animal é quati. O oito por exemplo é ´Ó-iur` anta”. Sufiatti e Duarte (2015) verificam que não há uma certeza sobre qual é o maior número considerado pelos Kaingang estudados, e que o sistema de numeração que era até o cinco foi sendo ampliado por eles.

É bastante comum povos que utilizam sistemas numeração de base cinco, como evidenciam Bandeira e Lucena (2004) ao dizerem que alguns povos agrupavam os objetos em grupos de cinco, que alguns aprenderam a contar usando uma das mãos e depois passaram a utilizar a outra mão e os pés.

Um método que chama a atenção é o utilizado por esses Kaingang para construção de picadas (retas feitas na terra para o plantio das sementes ou mudas, fileiras), baseado na propagação do som, como pode ser constatado na fala:

> Um dia meu pai falou assim pra mim: "vamo lá fazer medida da nossa roça, nóis tem que plantar alguma coisa." Ai eu fiz com ele esse negocio de medir, ele me deixou no meio da mata e mandou eu ficar gritando das 9 até as 11 hora pra faze a picada. Ele falava tem que deixar a boca aqui reto. É o som! Se você virá pra cá e grita, o som vai sai pra cá. Você tem que ficar reto e boca tem que ficar aqui ó! [gesto: mão na boca] Mas saia bem certinho lá naquele lugar. No início a gente fazia assim pra medir as nossas roças coletivas. (Entrevista, 2016, p. 8)

Segundo Menezes (2003), a propagação de uma onda sonora através do ar ocorre da seguinte forma:

> [...] é como se um pequeno segmento de ar (de moléculas de ar) vibrasse para frente e para trás por toda a direção da onda, da sua proveminência até onde sua energia (força) permitisse que ela chegasse, fazendo que denominemos tal forma de propagação de onda sonora como um movimento ondular longitudinal. (Menezes, 2003, p. 44)

Pelo relato do indígena e pelo dito por Menezes (2003) é possível que o método Kaingang para a construção de picadas mobilize conhecimento relacionados à Física. Uma forma de construção de retas que muito difere das utilizadas na matemática institucionalizada.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Com relação à lógica, a pedagoga que trabalha com as crianças indígenas da TI do Ivaí acolhidas na ASSINDI observa que a estrutura lógica da língua é diferente da utilizada no português. Ela comenta que as crianças quando tentam explicar algo em português tem dificuldade com a concordância, como fica evidente nessa fala da entrevistada: “[...] eles querem explicar alguma coisa para a gente, mas eles não têm aquela concordância, porque eles falam ao contrário, o Kaingang a lógica é inversa, se ele vai falar assim: ‘eu tô com fome’, ele fala: ‘fome eu tô’ [...]”. Detalhes como esse sinalizam que a lógica Kaingang pode ser distinta da utilizada pelas sociedades ocidentais. Tal fato instiga a busca da compreensão dessa estrutura lógica, como faz Ferreira (2005) que busca compreender a lógica dos Waimiri-atroari. Ele acredita que essa é diferente da aristotélica, utilizada pela civilização ocidental. Esse fato, pode alterar a construção da matemática institucionalizada, pois ela foi construída por meio da lógica aristotélica.

A lógica indígena não deve ser considerada primitiva ou inferior, como ressalta o autor ao citar Lèvy-Brühl, que diz “Apesar de a representação ser, por excelência, um fenômeno intelectual e cognitivo, tal não ocorre da mesma maneira no caso das representações primitivas”. E diz ainda, que para os indígenas os elementos emocionais e motores integram as representações. O que as deixam mais elaboradas e ricas.

Considerações Finais

O presente trabalho objetivou expor um pouco dos métodos e técnicas matemáticas utilizada pelos indígenas Kaingang das Terras Indígenas do Ivaí e de Faxinal e documentá-las, usando recursos de História Oral e conceitos de Etnomatemática.

Para atender a esse objetivo, utilizou-se como subsídio os referenciais teóricos escolhidos e a entrevista e, a partir deles, através do olhar da matemática institucional, delineou-se categorias de estudo referentes aos conteúdos relacionados a números, formas e medidas e, ainda, a lógica.

Nesse artigo buscou-se destacar três dos resultados obtidos. O primeiro é a constatação que os Kaingang da TI de Faxinal, utilizam números de um a dez, com um sistema de numeração de base cinco, em que não há representação escrita, além do que os números maiores do que cinco podem mudar dependendo da TI, como já foi visto na seção de resultados e discussões. Nas roçadas cultivadas por eles, estão presentes conceitos

ISBN 978-84-945722-3-4

etnomatemáticos que se relacionam a conceitos da Física e aqueles vistos nas unidades de espaço e forma da matemática escolar. Detalhes como a concordância verbal observadas na língua Kaingang e na forma com que eles lidam com a valoração das mercadorias sinalizam que a lógica Kaingang pode ser distinta daquela utilizada pelas sociedades ocidentais, justificando provavelmente, a diferença com a matemática institucionalizada.

Assim, considera-se que os resultados obtidos evidenciam a riqueza de conhecimento que os Kaingang possuem, a existência de uma matemática própria e sua importância. A matemática Kaingang é importante para esse povo e pode ser relevante para a Educação Matemática e para os professores que atuam nas escolas indígenas.

O exposto pode evidenciar a dificuldade dos indígenas, atendidos pela pedagoga, em lidar com a lógica e a matemática utilizada na sociedade do "branco". O emprego da Etnomatemática no ensino para essas crianças poderia então favorecer a compreensão da matemática, além de promover o respeito ao contexto e aos indivíduos de diferentes grupos, povos e nações. Desse modo, esse trabalho instiga a continuar a busca por mais elementos da Etnomatemática Kaingang, vasculhando suas memórias, tradições e costumes na busca desses conhecimentos e da compreensão da lógica utilizada por esse povo.

Referências

Bandeira, A. F.; Lucena, R.C. I. (2004). *Etnomatemática e as práticas profissionais*. v. 3, Natal, RN.

Portal Brasil (2010). Meio Ambiente. http://www.brasil.gov.br/meio-ambiente/2010/03/numero-de-indigenas-vivendo-em-cidades-e-cada-vez-maior-no-brasil/ Consultado 07/02/2017

D'Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática*. São Paulo: Ed. Ática.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade*. 2ª Edição, Belo Horizonte: Autêntica (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Duarte, R. (2004). Entrevistas em pesquisas qualitativas. Educar, Editora UFPR, Curitiba, 24, 213-225.

Ferreira, E. S. (2005). Racionalidade dos índios brasileiros. Revista Scientific American Brasil, Edição especial Etnomatemática, São Paulo: Ediouro, 11, 90- 93.

ISBN 978-84-945722-3-4

George, I. T. B. (2011). *Conhecimentos (etno)matemáticos de professores Guarani do Paraná.* Curitiba, Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática)- Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade estadual do Paraná.

Gerdes, P. (1996). Etnomatemática e Educação Matemática: Uma panorâmica geral. Lisboa, Revista Quadrante, v. 5, 2, 105-138.

Meihy, J. C. S. B.; Holanda, F. (2007). *História Oral: como fazer,*
como pensar. São Paulo: Contexto.

Menezes, F. (2003). *A acústica musical em palavras e sons.* Cotia, SP: Ateliê Editorial.

Silva, A. A.; Jesus, A. E.; Scandiuzzi, P. P. (2010). *Educação etinomatemática: concepções e trajetória.* Goiás: Ed. PUC.

Sufiatti, T.; Duarte, C. G. (2015). O currículo de matemática da escola indígena cacique Vanhkrê e a constituição de sujeitos indígenas kaingang na contemporaneidade. Revista Pedagógica, Chapecó, v. 17, 34, 48 -170.

Vithal, R.; Skovsmose, O. (1997). The End of Innocence: a critique of'ethnomathematics'. In: Educational Studies in Mathematics. Netherland: Springer, v 34, 2, 131-147.

ANEXO – Transcrição de trechos da Entrevista

A entrevista foi realizada na Associação Indigenista de Maringá - ASSINDI, em 07 em outubro de 2016, com duração de 58 minutos. Aqui apresentamos apenas trechos dessa entrevista, suficientes para compreensão do artigo.

[...]
Pesquisadora: E onde era sua Terra?

Indígena: Faxinal, município de Candido de Abreu. Com isso, e antecipando assim, voltei pra terra Indígena e meu tio era cacique e eu já tava com muita dificuldade dentro da universidade, pensei, né, que acho que vou volta por que meu tio é cacique e tava já garantindo um serviço pra mim e tal, pra mim trabalha na escola.

Pesquisadora: Na tribo mesmo?

Indígena: Na Terra Indígena. Então, pensei vou voltar pra lá. Quando voltei, daí eu trabalhei de auxiliar, depois eu tive a oportunidade de fazer o magistério indígena em Faxinal do Céu, por 3 anos, dái em 2010 eu me formei, daí, em magistério. Então eu sou professor bilíngue, e trabalhei 7, 8 ano, numa Terra Indígena com as crianças pequenas, e eu já trabalhei com as crianças pequenas e séries iniciais, prézinho, ensino médio, numa Terra Indígena. Então isso me incentivou, pra mim voltar de novo pra mim estuda. Então hoje eu tô aqui de novo, eu faço terceiro ano da pedagogia na UEM, acho que vou para o quarto ano, tenho certeza que vou para o quarto ano. Que agora eu falo assim, que agora eu tenho a minha família, eu falo assim que todo mundo, aquela época eu não pensava assim, que todo mundo tinha dificuldade, mas hoje eu percebo assim, que não é só eu que tenho dificuldade e hoje eu falo assim que sem me forma eu não saio mais da UEM, por que eu tenho que me formar, sempre falo isso pra Pedagoga, pra Adriele, pras pessoas mais próximas eu falo isso, não vou desistir mais, por que eu já desisti uma vez e sempre meu falecido pai falava assim: A gente tem segunda oportunidade, se você desisti na segunda oportunidade, acho que terceira oportunidade as vezes vem, mas as vezes nunca vem.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pesquisadora: Eu sou professora de universidade também, e eu trabalho em Campo Mourão na UTFPR. E o conselho que eu dou para os meus alunos é sempre esse: Não desiste, vá faça, mesmo que seja difícil, siga! Eu também vim de fora, minha família mora no estado de São Paulo no interior, e eu também vim fazer faculdade, então eu sei bem como são as dificuldades, né. Eu passei por um pouquinho assim, talvez você tenha outras dificuldades além dessas que eu tinha, da cultura...

Indígena: Quando eu cheguei aqui eu não falava muito, eu não dominava a língua portuguesa só que eu ficava muito quieto. E um probrema nosso é nóis indígena interagi com as pessoa. No primeiros anos a gente fica totalmente fechado.

Pesquisadora: Tem um certo medo...

Indígena: Tem um medo assim de, as comida também é muito diferente. A gente quase não come muitas mistura assim, como é que fala assim, muita salada, cebola, alho, a gente não é acostumado e não tem habito de ficar comendo assim diariamente assim, mas a gente vai se adaptando. Hoje eu entendo que ta uma cultura diferente, mas aquela época eu não entendia nada disso.

Pesquisadora: O tempo vai ajudando a gente entender um pouquinho, né.

[...]
Pesquisadora: Hoje meu interesse é saber um pouco mais da cultura mesmo. Eu acho que você (Indígena) pode me ajudar um pouco mais. Vou exigir um pouco mais de você: "Como funciona as coisas na aldeia, na terra indígena, como é o dia-a-dia? Como as pessoas lidam, por exemplo, com medição? Como funciona, como é pensado para fazer o artesanato? Como vocês pensam assim?

Pedagoga: Relacionado a medida do artesanato?

Pesquisadora: Não só isso, não a nossa matemática comum, a nossa medida. Mas como eles fazem, por exemplo, eu já li alguns trabalhos que para medir as pessoas usam varas, ou a própria altura, ou o palmo para medir, em fim. Como é feito essa medida tem alguma técnica?

Indígena: Començano, nóis Kaingang não temo número, a gente adaptamo o número dos português, né. Nóis temo número só até 10 só, e só na oralidade.

Pesquisadora: Só na oralidade. E quais são?

Indígena: É, "ûmpiri" que é número 1 pra nóis, "Orai-garê" dois, "Touõntô" trêis, "veincon-gra" quatro, "pet-car" é cinco, "pet-car-cûmpiri" seis, "pet-car-cum-orai-garê" sete, "pet-car-cri-Touõntô" oito, "pet-car-cri-veincon-gra" nove, "pet-car - pet-car" é 10.
Mas só que cada Terra Indigena se adaptou diferente a esses número, lá na região central do Paraná se adaptaram dessa forma na escola indígena, por exemplo, em Ivaí, Faxinal, Ortigueira, Marrécas se adaptaro deste jeito. E agora esses dia eu tava veno assistino uma reportagem de uma escola de Apucaraninha, que minha mulher é de lá, e nos falamo oque que eles vão falar da nossas sala de aula, que lá os dialetos muda, então lá ele fala assim depois do cinco eles fala em cima dos animais que é " chê" sete, o animal é quati. O oito por exemplo é "Ó-iur" anta. Ai tudo é relacionado bem desse jeito ai em matemática, e nóis não na região central. Nove acho que é "dô", parece, "dô" é arma né, nossa arma é flecha, ai eles falam assim, não é arco da flecha é a flecha que vai mesmo. Não sei lá pra região sul. Região sul pega Manguerinha, Rio das Cobras e Palmas, né. Todas vez a gente tinha essa formação dos professores indígenas para ver como que a gente ia trabalha numa sala indígena, numa sala da escola indígena, então a gente tinha essa formação, mas parou e teve agora, essa semana passada, diz que eles vão começar tudo de novo, aí eu fui convidado. A turma da SEED me convidaro, que é tudo novato. A tuma que sempre fazia saiu tudo. Ai, nóis tamo com medo, se tivesse continuado aquelas pessoas mesmo, a gente as vezes avançava muito mais, mas agora, ta começando de novo, por isso que eu tô falando assim, pra nóis o número, matemática numa de aula na Terra Indígena é bem difícil também, aí nisso que as matemática, quando vai para o segundo ano, terceiro ano, é tudo português, mas a gente desde de pequeno a gente tem que ensinar a crianças.

Pedagoga: Era diferente esse negócio de compra e venda, não tinha esse negócio de valor. "Ó eu preciso de arroz, mas você tem feijão? Vamos trocar". Eu acho que não tinha isso assim não, "O meu vale mais."

Indígena: Agora eu expliquei um poco agora duma sala indígena, como funciona. Agora eu vou explicar como eles fazem a matemática sem saber. Minha mãe nunca estudou, meu pai nunca estudou, eu tenho um irmão lá que também nunca frequentou sala de aula, mas mesmo assim eles consegue domina a prática de fazer artesanato, e ai funciona a matemática, né.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pesquisadora: E como funciona essa matemática?

Pedagoga: Acho que é por isso que eu nunca aprendi fazer artesanato! [risos]

Indígena: Acho que é, como é que fala, acho que é lógica! Ali que eles aprende matemática. O que matemática é.., eu nunca me interessei estuda sobre matemática Kaingang tamém, mas só que eu me interessei mais sobre os mitos, lendas, tudo isso. Pelo que eu sei um pouco matemática Kaingang, a roçada ele faz assim, sem sabe, num sei onde é que, não sei como que o meus parentes dominaro as técnica de medida de roça. Ele pegam uma madeira, eles finca assim. Diz que um metro e meio pega pelo umbigo, por que todos indígena é de estatura baixa, diz que um metro pega por aqui (quase a altura deles. Um metro é até o umbigo), ai eles cortam um pedaço de madera e colocam em cima do taboa ai eles mede ali, ai eles pegam uma corda e vão medi, quando da, eles chamam de braça, quando dá 12 braça, ai eles falam: "Agora tá bom".

Pesquisadora: Uma braça ele tem a ideia de quanto que é em metro ou não?

Indígena: Acho que 12 braça dá uns 15 metro.

Pesquisadora: Mas por que o 12 braças?

Indígena: Eu não sei da onde eles tiraram essa técnica.

Pesquisadora: Mas será que tem a ver com a área que eles precisam para plantar? Para poder dar para determinado período?

Indígena: Sim. A eles fazem na beira da estrada, ai no inicio eles colocam 1 madeira, ai aqui eles marca com foice, lá na frente colocam 2, e lá na frente eles colocam mais 3 e lá no quina, eles falam: "tá bom, vai seguir por aqui", ai eles fazem volta a roçada cavuca a picada. A picada tem que ser bem reta, se desvia eles falam, não a gente tem que fazer por aqui ó.

Pesquisadora: A picada é o caminho?

Indígena: A picada é o caminho. Ai eles fazem em família esse. Tem aqueles que fazem só picada, aquele um que fazem só medida. Eu me desinteressei da roça quando sai. Ai quando dá 5 aqui, passa mais uns metro aqui, ai eles fecha esse. As vez passa um rio e aquela trilha tem que ser (Contornar). Ai quando volta quando é pra fechar outras família volta por aqui e tem que os que vão abri picada fica do outro lado e eles grita, ele grita muito alto daí. Através do grito eles vão vindo abrindo a picada até sair naquele lugar. Ai vão medir [estimar a produção obtida naquela área de roça], e falam aqui vai dar 3 litro, 1/2 quarta, 1 quarta, 1/2 alquere, 1 alquere, o meu pai sabia fazer isso ai. Um dia meu pai falou assim pra mim: "vamo lá fazer medida da nossa roça, nóis tem que plantar alguma coisa." Ai eu fiz com ele esse negócio de medir, ele me deixou no meio da mata e mandou eu ficar gritando das 9 até as 11 hora pra faze a picada.

Pesquisadora: Nossa!

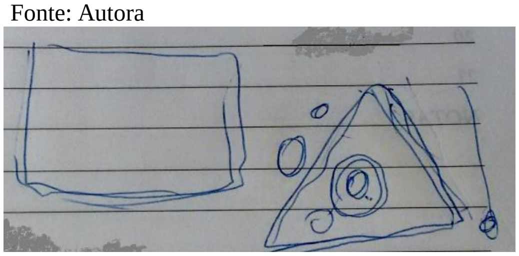
Indígena: Ele falava tem que deixar a boca aqui reto

Pesquisadora: Ah isso é uma orientação pelo som?!

Indígena: É o som! se você virá pra cá e grita, o som vai sai pra cá. Você tem que ficar reto e boca tem que ficar aqui ó! [Gesto: mão na boca]
Mas saia bem certinho lá naquele lugar. No início a gente fazia assim pra medir as nossa roças coletivas.

Pesquisadora: E o formato?

Indígena: [faz desenho em forma aproximada de retângulo, triângulo, para mostrar o formato do terreno onde plantam as roças]
Fonte: Autora



ISBN 978-84-945722-3-4

Pesquisadora: Por que será que o formato é sempre geométrico?

Indígena: Por que as vezes, nóis indígena sempre respeitamo as nascente dos rio, ai pra não corta em cima dos rio, eles faz esses desvio, ou as vezes tem uma mina aqui dentro [mostra dentro do triângulo desenhado], porque eles tem que faze as barraca deles aqui por perto, e busca água da mina, tem que desce aqui. Então eles fazia tudo isso.

Pesquisadora: E o tempo? Tinha alguma forma de medir o tempo?

Indígena: O tempo, eu sempre falo assim que, a gente nunca tinha relógio, nunca se preocupamo com relógio. O tempo, o relógio nosso é muito diferente. Cada família se organizava diferente, tinha organização diferente de tempo. Diz que meu avô, por parte da mãe, falava assim que o tempo dele acorda era a primera cantoria do passarinho, bem cedo. Levantava ia lá onde ele pegava água, na mina, de lá ele ia pro rio, onde ele tomava banho as 6 hora da manhã, vinha e fazia fogo, acordava todo mundo e falava:"Vamo trabalha agora." E era bem cedo que eles entrava pra roça. Ai eles acompanhava o sol. Segundo o que meu avô falo pra mim, na hora do almoço o sol tá aqui [faz gesto simbolizando uma perpendicular à terra.] a sua sombra não tá indo nem pra lá, nem pra cá, ta indo no pé, então ele já sabia. E as mulher também sabe que se a sombra tá ficano meio curta, assim, elas já sabe que tá na hora de faze o almoço, e com isso eles sai lá pra almoça. Ai quando o sol tá se pondo, também, é hora de para, assim, a gente nunca usamo relógio. Ele sempre falava assim: "Esse relógio que se carrega no bolso é pros priguiçoso." Que num tá querendo pensar, que num tá querendo acompanha a natureza, assim.

Pesquisadora: Tinha alguma medição de meses?

Indígena: Tem! É contando lua. Aprendi contando lua. Ao nascer da lua eles já fazem, porque a lua já sai assim, no meio do mês que é a escrita, né. Mais só que a lua nossa caba no 10, se eu não me engano. E quando tá ficano um poco meio frio já pensa que é hora de faze as plantações.

Pesquisadora: Então a temperatura que guia?

Indígena: A temperatura que indica assim pra eles a hora de faze roça, dia de faze medida, chega certa hora é hora de queima, e é o tempo que indicava tudo isso pra eles.
Tem que tá muito atento a natureza, por que a gente, eu mesmo se volta a fazer isso vou me perde tudo.

Pesquisadora: E para o artesanato, para o dia a dia, você lembra como que funcionava?

Indígena: Olha pra o artesanato, eu se lembro muito bem, sempre acompanhei minha mãe cortando a taquara no meio do mato, né. Por que cada balaio são de formato diferente tem o balaio mesmo que chama de balaio, tem os pequenininho, e tem o cesto, e tem as penera. Por que quando a gente sai pra corta taquara a gente não corta qualquer taquara, a gente tem que ir no mato escolher os que tão retos, que dá pra usar e a gente não corta aquele que tá meio carunchado, tudo isso aprendi pra fazer artesanato quando eu tinha uns 10 ano por aí, então a gente corta mais ou meno 1 metro e meio pra fazer um balaio, o cesto tem que ter uns 2 metros por ai, por que você tem que faze a, subi, né [altura]. Então a gente pega de 10 em 10 pra faze balaio, se você pega 10, 20 taquara, ou 25, pra carregar nas costa, se você é mais forte carrega uns 30, por ai, já umas pessoas carrega 30 nas costa. Então ali as pessoa já sabe quantos balaio que vai dá. Ai chega em casa faz todo aqueles processo de preparação, tudo na mão, com faquinha, tirar as fibras certinho, outra tem que joga fora. Ai quando tá tudo pronto daí eles fala assim a gente tem que busca o que vai se o traçado dele em volta, pros traçado tem que ser um taquara mais novo, que tá sem aqueles folha. Ai a gente corta, ele é difícil de quebra durante o processo de trança, tem que ficar meio arredondado, e ali a gente pega em torno de 4 a 5 metro, chega em casa joga no sol, quando seca tudo a gente corta no meio e faz, tira tudo de tala do meio, depois tira as fibras do meio, quando tiver pronto aquele a gente faz envolta dum círculo e guarda, quando tiver bastante, daí, do que vai ser trançado, do que vai ser trançado em volta, o que vai ser esticada, ele chama de esqueleto, que vai da suporte pro cesto. Os pais, as mães convida todos parente e até as criança já participa do proceso de manuseio. Aí é a matemática, ai nóis pegamo de 3 em 3, de 4 em 4, sem sabe [intuitivamente] a na segunda volta já tira um de baixo e pega outro em cima que vai ser a mesma quantidade sempre. É uma lógica que foi passada de pai pra filho.
Pra fazer aqueles chapéu também, a gente usa aquele criciuma, não é taquara, não é bambu, é aquele bem fininho, a gente busca ele, é cheio de água por dentro. A gente busca lá no mato e quando a gente chega em casa as mãe, as crianças, as vó, tudo participa, na raspagem, e quando fica boa a gente reparte no meio, é tudo assim, mais ou meno o mais cumprido vai ser 60 centímetro.

Pesquisadora: E a medida é feita como?

Indígena: Essa não tem medida, a gente só corta, a olho mesmo, então depois de estar pronta a gente corta assim, um 10 cm de cada, tirando as tala ali certinho, ai depois que fica pronto, ali bem certinho em forma de círculo, quando cabe na mão os maço, ai tá bão, ai ela fala vou começa trança.

Pesquisadora: A mão é a medida? O maço era uma mão?

Indígena: A mão era a medida, o maço era as duas mão cheia, então, com uma estatura de mais ou meno 40 cm, então ela fala assim esse tá bom pra fazer um chapéu agora, ai ela começa a faze trançado, ai o que ela usa [de medida] também é o braço, a braçada assim é um tipo de, fica mais ou meno uma fita, até chega 1m, 1 braçada chama, ai vai, 2 baçada, 3 braça, ai vai até 5 braça, ai ela fala que esse vai dar chapéu agora. Ai ela começa a custurar com esses fio, que a gente compra no mercado, na loja, ai ela vai custurando. Depois que fica pronto ela vai encaixando tudo certinho ai forma um chapéu.

Pesquisadora: Explica a teoria Étnomatemática....

Indígena: Outra forma de medi é com os pés, com o passo. Até as criança usa esse até hoje quando vai jogar bolinha de gude, eles intende como "buliguliga" lá pra medi a área onde é que vai fica.

Pesquisadora: Agradeçimento...

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-868

DESARROLLANDO LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES MEDIANTE EL APRNDIZAJE DE LAS FUNCIONES

Marta Argudo Ortiz – Laura Villanueva Che
m.argudo@fundacionpjo.es – l.villanueva@fundacionpjo.es
Colegio Sagrada Familia P.J.O. Valencia (España)

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas
Modalidad: CB (Comunicación breve)
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: funciones, inteligencias múltiples, colaborativo.

Resumen

¿Se puede aprender Matemáticas a través de la música o representando una obra de teatro? Durante tres cursos hemos estado desarrollando un proyecto para trabajar las funciones en 2º E.S.O. utilizando la metodología de las Inteligencias Múltiples y nuestra respuesta es SÍ. Porque todos nuestros alumnos son inteligentes, pero cada uno tiene unas capacidades más desarrolladas que otras y se motiva de forma diferente. Por tanto si enseñamos los contenidos de nuestra asignatura desde otros ángulos, conseguiremos el paso de la enseñanza al aprendizaje de las Matemáticas. En este proyecto, cada contenido se ha introducido usando una inteligencia diferente, mediante la música, la lingüística, la percepción visual y espacial… Se detallará la metodología, actividades y recursos utilizados.

Desarrollo del trabajo

¿Qué son las inteligencias múltiples?

La teoría de las Inteligencias Múltiples entiende la competencia cognitiva como un conjunto de habilidades, talentos y capacidades que llama “inteligencias” y todas las personas poseen estas habilidades, capacidades mentales y talentos en distintos niveles de desarrollo. Howard Gardner define la inteligencia como la “capacidad de resolver problemas o elaborar productos que sean valiosos en una o más culturas”. Gardner distingue ocho tipos de inteligencias:

1. Inteligencia lógico-matemática: es la capacidad para calcular, medir, evaluar hipótesis y proposiciones, efectuar operaciones matemáticas complejas,…Los científicos, matemáticos, ingenieros entre otros, presentan estas capacidades.

ISBN 978-84-945722-3-4

2. Inteligencia lingüístico-verbal: es la capacidad de pensar en palabras y de utilizar el lenguaje para expresar y apreciar significados complejos. Los escritores, los poetas, los oradores y locutores presentan niveles altos de esta inteligencia.
3. Inteligencia visual-espacial: proporciona la capacidad de pensar en tres dimensiones. Permite a las personas percibir imágenes internas y externas, recrearlas, transformarlas o modificarlas, recorrer el espacio o ubicar objetos, producir y decodificar información gráfica… Pilotos, marineros, arquitectos, artistas plásticos, entre otros, tienen un alto desarrollo de esta capacidad.
4. Inteligencia musical: es la inteligencia que poseen los compositores, críticos musicales, oyentes sensibles, músicos en general, directores de orquestas. Es la capacidad de ser sensible a las melodías, ritmo, armonía y tono.
5. Inteligencia naturalista: es la capacidad de distinguir, clasificar y utilizar elementos del medio ambiente, animales o plantas. Incluye las habilidades de observación, experimentación, reflexión y cuestionamiento de nuestro entorno. Es la que demuestran los biólogos, los naturalistas, los ecologistas…
6. Inteligencia cinestésico-corporal: permite al individuo manipular objetos y expresarse a través de las habilidades físicas. Los atletas, bailarines, cirujanos, mimos, artesanos,… poseen esta inteligencia desarrollada.
7. Inteligencia interpersonal: es la capacidad de comprender a los demás e interactuar eficazmente con ellos. Es también, ser sensible a los estados de ánimo, modos y humores del otro. Esta capacidad la poseen los docentes, actores, trabajadores sociales, entre otros.
8. Inteligencia intrapersonal: es la capacidad de percibirse a uno mismo y de utilizar dicho conocimiento para planificar y dirigir la propia vida.

¿En qué consiste el proyecto?

Este proyecto se basa en trabajar la unidad didáctica de Funciones en 2º E.S.O. utilizando la metodología de las Inteligencias Múltiples y se ha desarrollado durante tres cursos en el Colegio Sagrada Familia P.J.O. de Valencia.

En este proyecto, cada contenido y cada sesión se ha introducido usando una inteligencia diferente, mediante la música, la lingüística, la percepción visual y espacial… de manera que

ISBN 978-84-945722-3-4

todos nuestros alumnos han aprendido atendiendo a la diversidad del aprendizaje y han desarrollado diferentes competencias de acuerdo a las inteligencias trabajadas, puesto que todos nuestros alumnos son inteligentes, pero cada uno tiene unas capacidades más desarrolladas que otras y se motiva de forma diferente. Por tanto si enseñamos los contenidos de nuestra asignatura desde otros ángulos, conseguiremos el paso de la enseñanza al aprendizaje de las Matemáticas.

Objetivos de la unidad:

- Aprender el tema de las funciones utilizando las inteligencias múltiples, para poder hacer llegar el conocimiento a todos los alumnos.
- Despertar la curiosidad del alumnado y hacerle protagonista de su propio aprendizaje.
- Fomentar el trabajo en equipo, la cooperación y colaboración entre compañeros.
- Fomentar la autonomía e iniciativa personal: Disponer de habilidades sociales para relacionarse, cooperar y trabajar en equipo: ponerse en el lugar del otro, valorar las ideas de los demás, dialogar, negociar y trabajar de forma cooperativa y flexible.

Sesiones programadas en la Unidad de Funciones y actividades de enseñanza y aprendizaje:

SESIÓN 1:

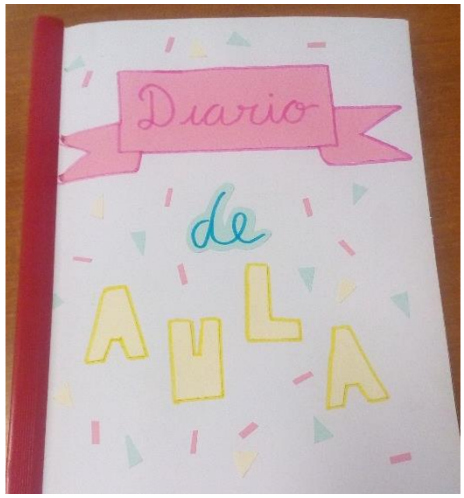
Explicar a los alumnos en qué consiste la metodología de las Inteligencias Múltiples, que en esta unidad trabajarán en equipos de tres personas y tendrán que ponderar el grado de implicación y trabajo de cada miembro del equipo. Además se les pasará un test para que cada alumno sepa qué inteligencia tiene más desarrollada.

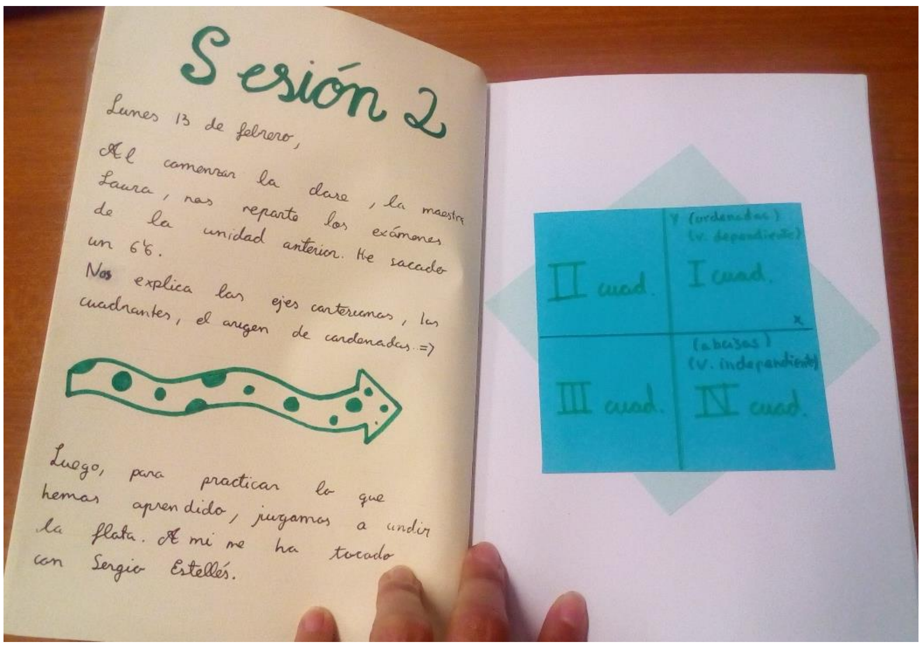
Esta es nuestra paleta de las Inteligencias Múltiples en la que cada día se muestra la inteligencia o inteligencias trabajadas junto con la actividad a realizar.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cada día trabajarán la **inteligencia intrapersonal,** pues realizarán un diario de aula en el que explicarán en cada sesión la inteligencia trabajado y los contenidos aprendidos, y la **inteligencia interpersonal**, pues deberán trabajar con su equipo de forma cooperativa y colaborativa, comunicaándose de forma asertiva.

ISBN 978-84-945722-3-4



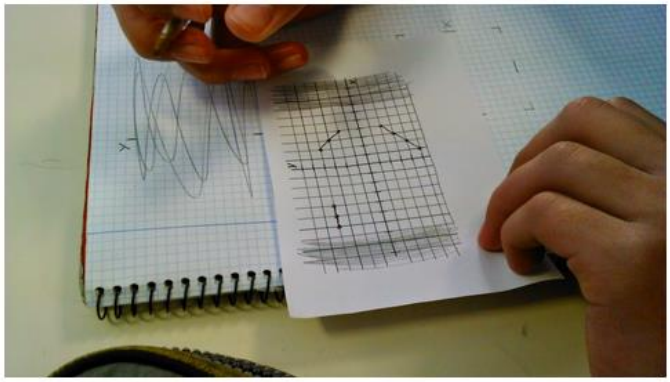


<u>SESÍON 2</u>:

Explicamos los ejes coordenados, las variables dependientes e independientes y cómo colocar los puntos en los ejes.

Con ayuda del GeoGebra, los alumnos saldrán a la pizarra digital interactiva y colocarán los puntos que el profesor les indique en los ejes cartesianos. Tras esto, jugarán por parejas a hundir la flota con cordeadas cartesianas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Así pues, habrán trabajado la **inteligencia visual-espacial**, además de haber fomentado la competencia digital.

SESIÓN 3:

Explicar el concepto de función y las diferentes formas en las que se presenta (tabla de valores, enunciado, fórmula, representación gráfica,…)

Trabajaremos la **inteligencia naturalista** proporcionándoles diferentes tablas en las que aparezca información sobre el medio ambiente y se relacionen dos variables, por ejemplo: años y contaminación acústica en Valencia. Entre los miembros del equipo, buscarán y elegirán la tabla más interesante para representarla y comentarla.

SESIÓN 4:

Realizar la ficha "La tarde de Marina" (representación e interpretación de gráficas). Trabajaremos la **inteligencia lingüístico-verbal** pues los alumnos tendrán que inventar una historia en la que se avance en el tiempo y en el espacio (parecida a la de "La tarde de Marina" para representarla gráficamente.

SESIÓN 5:

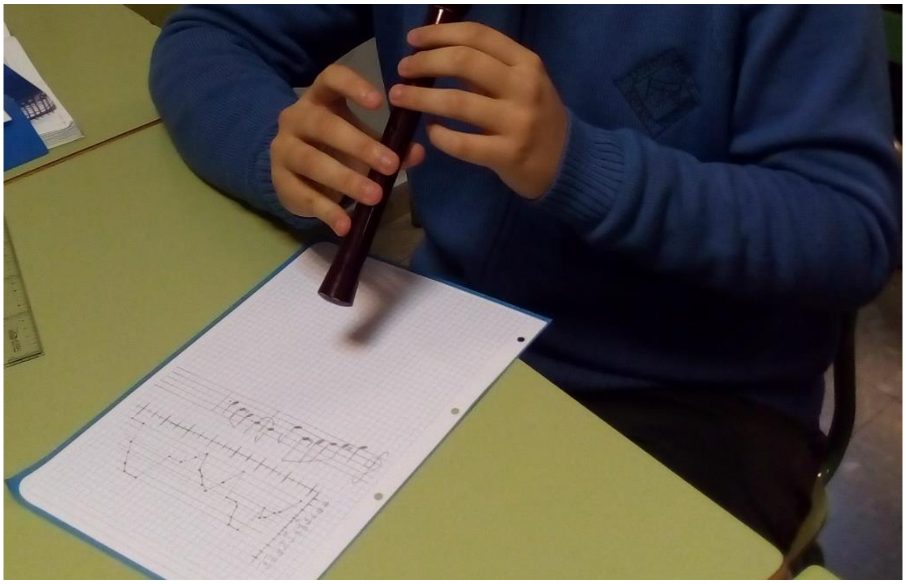
Representar mediante una pequeña obra de teatro la historia creada en la sesión anterior. Un miembro del equipo lee la historia, otro la representa y otro la dibuja gráficamente en la pizarra. Así trabajamos las **inteligencias lingüístico-verbal, visual-espacial** y **cinestésico-corporal**.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

SESIÓN 6:

Explicar dominio y recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad y crecimiento y decrecimiento de una función.

Por grupos, crearán una pequeña melodía colocando en el eje de abcisas los tiempos y en el eje de ordenadas las notas musicales. Luego la tocarán con la flauta y tendrán que comentar el crecimiento y decrecimiento de su función partitura creada, los máximos y mínimos,… se habrá trabajado de este modo la **inteligencia musical**.

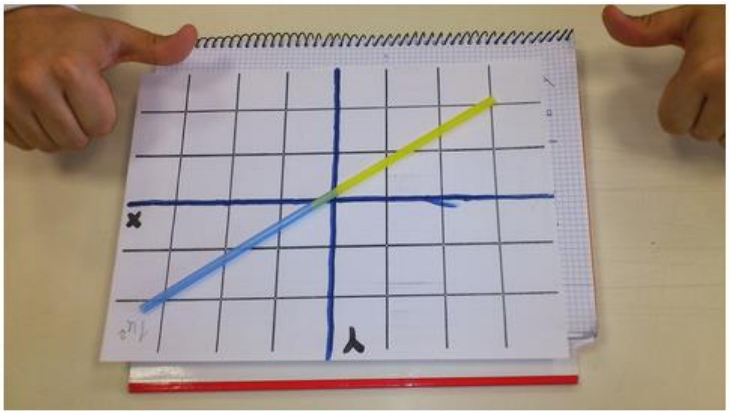


SESIÓN 7:

Explicar las funciones lineales, propiedades y paso de la función a la representación y viceversa.

Además de trabajar la **inteligencia lógico-matemática**, trabajamos también la **inteligencia visual-espacial** haciendo que nuestros alumnos representen funciones lineales con una pajita en una cuadrícula.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



SESIÓN 8:

Sesión de repaso. Bajamos al patio para realizar un concurso de rapidez de conceptos. Tomando como referencia el ajedrez que hay dibujado en el patio, marcamos los ejes coordenados. Por turnos y según va indicando el profesor, los alumnos tienen que posicionarse en la coordenada que se les indica. Posteriormente, con una cuerda, tiene que representar la recta que el profesor les indica. De esta forma, los alumnos han trabajado la **inteligencia cinestésico-corporal**, además de la **inteligencia matemática** que, evidentemente está presente en cada sesión.

Conclusiones

Los beneficios de este proyecto que se ha llevado a cabo durante tres cursos escolares han sido notables para el alumnado, tanto a nivel académico como actitudinal. Los alumnos estaban mucho más motivados trabajando con esta nueva metodología y su predisposición hacia la asignatura y las ganas de aprender eran muy buenas. Además, el alumno ha sido el verdadero protagonista, pues ha sido partícipe de su propio aprendizaje. El hecho de que tuvieran que elaborar un diario de aula les ayudaba a afianzar los conceptos trabajados en cada sesión, por lo que asentaban mejor los conocimientos aprendidos y la ludificación de algunas actividades ha hecho que estuvieran más motivados.

Está claro que los nuevos tiempos requieren nuevas estrategias educativas, y para ello, es imprescindible obtener información sobre cómo aprende el alumno y cuáles son sus

ISBN 978-84-945722-3-4

fortalezas e intereses, para así poder utilizar todos los recursos pedagógicos disponibles. Con la metodología de las inteligencias múltiples, el profesor deja de ser un transmisor de conocimientos y se convierte en un guía que acompaña al alumno en su proceso de aprendizaje, permitiéndole así adquirir las competencias requeridas. Nuestros alumnos han aprendido a trabajar en equipo de forma asertiva, han aprendido a gestionar los tiempos, se han ayudado unos a otros y mediante la metodología de las inteligencias múltiples, han sido ellos los principales protagonistas, aprendiendo a través de sus intereses.

Referencias bibliográficas

Inhelder, B. & Piaget, J. (1975). *Psicología del niño.* Ediciones Morata. Madrid (España).

Puig Adam, P. (1956). *Didáctica matemática heurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media.* Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

Armstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula.* Editorial Paidos.

Campbell, L.; Campbell, B. & Dickenson, D. (2000). *Inteligencias múltiples: usos prácticos para la enseñanza y el aprendizaje.* Editorial Troquel.

Gerver, R. (2012). *Crear hoy la escuela del mañana.* Ediciones SM.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-870

CRIANÇAS COMPARANDO PROBABILIDADES EM JOGO COM MOEDAS

Rita Batista – Rute Borba
rita_mat_@hotmail,com – resrborba@gmail.com
Universidade Federal de Pernambuco – Brasil

Núcleo temático: : I – Ensino e aprendizagem da Matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: probabilidade; comparação de probabilidades; crianças; jogo.

Resumo

A probabilidade é um conceito bastante complexo que exige algumas demandas cognitivas que envolvem a compreensão da aleatoriedade, do espaço amostral, da comparação e quantificação de probabilidades e das correlações (Bryant e Nunes, 2012). O recorte do estudo explora a compreensão de crianças acerca da comparação de probabilidades de eventos com mesma chance ou com chances diferentes de ocorrência, utilizando-se o jogo Passeios Aleatórios da Rute (PAR). O estudo foi realizado com 36 crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de uma entrevista clínica individual. Problemas de probabilidade repousam sobre o cálculo de proporções, mas há casos que podem ser resolvidos considerando relações simples de 'mais' e 'menos' a partir da análise do espaço amostral. Em relação à chance igual de ocorrência de eventos, 22% dos estudantes julgaram adequadamente a situação. No que concerne chances diferentes, mais de 52% responderam corretamente. Em ambos os casos, poucos alunos apresentaram justificativas coerentes. Houve gradação na qualidade das justificativas apresentadas pelas crianças em relação à faixa etária e observou-se que o jogo PAR pode possibilitar ampliação da compreensão de crianças em início de escolarização acerca da comparação de probabilidades.

Introdução

Nos últimos tempos, o ensino da probabilidade e a sua relação com a vida cotidiana tem suscitado discussões, especialmente porque os estudiosos apontam a necessidade permanente dos indivíduos em realizar julgamentos, fazer escolhas a partir de análises, tirar conclusões e tomar decisões que são imprescindíveis para a vida em sociedade. E, para tal, a probabilidade é imprescindível. Assim, há uma forte defesa amparada por estudos teóricos e empíricos, para a viabilidade, desde os anos iniciais, do ensino da probabilidade nas escolas, em função de sua relevância social.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gal (2004), defende que a probabilidade é uma parte da Estatística e da Matemática, importantes áreas de conhecimento para se aprender, porquanto, direito próprio e essencial na educação moderna. Serve, ainda, de suporte para assuntos avançados, como amostragem e inferência estatística; além de ser fundamental para formar o aluno para a vida, considerando que, ocorrências aleatórias permeiam nosso dia a dia.

No cotidiano das pessoas, as noções a respeito da probabilidade, incertezas e riscos aparecem com frequência e é necessário interpretar, reagir ou lidar com situações que envolvem elementos probabilísticos de diferentes níveis de (im)previsibilidade. Muitas vezes é importante, para a tomada de decisões, a realização de estimativas de certos eventos, independente do conhecimento formal em probabilidade que o indivíduo possua.

Ao longo da história, o conceito de probabilidade recebeu diferentes interpretações. Batanero, Henry e Parzysz (2005), apud Batanero e Diaz (2007), apontaram os diferentes significados da probabilidade, destacando: *o intuitivo, o clássico, o frequentista, o subjetivo, o de propensão, o lógico e o axiomático*. Exploraremos apenas o *significado intuitivo* por apresentar maior proximidade com o recorte da pesquisa aqui apresentada. Para estes autores, o *significado intuitivo da probabilidade* se refere a ideias intuitivas relacionadas à possibilidade e à probabilidade. Estas ideias surgem desde muito cedo em crianças e podem estar ainda presentes no pensamento de adultos que não tiveram educação formal. É comum a utilização de palavras ou expressões qualitativas como "provável", "improvável", "impossível", entre outras que expressam graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios. As ideias intuitivas são naturais e, por vezes, muito imprecisas. Assim, as pessoas atribuem valores aos eventos incertos, como forma de comparar as suas probabilidades em um vasto mundo de incertezas.

Bryant e Nunes (2012), julgam a probabilidade um conceito bastante complexo e que para sua compreensão se faz necessário o atendimento a quatro exigências cognitivas: i) compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade; ii) formar e categorizar espaços amostrais; iii) comparar e quantificar probabilidades; e iv) entender correlações.

A primeira exigência cognitiva considera que é preciso, inicialmente, reconhecer que o problema é sobre dados que são incertos, que envolvem elementos aleatórios, a segunda exigência, trata de refletir sobre os eventos que compõem o espaço amostral, já a terceira,

ISBN 978-84-945722-3-4

exige o cálculo de probabilidades, que são quantidades baseadas em proporções, e por fim, a quarta exigência que nem sempre é necessária, exige a observância das três exigências anteriores.

Focaremos neste artigo, mais a terceira demanda cognitiva, pois se refere ao recorte realizado neste momento. Bryant e Nunes (2012) defendem que boa parte dos problemas envolvendo probabilidade são assentados sobre o cálculo de uma ou mais proporções. No entanto, o raciocínio proporcional é, quase sempre, difícil para as crianças e esta dificuldade parece ser ainda mais acentuada quando se trata de comparar duas ou mais probabilidades. Em nosso estudo, consideraremos situações que podem ser resolvidas com base nas relações simples de ‘mais’ e ‘menos’ a partir da análise das possibilidades de formação dos eventos, ou seja, realizando comparação do espaço amostral.

Procedimentos e Métodos

Utilizamos neste estudo, jogos, dos quais um que foi denominado *Passeios Aleatórios da Rute* (PAR) (Figura 1). Na perspectiva apresentada neste texto, “os jogos devem ser encarados como situações-problema a partir das quais podem ser tratados conceitos e relações matemáticas relevantes para o ensino básico” (PERNAMBUCO, 2012, p.35). Dessa forma, o que caracteriza o jogo matemático é seu aspecto lúdico com a garantia de: i) aparência divertida, que pode imitar a realidade; ii) característica curiosa e que envolve surpresas; e iii) ser desafiador (Critton, 1997, apud Muniz, 2010). Nas situações de jogo, a criança fica motivada e envolvida, assim “percebe-se o quanto ela desenvolve sua capacidade de fazer perguntas, buscar diferentes soluções, repensar situações, avaliar suas atitudes, encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, resolver problemas (Grando, 2000; p.20).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

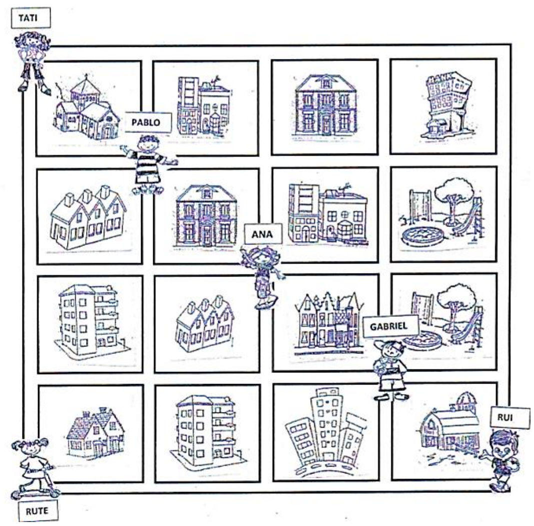


Figura 1: Passeios Aleatórios da Rute (Silva, 2016)

O jogo Passeios Aleatórios da Rute foi adaptado do jogo Passeios Aleatórios da Mônica proposto inicialmente por Fernandez e Fernandez (1999) em um estudo sobre a distribuição binomial no Ensino Superior, e, posteriormente, adaptado por Cazorla e Santana (2006) para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

No jogo, Rute pretende visitar os amigos: Tati, Pablo, Ana, Gabriel e Rui e, para tal, resolveu criar uma estratégia utilizando uma moeda. Ao sair de casa, ela lança uma moeda, se sair *cara* ela segue no sentindo leste (em frente) e se sair *coroa* ela segue no sentido norte (para cima). Em cada esquina do quarteirão, Rute lança a moeda novamente para saber que percurso seguir. Após o lançamento da moeda quatro vezes ela chega a um dos amigos. Assim, ela não sabe previamente qual amigo visitará.

No que concerne à compreensão das crianças acerca da *comparação de probabilidades*, trabalhamos com duas perguntas norteadoras que focaram *chances iguais* de ocorrência de um evento e *chances diferentes.* A partir de uma entrevista individual, baseada no Método Clínico Piagetiano[32], as 36 crianças (1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental) foram questionadas, após terem a oportunidade de entender o jogo e jogar algumas rodadas, sobre a comparação de dois eventos. Foi solicitado que elas escolhessem qual teria maior, igual ou menor probabilidade de acontecer, justificando suas respostas. Nas questões propostas, esperava-se que as

[1] -Teste que tem como finalidade “compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra-sugestões do examinador” (CARRAHER, 1998, p.7).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

crianças analisassem os casos favoráveis e não a relação desses com os casos possíveis (relação parte-todo), uma vez que este tipo de relação proporcional é mais difícil de ser compreendido.

Resultados e discussões

Para refletir sobre *chance igual* utilizou-se a seguinte pergunta norteadora: *Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel? Por quê?*

Ao lançar a moeda quatro vezes, há 16 resultados possíveis, dos quais para encontrar Gabriel é necessário sair *três caras e uma coroa*, em qualquer ordem. Já para chegar em Pablo, é preciso sair qualquer ordem da sequência que possua *três coroas e uma cara*. Assim, para cada um dos amigos, Rute tem quatro caminhos distintos, ou seja, as chances de visitar Gabriel é a mesma de visitar Pablo: 4 chances em 16 (4/16).

Como as crianças dispunham do desenho do jogo e de lápis para tracejar possíveis caminhos, imaginávamos que elas atentassem para a quantidade de percursos possíveis (possibilidades) para Rute chegar tanto a Gabriel quanto a Pablo e, assim, concluíssem que ambos tinham a mesma chance de serem visitados. A Tabela 1 mostra as escolhas feitas pelas crianças, na qual observa-se que a maioria julgou que Gabriel teria mais chance de ser visitado (aproximadamente 56%).

Tabela 1: Número de crianças por respostas dadas (por ano escolar) acerca da comparação de chance igual no jogo PAR

Ano	Há mais caminhos para Rute encontrar Pablo ou Gabriel?		
	Pablo	**Gabriel**	**Os dois**
1º ano	4	8	0
3º ano	1	6	5
5º ano	3	6	3

Fonte: Silva (2016)

É possível que a posição de Gabriel no desenho tenha motivado algumas escolhas. No desenho, Rute está num patinete voltada para o lado em que Gabriel se encontra e Pablo está mais 'acima' dela. Pode ter parecido natural para as crianças julgar que mais fácil chegar em Gabriel do que em Pablo, a partir da análise iconográfica e não probabilística da situação. Muitas vezes as crianças dissociam o jogo de suas regras e respondem ao que estava sendo indagado baseando-se em outros parâmetros.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Os alunos do 1º ano justificaram à indagação, quase sempre, considerando a análise da distância "é mais perto", "é mais longe", além de considerarem também a recente experiência vivenciada no jogo: "porque chegou mais vezes nesse quando joguei". Houve crianças que traçaram alguns caminhos com o dedo ou com o lápis e, embora tenham justificado erradamente, sinalizaram compreensões que poderiam ser usadas para explorar os espaços amostrais, como no exemplo de Pedro[33] que informou: "porque ela chega duas vezes aqui e uma aqui".

No 3º ano, 50% das crianças afirmaram que Gabriel teria mais chance de ser visitado que Pablo. Mesmo com respostas equivocadas, as justificativas apresentaram mais coerência acerca da análise dos espaços amostrais na comparação de probabilidades do que as crianças do 1º ano. Para exemplificar, trazemos o diálogo com Ana:

Pesquisadora: Quais os caminhos para chegar em Pablo?
Ana: Tem esse assim e esse assim (mostra dois jeitos, apontando com o dedo no desenho)
Pesquisadora: E pra chegar em Gabriel?
Ana: Tem esse assim, esse assim ou esse assim (mostra três caminhos)
Pesquisadora: Então, tem mais chance de chegar em Pablo ou Gabriel?
Ana: Em Gabriel! (falou com convicção).

Apesar de ter errado a resposta, Ana estabeleceu uma comparação entre os caminhos de se chegar a Gabriel e a Pablo. Imaginamos que com mais tempo de jogo, intervenções, registros, indagações e questionamentos, alunos no estágio de Ana podem avançar na compreensão referente ao tema em discussão.

No 5º ano, metade das crianças julgou que havia mais chance de chegar em Gabriel, utilizando-se de argumentos que se apoiavam na experiência do jogo, tais como: "*porque sempre sai cara*", *"porque bateu em Gabriel mais vezes quando joguei".*

André, uma criança do 5º ano, julgou, inicialmente, que Gabriel teria mais chance. No entanto, quando foi justificar sua resposta fazendo percursos, percebeu, considerando a 'geografia' do jogo, que as chances eram iguais. Apesar de não justificar corretamente, André apresentou indícios de compreensão. O diálogo, que segue, aponta a mudança de resposta de André.

Pesquisadora: Tu achas que tem mais caminhos pra Rute encontrar Pablo ou Gabriel?
André: Gabriel.
Pesquisadora: Por que tu achas que é Gabriel?

[33] Os nomes das crianças apontados neste artigo são fictícios para preservar suas identidades.

ISBN 978-84-945722-3-4

André: Porque ela vem aqui, aqui, aqui e aqui. E ela veio aqui, aqui, aqui e aqui (aponta no desenho dois caminhos possíveis).
Pesquisadora: E Pablo?
André: Ela vem aqui, aqui, aqui e aqui (mostra um caminho)
Pesquisadora: Então, tu achas que ela tem mais caminhos de chegar em Pablo ou Gabriel?
André: Gabri... (fica pensativo olhando o tabuleiro do jogo e não conclui o que estava dizendo).
Pesquisadora: Acha ou é a mesma quantidade de caminhos? Mais pra Pablo, mais pra Gabriel ou é a mesma coisa?
André: É a mesma coisa.
Pesquisadora: Por quê?
André: Porque aqui tem três casinhas e aqui tem três. Aqui é só ele virar pra esquina e aqui também.

Felipe, outra criança do 5º ano, respondeu que "*as expectativas são as mesmas porque tem quatro caminhos*" para Rute chegar em cada amigo. Ele percebeu rapidamente todas as possibilidades de caminhos para chegar, tanto em Pablo quanto em Gabriel, não havendo necessidade de intervenção da pesquisadora. A maioria dos alunos realizou a comparação de probabilidades sem considerar a análise das possibilidades de formação do evento que compõem o espaço amostral. No entanto, observamos que houve indícios de compreensão acerca da comparação de probabilidades considerando a análise desses eventos.

Para refletir sobre *chances diferentes*, perguntamos às crianças: *todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados? Por quê?*

Para chegar tanto em Tati como em Rui as chances são de 1 em 16 (Tati - quatro coroas; Rui - quatro caras*)*. Como já visto anteriormente, para visitar Gabriel ou Pablo as chances são de 4 em 16. Por fim, o amigo que tem mais chance de ser visitado é Ana (6 em 16), podendo sair qualquer ordem da sequência que envolva duas caras e duas coroas. Logo, as chances dos amigos serem visitados são diferentes, embora sejam iguais se compararmos algumas duplas, como Tati e Rui ou Gabriel e Pablo.

Imaginamos que as crianças pensariam sobre a quantidade de caminhos para Rute chegar em alguns dos amigos, e não exatamente sobre todas as possibilidades em termos de organização sequencial de caras e coroas. A Tabela 2 aponta o julgamento das crianças acerca do questionamento sobre chances diferentes.

Tabela 2: Número de crianças por respostas dadas (por ano escolar) acerca da comparação de chance igual no jogo PAR

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ano	Todos os amigos terão a mesma chance de serem visitados?	
	SIM	**NÃO**
1º	4	8
3º	6	6
5º	7	5

Fonte: Silva (2016)

A maioria dos alunos do 1º ano informou que as chances eram diferentes, no entanto as justificativas se referiram, quase sempre à proximidade e não à comparação de probabilidades, como por exemplo: *" Rui tem mais chance porque tem que ir direto",* "*alguns têm mais chance: Tati, porque num instante ela chega aqui"*.

Semelhantemente ao 1º ano, houve alunos do 3º ano que relacionaram a situação à proximidade: "*Tati tem mais chance porque chega mais rápido"*, "*Rui porque tá mais perto*". Carlos foi o único aluno do 3º ano que fez referência aos lados da moeda para justificar sua resposta, embora tenha apresentado uma resposta incorreta: *"Todos têm a mesma chance (...). Tô pensando, por causa que pode tirar cara ou coroa".*

A maioria dos alunos do 5º ano acreditou que todos os amigos teriam a mesma chance de serem visitados. No entanto, apesar da resposta equivocada, algumas justificativas consideraram não apenas a quantidade de percursos mas, também, a relação com o lançamento das moedas. Maria informou: "*aí é diferente, o joguinho funciona com uma moeda girando para ver onde sai. Aí tem vez que não sai alguns coleguinhas dela. Só apenas poucos colegas ela pode visitar: Pablo, Ana e Gabriel são os mais visitados*".

Considerações finais

Percebeu-se uma gradação na qualidade das justificativas apresentadas pelas crianças: os alunos do 1º ano não conseguiram relacionar os percursos ao lançamento das moedas; os do 3º ano, apesar de usarem a relação perto-longe, houve um discreto avanço nos argumentos, apresentando inclusão dos lados da moeda e comparação de percursos; no 5º ano, a relação com os lados da moeda e também com a comparação dos distintos percursos estiveram mais presentes.

As percepções das crianças são muito intuitivas e fundamentadas, algumas vezes, na recente experiência do jogo. Assim, poucas crianças refletiram conscientemente sobre os elementos dos eventos que fazem parte do espaço amostral para estabelecer a comparação de

ISBN 978-84-945722-3-4

probabilidades. A partir do observado com o jogo PAR, imagina-se que os jogos como intervenção pedagógica podem contribuir para uma maior compreensão acerca de muitas demandas da probabilidade, incluindo a comparação de probabilidades.

Com o estudo, observamos que as crianças apresentaram discursos que possibilitam acreditarmos que as intuições que elas trazem sobre probabilidade, aliadas ao desenvolvimento de jogos, intervenções e reflexões, podem ampliar o entendimento primário para compreensões mais elaboradas de alguns elementos da probabilidade como é o caso da comparação de probabilidades.

Referências

Batanero, C. Diaz, C. (2007) Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In JP.Van Bendengen y K. François (Eds); Philosophical Dimensions in Mathematics Education (p. 107-128). New York: Springer.

Batanero, C., Henry, M., & Arzysz, B. (2005). *The nature of chance and probability*. In G. A. Jones (Ed.) Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (15-37). New York: Springer. Bellhouse, D. R.

Bryant, P. Nunes, T. (2012) *Children's understanding of probability*: a literature review. Nuffield Foundation.

Carraher, T. N. (1998) *O método clínico usando os exames de Piaget*. 5. Ed. São Paulo: Cortez.

Cazorla, I. & Santana, E. (2006). *Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio*. Itabuna, BA: Via Litterarum.

Criton, M. (1997). *Les jeaux mathématiques*. Paris: PUF.

Gal, I. (2004). *Towards 'probability literacy' for all citizens*. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.

Grando, R. C. (2000). *O conhecimento e o uso de jogos na sala de aula***.** Tese. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas, SP.

Muniz, C. A. (2010) *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Pernambuco. (2012) *Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco*: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação. UNDIME:PE.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-872

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS NO ENSINO DE GEOMETRIA: CONTRIBUIÇÕES PARA A AÇÃO DOCENTE

Maria Dulce Gonçalves de Matos - Arthur Gonçalves Machado Júnior
mariadulce.matos@hotmail.com - agmj@ufpa.br
Universidade Federal Pará - Brasil – Universidade Federal Pará - Brasil

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: Investigação Matemática, Formação do Professor, Ensino de Geometria.

Resumo

Este artigo tem sua origem em nossa pesquisa de dissertação, ainda em curso em um programa de mestrado profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemática. A pesquisa tem como objetivo identificar e interpretar para compreender e descrever estratégias mobilizadas por um professor quando organiza e desenvolve com seus alunos, ensino de geometria, a partir da perspectiva de práticas investigativas. A questão norteadora se configura da seguinte maneira: Que estratégias são mobilizadas por um professor ao organizar e desenvolver com seus alunos, ensino de geometria, a partir da perspectiva de práticas investigativas? A pesquisa assume cunho qualitativo numa abordagem de pesquisa-ação. O conteúdo desenvolvido por meio da metodologia de investigação matemática trata-se da geometria que compõe o bloco espaço e forma para o quinto ano do Ensino Fundamental. As informações foram coletadas por meio de entrevistas, registros fotográficos e gravações de áudios. Neste artigo apresentamos um recorte com as análises do primeiro episódio das aulas desenvolvidas por um professor do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da zona rural. As análises preliminares indicam que o professor ao desenvolver as tarefas propostas, oriundas de sua formação em serviço, apresentou em suas ações características de práticas investigativas.

Introdução

No Brasil o ensino de geometria tem sido foco de muitas pesquisas, Lorenzato (1995), Nacarato e Passos (2014), Pavanello (1989), algumas delas apontam para o descaso desse ensino, principalmente nas escolas públicas. Nesse contexto, foi escolhido colocar em foco, o estudo realizado por Sena e Dorneles (2013), que organizaram um mapeamento das teses brasileiras pertencentes ao banco de dados da Capes, no período de 1991-2011, cujas temáticas abordadas fazem referência à geometria, mais especificamente, procuraram, a luz

ISBN 978-84-945722-3-4

da Educação Matemática, identificar quais os rumos sobre o ensino da geometria se apresentam nas pesquisas, das últimas décadas, em nosso país. Dentre os resultados, as referidas autoras revelam que o estudo referente ao ensino de geometria não é uma das prioridades no Brasil, apontam *para um descaso que parte do processo histórico e se faz presente no cotidiano atual* (SENA e DORNELES, 2013, p.17). As autoras esclarecem ainda que um dos desafios a serem superados, persiste na falta de preparo dos professores para trabalhar com a Matemática de forma geral, em especial a geometria.

Na tentativa de apontar caminhos para o ensino da geometria, esta pesquisa tem por objetivo identificar e interpretar para compreender e descrever como um professor organiza e desenvolve com seus alunos, ensino de geometria, organizado a partir de práticas investigativas, tendo em vista, o ensino de matemática a partir de práticas investigativas na perspectiva de Ponte et al (2015), Ponte et al (1998), Ponte (2003 e 2005), Fiorentini (2012). Assim, este estudo procura identificar, descrever e analisar as estratégias mobilizadas pelo professor ao desenvolver com seus alunos, ensino de geometria, organizado a partir de práticas investigativas, sobretudo em relação à forma como organiza e desenvolve o ensino de geometria em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental de Nove Anos, desvelando/compreendendo o processo de mobilização e produção de conhecimentos profissionais relativos a essa prática.

Neste artigo é apresentado as análises do primeiro episódio de aula referente a primeira atividade da primeira tarefa que revelam a prática do professor ao iniciar o ensino de geometria por meio de práticas investigativas. Cabe ressaltar que na pesquisa, que deu origem ao artigo, ainda em andamento, constam outras tarefas com atividades desenvolvidas pelo professor, uma com duas atividades e outra com cinco atividades.

Investigar para ensinar e aprender matemática

Para Ponte *et al* (2015), investigar é a busca por desvendar aquilo que desconhecemos e que desafia ou toca nossa racionalidade. Nesse sentido, a metodologia de investigação pode ser utilizada em vários contextos, tendo como objetivo principal a construção de conhecimentos a partir do enfrentamento e da solução de problemas que se apresentam no cotidiano. É uma prática que ao ser desenvolvida na educação, por meio de atividades investigativas,

ISBN 978-84-945722-3-4

potencializa o desenvolvimento criativo e cognitivo do aluno favorecendo, assim, o processo de ensino/aprendizagem.

Diante do exposto, compreende-se que a metodologia de investigação se configura como uma das formas capazes de atribuir sentido e significado as práticas utilizadas em sala de aula. Postura que encontra eco nos estudos de Fiorentini (2012, p.72), quando afirma que ao adotar em sala de aula *uma abordagem exploratório-investigativa implica romper com o paradigma do exercício. Consiste em desenvolver uma prática pedagógica heurística que instigue a formulação de perguntas ou problemas por parte dos alunos*.

Nessa perspectiva, Ponte *et al* (2015, p.10), afirmam que *as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é o estilo de conjectura-teste-demonstração*.

Sendo assim, para a efetivação de práticas investigativas em sala de aula, se faz necessário uma ação pedagógica voltada para construção de um ambiente de aprendizagem no qual seja possível a mobilização para a ação do aluno na busca do conhecimento de forma crítica e autônoma para enfrentar e solucionar problemas que emergirem do cotidiano escolar. Nesta linha de pensamento, compreende-se que tanto a mudança de conceber o processo educativo como a atuação do professor são imprescindíveis para inserção e o sucesso das práticas investigativas nas escolas públicas da educação básica brasileira.

Caminhos da pesquisa

Neste estudo, optou-se pela pesquisa qualitativa (MINAYO, 2015) numa abordagem de pesquisa-ação (ZEICHNER, 1992; 2002); (THIOLLENT, 2011) e (DIONNE, 2007). A pesquisa foi realizada em uma Escola Pública Municipal do Ensino Fundamental (EF) situada às margens da Rodovia Transamazônica BR 230, localizada na região Oeste do Pará. A referida escola está localizada na Zona Rural do município. O principal participante da pesquisa foi o professor. Foram atribuídos nomes fictícios tanto a este e aos alunos, participantes da investigação. O professor recebeu o nome de Marcelo e os alunos os foram: Valfredo, Wander Carlos, Norma, Ivo, Angélica, Douglas, Jairo, Wallace, Wesley, Tomas e Gustavo, para garantir, assim, o anonimato dos participantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

O professor Marcelo tem formação em Licenciatura Plena em Letras. Iniciou a carreira docente assumindo turmas dos anos iniciais do EF, sendo que o tempo de carreira no magistério é de 2 (dois) anos. A pesquisa foi desenvolvida em três momentos: (a) levantamento bibliográfico, (b) exploração do campo de pesquisa, com o objetivo de conhecer possíveis participantes da pesquisa e, (c) intervenção, que se caracterizou por momentos de formação em colaboração com o professor e desenvolvimento das observações das tarefas, em sala de aula, conduzidas pelo professor.

Para a análise das informações, adotou-se Analise Textual Discursiva (ATD), proposta por Moraes e Galiazzi (2011). A recolha dos dados se deu por meio de registro de vídeo, entrevistas além das anotações no diário de campo. A análise foi construída a partir da imersão no conjunto de textos que constituem o "corpus" da pesquisa através das leituras e releituras das transcrições das aulas, da entrevista e das anotações feitas no diário de campo da pesquisadora.

Nosso olhar sobre a investigação

A primeira intervenção em sala de aula, de início seria o desenvolvimento da **primeira atividade da tarefa (1)**, denominada meu lugar Meu lugar, onde moro, onde estudo, e teve como objetivo: Identificar conceitos de lateralidade (direita e esquerda), porém

antes de propor esta tarefa que aborda o conteúdo de lateralidade (direita e esquerda) que pertence ao bloco Espaço e Forma (Cf. BRASIL, 1997), o professor Marcelo deu início à aula apresentando aos alunos a professora pesquisadora (PP) que se encontrava em sala de aula com uma filmadora, cujo propósito era coletar informações para o desenvolvimento de sua investigação. Feita a apresentação, o professor Marcelo, solicitou aos alunos que se apresentassem oralmente e, em seguida, propôs a construção de um material em que seus nomes fossem registrados, para que a PP os identificasse com mais facilidade.

Aproveitando o contexto e o conteúdo a ser discutido com os alunos em sala de aula, o professor Marcelo, realizou uma dinâmica com dobradura. O objetivo como anunciado anteriormente era a construção de uma ficha de apresentação. Para isso, solicitou aos alunos que ficassem atentos as etapas apresentadas por ele para a construção do modelo. Durante a dinâmica alguns alunos questionaram sobre como fazer as dobraduras, em função disso, o

ISBN 978-84-945722-3-4

professor Marcelo, deu um *feedback*, demonstrando novamente o processo pedindo aos alunos que conseguiram desenvolver o processo ajudassem os colegas que estavam com dificuldades na construção de suas fichas.

Os diálogos entre o professor e os alunos apresentam o **primeiro episódio** em foco: ***endereço e meio de transporte,*** que constam como anexo 1

Entendemos que a ação do professor Marcelo antes de dar início à **primeira atividade** da **tarefa (1)** referente ao conteúdo de lateralidade, se configurou como criação de um ambiente favorável para o desenvolvimento de práticas investigativas, ao considerarmos que o contexto diferenciado em que os alunos foram colocados, no qual estava presente uma pessoa desconhecida com uma filmadora, não os deixou desconfortáveis, o que nos fez inferir que a estratégia utilizada possibilitou conexão e interação harmônica entre os alunos, o professor e a pesquisadora. A **Figura (1)**, de um desses momentos de interação entre professor, alunos e pesquisadora, retrata essa condição em sala de aula:

Nesses termos, foi possível detectarmos que durante a ação do professor Marcelo, houve indícios de prática investigativa defendida Ponte (2003), quando argumenta que durante o momento de preparação para a inserção de uma tarefa de investigação, a criação de um ambiente de aprendizagem estimulante, em que os alunos se sintam à vontade para pensar e para questionar em conjunto com os colegas e com o professor é, condição fundamental para o sucesso do trabalho.

Ao finalizar a etapa introdutória, o professor Marcelo, propôs a **primeira atividade** da **tarefa (1)**. Nessa atividade, como mencionado acima, denominada: **Meu lugar, onde moro, onde estudo**, cujo objetivo era trabalhar os conceitos de lateralidade[34], os alunos foram solicitados a desenharem e apresentarem em sala de aula o percurso feito por eles para se deslocarem de suas casas até a escola.

Para a realização dessa atividade o professor Marcelo não estipulou tempo, porém formou grupos, levando em consideração o contexto de localização das residências dos alunos e o percurso destes a escola. Assim, foram organizados cinco grupos, sendo: um trio; três duplas e um aluno que realizou sozinho a atividade por ser o único que residia próximo à escola.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Durante a realização da primeira atividade, o professor Marcelo acompanhou atentamente a produção dos trabalhos, orientou os alunos quando solicitado e, gerenciou conflitos que se apresentaram nos momentos em que os alunos, em grupo, construíam a solução para atividade, em especial, quando discutiam sobre quem desenharia e qual casa seria desenhada por primeiro.

Da reflexão feita sobre a postura/prática do professor Marcelo, proporcionando interação entre os alunos a partir da produção de uma atividade em grupo, bem como, estimulando participação mais efetiva ao deixar claro aos alunos que ao final da atividade, estes deveriam socializar em sala de aula, concluiu-se que a atitude do professor está alinhada as ideias de Ponte et al (2015), quando asseveram que nos momentos iniciais de uma tarefa investigativa o professor deve esclarecer o que se espera dos alunos, principalmente em termos de produção final.

Outra prática/postura alinhada ao ensino por tarefas investigativas foi evidenciada quando o professor Marcelo, propôs uma atividade sem esclarecer para os alunos o conteúdo a ser trabalhado. Ao agir nesses termos, professor Marcelo, assumiu como estratégia de ensino a proposta de questões abertas, que segundo Pontes et al (2015), pode possibilitar um envolvimento maior dos alunos. Para o autor, essa organização do ensino com *esse tipo de questão, que não está completamente formulada, pode ser interpretada e concretizada de diversas maneiras pelos alunos, cabendo ao professor estimular essa criatividade nas suas explorações* na busca de solução para tarefa proposta (p.48).

Ainda em relação à organização da sala de aula, como anunciado anteriormente, o professor Marcelo apesar de não se preocupar com o tempo gasto pelos alunos para a realização da atividade – deixando os mesmos à vontade para negociar a forma como iriam realizar os desenhos, escolher as cores, ou seja, enfrentar a tarefa – teve cuidado com os trabalhos que estavam sendo realizados pelos alunos em sala de aula. No que tange essa postura/prática do professor, Ponte et al (2015), nos ensina ser fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para questionar, pensar, explorar suas ideias e expressá-las, tanto ao professor como aos seus colegas.

Outro contexto que merece destaque diz respeito ao processo de interação do professor Marcelo com os alunos, questionando e esclarecendo dúvidas, apontando possíveis caminhos

ISBN 978-84-945722-3-4

e não o caminho para o desenvolvimento da atividade. Postura que encontra eco nos estudos de Ponte et al (2015), quando alertam que, observação dos alunos enquanto trabalham é um processo de avaliação fundamental para dar informações ao professor. A sua atenção tanto pode incidir num outro aluno que precisa de uma atenção individual como na atividade de um ou mais grupos. Essa observação é muitas vezes conduzida de modo seletivo, observando cada grupo ou cada aluno por sua vez. Ao observar, o professor não tem de se limitar a uma atitude passiva, pelo contrário, pode fazer perguntas aos alunos de modo a perceber melhor o que eles estão fazendo e a forma como estão pensando (p. 125).

Outro ponto de destaque foi à habilidade demonstrada pelo professor Marcelo em solucionar conflitos que emergiram durante os trabalhos em grupo. Em várias situações, por meio do diálogo conseguiu estabelecer um clima produtivo. Ou seja, durante situações de tensão agiu como mediador conduzindo os alunos a refletirem sobre seus atos e encontrarem conjuntamente soluções pacificas para resolvê-los. O excerto em **anexo 2**, apresenta a intervenção do professor em relação a essa situação:

A sensibilidade do professor Marcelo em solucionar conflitos entre os alunos, nos remete a Segurado et al (1998, p.09), quando afirmam que *perante conflitos, fruto das diferentes posições dos alunos (por exemplo, em situações de discussão em grande grupo), o papel do professor é de gerir essas discussões e fomentar uma resolução desses conflitos pelos próprios alunos.*

Considerações

No estudo realizado percebemos a presença de práticas investigativas mobilizadas por Marcelo ao iniciar o ensino de Geometria para alunos do quinto ano do ensino fundamental. A postura/prática adotada pelo professor durante suas aulas, oriundas da formação em serviço, foram evidenciadas em função das estratégias de organização utilizadas, conforme nos alertam Ponte et al (2015), como características identificadoras das práticas investigativas no ensino de matemática.

Nesses termos, Marcelo, conseguiu envolver os alunos de maneira que todos participassem das atividades propostas, também conseguiu acompanhar atentamente os trabalhos realizados pelos grupos, realizando intervenções na tentativa de sanar dúvidas coletivas e individuais que surgiram durante o desenvolvimento das atividades. Além dessas práticas/posturas,

ISBN 978-84-945722-3-4

Marcelo, desafiou os alunos por meio de questionamentos para que refletissem sobre suas ações e passassem a conjecturar, testar e demonstrar as suas ideias.

Nesse contexto, merece destaque, principalmente a sensibilidade de Marcelo em relação ao respeito do tempo de maturação dos alunos para efetivação a atividade, bem como, a forma como gerenciou os conflitos que emergiram ao longo de todo o processo de investigação.

Diante do exposto compreendemos que as ações do professor Marcelo foram de acordo com as práticas investigativas, expressas por Ponte et al (2015), pois o mesmo criou um ambiente de aprendizagem que possibilitou os alunos participarem ativamente no processo de suas aprendizagens.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1997.

DIONNE, Hugues. *A pesquisa-ação para o desenvolvimento local*. Brasília: Liber Livro Editora, 2007.

FIORENTINI, D. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Costa Rica, v. 7, n. 10, p. 63-78, 2012. Disponível em: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/10560/9997>. Acesso em: 08 de outubro nov. 2016.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. O desafio da pesquisa social. In. MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). *Pesquisa Social*: teoria, método e criatividade. 34 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria de Carmo: *Análise Textual Discursiva*. 2. ed. rev. - Ijuí: Ed. Unijuí, 2011.

PONTE, João Pedro. *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2003. Disponível em:https://core.ac.uk/download/pdf/12423915.pdf?repositoryId=489. Acesso em 02/2015.

PONTE, João Pedro. *Gestão curricular em Matemática*. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.2005. Disponível em: p3m.ie.ul.pt/files/files/download/fileid/120. Acesso em 02/2015.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações Matemáticas na sala de aula.* Autentica Editora, Belo Horizonte,2015.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991- 2011). REVEMAT. ISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em : file:///C:/Users/Maria%20Dulce/Desktop/textos%20para%20inserir%20na%20dissertação/mapeamento%20geometria.pdf. Acesso em 02/2017

SEGURADO, Irene; PONTE, João Pedro. *Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo.* Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 1998. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3040/1/98-Segurado-Ponte%20(Quadrante). Acesso em 02/2015.

THIOLLENT, Michel. Metodologia da pesquisa – ação. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

ZEICHNER, Kenneth M. Novos caminhos para o practium: uma perspectiva para os anos 90. In: NÓVOA, António. *Os professores e a sua formação*. Porto: Porto Editora, 1992.

ISBN 978-84-945722-3-4

ZEICHNER, Kenneth M. A pesquisa-ação e a formação docente voltada para a justiça social: um estudo de caso dos Estados unidos. In: PEREIRA, Júlio Emílio Diniz; ZEICHNNER, Kenneth M.*A pesquisa na formação e no trabalho docente*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Anexo 1 - endereço e meio de transporte

Professor – Agora que a professora já sabe o nome de vocês, ela está querendo saber onde vocês moram e também como vocês veem para escola.
Aluno Ivo – Isso é facinho!
Aluno Wander – É!
Professor- Facinho?
Aluno Ivo – É
Professor – Então vamos começar pelo Wander, ele vai dizer onde mora.
Aluno Wander – Eu moro numa casa branca, tem um pé de manga na frente e uma placa do Banco da Amazônia e quando eu venho para escola, venho no carro dos alunos.
Aluno Ivo – Eu moro no 224
Aluna Angélica – Eu moro no 224, venho no carro dos alunos.
Aluna Norma – Eu moro no 219, venho no carro dos alunos.
Aluno Douglas – Eu moro no 224, perto da minha casa tem um pé de jambo.
Aluno Valfredo – Eu moro no 219, e venho para escola no carro dos alunos.
Aluno Jairo – Eu moro 222 na beira da faixa e venho no carro dos alunos.
Aluno Walace - Eu moro no 219, na primeira entrada do travessão e eu venho no carro dos alunos.
Aluno Wesley- Eu moro no 219, venho no carro dos alunos.
Aluno tomas – Eu moro no 224, e venho no carro dos alunos.
Professor – A professora quer saber qual o aluno que mora mais próximo a escola?
Aluno Douglas – Eu!
Professor – E o que mora mais longe da escola? Aluno Ivo – O que mora mais longe é o Tomas.

Figura 1 – momentos de interação entre alunos, professor e pesquisadora.

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 2 - intervenção do professor em momentos de conflito.

Professor Marcelo – Vocês não precisam brigarem para escolher quem vai desenhar primeiro! Poderiam observar quem mora mais distante da escola e aí essa pessoa começaria o desenho, depois o que mora em seguida faz o desenho da sua casa e depois o outro! O que acham da ideia? Alunos [Tomas, Angélica e Ivo] – Assim fica bom!

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-873

RESPOSTAS DOS ESTUDANTES DO 9º ANO AO SOLUCIONAREM SITUAÇÕES-PROBLEMA DE COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA À LUZ DA CRIATIVIDADE MATEMÁTICA

Luana Cerqueira de Almeida – Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
luana_cqr@hotmail.com – eurivalda@uesc.br
Universidade Estadual de Santa Cruz - Brasil

Núcleo temático: I - Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: Comunicação Breve (CB)
Nível educativo: Médio ou Secundário (12 a 15 anos)
Palavras chave: aprendizagem; comparação multiplicativa; criatividade matemática.

Resumo

Este estudo tem como objetivo analisar as repostas apresentadas por estudantes do 9º ano ao solucionarem situações-problema de Comparação Multiplicativa à luz da Criatividade Matemática nas suas dimensões: fluência, flexibilidade e originalidade. Para tanto nos apoiamos nas ideias teóricas de Gérard Vergnaud (1994, 1996) acerca da Teoria dos Campos Conceituais, especificamente sobre a Comparação Multiplicativa, bem como, a Criatividade Matemática a partir das ideias de Silver (1997) e Conway (1999). O estudo é de caráter qualitativo e o trabalho de campo foi desenvolvido com dezesseis estudantes de uma escola pública do Brasil. Para a coleta de dados trabalhamos com uma sequência de ensino contendo nove situações-problema de Comparação Multiplicativa, mas neste trabalho versaremos sobre duas dessas situações, que especificamente tratam da classe referido, discutida na Comparação Multiplicativa. Os resultados apontam que, o trabalho com situações que possibilitam várias representações é possível. Notou-se que aos poucos os estudantes foram se envolvendo e buscando cada vez mais encontrar novas soluções às situações apresentadas. Em relação às dimensões da criatividade matemática, os estudantes apresentam mais soluções fluentes quando comparado as soluções flexíveis e originais.

Introdução

Estudos realizados nos estados de São Paulo e Bahia no Brasil, apontam que estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental apresentam dificuldades ao solucionarem situações-problema de Comparação Multiplicativa envolvendo as expressões "vezes mais" e "vezes menos". Mas, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998), esse tipo de situação é trabalhada desde os anos iniciais. Assim, esperasse que ao fim do Ensino Fundamental os estudantes dominem esse tipo de situação.

ISBN 978-84-945722-3-4

Diante desse cenário e, por acreditarmos que ao se sentirem motivados e buscarem apresentar uma diversidade de maneiras de solucionar determinada situação-problema, o estudante poderá explorar diversos aspectos dessa situação. Segundo os resultados dos estudos de Vale (2012, 2015) o ensino usando a vertente da Criatividade Matemática pode se configurar numa opção didático metodológica que oportunize essa motivação e consequentemente facilitar a aprendizagem do estudante. Ao explorar as situações-problema os estudantes podem desenvolver suas habilidades matemáticas, podendo vir a compreender o conceito. Diante disso, com esse estudo, buscamos analisar as repostas apresentadas por estudantes do 9º ano ao solucionarem situações-problema de Comparação Multiplicativa à luz da Criatividade Matemática nas suas dimensões: fluência, flexibilidade e originalidade.

Quadro teórico

Criatividade Matemática

Difererentes avaliações nacionais como a Provinha Brasil, Prova Brasil e a ANA (Avaliação Nacional da Alfabetização), bem como as avaliações internacionais como o PISA têm apresentado resultados desoladores para o desempenho em Matemática. Assim, se faz necessário propiciar ações didático metodológicas que confrontem os estudantes com situações em que eles possam se sentir motivados a buscar a solução, de tal modo, que possam demonstrar seus conhecimentos. Desse modo, a Criatividade desempenha um importante papel nesse sentido. Mas, o que é a Criatividade Matemática?

Gontijo (2007) considera a:

> [...] criatividade em Matemática como a capacidade de apresentar diversas possibilidades de soluções apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (Gontijo, 2007, p. 37).

Para que essa criatividade seja possível faz-se necessário que a situação-problema seja elaborada de forma que convide o estudante a interagir com ela, buscando resolvê-la e que proporcione diversas possibilidades de soluções apropriadas, formas diferentes de solucioná-la e formas incomuns. Segundo Silver (1997) a criatividade não está na situação-problema em si, mas na interação do sujeito com essa, buscando resolvê-la. Está no jogo de explorar, entender, resolver, repensar a resolução e estruturá-la de forma mais simples. Assim, é ao

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pensar em como responder e de quais formas responder a situação-problema que se encontra a criatividade.

Essa criatividade pode ser identificada a partir de suas dimensões: fluência, flexibilidade e originalidade. Ao apresentar no mínimo duas soluções para a situação-problema proposta o estudante estará sendo fluente, pois segundo Vale (2015) "a fluência é a capacidade de produzir um grande número de resoluções para a mesma tarefa" (p. 10). Dentre essas soluções, se o estudante fazer uso de diferentes raciocínios estará sendo flexível, pois a flexibilidade "é a capacidade para pensar de modos diferentes, para produzir uma variedade de ideias diferentes sobre o mesmo problema [...]" (Vale, 2015, p. 10). Dentre as soluções, ao olharmos para o grupo maior que são os alunos da sala, as soluções que aparecerem com menor frequência, no máximo duas vezes, será a original. Segundo Silver (1997) a originalidade é a capacidade de um estudante pensar de forma diferente dos demais, pensar de forma não usual.

Comparação Multiplicativa

As situações-problema tratadas nesse estudo são de Comparação Multiplicativa. Esse tipo de situação-problema é discutido por Vergnaud (1994) como conceito integrante do Campo Conceitual Multiplicativo.

Segundo Vergnaud (1996) um Campo Conceitual pode ser entendido como um conjunto de situações. No caso das estruturas multiplicativas, estas situações precisam em sua solução da operação de multiplicação, divisão ou a combinação de ambas. Segundo os PCN (Brasil, 1997) o estudo desse campo conceitual acontece desde os anos iniciais em situações do tipo: Exemplo 1. "João tem dois bombons e seu amigo Marcos tem o triplo de bombons que João. Quantos bombons Marcos tem?". Esse tipo de situação é discutida mais especificamente nas Relações Ternária, classe Comparação Multiplicativa, foco desse estudo.

As Relações Ternárias são relações que, como o próprio nome indica, relaciona três elementos entre si, o Exemplo 1, bem como 5 x 8 = 40, são exemplos dessa relação.

A Comparação Multiplicativa faz parte das Relações Ternárias e segundo Magina, Santos e Merlini (2011) "as situações que fazem parte desse eixo envolvem a noção de comparação entre duas quantidades de mesma natureza e exige que pensemos a situação em termos de relação ternária" (p. 3). No Exemplo 1, temos duas quantidades (quantidade de bombons de

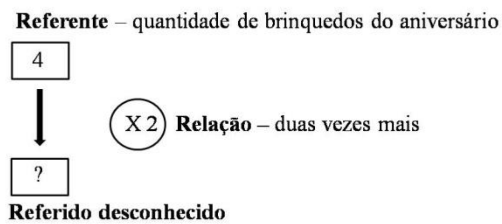
ISBN 978-84-945722-3-4

João e de Marcos) de mesma natureza (bombons), que estão sendo comparadas por meio da expressão triplo.

As situações de Comparação Multiplicativa são subdivididas em situações cujo elemento desconhecido, ou seja, o elemento que precisa ser identificado no momento da solução, é o referente, referido ou a relação.

Nesse trabalho discutiremos acerca de situações cujo referido é o elemento desconhecido. O Exemplo 2, a seguir, elucida esse tipo de situação.

Exemplo 2: No seu aniversário Rosa ganhou quatro brinquedos. No dia das crianças ela ganhou duas vezes mais brinquedos que no seu aniversário. Quantos brinquedos Rosa ganhou no dia das crianças?



Nessa situação temos o referente (quantidade de brinquedos do aniversário), a relação (duas vezes mais) e o referido (quantidade de brinquedos do dia das crianças) é o elemento que queremos identificar.

Metodologia e contexto

Nosso estudo é de caráter qualitativo. Buscamos, com ele, descrever as soluções apresentadas pelos estudantes e interpretá-las. Essas soluções foram coletadas em sala de aula, por meio da escrita dos estudantes e observações das pesquisadoras.

Participaram desse estudo 16 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Brasil. Trabalhamos com uma sequência de ensino contendo nove situações-problema de comparação multiplicativa, dentre essas, uma era de formulação, as situações foram aplicadas durante quatro encontros de 1 hora e 40 minutos cada. Nos encontros trabalhamos com as situações de acordo com a seguinte ordem, referido desconhecido, relação desconhecida e referente desconhecido. Nesse estudo versaremos sobre as duas situações cujo referido é o elemento desconhecido.

A aula seguiu a seguinte dinâmica: (1) em cinco grupos, sendo quatro de três e um de quatro estudantes, os estudantes foram convidados a solucionarem as situações-problema com o

ISBN 978-84-945722-3-4

máximo de formas possíveis; (2) durante esse processo as pesquisadoras observavam os trios e faziam alguns questionamentos de forma que incentivasse os estudantes a buscarem mais maneiras de resolver; (3) os estudantes apresentavam na lousa as soluções realizadas; (4) as pesquisadoras mediavam as soluções apresentadas buscando identificar se os demais estudantes concordavam com as soluções apresentadas e (5) as pesquisadoras em discursão com os estudantes sistematizavam as soluções.

Baseadas nas idéias de Conway (1999) e Silver (1997) acerca das três dimensões da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade, buscamos analisar as soluções apresentadas pelos estudantes.

Principais resultados

As duas situações-problema analisadas neste trabalho são apresentadas no Quadro 1.

Situação 1) Beto quer pintar uma das paredes da sua sala, mas só tem tinta suficiente para pintar uma parte quatro vezes menor que a parede. Qual parte da parede poderá pintar?	Situação 2) Um restaurante tem mesas em formato quadrado para quatro convidados cada. Ele receberá três vezes mais convidados que a quantidade de uma mesa. De quê forma poderá juntar as mesas para que os convidados sentem juntos?

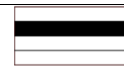
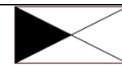
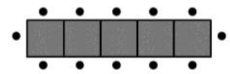
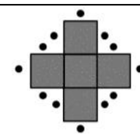
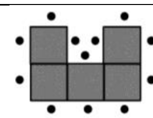
Quadro 1: Situações de Comparação Multiplicativa com referido desconhecido.

A situação 1 apresenta o referente (a medida da parede), a relação (quatro vezes menor) e buscamos encontrar o referido (parte da parede a ser pintada). A situação 2 também apresenta o referente (quantidade de convidados por mesa), a relação (três vezes mais) e procuramos pelo referido (quantidade de convidados). Para a solução das situações se esperava que os estudantes fizessem uso das operações de divisão e multiplicação, respectivamente. Essas situações possibilitam vários tipos de representações, o que nos dá condições de avaliar a fluência, flexibilidade e originalidade.

Para a análise das representações utilizadas pelos estudantes ao buscarem solucionar as duas situações, elencamos no Quadro 2 categorias que poderiam estar nas soluções.

Categorias para a situação 1	Exemplo
(1) divisão da imagem na vertical	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

(2) divisão da imagem na horizontal	
(3) divisão da imagem na vertical e horizontal	
(4) divisão da imagem na diagonal	
Categorias para a situação 2	Exemplo
(1) ideia das mesas organizadas lado a lado	
(2) ideia das mesas organizadas em cruz	
(3) ideia das mesas organizadas em formato de u	

Quadro 2: Possíveis soluções para as duas situações.

Para a situação 1 a turma apresentou as soluções 1, 2, 3 e 4 esperadas e, também, soluções “novas”. Salientamos que estamos considerando as divisões feitas pelos estudantes como sendo em partes iguais, visto que, o retângulo que representava a parede não estava num plano quadriculado. Além disso, consideramos que a parte hachurada pelos alunos representa a parte pintada da parede. Todos os grupos partiram da ideia de ter a divisão da imagem em partes iguais, o que demostra compreensão do enunciado.

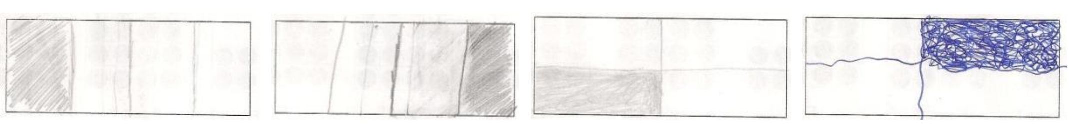


Figura 1: Soluções apresentadas pelo Grupo 1.

O Grupo 1 apresentou quatro soluções que eram esperadas, sendo a maior quantidade de representações de toda a turma. Em termos de fluência o Grupo 1 apresentou quatro soluções; em termos de flexibilidade apresentou dois tipos de soluções 1 e 3, porém, não apresentou soluções com originalidade, ou seja, não apresentou soluções incomuns.

O Grupo 2 apresentou algumas soluções que nos chamaram atenção, como mostra a Figura 2, a seguir.

ISBN 978-84-945722-3-4

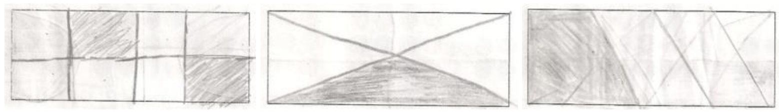


Figura 2: Soluções apresentadas pelo Grupo 2.

Notamos que uma das soluções (divisão na diagonal) apresentada pelo Grupo 2 era esperada por nós, mas a solução divisão em mais de quatro partes não era esperada, sendo a solução única apresenta pela turma, uma originalidade. Além disso, o grupo apresentou uma solução incorreta, pois dividiu o retângulo em quatro partes, mas com áreas diferentes. Para a situação 1, em termos de fluência o Grupo 2 apresentou duas soluções, em termos de flexibilidade dois tipos de raciocínio e uma solução original.

Para a situação 2 os Grupos apresentaram soluções que atenderam as categorias 5 e 6. Porém, apenas o Grupo 6 apresentou solução pertencente a categoria 7, como mostra a Figura 3.

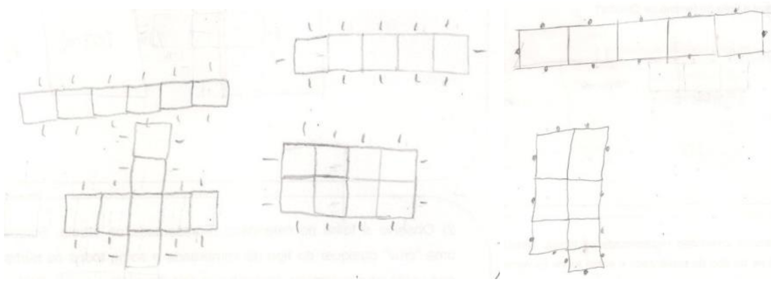


Figura 3: Soluções apresentadas pelo Grupo 6 a situação 2.

O Grupo 6 apresentou a maior quantidade de soluções para a situação 2. Eles usam de cinco a oito mesas colocadas lado a lado com fila única ou em dupla, variando as respostas com 12 e 16 convidados. Em termos de fluência o grupo apresentou cinco soluções, e foram flexíveis com dois diferentes raciocínios para as soluções, mas não apresentou soluções originais.

Apresentaremos, a seguir, as soluções dos Grupos 2 e 3 para a situação 2.

Soluções do Grupo 2 Soluções do Grupo 3

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

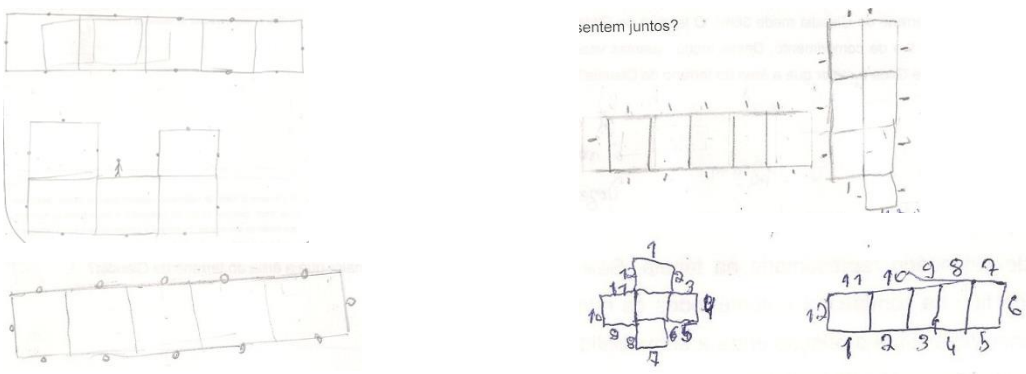


Figura 4: Soluções apresentadas pelos Grupos 2 e 3para a situação 2.

Os Grupos 2 e 3 apresentaram, respectivamente, as soluções das categorias 7 e 6. Esses grupos foram os únicos, não se configurando, portanto, em soluções originais e sim únicas para a turma.

Diante das soluções apresentadas pelos estudantes é possível observar, a nível das dimensões da criatividade que em termos de fluência o maior número de soluções apresentadas por grupo a situação 1 foi quatro, em relação a flexibilidade dois e em relação a originalidade um.

Na situação 2, em termos de fluência o maior número de soluções identificadas por um grupo foi cinco, em termos de flexibilidade duas soluções. Não havendo soluções originais.

Conclusão

Por se tratar de uma maneira pouco comum de se trabalhar em sala de aula, notamos certa dificuldade dos estudantes, no momento da prática, em apresentar mais de uma solução a situação-problema, algo que aos poucos foi aceito por eles. O que é possível notar na quantidade de soluções apresentadas na situação 2 que é maior que a quantidade apresentada na situação 1.

Em termos das dimensões da criatividade matemática pode-se observar que os estudantes apresentaram maior quantidade de soluções na situação 2. Além disso, é possível observar que a fluência é o aspecto da criatividade em que os estudantes apresentam mais soluções.

A socialização das soluções apresentadas pelos grupos após todos terem terminado de responder foi um fator importante, pois possibilitou que os estudantes vissem que, em alguns casos, haviam mais soluções do que as encontradas por eles. Acreditamos que esse também

ISBN 978-84-945722-3-4

pode ter sido um fator que influenciou na apresentação de mais soluções às situações-problema no decorrer da sequência de ensino.

Por fim, é possível notar a importância em se trabalhar com situações que possibilitam múltiplas soluções, pois dão condições de explorarem as diversas formas de representar as soluções encontradas para determinada situação.

Referências bibliográficas

Brasil, M. E. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental.

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4, 8,* 510-514.

Gontijo, C. (2007) Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática em alunos do ensino médio. *Tese de doutoramento*. Universidade de Brasília, Brasília.

Magina, S., Santos. A. & Merlini. V. (2011) Comparação multiplicativa: a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos alunos. Recuperado de http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/448/337

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3,* 75-80.

Vale, I. (2015). A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas. Educação e Matemática, 135, 9-15.

__________. (2012). Desafios no Ensino e na Aprendizagem da Matenática. As tarefas de padres na aula de matemática: um desafio para profesores e alunos, 20, 181-207.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, N.Y.: State University of New York Press. 41-59.

__________. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. En BRUN, J. Didática das matemáticas. Capítulo 3, PP. 155-191. Lisboa: Instituto Piaget.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-874

Análisis de decisiones del profesor en la gestión de momentos de enseñanza

Diego Garzón Castro
diego.garzon@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle. Colombia

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Educación secundaria
Palabras clave: momentos de enseñanza, pensamiento matemático del estudiante, decisiones del profesor y prácticas de enseñanza.

Resumen

En esta investigación se analiza la toma de decisiones de los profesores en momentos de enseñanza, en los que emergen oportunidades pedagógicas. Se reporta de un estudio de casos múltiples, un único caso extraído de las experiencias de dos profesores de matemáticas que trabajan en secundaria (estudiantes12-16 años). Para el análisis se considera la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas, enfatizando en la habilidad del profesor para responder a la comprensión matemática del estudiante, y en el estudio de momentos de enseñanza enmarcados por el pensamiento matemático del estudiante, los significados matemáticos y las oportunidades pedagógicas. Se reconoce un momento de enseñanza en el que es posible caracterizar la toma de decisiones, identificando las dominantes en las que se explora el pensamiento matemático del estudiante. Sin embargo, no se vislumbra decisiones orientadas a extender y hacer conexiones (presentes cuando los profesores van más allá del contenido que los estudiantes trabajan en una clase). Por ejemplo, se reconoce como relevante el papel de la elección del tipo de preguntas por parte del profesor, según su finalidad, para hacer eficaz la exploración del pensamiento matemático y favorecer la construcción de significados matemáticos por el estudiante.

Introducción

Esta investigación enfatiza en la enseñanza de las matemáticas, en particular en lo relativo al conocimiento profesional del profesor. En particular se centra en el estudio de las competencias profesionales del profesor: identificar evidencias en los aprendizajes del estudiante, interpretar la comprensión del estudiante y responder a la comprensión del estudiante (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). En términos de la pregunta cómo un profesor identifica lo que es relevante para la enseñanza de la geometría de los alumnos y lo interpreta para fundamentar la toma de decisiones de acción. Se concreta al establecer cómo conectar las decisiones de acción con las acciones en momentos de enseñanza en los que emergen oportunidades pedagógicas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Marco teórico

Este estudio sobre la enseñanza de las matemáticas integra dos aproximaciones teóricas[35]: la observación profesional de la enseñanza de las matemáticas y el *MOST*[36]. En consonancia con Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest (2015) la aproximación MOST provee al investigador una estructura analítica que permite dilucidar si un momento de enseñanza es MOST. El análisis sistemático de la enseñanza basado en la estructura analítica, se fundamenta en tres características y sus criterios: pensamiento matemático del estudiante, lo significativo de las matemáticas y las oportunidades pedagógicas.

Como resultado de la revisión bibliográfica y una primera fase de análisis se reconocen como conceptos articuladores entre las dos aproximaciones, la decisión de acción y la oportunidad pedagógica.

Se vincula la conceptualización de decisión de acción que forma parte de uno de los tres componentes de la visión profesional de un profesor. Está asociada con el razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación problema. Estas decisiones de acción se fundamentan en el concepto de visión profesional (van Es y Sherin, 2002; Fortuny y Rodriguez, 2012) y en la conceptualización de la observación profesional del pensamiento matemático del estudiante (Jacobs, Lamb, Philipp y Schapelle, 2011).

Otro concepto vinculado con la aproximación MOST es el de oportunidad pedagógica, entendida en el contexto de un momento de enseñanza, en el que la orquestación de discusiones en el aula por parte del profesor, junto con las manifestaciones del pensamiento matemático del estudiante en el discurso, posibilita la construcción de significado matemático.

Metodología

[35] Según Wedege (2010:555) una aproximación teórica está basada en principios teóricos, que disponen de una metodología, que guían, dirigen y orientan la acción".

[36] La expresión "**M**athematically Significant Pedagogical **O**pportunity to Build on **S**tudent **T**hinking", la utilizamos en su versión abreviada MOST

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Participantes y contexto

El tipo de investigación adoptado para esta investigación es cualitativo, y el enfoque adoptado es el de estudio de casos. Se contó con la participación de dos profesores de secundaria, Eva y Andrés, con 7 años de experiencia. Aunque en este informe se reporta solo resultados de Eva. La cual es una profesora de secundaria con disposición a colaborar con el equipo de investigación y con interés manifiesto de dar continuidad a su proceso de formación.

La meta en la secuencia consistió en usar los procedimientos de construcción geométrica para resolver problemas y reconocer propiedades de segmentos, rectas, ángulos y triángulos. La secuencia desarrollada abarcó tres sesiones de clase (con duración 90 minutos cada una). Eva utilizó para orientar la clase y en los talleres de clase un libro de texto (Alfa 7), para esto último, los estudiantes trabajaron en grupos integrados por tres estudiantes.

Los datos

Los datos de esta investigación proceden de la transcripción de tres sesiones de clase observadas, una entrevista final respecto a sucesos evidenciados en la clase (las metas, las matemáticas en la clase, papel asignado a los recursos) que se apoyó en la observación previa de las video grabaciones por parte de Eva.

Análisis de los datos

El análisis se elaboró en dos fases pero en este informe solo se reporta la primera (nivel inferencial). Para hacer este análisis se usan los datos procedentes de la transcripción de las grabaciones de las sesiones de clase y temas categorizados de la entrevista. En primer lugar se identificaron los episodios de referencia — segmentos de enseñanza desde las grabaciones de video en los que es posible reconocer metas y la continuidad en el contenido al cual refiere—.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Posteriormente, se aplica la estructura analítica adaptada a partir de la aproximación MOST, con el fin de reconocer momentos MOST y no MOST mediante el instrumento MOST-Noticing (Anexo 1). Estos momentos se plasman en viñetas[37].

Resultados

Para describir e interpretar la enseñanza de la introducción de los conceptos de congruencia de segmentos y ángulos, se empleó una viñeta que caracteriza la gestión por parte de Eva del pensamiento matemático del estudiante en términos de la estructura analítica que provee la aproximación MOST. Tal como se plasma a continuación:

Viñeta. Caracterización de momentos con estructura MOST (primer nivel inferencial)

El momento de enseñanza elegido tiene lugar en la tercera sesión de clase desarrollada. El objetivo de Eva consistió en explorar las propiedades de la congruencia de ángulos y segmentos mediante la resolución de problemas de construcción geométrica. Para lo cual propuso a los estudiantes el siguiente problema: ¿Cómo construir un triángulo congruente al triángulo ABC dado?, dibujo un triángulo sobre la pizarra y sugiere usar la congruencia de segmentos y ángulos. El problema se propuso con anticipación a los estudiantes para que lo resolvieran en grupos de trabajo.

En la sesión de clase inicialmente se reconocieron cinco episodios de referencia, el momento elegido corresponde al cuarto episodio de referencia. En este momento "construcción de triángulos congruentes", se manifiesta el momento contingente del pensamiento matemático en la línea 2. Cuando A1 después de trasladar dos de las longitudes de los lados de un triángulo e intentar completarlo el lado obtenido no resulta congruente con su correspondiente del triángulo dado. Para ilustrar seleccionamos las líneas que lo estructuran entorno a la contingencia:

1. *Eva: ...midió los segmentos AC y su correspondiente A'C' y determinó si son congruentes. ¿Con qué lo vas a medir?*
2. *Varios estudiantes responden en voz alta con el compás*

[37] Según Gavilán, Garcia y Llinares (2007) en un sentido amplio, una viñeta da cuenta en la investigación de los datos y análisis de manera conjunta. En síntesis, la entienden como una "manera" de contar el análisis de los datos a partir de los análisis empíricos.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. *A1: -Comparó los lados correspondientes a BC y AB, respectivamente, y sus correspondientes B'C' y A'B,'. Obtuvo que los BC y B'C' tienen igual medida, mientras que los lados denotados como AC y A'C' no tienen igual medida.*
4. *Eva:…¿Si los dos triángulos fueran congruentes, cómo deberían ser sus lados?*
5. *A1: Deberían ser iguales.*
6. *Eva: ¿Qué pasó que no le dieron iguales? ¿Será que al construir dos lados congruentes, el tercero también lo será?*
7. *A1 intenta explicar revisando de nuevo los trazos que efectuó.*
8. *Eva: ¿Quién le puede ayudar a A1?(él ya tiene los triángulos con dos lados congruentes). ¿Qué se puede hacer para que el tercero también le dé congruente?*
9. *Eva: Te están diciendo que de nuevo lo midas*

Caracterización del pensamiento matemático del estudiante. Eva promueve que A1 presente su estrategia de solución, fundamentada en el marco definicional que provee la axiomática de la geometría euclidiana. La perspectiva matemática se describe adecuadamente con lo expresado por A1 sobre triángulos congruentes ´´los lados deberían ser iguales" (línea 5) con la idea de extender la definición de segmentos congruentes a triángulos.

En la práctica de Eva la acción preguntar es dominante al caracterizar lo que corresponde a la gestión de la enseñanza. Esta acción tiene distintos matices que quedan determinados por su intencionalidad. Así por ejemplo, pregunta para anticipar un procedimiento de construcción mediante formulaciones como ¿Qué puede hacer para…? (línea 8); pregunta para precisar el sentido de una selección a través de enunciaciones como ¿con qué lo vas a medir? y pregunta para justificar un procedimiento donde un tipo de pregunta representativa es ¿qué garantiza que el segmento que trazó tiene la misma longitud que el segmento dado en el triángulo?

En el análisis se interpreta que el pensamiento matemático del estudiante forma parte de un sistema que articula acciones del estudiante con acciones del profesor, en la resolución de un problema.

Por lo que, se identifican las acciones de los estudiantes que incluyen, la acción explicar reconocida en los estudiantes para justificar el algoritmo de construcción, establecer el algoritmo de construcción o sus componentes y aclarar afirmaciones relacionadas con el algoritmo de construcción. De forma similar, la acción de apropiar instrumentos, se vincula con el uso de regla no graduada y compás, así como con el doblado de papel.

ISBN 978-84-945722-3-4

En este análisis, se reconoció en Eva la importancia que tiene la acción de preguntar para la interacción con los estudiantes. Es así como se reconoce que, tras la formulación de una pregunta por parte de un profesor en clase, crecen las posibles variantes que experimentan las preguntas formuladas por el profesor, además de las respuestas de los estudiantes (Franke, Webb, Chan, Ing, Freund y Battey, 2009:391).

Caracterización de lo significativo desde una perspectiva matemática. A1 en las estrategias de solución, respecto al problema propuesto procede con acciones como comparar las longitudes de los lados correspondientes del triángulo dado, con las longitudes de los lados del triángulo construido (línea 3) y revisar el proceso de construcción (línea 7). Ambas actividades se conectan con la perspectiva matemática. Porque en este nivel es pertinente que los estudiantes construyan y dibujen figuras conforme a los referentes curriculares (Common Core State Stander Initiative, 2011; MEN, 2007). La perspectiva matemática es central puesto que guarda conexión con el objetivo propuesto para esta clase.

En la práctica de Eva, la gestión de la enseñanza en la construcción de significados matemáticos se describe en términos de las categorías obtenidas del análisis comparado: preguntar (descrita al caracterizar el PE), enfatizar en una meta específica y organizar la actividad de clase.

Enfatizar en una meta específica hace referencia a la manera en que, mediante la interacción con los estudiantes, el profesor recurre a afirmaciones, de manera explícita o implícita. Con ellas, recuerda los objetivos parciales o finales que persigue a través de un problema o problemas planteados dentro de una secuencia.

La categoría organizar la actividad de clase permite situar el desarrollo de clase en el tiempo. Ésta se presenta al poner en relación un problema formulado con problemas previos o con una secuencia de problemas, además de auspiciar la participación de los estudiantes en clase.

Los resultados que se refieren a la gestión de Eva se relacionan con los resultados obtenidos por Ponte, Mata-Pereira, y Quaresma (2013) quienes, a partir del estudio de las discusiones de clase, establecen la distinción entre acciones del profesor vinculadas tanto con tópicos matemáticos y acciones relacionadas con la gestión de aprendizaje. Éste estudio, se relaciona

ISBN 978-84-945722-3-4

con la investigación porque permite caracterizar los componentes de la gestión del profesor en términos de las acciones del profesor.

Oportunidades pedagógicas. Eva en su práctica lleva a cabo acciones como preguntar para establecer la propiedad que cumplen los lados de triángulos que son congruentes (línea 4) y pregunta para examinar la validez del procedimiento de construcción (línea 6). Estas son acciones mediante las que gestiona la posición de A1 (línea 3), que genera apertura, cuando hace manifiesta la necesidad intelectual de explicar porque la conjetura que formuló es falsa, para permitir reconstruir su procedimiento y argumentación centrado en propiedades de la congruencia de triángulos.

La gestión de Eva posibilitó el aprovechamiento oportuno de la apertura, de tal manera que permitió la exploración de A1 de su conjetura y reformuló el problema para la revisión del procedimiento de construcción para la clase.

El discurso de Eva se caracterizó por ser dialógico con A, con la clase y con los grupos de estudiantes. Así, las preguntas formuladas en las intervenciones 3 y 5 fueron dirigidas por Eva a toda la clase y no solo para A.

Las decisiones de Eva en este análisis enfatizan en aquellos momentos de enseñanza en los que es posible reconocer las oportunidades pedagógicas, las discusiones de clase y distintas posibilidades en la trayectoria a seguir la enseñanza (en relación con la representación de contenidos, la creación y uso de la comunidad (tipos y niveles de participación).

Eva frente la opción de orientar la acción de preguntar solo con A1, involucra mediante las preguntas la clase (líneas 3 y 5), se hizo manifiesto el dilema de la creación y el uso de una comunidad.

Eva en las decisiones de acción, como respuesta a los estudiantes recurrió al uso de la pregunta para aprovechar el pensamiento matemático del estudiante, introdujo la extensión de una definición, reformuló la enunciación del problema de construcción; favoreció la introducción de una heurística en la que se recurre a la utilización de recursos para medir (compás); enfatizó, mediante preguntas, en la participación de los estudiantes.

Stockero y Van Zoest (2013:144) reconocen en momentos pivote para la enseñanza de las matemáticas los siguientes tipos de decisiones: ignorar o descartar de plano; reconocer, pero

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

continuar con lo planeado; enfatizar en el PE; extender y hacer conexiones. En el ejemplo del momento de enseñanza, objeto de análisis de Eva, las decisiones identificadas se concentran en torno al pensamiento matemático del estudiante y solo una de ellas, queda fuera de tal tipo de decisión.

Discusión de resultados y conclusión

Esta investigación contribuye a analizar las decisiones que toman los profesores de matemáticas en momentos de enseñanza en los que emergen oportunidades pedagógicas. La caracterización efectuada pone en evidencia, los siguientes rasgos**:**

- Reconocer momentos de enseñanza en que están presentes las oportunidades pedagógicas, para lo que es determinante el papel otorgado a las explicaciones en la enseñanza y, en particular, las discusiones de clase a partir de las relaciones entre las acciones del estudiante y acciones del profesor.

- Describir acciones de los profesores que en la enseñanza le posibilitan distintas opciones en las trayectorias a seguir cuando su gestión involucra el pensamiento matemático del estudiante. Así, acciones como preguntar en el momento de enseñanza concreto de "construcción de triángulos congruentes" corresponden a una de las manifestaciones que permite reconocer el dilema del niño como pensador.

- Las decisiones de los profesores en cada momento de enseñanza permiten apreciar su relación con acciones de respuesta del profesor, así como con los dilemas de enseñanza identificados en las discusiones de clase entre profesor y estudiantes.

Referencias bibliográficas

National Governors Association Centrer for Best Practices & Council of Chief State officers. (2010). *Common core state standars for mathematics*. Washington,DC: Authors.

Franke, M. L., Webb N.M., Chan A. G., Ing M, Freund D. y Battey, D. (2009). Teacher Questioning to Elicit Students' Mathematical Thinking in Elementary School Classrooms. *Journal of Teacher Education*, 60, pp. 380-392. DOI: 10.1177/0022487109339906

Fortuny, J.M. y Rodriguez, R. (2012). Aprender a Mirar con sentido: Facilitar la Interpretación de las Interacciones en el Aula*.* *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, pp. 23-32.

Gavilán, J. M., García, M. M., y Llinares, S. (2007). Una Perspectiva para el Análisis de la Práctica del Profesor de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(2), 157-170

ISBN 978-84-945722-3-4

Jacobs, V., L. Lamb y R. A. Philipp (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41 (2) , pp.169-200.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding How to Respond on the Basis of Children's Understandings. En M.G. Schering,. V.R Jacobs, y R.A. Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teacher' eyes* (pp.97-116). New York: Routledge

Leathman, K. R., Peterson, B.E., Stockero S. L: y Van Zoest, L.R. (2015). Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for reseach in mathematics education*, 46 (1), pp.188-124.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional). Recuperado de: htpp://www.mineducacion.gov.co.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), pp. 55–81.

Van Es, E. y Sherin, M. E: (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroon interactions. *Journal of tecnolology and teacher education*, 10(4), pp.575-596.

Stockero, S. L. y van Zoest L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (2), pp. 125-142.

Camargo, L., Garcia, G., Leguizamón, C., Samper, C., y Serrano, C. (2007). *Alfa 7 con estándares. Serie de matemáticas para educación secundaria y media*. Bogota: editorial Norma.

ANEXO
Instrumento MOST- Noticing
Diego Garzón Castro

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas

El instrumento MOST- Noticing se diseñó para el análisis de los datos. Se fundamentó en las características que provee la estructura analítica que permite la aproximación teórica a las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática (pensamiento matemático del estudiante, lo significativo desde una perspectiva matemática, y las oportunidades pedagógicas). Además, integró los criterios y preguntas que configuran la estructura analítica (Leatham, Peterson, Stockero y Van Zoest., 2015). En esta investigación, la estructura analítica es adaptada para caracterizar las interacciones a partir de los cambios y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

transformaciones en los patrones de acción del profesor y de los estudiantes[38]. Por lo que, se conservan las características, se ajusta su descripción y las preguntas con las que se articulan cuando se parte del reconocimiento de un momento del pensamiento matemático del estudiante.

El investigador reconoce la característica del pensamiento matemático del estudiante, si al examinar identifica un momento que corresponde al pensamiento matemático del estudiante (una acción observable del estudiante o acciones conectadas). Se cumplen dos criterios: la acción del estudiante suministra evidencias para efectuar inferencias respecto de lo que el estudiante dice y se reconoce la idea matemática articulada con sus matemáticas (Leatham *et al.*, 2015).

El primer criterio, según Leatham *et al.* (2015), se cumple si el investigador establece que las matemáticas del estudiante se pueden inferir. El análisis comparado, se utiliza como referente para describir transformaciones en la acción del estudiante después de examinar y categorizar las acciones del mismo. Simultáneamente, como parte de un sistema asimétrico, se establecen categorizaciones en la acción del profesor para luego describir transformaciones de esta. Por ejemplo, las acciones dominantes del profesor reconocidas para la clase son: preguntar, proveer instrucciones, explicar o ejemplificar. Las preguntas articuladas con el primer criterio son: ¿Las matemáticas del estudiante se pueden inferir a partir de las acciones del estudiante? ¿Qué acciones del estudiante posibilitan describir rasgos de sus prácticas matemáticas? ¿Qué contenidos matemáticos y procesos están asociados con las prácticas matemáticas de los estudiantes?

El segundo criterio es aplicado una vez que se pueden inferir las matemáticas del estudiante. Se reconocen en las acciones del estudiante ideas (representaciones, imágenes, concepciones, procedimientos erróneos) que están vinculadas con las matemáticas de este (Leatham *et al*, 2015). La pregunta representativa para direccionar los análisis es ¿qué ideas subyacen en las acciones de los estudiantes que se relacionan con sus matemáticas? Como preguntas

[38] La adopción de este principio toma en consideración que los patrones que se pueden ver emergen de una relación dialéctica entre las cosas materiales (vídeo) y las experiencias que lleva el investigador al análisis. En consecuencia, surge la necesidad de profundizar y focalizar el análisis. Esto se plasma mediante un arreglo en el que se relacionan las transcripciones con los comentarios analíticos con la intención de construir los resultados (Roth, 2005).

ISBN 978-84-945722-3-4

complementarias de este criterio se encuentran: ¿Qué acciones del profesor responden a las ideas de los estudiantes y permiten progresar en los aprendizajes?, ¿Cuándo ocurre esto?

Tras la fase del análisis, que permitió caracterizar el pensamiento matemático del estudiante, se analizan las acciones de los estudiantes, las acciones del profesor y el pensamiento matemático del estudiante para construir comentarios analíticos. Esto último, se logra cuando el investigador examina cambios en las acciones del estudiante y de las matemáticas de este con relación a la perspectiva matemática. Estos cambios se plasman en un arreglo rectangular de dos columnas que contiene la transcripción de los episodios de referencia.

Los comentarios analíticos permiten establecer la posición del investigador, la fijación de la orientación de los análisis y la formulación de conjeturas respecto a contingencias que tienen lugar en la interacción e identificación de cambios en las acciones tanto del profesor como el estudiante. Asimismo, admiten la formulación de hipótesis sobre contingencias que después posibilitan reconocer momentos del pensamiento matemático que potencialmente pueden satisfacer los criterios y características, los cuales determinan la estructura analítica con oportunidades pedagógicas significativas desde la perspectiva matemática.

El investigador, para reconocer las contingencias en relación con la acción de los estudiantes, las vincula con criterios como los siguientes: el reconocimiento de acciones en las que se manifiestan obstáculos, concepciones, procedimientos del estudiante vinculados con su perspectiva matemática; las preguntas del estudiante encaminadas a aclarar alguna duda; los interrogantes del estudiante que amplían el sentido dado a un concepto y la introducción de procedimientos de solución que le dan sentido a una conceptualización.

De la misma manera, para reconocer transformaciones en la acción del profesor, se examina si: él cambia el contexto de referencia de la pregunta y modifica la formulación de ésta; él provee instrucciones que enfatizan en el sentido dado a un concepto; él, en la explicación, moviliza la extensión del sentido dado a un concepto.

Las características, que restan por describir, amplifican el análisis vinculado a aquellos momentos en los cuales se manifiesta la contingencia (manifestaciones del pensamiento matemático del estudiante) para reconocer momentos, a partir del análisis inductivo que satisfacen la estructura con sus adaptaciones de las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

El investigador, para reconocer lo significativo desde el punto de vista matemático, examina dos criterios después de conjeturar el reconocimiento de un momento del pensamiento contingente en un episodio de referencia y de caracterizar el pensamiento matemático del estudiante.

En el primer criterio, examina cómo las acciones del profesor, que permitieron reconocer la perspectiva matemática del estudiante, tienen nexos con los referentes curriculares y las progresiones de aprendizaje[39]. De esta manera, se establece si las matemáticas son accesibles a los estudiantes y se reconocen las experiencias matemáticas anteriores (Leatham *et al.*, 2015). La pregunta representativa para examinar si el momento de la contingencia que se conjetura es una oportunidad pedagógica significativa desde una perspectiva matemática es: las acciones del profesor en respuesta a las ideas matemáticas del estudiante (en el momento de pensamiento), ¿se articulan con los referentes curriculares y progresiones de aprendizaje?

En el segundo criterio se establece si, en las prácticas matemáticas de los estudiantes, se reconocen aspectos de la perspectiva matemática relacionados con los objetivos de aprendizaje de la sesión de clase (Leatham *et al.*, 2015). Este criterio incorpora elementos vinculados con lo institucional porque considera los referentes curriculares y la planeación de clase. La pregunta asociada a este criterio es: ¿Qué acciones del profesor contribuyen a que los estudiantes alcancen el objetivo propuesto?

La tercera característica de la estructura analítica que plasma las oportunidades pedagógicas significativas desde una perspectiva matemática es la oportunidad pedagógica. En esta, el investigador establece el cumplimiento de dos criterios una vez determina que las matemáticas son significativas (Leatham *et al.*, 2015). El primer criterio, establece que un momento es una oportunidad pedagógica (cumple el criterio de la apertura), si es posible reconocer en las matemáticas del estudiante (asociadas con acciones, por ejemplo: preguntar, explicar y expresar) el tipo de necesidad intelectual que otorga sentido a las practicas

[39] Según la NRC (2007, p. 220) las progresiones de aprendizaje hacen hincapié en ideas núcleo, que articulan conocimientos conceptuales y conocimientos procedimentales. Se organiza el conocimiento alrededor de las ideas núcleo. Este concepto se relaciona con conceptos como el de trayectoria de aprendizaje. Según Battista (2011), esta se define como una descripción detallada de la secuencia de pensamientos, modos de razonamiento y estrategias que emplean los estudiantes cuando se involucran en el aprendizaje de un tópico, que incluye especificar cómo el estudiante aborda las situaciones de enseñanza y las interacciones sociales dispuestas en la secuencia.

ISBN 978-84-945722-3-4

matemáticas del estudiante. El investigador utiliza las preguntas que se articulan con el criterio de apertura, es decir: ¿Qué tipo de necesidad intelectual se reconoce en la expresión de las matemáticas del estudiante que favorecen la construcción de significados en las matemáticas del estudiante? ¿Qué acciones del profesor permiten amplificar la construcción de significados matemáticos por el estudiante? ¿De qué manera las acciones del profesor —como preguntar, proveer instrucciones, explicar y justificar— son relevantes en la construcción de significado matemático?

Con el segundo criterio, el investigador determina que un momento del pensamiento matemático es una oportunidad pedagógica (si cumple la condición del momento oportuno) si el profesor saca ventaja de la apertura y se amplifican los significados matemáticos construidos por los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Battista, M.T. (2011). Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.

Leatham, K. R., Peterson B. E., Stockero, S. L. y Van Zoest L. R. (2015). Conceptualizing mathematically significant pedagogical opportunities to build on student thinking. *Journal for reseach in mathematics education, 46*(1), 88-124.

National Research Council. (2001). Knowing what students know: The science and design of educational assessment. Committee on the Foundations of Assessment. Pelligrino, J., Chudowsky, N., and Glaser, R., editors. Board on Testing and Assessment, Center for Education. Division of Behavioral and Social Sciences and Education.Washington, DC: National Academy Press.

Roth, W.M. (2005). *Doing qualitative research: Praxis of method*. Rotterdam. Sense Publishers

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-876

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS: PROCEDIMIENTOS DE RESOLUCIÓN EN ESTUDIANTES DE 7 AÑOS

Carmen Oval[40] – Izabella Oliveira[41] – Claudio López[42]
Carmen.oval@umag.cl – izabella.oliveira@fse.ulaval.ca - clalopez@umag.cl

Universidad de Magallanes, Chile - Université Laval, Canada

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: resolución de problemas, primaria, procedimientos, matemática

Resumen

La resolución de problemas en matemáticas es un tema que atraviesa todos los ejes de enseñanza-aprendizaje en los diferentes niveles educativos, por lo que la manera en que los estudiantes resuelven los problemas propuestos por el profesor se torna un tema interesante a estudiar. Diversas investigaciones han demostrado que los estudiantes resuelven problemas incluso antes de entrar en un sistema formal de educación (Bermejo y Rodríguez, 1987; Bermejo, 1998; Bermejo, 2004; Carpenter y Moser, 1984; Carpenter et al., 1981).

En la presente comunicación se pretende dar a conocer los procedimientos empleados por estudiantes chilenos de 2do año primaria (7 años) para resolver problemas de estructura aditiva. Los problemas entregados a los estudiantes corresponden a las 4 categorías de Carpenter y Moser (1984) cambio, combinación, comparación e igualación. El análisis de las producciones escritas de los estudiantes permitió identificar que los procedimientos preferidos por ellos es el diseño y la utilización de algoritmos formales. Tal y como se esperaba, los problemas más fáciles son los de cambio un poco más del 50% de los estudiantes logran resolver este tipo de problemas. Los más difíciles son los de Igualación donde el 35% de los estudiantes resuelve correctamente este tipo de problema.

Introducción

[40] Académico Departamento de Educación y Humanidades, Fac. de Educación y Ciencias Sociales.
[41] Professeure Departement Enseignement et Apprentissage, Faculté Sciences de l'Éducaction.
[42] Estudiante Pedagogía en Matemática para Enseñanza Media

ISBN 978-84-945722-3-4

La resolución de problemas implica el desarrollo de habilidades, actitudes y valores ya que entrega la oportunidad a que los estudiantes puedan desarrollar el pensamiento crítico, la argumentación de sus ideas, entre otras competencias.

Poirier-Proulx (1999) subraya que la resolución de problemas pone en juego tanto habilidades intelectuales como habilidades metacognitivas. La autora afirma que resolver problemas requiere también la utilización de conocimientos y de ciertas habilidades que el estudiante debe poseer para poder reconocer los aspectos que van a permitirle resolver la situación propuesta, como se muestra en la siguiente cita:

> Las características de un problema, los índices significativos de una situación dada, los conocimientos relacionados a la situación presentada para interpretar adecuadamente la información, la elaboración de una representación adecuada del problema y las soluciones a poner en práctica, las dimensiones afectivas ejercerán una influencia sobre los procedimientos. (Poirier-Proulx, 1999, p.25)

En el ámbito de la matemática se puede constatar que la resolución de problemas es vista como objeto de aprendizaje y un medio que permite al profesor la adquisición de nuevos conocimientos con el fin de que el estudiante pueda ejercer otros objetivos del programa, desarrollarlos y lograrlos. La resolución de problemas crea un ambiente espléndido para poder desarrollar la comunicación dentro del grupo curso, puesto que, el estudiante a través de esta forma da a conocer los métodos empleados, se crea un espacio de discusión entre los estudiantes en el que el profesor es un mediador. Finalmente, la resolución de problemas ocupa un lugar importante tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en otras disciplinas.

Dificultades en la resolución de problemas

Si bien la resolución de problemas es un espacio privilegiado para el desarrollo de aprendizaje en matemática, diversos estudios realizados en el área de la didáctica de la matemática, sobretodo en la resolución de problemas de estructura aditiva, han mostrado la presencia de ciertos aspectos (posibles dificultades, estructura del enunciado, etc.) que pueden influenciar la elección del profesor cuando crea los problemas a entregar a los estudiantes (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1984; Kamii, 1996; Vela y Betancourt, 2004;Vergnaud, 1990; Weisser, 1999). Estas diferentes investigaciones se detuvieron en la resolución de problemas matemáticos por los estudiantes desde el punto de vista de las estrategias de resolución privilegiadas así como también en la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

utilización del simbolismo matemático pasando por las cuatro operaciones elementales (adición, sustracción, multiplicación y división). Un análisis de los trabajos de investigación sobre resolución de problemas pone en evidencia el interés de estos autores sobre el desarrollo de conocimiento matemáticos de los estudiantes. Otras investigaciones se interesaron tanto en las variables didácticas como en la estructura del problema y el tipo de número utilizado que pueden influenciar la manera en la que el estudiante resuelve el problema (Baffrey-Dumont, 1996; Bermejo y Rodríguez, 1987; Bermejo, Vela y Betancourt, 2004; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Levain, 1992; Weisser, 1999).

Las investigaciones llevadas a cabo por Riley et al (1983), Vergnaud (1982) así como también por Bermejo y Rodríguez (1987) han mostrado que ciertas variables didácticas, tales como el largo del enunciado del problema, la complejidad gramatical, el ámbito numérico en juego en la situación y el orden de los datos de un problema, tienen efectos significativos sobre la resolución de problemas en el estudiante. Estas variables pueden ser controladas por el profesor cuando crea los problemas que entregará a los estudiantes. De hecho, las investigaciones llevadas a cabo por Bermejo y Rodríguez (1987) y Fayol (1990) han mostrado que les problemas representados por frases donde la incógnita está en primer o en segundo lugar son más difíciles para los estudiantes que los problemas representados por ecuaciones donde el resultado es desconocido. Estas mismas investigaciones han establecido también que la formulación verbal del problema aumenta el nivel de dificultad para los niños que deben resolver este tipo de problema propuesto por el profesor. Además, de estas variables se desprenden cuatro grandes conjuntos: cambio, reunión y complemento de conjuntos, comparación e igualación.

Categoría de problemas de Carpenter & Moser (1983)

Desde los años 1980, la resolución de problemas de estructuras aditivas ha sido un objeto de estudio importante en diferentes universidades de los Estados Unidos y Europa. Varios estudios realizados en esa época se volvieron clásicos en el área de la resolución de problemas en matemática. (Carpenter et al, 1981; Carpenter y Moser, 1983; Riley et al, 1983; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982)

La investigación llevada a cabo por Carpenter y Moser (1983) ha permitido identificar cuatro clases diferentes de problemas que utilizan las operaciones de adición y sustracción: cambio, combinación, comparación e igualación. Los problemas de *cambio* se caracterizan porque

ISBN 978-84-945722-3-4

presentan una cantidad inicial y una acción directa o implícita que provoca un cambio en la cantidad inicial. Los problemas de esta categoría se pueden subdividir en tres según el lugar que ocupa la incógnita: estado inicial, transformación o estado final. Los problemas de *combinación* presentan una relación estática implicando dos cantidades distintas que son parte de un todo. No hay transformaciones y la incógnita puede concernir al total o a una de las partes. En algunos casos, para Carpenter et al (1981) los problemas de comparación implican buscar la diferencia entre las dos cantidades dadas. Es decir, el estudiante hace una comparación de conjuntos para encontrar la diferencia que puede concernir a uno de los dos conjuntos. Finalmente, los problemas de *igualación* presentan las mismas características que los problemas de cambio y de comparación. La diferencia consiste en que los dos conjuntos dados son comparados y que para responder a la pregunta del problema, hay que igualar una de las dos cantidades.

Vergnaud (1982) explica que los problemas de comparación, combinación y de cambio permiten al niño comprender las dos ideas principales del concepto primitivo del número: la cardinalidad y la adición. El autor señala que las situaciones de tipo aditivo son de disímil dificultad porque ellos están construidos a partir de diferentes variables didácticas como las clases de problemas, los tipos de números y los cálculos a realizar, el orden de presentación de datos y el contenido de los problemas. El autor señala que desde que los niños están en la edad escolar, se enfrentan a situaciones en las que ellos deben apropiarse de los conocimientos diversos sobre el número.

Objetivo

Conocer los procedimientos empleados por estudiantes chilenos de 2do año primaria para resolver problemas de estructura aditiva

Metodología

Para efectos de esta comunicación, presentaremos el análisis de la resolución a 14 problemas[43] pertenecientes a las 4 categorías de Carpenter y Moser (1983): *cambio, comparación, combinación, igualación*. Los problemas fueron presentados de manera aleatoria y fueron resueltos por 90 estudiantes chilenos de 2do año de primaria (7 años) de manera individual, en el marco de una investigación doctoral que buscaba analizar las

[43] Ver anexo

ISBN 978-84-945722-3-4

prácticas de enseñanza de los profesores al momento de enseñar la resolución de problemas de estructura aditiva.

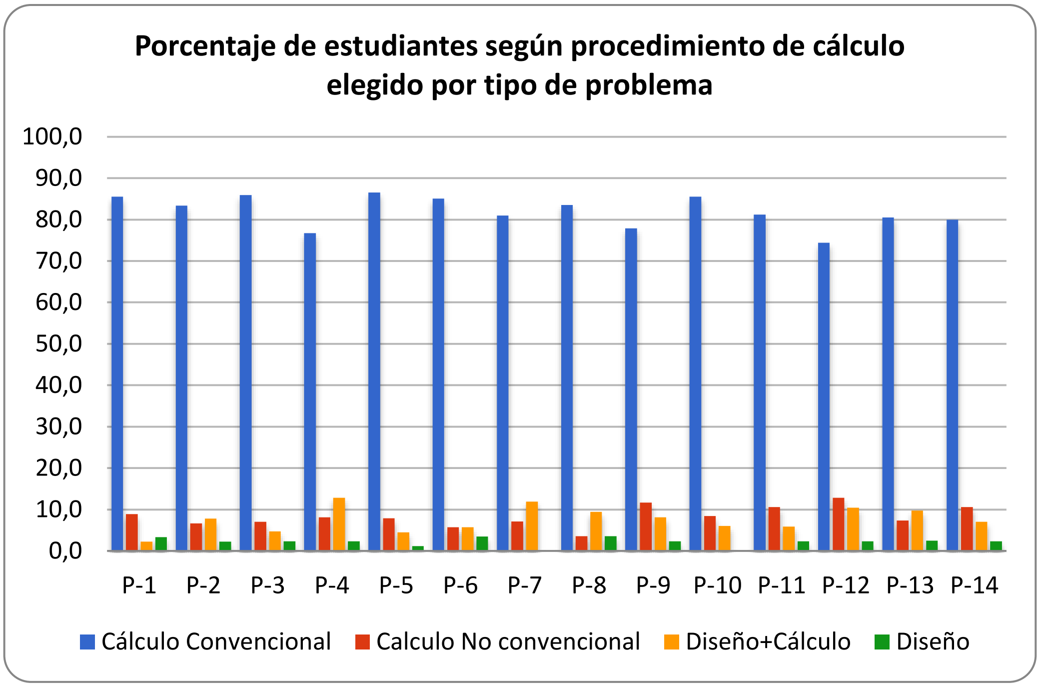
Discusión de los resultados

De manera general, el análisis de los resultados permitió dar cuenta de los procedimientos elegidos por los estudiantes de 2do año de primaria (7 años), la comprensión del enunciado y realización de cálculo matemático al momento de resolver problemas de estructura aditiva. En cuanto a los *procedimientos elegidos por los estudiantes*, el gráfico 1 muestra que la gran mayoría de los estudiantes utilizan el cálculo convencional por sobre otros procedimientos como el diseño o el cálculo no convencional. El gráfico permite constatar que para resolver los problemas como el 7 (Susana tiene 28 chalecos. Cecilia tiene 9 más que Susana. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia?) o el 10 (Cecilia tiene 27 chalecos. Susana tiene 5 menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Susana?), ningún estudiante ha realizado un diseño. Este resultado no es sorprendente teniendo en cuenta el hecho de que los procedimientos convencionales son largamente enseñados en las clases. Este resultado podría, igualmente, ser explicado por el hecho de que los problemas propuestos a los estudiantes son problemas que se parecen mucho a los presentados en los textos escolares, por lo que los estudiantes asocian rápidamente la forma de hacerlo en clase.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gráfico 1: Porcentaje de estudiantes de 2do básico que resolvieron problemas de estructura aditiva según el procedimiento de cálculo elegido.

En cuanto a la comprensión del enunciado y el logro de los cálculo realizado por los estudiantes, el gráfico 2 muestra que los problemas 1 y 5 fueron comprendidos de manera correcta por la mayoría de los estudiantes, dejando entrever como les dos problemas más fácil de resolver. Por otro lado, se puede observar



igualmente que los problemas 9 y 13 están entre los más difíciles ya que los estudiantes no comprendieron el enunciado ni fueron capaces de realizar los cálculos de manera correcta. A pesar de lo que se pudiera creer, al parecer hay una relación entre la comprensión del problema y el logro del cálculo. Primero en el sentido, en que hay pocos estudiantes que han comprendido el problema pero que se han equivocado en el cálculo. Sin embargo, uno puede notar una frecuencia poco más elevada de estudiantes que no comprenden el problema pero realizan el cálculo correcto. De una manera general, este resultado muestra que realizar un cálculo es más fácil que la comprensión de las relaciones establecidas en un problema en matemáticas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

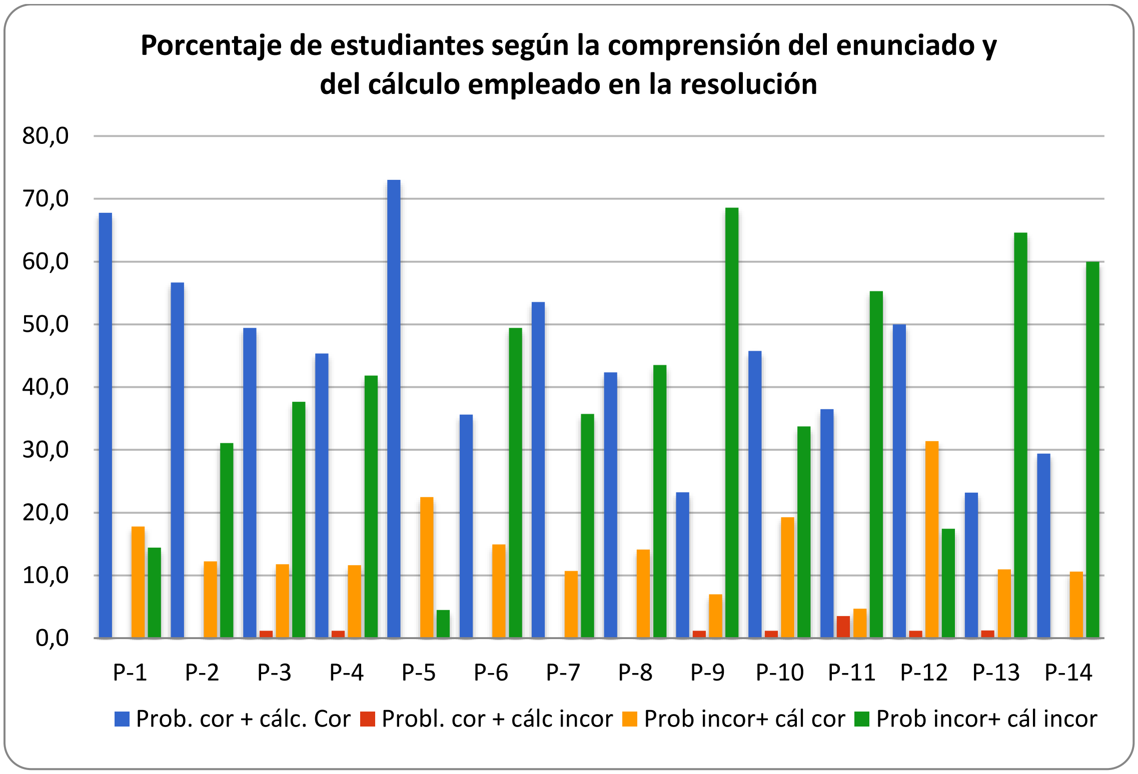


Gráfico 2: Porcentaje de estudiantes de 2do básico que resolvieron problemas de estructura aditiva según la comprensión del enunciado y del cálculo empleado en la resolución.

Conclusiones

Los análisis realizados en torno a la resolución de problemas de estructura aditiva, nos ha permitido conocer la manera en que los estudiantes de 7 años (2do año en Chile) afrontan la resolución de problemas en matemáticas. El análisis en torno a los procedimientos como tal, muestra una cierta institucionalización del procedimiento convencional por sobre la utilización de procedimientos no convencionales. Lo cual deja entrever la importancia de dejar "cierta" libertad en la resolución de problemas y de esa forma evitar que los estudiantes se vean obligados a responder sin necesariamente comprender el problema. En cuanto a los enunciados, los análisis permiten confirmar que los problemas de cambio son mucho más fáciles que los problemas de comparación e igualación, estos últimos con un alto porcentaje de incomprensión y realización de cálculos incorrectamente. Finalmente, se hace necesario provocar la reflexión en torno a los procedimientos de resolución durante la formación inicial con el objetivo de que los futuros profesores tomen conciencia de las diferentes maneras de

ISBN 978-84-945722-3-4

resolución que existen para un mismo problema y de desarrollar el razonamiento de los estudiantes en lo que concierne a la comprensión de las relaciones.

Referencias bibliográficas

Carpenter, T., Hiebert, J y Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12(1), 27–39. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/748656

Carpenter, T y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and substraction concepts. Dans R. Lesh et M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press.

Poirier-Proulx, L. (1999). La résolution de problèmes: une stratégie de pensée. En L. Poirier Proulx (Ed.), La résolution de problèmes en enseignement. Perspectives en Éducation. Bruxelles, Bélgique: DeBoeck.

Vergnaud, G y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogenetique. Revue française de pédagogie, (36), 28–43.

Anexo

Problemas de estructura aditiva según Categoría (Carpenter y Moser, 1983)

Categoría	Problema
Cambio	1. Juan tenía 3 autitos. Pablo le dio 8. ¿Cuántos autitos tiene ahora Juan? 2. Juan tenía 15 autitos. Él le dio 9 a Pablo. ¿Cuántos autitos tiene ahora Juan? 3. Carolina tenía chocolates. Ella le dio 13 chocolates a Paulina. Ahora, Carolina tiene 18 chocolates. ¿Cuántos chocolates tenía Carolina al comienzo? 4. Juan tenía 15 autitos. Él le dio algunos a Pablo. Ahora, Juan tiene 8 autitos. ¿Cuántos autitos le dio a Pablo?
Combinación	5. Cristina tiene 12 lápices. Amelia tiene 24. ¿Cuántos lápices tienen entre las dos? 6. En un jardín hay 38 flores. Hay 15 rosas y el resto son margaritas. ¿Cuántas margaritas hay en el jardín?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Comparación	7. Susana tiene 28 chalecos. Cecilia tiene 9 más que Susana. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia? 8. Claudio tiene 23 globos. Pedro tiene 8. ¿Cuántos globos menos tiene Pedro? 9. Susana tiene 28 chalecos. Ella tiene 9 chalecos menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Cecilia? 10. Cecilia tiene 27 chalecos. Susana tiene 5 menos que Cecilia. ¿Cuántos chalecos tiene Susana?
Igualación	11. Sara tiene 13 libros. Francisca tiene 5. ¿Cuántos libros tiene que comprar Francisca para tener tantos libros como Sara? 12. Francisca tiene 5 libros. Si ella compra 8 libros, ella tendrá tantos libros como Sara. ¿Cuántos libros tiene Sara? 13. Sara tiene 13 libros. Si Francisca compra 5 libros, ella tendrá tantos libros como Sara. ¿Cuántos libros tiene Francisca? 14. Francisca tiene 5 libros. Si Sara pierde 8 libros, ella tendrá tantos libros que Francisca. ¿Cuántos libros tiene Sara?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-877

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Marcos Francisco Borges 1 –Franciele Nates dos Santos 2 – Rita de Cássia Pereira Borges 3
maribor@unemat.br 1 - franciele_nates@hotmail.com 2 - ritacpborges@gmail.com 3
Universidade do Estado de Mato Grosso-UNEMAT - Instituto Federal de Mato Grosso-IFMT/Campus Cáceres - Brasil

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Educação Matemática. Tarefa Investigativa. Ensino de Álgebra.

Resumo
O objetivo deste trabalho foi o de investigar a participação dos alunos do 9º ano do ensino fundamental em atividades investigativa e identificar as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sequência de atividades. Aplicamos três atividades investigativas de ensino envolvendo conceitos algébricos a 32 alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Cáceres – Mato Grosso – Brasil. Para a análise dos registros do discurso oral e escrito dos alunos, consideramos as fases de desenvolvimento do pensamento algébrico e os momentos de uma aula investigativa. Quanto à evolução do pensamento algébrico as falas dos alunos foram agrupadas em: i- pensamento aritmético, ii- transição do pensamento aritmético para o algébrico, iii- pensamento pré-algébrico e iv- pensamento algébrico elaborado. Sobre a realização de uma atividade de investigação matemática foram identificados: i- exploração e formulação de questões; ii- conjecturas; iii- testes e reformulações; iv- justificação e avaliação. As análises revelaram que os alunos estão na fase do pensamento aritmético e que a realização de atividades de investigação favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, identificado pelas habilidades em fazer generalizações, em reconhecer padrões e em entender a ideia de variável.

1. Introdução

A aprendizagem da álgebra deve promover aos alunos o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Mas, não é isto que ocorrendo em relação ao seu ensino, o professor acredita que a essência da álgebra está no emprego das regras simples, memorizações e fórmulas, o que tem levado os alunos a ter dificuldades em aprendê-la.

ISBN 978-84-945722-3-4

O objetivo deste trabalho foi o de investigar a participação dos alunos do 9º ano do ensino fundamental em atividades investigativa e identificar as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico em uma sequência de atividades. Os sujeitos da pesquisa foram 32 alunos do 9º ano da turma de 2016, do ensino fundamental da Escola Municipal Vitória Régia, localizada na cidade de Cáceres/Mato Grosso/Brasil.

Utilizamos a investigação matemática como estratégia metodológica, uma vez que, como diz Ponte (2003), ela propõe atividades de caráter investigativo que possibilitam aos alunos um maior envolvimento na aprendizagem, pois exigem a sua participação ativa na formulação e nas respostas das questões estudadas.

Aplicamos três atividades investigativas de ensino fenvolvendo conceitos algébricos: “a máquina mágica” (Fiorentini *et al*., 2005); “generalizações e padrões” (Barbosa, 2010) e “a lanchonete do Alan Xonete” (Dechen, 2008) e para analisá-las nos fundamentamos no aritmeticismo (Lins e Gimenez, 1997) e nas três fases da evolução do pensamento algébrico (Fiorentini, Fernandes & Cristovão, 2005), que são as fases “pré algébrica”, “de transição” e a “do pensamento algébrico mais elaborado”, para categorizar a fase em que se encontravam os alunos.

2. A Investigação matemática em sala de aula

Segundo Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) investigar em Matemática, é relacionar objetos matemáticos, sejam eles conhecidos ou desconhecidos, buscando identificar suas propriedades. Uma investigação desenvolve-se normalmente ao redor de problemas e encontrá-los é o primeiro passo.

Para este pesquisador, preparar uma aula investigativa não é algo simples, o professor deve escolher atividades desafiadoras e durante todo o processo deve incentivar e ensinar os alunos a raciocinar matematicamente e avaliar o progresso deles. As aulas devem considerar três fases: (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

2.1. As fases do desenvolvimento do Pensamento Algébrico

ISBN 978-84-945722-3-4

O pensamento algébrico é assumido, no contexto deste trabalho, como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas através do discurso da argumentação, expressando essas generalizações de forma simbólica de acordo com seu nível de escolaridade, dando atenção não apenas aos objetos, mas também as relações existentes entre eles e sempre que possível representando e raciocinando sobre tais relações de maneira geral e abstrata (Borralho & Barbosa, 2016; Ponte, 2006; Fiorentini, Miorim & Miguel, 1993).

Consideramos para a análise, o aritmeticismo (Lins e Gimenez, 1997), relacionado ao pensamento aritmético quando há produção de significados em relação a números e operações aritméticas, e as três fases do pensamento algébrico (Fiorentini *et al*., 2005), que são: a "Pré-algébrica" na qual se usa de algum elemento considerado algébrico (letras, símbolos), porém não consegue compreender o significado algébrico desse elemento. A fase de "transição do pensamento aritmético para o algébrico", caracterizada pela passagem de um pensamento aritmético para o algébrico, aceita-se a existência de um número qualquer e estabelece-se alguns processos e generalizações, sendo que a linguagem utilizada pode ou não ser simbólica. E, a fase em que se atinge o "pensamento algébrico mais elaborado", na qual se é capaz de pensar e se expressar genericamente, compreendendo a existência de variáveis dentro de um intervalo numérico, estando apto em expressá-las por escrito e também de operá-las.

3. Metodologia da pesquisa

Com base nos relatos da professora, identificamos as dificuldades dos alunos em aprender álgebra e escolhemos três atividades investigativas, *A máquina mágica*, *Generalizações e padrões* e *A lanchonete do Alan Xonete* que possibilitam o contato dos alunos com experiências informais antes da manipulação algébrica formal, permitindo a "transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática" (Ponte, Serrazina, Guimarães, Brenda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007, p.55).

Para os quatro encontros realizados, a turma foi dividida em 07 grupos. Foi solicitado que registrassem em uma folha as soluções e as estratégias utilizadas. No último encontro os grupos socializaram os resultados e discutiram sobre eles, além de opinarem sobre a participação deles nas atividades.

ISBN 978-84-945722-3-4

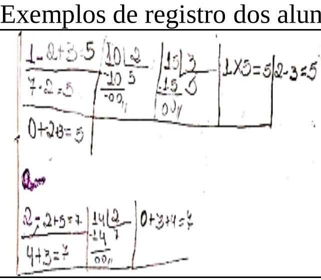
Utilizamos como instrumentos de coleta de dados: (1) o registro da observação direta dos alunos na dinâmica da realização das atividades, (2) os documentos produzidos por eles e (3) o registro em vídeo das discussões ocorridas, no último encontro.

4. Resultados e Análises

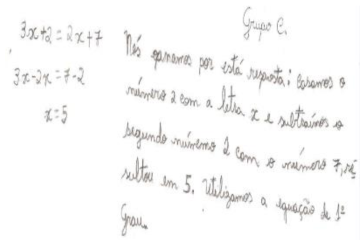
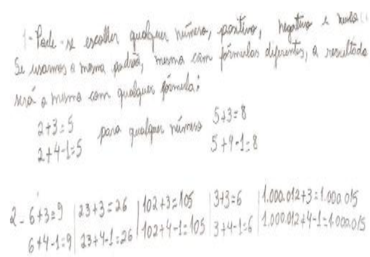
Para a análise do material coletado, separamos as respostas dos alunos em quatro categorias, 1) *Pensamento aritmético*; 2) *Fase pré-algébrica*; 3) *Fase de transição* (do pensamento aritmético para o algébrico); e 4) *Pensamento Algébrico mais elaborado.*

Nos quadros 1, 2 e 3 apresentamos a análise das respostas dos grupos em cada atividade desenvolvida a partir das categorias.

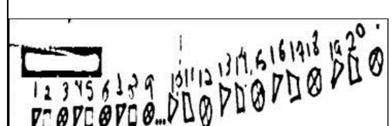
Quadro 1 - Análise das respostas dos grupos na atividade 1 a partir das categorias.

<table>
<tr><td colspan="3">Atividade 1: A máquina mágica (Fiorentini et al., 2005).
Proposta: Os grupos devem descobrir as mágicas da máquina, cujo modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transforma em 5. Entre as várias mágicas possíveis a serem descobertas, ao final da atividade o grupo deve escrever uma expressão matemática que represente o número x transformado pela máquina.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descrição</td><td>Exemplos de registro dos alunos</td></tr>
<tr><td>Pensamento aritmético</td><td>Três grupos apresentaram para a solução apenas números aleatórios de modo que o resultado final fosse o número cinco. Mesmo quando questionados, não investigaram a possibilidade de usar outros valores que não fosse o número dois e o cinco e não conseguiram estabelecer um padrão para a máquina mágica. Há a dificuldade da tradução da linguagem natural para a linguagem matemática.</td><td></td></tr>
</table>

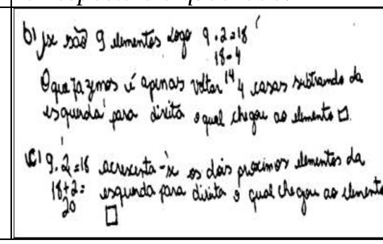
ISBN 978-84-945722-3-4

Pensamento pré-algébrico	Três grupos fizeram uso da simbologia algébrica e trabalharam com equações, porém tiveram dificuldades em explicar o significado atribuído a letra *x* como variável utilizada nas respostas. Não perceberam a letra como a generalização do possível número a entrar na máquina mágica, mas a entenderam como o número que seria a resposta após sofrer a transformação na máquina. Além disso, não estabeleceram um padrão para a máquina mágica considerando todas as informações da atividade, apenas construíram uma equação de modo que o *x* que usaram fosse o número cinco que deveria sair da máquina. Apesar de revelarem que dominam as regras de resolução de uma equação, não conseguiram perceber que podem substituir os números desconhecidos por letras e que, em contextos diferentes, as mesmas letras possuem significados diferentes.	
Transição do pensamento aritmético para o algébrico	Apenas o grupo B propôs a ideia de poder usar números quaisquer, mas sempre mantendo a mesma regra, mostrando indícios de uma capacidade de generalização do resultado, e isto fica mais visível quando o grupo começa com valores menores e vai inserindo valores extremamente maiores para exemplificar que poderiam utilizar qualquer valor. Apesar desta afirmação, em nenhum momento trabalharam com números negativos, o que nos mostrou também a dificuldade em realizar operações no conjunto numérico dos inteiros.	

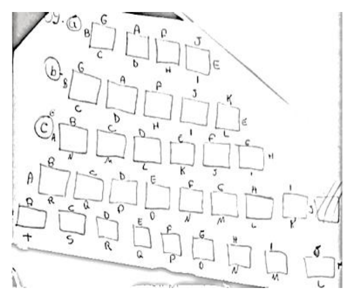
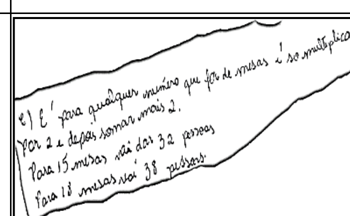
Quadro 2 - Análise das respostas dos grupos na atividade 2 a partir das categorias

<table>
<tr><td colspan="3">Atividade 2: Generalizações e padrões (Barbosa, 2010).
Proposta: Nesta atividade são apresentadas figuras que representam uma sequência. Os grupos tinham que identificar o elemento da sequência e ao final escrever uma regra para representar a sequência dada.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Categoria</td><td colspan="2">Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico</td></tr>
<tr><td>Descrição</td><td>Exemplos de registro dos alunos</td></tr>
<tr><td>Pensamento aritmético</td><td>Apenas um grupo limitou-se a contar cada figura da sequência dada até obter o número indicado para dizer qual era a figura. Mesmo quando o número das posições das figuras que a atividade pedia se tornaram maiores o grupo optou por desenhá-las estendendo a sequência até obter a posição desejada e descobrir a resposta. O grupo contou as figuras que apareciam na sequência e quando foi solicitado a apresentar soluções para as posições maiores que 9, voltavam para a primeira figura da sequência e prosseguiam a contagem.</td><td></td></tr>
</table>

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Pensamento pré-algébrico	Cinco grupos conseguiram estabelecer uma regra para encontrar as figuras, mas apenas um chegou a regra que não envolvia a contagem.	Aluno do grupo D – *Professora, se a sequência aqui tem 9 então 18 vai ser aqui* (apontando para o último elemento da sequência dada) *então como a sequência é sempre assim acrescenta mais dois para chegar no vinte e então a resposta é o quadrado.*
Transição do pensamento aritmético para o algébrico	Apenas um grupo, apesar de ainda utilizar a aritmética, reconheceu o padrão e começou a formular estratégias e a estabelecer generalizações para descobrir as figuras nas posições cujo número fosse o maior.	

Quadro 3 - Análise das respostas dos grupos na atividade 3 a partir das categorias.

Atividade 2: *A lanchonete do Alan Xonete* (Dechen, 2008). *Proposta*: Nesta atividade são apresentadas questões sobre a disposição das mesas e das cadeiras para acomodação das pessoas em um bar.		
Categoria	Exemplos de soluções que indicam as fases do pensamento algébrico	
	Descrição	Exemplos de registro dos alunos
Pensamento aritmético	Três grupos para responder as questões desenharam a disposição das mesas e contaram quantas pessoas poderiam sentar. Ao serem questionados sobre a ampliação do número de mesas, o grupo continuou com os desenhos, somente desistiram quando o número de mesas envolvia um número maior, não sendo possível utilizar o desenho para encontrar a resposta. Não compreendem o significado algébrico do número *n* na atividade e passaram a colocar valores e a fazer multiplicações aleatórias para encontrar a solução do problema.	
Pensamento pré-algébrico	Para esta atividade os grupos não apresentaram as respostas em linguagem formalizada, apesar de apresentarem indícios de que são capazes de começar a realizar algumas generalizações dos resultados.	
Transição do pensamento aritmético para o algébrico	Quatro grupos conseguiram observar padrões e exemplificar a solução por meio da escrita, mas a linguagem ainda não é a simbólica. Os grupos, mesmo reconhecendo como variáveis, as pessoas e as mesas, não conseguiram, a partir da regra inicial, estabelecer uma nova regra para encontrar a solução, atribuindo valores aleatórios para encontrar as respostas.	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Considerando as análises dos registros dos alunos no desenvolvimento das atividades investigativas, apresentadas nos quadros 1, 2 e 3, chegamos aos elementos que caracterizam as categorias do pensamento algébrico (Quadro 4).

Quadro 4 – Elementos indicadores das fases do pensamento algébrico revelados pelos alunos.

Categoria	Elementos indicadores revelados na análise
Pensamento Aritmético	Usa a contagem. Faz desenhos correspondentes aos números. Usa números aleatoriamente. Não estabelece padrões. Não usa a linguagem matemática. Não compreendem o significado algébrico das letras.
Pré-algébrico	Uso de símbolos. Opera com equações. Estabelece regras. Não estabelece padrões. Não usa letras para o número desconhecido. Não formaliza as respostas.
Transição do Aritmético para o Algébrico	Usa a aritmética. Exemplifica soluções por escrito. Formula estratégias. Reconhece padrões e variáveis. Não estabelece novas regras a partir da inicial. Começa a estabelecer generalizações.

Considerando o desenvolvimento do pensamento, desde o aritmético (Lins e Gimenez, 1997), passando pelas fases pré-algébrica, de transição e a do um pensamento algébrico mais elaborado (Fiorentini *et al.* 2005) e as características apresentadas pelos alunos do 9º ano do ensino fundamental, consideramos que eles possuem o pensamento aritmético e o utilizam como primeira escolha para resolver os problemas propostos e encontrar a solução. Quando são requeridos a utilização do pensamento algébrico, observa-se a fase pré-algébrica, por meio do uso de símbolos, da resolução de equações e do estabelecimento de regras.

A sequência de atividades de ensino ajudou alguns grupos a chegarem a reconhecer padrões e variáveis e a começar a estabelecer generalizações, caracterizando a presença da fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico, mas não atingiram ainda, a fase do pensamento algébrico mais elaborado que requer que sejam capazes de pensar e de se expressar por meio de generalizações.

Quanto a realização da atividade de investigação matemática, considerando as etapas propostas por Ponte *et al*. (2003), podemos dizer que os alunos (Quadro 5) que inicialmente não conseguiam identificar o problema, passaram a consegui-lo ao final da sequência de atividades assim como a fazer conjecturas.

Quadro 5 – Desempenho dos alunos considerando as fases da atividade de investigação matemática.

Fases da atividade de investigação matemática	Desempenho dos alunos nas fases do desenvolvimento das atividades

ISBN 978-84-945722-3-4

Exploração e formulação de questões	Não conseguiam identificar o problema e não ultrapassaram as situações sugeridas até a segunda atividade. Na terceira quase todos identificaram os problemas a serem resolvidos.
Conjecturas	Levantaram hipóteses nas duas primeiras atividades e na terceira também estabeleceram relações sobre como resolver o problema.
Testes e reformulações	Poucos testaram as conjecturas, demonstraram pouco espírito investigativo na primeira atividade e não deram nenhuma importância na segunda, já que a contagem comprovava a resposta. Na terceira atividade apesar da pouca importância dada aos testes, o utilizaram para as regras criadas por eles.
Justificação e avaliação	Os grupos não argumentaram sobre as soluções encontradas, as discussões se ativeram somente aos componentes.

Consideramos que para se atingir as fases de testes e justificação e avaliação é preciso dar prosseguimento as atividades para que os alunos possam desenvolver a habilidade de argumentar sobre os procedimentos e soluções.

4. Considerações Finais

Os registros e as falas dos alunos revelaram a predominância do uso da contagem e de sucessivas tentativas na solução dos problemas, além da dificuldade da tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica matemática, da compreensão da noção de variável o que permitiu identificá-los nas categorias do "pensamento aritmético" e da "fase pré-algébrica".

No transcorrer da realização das atividades investigativas, os grupos começaram a mostrar indícios da elaboração do pensamento algébrico, ou seja, passaram a reconhecer padrões, a compreender a existência de variáveis e mesmo que ainda estivessem dificuldades no uso da linguagem simbólica, começaram a desenvolver a habilidade de lidar com expressões algébricas.

Pudemos observar que a investigação matemática como estratégia de ensino proporciona o desenvolvimento da argumentação, do trabalho em grupo, da elaboração de relatórios, da comunicação oral e da escrita matemática.

Os alunos durante os momentos da investigação matemática tiveram na fase de exploração e formulação de questões menos dificuldades, enquanto nas fases de conjecturas; testes e reformulações; justificação e avaliação foi necessária a intervenção e a persistência do professor para que elas acontecessem.

Entendemos que os alunos por estarem no 9º ano deveriam apresentar conhecimentos da categoria "dos que apresentam o pensamento algébrico mais elaborado" ou pelos menos "dos

ISBN 978-84-945722-3-4

que estão na fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico". Esta dificuldade pode estar vinculada a metodologia adotada pelos professores, com ênfase na aplicação de regras simples, memorizações e fórmulas para ensinar os conceitos algébricos.

A pesquisa evidenciou que o professor ao utilizar a atividade de investigação no ensino de matemática, começa a desmistificar a concepção que os alunos possuem de que a álgebra se constitui de um emaranhado de símbolos e regras a serem seguidas, e pode desenvolver nos alunos o pensamento algébrico.

5. Referências bibliográficas

Barbosa, J. G. dos S. (2010). *Pensamento algébrico*. Trabalho de conclusão de especialização. Universidade Federal de Minas Gerais. www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_JGeraldo.pdf Consultado 10/07/2016.

Borralho, A. & Barbosa, E. (s.d.). Pensamento algébrico e explorações de padrões. http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf Consultado 11/08/2016.

Dechen, T. (2008). *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na 6ª série do ensino fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil.

Fiorentini, D., Miorim, M. Â. & Miguel, A (1993, março). Contribuições para um repensar a Educação Algébrica Elementar. *Pró-Posições*, 4, 1(10), 78 – 91.

Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P. & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: Anais. *Seminário Luso-Brasileiro de investigações matemáticas no currículo*. Portugal. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Recuperado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm Consultado 17/10/2016.

Lins, R. & Gimenez, J. (1993). Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas: Papyrus.

Ponte, J.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Brenda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (eds.). Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Lisboa: SEM-SPCE, 5-27.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Investigar em educação, 2, 93-169.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-878

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: O LÚDICO COMO MODO DE ORGANIZAR O ENSINO

Daniela Cristina de Oliveira – Wellington Lima Cedro
dani_cryst@hotmail.com– wcedro@ufg.br
Universidade Estadual de Goiás/Brasil - Universidade Federal de Goiás/Brasil

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem de matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: Atividade de ensino; Clube de Matemática; Lúdico; Teoria Histórico-Cultural.

Resumo
Ao compreender a escola como o local historicamente designado para que ocorra a materialização da necessidade humana de apropriação dos conhecimentos, o professor assume sua atividade principal ao organizar o ensino. Assim, seleciona o conteúdo a ser ministrado, a geometria, e planeja atividades de ensino. Por se tratar de estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o lúdico é contemplado na tentativa de envolver os sujeitos com o estudo, mediante a realidade que ainda lhes pertencer, o brincar. Nesse sentido, o Clube de Matemática surge como um espaço de aprendizagem, inserido em algumas instituições de ensino no Brasil, com o intuito de envolver os sujeitos à apropriação de conhecimentos. Sustentado na Teoria Histórico-Cultural, organizou-se um experimento didático (Cedro & Moura, 2010) para o desenvolvimento dessa pesquisa, composto por um conjunto de situações desencadeadoras de aprendizagem, que foram realizadas no Clube de Matemática em uma turma do quarto ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública brasileira. Como a pesquisa está em andamento, o objetivo, por meio desse trabalho, é apresentar resultados parciais das ações e manifestações orais das crianças, durante o Clube de Matemática, na tentativa de compreender se a estruturação lúdica possibilitou aos estudantes envolverem-se com o estudo.

INTRODUÇÃO

A escola, entendida aqui como espaço institucionalizado de formação humana de sujeitos, deve possibilitar aos indivíduos a apropriação dos conhecimentos elaborados historicamente. Para tanto, espera-se que a mesma permita o desenvolvimento psíquico dos sujeitos, não se restringindo somente à transmissão de conteúdos, pois isto impossibilita o desenvolvimento do pensamento teórico e a atribuição de sentido ao trabalho escolar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pressupõe-se que o ensino organizado para que os sujeitos se deparem com situações problema que desencadeiam o envolvimento com estudo e a aprendizagem é um meio de superar a memorização de informações e de desenvolver novos conhecimentos. O Clube de Matemática surge, nesse sentido, como espaço de reflexão em que os sujeitos inseridos no processo educativo tenham a possibilidade de vivenciar uma *educação humanizadora*, caracterizada por permitir transformações qualitativas no modo de agir e de refletir dos sujeitos diante de situações concretas da realidade.

O Clube de Matemática se constitui como espaço de aprendizagem das crianças, desenvolvido em escolas públicas brasileiras. Este se concretiza em um espaço de discussão e reflexões sobre a Matemática, em conjunto com as crianças e professores, e sobre as atividades de ensino planejadas, as situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA), que possam envolver os estudantes com a apropriação do conhecimento.

As SDA planejadas, tomando por base os pressupostos teóricos da Teoria Histórico-Cultural, possuem um caráter lúdico, como modo de envolver os estudantes ao estudo, por se tratar de crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Acreditamos que o lúdico no ensino possibilita a construção do motivo de aprender nas crianças (Rigon, Asbahr, & Moretti, 2010); educar crianças dos anos iniciais pressupõe desenvolver ações que favoreçam o seu desenvolvimento e que desencadeiam a necessidade do conhecimento (Nascimento, Araújo, & Migueis, 2010).

Com esse intuito, assume-se, nesta pesquisa, a necessidade de se buscar a superação do modelo educacional vigente no Brasil, caracterizado pela reprodução dos conhecimentos de forma mecânica e da ausência de sentido no processo de ensino e aprendizagem pelos estudantes, de modo a organizar o ensino de Matemática para possibilitar aos estudantes a apropriação dos conhecimentos, com vista a desenvolver um pensamento teórico/conceitual. Sendo assim, é apresentado, a seguir, como o Clube de Matemática foi organizado e desenvolvido na escola pública brasileira selecionada para essa investigação e o movimento teórico de constituição das atividades de ensino.

CLUBE DE MATEMÁTICA: UM ESPAÇO DE APRENDIZAGEM E DE FORMAÇÃO HUMANA DOS SUJEITOS

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Essa investigação está vinculada à Universidade Estadual de Goiás, intitulada por *Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: o lúdico como modo de organizar o ensino*, coordenada pela professora Daniela Cristina de Oliveira, com a parceria do professor Wellington Lima Cedro, da Universidade Federal de Goiás (UFG), cujo memorando de aprovação é o PrP/CP n° 040/2016.

Para a concretização desta investigação foi realizado, durante o ano de 2016, reuniões semanais, na UFG, com a intencionalidade de organizar o ensino a ser desenvolvido no Clube de Matemática. Reuniram-se estudantes de pós-graduação, professores da educação básica de Goiânia e estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UFG.

Nestas reuniões, a geometria foi selecionada como conteúdo a ser contemplado nas atividades de ensino planejadas para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, realizou-se um aprofundamento teórico respaldados na Teoria Histórico-Cultural por meio do estudo do movimento lógico-histórico da geometria (Kopnin, 1978), uma análise conceitual de forma a estabelecer os nexos conceituais (Davídov, 1988) para favorecer a apropriação conceitual pelas crianças e a associação de sentido ao conteúdo estudado.

Diante desse estudo e das reflexões coletivas entre os professores, estabeleceu-se os nexos conceituais geométricos a ser contemplados nas SDA para envolver as crianças ao estudo no Clube de Matemática, que são: percepção da necessidade de orientação (direção e sentido) para a localização no espaço; percepção do espaço e dos objetos que o compõe, suas formas e características; reconhecimento de figuras bidimensionais e tridimensionais; e percepção das diferentes formas de compor os objetos no espaço.

Por meio desses nexos conceituais foram elaboradas, inicialmente, um conjunto de atividades lúdicas de ensino de geometria, as SDA, em um projeto desenvolvido anteriormente, o Observatório de Educação (OBEDUC) - um projeto intitulado por "Educação matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Princípios e práticas da organização do ensino", submetido à Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em 2010, inserido no edital n° 38/2010/CAPES/Inep, sob a coordenação geral do Prof. Dr. Manuel Oriosvaldo de Moura, da USP.

Dando continuidade aos estudos do OBEDUC e ao aprofundamento teórico-metodológico, retomou-se essas SDA e foram reorganizadas, respaldados nos mesmos nexos conceituais, a fim de dar continuidade as pesquisas pedagógicas do ensino de Matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

Nesse sentindo, no segundo semestre de 2016, foram desenvolvidas as SDA com estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental, em Goiânia/Goiás, no Brasil. Concomitantemente, foram realizadas as reuniões entre os profissionais da educação envolvidos na organização do ensino do Clube de Matemática, na UFG, para a discussão em torno do desenvolvimento das SDA, com o intuito de refletir sobre a organização do ensino realizada e sobre as modificações necessárias nas SDA para possibilitar o envolvimento das crianças com o estudo.

Destaca-se que o intuito, por meio dessa pesquisa, é analisar as ações e as manifestações orais das crianças, durante a realização do Clube de Matemática, na tentativa de compreender se a estruturação lúdica possibilitou aos estudantes envolverem-se com o estudo.

Para dar continuidade a discussão, é apresentado a seguir a metodologia da pesquisa, a organização das SDA de geometria e uma discussão acerca dos resultados parciais dessa investigação.

EXPERIMENTO DIDÁTICO COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia desenvolvida para delinear esta pesquisa foi o experimento didático, tomando por pressuposto teórico a Teoria Histórico-Cultural. Esta possui um caráter qualitativo, contudo com as particularidades intrínsecas às pesquisas pautadas na Teoria Histórico Cultural.

O experimento didático foi estruturado de modo a possibilitar transformações qualitativas no pensamento dos sujeitos inseridos no processo desenvolvimental. Buscou-se, pois, compreender o objeto de estudo em seu movimento e não simplesmente a relação de estímulo e resposta dos aspectos pedagógicos.

De modo geral, Cedro e Moura (2010) caracterizam o experimento didático como unidade entre o desenvolvimento psíquico dos sujeitos, o ensino e a educação. Para a realização do experimento didático, delimitou-se o conteúdo a ser apropriado pelos sujeitos, a geometria, e organizou-se as atividades de ensino, como forma de possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico nas crianças.

É apresentado abaixo, na figura 1, as SDA desenvolvidas no Clube de Matemática.

SDA de geometria

ISBN 978-84-945722-3-4

Módulo 1: localização	❖ *Caça ao tesouro* ❖ *Matematicolândia*
Módulo 2: as formas	❖ *Explorando a escola* ❖ *Qual é a forma?* ❖ *A ponte*
Módulo 3: composições e construções	❖ *Reinvenção da roda*

Figura 1. Estruturação das SDA do Clube de Matemática. Fonte: autoria própria.

As SDA do módulo 1 abordaram somente os nexos das necessidades de organização, movimentação, localização, direção e sentido no espaço. Foram propostas situações lúdicas para que as crianças buscassem a solução de um problema de forma coletiva, por meio do compartilhamento de ideias e saberes.

As atividades do módulo 2 foram planejadas para que os sujeitos percebessem o espaço sob um olhar geométrico. Estas foram estruturadas na tentativa de abarcar os nexos de percepção do espaço e dos objetos que o compõe, suas formas e características.

Por fim, a SDA do módulo 3 foi estruturada de modo a contemplar os nexos de reconhecimento de figuras bidimensionais e tridimensionais e a percepção das diferentes formas de compor os objetos no espaço.

Por conseguinte, apresenta-se na figura 2 abaixo a organização geral do Clube de Matemática desenvolvido no segundo semestre de 2016.

Encontros do Clube de Matemática	
Encontro inicial: Conhecendo o Clube	Confecção de crachás Teia da cooperação
Módulo 1: localização	*Caça ao tesouro* *Matematicolândia*
Módulo 2: as formas	*Explorando a escola* *Qual é a forma?* *A ponte*
Módulo 3: composições e construções	*Reinvenção da roda*
Encontro final: Reflexão sobre os encontros do Clube de Matemática	Reflexão coletiva

Figura 2. Estruturação do Clube de Matemática. Fonte: autoria própria.

O encontro inicial foi planejado para que os estudantes conhecessem a proposta do ensino no Clube de Matemática, um ensino lúdico que valoriza o trabalho coletivo. Para tanto, inicialmente foi proposto a confecção de um crachá para identificação dos sujeitos. Posteriormente, foi sugerida a atividade nomeada por *Teia da cooperação*, na qual os

ISBN 978-84-945722-3-4

estudantes precisaram solucionar uma situação por meio de compartilhamento de ideias e saberes. Este encontro possuiu tempo de duração de 2 horas.

Cada SDA apresentada nos módulos 1, 2 e 3 foi desenvolvida na sequência explicitada no quadro 2, acima. Cada encontro possuiu tempo de duração de duas horas. Por fim, no encontro final, houve reflexões e discussões coletivas sobre cada encontro realizado no Clube de Matemática e, concomitantemente, sobre as SDA e seus objetivos.

O LÚDICO COMO MODO DE ENVOLVER AS CRIANÇAS COM O ESTUDO

Por ser este trabalho apenas o resultado parcial dessa pesquisa, será apresentado apenas algumas ações e manifestações orais dos estudantes durante a realização do Clube de Matemática em Goiânia/Goiás, Brasil, no ano de 2016.

Participaram do Clube de Matemática 26 crianças do quarto ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública de educação básica. Ressalta-se que não havia crianças com necessidades especiais nesse grupo. Por o objetivo ser analisar as ações e as manifestações orais das crianças, durante a realização do Clube de Matemática, será apresentado a seguir um recorte do conjunto de dados para explicitar um pouco sobre o movimento desencadeado pelos estudantes durante o processo de ensino e aprendizagem. Selecionamos a SDA *Matematicolândia,* do módulo 1.

Almeja-se possibilitar aos estudantes, por meio desta SDA, a percepção da necessidade do planejamento ao organizar-se edificações/construções no espaço e da criação de instrumentos que auxiliem na localização no espaço. O objetivo das crianças era de construir uma cidade em conjunto, a *Matematicolândia,* levando em consideração as características do meio (lotes e quadras das ruas).

Esta SDA foi iniciada por meio da discussão sobre as necessidades dos moradores de uma cidade com relação a sua estruturação e seus componentes: ruas, praças, farmácia, hospital, escola, etc... As crianças foram questionadas sobre quais edificações eram essenciais para uma população e quais deviam ser levadas em consideração no planejamento/construção de uma cidade.

Nesse sentido, explicou-se a importância do planejamento de uma cidade anteriormente à sua concretização e propôs-se a criação coletiva de uma cidade, a *Matematicolândia*, levando em conta as necessidades da população, nesse caso o grupo de estudantes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Assim, os estudantes foram organizados em seis grupos e cada um ficou responsável por planejar e construir um setor da cidade, sendo esta composta por seis setores. Foi entregue as edificações por meio de figuras das construções e solicitado que os estudantes organizassem seu setor.

Cada grupo teve a liberdade de organizar as edificações da forma como achou mais adequada, adaptando os cartões das edificações aos lotes disponíveis. Posteriormente, reuniu-se os setores para formar a *Matematicolândia*, como mostrado na figura 3, abaixo. Destacou-se que a cidade construída era de toda a turma e não somente do grupo responsável por cada setor.

Figura 3. Construção coletiva da cidade *Matematicolândia.* Fonte: autoria própria.

A ludicidade é percebida na construção de uma cidade fictícia, a cidade dessas crianças com suas singularidades, por meio de um material e de uma problemática que acreditamos as envolver ao estudo.

Após a construção da cidade, discutiu-se com as crianças sobre a organização realizada concernente às edificações, se os setores foram dispostos da forma mais adequada. Assim, entregou-se a folha de registro escrito para a realização da construção de um mapa da *Matematicolândia* pelos estudantes. O intuito por meio desse registro foi que os estudantes percebessem a necessidade dos mapas no desenvolvimento histórico das civilizações e sua utilidade para a população, instrumento este que auxilia na localização no espaço, fornecendo instruções de direção e sentido com relação a localização das edificações.

Posteriormente, os estudantes responderam o restante da folha de registro, que continha algumas indagações, tal como: Qual a importância da representação de uma cidade por meio de um desenho?

Por fim, foi realizado um momento de reflexão a respeito da melhor forma de orientar uma pessoa para que a mesma chegue a determinado lugar de uma cidade e permitiu-se que os sujeitos manifestassem suas ideias acerca da SDA no final do encontro.

Nesse sentido, tomou-se como pressuposto, durante a realização do Clube de Matemática, que se as crianças buscassem solucionar as SDA lúdicas, no coletivo, por meio de ações e de compartilhamento de ideias nos grupos (manifestações orais), estes estavam mobilizados ao estudo.

Nesta SDA, a *Matematicolândia*, as crianças, de forma geral, se envolveram com a proposta, buscando no coletivo construir a cidade e a organizar as edificações da melhor forma possível. Compreenderam a importância dos mapas no desenvolvimento histórico da sociedade, contudo alguns estudantes apresentaram dificuldade em manifestar as noções de direção e sentido. Ao afirmar, por exemplo, para uma pessoa se direcionar a direita na cidade, a criança mencionava ao contrário, dizendo a esquerda. Até mesmo ao registrar as edificações no mapa, alguns estudantes as representaram em posições opostas. Percebemos, com isso, a necessidade de ser reorganizada essa atividade de tal forma que colabore para a compreensão desse aspecto.

Para contribuir para essa discussão, foi transcrito alguns discursos das crianças durante a realização do último encontro do Clube de Matemática, isto para se explicitar um pouco das manifestações orais das crianças. Os estudantes foram questionados sobre o que eles aprenderam durante a realização do Clube de Matemática e se eles gostaram da proposta. Eles, então, responderam: "Eu gostei porque teve muitas brincadeiras e aprendi matemática brincando" (Estudante 1); "Eu gostei muito do Clube porque ele me ensinou muito a matemática, faz a gente aprender muito, facilita a aprendizagem. Eu gostei muito de participar dele e gostaria de participar de novo, se pudesse" (Estudante 2); "Eu gostei do Clube de Matemática porque ele ensina várias coisas, ele ensinou a trabalhar em grupo, as formas geométricas" (Estudante 3).

Percebe-se, por meio do discurso desses estudantes mencionados, indícios parciais de que o lúdico, nas SDA, permitiu que os sujeitos se envolvessem com a proposta de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentado, nesse trabalho, a estruturação do experimento didático organizado para o ensino/a pesquisa, explicitando os objetivos de cada módulo que o compõe. Por os resultados ainda estarem em aberto, realizou-se um recorte do conjunto de dados e apresentou-se a SDA *Matematicolândia*, isto para possibilitar a percepção de como as atividades de ensino são estruturadas no Clube de Matemática.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ao se realizar as reflexões sobre o desenvolvimento do Clube de Matemática, no coletivo de profissionais da educação, percebeu-se ser necessário a reorganização das SDA. Isto porque notou-se algumas limitações na organização do ensino, pois algumas SDA não contemplaram a proposta de ensino sustentado na Teoria Histórico-Cultural, não possibilitando o desenvolvimento do pensamento teórico nos sujeitos, ficando restritos a aspectos empíricos do ensino de geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cedro, W. L., & Moura, M. O. (2010) Experimento didáctico: um caminho metodológico para la investigación em la educación matemática. Unión: *Revista Iberoamericana de Educacion Matemática, 22*, 53-63.

Davídov, V. V. (1988) *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Editorial Progresso.

Kopnin, P. V. (1978) *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Nascimento, C., Araújo, E., & Migueis, M. (2010) O conteúdo e a estrutura da atividade de ensino na educação infantil: o papel do jogo. En Moura, M. O. (org.) *A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural*, Capítulo 5, pp. 111-134). Brasília: Liber livro.

Rigon, A. J., Asbahr, F. S., & Moretti, V. D. (2010) Sobre o processo de humanização. En Moura, M. O. *A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural,* Capítulo 1, pp. 13-44. Brasília: Liber livro.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-879

VIII CIBEM CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Madrid 2017

10-14 de julio 2017.

Título de ponencia: **INCENTIVAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN ALUMNOS DE 5TO. Y 6TO. DE PRIMARIA.**

M. M. E. B. José Antonio Cortés Barradas. acfractal0@gmail.com

Institución que representa: C. E. "José María Morelos y Pavón". País: México.

Dra. en Educ. Blanca Estela Cortés Barradas. cbbe979@yahoo.com.mx

Institución que representa: Benemérito Instituto Normal del Estado. País: México.

L.D.G. y L.A.P. Alejandro Ángeles Cortés. alecs_ans@hotmail.com

Institución que representa: Instituto Ramón López Velarde S. C. País: México.

Modalidad de Trabajo: **Comunicación Breve (CB).**

Nivel Educativo: **Primario (6-11 años).**

Núcleo Temático: **II.- La Resolución de Problemas en Matemáticas.**

ISBN 978-84-945722-3-4

Resumen.
Preparar niños para la Olimpiada Matemática es un trabajo apasionante porque no sólo es el compromiso con ellos, sino con sus padres, con sus maestros de grupo para que puedan apoyarlos para que los chicos logren el objetivo que la misma Dirección de la "Primaria Matutina del C. E. Lic. Miguel Alemán": que puedan presentarse a un certamen de magnitud estatal o nacional con tranquilidad y seguridad que les permitirán los conocimientos matemáticos, su uso, aplicación y solución de problemas, así como incentivar la creatividad de cada niño en la concepción y desarrollo de sus propios problemas detallados, o en la búsqueda de diversas soluciones.
Al visualizar este trabajo con los niños y al ser ellos capaces de poner en práctica conocimientos y estrategias de solución, es posible que también estemos trabajando para el futuro: por un lado contribuir a la formación del pensamiento lógico y creativo de los chicos, y como de su posible aplicación en grupos numerosos como los que maneja la educación pública mexicana.
Palabras Clave: creatividad, resolución de problemas, matemática.

Abstract.

Prepare children for Mathematical Olympiad is an exciting job because it is not only the commitment to them, but with their parents, their teachers group so they can support so that children achieve the objective the same address "Primary Matutina the C. E. Lic. Miguel Alemán" to be presented to a contest of state or national scale with peace and security that will allow them to mathematical knowledge, use, application and troubleshooting, and to encourage the creativity of each child in the design and detailed development of their own problems, or finding different solutions.
When viewing this work with children and being them able to implement knowledge and solution strategies, you may also are working for the future: on the one hand contribute to the formation of logical and creative thinking of the boys, and as its possible application in numerous groups such as handling the Mexican public education.
Keywords: creativity, problem solving, mathematics.

Introducción.

El presente trabajo educativo tiene como finalidad principal incentivar el pensamiento matemático en los niños que están cursando 5° y 6° de primaria en el Centro Escolar Manuel Ávila Camacho (CELMA) en la ciudad de Cholula, Puebla en México; así mismo, el que puedan participar en algunos eventos intelectuales, como las olimpiadas de matemáticas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Entendemos por incentivar el pensamiento matemático de los niños, como aquella disposición de los alumnos a estudiar matemáticas a través de juegos, paradojas, ejercicios o problemas o el uso sistemas de cómputo con la misma finalidad.

Planteamiento del problema.

La mayoría de los niños aprenden matemáticas de diferente forma, ya que esta materia que se imparte a nivel mundial, que es un idioma universal y que dependiendo de cómo les sea presentada a los niños, es como les gustará o la detestarán.

Método.

Empleamos el método de Resolución de Problemas Interesantes, también llamado por Miguel de Guzmán (1984) “el corazón de las matemáticas”, “que estimula fuertemente al individuo para hacerse capaz de crear combinaciones nuevas con las ideas e instrumentos que ya posee. Es la base del progreso”

Objetivo Principal.

Que los niños de la Primaria Matutina del CELMA, puedan presentarse a la Olimpiada Matemática aplicando sus capacidades, habilidades y sus destrezas desarrolladas en los seminarios o círculos de matemáticas.

Preguntas de investigación.

¿Podemos enseñar a los niños a presentarse en eventos cuya gran presión sea eliminada por los conocimientos, habilidades y destrezas que poseen?, ¿pueden estos niños ser “monitores” de otros niños? y, ¿pueden los niños recordar sus propios problemas y soluciones?

Contenido.

En México estamos viviendo una situación difícil a nivel social, cada día se hace evidente como el tejido social se va dañando y esto genera problemas que impactan el sistema educativo mexicano.

Es visible que los alumnos de Bachillerato 30 años antes, eran más competitivos en español y matemáticas que los actuales, pues nos encontramos con jóvenes que no solo escriben mal sus datos, sino que no pueden leer correctamente un párrafo, de ahí que en lectura de comprensión tengan problemas agudos al intentar resolver un ejercicio matemático (Abello C. & Montaño Calcines, 2013).

Si a esto agregamos que las matemáticas son un lenguaje que tiene sus reglas y significados, que para poder desarrollarse adecuadamente requiere de una serie de pasos lógicos (Blanco

ISBN 978-84-945722-3-4

N. & Cárdenas L., 2013), tenemos un creciente número de alumnos que está en un nivel deficiente de desempeño matemático. Ante esta situación algunos profesores han optado por reforzar la lectura de comprensión y las matemáticas en Bachillerato, buscando desarrollar destrezas en los alumnos tendientes a resolver pruebas. Por nuestra parte, intentamos robustecer la participación en matemáticas de los alumnos desde la primaria (Cortés, 2012), pues si apoyamos un pequeño grupo de alumnos mediante un circulo de estudio o club de matemáticas y los motivamos a trabajar en conjunto, es posible que algunos de estos niños puedan ser monitores de sus compañeros y esto ayude a generar un mejor clima en el aula y por consiguiente un mejor desempeño en matemáticas en general; así pues, con esta intención hemos apoyado en los últimos años la formación de seminarios, clubes o talleres de matemáticas en el nivel primaria, donde el trabajo que presentaremos ante Ustedes fue realizado en el ciclo 2016-2017:

1).- En primer lugar seleccionamos la primaria del CELMA, Institución que representa una esperanza para la educación de los padres de familia y sus niños de grupos socioeconómicos medio y bajo, que eligen la educación de la Escuela Pública, por ello, le pedimos a la Directora Maestra en Educación Roció Cortés su anuencia para trabajar con un grupo de chicos de su Escuela, lo cual le pareció formidable y nos propuso el trabajo a través de un seminario o Taller con los chicos, de manera que pudiéramos desarrollar ejercicios de la Olimpiada de Matemáticas.

2).- Buscamos a los posibles participantes, les pedimos a las profesoras de los 5tos y 6tos. que propusieran a los niños, que pudieran participar en este curso; pero también, se invitó, grupo por grupo, a los niños para que participaran en el mismo.

3).- La Maestra Cortés, citó a los padres de familia o tutores de los niños, antes de iniciar este trabajo educativo y se tocaron algunos temas como:

-La importancia de las matemáticas en la vida de un niño, o de como las matemáticas son parte de las inteligencias reconocidas hoy en día (Gardner, Tercera reimpresion 2001).

- La importancia para sus niños y el desarrollo cognitivo de los mismos, al consumir alimentos que contengan omega 3, por ejemplo, el salmón, las sardinas, las almendras o el chocolate negro (Bourre, 2006), versus el exceso de carbohidratos que tiene actualmente la comida mexicana, que están llevando a nuestro País a ocupar un desagradable lugar entre las naciones con mayor índice de diabéticos (Aranda P., 2014).

ISBN 978-84-945722-3-4

- Fortalecimiento de la autoestima de los niños, pues en la medida que ellos se sientan apoyados por sus padres, tendrán mayor seguridad y podrán hacer un mejor papel en su vida estudiantil y en la sociedad misma (Couoh L., 2015).

4).- Con los niños, se trabajaron las siguientes áreas de las matemáticas:

I).- Cálculo Mental: Algunos autores (Gálvez, 2011) nos sugieren trabajar con el cálculo mental en la primaria, la secundaria y el bachillerato, lo cual consideramos de vital importancia pues en México la Secretaria de Educación Pública mandata que los niños y jóvenes hasta Bachillerato presentaran exámenes solo con un lápiz y sin calculadora, sin embargo, en estos tiempos los resultados obtenidos por jóvenes de nivel medio superior dejan mucho que desear (Larrazolo, 2013). Por lo que es adecuado impulsar el cálculo mental constantemente para obtener de los niños: agilidad mental, capacidad de concentración, apoyo a la memoria, proporción, etc.

II).- Juegos, Ejercicios y Problemas con Fracciones (Bourre, 2006). El sentido lúdico es quizá el más buscado por los alumnos; promueve un ambiente relajado, participativo, que apoya el proceso educativo, es en general, motivante para la creatividad y el aprendizaje; el juego es un gran impulsor educativo. Si en la primaria pudiéramos dejar claro como operar y utilizar fracciones para resolver algún tipo de ejercicio podríamos haber avanzado muchísimo, pues nosotros encontramos con frecuencia alumnos en nivel Bachillerato que tienen problemas para realizar operaciones básicas con fracciones, e interpretarlas con decimales por ejemplo en un intervalo y sin embargo, podemos utilizar los recursos que tenemos hoy en día, como juegos, trabajos en equipos en blogs (ver: "Jugando y aprendiendo" de Ma. Luisa Arias Prada) o páginas electrónicas (a los chicos les encantan: www.usa-el-coco.com y www.aventuras-del-señor-pi.com), es emocionante ver a algunos niños que se consideran "malos" para las matemáticas, jugar con rompecabezas, puzles, fracciones (Por ejemplo. "jugar con fracciones") o sudoku…si me atreviera a preguntar…dirían "*que no son matemáticas*" …. Pero ¡¡qué importa!!, ellos están contentos y aprendiendo matemáticas.

-Problemas Variados, de porcentajes, conversiones de unidades, permutaciones.

-Problemas de la Olimpiada Matemática Mexicana (Contamos con Manuales de la Sociedad Matemática Mexicana como con algunas páginas e.)

Haciendo una revisión de la cantidad de ejercicios y problemas que se resolvieron en el seminario, como los que los alumnos hicieron de manera autónoma, encontramos unos 600,

ISBN 978-84-945722-3-4

algunos sencillos y otros con cierta complejidad, pero consideramos que la cantidad también cuenta, ya que es posible un cambio cualitativo.

- Fomento de la Creatividad, puesto que la creatividad es una actividad que refleja la capacidad de pensar (Luc de Brabandere, en su libro Pensée Magique et Pensée logique, nos comenta: "pensamiento creativo es un pleonasmo o un oximorun?), o dicho de otra manera: "es un proceso complejo e integrador, que involucra simultáneamente factores, perceptivos, cognoscitivos y emocionales" (Guilera Agüera, Llorenç, Anatomía de la Creatividad, p. 21) creemos que es fundamental para el desarrollo de las matemáticas, de ahí, que su implementación sea muy importante, también es justo decirlo, la estancia de los niños en el jardín de infancia puede ser una de las mejores en la vida, ya que normalmente los niños presentan trabajos y aprenden lúdicamente, no por ello quiere decir que en la continuación del sistema escolar lo sea; por ello es importante impulsar continuamente a los niños a presentar sus deducciones, propuestas, o trabajos que tengan su impronta, pues es de vital importancia para lograr un ser humano integral. Jiménez Vélez, Carlos Alberto (2001), menciona que "En la modernidad, la UNESCO generosamente declaró la democratización de la escolarización, en realidad de la entrada a la escuela, pero la labor docente aplicando metodologías tradicionales no ha conseguido aún la democratización de la salida del proceso escolar". Así está claro que la diferencia la realiza el docente, quien día a día debe forjarse nuevas metas, formas de enseñanza, motivación y ambientes de aprendizaje significativo.

Mihail Czimineshayi nos dice: "por enormes que sean los dotes matemáticos que pueda tener un niño, no será capaz de dar una aportación sin aprender sus reglas" (Csiksentmihalyi Mihaly, Creatividad, p. 47), así que el desarrollo creativo de una persona depende de su comprensión del campo que estudia, más adelante nos vuelve a esta idea: "No se puede transformar un campo a menos que primero se entienda perfectamente cómo funciona. Lo cual significa que uno tiene que adquirir los instrumentos matemáticos, aprender los principios básicos de la física y ponerse al día sobre el estado actual del conocimiento en esos campos" (Op. Cit, p. 114). Por nuestra parte al incentivar el pensamiento matemático, estamos apoyando la creatividad que cada chico tiene. Si como profesores podemos hacer un ejercicio discutirlo, formular preguntas y pedir a los niños que presenten variaciones del mismo, un siguiente punto puede ser: "¿es posible hacer una generalización de un proceso o un tipo de operaciones?" y por ultimo: ¿existe alguna fórmula que nos simplifique el proceso?

ISBN 978-84-945722-3-4

Lo anterior, lleva al niño a intentar encontrar nuevos valores o aplicaciones al problema que se examinó con anterioridad, a generalizar sus resultados por medio de fórmulas que liguen las variables que examina, a ofrecer argumentos y ensayos sobre una variación del ejercicio anterior o por qué no a plantearse un problema similar, pero original.

Conclusiones.

1.- En un País como México donde hay un creciente desinterés por las Matemáticas y las Ciencias. Es muy halagador para nosotros tener un grupo de pequeños estudiantes que encuentran en las Matemáticas, una fuente de esparcimiento, un saber y que asisten a las sesiones por este gusto.

2.- Para el ser humano según Howard Gardner las matemáticas constituyen una de la nueve inteligencias que puede desarrollar, nosotros creemos que es incluso, un derecho como ser pensante y que al igual que el acceso al lenguaje materno, su ignorancia o baja ejecución por los alumnos, podría ser un motivo de marginación social.

3.- El pensamiento creativo no se puede dar en unas cuantas sesiones; sin embargo, es posible irlo motivando para provocar la reflexión, y el planteamiento de nuevas situaciones o ejercicios que germinen alguna vez en ejercicios creativos. Consideramos que las Matemáticas son por excelencia, una de las asignaturas en donde se puede dar continuamente aportaciones de diversa índole, es por ello, importante motivar y apoyar el surgimiento de la creatividad en el aula donde trabajamos; con los niños aún puede ser más fructífero, pues los niños están acostumbrados a lo lúdico y ello apoya el aporte de sus ideas en un clima relajado, sin tensiones.

4.- En el momento en que escribimos este trabajo, los chicos han concursado en el nivel local de la Olimpiada Matemática (cotorra) y esperamos un buen resultado para el grupo, la posibilidad de que algunos de sus miembros puedan pasar a las siguientes fases.

5.- Si bien en general se alcanzaron los objetivos cognitivos como sociales en la participación de los niños, nos gustaría hacer de estos seminarios un laboratorio, donde podamos ir observando los cambios que van presentando los alumnos, su madurez intelectual, como de nuestra parte hacer específicas:

- las estrategias que apoyan determinados aprendizajes.
- las destrezas que logran los estudiantes con determinados ejercicios.

ISBN 978-84-945722-3-4

- las competencias que se pueden obtener con el desarrollo de ejercicios mentales, de ejercicios escritos, de ejercicios de gráficas, de porcentajes, etc.

- las habilidades que va ejerciendo el estudiante al pasar de un tipo de ejercicios básicos a medio hasta superior (grados de dificultad de los ejercicios).

Bibliografía.

1.- Arias Prada, María Luisa. (). *Aprendiendo y jugando, libro de matemáticas 6° año de primaria.* Santillana Editores.

2.- Bourre, Jean Marie. (2006). *La nouvelle diétetique du cerveau.* Editorial Odile Jacob. F.

3.- Cortés Barradas, J. Antonio. (2012). *Logo: una herramienta lúdica para las matemáticas.* Editorial UIA Puebla. México.

4.- De Brabandere, Luc. (2008).*Pensée magique et pensé logique. Petit philosophie de la creativite*. Editions Le Pommier, Méléte. Francia.

5.- Gardner, Howard. (2001). *Estructuras de la mente.* Tercera reimpresión. Editorial CFE. México.

6.- Guilera Agüera, Llorenç. (2011). *Anatomía de la Creatividad.* FUNDIT-Escola Superior de Disseny ESDi. España.

7.-Jiménez Vélez, Carlos Alberto. (2001). *Lúdica y creatividad.* Colección Aula Alegre. Cooperativa Editorial Magisterio, pp. 144-145. Colombia.

Revistas.

1.- Abello C., Ana Ma., Montaño Calcines, J. Ramón. (2013). *Leer y comprender para aprender matemáticas.* Revista Varona. 60-68.

2.- Aranda P., Saida. (2014). *Alimentación en México.* Revista Cuicuilco. 373-378.

3.- Blanco N., Lorenzo; Cárdenas L., J. (2013). *La resolución de problemas como contenido en el currículo de matemáticas de Primaria y de Secundaria.* Revista Campo Abierto. 137-156.

4.- Couoh L., Cinthya L. (2015). *Ansiedad y autoestima en escolares de educación primaria en Mérida, Yucatán.* Revista Enseñanza e investigación en psicología.

5.- Gálvez, G. (2011). *Estrategias cognitivas para el cálculo mental.* Revista Relime.

6.- Larrazolo, N., Backhof, E. (2013). *Habilidades del razonamiento matemático en estudiantes de nivel medio superior en México.* Revista Mexicana de Investigación Educativa. 1137-1163.

ISBN 978-84-945722-3-4

Páginas WEB.

1.- www.usa-el-coco.com

2.- www.aventuras-del-señor-pi.com

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-880

VIII CIBEM Madrid 2017 CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

10-14 de julio 2017.

Título de ponencia: **ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA POR EL PROFESORADO DE LOS BACHILLERATOS GENERALES (MATUTINO Y VESPERTINO) DEL B.I.N.E.**

Dra. en Educ. Blanca Estela Cortés Barradas. cbbe979@yahoo.com.mx

Institución que representa: Benemérito Instituto Normal del Estado. País: México.

M. M. E. B. José Antonio Cortés Barradas. acfractal0@gmail.com

Institución que representa: C. E. "José María Morelos y Pavón". País: México.

L.D.G. y L.A.P. Alejandro Ángeles Cortés. alecs_ans@hotmail.com

Institución que representa: Instituto Ramón López Velarde S. C. País: México.

Modalidad de Trabajo: **Comunicación Breve (CB).**

Nivel Educativo: **Bachillerato o Educación Media Superior.**

ISBN 978-84-945722-3-4

Núcleo Temático: **I.- Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.**

RESUMEN.

Los profesores de Matemáticas del Bachillerato General Matutino y Vespertino del Benemérito Instituto Normal del Estado (BINE), enfrentan cada día los problemas generales de nuestra compleja sociedad.

La enseñanza aprendizaje de la Matemática en el nivel Medio Superior o Bachillerato General, tiene diversas facetas como son las clases teóricas, las clases prácticas y las clases lúdicas. En este trabajo aplicamos un cuestionario en el que los maestros de ambos turnos, indican su parecer en cuanto a sus alumnos, sus habilidades, destrezas y en general del quehacer al enseñar matemática.

PALABRAS CLAVE: enseñanza, aprendizaje, matemática, bachillerato.

ABSTRACT.

Mathematics teachers of the Mathematical General and Evening High School of the Benemérito Normal State Institute (BINE) face every day the general problems of our complex society.

The teaching of Mathematics in the Higher or General Baccalaureate has several facets such as theoretical classes, practical classes and leisure classes. In this work we apply a questionnaire in which the teachers of both shifts, indicate their opinion as to their students, their skills, skills and in general of the task when teaching mathematics.

KEY WORDS: teaching, learning, mathematics, baccalaureate.

INTRODUCCIÓN.

Hace 50 años, los jóvenes estudiaban porque querían llegar a ser "alguien en la vida". En la actualidad, aquel deseo ha desaparecido y muchos de los niños y/o jóvenes, se pierden por vías de responsabilizarse por un nuevo ser, por casarse, por salir de la casa paterna/materna como salida rápida, para evitar ser violentados, para evitar prostituirse, para mantener relaciones con quienes quieran y/o porque en casa no tienen lo que necesitan para sobrevivir. México es una nación orgullosa por su pasado y afronta grandes retos en el presente. Uno de esos grandes retos se encuentra en la educación, cuyos enfoques van y vienen, unos mejores que otros, pero que cada ciclo escolar depende en esencia del docente, quien debe poseer un

ISBN 978-84-945722-3-4

amplio bagaje para integrar a la matemática como generadora del cambio educativo, que deberá hacer posible que con creatividad como menciona De Bono, Edward. (2016) y hechos reales, podrá permutar hacia el futuro.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Los estudiantes del nivel Bachillerato aprenden matemática de diversas formas: a través de las clases teóricas, las sesiones lúdicas y el trabajo del educador con el educando en asesorías y el continuo uso de los números en nuestra vida diaria, contribuyen a que los alumnos aprenden este idioma universal. Steve Lakin (2013), comenta que “Para darse cuenta del papel tan importante de las matemáticas en la vida diaria, basta observar la gran cantidad de situaciones cotidianas en las que se usan”, basta pensar en la compra semanal de alimentos, el pago de impuestos, las distancias que recorremos: ¡todo emplea matemática!. Aunque se supone que los estudiantes al ingresar al Bachillerato deben saber realizar las operaciones fundamentales, es este, otro de los momentos en los que los docentes, podemos emplear una didáctica de la matemática propia de Miguel de Guzmán (1992) y (2003), en donde la comunicación, argumentación e interpretación y la comprensión de procesos matemáticos debe ser la carta de presentación en la que se apoye el docente con las variables culturales y del sistema de producción.

METODOLOGÍA.

Empleamos el método de lo general a lo particular, desde el enfoque histórico-cultural que es base del proceso de enseñanza-aprendizaje (Talízina, N., 2001, 2009), que permite la creación de constructos básicos a través de una buena orientación por parte de los docentes. Empleamos este método porque permite la formación de constructos científicos, hace que la enseñanza sea más ágil y permite el desarrollo de contenido de la materia.

OBJETIVO PRINCIPAL.

Que los jóvenes del nivel Bachillerato General Matutino y Vespertino, aprecien la matemática a partir de lo mucho que le será útil, no sólo en su vida cotidiana, sino también, en su propia profesionalización.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.

¿Qué tanto saben, demuestran y practican la Matemática los Maestros del Bachillerato General Matutino y Vespertino?, ¿los alumnos les siguen el paso?, los Maestros ¿consideran que sus alumnos tienen las competencias para estar en este nivel educativo?

ISBN 978-84-945722-3-4

CONTENIDO.

La mayoría de nuestros estudiantes cursan el Bachillerato entre los 16 y18 años de edad; este lapso de edad es complicada por los cambios físicos; en cuanto a la familia, sabemos que la mayoría de nuestros alumnos transitan esta etapa casi completamente "Tristes y solos 8 de cada 10 jóvenes de bachillerato, e/consulta 5 de marzo 2014", debido en su mayoría a que padre y madre se encuentran trabajando. Muchas de estas familias se encuentran separadas o divorciadas o son madres solteras o padres solteros con los consecuentes problemas para los estudiantes quienes presentan diversas sintomatologías de soledad y abandono. Bernardo Marín García, comenta en el Prólogo de Desafíos Matemáticos, menciona: "…me apasionan la matemática y los acertijos de lógica. Me encantan y voy más allá: creo que al que no le gusten es porque no se ha puesto a ello, por pereza o por un trauma infantil provocado por alguna mala pedagogía".

En el caso de los compañeros del Bachillerato General Matutino y Vespertino, observamos cambios en los procesos matemáticos empleados, apertura al diálogo con los alumnos, comprensión de quien necesita más de nuestra ayuda es, precisamente, el estudiante atrasado académicamente. Gordon Stobart (2010), comenta que en el aprendizaje efectivo los aprendices deben: "Tener más claro lo que hay que aprender y cómo será lo que se consiga, reconocer lo que comprenden y lo que no en el presente y percatarse de la mejor manera de avanzar". Con los estudiantes del Bachillerato se utilizan diversas formas de trabajo: individual, colectivo, cooperativo, acercamiento de los alumnos adelantados, como "monitores" con quien necesite asesoría de otro compañero igual, con quién pueda expresar sus dudas y pueda corregir o reconstruir constructos que le permitan continuar al siguiente grado escolar. En este sentido, el maestro de matemática tiene que ser creativo, activo, actualizado en programas, saber su materia, es decir, ser un profesional de la educación que debe contar con un bagaje cultural científico, saber de abstracción, de argumentar, de interpretar, de pensamiento reflexivo y de razonamiento lógico que le permitan orientar a sus educandos. Para apreciar la creatividad en matemática, una de esas formas tiene, como dice Jiménez Vélez (2001): "Cuando lo que aparece como problema difícil para muchos, se hace de fácil resolución para otros sujetos, que clasificamos de creativos, posiblemente sobre la base de la originalidad como planteo y/o como resolución del problema".

ISBN 978-84-945722-3-4

La mayoría de los compañeros del Bachillerato General Matutino y Vespertino tienen muy claro el objetivo principal, que es apoyar a todos sus estudiantes cuando demuestran interés por la matemática. Ellos se han apartado de los métodos tradicionales, de la repetición, de la memorización y de la reproducción mecánica de trabajos por volumen.

Naoki Inaba (2016) menciona: “Junto al envejecimiento de la sociedad, ha ido surgiendo la necesidad de realizar actividades a diario que estimulen nuestro cerebro para mantener una buena salud mental…”, así, todo juego que desarrolle la creatividad y el pensamiento-razonamiento lógico es bienvenido en nuestras actividades.

Lamata Cotanda, Rafael (2013) dice: “Lo importante no son las técnicas y mecanismos, sino vivir la experiencia de una dinámica mental que podemos provocar en la dichosa vida real”.

Otro aspecto que se debe considerar son las materias que se están proponiendo como materias orientadoras de la vocación del estudiante. Estas materias están basadas en el área de medicina, contaduría, educación y derecho; cualquiera de las anteriores, son carreras que están saturadas. Estas materias, deberían proponer carreras que no estén saturadas y que estén relacionadas con la matemática, debido a que no existen carreras desligadas de la misma.

María García Amilburu (2012) menciona que: “La educación es un proceso cuyos resultados no se logran sin esfuerzos”. Algunos de los estudiantes ya son padres de uno o de varios niños, recargando aún más, el peso hacia la casa materna o paterna, pues aunque trabajen como mandiles, empleado de mostrador o como mesero, el salario es bajo y no alcanza para tener su propia casa, educar a sus hijos y terminar el Bachillerato. En esta parte coincidimos con Eduardo Weiss (2012) “En el contexto actual, los jóvenes viven, por un lado, una mayor exclusión, sobre todo en el ámbito laboral…” Lo anterior es muy cierto, ¿por qué se van a educación?, ¿por qué la mayoría de nuestros egresados de Bachillerato optan por el área de educación y no a ingenierías?, porque la mayoría de estos jóvenes son hijos de profesores que esperarían heredar la plaza de los padres y porque la carrera hasta antes de las Reformas Estructurales del actual sexenio, ofrecía la estabilidad laboral y por otro lado, con la carrera de medicina, se tiene la idea de que es una profesión urbana, que construye estabilidad laboral y que permite hacer dinero en poco tiempo. Entendemos que los estudiantes quieran realizar estudios superiores, ya que “En los sectores populares, urbanos, rural-urbanos e indígenas, uno de los motivos más fuertes para estudiar es superar la condición social y económica: “tener una mejor vida”, según Eduardo Weiss (2012). Siempre hemos creído que la respuesta

ISBN 978-84-945722-3-4

está en la educación que se le brinde a un pueblo para cambiar las adversidades que pueda tener. Actualmente, esto no sólo toma el aspecto de querer estudiar, sino también el de poder, es decir, el económico, aunado a los conocimientos solicitados, habilidades, destrezas, competencia matemática que deberán presentar y otras tantas, que deberán desarrollar a lo largo, primero del Bachillerato y después, en su profesión.

Finalmente, aplicamos el cuestionario que aparece en el anexo y obtuvimos los siguientes resultados:

1.- En las respuestas 1 y 2, observamos que los maestros mencionan tener la habilidad y destreza para desempeñarse en sus clases, pero, existen alumnos de bajas calificaciones en matemática. En las respuestas 3 y 4, indican la importancia de la resolución de problemas y el llegar a un resultado, aunque, existan alumnos que no entienden una parte o todo el proceso matemático aplicado en dichas soluciones de problemas.

2.- En las preguntas 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15, las respuestas dejan ver el poco interés de los estudiantes por aprender matemática, las figuras geométricas, conversión de unidades, operaciones con fracciones, operaciones mentales, las representaciones gráficas y su significado, poseen pocas habilidades y conocimientos matemáticos, no saben orientarse en espacios abiertos, poco les interesan las funciones trigonométricas, las unidades elevadas al cuadrado o al cubo.

3.- En las preguntas 16, 17 y 18, las respuestas en cuanto a impartición de la matemática, la mayoría dice que está bien, en desarrollo de la competencia lectura y escritura para matemática la mitad indicó que no y la otra mitad indica regular. En el desarrollo del arte, la creatividad y el aprecio de la cultura, dos maestros indican que no y 4 que lo intentan. Creemos que aquí es donde se encuentra la esencia, porque si los docentes en la actualidad se conforman solo con transmitir el conocimiento, corriendo por el número de temas que se tienen en el programa, tienen pocos resultados favorables. Por esta misma razón decimos que el docente de matemática debe tener un amplio conocimiento de la materia relacionada transversalmente con todas las otras asignaturas de cada semestre, además de implementar estrategias que permitan el interés de los alumnos, así como un aprendizaje significativo.

4.- En las preguntas 19 y 20 se les pregunta a los docentes si sus alumnos saben trabajar en equipo, si tienen la capacidad de liderazgo, si emplean el pensamiento hipotético lógico para resolver problemas sencillos y complejos, la mayoría contestó que en forma regular.

ISBN 978-84-945722-3-4

CONCLUSIONES.

1.- En el proceso de enseñanza-aprendizaje, el método de lo general a lo particular, apoyado en la enseñanza histórico-cultural de L. S. Vigotsky (1984), menciona que el desarrollo educativo depende de la enseñanza que se le proporcione a los estudiantes.

2.- Coincidimos en que se necesita crear o desarrollar a lo largo de los 3 años del Bachillerato, algunas capacidades, tales como una comprensión lectora para que puedan los estudiantes comprender lo que se les está solicitando en los exámenes escritos.

3.- Convenimos en que los estudiantes no tienen las competencias matemáticas, es decir, que son pocos los que utilizan razonamiento lógico, interpretación de información para crear nueva información y resolución de problemas o toma de decisiones en situaciones cotidianas.

4.- Concordamos en que los alumnos tienen un desconocimiento operacional, debido a que no saben cuándo sumar, restar, multiplicar o dividir; en este sentido, el regresar a operaciones fundamentales, implica que tengan muchos de los maestros que proporcionar cursos propedéuticos y/o atrasarse con el programa del semestre.

5.- Creemos que los alumnos no han alcanzado en su mayoría, una alfabetización numérica, es decir, que no saben qué significan, cómo se utilizan y para qué sirven los números. Esta es una de las partes más importantes a desarrollar por los maestros.

6.- Opinamos que se tienen que seguir revisando y/o actualizando los Programas de Matemáticas proporcionados por la SEP Puebla.

7.- Se propone crear un Proyecto Institucional que pueda incidir en el área de Matemáticas, considerando los perfiles de ingreso y egreso a los diferentes niveles educativos que existen en nuestra Institución.

8.- Consideramos que debe existir mayor compromiso de los maestros de Matemática para desarrollar en sus alumnos las capacidades, habilidades y destrezas que los transformen en apreciadores de todos los beneficios que la matemática brinda.

9.- El éxito o fracaso del alumnado en la materia de matemática, se debe en buena parte al tipo de método empleado para desarrollar las clases, siendo el método de lo general a lo particular, una metodología que exige al docente que se apropie del mismo, que se prepare, actualice, que tenga amplio conocimiento de las materias y su interrelación transversal.

BIBLIOGRAFÍA.

ISBN 978-84-945722-3-4

1.- García Amilburu, María et autre. (2012). *Filosofía de la educación*. Capítulo 3: conceptualización y ámbitos del proceso educativo. p. 54. Editorial Narcea. España.

2.- De Bono, Edward. (2016). *Creatividad.* Segunda reimpresión para México. Booket.

3.- De Guzmán Ozámiz. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática.* UCM. 2. Situación actual de cambio en la didáctica de la matemática. España.

4.- De Guzmán Ozámiz, Miguel. (2003) *Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas.* Edit. Anaya. España.

5.- Inaba, Naoki et autre. (2016). *Rompecabezas lógicos de áreas MENSEKI MEIRO.* Edición en castellano, p. 2. Editorial Hispano Europea, S. A. España.

6.- Jiménez Vélez, Carlos Alberto. (2001). *Lúdica y creatividad.* Colección Aula Alegre. Cooperativa Editorial Magisterio, p. 144. Colombia.

7.- Lakin, Steve. (2013). *Cómo mejorar tus habilidades matemáticas*. Cap. 1: Aritmética básica y la regla PEDMAS, p. 19.México.

8.- Lamata Cotanda, Rafael. (2013). *La Actitud Creativa.* 6. Epílogo: vuelta a la vida cotidiana, pp. 219-220. España.

9.- Quirós, Adolfo Coord. (2012). *Desafíos Matemáticos propuestos por la Real Sociedad Matemática Española en su centenario.* Prólogo, p. 8. España.

10.- Rico Romero y otro. 2008. Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Alianza Editorial. España.

11.- Stobart, Gordon. (2010). *Tiempos de pruebas: los usos y abusos de la evaluación.* Capítulo VII: Razones para alegrarse: la evaluación para el aprendizaje, p. 179, Morata, España.

12.- Tilízina, N. et autres. (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático.* Universidad Autónoma de San Luís Potosí, México.

13.- Tilízina, N. et autres. (2009). *Teoría de la actividad aplicada a la enseñanza.* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

14.- Valiente Barderas, Santiago. (2000). *Didáctica de la matemática. El libro de los recursos.* Capítulo II. Enfoque. Las formas para orientar, p. 25. España.

15.- Weiss, Eduardo et al. (2012). *Jóvenes y Bachillerato*. ANUIES, p. 9.México.

ISBN 978-84-945722-3-4

16.- Weiss, Eduardo (2012). *La educación media superior en México ante el reto desu-universalización*. México, p. 8, Dossier. Archivos de Ciencias de la Educación, Año 6, Nº 6, 4º Época, 2012. ISSN 2346-8866.

PÁGINA WEB: www.e-consulta/tristes-y-solos-8-de-cada-10-jóvenes-de-bachillerato. 5 de marzo de 2014.

Tratamiento didáctico-metodológico de la enseñanza matemática para nivel Bachillerato.

Creemos que una de las mejores formas de enseñanza didáctico-metodológico es a través de la resolución de problemas, debido a que, la resolución de problemas requiere que el(a) profesor(a), comprenda cada problema que está planteando a sus educandos, que haya experimentado el asombro-gozo por encontrar uno o varios resultados, que contagie a sus estudiantes por enseñarles que la matemática no muerde y sí, nos cura de la ignorancia. Consideramos que en la medida en la que nuestros discípulos nos van conociendo, se dan cuenta de que somos ordenados, disciplinados y que la constancia es nuestra gran amiga para realizar los trabajos que, individual o en equipo, podrán solucionar, si están dispuestos a prestar atención, a concentrar sus sentidos y a verter sus conocimientos en una hoja en blanco. Entendemos que se puede pensar que fantaseamos con el hecho de que nuestros alumnos vean siempre el lado positivo de las cosas y queremos que ellos, nuestro producto intelectual, sean siempre mejores que nosotros mismos. Sabemos que estos momentos, no son precisamente como cuando nos iniciamos hace más de veinte años atrás y que las condiciones han cambiado, que los estudiantes, ya no quieren pensar, que quieren todo "digerido", sin embargo, creemos que aunque estemos trabajando solo con la mitad del salón o una tercera parte de alumnos e incluso con un solo estudiante que tenga necesidad de saber, aún podemos hacer bastante por ellos: podemos interesarlos en algo que a ellos les guste y ver cómo lo adaptamos para aplicarle matemáticas. Recuerdo el caso de un alumno que tocaba el violín en la Orquesta Esperanza Azteca, que él me indicaba que no le interesaba ninguna materia, pues él ya tenía asegurado su lugar y hasta su trabajo futuro. Le comenté que todo es relativo y que si no aprendía matemáticas y las otras materias, no aprendería a llevar el ritmo y le costaría mucho la subdivisión de las notas musicales. Cuando pudo aplicar las fracciones a las notas musicales, llevó su violín y nos mostró como había entendido las fracciones en las mismas notas musicales, se interesó más por la materia, la aprobó y creo que contribuimos

ISBN 978-84-945722-3-4

en un pequeño granito de arena para su vida. Al igual que este caso, tenemos varios exalumnos que en este momento son doctores en química, una doctora en física, un doctor en matemática educativa, varias médicas; quien lo viera diría: uno(a) de 60 alumnos. Aunque así fuera, creemos que vale la pena seguir interesando a los alumnos en lo que les gusta y si esto tiene que ver con matemática, ¡mejor!

BENEMÉRITO INSTITUTO NORMAL DEL ESTADO
"GRAL. JUAN CRISÓSTOMO BONILLA".
DIRECCIÓN GENERAL DEL B.I.N.E.
DRA. EN EDUC. BLANCA ESTELA CORTÉS BARRADAS, MTRO. J. ANTONIO CORTÉS BARRADAS.

Cuestionario para Mtras(os). de Matemáticas de Bachillerato EMS.

Pondera de acuerdo a la siguiente escala, cada uno de los aspectos. En cada habilidad y destreza marque el número que corresponda con su(tu) opinión:

1. Nada relevante. 2. Poco relevante. 3. Relevante. 4. Muy relevante.

Habilidades y destreza matemática.	Estimación/Ponderación.			
	1	2	3	4
1.- ¿Qué tanta destreza tiene usted, en la enseñanza de la matemática?				
2.- ¿Qué tan hábil es en la enseñanza?				
3.- En la resolución de problemas, ¿Qué tan importante es que los alumnos entiendan una secuencia lógica?				
4.- En la resolución de problemas, ¿qué tan importante es que el alumno llegue al resultado?				
5.- Como Mtra(o). de Matemáticas, ¿existe interés en los alumnos por aprenderla?				
6.- Usted, ¿sabe trazar figuras geométricas?				
7.- ¿Sabe realizar conversión de unidades?				
8.- ¿Sabe realizar operaciones con fracciones?				
9.- ¿Sabe realizar operaciones mentales?				
10.- ¿Les ha enseñado el lenguaje gráfico y su significado?				
11.- Los estudiantes que atiende en este momento, ¿poseen las habilidades y conocimientos requeridos para la matemática?				
12.- ¿Saben sus alumnos orientarse en un espacio abierto de acuerdo con coordenadas?				
13.- ¿Conocen sus estudiantes las figuras geométricas?				
14.- ¿Qué tanto saben sus alumnos las funciones trigonométricas?				
15.- ¿Saben sus alumnos trabajar unidades elevadas al cuadrado y/o al cubo?				
16.- En la actualidad, ¿Qué tan adecuada es la forma de impartición de la matemática?				

ISBN 978-84-945722-3-4

17.- ¿Ha logrado desarrollar competencia lectora y la escritura en matemáticas?			
18.- ¿Ha desarrollado el arte, la creatividad y aprecio de la cultura por medio de la matemática?			
19.- Sus estudiantes, ¿saben trabajar en equipo y tienen capacidad de liderazgo?			
20.- Sus estudiantes, ¿emplean pensamiento hipotético, lógico para formular y resolver problemas cotidianos y complejos?			

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-881

UMA NOVA CATEGORIZAÇÃO PARA AS INTERPRETAÇÕES DE DIVISÃO DE FRAÇÕES

Jeferson Gomes Moriel Junior
jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br
Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), Brasil

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidade: Comunicação Breve (CB)
Nível educativo: Educación primária
Palavras-chave: MTSK divisão de frações, Interpretações, Problemas, Categorização.

Resumo
O objetivo deste trabalho é analisar as diferentes categorizações de interpretações atribuídas à divisão de frações visando identificar características-chave dos problemas associados, por meio dos quais se pode explorar algoritmos da operação. Apresentamos aqui parte dos resultados de uma meta-análise qualitativa sobre o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) da divisão de frações envolvendo um corpus *de 58 estudos sobre conhecimento para o ensino deste conteúdo, no qual realizamos leituras sucessivas e análise de conteúdo que culminaram na emergência de seis características-chave de problemas de divisão de frações. Tais resultados configuram uma caracterização que distingue as interpretações não apenas pelo significado da operação involucrado, mas também pelos tipos de grandezas envolvidas nos problemas, sua quantidade e modo como elas se relacionam, aspectos estes essenciais, mas ausentes na maioria das categorizações revisadas. As novas categorias aqui emergentes unificam as contribuições da literatura e acreditamos que elas permitem avançar em termos de funcionalidade nas atividades de classificar e criar problemas para o ensino de divisão de frações. Algo relevante considerando que as investigações sobre o conhecimento docente evidenciam dificuldades dos sujeitos em elaborar problemas ou associar algum contexto a uma expressão dada.*

Introdução

As interpretações da divisão de frações são os diferentes tipos de problemas e modelos instrucionais que podem ser categorizados como situações de divisão de frações, nas quais se pode explorar os algoritmos desta operação (Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002). Elas surgem por extensão, mas sem se limitar, às três interpretações de divisão de números inteiros: partição (determinar o tamanho de cada grupo), medida (determinar a quantidade de grupos) e inverso do produto cartesiano (determinar uma das dimensões de uma figura retangular). Embora sua quantidade varie consideravelmente na literatura, é comum que (futuros) professores conheçam e utilizem apenas uma ou duas delas (Ball, 1990; Isiksal & Cakiroglu, 2007; Kribs-Zaleta, 2006; Lo & Luo, 2012; Lubinski, Fox, & Thomason, 1998; Tirosh, 2000). Investigações sobre o conhecimento docente relacionado a problemas de divisão de frações evidenciam dificuldade dos sujeitos em elaborar ou associar um contexto a uma expressão dada, de modo que isto não parece melhorar por si só ao longo da carreira (Chinnappan & Desplat, 2012; García, 2013; Lo & Luo, 2012; Nillas, 2003; Özel, 2013; Redmond, 2009; Sharon & Swarthout, 2014). Esta limitação no conhecimento especializado para ensinar divisão de frações (Carrillo et al., 2014; Moriel Junior, 2014), pode dificultar que sejam proporcionadas situações didáticas ricas aos alunos para a construção profunda do significado do conceito. Este cenário sugere a necessidade de aprimorar a preparação docente e nos parece importante esforços para tornar o instrumental conceitual formativo mais funcional. Por isso, estabelecemos como objetivo deste trabalho analisar as diferentes categorizações (incluindo nomenclaturas, descrições e exemplos) de interpretações atribuídas à divisão de frações visando identificar características-chave dos problemas associados.

Metodologia

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica, de cunho analítico-descritivo, que visa aprofundar parte dos resultados de uma meta-análise qualitativa (Bicudo, 2014; Fiorentini & Lorenzato, 2006) sobre o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática da divisão de frações (Moriel Junior, 2014), cuja busca por artigos foi realizada em seis bancos de dados (JSTOR, ERIC, Banco de Teses da CAPES, SciELO, Base de dados da Revista do Professor de Matemática e no Google Scholar) usando palavras-chave sobre o tema de interesse (*conhecimento docente sobre divisão de frações*) que resultou num *corpus* de 58 estudos. Dentre eles, oito foram selecionados como fonte de dados deste artigo por abordarem especificamente as interpretações da divisão de frações, também encontradas sob a denominação de estrutura ou classificação de problemas, sentidos de uso ou modelos semânticos (Contreras, 2012).

A análise dos dados ocorreu por meio da análise de conteúdo, incluindo leituras sucessivas do material selecionado incluindo exploratória, seletiva e interpretativa (Salvador, 1986) e

ISBN 978-84-945722-3-4

realização de comparações sistemáticas que permitiram identificar similaridades e distinções entre os trabalhos no que diz respeito aos seguintes focos: nomenclaturas das interpretações, descrições de cada interpretação, tipos de grandezas envolvidas nos problemas associados, sua quantidade e como elas se relacionam. Entendemos uma grandeza como sendo o valor numérico associado a uma unidade de medida que é usado para caracterizar um objeto.
Esta abordagem resultou na emergência de características-chave de problemas associados às interpretações da divisão de frações presentes na literatura revisada.

Resultados

Quanto à nomenclatura, identificamos nos trabalhos uma variedade considerável de terminologias, totalizando 20 distintas. A análise de cada uma juntamente com as respectivas descrições, significados e exemplos, nos permitiu agrupar as interpretações da divisão de frações em torno de seis características-chave que contemplam os *tipos de grandezas* envolvidas nos problemas associados, sua *quantidade* e *como se relacionam*, algo não explícito na maioria das nomenclaturas revisadas, conforme Quadro 1. A seguir, apresentamos os elementos que justificam cada uma das características-chave de problemas de divisão de frações, construídas a partir das interpretações analisadas.

Quadro 1. Característica-chave de problemas de divisão de frações e respectiva equivalência entre nomenclaturas das interpretações de divisão de frações

NOMENCLATURAS EQUIVALENTES DAS INTERPRETAÇÕES	CARACTERÍSTICA-CHAVE
Partição[1]; Partição com foco em compartilhar ou dividir igualmente[2]; Compartilhamento[3]	1. Distribuição por inteiros
Medida, cotição ou subtração repetida[4]; Empacotamento[5]; Divisão medição por comparação[6]	2. Comparação em uma grandeza
Inverso da multiplicação[7]; Razão unitária[8]; Inversão do fator multiplicativo[9]; Divisão partição por comparação[10]	3. Transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional
Proporção de valor unitário conhecido[11]; Divisão medição equitativa[12]	4. Proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido
Determinação da razão unitária[13]; Divisão partição equitativa[14]; Proporção de valor unitário desconhecido[15]	5. Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido
Divisão como inverso do produto cartesiano[16]; Divisão de área retangular[17]; Produto e fatores[18]; Inverso do produto	6. Um fator desconhecido de um produto (área retangular)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

NOMENCLATURAS EQUIVALENTES DAS INTERPRETAÇÕES	CARACTERÍSTICA-CHAVE
cartesiano (área)[19]; Inversão da multiplicação (ou fator perdido)[20]	

Fonte: Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* analisado.
Notas. 1 (Contreras, 2012; Olanoff, 2011; Özel, 2013). 2 (Nillas, 2003; Sinicrope et al., 2002). 3 (Puritz, 2005). 4 (Contreras, 2012; Nillas, 2003; Olanoff, 2011; Özel, 2013; Sinicrope et al., 2002). 5 (Puritz, 2005). 6 (Lo & Luo, 2012). 7 (Sinicrope et al., 2002), 8 (Nillas, 2003). 9 (Contreras, 2012). 10 (Lo & Luo, 2012). 11 (Contreras, 2012). 12 (Lo & Luo, 2012). 13 (Sinicrope et al., 2002). 14 (Lo & Luo, 2012). 15 (Contreras, 2012). 16 (Sinicrope et al., 2002). 17 (Lo & Luo, 2012). 18 (Ma, 1999; Olanoff, 2011). 19 (Nillas, 2003). 20 (Contreras, 2012).

A primeira característica-chave foi intitulada de distribuição por inteiros por dizer respeito à interpretação da divisão de frações como *distribuição* de valor fracionário entre inteiros, ou seja, em determinar o tamanho de cada uma das partes quando se sabe o número (inteiro) de partes. A segunda foi nomeada de comparação em uma grandeza por tratar de *comparar* dois valores de uma mesma unidade de medida escolhendo uma delas para ser a unidade de referência, o resultado indicará quanto o dividendo contém tal unidade (o divisor), podendo ser fração própria ou imprópria. Quando o dividendo é maior que o divisor a solução pode ser também por subtração repetida (Olanoff, 2011) ou adição repetida (Nillas, 2003). A terceira, transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional, diz respeito à *transformação* de uma grandeza dada pela medida A (ou pelo valor de uma parte de um todo) sabendo a razão adimensional A/B entre a medida A e uma medida B (ou entre os valores da parte e do todo) para obter o valor da medida B (ou do todo) na mesma unidade de A. Isto se traduz em "fazer o dividendo tantas vezes menor quanto indica o numerador do divisor e tantas vezes maior quanto indica o denominador do divisor" (Contreras, 2012, p.84, tradução nossa). A ideia de operador é um fundamento desta interpretação, mas ela se diferencia de problemas de multiplicação porque nestes a razão dada é B/A (ou do todo pela parte) ao invés de ser A/B. A quarta, proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido, se justifica por consistir no cálculo da *proporção* entre duas grandezas diferentes sendo uma delas o valor unitário entre as grandezas. Cabe determinar uma quantidade (Q) de uma grandeza associada a uma quantidade dada (D) de outra grandeza quando se conhece o valor unitário da segunda em relação à primeira ($\frac{d}{1}$). A quinta, proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido, diz respeito ao uso da *proporção* entre duas grandezas diferentes como meio de determinar o valor unitário *desconhecido* de uma em relação a outra.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Trata-se de encontrar o valor unitário (Q) a partir da relação entre duas quantidades de duas grandezas distintas ($\frac{D}{d}$). Problemas que envolvam o cálculo de velocidade, densidade ou preço unitário são exemplos deste modelo. A sexta, um fator desconhecido de um produto (área retangular), é muito associada a problemas de área retangular, pois consiste em calcular um *fator* desconhecido de um produto entre dois fatores, ou seja, obter uma das medidas (m) quando se conhece a outra (M) e o produto delas ($P = m.M$).

A análise dos problemas presentes nos trabalhos revisados nos permitiu elaborar exemplos associados a cada característica-chave (cf. Quadro 2). Além disso, constatamos que um mesmo contexto (por exemplo, envolvendo divisão e farinha) pode gerar a redação de diferentes problemas e, consequentemente, enfatizar interpretações distintas da divisão de frações (como se vê nas características-chave 2 e 4 do Quadro a seguir). Para reforçar a diferença entre interpretações e a exaustividade das categorias, complementamos a descrição anterior com a análise das unidades envolvidas nos respectivos problemas (cf. última coluna do Quadro 2), permitindo assim melhor compreender a natureza dos mesmos (Flores, 2008).

Quadro 2. Interpretações para divisão de frações, exemplos de problemas associados e soluções

CARACTERÍSTICA-CHAVE	EXEMPLOS DE PROBLEMAS ASSOCIADOS	SOLUÇÃO [UNIDADE]	ANÁLISE DE UNIDADES
1. Distribuição por inteiros	- Se $\frac{3}{7}$ de um bolo foi repartido entre 5 crianças, quanto do bolo terá cada uma delas? - Repartir $\frac{3}{7}$ de um saco de balas entre 5 crianças.	$\frac{3}{7} \div 5$ [do bolo] [do saco]	Dividendo e quociente tem mesma unidade, divisor inteiro
2. Comparação em uma grandeza	- Quantas vezes $\frac{1}{4}$ kg de farinha cabe em $5\frac{1}{2}$ kg de farinha? - Hoje me exercitei $\frac{1}{4}$ de hora e ontem $1\frac{1}{2}$ hora. Quantas vezes me exercitei hoje comparado a ontem?	$5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ [vezes] $\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{2}$ [vezes]	Dividendo e divisor tem mesma unidade
3. Transformação de uma grandeza dada uma razão adimensional (A em B dado A/B)	- Qual é o tamanho original de um elástico que esticado mede 1½ m, sabendo que ele pode ser esticado até $4\frac{1}{4}$ vezes seu tamanho? - João correu $1\frac{1}{2}$ km ontem e isto é $\frac{3}{8}$ da sua meta, assim sendo, quantos quilômetros ele planeja correr?	$1\frac{1}{2} \div 4\frac{1}{4}$ [metro] $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{8}$ [km]	Dividendo e quociente tem mesma unidade, divisor é razão adimensional

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CARACTERÍSTICA-CHAVE	EXEMPLOS DE PROBLEMAS ASSOCIADOS	SOLUÇÃO [UNIDADE]	ANÁLISE DE UNIDADES
4. Proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido	- Quantos pacotes eu posso fazer usando $5\frac{1}{2}$ kg de farinha sabendo que cabe $\frac{1}{4}$ kg em um pacote? - Quanto tempo um barco demora para percorrer 5½ km indo a 7 ½ km por hora?	$5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ [pacotes] $5\frac{1}{2} \div 7\frac{1}{2}$ [hora]	Todas unidades são diferentes, divisor é valor unitário entre duas unidades
5. Proporção entre duas grandezas em busca do valor unitário desconhecido	- Quantos quilômetros o carro percorre com 1 tanque de combustível, em se $10\frac{1}{2}$ km ele usa $\frac{3}{4}$ de tanque? - Quantos centímetros mede uma polegada, sabendo que $2\frac{1}{2}$ polegadas medem aproximadamente $6\frac{1}{3}$ cm?	$10\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ [km por tanque] $6\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{2}$ [cm por pol.]	Todas unidades são diferentes, quociente é valor unitário entre as unidades
6. Um fator desconhecido de um produto (área retangular)	- Se a área de um retângulo tem $3\frac{3}{4}$ m² e sua largura $1\frac{1}{2}$ m, qual é seu comprimento? - Sete metros de arame são suficientes para cercar a horta retangular de largura $1\frac{1}{2}$ metros e área $3\frac{3}{4}$ m²?	$3\frac{3}{4} \div 1\frac{1}{2}$ [metro]	Dividendo e quociente tem unidades diferentes

Fonte: Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* de estudos revisado.

Analisando os problemas do contexto envolvendo divisão e farinha, apresentados nas características-chave 2 e 4 do quadro anterior, percebemos que embora suas redações sejam parecidas e sejam resolvidos pela a mesma divisão de frações ($5\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$), a análise das unidades envolvidas mostra que eles tem naturezas e significados diferentes. Isto porque o problema 'quantas vezes $\frac{1}{4}$ kg de farinha cabe em $5\frac{1}{2}$ kg de farinha?' trata da *comparação em uma grandeza* e possui unidades diferentes no dividendo (kg de farinha) e no quociente (quantidade de vezes). Enquanto que o problema 'quantos pacotes eu posso fazer usando $5\frac{1}{2}$ kg de farinha sabendo que cabe $\frac{1}{4}$ kg em um pacote?' trata de *proporção entre duas grandezas com um valor unitário conhecido* tendo todas as unidades diferentes entre si, sendo que a do divisor (kg/pacote) é o valor unitário dado em função das unidades do dividendo (kg) e do quociente (pacote). Outro exemplo de redações diferentes ocorre em contexto de alargamento de elástico, contemplando a *transformação em uma grandeza dada uma razão adimensional* (cf. quadro

ISBN 978-84-945722-3-4

anterior) e a *comparação em uma grandeza*: "Um elástico medindo $\frac{1}{4}$ metro pode esticar até $1\frac{1}{2}$ m. Qual é o fator de alargamento?" (Flores, 2008, p. 3, tradução nossa).

Conclusões

A análise da variedade de nomenclaturas e descrições das interpretações encontradas no *corpus*, nos levou a agrupa-las em torno de características-chave que as distinguissem não apenas pelo significado da divisão com frações involucrado, mas também considerando os tipos, a quantidade de grandezas envolvidas nos problemas e como se relacionam. Estes aspectos considerados essenciais (Flores, 2008; Piel & Green, 1994) não estão explícitos na maioria das *nomenclaturas* revisadas, embora tenham sido descritos (ora mais, ora menos detalhados) no interior dos trabalhos. Ao trazermos os elementos definidores das interpretações para a terminologia de cada categoria, configuramos *seis características-chave de problemas de divisão de frações*, as quais acompanhadas de exemplos e da análise das unidades envolvidas nos problemas fornecem uma categorização que para além de unificar as contribuições de estudos anteriores, possibilita avançar em termos de funcionalidade nas atividades de classificar e criar problemas para o ensino de divisão de frações. Isto porque o nome de cada categoria explicita não só o significado ou ação da divisão de frações (distribuição, comparação, transformação, proporção ou busca de um fator), como também indica os *tipos de grandezas* envolvidas nos problemas associados, sua *quantidade*, *como se relacionam*, incluindo a análise das unidades do divisor, do dividendo e do quociente.

Os resultados deste trabalho mostram que para elaborar um problema de divisão de frações é preciso ter conhecimento especializado para criar um contexto que tenha uma única grandeza, cujo problema será a comparação entre duas quantidades dela, ou então que tenha duas grandezas sendo uma quantidade fracionária e a outra podendo ser: (a) um inteiro, resultando em problemas de distribuição; (b) uma razão adimensional resultando em um problema de transformação; (c) um valor unitário entre as grandezas, resultando num problema de proporção; (d) uma fração com unidade diferente da primeira, resultando em um problema de proporção (para achar o valor unitário); (e) uma fração com unidade derivada da primeira (como metros e metros quadrados), resultando em um problema sobre

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

o fator de um produto ou área retangular. Tal compreensão parece ser relevante considerando que as investigações sobre o conhecimento docente relacionado a problemas evidenciam dificuldades dos sujeitos em criá-los (Chinnappan & Desplat, 2012; García, 2013; Nillas, 2003; Özel, 2013; Redmond, 2009; Sharon & Swarthout, 2014).

Estudos teórico-empíricos posteriores serão realizados para aprofundar a compreensão do alcance das contribuições do uso desta categorização em atividades de formação docente (como elaboração de problemas/contextos para uma dada expressão, classificação de problemas já existentes, associação entre os problemas gerados em cada categoria e algoritmos associados), bem como, investigar seu impacto na construção de conhecimento especializado para ensinar divisão de frações por meio da metodologia da resolução de problemas.

Referências

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 132-144.

Bicudo, M. A. V. (2014). Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática, 9*, 7-20.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D., & Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Chinnappan, M., & Desplat, B. (2012). Contextualisation of Fractions: Teachers' Pedagogical and Mathematical Content Knowledge for Teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *35*(1), 43-59.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones: un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.* (Doutorado), Universidad de Valencia, Valencia.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, *25*(70), 27-40.

García, A. I. M. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones.* (Máster), Universidad de Granada, Granada.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2007). Pre-service teachers’ representations of division of fractions. In D. P. Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1916-1924). Cyprus: European Research in Mathematics Education V.

Kribs-Zaleta, C. (2006). Invented strategies for division of fractions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of*

ISBN 978-84-945722-3-4

Mathematics Education (Vol. 2, pp. 371-376). Meridia, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 481-500.
Lubinski, C. A., Fox, T., & Thomason, R. (1998). Learning to Make Sense of Division of Fractions: One K–8 Preservice Teacher's Perspective. *School Science and Mathematics, 98*(5), 247-259.
Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*: Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ.
Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações.* (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática Tese), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.
Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The Mathematics Educator, 7*(2), 96-113.
Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions.* (PhD), Syracuse University, NY.
Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions. *Anthropologist, 16*(1-2), 1-5.
Piel, J. A., & Green, M. (1994). De-Mystifying Division of Fractions: The Convergence of Quantitative and Referential Meaning. *Focus on learning problems in mathematics, 14*(1), 44-50.
Puritz, C. (2005). Dividing by Small Numbers—and Why Not by 0? *Mathematics in School, 34*(5), 2-4.
Redmond, A. (2009). *Prospective Elementary Teachers' Division of Fractions Understanding: A Mixed Methods Study.* (Doctor of Philosophy Thesis), University of Phoenix, Stillwater.
Salvador, A. D. (1986). *Métodos e técnicas de pesquisa bibliográfica*. Porto Alegre: Sulina.
Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2014). Evaluating instruction for developing conceptual understanding of fraction division. In G. T. Matney & S. M. Che (Eds.), *Proceedings of the 41th Annual Meeting of the Research Council on Mathematics Learning* (pp. 97-104). San Antonio: RCML.
Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). Reston: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5-25.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-883

EXPERIÊNCIAS VIVENCIADAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM INÍCIO DE CARREIRA

César Cristiano Belmar - Sídnei de Jesus Bressan - Amari Goulart
cesarcbelmar@gmail.com - sd-bressan@bol.com.br - moivre2@yahoo.com.br
IFMT/Brasil – Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso/Brasil – IFSP/Brasil

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Iniciação à Docência. Professores de Matemática. Desafios.

Resumo

A iniciação à docência caracteriza-se por ser um período de múltiplas descobertas para o professor. É quando o docente se depara com as situações concretas da sua profissão e busca, de diversas formas, possíveis soluções para "sobreviver" nesse ambiente. Tal período é apontado por diversas pesquisas como repleto de medos, incertezas, dilemas e desafios, mas também de desenvolvimento profissional, descobertas e satisfações. Este estudo investigou as implicações na carreira do professor de matemática da educação básica em início de carreira. Para tanto foi realizado um estudo com sete professores que lecionam matemática nos Ensinos Fundamental e Médio no município de Juína/MT/Brasil. Os dados foram coletados por intermédio de questionários semiestruturados. Os resultados apontam que o professor iniciante sente-se confuso e tem dúvidas sobre como posicionar-se diante dos desafios apresentados. Na tentativa de superá-los, busca o apoio dos profesores mais experientes, contudo, geralmente não é atendido. Apesar disso, alguns professores afirmaram ter recebido apoio da escola e, com isso, aprenderam e desenvolveram novos métodos de ensino. Em relação aos primeiros contatos com os alunos, os sujeitos investigados afirmaram ter ocorrido de forma harmoniosa.

1. Introdução

Os primeiros anos da docência são ricos em experiências, descobertas, desafios e aprendizagens para o professor. É nesse período que ele se depara com a realidade do ambiente escolar e, a partir daí, vai construindo suas certezas relacionadas à docência.

No Brasil, ainda é pouco expressivo o quantitativo de pesquisas relacionadas aos primeiros anos da docência, sobretudo em relação ao estudo dos anseios do professor da disciplina de matemática.

Neste estudo, nos interessa a iniciação à docência na educação básica, com ênfase nos principais dilemas e/ou dificuldades enfrentadas pelos professores de Matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

2. A iniciação à docência: desafios e descobertas

O início da carreira docente caracteriza-se por ser um período de múltiplas descobertas para o professor. É chegado o momento de encarar a concretude da sua profissão (ambiente escolar, alunos, coordenação, direção, demais professores, pais, etc.).

Veenman (1984) afirma que esse período é marcado por um processo de aprendizagem baseado, na maioria das vezes, no ensaio e erro. O professor busca superar os desafios e as dificuldades enfrentadas numa realidade escolar muito diferente daquela imaginada antes do ingresso na profissão. O autor denomina tal período de "choque da realidade", conceito que traduz o impacto sofrido pelo professor quando inicia a profissão. Indica o rompimento entre os ideais construídos durante a graduação e a realidade vivenciada no cotidiano da sala de aula. Trata-se de um processo complexo e prolongado de ajustamento do pensamento e ação à nova situação que se apresenta.

De acordo com Veenman (1984), o choque com a realidade escolar pode ser potencializado por diversos fatores, entre estes, a realidade escolar (questões burocráticas, individualidades dos colegas de profissão, materiais didáticos/pedagógicos insuficientes, carga horária de trabalho, etc.), a formação inicial (graduação) inadequada e a escolha equivocada da profissão.

Para Huberman (1992) os anos iniciais na profissão docente são marcados por crises, mas também por novas aprendizagens. O autor categoriza esse período em duas fases: a de sobrevivência e a de descoberta.

A fase da sobrevivência está associada ao confronto inicial do professor com a complexidade da profissão. Tal confronto compreende as dificuldades enfrentadas por este novo profissional, tais como: a distância entre os ideais e as realidades cotidianas da sala de aula, a fragmentação do trabalho, dificuldades com alunos que criam problemas, com material didático inadequado, etc. Essa fase caracteriza-se pelo tatear constante e individualismo do professor. Em contrapartida, a fase da descoberta pode ser traduzida por um entusiasmo inicial do professor, a exaltação por ser finalmente responsável pela sua sala de aula, ter os seus alunos, por se sentir pertencente a um determinado corpo profissional (Huberman, 1992).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A prática docente, nos primeiros anos, de acordo com (Silva, 1997), tem a ver com as características pessoais do docente e com o contexto sócio-profissional ao qual pertence. Tais características possibilitarão ao professor adquirir uma espécie de sistema de lentes através das quais percebe o ato de ensinar e, ao mesmo tempo, interpreta o seu modo de estar na profissão.

Outro ponto destacado por Silva (1997) refere-se ao fato de ser necessário para os docentes no início de carreira aprender a gerir os dilemas próprios de sua atividade profissional, sem que estes se tornem uma fonte de frustrações, ansiedades ou, em última análise, desmotivação profissional.

Nesse sentido, Perin (2009) destaca a importância da integração do contexto escolar com as instituições de formação para que, em conjunto, possam minimizar o choque da realidade dos professores iniciantes. Além disso, a autora destaca a importância de medidas institucionais voltadas a preparar os professores iniciantes para lidarem com as hostilidades sofridas pelos professores que já estão inseridos na escola.

3. O percurso metodológico da pesquisa

Este estudo pautou-se pelos parâmetros de uma pesquisa de abordagem qualitativa (Minayo, 2007), de caráter descritivo e explicativo (Gil, 2009). Foi realizado em Juína, município que dista 750 quilômetros de Cuiabá, capital do Estado de Mato Grosso, Brasil. O município de Juína possui um pouco mais de 40.000 habitantes, sendo a pecuária sua principal atividade econômica.

Para a escolha dos sujeitos desta pesquisa elegemos os seguintes critérios: Ser licenciado em Matemática; estar atuando como professor em escolas do município de Juína; ter até cinco anos de atuação como professores, após a conclusão da licenciatura.

A opção pelos cinco primeiros anos de trabalho deve-se ao fato de esse ser o período considerado pela literatura como o de iniciação à docência.

Após visita às escolas, identificamos sete professores que atendiam as condições relatadas anteriormente. Esse quantitativo corresponde ao total dos professores de matemática em início de carreira, no ano de 2015, quando os dados da pesquisa foram coletados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para preservar o anonimato, esses sujeitos serão identificados como *Professor A, B, C, D, E, F* e *G*. Os dados foram obtidos por meio de questionários semiestruturados aplicados aos professores.

4. Resultados

Os participantes da pesquisa são licenciados em Matemática, sendo um deles efetivo e os demais interinos (contratados). Todos trabalham 30 horas semanais.

O contato inicial dos professores investigados com a escola ocorreu de forma harmoniosa ("foi tranquilo, porque a escola e sua coordenação foi super acolhedora, assim como os colegas de trabalho").

Em relação ao apoio por parte dos profissionais que já atuavam na unidade escolar, a opinião do grupo ficou dividida. Para quatro professores esse apoio não existiu, fator que, de acordo com Silva (1997), torna ainda mais difícil o processo de iniciação na docência. Os demais professores afirmaram que tiveram ajuda dos mais experientes sempre que necessitaram ("sempre que precisei de auxílio em alguma situação ou dúvidas, sempre tive ajuda e apoio dos colegas e também por parte da coordenação pedagógica da escola").

Cavaco (1993) afirma ser característico nessa fase que os iniciantes ocultem os problemas, que se confidenciem, mas não se assumam no coletivo e que procurem apoio de forma discreta. Este não é o caso de um dos professores investigado nesta pesquisa, pois ele não restringiu suas dúvidas, ao contrário, buscou revelá-las aos colegas.

O apoio ao professor iniciante depende de cada ambiente escolar e do interesse daqueles que trabalham na escola. Assim, pode-se entender que ao ingressar no contexto educacional, o professor iniciante passa a pertencer a um grupo que pode ou não interagir com ele.

Em relação ao contato inicial com os alunos, todos os professores afirmaram ter ocorrido de forma tranquila. Apesar disso, três professores mencionaram alguns receios: ("não é fácil um professor iniciante passar credibilidade"), ("a indisciplina me assustou"), ("no primeiro momento é assustador, porque nos perguntamos 'será que vou conseguir?'").

O maior receio dos professores é em relação ao tratamento com os alunos. Para Pilz (2011) são inúmeras as dificuldades que se fazem presentes no início da docência, especialmente em relação ao trabalho em sala de aula, onde o professor é surpreendido com situações inesperadas e, muitas vezes, fica sem reação.

ISBN 978-84-945722-3-4

Alguns desses professores relataram que, nos primeiros dias de trabalho, sentiram medo, incerteza e insegurança ao escolher a postura e as metodologias de ensino a serem adotadas com os alunos ("[...] ao adentrar na sala tive uma grande dificuldade em implantar uma postura de minha escolha, pois a inseguranças e o medo de errar, me levaram a assumir uma postura fechada").

No intuito de superarem essas dificuldades, os professores buscaram auxílio dos mais experientes, que por essa condição, já conheciam a realidade da escola. Contudo, afirmaram que não puderam contar com apoio suficiente dos experientes. Diante disso, buscaram pesquisar sobre as dificuldades que enfrentavam ("[...] continuei pesquisando e acabei encontrando respostas nos livros do que em conversas com outros profissionais”).

Outra situação desafiadora relatada pelos sujeitos desta pesquisa se referiu às dificuldades de aprendizagem dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos ("quando encontramos aqueles alunos com muitas dificuldades, por mais que você tenta ensinar de maneiras diferentes o aluno não consegue assimilar o conteúdo, isso nos faz pensar que a culpa é nossa").

Para amenizar essa situação, os professores ("retomam alguns conteúdos que são a base da matemática, para depois prosseguir com o conteúdo de determinado ano ou fase”), ou ainda, (“trabalho com esses alunos em outro período, dando ênfase nas suas principais necessidades”).

Outra dificuldade mencionada pelos professores iniciantes refere-se ao tratamento com os alunos indisciplinados e o atendimento aos alunos com necessidades especiais ("tive muitas dificuldades quando me deparei com alunos com alto nível de indisciplina e também com alunos especiais").

As estratégias utilizadas por esses professores foram (“buscar ajuda junto a coordenação da escola”) e (“conhecer mais sobre o assunto para encontrar meios de solucionar ou amenizar essas dificuldades”).

Outro fator causador de insegurança em alguns dos professores investigados e, consequentemente, foi uma dificuldade que tiveram em superar, referiu-se ao fato de lecionarem em áreas diversas à de formação, tendo a vista que esta é uma medida comum, usada nas instituições de ensino (escolas), para completar carga horária ("o principal motivo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de insegurança se deu pelo fato de ter assumido aulas de Biologia, uma vez que minha formação é na área de Matemática").

Para superar essa dificuldade os professores afirmaram que realizaram ("muita leitura e pesquisa na internet").

As principais dificuldades enfrentadas pelos professores iniciantes, sujeitos desta pesquisa, bem como as estratégias por eles adotadas para sua superação podem ser sintetizadas no Quadro 1.

Quadro 1: Principais dificuldades vivenciadas e medidas adotadas pelos professores

Dificuldades	Estratégias adotadas
- Sentimento de despreparo por considerar que a formação inicial não ofereceu, em sua completude, suporte necessário à prática docente. - Medo, incerteza e insegurança. - Alguns alunos não conseguirem compreender os conteúdos matemáticos. - Atendimento aos alunos especiais ou indisciplinados. - Ministrar aulas fora da área de formação. - Falta de apoio dos professores experientes.	- Estudos e busca por apoio com profissionais que já atuam na escola. - Pesquisas em livros. - Retomada de conteúdos básicos da matemática e atendimento em outro turno. - Busca de ajuda da coordenação da escola e leituras sobre o assunto. - Leitura e pesquisas na internet. - Pesquisas e leituras sobre as dificuldades enfrentadas.

Fonte: Os autores

Grande parte das dificuldades relatadas pelos professores iniciantes está direcionada às relações estabelecidas com os alunos no interior da sala de aula. Tais relações referem-se ao processo de ensino-aprendizagem, comportamento dos alunos e diversidade existente no interior da sala de aula.

Para Silva (1997), as dificuldades enfrentadas no início da docência são penosas para o professor principiante e causam sentimentos de angústia capazes de provocar uma autêntica crise de identidade. Cavaco (1993) afirma que os anos iniciais na docência parecem deixar marcas profundas na maneira como se pratica a profissão.

Em relação as causas dessas dificuldades, Pilz (2011) afirma que elas podem surgir devido a ausência de apoio pedagógico por parte da escola e desvalorização da profissão docente no contexto social.

Os sujeitos investigados afirmaram ter se surpreendido, em algum momento da carreira, com a realidade vivenciada na escola. Os aspectos mencionados em seus relatos dizem respeito ao aluno: falta de interesse em estudar (apesar dos recursos disponíveis e do esforço do professor em ensinar), vir para a escola sem saber regras básicas de bom convívio e não saber esperar e achar que sempre devem ser o centro das atenções.

ISBN 978-84-945722-3-4

A relação da família com a escola foi outro aspecto mencionado por alguns dos sujeitos investigados nesta pesquisa. Afirmaram que se surpreenderam com a falta de acompanhamento dos pais em relação aos filhos. Um deles chegou a classificar como abandono o desamparo de acompanhamento familiar.

Outro aspecto que surpreendeu o professor iniciante, são casos de ("educadores que apenas cumprem os horários e não se importam com o principal objetivo que é o aprendizado do aluno").

Questionados se sentiam-se satisfeitos com a forma pela qual estavam desempenhando a docência na escola, três professores responderam que sim. Para estes, a justificativa é que sempre estão em busca de novos conhecimentos, novas metodologias, trazendo assuntos da realidade dos alunos. Aqueles que afirmaram não estarem satisfeitos, justificaram ("gostaria de fazer uma Pós-Graduação") e ("se dedicar exclusivamente a profissão, mas preciso trabalhar ainda no setor privado").

Para Huberman (1992) a fase inicial do professor constitui num esforço em conquistar novas metodologias que funcionem. Assim, lançam-se numa pequena série de experiências pessoais, diversificando o material didático, os modos de avaliação, a forma de agrupar os alunos, as sequências do programa, etc.

5. Considerações

Este trabalho revela que podem acontecer implicações desestimulantes com o professor nos primeiros anos de atuação docente, como por exemplo, sua competência ser posta em dúvida, tanto pelos demais colegas quanto, em alguns casos, pelos alunos. Ao ver sua tentativa de interagir com colegas e compartilhar suas experiências ser fracassada, pode acontecer de o professor desistir desta interação, ocultar os dilemas e buscar em outras fontes a solução para seus problemas.

Outras implicações, como dúvidas em relação a postura a ser assumida frente os alunos e pais ou até mesmo frente a algum superior da escola ou professor mais experiente, leva o professor novato a ter sentimentos de medo.

A frustração também assola o professor iniciante. Este reúne esforços, primordialmente nos primeiros anos da docência, para se dedicar à aprendizagem do seu aluno, aprender a atender os procedimentos padrões do contexto escolar, conquistar espaço e autonomia, entre tantos

ISBN 978-84-945722-3-4

objetivos que, quando não alcançados, frustram o docente. A impressão é que muitos professores ficam divididos entre as desilusões da carreira e a dedicação para ser um bom profissional.

Vale destacar que o ambiente escolar nem sempre oferece o suporte necessário para minimizar as implicações encontradas pelo professor novato.

Um fator importante verificado neste estudo é que os professores recém-formados necessitam de apoio no início da carreira. Para tanto, faz-se necessário políticas que contemplem formas de possibilitar um auxílio especial aos docentes nessa fase da carreira. Isto se estende desde a graduação do licenciando até o exercício efetivo de sua profissão, sobretudo no início da carreira. É importante que haja um trabalho coletivo capaz de envolver, além dos próprios professores, instituições de ensino formadoras, escolas, e demais interessados no processo. Nesse contexto, é fundamental que as universidades estruturem seus currículos no sentido de minimizar tais implicações, bem como, professores mais experientes, direção escolar, coordenação e demais entes envolvidos acolham o professor iniciante. Esse trabalho coletivo e cooperativo pode proporcionar sucesso não apenas aos professores iniciantes, mas a toda comunidade escolar.

6. Referências

Cavaco, M. H. Ofício de professor: o tempo e as mudanças. In: NÓVOA, A. (Org.). *Profissão Professor*. Portugal: Porto, 1993.

Gil, A.C. *Como elaborar projeto de pesquisa*. Atlas. 4. ed. São Paulo, 2009.

Huberman, M. O ciclo da vida profissional dos professores. In: *Vidas de professores*. Lisboa: Porto Editora, 1992.

Minayo, M. C. S. (2007). O desafio da pesquisa social. En M. C. S. Minayo (Ed.), *Pesquisa social: Teoria, método e criatividade*, Capítulo 1, pp. 9-30. Petrópolis: Vozes.

Pilz, C. A. S. *Iniciação Profissional de Professores de Matemática:* Dificuldades e Alternativas. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011.

Silva, M. C. M. *O primeiro ano da docência:* o choque com a realidade. Lisboa: Porto, 1997.

Veenman, S. Perceived problems of begining teachers. *Review of Educational Research*, v. 54, n. 2, 1984.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-884

NUMERAMENTO EM TELAS SENSÍVEIS AO TOQUE: ATIVIDADES INSTIGADORAS COM AUXÍLIO DE SMARTPHONES

Wagner Marques – Marcelo Bairral
wagsm@ig.com.br – mbairral@ufrrj.br
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: Comunicação breve (CB)
Nível educativo: Médio
Palavras chave: Numeramento. Atividades Instigadoras. Smartphones.

Resumo
Estar conectado é uma das principais características dos nossos estudantes que o fazem, invariavelmente, com a utilização de dispositivos móveis, dentre os quais merecem destaque os smartphones, aparelhos que funcionam quase como uma prótese para esse público. Sentimo-nos inclinados, desta forma, a investigar a inserção desse recurso, dentre outros em aulas de matemática, a fim de verificar a possibilidade da emersão de práticas de numeramento, quando os aprendizes se apropriam dessa tecnologia ao resolverem tarefas elaborados com as lentes das atividades instigadoras. Sob uma abordagem intervencionista, elaboramos e implementamos tarefas, a serem realizadas em duplas por reconhecermos o potencial das interações, pautadas no uso do aplicativo gratuito MyScript Calculator, que proporciona a escrita livre na própria tela de operação, permitido realizar operações como adição, subtração, multiplicação, divisão, entre outras. O presente texto ilustra resultados preliminares de um estudo exploratório com discentes do ensino médio (14 a 17 anos) de uma escola pública no estado do Rio de Janeiro, Brasil. A análise revelará estratégias de cálculos distintas para a solução de uma mesma atividade e buscará relacioná-las a possíveis práticas de numeramento desses estudantes, tendo smartphones como mediadores nas tarefas.

1. Iniciando a conexão

A utilização de uma tela *touchscreen*, aliada às atividades instigadoras, cujas principais características são averiguar o uso/aplicação de conhecimentos prévios, estimular e despertar o interesse para aprender, possibilitar a construção do conhecimento a partir de descobertas e despertar reflexão sobre a relativização de verdades matemáticas, (Marques & Bairral, 2014), pode motivar os jovens a aprender. Dentro dessa perspectiva, vislumbramos a possibilidade de, dentro do cenário educativo, investigar como pode ocorrer a inserção de *smartphones* em aulas de matemática, a fim de estimular práticas de numeramento, sob uma

ISBN 978-84-945722-3-4

abordagem intervencionista. Trata-se de um estudo que faz parte de uma pesquisa de doutoramento em educação, no Programa de Pós-Graduação em Estudos Contemporâneos e Demandas Populares da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, cujos objetivos são inserir tecnologia *touchscreen* em sala de aula, mediante a implementação de atividades instigadoras que incitem práticas de numeramento e analisar possíveis contribuições para a aprendizagem dos alunos do ensino médio. *Que formas de numeramento podem ser desenvolvidas em atividades com recursos variados? Qual a importância das manipulações em telas no desenvolvimento do numeramento?* A fim de elucidar sobre práticas de numeramento, abrimos com a história a seguir, contada pelo primeiro autor.

2. Práticas sociais embebidas de matemática?

Era domingo de Páscoa e a família estava reunida para o almoço. Dona Thereza, minha sogra[44], que possui incríveis habilidades na arte de cozinhar havia preparado um almoço cuja sobremesa seria um divino cuscuz doce. Mesmo sabendo que provavelmente não irei depois para a cozinha testar receitas, em geral, acabo tendo curiosidade quanto ao preparo de determinadas comidas, não só as bem feitas, mas as que acabam não dando certo também, para tentar opinar sobre o possível desacerto. Vamos ao cuscuz que pode tê-los deixados com água na boca, já que o qualifiquei como divino. Ao questionar Dona Thereza sobre a receita, ela me disse o seguinte:

> Pega uma vasilha, um pirex, coloca um saco de tapioca, meio coco ralado, um pouco de açúcar, dois copos, e meia lata de leite condensado. Mexe bem. Mexe lá e deixa. Em outra vasilha, uma panela, coloca um litro de leite menos um copo, copo desses comuns, de requeijão, e um vidro de leite de coco. Deixa ferver e depois mistura na vasilha e vai formar uma goma. Depois que esfriar, polvilha com o restante do coco ralado e rega com o leite condensado que ficou na lata. (M. T. S. Costelha, comunicação pessoal, 27 de março de 2016)

Ouvi atentamente aquelas palavras e prontamente percebi que havia cálculos intrínsecos ali presentes, mesmo sem aparentes indicativos de unidades ou de operações matemáticas. Passei em alguns mercados, a fim de investigar a tapioca e encontrei apenas pacotes de meio quilo (500g), o que já me esclareceu a quantidade exata daquele ingrediente. Quanto ao açúcar, de início não entendi porque ela se referia a dois copos como um pouco

[44] Ao contrário do que se costuma dizer a respeito das sogras, somente elogios tenho a tecer em relação à minha, podendo considerá-la como uma segunda mãe. Citá-la aqui é uma grande honra e a mesma fez questão que colocasse seu nome verdadeiro, Maria Thereza, a quem sempre tratei por Dona Thereza.

ISBN 978-84-945722-3-4

de açúcar; para mim, dois copos de açúcar é muito açúcar. Mas naquele contexto, naquele preparo, dois copos de açúcar seriam o ideal para o cuscuz sem adoçá-lo em excesso. Copos desses comuns, de requeijão, medem quanto? Qual sua capacidade? Realizei medição com três tipos que tinha em casa e verifiquei que todos se aproximavam de 200ml, mas dependendo que como os enchesse, essa variação talvez pudesse influenciar na receita. Para meia lata de leite condensado não há erro: todas as marcas apresentam as latas do mesmo tamanho. Assim se aprontava a primeira vasilha, o pirex. A segunda vasilha, a panela, recebe um litro de leite menos um copo. E por que não quatro copos, tendo em vista que os copos comuns, de requeijão, medem aproximadamente 200ml? Logo pensei que se retirar um copo da embalagem, basta despejar o resto, o que se torna mais rápido, mais fácil. Agora a receita terá chance de desandar, pois “vidro” de leite de coco existe em dois tamanhos. Como não perguntei sobre o tamanho, se quiser fazer o cuscuz, terei que testar com cada um deles.

Dona Thereza não imaginava que a olhava e prestava a atenção a cada detalhe que ela descrevia, pensando na questão do numeramento. Será que minha sogra tinha ideia de como aquela receita estava embebida de matemática? Uma primeira vasilha que receberia inicialmente alguns ingredientes, e que, posteriormente, seriam acrescentados outros mais que viriam de uma panela, tinha o tamanho exato para que fosse preenchida por completo, trazendo, enfim, aquela bela aparência à sobremesa. Algumas substâncias quando misturadas, aumentam seu volume final, ao passo que outras acabam tendo o volume reduzido. Não houvera qualquer experiência em laboratório para determinar quais seriam as dimensões resultantes, mas dava certinho naquele pirex. Isso sem falar no “pouco de açúcar” (dois copos) e na quantidade do leite (um litro menos um copo). Seriam habilidades matemáticas impregnadas de práticas sociais?

3. Habilidades matemáticas impregnadas de práticas sociais

Numeramento implica uma prática social, um modo de aprender, de signficar, de comunicar. A forma de preparo da sobremesa pela Dona Thereza pode ser considerada um dos exemplos a sinalizar que as necessidades presentes no cotidiano fazem com que os indivíduos “[...] desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões” (Brasil, 1998, p. 37). No entanto, em alguns casos, para atingir essas

ISBN 978-84-945722-3-4

capacidades, torna-se necessária a adoção de outros tipos de habilidades como ler, escrever e se comunicar, em conjunto com as habilidades matemáticas.

Inspirado pelas discussões sobre letramento, as quais vinham incluindo comentários sobre matemática, Barwell (2004) sublinha a maneira como pesquisas em educação matemática começaram a discutir sobre a importância do numeramento, vinculando-o a práticas sociais, além de lhe permitir sinalizar que numeramento pode ser entendido como um conjunto de práticas de letramento que abarcam informações numéricas, tabelas, formas e diagramas, capaz de produzir significados a partir de textos numerados. “O numeramento pode ser pensado no sentido das diversas práticas em que são produzidas diferentes matemáticas, entre as quais existem aquelas que diferem das práticas escolarizadas” (Mendes, 2007, p. 17). Escolarizadas ou não, formais ou informais, uma síntese das pesquisas nessa área pode ser observada no quadro 1.

Autor(es)	País	Sujeito(s) investigado(s)	Objetivo(s)
Toledo (2003)	Brasil	Estudantes do ensino fundamental da Educação de Jovens e Adultos	Buscar possíveis relações entre o desenvolvimento de estratégias metacognitivas e a evolução do registro matemático dos estudantes
Baker, Street e Tomlin (2003)	Reino Unido	Estudante da educação infantil	Identificar, analisar e comparar práticas de numeramento localizadas em diferentes contextos sociais, especialmente em casas e escolas.
Toledo (2004)	Brasil	Estudantes de baixo ou nenhum grau de escolarização, mas com elevado nível de alfabetismo matemático (INAF 2002)	Encontrar possíveis relações entre numeramento e escolarização
Baturo e Vincent (2004)	Austrália	Professores do 1º segmento do Ensino Fundamental	Identificar elementos necessários para a construção de ambiente de aprendizagem capaz de promover resultados em numeramento
Faria, Gomes e Fonseca (2010)	Brasil	Estudantes do 2º segmento do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos	Analisar caráter discursivo e interações em sala de aula, voltados às práticas de numeramento (caso da calculadora)
Purpura e Lonigan (2013)	Estados Unidos	Estudantes das séries inicias em idade pré-escolar (três a seis anos de idade)	Validar as estruturas das habilidades informais de numeramento
Fonseca e Simões (2014)	Brasil	Estudantes do ensino fundamental da Educação de Jovens e Adultos	Analisar a posição que os estudantes assumem no discurso, durante aulas de matemática envolvendo práticas de numeramento

ISBN 978-84-945722-3-4

Adelino e Fonseca (2014)	Brasil	Livros didáticos do 2º segmento do ensino fundamental da Educação de Jovens e Adultos	Identificar práticas de numeramento que contemplem aspectos socioculturais da matemática, mediante a valorização de texto
Ferreira e Fonseca (2015)	Brasil	Estudantes do 1º ano do ensino médio da Educação de Jovens e Adultos	Encontrar relações entre conhecimentos cotidianos e escolares presentes em aulas de matemática

Quadro 1. Síntese das pesquisas sobre numeramento levantadas até dezembro de 2016.
Fonte: Adaptado de Marques e Bairral (2017).

As averiguações elencadas, embora envolvam práticas de numeramento, não o fazem mediante a utilização de algum tipo de tecnologia digital, o que nos remete aos estudos da área de linguagens (Cani & Coscarelli, 2016; Coscarelli & Kersch, 2016; Marques, 2016; Cavalcante, 2014; Marsaro, 2013; Neto, Thadei, Silva-Costa, Fernandes, Borges & Melo, 2013; Rojo, 2013) que vêm abordando os chamados multiletramentos, os quais estabelecem uma relação com a produção de textos diferentes dos usuais, a partir de recursos multimidiáticos (imagens, sons, vídeos, cores). Se pensarmos na utilização de *smartphones* em aulas de matemática, teremos que pensar também nas possibilidades de resolução distintas daquelas com lápiz e papel, inclusive, no desenvolvimento de formas variadas de pensar.

4. *Smartphones* com *MyScript Calculator*[45]

Assim como se revelam nas pesquisas sobre multiletramento, temos grandes expectativas em relação à implementação com *smartphones*, entendendo que novas formas de resolução matemática possam ser apresentadas. No momento, estamos focados no aplicativo gratuito *MyScript Calculator*, por proporcionar a escrita livre na própria tela da operação, permitindo realizar operações matemáticas. Associando-o às atividades instigadoras (Marques & Bairral, 2014), foi pensado o seguinte problema:

Sabendo-se que você só dispõe de notas de R$ 5,00, quantas notas são necessárias para pagar uma compra que totalizou R$ 75,00? Como os alunos iriam manipular a tela para resolver essa tarefa?

[45] Disponível em https://play.google.com/store/apps/details?id=com.visionobjects.calculator

ISBN 978-84-945722-3-4

Ao ministrarmos oficina[46] para estudantes do Ensino Médio de uma escola da rede pública, utilizamos essa atividade e duas formas de resolução foram apresentadas. Uma discente que preferiu trabalhar sozinha, Caroline[47], revelou ter utilizado o aplicativo para fazer uma sequência de adições (5 + 5 + 5 +...) até encontrar o valor a ser pago (R$75,00) e depois contou quantas vezes repetiu o número 5, justificando seu procedimento da seguinte forma: *professor, o que eu fiz foi pegar as notas que eu tinha de 5 e ir somando até chegar em 75. Aí depois foi só contar*.

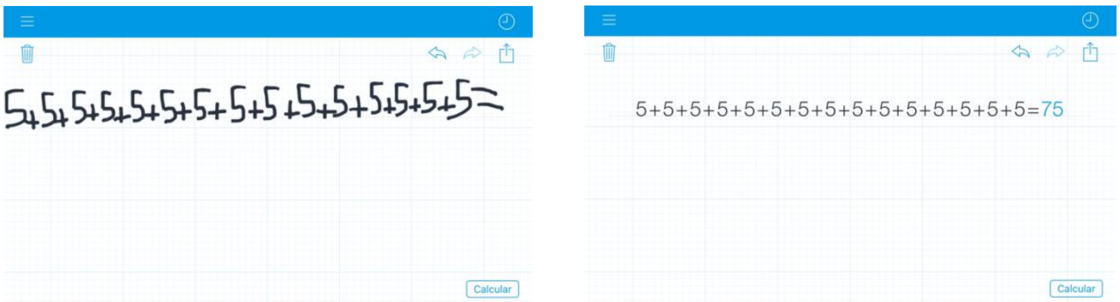


Figura 1. Resolução apresentada por Caroline.
Fonte: Fragmento de pesquisa.

Dois outros alunos que labutaram em dupla, Bernardo e Matheus, apresentaram sua escolha por tentativas mediante a multiplicação (5 x 1, 5 x 2, 5 x 3, ...), efetuando a operação até que o resultado fosse o número 75 (Figura 2). *O senhor não perguntou quantas notas a gente ia gastar? Então é conta de vezes. Pronto, só multiplicar até encontrar 75*.

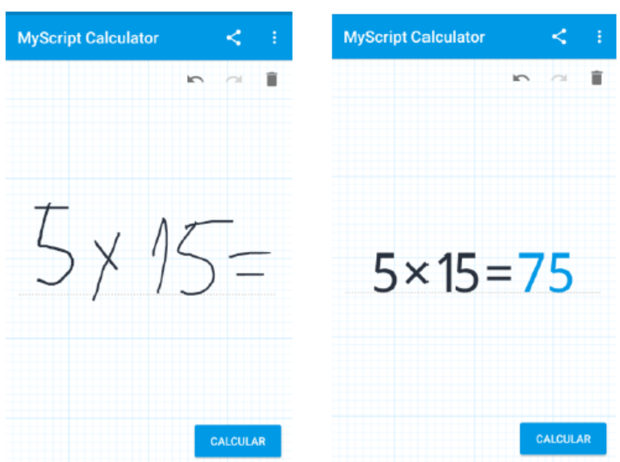


Figura 2. Resolução apresentada por Bernardo e Matheus.
Fonte: Fragmento de pesquisa.

---

[46] Este episódio também foi relatado e analisado em Marques e Bairral (2017).
[47] Os nomes dos estudantes são fictícios, a fim de lhes preservar o anonimato.

ISBN 978-84-945722-3-4

5. Telas se revelando

Face às pesquisas apresentadas, nos permitimos realizar algumas sinalizações iniciais. Tratando-se dos sujeitos envolvidos, as investigações no Brasil (Toledo, 2002, 2004; Adelino & Fonseca, 2014; Ferreira & Fonseca, 2015) têm apontado para o público matriculado no programa de Educação de Jovens e Adultos, ou seja, indivíduos de certa idade que ingressaram tardiamente na educação formal, ao passo que as apreciações realizadas fora de nosso país (Baker, Street & Tomlin, 2003; Purpura & Lonigan, 2013), têm sido direcionadas à observação das séries iniciais. Baturo e Vincent (2004) preocuparam-se com estratégias, posicionamentos e comportamentos docentes, sem que conseguíssemos identificar o nível escolar dos alunos implicados.

É importante salientarmos que, até o presente momento, encontramos apenas um dos estudos (Faria, Gomes & Fonseca, 2010) no qual emergiu um recurso tecnológico, a calculadora, embora não tivesse sido pensada anteriormente a sua utilização pelas pesquisadoras. Ao introduzirmos o *smartphone* com o aplicativo *MyScript Calculator* na oficina ministrada, em uma análise preliminar, parece-nos que a resolução apresentada por Caroline carrega indícios de numeramento do cotidiano, uma vez que a mesma relatou uma prática do seu dia a dia (Barwell, 2004), que a ajudou a resolver o problema, ao dizer que pegaria as notas que tinha e somaria até chegar ao valor desejado, como se faz quando se deseja pagar algo que se esteja comprando. Por outro lado, Bernardo e Matheus aparentaram caminhar para prática de numeramento escolar (Baker, Street & Tomlin, 2003) ao relacionarem a quantidade de notas à ideia de multiplicação, ou seja, o número que multiplicasse o 5 (valor da nota) e encontrasse o 75 (valor total a ser pago).

6. Novas telas que se abrem

Não tivemos a intenção aqui de discutir sobre o conceito de numeramento, o qual vai bem além das práticas apresentadas. Até porque pensamos que o numeramento, nos dias de hoje, envolve um conjunto de ações (numéricas, operativa, figurais, pictóricas, geométricas, de expressão gestual, informativas, gráficas, conceitual, codificável) que podem compor o espectro dos processos de ensino e aprendizagem. No entanto, pudemos diferentes observar a forma de numeramento utilizada por Caroline com traços do seu dia a dia, e a usada por Bernardo e Matheus, compatível com a aprendizagem escolar, ou seja, duas possíveis práticas

ISBN 978-84-945722-3-4

de numeramento (Baker, Street & Tomlin, 2003). Nosso desafio reside na exploração das práticas de numeramento mediante a utilização de atividades instigadoras associadas a recursos variados, inclusive, com toques na tela. Então, nos perguntamos: *se o multiletramento trata de práticas que se apropriam das tecnologias digitais, por permitirem várias alternativas de escrita e de comunicação, e os estudos de numeramento ainda não o fazem, será que não estaríamos à procura de uma nova possibilidade de numeramento?*

7. Referências

Adelino, P. R. & Fonseca, M. C. F. R. (2014). Matemática e texto: práticas de numeramento num livro didático da educação de pessoas jovens e adultas. Revista Brasileira de Educação, v. 19, n. 56, pp. 181-200.

Baker, D., Street, B. & Tomlin, A. (2003). Mathematics as social: understanding relationships between home and school numeracy practices. For the Learning of Mathematics, v. 23, n. 3, pp. 11-15.

Barwell, R. (2004). What is numeracy? For the Learning of Mathematics, v. 24, n. 1, pp. 20-22.

Baturo, A. R. & Vincent, J. (2004). Teachers enhancing numeracy. Australian Primary Mathematics Classroom, v. 9, n. 4, pp. 54-56.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC /SEF.

Cani, J. B. & Coscarelli, C. V. (2016). Textos multimodais como objetos de ensino: reflexões em propostas didáticas. Em Kersch, D. F., Coscarelli, C. V. & Cani, J. B. (orgs.). Multiletramentos e multimodalidade: ações pedagógicas aplicadas à linguagem, Capítulo 1, pp. 15-47, Campinas: Pontes Editores.

Cavalcante, A. P. P. (2014). *Multiletramentos mediados pelo computador em sala de aula: a perspectiva das culturas juvenis em fluxo.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

Coscarelli, C. V. & Kersch, D. F. (2016). Pedagogia dos multiletramentos: alunos conectados? Novas escolas + novos professores. Em Kersch, D. F., Coscarelli, C. V. & Cani, J. B. (orgs.). Multiletramentos e multimodalidade: ações pedagógicas aplicadas à linguagem, Prefácio, pp. 7-14, Campinas: Pontes Editores.

Faria, J. B., Gomes, M. L. M. & Fonseca, M. C. F. R. (2010). Práticas de numeramento nas interações discursivas na sala de aula da educação de pessoas jovens e adultas: o "caso da calculadora". Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 18, número temático, pp. 345-378.

Ferreira, A. R. C. & Fonseca, M. C. F. R. (2015). Práticas de numeramento no Ensino Médio da EJA: reflexões para a sala de aula. Revista Cadernos de Educação, n. 52, pp. 1-17.

Fonseca, M. C. F. R. & Simões, F. M. (2014). Apropriação de práticas de numeramento na EJA: valores e discursos em disputa. Educação e pesquisa, v. 40, n. 2, pp. 517-532.

Marques, W. & Bairral, M. (2017). Abrindo telas em smartphones e contemplando novas formas de numeramento. Boletim Gepem, v. 70.

ISBN 978-84-945722-3-4

http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=login&source=%2FSEER%2Findex.php%3Fjournal%3Dgepem%26page%3Dissue%26op%3Dcurrent / Consultado 13/04/17

Marques, W. & Bairral, M. (2014). *Na calculadora é ponto ou vírgula? Analisando interações discentes sob as lentes de Vygotsky e Bakhtin.* Seropédica, RJ: EDUR.

Marsaro, F. P. (2013). Portais de editoras de livros didáticos: análise à luz dos multiletramentos. Em Rojo, R. (org.). Escol@ conectada: os multiletramentos e as TICs, Capítulo 9, pp. 175-191, São Paulo: Parábola.

Mendes, (2007). Matemática e práticas sociais: uma discussão na perspectiva do numeramento. Em Mendes, J. R. & Grando, R. C. (orgs.). Múltiplos olhares: matemática e produção do conhecimento, Capítulo 1, pp. 11-29, São Paulo: Musa Editora.

Neto, A. T., Thadei, J., Silva-Costa, L. P., Fernandes, M. A., Borges, R. R. & Melo, R. (2013). Multiletramentos em ambientes educacionais. Em Rojo, R. (org.). Escol@ conectada: os multiletramentos e as TICs, Capítulo 7, pp. 135-158, São Paulo: Parábola.

Purpura, D. J. & Lonigan, C. J. (2013). Informal numeracy skills: the structure and relations among numbering, relations, and arithmetic operations in preschool. American Educational Research Journal, v. 50, n. 1, pp. 178-209.

Rojo, R. (2013). Gêneros discursivos do Círculo de Bakhtin e multiletramentos. Em Rojo, R. (org.). Escol@ conectada: os multiletramentos e as TICs, Capítulo 1, pp. 13-36, São Paulo: Parábola.

Toledo, M. E. R. O. (2003). Numeramento, metacognição e aprendizagem matemática de jovens e adultos. Educação On-Line. http://www.educacaoonline.pro.br/index.php?option=com_content&view=article&catid=4:educacao&id=320:numeramento-metacognicao-e-aprendizagem-matematica-de-jovens-e-adultos / Consultado 13/04/17

Toledo, M. E. R. O. (2004). Numeramento e escolarização: o papel da escola no enfrentamento das demandas matemáticas cotidianas. Em Fonseca, M. C. F. R. (org.). Letramento no Brasil: habilidades matemáticas, Parte 2, pp. 91-105, São Paulo: Global.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-886

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN GRUPOS DE PRIMER GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA, DESDE UN CONTEXTO COMUNICATIVO

Edith Arévalo Vázquez
edith.arevalo@enmfm.edu.mx
Escuela Normal "Miguel F. Martínez", México

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Primario
Palabras clave: enseñanza, matemáticas, contextos comunicativos

Resumo
Con la implementación del Plan de estudios 2011 en México, se espera ofrecer una formación matemática más constructiva, incorporando como acción prioritaria el planteamiento de situaciones problemáticas para que los estudiantes los resuelvan con sus propios recursos, discutan en grupo, analicen procedimientos y resultados con la finalidad de compartir ideas y enriquecerlas con las opiniones de sus compañeros en clase. Bajo esta dinámica, se espera que el proceso enseñanza-aprendizaje ocurra en comunidades caracterizadas por elevados niveles de participación e involucramiento. Donde tanto el profesor como sus alumnos actúen y dialoguen siendo partícipes de la discursividad, creándose un nivel de relación e interacción más dinámico, circular y continuo entre quien enseña y quien aprende, al trabajar en contextos esencialmente comunicativos y en los que se produzca en consecuencia, la construcción social del conocimiento escolar. Razón por la que en este estudio planteamos como objetivo describir las formas en las que los profesores crean contextos comunicativos para promover la construcción conjunta del conocimiento matemático, en grupos de primer grado de educación primaria. La investigación es de corte cualitativo y de tipo descriptivo. Para la recuperación de información se utilizó entrevistas a profesores, videos y transcripciones de clases donde se trabajaron contenidos matemáticos.

Introducción

El tratamiento de las matemáticas en el ámbito escolar, ha resultado por un elevado sector como complejo y difícil de aprender. La literatura e investigaciones sobre el tema ponen de manifiesto que la enseñanza en los espacios educativos, no ha sido lo suficientemente efectiva para modificar la percepción de los estudiantes en torno a esta asignatura, e impactar en sus aprendizajes. Los resultados de evaluaciones en las que ha participado la población

ISBN 978-84-945722-3-4

estudiantil de educación primaria y secundaria, tampoco han reflejado avances significativos en las estadísticas nacionales e internacionales, en los últimos tiempos (OCDE, 2013).

Con fines de mejora, la Secretaría de Educación Pública (SEP) puso en marcha en el 2011 un nuevo Plan de estudios para educación básica. Su implementación ha tenido como propósito ofrecer una educación de mayor calidad a los educando. Desarrollar en lo posible, competencias para la vida que posibiliten una formación más integral y acorde con los requerimientos de una sociedad actual cada vez más demandante. Acción que ha provocado en consecuencia, cambios significativos en el proceso educativo; entre los que se destaca el uso de una metodología didáctica en la que los participantes asuman roles más dinámicos y eficaces, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje que se gesta en los espacios educativos.

El plan de estudios sienta sus bases en una concepción constructivista la cual ubica al estudiante como centro de este proceso y como principal protagonista en la construcción de lo que aprende (SEP, 2012). El profesor por su parte se le concibe como guía, coordinador y promotor de aprendizajes; deja de ser proveedor de un cúmulo de conocimientos escolares ya elaborados y que pareciera están a disposición para ser compartidos a los estudiantes, sin dificultad. Al respecto, los fundamentos de teorías como la de Lev Vigotsky, David Ausubel y Jerome Bruner, aunque se sitúan en encuadres teóricos distintos, han permitido entender las necesidades de estos obligados cambios en la educación, con el ánimo de fortalecer el tipo de formación que se ofrece y en particular, renovar el quehacer cotidiano de los profesores.

Con respecto a la asignatura de Matemáticas, desde el enfoque didáctico del Plan 2011 se espera promover una formación matemática que implique necesariamente la participación activa tanto del profesor como de los alumnos. Se establece como acción prioritaria el planteamiento de situaciones problemáticas para que los estudiantes los resuelvan con sus propios recursos; que discutan en grupo, analicen sus procedimientos y resultados con la finalidad de que compartan sus ideas y las enriquezcan con las opiniones de sus compañeros en clase (SEP, 2012).

En este sentido, el proceso enseñanza-aprendizaje (E-A) se espera que ocurrir en comunidades caracterizadas por elevados niveles de participación e involucramiento. Donde los estudiantes -y no prioritariamente el profesor- puedan actuar y dialogar siendo partícipes

ISBN 978-84-945722-3-4

de la discursividad; creándose así, un nivel de relación e interacción más dinámico, circular y continuo entre los participantes, al trabajar en contextos esencialmente comunicativos. Contextos en los que se conciba y se produzca el aprendizaje, en colectivo; donde tanto el profesor como los alumnos sean partícipes en la construcción social del conocimiento escolar y la enseñanza, tal como se expresa en el enfoque didáctico, vaya mucho más allá de la simple transmisión de conocimientos. De tal manera que la eficacia de un profesor al trabajar con la asignatura de Matemáticas ya no se medirá por hablar mucho de su disciplina, sino por la capacidad de generar condiciones más favorables para el aprendizaje (SEP, 2012); donde éste sea visto como un proceso activo de construcción y de re-construcción del conocimiento matemático escolar.

En este sentido, las acciones en el aula deben estar fundamentalmente dirigidas a establecer una importante relación entre profesor, alumno y contenido de enseñanza. Relación que implica a su vez, la creación de una estrecha y constante interacción que haga posible la circulación del conocimientos, haciendo matemáticas y hablando necesariamente de matemáticas, como resultado de una comunicación constante entre el profesor y sus alumnos o bien entre los propios alumnos.

Freire (2010) y De Longhi (2011) entre otros coinciden en destacar el relevante papel que ocupa la comunicación en los espacios educativos. Su importancia reside en que, a diferencia de lo que sucede en otros contextos sociales, la comunicación en el aula está determinada por un flujo particular de las conversaciones, las cuales no son independientes ni simultáneas, sino que se sostienen a través del eje directivo de un profesor que las orienta hacia metas preestablecidas, en un contexto eminentemente comunicativo durante una clase. Siendo así que, hablar de contexto comunicativo, es hablar también de las situaciones o conjunto de circunstancias en la que se produce la comunicación, -tiempo, espacio y circunstancias socioculturales en las cuales tiene lugar-, que sirven para facilitar la comprensión del proceso comunicativo.

Asimismo, en este escenario en el que se produce el proceso E-A, el profesor es pieza clave. Pues es quien oficialmente tiene la mayor responsabilidad de la actividad didáctica escolarizada, al poner en acción el currículo escolar planificado. Se convierte en el agente que sostiene el diálogo didáctico en el marco de las actividades durante la clase, guiado sin duda, desde un estilo o modelo propio como docente. Es quien debe buscar la participación

ISBN 978-84-945722-3-4

activa de sus estudiantes, en la solución de tareas y en la adquisición de nuevos conocimientos a través de un proceso dialógico y circular, sin principio ni fin y en el que se gesten en consecuencia, la enseñanza y el aprendizaje a través de un proceso constructivo.

Razones por las que De Longhi (2011) y otros investigadores más, consideran necesario centrar la mirada en lo que sucede en las aulas. Específicamente en lo que acontece en la enseñanza y el aprendizaje, desde los contextos comunicativos; centrando la mirada en aquellos aspectos tanto didácticos como comunicativos que ocurren cuando un saber matemático está en juego. En este sentido, se ha iniciado el presente estudio teniendo como objetivo describir las formas en las que los profesores crean contextos comunicativos para promover la construcción conjunta del conocimiento matemático, en grupos de primer grado de educación primaria.

Metodología

Este estudio es de corte cualitativo, ya que se busca comprender lo que ocurre en diversos contextos humanos en función de lo que las personas interpretan sobre ellos y los significados que otorgan a lo que les sucede (Martínez, 2007); asimismo, se ubica como de tipo descriptivo. Se ha realizado con el apoyo de nueve profesores que trabajan en primer grado de educación primaria en escuelas primarias públicas y privadas, ubicadas en tres municipios en el estado de Nuevo León, México. Se seleccionaron escuelas pertenecientes a diferentes contextos educativos y población, así como con diversas condiciones de trabajo.

Para la recolección de datos se aplicó un cuestionario abierto a los profesores participantes, con el ánimo de recuperar información proveniente de los mismos en torno a sus conocimientos y experiencias en la docencia; las preguntas se agruparon en tres secciones tomando en consideración la teoría consultada y la revisión de expertos: Formación profesional y experiencia en la docencia; Práctica docente específicamente en Matemáticas; y Sobre la comunicación que utiliza en las clases de Matemáticas.

Se realizó la observación de clases en ambientes naturales, con apoyo de videos para el estudio de los contextos comunicativos establecidos por los profesores, durante el tratamiento de la asignatura. Fueron eligieron episodios de clases en los que el conocimiento matemático estuvo en juego y se elaboraron descripciones, intentando recuperar tanto los aspectos verbales como los no verbales de los participantes. Las videograbaciones se realizaron en los

ISBN 978-84-945722-3-4

horarios y días determinados por los profesores, con la finalidad de dar continuidad a sus actividades cotidianas y horario preestablecido desde cada institución.

El protocolo de observación fue construido con base a cuatro categorías y subcategorías emanadas en un primer momento de la literatura consultada para el desarrollo del presente estudio, y posteriormente se enriqueció con base a la revisión de la práctica docente observada en los videos de las sesiones de clase; sin embargo, para una primera fase, solamente referiremos dos de ellas. La primera categoría es *Seguimiento del currículo de Matemáticas*, que considera los tipos de problemas que proponen los profesores (constructivistas vs. memorísticos); y el tipo de información que circula para el tratamiento de los problemas curriculares, con la finalidad de contrastarlos con lo establecido desde el enfoque didáctico propuesto en el plan de estudios vigente. La segunda hace referencia a *La comunicación que circula en la clase*, incluye datos sobre el tipo de comunicación que favorecen los profesores (unidireccional vs. dialógica), el tipo de preguntas que se plantean durante las actividades y el lenguaje verbal y corporal utilizado por los profesores.

Resultados

En el siguiente apartado se describirán resultados preliminares obtenidos del análisis de los datos recuperados a través de los instrumentos utilizados durante el presente estudio. Los resultados incluyen información contrastada de ambos instrumentos básicamente de tipo cualitativo, organizados de forma sintética en tres rubros.

***- Formación profesional y experiencia en la docencia*:** Del sistema público, cinco son maestros de base y dos de contrato. Participan dos profesoras de instituciones privadas. Su antigüedad oscila entre los dos y veintiocho años en el servicio profesional docente; participan dos profesores de sexo masculino y siete de sexo femenino. El grado máximo de estudios de cuatro profesores es de Maestría, otros cuatro estudian actualmente para obtener el grado y uno sólo tiene título de Licenciado en Educación Primaria.

***- Seguimiento del currículo de Matemáticas*:** Se identificaron cuarenta y siete episodios de clase seleccionados para el estudio, treinta y uno de ellos fueron ubicados como de tipo *Memorístico*; es decir, problemas en los que hubo transmisión de información por parte del profesor al explicar formas de solución a problemas, en donde los alumnos repetían o reproducían formas de resolución. Resultaron los más utilizados para dar seguimiento al

ISBN 978-84-945722-3-4

currículum escolar. Tal como lo refirieron cinco de los profesores a través de las respuestas del cuestionario, en muchos de los casos, este tipo de problemas se abordaron bajo el esquema de trabajo con base a ejemplo(s) propuesto(s) para ser resueltos de forma grupal, y posteriormente plantear ejercicios con base a modelos, a ser trabajados en lo individual. Por el contrario, en cuatro profesores se identificaron prácticas y planteamiento de problemas que iban más acorde a las características del enfoque didáctico propuesto desde el plan de estudios vigente.

El tratamiento de *problemas memorísticos y de algoritmos* que se plantearon en clase, propiciaron en consecuencia el flujo de información de tipo transmisiva/explicativa; generando una comunicación casi unidireccional entre los participantes (P - Aos). Aunque se debe referir que en todos se identificaron intervenciones explicativas, por lo menos en uno o varios de los episodios observados, bien fuera como actividad inicial o como parte del desarrollo de la clase.

- ***La comunicación dialógica***: Seis de los profesores, aunque plantearon preguntas en las diversas sesiones observadas, éstas fueron dirigidas más a que los alumnos respondieran con un sí o no, o bien complementaran con un o varias palabras la frase que se les comunicaba (preguntas cerradas). Generando básicamente intercambios de dos intervenciones tipo pregunta-respuesta; es decir, intercambios simples o intercambios de inducción de respuesta. Con este tipo de preguntas, los profesores generaron un intercambio/interacción de baja exigencia cognitiva hacia sus alumnos. Asimismo encontramos que las intervenciones interrogativas de los niños, en general, representaron un proporción muy bajo en los diálogos que se generaron entre ellos y su profesor.

Con respecto al uso del lenguaje no verbal, que actúa como regulador del proceso de comunicación contribuyendo a ampliar o reducir el significado de los mensajes orales, se identificó más recurrencia en el uso de movimientos de tipo reguladores en los nueve profesores. Entre ellos se destacan levantamiento frecuentemente de mano para señalar a los alumnos, indicar en el pizarrón, identificar partes de algún ejercicio o ejemplo, asentir en señal de aprobación o bien como mecanismo de control disciplinario.

Sólo cuatro profesores utilizaron más gestos ilustradores como apoyo a sus expresiones verbales, pese a las bondades que desde la teoría se indica. Entre los movimientos de este tipo destacamos los corporales tanto de brazos como de manos con movimiento circulares

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

para reforzar la idea de juntar/agregar o bien separar/quitar, y gestos faciales de aprobación -como sonrisas o miradas- que favorecieron el tipo de comunicación dialógica.

En tres de los nueve profesores se identificó una postura abierta y flexible; mantuvieron en todo momento apertura hacia sus receptores -los alumnos- para lograr un clima favorable de aula que posibilitara el flujo de información de ida y vuelta (E $\leftrightarrow$ R). La mirada bien orientada de estos profesores no sólo permitió captar la atención inicial en clase, sino que ayudó a mantener la atención de la mayoría de los alumnos a lo largo de la misma, sintiéndose parte de la clase. Con respecto a los siete profesores restantes, referimos que la mayoría de ellos se concentraron sólo en algunos sectores del grupo (generalmente la parte delantera) o bien en quien contestaba esporádicamente; se generaron pocas reacciones de su parte ante las actitudes mostradas por sus alumnos.

En relación al posicionamiento del escenario (proxémica), se identificó que solamente un profesor se integró físicamente a las actividades de los alumnos, ocupando un lugar en la mesa de trabajo junto a ellos, hecho que se puede identificar como una expresión no sólo de su rol como docente y posicionamiento dentro del aula, sino de su perspectiva pedagógica hacia el tratamiento de los temas conforme al enfoque didáctico propuesto desde el plan de estudios vigente. Por el contrario, tres profesores no eliminaron las barreras espaciales que lo separaban de sus alumnos (al frente junto al pizarrón y escritorio), y dos en menor medida, al circular por las filas en determinadas actividades. Durante estas clases, la mayoría de los alumnos poco a poco perdieron el interés por lo que se estaba realizando o bien cuando algún compañero participaba al frente para resolver algún problema o ejercicio propuesto por el profesor.

A manera de Conclusión

Pese a la implementación del Plan de estudios 2011, en el que se pone de manifiesto un enfoque constructivista y al alumno como centro del proceso E-A, se identifica en el estudio que en cinco de los nueve profesores participantes existe aún un arraigo hacia las concepciones didácticas en las que la enseñanza instructiva, es prioritaria. El tratamiento de los contenidos matemáticos escolares en estos profesores se caracterizó por el seguimiento de reglas y procedimientos para la solución de problemas, la práctica rutinaria de ejercicios más que de situaciones de aprendizaje.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Conforme al análisis de los datos, se concluyó que los problemas *Memorísticos* fueron los más utilizados por los profesores para dar seguimiento al currículum escolar. Trabajados con base a contextos alejados de la cotidianeidad de los alumnos y con un uso limitado de mediadores y andamiajes que llevaran al alumno a la construcción de aprendizajes matemáticos escolares. El planteamiento de este tipo de problemas trajo consigo el flujo de información eminentemente instructiva y explicativa. Los alumnos por su parte, tuvieron limitadas oportunidades para elegir, utilizar y socializar procesos de solución ante los problemas presentados en las clases; sus acciones se limitaron a reproducir patrones algorítmicos en busca respuestas a los ejercicios planteados. Por otra parte, la mayoría de los profesores desaprovecharon las bondades que ofrece el buen uso del lenguaje no verbal, para favorecer el proceso E-A.

Las formas de enseñanza de la mayoría de estos profesores independientemente del contexto, del tipo de organización de las instituciones, de la antigüedad en el sistema y el tipo de contratación, reflejan limitado apego a lo establecido desde el enfoque metodológico propuesto. Se identificó una resistencia al cambio, a la transformación de formas más efectivas que favorecieran la construcción social de conocimientos escolares, haciendo uso de contextos comunicativos más efectivos para tal efecto.

Referencias bibliográficas

De Longhi. A. L. (2011). *La comunicación en el aula*. Colección de Cuadernillos de Actualización para pensar la Enseñanza Universitaria. Año 6. No. 2. Argentina: Universidad Nacional del Río Cuarto.

Freire, P. (2010). *Cartas a quien pretende enseñar*. México: Siglo XXI Editores.

Martínez, R.A. (2007). *La Investigación en la Práctica Educativa: Guía Metodológica de Investigación para el Diagnóstico y Evaluación de los Centros Escolares*. Madrid: (CIDE).

OCDE. (2013). *Panorama de la educación 2013. Indicadores de la OCDE*. España: Santillana Educación.

SEP. (2012). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro*. Educación Básica. Primaria. Primer grado. México: SEP.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-887

A PRÁTICA PEDAGÓGICA EM MATEMÁTICA E SUAS POSSÍVEIS IMPLICAÇÕES PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

Niusarte Virginia Pinheiro - Samira Zaidan
niusarte@gmail.com - samira@fae.com.br
Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG /Brasil

Núcleo temático: IV - Formação de Professores de Matemáticas.
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras-chave: prática pedagógica; formação inicial docente; educação matemática.

Resumo

Neste trabalho o objetivo foi analisar a prática pedagógica em três disciplinas de conteúdo específico matemático - Variável Complexa, Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico e Geometria Espacial - em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal brasileira e as possíveis implicações dessa prática para a formação docente, numa perspectiva crítica. Trata-se de dados obtidos da pesquisa de doutorado intitulada "Avaliação dos processos de ensinar e aprender na Licenciatura em Matemática: o olhar dos discentes". Foram utilizados, como procedimentos metodológicos, análise documental, observação de aulas, entrevista semiestruturada e rodas de conversas com estudantes. Todas as aulas das disciplinas mencionadas foram observadas durante um semestre letivo, contando com a anuência dos docentes e dos discentes, que assinaram o termo de consentimento e os registros foram feitos manualmente. Constatou-se a predominância de aulas no modelo expositivo com demonstrações de teoremas, seguidas de exercícios e a aplicação de provas, visando à aprovação ou à reprovação do estudante. Podem-se considerar as aulas numa perspectiva de prática tradicional de ensino e aprendizagem, sem articulação com a educação como prática social. A título exploratório, analisou-se como tal prática poderá implicar na reprodução de contramodelos de docência.

Introdução

Neste trabalho, o objetivo foi analisar a prática pedagógica de docentes que ministram disciplinas de conteúdo específico matemático em um curso de Licenciatura em Matemática e as possíveis implicações para a formação dos futuros professores. As análises aqui apresentadas são parte dos dados de uma pesquisa de doutorado intitulada "Avaliação dos processos de ensinar e aprender na licenciatura em Matemática: o olhar dos discentes", realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão

ISBN 978-84-945722-3-4

Social, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, MG, Brasil.

Cabe ressaltar que tanto os professores quanto os estudantes participantes da pesquisa foram esclarecidos sobre a identidade da pesquisadora, os objetivos da investigação, bem como foi concedida permissão para a sua realização. Os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme Parecer do Conselho de Ética na Pesquisa (CEP), nº 2.172.826.

Os dados foram coletados em uma Instituição Federal de Educação Superior (IFES), no Brasil, por meio de observação direta das aulas de três disciplinas de conteúdo específico matemático, durante um semestre letivo, sendo elas Variável Complexa (60 h/a), Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico (90 h/a) e Geometria Espacial (60 h/a). Essas disciplinas são obrigatórias para o curso investigado, a partir do 4º semestre.

O olhar investigativo foi direcionado para as ações e as decisões que o professor toma na condução do seu trabalho nas aulas, incluindo a organização, a execução e o acompanhamento da tríade ensinar-aprender-avaliar em sua prática pedagógica. Assim, as aulas observadas nas disciplinas citadas foram analisadas tomando-se como referência a concepção pedagógica que expressa.

Da prática pedagógica à formação para a docência.

Partiu-se do pressuposto de que a prática pedagógica vivenciada na academia, durante a formação inicial, poderá ser transferida para a prática pedagógica do futuro professor de Matemática na educação básica, ou seja, como afirma D'Ambrósio (2016, p.226), "nosso fazer serve de exemplo para as gerações futuras". Nessa perspectiva foi analisada a prática dos docentes.

Como Caldeira e Zaidan (2010), advoga-se, aqui, em favor de uma concepção de prática pedagógica na perspectiva dialética ou histórico-crítica, em que a realidade é concebida como totalidade concreta, um todo com estrutura própria, em constante transformação, ou seja, uma prática social. As autoras, apoiadas em Carvalho e Paulo Netto (1994), esclarecem que a prática pedagógica é determinada por um jogo de forças - interesses, motivações, intencionalidades -, bem como pelo grau de consciência, a visão de mundo, o contexto, as necessidades e as possibilidades dos atores envolvidos no processo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para desenvolver o trabalho docente na perspectiva crítica, faz-se necessário conceber a prática pedagógica democrática, dialógica, reflexiva. Nessa visão, o processo de construção dos conhecimentos é entendido como ação de seus atores - alunos e professores - numa leitura crítica da realidade. Trata-se de um “movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer” (Freire, 2004, p.38).

Tomando como referência o estudo de Canôas (2015), a educação do professor formador, sua consciência e seu compromisso são aspectos centrais na formação inicial do professor de Matemática. Estes aspectos indicam a necessidade de uma reflexão sobre a formação docente e a prática pedagógica no curso de Licenciatura em Matemática, especialmente a prática dos professores de disciplinas de conteúdos especificamente matemáticos. Isso porque, não raro, nestas disciplinas, os índices de reprovação e evasão têm sido historicamente elevados em nosso país. O mais grave dessa história é que, satisfeitos e insatisfeitos convivem mais ou menos harmoniosamente com este baixo desempenho, com conflitos eventuais, mas efetivamente aceitando a situação de grande abandono do curso, já nos primeiros anos da graduação (Zaidan, 1993).

Pelo exposto, questiona-se: qual concepção predomina na prática dos professores de conteúdo específico matemático? Quais as implicações da prática pedagógica desses professores para a formação docente?

Esses questionamentos são pertinentes porque, como afirma Fischer (2008, p. 77), “ainda é comum encontrar, entre os professores de matemática, principalmente no ensino superior, apenas formatos tradicionais de conduzir uma aula”. Para a autora, o formato tradicional “é aquela sequência do tipo: exposição da matéria no quadro, apresentação de algum exemplo e, em seguida, uma lista de exercícios para os alunos”.

Pesquisadores como Villas Boas (2005), Freire (2004), Cunha (2005), Viana (2015), d’Ávila (2007, 2015), Fischer (2008) e Canôas (2015) sinalizam que o que os alunos, futuros docentes, vivenciam durante a formação poderá exercer influência em sua atuação acadêmica posterior. Nesse sentido, Paulo Freire (2004, p.23) é enfático ao afirmar que

> Se, na experiência de minha formação [...], começo por aceitar que o *formador* é o sujeito em relação a quem me considero o *objeto*, que ele é o sujeito que *me forma* e eu, o *objeto* por *ele formado*, me considero como paciente que recebe os conhecimentos-conteúdos-acumulados pelo sujeito que sabe e que são a mim transferidos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

De acordo com este mesmo autor, essa forma de compreender o processo formador poderá trazer implicações para a formação do docente, pois "[...] eu, objeto agora, terei a possibilidade, amanhã, de me tornar o falso sujeito da "formação" do futuro objeto de meu ato formador". (Freire, 2004, p. 23).

Contudo, o estudante, particularmente o licenciando, durante o seu processo formativo, tem a oportunidade de vivenciar práticas progressistas e tradicionais, ou, na concepção de d'Ávila (2015), modelos e contramodelos de docência. Referindo-se aos modelos de docência, esta autora afirma que

> Os estudantes em formação, assim como professores, já na ativa, vão nos contar sempre histórias em que os modelos de professores vêm à tona como sujeitos que marcaram suas vidas. E o interessante é que as qualidades que os primeiros atribuem aos seus professores marcantes são aquelas que eles próprios *pretendem ou reproduzem no exercício da profissão*, denotando assim um certo sentimento de filiação. (d'Ávila, 2007, p.229) (Grifo nosso).

Com relação aos contramodelos, a autora acrescenta que

> Existe ainda aqueles que são considerados contra-modelos, ou aqueles professores dos quais não se guarda boas memórias e que não se pretende reproduzir. São *exemplos fortes de como "não fazer" ou de como "não ser"*. Enfim, são modelos diversos que marcam porque não correspondem aos ideais da profissão concebidos pelos estudantes. (d'Ávila, 2007, p.229) (Grifo nosso).

Isto posto, apresentam-se, a seguir, observações empíricas sobre as aulas acompanhadas/observadas, tecendo-se considerações sobre as possíveis implicações dessas práticas para a formação dos futuros professores de Matemática.

A prática pedagógica e seus possíveis reflexos na formação do futuro professor

As observações de aula evidenciaram que na prática pedagógica das disciplinas investigadas predominam as aulas expositivas, com o uso do quadro para anotações, demonstrações, explicações, exemplos, intercalando com perguntas, quase sempre retóricas, dirigidas para toda a turma. As aulas transcorrem com algumas perguntas, vez ou outra; na maior parte do tempo os alunos ficam em silêncio, copiando do quadro ou acompanhando a explicação pelo livro, fotografando as anotações com o celular. Cada aula é um conteúdo novo, sequência da

ISBN 978-84-945722-3-4

aula anterior, visando executar todo o programa previsto. Ao finalizar as explicações de cada conteúdo, os docentes disponibilizam as listas de exercícios. O relato a seguir, construído a partir do diário de campo, apresenta um modo que se mostrou comum em nossas observações.

> Dia 26 de setembro de 2016. Disciplina Geometria Plana e Desenho Geométrico. (14:55 às 16:35 h) Conteúdo: Semelhança de triângulo/demonstração do Teorema de Pitágoras. (Araújo, 1998, p. 53-55). 16 alunos presentes. O professor entra na sala, cumprimenta os presentes, dirige-se para a mesa na frente do quadro, faz a chamada nominal dos alunos e avisa que colocou uma lista de exercícios na página dele na internet. Em seguida, dirige-se para o quadro e inicia a demonstração do teorema, anotando e explicando. Uma aluna solicita que o professor explique novamente a demonstração. O professor retoma a explicação utilizando as anotações que estão no quadro. Quando conclui, questiona, olhando para todos os alunos: *Tá bom? Tem outras perguntas?* Os alunos permanecem em silêncio. O professor coloca-se à disposição para responder perguntas, esclarecer dúvidas. Um estudante pede para repetir a explicação sobre transportação de ângulos. O professor atende à solicitação e, ao concluir, pergunta: *Agora melhor?* O aluno responde: *hum hum*. Outro aluno solicita que o professor resolva o exercício 17 do livro (Araújo, 1998, p. 45). Ele resolve explicando e anotando no quadro e, ao concluir, questiona a turma mais uma vez: *Tem mais perguntas?* Ninguém responde e o professor encerra a aula. (Diário de campo).

Essa forma de reger a aula conduz ao que Bourdieu e Passeron (1982) chamam de modelos regrados e institucionalizados de comunicação e que fornecem o protótipo da mensagem pedagógica. Esses modelos, nas palavras do autor, “organizam uma aprendizagem orientada para um tipo particular de prova escolar” (p. 154).

Por meio das observações, constatou-se certa padronização na elaboração e na aplicação de provas, sendo de três a seis questões com ou sem consulta, tomando como referência os exercícios utilizados nas listas ou semelhantes e/ou modelos de provas fornecidos pelo professor, “visando à exatidão do conteúdo comunicado em sala de aula”, como aponta Mizukami (1986, p.17).

As observações evidenciaram, conforme Mizukami (1986), a predominância de uma prática pedagógica tradicional de transmissão de conteúdos em sala de aula, instrutiva, caracterizada pelo verbalismo do professor e pela memorização do aluno. As decorrências desse tipo de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

prática para os estudantes podem ser constatadas por meio das notas baixas e, consequentemente, nos elevados índices de reprovação e evasão nas disciplinas observadas.

Considerando estas reflexões, questiona-se: que fatores contribuem para a perpetuação de práticas pedagógicas tradicionais, exclusivas, especialmente nas disciplinas de conteúdo específico matemático? Nos conceitos de campo e *habitus,* de Bourdieu (1989), é encontrada uma possível explicação para a persistência dessas práticas. Para o autor, a maior parte das ações dos sujeitos é resultado da interdependência entre um *habitus* e um campo (Setton, 2002).

Pierre Bourdieu (1989) define campo como espaços estruturados e hierarquizados nos quais seus agentes - indivíduos e grupos - lutam para conservar ou transformar o poder simbólico. O *habitus* é constituído no interior do campo, seu local de socialização, por meio do poder simbólico que, de forma impositiva, atribui significados que os tornam legítimos. Nesse processo, os símbolos se afirmam na noção de prática, no caso em tela, a prática pedagógica, tornando viável a sua reprodução.

Nas palavras de Setton (2002, p. 63), estudiosa da teoria de Bourdieu, o *habitus* deve ser entendido como "um conjunto de esquemas de percepção, apropriação e ação que é experimentado e posto em prática, tendo em vista que as conjunturas de um campo o estimulam."

Nesse sentido, conforme esclarece Cunha (2005, p. 94), os professores foram alunos de outros professores durante a sua formação e, nesse processo, vivenciaram mediações de valores e práticas pedagógicas e "absorveram visões de mundo, concepções epistemológicas, posições políticas e experiências didáticas. Por meio delas foram se formando e organizando, de forma consciente ou não, seus esquemas cognitivos e afetivos que acabaram dando *suporte para sua futura docência".* (Grifo nosso)

Referindo-se a área de Matemática, Fischer (2008, p. 76) esclarece que

> [...] parece natural que os professores tragam uma *concepção sobre a matemática desenvolvida durante sua formação*, que costuma ser a de uma ciência formal, fechada, consistente em si mesma, rigorosa em suas demonstrações, sem possibilidade para diferentes interpretações. Dessa forma, parece também natural que essas caraterísticas sejam *incorporadas à sua prática docente*. (Grifo nosso)

ISBN 978-84-945722-3-4

Se aplicada a teoria de Bourdieu, especialmente os conceitos - interdependentes - de campo e *habitus* à área de Matemática, observa-se que, "durante toda a sua trajetória de vida, o professor vai desenvolvendo crenças e valores, muitos dos quais são fortalecidos em sua prática docente e reforçados, muitas vezes, por colegas, pela escola e pela universidade". (Fischer, 2008, p. 76), ou seja, o *habitus* do professor de Matemática. A título ilustrativo, citam-se as palavras de Fischer (2008, p. 97), segundo o qual "a concepção de que o domínio do conteúdo supera a necessidade de outros saberes, relacionados à prática docente".

Reflexões finais

Por meio das observações das atividades das disciplinas mencionadas, constatou-se o predomínio de uma prática pedagógica tradicional, centrada no professor, ou seja, "o professor já traz o conteúdo pronto e o aluno se limita, passivamente, a escutá-lo (Mizukami, 1986, p. 15). Nesse contexto, chamam a atenção os mecanismos de reprodução da prática pedagógica tradicional no processo de formação docente. Se o licenciando, durante sua formação, vivenciou predominantemente o modelo de docência em que há a valorização dos conteúdos específicos em detrimento dos pedagógicos e ao estudante cabe a reprodução do que lhe foi transmitido, como poderá desprender-se desses mecanismos de reprodução na sua atuação futura? Seria *o habitus* do campo assimilado pelos estudantes?

Em outras palavras, assim como indicam os estudiosos referenciados neste texto, considerando que o professor formador exerce sua prática tomando como referência sua vivência enquanto estudante, essa prática poderá refletir na formação do futuro professor da educação básica, engessando um contramodelo de docência. Sabe-se que não é fácil modificar concepções, práticas pedagógicas tradicionais seculares dos professores de Matemática, isto é, o *habitus*, no dizer de Bourdieu (1989). Contudo, para mudar práticas tão arraigadas, faz-se necessário oportunizar condições para que os docentes tomem consciência de suas concepções. Em outras palavras, "a reflexão, necessária a uma mudança terá que ser realizada com base nas concepções ou nos elementos constitutivos do *habitus* do professor de matemática". (Fischer, 2008, p. 98).

Por fim, é importante esclarecer que, quando o estudante de licenciatura inicia o curso, já traz em sua bagagem conhecimentos de suas experiências pessoais, construindo concepções prévias, modelos e representações do trabalho docente, que o acompanham durante toda a

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

sua vida estudantil, desde o ensino fundamental e médio. Os futuros professores não irão construir suas concepções pedagógicas tomando como referência apenas o curso de licenciatura, mas as influências nele recebidas poderão contribuir para a reprodução de práticas desarticuladas da educação como prática social e do conhecimento como produção histórica e social.

Referências

ARAÚJO, P. V. (1998). Curso de Geometria. Gradiva Publicações LTDA: Lisboa/Portugal.

Bourdieu, P. (1989). *O poder simbólico.* Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Bourdieu, P., & Passeron, J. C. (1982) *A reprodução: elementos para uma teoria do sistema de ensino*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

Caldeira, A. M. S., & Zaidan, S. (2010). Prática pedagógica. In: D. A. Oliveira, A. C. Duarte& L. M. F. Vieira(Org.). *Dicionário:trabalho, profissão e condição docente*. Belo Horizonte: GESTRADO/FAE/UFMG.

Canôas, S. S. (2015) Profissão e docência no século XXI: o professor de matemática em pauta. In N. V. Pinheiro, et al (Orgs). *Educação Matemática: diálogos teóricos e metodológicos.* (Cap. 1, pp. 11-29). São Paulo: Opção.

Carvalho, M. do C. B., &Paulo, J. Netto (1994) *Cotidiano: conhecimento e crítica*. São Paulo: Cortez.

Cunha, M. I. (2005) Avaliação e poder na docência universitária: campos legitimados e saberes silenciados. InM. I. Cunha, (Org). *Formatos avaliativos e concepção de docência.* (Cap. 4, pp. 93-116). Campinas/SP: Autores Associados.

D'Ambrósio, U. (2016) A Metáfora das Gaiolas Epistemológicas e uma Proposta Educacional. *Perspectivas da Educação Matemática*, *9* (20),222-234. http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/issue/view/150. Consultado 03/01/2017.

D'Ávila, C. M. (2015). Didática: a arte de formar professores no contexto universitário. InC. M. D'Ávila, &I. P. A. P. Veiga, I. P. A. (Orgs). *Didática e docência na educação superior: implicações para a formação de professores*. (Cap. 1, pp. 15-30). Campinas/SP: Papirus.

D'Ávila, C. M. (2007) Universidade e formação de professores: qual o peso da formação inicial sobre a construção da identidade profissional docente? In A. D. Nascimento.,&T. M. Hetkowski (Orgs). *Memória e formação de professores* [online]. Salvador: EDUFBA. http://books.scielo.org Consultado 23/02/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fischer, M. C. B. (2008). Os formadores de professores de Matemática e suas práticas avaliativas. In W. R. Valente (Org). *Avaliação em Matemática: história e perspectivas atuais.* (Cap.3, pp.75-100). Campinas/SP: Papirus.

Freire, Paulo. (2004) *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

Mizukami, M. da G. N. (1986). *Ensino: as abordagens do processo*. São Paulo: EPU.

Setton, M. da G. J. (2002) A teoria do *habitus* em Pierre Bourdieu: uma leitura contemporânea. *Revista Brasileira de Educação,* (20), 60-70.

Viana, C. M. Q. Q. (2015). Reflexões sobre avaliação da aprendizagem na visão de alunos de graduação. In C. M. D'Ávila. & I. P. A. P. Veiga (Orgs). *Didática e docência na educação superior: implicações para a formação de professores*. (Cap, 4, pp.61-82). Campinas/SP: Papirus.

Villa Boas, B. M. de F. (2005). Práticas avaliativas no contexto do trabalho pedagógico universitário: formação da cidadania crítica. In: I. P. A. Veiga, & M. L. de P. Naves(Orgs). *Currículo e avaliação na educação superior.* (Cap,7, pp.149-173). Araraquara/SP: Junqueira & Marin.

Zaidan, S. (1993). *A formação do professor de Matemática: uma discussão do curso de Licenciatura da UFMG*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

ISBN 978-84-945722-3-4

“GEOMETRIA GAUDIANA”: UM ESTUDO DAS SUPERFÍCIES REGRADAS NAS OBRAS DE ANTONI GAUDI UTILIZANDO O GEOGEBRA

André Lúcio Grande
andreluciogrande@gmail.com
Colégio São Marcos Mogi das Cruzes - Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem da matemática
Modalidade: CB
Nivel educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Superfícies Regradas, Geometria Analítica, GeoGebra, Visualização

Resumo

O estudo das curvas e superfícies em Geometria Analítica, nos diferentes níveis de ensino, abrange uma série de conceitos e situações-problema que podem ser explorados em sala de aula. Particularmente, as superfícies regradas como o hiperbolóide ou o parabolóide hiperbólico, apresentam diversas aplicações no cotidiano, quer seja na engenharia, arquitetura, artes ou na construção de objetos. Com isso, este trabalho objetiva apresentar uma proposta de ensino das superfícies regradas analisando algumas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi, explorando suas propriedades algébricas e geométricas utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra. O referencial teórico empregado nessa pesquisa baseia-se nos princípios e ideias ligadas ao papel da visualização e suas inter-relações com a intuição e o rigor de acordo com David Tall. Como procedimentos metodológicos, elaborou-se utilizando o GeoGebra uma intervenção de ensino buscando introduzir os conceitos de curvas e superfícies a partir de algumas obras de Gaudi tendo como público-alvo estudantes do Ensino Médio e Superior. Como resultados, evidenciamos que a construção de maquetes das superfícies bem como o uso do GeoGebra como recurso pedagógico possibilitou não somente visualizar como "concretizar" os objetos matemáticos de estudo bem como auxiliou em grande medida sua compreensão e formalização.

1. Noção de Superfície e a importância da visualização

O que é uma superfície e como caracterizá-la? Ao efetuarmos essas indagações, estamos abordando um dos conceitos fundamentais da Geometria e que possui uma diversidade muito grande de abordagens a aplicações, quer seja no Cálculo Diferencial e Integral, na Geometria Euclidiana, Analítica, Diferencial ou Topologia, por exemplo.

Quando desejamos definir ou descrever uma superfície quase que inevitavelmente caímos da redundância da utilização do próprio termo ou evocamos uma superfície plana como

ISBN 978-84-945722-3-4

exemplo. Uma superfície pode ser definida como um conjunto de pontos do espaço euclidiano, sendo bidimensional e que qualquer ponto da mesma pode ser descrito localmente por duas coordenadas. Utilizando-se intuitivamente de analogias físicas, podemos obter por exemplo outras superfícies pela deformação ou rompimento de uma folha de papel ou a colagem de alguns pedaços de papel.

Quanto às aplicações, destacamos sua utilização em diversas áreas, como a arquitetura, por exemplo, na construção de estruturas que se utilizam de suas propriedades geométricas. Esse fato pode ser observado nas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi (1852 – 1926), que se utilizou desprovido de qualquer formalismo de maneira empírica e intuitiva das chamadas superfícies regradas, que de um modo geral são aquelas formadas por retas, como o parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide de uma folha.

Podemos considerar, em grande medida, que essa relação entre arte, arquitetura e geometria propicia um contexto muito rico e alternativo envolvendo uma série de conceitos que podem ser explorados em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. Esse estudo envolve aspectos ligados à visualização das propriedades algébricas e geométricas dessas superfícies aliados à questão da intuição e do rigor.

Sobre esse fato, segundo Grande (2013,) podemos considerar de um modo geral que a questão da visualização na Matemática foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

Em seus trabalhos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, Tall (2002) discute o papel da visualização do contexto do Cálculo nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor. Segundo o autor:

> Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (Tall, 2002, p. 20 – tradução nossa).

Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou. Esse fato pode ser levado em consideração no estudo das superfícies regradas, no sentido de auxiliar sua compreensão e formalização.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Sendo assim, a presenta pesquisa objetiva apresentar e discutir uma proposta de ensino das superfícies regradas analisando algumas obras do arquiteto catalão Antoni Gaudi, explorando suas propriedades algébricas e geométricas levando em conta aspectos ligados à visualização utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra.

2. Gaudi e as superfícies regradas

No final do século XIX, a Segunda Revolução Industrial promoveu o progresso em muitas cidades da Europa, com destaque para as indústrias química, elétrica, petrolífera e do aço.

A Exposição Universal, sediada na cidade de Barcelona em 1888, apresentou uma série de experimentos como resultado de muitas descobertas científicas na área dos transportes, produção industrial, entre outros.

Nessa cidade o arquiteto catalão Antoni Gaudi (1852-1926), influenciado pelo movimento modernista da época inspirou-se em formas presentes na natureza na construção de estruturas como soluções de problemas arquitetônicos. O autor vê na natureza a fonte de todo o saber, pois para o mesmo a arte é filha da natureza e que ser original é voltar às origens, ou seja, à própria natureza.

Para Gaudi, não existe estrutura sem forma, não existe forma sem estrutura, e essa relação entre forma e estrutura se faz por meio da geometria. Isso faz com que o arquiteto se aproprie da geometria sintética para a construção de objetos e edificações. Suas técnicas baseiam-se em experimentos empíricos, em que se construíam maquetes em escala e as submetiam a esforços empregando pesos (bolas de chumbo, em proporções de carga) utilizando modelos geométricos que retratavam seu percurso por uma geometria inspirada na percepção analítica dos elementos da natureza.

Gaudi faz uso das denominadas superfícies regradas, que segundo o mesmo de um modo geral representam a síntese de todas as possibilidades de criação dos espaços arquitetônicos. Essas superfícies são formadas por retas, o que torna o seu estudo extremamente interessante, pois mesmo essas superfícies sendo “curvadas” como o parabolóide hiperbólico, helicoide, conóide ou hiperbolóide de uma folha, podemos construí-las a partir de retas.

Faremos a seguir uma descrição sobre uma proposta de ensino sobre as principais características das superfícies regradas utilizando como recurso auxiliar o software GeoGebra.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Fundamentação Teórica

As superfícies podem ser classificadas de várias maneiras, tais como superfícies de revolução, paralelas, mínimas ou regradas.

Do ponto de vista intuitivo, a palavra regrada significa sujeita a regras. Uma superfície regrada é aquela é ser formada por retas, o que lhe confere uma "regra" própria para ser gerada. Uma propriedade dessas superfícies consiste no fato de que sendo as mesmas formadas por retas, sua construção pode ser considerada mais simples, o que pode explicar em grande medida sua utilização em soluções tal como Gaudi em suas obras.

Podemos definir uma superfície regrada da seguinte maneira: Uma superfície S é *regrada*, se para cada ponto P de S, existir uma reta L, que contém P e pertence a S. Como exemplo de superfícies regradas, temos: cilindro, cone, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, helicóide ou conóide.

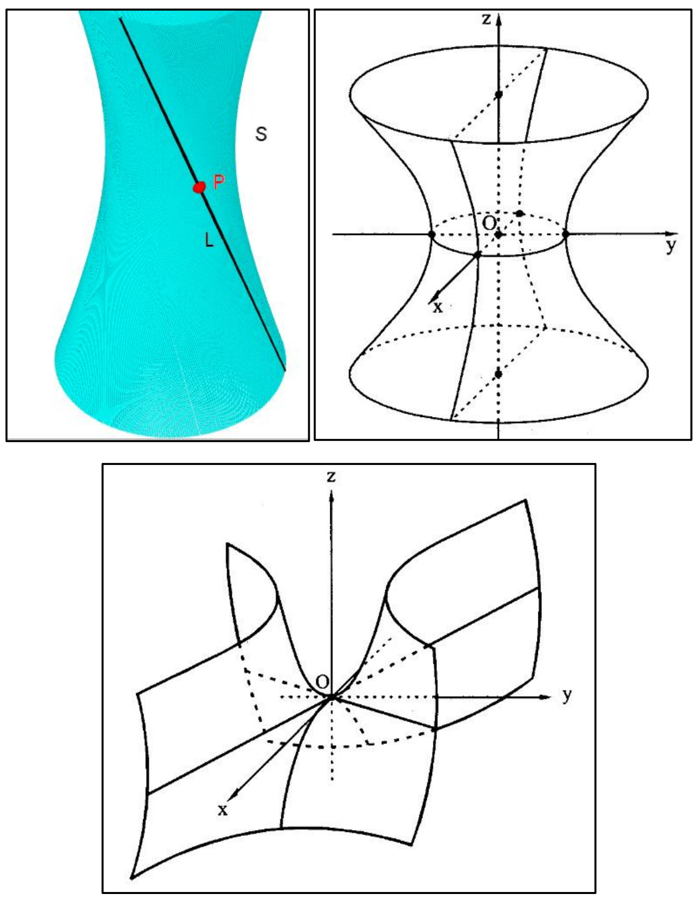


Figura 01 – Superfícies regradas
Fonte – Autor (2017)

ISBN 978-84-945722-3-4

Para que as superfícies regradas possam ser estudadas, no intuito de permitir uma melhor visualização de suas propriedades geométricas, neste trabalho elaborou-se a construção de maquetes que representem de maneira concreta as superfícies em questão utilizando-se de materiais simples como cartolina, isopor e palito de madeira, que representam as retas geradoras da superfície.

Para a presente pesquisa, as maquetes foram construídas pelos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos de Mogi das Cruzes, em que se abordou em uma atividade extracurricular a noção intuitiva de superfícies, classificação das mesmas e a discussão da possibilidade de se obter superfícies utilizando-se apenas retas, a partir da obra do arquiteto catalão Gaudi.

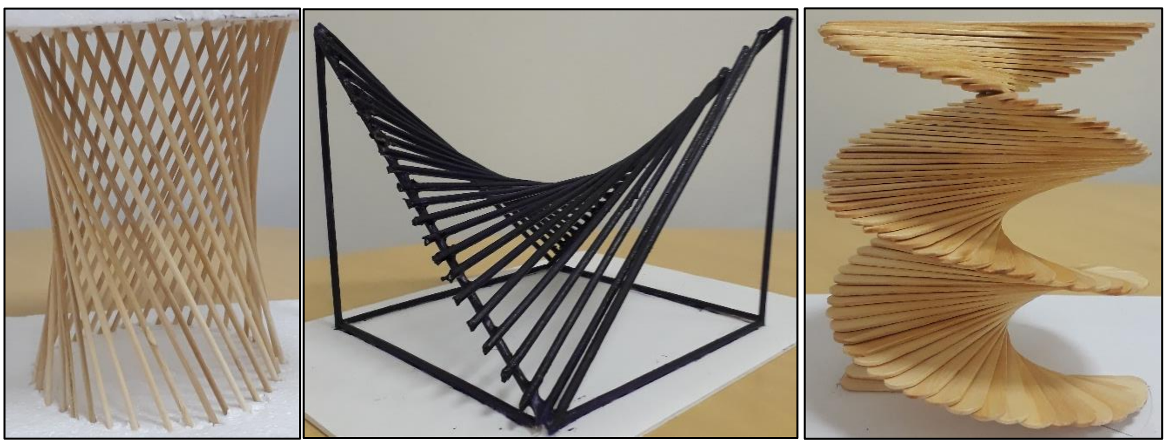


Figura 02 – Maquetes das superfícies regradas (hiperbolóide de uma folha, parabolóide hiperbólico e helicóide).
Fonte – Autor (2017)

A partir das maquetes construída, mostraremos a seguir algumas características dessas superfícies utilizando o software GeoGebra.

3. Superfícies Regradas no GeoGebra

O hiperbolóide de uma folha foi utilizado por Gaudi no teto da igreja da Sagrada Família com a finalidade de se recolher luz e projetá-la para o interior do edifício.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 03 – Hiperbolóide de uma folha (Gaudi)
Fonte – Gaudi Barcelona 1900

O paraboloide hiperbólico foi empregado na construção de abóbadas que permitem a cobertura de grandes espaços sem a necessidade de pilares ou colunas, propiciando dessa forma uma maior liberdade de espaço. Além disso, utilizou-se também para facilitar o escoamento das chuvas, pois as mesmas formam uma combinação de curvas que vão para cima e para baixo num formato de sela.

Figura 04 – Parabolóide hiperbólico (Gaudi)
Fonte – Gaudi Barcelona 1900

Nessa presente pesquisa vamos nos restringir a apresentar o estudo do hiperbolóide de uma folha utilizando o GeoGebra destacando aspectos da visualização e formalização dessa superfície.

O hiperbolóide de uma folha pode ser visualizado como um sólido obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do eixo Oz, sendo representado analiticamente pela seguinte equação:

ISBN 978-84-945722-3-4

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com a, b e c constantes reais não nulas.

A demonstração dessa equação pode ser feita nas aulas de Geometria Analítica ou Cálculo, fugindo do escopo dessa pesquisa, que procurou enfatizar as propriedades geométricas da superfície. Podemos inserir no GeoGebra a equação do hiperbolóide conforme figura a seguir:

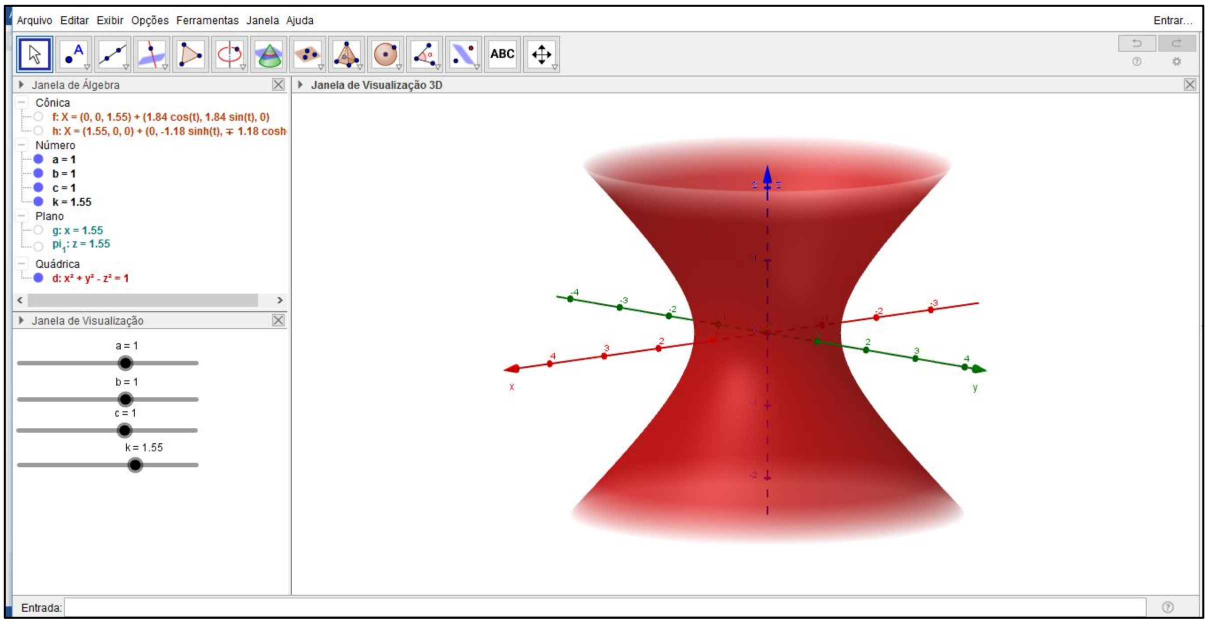


Figura 05 – Hiperbolóide de uma folha no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

Podemos explorar as seções que se obtém interseccionado o sólido por planos paralelos e conjecturar quais são os traços ou curvas de nível obtidas nesse plano. Para isso, vamos considerar que ao intersecionarmos com um plano π e sendo *k* uma constante real temos as seguintes possibilidades:

a) O plano π é paralelo ao plano *xy* ($z = k$) obtemos elipses (no caso em que $a = b$ temos uma circunferência);

b) O plano π é paralelo ao plano *yz* ($x = k$) ou paralelo ao plano xz ($y = k$) obtemos hipérboles.

Essas propriedades podem ser formalizadas algebricamente ao substituímos nos casos em que $z = k$, $x = k$ *ou* $y = k$ na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ obteremos, respectivamente, equações

ISBN 978-84-945722-3-4

da elipse (ou circunferência) e da hipérbole. Essas seções podem ser visualizadas no GeoGebra conforme a figura a seguir:

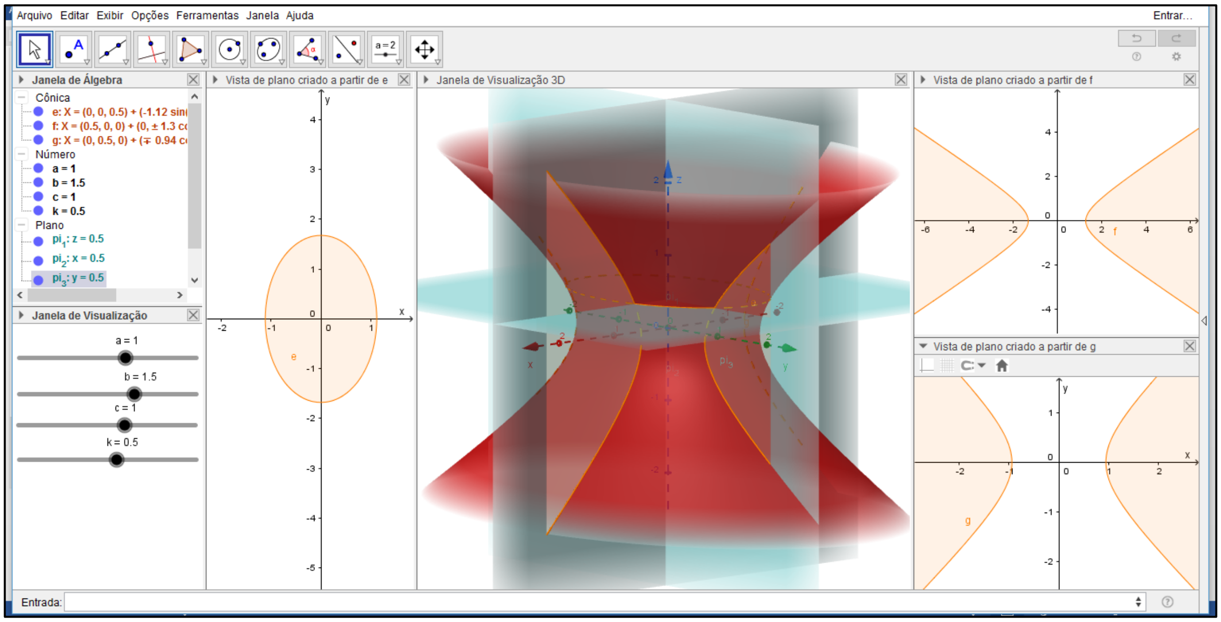


Figura 06 – Seções do hiperbolóide de uma folha no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

A demonstração da propriedade do hiperbolóide de uma folha ser uma superfície regrada algebricamente é razoavelmente trabalhosa, e pode ser encontrada em Camargo e Boulos (2005), por exemplo. Entretanto, para visualizarmos intuitivamente esse fato, além da maquete construída pelos estudantes, podemos considerar o hiperbolóide gerado por uma família de retas que tem como curva diretriz a circunferência $\alpha(t)$, com centro na origem de raio r e cujo vetor diretor é igual a $v(t) = \alpha'(t) + e_3$, sendo $\alpha'(t)$ o vetor tangente da curva diretriz e e_3 o vetor canônico (0, 0, 1). Essa situação pode ser ilustrada a seguir no GeoGebra:

ISBN 978-84-945722-3-4

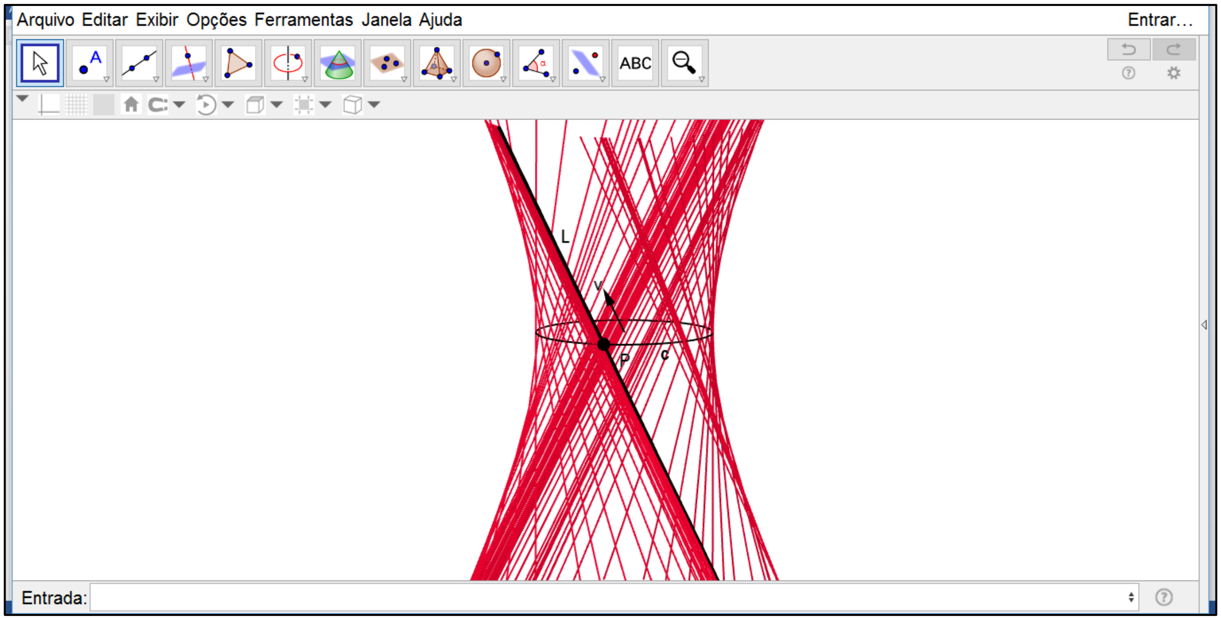


Figura 07 –Hiperbolóide de uma folha como superfície regrada no GeoGebra
Fonte – Autor (2017)

4. Considerações Finais

A introdução ao estudo das superfícies regradas a partir das obras de Antoni Gaudi propiciou um ambiente extremamente enriquecedor para o ensino e aprendizagem da Matemática, levando em conta a possibilidade de discussões dos diversos conceitos interdisciplinares envolvidos entre Arte e Matemática.

A construção de maquetes que representam algumas superfícies regradas se revelou um elemento responsável por "concretizar" o objeto de estudo em questão além de permitir elaborar intuitivamente algumas conjecturas e hipóteses sobre as propriedades geométricas de tais superfícies. Já a utilização do GeoGebra auxiliou simular a obtenção das superfícies regradas como o hiperboloide de uma folha, por exemplo, mostrando sua característica de ser formada por retas, assim como contribuiu na formalização das hipóteses e conjecturas intuídas anteriormente.

Destacamos que o ensino e a aprendizagem da Matemática sedimentados em princípios e ideias ligadas ao uso da intuição e do pensamento visual permitem aos estudantes, em grande medida, uma maior participação na construção do conhecimento científico.

ISBN 978-84-945722-3-4

No caso dos trabalhos de Gaudi concluímos que mesmo se apropriando do uso das superfícies regradas em suas obras inspiradas na natureza sem nenhum formalismo matemático, suas intuições aliadas ao método extremamente criativo tornaram sua "geometria gaudiana" não somente uma grande fonte de soluções para problemas arquitetônicos como uma fonte de situações para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Referências

Camargo, I. Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*.3º ed. rev. e ampl. – São Paulo: Prentice Hall.

Carmo, M. F. (2013). *Introdução ao curso de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA.

Gaudi Barcelona 1900 (2017). Instituto Tomie Ohtake; curadoria Raimon Ramis e Pepe Serra; [tradução espanhol Eugenia Flavian; tradução inglês Julia Lima, John Norman]. São Paulo: Instituto Tomie Ohtake.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.* Tese de Doutoramento. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics.* In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro – Brasil.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-889

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS ALREDEDOR DE LAS NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Sandra Evely Parada Rico – Silvia Johanna Pineda Garavito
sparada@matematicas.uis.edu.co – vidana0619@hotmail.com
Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación de profesores, necesidades educativas, adaptación curricular.

Resumen

La investigación que aquí se reporta aborda la necesidad de incluir en la formación inicial de profesores de matemáticas aspectos sobre las necesidades educativas especiales (NEE). Por ello, uno de los objetivos de investigación es describir significados negociados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a las NEE en clase de matemáticas. El estudio inicia con el análisis del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas de una universidad y no se encuentran asignaturas que hagan referencia al tema en mención. Además, entre las competencias del egresado de la licenciatura aparecen algunas relacionadas con la formación alrededor de las NEE.

Para atender dicha problemática se realiza una adaptación curricular a una asignatura del plan de estudios con el fin de preparar al futuro licenciado para atender la diversidad en el aula. En la asignatura los futuros licenciados realizan un proyecto donde a través de una adaptación curricular esperan favorecer el aprendizaje de una persona con NEE. La propuesta que se reporta está sustentada en una adaptación del Modelo "Reflexión-y-Acción" de Parada (2011), pues el modelo pretende promover procesos de reflexión en comunidades de práctica de educadores matemáticos, como alternativa o complemento al desarrollo profesional de los profesores.

Presentación

Las ideas que aquí se reportan en el marco de este evento, corresponden a los primeros avances de una investigación curricular que analiza la formación inicial de profesores de matemáticas al rededor de la atención a las Necesidades Educativas Especiales (NEE). La investigación, aún en curso, tiene como objetivo describir significados negociados por profesores en formación que reciben instrucción sobre atención a las NEE en clase de matemáticas.

ISBN 978-84-945722-3-4

La investigación en este campo de estudio, reporta la necesidad de formar a los profesores alrededor de la atención a la diversidad, ya sea en su formación inicial o en su formación continuada, con el fin de lograr escuelas para todos (León, 1999). Además, manifiestan que las erróneas concepciones de los profesores son un obstáculo para que se sientan maestros de "todos".

Una de las erróneas concepciones del profesorado mencionadas por León, es pensar que la educación especial consiste en una acción dirigida exclusivamente a los sujetos deficientes, la cual debe realizar exclusivamente personal especializado. Dicha concepción lleva al profesor a pensar que no está capacitado para atender a la diversidad de necesidades que puedan presentar los alumnos. En ese sentido, se podría entender la educación especial de una manera positiva cuando los profesores apuesten por la búsqueda de la riqueza que surge de la diversidad. Entonces es necesario que los profesores conciban que la atención a la diversidad es dar a cada uno de los alumnos de su aula aquello que necesitan. Para ello es preciso valorar las necesidades de todos los alumnos en las distintas áreas de desarrollo y llevar a cabo acciones educativas encaminadas a potenciarlas al máximo las posibilidades de cada uno de ellos.

Al respecto, Aké (2015) expone que hay poca investigación en educación matemática asociada a las NEE y mucho menos desde la línea de formación de profesores. La autora, considera que al respecto aún existe la creencia de la incapacidad que pueden tener los niños con alguna deficiencia para aprender las matemáticas de manera significativa. Investigaciones como la de López (2013), Bruno y Noda (2010) y Villalba (2006) muestran el gran potencial de los niños con NEE asociada a una discapacidad, contradiciendo la falsa creencia de que no pueden aprender. Además, Villalba (2006) y, Bruno y Noda (2010) en sus investigaciones exponen que los profesores manifiestan sentirse insuficientemente preparados, durante sus estudios de formación, para atender a la diversidad en el aula de matemáticas.

Aunque las matemáticas se han inclinado por reconocer las habilidades innatas de las personas para comprender los objetos matemáticos de estudio, tampoco se reconoce que los estudiantes con capacidades o talentos excepcionales requieren una atención especial en el aula y que para ellos también deben prepararse los profesores (MEN, 2006).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En esta última perspectiva se ubica la investigación que aquí presentamos. Desde el contexto de un programa de formación de profesores de Matemáticas, se plantea el diseño de un curso alusivo a la inclusión escolar enfocada en la educación matemática de los estudiantes del programa, con el fin de responder a las necesidades antes expuestas.

Dado que el contexto de investigación se enmarca en la formación de Licenciados en matemáticas de la UIS alrededor de las NEE, nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué elementos curriculares alrededor de las matemáticas y la inclusión escolar deben incorporarse en la formación inicial de profesores de matemáticas?
- ¿Qué aprendizajes consolidan en sus prácticas profesores en formación que reciben instrucción sobre la actividad matemática inclusiva en el aula?

Para responder a dichas preguntas, hemos establecido un modelo teórico que guiará el estudio y el análisis de resultados.

Aspectos teóricos y conceptuales

Para responder las cuestiones expuestas en el apartado anterior, nos apoyamos en el modelo de Reflexión-y-Acción de Parada (2011) para el diseño metodológico del curso de formación y para la categorización de resultados del estudio.

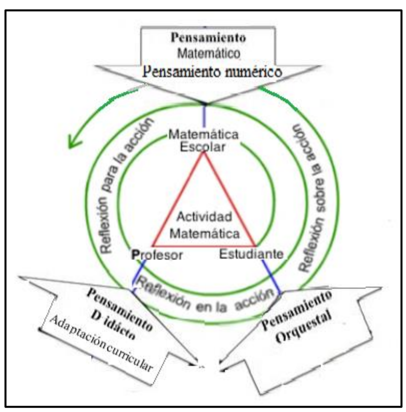


Figura 3. Adaptación del Modelo "Reflexión-y-Acción".

El modelo teórico de Parada (2011) tiene una lectura del exterior al centro (Figura 1). El anillo exterior describe los procesos que son posibles cuando los educadores matemáticos se unen para negociar significados alrededor de su pensamiento reflexivo sobre el área. Las tres flechas que están alrededor de la espiral representan los tres aspectos sobre los cuales se

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas: i) pensamiento matemático; ii) pensamiento didáctico; y iii) pensamiento orquestal.

Sobre los tres aspectos antes mencionados se propone la reflexión antes, durante y después de la clase, los cuales se consideran como procesos de participación-reflexión-acción. Los tres procesos son: a) reflexión-para-la acción, b) reflexión-en-la acción y, c) reflexión-sobre-la acción, y se inicia otra vuelta en espiral.

A continuación se describirán cada uno de los elementos que lo componen.

Actividad matemática. La actividad matemática aquí es entendida en términos de Chevallard, Bosch & Gascón (1997) quienes explican que hacer matemática es un trabajo del pensamiento que construye conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de los conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver esos nuevos problemas, que generaliza y unifica poco a poco esos conceptos en universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran.

Procesos de reflexión. Dentro de este modelo, recuperamos algunas ideas de Dewey (1989) y de Schön (1992) para caracterizar los procesos de reflexión *antes*, *durante* y *después* de la actividad matemática que se desarrolla en la clase, así:

La *reflexión-para-la acción* se produce en la interacción de la matemática escolar y el profesor. Es el análisis que el profesor hace de la actividad que se va a llevar a cabo en el aula. La forma como el maestro planea la clase, como comprende la temática de estudio, como diseña y selecciona los recursos que va a implementar en el aula.

La reflexión-en-la acción está presente en la interacción del profesor y el estudiante cuando el profesor establece esa relación mediática entre el conocimiento y el estudiante; también está presente en la forma como conduce el aprendizaje esperado por parte de los estudiantes y en la capacidad de responder a las situaciones inesperadas de la clase.

La reflexión-sobre-la acción cumple una función crítica de lo ocurrido en el aula; la forma como el profesor evalúa la interacción entre el conocimiento matemático y el estudiante, desde la perspectiva de la consecución de los objetivos de aprendizaje esperados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Aspectos para la reflexión. El modelo propone que los profesores centren sus reflexiones en tres aspectos considerados influyentes en la actividad matemática que ellos promueven en el aula:

Pensamiento matemático: Resulta cuando el profesor necesita hacer uso de sus conocimientos sobre el contenido matemático escolar para desarrollar la práctica profesional. De este modo, es conveniente que el profesor tenga dominio de los contenidos matemáticos que enseña y que además conozca los objetivos de aprendizaje correspondiente al grado en que desempeña su labor docente para que pueda utilizarlos como guía para la enseñanza.

Pensamiento didáctico: Este pensamiento ocurre en las prácticas profesionales del profesor de matemáticas y durante los tres procesos de reflexión: i) *para la acción* al realizar adaptaciones curriculares en la planeación de la clase; ii) *en la acción* (en la clase) durante la conducción de la actividad matemática prevista; y iii) *sobre la acción* al evaluar los aprendizajes de los estudiantes y hacer, nuevamente, adaptaciones curriculares para lo que sigue.

Pensamiento orquestal: El pensamiento orquestal del profesor de matemáticas la autora lo caracteriza "en torno a la conducción de su clase, y en torno a las maneras como usa los recursos que ha seleccionado, de acuerdo a la actividad matemática que tiene prevista para sus estudiantes." (Parada, 2011, p.63)

En nuestra investigación se analizará la conducción de la clase por parte del profesor, y las maneras como usa los recursos que seleccionó, de acuerdo a la actividad matemática que tiene prevista para sus estudiantes; estos aspectos se tomarán como categorías a priori para *describir los aprendizajes logrados por profesores en formación que reciben instrucción sobre inclusión escolar y educación matemática*.

Herramientas para la reflexión. Para que las reflexiones sobre los aspectos mencionados en cada uno de los procesos se realicen de manera crítica y objetiva, se hace necesario que el profesor observe cómo trata el contenido que enseña, la forma como lo enseña, la forma como pone en juego los instrumentos en el aula y en la manera de dar explicaciones y formalizar los conceptos estudiados en la clase. Para lograr esto, el modelo propone cuatro herramientas:

ISBN 978-84-945722-3-4

Rutas cognitivas. Éstas se centran en el contenido matemático procesado durante la clase tales como conceptos matemáticos, tipos de herramientas usadas (para representar o calcular), tipos de tareas dadas a los estudiantes.

Estudios comparativos. Para analizar las diferencias entre las rutas cognitivas obtenidas entre la clase planeada y la clase realizada.

Eventos de la clase. Los vídeos se constituyen en este modelo en un material fundamental para el análisis de las actividades de planeación, la clase y la reflexión colectiva, ya que la constante observación de ellos permite identificar eventos que podrían servir para que el profesor reflexione (sobre situaciones que cambian el curso de la actividad, el cambio de objetivos o el desarrollo de procesos matemáticos no considerados antes).

Guía de observación de los eventos de la clase. De los eventos identificados se genera otra herramienta para orientar la reflexión de los profesores por medio de preguntas que provoquen introspección sobre *¿cómo gestioné mi clase hoy?, ¿qué oportunidades di para promover actividad matemática?, ¿qué oportunidades de aprendizaje dejé pasar?*

Aspectos Metodológicos

El estudio que aquí presentamos en una parte corresponde es de corte curricular y posteriormente se desarrolla como una investigación Acción. El contexto de éste se encuentra en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (Colombia). Nuestra investigación se divide en seis fases y en este documento se reportan los primeros resultados de las dos primeras fases. A continuación se hará una descripción de las fases.

Fase 1. Revisión del plan de estudios del programa: en esta etapa se identificaron las competencias profesionales definidas para el egresado. Una de las competencias encontradas fue: “Crea ambientes que favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje que atiendan las diferencias individuales y los procesos de desarrollo cognitivo, afectivo y social de los estudiantes.” (Escuela de Matemáticas, 2012, p.9). Posteriormente, en el análisis del Plan de Estudios de la licenciatura encontramos que ninguna asignatura del plan apunta a dicha competencia. Por ello, se planteó la necesidad de diseñar un curso dentro del programa de formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de las NEE.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fase 2. Primer acercamiento al fenómeno de estudio: Para ello, se realiza la adaptación curricular de una de las asignaturas vigentes del programa. La asignatura en mención denominada Seminario de Práctica tiene como propósito: ofrecer -desde la teoría y la práctica- fundamentos para comprender el proceso de investigación en educación matemática. El curso diseñado y puesto en escena, se estudiaron características de algunas NEE y algunos aportes de la investigación (para ello se analizaron artículos y tesis). Posteriormente se realizaron proyecto de aula por parte de los profesores en formación (seis estudiantes de séptimo nivel del programa). En este curso experimental, los estudiantes del curso diseñaron una secuencia didáctica en la que eligieron un caso de estudio (con alguna NEE) y un objeto matemático en particular. Dicha secuencia se puso en escena, de la cual tomaron evidencias como videograbaciones y hojas de trabajo. Evidencias de las cuales valoraron los proceso de aprendizaje de sus estudiantes, esto apoyado en marcos teóricos seleccionados por ellos.

Fase 3. Análisis de resultados del primer acercamiento: Se evaluará a lo largo del semestre la implementación de la adaptación curricular antes descrita. Durante el desarrollo del curso se hacen ajustes a lo planteado inicialmente, con el fin de ir logrando los objetivos mismos de la asignatura y el objetivo de la investigación. En el momento de escritura de trabajo para el CIBEM, nos encontramos analizando los significados negociados por los futuros maestros desde su pensamiento reflexivo (matemático, didáctico y orquestal).

Fase 4. Diseño del curso Educación Matemática y Atención a la diversidad: Con los ajustes realizados en la fase anterior se implementará un segundo acercamiento curricular y de su puesta en escena se realizará un seguimiento que nos permita evaluar el logro de los objetivos de formación que se pretenden alcanzar con ella. La recolección y análisis de datos se realizará como en la Fase 2.

Fase 5. Análisis de resultados de la puesta en escena del curso: Se hará el análisis del segundo acercamiento curricular, a lo largo de la implementación del curso (Fase 4) y se irán realizando ajustes en cuanto a los propósitos, metodología, forma de evaluación, etc. Para así plantear el diseño de un curso dentro del programa de formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de las NEE.

Fase 6. Seguimiento de Práctica Docente I de los egresados del curso: Se llevará un seguimiento de la práctica docente realizada por los estudiantes egresados del primer curso

ISBN 978-84-945722-3-4

experimental. Allí pretendemos identificar y caracterizar los significados negociados, desde el punto de vista de Wenger (1998), por parte de los profesores en formación alrededor de la atención a la diversidad en la clase de matemáticas.

Primeros resultados

Unos primeros resultados de las primeras dos fases tienen que ver con algunos aspectos a tener en cuenta para el diseño del curso de Educación Matemática y Atención a la Diversidad: i) Es necesario ampliar y seleccionar minuciosamente la bibliografía del curso alrededor de las Necesidades Educativas Especiales; ii) Se requiere aumentar el número de horas de la asignatura (el curso vigente tiene tres horas consecutivas, se requiere aumentar por lo menos una hora y realizar dos sesiones a la semana); iii) Los profesores en formación expresan su satisfacción por los aprendizajes adquiridos en el curso pues antes no habían tenido un acercamiento a dicha problemática y la consideran muy oportuna ya que están próximos a su graduación; iv)os profesores en formación valoraron los aprendizajes logrados en términos de investigación, tomando como problemática la atención a la diversidad en clase de matemáticas; v) Se reconoce la complejidad de diseñar proyectos de aula donde se realicen adaptaciones curriculares para favorecer el aprendizaje de una persona con NEE, esto por la exigencia de conocer sobre las condiciones neurológicas o físicas; vi) Se reconoce que los aprendizajes tal vez pueden ser insuficientes para poder afrontar una NEE en el aula, pero por lo menos se posibilitó una sensibilización al respecto.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En López-Mojica, J. y Cuevas, J. (Coords), *Educación especial y matemática educativa*. pp. 15-32, México: Centro de Estudios Jurídicos y Sociales Mispat; Universidad Autónoma de San Luis de Potosi.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J. y Sierra, T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. pp. 141-162. Lleida: SEIEM.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

ISBN 978-84-945722-3-4

Dewey, J (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

Escuela de Matemáticas. (2012). *Informe de autoevaluación con fines de acreditación*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

León, M. (1999). La formación del profesorado para una escuela para todos. Un análisis de los planes de estudio del maestro especialista en educación primaria y en educación especial en las universidades españolas. *Revista de curriculum y formación del profesorado* 3(2), 1-24.

López, J. (2013). Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial (Tesis de Doctorado). Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, Distrito Federal.

MEN (2006). *Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales.* Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-75158_archivo.pdf

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. (Tesis de Doctorado). Centro de investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos.* Buenos Aires: Paidós.

Villalba, D. (2006). *Integración del invidente en la clase de matemáticas.* (Tesis de Especialización en Educación Matemática). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-891

APORTE DE LAS NEUROCIENCIAS Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA FORMACIÓN INICIAL DE LICENCIADOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

María de los Angeles Hernández Dzul
mahd714@hotmail.com
Esc. Normal Rural Lázaro Cárdenas del Río - México

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Neurociencias, Educación Matemática, Formación Inicial

Resumo

En este trabajo se parte de los resultados que evidenciaron estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria durante un periodo de práctica profesional, las áreas de oportunidad detectadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se enmarcan en tres enfoques: planificación didáctica, intervención educativa y desarrollo profesional. En este contexto se muestra la trascendencia de la neurociencia cognitiva y neuropsicología, así como constructos en tres líneas de educación matemática: Teoría de Situaciones Didácticas, Teoría APOE y Teoría de Campos Conceptuales, para potenciar en los estudiantes normalistas la resignificación o construcción del conocimiento matemático y el diseño de situaciones didácticas que impacten en un proceso de transposición didáctica que promueva el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos de educación primaria. La experiencia se realizó con un equipo de estudiantes del sexto semestre de Licenciatura en Educación Primaria, se inició por el diagnóstico de las funciones cerebrales superiores asociadas al aprendizaje en contexto escolar, se trabajaron sesiones que incluyen actividades para estimular los hemisferios cerebrales izquierdo y derecho para la elaboración de recursos útiles en la práctica educativa, el tercer momento corresponde a la aplicación de herramientas y saberes durante la práctica docente en la escuela primaria.

1. Contextualización del problema

Con fundamento en las competencias profesionales que definen el perfil de egreso, así como en la esencia de los trayectos formativos: psicopedagógico, preparación para la enseñanza y el aprendizaje (Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza, Procesamiento de la información estadística); y práctica profesional, que forman parte de la malla curricular del Plan de Estudios 2012 para la Licenciatura en Educación Primaria en México (Ver anexo 1); se consideran fundamentales las actividades de docencia del tipo teórico práctico que permiten el diseño de

ISBN 978-84-945722-3-4

la planificación didáctica así como la puesta en escena de los contenidos disciplinares, en este caso de los saberes matemáticos y su enseñanza en los distintos grados escolares de educación primaria.

En este contexto, en un periodo de práctica profesional, se identificaron en algunos estudiantes dificultades relacionadas con el diseño de la planificación para la enseñanza de las matemáticas, en el proceso de transposición didáctica y con respecto al desarrollo de estrategias que favorezcan la mejora de su trabajo en el aula; en este sentido se considera al binomio neurociencias y educación matemática como una alternativa para lograr la formación que impacte en el desarrollo de una práctica docente adecuada y efectiva.

2. Neurociencias y Educación Matemática: Configuraciones teóricas

La referencia teórica de la discusión que se busca emprender en este trabajo consiste en distinguir la importancia de las neurociencias, así como de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Teoría de Campos Conceptuales (TCC) y de la Teoría APOE (Acción, proceso, objeto, esquema); en el proceso de construcción de conocimientos matemáticos y didácticos, desarrollo de habilidades, actitudes y valores, en cinco estudiantes de sexto semestre de Licenciatura en Educación Primaria.

2.1. Las neurociencias. Estas son interpretadas como la ciencia del Sistema Nervioso Central (Garrido, 2014), que es mirado y atendido desde distintas disciplinas, por lo tanto, su objeto de investigación es el cerebro, que en el caso del tema que nos ocupa se encuentra indiscutiblemente vinculado con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, esto lleva a considerar a la neurociencia cognitiva y neuropsicología para la reflexión de los elementos o procesos por los que transita el cerebro y que lo llevan a tener parte activa y precisa sobre el aprendizaje.

En este sentido, Blakemore y Frith (2007), aluden a la neurociencia cognitiva como el vínculo entre las ciencias cerebrales y la educación, de tal manera que es posible aprovechar el potencial del cerebro en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, en este espacio tienen lugar las funciones mentales superiores organizadas en dos grupos: las básicas que comprenden la gnosia, lenguaje, memoria, atención y percepción; y las complejas en las que tienen participación la voluntad, aprendizaje, concentración, creatividad, voluntad, praxia, conciencia y personalidad. Por ende (Blakemore y Frith, 2007; Jensen, 2010; Medina, 2010),

ISBN 978-84-945722-3-4

al conceptualizar el término aprendizaje como el cambio que se genera en el individuo para adaptarse a su entorno cultural y como producto de la integración de toda la información almacenada y procesada, vislumbran como innegable la relación que existe entre este y las funciones cerebrales como la memoria, la percepción, la atención y el lenguaje, a estas se hará referencia en este trabajo.

Es conveniente destacar también la función de los hemisferios cerebrales, el izquierdo es el responsable del control de la parte derecha del cuerpo, además se encarga de la comprensión de conceptos, en este se desarrollan el lenguaje, la lógica, los cálculos aritméticos, los procesos lógicos, la toma de decisiones, es aquí en donde tiene lugar la resolución de problemas, la reflexión que orienta los procedimientos realizados y el logro de resultados, se encuentra asociado con el intelecto y el pensamiento (Garrido, 2014).

Ahora bien, con el hemisferio derecho se trabaja la creatividad, intuiciones, el gusto por la música, controla el lado izquierdo del cuerpo, es aquí donde se manifiestan las emociones, distingue como un todo las estrategias de pensamiento. Para este trabajo, se destacan las funciones cerebrales de cada hemisferio y los productos de aprendizaje esperados (Ver anexo 2) como producto de su estimulación. En este marco, Ibarra (2011), refiere que la gimnasia cerebral coadyuva a la potenciación del aprendizaje, considerando que facilita el uso de ambos hemisferios toda vez que el movimiento físico permite la conexión y reactivación de redes nerviosas.

Por su parte, la neuropsicología entendida como la rama de la neurociencia responsable del estudio de los procesos mentales y conductuales que tienen lugar en el cerebro, no puede quedar al margen del tema educativo, Ardila y Roselli (2007), recuperan su importancia en el desarrollo cognitivo del ser humano, en donde la memoria, atención, razonamiento y el lenguaje lo facultan para recordar, hablar, pensar, actuar y sentir, todos estos mecanismos mantienen estrecha relación con la psicología tomando en cuenta que se trata de una actividad cerebral.

2.2. La Teoría de Situaciones Didácticas. Entre los aportes hechos a la didáctica de las Matemáticas, ocupa un sitio de transcendencia la TSD. Una *situación didáctica* es concebida como la interacción que se genera entre el saber, docente y alumno influidos por un medio; en la *situación a-didáctica* interviene además una variable que tiene la finalidad de provocar un cambio en las estrategias que usa el estudiante al momento de resolver un problema o

ISBN 978-84-945722-3-4

situación problemática, en este proceso asumen un rol importante los tipos de situación: acción, formulación, validación e institucionalización; a partir de la interacción del sujeto con el objeto de estudio, de manera individual, en equipo o grupal, con lo que se favorece la construcción social del conocimiento de manera significativa, permitiendo que los educandos validen procedimientos y resultados (Brousseau, 2007; Chamorro, 2003; Chevallard, Bosch y Gascón, 1998; Sadovsky, 2005).

La *situación no didáctica*, se produce principalmente en contextos no escolares, es decir, son las circunstancias y necesidades que el educando vive en contextos externos al salón de clase las que lo proveen de conocimientos, este tipo de saberes son los que el docente aprovecha para propiciar que el alumno aprenda la matemática formal que la escuela ofrece (Chamorro, 2003).

Para Brousseau (2007), *el contrato didáctico* es significado como la delimitación y especificación del conjunto de acciones que corresponden tanto al docente como al alumno en la clase escolar. Otro elemento fundamental en esta teoría está representado por el *obstáculo epistemológico* que no alude a la ausencia de saber, sino al uso inadecuado de conocimientos que hace el educando al momento de resolver un problema.

2.3. La Teoría de los Campos Conceptuales. Tiene en esencia la reflexión sobre los procesos cognitivos que el alumno pone en juego durante el aprendizaje de las Matemáticas, aunque es importante mencionar que su aplicación puede extenderse a otras materias o cursos (Sureda y Otero, 2011; Vergnaud, 1990, 1996, 2007). Intrínsecamente en esta teoría, la función de los conceptos es importante, estos adquieren el nivel de significativo en un ámbito de resolución de problemas que es en donde se les otorga sentido, en consecuencia, no son concebidos sólo como una definición, también se le confiere importancia a su aplicación. En este contexto, la noción de *situación* se sugiere importante tomando en cuenta que los procesos cognitivos y las acciones que el alumno realiza para dar solución a un problema, derivan del planteamiento de esta.

Un elemento más a considerar es el término *esquema* visto como el campo en el que se pueden observar las acciones que los estudiantes llevan a la práctica, en este sentido resulta interesante una de las acepciones que Vergnaud le otorga, este es percibido como una organización en la que se miran estructuras que mantienen una constante, en relación a una actividad específica de situaciones (Sureda y Otero, 2011). En este orden de ideas, un campo

ISBN 978-84-945722-3-4

conceptual está definido como un grupo de acciones, en las que se puede mirar una estrecha conexión entre las diferentes ramas de las matemáticas para el caso que nos ocupa.

2.4. La Teoría APOE. Surge a partir del trabajo del investigador Edd Dubinsky, que a su vez considera como fundamento epistemológico la teoría de Piaget; un elemento importante de esta se encuentra en la denominada descomposición genética, que alude a la reflexión que realiza el estudiante durante el proceso de construcción del conocimiento matemático, en este sentido, se subraya la importancia de estructuras y mecanismos mentales que intervienen en la construcción de conceptos matemáticos: acción, proceso, objeto, esquema (Dubinsky, 1996; Trigueros, 2005), de tal manera que una acción se evidencía cuando un estudiante percibe a un objeto matemático como algo externo a sí mismo, por lo tanto, a falta de recursos para atender una situación problemática, necesitará de orientación paso a paso que le permita hacer uso de ese objeto para resolver tal situación. Cuando una acción es practicada en varias ocasiones y se reflexiona sobre esta, el objeto matemático se internaliza convirtiéndose en un proceso, se transforma en interno, por lo tanto, el educando está en condiciones de prescindir de indicaciones externas.

Ahora bien, en el momento en que el alumno discierne sobre la secuencia de operaciones puestas en juego durante el proceso, empieza a mirar el proceso como un todo y puede actuar sobre él, a lo que Dubinsky (1996) llama encapsulamiento del objeto, es decir, el proceso es percibido como objeto. Cuando se llega a este nivel es necesario desencapsular el objeto, a partir de un resultado es necesario reconocer los procedimientos usados, llevarlo hasta su etapa inicial para reconocer sus propiedades. En lo concerniente a la noción de esquema (Trigueros, 2005), es significada como una estructura cognitiva, como la interconexión entre el conjunto de acciones, procesos, objetos y otros esquemas; y sobre cómo estos actúan en la mente para resolver problemas, esta característica lo convierte en una estructura coherente.

3. Desarrollo de la experiencia y resultados

3.1. Diagnóstico sobre el funcionamiento de las memorias de trabajo y a largo plazo.

a) Durante un minuto se proyectó una imagen con 11 figuras geométricas disociadas para que los alumnos las observaran y posteriormente las reprodujeran en el mismo orden en que aparecen en la pantalla. Se presentó durante un minuto una segunda imagen, que corresponde a una casa formada por las 11 figuras geométricas presentadas en la primera diapositiva, de

ISBN 978-84-945722-3-4

igual manera se indicó que copien el dibujo tal como aparece en la presentación (Actividad tomada de BiiALab, Luis Bretel). Con algunos cambios se replicó la actividad, ahora con la presentación de 15 palabras, a un equipo se pidió el conteo de las letras de cada palabra, y al otro, se indicó pensar en su significado; posteriormente se solicitó a ambos equipos escribir el total de palabras presentadas en el orden que aparecían.

En estas actividades se reconoció que cuando se presentan de manera simultánea más de siete figuras o informaciones, a los estudiantes les resulta más complejo recordarlas; por el contrario, si la información que se muestra está asociada, organizada y además tiene significado para ellos, se hace más sencillo recordarla y aprenderla (Medina, 2010); situación que guarda estrecha relación con el *encapsulamiento del objeto*, referido en la Teoría APOE, asimismo, con respecto a la relación que se genera entre una serie de conocimientos, de acuerdo a lo que se menciona en la TCC.

b) Organizados en dos equipos, se realizó el diseño de un ejemplo de planificación didáctica en el que debía incluirse el fundamento teórico de tipo disciplinar y didáctico: Reconocimiento de indicadores de desempeño, estilos de aprendizaje, situaciones didácticas, algunas teorías psicopedagógicas, dominio de contenido, los tipos de evaluación. Los resultados muestran que para el estudio de algunos de estos temas se aludió a la memoria de trabajo, por repetición, y una vez que la información dejó de utilizarse, tuvo lugar la poda de conceptos, entendida como la eliminación de información (Jensen, 2010; Garrido 2014).

3.2. Sobre la construcción de conocimientos matemáticos y didácticos, y desarrollo de habilidades

a) Se proporcionaron lecturas sobre temas de planificación didáctica, para realizarse como trabajo individual extraclase considerando que ya habían sido estudiados: Importancia de los contextos interno y externo para la planificación, TSD, teoría sociocultural, teoría psicogenética, estilos de aprendizaje, tipos de evaluación de acuerdo a su finalidad, taxonomía de Bloom o Marzano, instrumentos de evaluación y el reconocimiento de indicadores de desempeño. En esta fase se alude a la *situación de acción* propuesta en la TSD, por otro lado, se buscó incidir en la memoria de trabajo, mediante la repetición de la información estudiada.

b) En un espacio de siete sesiones se organizó un ambiente de aprendizaje para el intercambio de ideas, conceptos, opiniones con respecto a los temas estudiados, con lo que se buscó

ISBN 978-84-945722-3-4

impactar en la construcción social del conocimiento propuesta en la *situación de formulación* que recupera la TSD, así como en el concepto de *proceso* explícito en la Teoría APOE; por último, se propició el fortalecimiento de la memoria de trabajo y el uso del *feedbak* entendido como la respuesta del entorno. Tomando en cuenta la naturaleza de esta actividad, se incluyeron ejercicios de gimnasia cerebral para favorecer la activación de los dos hemisferios cerebrales.

c) En equipos, se pidió la elaboración de un diagrama de flujo que de manera sistemática muestre el proceso conveniente para el diseño de la planificación didáctica de contenidos matemáticos específicos de la escuela primaria. Se procedió a la exposición de las dos propuestas, dando lugar a la situación de *validación*; como resultado se integró un sólo producto de aprendizaje (Ver anexo 3). Al respecto, se impactó en la función cerebral *lenguaje*, manifestado no sólo a través de la comunicación oral, también en la escritura de los pensamientos y modificación del comportamiento (Ratey, 2002).

d) Se dio una clase muestra a partir de un contenido de sexto grado de primaria: *Uso de la media (promedio), la mediana y la moda en la resolución de problemas*; en el que se hizo uso de materiales didácticos concretos, recursos tecnológicos como: cañón, computadoras, uso del programa Excell para el cálculo de frecuencia absoluta y relativa, mediante operadores aritméticos, y para la representación de la información en gráficas. Al término, se pidió argumentar de manera verbal el vínculo entre la clase muestra y la teoría considerada en el diseño de la planificación didáctica. En esta fase se buscó mirar la *percepción* de los estudiantes, es decir, de qué manera interpretaron y otorgaron significatividad a la información recibida. En cuanto a la *atención*, se evidenció una vez que los estudiantes mostraron disposición por apropiarse activamente de lo que se vio y escuchó (Medina, 2010).

e) En última sesión se hizo el diseño de una planificación didáctica correspondiente a un contenido matemático de segundo grado de primaria, se muestra uno de los productos de aprendizaje en el que se aprecia el vínculo entre los indicadores de desempeño, secuencia didáctica y evaluación, con el fundamento teórico matemático y didáctico (Ver anexo 4). Aquí se puede observar que mediante la asociación entre *esquemas* que ya se tenían, con uno nuevo, el cerebro logra aprender con mayor facilidad, si además se fomentan actividades que le otorguen sentido, significatividad a los objetos matemáticos y didácticos, se impacta en la memoria a largo plazo, por lo tanto, en el aprendizaje (Jensen, 2010).

ISBN 978-84-945722-3-4

4. A manera de conclusiones

Considerando la naturaleza de las funciones cerebrales, en consecuencia, de la neurociencia cognitiva y neuropsicología, es significativo su vínculo con la TSD, la TCC y la Teoría APOE para la formación matemática y didáctica de Licenciados en Educación primaria, su inclusión en el desarrollo de la experiencia permitió que los estudiantes lean, escuchen, comparen, observen, descubran, sistematicen, asocien, muestren creatividad, discutan, argumenten y propongan, de tal forma que mientras más partes del cerebro se involucren en la construcción de conocimientos y desarrollo de habilidades, aumenta la posibilidad de aprender de manera significativa, se fomenta una conexión sináptica más sólida.

Referencias bibliográficas

Ardila, A. y Roselli, M. (2007). *Neuropsicología clínica*. México: El Manual Moderno.

Blakemore, S. y Frith, U. (2007). *Cómo aprende el cerebro. Las claves para educación*. Barcelona: Ariel.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Argentina: El Zorzal.

Chamorrro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educacion.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 25-41.

Garrido, M. (2014). *Neurociencias y educación. Guía práctica para padres y docentes*. Chile: Mago editores.

Ibarra, L. (2011). *Aprende mejor con gimnasia cerebral*. México: Garnik.

Jensen, E. (2010). *Cerebro y Aprendizaje. Competencias e implicaciones educativas*. Madrid: Narcea.

Medina, J. (2010). *Los 12 principios del cerebro. Una explicación sencilla de cómo funciona para obtener el máximo desempeño*. Barcelona: Norma.

Ratey, J. (2002). *El cerebro: Manual de instrucciones*. Barcelona: Mondadóri.

Sureda, P. y Otero, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Julio, 1-14.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En: Alagia, H., Bressan, A. y Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Argentina: El Zorzal.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, Abril, 5-31.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Disponible en http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/T_Campos%20Conceptuales-Vergnaud.pdf. Consultado 02/01/2017.

Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas. Revista trimestral de educación comparada*, XXVI. 195-207.

Vergnaud, G. (2007). ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learnig?). Investig*ações em Ensino de Ciências*. V12(2), 285-302.

Anexo 1. Malla Curricular. Licenciatura en Educación Primaria. Plan 2012

ISBN 978-84-945722-3-4

1° Semestre	2° Semestre	3° Semestre	4° Semestre	5° Semestre	6° Semestre	7° Semestre	8° Semestre
El sujeto y su formación profesional como docente 4/4.5	Planeación educativa 4/4.5	Adecuación curricular 4/4.5	Teoría pedagógica 4/4.5	Herramientas básicas para la investigación educativa 4/4.5	Filosofía de la educación 4/4.5	Planeación y gestión educativa 4/4.5	Trabajo de titulación 4/3.6
Psicología del desarrollo infantil (0-12 años) 4/4.5	Bases psicológicas del aprendizaje 4/4.5	Ambientes de aprendizaje 4/4.5	Evaluación para el aprendizaje 4/4.5	Atención a la diversidad 4/4.5	Diagnostico e intervención socioeducativa 4/4.5	Atención educativa para la inclusión 4/4.5	Práctica profesional 20/6.4
Historia de la educación en México 4/4.5		Educación histórica en el aula 4/4.5	Educación histórica en diversos contextos 4/4.5	Educación física 4/4.5	Formación cívica y ética 4/4.5	Formación ciudadana 4/4.5	
Panorama actual de la educación básica en México 4/4.5	Prácticas sociales del lenguaje 6/6.75	Procesos de alfabetización inicial 6/6.75	Estrategias didácticas con propósitos comunicativos 6/6.75	Producción de textos escritos 6/6.75	Educación geográfica 4/4.5	Aprendizaje y enseñanza de la geografía 4/4.5	
Aritmética: su aprendizaje y enseñanza 6/6.75	Álgebra: su aprendizaje y enseñanza 6/6.75	Geometría: su aprendizaje y enseñanza 6/6.75	Procesamiento de información estadística 6/6.75	Educación artística (música, expresión corporal y danza) 4/4.5	Educación artística (artes visuales y teatro) 4/4.5		
Desarrollo físico y salud 4/4.5	Acercamiento a las ciencias naturales en la primaria 6/6.75	Ciencias naturales 6/6.75	Optativo 4/4.5	Optativo 4/4.5	Optativo 4/4.5	Optativo 4/4.5	
Las TIC en la educación 4/4.5	La tecnología informática aplicada a los centros escolares 4/4.5	Inglés A1 4/4.5	Inglés A2 4/4.5	Inglés B1- 4/4.5	Inglés B1 4/4.5	Inglés B2- 4/4.5	
Observación y análisis de la práctica educativa 6/6.75	Observación y análisis de la práctica escolar 6/6.75	Iniciación al trabajo docente 6/6.75	Estrategias de trabajo docente 6/6.75	Trabajo docente e innovación 6/6.75	Proyectos de intervención socioeducativa 6/6.75	Práctica profesional 6/6.75	
36 horas	36 horas	40 horas	38 horas	36 horas	34 horas	30 horas	24 horas

Trayectos formativos:

- Psicopedagógico
- Preparación para la Enseñanza y el Aprendizaje
- Lengua Adicional y Tecnologías de la Información y la Comunicación
- Práctica Profesional
- Optativos

ISBN 978-84-945722-3-4

Fuente: DGESPE (Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación).

Anexo 2. Funciones de los hemisferios cerebrales y productos de aprendizaje esperados

Funciones de los hemisferios cerebrales

Hemisferio izquierdo	Hemisferio derecho
• Piensa metódicamente • Puede concentrarse en el pasado y el futuro • Está diseñado para observar y encontrar detalles y más detalles sobre los mismos detalles. • Categoriza y organiza la información • Asocia la información con todo lo aprendido, la relaciona y la proyecta en el futuro • Piensa en lenguaje • Es la voz que escuchamos en el cerebro • Es la voz que conecta el mundo interno con el mundo externo, la que dice –hey, tienes que comprar gelatina y sacar copias de las llaves- • Emplea la lógica • Orientado a detalles • Basado en hechos	• Le concierne el –aquí- y el –ahora- • Le concierne sólo el momento presente • Piensa en imágenes • Aprende kinestésicamente, a través del movimiento del cuerpo • La información en forma de energía, fluye a través de todos los sistemas sensoriales • Usa los sentimientos • Orientado al panorama general • Imaginativo • Utiliza símbolos e imágenes • Trata de filosofía y religión • Impetuoso • Presenta alternativas • Sabe la función de los objetos • Buena percepción espacial • Cree, valora y aprecia

Fuente: Garrido, M. (2014)

Contenidos matemáticos y didácticos propuestos para su logro, a partir de la estimulación de los hemisferios cerebrales

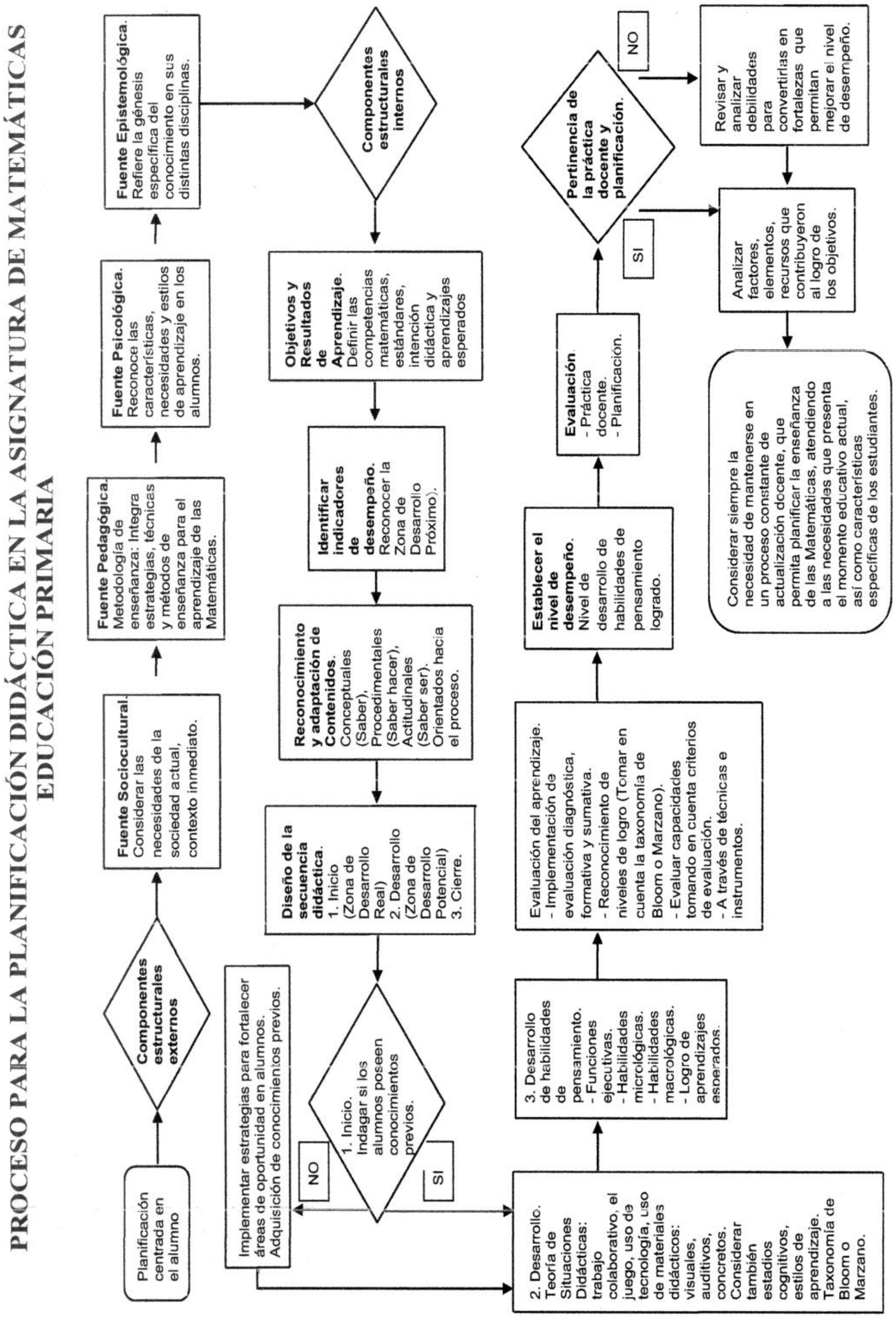
Hemisferio izquierdo	Hemisferio derecho
• Análisis de textos sobre didáctica de la matemática • Comprensión y exposición de conceptos matemáticos y didácticos. • Producción de textos breves. • Elaboración de un diagrama de flujo que represente el proceso a seguir para el diseño de la planificación didáctica de la asignatura de Matemáticas. • Desarrollo del cálculo mental. • Resolución de problemas o situaciones problemáticas (discernir sobre los pasos que permiten resolver problemas y viceversa, a partir de un resultado,	• Elaboración de materiales didácticos visuales (imágenes, color, tamaño de letras). • Uso de la tecnología para la enseñanza de algunos contenidos matemáticos. • Selección de música adecuada para el aprendizaje de contenidos matemáticos. • Memorización de contenidos matemáticos mediante algunos juegos que permitan el movimiento (dominó, lince). • Reconocimiento de las emociones que producen actividades que impactan en

ISBN 978-84-945722-3-4

argumentar sobre los procesos que permitieron llegar al resultado mediante el uso de ideas, conceptos, teoremas y técnicas). • Memorización de contenidos matemáticos y/o didácticos mediante la repetición de información. • Diseño de una planificación didáctica.	estilos de aprendizaje kinestésico, auditivo y visual. • Propuesta de actividades que favorezcan la disposición de los alumnos de primaria para el aprendizaje de las matemáticas. • Selección de juegos y cantos para motivar el aprendizaje de las matemáticas.

Anexo 3. Propuesta teórica de estudiantes para el diseño de la planificación didáctica

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 4. Diseño de la planificación didáctica de un contenido de segundo grado de

RECONOCIMIENTO DE INDICADORES DE DESEMPEÑO

ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

GRADO ESCOLAR:	Segundo — **ASIGNATURA:** Matemáticas — **BLOQUE:** III
EJE TEMÁTICO:	1. Sentido numérico y pensamiento algebraico
TEMA:	1.2 Problemas aditivos
CONTENIDO:	Estudio y afirmación de un algoritmo para la adición de números de dos cifras
APRENDIZAJES ESPERADOS:	Resuelve problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.
COMPETENCIAS:	A) Resolver problemas de manera autónoma, B) Comunicar información matemática, C) Validar procedimientos y resultados, y D) Manejar técnicas eficientemente.
ESTÁNDAR:	1.2.1 Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números naturales, utilizando algoritmos convencionales
INTENCIÓN DIDÁCTICA:	Que los alumnos analicen y comprendan el algoritmo convencional para sumar números de dos cifras
CAMPO FORMATIVO:	Pensamiento matemático

ZONA	SECUENCIA DIDÁCTICA	EVALUACIÓN	RECURSOS Y/O MATERIALES DIDÁCTICOS
ZONA DE DESARROLLO REAL / ZONA DE DESARROLLO	**Inicio** 1) Presentar a los niños tres ejercicios de suma sin transformación del tipo 32+15=, para que los resuelvan de manera individual. 2) Monitorear el trabajo de los estudiantes, observar los procedimientos y resultados obtenidos. 3) Solicitar a tres alumnos, que pasen a explicar los procedimientos y resultados que encontraron.	Resuelva ejercicios de suma con dos cifras y sin transformación. Explica los procesos usados para resolver ejercicios de suma sin transformación.	EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
ZONA DE DESARROLLO POTENCIAL	**Desarrollo** 4) Organizar al grupo en equipos de cuatro integrantes a través de la dinámica *El barco se hunde*, para realizar el juego de *El cajero*. a) Proporcionar a cada equipo una bolsa con 40 fichas azules, otra con 50 rojas y un dado con puntos del uno al seis. b) Escribir en el pizarrón el valor de las fichas: La azul vale una unidad, la roja vale una decena. c) Indicar a cada equipo que nombre a un integrante que realizará el papel del cajero, será a quien se le entreguen las bolsas con fichas azules y rojas, así como dos dados. d) Explicar al grupo las instrucciones del juego: Con excepción del cajero, se decidirá el orden de participación de los jugadores restantes. e) Por turnos, cada jugador debe lanzar los dos dados, entre todos deben decir la suma de los puntos obtenidos.	Realiza la suma de unidades.	8 Bolsas con 40 fichas azules cada una. 8 Bolsas con 40 fichas rojas cada una. 16 Dados con puntos del uno al seis. EVALUACIÓN FORMATIVA

ZONA	SECUENCIA DIDÁCTICA	EVALUACIÓN	RECURSOS Y/O MATERIALES DIDÁCTICOS
ZONA DE DESARROLLO POTENCIAL	f) El cajero deberá proporcionar a cada jugador, un número de fichas igual al número de puntos obtenidos, por ejemplo, si un dado cayó en el 5 y en el otro 2, el cajero entregará 7 unidades, que en este caso son 7 fichas azules. g) Indicar que una vez que un jugador logra reunir 10 fichas azules, debe decir al cajero: - Cambio 10 unidades por una decena. h) Explicar que ganará el jugador que obtenga primero 9 fichas rojas. 5) Escribir en el pizarrón el valor de las fichas: La azul vale un peso, la roja vale 10 pesos. 6) Plantear el siguiente problema para que lo resuelvan de manera individual, si es necesario haciendo uso de las fichas de colores: Juan pagó \$38 por una bolsa de dulces y \$26 por una bolsa de paletas. ¿Cuánto pagó Juan en total? 7) Solicitar al grupo que una vez resuelto el ejercicio, en equipo compartan los procedimientos y resultados obtenidos. 8) Monitorear el trabajo realizado en cada uno de los equipos. 9) Pedir a algunos representantes de cada equipo, expliquen al resto del grupo qué procedimientos usaron para resolver el problema y cuáles fueron los resultados (se cuidará que los participantes sean quienes usaron procedimientos diferentes y obtuvieron resultados correctos o incorrectos).	Realiza cambios de unidades a decenas. Comprenda la equivalencia de 10 unidades a 1 una decena. Resuelva problemas de suma con decenas y con transformación. Comenta y comparte ideas, conceptos, procedimientos y resultados al resolver problemas de suma con dos cifras. Argumenta procedimientos y resultados en la resolución de problemas de suma con transformación.	EVALUACIÓN FORMATIVA
ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO	**Cierre** 10) Realizar una actividad de gimnasia cerebral. 11) Resolver de manera individual la consigna número 2 del Libro *Desafíos Matemáticos*, página 105 (Resolución de problemas de suma con dos cifras).	Muestra disposición al trabajo, después de la activación de los hemisferios cerebrales. Resuelva problemas aditivos con números de hasta dos cifras.	Libro Desafíos Matemáticos para el alumno. Segundo grado.

OBSERVACIONES: "El cajero". Juego recuperado del libro *Juega y aprende Matemáticas. Propuesta para divertirse en el aula*. Juego en el que se hicieron mínimas adaptaciones para favorecer la enseñanza y aprendizaje del contenido. Atendiendo al estadio cognitivo preoperacional.

Sobre el impacto de la secuencia didáctica en el desarrollo de Competencias Matemáticas incluidas en los indicadores de desempeño: Para el desarrollo de la *Competencia A* se consideran: Actividades 6 y 11; *Competencia B*: Actividades 4 incisos e) y g), 7 y 9; para la *Competencia C*: Actividades 7 y 9; *Competencia D*: Actividades 4 inciso e), 6, 7, 9 y 11.

Para atender a los estudiantes con estilo de aprendizaje kinestésico se toman en cuenta las actividades 4 y todos sus incisos, 6, 9 y 11; para los alumnos auditivos y visuales, las actividades 4 inciso e), 7 y 9.

Situaciones didácticas: *acción*, *formulación* y *validación*.

Educación Primaria

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-892

CONSTRUCCIÓN DE RELACIONES GRÁFICAS INTUITIVAS EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y LA ACUMULACIÓN APOYADAS CON TECNOLOGÍA DIGITAL

Armando Hernández Solís – Marco Antonio Santillán Vázquez
armandhs@gmail.com – marcoantoniosantillan012@gmail.com
CINVESTAV-IPN, México – CCH-UNAM, México

Núcleo temático: VII Investigación en educación matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Bachillerato
Palabras clave: Variación, acumulación, tecnología digital, gráficas ligadas dinámicas.

Resumen

Esta investigación se desarrolla a través de un estudio cualitativo, en proceso, que aborda la enseñanza del Cálculo, al cual entendemos de acuerdo al currículo de bachillerato, como el estudio de la variación y la acumulación. En el diseño experimental recolectamos datos aplicando cuestionarios y analizando videos de las actividades aplicadas. Se trabaja con alumnos de bachillerato de 15 y 16 años utilizando tecnología digital: un sensor de movimiento y applets de gráficas ligadas dinámicas. Nuestros propósitos son: estudiar que conexiones son esenciales en el estudio de la variación y la acumulación; explorar su viabilidad para la enseñanza en bachillerato. Nuestros principales resultados indican que se puede favorecer la construcción de relaciones entre pares: acumulación o área bajo una curva y distancia recorrida; pendiente y velocidad; continuidad y tiempo; gráfica de distancia tiempo con picos y su imposibilidad de reproducir los picos caminando frente al sensor, dando de éste último par evidencia experimental; pares entre elementos geométricos y físicos, con los cuales nos valemos de un elemento del par para hacer sentido del otro.

INTRODUCCIÓN

Entendemos al Cálculo como el estudio de la variación y la acumulación, ideas esenciales de la matemática del bachillerato. Sin embargo muchos alumnos de este ciclo escolar terminan sus estudios sin haber cursado Cálculo, por lo que su formación matemática será incompleta al egresar. Ese hecho nos llevó a estudiar la viabilidad de enseñar conceptos fundamentales de Cálculo con un fuerte enfoque gráfico, enfocando la actividad de los estudiantes en la construcción de relaciones entre variación y acumulación con la mediación de un sensor de movimiento y software dinámico.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1. REVISIÓN DOCUMENTAL

Hay dos espacios en donde buscamos literatura acerca del tema: lo hecho en tesis de maestría y doctorado del Departamento de Matemática Educativa (DME) del Cinvestav, y las investigaciones nacionales e internacionales sobre elementos históricos, epistemológicos y problemas ligados a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

1.1 Antecedentes en el Departamento de Matemática educativa

Desde su origen el DME ha cultivado, junto con el álgebra, la temática del Cálculo. De esto dan cuenta diversas publicaciones internas, tesis de maestría, y doctorado, de las cuales están muy relacionadas con nuestro estudio las de (Salat, 1993; Zubieta, 1996; Benítez, 2012; Sánchez, 2014).

1.2 Otros trabajos importantes

En el trabajo Thompson (1994), se investiga el concepto de razón de cambio y el cambio infinitesimal, los cuales son fundamentales para entender el teorema fundamental del cálculo. Un resumen de la problemática en la enseñanza del cálculo se encuentra en (Kidron, 2014; Rasmussen, Marrongelle &Borba, 2014). En el artículo de (Kirsch, 2014), se da una propuesta visual de la enseñanza aprendizaje del teorema fundamental del Cálculo, y en (Moreno-Armella, 2014) se hace una investigación teórica sobre la tensión entre la intuición y la formalización en la enseñanza de las matemáticas, siendo el Cálculo un caso paradigmático de esta tensión.

2. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El trabajo está enfocado a alumnos de bachillerato de primer semestre en donde la asignatura de Cálculo es optativa y generalmente los alumnos que la eligen, estudiarán alguna ingeniería o elegirán carreras con una formación amplia en matemáticas, como actuaría, físico, o matemático. Por lo que es posible que los alumnos que no vayan a esas carreras al terminar el bachillerato no tendrán conocimientos, o ni idea de los temas o conceptos de éste campo de conocimientos.

Como vemos, la problemática del Cálculo enraíza en el currículo, pues a diferencia del álgebra escolar, no es un tema universal y obligatorio, generando que un gran número de egresados de bachillerato y universidades, en todo el mundo, desconozcan los conceptos fundamentales de esta rama de la matemática, circunstancia que llevó a (Kaput, 1994), a

ISBN 978-84-945722-3-4

promover la *democratización del cálculo*, esto es: acercar los conocimientos del Cálculo a la mayor cantidad de personas posibles sin la estructura previa obligatoria de habilidades en álgebra y geometría y argumentando sobre su importancia en la formación matemática y en la cultura general. Kaput también promovió el diseño y construcción de mediadores computacionales (Sim-Calc) con el fin de facilitar la presentación de los conceptos asociados con el Cálculo. Es en esta corriente donde ubicamos nuestra investigación:

Nos proponemos estudiar que conexiones son esenciales entre variación y acumulación, explorar su viabilidad para la enseñanza en bachillerato. Para lo cual nos concentraremos en las siguientes preguntas de investigación.

Preguntas de investigación: ¿Qué relaciones son fundamentales en un enfoque gráfico-intuitivo? ¿Qué elementos son centrales en estas relaciones? ¿Qué dificultades son centrales? ¿Qué papel desempeña la TD?

3. MARCO TEÓRICO

En nuestro estudio es muy importante el movimiento, como medio para estudiar la variación, así como sus diferentes representaciones, entre las que se encuentran las gráficas cartesianas.

3.1 El movimiento y la cognición humana

El movimiento es permanente y omnipresente. Lo podemos reconocer en las más diversas manifestaciones del mundo material y del mundo sociocultural en donde transcurren nuestras vidas. Para investigadores como Llinás (2001, p. 35), eso que llamamos pensar es el resultado de la internalización, en tiempo evolutivo, del movimiento. Solo aquellos organismos que se mueven tienen cerebro afirma Llinás. Un árbol, por ejemplo, no tiene necesidad de un sistema nervioso porque no va a ninguna parte, pero un animal necesita ver a dónde se dirige y no solamente eso, necesita además predecir el destino de su viaje. Ideas como estas han ido apareciendo gradualmente en los últimos años del siglo pasado y durante la primera década del presente. El movimiento se ha convertido en una de las llaves para intentar abrir la caja fuerte que guarda los secretos más antiguos de la mente humana.

3.2 El cuerpo como referente del movimiento

Los seres humanos percibimos, *sentimos* el mundo primordialmente en el cuerpo, con él nos vemos en el mundo y lo representamos. Investigadores como (Damasio, 1996; Pozo, 2001), entre muchos, señalan que nuestra representación del mundo está mediada por la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

representación mental que nos formamos de nuestro propio cuerpo. **El cuerpo es el referente básico de la mente para interaccionar con el mundo externo**. La mente está corporizada, es una *mente encarnada* (Damasio, 1996).

Por otra parte, salvo excepciones, la forma de existir del cuerpo es el movimiento. Antes de nacer nos movemos y mientras vivimos el movimiento no cesa. El cuerpo humano evolucionó moviéndose, adaptándose al entorno y este cuerpo en movimiento impulsó el desarrollo de la mente y de la inteligencia. La mente humana interacciona con el mundo externo a través de cuerpo que habita. Los seres humanos interactuamos con el mundo a través del cuerpo y lo interpretamos a través de los cambios que produce en nuestro cuerpo (Damasio, 1996).

La mente habita un cuerpo, esto es, está encarnada y la mejor forma que tiene ésta para representarse el mundo es a partir de una representación del propio cuerpo (Pozo, 2001, p. 115). "…**la forma en que nuestro cuerpo…interactúa con el mundo condiciona en gran medida, si no determina, los contenidos esenciales de nuestras representaciones en ciertos dominios específicos**" (Pozo, 2001, p. 121).

3.3 Mediación instrumental

Hay un rasgo fundamental de la cognición humana, y es que **la cognición humana funciona mediada por un artefacto**. El proceso de interacción del ser humano con su entorno se da con la mediación de un artefacto. Los artefactos guían y son guiados por los humanos. La transformación del medio material, y la transformación de los conocimientos de un humano, lo expresa muy bien (Wertsch, 1991, p. 29): "El argumento central que deseo seguir es el que la acción típicamente humana emplea <<instrumentos mediadores>>, tales como las herramientas o el lenguaje, y que estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial". Esto lo podemos interpretar en el contexto de la cognición, diciendo que **las maneras de conocer que podemos tener los humanos están en dependencia profunda de los artefactos que hemos ido elaborando a lo largo de nuestra existencia**. Las tecnologías digitales, o simbólicas, son a su vez artefactos. Los artefactos simbólicos, o las tecnologías simbólicas están encaminadas a transformar la inteligencia humana, como lo señalaba Vygostky, a diferencia de las tecnologías materiales, que están diseñadas para interactuar o transformar el medio externo.

ISBN 978-84-945722-3-4

4. DISEÑO EXPERIMENTAL

Se ha diseñado un estudio cualitativo, en el que se trabajó con alumnos de bachillerato de 15 y 16 años. Su asistencia a las actividades fue opcional, y se tenía una asistencia entre 8 y 22 estudiantes, de los cuales se consideraron para el análisis de datos a los más constantes.

Para las actividades con el sensor de movimiento, se necesita montar un escenario experimental, con una computadora personal, el sensor de movimiento, y un cañón (anexo 1). Se debe tener un espacio donde el estudiante se mueva frente al sensor y observe su movimiento a través de una gráfica cartesiana que genera el sensor y que se proyecta con el cañón en una pantalla frente al alumno. Se construyeron y usaron applets de **gráficas ligadas dinámicas**, hechas con software de geometría dinámica (anexo 2).

Se diseñaron secuencias de actividad, de acuerdo a una interpretación libre de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), que incluían preguntas abiertas, que dependiendo de la secuencia, se contestaban únicamente en forma escrita, o únicamente en forma verbal, y en forma verbal y escrita. Las secuencias que requerían respuestas verbales fueron registradas en video.

Se estructuraron cinco fases, que agruparon secuencias de actividades aplicadas en sesiones cuya duración fue de 1° 20’ cada una (anexo 3). A continuación se dan los datos recolectados, y su discusión, de la aplicación de una secuencia de actividad de la fase 2.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Presentamos una transcripción de una secuencia de actividad de la fase 2, como evidencia de que el estudio ha permitido a los alumnos establecer una relación entre una gráfica con picos, y la imposibilidad de reproducir exactamente los picos. La intervención de los estudiantes da certeza del papel que juega el sensor como mediador que favorece el entendimiento de los estudiantes.

SECUENCIA DE ACTIVIDAD 2-2: Dada una gráfica d/t, generada aleatoriamente por el software del sensor, la cual contiene picos, se solicita a los alumnos reproducirla caminando frente al sensor.

Al llegar a esta etapa los alumnos ya identifican cómo pueden generar segmentos paralelos al eje horizontal (tiempo en segundos), segmentos de pendientes positiva o negativa y a qué distancia deben colocarse al inicio para empalmar la gráfica de su movimiento con la

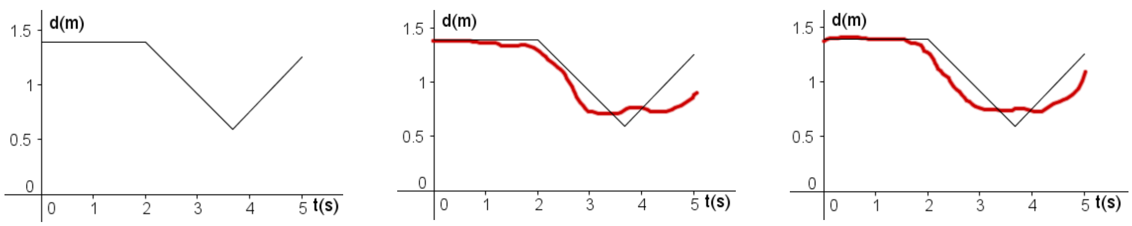
ISBN 978-84-945722-3-4

solicitada, por ejemplo una gráfica d/t, semejante a la gráfica de d/t de la figura 1 del anexo 2. Además de la acción, tratando de generar una gráfica que se *empalme* con la solicitada, se abre un diálogo con los alumnos a partir de preguntarles ¿Cómo lo hicieron?, esto es, cómo entendieron la gráfica solicitada y ¿qué hacen?, ¿cómo se movieron para generarla? A continuación utilizamos la letra P para referirnos al profesor, C para Cristopher, y U para Uriel.

P: ¿Listo? ¿Ya?

Cristopher (C) camina y trata de reproducir la gráfica solicitada (figura 1, izquierda) con su movimiento frente al sensor, obteniendo la gráfica de la figura 1, centro.

Figura 1. Gráfica solicitada, y dos intentos de reproducirla.



P: Haber, una más, ponte abusado.

C camina nuevamente y obtiene la gráfica mostrada en la figura 1, derecha.

P: ¿Cuál es el pico más difícil de construir, el primero o el segundo?

Todos los participantes: *El segundo*.

P: ¿Por qué?

C: Porque… tiene que ir…, cambia…, bueno, más bien tiene que cambiar una velocidad, de ir hacia adelante, …, tiene que regresar en seguida.

C balbucea, duda, en realidad está pensando cómo expresar lo que se le pregunta. Identifica correctamente que en un pico las pendientes (velocidades) cambian bruscamente de signo, de + a – o viceversa o de + o – a cero.

P: ¿En cuánto tiempo tienes que hacer ese cambio para generar el pico?

C: En cero segundos.

Esta respuesta de C, *en cero segundos*, nos dice que C capta la <u>naturaleza puntual del pico</u>. Una función que describa la gráfica de la figura 1, izquierda, debe ser continua en el pico

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pero, el balbuceo de C tiene que ver con el hecho, desconcertante para él, de no saber qué signo tiene la pendiente en el pico. A la izquierda del pico la pendiente tiene un signo o es cero y a la derecha tiene otro signo o es cero, entonces tiene sentido, mucho sentido, dado que la gráfica-función es continua, preguntarse: ¿qué signo tiene la pendiente en el pico? Una cuestión crucial para el trabajo con las gráficas ligadas porque en ellas los picos se asocian indisolublemente con las discontinuidades, como se muestra en la gráfica 1 del anexo 2, en donde la parte superior está representada una gráfica de d/t y abajo la correspondiente gráfica v/t. En este caso el conflicto es: si a la izquierda del pico hay una velocidad y a la derecha otra de signo diferente, ¿qué signo tiene la velocidad en el pico?

La respuesta de C: *en cero segundos*, es repetida por el profesor.

P: En cero segundos, instantáneamente.

El profesor observa que otro de los participantes, Uriel (U), levanta la mano.

P: U, ¿dime?

U: Eh, como llevas una velocidad, también cuesta trabajo, este, como invertirla, y en una velocidad, bueno, un tiempo tan corto.

U argumenta físicamente, esto es, si alguien se mueve en cierta dirección y cambia de dirección necesita un *espacio de tiempo*, para hacerlo. No se puede cambiar de dirección (de pendiente + a – o viceversa) instantáneamente, o, *en un intervalo tan corto*, tan corto que matemáticamente no en un intervalo cortísimo, sino en un punto.

¿Cómo entienden el tiempo los participantes? intuitivamente como un continuo, en donde el tiempo existe en todo instante, no hay agujeros en el tiempo. Sin embargo, un pico existe en un instante, en un valor puntual del tiempo y a la vez ¡la velocidad en un pico no está definida! En una gráfica cartesiana ligada esto genera el par: pico←→discontinuidad.

Tanto Cristopher como Uriel casi llegan a entender que es imposible reproducir el segundo pico, o cualquier pico, y su argumento está basado en tomar a su cuerpo como referente, porque han sentido la imposibilidad de hacer un cambio instantáneo de velocidad, y están asociando correctamente la velocidad con la pendiente de un segmento que corresponde a un intervalo del movimiento.

Estos dos alumnos son brillantes, sí, pero es la primera vez que se acercan a los conceptos pendiente-velocidad y continuidad-discontinuidad en gráficas cartesianas. Es la primera vez que interaccionan con un sensor de movimiento y es evidente que con la mediación de este

ISBN 978-84-945722-3-4

instrumento están construyendo significados que enraízan en las relaciones entre variación y acumulación. Además, las gráficas ligadas, una arriba y otra abajo, que comparten los mismos valores del eje horizontal, abren una relación entre pico y discontinuidad.

Los datos experimentales muestran, hasta ahora, que la investigación es viable, y que podemos acercar a más alumnos que estudian el bachillerato a conocimientos del Cálculo de forma intuitiva, auxiliándonos de la tecnología digital. Pero esto no quiere decir que no haya problemas, la fases 4 y 5 son difíciles de trabajar. En la fase 4, cuando se quiso establecer la relación del área bajo un escalón en la gráfica v/t, o el significado del área total bajo todos los escalones, con la gráfica d/t, no se entendía por qué el área es la distancia recorrida. En la fase 5, en la construcción de la gráfica de d/t teniendo la de v/t, se olvida que la distancia se va acumulando algebraicamente conforme transcurre el tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Benítez, A. F. (2012). *Estudio sobre la variación y el cambio: Mediación del sensor de movimiento* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

Damasio, A. (1996). *El error de Descartes*. Barcelona: Ed. Crítica.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: new routes using old roots. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, Capítulo 4, pp. 77–156. Hillsdale: Erlbaum.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 691-695.

Llinás, R. (2001). *I of the vortex*. Massachusetts:MIT Press.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 621-633.

Pozo, J. I. (2001). *Humana mente, El mundo, la conciencia y la carne*. Madrid: Morata.

Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 597-615.

Salat, R. S. (1993*). Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del Cálculo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

ISBN 978-84-945722-3-4

Sánchez, L. (2014). *La praxis cognitiva y el SimCalc: significado del movimiento rectilíneo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mtahematics*. 26(2-3), 229-274.

Wertsch, J. (1991). *Voces de la Mente, Un enfoque sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada.* Madrid: Visor.

Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo* (Tesis doctoral inédita). Cinvestav-IPN, Cd. México.

ANEXO 1
ARREGLO EXPERIMENTAL CON EL SENSOR DE MOVIMIENTO

Los instrumentos utilizados en este caso son, figura 1:

1) Sensor de movimiento (S)

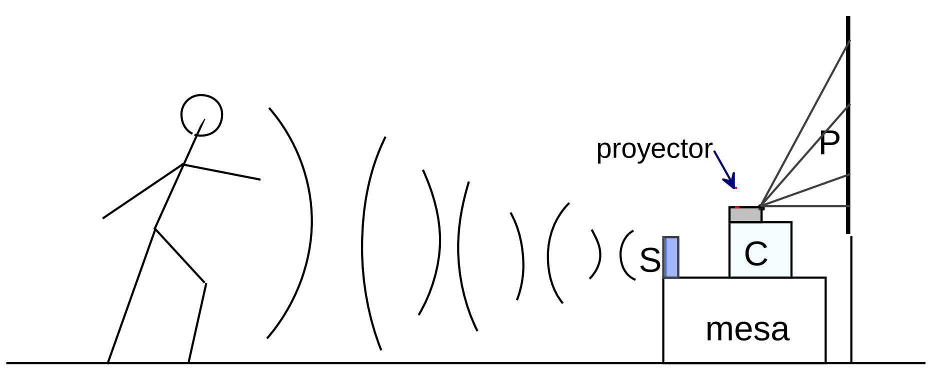
2) Computadora (C)

3) Proyector (proyector)

4) Pantalla (P)

En un salón, un sujeto/objeto (S/O) se mueve frente al sensor de movimiento, éste emite pulsos de ultrasonido que pegan sobre los S/O frente a él. Si un objeto se mueve, los pulsos que pegan en él, al rebotar los registra el sensor, los manda a la computadora, los procesa y envía al proyector que muestra el resultado en la pantalla, frente al sujeto que la observa, figura 1.

Figura 1



ISBN 978-84-945722-3-4

La computadora procesa el movimiento y lo muestra en la pantalla en formato de una gráfica cartesiana de distancia/tiempo, con una tabla numérica de tres columnas: tiempo (s); distancia (m) y velocidad (m/s).

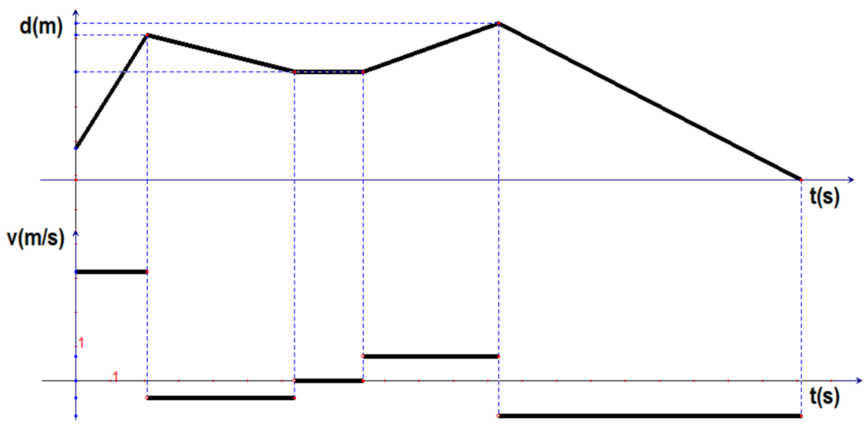
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 2

GRÁFICAS LIGADAS DINÁMICAS

Se diseñaron construyeron y usaron applets de **gráficas ligadas dinámicas**, creadas con software de geometría dinámica, que nos dan gráficas como la mostrada en la figura 1.

Figura 1. Graficas ligadas dinámicas.



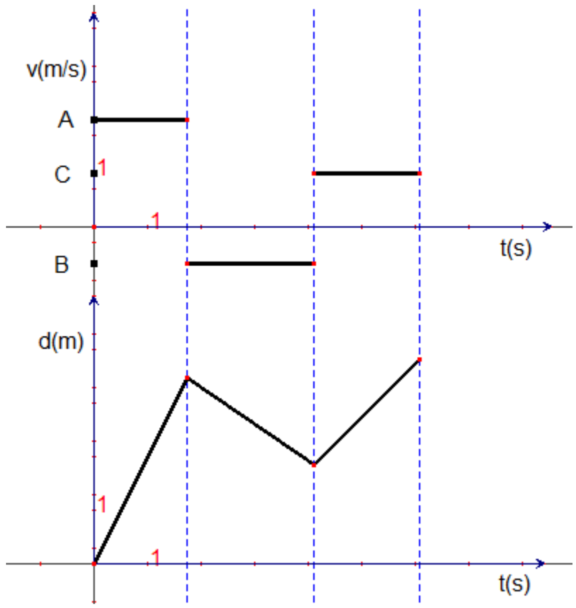
La gráfica ligada dinámica tiene una componente arriba y otra abajo, a este tipo de gráfico lo llamamos **gráficas ligadas dinámicas**, en éstas, los ejes horizontales tienen el mismo valor, de tiempo en este caso; en la figura 1, en la gráfica superior el eje vertical representa la distancia en metros, en la gráfica inferior, el eje vertical representa velocidad, en metros por segundo (m/s). Desde el punto de vista geométrico en la parte superior hay segmentos de recta caracterizados por su pendiente, la cual puede ser cero, en la parte inferior o gráfica de v/t está graficada la pendiente en cada intervalo. La gráfica de arriba está formada por segmentos de recta, cada segmento se puede manipular para variar su pendiente arrastrando cualquier punto de sus extremos y que es a la vez un pico de la gráfica, lo cual crea cambios en las alturas con respecto al eje horizontal, en los segmentos correspondientes de la gráfica de abajo.

Si ahora la gráfica de v/t está en la parte de arriba, y la de d/t está abajo, se tienen otras graficas ligadas dinámicas, como la de la figura 2, en la que la gráfica de arriba está formada por segmentos de rectas horizontales, los cuales se pueden manipular para variar su altura (velocidad), creando cambios en las pendientes de los segmentos correspondientes de la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

gráfica de d/t. La altura o velocidad de cada segmento se puede manipular, moviendo al segmento hacia arriba o hacia abajo con los puntos de control A, B, C, que están sobre el eje vertical, o eje de la velocidad, creando los cambios correspondientes en la gráfica de d/t.

Figura 2.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 3

FASES DE LA APLICACIÓN DE LAS SECUENCIAS DE ACTIVDAD

Se constituyeron cinco fases, que agruparon secuencias de actividades aplicadas en sesiones cuya duración fue de 1° 20’ cada una. Para cada fase se da su secuencia de actividad (S) o secuencias y objetivos, así como el número de sesiones.

Fase 1. Velocidad y pendiente. Dos sesiones.	
S	Objetivos
1-1	Operar el sensor de movimiento; caminar frente al sensor; interpretar la gráfica de su movimiento.
1-2	Caminar con velocidad constante frente al sensor; establecer como equivalentes la velocidad del movimiento y la pendiente de la recta de su gráfica; distinguir gráficamente tres rasgos (alejarse al sensor: /, acercarse: \, permanecer en reposo: ─)
Fase 2. Imposibilidad de reproducir un pico. Dos sesiones.	
2-1	Reproducir una gráfica dada con picos caminando frente al sensor;
2-2	Conjeturar si es posible o no reproducir los picos de forma exacta.
Fase 3. Invariancia de la pendiente de una recta. Dos sesiones.	
3-1	Usar la geometría dinámica para llegar a la invariancia de la pendiente de una recta o segmento.
3.2	Relacionar la imposibilidad de formar un pico en la gráfica de d/t, de la fase 2, con la inexistencia de la pendiente en ese pico.
Fase 4. Relaciones entre las gráficas ligadas dinámicas, distancia-tiempo (d/t), y velocidad-tiempo (v/t). Dos sesiones.	
4-1	Manipular la gráfica d/t y encontrar las relaciones con la gráfica v/t: relacionar un segmento con rasgo / con un segmento arriba del eje horizontal en la gráfica v/t. relacionar los segmentos \, ─ , con sus respectivos segmentos en la gráfica v/t. describir que sucede en la gráfica v/t, si dos segmentos se alinean en la gráfica d/t; relacionar un pico en la gráfica d/t con una discontinuidad en la gráfica v/t.
4-2	Manipular la gráfica v/t para obtener relaciones en la gráfica d/t; entender que sucede cuando un segmento está sobre, debajo o sobre el eje horizontal; entender el significado del área bajo un escalón, y el significado del área sobre todos los escalones.
Fase 5. Construir ambas gráficas ligadas d/t→v/t, v/t→d/t con software de geometría dinámica. Tres sesiones.	
5-1	Favorecer las relaciones vistas; construir la gráfica v/t si se tiene la gráfica d/t.
5-2	Entender que el área bajo un escalón es la distancia recorrida, cuando se tiene la gráfica v/t y se dese construir la gráfica de d/t, recordando que v = dt; construir el segmento asociado a ese escalón; entender el significado de áreas negativas.
5-3	Entender que la suma algebraica de áreas nos da la distancia del origen al final del recorrido, pero no necesariamente el total de la distancia recorrida; construir la gráfica completa d/t.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-893

EXPERIENCIAS EN EL DISEÑO DE CURSOS EN LÍNEA DE MATEMÁTICAS ORIENTADOS AL BACHILLERATO DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (UNAM), MODALIDAD B-LEARNING.

María Teresa Velázquez Uribe José Chacón Castro David Hernández Pérez
mtvu02@gmail.com pepe.chacon@gmail.com dhernandezcch@gmail.com
UNAM-CCH, Plantel Sur, CDMX, México

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Educación Media Superior
Palabras clave: Matemáticas, b-learning, Moodle, GeoGebra.

Resumen

Presentamos las experiencias adquiridas como docentes en el lapso de cinco años utilizando Moodle y GeoGebra para diseñar, organizar e impartir cursos en línea por parte de los profesores de Matemáticas del bachillerato en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se hace una reflexión a partir de los últimos cuatro años, tras incorporar las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en el diseño, organización e impartición de cursos en línea de matemáticas con el propósito de apoyar los cursos presenciales de los profesores de matemáticas y opciones técnicas.

Contexto del proyecto

La Universidad Nacional Autónoma de México**, UNAM (**www.unam.mx)**,** es la principal universidad de México, inició labores con una clase de retórica el 3 de junio de 1553, en ese tiempo era Real Universidad de México, actualmente tiene una población 346,730 alumnos en el ciclo escolar de 2015-2016, divididos en la forma siguiente: 28,638 en Posgrado, 204,940 en Licenciatura y 112,229 en Bachillerato, además 923 en curso propedéutico en la Facultad de Música.

Impacto del proyecto

El presente proyecto está dirigido al subsistema del Bachillerato de la UNAM, el cual consiste de un modelo educativo tradicional a través de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) con 50,585 estudiantes, un segundo sistema denominado Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), relativamente nuevo, con base al modelo de enseñanza “aprender a aprender” con 59,350 estudiantes, y 2,294 en una propuesta nueva de bachillerato la cual inicio recientemente.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El proyecto

Presentamos las experiencias adquiridas como docentes en el lapso de cinco años utilizando Moodle y GeoGebra para diseñar, organizar e impartir cursos en línea por parte de los profesores de Matemáticas del bachillerato en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, después del primer año partimos en nuestra reflexión.

El uso de las Tecnologías de Información y Comunicación, llamadas simplemente TIC, apoya los cursos presenciales en acciones extra clase, tanto de profesores como de alumnos proporciona la flexibilidad de actuar en programas de acción inmediata para el fortalecimiento de la enseñanza, el aprendizaje, el aprovechamiento y el egreso escolar.

Lograr la integración de las TIC en el aula, depende de la experiencia de los profesores en el uso de ellas, fusionar las TIC con nuevas pedagogías, fomentar clases dinámicas, estimular la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo exige adquirir un conjunto diferente de habilidades para impartir la clase.

Introducción

Se hace una reflexión de los últimos cuatro años, tras incorporar las TIC en el diseño, organización e impartición de cursos en línea de matemáticas con el propósito de apoyar los cursos presenciales de los profesores de matemáticas y opciones técnicas de los planteles de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. Al incorporar las TIC hace que se enfatice en los aprendizajes desde un punto de vista conceptual en la resolución de problemas, así el alumno "aprende a aprender", "aprende a ser" y "aprende a hacer" y satisface el modelo educativo del Colegio.

Al considerar el uso de TIC, abrimos opciones para apoyar los cursos presenciales en acciones extra clase, consideramos que es una opción para atender la demanda de información sobre las matemáticas, tanto de profesores como de alumnos y se tiene la flexibilidad de proponer programas de acción inmediata para el fortalecimiento de la enseñanza y el aprendizaje, el aprovechamiento escolar y el egreso escolar del Colegio.

Para este fin algunos profesores hemos introducido en el Colegio de Ciencias y Humanidades las TIC en nuestro salón de clase, éstas exigen que los profesores desempeñen nuevas funciones, nuevos enfoques pedagógicos y el mayor reto desarrollar un modelo educativo en el entorno de nuevos espacios virtuales de aprendizaje con el uso de plataformas de aprendizaje.

ISBN 978-84-945722-3-4

Lograr la integración de las TIC en el aula, depende de la experiencia de los profesores en el uso de ellas, para que puedan estructurar un ambiente de aprendizaje de forma no tradicional, fusionar las TIC con nuevas pedagogías, fomentar clases dinámicas, estimular la interacción cooperativa, el aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo exige adquirir un conjunto diferente de habilidades para manejar la clase.

El interés de que el profesor incorpore las nuevas tecnologías en el salón de clase ha producido propuestas en organismos internacionales. Un ejemplo representativo es la propuesta de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación (UNESCO, 2008), sobre Estándares de competencias para docentes en TIC, ya que "para vivir, aprender y trabajar con éxito en una sociedad cada vez más compleja, rica en información y basada en el conocimiento, los estudiantes y los docentes deben utilizar la tecnología digital con eficacia" (UNESCO, 2008). Se hace hincapié en el *curriculum* que debe tener el profesor en tecnología para su incorporación en clase.

Plataforma de gestión del aprendizaje Moodle

Para este fin hemos construido un plataforma de apoyo para diferentes asignaturas de Matemáticas principalmente, utilizando como herramienta tecnológica una aplicación de *LMS* de software libre (Learning Management System), en este caso *Moodle*, que es un sistema de gestión del aprendizaje, fácil de manejar en computadoras de escritorio así como en dispositivos móviles, es una herramienta útil y práctica para apoyar la actividad docente en una modalidad mixta (b-learning), facilitando la creación de contenidos digitales a través de la página Matemáticas en el Bachillerato (*MaBa*) http://maba.unam.mx/enlinea, se trabaja en forma colaborativa, promoviendo y reforzando el aprendizaje. Cabe hacer notar que nuestros contenidos se sitúan en el concepto de Recurso Educativo Abierto (REA).

Se utilizan además aplicaciones de software libre, como *GeoGebra* para la parte geométrica y su CAS (Computer Algebraic System) para la parte algebraica. De uso comercial y principalmente en las plataformas móviles se utiliza *WolframAlpha* para matemática simbólica y todo tipo de información.

Al trabajar en esta plataforma se tienen diferentes roles, como coordinador, profesor, estudiante e invitado, otra ventaja es que el docente siempre puede ver lo que está haciendo el estudiante, pero este no; además puede haber retroalimentación entre docentes, cada profesor puede tener su curso y lo puede compartir con sus pares.

ISBN 978-84-945722-3-4

Experiencias con uso de las TIC

i. El objetivo global de estas experiencias es enfocar al profesor y al estudiante en el uso de las TIC en sus asignaturas para mejorar su productividad en su desempeño académico.
ii. La dinámica del salón clase cambia ya que ahora el profesor se concentra en la parte conceptual y la resolución de problemas.
iii. Se pone a disposición recursos educativos de calidad avalada por pares, dentro de la plataforma.
iv. Incrementar la escolarización y mejorar las competencias básicas en lectura, escritura y matemáticas. Esto supone una definición más amplia de la “alfabetización tecnológica (TIC)” que comprende la adquisición de conocimientos básicos sobre los medios tecnológicos de comunicación más recientes e innovadores en la resolución de problemas.
v. El estudiante tiene la responsabilidad de buscar la información para el planteamiento del problema. Con esto se cumple el principio del modelo del Colegio que es “aprender a aprender”
vi. La resolución de problemas, apoyadas con software para optimizar la algoritmia y profundizar en la parte conceptual y análisis de resultados; teniendo como actividades de apoyo previas: asesorías presenciales y en línea, elaboración de guías, banco de reactivos, videos, etc.
vii. Uno de los elementos más importantes para optimizar el uso de las TIC en la educación es la construcción de contenidos en todas las asignaturas. En matemáticas hemos utilizado el software *GeoGebra y WolframAlpha*, para ilustrar la construcción de figuras geométricas y expresiones algebraicas, en donde el estudiante puede interaccionar con ellas y observar cómo al modificar parámetros en las expresiones geométricas o algebraicas, produce cambios en las figuras; de manera tal, que el estudiante tiene un nuevo elemento en su aprendizaje. Cabe mencionar, que este tipo de actividad demandaba una vasta experiencia en la visualización para algunos alumnos.
viii. Cuando esto se contextualiza en la revisión de los planes y programas de estudio, las repercusiones son importantes en lo que respecta a los cambios que se requieren y en

ISBN 978-84-945722-3-4

otros componentes de las diferentes licenciaturas de la UNAM; el plan de estudios va mucho más allá del simple conocimiento de las asignaturas ya que integra explícitamente habilidades indispensables para el siglo XXI necesarias para generar nuevo conocimiento y comprometerse con el aprendizaje para toda la vida (capacidad para colaborar, comunicar, crear, innovar y pensar críticamente) y encontramos un paralelismo con las propuestas de la UNESCO.

ix. Los programas de formación de docentes deben coordinar las competencias profesionales del profesorado, cada vez más complejas, haciendo uso generalizado de las TIC para apoyar a los estudiantes que crean productos de conocimiento y que están dedicados a planificar y gestionar sus propios objetivos y actividades. En este contexto, los docentes modelan el proceso de aprendizaje para los alumnos y sirven de modelo de educando, gracias a su formación profesional permanente (individual y colaborativamente). En este caso, la escuela fomenta el desarrollo de la sociedad del conocimiento y la información considerada por la Comisión Internacional de la Educación para el Siglo XXI (UNESCO, 2008).

x. Los alumnos utilizan los entornos digitales trabajando de forma colaborativa, promoviendo y reforzando su aprendizaje, así como desarrollan valores y actitudes en forma crítica, en su interacción con la tecnología y emplean el conocimiento y habilidades en el uso y manejo de *GeoGebra*, para apoyar su actividad académica principalmente en matemáticas. Este aprendizaje repercute de manera significativa en su desempeño académico en licenciaturas de Ciencias e Ingeniería.

Conclusiones

A través de estos cinco años, los profesores hemos compartido nuestras experiencias sobre la práctica del uso de la plataforma de Moodle, la plataforma es técnicamente excelente y satisface las necesidades de enseñanza en línea, es de facto la plataforma en la mayoría de las Escuelas y Facultades de la UNAM.

Los retos por superar se pueden clasificar en cuatro ámbitos: gestión, conocimiento técnico del cuerpo académico, contar con un proyecto estructurado de educación a distancia mediada por tecnología y conformar criterios técnicos de validación de contenidos (texto, imágenes, videos) a través de Comisiones Académicas.

Los elementos de la Tecnología que hemos utilizado en Matemáticas son: *WolframAlpha*,

ISBN 978-84-945722-3-4

GeoGebra, las aplicaciones rebasan nuestras expectativas de enseñanza, son aplicaciones excelentes y se deben de considerar en los nuevos programas de estudio. La resolución de problemas apoyándose en la construcción de *applets* utilizando el software de *GeoGebra*, ha sido uno de nuestros mejores aciertos, ya que hemos propiciado que el estudiante pueda interaccionar de manera directa con e expresiones matemáticas que se visualizan a través de los diferentes elementos geométricos. El estudiante puede lograr representaciones útiles de un proceso con ayuda de la computadora y utilizarla para obtener resultados cuantitativos.

En el futuro las competencias fundamentales del docente, comprenderán la capacidad tanto para desarrollar métodos innovadores de utilización de TIC en el mejoramiento del entorno de aprendizaje, como para estimular la adquisición de nociones en TIC, profundizar el conocimiento y generarlo. La formación profesional del docente será componente fundamental de esta mejora de la educación. No obstante, el desarrollo profesional del docente sólo tendrá impacto si se centra en cambios específicos del comportamiento de este en la clase y, en particular, si ese desarrollo es permanente y se armoniza con otros cambios en el sistema educativo.

Hoy en día, los docentes necesitan estar preparados para ofrecer a sus estudiantes oportunidades de aprendizaje apoyadas en las TIC; para utilizarlas y para saber cómo éstas pueden contribuir al aprendizaje de los estudiantes, capacidades que actualmente forman parte integral del catálogo de competencias profesionales básicas de un docente. El entorno educativo debe ser un laboratorio en permanente actividad y no continuar con entornos estáticos y pasivos. Se sugiere utilizar la informática y la lúdica como apoyo, variar la metodología, no saturar el currículo con contenidos no significativos, dar tiempo al estudiante para que logre adquirir el conocimiento, dar más importancia al aprendizaje que a la nota, tomar el error como oportunidad de aprendizaje, generar ambientes de cooperación y no de rivalidades, usar problemas reales como material de trabajo, hacer trabajo en equipo, promover pláticas magistrales de temas puntuales, utilizar métodos de enseñanza en espiral donde se vuelve varias veces a los mismos temas, entre otras estrategias metodológicas que promuevan el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.

En suma, se busca que el egresado del bachillerato sea capaz de movilizar los conocimientos, las habilidades y las actitudes matemáticas que ha adquirido, para lograr una mayor

ISBN 978-84-945722-3-4

objetividad y generalidad en la solución de los problemas a los que se enfrenta.

En esta dirección, es conveniente impulsar el uso de la tecnología ya que juega un papel importante para:

- comprender patrones, relaciones y funciones.
- representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- construir y usar modelos matemáticos de diversos fenómenos.
- analizar el cambio en contextos diferentes (NCTM, 2003, p.39).

Nuestra propuesta de incorporación de TIC se adecua en buena forma al modelo educativo del Colegio. La valoración académica externa se vuelve valiosa e indispensable para comparar los diferentes cursos que se ofrecen en Internet.

En el futuro inmediato es necesario construir un programa operativo de los elementos a considerar en el desarrollo de las actividades de aprendizaje, apoyándonos en la construcción de un banco de reactivos en línea para la resolución de problemas.

Referencias

González-Videgaray, M y Romero Ruiz, R. (2014). *Cien Buenas Prácticas para Usar Moodle*. UNAM-FES Acatlán. Naucalpan.

NCTM (2003). *Estándares para maestros de matemáticas*. Recuperado de http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/. Consultado el 20 de abril de 2017.

Pontificia Universidad Javeriana (2016) Cali, Competencias y estándares TIC desde la dimensión pedagógica: una perspectiva desde los niveles de apreciación de las TIC en la práctica docente. Recuperado de http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/pdf/Competencias-estandares-TIC.pdf . Consultado el 20 de abril de 2017.

UNESCO (2005). *Perspectivas desde el punto de vista de la sociedad. Las Tecnologías de la Información y comunicación en la enseñanza. Manual para docentes*. [En línea]. Recuperado de http://unes-doc.unesco.org/images/0013/001390/139028s.pdf . Consultado el 20 de abril de 2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

UNAM (2014) Seminario Universitario para la mejora de Educación Matemática en la UNAM (SUMEM). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* México. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0B1R9Xc24yEC-OGNYMVg3Rk1OUEk/edit. Consultado el 20 de abril de 2017.

Velázquez Uribe, María Teresa, Chacón Castro, José y Hernández Pérez, David (2017), *Matemáticas en el Bachillerato*. México. Recuperado de http://maba.unam.mx/enlinea . Consultado el 20 de abril de 2017.

Anexo de figura 1

Ejemplo de estructura operacional en los cursos en la plataforma *Moodle* de *MaBa*

Cada curso se ubica en la plataforma, con una categoría principal – nombre del curso y subcategorías – por ejemplo, asignaturas y semestre (Cálculo I (2016-1), Cálculo II (2016-2).

Figura 1. Ubicación de los cursos de Cálculo en*:* www.maba.unam.mx/linea

La estructura de los cursos ha sido la siguiente: en la columna central el contenido del curso, actividades: resolución de problemas por temas, foros, etc. en la columna de la derecha, los materiales de apoyo, sitios de interés sobre el tema, actividades programadas, notas adicionales al curso, artículos, colecciones de *applets*, etc. la columna de la izquierda la parte administrativa: calificaciones, tareas, foros de discusión, etc. (Figura 1).

ISBN 978-84-945722-3-4

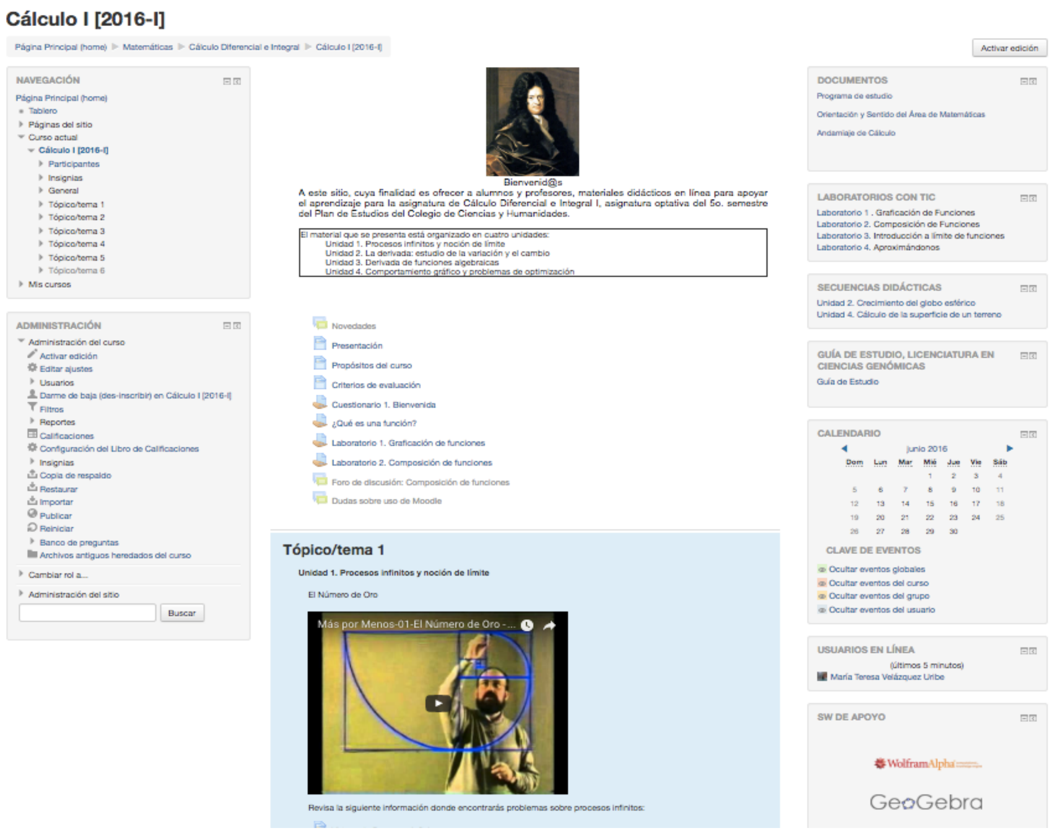


Figura 1. Estructura del curso en línea de Cálculo, ciclo 2016-1

Propósitos en la plataforma

- Apoyar a los profesores y alumnos en las sesiones presenciales para cada una de las unidades del curso.
- Presentar diversas opciones didácticas como son: Estrategias didácticas, Asesorías, Notas de clase, Glosario, Guías, Problemas, Colecciónes de *applets*, etc.
- Propiciar que los docentes y los alumnos desarrollen las habilidades necesarias en el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación TIC.
- Conformar un entorno rico en el manejo de las TIC en los procesos educativos dirigidos a los estudiantes.
- Buscar que el docente integre el uso de las TIC en su trabajo cotidiano.

ISBN 978-84-945722-3-4

Aprendizajes considerados en el modelo *b-learning*

La mecánica de la clase gira en torno a:

i) Construir el significado de los conceptos

ii) Llevar a cabo o utilizar el procedimiento adecuado para el desarrollo del curso.

iii) Analizar en pares las posibles etapas en la resolución de problemas.

iv) Utilizar las herramientas interactivas durante el planteamiento y desarrollo de problemas (*applets* con *GeoGebra* y uso de *WolframAlpha*).

v) Emitir juicios acerca de la utilidad de las matemáticas en la resolución de problemas tanto en el ambiente tecnológico, económico, financiero, científico insertos en la vida cotidiana, desarrollando el pensamiento, razonamiento y lenguaje matemático.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CB-894

UMA ANÁLISE SOBRE OS ESTILOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR UM ALUNO CEGO AO RESOLVER SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRO GRAU

Elen Graciele Martins – Barbara Lutaif Bianchini
elengraciele@gmail.com – barbaralb@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: CB
Nivel educativo: Médio ou Secundário (12 a15 anos)
Palavras chave: Matemática; cego; estilos de pensamento matemático.

Resumo
A inclusão de estudantes com necessidades especiais nas salas de aulas brasileiras é uma realidade; porém pesquisas recentes sobre o ensino e a aprendizagem de matemática por pessoas cegas apontam que muitos professores não se sentem preparados para lidar com esse público. A demanda por estudos que possam colaborar com a formação docente e com o desenvolvimento desses alunos é grande. Este trabalho, de cunho qualitativo, tem por objetivo apresentar parte de uma tese de doutorado em Educação Matemática, que trata sobre matemática e a pessoa cega. Discutiremos as estratégias utilizadas por um aluno cego para resolver uma atividade envolvendo Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau à luz dos estilos de pensamento matemático, classificados por Ferri como: visual, analítico e integrado e que podem oferecer ao professor indícios de como o aluno prefere aprender. Na atividade previamente analisada, o aluno evidenciou uma preferência pelo estilo analítico.

Introdução

O Brasil foi um dos 88 governos que participaram da Conferência Mundial de Educação Especial, realizada em Salamanca, Espanha, no ano de 1994. Nessa conferência foram discutidos pontos fundamentais sobre a inclusão de pessoas com deficiência no sistema educacional. Um dos frutos mais importantes desse evento foi o documento “Declaração de Salamanca Sobre Princípios, Políticas e Práticas na Área das Necessidades Educativas Especiais”. Neste, há a recomendação de que a educação seja acessível a todos e que esta aconteça dentro do sistema regular de ensino.

ISBN 978-84-945722-3-4

Mais de duas décadas após a Declaração de Salamanca, e mesmo tendo havido avanços relacionados às políticas públicas voltadas para a inclusão, ainda há, no Brasil, resquícios de segregação de alunos com necessidades especiais, mesmo inseridos em salas regulares. Martins (2010) e Marique (2015) elencam como fatores que podem favorecer a existência do contexto segregativo nas escolas: a falta de materiais adequados às condições dos alunos, a necessidade de adequação dos espaços físicos das escolas e, infelizmente, a falta de formação dos professores atuantes nas salas regulares para lidarem com as demandas da inclusão. A realidade da educação brasileira nos conduziu a buscar mais informações sobre o tema e, com os avanços da legislação nacional, que garante o acesso dos alunos com necessidades especiais nas escolas e salas regulares, tornou-se uma necessidade urgente pesquisas que tratem sobre o assunto.

Nosso interesse no tema educação especial, e nossa experiência como professores de Matemática na educação básica, nos instigou a investigar sobre a aprendizagem dessa disciplina por estudantes cegos e estudantes com baixa visão. E nessa trajetória, de quase uma década desenvolvendo pesquisas nessa área, tivemos contato com estudantes, professores, gestores e políticos envolvidos no contexto da educação inclusiva, o que nos permitiu perceber a importância de ouvirmos nossos alunos, sejam eles deficientes ou não, de perguntar a eles como podemos ajudá-los, qual é a melhor forma de ensiná-los, quais barreiras os impedem de avançar. Assim, pretendemos aqui, tratar de um de nossos estudos, especialmente relacionado à aprendizagem de um aluno cego, referente ao conteúdo matemático Equações Lineares. Nossas análises são norteadas pelas ideias teóricas, que discutiremos a seguir, propostas por Ferri (2012) sobre estilos de pensamento matemático e, a partir delas, identificaremos quais são as preferências de nosso sujeito para resolver questões relacionadas ao conteúdo desenvolvido na atividade, o que pode nos dar indícios de quais estilos ele conhece e quais necessitam ser explorados durante as aulas de Matemática.

Estilos de pensamento matemático

Os estilos de pensamento matemático são caracterizados por Ferri (2012) como preferências do sujeito em utilizar suas habilidades matemáticas. A autora elenca quatro características dos estilos de pensamento matemático: 1) não podem ser considerados como habilidades

ISBN 978-84-945722-3-4

matemáticas do indivíduo, mas suas preferências em como utilizá-las; 2) estão relacionados à personalidade de cada indivíduo e geralmente estão ligados às experiências positivas por ele vivenciadas; 3) não podem ser considerados como estratégias de resolução de problemas matemáticos; 4) podem ser influenciados socialmente.

Com base no exposto, os estilos de pensamento matemático são as preferências que cada indivíduo apresenta ao resolver questões matemáticas e essas podem ser influenciadas pelo meio social, sendo assim, o papel exercido pelo professor é fundamental, pois é ele quem dá "*as diretrizes de como a Matemática tem que ser aprendida ou representada durante as aulas ou exames, por exemplo, com ou sem visualização, esboços etc."* (GOMES, 2015, p. 54)

Ferri (2012) classifica os estilos de pensamento matemático, como visual, analítico e integrado.

O estilo visual é evidenciado quando o indivíduo recorre a representações imagéticas para resolver situações matemáticas; o estilo analítico é caracterizado pela utilização de algoritmos formais, e a resolução dos exercícios segue uma sequência lógica, ou seja, são resolvidos passo a passo; o estilo integrado é a combinação dos estilos visual e analítico.

Assim, identificaremos quais estilos de pensamento matemático nosso sujeito utiliza para resolver questões relacionadas ao conteúdo matemático Equações Lineares. Esse conteúdo foi escolhido por ter sido desenvolvido, nas aulas de Matemática de sua escola, durante o 8º ano do ensino fundamental.

Nosso sujeito de pesquisa

É um adolescente cego, de 13 anos de idade, que estuda em um colégio de pequeno porte, da rede particular de ensino da grande São Paulo, Brasil. É gemelar, ele e sua irmã nasceram com 25 semanas de gestação e, devido à condição de prematuro, passou por vários problemas de saúde que o fizeram ficar internado por cerca de 4 meses. A perda da visão só foi percebida quando ele já estava em casa.

Coleta e análise dos dados

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Os dados que apresentamos a seguir constituem uma parte de uma tese de doutorado em Educação Matemática. As questões que serão foco de nossas discussões fazem parte de uma atividade de sondagem, proposta ao nosso sujeito, que foi desenvolvida num encontro de 60 minutos de duração, fora do ambiente escolar.

A atividade foi impressa à tinta, os gráficos foram representados na malha quadriculada em relevo que foi disponibilizada no *kit* do aluno pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC. O *kit* ficou à disposição do aluno para ser utilizado em todas as questões, caso ele decidisse resolvê-las utilizando a representação gráfica (Anexo 1). Coube à pesquisadora a função de ler as questões e anotar as respostas dadas por nosso sujeito, além de registrar observações pertinentes ao estudo realizado. O encontro foi gravado em áudio, que foi transcrito após a realização da atividade.

A atividade e a análise dos dados coletados

A atividade proposta ao nosso sujeito continha 4 exercícios.

Figura 1: Atividade 1 – Sondagem

Atividade 1 - Sondagem

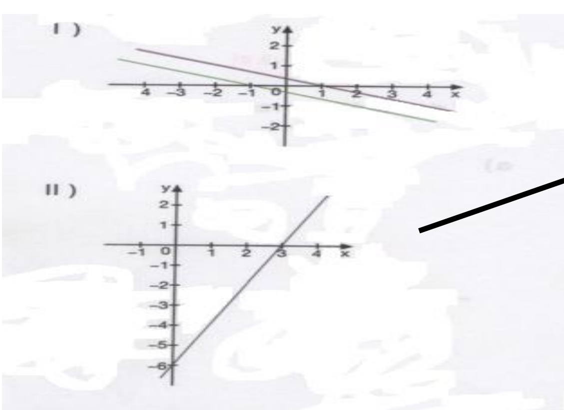
1. A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Lúcia, sabendo que ela tem o dobro da idade de Carlos?

2. Um certo veículo utilitário custa R$ 15.000,00 a mais que o modelo *hatch* da mesma marca. Se os dois juntos custam R$ 69.000,00, quanto custa o modelo utilitário?

3. Em uma caixa, o número de bolas vermelhas é o triplo do número de bolas pretas. Se tirarmos 2 bolas pretas e 26 vermelhas, o número de bolas de cada cor ficará igual. Quantas bolas vermelhas há na caixa?

4. Associe cada sistema de equações à sua representação gráfica.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

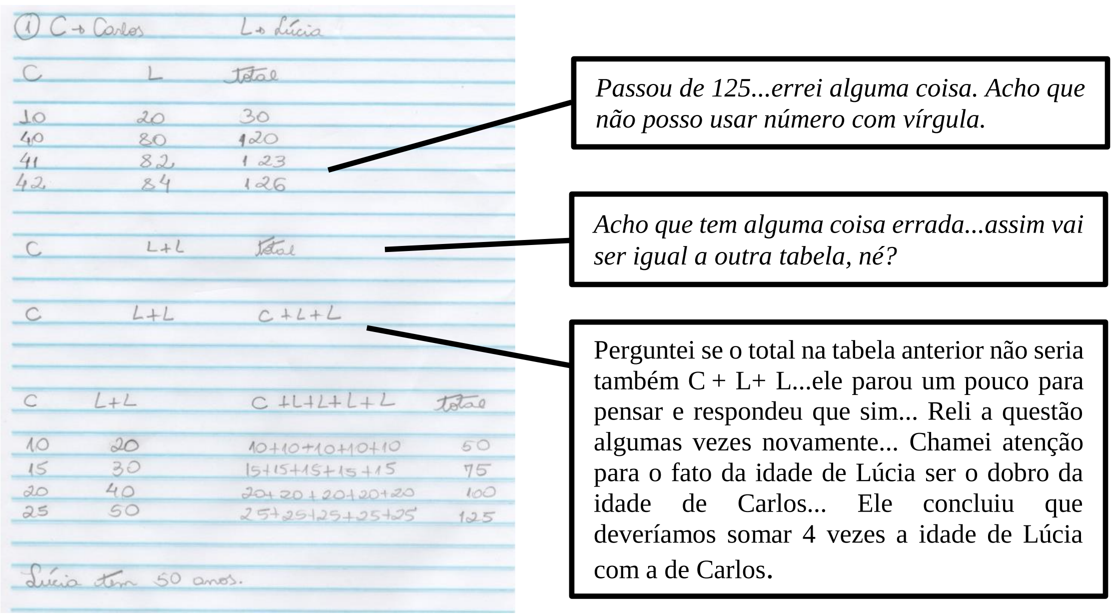


Inserimos aqui a representação dos gráficos à tinta, porém as imagens dos gráficos em relevo estão nos Anexos 2, 3 e 4 deste trabalho.

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 1: Para resolver essa questão, nosso sujeito recorreu à montagem de uma tabela. Tivemos que ler o enunciado muitas vezes e ele teve dificuldade para representar a idade de Lúcia em função da idade de Carlos. Foram necessárias 4 tabelas diferentes até conseguir a resposta correta (explicar). Nesse exercício, identificamos a preferência pelo estilo de pensamento analítico.

Figura 2: Protocolo da questão 1.

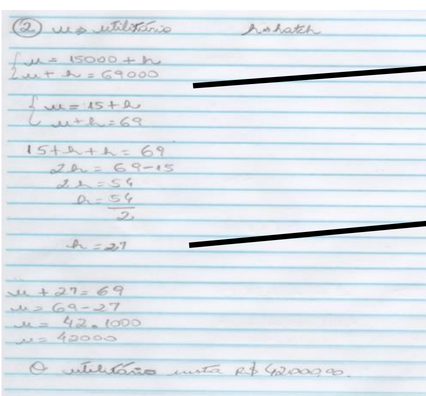


Fonte: Dados da pesquisa.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Questão 2: Após a leitura da questão, nosso sujeito decidiu que iria resolvê-la por Sistema de Equação Linear de Primeiro Grau. Houve a necessidade de ler a questão muitas vezes para que ele conseguisse dizer quais equações seriam utilizadas no sistema. Ao explicitar a equação, observamos que ele estava com dificuldade para fazer os cálculos mentalmente com os números do problema (ele os considerou muito grandes), assim, lembramos que ele poderia dividir os números por 1000 e depois de encontrar o resultado, multiplicar por 1000 para manter o equilíbrio das equações. A "dica" de dividir os números foi importante para a resolução do exercício e, novamente, identificamos a preferência pelo estilo de pensamento analítico.

Figura 3: Protocolo da questão 2



"Será que vou conseguir calcular com números grandes?"

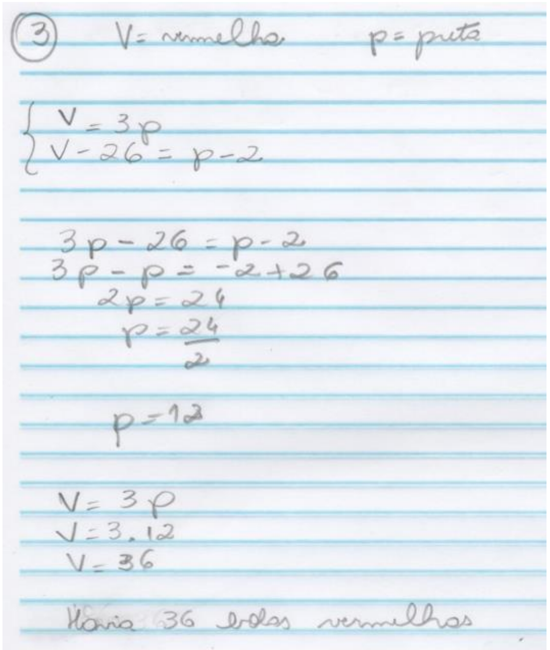
"Custa 27!"
Lembrei que ele havia encontrado o valor de *h* (veículo *hatch*) e que a pergunta era sobre o valor de *u* (veículo utilitário) e que havia mais uma etapa para terminar o problema.

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 3: Nosso sujeito decidiu resolver essa questão montando um Sistema de Equação Linear de Primeiro Grau e, como já havia resolvido os dois problemas anteriores, não evidenciamos dificuldades para dizer quais eram as equações desse exercício. Evidenciamos a preferência pelo estilo de pensamento analítico.

Figura 4: Protocolo da questão 3

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 4: O objetivo da questão era identificar a representação gráfica de 3 Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Os gráficos foram representados pela primeira autora deste artigo, em malha quadriculada em relevo com massinha de modelar (para representar os pontos) e espaguete (para representar as retas). Nosso sujeito não conseguiu resolver essa questão. Ele nos disse que nunca trabalhou a resolução de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau usando gráfico e aquela era a primeira vez que ele estava tendo contato com esse tipo de resolução. Percebemos certa frustração no sujeito por não ter ideia de como fazer para resolver a questão. Esse exercício permitiria a utilização do estilo de pensamento integrado, pois além de conhecer a representação gráfica (visual) também seria necessário realizar a análise dos coeficientes das equações dadas (analítico).

Considerações

Neste artigo apresentamos a análise, segundo os estudos de Ferri (2012) sobre estilos de pensamento matemático, de uma atividade de sondagem, realizada por um adolescente cego, envolvendo Equações Lineares. Nossas análises mostraram que o estilo visual não foi

ISBN 978-84-945722-3-4

utilizado por nosso sujeito, mesmo sendo ofertado a ele durante a realização da atividade materiais que possibilitavam a resolução dos exercícios por meio de gráficos. Como não temos conhecimento da forma pela qual o conteúdo em questão foi desenvolvido pelo professor de Matemática de sua escola, quais tipos de resolução foram apresentados à classe, e se há alguma distinção entre o que é explicado para os alunos videntes e o que é explicado ao nosso sujeito, não podemos concluir que a predominância do estilo analítico seja realmente a sua preferência, sendo, talvez, a única forma conhecida por ele para a resolução desses exercícios. O "desconhecimento" do estilo de pensamento matemático visual também o impediu de utilizar o estilo de pensamento matemático integrado.

Concordamos com Ferri sobre a importância de apresentar mais de uma (ou todas) as estratégias possíveis para a resolução de problemas matemáticos, pois assim, nossos alunos poderão ter mais subsídios para escolher de qual forma preferem trabalhar. No caso do conteúdo escolhido para essa atividade, nosso sujeito declarou que não teve nenhum contato com a representação gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau, o que ficou evidente na questão 4.

Em entrevista realizada em momento anterior à atividade de sondagem, nosso sujeito nos disse que não são utilizados materiais adaptados para ensiná-lo. Nem os que são enviados pelo governo, nem os preparados por sua mãe, em Braille e em relevo. Ele atribui seu progresso ao grande esforço realizado por sua mãe, pois ela transcreve os conteúdos do livro didático para o Braille, produz materiais adaptados e estuda os temas desenvolvidos nas aulas junto com ele.

O estudo realizado com esse sujeito evidenciou como o trabalho do professor pode influenciar nas preferências de resolução de problemas pelos alunos, como destacado por Gomes (2015, p. 54), pois é o professor quem apresenta o conteúdo, dá as diretrizes de como os exercícios devem ser resolvidos e determina o que será ou não aceito. Reforçamos nosso entendimento de que ao apresentar mais de uma forma de resolver o mesmo problema, o aluno tem mais oportunidade de entender e se identificar com algum tipo de resolução. No caso dos alunos cegos, Martins (2010) destacou em seu trabalho que eles aprendem de várias formas e que utilizam todos os sentidos remanescentes (audição, tato, olfato e paladar) para aprenderem, sendo assim, o trabalho com a representação gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau pode ser um caminho percorrido com facilidade por esses sujeitos

ISBN 978-84-945722-3-4

devido a habilidade tátil que possuem. Assim, consideramos ser de responsabilidade dos professores de Matemática ofertar meios para que todos os alunos tenham acesso aos conteúdos matemáticos e às diferentes possibilidades de resolução dos problemas.

Referências bibliográficas

Ferri, R. B. (2012) Mathematical Thinking Styles and Their Influence on Teaching and Learning Mathematics. *In 12th International Congress on Mathematical Education, Program Name XX-YY*-zz (pp. abcde-fghij), 2012, COEX, Seoul, Korea. Recuperado de http://www.icme12.org/upload/submission/1905_F. pdf.

Gomes, E. (2015). *Contribuições do método jigsaw de Aprendizagem Cooperativa para a mobilização dos Estilos de Pensamento Matemático por estudantes de Engenharia*. (Tese de doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, SP, Brasil.

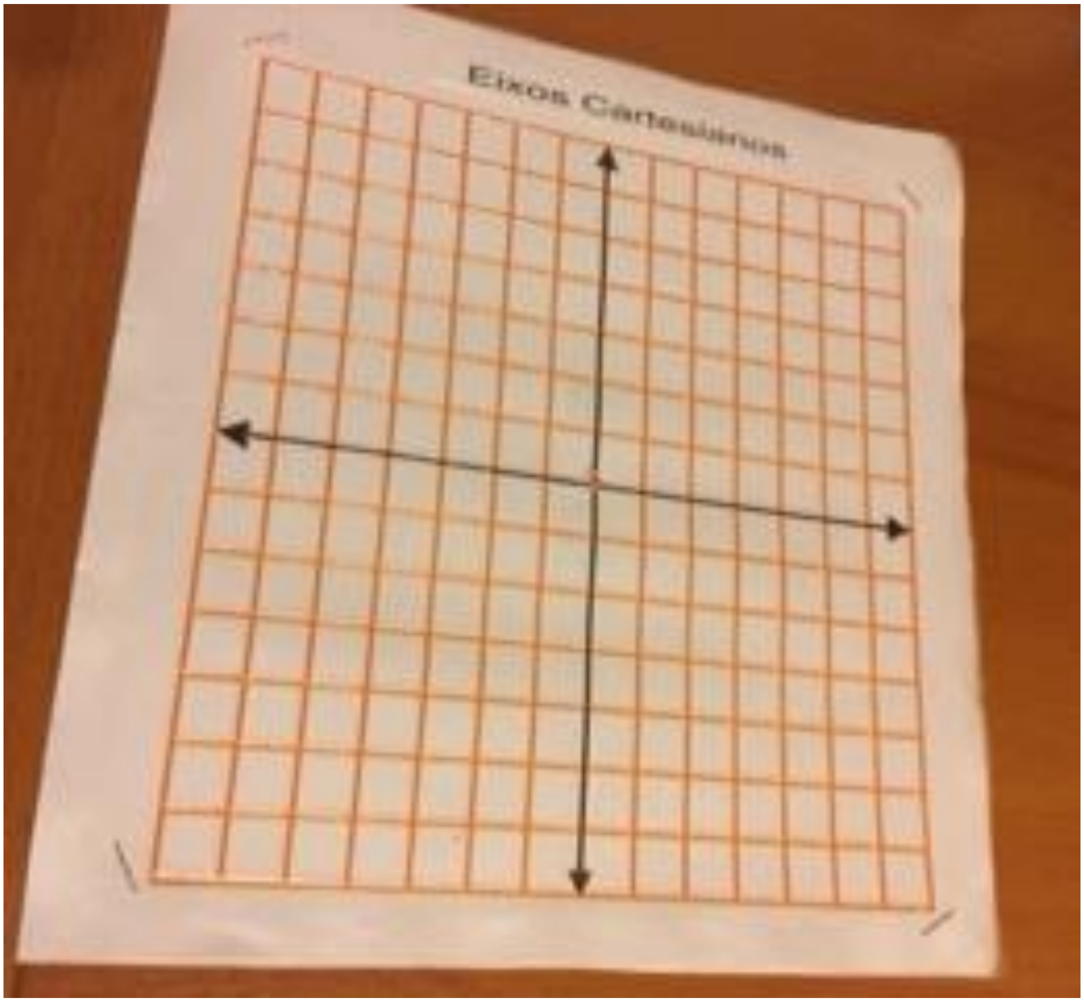
Manrique, A. L. (2015). Educação Matemática Inclusiva: Reflexões sobre resultados de pesquisas desenvolvidas em um projeto do OBEDUC/ 2010. *Anais do I SIPRAEM*. Santo André.

Martins, E. G. (2010) *O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos a Números Racionais por pessoas cegas e pessoas com baixa visão.* (Dissertação de mestrado). Universidade Bandeirante de São Paulo UNIBAN, São Paulo, SP, Brasil.

Souza, J. R. & Pataro, P. M. (2012) *Vontade de saber matemática*. 8º ano. São Paulo: FTD.

Anexo 1 - Eixos Cartesianos em relevo

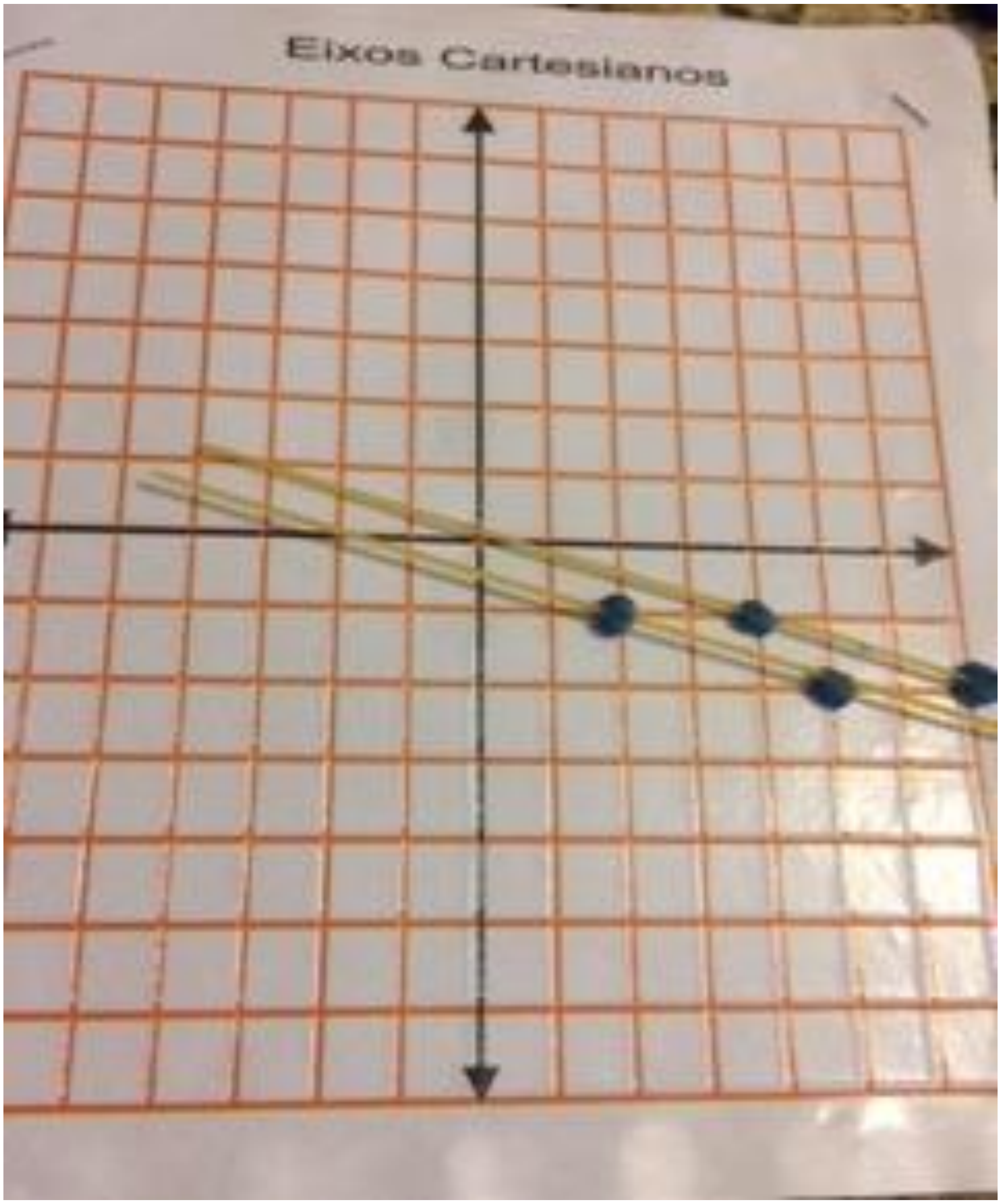
ISBN 978-84-945722-3-4



Fonte: *Kit* do aluno enviado pelo MEC

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

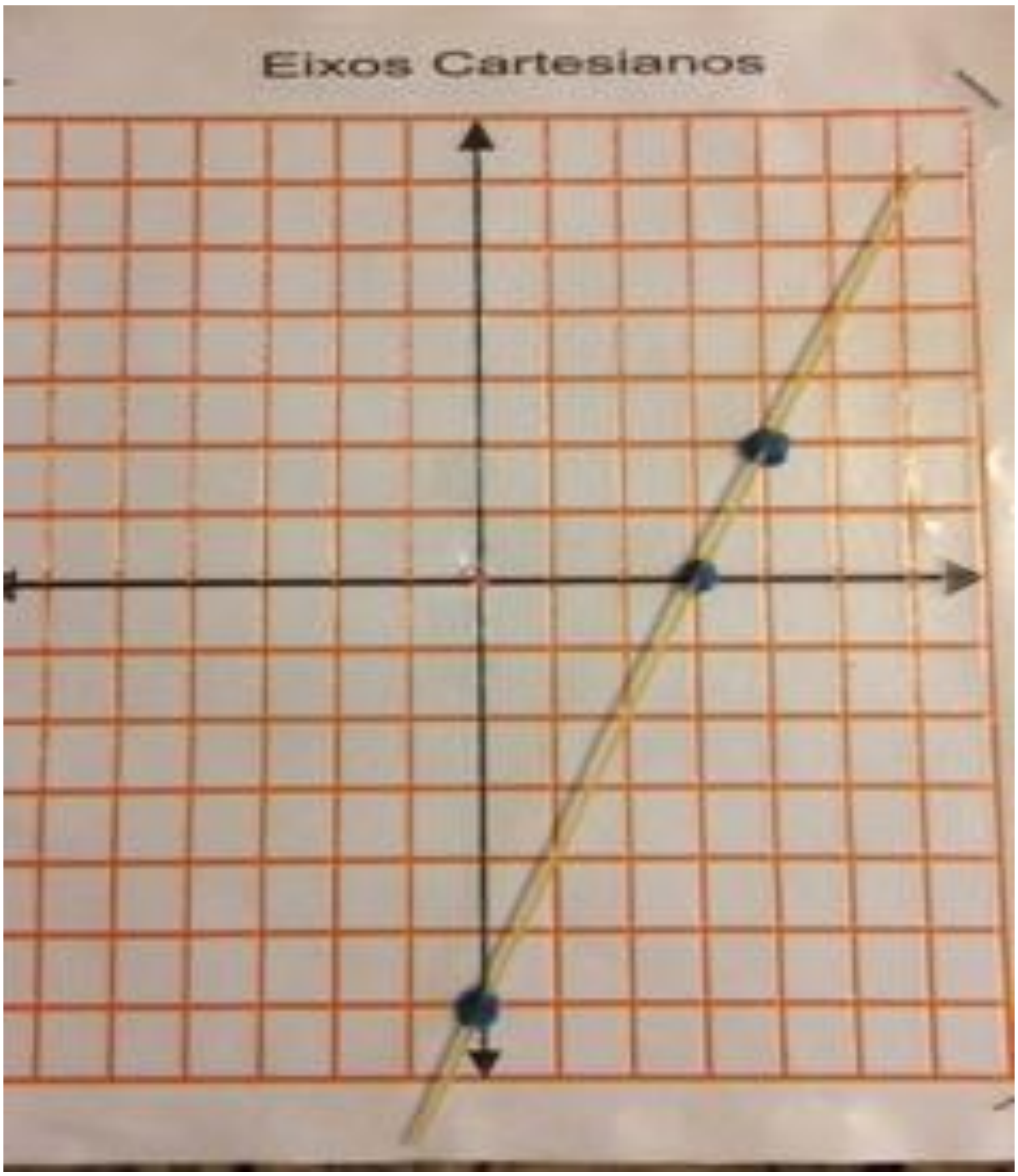
Anexo 2: Item I da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

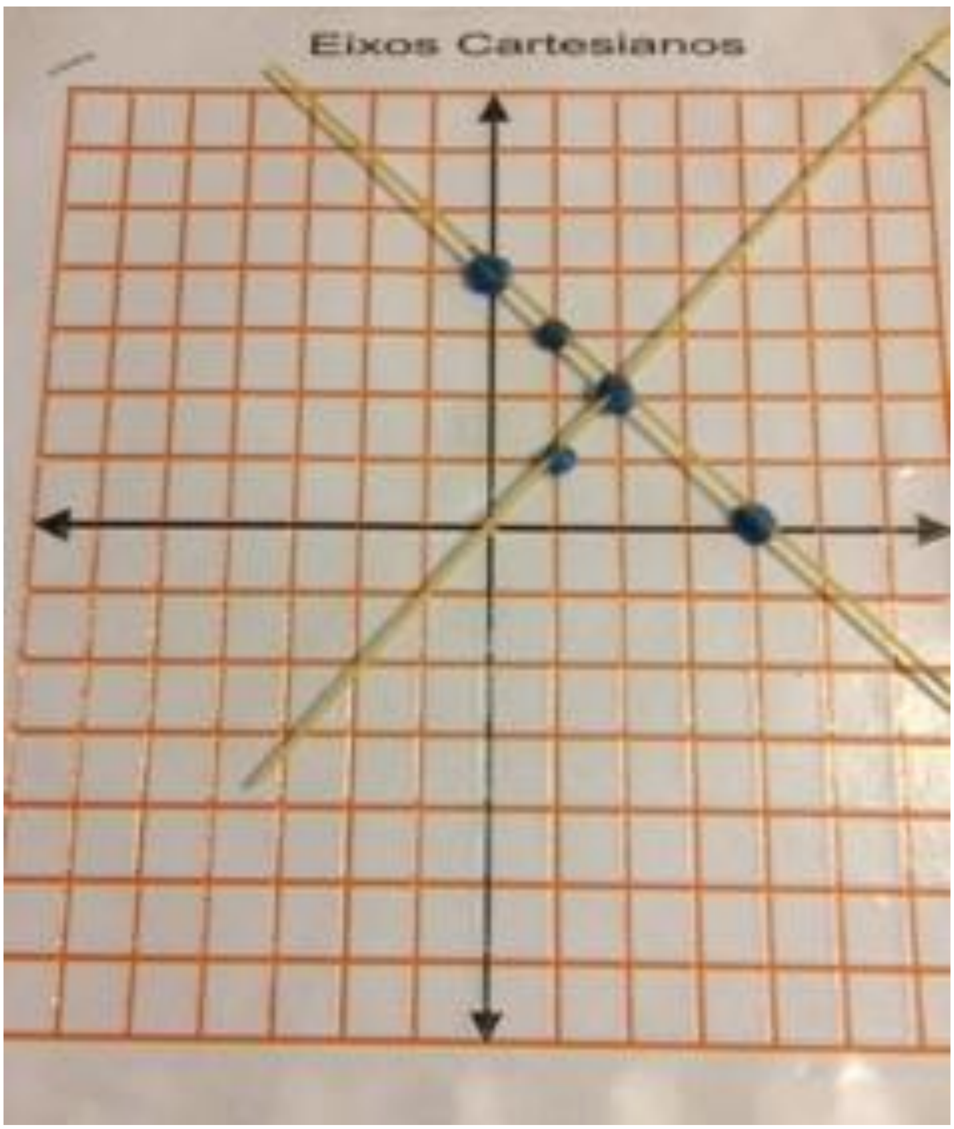
Anexo 3 – Item II da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 4: Item III da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-896

EXPLORANDO GRÁFICO E DOMÍNIO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS EM AMBIENTES INFORMATIZADOS

Fabio Luiz de Oliveira — professorfabio.oliveira@gmail.com — Faculdade Pres. A. C.de Cons. Lafaiete

Regina Helena de O. Lino Franchi — regina.franchi@ufabc.edu.br — Universidade Federal do ABC

Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: 4 Terciario

Palavras chave: Ensino de Cálculo, Funções de duas variáveis, Tecnologias Digitais, Seres-humanos-com-midias.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar parte dos resultados de uma pesquisa que buscou investigar a produção de ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis em ambientes informatizados. A pesquisa, de cunho qualitativo, é fundamentada no constructo teórico seres-humanos-com-mídias, descrito por Marcelo Borba e Monica Villarreal. Foi desenvolvida com alunos de um curso de engenharia, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III. Neste trabalho apresentamos e discutimos atividades relativas à exploração do gráfico e do dominio de funções de duas variáveis, utilizando o software MAXIMA. As atividades foram planejadas considerando-se as características do software, especialmente as possibilidades de visualização, buscando favorecer a transição do cálculo de uma para várias variáveis. Foram desenvolvidas de modo a estimular as interações no coletivo de seres-humanos-com-mídias e a exploraçao dos conceitos. Estes foram posteriormente formalizados a partir das ideias matemáticas produzidas pelos estudantes no coletivo. A análise dos dados fornece indícios de que existiu produção de conhecimento acerca de gráfico e dominio de funções de duas variáveis, sendo que cada mídia teve sua importância e influência nessa produção.

Introdução

Muitos são os desafíos enfrentados por profesores e estudantes no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. São altos os índices de reprovação e desistências por parte dos estudantes. Entre as razões apontadas nas pesquisas para as

ISBN 978-84-945722-3-4

dificuldades estão: as características específicas dos processos envolvendo infinitos e infinitésimos e da abstração requeridos pelo Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991; Tall, 1991), a forma como os conteúdos são trabalhados em sala de aula que enfatizam a repetição, memorização e as técnicas em detrimento da compreensão dos conceitos (Franchi, 1993; Villareal, 1999). Algumas pesquisas (Imafuku, 2008; Alves, 2010) destacam ainda as dificuldades relativas à transição do Cálculo de uma para várias variáveis tais como: visualização e representação simbólicas mais complexas, mudanças de significados conceituais, regras operatórias particulares, entre outras.

Já na década de 1980 um movimento, conhecido no cenário internacional como a Reforma do Cálculo, indicava que os problemas e conceitos deveriam ser abordados de forma algébrica, numérica e gráfica (o que era conhecido como "Regra dos Três") e posteriormente incluiu-se a forma verbal ou descritiva (expandindo-se para a "Regra dos Quatro") (Stewart, 2010). Um dos pontos sugeridos neste movimento foi o uso da tecnologia, como calculadoras gráficas e *softwares* educacionais, para a aprendizagem e resolução de problemas.

Vivenciando como professores muitas das dificuldades apontadas no contexto descrito e tendo interesse pelo uso da tecnología para o ensino do Cálculo, realizamos uma pesquisa buscando responder a seguinte questão: ***"Que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres humanos-com-mídias?".*** Descreveremos a seguir os fundamentos teóricos norteadores da pesquisa.

Tecnologias e Produção do conhecimento

O constructo teórico dos seres-humanos-com-mídias é apresentado por Borba e Villarreal (2005). Para os autores o conhecimento é sempre produzido por um coletivo de atores humanos e não humanos, ou seja, por um coletivo composto por seres-humanos-com-mídias, que constitui a unidade básica do conhecimento. Essa concepção se fundamenta na ideia de que o pensamento humano é reorganizado com a presença de diferentes mídias, como os computadores e suas diferentes interfaces (Tikhomirov, 1981). E também nas ideias de Lévy (1993, 1999) sobre pensar coletivamente e sobre a a noção de tecnologias da inteligencia caracterizando três técnicas que estão associadas ao conhecimento e consideradas como extensões de nossa memória: a oralidade, a escrita e a informática.

ISBN 978-84-945722-3-4

Borba e Villarreal (2005) enfatizam que precisamos entender que há mudanças no pensamento das pessoas, quando estas estão envolvidas em atividades em que os computadores estão disponíveis. Não se trata de julgar se há melhoria ou não, mas sim de identificar as transformações. Por isso, admitindo que o pensamento é reorganizado na presença das diferentes mídias (oralidade, escrita e informática), as consideram também como atores que constituem o coletivo pensante, tendo papel importante na produção do conhecimento.

Destacamos dois pontos que nos parecem relevantes ao considerarmos os softwares constituindo o coletivo: as posibilidades de experimentar e testar mudanças nos objetos estudados e a visualização. As estratégias com foco na visualização são favorecidas com o uso das tecnologias digitais, sendo esta o principal meio de *feedback* fornecido pelos computadores (Borba & Villareal, 2005). Para Machado (2008) as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, desta forma propiciando a descoberta. Ainda, a visualização através da tela do computador "dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos" (p.107). Para Franchi (2007) a visualização facilitada pela informática torna possível testar mudanças nas características algébricas e observar variações no aspecto gráfico. "A comparação entre as representações gráficas, algébricas e numéricas, a observação e a reflexão sobre o observado podem levar à elaboração de conjecturas" (p. 184), o que pode contribuir para produção do conhecimento matemático.

Tendo sintetizado os fundamentos teóricos que nortearam a pesquisa, apresentamos a seguir o contexto em que se desenvolveu e seus procedimentos metodológicos.

Contexto e Metodologia

A pesquisa, de cunho qualitativo, envolveu 43 alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III de um curso de Engenharia em uma Instituição privada de Ensino Superior no Brasil. Teve o propósito de investigar a produção do conhecimento acerca de

ISBN 978-84-945722-3-4

funções de duas variáveis, num coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador.

Optamos pelo MAXIMA por ser um *software* livre do tipo CAS (Computer Algebra System), que possibilita tratamento simbólico dos conteúdos, além de abordagens numéricas e gráficas, em especial o esboço e a manipulação de gráficos em três dimensões, com diferentes possibilidades de visualização.

Nas aulas regulares da disciplina desenvolvemos atividades de caráter exploratório, com questões abertas, com o intuito de possibilitar a discussão, a interação (aluno-aluno, aluno-computador, aluno-professor), a compreensão e consequentemente a produção do conhecimento acerca de funções de duas variáveis. Assim havia inicialmente a exploração orientada dos temas, permitindo aos alunos transitarem nas diferentes mídias e posteriormente as sistematizaçoes teóricas dos conceitos. Os alunos trabalharam em pequenos grupos.

Os dados foram coletados por meio dos registros dos alunos das atividades realizadas, das avaliações escritas e das anotações do caderno de campo do pesquisador. A análise buscou indentificar o conhecimento matemático produzido pelos estudantes considerando a visualização, a transição do cálculo de uma para duas variáveis e o papel desempenhado pelas mídias no coletivo de seres-humanos-com-mídias.

Desenvolvimento e Resultados da Pesquisa

As atividades relativas ao gráfico e ao dominio de funções de duas variáveis, que abordamos neste artigo, foram desenvolvidas em três encontros de 100 minutos cada, sendo os dois primeiros em laboratorio com uso do software e o último em sala de aula. Os conceitos foram introduzidos a partir da exploração de imagens obtidas por meio do MAXIMA e sistematizados de modo teórico no terceiro encontró. Os estudantes receberam um roteiro com sugestões de funções para serem trabalhadas e questões estimulando a observação e a manipulação das imagens obtidas como gráfico das funções, assim como da relação entre cada gráfico e a região plana obtida por sua projeção no plano xy, que posteriormente seria identificada como representação gráfica do dominio da função.

ISBN 978-84-945722-3-4

Inicialmente foram sugeridas as funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$ com dominio $\Re^2$. Foi solicitado aos alunos que esboçassem e explorassem o gráfico das funções considerando diferentes intervalos de variação das variáveis x e y. Foram escolhidas de modo a chamar a atenção para o fato de que, para determinadas funções, um único intervalo de variação pode mostrar apenas parte do gráfico, não dando nenhuma ideia sobre a função de modo amplo. A possibilidade de variar os intervalos foi bastante explorada pelos estudantes. Na figura 1 temos imagens produzidas pelos estudantes para a segunda função.

Figura 1: Gráfico da segunda função estudada

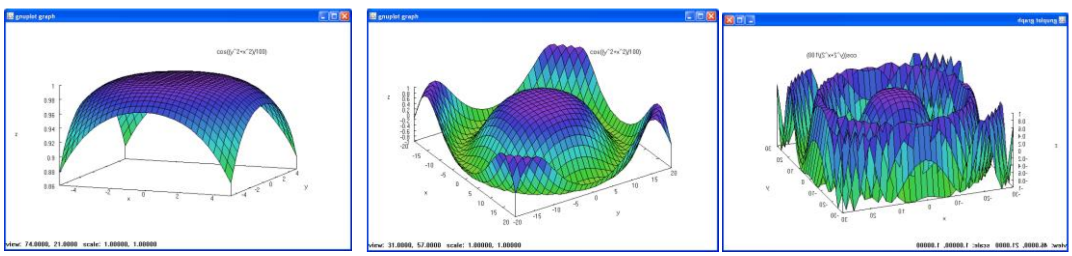


Figura 1: Imagens do gráfico da função $g(x,y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$ com diferentes intervalos de variação das variáveis x e y. As imagens foram produzidas pelos estudantes na pesquisa.

A visualização possível pelo uso do software e a análise das imagens obtidas a partir das variações dos intervalos de x e de y contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos gráficos, que se mostraram nos registros escritos e manifestações orais dos estudantes. Entre elas destacamos: “Os gráficos de funções de duas variáveis são superfícies em três dimensões”; “Um gráfico não muda quando modificamos os intervalos de variação das variáveis independentes, apesar das modificações da aparência do gráfico”.

Borba e Villarreal (2005), citando Levy (1993), destacam o papel do computador no raciocínio matemático: “a possibilidade de ver os efeitos da mudança de um parâmetro em uma equação pode

ISBN 978-84-945722-3-4

contribuir para a geração de novas conjecturas. Este tipo de utilização do computador, na aquisição e processamento de informações, pode transformar o raciocínio matemático" (p. 87).[48]

Indagamos se é possível calcular o valor da função e esboçar o gráfico para qualquer valor de x e de y. O dominio foi definido como o conjunto de valores para os quais é possivel calcular o valor da função. Os alunos analisaram também outras funções sugeridas, fazendo uso de diferentes mídias: alguns usaram os recursos de cálculo algébrico do software e outros fizeram uso da mídia lápis-papel (escrita). Os resultados foram comparados e discutidos. Buscamos relacionar o dominio com a visualização da região plana obtida pela projeção do gráfico da função no plano xy.

Na figura 2 temos o gráfico da função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ e sua projeção no plano xy, sendo a terceira imagem a projeção obtida com maiores valores de grade, recurso que melhora a visualização da região e da definição de seu contorno.

Figura 2: Gráfico e projeção da função h(x,y)

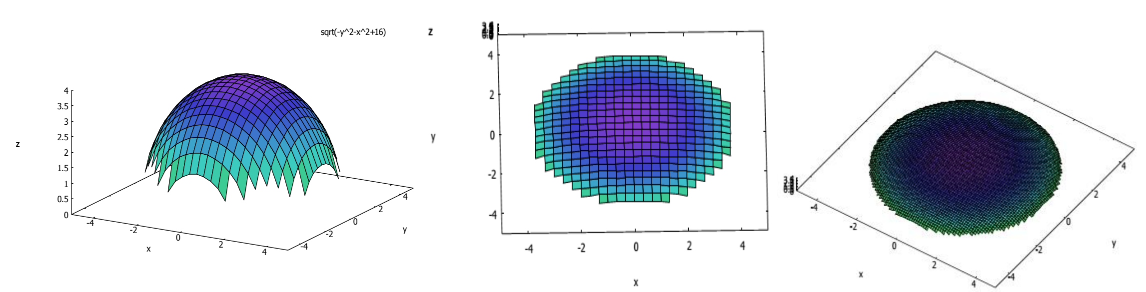


Figura 2: Gráfico da função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ e projeções no plano xy com diferentes valores de grade. As imagens foram produzidas pelos estudantes na pesquisa.

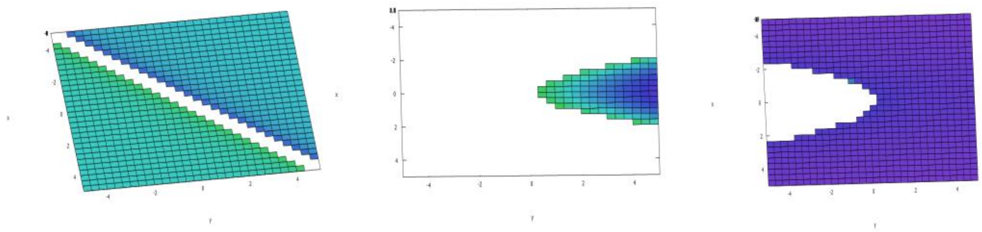
Machado (2008), ao discorrer sobre visualização, destaca que as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, dessa forma propiciando a descoberta. A associação das imagens da projeção do gráfico no plano xy com a localização dos pontos para os quais é possível calcular o valor real da função pode ter contribuído para a produção de conhecimento acerca do domínio de funções de duas variáveis. Na figura 3

[48] Tradução nossa de "the possibility of seeing the effects of changing a parameter in an equation may contribute to the generation of new conjectures. This kind of use of the computer, in the acquisition and processing of information, may transform mathematical reasoning".

ISBN 978-84-945722-3-4

temos algumas imagens produzidas pelos estudantes para visualização da representação gráfica do dominio.

Figura 3: Representações Gráficas de domínios de funções



$f(x,y)=\frac{1}{y-x}$ $\quad$ $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ $\quad$ $f(x,y)=\log(y+x^2)$

Figura 3: Representações gráficas dos domínios das funções indicadas. As imagens foram produzidas pelos estudantes na pesquisa.

Embora os contornos não estejam bem delimitados, os estudantes não tiveram dificuldade em identificar que as regiões são delimitadas por curvas planas, embora estas não estejam visíveis como tal nas imagens obtidas, devido a limitações do software. Tinham consciência de que as imagens poderiam ser melhoradas com o aumento da grade. Nos diálogos dos estudantes sobre a determinação da fronteira da região do dominio identificamos aspectos da transição do cálculo de uma para duas variáveis. Os estudantes relacionaram os extremos dos intervalos reais, que são domínios de funções reais de uma variável, com as curvas que delimitam as regiões planas que são dominios de funções de duas variáveis.

As imagens obtidas pelas projeções dos gráficos no plano xy foram comparadas com as análises das possibilidades de cálculo dos valores das funções, a partir de suas expressões algébricas, feitas utilizando os recursos de cálculo do MAXIMA ou a mídia lápis-papel. Por meio dessa comparação (transitando entre a representação gráfica e algébrica, entre o visual e o calculado) as ideias matemáticas acerca do domínio de funções de duas variáveis foram produzidas, acreditamos que de forma diferente da que seria possível apenas usando a mídia lápis-papel ou apenas as imagens produzidas por meio do *software*.

Considerações Finais

ISBN 978-84-945722-3-4

Na pesquisa descrita buscamos identificar como se dá a produção de conhecimento acerca do gráfico e do dominio de funções de duas variáveis, em um coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA, os computadores e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador. Descrevemos e analisamos atividades nas quais os estudantes, com uso das Tecnologias Digitais e outras mídias, como o lápis-papel, constituindo um coletivo de seres humanos-com-mídias, puderam explorar conceitos matemáticos acerca de funções de duas variáveis, de modo a elaborar e testar conjecturas e produzir ideias matemáticas referentes ao tema. Para tanto buscamos aproveitar as características que as mídias utilizadas oferecem, como as possibilidades de trabalhar diferentes representações: gráficas, numéricas e algébricas.

Pode-se dizer que os recursos de visualização possibilitaram produção de conhecimento diferente do que seria produzido apenas com a oralidade ou escrita. Imagens de superfícies tridimensionais obtidas por meio de softwares são frequentemente encontradas nos livros de Cálculo. No entanto é significativamente diferente olhar uma imagem pronta ou produzi-la com a possibilidade de mudar expressões, variar parâmetros, elaborar conjecturas a partir do observado, testá-las e tirar conclusões. As ideias matemáticas produzidas pelos estudantes na exploração inicial foram fundamentais para a formalização e para a abordagem teórica dos conceitos de gráfico e dominio de funções de duas variáveis, feita posteriormente.

Referências bibliográficas

Alves, F. R. V. (2011) *Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis*. (Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Ceará). Disponível em http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/3166

Borba, M. C. e Villareal, M. E. (2005) *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.New York: Springer.

Dreyfus, T. (1991) Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D. O. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Franchi, R. H. O. L. (1993) *A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia.* (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista) Rio Claro: UNESP.

ISBN 978-84-945722-3-4

Franchi, R. H. O. L. (2007) Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e na informática como posibilidades para a Educação Matemática. In: J. C. Barbosa, A. D. Caldeira & J. L. Araújo (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: pesquisas e práticas educacionais (pp. 177-193). Recife: SBEM.

Imafuku, R. S. (2008) *Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo). Disponível em https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11354

Lévy, P. (1993) *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.

Lévy, P. (1999) *Cibercultura*. São Paulo: Editora 34.

Machado, R. M. (2008) *A Visualização na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral no ambiente computacional MPP*. (Tese de Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas). Disponível em http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000440070.

Stewart, J. (2010). *Cálculo*. Cenearging Learning. 2010.

Tall, D. O. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Londres: Kluwer Academic Publisher.

Tikhomirov, O. K. (1981) The psychological consequences of computerization. In J. V. Wertsch (Ed) *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-897

COMPREENDENDO O PERFIL PROFISSIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Vanessa Cerignoni Benites Bonetti – Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
vanessa.benites@gmail.com – misk@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) / Brasil

Núcleo temático: IV Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formação de Professores, Perfil Profissional, Atuação Docente.

Resumo

As instituições de formação de professores no Brasil sempre esboçaram uma preocupação em relação ao perfil profissional dos professores para atuarem no Ensino Básico. Essa preocupação muitas vezes se apresenta implícita nos Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC), pois esses carregaram, em sua subjacência, algumas concepções sobre os processos de ensinar e aprender, e sobre o papel do professor frente às demandas sociais. Dessa forma, o trabalho que será apresentado corresponde a um excerto de uma pesquisa de doutorado em desenvolvimento, e tem por objetivo compreender o perfil profissional de licenciados em Matemática. Para atender o objetivo tomamos as seguintes questões de investigação: Qual o perfil profissional de professores de Matemática na atualidade? Realizamos uma pesquisa qualitativa que utilizou um Questionário, relacionado à formação de egressos da licenciatura, e a Análise Documental, dos PPC de três instituições públicas do estado de São Paulo/Brasil, para tentar compreender o perfil profissional sob a ótica da instituição, e dos egressos dos cursos de licenciatura. Para análise e interpretação de dados utilizamos os pressupostos da Análise de Conteúdo. Como resultado destacamos um perfil profissional atento aos aspectos didático-pedagógicos, epistemológicos, ontológicos e sociais do trabalho do futuro professor.

Introdução

As instituições de formação de professores no Brasil sempre esboçaram uma preocupação em relação ao perfil profissional dos professores para atuarem no Ensino Básico. Essa preocupação se mostra de maneira evidente nos Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC), pois esse documento sinaliza algumas concepções sobre processos educacionais, papel do professor frente às demandas sociais, e ainda, o perfil profissional do egresso para o exercício docente nos atuais contextos educacionais.

ISBN 978-84-945722-3-4

Este perfil docente muitas vezes está associado aos conhecimentos e saberes que professores devem ter para o exercício profissional. Esses conhecimentos, conforme aponta Gatti (2010) compõem uma esfera da docência concebida como a profissionalidade, que em termos gerais, diz respeito aos aspectos teórico-metodológicos da profissão docente, às características específicas e aos modos de atuação no ambiente escolar e na cultura escolar.

A profissionalidade é construída a partir de um conhecimento específico para o desenvolvimento da profissão. Para Gatti (2010, p. 1360), "a profissionalidade é o conjunto de características de uma profissão que enfeixam a racionalização dos conhecimentos e habilidades necessárias ao exercício profissional". Dessa forma, passamos a nos perguntar, quais conhecimentos os professores necessitam para o exercício profissional? Quais aspectos seriam importante considerá-los no processo formativo de professores de Matemática?

A necessidade contemporânea exige que seja formado um professor que além de ter um "[...] saber indispensável para ser professor, mostra-se como uma lição de humanidade" (GATTI, 2015, p. 230). Nesse sentido, outros elementos adentram-se ao conceito de profissionalidade, tais como o compromisso, o interesse, a ética, entre outros, que dizem respeito ao profissionalismo. Podemos ponderar que o profissionalismo compreende "[...] dedicação ao trabalho de ensinar a todos, domínio da matéria e dos métodos de ensino, respeito à cultura dos alunos, assiduidade, preparação de aulas etc" (LIBÂNEO, 1998, p. 90). Além disso, para Kelchtermans e Vanassche (2014) o profissionalismo se manifesta nas ações e comportamentos dos educadores quando estão envolvidos com a prática profissional. Nesse sentido observamos que o profissionalismo carrega aspectos do desenvolvimento profissional mas também aspectos da esfera pessoal. Existe uma parcela de responsabilidade que é depositada no sujeito, afinal, o compromisso, o interesse, assiduidade e outras atribuições elencadas implicam em um exercício profissional que ultrapassa os limites da sala de aula.

Dessa forma, o trabalho que será apresentado corresponde a um excerto de uma pesquisa de doutorado em desenvolvimento, e tem por objetivo compreender o perfil profissional de licenciados em Matemática. Para atender o objetivo tomamos a seguinte questões de investigação: Qual o perfil profissional de professores de Matemática na atualidade?

Enquadramento Teórico

ISBN 978-84-945722-3-4

Para compreendermos o perfil profissional de professores de Matemática na atualidade é prudente considerarmos as discussões que ocorreram no âmbito da academia sobre o conhecimento do professor para o exercício profissional. Afinal, tais conhecimentos acabam implicando na profissionalidade docente, e consequentemente em sua identidade profissional.

Na década de 50, as questões que permeavam a profissionalidade docente eram pautadas apenas no conhecimento técnico-científico, denominado por Saviani (2009) como conteúdos culturais-cognitivos. Ou seja, no caso da formação de professores de Matemática, os conteúdos matemáticos eram supervalorizados em detrimento aos conteúdos pedagógicos. Posteriormente, com o desenvolvimento de pesquisas no âmbito educacional, as tendências de formação adquirem um novo olhar para o papel do professor e para a sua profissionalidade. Nesse sentido, as décadas de 80 e 90 foram marcadas pela ênfase dos aspectos didático-pedagógicos e as tecnologias de ensino do conhecimento do professor. Neste mesmo período, o trabalho realizado por Schulman (1986) foi um marco para as discussões sobre o conhecimento profissional do professor, o qual aponta o conhecimento do conteúdo, o conhecimento do conteúdo pedagógico e o conhecimento do currículo, como um *corpus* de conhecimento para o exercício docente. Seguindo esta perspectiva, Ponte (1992) distingue o saber científico, o saber profissional e o saber comum, referindo-se em linhas gerais respectivamente ao conhecimento teórico, o prático e experiencial. Contemplando ainda a vertente da epistemologia da prática profissional Tardif (2002) desenvolve pesquisas sobre o tipo de conhecimento que compõe o repertório de conhecimentos de um professor, tais como os saberes disciplinares, curriculares, profissionais e experienciais.

Bairral (2003) faz um levantamento de autores que, ao longo da história, dedicaram-se em estudar este conhecimento juntamente com seus componentes, aspectos e domínios, e, uma análise parcial deste estudo revela que é possível identificar quatro eixos, sobre os quais se devem fundamentar a atividade profissional,

> (a) a atenção na/sobre a ação/experiência docente, (b) ao potencial prático-pessoal dos profissionais, (c) aos problemas da prática e à investigação como integradores epistemológicos e, (d) a atenção à cognição situada, à cognição distribuída e à comunidade profissional de discurso (BAIRRAL, 2003, p.4).

Tratando-se das facetas que compõem a prática do professor de Matemática, Curi (2011) elenca uma lista de conhecimentos considerados essenciais para ensinar Matemática, tais

ISBN 978-84-945722-3-4

como: conhecimentos dos objetos de ensino; articulação de conteúdos matemáticos com outros conhecimentos; tratamento adequado ao conteúdo e à série em que será ensinado; conhecimento de diferentes representações de um objeto matemático e de transformação dessas representações. Percebemos, nesta direção, as distintas teorias do conhecimento que fundamentam a epistemologia da prática, para dar sentido e especificidade para a docência. Ao longo do tempo são adicionados conhecimentos e saberes que fazem sentido à prática profissional, e acabam explicitando a complexidade do trabalho do professor. São ideias interessantes, de um conhecimento particular da profissão docente, que necessariamente implica em um processo formativo para sua aquisição. Nesse sentido, as ideias expostas contribuíram para o fortalecimento do campo da profissão docente, pois buscaram tirar a formação docente do modo "artesanal" como estava sendo feito, indicando saberes e conhecimentos específicos para o exercício profissional.

Partindo das considerações apresentadas sobre a profissionalidade docente podemos refletir sobre as propostas de formação que estão sendo oferecidos nos cursos de Graduação em Licenciatura em Matemática, a fim de identificar na atualidade o perfil profissional de professores de Matemática.

Metodologia da Pesquisa

Realizamos uma pesquisa qualitativa, na qual adotamos uma postura epistemológica interpretativa, e que buscou compreender o perfil profissional de licenciados em Matemática. A partir da pesquisa qualitativa foi possível "considerar elementos não mensurados por meios matemáticos, como a subjetividade, os valores, os contextos, os sentimentos, as diferenças e as questões sociais e culturais, entre outros" (DEVECHI; TREVISAN, 2010, 148).

Como procedimentos metodológicos utilizamos a *Análise Documental* dos Projetos Pedagógicos de Cursos (PPC) de três cursos de instituições públicas do estado de São Paulo/Brasil, para tentar compreender o perfil profissional sob a ótica da instituição. Os cursos investigados foram os de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – UNESP (campus Bauru e Rio Claro) e da Universidade de São Paulo – USP (campus São Carlos). Além disso, aplicamos um *Questionário* com egressos desses cursos de licenciatura, buscando compreender aspectos da formação no âmbito dessas instituições e sua relação com o exercício profissional.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para análise e interpretação de dados utilizamos os pressupostos da Análise de Conteúdo de Bardin (1979), o qual prevê três fases: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados. Essas etapas garantiram a organização, sistematização e análise dos dados. Foram elencados eixos de análise, a partir das Unidades de Contexto e de Registro de cada um dos instrumentos metodológicos. A partir dos eixos temáticos realizamos as inferências e interpretações, buscando responder nossa questão de investigação.

Perfil Profissional evidenciados nos PPC

O Projeto Pedagógico de Curso (PPC) é um documento oficial e balizador de cursos do Ensino Superior. Este documento possui por finalidade planejar as ações e o trabalho da instituição em termos administrativos e pedagógicos. Este documento é formulado, escrito e aprovado por uma comissão da instituição, na qual envolve professores, alunos e coordenadores.

Como buscávamos compreender o perfil de professores de Matemática, para este trabalho realizamos uma análise apenas do "Perfil do Egresso", que consiste em um dos itens presentes nos PPC. Nesse item "Perfil do Egresso" as instituições, de maneira geral, expõe as perspectivas que possuem com relação ao professor que irão formar, indicando conhecimentos e posicionamentos que esperam do aluno egresso.

Por meio da sistematização da análise foi possível identificarmos cinco eixos de análise que foram constituídos por Unidades de Contexto e de Registro (BARDIN, 1979), e nos indicam aspectos do conhecimento e do perfil profissional do professor. São eles: Conhecimento do processo de aprendizagem; Conhecimento didático-pedagógico do trabalho do futuro professor; Aspectos/dimensões epistemológicos do conhecimento matemático, pedagógico e filosóficos; Aspectos/dimensões sociais do trabalho do futuro professor e; Aspectos/dimensões didático-pedagógicas do futuro professor.

A partir de nossas inferências e interpretações, com relação aos eixos acima citados, foi possível perceber que os profissionais devem ser, entre outros aspectos, "reflexivo", "crítico" e "comprometido". Essas palavras foram citadas em vários momentos, seja para abordar o papel do professor frente às atuais demandas sociais, seja pra tratar de sua própria prática docente. Ou seja, os PPC almejam que o profissional seja autônomo e independente o suficiente para tomar decisões, seja na sala de aula quanto no ambiente institucional. Esperam

ISBN 978-84-945722-3-4

ainda que o professor desenvolva um espírito investigativo para superar o senso comum, nos mais variados contextos.

De acordo com esses documentos, o egresso de um curso de Licenciatura em Matemática deve ter uma profunda formação Matemática, tal como a formação pedagógica, e que ele seja capaz de articular e contextualizar esses conhecimentos visando melhorar a sua prática. Para tanto precisa conhecer os aspectos históricos, filosóficos, social e político que envolve esses dois campos de conhecimento.

Além disso, o profissional deve ser capaz de trabalhar em equipes interdisciplinares, conhecer o contexto social dos alunos, conhecer práticas inclusivas, reconhecer o papel das TIC em sua prática e na sociedade, entre outros. Além disso, deve ser um sujeito transformador, que possa intervir no atual quadro "fracassado" da Educação no país.

Perfil de egressos de cursos de Licenciatura em Matemática

Buscando identificar o perfil profissional de licenciados em Matemática analisamos as respostas de 109 professores de Matemática, egressos dos cursos de Licenciatura que investigamos, sobre os aspectos didático-pedagógicos da própria formação inicial.

O Questionário era composto por 34 questões, entretanto analisamos as respostas de apenas duas delas que tratavam sobre a mobilização de conteúdos matemáticos e pedagógicos durante a formação inicial, e sobre conhecimentos que poderiam ter sido mais explorados durante a graduação. Essas questões foram selecionadas nesse momento por trazerem indícios sobre a profissionalidade docente, e consequentemente sobre o perfil profissional.

Muitos egressos apontaram de maneira positiva como os conhecimentos matemáticos e pedagógicos foram viabilizados durante o curso, entretanto, o curioso foi percebermos que muitos tomaram consciência da importância desses conhecimentos somente após a inserção no ambiente de trabalho, e ainda, tomaram consciência do inacabamento da formação. Ou seja, a prática docente ajudou os recém-formados a refletirem sobre a própria formação, e como essa formação foi importante para o trabalho como professor, evidenciando um pouco a maturidade do licenciado.

Fazendo reiteradas leituras desse material, e a partir dos eixos temáticos elencados, fica evidente o apelo dos egressos pelo desenvolvimento de uma prática docente durante os estágios supervisionados e/ou em disciplinas de cunho pedagógicos. A maioria dos egressos

ISBN 978-84-945722-3-4

mencionou que existem conhecimentos que só são compreendidos na prática em sala de aula, com a vivência no ambiente escolar, relacionados ao desenvolvimento de atividades, ao planejamento escolar e à gestão educacional.

Em segundo plano encontramos destaque nas falas dos egressos em menção ao desenvolvimento de conteúdos matemáticos e didático-pedagógicos. Os conteúdos matemáticos propriamente ditos, mas que de certa forma fossem explorados com a perspectiva da Educação Básica, de maneira articulada e contextualizada. Percebemos que alguns egressos, que mencionaram sobre a importância dos conteúdos matemáticos, o fizeram por conta das dificuldades que tiveram em suprir as próprias lacunas da formação do Ensino Básico. Em relação aos conhecimentos didáticos-pedagógicos a ênfase dos egressos se concentrou nas metodologias de ensino diferenciadas (Resolução de Problemas, Investigação Matemática, Modelagem e outras), na questão da Educação Inclusiva (aprendizagem de Libras e práticas inclusivas) e nos recursos didáticos (tecnologias, computação, LEM e jogos).

Alguns pontos levantados dizem respeito às abordagens experienciadas na formação inicial, como a necessidade da articulação entre teoria e prática, dos conhecimentos matemáticos e pedagógicos, no sentido de reorganizar o currículo da Licenciatura. Para isso se faz necessário, como eles mesmos apontaram, uma mudança de postura dos professores formadores, buscando parcerias com escolas e professores do Ensino Básico, e incentivando o trabalho com projetos.

Conclusões

Como qualquer profissão, o profissional que irá atuar no ensino, seja ele em qualquer nível de escolaridade, necessita de formação especializada para o seu exercício, e este é atualmente o grande desafio dos formadores de futuros professores, compreender qual o corpus de conhecimentos necessários para a docência. Faz-se necessário conhecer o perfil profissional de professores de Matemática da atualidade, para formar compreender o papel da instituição formadora.

Por meio do cruzamento dos eixos temáticos obtidos pelos PPC e pelo Questionário foi possível perceber evidências do perfil do professor de Matemática no contexto do estado de São Paulo/Brasil.

ISBN 978-84-945722-3-4

Como resultado podemos destacar quatro grandes características do perfil profissional do professor de Matemática. A primeira delas diz respeito aos *aspectos didático-pedagógicos*, mas não apenas no sentido da prática pedagógica em sala, mas subjazem questões da relação professor-aluno, planejamento escolar, processos avaliativos, elaboração de materiais didáticos, entre outros. Em segundo lugar consideramos os *aspectos epistemológicos*, incluindo conhecimentos sobre matemática, pedagogia, história e filosofia da educação, sociologia, psicologia, que são temas relacionados aos conteúdos específicos da docência. Os dois primeiros aspectos já nos pareciam previsíveis, pois vão de encontro aos conhecimentos apresentados em nosso quadro teórico.

Na sequência verificamos os *aspectos ontológicos* do professor, que se mostram como características do perfil almejado que entre outros aspectos diz respeito à autonomia, independência, comprometimento, empreendedorismo e voluntariado. Este aspecto do perfil está pautado nas características pessoais do sujeito, levando-nos a pensar sobre o profissionalismo assinalado por Libâneo (1998).

E por fim, os *aspectos sociais do trabalho do futuro professor*, faz com que o docente tenha um perfil de transformação, e que seja preocupado com questões sociais que atinge principalmente os menos favorecidos. Esses dois últimos aspectos nos parecem emergir do contexto educacional contemporâneo.

Para finalizar, destacamos a complexidade da formação de professores no contexto atual brasileiro, pois nos parece importante considerar tais aspectos do perfil profissional em momentos da formação inicial.

Referencias

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bairral, M. A. (2003) Natureza do conhecimento profissional do professor: contribuições teóricas para a pesquisa em educação Matemática. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n. 41, pp. 11-33.

Curi, E. (2011) A formação inicial de professores para ensinar Matemática: algumas reflexões, desafios e perspectivas. *Rematec*, v. 6, n. 9, pp. 75-94.

Devechi, C. P. V.; Trevisan, A. L. (2010) Sobre a proximidade do senso comum das pesquisas qualitativas em educação: positividade ou simples decadência? *Revista Brasileira de Educação*, v. 15, n. 43, pp. 148-161.

Gatti, B. A. (2010) Formação de Professores no Brasil: características e problemas. *Educação e Sociedade*, v. 31, n. 113, pp. 1355-1379.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gatti, B. A. (2015) Formação de professores: compreender e revolucionar. In: SILVA JUNIOR, C. A. da et al. (Org.). *Por uma revolução no campo da formação de professores*. São Paulo: Editora Unesp, pp. 229-243.

Vanassche, E; Kelchtermans, G. (2014) Teacher educators' professionalism in practice: Positioning theory and personal interpretative framework. *Teaching and Teacher Education*, 44, p. 117-127.

Libâneo, J. C. *Adeus professor, adeus professora?*: novas exigências educacionais e profissão docente. São Paulo: Cortez, 1998.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. *Educação Matemática: Temas de Investigação*, pp.185–239. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Saviani, D. (2009) Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de Educação,* Rio de Janeiro, v. 14 n. 40, p. 143-155, jan./abr. 2009.

Schulman, L. S. (1986) Those Who understand: the knowledge growths in teaching. *Educational Researcher,* v. 15, n. 2, pp. 4-14.

Tardif, M. (2002) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-898

O CONCEITO DE COMUNIDADE DE PRÁTICA MOBILIZADO EM PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Agnaldo de Oliveira – Vanessa C. Benites Bonetti – Rosana Giaretta Sguerra Miskulin
agitha2@gmail.com - vanessa.benites@gmail.com - misk@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) / Brasil

Núcleo temático: VII – Investigación en Educación Matemática
Modalidade: CB
Nível educativo: Formación y actualización docente
Palavras-chave: Comunidade de Prática, Pesquisa em Educação Matemática.

Resumo

Este trabalho apresenta um recorte de investigação de duas pesquisas de doutorado que estão sendo desenvolvidas na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Brasil. Por se tratar do referencial teórico adotado nas pesquisas de doutorado, trazemos uma análise crítica dos trabalhos publicados em eventos de Educação Matemática no Brasil sobre Comunidade de Prática (CoP). Tomamos por objetivo principal: compreender como o conceito de Comunidade de Prática está sendo mobilizado em espaços formativos. Para atender o nosso objetivo delineamos a seguinte questão de investigação: Como a Comunidade de Prática se mostra no campo de investigação da Educação Matemática? Trata-se de uma pesquisa qualitativa interpretativa, baseada em alguns conceitos da Análise de Conteúdo, na qual adotou os procedimentos de investigações do tipo "estado da arte". Constituímos o corpus da pesquisa pelos trabalhos publicados no Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), dos últimos dez anos. Por meio da análise de dezoito trabalhos pudemos concluir que de maneira geral as Comunidades de Prática, por objetivarem a aprendizagem, se mostraram como espaços potencialmente interessantes para o ensino da matemática, formação de professores e cursos de extensão, seja na modalidade presencial ou à distância.

Introdução

No presente texto, apresentamos um excerto da investigação de duas pesquisas de doutorado que estão sendo realizada junto ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Brasil. Destacamos que a construção do presente texto é permeado pelas discussões ocorridas no "Grupo de pesquisa em processo de formação e trabalho docente dos professores de Matemática da Unesp - Rio

ISBN 978-84-945722-3-4

Claro/SP”, pois as discussões sobre os processos da formação de professores têm pautado os estudos e pesquisas do referido grupo na área da Educação Matemática no Brasil.

Apresentamos neste texto uma análise crítica dos trabalhos publicados no Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e no Encontro Nacional em Educação Matemática (ENEM) sobre o conceito de Comunidade de Prática (CoP), por se tratar do referencial teórico adotado em ambas pesquisas em desenvolvimento.

A partir destes pressupostos, definimos para este trabalho, a seguinte questão de investigação: Como a Comunidade de Prática se mostra no campo de investigação da Educação Matemática?

Para delinearmos respostas a esta questão investigativa temos por objetivo compreender como o conceito de Comunidade de Prática está sendo mobilizado em espaços formativos.

O texto está organizado nas seguintes etapas: iniciamos, apresentando o aspecto teórico envolvendo o conceito de Comunidade de Prática. Em seguida, apresentamos os caminhos percorridos para a coleta dos dados. De posse dos dados coletados, procedemos a sua descrição. Posteriormente, efetuamos a análise desses dados sob influência do referencial teórico adotado. E em último momento apresentamos as conclusões sobre como a Comunidade de Prática se mostra no campo de investigação da Educação Matemática, a partir da análise crítica dos trabalhos publicados no SIPEM e no ENEM.

Aspectos Teóricos: Comunidade de Prática

Os autores, Lave e Wenger (1991), conceituam a atividade e a aprendizagem usando a abordagem de CoP e indicam que a participação e a reificação em um sistema de práticas profissionais, são características ou aspectos que se constituem em CoP. Esses autores ressaltam que a aprendizagem é construída por meio de práticas de trabalho e que essas devem ser analisadas como parte integrante das práticas sociais. Da teoria de Lave e Wenger (1991) retomamos o significado de aprendizagem, pois eles o assumem como participação e reificação em uma comunidade que pode existir fora ou dentro de uma instituição.

Wenger (2001) apresenta uma teoria de aprendizagem social e parte do princípio que o compromisso mútuo entre os participantes, na prática social, constitui-se em um dos processos fundamentais da aprendizagem. O autor enfatiza que nas comunidades de prática

ISBN 978-84-945722-3-4

as pessoas constituem práticas compartilhadas visando alcançar êxitos em suas realizações conjuntas ao longo do tempo.

A natureza do conhecimento e da aprendizagem, na teoria de Wenger (2001), baseia-se no fato de que somos seres sociais e é socialmente que podemos descobrir e validar fatos científicos. Para esse autor, conhecer é uma questão de saber participar de maneira ativa na consecução de objetivos comuns e, finalmente, o produto da aprendizagem é o significado, que a pessoa atribui ao objeto de sua interação social.

Esses pressupostos levam ao centro de interesse da teoria: a aprendizagem como participação e reificação em práticas valorizadas pelas comunidades e a construção de uma identidade em relação a essas comunidades.

Uma CoP consiste num grupo de pessoas que compartilham interesse sobre um assunto ou problema e que aprendem a fazer melhor ao interagirem regularmente. Wenger et al., (2002) definem o termo “Comunidade de Prática” como sendo:

> […] grupos de pessoas que partilham uma preocupação, um conjunto de problemas, ou uma paixão acerca de um tópico e que aprofundam o seu conhecimento e especialidade na área por meio de interações regulares (Wenger et al., 2002, p. 4, tradução nossa).

Neste sentido uma CoP se distingue das outras estruturas por possuírem a combinação de três dimensões fundamentais: o *domínio*, a *comunidade* e a *prática* (Wenger, 2001).

O *domínio* consiste no interesse do grupo/comunidade em determinado tema ou conhecimento específico, é na verdade o que move os participantes à participar de uma comunidade, ou CoP. Este domínio pode ser um conceito, um assunto, uma necessidade, um empreendimento, um curso, entre outros.

O segundo elemento é a *comunidade*, e como o próprio termo indica, são as pessoas que partilham de um domínio comum. O grupo se torna comunidade quando os membros interagem, compartilham informações, estabelecem ações compartilhadas, constroem relações, as quais se tornam possível a aprendizagem.

A *prática* é o terceiro elemento, e este se apresenta como fundamental dentro desta teoria. Pois não basta ter um interesse comum, é necessário que os membros sejam praticantes em ações compartilhadas, tais como: discussões, decisões, empreendimentos, entre outros. Não é suficiente apenas participar e ter um interesse nessa participação é preciso atuar, experienciar modos de fazer e de se constituir na coletividade.

ISBN 978-84-945722-3-4

Essas características distinguem os participantes das outras pessoas formando um senso de comunidade entre os participantes que reforça as interações e a vontade de partilhar ideias, opiniões e, colocar em prática o conhecimento produzido e compartilhado pela comunidade, isto é, por intermédio da combinação e desenvolvimento dessas três características: domínio, comunidade e prática; é possível um grupo de pessoas distinguirem-se para "cultivar" uma CoP.

Este contato entre os membros da comunidade pode ocorrer de forma presencial e virtual, mas deve possibilitar o compartilhamento de ideias, troca de informações e conhecimentos, que em uma interação auxiliam na busca de soluções e das melhores práticas, promovendo a aprendizagem de seus participantes.

Apoiados em Wenger et al. (2002), Rodrigues, Silva e Miskulin (2015, p. 7), acrescentam que "o local ocupado pelos participantes não necessita ser o mesmo, os seus encontros acontecem pelo valor de suas interações e são motivados e transformados pelos limites informais daquilo que podem aprender juntos".

No contexto da formação de professores, a CoP pode ser concebida/vista como um cenário que permite criar e compartilhar experiências formativas que proporcionam aprendizagem aos participantes por meio do compartilhamento de ideias e experiências com outros membros de uma comunidade. Em uma CoP, os participantes trabalham em conjunto, desenvolvendo e compartilhando ações conjuntas que propiciam um desenvolvimento no assunto compartilhado, visando à aprendizagem.

Assim, em uma CoP o foco está na aprendizagem socialmente compartilhada, na resolução de problemas e na compreensão de assuntos importantes para a organização e funcionamento desse grupo/comunidade.

Nesse sentido, o conceito de CoP tem se revelado como uma prática essencial de gestão de conhecimento e de experiências no cenário da Educação, seja ela, inicial ou continuada, na modalidade presencial ou na modalidade EaD. Assim, as CoP se apresentam como uma estrutura que, por meio do confronto e debate de ideias e experiências dos participantes, unidos de forma voluntária e informal por um interesse em comum, facilitam a criação e o compartilhamento de conhecimentos e de práticas de suas profissões. Dessa maneira, impulsionam o desenvolvimento individual dos seus membros e relacionamentos entre eles, com forte impacto na aprendizagem, gerada no coletivo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Design Metodológico

Foi desenvolvida uma pesquisa de cunho qualitativo, na qual adotamos alguns pressupostos das investigações do tipo “Estado da Arte”. De acordo com Ferreira (2002), as pesquisas deste tipo costumam ser definidas como de caráter bibliográfico e buscam mapear e/ou discutir “[...] certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas [...]” (Ferreira, 2002, p. 258).

Nesse sentido, trata-se de um trabalho de natureza bibliográfica, pois buscamos compreender como o conceito de Comunidade de Prática está sendo mobilizado em espaços formativos, por meio de trabalhos publicados em eventos acadêmicos de Educação Matemática.

Foram evidenciados três momentos distintos durante a pesquisa. Em um primeiro momento elencamos os trabalhos publicados no Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) e no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), dos últimos dez anos, que utilizaram o conceito de Comunidade de Prática. Utilizamos o descritor “Comunidade” para localizar os trabalhos que se aproximavam da temática de estudo. Buscamos o termo “Comunidade” nos títulos e resumos das comunicações científicas, relatos de experiência, pôsteres, e outras formas de apresentação.

Ao todo localizamos 33 trabalhos, 9 do SIPEM e 24 do ENEM, entretanto, após reiteradas leitura, identificamos apenas dezoito trabalhos que abordavam o conceito de Comunidade de Prática na perspectiva de Wenger (2001). Dessa forma, o *corpus* da pesquisa foi constituído por seis trabalhos publicados nos anais do SIPEM e doze trabalhos publicados nos anais do ENEM, entre os anos de 2006 e 2016.

Este primeiro momento é o momento em que o pesquisador “[...] interage com a produção acadêmica através da quantificação e de identificação de dados bibliográficos, com o objetivo de mapear essa produção num período delimitado, em anos, locais, áreas de produção” (Ferreira, 2002, p. 265).

Em um segundo momento, realizamos um fichamento dos trabalhos, buscando objetivo, questões de investigação, dinâmica metodológica e resultados. Para Ferreira (2002, p. 265) é nesse momento que “[...] o pesquisador se pergunta sobre a possibilidade de inventariar essa

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

produção, imaginando tendências, ênfases, escolhas metodológicas e teóricas, aproximando ou diferenciando trabalhos entre si, na escrita de uma história de uma determinada área do conhecimento".

E, por fim, mas não distantes dos dois primeiros momentos, num terceiro momento realizamos a análise dos dados, a partir dos conceitos da Análise de Conteúdo de Bardin (1979).

Apresentação e Discussão dos Trabalhos Analisados

Constituímos o *corpus* da pesquisa por meio de dezoito trabalhos publicados no SIPEM e ENEM, dos últimos dez anos. A partir disso realizamos o fichamento desses trabalhos para termos mais claramente o objeto de estudo de cada um deles. Após a realização do fichamento de cada trabalho organizamos os dados em uma tabela, na qual foi possível identificar a abordagem do conceito de CoP em cada trabalho e os resultados obtidos.

Dos dezoito trabalhos investigados quatro utilizaram o conceito de Comunidade de Prática como aporte teórico do trabalho. Embora não tenham sido apontados resultados com relação à constituição de Comunidades de Prática efetivamente, os trabalhos revelaram elementos interessantes da Comunidade de Prática, que podem ser evidenciados em espaços formativos, como por exemplo, reflexões sobre as relações de poder inerentes em comunidades.

Dos trabalhos que constituíram Comunidades de Prática propriamente ditas, em dois deles foram constituídas CoP em disciplinas de pós-graduação, um deles em disciplina da graduação, dez trabalhos em momentos de formação inicial e continuada e um trabalho na sala de aula da Educação Básica.

Com relação às CoP constituídas em disciplinas de cursos de pós-graduação, a principal característica apontadas no trabalho foi a possibilidade de ressignificação da prática, por meio da negociação de significados e da aprendizagem compartilhada, na perspectiva de Wenger (2001), conforme o excerto

> Essas comunidades podem ser formadas por professores e estudantes, caracterizando-se em um espaço no qual é possível o compartilhamento de idéias, informações, materiais, conceitos, conhecimentos etc. Assim, os professores passam a aprender em conjunto com outros professores e estudantes, atualizando continuamente seus saberes, desenvolvendo e transformando suas práticas pedagógicas (Miskulin, 2007, p. 12).

ISBN 978-84-945722-3-4

Não distante desses resultados, os trabalhos em que foram constituídas CoP em processos de formação inicial e continuada apontaram as implicações na prática docente e no desenvolvimento profissional, por meio da participação, reflexão e colaboração dos indivíduos em comunidades de aprendizagem. Além disso, um dos trabalhos evidenciou a questão da colaboração e da oportunidade de aprendizagens por meio de interações sociais baseadas no respeito, na confiança e no compromisso dos participantes (Oliveira & Cyrino, 2015).

Nesse sentido, percebemos a existência de elementos na interação do grupo/comunidade que hoje em dia parecem estar distantes da cultura institucional e da cultura escolar, que se mostram relevantes na teoria de Wenger (2001). Isso pode ser corroborado por outro trabalho que encontramos nos anais do SIPEM.

> Fatores como respeito, confiança, desafio, solidariedade, negociação dos empreendimentos, dinâmicas e ações, valorização das singularidades e das práticas profissionais dos professores se mostram férteis e fundamentais à constituição da identidade profissional desses professores e ao cultivo e manutenção desses grupos (Cyrino, 2015, p. 9).

Se tratando do processo de compartilhamento de conhecimentos e experiências com relação ao ensino da Matemática, as pesquisas assinalaram que os professores puderam perceber, a partir da vivência em CoP, outras relações entre o conceito matemático e as diversas possibilidades de educar, evidenciando a ressignificação do conhecimento e da prática pedagógica.

No trabalho analisado de Cyrino, Garcia e Oliveira (2013), a negociação de significados relacionados ao conhecimento matemático foi além do objeto de pesquisa, envolvendo questões relacionadas aos aspectos do conhecimento profissional do professor que interferem em seu trabalho, tal como a gestão do currículo, o processo instrucional, e ainda, a visão de si enquanto professor e da própria profissão docente.

As Comunidades de Prática se mostraram eficazes para processos de ensino e aprendizagem no próprio ambiente escolar, tal como o trabalho de Vicentino e Costa (2010) que explicitou a experiências nos HTPC (Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo) com professores de Matemática do Ensino Médio de uma escola, e a experiência apresentada no trabalho de Ferreira (2010) em uma sala de aula de Matemática com estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

ISBN 978-84-945722-3-4

Com essa mesma perspectiva foi possível perceber o desenvolvimento da profissionalidade docente de professores que participaram do grupo/comunidade constituída no trabalho de Fiorentini (2013),

> Com a colaboração de parceiros críticos das comunidades investigativas, sejam elas acadêmicas ou profissionais, os professores mudaram a forma de trabalhar com os alunos com dificuldades e desenvolveram uma profissionalidade com postura investigativa, desvendando outros saberes e possibilidades sobre o que se ensina e se aprende nas escolas, sobretudo em classes heterogêneas (Fiorentini, 2013, p. 1).

Dessa forma, pelos argumentos apresentados, verificamos aspectos positivos da aprendizagem socialmente compartilhada por meio da participação em CoP.

Conclusões

Pelo exposto, podemos concluir que o objetivo do trabalho foi alcançado, pois foi possível compreender como o conceito de Comunidade de Prática está sendo e pode ser mobilizado em espaços formativos.

Por meio da análise de dezoito trabalhos pudemos concluir que de maneira geral as Comunidades de Prática, por objetivarem a aprendizagem, se mostraram como espaços potencialmente interessantes para o ensino da matemática, formação de professores e cursos de extensão, seja na modalidade presencial ou à distância.

Referências

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Cyrino, M. C. de C. T (2015). Desenvolvimento da identidade profissional de professores em Comunidades de Prática: elementos da prática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 11, 2015, Pirenópolis. *Anais…* Pirinópolis: GO.

Cyrino, M. C de C. T.; Garcia, T. M. R.; Oliveira, L. M. C. P. (2013). Aspectos do raciocínio proporcional mobilizados na resolução e discussão de um problema de proporcionalidade: negociações de significados dos membros da CoP PAEM. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 11, 2013, Curitiba. *Anais*... Curitiba: PR.

Lave, J., Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ferreira, N. S de A. (2002). As pesquisas denominadas "Estado da Arte". *Educação & Sociedade*, 23, 257-272.

Ferreira, J. P. (2010). A sala de aula pode ser vista como uma comunidade local de prática? In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 10, 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: BA.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fiorentini, D. (2013). Aprendizagem profissional e participação em comunidades investigativas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 11, 2013, Curitiba. *Anais*... Curitiba: PR.

Miskulin, R. G. S. (2007). Formação continuada de professores de matemática: a contribuição de comunidades de prática baseadas na tecnologia. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 9, 2007, Belo Horizonte. *Anais*... Belo Horizonte: MG.

Miskulin, R.G.S; Silva, M.R.C; Rosa, M. (2009). Formação continuada de professores de matemática: O desenvolvimento de comunidades de prática baseadas na tecnologia. *Revista Iberoamericana de Tecnologia em Educación y Educación em Tecnología*, 3, 63-69.

Oliveira, L. M. C. P.; Cyrino, M. C de C. T. (2015). Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 11, 2015, Pirenópolis. *Anais…* Pirinópolis: GO.

Vicentino, E. G. V.; Costa, N. M. L. da (2010). O espaço coletivo escolar do professor de Matemática em Comunidades de Prática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, 10, 2010, Salvador. *Anais*... Salvador: BA.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. (2002). *Cultivating communities of practice: a guide to managing knowledge*. Cambridge: Harvard Business School Press.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica: Aprendizaje, Significado e Identidad – Cognición e Desarrollo Humano*. Barcelona: Paidós.

ISBN 978-84-945722-3-4

CB-900

GEOGEBRA EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DARIANA ATENCIO
dariana.atencio@utp.ac.pa
Universidad Tecnológica de Panamá, Panamá

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Geogebra, Ecuaciones Lineales, Matemáticas.

Resumen

La integración de recursos tecnológicos en el aula permite una mejor visualización de las representaciones gráficas y constituye un factor importante en la fijación de conceptos matemáticos.

Se presenta una experiencia educativa donde participaron dos grupos de estudiantes en igualdad de condiciones, quienes realizaron una actividad de forma colaborativa para determinar la solución analítica y gráfica de sistemas de ecuaciones lineales. La técnica utilizada consiste en que uno de los grupos ha trabajado con las metodologías tradicionales de enseñanza y en el otro grupo adicionalmente se le ha incorporado el software Geogebra como recurso didáctico de apoyo.

En términos generales el grupo que ha empleado el software Geogebra comete menos errores tanto en las soluciones analíticas como en la representación gráfica, en relación al grupo que ha utilizado las metodologías tradicionales.

Introducción

Muchos docentes e investigadores en Educación Matemática están de acuerdo en que el uso de la tecnología es necesario en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Existen diversas funciones en las que la tecnología puede jugar un papel fundamental en la instrucción, como lo es en la eliminación de procesos repetitivos y laboriosos, en la visualización, así como también en proporcionar entornos para explorar activamente las propiedades de conceptos y estructuras matemáticas.

La aplicación de diversas herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas posibilita que los estudiantes adquieran habilidades y destrezas para analizar, simular, modelar y resolver problemas en su campo profesional en mejores condiciones que las que obtiene sólo utilizando lápiz y papel.

La presente investigación se enmarca en el área de álgebra computacional y explora la percepción de estudiantes universitarios de primer ingreso respecto de la influencia en la fijación de conceptos matemáticos mediante el uso de tecnologías para el aprendizaje del álgebra lineal, así como también que dichos aprendizajes se den mediante el enfoque colaborativo.

Para ello utilizamos Geogebra, que es un software de matemáticas dinámicas que puede ser utilizado en todos los niveles educativos. Es un programa que tiene un interfaz fácil de usar que contempla Geometría, Álgebra, Cálculo, Estadísticas, entre otros. Es un software de código abierto que cuenta con poderosas herramientas y está disponible en varios idiomas, apoyando la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel global.

Las tecnologías en el aprendizaje de la matemática

Algunos aspectos beneficiosos del uso de tecnologías en el aprendizaje y actitud hacia la matemática son la flexibilidad instruccional, complementariedad de códigos, aumento de motivación y las posibilidades de trabajo en actividades colaborativas y cooperativas. (García, 2009).

Los programas para el aprendizaje de matemática tienen un fuerte componente gráfico para favorecer la visualización. Que la visualización constituya un aspecto importante dentro de la matemática, es algo natural si se atiende la naturaleza misma de la matemática. En este sentido, "el objeto de las matemáticas son las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real". Cualesquiera ramas de las matemáticas están ligadas a estas dos formas

ISBN 978-84-945722-3-4

particulares, entonces, se puede pensar que la matemática es una ciencia que estudia estas relaciones cuantitativas y las formas espaciales. (Ribnikov, 1991).
Otro aspecto relacionado con la visualización en el sentido abordado, es la vinculación de estos entes eidéticos con las estructuras de la realidad. Ésta se conoce como matematización, (De Guzmán, 1996) , lo conceptualiza: "se da una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de estas percepciones lo que es común, abstraíble, y someterlo a una racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones".

Para el álgebra y el cálculo se ha producido un número amplio de programas que buscan aprovechar el manejo de múltiples sistemas de representación, el aspecto dinámico de los sistemas y la interactividad permiten que el sujeto viva una experiencia matemática diferente a la tradicional. En este sentido, el sujeto puede realizar aproximaciones exploratorias a los problemas, trabajar con problemas y situaciones más complejas y reales (gracias a la facilidad de los sistemas para manejar simbolismos más complejos y para realizar cálculos numéricos más rápidamente), y desarrollar una aproximación más inductiva y empírica en contraposición con la aproximación tradicional que tiende ser de tipo deductivo y algebraico (Gómez, 1997). Dentro de esta nueva forma de trabajar estos temas, surgen inquietudes acerca de la pérdida de habilidades del manejo simbólico que los programas realizan para el sujeto y de una posible pérdida en el aprendizaje conceptual. Sin embargo, resulta evidente que los resultados, desde el punto de vista del aprendizaje del sujeto, dependen no solamente del funcionamiento del programa, sino también del cuidado con que el profesor seleccione y diseñe las situaciones y los problemas que el sujeto debe resolver con la ayuda de los programas.

Aprendizaje colaborativo en matemáticas

La pedagogía de Freinet, Rousseau, Neill, Makarenko, Cousinet, Ferrer i Guàrdia y Rué... ha permitido evolucionar los modelos pedagógicos hacia procesos de cooperación y aprendizaje entre iguales. Entienden el aprendizaje desde la relación y la cooperación, en definitiva, desde la interacción. Muestran cómo los estudiantes en torno a tareas adecuadas, aumentan su dominio de conceptos críticos. Este tipo de principios ha creado una forma de entender y

ISBN 978-84-945722-3-4

desarrollar la actividad educativa, las dinámicas prácticas y la configuración de las propias aulas donde ésta se desarrolla. Si nuestro cerebro es capaz de evolucionar y pasar del instinto a procesos superiores de pensamiento, hemos de ayudar a su desarrollo, apoyando en los procesos educativos esas capacidades. Aprendemos socialmente, puesto que nuestro aprendizaje es lingüístico, por tanto, creamos nuestros referentes del mundo que nos rodea en forma de lenguaje, conceptos que se construyen en referencia a lo que el grupo social acuerda. También interaccionamos al aprender y eso nos ayuda a madurar y a construir conceptos, a establecer procedimientos compartidos y a adoptar actitudes ante la vida (Rubia, 2014).

“Las principales ventajas del aprendizaje colaborativo se han relacionado con el desarrollo de competencias transversales que facilitan el desarrollo de habilidades sociales, la resolución de problemas, la autonomía, responsabilidad, capacidad de reflexión e iniciativa. Todas ellas consideradas de gran relevancia por los docentes. En cuanto a las TIC, estas son valoradas por facilitar el trabajo a los alumnos, dándoles más autonomía, motivándoles, captando su atención y adaptándose a su nivel, lo que favorece especialmente a los alumnos con dificultades, si bien permite a todos mejorar el aprendizaje” (García-Valcárcel, 2014).

Los estudiantes participantes de la prueba son nativos digitales, con lo que las estrategias de enseñanza deben procurar la introducción de herramientas tecnológicas, pese a la denominada brecha digital (Prensky). Debido a fuertes inversiones en equipamiento informático en algunas naciones de Hispanoamérica la principal carencia no radica en la denominada brecha digital surgida de la inexistencia de recursos materiales para su implementación sino de una incapacidad para el empleo de las herramientas adecuadas. Tal y como lo recomienda Dan Meyer (TED Conferences), un educador popular en los Estados Unidos fomenta el uso de tecnologías no solamente para resolver problemas sino para formularlos, los comentarios de los estudiantes participantes de la prueba reflejan que una combinatoria de aprendizaje por pares (colaborativo) y de uso de tecnología podría conducirnos en nuevas direcciones de estudio para promover el aprendizaje significativo de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Diseño Experimental

Se trata de una investigación exploratoria de las percepciones de estudiantes universitarios en cursos de primer ingreso. Se trabaja con dos grupos de composición estadísticamente semejante en cuanto a edad y nivel previo de estudios. Ambos grupos reciben clases en igualdad de condiciones.

Como actividad de evaluación formativa se diseñó una prueba con un problema único dando libertad de asociación con un compañero (Anexo 1). Ambos grupos presentaron esta prueba que contiene, además del problema, preguntas abiertas sobre los conceptos que deben dominarse para resolverla.

El grupo experimental realiza, además una encuesta de respuestas múltiples sobre el uso de Geogebra y el aprendizaje colaborativo. Esta encuesta utilizó una pregunta de opciones múltiples que contenía 3 subtemas relacionados con la fijación de conceptos y la percepción de la utilidad y sencillez del software. En una segunda parte y a efectos de controlar que la pregunta indicada no hubiese sido contestada al azar se solicitó comentarios con respuesta libre a 2 preguntas (Anexo 2). En ambos grupos presentan la encuesta 34 estudiantes.

Resultados y análisis

La tabla 1 presenta los resultados en la prueba sobre soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Los porcentajes de acierto se han calculado en base a la respuesta para sistema de solución única (1), sistema sin solución (2) e infinitas soluciones (3).

Grupo	Preguntas	Solución analítica			Representación Gráfica		
		1	2	3	1	2	3
Control	% aciertos	88,2	100	82,4	82,4	94,1	82,4
Experimental	% aciertos	100	94,1	94,1	100	88,2	94,1

Tabla 1

En términos absolutos se observa una mayor frecuencia de aciertos entre los participantes del grupo experimental que entre los del grupo de control. Aunque este resultado por sí solo no es definitivo, sirve como punto de partida para la ampliación del estudio mediante una investigación longitudinal con un mayor número de participantes que permita una comparación significativa de las medias porcentuales.

ISBN 978-84-945722-3-4

Las respuestas de la pregunta relacionada con los sistemas sin solución se salen de la tendencia de los problemas con solución única e infinitas soluciones, tanto en la solución analítica como en la gráfica. La diferencia podría estar relacionada con errores estadísticos.

En el espacio para ampliación por comentarios libres, los comentarios mayoritarios se emiten sobre el hecho de que Geogebra facilita la visualización de las representaciones gráficas y la rapidez con la que se resuelven los problemas. Se considera además, que al ser una herramienta que no necesita conexión a internet al momento de utilizarlo, le revierte utilidad que podría incrementarse en una aplicación en teléfonos móviles.

Respecto de las respuestas a las preguntas adicionales sobre los conceptos y métodos relacionados con la solución del problema planteado, no hubo diferencia significativa entre ambos grupos y se observó una mayor frecuencia en mencionar métodos de solución que conceptos propiamente dichos.

Para las respuestas sobre si el trabajo colaborativo favorece la fijación de conceptos, en su totalidad, los estudiantes de ambos grupos respondieron que sí, dando como razones que la presencia de un compañero permite aclarar dudas, reforzar conocimientos, discusiones de conceptos mediante la comparación de formas de visualización de los mismos. (Granberg, 2015) han trabajado con Geogebra aplicado a entornos de aprendizaje colaborativo en álgebra, a nivel de bachillerato, y han concluido que los estudiantes emplearon Geogebra para visualizar, referenciar, probar y monitorear para la negociación de conocimientos compartidos y que no es asunto únicamente de no dividirse el trabajo, sino que se trata también de compartir conocimientos en los asuntos siguientes: hacia dónde nos dirigimos, donde nos encontramos en estos momentos y como llegaremos a dónde vamos.

Las respuestas en la encuesta aplicada a los estudiantes que trabajaron con Geogebra reflejan que un 76,5% percibe que el software le ayudó en la fijación de conceptos relacionados con la representación gráfica de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, mientras que el 14,7% considera que no fue de utilidad en la fijación de conceptos y un 8,80% % no responde. En aspectos relacionados con la ergonomía de Geogebra 76,5 % considera que es un software de fácil utilización mientras que 14,7 % encuentran que es complicado y un 8,80 % de estudiantes no responde. Al examinar la relación entre el estudiante y el programa en aspectos como la apariencia de la interfase y la funcionalidad del software, ambas variables resultaron favorecidas en la concepción de los estudiantes pues el 91,2% responde que es

ISBN 978-84-945722-3-4

visualmente agradable y un 88,2% manifiesta que le permite una mejor solución de los problemas y le ahorra tiempo. Estas opiniones en gran medida coinciden con (Iranzo, 2009)

Conclusión

Esta experiencia nos ha permitido inferir, a través de las respuestas presentadas por los estudiantes que existe un alto nivel de aceptación en el uso del software Geogebra como una herramienta de apoyo en la solución de problemas. Además, los estudiantes coinciden en que el trabajo colaborativo con TIC les facilita el trabajo, les permite compartir y debatir ideas, les ayuda a reforzar conocimientos, favorece la inclusión y la integración de aquellos estudiantes con dificultades.

Los resultados favorecen la incorporación del uso de Geogebra para el aprendizaje significativo de la matemática, como herramienta de apoyo en el aprendizaje colaborativo de los sistemas de ecuaciones lineales.

Uno de los aspectos relevantes es que Geogebra les ayuda a tener una mejor visualización gráfica, lo que contribuye a una mejor fijación de conceptos matemáticos.

En términos generales el grupo que utilizó Geogebra cometió menos errores tanto en las soluciones analíticas como en la representación gráfica, en relación al grupo que utilizó las metodologías tradicionales.

Bibliografía

De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización.* Madrid: UCM.

García, M. R. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la evolución y las actitudes matemáticas de estudiantes de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 369-396.

García-Valcárcel, A. e. (2014). Las TIC en el aprendizaje colaborativo en el aula de Primaria y Secundaria. *Comunicar*, 65-74.

Gómez, P. F. (1997). Graphics Calculators use in Precalculus and achievement in Calculus in PME. *21th PME Conference.* Lathi: University of Helsinki.

ISBN 978-84-945722-3-4

Granberg, C. O. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematic software. *Journal of Mathematical Behaviour* , 48-62.

International Geogebra Institute. (s.f.). *www.geogebra.org*. Recuperado el 24 de abril de 2017, de Geogebra: www.geogebra.org

Iranzo, N. F. (2009). La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 433-446.

Prensky, M. (s.f.). *www.marcprensky.com_Nativos e inmigrantes digitales.* Recuperado el 06 de 03 de 2017, de Marc Prensky Practical Visionary: www.markprensy.com

Ribnikov, F. (1991). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: Mir.

Rubia, B. a. (2014). Revolution in Education?, Computer support for collaborative learning (CSCL). *Comunicar*, 10-13.

TED Conferences. (s.f.). *TED*. Recuperado el 07 de 03 de 2017, de www.ted.com_danmeyer

PROBLEMA

Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a_{11}x} & + & \boldsymbol{a_{12}x} & = & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x} & + & \boldsymbol{a_{22}x} & = & \boldsymbol{b_2} \end{array}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22,}\ b_{1,} b_2$ son números dados.

a) Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22,}\ b_{1,} b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones tenga **SOLUCIÓN ÚNICA**. Represente gráficamente.
b) Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22,}\ b_{1,} b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones **NO TENGA SOLUCIÓN**. Represente gráficamente.
c) Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22,}\ b_{1,} b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones tenga **INFINITAS SOLUCIONES**. Represente gráficamente.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Preguntas adicionales:

1) Que conocimientos consideras importante para resolver este problema.
2) Qué procedimiento utilizó para resolver el problema.
3) Considera que el aprendizaje colaborativo favorece la fijación de conceptos matemáticos.

   Si ______ No _____

   Explique:

EXPERIENCIA CON GEOGEBRA

I Parte. Señale con una "***X***" (puede seleccionar más de una respuesta).

Después de su experiencia con Geogebra le parece que:
_____ El software le ayudó en la fijación de conceptos
_____ Es un software de fácil utilización
_____ Es un software complicado
_____ Es visualmente agradable
_____ Le permite una mejor solución de los problemas y le ahorra tiempo.
_____ Su fijación de conceptos no depende del software.

II Parte.

1) Comente acerca de su percepción de la eficacia del uso de Geogebra en la fijación de conceptos matemáticos.

2) Señale las ventajas, desventajas, limitaciones, dificultades o posibilidades relacionado con el uso de Geogrebra.

ISBN 978-84-945722-3-4