UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

GILSON MAICÁ DE OLIVEIRA

IDENTIDADE E INDISCERNIBILIDADE: UM TRATAMENTO CATEGORIAL

Florianópolis
Setembro 2018

GILSON MAICÁ DE OLIVEIRA

IDENTIDADE E INDISCERNIBILIDADE: UM TRATAMENTO CATEGORIAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do grau de DOUTOR EM FILOSOFIA.
Área de concentração: Lógica e Epistemologia.

Orientador: Prof. Dr. Décio Krause.

Florianópolis
Setembro 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

OLIVEIRA, Gilson Maicá de
Identidade e Indiscernibilidade: um tratamento categorial / Gilson Maicá de OLIVEIRA ; orientador, Prof. Dr. Décio Krause, 2018.
203 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Filosofia. 2. Identidade. 3. Indiscernibilidade. 4. Teoria de quase-conjuntos. 5. Teoria de quase-categorias. I. Krause, Prof. Dr. Décio. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Filosofia. III. Título.

Gilson Maica de Oliveira

“IDENTIDADE E INDISCERNIBILIDADE: UM TRATAMENTO CATEGORIAL”

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutor em Filosofia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Florianópolis, 26 de setembro de 2018.

Prof. Roberto Wu, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Décio Krause, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jonas Rafael Becker Arenhart, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Adonai Schlup Sant’Anna, Dr.
Universidade Federal do Paraná

Prof. José Carlos Cifuentes, Dr.
Universidade Federal do Paraná
com participação em modalidade à distância

Prof. Dr. Roberto Wu
Coordenador do Programa de Pos-Graduação
em Filosofia/CFH-UFSC
Portaria nº 1344/2016/GR

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência [a Matemática] acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

Carl F. Gauss.

De certo modo, se conhece a forma matemática por suas transformações. Poder-se-ia dizer ao [objeto] matemático: dize-me como se transforma e dir-te-ei que és.

Gaston Bachelard.

A maioria de todo o saber humano existe apenas no papel, nos livros, nessa memória de papel da humanidade. Apenas uma pequena parte está realmente viva, a cada momento dado, em algumas cabeças. Trata-se de uma consequência sobretudo da brevidade e da incerteza da vida [...] Cada geração que passa rapidamente alcança, de todo o saber humano, somente aquilo de que ela precisa. Em seguida desaparece.

. . . .

Em geral, um erudito tão exclusivo de uma área é análogo ao operário que, ao longo de sua vida, não faz nada além de mover determinada alavanca, ou gancho, ou manivela, em determinado instrumento ou máquina, de modo a conquistar inacreditável virtuosismo nessa atividade. Também é possível comparar o especialista com um homem que mora em sua casa própria, mas nunca saiu dela. Na casa, ele conhece tudo com exatidão, cada degrau, cada canto e cada viga, como, por exemplo, o Quasímodo de Victor Hugo conhece a catedral de Notre-Dame, mas fora desse lugar tudo lhe é estranho e desconhecido.

Arthur Schopenhauer. *Sobre a Erudição e os Eruditos.*

Para Neida Mara, Matheus e Natália, em testemunho de amor e ternura.

Agradecimentos

É sempre moralmente recomendável que se façam as devidas referências àqueles que contribuíram, de uma forma ou de outra, para a realização de um trabalho como este; afinal de contas, além do autor, certamente muitas outras pessoas e mesmo instituições contribuíram para que sua realização fosse possível. Entendo que nenhuma produção artística, filosófica ou científica é, rigorosamente falando, obra exclusiva de um único ser humano. Definimo-nos por nossas interações, muitas das quais sequer temos consciência. Naturalmente, existem aqueles que não participam diretamente da execução do trabalho e há os que contribuem através da leitura crítica, com sugestões que o enriquecem, tornando-o palatável e, em alguns casos, por que não dizer, relevante para a ciência e filosofia. Dentre as primeiras, cito com a mais profunda gratidão e ternura, minha amada esposa Neida Mara, que tem sido ao longo dos anos companheira, amante e confidente. Aos meus filhos Matheus e Natália, peço escusas pelo tempo que lhes foi roubado por este empreendi-

mento. Também faço neste espaço, singular referência a meus alunos e colegas da Faculdade Basiliana de Filosofia (Fasbam), que muito têm contribuído para meu aperfeiçoamento espiritual e profissional.

Das pessoas que contribuíram direta e efetivamente para que este trabalho viesse à tona, cito com gratidão ímpar meu orientador Prof. Dr. Décio Krause, com quem tenho ao longo dos anos de pós-graduação muito aprendido, não apenas sobre lógica e filosofia das ciências formais, ou fundamentos da mecânica quântica, mas sobretudo sobre o espírito crítico que deve nortear a atividade filosófica e científica. Neste ponto, também faço especial alusão ao Prof. Dr. Adonai S. Sant'Anna, a quem tive a grata ventura de ser aluno de álgebra linear no Curso de Física da UFPR. Por certo, não acredito fulgurar entre seus alunos mais brilhantes, mas espero constar entre seus amigos. Sem dúvida, suas observações críticas sobre minhas ideias contribuíram para o aperfeiçoamento de minha pesquisa e meu modo de encarar a ciência e a educação. Nesta oportunidade, também faço menção ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes, que me sugeriu desenvolver pesquisa em teoria de categorias. Ao longo do desenvolvimento desta monografia, o Prof. Cifuentes sempre foi solícito em atender meus apelos para uma conversa informal sobre o tema em que vinha trabalhando. Certamente foram momentos de crescimento para mim. Para finalizar estas notas de agradecimento, faço especial referência ao professor Dr. Jonas Rafael Becker Arenhart quem gentilmente, concordou em fazer parte do processo de avaliação deste projeto.

Enfim, não posso deixar de acentuar que este trabalho, no que tem de relevante para a cultura filosófica e científica, ainda tem muito por avançar. Na verdade, constitui-se mais como um projeto aberto que algo definitivamente acabado. Pretende mais esboçar alternativas e apontar caminhos do que apresentar soluções que, permaneceriam irremediavelmente provisórias. Se algo de significativo pode ser colhido dos rabiscos tracejados nas páginas que se seguem, seguramente devo àqueles, que apesar de minhas limitações, foram persistentes em me acompanhar nesta jornada até seu desfecho. Sem dúvida, naquilo que esta tese ainda mereça reprimenda e correções, permanece sob minha inteira responsabilidade.

G.M.O.

Resumo

Os conceitos de identidade e de indiscernibilidade são conceitos relacionados. Informalmente, entende-se por identidade aquela propriedade ou relação que um objeto tem somente com ele mesmo e com nada mais. Quando dizemos que dois objetos são idênticos, queremos afirmar que na verdade não há dois objetos, mas apenas um, ou seja, que eles são o mesmo objeto. Indiscernibilidade diz respeito ao partilhamento de propriedades. Dois objetos são indiscerníveis, ou indistinguíveis, se têm as mesmas propriedades. Esses conceitos são considerados equivalentes na matemática padrão, isto é, aquela que pode ser desenvolvida em um sistema como a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, NBG, NF ou outra das teorias comuns de conjuntos e nas lógicas de ordem superior (teoria de tipos). É claro que se pode questionar essa suposta equivalência de um ponto de vista estritamente filosófico ou, como se diz, da poltrona. No entanto, foi o surgimento das teorias quânticas com seus objetos fundamentais que ofereceu aos filósofos (da física, principalmente) a oportunidade de questionar a referida equivalência entre identidade e indiscer-

nibilidade. Partículas elementares tanto na mecânica quântica não relativista quanto nas teorias quânticas de campos aparentemente podem partilhar todas as suas propriedades sem que resultem ser a mesma partícula. O tema é controverso e instigante. Podemos assumir que existem entidades (objetos físicos, principalmente) que sejam absolutamente indiscerníveis? Isto é, partilhando todas as suas propriedades sem que resultem ser o mesmo objeto? De um ponto de vista lógico, não há qualquer restrição. A teoria de quase-conjuntos é uma teoria matemática que permite que essa hipótese seja considerada formalmente. Trata-se de uma teoria que permite a existência (ainda que não a postule) de coleções de objetos absolutamente indiscerníveis, em algum sentido desse termo, sem que resultem ser o mesmo objeto. Claro que ela pode ser estudada de um ponto de vista estritamente matemático, independentemente de considerações quânticas. É o que se pretende fazer aqui, porém sob uma ótica categorial. Usando a física quântica apenas como motivação heurística, oferecemos um tratamento categorial à questão da indiscernibilidade, propondo novos problemas a serem investigados pelos filósofos da matemática e, por que não, da física. Nesta tese, apenas introduzimos o assunto, colocando-o sob o devido contexto. Para isso, e em virtude de ser uma tese filosófica, não pressupomos muito do leitor, assim que providenciamos, nos capítulos iniciais, uma breve revisão dos conceitos básicos tanto de teoria de categorias (capítulo 2) quanto da teoria de quase-conjuntos (capítulo 4), sem no entanto pretender uma abordagem completa a qualquer desses temas. O cerne deste trabalho está no capítulo 5, no qual propomos uma estrutura matemática que denominamos de quase-categoria, inspirada na

definição padrão de categoria, visando captar a noção quase-conjuntista de coleções de objetos indiscerníveis. Assim como a categoria **Set** é um caso especial de uma categoria, teremos a quase-categoria **$\mathfrak{Q}$-set** como modelo de nossa axiomática. Aqui, **$\mathfrak{Q}$-set** representa a coleção de todos os quase-conjuntos, que serão os objetos de nossa quase-categoria, sendo as quase-funções (um conceito da teoria de quase-conjuntos) os morfismos. Já as considerações filosóficas são postas ao final.

Palavras-chave: identidade, indiscernibilidade, quase-conjuntos, categorias, quase-categorias, objetos quânticos.

Abstract

The concepts of identity and indiscernibility are related concepts. Informally speaking, identity is understood as that property (or relation) an object has only with itself and with nothing else. When we say that two objects are identical, we are saying which in fact there are not two objects, but just one, that is, they are the very same entity. Indiscernibility concerns the sharing of properties. Two objects are indiscernible, or indistinguishable, if they share the same properties. These concepts are considered equivalent in standard mathematics (the one that can be developed in a system like the Zermelo-Fraenkel set theory) and in higher-order logics (type theory). Of course, this supposed equivalence can be questioned from a strictly philosophical point of view, or, as it were, "from the armchair." However, it was the emergence of quantum theories with their fundamental "objects" that offered philosophers (especially philosophers of physics) the opportunity to question the equivalence between identity and indiscernibility. Elementary particles in both non-relativistic quantum mechanics and in quantum field theories

apparently can share "all" their properties without being the same particle. The subject is controversial and provocative. Can we assume that there are entities (physical objects, mainly) that are absolutely indiscernible, sharing all their properties without being the same object? From a logical point of view, there is no restriction. Quasi-set theory is a mathematical theory that allows this hypothesis to be formally considered. It is a theory which allows the existence of collections of objects which may be absolutely indiscernible (in some sense of that term) without being the same object. Of course, the theory can be studied from a strictly mathematical point of view, regardless of quantum considerations. That is what we intend to do here from a categorical point of view. Using quantum physics only as a heuristic motivation, we offer a categorical treatment to the notion of indiscernibility, by proposing new problems to be investigated by the philosophers of mathematics and, why not, of physics. In this thesis, we only introduce the subject, placing it under the proper context. For this, and because it is a philosophical thesis, we do not presuppose much from the reader, so we have provided in the opening chapters a brief review of the basic concepts of both category theory (chapter 2) and quasi-set theory (chapter 4), without intending a complete approach to any of these themes. The core of this work is in chapter 5, in which we propose a mathematical structure that we call quasi-category, inspired by the standard definition of the category, aiming to capture the quasi-set-theoretic notion of collections of indiscernible objects. Just as the **Set** category is a special case of a category, we will have the quasi-category $\mathfrak{Q}$**-Set** as the model of our axiomatics. Here, $\mathfrak{Q}$**-Set** represents the collection of all quasi-sets, which will be the objects of our quasi-category, with quasi-functions (a concept taken from quasi-set theory) being the morphisms. Philosophical considerations are discussed in the final chapter.

Key-words: identity, indiscernibility, quasi-sets, categories, quasi-categories, quantum objects.

Lista de siglas e abreviações

adapt.	adaptação.
apud	junto a, em.
Cap.	capítulo.
Cf.	*confere*, verificar.
ed.	editor.
et al.	*et alli*, e outros.
ibdem	o mesmo.
op.cit.	*opere citato*, na obra citada.
vb.	verbete.
ZF	Zermelo-Fraenkel.
ZFC	Zermelo-Fraenkel com escolha.
ZFU	Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*.
NBG	Neumann-Bernay-Gödel.
$\mathfrak{Q}$	Teoria de quase-conjuntos.
$\mathfrak{Q}$-Cat	Teoria de quase-categorias.
$\mathfrak{Q}$-Set	Categoria dos quase-conjuntos.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

> I wonder if I've been changed in the night. Let me think: was I the same when I got up this morning? I almost think I can remember feeling a little different. But if I'm not the same, the next question is 'Who in the world am I?' Ah, that's the great puzzle!
>
> Lewis Carroll. *Alice in Wonderland.*

Nosso propósito, neste capítulo introdutório, é fornecer uma compreensão intuitiva e informal daquilo que será tratado neste projeto. De início, esboçamos algumas observações sobre o conceito de *identidade*. Muitos conceitos filosóficos têm sua origem na linguagem ordinária, porém, há de se notar que tais conceitos acabam ganhando na filosofia especificidade que ultrapassa seu sentido comum. Assim, a noção de identidade tem sido por muito tempo uma das mais importantes e controversas da filosofia. Consta, aparentemente, como um conceito estratégico à ciência e ao pensamento qualificado como racionalmente aceitável.[1] Uma reflexão cuidadosa sugere que não se pode fazer muita ciência sem topar, de um modo ou de outro, com a noção de identidade. Evidentemente, não temos a intenção aqui de fazer justiça à complexa gama de debates já realizados sobre este tema, o que demandaria efetivamente um trabalho hercúleo, e que certamente acabaria por permanecer incompleto. Não se trata, portanto, de uma revisão exegética, em que se perfilam as diversas ideias já expostas sobre o assunto. Propomos algo mais modesto: indicar obstáculos à noção de identidade (ou talvez a sua formalização), tendo por pano de fundo certos princípios que procuram capturar a intuição subjacente a esta noção.

Também examinamos nesta empreitada (capítulo 3), ainda que brevemente, duas perspectivas distintas sobre a matemática, uma conjuntista, que dominou o cenário matemático e filosófico do último século, e outra, categorial, que rapidamente transcendeu suas origens, ganhando interesse de filósofos a partir dos anos 1960, especialmente após os trabalhos de F. W. Lawvere sobre fundamentos categoriais da matemática.[2] Ad-

[1]Cf. Bueno [22] *Why Identity is Fundamental.* Ver também para uma qualificação do que queremos dizer com o termo "*racionalidade*" e a expressão "racionalmente aceitável" da Costa [35] *Logique Classique et non Classique.* Cap. 1.

[2]Cf. Lawvere [72] e [73]. J.L. Bell é um dos autores que põem em relevo a teoria de *topos elementar* de Lawvere no debate sobre os fundamentos da matemática. Cf. Bell [15] p. vii. Igualmente corrobora essa tese J.

vogamos, entre outras coisas, uma perspectiva categorial dos conceitos de identidade e indiscernibilidade que contrasta em certo sentido com outras possíveis perspectivas desses conceitos, como a quase-conjuntista exposta de forma sumária neste trabalho (capítulo.4). Nesta tese supomos que o leitor está familiarizado com a teoria intuitiva de conjuntos e alguma versão axiomática, como o sistema Zermelo-Fraenkel.[3]

1.1 Identidade: ficção útil?

É lícito afirmar que algumas noções e princípios discutidos por filósofos são significativos para um melhor entendimento dos fundamentos da ciência, particularmente para a matemática e a física. Dentre esses conceitos encontra-se o de identidade, fortemente imbricado pela tradição filosófica com as noções de indiscernibilidade (ou indistinguibilidade) e individualidade. À primeira vista, a todo objeto, seja abstrato ou concreto, pode-se atribuir uma noção de identidade, sendo ele sempre de algum modo distinguível de outros objetos. Por enquanto, esses conceitos estão aqui sendo tomados em seu sentido intuitivo: identidade é algo (uma relação) que um objeto mantem apenas consigo mesmo e que permite dizer que *nada* é como ele, ele é *idêntico* somente a ele mesmo. Indiscernibilidade, ou indistinguibilidade, é uma relação que permite dizer que objetos são indistinguíveis, quando possuem, ou partilham, as mesmas pro-

Marquis [88] *From a Geometrical Point of View: a study of the history and philosophy of category theory.* Cap.5. seção 5.5.

[3]Cf. Apêndice F.

priedades expressas numa linguagem determinada. Esses conceitos são confundidos na lógica e na matemática padrões, como se argumentará à frente. Usualmente são conceitos pensados como não sendo problemáticos, e irremediavelmente tão simples, que é difícil imaginar que possam gerar problemas, por vezes, desconcertantes. Porém, para a filosofia, vista como análise crítica do que se qualifica como pensamento racional, não existem ideias, conceitos ou princípios que não sejam problemáticos, e certamente o conceito de identidade não é exceção.

Vamos começar traçando algumas distinções, dando ênfase aos conceitos de identidade e seu associado de individualidade que comparecem com frequência ao longo de todo o texto. Queremos com isso evitar confusões que possam causar mal entendidos sobre nossa iniciativa teórica.

Quando filósofos procuram estabelecer uma análise do conceito de identidade, acabam, via de regra, entendendo a identidade como uma relação simbolizada por '$=$', de sorte que quando afirmamos que x e y são idênticos (escrevemos $x = y$), estamos dizendo a rigor que não temos dois objetos, mas tão somente um, que pode ser nomeado indistintamente por x ou por y. Com isso os termos 'Zeus' e 'Júpiter' são nomes para um mesmo objeto, um deus da mitologia greco-romana. Por outras palavras, a identidade é uma relação que um objeto mantém apenas consigo mesmo.[4] Assim, a análise envolve uma dimensão lógica, que formalmente depende da linguagem e semântica empregadas, e

[4]Cf. *Cambridge Dictionary. vb.* Identity, p.415.

outra, metafísica, à qual a análise lógica remete.[5] A suposição consagrada é que a lógica enseja a expressão de uma suposta ontologia.[6] O problema está neste ponto em como estabelecer uma teoria da identidade.

A distinção entre *identidade*, um conceito lógico como acima referido, e *individualidade*, um conceito metafísico, que diz respeito àquilo que fornece identidade a um objeto (algum tipo de *substrato* ou *feixe de propriedades*), e *individuação*, (um conceito epistemológico, que nos permite isolar um objeto), tem sido alvo de indagação em toda a história da filosofia. No parágrafo seguinte investimos sobre o conceito de individualidade, procurando fornecer alguma luz sobre essa noção.

Objetos ordinários, como mesas, cadeiras e livros são amiúde

[5] Alguns autores consideram também a necessidade de um princípio psicológico que diz ser impossível pensar objetos desprovidos de individualidade. E. Meyrson fala de uma tendência inevitável à ideia de identidade como resultado da atividade racional – nossa razão é uma razão identificadora. Cf. Meyerson [92] *Identité et Realité.* p.235.

[6] Ao exercemos nossa faculdade cognitiva, afirmam da Costa e D. Krause, utilizamos conceitos muito gerais, como os de objeto, propriedade e relação, que nos são sugeridos pela experiência. Na gênese da formação desses conceitos, "levamos em conta variados aspectos como, por exemplo, que objetos que nos cercam tendem a permanecer idênticos a si mesmos; que objetos não podem ter e não ter uma certa propriedade nas mesmas circunstâncias, e que dada uma certa característica que lhe possa ser aplicada, ele a tenha ou não. Essa imagem intuitiva dos objetos influenciou a formação de nossas primeiras sistematizações racionais, em especial a geometria dos antigos gregos, a física e a própria lógica". Cf. da Costa & Krause [37]. *Lógica.* p.1.

tomados como indivíduos. É comum afirmar que um objeto é um indivíduo se pode ser distinguido de outros objetos em termos de suas propriedades, mesmo que aparentemente seja muito semelhante a outros objetos, por exemplo, a ovelha Dolly e seu não menos famoso clone. Diferenças em algumas de suas propriedades nos permitem reconhecer uma e outra ovelha – por essa razão tomamos frequentemente diferenças entre objetos como suficiente para supor que são indivíduos. Essa abordagem é conhecida como teoria dos feixes de propriedades. Para garantir a individuação não podem existir dois objetos absolutamente indistinguíveis, no sentido de possuírem exatamente o mesmo conjunto de propriedades. Esse modo de atacar o problema tem sido criticado por diversos motivos, entre os quais o fato de podermos conceber, ainda que idealmente, objetos indiscerníveis, isto é, objetos com o mesmo conjunto de propriedades sem que isso colapse na noção de identidade. Porém, mesmo que possamos conceber objetos indistinguíveis, pode-se contra-argumentar que tais objetos indiscerníveis não podem existir como indistinguíveis quando consideramos suas propriedades espaço-temporais, ou seja, em termos dessas propriedades os objetos ainda podem ser distintos e, portanto, considerados como indivíduos. Em outras palavras, essa abordagem à questão deve ser sustentada por uma hipótese adicional de impenetrabilidade dos corpos, uma hipótese igualmente problemática que precisa pressupor a individualidade de pontos no espaço-tempo para garantir a individualidade dos objetos. De acordo com essa perspectiva os conceitos de individualidade e distinguibilidade se fundem numa mesma noção.

Uma crítica contumaz à teoria dos feixes de propriedades afirma que essa teoria confunde questões epistemológicas, sobre como distinguimos objetos, um conceito epistêmico, com questões ontológicas sobre a base metafísica da individualidade. Assim argumenta-se que a noção de distinguibilidade requer pelo menos dois objetos. Podemos, contudo, imaginar um universo em que há apenas um objeto. Em tal situação, embora estranha, mas filosoficamente razoável, seria inapropriado aplicar o conceito de distinguibilidade a tal objeto. Este objeto seria distinto do que?

Se essa linha de argumentação for aceita, talvez a ideia de individualidade deva ser buscada em algo além das propriedades dos objetos. Essa é a postura defendida pelas chamadas teorias do *substratum* que, grosso modo, afirmam que todos os objetos possuem um *quid*, algo que lhes é inerente, não é uma propriedade, e lhes confere individualidade. Algo para além das propriedades, que confere o que Heinz Post denominou de *individualidade transcendental*.[7] As substâncias individuais se distinguiriam das propriedades porque têm a capacidade de resistir à transformações, ou seja, não se modificam. A dificuldade dessa linha filosófica consiste justamente em explicar no que consiste exatamente um *substrato*. O que é isso que não se modifica? Existem diversas objeções às teorias do substrato, uma delas está relacionada a *transtemporalidade* dos objetos comuns, isto é, como garantir a individualidade de coisas que se modificam

[7]Cf. French & Krause [48] *Identity in physics: a historical, philosophical, and formal analysis.* p.11.

com o tempo? Outra questão é como estabelecer uma relação entre substratos e nossas práticas comuns de individuação.

Tanto teorias do *substrato* quanto teorias dos *feixes de propriedades*, aqui apresentadas de forma sumária, enfrentam desafios ainda mais significativos quando entra em cena a mecânica quântica.[8] De acordo com um modo de interpretar o formalismo dessa teoria, as entidades quânticas não possuem individualidade e, portanto, o conceito de identidade não faria sentido para tais entidades.[9] De qualquer forma, a questão envolve em última instância a promoção de uma teoria da individualidade.

A partir daqui vamos utilizar as noções de identidade e individualidade e seus correlatos no sentido proposto pelos parágrafos anteriores. Assim, identidade é um conceito lógico, uma relação que um objeto mantém apenas consigo mesmo, e individualidade é um conceito metafísico que afirma que objetos podem ser individuados (um conceito epistêmico). Feitas essas distinções, vamos concentrar nossa atenção sobre a noção de identidade, um conceito que nos parece bastante intuitivo e fugidio, que encontra sérias dificuldades quando pretendemos mapeá-lo com nosso aparto lógico-formal padrão.

Uma relevante e tradicional abordagem à ideia de identidade

[8] Cf. Becker & Krause [14]. *Quantum non-individuality: background concepts and possibilities.*

[9] Estamos apenas afirmando que é possível (uma perspectiva possível, que não é a única) assumir que as entidades quânticas são destituídas de individualidade.

é dada por um princípio lógico, supostamente metafísico,[10] segundo o qual todo objeto é idêntico a si mesmo e a nada mais. Assim, a noção de identidade, em uma de suas formulações primeiras, foi enunciada algo como "a é a". Alguns autores, ainda acrescentavam a cláusula "e não é não-a".[11] Muitos filósofos, desde Descartes a Kant, entre outros, consideraram esta asserção como o princípio de identidade, frequentemente lembrado pelo seu qualificativo latino de *principium identitatis*. Para os antigos filósofos gregos, como Platão e Aristóteles, o conceito de identidade, ao lado de outros princípios lógicos, constitui numa noção absoluta, não relativizável, um princípio pétreo do pensamento e da realidade mesma das coisas.

Com o advento da lógica simbólica, o conceito de identidade também acabou recebendo diversas apresentações formais, como na lógica elementar clássica (a lógica de primeira ordem clássica). Por certo, apresentações formais desse princípio permanecem problemáticas quando tentamos aplicá-las na descrição do mundo real. Como podemos falar, por exemplo, de um princípio de identidade para os objetos ordinários, que se modificam a cada nanosegundo, ou objetos como nuvens ou ondas? Seria lícito falar de uma identidade para processos ou eventos? De que modo um processo ou evento possui identidade? Alice

[10]Não há concordância entre os filósofos sobre o que seja exatamente um *princípio metafísico*. Grosso modo, vamos considerar para todos os efeitos que um princípio metafísico pretende expressar a constituição ou natureza da realidade das coisas. Cf. Lowe [80] *A Survey of Metaphysics*. Cap. 1.

[11]Cf. da Costa [33] *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. p. 95 e da Costa [35] *Logique Classique et non classique*. p.101.

é um indivíduo a que se pode atribuir identidade? Parece difícil supor que um princípio de identidade se aplique diretamente aos objetos do mundo físico, como pedras, árvores, eventos, ou mesmo às partículas elementares, embora a suposição tácita seja a de que tais entidades sejam providas de identidade. Mas o que seria identidade para essas entidades? Aparentemente, segundo A. Rodin, a dificuldade não diminui se temos em mente apenas objetos abstratos.[12] Intuitivamente, o conceito de identidade é bastante simples, mas quando deixamos o domínio intuitivo e tentamos uma análise lógica, topamos com um conjunto de desafios que são difíceis de superar via aparato lógico-matemático padrão. Talvez a ideia de um princípio de identidade deva ser entendido de um ponto de vista pragmático, apenas como uma suposição, útil para o modo como sistematizamos racionalmente o mundo, algo análogo quando em física tratamos de conceitos como os de *corpos perfeitamente elásticos* ou *perfeitamente rígidos*, porém, questionável como um princípio lógico ou metafísico de validade irrevogável ou não relativizável.[13]

Uma forma de tratar o conceito de identidade, associada aos princípios da lógica elementar clássica é dada pelos princípios

[12] Para esse autor, objetos geométricos (por exemplo) podem coincidir de tal forma a se tornarem indiscerníveis, não sendo no entanto o mesmo objeto (o que ele chama de "*paradox of doubles*"). Cf. Rodin [105] *Axiomatic Method and Category Theory.* Cap.6. p.149s.

[13] O advento de sistemas lógicos alternativos, com as lógicas não-reflexivas, corrobora a tese de que este e outros princípios lógicos, aceitos pela tradição filosófica como indeclináveis, não possuem uma validade absoluta. Uma referência, neste caso, para lógicas não-reflexivas é *Quantum mechanics, ontology, and non-reflexive logics.* Cf. Krause [64].

de identidade dos indiscerníveis e indiscernibilidade dos idênticos, que possuem em nossos dias, de acordo com alguns autores, um importante significado para a ontologia da mecânica quântica.[14] Para alguns teóricos fundadores da física quântica, entre os quais Schrödinger, as partículas fundamentais não possuem individualidade e, portanto, não estariam submetidas ao conceito de identidade e a esses princípios, atribuídos originalmente a G. Leibniz.[15]

Sem pretendermos escrutinar todas as possíveis dificuldades e controvérsias que envolvem a noção de identidade, vamos esboçar dois obstáculos paradigmáticos que impõem sérias dificuldades à ideia de entidades a que se pode atribuir identidade visando dar ao leitor uma ideia da problemática relativa ao conceito. O primeiro obstáculo está relacionado à identidade transtemporal, isto é, como garantir a identidade de um objeto através do tempo? Um dos paradoxos mais lembrados relacionados ao problema da identidade transtemporal é o famoso para-

[14]Cf. French & Krause *op.cit.* Também para o filósofo Bas van Fraassen uma das questões centrais da filosofia da mecânica quântica é o *problema das partículas idênticas* (indistinguíveis). Cf. van Fraassen [113] *Quantum Mechanics: an empiricist view.* p.193. O problema da indistinguibilidade também apresenta consequências em outras áreas, como na inteligência artificial, destacou o professor Adonai Sant'nna, um dos avaliadores desta tese. Por exemplo, Orlowska e Zdzisław em *Expressive Power of Knowledge Representation Systems* (cf. Orlowska Zdzisław [97]) mostraram que informações sobre objetos, fornecidas por um sistema de representação de conhecimento, são dadas a menos de uma relação de indistinguibilidade.

[15]Para Leibniz tais princípios não eram apenas leis da identidade, mas uma aplicação de seu *princípio de razão suficiente.* Cf. *Cambrdige Dictionary of Philosophy. vb.* Identity, p.415.

doxo do barco de Teseu, proposto pelos antigos filósofos gregos. Suponha um barco que, após muitas viagens, tenha todas suas tábuas substituídas. Se denotamos por A o barco no início das viagens, e por B o *mesmo* barco depois da completa substituição de suas madeiras, então temos $A = B$ (dada a suposição que são o mesmo barco), embora A e B não tenham todas as mesmas propriedades. Este paradoxo parece estar em desacordo com o princípio de indiscernibilidade dos idênticos. Este princípio, é comumente escrito em uma linguagem de segunda ordem como

$$x = y \to \forall F(F(x) \leftrightarrow F(y)).$$

Em que x e y denotam indivíduos e F é uma variável sobre propriedades de indivíduos. No século XVII, o filósofo Thomas Hobbes propôs um *addendum* a esse paradoxo,[16] assumindo a possibilidade de reconstruir o barco a partir de suas velhas madeiras e, assim, obter um terceiro estado C do barco. Como resultado, podemos perguntar: a identidade do barco está no estado B ou C, ou ainda, encontra-se definitivamente no estado A? A suposição de que a identidade transtemporal possa ser garantida por uma trajetória contínua dos objetos no espaço-tempo, ou por uma espécie de *substratum* é difícil de aceitar nesse caso e em outros casos análogos. A ideia de identidade constitui para o barco de Teseu, uma espécie de "instantâneo fotográfico" de um estado do barco num determinado momento de sua jornada. Talvez devêssemos supor que o barco de Teseu é mais um processo que um objeto a que se pode atribuir identidade. Certamente essa ideia enseja uma perspectiva distinta.

[16] Cf. Hobbes [58]. *De corpore.* p.136.

Não teríamos objetos, apenas processos. O barco seria algo que se dá como um processo, que se altera com o passar o tempo.

O paradoxo do barco de Teseu está relacionado a uma família de paradoxos da identidade, chamados de paradoxos temporais, ou paradoxos da mudança, porque envolvem objetos que se modificam.[17] Objetos se modificam, mas ainda assim permanecem os mesmos? Que espécie de identidade pode ser atribuída a tais objetos, se é que isso seja realmente possível? Com efeito, o tempo constitui, pelo menos para os objetos de nossa percepção ordinária, um sério desafio à noção de identidade, e quiçá à própria ideia de entidades como objetos. A metafísica ocidental tem tratado a realidade como um conjunto inerte de objetos providos de identidade, cujas características dinâmicas são ontologicamente secundárias, acidentes numa acepção aristotélica, ou meras aparências, de acordo com uma perspectiva platônica. Desde a época de Platão e Aristóteles, talvez antes mesmo, com os filósofos eleatas, especificamente aqueles da escola de Parmênides, tem-se como fato de que a realidade mesma das coisas é "atemporal" e imutável. De qualquer forma, objetos que se modificam constituem um sério desafio a uma filosofia de objetos, e a suposição de que tais objetos possam ser providos de algo como uma identidade.

Uma possível conclusão que pode ser tirada a partir do que foi dito nos parágrafos anteriores é que, embora geralmente as-

[17]Cf. Gallois [51] cap.1 para uma exposição e análise mais detalhada a respeito de paradoxos da identidade transtemporal. Vale notar que o conceito de "transformação" não implica necessariamente o de "tempo".

sumamos que os objetos comuns com os quais lidamos no dia a dia, como cadeiras, mesas e livros, têm identidade (isto é, uma relação que um objeto mantém apenas consigo mesmo) em algum sentido, na verdade, este parece ser questionável.[18] A noção de identidade é considerada por alguns como uma daquelas ideias que impomos às coisas a fim de poder pensá-las – aparentemente não há identidade para os objetos físicos, ou um princípio de identidade que se aplique sem restrições e certos arranjos artificiais a tais entidades.[19] A noção de identidade nos parece mais uma ilusão, uma ficção útil de nossa constituição neurofisiológica, ou do modo como interagimos com a realidade. A heurística dessa hipótese, aparentemente radical, foi divisada pela primeira vez pelos Eleatas, particularmente Parmênides e, ao que parece, corroborada em certa acepção por Platão, para quem a noção de identidade se aplicaria tão somente às ideias imutáveis. Para ele, os objetos de nossa percepção não têm existência no mundo físico, mas estão num contínuo estado

[18] O ato de organizar o mundo em objetos, indivíduos supostamente providos de identidade, constitui, para alguns pensadores, uma de nossas faculdades do conhecimento. Piaget, por exemplo, que descreve como a criança elabora a noção de objeto, afirma que o processo de elaboração desta noção só ocorre quando a criança é capaz de atribuir ao objeto a ideia de permanência, sendo capaz de reconhecê-lo como a "mesma coisa" em diferentes ocorrências.(Cf. Krause [66] *Entity, but not Identity.*) Diríamos, doutra parte que, na verdade, frequentemente não somos capazes de perceber as sutis alterações que os objetos sofrem ao longo do tempo. De fato, o conceito de identidade se manifesta mais como uma ficção de nossa intuição como diria Hume (Cf. Hume [59] *Investigação acerca do entendimento humano.* Part 1) Ver também Becker & Krause [13] *Hume, Schrödinger e a individuação dos objetos físicos.*

[19] Cf. Bueno [22] *Why Identity is Fundamental.*

de *vir-a-ser*. Ainda, segundo Platão, não é possível qualquer conhecimento genuíno (*epistemé*) do contínuo fluxo do mundo sensível. De acordo com a filosofia platônica, a matemática é o instrumento adequado para a compreensão do mundo inteligível (eterno e imutável), em oposição às aparências do mundo sensível.[20] Rigorosamente falando, não há uma ontologia subjacente ao mundo sensível e, portanto, os "objetos do mundo sensível" não seriam indivíduos,[21] mas apenas sombras (cópias) do mundo das ideias. Conforme Platão, a noção de identidade simplesmente não se aplica àquilo que é fugaz e transitório, ainda que isso seja discutível desde os tempos de Platão.

Diferentemente da física, que lida com objeto que sofrem transformações no espaço-tempo,[22] a matemática, em certa acepção, parece prover suporte à tese platônica. As entidades matemáticas não se alteram no espaço-tempo. Elas são entidades abstratas e rígidas (de modo análogo às ideias imutáveis de Platão), embora os matemáticos continuamente tenham de tratar com mudanças, movimentos, transformações, operações e ou-

[20] Certamente, uma referência clássica ao platonismo na matemática é o texto de Bernays [18] *On Platonism in Mathematics.* p. 256-268. Uma referência mais recente é Balaguer [11] *Platonism & Anti-Platonism in Mathematics* p.5ss.

[21] Informalmente, um indivíduo é um objeto ao qual se pode atribuir identidade, sendo discernível de qualquer outro, pelo menos em princípio. Não discutimos os detalhes aqui, para o que indicamos o Capítulo 1 de French Krause *op.cit.*

[22] Vale notar que isso não vale em todo caso, por exemplo, prótons são objetos que não sofrem decaimento, sendo o valor de sua meia-vida de no mínimo 10^{31} anos.

tros processos, o que via de regra destoa do viés ordinariamente platônico de sua ciência. Autores como Bachelard e Gonseth sustentam que certos conceitos-chave, como os de objeto, propriedade e relação, comumente encontrados na lógica e matemática clássicas, resultam de uma percepção estática e euclidiana da realidade.[23] De acordo com Newton da Costa, os objetos geométricos, em particular, são independentes do tempo, permanecendo idênticos a si mesmos, o que seria uma justificativa epistemológica ao princípio de identidade.[24]

Paradoxos da mudança no tempo[25] não são a única dificuldade sobre a identidade, o espaço é outra. O princípio de identidade dos indiscerníveis (o converso da indiscernibilidade dos idênticos), postula que indivíduos não diferem *solo numero*, *i.e.*, se temos "entidades" com as mesmas propriedades, então elas são idênticas. Em outros termos, não há "indivíduos" partilhando todas as propriedades, mas apenas uma entidade, um único indivíduo. Formalmente,

$$\forall F((F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow x = y.$$

Segundo constam os registros históricos, a fim de provar esta última tese, Leibniz desafiou um amigo durante uma caminhada

[23]Cf. Gonseth [54] *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, p.3 e Bachelard [8] *La Philosophie du Non.* p.47.

[24]Cf. da Costa [33] *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica.* p.120.

[25]Se formos orientados pelas teses de B. Skow, em seu livro *Objective Becoming* [109], não existe paradoxo algum sobre identidade ao longo do tempo.

a encontrar um contra-exemplo entre as folhas de um jardim.[26] Talvez, nos dias de hoje, alguém poderia mencionar a indiscernibilidade das partículas da física quântica para responder ao desafio de Leibniz, dois fótons de mesmo tipo, por exemplo. Segundo certo modo de interpretar as coisas, partículas elementares da mecânica quântica são supostamente *indistinguíveis* quando compartilham as mesmas propriedades intrínsecas.[27] Em outros termos, não é possível rotular ou marcar entidades quânticas de modo a lhes conferir uma identidade.[28] Esse aspecto das partículas elementares desempenha um papel relevante na mecânica quântica,[29] fato que não pode ser negligenciado por espíritos devotados às questões de fundamentos

[26]Leibniz:"Não existe tal coisa como dois indivíduos indiscerníveis. Um engenhoso cavalheiro de meu conhecimento, discursando comigo na presença de Sua Alteza Real, a princesa Sophia, no jardim de Herrenhausen, achou que poderia encontrar duas folhas perfeitamente parecidas. A princesa o desafiou a fazê-lo, e ele correu por todo o jardim por muito tempo para procurar algumas; mas foi sem propósito."(Cf. Leibniz & Clarke [76] *Leibniz and Clarke: Correspondence.* p.22).

[27]Propriedades intrínsecas, em física, são aquelas que independem do estado do sistema, como massa e carga elétrica. Excetuam-se, por exemplo, as propriedades de localização no espaço e no tempo.

[28]Na verdade, é preciso sublinhar que usualmente os físicos rotulam partículas, por exemplo quando escrevem a hamiltoniana de um sistema (operador que indica o estado energético do sistema). O que se quer dizer é que esses rótulos não desempenham papel de atribuir às partículas uma identidade, pois a hamiltoniana é sempre simétrica no que diz respeito à permutação de partículas. Isso é feito justamente para não conferir identidade a essas entidades. Dalla Chiara e Toraldo di Francia afirmam que "a microfísica é o mundo do anonimato" Cf. Dalla Chiara & Toraldo di Francia [38] *Individuals, kinds and Names in Phisics.*

[29]Cf. Sakurai [107] *Modern Quantum Mechanics.* cap.6 p.357.

da física. Doutra parte, também vale lembrar que, em inúmeras situações em ciência, podemos ter uma coleção de entidades cuja individualidade é simplesmente ignorada, ou seja, podemos admitir uma coleção de entidades indiscerníveis. Esses são o caso, por exemplo, de um agregado de bactérias numa placa de Petri, ou mesmo em química uma coleção de moléculas de um certo tipo. Aqui temos, aparentemente, situações em ciência em que se admite uma coleção de "entidades indiscerníveis". O problema, de um ponto de vista lógico, é o de como afirmar que temos mais de uma entidade se elas não possuem identidade. A teoria de quase-conjuntos consegue fazer isso por meio do conceito de quase-cardinal, como veremos.

De qualquer modo, é certo que este segundo princípio também sugere problemas filosóficos. Embora frequentemente supomos que não seja possível haver dois objetos absolutamente indiscerníveis entre objetos físicos (dado, por exemplo, o princípio de impenetrabilidade dos corpos), a matemática parece prover exemplos – Em ZF (ou em ZFC), podemos simular a indiscernibilidade por meio de relações de equivalência ou por congruências. Um outro modo é trabalhar com estruturas não rígidas (contendo automorfismos distintos da função identidade) e definindo indiscerníveis como sendo aqueles objetos que são invariantes por automorfismos.[30] No entanto, qualquer estrutura construída em ZF pode ser estendida a uma estrutura rígida, contendo como automorfismo unicamente a função identidade.

[30] Cf. Coelho & Krause [30] *Identity, Indiscernibility, and Philosophical Claims.*

Nessas estruturas, os objetos serão indiscerníveis unicamente deles próprios, ou seja, no sentido em que estamos utilizando a terminologia, terão identidade. Essa característica é própria de teorias como ZF que, vista como uma estrutura (no sentido de considerarmos a hierarquia conjuntista dada pelo universo de von Neumann V munido da relação de pertinência), é rígida.[31] Em outras palavras, os objetos matemáticos "clássicos" têm identidade. Refutar esse resultado é um dos grandes feitos da teoria de quase-conjuntos.[32] Do ponto de vista das categorias, podemos considerar "indiscerníveis" aqueles objetos que são isomorfos, como veremos à frente. Este será um dos pontos a ser considerado em nosso projeto filosófico. Vale lembrar que, como mais um truque da matemática conjuntista padrão, isso pode ser feito também em teorias como ZF. No entanto, estruturas isomorfas, como dois grupos, não são "verdadeiramente" indiscerníveis, pois têm domínios distintos, operações distintas, ainda que sejam em certa acepção matematicamente indiscerníveis. A visão categorial nos parece mais afeita a simular a indiscernibilidade nesse sentido.

Tanto a noções de identidade como a de indistinguibilidade possuem um tratamento conjuntista já amplamente discutidas na literatura matemática e filosófica;[33] porém, tais noções ainda não têm sido objeto de reflexão significativa em teoria de cate-

[31] Cf. Apêndice E.

[32] Para maiores detalhes consultar Arenhart & Krause [13] *Hume, Schrödinger e a Individuação dos Objetos Físicos.*

[33] A tese *Indistinguibilidade: uma abordagem por meio de estruturas* [28], de A.M. Coelho, é uma referência à noção de indistinguibilidade em ZFC.

gorias.[34] Isto posto, pretende-se aqui dar atenção a uma perspectiva categorial destas noções, particularmente da segunda, com alguma discussão sobre sua significação filosófica.

Segundo nossa ótica, a teoria de categorias proporciona uma nova e original forma de compreender os conceitos matemáticos e, em particular, os de identidade e indiscernibilidade. Esta teoria fornece um ambiente onde estes conceitos podem ser discutidos de uma perspectiva distinta. Podemos dizer que as entidades matemáticas e suas propriedades em uma categoria são dadas *a menos de isomorfismo*, ou, em outras palavras, em categorias as entidades matemáticas são definidas por suas "relações" com outras entidades matemáticas, e sua identidade ou indiscernibilidade estabelecidas por morfismos ou, em outros termos, transformações entre objetos numa categoria e de forma mais abrangente por funtores entre categorias. Pode-se dizer que, de um ponto de vista categorial, não perguntamos sobre um objeto ou suas propriedades intrínsecas, mas sobre suas "relações". Em categorias, uma perspectiva de objetos é substituída por uma "sociologia" de estruturas e de suas possíveis transformações por morfismos.

Em categorias, só é possível recuperar qualquer propriedade de um objeto a partir dos morfismos que chegam e partem do objeto e assim, sua identidade ou distinguibilidade de outros objetos só se realiza por suas interações, um conceito aparente-

[34] Uma referência à noção de identidade em categorias é dada no livro *Axiomatic Method and Category Theory* de A. Rodin. [105] Cap.7.

mente mais débil que o de identidade. Pode-se pensar que essa abordagem sociológica dos objetos não dispõe de um quadro completo de informação sobre o objeto que permita estabelecer identidades. Talvez pudéssemos afirmar que as lentes categoriais são míopes, e não permitem "ver" os detalhes dos objetos. De fato, os "detalhes" não são foco da perspectiva oferecida pelas categorias. A ideia da teoria de categorias é que toda informação relevante para lidar com entidades matemáticas é fornecida de modo satisfatório por *morfismos*.

> A ideia central da teoria de categorias é que um certo domínio matemático pode ser caracterizado abstratamente, não pela descrição de suas características comuns intrínsecas a todas as entidades incluídas nesse domínio, mas antes examinando as conexões entre essas entidades.[35]

Além disso, essa linguagem estabelece níveis de interação para objetos e morfismos numa categoria e para as próprias categorias e morfismos (funtores) entre categorias. Não corrobora uma perspectiva de objetos, mas preconiza um ponto de vista de interações e processos. De fato, de acordo com esta perspectiva, os morfismos entre objetos desempenham um papel autônomo dos objetos (estruturas). Conforme J. Bell, a teoria de categorias é como uma língua em que os *verbos* estão em pé de igualdade com os *substantivos*.[36] Nesse sentido, a teoria de categorias difere fundamentalmente de teorias de conjuntos usuais como ZFC, NBG e NF em que a noção de função é reduzida

[35] Cf. Corry [32] *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. p.340.
[36] Cf. Bell *op.cit.* p. 236.

ao conceito de conjunto. Urge explorar e contrastar a intuição que subjaz às noções de conjunto e morfismo. De um lado, uma perspectiva assentada numa relação binária de pertinência (interna), de outro, uma perspectiva fundada numa relação ternária de composição (externa).

De um ponto de vista das categorias, devido às interações que os objetos mantém entre si, adquirem o mesmo *status* dos objetos e em alguns casos os objetos se reduzem aos morfismos. Assim, a teoria de categorias constitui uma ferramenta poderosa no trato do trânsito entre estruturas matemáticas, e ao mesmo tempo sugere uma perspectiva externa e interativa dessas estruturas em que a noção de indistinguibilidade se mostra tão importante quanto a de identidade. Uma hipótese que assumimos neste trabalho.

O núcleo deste trabalho fará uso de conceitos da teoria de categorias. Por isso, achamos conveniente introduzir um breve capítulo de revisão dessa teoria no que segue.

Capítulo 2

Categorias e toposes: uma vista

> Much of Mathematics is dynamic, in that it deals with morphisms of an object into another object of the same kind. Such morphisms (like functions) form categories, and so the approach via categories fits well with the objective of organizing and understanding Mathematics. That, in truth, should be the goal of a proper philosophy of Mathematics.
>
> Saunders MacLane. [84] p.359

Antes de investirmos no conteúdo principal desta monografia, queremos rever, ainda que brevemente, algumas noções básicas da teoria de categorias que serão úteis em discussão subsequente. Daremos particular atenção à paradigmática categoria **Set**, com alguma referência a outras categorias. A atenção especial dispensada a **Set** é devida à necessidade de fazermos referência a noção de *topos*, que generaliza, num certo sentido, noções conjuntistas.[1] Nossa abordagem não deve conduzir à suposição de que categorias podem receber em qualquer caso um tratamento natural via teoria de conjuntos. Este capítulo não constitui propriamente uma introdução, ou revisão exaustiva e rigorosa da teoria de topos,[2] uma área extremamente vasta de investigação matemática que desperta significativas questões associadas à filosofia da matemática.

2.1 Categorias

Existem muitos modos de definir a noção de categoria.[3] Grosso modo, uma categoria consiste de objetos e transformações (morfismos ou setas) entre esses objetos. Veremos agora uma abordagem axiomática à teoria de categorias inspirada em W. Hatcher [57],[4] que por sua vez segue Lawvere [73]. Queremos deixar bem

[1] Cf. Apêndice D.

[2] Temas secundários e de menor relevância para nossos propósitos são referidos em apêndice, ou remetidos à bibliografia quando conveniente.

[3] Para uma definição alternativa de categoria ver Adámek *et al. Abstract and Concrete Categories* p.44. Outras referências importantes são Awodey [3] *Category Theory* Cap.1 e Mac Lane [83] *Categories for the Working Mathematicians.*

[4] Nossa exposição se distingue da de Hatcher por considerar objetos e morfismos como termos primitivos, ao invés de apenas morfismos como é

claro que a exposição que segue é uma apresentação usual da teoria de categorias, para a qual vale a identidade padrão para morfismos, mas não para objetos.

A teoria de categorias, que denominamos teoria **Cat**, é apresentada aqui como uma teoria de primeira ordem, cuja linguagem consta dos símbolos lógicos usuais de uma teoria elementar com identidade.[5] Os símbolos específicos da linguagem de **Cat** são dados como segue:

$$\pounds_{cat} = \{\mathcal{O}, \hbar, \Bbbk, \mathbb{D}, \mathbb{C}\}$$

de tal sorte que:

1. $\mathcal{O}$ e $\hbar$ são símbolos de predicado unários; $\mathcal{O}(x)$ significa que x é um objeto e $\hbar(x)$ significa que x é um morfismo. Se x é um objeto então, dizemos que é um *$\mathscr{C}$-objeto* e se for um morfismo dizemos que é um *$\mathscr{C}$-morfismo*.

2. $\Bbbk$ é um predicado ternário e $\Bbbk(x, y, z)$ significa que z é a composição de x com y, sendo x, y e z morfismos.

3. $\mathbb{D}$ e $\mathbb{C}$ são símbolos funcionais unários, $\mathbb{D}(x)$ e $\mathbb{C}(x)$ significam respectivamente o domínio e o codomínio de x.

Variáveis individuais são termos, e expressões da forma $\mathbb{D}(t)$ e $\mathbb{C}(t)$, onde t são termos, também são termos. Estes são os

feito por ele.

[5]Cf. Mendelson [93] *Introduction to Mathematical Logic* e Hatcher [57] *The Logical Foudation of Mathematics.* Cap.1 seção 1.4. Salientamos que o conceito usual de identidade em uma teoria de categorias se aplica somente a morfismo, mas não a objetos.

termos da linguagem $\pounds_{cat}$. Fórmulas são definidas como de costume em linguagens de primeira ordem.[6]

Valem para **Cat** os seguintes axiomas e definições:

Axioma 2.1.

$$\forall x(\hbar(x) \Rightarrow \exists u \exists v(\mathcal{O}(u) \wedge \mathcal{O}(v) \wedge \mathbb{D}(x) = u \wedge \mathbb{C}(x) = v)).$$

Esse axioma afirma que a todo morfismo estão associados dois objetos chamados respectivamente o domínio e o codomínio do morfismo.

Definição 2.1. $x \xrightarrow{z} y \stackrel{\text{def}}{=} \hbar(z) \wedge \mathbb{D}(z) = x \wedge \mathbb{C}(z) = y$.[7]

Daqui em diante, sempre que conveniente, vamos usar letras latinas maiúsculas $A, B, C \ldots$ para abreviar variáveis que denotam objetos, ao passo que letras minúsculas do mesmo alfabeto $x, y, z, \ldots$ indicam morfismos.[8] O próximo axioma estabelece uma condição necessária e suficiente para a composição de morfismos. Além disso afirma que para quaisquer dois morfismos, cujo domínio e codomínio coincidem, existe um morfismo chamado morfismo composição.

[6] Cf. Mendelson *Op.cit.* cap.2.

[7] Neste caso, diremos que z é um morfismo do objeto x para o objeto y, ou mais simplesmente, um morfismo de x para y. Ocasionalmente, também podemos dizer que z é uma transformação sobre x que gera y.

[8] Esse é um recurso que nos parece mais didático quando nos referimos a objetos e morfismos em diagramas, embora no capítulo 4 apresentamos a teoria dos quase-conjuntos utilizando quantificadores relativizados.

Axioma 2.2.

$$\forall x \forall y((\hbar(x) \wedge \hbar(y)) \Rightarrow (\exists z(\hbar(z) \wedge \mathbb{k}(x, y, z) \Leftrightarrow \mathbb{C}(x) = \mathbb{D}(y)))).$$

Axioma 2.3.

$$\forall x \forall y \forall w_1 \forall w_2 (\mathbb{k}(x, y, w_1) \wedge \mathbb{k}(x, y, w_2) \Rightarrow w_1 = w_2).$$

Em outros termos, o axioma anterior afirma que se a composição de dois morfismos existe, então é única.[9] Vale notar que a composição de morfismos não é comutativa. Assim, é de se esperar que $\mathbb{k}(x, y, z)$ não coincida com $\mathbb{k}(y, x, z)$ em todos os casos, haja vista que pelo axioma 2.2 temos que $\mathbb{k}(x, y, z)$ se, e só se, $\mathbb{C}(x) = \mathbb{D}(y)$ e, $\mathbb{k}(y, x, z)$ se, e só se, $\mathbb{D}(y) = \mathbb{C}(x)$.

Axioma 2.4. $\forall x \forall y \forall z (\mathbb{k}(x, y, z) \Rightarrow \mathbb{D}(z) = \mathbb{D}(x) \wedge \mathbb{C}(z) = \mathbb{C}(y))$.

Ou seja, se z é a composição de x com y, então do domínio de z é o domínio de x e o codomínio de z é o codomínio de y. Com isso podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 2.2. $z = y \circ x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k}(x, y, z)$.

[9] Na versão quase-categorial de morfismos e objetos, que definimos no capítulo 5, a unicidade de um morfismo ou objeto só ocorre *a menos de indiscernibilidade*. Essa é uma diferença importante de nossa proposta relativamente as definições usuais de categorias.

Definição 2.3. (*Identidade*) $id_A \stackrel{\text{def}}{=} \hbar(id_A) \wedge \mathbb{D}(id_A) = A = \mathbb{C}(id_A) \wedge \forall z(A \stackrel{z}{\to} B \Rightarrow z \circ id_A = z \wedge id_B \circ z = z)$

Teorema 2.1. O morfismo identidade sobre um dado $\mathscr{C}$-objeto A é único.

Prova. *Seja A $\mathscr{C}$-objeto com morfismos identidade id_A e id'_A. Então, aplicando o axioma 2.5 inferimos de imediato que $id_A = id_A \circ id'_A = id'_A$. Portanto, $id_A = id'_A$.* $\square$

O axioma a seguir declara que a composição de morfismos é associativa.

Axioma 2.5. Para x, y e y morfismos

$$\forall x \forall y \forall z(z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x)$$

Uma categoria consiste em qualquer modelo dos postulados acima.[10] Vale lembrar que em ZFC suposta consistente, a coleção de "todos os conjuntos" não é um conjunto de ZFC. O que pode ser feito neste caso em um ambiente conjuntista? Uma solução para tratar categorias em um ambiente conjuntista é adotar a teoria NBG. Nessa teoria qualquer coleção de objetos matemáticos forma uma classe. Classes em NBG são subdivididas em dois tipos: aquelas que são membros e aquelas que não são membros de nenhuma classe. Porém, uma das características básicas da teoria de categorias é a consideração não apenas de

[10] Vamos representar ao longo do texto categorias por letras manuscritas, $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$

classes de objetos matemáticos, mas também de relações entre essas classes. Assim, o desenvolvimento da teoria de categorias colocou problemas sérios para uma fundamentação conjuntista de categorias. Por exemplo, a base NBG para categorias não permite a formulação de categorias funtoriais.[11] Outra solução consiste em postular universos, como propôs Grothendieck.[12] Mais radicalmente, Lawvere advogou uma fundamentação categorial independente de qualquer consideração conjuntista.[13] Não constitui foco deste trabalho tecer comentários aprofundados sobre fundamentação categorial; assim, vamos supor doravante que estamos utilizando como pano de fundo um universo de Grothendieck, isso se quisermos encerrar a teoria de categorias em um ambiente conjuntista.[14] Postulamos a existência de universos de Grothendieck, o que equivale a postular a existência de cardinais inacessíveis.[15] Podemos nesse ambiente obter modelos de ZFC. Em um tal ambiente, somos capazes de discorrer sobre “todos os conjuntos”, “todos os grupos” ou “todos

[11]Originalmente Mac Lane e Eilenberg propuseram como base para categorias a teoria NBG. (Cf. Kromer [68] *Tools and Objects:a history and philosophy of category theory.* p.248). Porém, o desenvolvimento subsequente da teoria impeliram o tratamento por outros meios, como universos (Cf. Kromer *Ibdem*, cap. 6 seções 6.5 e 6.6).

[12]Cf. Artin, M. Grothendieck, A and Verdier, J.L. (*eds.*) [56]. *Théorie des Topos.* p.269.

[13]Cf. Lawvere [72] *The Category Theory as a Foundation for Mathematics* e [73] *An Elementary Theory of Category of Sets.*

[14]Cf. Apêndice C.

[15]Um cardinal k é fortemente inacessível se: (1) k não é enumerável ($k > \omega = \aleph_0$, onde ω é o cardinal dos números naturais); (2) k é regular, *i.e.*, para qualquer subconjunto $\lambda < k$ que satisfaz $\forall x \in k \exists y \in \lambda, x < y$ tem cardinalidade igual a k e (3) k é um limite forte, ou seja, $\forall \lambda < k (2^{\lambda} < k)$.

os espaços vetoriais", o que não pode ser feito na teoria ZFC, suposta consistente. O que estamos alegando é que, se necessário, é possível recorrer a um universo de Grothendieck para encontrar as entidades de que necessitamos.[16]

Na sequência, elencamos alguns exemplos de categorias que nos autorizam sustentar que essa teoria provê, entre outras coisas, uma linguagem para lidar com uma gama muito vasta de entidades e domínios da matemática, bem como o trânsito ou "nexo" entre tais entidades ou domínios.[17] Segundo Leo Corry,

> A ideia central da teoria de categorias é a de que um domínio da matemática pode ser abstratamente caracterizado, não pela descrição das características intrínsecas de todas as entidades incluídas nesse domínio, mas sim pelo exame das conexões entre essas entidades. Assim, por exemplo, a categoria de todos os grupos é caracterizada não pelas propriedades intrínsecas do funcionamento interno que define a noção de grupo, mas pelas propriedades abstratas dos homomorfismos entre grupos.[18]

Um dos objetivos da teoria de categorias é discutir a totalidade dos objetos matemáticos e, na matemática usual, podemos en-

[16]Quando tratamos de "categorias pequenas" estamos lidando com conjuntos no sentido de ZFC, mas quando temos em mente "categorias grandes", então estamos lidando com "coleções gigantescas" que podem ser tratadas em universos. Apêndice C.

[17]Uma introdução bastante didática em que diversos conceitos usuais da matemática são tratados via categorias é o livro *Conceptual Mathematics* de Lawvere e Schanuel. [75]

[18]Cf. Corfield [32] *Towards a Philosophy of Real Mathematics.* p.340.

contrar um espectro muito amplo de categorias.[19] Assim, são exemplos de categorias *posets* e *monóides*. Num poset, os elementos do conjunto parcialmente ordenado são os objetos, e os morfismos correspondem a pares da relação de ordem. Também um único monóide satisfaz a definição de categoria. Nesse caso, um monóide é uma categoria com um único objeto, e os elementos do monóide correspondem aos morfismos. Neste caso, o morfismo identidade corresponde ao elemento unitário do monoide.[20]

Em teoria de categorias é bastante comum toparmos com coleções extremamente grandes. Como a categoria **Set**, outras categorias também são muito grandes, por exemplo, a categoria **Grp** de todos os grupos como objetos e homomorfismos entre grupos como morfismos, e a categoria **Top** dos espaços topológicos e funções contínuas como morfismos. Esses dois últimos exemplos são categorias cujos objetos são conjuntos munidos de uma estrutura matemática.[21] Um aspecto da categoria **Set** é

[19] Cf. Apêndice A.

[20] Cf. Apêndice B.

[21] Sem pretendermos fazer análise filosófica da expressão "estrutura", que encontra larga utilização em matemática, por exemplo, em expressões como "estrutura de grupo" ou "estrutura de espaço topológico", vamos considerar uma "estrutura matemática": (a) Grosso modo, de um ponto de vista conjuntista uma estrutura matemática (à la *Bourbaki*), é um conjunto munido de conjuntos (chamados conjuntos de base) – que eventualmente podem ser reduzidos a um só – e de relações e operações sobre tais conjuntos (Cf. Krause [63] *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência.* p.19 ver também Cifuentes [27] *O Método dos Isomorfismos Parciais: um estudo da expressividade matemática.* Cap.1); (b) por uma estrutura matemática de um ponto de vista da teoria de categorias entendemos qualquer objeto

que nessa categoria os objetos não possuem estrutura, i.e., é uma espécie de categoria cuja identidade e diversidade constituem, por assim dizer, o *mínimo* do que se pode formular de seus objetos. Não por acaso, **Set** é por vezes chamada categoria de estrutura zero.

Os exemplos que indicamos ilustram a importância da teoria de categorias, acentuando seu papel para uma compreensão filosófica de uma disciplina em que proliferam a diversidade e complexidade.

Alguns tipos especiais de categorias motivam as seguintes definições:

Definição 2.4. (*subcategoria*) Uma categoria $\mathscr{D}$ é subcategoria de uma dada categoria $\mathscr{C}$, quando os morfismos e objetos de $\mathscr{D}$ são morfismos e objetos de $\mathscr{C}$ que ainda satisfazem os postulados de categorias. A categoria de todas as funções bijetivas definida sobre todos os conjuntos finitos é uma subcategoria de **Set**.

Definição 2.5. (*categoria pequena e grande*) Uma categoria $\mathscr{C}$ é pequena se a coleção de seus objetos e morfismos são conjuntos em ZFC, caso contrário diz-se que a categoria é grande.

Definição 2.6. (*categoria discreta*) Uma categoria $\mathscr{C}$ é discreta se todo morfismo de $\mathscr{C}$ é um morfismo identidade. A coleção de

em um categoria. Cf. Awodey [6] *Structure in Mathematics and Logic: a categorial perspective.*

todos conjuntos, munida de suas respectivas funções identidade, formam uma subcategoria discreta de **Set**.

No que segue introduzimos informalmente os conceitos de diagrama e diagrama comutativo que constituem meio alternativo de expressar fórmulas da linguagem da teoria de categorias.

Diagramas

Diagramas são recursos muito úteis no tratamento e exposição da teoria de categorias.[22] É difícil encontrar textos que envolvam categorias sem topar com diagramas. Os casos mais elementares são os triângulos e quadrados comutativos. Afirmar, por exemplo, que o triângulo que segue comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, dotted, "z!"'] & B \arrow[d, "y"] \\ & C \end{tikzcd}$$

é exatamente o equivalente a asserção da fórmula $y \circ x = z$.[23] Da mesma forma, afirmar que o seguinte quadrado comuta

[22] Da mesma forma que o gráfico de uma função não é sua representação feita no papel, um diagrama, em teoria das categorias, não deve ser confundido como sua representação pictórica (desenho), a despeito do abuso de linguagem aqui cometido.

[23] Uma seta tracejada indica a unicidade do morfismo que também será indicada pelo símbolo de exclamação "!".

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"'] \arrow[dr, dotted, "w!"] & B \arrow[d, "y"] \\ D \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

equivale a equação $y \circ x = k \circ z$.

Dualidade

Uma noção recorrente em categorias é a de dualidade, que consiste, grosso modo, no processo de “inverter morfismos”. A teoria de categorias se estriba em certos enunciados Σ que envolvem letras $A, B, C, \ldots$ que denotam objetos, e letras $x, y, z, \ldots$ que denotam morfismos. Estes enunciados são constituídos de sentenças atômicas que envolvem termos da teoria; assim, são enunciados, por exemplo, “A é o domínio de x”,“B é o codomínio de x”, “id_A é o morfismo identidade de A”, e “z é a composição de y com x”. Esses enunciados atômicos podem ser escritos como equações: “$A = \mathbb{D}(x)$” e “$z = y \circ x$”. Um enunciado Σ é, portanto, uma fórmula bem formada da linguagem categorial construída a partir de proposições atômicas da linguagem categorial por meio de conectivos e quantificadores. Assim sendo, como já definimos, $A \xrightarrow{x} B$ é uma abreviação que adotamos do enunciado “$\hbar(x) \wedge A = \mathbb{D}(x) \wedge B = \mathbb{C}(x)$”.

Em particular, para qualquer proposição Σ da linguagem básica de categorias, o *dual* de Σ, Σ^{op}, é a sentença obtida pela substituição de “domínio” por “codomínio” e “codomínio” por “domínio”. Com isso todos os morfismos e composições em Σ são “invertidos” em Σ^{op}. A noção ou construção descrita por Σ^{op} é chamada o *dual* de Σ. Assim, para uma dada categoria $\mathscr{C}$ definimos seu *dual* ou *categoria oposta* $\mathscr{C}^{op}$ temos:

Definição 2.7. (*categoria oposta*) Dada uma categoria $\mathscr{C}$, a categoria oposta, denotada $\mathscr{C}^{op}$, é tal que todos os objetos de $\mathscr{C}$ são objetos de $\mathscr{C}^{op}$ e, para cada $\mathscr{C}$-*morfismo* $A \xrightarrow{x} B$ introduzimos um morfismo $B \xrightarrow{x^{op}} A$ em $\mathscr{C}^{op}$. A composição $x^{op} \circ y^{op}$ é definida quando $y \circ x$ é definida em $\mathscr{C}$ e possui o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, dotted, "y\circ x!"'] & B \arrow[r, "x^{op}"] \arrow[d, shift right, "y"'] & A \\
& C \arrow[u, shift right, "y^{op}"'] \arrow[ur, dotted, "x^{op}\circ y^{op}!"'] &
\end{tikzcd}$$

$x^{op} \circ y^{op} = (y \circ x)^{op}$.

Por exemplo, se $\mathscr{C}$ é uma pré-ordem $\langle P, \rho\rangle$, com $\rho \subseteq P \times P$, então $\mathscr{C}^{op}$ é a pré-ordem $\langle P, \rho^{-1}\rangle$, onde $p\rho^{-1}q$ sse $q\rho p$, i.e., ρ^{-1} é a relação inversa de ρ.

Teorema 2.2.: Se $\mathscr{C}$ é discreta, então $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{op}$.

Prova. *Seja $\mathscr{C}$ uma categoria discreta. Assim, pela definição 2.6 para todo morfismo x em $\mathscr{C}$ tem-se que $\mathbb{D}(x) = \mathbb{C}(x)$. Seja também a categoria oposta $\mathscr{C}^{op}$. Admitindo por hipótese que $\mathscr{C}^{op}$ é discreta, então para todo $\mathscr{C}^{op}$-morfismos x temos que $\mathbb{D}(x) = \mathbb{C}(x)$. Como os objetos de $\mathscr{C}$ são os mesmos objetos de $\mathscr{C}^{op}$, pela definição de categoria oposta, deduz-se $\mathscr{C} = \mathscr{C}^{op}$.* $\square$

Conceitos categoriais possuem duais, esse é o caso, por exemplo, do conceito de "monomorfismo", cujo dual é "epimorfismo", "objeto inicial", cujo dual é o "objeto terminal", "produto", cujo dual é o "coproduto", "equalizador" cujo dual é o "coequalizador", como ficará claro ao longo do texto. Vale destacar que se uma fórmula Σ é demonstrável numa categoria $\mathscr{C}$, então seu dual Σ^{op} também é demonstrável em $\mathscr{C}^{op}$.[24]

Morfismos especiais

Nesta seção, identificamos alguns morfismos que comparecem com frequência em inúmeras categorias e que facilmente encontram contrapartida na categoria **Set** e em outras categorias. São eles os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo.

Definição 2.8. Em uma categoria $\mathscr{C}$ um morfismo $A \xrightarrow{x} B$ é um *monomorfismo* se dados $C \xrightarrow{y} A$ e $C \xrightarrow{z} A$, $x \circ y = x \circ z$,

[24]Cf. Hatcher *op.cit.* p.278.

implica $y = z$. Em outros termos se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"'] & A \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "x"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta.

Denotamos isso por $A \overset{x}{\rightarrowtail} B$.

Na categoria **Set**, monomorfismos são funções injetivas e em **Grp** monomorfismos correspondem a homomorfismos injetivos de grupo. Vale a pena verificar que funções injetivas são monomorfismos e vice-versa.

Teorema 2.3.: uma função $f : A \to B$ em **Set** é um monomorfismo se e, somente se, é injetiva.

Prova. *Seja $f : A \to B$ uma injeção em* **Set***, isto é, se $f(x) = f(y)$ então $x = y$ para $x, y \in A$. Admitindo por hipótese que $g : C \to A$ e $h : C \to A$ são funções quaisquer tais que*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $f \circ g = f \circ h$, então para $c \in C$ segue que $f \circ g(c) = f \circ h(c)$ e, portanto, $f(g(c)) = f(h(c))$. Dado que f é uma injeção, deduz-se que $g = h$. Em outros termos, f é um monomorfismo.

Por outro lado, se $A \xrightarrow{f} B$ é um monomorfismo (isto é, é cancelável à esquerda), então deve ser uma função injetiva. Para verificar isto sejam $x, y \in A$, com $f(x) = f(y)$. Assim, as instruções "$g(z) = x$" e "$h(z) = y$" estabelecem um par de funções g, h de $\{z\}$ (o conjunto unitário) para A, com o qual obtemos $f \circ g = f \circ h$. Por cancelamento à esquerda $g = h$, então $g(z) = h(z)$, i.e. $x = y$. Em outros termos, um monomorfismo em **Set** *é uma função injetiva.* $\square$

A definição de monomorfismo manifesta o ponto de vista "externo" (categorial) de um conceito conjuntista, sem qualquer menção aos seus constituintes internos. Mais à frente veremos como o conceito de monomorfismo se relaciona ao de *subobjeto*.

Definição 2.9. Um morfismo $A \xrightarrow{x} B$ é um *epimorfismo* se, e só se, a comutatividade do diagrama abaixo implica que $y = z$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[d, "y"] \\ B \arrow[r, "z"] & C \end{tikzcd}$$

Denotamos $A \twoheadrightarrow B$. Epimorfismo é o conceito dual de monomorfismo, e em **Set** corresponde à função sobrejetiva.

Teorema 2.4.: Em **Set**, uma função $f : A \to B$ é um epimorfismo se e somente se é sobrejetiva.

Prova. *Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e $g : B \to C$ e $h : B \to C$ funções quaisquer. Segue que para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e $g(f(a)) = h(f(a))$. Portanto, para qualquer $b \in B$, $g(b) = h(b)$ e, deste modo, $g = h$. Logo, f é um epimorfismo.*

Por outro lado, vamos supor que $f : A \twoheadrightarrow B$ seja um epimorfismo que não é uma função sobrejetiva. Então existe uma função $k : B \to B$ tal que k é a identidade sobre a imagem de f mas $k \neq id_B$. Segue então que $k \circ f = id_B \circ f$. Entretanto, dado que f é um epimorfismo, deduz-se que $k = id_B$, o que contradiz a suposição inicial. Logo, f é sobrejetiva. $\square$

Definição 2.10. (*isomorfismo*) Um morfismo $A \xrightarrow{x} B$ é um *isomorfismo* se, e só se, existe um morfismo $B \xrightarrow{y} A$, tal que $x \circ y = id_B$ e $y \circ x = id_A$. O morfismo y neste caso é chamado morfismo inverso de x. Um isomorfismo é expresso na linguagem dos diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[d, "id_B"] \arrow[dl, "y"] \\
A \arrow[r, "x"'] & B
\end{tikzcd}$$

o que significa o mesmo que afirmar $x \circ y = id_B$ e $y \circ x = id_A$.

Denotamos um isomorfismo simbolicamente $A \leftrightsquigarrow B$. Da definição de isomorfismo tem-se que se x é um isomorfismo em $\mathscr{C}$, então seu dual na categoria oposta é $\mathscr{C}^{op}$ também o é. Vale notar que em **Set** isomorfismos correspondem a funções bijetivas, em **Vec** são transformações lineares bijetivas, em **Grp** são isomorfismos de grupo e em **Top** são homomorfismos de espaços topológicos.

Teorema 2.5.: Se $A \xrightarrow{x} B$ é um morfismo com inversos $B \xrightarrow{y} A$ e $B \xrightarrow{z} A$, tais que $y \circ x = id_A$ e $x \circ z = id_B$, então $y = z$.

Prova. *Seja* $z \circ id_A = z$, *então* $z \circ (y \circ x) = z$. *Assim da hipótese que* $y = z$ *temos* $y \circ (y \circ x) = z$ *e, portanto,* $y \circ id_A = z$. *Logo,* $y = z$ $\square$

Admitido o teorema anterior, representamos o morfismo inverso de x por x^{-1}. Ou seja, o morfismo inverso é único.

Teorema 2.6.: todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo.

Prova.

i. Um isomorfismo é sempre um monomorfismo: Seja x *um isomorfismo tal que* $x \circ y = x \circ z$ $A \xrightarrow{x} B$ *e* $C \xrightarrow{y} A$, *então* $y = id_A \circ y = (x^{-1} \circ x) \circ y = x^{-1} \circ (x \circ y) = x^{-1} \circ (x \circ z) = (x^{-1} \circ x) \circ z = z$.

ii. Um isomorfismo é sempre um epimorfismo: Seja x *um* *isomorfismo tal que* $y \circ x = h \circ x$ *(*$A \xrightarrow{x} B$ *e* $g, h : B \to C$*)* $y = g \circ id_B = y \circ (x \circ x^{-1}) = (y \circ x) \circ x^{-1} = (z \circ x) \circ x^{-1} = z \circ (x \circ x^{-1}) = z$*. Portanto,* x *é cancelável à direita.* $\square$

É importante deixar manifesto que na categoria **Set** todos os morfismos que são monomorfismos e epimorfismos são isomorfismos, isso, porém, não vale em geral para qualquer categoria, como é o caso, por exemplo, em **Mon** (categoria dos monoides). Neste caso, nem todo homomorfismo de monóide que é injetivo é sobrejetivo. Categorias em que monomorfismos e epimorfismos são isomorfismos são chamadas de *categorias harmônicas.*

Teorema 2.7.: Todo morfismo identidade é um isomorfismo.

Prova. *Seja* x^{-1} *o inverso de* id_A*. Então a composição* $x^{-1} \circ id_A = id_A$ *fornece o morfismo identidade do domínio de* id_A*. Por outro lado, a composição* $id_A \circ x^{-1} = id_A$ *fornece o codomínio do morfismo identidade. Mas como no morfismo identidade o domínio e codomínio coincidem temos que* $x^{-1} = id_A$*.* $\square$

Definição 2.11. (*objetos isomorfos*) Dois objetos A e B numa categoria $\mathscr{C}$ são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles. Denotaremos objetos isomorfos $A \cong B$.

É usual em teoria de categorias supor que objetos isomorfos sejam vistos como sendo "essencialmente" o mesmo objeto. Para Goldblatt, em qualquer teoria matemática objetos isomorfos são, efetivamente, objetos indistinguíveis. Segundo esse autor, "objetos isomorfos *têm a mesma aparência*", o que "significa que podemos substituir alguns ou todos os elementos de um objeto por suas contrapartes em outro objeto sem fazer qualquer diferença para a estrutura do objeto, sua 'aparência'. Assim, grupos isomorfos parecem exatamente o mesmo, como grupos; espaços topológicos homeomorfos são indistinguíveis por qualquer propriedade topológica, e assim por diante".[25] De fato, objetos isomorfos são, de uma perspectiva categorial, *únicos, a menos de isomorfismo.*

Teorema 2.8.: Para quaisquer objetos A, B e C numa categoria $\mathscr{C}$:

(a) $A \cong A$

(b) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$

(c) $A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

Prova.

i. Dado que todo morfismo identidade $A \overset{id_A}{\to} A$ *é um isomorfismo (pelo teorema 2.7.), deduz-se de imediato que* $A \cong A$*;*

ii. Vamos supor que $A \cong B$*, isto é, existe um isomorfismo* $A \overset{x}{\leftrightsquigarrow} B$*. Então, pela definição de isomorfismo, existe um* $\mathscr{C}$*-morfismo* $B \overset{x^{-1}}{\to} A$ *tal que:* $x^{-1} \circ x = id_A$ *e* $x \circ x^{-1} =$

[25]Cf. Goldblatt [53] *Topoi: the categorial analysis of logic.* p.42. Essa indiscernibilidade *a menos de isomorfismo* é essencialmente matemática e depende tanto da linguagem empregada quanto da teoria.

id_B. *Assim,* x^{-1} *é também um isomorfismo e, portanto,* $B \overset{x^{-1}}{\leftrightsquigarrow} A$. *Logo,* $B \cong A$*;*

iii. Seja, por hipótese, $A \overset{x}{\leftrightsquigarrow} B$ *e* $B \overset{y}{\leftrightsquigarrow} C$. *Então existem* $\mathscr{C}$*-morfismos* $B \overset{x^{-1}}{\to} A$ *e* $C \overset{y^{-1}}{\to} B$ *tais que: (a)* $x^{-1} \circ x = id_A$ *e* $x \circ x^{-1} = id_B$*; (b)* $y^{-1} \circ y = id_B$ *e* $y \circ y^{-1} = id_C$. *Assim,* $A \overset{y \circ x}{\leftrightsquigarrow} C$. *Logo,* $A \cong C$. $\square$

2.2 Funtores e transformações naturais

Embora o núcleo desta tese não trate de funtores e transformações naturais, achamos por bem revisar esses conceitos, haja vista que comparecem em nossa discussão filosófica em muitas partes do texto.

A teoria de categorias trata de estruturas matemáticas em termos de "transformações" ou interações por morfismos entre elas. Porém, os recursos que dispomos até aqui, não nos autorizam comparar categorias. Isto pode ser feito por meio da noção mais geral de funtor. De um modo impreciso, um funtor (covariante) consiste num "morfismo" de uma categoria $\mathscr{C}$, vista como um objeto, em outra categoria $\mathscr{D}$ (também um objeto), de tal sorte que a estrutura da categoria domínio $\mathscr{C}$ é mapeada na estrutura da categoria codomínio $\mathscr{D}$. Além disso, pode-se estabelecer morfismos entre os funtores, chamados *transformações naturais.*

Definição 2.12. **Cat** é a categoria que possui categorias como objetos e funtores entre categorias como morfismos.

Definição 2.13. Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um funtor $\mathcal{F}$ de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$, denotamos $\mathscr{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathscr{D}$, é uma correspondência que associa a cada $\mathscr{C}$-objeto A um $\mathscr{D}$-objeto $\mathcal{F}(A)$ e a cada $\mathscr{C}$-morfismo $A \xrightarrow{x} B$ um $\mathscr{D}$-morfismo $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(x)} \mathcal{F}(B)$ em $\mathscr{D}$, de modo que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\mathcal{F}$ preserva composição: $\mathcal{F}(y \circ x) = \mathcal{F}(y) \circ \mathcal{F}(x)$, quando $y \circ x$ é definida.

2. $\mathcal{F}$ preserva identidade: $\mathcal{F}(id_A) = id_{\mathcal{F}(A)}$.

Fica manifesto, a partir do exposto, que um funtor covariante consiste numa transformação sobre uma estrutura que preserva tanto a identidade de domínio e codomínio quanto a composição de morfismos. Num diagrama temos o seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "y"] \arrow[ddr, dotted] & C \arrow[ddr, dotted] & \\
A \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "y\circ x"'] \arrow[ddr, dotted] & & \\
& \mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}(y)"] & \mathcal{F}(C) \\
& \mathcal{F}(A) \arrow[u, "\mathcal{F}(x)"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}(y\circ x)=\mathcal{F}(y)\circ\mathcal{F}(x)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Mac Lane sugere que podemos pensar um funtor como uma transformação que produz uma imagem de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$. Certamente, este modo de pensar funtores é encorajado pelo diagrama anterior. Um tipo muito particular de funtor covariante, e de especial importância, é denominado *funtor esquecimento* que, efetivamente "esquece" da categoria domínio do funtor certos aspectos da estrutura, isto é, a estrutura esquecida não se reflete integralmente no codomínio do funtor.

Exemplo 2.1.: (*Funtor esquecimento*) Seja $\mathscr{C}$ uma categoria, por exemplo, a categoria **Grp**. À vista disso um $\mathscr{C}$-objeto é um conjunto munido de uma estrutura. Um funtor esquecimento $\mathscr{C} \xrightarrow{\epsilon}$ **Set** é tal que a cada $\mathscr{C}$-objeto associa seu conjunto subjacente e a cada $\mathscr{C}$-morfismo associa o próprio morfismo. Assim, ϵ "esquece" a estrutura dos $\mathscr{C}$-objetos e preserva ("lembra") apenas os $\mathscr{C}$-morfismos que são funções definidas no domínio.

Exemplo 2.2.: (*Funtor identidade*) Seja $\mathscr{C}$ uma categoria. O funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{id} \mathscr{C}$ é chamado um funtor identidade sempre que para todo $\mathscr{C}$-objeto A $id(A) = A$ e para todo $\mathscr{C}$-morfismo x $id(x) = x$

Definição 2.14. (*funtor contravariante*) Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ duas categorias. Chama-se funtor contravariante, denotamos $\mathscr{C} \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} \mathscr{D}$, o funtor (covariante) $\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$.

Um funtor contravariante inverte morfismos, cambiando de uma categoria $\mathscr{C}$ para outra categoria $\mathscr{D}$ domínios por codomínios e vice-versa.

Tendo definido categorias como coleções de objetos e morfismos entre objetos, introduzimos nos parágrafos anteriores o conceito de funtor, considerando categorias como objetos e funtores como morfismos entre categorias. No que segue definimos o conceito de *transformação natural*, ou seja, a noção de "morfismos" entre funtores.[26]

Definição 2.15. (*transformação natural*) Sejam $\mathcal{F}_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $\mathcal{F}_2 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dois funtores. Uma transformação natural τ consiste numa coleção de morfismos $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{F}_2$ (indexados pelos A objetos de $\mathscr{C}$) em $\mathscr{D}$, tal que para qualquer morfismo $A \xrightarrow{x} B$ de

[26]Doravante vamos utilizar ao longo do texto o termo "funtor" no sentido de funtor covariante.

$\mathscr{C}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}_1(x)"'] & \mathcal{F}_2(A) \arrow[d, "\mathcal{F}_2(x)"] \\
\mathcal{F}_1(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & \mathcal{F}_2(B)
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $\tau_B \circ \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x) \circ \tau_A$. Em outros termos, se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são funtores (covariantes) de uma categoria $\mathscr{C}$ para uma categoria $\mathscr{D}$, então uma transformação natural τ associa a cada $\mathscr{C}$-objeto A um morfismo $\mathcal{F}_1(A) \xrightarrow{\tau_A} \mathcal{F}_2(B)$ em $\mathscr{D}$, tal que para cada $\mathscr{C}$-morfismo $A \xrightarrow{x} B$ temos $\tau_B \circ \mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x) \circ \tau_A$. Denotamos uma transformação natural simbolicamente por $\tau(\mathcal{F}_1 \rhd \mathcal{F}_2)$. Os morfismos τ_A são chamados de *componentes* de τ. Assim, por exemplo, a transformação natural identidade $id_{\mathcal{F}}(\mathcal{F} \rhd \mathcal{F})$ associa a cada objeto A o morfismo identidade $id_{\mathcal{F}(A)} : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$.

Com os conceitos de funtor e transformação natural, podemos chegar a outros conceitos da teoria de categorias, com as noções de *adjunção* e *categoria funtorial*, entre outros. Tais conceitos, no entanto, escapam ao âmbito deste trabalho, pelo que remetemos à bibliografia para maiores esclarecimentos.[27] De qualquer modo definimos o conceito de categoria funtorial, útil para algumas de nossas observações.

[27] Cf. Bell [15] *Toposes and Local Set Theory: an introduction.* p.30s e Mac Lane [83] *Category for the Working Mathematicians.* p.79.

Definição 2.16. Dadas duas categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. A categoria cujos objetos são funtores de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$ e os morfismos são transformações naturais, é chamada de *categoria funtorial*. Escrevemos $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$.

Categorias equivalentes

Uma vez que também consideramos categorias funtoriais, verifica-se que há uma relação de isomorfismo não apenas entre objetos numa categoria específica, mas também entre as categorias concebidas como objetos. Esse fato nos permite alcançar, entre outras coisas, o conceito de categoria de categorias. Certamente a categoria de todas as categorias não é uma categoria.[28]

O isomorfismo das categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ requer a existência dos funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ tais que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = id_{\mathscr{D}}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = id_{\mathscr{C}}$. Tendo em mente que não podemos realmente dizer coisas significativas sobre a identidade entre categorias, podemos relaxar o requisito de identidade simplesmente perguntando que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ é isomorfo a $id_{\mathscr{D}}$ na categoria funtorial $\mathscr{D}^{\mathscr{D}}$ (e o mesmo para $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$). Fazendo isso, chegamos à noção de "categorias equivalentes".

Produto e coproduto

Produto generaliza, por uma descrição externa (categorial), a noção de *produto cartesiano* da teoria dos conjuntos, ao passo

[28] Cf. Kromer *op.cit.* p.232.

que o coproduto ou soma constitui o conceito dual, sendo interpretado, na teoria dos conjuntos, como a *união disjunta*. É interessante notar que, no que diz respeito à teoria dos conjuntos, o fato de a união disjunta ser o dual do produto cartesiano (e vice-versa), não é uma ideia intuitiva.

Definição 2.17. Sejam A e B objetos de uma categoria $\mathscr{C}$. Um produto (binário) envolve: (i) um $\mathscr{C}$-objeto $A \times B$ e (ii) dois morfismos (chamados de *projeções*) $p_A : A \times B \to A$ e $p_2 : A \times B \to B$, tais que para todo $\mathscr{C}$-objeto C, existe um único morfismo $C \overset{!h}{\to} A \times B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, dotted, "!h"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $p_A \circ h = x_1$ e $p_B \circ h = x_2$. Note que dissemos *um* produto de A e B, e não *o* produto. Isso é o caso, porque $A \times B$ é definido como único *a menos de isomorfismo*.

Definição 2.18. Sejam A e B objetos em uma categoria $\mathscr{C}$. Um coproduto (binário) ou soma de A e B envolve: (i) um $\mathscr{C}$-objeto $A + B$ e (ii) dois $\mathscr{C}$-morfismos $A \to A + B$ e $B \to A + B$, chamados de *injeções*, tais que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "i_A"'] & A + B \arrow[u, dotted, "!h"] & B \arrow[ul, "x_2"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

comuta.

Equalizador e co-equalizador

Definição 2.19. Um *equalizador* de dois $\mathscr{C}$-morfismos $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$ é um objeto E associado a um morfismo $E \xrightarrow{e} A$ tal que $x \circ e = y \circ e$, e qualquer que seja o objeto E' e morfismo $E \xrightarrow{e'} A$ existe um único morfismo $E' \xrightarrow{!k} E$ que faz com que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \\
E' \arrow[ur, "e'"'] \arrow[uu, dotted, "!k"] & &
\end{tikzcd}$$

comute.

De um ponto do vista da categoria **Set**, o equalizador das funções $f : A \to B$ e $g : A \to B$ (com mesmo domínio e codomínio) consiste no subconjunto de A no qual as duas funções coincidem, ou seja,

$$E = \{x : x \in A \wedge f(x) = g(y)\}.$$

A função inclusão $E \to A$ é chamada de equalizador (ou igualizador) de f e g.

Definição 2.20. Dados dois $\mathscr{C}$-morfismos $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$, o morfismo $B \xrightarrow{c} C$ é o *co-equalizador* de x e y se as seguintes condições são satisfeitas: (i) $c \circ x = c \circ y$. (ii) Dado qualquer outro $\mathscr{C}$-morfismo $B \xrightarrow{c'} C'$ tal que $c' \circ x = c' \circ y$, existe um único morfismo $C \xrightarrow{!u} C'$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dd, dotted, "!u"] \\
A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & \\
 & & C'
\end{tikzcd}$$

comuta.

Em **Set** o co-equalizador corresponde a importante noção de *relação de equivalência*. Relações de equivalência surgem ao longo de toda a matemática em situações em que se deseja “identificar” coisas diferentes que são indiscerníveis. Normalmente pode-se estar interessado em alguma propriedade particular (ou propriedades) em relação à qual coisas diferentes podem ser indistinguíveis.

Produto fibrado e soma amalgamada

Um *produto fibrado* (*pullback*) é um limite de um diagrama constituído por dois morfismos com mesmo codomínio. Uma *soma amalgamada* (*pushout*) constitui o conceito dual, ou seja, um colimite de um diagrama constituído por dois morfismos com mesmo domínio.

Definição 2.21. Dados dois morfismos $A \xrightarrow{x} C$ e $B \xrightarrow{y} C$ (com um mesmo codomínio), seu *produto fibrado* consiste num objeto $A \cup B$ e dois morfismos $A \cup B \xrightarrow{z_1} A$ e $A \cup B \xrightarrow{z_2} B$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \cup B \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd}$$

Além disso, para quaisquer outros morfismos $E \xrightarrow{w_1} A$ e $E \xrightarrow{w_2} B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "w_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, existe um único morfismo $!k : E \to A \cup B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dotted, "!k"] \arrow[drr, bend left, "w_2"] \arrow[ddr, bend right, "w_1"'] & & \\
& A \cup B \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & B \arrow[d, "y"] \\
& A \arrow[r, "x"'] & C
\end{tikzcd}$$

comuta.

O produto fibrado é único, a menos de isomorfismo. Em **Set** o *pullback* das funções $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ corresponde ao subconjunto do produto cartesiano

$$A \times_C B = \{\langle x, y \rangle \in A \times B : f(a) = g(b)\}.$$

Definição 2.22. Dados dois $\mathscr{C}$-morfismos $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} C$ (com mesmo domínio), uma soma amalgamada (*pushout*) consiste num objeto $B \cap C$ e dois morfismos $B \xrightarrow{z_1} B \cap C$ e $C \xrightarrow{z_2} B \cap C$ (um cocone) tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & B \arrow[d, "z_1"] \\
C \arrow[r, "z_2"'] & B \cap C
\end{tikzcd}$$

E, para qualquer outro objeto E e morfismos $B \overset{w_1}{\to} E$ e $C \overset{w_2}{\to} E$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & B \arrow[d, "w_1"] \\
C \arrow[r, "w_2"'] & E
\end{tikzcd}$$

comute.

Existe um único morfismo $B \cap C \overset{!k}{\to} E$ que faz com que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & B \arrow[d, "z_1"] \arrow[ddr, bend left, "w_1"] & \\
C \arrow[r, "z_2"'] \arrow[drr, bend right, "w_2"'] & B \cap C \arrow[dr, dotted, "!k"] & \\
 & & E
\end{tikzcd}$$

comute.

Produto fibrado e a soma amalgamada correspondem, respectivamente, às generalizações em teoria de categorias dos conceitos de união e de intersecção da teoria dos conjuntos.

Objeto inicial e objeto terminal

Os conceitos de objeto terminal e objeto inicial, embora aparentemente triviais, são realmente importantes e úteis, haja vista que permitem tratar por objetos e morfismos as noções de conjunto vazio e conjunto unitário da categoria **Set**. De fato, os conceitos de objeto inicial e terminal generalizam esses conceitos oriundos da teoria dos conjuntos. Como veremos esses conceitos têm correspondentes na teoria de quase-conjuntos (capítulo 4) e na teoria de quase-categorias (capítulo 5).

Definição 2.23. Diz-se que um $\mathscr{C}$-objeto X é inicial numa categoria sempre que, para qualquer $\mathscr{C}$-objeto A, existe um único morfismo de X para A. Denotamos Φ. Escrevemos,

$$\Phi \xrightarrow{!} A.$$

Teorema 2.9.: Quaisquer dois objetos iniciais são isomorfos.

Prova. *Sejam Φ e $\Phi^{'}$ objetos iniciais numa categoria $\mathscr{C}$. Desde que Φ é inicial e Φ' é um $\mathscr{C}$-objeto, então existe um único morfismo $\Phi \xrightarrow{x} \Phi'$. Por outro lado, como Φ' é inicial e Φ é um $\mathscr{C}$-objeto, então existe um único morfismo $\Phi' \xrightarrow{y} \Phi$. Compondo x e y obtemos: $y \circ x = id_{\Phi}$, o morfismo identidade de Φ (que é um isomorfismo). Similarmente, $x \circ y = id_{\Phi'}$, o morfismo identidade de Φ', o que prova que Φ' também é um isomorfismo. Assim, x tem inverso y. Portanto, $\Phi \cong \Phi'$.* $\square$

Invertendo a direção do morfismo na definição de objeto inicial, obtemos seu dual, isto é, o conceito de objeto terminal. É intuitiva a constatação de que o objeto inicial é um limite, ao passo que o objeto terminal é um colimite.

Definição 2.24. Um $\mathscr{C}$-objeto X é chamado de um objeto terminal numa categoria $\mathscr{C}$ se, e somente se, qualquer que seja o $\mathscr{C}$-objeto A, existe um único morfismo de A para X. Simbolicamente, o objeto terminal é denotado $\mathbf{1}$. Portanto, escrevemos

$$A \xrightarrow{!} \mathbf{1}.$$

Teorema 2.10.: Quaisquer dois objetos terminais são isomorfos.

Prova. *Análoga ao teorema da unicidade do objeto inicial.* $\square$

Em qualquer categoria $\mathscr{C}$ um objeto que é simultaneamente inicial e terminal é chamado de *objeto zero*. Uma categoria com objeto zero é chamada *categoria degenerada*. O grupo unidade $\{e\}$ em **Grp** é um objeto zero, ou seja, esses grupos são exemplos de categorias degeneradas.

Na categoria dos conjuntos, o objeto inicial corresponde ao conjunto vazio, ao passo que o objeto terminal corresponde a qualquer conjunto unitário. **Set** não é degenerada.[29]

[29] Advertimos que um objeto inicial ou terminal é *único* a menos de isomorfismo. De um ponto de vista de ZFC o objeto inicial, que corresponde ao conjunto vazio, é único, haja vista o axioma da extensionalidade. Porém em um topos não há garantias da existência de um único conjunto vazio. Veja nosso apêndice D.

Elemento e elemento genérico

Em teoria de categorias noções são definidas em termos de morfismos e, em particular, a teoria de categorias não exige atenção aos constituintes de um objeto. No entanto, isso não significa que não se pode definir o que é um elemento de um objeto numa categoria. Em certa acepção, em termos categoriais, é possível explorar a dialética entre o "todo" e as "partes". Aliás, um modo de expressar noções conjuntistas em termos categoriais consiste justamente em encontrar seu análogo em teoria de categorias. Com isso, temos as seguintes definições:

Definição 2.25. Numa categoria $\mathscr{C}$ com objeto terminal, um elemento de um $\mathscr{C}$-objeto A é um morfismo do objeto terminal $\mathbf{1}$ para A, isto é, $\mathbf{1} \xrightarrow{x} A$. Também escrevemos $x \in_1 A$.

Dizemos que utilizamos um "estilo ingênuo", se tratamos morfismos como se fossem "elementos" e objetos como se fossem "conjuntos". Assim, uma vez que os elementos de objetos podem ser vistos como morfismos nesses objetos, temos que para uma categoria $\mathscr{C}$ e um $\mathscr{C}$-objeto A, pode-se referir a um morfismo $B \xrightarrow{x} A$ como um elemento genérico de A.

Definição 2.26. Numa categoria $\mathscr{C}$ um elemento genérico de um $\mathscr{C}$-objeto A é um morfismo cujo codomínio é o objeto A. Em outros termos, um *$\mathscr{C}$-morfismo* $S \xrightarrow{x} A$ é chamado um elemento genérico de A de *escopo* (ou *perspectiva*) S. Escrevemos, $x \in_S A$.

Subobjeto e classificador de subobjetos

Tratamos agora do análogo categorial da noção de subconjunto, uma noção bastante familiar e significativa ao espírito conjuntista. Com efeito, existem dois modos de abordar categorialmente a ideia de subconjunto.[30]

A primeira abordagem consiste em verificar que qualquer função inclusão da forma $f : B \to A$ num conjunto A define um único subconjunto de A, o conjunto imagem dessa função, $Im(f) = \{f(x) : x \in B\}$. Não é difícil perceber que f induz uma bijeção entre o domínio B e a imagem de f, em outros termos e símbolos, $B \cong Im(f)$. Ou seja, o domínio de uma função injetiva (um monomorfismo) é isomorfo a um subconjunto de seu codomínio. Esse aspecto de **Set** nos conduz à noção categorial de *subobjeto*.

Definição 2.27. Um subobjeto de um $\mathscr{C}$-objeto A consiste de um $\mathscr{C}$-monomorfismo $B \overset{m}{\rightarrowtail} A$ com codomínio A cujos domínios são isomorfos. Denotamos, $[m] \sqsubseteq A$.

Um segundo modo de abordar via categorias o conceito de subconjunto parte da noção de *função característica*.[31] Na teoria dos conjuntos, o conjunto de potência $\wp(A)$ é frequentemente designado por 2^A. Esta notação se justifica pelo fato de existir uma bijeção entre $\wp(A)$ (os subconjuntos de A) e as funções características $\chi : A \to 2 = \{0, 1\}$. A função característica de um

[30] Cf. Goldblatt *op.cit.* p.19, 75s e 79.
[31] Cf. E.H. Spanier [110] *Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos.* p.15.

subconjunto B de um conjunto A é a função $\chi = \chi_B$ de A para 2 definida pela regra:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \in B \\ 0 \ se \ x \notin B \end{cases}$$

Mais geralmente, dada qualquer injeção $m : B \to A$, definimos a função característica de m como a função $\chi_m : A \to 2$ tal que $\chi_m(x) = 1$ se $x \in B$ e $\chi_m(x) = 0$, quando $x \notin B$. Além disso, dada qualquer outra injeção $n : B' \to A$ se verifica que $m \approx n$ (m e n são morfismos isomorfos) se, e somente se, $\chi_m = \chi_n$, o que nos permite sem ambiguidade chamar χ_m de a função característica do subobjeto $[m]$. Assim, essa "correspondência" entre subconjunto e a função característica pode ser "capturada" pelo produto fibrado em **Set**. O conjunto B corresponde à imagem inversa do subconjunto $\{1\}$ de 2 através de χ_m, i.e., $B = \chi_m^{-1}(\{1\})$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "m"] \arrow[d, dotted, "!"'] & A \arrow[d, "\chi_m"] \\ \{\emptyset\} \arrow[r, hook] & 2 \end{tikzcd}$$

Como realizamos essa construção em uma categoria? Começamos com um objeto especial Ω, chamado o classificador de subobjetos, que desempenha o mesmo papel que 2 em **Set**.[32]

[32]No caso **Set**, o classificador de subobjetos é $\Omega \cong 2$, portanto, os elementos de Ω são 0 e 1 que podem ser identificados com os valores de verdade numa lógica binária. Esse não é o caso que vale em geral para qualquer topos, na verdade, em tais casos os elementos do classificador de subobjetos são chamados *feixes*.

Também especificamos um morfismo τ de $\mathbf{1}$ para Ω, chamado de *morfismo verdade*, onde $\mathbf{1}$ é um objeto terminal. Este morfismo verdade desempenha o papel do elemento 1 do conjunto 2. Finalmente, queremos garantir que o morfismo de um objeto arbitrário A para Ω corresponda exatamente aos subobjetos de A.

Definição 2.27. Se $\mathscr{C}$ é uma categoria com objeto terminal $\mathbf{1}$, então um *classificador de subobjetos* para $\mathscr{C}$ é um $\mathscr{C}$-objeto Ω associado a um *morfismo verdade* $1 \xrightarrow{\tau} \Omega$ que satisfaz à seguinte condição: para todo monomorfismo $A \overset{w}{\rightarrowtail} B$ existe um único morfismo $A \xrightarrow{X_w} \Omega$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "w"] \arrow[d, dotted, "!"'] & A \arrow[d, "X_w"] \\ 1 \arrow[r, "\tau"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

é um produto fibrado (*pullback*).

Exponenciação

Vamos introduzir nesta seção o conceito de *exponenciação*, que caracteriza de um ponto de vista categorial a ideia de espaço de funções. É usual presumir que o conceito de exponenciação seja mais difícil de assimilar que outros conceitos categoriais. Vamos começar revendo sua contraparte conjuntista. Dados dois conjuntos, A e B, definimos por espaço de funções o conjunto formado por todas as funções com domínio A e codomínio B (denotamos B^A), isto é,

$$B^A = \{f_i : f_i : A \to B\}.$$

Uma vez que na linguagem categorial os objetos são definidos de acordo com suas interações com outros objetos, definimos o conjunto B^A em termos de como ele “age” ou opera. Para tanto, vamos dar atenção aos objetos envolvidos na definição, ou seja, A, B e B^A. No caso da categoria **Set**, relacionamos estes objetos à função (morfismo)

$$ev : B^A \times A \to B,$$

caracterizada pela regra $ev(\langle f, x\rangle) = f(x)$. ev é chamada *função avaliação*. Esta definição parece caracterizar adequadamente por meio de um morfismo (função) o objeto (conjunto) B^A. No entanto, para que ela faça pleno sentido no universo categorial é preciso observar que podemos associar a ev funções da forma $C\times A \xrightarrow{g} B$, tal que dada g, existe uma única função $\hat{g} : C \to B^A$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "ev"] & B \\
C \times A \arrow[u, dotted, "\hat{g}\times id_A !"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Assim, para $\langle c, a\rangle \in C \times A$ aplicando $\hat{g} \times id_A$ obtemos em $B^A \times A$ $\langle \hat{g}(c), id_A\rangle = \langle \hat{g}(c), a\rangle$. Desse modo, a função $\hat{g}$ associa a cada $c \in C$ uma função $f : A \to B$. Tomando g e mantendo o primeiro termo fixado em c, enquanto se estende sobre os elementos de A, então para cada c em C temos que $g(c) = g(c, a)$.

Do exposto, obtemos a definição de exponenciação.

Definição 2.28. Seja $\mathscr{C}$ uma categoria com produto. Para quaisquer dois $\mathscr{C}$-objetos A e B, um exponencial de A e B consiste de um objeto B^A e um morfismo $A \times B^A \xrightarrow{ev} B$ de $\mathscr{C}$ tal que para qualquer morfismo da forma $A \times C \xrightarrow{y} B$, existe um morfismo $C \xrightarrow{\hat{y}} B^A$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} A \times B^A \arrow[r, "ev"] & B \\ A \times C \arrow[u, dotted, "(id_A, \hat{y})"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 2.29. Diz-se que uma categoria $\mathscr{C}$ é cartesiana fechada se possui objeto terminal, produto e exponencial.

2.3 Topos elementar

Uma caracterização heurística de um topos é o de uma categoria com algumas propriedades extras, que fazem com que um topos se "pareça" com a categoria **Set**, no sentido de que todas as construções matemáticas que podem ser obtidas numa teoria dos conjuntos como ZFC, podem também ser obtidas em um topos.

Definição 2.30.: um topos elementar (ou simplesmente topos) é uma categoria $\mathscr{E}$ que possui objeto terminal $\mathbf{1}$, classificador de subobjetos Ω, e para quaisquer dois $\mathscr{C}$*-objetos* A e B, produto $A \times B$ e exponencial B^A.

Em outros termos um topos é uma categoria cartesiana fechada que possui classificador de subobjetos. A categoria **Set** é o exemplo mais lembrado de um topos.

Existem outros tipos de toposes, mas não vamos explorar aqui mais que o necessário para o entendimento de nossa investigação. Para Mac Lane, "[os axiomas para um topos] podem ser vistos como axiomas para a teoria dos conjuntos formulada não em termos da relação de pertinência, mas em termos de funções e suas composições".[33] De qualquer forma, devemos ter em mente que existem muitos toposes cuja estrutura é marcadamente diferente de **Set**.[34] Para que um topos seja efetivamente, uma generalização de **Set**, deve possuir o análogo categorial do axioma da escolha e um *objeto natural*.[35]

[33]Cf. Mac Lane [86] *Internal Logic in Topoi and other Categories.* p.427.
[34]Cf. Goldblatt *op.cit.* p.289.
[35]O apêndice D expõe os axiomas de **ETCS** (*Elementary Theory of Category of Sets*).

Capítulo 3

Categorias, conjuntos e fundamentos da matemática

The subject matter of pure mathematics is transformation.

Andrei Rodin [106].

As ideias que constam nos dois parágrafos seguintes podem ser encontradas em *Toposes and Local Set Theories* e manifestam nosso entendimento como a teoria de categorias, e mais especificamente a teoria de topos, contribuíram para o entendimento da matemática e de sua filosofia. Dentre os aspectos distintivos promovidos pela teoria de categorias e de topos estão sua generalidade e percepção externa dos objetos matemáticos em que o conceito de indiscernibilidade, segundo nosso ponto de vista, torna-se mais proeminente no trato das estruturas matemáticas.

Com o advento da teoria de conjuntos e seu aperfeiçoamento nas primeiras décadas do século XX, o problema de fornecer uma formulação postulacional para a matemática (defendida, por exemplo, por Hilbert), estava aparentemente resolvida. O paraíso de Cantor veio a ser considerado o alicerce sobre o qual o programa postulacional da matemática deveria ser construído. A despeito de os conceitos de *estrutura* e *operação* sobre estruturas desempenharem um papel fundamental na maioria das disciplinas matemáticas, esses conceitos não foram pensados como primitivos, mas reduzidos ao conceito ostensivamente mais fundamental de conjunto.

Com a ascensão da álgebra abstrata na década de 1930, constatou-se que conceitos e construções (por exemplo, isomorfismo, quociente, produto etc.) que com frequência surgem da interação entre estruturas matemáticas possuem uma universalidade que, em certo sentido, escapam de sua origem conjuntista. Além disso, percebeu-se que tais conceitos e construções podem ser tratados em termos do conceito “transformações que preservam estrutura”. Esta perspectiva, particularmente divisada com a emergência da teoria de topos, deu margem à ideia de que a essência dos objetos matemáticos não deve ser buscada em sua constituição interna, como objetos conjuntistas, mas sim em sua interação com outros objetos (estruturas) através de uma rede de morfismos. Em particular, constatou-se que a noção de identidade pode não ser interessante no tratamento de estruturas, mas a noção mais débil de isomorfismo que, nesta tese, relacionamos à de indiscernibilidade.[1]

3.1 Duas perspectivas

> En effet, [...] on sait aujourd'hui qui'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles.
>
> Nicolas Bourbaki, [21] p. EI 9.

> The standard 'foundation' for mathematics starts with sets and their elements. It is possible to start differently, by axiomatizing not elements of sets but functions between sets. This can be done by using the language of categories.
>
> Saunders MacLane [84] p. 398

A relação entre conjuntos e categorias é tema filosófico espinhoso, haja vista uma tensão, ainda latente em nossos dias, entre uma perspectiva categorial e outra conjuntista da matemática,[2] em particular quando se tem em vista questões de fundamentos. De qualquer modo, se quiséssemos sintetizar a matemática produzida no último século numa única palavra, não seria de todo

[1] *Adapt* Bell *op.cit.* p.235.

[2] Cf. Beziau [19] *La Théorie des Ensemble et la Théorie des Catégorie: présentation de deux soers ennemies du point de vie de lers relations ave les fondements des mathématique.*

errôneo supor que o termo correto fosse “conjunto”, embora este termo, em sua significação intuitiva, não compareça direta e efetivamente nas versões axiomatizadas da teoria dos conjuntos.[3] Um exame, ainda que superficial, de diversas publicações matemáticas da primeira metade do século XX, evidencia que a maior parte dos conceitos matemáticos são constituídos por conjuntos munidos de uma *estrutura*, um conceito que se tornou fundamental à filosofia da matemática. Também relevantes trabalhos filosóficos dedicados à matemática fazem menção, ou mesmo discutem seriamente o papel da teoria dos conjuntos em questões de fundamentos. Não seríamos originais em afirmar que tópicos, como a teoria de modelos e a abordagem estrutural da matemática, tenham em parte emergido no cenário matemático em virtude de investigações em teoria dos conjuntos e questões de fundamentos.

Com efeito, “a teoria dos conjuntos de Cantor, inaugurada por volta de 1872, provocou uma alteração nuclear na matemática: aos poucos se percebeu que toda a matemática tradicio-

[3] A expressão ‘teoria dos conjuntos’ é certamente ambígua. De um lado, existem as teorias de conjuntos axiomáticas, como ZF, NBG e NF etc; de outro, alguma versão intuitiva dessa teoria. A suposição consagrada de que se trata apenas de grau de formalização, e que as teorias de conjuntos axiomáticas correspondem a um tratamento formal da teoria intuitiva pode ser bastante enganosa, pois jamais poderemos estabelecer que qualquer versão axiomática captura a versão intuitiva. Na verdade, tratam-se de teorias distintas que muitas vezes identificamos como sendo a mesma. Para certos propósitos isso não compromete o trabalho matemático, mas para a discussão filosófica é algo relevante, ainda que não seja de nossa alçada aqui.

nal, em certo sentido, poderia ser reduzida à teoria cantoriana".[4] Mormente, a compreensão da matemática como ciência independente da experiência sensível, e seu caráter hipotético-dedutivo, se acentuou com o êxito ou advento da abordagem conjuntista.[5] De fato, o estudo das diversas álgebras, topologias e outros sistemas matemáticos revela que eles determinam construtos abstratos de natureza conjuntista, isto é, definíveis no cerne de alguma teoria de conjuntos, em geral a teoria de Zermelo-Fraenkel. É um feito surpreendente poder constatar que a matemática padrão possa ser expressa ou arquitetada numa teoria dos conjuntos. Podemos mesmo ajuizar que a teoria dos conjuntos, em particular em sua versão zermeliana, fornece uma ontologia à matemática, mais exatamente, aos objetos matemáticos.[6] A. Blass corrobora este aspecto fundacional com as seguintes palavras:

[4]Cf. da Costa [33] *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica.* p.75.

[5]Com a expressão "abordagem conjuntista" queremos fixar, tal como proposto por José Ferreirós [45], um modo de compreender a matemática que não se restringe necessariamente a uma Teoria dos Conjuntos específica, como ZFC ou NBG, e que com grande probabilidade, antecede os trabalhos de Cantor. Para Ferreirós, "uma coisa é a Teoria dos Conjuntos como uma subdivisão da matemática [. . .], outra é a abordagem conjuntista como uma perspectiva a partir da qual concebemos os objetos matemáticas."(Cf. Ferreirós [46] p.143). Especificamente sobre o uso do termo "conjunto" na matemática vale citar o trabalho de Torretti *El Paraíso de Cantor*. Cf. Torretti [112]. Cap.1.

[6]Para uma discussão melhor apurada a respeito do comprometimento ontológico da matemática conjuntista, especialmente em sua versão zermeliana, nos reportamos a tese G. Gelowate [55] *Observações sobre a Matemática e Comprometimento Ontológico.*

> É um fato [...] notável que a matemática possa ser fundada na teoria dos conjuntos. Mais precisamente, todos os objetos matemáticos podem ser codificados como conjuntos (numa hierarquia cumulativa transfinita, construída por uma interação da operação conjunto potência, começando com o conjunto vazio). E todas as suas propriedades cruciais podem ser provadas a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos. [7]

Não obstante o caráter fundacional da teoria de conjuntos relativamente às diversas estruturas matemáticas, não é a única lente a partir da qual podemos compreender os objetos matemáticos e suas propriedades. A teoria de categorias e dos topoi, na segunda metade do século XX, despontou como uma alternativa fundacional atrativa e elegante para a matemática e, sobretudo, como uma perspectiva completamente diferente, que merece atenção do filósofo disposto a investigar demandas relativas aos fundamentos da matemática.[8] Segundo nosso entendimento, uma perspectiva categorial da matemática altera completamente a percepção conjuntista dos objetos matemáticos. É certamente relevante contrastar estes dois modos de vislumbrar as entidades matemáticas. De um lado, os conceitos de “conjunto” e “morfismo”; e de outro lado, os de “pertinência” e “composição”. Vamos no que segue, tecer algumas observações sumárias de caráter filosófico sobre estas duas perspectivas.

Uma análise filosófica do conceito de conjunto apresenta grandes dificuldades. Presumivelmente esse conceito constitui

[7] Cf. Blass [17] *The Interation between Category Theory and Set Theory.*
[8] Cf. Landry [70] *Categories for the Working Philosopher.*

um daqueles arquétipos latentes sobre os quais se assenta o pensamento formal. Cantor, ao longo de sua obra, balizou diversas caracterizações desta noção. Em um de seus trabalhos, disse que um conjunto é qualquer "... muitos, que podem ser pensados como um, isto é, uma totalidade de elementos que podem ser combinados em um todo por uma lei".[9] Assim, de um modo rudimentar, um conjunto é frequentemente pensado como uma *totalidade* constituída de *elementos*, seus ingredientes.[10] Doutra parte, o que permite pensar a ideia de certos objetos reunidos numa totalidade como uma nova entidade, munida aparentemente de um novo *status* metafísico (distinto de seus ingredientes), pode ser uma propriedade por eles compartilhada que os aglutina nessa totalidade.

Em outra ocasião, Cantor caracteriza conjunto [*Menge*] como "... qualquer coleção, reunida numa totalidade M, de objetos m definidos e distintos (os quais são chamados de 'elementos' de M) de nossa intuição ou pensamento."[11] "Intuitivamente falando, um conjunto é uma coleção definida, uma pluralidade de objetos de qualquer tipo, que é apreendido como um único objeto".[12] Embora, à primeira vista, Cantor não estabeleça uma

[9]Cf. Cantor [24] *Contributions to the Foundations of the Theory of Transfinite Numbers.* p.85.

[10]É usual supor que conjuntos possam eles mesmos ser elementos de outros conjuntos, embora essa suposição não esteja explicita nos escritos de Cantor. Zermelo, em sua exposição da teoria dos conjuntos, considera ainda o conceito de *Urelemente*, ou átomos, entidades que não são conjuntos mas que podem ser elementos de conjuntos.

[11]Cf. Cantor *ibdem.* p.85.

[12]Cf. Machover [82] *Set Theory, Logic and their Limitations.* p.10.

definição rigorosa do termo "conjunto", mas tão somente ofereça uma caracterização informal, acaba por fornecer alguns aspectos para uma compreensão de suas implicações filosóficas.

Em nossos dias, a teoria dos conjuntos é usualmente apresentada como uma teoria de primeira ordem, com uma letra predicativa $\in_2^2 (x, y)$ (concisamente $x \in y$), e apropriados esquemas de axiomas, que regem a noção de conjunto ou outros possíveis objetos que satisfaçam tais axiomas. De qualquer modo, certos pressupostos intuitivos da teoria cantoriana estão presentes de algum modo em suas versões axiomatizadas. Presumivelmente, estas "diretrizes" exigem de partida a ideia de objetos, análogos às entidades platônicas.

A despeito dos desenvolvimentos axiomáticos subsequentes, a caracterização de conjunto de Cantor continua sendo um ponto de partida importante para a análise filosófica da matemática conjuntista, uma vez que manifesta fortes e profundas intuições a respeito da matemática padrão. Em particular, devemos observar que em contextos extensionais, como na matemática padrão, conjuntos devem ser considerados iguais (a mesma entidade), se e somente se cada elemento de um é elemento do outro, e vice-versa. Todo conjunto é idêntico a si próprio e a nada mais, e se conjuntos são distintos, há um conjunto (extensionalmente, uma propriedade) ao qual um deles pertence e o outro não. Desta forma, na matemática padrão se $x = y$, então temos um só conjunto ou um só *Urelement*, ao qual podemos nos referir tanto por x quanto por y. Em outros termos, vale para a matemática padrão, o princípio de Leibniz da identidade dos indiscerníveis, que estabelece que não pode haver entidades, neste caso conjuntos, que difiram *solo numero.* Numa perspectiva conjuntista, a identidade de um *elemento* num conjunto é pressuposta desde o início, independentemente do contexto. Esse modo de perceber os objetos matemáticos manifesta fortes compromissos metafísicos, em particular, numa teoria de conjuntos, não cabe, sem arranjos artificiais, a ideia de entidades *indiscerníveis.* Em outras palavras, esta noção não diz respeito a usual perspectiva conjuntista da matemática *standard.*[13]

O que exatamente podemos fazer a partir das noções de conjunto e pertinência? Praticamente nada, até que seja estabelecida a ideia de que conjuntos podem, eles mesmos, serem agrupados para formar outros conjuntos. A construção de conjuntos, a partir de outros conjuntos previamente dados, é o que confere expressividade à teoria dos conjuntos para modelar entidades matemáticas mais complexas, sobretudo, permite estabelecer o conceito de *função*, indispensável às ciências empíricas, nas quais movimentos e transformações se fazem constantemente presen-

[13]Nesse contexto, "indiscerníveis" seriam objetos (conjuntos ou *Urelemente*) que pertenceriam aos mesmos conjuntos e (no caso de conjuntos) teriam os mesmos elementos, porém sem que fosse "o mesmo" conjunto *Urelemente.* Claramente isso é impedido nas teorias usuais, axiomáticas ou não. Somente para satisfazer o leitor atento, observamos que há um conceito de "indiscernibilidade" na teoria usual de conjuntos conhecidos como "indiscerníveis de Ramsey" (Cf. Wang [116] *Lectures on Mathematical Logic.* p. 83), mas trata-se de considerar entidades conjuntistas no escopo de uma estrutura, o que envolve a ideia já externada aqui de invariância por automorfismos da estrutura.

tes.[14] É surpreendente, que um conceito como o de função, originariamente concebido para tratar de movimentos, processos e transformações nas formulações mais utilizadas, tenha sucumbido a um tratamento conjuntista, dado o caráter platônico da matemática conjuntista padrão.[15] A intuição do conceito de "função", presente na origem da ciência moderna com Galileu e sua busca por uma compreensão da noção de movimento, são distintos do modo como este conceito acabou sendo assimilado pela matemática conjuntista. A ciência moderna, de Galileu a Newton, segundo nossa perspectiva, sempre esteve mais próxima de uma matemática dinâmica que reivindica o conceito de processo. Por outro lado, o ideário filosófico ocidental, corroborado pela matemática *standard*, sempre esteve mais próximo de uma realidade de objetos imutáveis.

Um bom modo de ilustrar como a teoria dos conjuntos formaliza uma ideia matemática intuitiva é fornecido por um exame da noção de uma função. De um ponto de vista intuitivo, uma

[14]É preciso observar, no entanto, que von Neumann apresentou uma versão de uma teoria axiomática na qual o conceito primitivo é o de função e que é, contrariamente às versões usuais como a de Zermelo finitamente axiomatizável. A análise dessa versão foge aos propósitos dessa tese; o leitor pode consultar o artigo de von Neumann, bem como comentários iniciais, no artigo "*An axiomatization of set theory*" pp. 393-413 de van Heijenoorth (*ed.*) [114].

[15]Ver Bernays para uma discussão sobre o platonismo em matemática. Cf. Bernays [18]. Newton da Costa também sublinha o caráter platônico da matemática padrão. Para da Costa, "as ciências formais [*lógica e matemática*] no seu estado de desenvolvimento atual, envolvem-nos em uma ontologia que engloba entidades abstratas". [33] p.188.

função consiste de uma associação entre objetos, uma espécie de correspondência que associa a um dado objeto um e apenas um outro objeto. Pode-se também pensar uma função como uma regra, ou operação, que aplicada a determinado objeto fornece um outro objeto associado (possivelmente, o "mesmo objeto").

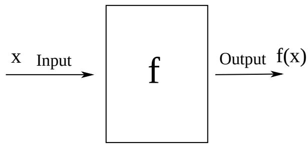


Figura 3.1: Uma função f é uma operação ou transformação sobre um objeto x que produz um objeto $f(x)$. Possivelmente o mesmo objeto ou um objeto "indistinguível" do objeto x.

Fenômenos descritos pelas ciências empíricas, como a física e a biologia, são comumente repletos de exemplos em que comparecem operações, transformações e metamorfoses. Palavras como "*operação*" e "*transformação*" estão permanentemente presentes à intuição do conceito de função. Por certo, o conceito de "função" permite a passagem de uma "matemática estática" a uma "matemática dinâmica".[16]

[16] O termo "dinâmica", aqui não quer dizer temporal como na física. A palavra está sendo usada no sentido de "transformação", de mudança de um conjunto a (eventualmente) outro por meio de funções, uma ideia que é associada à de morfismo entre objetos de uma categoria. O que estamos pretendendo acentuar é justamente essa passagem. É com esse espírito que citamos Bachelard na epígrafe que introduz esta tese.

Esta noção é usualmente formalizada, em teoria dos conjuntos como uma tripla ordenada $f = \langle A, B, R \rangle$, onde $R \subseteq A \times B$ é uma relação de A em B, tal que para todo $x \in A$ existe um e apenas um $y \in B$ de modo que $\langle x, y \rangle \in R$. Numa abordagem conjuntista, uma função não deixa de ser um conjunto, um objeto estático, que subjaz às teorias de conjuntos usuais. É profundamente enganosa a utilização de uma seta "$\rightarrow$" para denotar a noção de função tal como definida em teoria dos conjuntos. Por certo, a noção de função, tal como definida em ZFC, é uma das entidades do "Paraíso de Cantor".

De qualquer modo, devemos admitir que o equacionamento da matemática em termos conjuntistas pode, com alguma justificativa, ser visto como resultado da investigação matemática moderna. Sistemas como ZF e NBG, têm desfrutado de grande prestígio matemático e filosófico, em parte por fornecerem uma formalização elegante e muito clara das noções básicas utilizadas pelo matemático. Entretanto, como já referimos, a emergência das teorias de categorias e de topos tem fornecido uma alternativa que, sustentamos, enseja uma perspectiva diferente.[17]

A teoria de categorias pode ser entendida de muitas manei-

[17]Nesse ponto é importante fazer referência a formulação de John von Neumann para a teoria de conjuntos. Para Von Neumann o conceito de *função* é um conceito primitivo em detrimento do conceito de *conjunto*, antecipando um dos aspectos distintivos da teoria de categorias. Em sua elaboração teórica conjuntos são definidos a partir de funções. Cf. von Neumann [96] *An axiomatization of set theory.*

ras. Numa primeira e imprecisa aproximação, pode-se afirmar que a teoria de categorias é o estudo matemático (abstrato) da álgebra das funções.[18] Contudo, atualmente a teoria de categorias é muito mais do que isso, e talvez deva ser concebida como uma teoria geral das estruturas e de suas possíveis transformações por funtores. Assim, o estudo da topologia ocorre, de um ponto de vista categorial, com espaços topológicos como objetos e funções contínuas como morfismos. A álgebra linear é estabelecida na categoria cujos morfismos são transformações lineares entre espaços vetoriais (objetos); a teoria de grupos na categoria cujos morfismos são homomorfismos de grupos e, assim por diante. A ideia central da abordagem categorial é a de descrever as propriedades das estruturas em termos de morfismos entre objetos, ao invés da descrição usual em termos de elementos e relação de pertinência. Com isso, ideias conjuntistas como as de 'conjunto' e 'função' são substituídas por 'objeto' e 'morfismo'. Esta mudança de perspectiva naturalmente envolve significativas questões filosóficas, certamente ligadas à epistemologia e ontologia da matemática. Em particular, de acordo com Thomas de Quincey, "a matemática não tem um pé de apoio que não seja puramente metafísico",[19] mas qual seria esta metafísica? Certamente essa metafísica depende das lentes a partir das quais concebemos tais entidades. Embora não seja objeto primário desta tese uma reflexão sobre ontologia da matemática, isso obviamente deveria ser discutido em uma análise mais detalhada.

[18] Cf. Awodey [3] *Category Theory.* p.1.
[19] Cf. Quincey [101] *Kant and his Miscellaniou Enssays.* p.244.

O que hoje chamamos de teoria de categorias foi elaborado aos poucos; em particular, foi só após algum tempo de seu desenvolvimento que um *corpus* de conceitos, métodos e resultados pôde ser qualificado como teoria.[20] Aliás, a literatura atualmente disponível sobre a história das categorias, toma ainda a forma de notas e artigos.[21] Em todo caso, é comum afirmar que os conceitos básicos dessa teoria foram introduzidos, por volta de 1942, por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane, mais especificamente com a publicação pelos referidos autores de *General theory of natural equivalence*.[22] De acordo com L. Corry, de início, essa teoria não suscitou qualquer interesse especial entre os matemáticos.[23] Foi só durante os anos 1960 e 1970 que a teoria de categorias passou a ganhar importância no quadro conceitual de muitas áreas de investigação matemática, especialmente em topologia e geometria algébrica. A teoria de categorias ganhou realmente *status* de destaque no cenário filosófico e matemático com o advento da teoria de *topos*, germinada no âmbito dos trabalhos de Alexander Grothendieck (é dele o uso do termo "*topos*", "sítio", "lugar" em grego) em geometria algébrica. Doutra parte, as pesquisas de F. W. Lawvere e Myles Tierney propiciaram a formulação do conceito de *topos elementar*, grosso modo, um topos que é "essencialmente" como a categoria **Set**, ou ca-

[20] Cf. Kromer *op.cit.* p.xxi.

[21] Certamente trabalhos de grande envergadura e importância sobre a história e filosofia da teoria de categorias são *Tool and Object* de R. Kromer [68] e *From a Geometrical Point of View* de J-P. Marquis [88].

[22] Cf. Eilenberg [43] *General Theory of Natural Equivalences.*

[23] Cf. Corry *op.cit.* p. 339.

tegoria dos conjuntos.[24] A ideia que subjaz um topos elementar de Lawvere envolve o tratamento categorial de diversas noções e conceitos matemáticos no ambiente da teoria de topos. Tradicionalmente os conceitos matemáticos envolvem conjuntos e funções entre conjuntos descritos em termos de elementos que constituem conjuntos, isto é, por uma relação fundamental de pertinência: são em última instância caracterizações *internas* ou *locais*, envolvendo tão somente os conjuntos em consideração. Na teoria de categorias, por outro lado, não dispomos de uma relação de pertinência – de *elementos* constituintes de um objeto – mas "somente" a de morfismos (ou transformações) entre objetos e os demais objetos do universo (categoria) em foco e a relação de composição. Uma perspectiva categorial é *externa* e abstrata,[25] quando comparada com uma abordagem conjuntista usual. Este modo de compreender as coisas pode ser sintetizado pela seguinte observação de Tom Leinster:

> A teoria de categorias vê a matemática com olhos de um pássaro. Do alto no céu, os detalhes tornam-se invisíveis, mas pode-se detectar padrões que não podem ser detectados a partir do nível do solo.[26]

A teoria de categorias e a teoria de topos, segundo muitos autores, propicia uma fundamentação para a matemática indepen-

[24]Cf. Apêndice D.

[25]Esse aspecto acabou por marcar a teoria de categorias com o qualificativo, seguramente pejorativo, de *abstract nonsense*. Cf. Marquis [88] *From a Geometrical Point of View: a study of the history and philosophy of category theory.* p.1.

[26]Cf. Leinster [77] *Basic Category Theory.* p.1.

dente de qualquer consideração conjuntista.[27] Entretanto, não há talvez nada mais sugestivo e impreciso do que a afirmação de que a teoria das categorias fornece uma base para a matemática. Não queremos dizer que isso não seja verdade, mas temos de chegar a algum acordo sobre o significado da expressão "fundamentos da matemática". Kreisel, por exemplo, observou que a teoria de categorias fornece uma ferramenta poderosa para organizar a matemática, e esta talvez seja a maneira pela qual essa teoria deva ser pensada como uma fundação. Há, no entanto, tentativas de usar a teoria de categorias para construir uma fundamentação para a matemática alicerçada nos conceitos de morfismo e composição de morfismos. Seguramente este é o caso, por exemplo, do sistema proposto por Lawvere [72]. Neste trabalho, consideramos a atitude de ir de acordo com a segunda visão da teoria de categorias como fundação. Pensamos que essa teoria não apenas descreve e organiza a matemática de uma forma muito eficaz, mas também fornece uma fundamentação ou perspectiva para a mesma. São como as lentes a partir das quais se tem uma compreensão da matemática.[28]

A teoria de categorias, como uma linguagem fundacional alternativa, nos permite descrever estruturas *relativamente* a ou-

[27]Diversos filósofos da matemática, entre os quais Mac Lane [84], Awodey [5] e McLarty [91] entre outros, têm alegado que a teoria de categorias fornece uma base para a matemática, independente de qualquer fundamentação ortodoxa numa teoria dos conjuntos.

[28]Não é nosso objetivo mostrar de que modo pode-se expressar a matemática padrão na teoria de categorias, bastando que isso seja suposto pelo leitor. Caso haja interesse nos detalhes, indicamos as obras que estão sendo apontadas.

tras estruturas. Em certa acepção, a teoria de categorias viabiliza, como já dissemos, uma matemática de "interações". A partir dessa perspectiva, a realidade de um objeto é especificada, não por uma identidade intrínseca, mas por uma identidade numa rede de objetos interconectados por morfismos. Diríamos talvez uma *identidade relacional.* Podemos sustentar que o conceito de categoria formaliza a noção de "domínio matemático", ao passo que o conceito de funtor formaliza a ideia de interação entre diferentes domínios. Uma das ideias centrais do aparato categorial é a de que um certo domínio da matemática pode ser caracterizado não por uma descrição de suas características intrínsecas, mas pelos elos das entidades envolvidas no domínio. M. Resnik declara:

> Em matemática, posso afirmar, não temos objetos com uma composição 'interna' organizados em estruturas, temos apenas estruturas. Os objetos da matemática [...] são estrutura ou posições em estruturas. Como posições em estruturas, eles não têm identidade ou propriedades fora de uma estrutura.[29]

Um aspecto distintivo que reforça uma perspectiva categorial das entidades matemáticas é que todas as suas construções são fornecidas através da "linguagem de diagramas", consistindo de adequadas setas (morfismos) entre objetos em diagramas. Mac

[29]Cf. Resnik [103] p. 530. O ponto de vista de Resnik fundamenta-se na sua concepção "estrutural" da matemática. É importante mencionar que essa não é a única maneira de concebê-la, e mesmo assim não há uma única versão estrutural. O leitor pode consultar os trabalhos de S. Shapiro a esse respeito. Uma visão geral pode ser encontrada no verbete *Structuralism, Mathematics* da Internet Encyclopedia of Philosophy, escrito por S. Shapiro: https://www.iep.utm.edu/m-struct/

Lane, um dos fundadores da teoria, chega a afirmar que "[a] teoria de categorias tem início com a constatação que muitas propriedades dos sistemas matemáticos podem ser unificados e simplificados com sua apresentação por diagramas de setas"[30] Certamente, *unificação* e *simplificação* são conceitos recorrentes em toda a matemática. Nesse sentido, a ideia de uma estrutura matemática como um 'conjunto' de elementos munido de algumas propriedades não é fundamental. Provas em teoria de categorias são fornecidas mostrando a comutatividade de diagramas, e geralmente envolvem conceitos, como funtores entre categorias, transformações naturais entre funtores, bem como limites e adjunções de funtores. Esses aspectos, devido a sua generalidade, se manifestam em categorias de um modo que não podem ser assentados nos sistemas usuais de teoria dos conjuntos, como ZF ou NBG, a não ser fortalecendo-o ou recorrendo a certos artifícios. Contrastam em especial com uma visão conjuntista os aspectos dinâmico e externo de uma abordagem via categorias que exploramos ao longo de todo o texto. Esses aspectos têm forte impacto sobre a noção de identidade em matemática, em particular a ideia de que estruturas matemáticas podem ser apresentadas por suas relações com outras estruturas ao invés de suas características internas.

Naturalmente, estes aspectos de uma abordagem categorial da matemática, aqui apenas delineados, abrem margem a inúmeras questões de ordem filosófica, por exemplo, sobre a ontologia e epistemologia da matemática. Esta tese, entretanto, não

[30]Cf. Mac Lane [83] *Category for Working Mathematicians.* p.1

tem como foco uma discussão pormenorizada dos fundamentos categoriais da matemática. De qualquer modo, voltaremos no capítulo final a comentar algo sobre uma perspectiva categorial da matemática e de seus objetos, especialmente quando temos em mente uma discussão sobre o conceito de indiscernibilidade em categorias.

3.2 Identidade e indiscernibilidade em categorias

> I believe that category theory presents an opportunity for philosophers and mathematicians to develop new theories of identity [*and indiscernibility*], which will be useful for today's science.
>
> A. Rodin [105] p. 65.

A noção de *identidade* em categorias é bastante diferente daquela estabelecida por uma abordagem conjuntista (extensional).[31] Uma olhada, ainda que superficial, sobre a teoria de categorias, permite constatar de imediato a existência de uma identidade para objetos e uma identidade para morfismos. De mais a mais, categorias fornecem diferentes níveis de identidade para objetos, que podem ser eles mesmos categorias. Por outro lado, em teoria de conjuntos, em sua formulação primeira

[31] Sempre que utilizamos a expressão "teoria usual de conjuntos" estamos nos referindo à concepção "extensional" de conjunto, ou seja, aquela moldada pelo axioma de extensionalidade. Assim, não temos em mente teorias "intensionais" de conjuntos em que este axioma é modificado. Cf. Shapiro [108] para uma abordagem intensional da matemática.

e intuitiva, a noção de identidade recai comumente, em última instância, sobre os elementos de um conjunto, haja vista que um conjunto é 'determinado' pelos seus elementos, e os elementos de um conjunto devem ser objetos 'distintos' uns dos outros.[32] Efetivamente, esses pontos se traduzem em um pressuposto básico da concepção cantoriana de conjuntos, que se encontram até mesmo em suas versões axiomatizadas. Ela se expressa pelo axioma de extensionalidade associado aos postulados da lógica subjacente à teoria, desde que ela utilize os axiomas habituais da noção de identidade (reflexividade e substitutividade).[33] O axioma de extensionalidade, estabelece a identidade para conjuntos. Mais formalmente:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Com isso, de um ponto de vista conjuntista, só podemos afirmar, por exemplo, que um conjunto unitário $\{a\}$ é o *mesmo* que outro conjunto unitário $\{b\}$, se e somente se demonstra-se que $a = b$. Ou seja, dados conjuntos, só se pode estabelecer que eles são ou não o mesmo, olhando para seus elementos, isto é, olhando para "dentro" do conjunto. Numa versão categorial de **Set** (a categoria dos conjuntos) não é possível verificar que $a = b$, ou mesmo que $\{a\} = \{b\}$. Nas palavras de Kromer, "quando numa categoria uma construção matemática é rotulada como um objeto,

[32]Na teoria de conjuntos não-bem-fundados, que comportam "conjuntos extraordinários" no sentido de Mirimanoff (Cf. Krause [63] p.117 & Aczel [1].), podem haver conjuntos x tais que $\ldots x_2 \in x_1 \in x$, assim que a afirmativa de nosso texto deve qualificada. Mas, mesmo assim, há versões dessas teorias que utilizam o axioma da extensionalidade em sua acepção usual. cf. Aczel *op.cit.* p. xviii.

[33]Cf. Mendelson *op.cit.* Cap.2.

ela é comprimida a um ponto que não pode ser penetrada, e do qual se sabe apenas os vestígios deixados por ela na interação com outros objetos".[34] Naturalmente, este aspecto se estende também a categorias functoriais, isto é, categorias cujos objetos são funtores e os morfismos transformações naturais. Assim, por exemplo, dois espaços topológicos T_1 e T_2 homeomorfos na categoria **Top** (categoria dos espaços topológicos) são, via de regra, pensados como o mesmo; embora, a rigor deveriam ser efetivamente concebidos apenas como matematicamente indiscerníveis.[35]

As propriedades dos objetos em teoria de categorias são estabelecidas exclusivamente por morfismos, em particular a noção de identidade para objetos na categoria dos conjuntos é gerada por um morfismo identidade. Em **Set**, por exemplo, a categoria dos conjuntos, id_X é a função identidade sobre o conjunto (objeto) X. O máximo que podemos estabelecer nesta categoria a respeito da identidade de um objeto X é algo esquematicamente representado pelo seguinte diagrama:[36]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "id_X"] \end{tikzcd}$$

Assim, o que se pode afirmar, de um ponto de vista categorial

[34]Cf. Kromer *op.cit.* p.218.

[35]Vale lembrar que o conceito de isomorfismo implica o de identidade apenas para *skeletal* categorias Cf. Hatcher *op.cit.* p.249.

[36]Nesse caso, que a identidade se aplica apenas aos morfismos, mas não aos objetos. Não há em categorias uma relação de identidade para objetos.

relativamente aos conjuntos unitários $\{a\}$ e $\{b\}$, é que existe um par de morfismos (funções) $f : \{a\} \to \{b\}$ e $g : \{b\} \to \{a\}$ tais que $f \circ g = id_{\{b\}}$ e $g \circ f = id_{\{a\}}$. Temos assim um morfismo $f \circ g$ que "gera" a identidade do objeto $\{b\}$ relativamente ao objeto $\{a\}$ e um morfismo $g \circ f$ que produz a identidade do objeto $\{a\}$ relativamente ao objeto $\{b\}$. É segundo nosso ponto de vista uma identidade relativa, ou melhor, uma identidade que depende de como os objetos interagem e/ou se transformam. Certamente, isomorfismos proporcionam uma espécie de "indiscernibilidade" para objetos isomorfos. Numa apresentação tipicamente categórica, temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\{a\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{\{a\}}"'] & \{b\} \arrow[d, "id_{\{b\}}"] \arrow[dl, "g"] \\
\{a\} \arrow[r, "f"'] & \{b\}
\end{tikzcd}$$

ou seja, que estes objetos na categoria **Set** são isomorfos, o que representamos por, $\{a\} \cong \{b\}$. Isso, porém, não nos autoriza concluir em todo caso que $\{a\} = \{b\}$. A despeito de resultados análogos poderem ser obtidos em teorias de conjuntos como ZFC e NBG, esses sistemas não envolvem via de regra a generalidade da teoria de categorias e além disso não dão ênfase aos aspectos externo e dinâmico oferecidos pelo ponto de vista da teoria de categorias. Talvez pudéssemos sustentar que na teoria de categorias *isomorfismos* (de objetos) fornecem uma noção mais "fraca" de identidade do que aquela fornecida pela teoria de conjuntos. Porém, no caso de **Set**, entre outras categorias, a "identidade" (a menos de isomorfismo) é um tipo de indiscernibilidade.[37] Esta perspectiva externa, categorial, não nos fornece a rigor uma noção de identidade para objetos mas, diríamos, de indiscernibilidade. *Objetos isomorfos* são categorialmente indiscerníveis pelo modo como o conceito de isomorfismo é introduzido em categorias.

Esta noção de indiscernibilidade para objetos também se manifesta quando consideramos como objetos são caracterizados em categorias. Vamos considerar um exemplo simples e bem conhecido da definição do produto de dois objetos X e Y em uma categoria $\mathscr{C}$. O produto de X e Y em $\mathscr{C}$ é um objeto Z de $\mathscr{C}$ associado a dois morfismos $\pi_X : Z \to X$ e $\pi_Y : Z \to Y$, tal que para qualquer outro objeto C de $\mathscr{C}$ associado a morfismos $w_1 : C \to X$ e $w_2 : C \to Y$, existe um único morfismo $h : C \to Z$ tal que $\pi_X \circ h = w_1$ e $\pi_Y \circ h = w_2$. Numa linguagem mais usual, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "w_1"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "w_2"] & \\
X & Z \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

O que importa assinalar é que esta definição caracteriza Z a menos de isomorfismo. Isto significa que qualquer outro objeto

[37] Como sabemos, a indiscernibilidade, intuitivamente falando, significa partilhamento de propriedades. Em categorias significa que objetos são isomorfos. É desse modo que entendemos esse conceito doravante quando nos referimos a um tratamento categorial.

W isomorfo a Z em $\mathscr{C}$, se Z é o produto de X e Y, então W também o é, além disso, se Z e W são o produto de X e Y, então são isomorfos. Assim, essa definição não nos dá um objeto particular como um produto, nem caracteriza Z, estipulando como seus elementos devem ser. Essa definição, na verdade, especifica as condições em que um objeto é uma instância do *produto.* Isto é típico do modo como os objetos são definidos em teoria de categorias.[38]

Além do que já dissemos, devemos ter em mente a ideia intuitiva de que um morfismo é uma "transformação" ou "processo", o que efetivamente sugere uma *filosofia de processos*, talvez análoga a proposta por Whitehead.[39] Segundo MacLane, "grande parte da matemática é dinâmica, na medida em que trata de morfismos [*funções*] de um objeto em outro objeto". De mais a mais, o conceito de "objeto" numa categoria não pressupõe desde o início que eles sejam distintos uns dos outros, isto é, que sejam indivíduos providos de identidade. Objetos em categorias são entidades, nas palavras de Kromer, desprovidas de individualidade no sentido de que não possuem critérios de identificação, isto é, não há como lhes atribuir identidade. São entidades "sem rosto" (*facelesspoints*). De um ponto de vista categorial, parece irrelevante, afirmar que um determinado objeto A isomorfo a

[38]Afirmar que "X é único *a menos de isomorfismo* significa que pode haver Y "diferente" de X tal que X e Y são isomorfos. Veja, por exemplo, no apêndice D as observações sobre os objetos inicial e terminal.

[39]A filosofia de processos possui um longa e extensa tradição que dá ênfase a uma ontologia da mudança. Essa abordagem filosófica é particularmente associada ao nome de Whitehead. Cf. Whitehead [117] *Process and Reality.*

um objeto B em uma categoria $\mathscr{C}$ são o *mesmo* objeto. São entidades categorialmente indiscerníveis, mas não necessariamente a mesma entidade no sentido de que não haveria mais de uma entidade. Em categorias, objetos isomorfos são, via de regra, entidades indistinguíveis.

Categorias trazem nova luz ao debate em torno das noções de identidade e indiscernibilidade, haja vista que espelham uma preocupação menor com a identidade de seus objetos. De acordo com Lawvere, a intuição que subjaz à noção de *morfismo* é a de um processo ou transformação.[40] O conceito de identidade (para objetos) é produzido por um morfismo, em última instância por uma "transformação"sobre o objeto. A noção de morfismo em categorias, além de evocar de algum modo dinamismo e generalidade, manifesta uma relação mais débil de identidade. É salutar dar ênfase nesse ponto a epígrafe que introduz este projeto: "De certo modo, se conhece a forma matemática por suas transformações. Poder-se-ia dizer ao ser matemático: dize-me como se transforma e dir-te-ei que és."[41]

[40]Cf. Lawvere [74] p. 16.

[41]"De cette manière, on connaît la forme mathématique par ses transformations. On pourrait dire à l'être mathématique : dis moi comment l'on te transforme, je te dirai qui tu es". Cf. Bachelard [9] *Le Nouvel Esprit Scientifique*. p.26-27.

Capítulo 4

Quase-conjuntos: uma apresentação sumária

> ... we have... been compelled to dismiss the idea that... a particle is an individual entity which retains its 'sameness' forever.
>
> Schrödinger *apud* [48] p.119

4.1 Motivação intuitiva

Identidade e indiscernibilidade são conceitos difíceis de mapear, a despeito de o primeiro ter gozado de inegável privilégio na tradição filosófica e científica. São conceitos usualmente conectados, ou seja, entidades indiscerníveis são consideradas via de regra idênticas e entidades idênticas são indiscerníveis.[1] Com maior precisão, supomos comumente que temos uma e mesma entidade com rótulos distintos. Embora, de um ponto de vista filosófico, possa ser controverso desvincular esses conceitos, de modo que se possa falar de indiscernibilidade sem que isso implique necessariamente identidade.

Como a noção de identidade, existem muitas maneiras de tratar formalmente a ideia de indiscernibilidade. Como já salientamos, as teorias usuais de conjuntos, como ZFC, NBG, NF etc., nos comprometem irremediavelmente com a noção de identidade. Em contextos extensionais, como na matemática *standard*, todo conjunto é idêntico a si próprio e a nada mais, e se conjuntos são distintos, há um conjunto (extensionalmente, uma propriedade) ao qual um deles pertence e o outro não. Desta forma, se $x = y$, então estamos simplesmente dizendo que temos um só conjunto ou um só *Urelement* (no caso de uma teoria de conjuntos com átomos), ao qual podemos nos referir tanto por x quanto por y. Além disso, vale para a matemática padrão, o princípio de Leibniz da identidade dos indiscerníveis que estabelece que não pode haver entidades que difiram *solo numero*. De acordo com essa perspectiva, não cabe, sem arranjos artificiais, no caso de conjuntos de *indiscerníveis*, no sentido de possuírem todas as mesmas propriedades, ou terem os mesmos elementos ou, no caso de *Urelemente*, de pertencerem ao mesmo conjunto, em outras palavras, esta noção não diz respeito à usual perspectiva conjuntista da matemática.

[1] Cf. French & Krause *op.cit.* p.4ss

Para tratarmos formalmente da indiscernibilidade de um ponto de vista conjuntista usual, como em ZFC, podemos ter em mente uma abordagem por meio de estruturas. Este foi o procedimento adotado por H. Weyl.[2] Em suma, ele considerou uma estrutura formada por um conjunto finito e uma relação de equivalência definida sobre esse conjunto. As classes de equivalência passaram a representar classes de indiscerníveis. De fato, as perspectivas tradicionais constituem na verdade um "truque" para dar conta da noção de indiscernibilidade, haja vista que essa noção a rigor não faz parte, como afirmamos, da lógica e matemática usuais. Por outras palavras, indiscernibilidade na matemática padrão é só uma *façon de parle*.

Uma perspectiva mais radical foi proposta por D. Krause com sua teoria de quase-conjuntos.[3] A teoria de quase-conjuntos permite lidar com entidades indiscerníveis sem que isso implique necessariamente identidade. Vale lembrar que a teoria dos quase-conjuntos é fortemente inspirada pela física quântica e o entendimento que, de certo ponto de vista, as entidades que povoam o mundo subatômico não se submetem à noção tradicional de identidade,[4] tal como manifesta pela matemática padrão; por

[2]Cf. French & Krause [48] *op.cit.* p. 261s.

[3]Cf. Krause [62] *On quasi-set theory*, [65] *Não-Reflexividade, indistinguibilidade e Agregados de Weil.*

[4]Weyl e Schrödinger estão entre aqueles que explicitamente falaram sobre "não-indivíduos" no trato de partículas quânticas. Naturalmente, existem modos de explorar a mecânica quântica, como numa formulação bohmiana, em que tais partículas possuem posições muito bem definidas no

outro lado, também podemos associar o advento de uma matemática de não-indivíduos a uma motivação de caráter filosófico, segundo a qual o conceito de identidade, tal como expresso pela lógica clássica pode ser derrogado.[5] De qualquer modo, é interessante destacar que a teoria de quase-conjuntos manifesta uma "perspectiva conjuntista" do conceito de indiscernibilidade.[6]

É muito comum no meio filosófico esquadrinhar as fontes que suscitaram o nascimento de uma nova teoria ou paradigma. Em parte, a reconstrução das razões que levaram ao nascimento de uma teoria de quase-conjuntos não são difíceis de reconstituir. Num primeiro momento podemos associar o nascimento de uma matemática de não-indivíduos há uma motivação de caráter filosófico, segundo a qual, o conceito de identidade, tal como manifesto pela lógica clássica pode ser derrogado.[7] da Costa, em particular, baseado na ideia de Schrödinger de que o conceito de identidade não faz sentido num contexto quântico, definiu uma lógica de primeira ordem em que proposições de identidade como $a = b$ só fazem sentido para certos objetos; para outros objetos (que denotariam entidades quânticas)

espaço e no tempo, sendo portanto, indivíduos. Indivíduos, aqui, são objetos que obedecem à teoria *standard* da identidade da lógica clássica e das teorias de conjunto padrão.

[5]Cf. da Costa [35] *Logique Classique et non classique.* p.123-6

[6]Com efeito, na teoria de quase-conjuntos vale um axioma "fraco" de extensionalidade que, informalmente, implica que quase-conjuntos contendo "a mesma quantidade" (expressa por meio de quase-cardinais) de elementos de mesmo tipo são indiscerníveis. Para detalhes, ver [62], [65].

[7]Cf. da Costa *ibdem* p.123-6

tais expressões não fariam sentido.[8] Da Costa, entretanto, fez notar que uma semântica para tais lógicas, batizadas de *logicas de Schrödinger*, não poderia ser estabelecida de forma adequada nas teorias de conjuntos usuais, como ZF.[9] A rigor na matemática *standard* (e em sistemas clássicos de lógica), não existem entidades que sejam indiscerníveis *tout court*, isto é, sem que sejam a mesma entidade.

4.2 A teoria $\mathfrak{Q}$

A teoria de quase-conjuntos, denotada $\mathfrak{Q}$, é uma teoria ao estilo **ZFU**[10] com duas espécies de *Urelemente*, os M-átomos, que denotam objetos providos de identidade (M-átomos simulam os *Urelemente* de **ZFU**), e os m-átomos, que denotam objetos desprovidos de identidade (não-indivíduos), isto é, entidades que podem ser indistinguíveis, porém, não iguais.[11] Dois predicados unários expressam esta distinção: $m(x)$ afirma que x é um m-átomo e $M(x)$ que x é um M-átomo. A linguagem de $\mathfrak{Q}$ consta ainda dos seguintes predicados binários: $\equiv$ (indistinguibilidade)

[8] Originalmente da Costa propôs que entidades as quais não se aplica o conceito de identidade fossem chamadas de *não-objetos*. Mais tarde Krause e French passaram a chamar tais entidades de não-indivíduos. Cf. French & Krause *op.cit.* p.5.

[9] Cf. French & Krause *ibdem* p.273.

[10] A lógica subjacente é a lógica de primeira ordem sem identidade.

[11] Quando em $\mathfrak{Q}$ desprezamos os m-átomos, a teoria dos quase-conjuntos torna-se essencialmente equivalente a **ZFU** e, à vista disso, os quase-conjuntos correspondentes podem ser chamados simplesmente de 'conjuntos'. Se os M-átomos são excluídos, então $\mathfrak{Q}$ colapsa em **ZFC** sem átomos.

e $\in$ (pertinência). Envolve, além disso, um predicado unário Z ($Z(x)$ afirma que x é um conjunto) e um símbolo funcional unário qc (quase-cardinalidade) ($qc(x)$ indica o quase-cardinal de x). Em $\mathfrak{Q}$, o símbolo de igualdade "$=$" não é primitivo e expressões da forma "$x = y$" não fazem sentido para *m-átomos*. Entretanto, o conceito de *identidade extensional* (representada por $=_E$) é definido na teoria para as entidades que satisfazem a contraparte clássica de $\mathfrak{Q}$, isto é, as propriedades exigidas por **ZFU**. Podemos caracterizar a linguagem de $\mathfrak{Q}$ pela coleção dos seguintes símbolos específicos:

$$\pounds_{\mathfrak{Q}} = \{M, m, Z, \equiv, \in, qc\}$$

A heurística subjacente à teoria $\mathfrak{Q}$ é que os *M-átomos* atuem como os *Urelemente* (átomos) da usual teoria **ZFU**, enquanto que os *m-átomos* podem ser pensados como representando entidades absolutamente indiscerníveis (*i.e.*, distintas *solo numero*). Como já dissemos, a teoria $\mathfrak{Q}$ dispõe de uma contraparte "clássica", cujos elementos são os *M-átomos* e conjuntos, submetidos respectivamente aos predicados M e Z (a noção de identidade é definida na teoria apenas para tais entidades, chamadas *Dinge*). Podemos também ter quase-conjuntos que contêm *M-átomos*, conjuntos e *m-átomos*, isto é, quase-conjuntos que mesclam entidades "clássicas" (*conjuntos* e *M-átomos*) e entidades "não-clássicas" (*m-átomos*). A teoria também dispõe de quase-conjuntos cujos elementos quase-conjuntos (definidos sob o predicado unário E) e quase-conjuntos cujos elementos são apenas *m-átomos* indistinguíveis (não necessariamente apenas um tipo de *m-átomo*). Nesse último caso os quase-conjuntos são chamados de *quase-conjuntos puros*, definidos pelo predicado unário

P. Vale notar que a teoria não postula na axiomática que devam existir *m-átomos*, nem mesmo que deve existir mais de um *m-átomo*, isto é, objetos x e y que satisfazem o predicado m tais que $x \equiv y$. O símbolo de indistinguibilidade $\equiv$ é uma relação de equivalência que não é compatível com a pertinência, isto é, podemos ter, por exemplo, $x \equiv y$, e para algum z, segue que $x \in z$ não acarreta necessariamente que $y \in z$. Um quase-conjunto define-se pelo predicado unário Q como aquilo que não é um *Urelemente*. O conceito de quase-cardinal, denotado pelo símbolo funcional unário qc, é um conceito primitivo. Intuitivamente, um quase-conjunto tem um cardinal (denominado seu quase-cardinal) mesmo que o quase-conjunto não tenha associado a ele um ordinal, uma vez que a teoria envolve quase-conjuntos cujos elementos são tão somente *m-átomos* absolutamente indiscerníveis. A ideia é que possamos dizer que temos certos quase-conjuntos em que é possível falar de uma certa quantidade de *m-átomos*, embora eles não possam ser nomeados ou ordenados. Podemos dizer que além de dois tipos de *Urelemente*, a teoria $\mathfrak{Q}$ também compreende três tipos fundamentais de "coleções", a saber: quase-conjuntos, conjuntos e quase-conjuntos puros. Visto que conjuntos correspondem a parte "clássica" da teoria, possuem apenas conjuntos como seus elementos constituintes. Vale notar que a teoria $\mathfrak{Q}$ é uma teoria por excelência expressa em sua forma axiomática, como exibimos na sequência. A figura 4.1 fornece uma ideia intuitiva do "universo dos quase-conjuntos".[12]

[12]Cf. French & Krause *op.cit.* p.285.

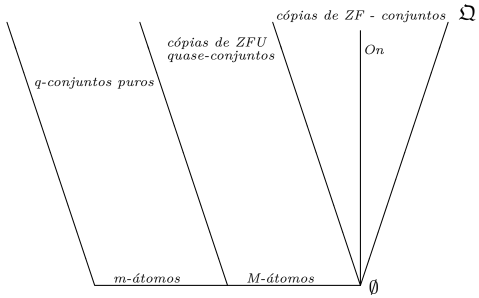


Figura 4.1: "universo dos quase-conjuntos"

Valem as seguintes definições e postulados:

Definição 4.1. (*quase-conjunto*) $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg(m(x) \vee M(x))$.

Em outros termos, quase-conjuntos (abreviamos *qsets*) não são nem *m-átomos* nem *M-átomos*, embora possam conter como elementos tais *Urelmente*.

Definição 4.2. (*quase-conjunto puro*)

$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow m(y)) \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \equiv z)$.

Ou seja, x é um quase conjunto-puro se possui apenas *m-átomos* como elementos, não necessariamente indiscerníveis entre si.

A teoria de quase-conjuntos também dispõe de 'entidades clássicas' que são ou conjuntos ou M-átomos, isto é, objetos que satisfazem os predicados M ou Z. São referidos como *Dinge*:

Definição 4.3. (*Dinge*) $D(x) \stackrel{\text{def}}{=} M(x) \vee Z(x)$.

A teoria também compreende quase-conjuntos cujos elementos são quase-conjuntos. Escrevemos:

Definição 4.4. $E(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x) \wedge (y \in x \rightarrow Q(y))$.

A identidade para 'objetos clássicos' é garantida por definição para aquelas entidades que não são m-átomos nos seguintes termos:

Definição 4.5. (*identidade extensional*) $x =_E y \stackrel{\text{def}}{=} (Q(x) \wedge Q(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \vee (M(x) \wedge M(y) \wedge \forall_Q z(x \in z \leftrightarrow y \in z))$

As propriedades da identidade clássica se mantêm para M-átomos e 'conjuntos', isto é, para variáveis a que se aplicam respectivamente os predicados M e Z. É importante destacar que a relação de identidade, como apresentada acima, não está definida para m-átomos, que apesar disso podem ser indistinguíveis.

Axioma 4.1.: (*indiscernibilidade*)

(a) $\forall x(x \equiv x)$

(b) $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$

(c) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$

Os enunciados do postulado 4.1 sustentam que $\equiv$ tem as propriedades de uma relação de equivalência, o que é necessário a uma teoria de indiscerníveis.

Axioma 4.2. $\forall x \forall y (x =_E y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y)))$,

onde $A(x)$ é uma fórmula com x livre e $A(y)$ resulta dela quando substituímos algumas ocorrências livres de x por y e y é livre para x em A.

Teorema 4.1.: Se $D(x)$ e $x = y$, então $x \equiv y$.

Prova. *Seja por hipótese que $x = y$. Com isso $x = y \rightarrow (x \equiv x \rightarrow x \equiv y)$ (axioma 4.2.). Pelo axioma 4.1 (a) $x \equiv x$ infere-se do cálculo proposicional $x = y \rightarrow x \equiv y$.* $\square$

Axioma 4.3. $\forall x (\neg(m(x) \wedge M(x)))$.

Por outras palavra, esse axioma afirma que não há entidades que são ao mesmo tempo *m-átomos* e *M-átomos.*

Axioma 4.4. $\forall x \forall y (x \in y \rightarrow Q(y))$.

Isto é, átomos são vazios.

Axioma 4.5. $\forall x (Z(x) \rightarrow Q(x))$.

Esse axioma afirma que conjuntos são quase-conjuntos. O teorema que segue garante a extensionalidade para conjuntos, ou seja, vale em $\mathfrak{Q}$ o postulado da extensionalidade usual encontrada em ZFC.

Teorema 4.2.: $\forall_Z x \forall_Z y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x =_E y)$.

Prova. *Da definição 4.5 associada ao postulado 4.5.* $\square$

Teorema 4.3.: Se $Q(x)$ ou $M(x)$, então $x =_E x$.

Prova. *Se $Q(x)$, desde que $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x)$, então $x =_E x$ pela definição de identidade extensional. Se $M(x)$, então para todo quase-conjunto z, temos $x \in z \leftrightarrow x \in z$. Logo, $x =_E x$.* $\square$

Axioma 4.6. $\forall_Q x(\forall y(y \in x \rightarrow D(y)) \leftrightarrow Z(x))$.

O axioma 4.6 afirma que se olharmos para "dentro" de um quase-conjunto e encontrarmos apenas entidades "clássicas", isto é, *Dinge* (o que implica que os elementos dessas entidades também são coisas clássicas), então o quase-conjunto é um conjunto.

O axioma seguinte governa a indiscernibilidade para *átomos* (*m-átomos* e *M-átomos*) e *conjuntos.*

Axioma 4.7.:

(a) $\forall x \forall y(m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y))$.

(b) $\forall x \forall y(x \equiv y \wedge M(x) \rightarrow M(y))$.

(c) $\forall x \forall y(x \equiv y \wedge Z(x) \rightarrow Z(y))$.

Teorema 4.4.: Se $Q(x)$ e $x \equiv y$, então $Q(y)$.

Prova. *Vamos supor por hipótese* $\neg Q(y)$*. Então pela definição 4.1 ou* $m(y)$ *ou* $M(y)$*. Seja* $m(y)$*, então pelo axioma 4.1.(a) temos que* $x \equiv y$ *e, portanto,* $m(x)$ *o que contradiz a asserção* $Q(x)$*. Seja* $M(x)$*, por 4.1. (b)* $x \equiv y$ *e, consequentemente,* $M(x)$ *o que contradiz a proposição* $Q(x)$*. Logo,* $Q(y)$*.* $\square$

Axioma 4.8. (*quase-conjunto vazio*) $\exists_Q x \forall y(\neg(y \in x))$.

Teorema 4.5.: O quase-conjunto vazio é um conjunto.

Prova. *Seja* $x \equiv \emptyset$*. Supondo* $y \in x$ *é falso pelo axioma 4.8, então o antecedente de* $\forall y(y \in x \rightarrow D(x))$ *é verdadeiro, assim* $Z(\emptyset)$ *pelo axioma 4.5.* $\square$

Axioma 4.9. $\forall_D x \forall_D y(x \equiv y \rightarrow x = y)$

Axioma 4.10. (*Par fraco*). $\forall x \forall y \exists_Q z \forall t(t \in z \leftrightarrow t \equiv x \vee t \equiv y)$.

Ou seja, dados dois objetos x e y podemos formar o par fraco de x e y, denotamos o par-fraco por $[[x, y]]_z$, com o índice z indicando que o par foi "separado" do quase-conjunto z que contém x e y como elementos (para quaisquer x e y). Se x e y forem "clássicos" denotamos o par de forma usual, isto é, $\{x, y\}$ e o índice z torna-se desnecessário. De forma intuitiva, o par fraco $[[x, y]]_z$ é o quase-conjunto cujos elementos são os indistinguíveis de x ou de y que pertencem a z.[13]

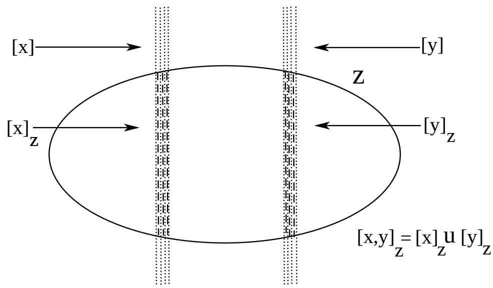


Figura 4.2: O quase-conjunto $[x,y]_z$ não possui necessariamente dois elementos, isto é, pode ter $qc([x,y]_z) \geq 2$.

Axioma 4.11. (*Axioma esquema de separação*). Ao considerarmos as restrições sintáticas habituais na fórmula $P(t)$, isto é, $P(t)$ sendo uma fórmula bem formada, em que t é livre e na qual y não ocorre livre, tem o seguinte esquema de axiomas:

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in x \land P(t)).$$

Escrevemos $[t \in x : P(t)]$.

Introduzimos os correspondentes aos usuais conceitos de união, intersecção, par e potência para quase-conjuntos que são muito similares ao caso clássico.

[13]Nesse caso o quase-cardinal de z pode ser maior que 2.

Axioma 4.12. (*união*)

$$\forall_Q x(E(x) \to \exists_Q y(\forall z(z \in y) \leftrightarrow \exists t(z \in t \wedge t \in x))).$$

Definição 4.6. (*subqset*) $x \subseteq y \overset{\text{def}}{=} \forall z(z \in x \to z \in y)$.

A partir da definição de *subsqet* (quase-subconjunto) postulamos o quase-conjunto potência.

Axioma 4.13. (*Quase-conjunto potência*)

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t(t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$$

Denotamos o quase-conjunto potência por $\wp(x)$.

Definição 4.7. (*par ordenado fraco*) $\langle x, y \rangle_z \overset{\text{def}}{=} [[x]_z, [x, y]_z]_{\wp(\wp(z))}$.

A propriedade fundamental dos pares ordenados $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \leftrightarrow x = u \ \wedge \ y = v$ não pode se quer ser enunciada na teoria $\mathfrak{Q}$ quando temos m-átomos envolvidos.

Definição 4.8. (*unitário fraco*) $[[x]]_z \overset{\text{def}}{=} \langle x, x \rangle_z$.

O unitário fraco de x são todos os objetos indistinguíveis de x, portanto, sua cardinalidade pode ser maior que 1. A partir dos conceitos de unitário fraco e pares de elementos de um quase-conjunto z de m-átomos estabelecemos o conceito de classe de equivalência módulo $\equiv$, isto é, o quase-conjunto quociente por indistinguibilidade em z definido pelo quase-conjunto $[[x]_{\equiv} : x \in z]$, cujo elemento é um unitário fraco relativo a z (o quase-conjunto de todos os indistinguíveis de x pertencentes a z).

Definição 4.9. (*produto cartesiano*)

$$x \times y \stackrel{\text{def}}{=} [\langle x, y\rangle_{u\cup v} \in \wp(\wp(u \cup v)) : x \in u \wedge y \in v]$$

Axioma 4.14. (*Infinito*) $\exists x(\emptyset \in x \wedge y(y \in x \to y \cup [y]_x \in x))$.

Axioma 4.15. (*Regularidade*)

$$\forall_Z x(x \neq \emptyset \to \exists y \forall z(z \in x \to \neg(z \in y)))$$

Quase-relações e quase-funções

As noções de relação e função das teorias usuais de conjuntos são generalizadas na teoria $\mathfrak{Q}$. É importante deixar claro que relações de ordem não se aplicam para certos objetos de $\mathfrak{Q}$. Por exemplo, uma relação R de ordem parcial envolve uma condição de anti-simetria, ou seja, se xRy e yRx, então $x = y$. Mas dado que uma relação de identidade extensional não diz respeito à *m-átomos*, não faz sentido uma tal relação em quase-conjuntos que contenham *m-átomos*. O mesmo pode ser dito para outras formas de relação de ordem, como ordem parcial estrita e ordem total.

Definição 4.10. (*quase-relação*): Uma quase-relação entre dois quase-conjuntos x e y é um subconjunto de $x \times y$. Isto é, r é uma relação entre x e y se e só se $Q(x)$ e $Q(y)$ e o seguinte predicado é satisfeito:

$$R(r) \stackrel{\text{def}}{=} Q(r) \wedge \forall z(z \in r \rightarrow \exists u \exists v(u \in x \wedge v \in y \wedge z = \langle u, v \rangle))$$

Definição 4.11. (*quase-função*) uma quase-função de um quase-conjunto x em um quase-conjunto y é uma quase-relação entre x e y tal que se $\langle w_1, w_2 \rangle \in f$, $\langle v_1, v_2 \rangle \in f$ e $w_1 \equiv v_1$, então $w_2 \equiv v_2$. Escrevemos $f : x \rightarrow y$.

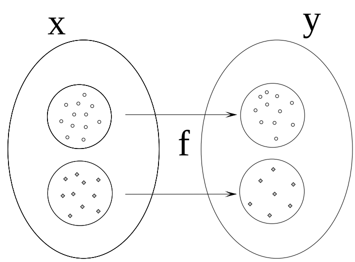


Figura 4.3: uma quase-função f com domínio no quase-conjunto x e codomínio no quase-conjunto y. f associa indiscerníveis do domínio a indiscerníveis do codomínio e, por vezes, não distingue argumentos de valores.

Informalmente, uma quase-função é uma quase-relação que leva indiscerníveis do domínio x da quase-função a indiscerníveis do codomínio y. Como os argumentos de uma quase-função podem não ser discerníveis dos valores associados podemos escrever $f(u) \equiv v$ para $u \in \mathbb{D}(f)$ (domínio da quase-função) e

$v \in \mathbb{C}(f)$ (codomínio da quase-função). Além disso, se para $u' \in x$ com $u' \equiv u$, então temos que $f(u) \equiv f(u')$. Se não temos *m-átomos* envolvidos, a indiscernibilidade da definição equivale à identidade extensional, e a definição de quase-função colapsa na definição padrão de função.

Definição 4.12. (*composição de quase-funções*) Dadas duas quase-funções $f : x \to y$ e $g : y \to z$. Diz-se que a quase-função $h : x \to z$ é a composição das quase-funções f e g se, e só se, $h(u) \equiv g(f(u))$. Escrevemos $g \circ f \equiv h$.

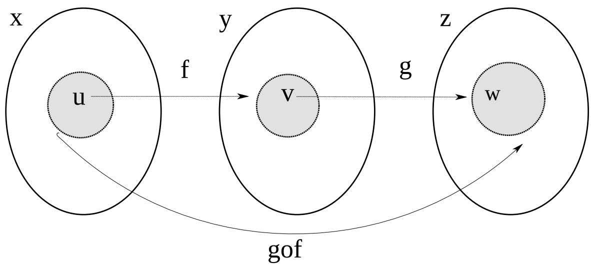


Figura 4.4: Composição de quase-funções. Formalmente temos, $\langle u, w \rangle \in g \circ f \leftrightarrow \exists v \in y$ tal que $\langle u, v \rangle \in f$ e $\langle u, v \rangle f$ e $\langle v, w \rangle \in g$ sendo $u \equiv w$.

Em um diagrama de setas temos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Teorema 4.6.: A composição de quase-funções é associativa.

Prova. *Basta constatar que* $h \circ (g \circ f)$ *e* $(h \circ g) \circ f$ *são quase-funções de* x *em* z *e tais que, para todo* $u \in x$ *temos* $(h \circ (g \circ f)(u) \equiv h((g \circ f)) \equiv h(g(f(u))) \equiv (h \circ g)(f(u)) \equiv ((h \circ g) \circ f)(u)$ *Assim* $h \circ (g \circ f)$ *e* $(h \circ g) \circ f$ *são indiscerníveis.* $\square$

Definição 4.13. (*função quase-identidade*) Uma função quase-identidade é uma quase-função $f : x \to x$ tal que $f(u) \equiv u$.

É importante deixar claro que a função quase-identidade relaciona indiscerníveis de um mesmo quase-conjunto. Se temos nesse quase-conjunto apenas objetos "clássicos", então a noção quase-função colapsa na usual definição de função identidade. Designamos a função quase-identidade sobre um quase-conjunto x por iq_x. Se $f : x \to y$ é uma quase-função do quase-conjunto x para o quase-conjunto y, então $iq_x \circ f \equiv f$ e $f \circ iq_y \equiv f$.

Quase-funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas podem ser definidas sem dificuldades.[14]

[14]Em outras versões da teoria $\mathfrak{Q}$ as definições de quase-injeção, quase-

Definição 4.14. (*quase-injeção*) Uma quase-função $f : x \to y$ é uma quase-injeção se existe uma quase-função $g : y \to x$ tal que $g \circ f \equiv iq_x$.

Definição 4.15. (*quase-sobrejetiva*) Uma quase-função $f : x \to y$ diz-se quase-sobrejetiva se exite uma quase-função $g : y \to x$ tal que $f \circ g \equiv iq_y$.

Definição 4.16. (*quase-bijetiva*) Uma quase-função $f : x \to y$ é quase-bijetiva quando for quase-injetiva e quase-sobrejetiva. Em outros termos, se existe $g : y \to x$ tal que $f \circ g \equiv iq_y$ e $g \circ f \equiv iq_x$. Num diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet_x \arrow[loop left, "iq_x"] \arrow[rr, bend left, "f"] & & \bullet_y \arrow[ll, bend left, "g"] \arrow[loop right, "iq_y"]
\end{tikzcd}
$$

Dizemos que dois quase-conjuntos são *quase-bijuntos* se existir uma quase-bijeção entre eles.

Axiomas para quase-cardinais

Em $\mathfrak{Q}$ dispomos de quase-conjuntos puros e ocorre que os *m-átomos* de um quase-conjunto puro sejam todos indistinguíveis

sobrejeção utilizam o conceito de quase-cardinal, que evitamos nessa apresentação afim de tratar a teoria como uma categoria cujos objetos são quase-conjuntos e os morfismos são quase-funções como veremos no capítulo seguinte.

uns dos outros. Nesse caso, pode-se perguntar o que sustenta a ideia de que há mais de uma entidade em x? A resposta é obtida através dos axiomas para quase-cardinais. Utilizamos letras gregas α, β etc para denotar cardinais tais como definidos na contra parte clássica da teoria $\mathfrak{Q}$; $Cd(y)$ significa que y é um cardinal e $card(x)$ denota o cardinal de x, quando isso fizer sentido.

Axioma 4.16. (*quase-cardinalidade*)

$$\forall x \exists! y (Cd(y) \wedge y =_E qc(x) \wedge (Z(x) \to y =_E card(x))).$$

Ou seja, o quase-cardinal de um quase-conjunto é um cardinal (definido na contraparte "clássica" da teoria) e coincide com seu cardinal quando esse quase-conjunto é um conjunto.[15] Dado que o quase-conjunto vazio é um conjunto, segue de imediato que seu quase-cardinal é zero. Em símbolos, $qc(\emptyset) =_E 0$.

Axioma 4.17. (*quase-cardinal do quase-subconjunto*)

$$\forall_Q x (qc(x) =_E \alpha \to \forall \beta (\beta \leq \alpha \to \exists_Q y (y \subseteq x \wedge qc(y) =_E \beta))).$$

Axioma 4.18. $\forall_Q x \forall_Q y (y \subseteq x \to qc(y) \leq_E qc(x))$

Teorema 4.7.: Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$, então $qc(x) =_E qc(y)$.

Prova. *Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$, então pelo axioma 4.18 temos que $qc(x) \leq_E qc(y)$ e $qc(y) \leq_E qc(x)$. Portanto, desde que são*

[15] Lembrando que um conjunto em $\mathfrak{Q}$ é uma cópia de conjuntos de ZFU.

ambos cardinais (objetos clássicos), $qc(x) =_E qc(y)$. $\square$

Axioma 4.19. (*quase-cardinal de átomos*)

$$\forall x(\neg Q(x) \to qc(x) =_E 0)$$

No próximo axioma, $2^{qc(x)}$ denota (intuitivamente) a quantidade de quase-subconjuntos de x. Assim,

Axioma 4.20. (*cardinal do q-set potência*)

$$\forall_Q x(qc(\wp(x)) =_E 2^{qc(x)})$$

Como o quase-cardinal do quase-conjunto potência de x tem quase-cardinal $2^{qc(x)}$, então se $qc(x) =_E \alpha$, para todo quase-cardinal $\beta \leq_E \alpha$ existe um quase-subconjunto $y \subseteq x$ tal que $qc(y) =_E \beta$, de acordo com o axioma para o quase-cardinal de quase-subcon- juntos. Assim, se $qc(x) =_E \alpha \neq 0$, a axiomatização não proíbe a existência de α quase-subconjunto de x que pode ser considerado unitário.

Axioma 4.21. $\forall_Q x(x \neq \emptyset \to qc(x) \neq 0)$

Daqui em diante, sempre que falarmos no quase-cardinal de um quase-conjunto, assumimos que esse quase-cardinal exista. Enfim, o próximo axioma estabelece que para coleções disjuntas, o quase-cardinal da união é a soma de seus quase-cardinais. Formalmente,

Axioma 4.22.

$$\forall x \forall y(\forall z(z \notin x \vee z \notin y) \rightarrow qc(x \cup y) = qc(x) + qc(y))$$

Nosso próximo passo é apresentar o axioma de *extensionalidade fraca*, que generaliza a noção padrão de extensionalidade de ZFU. Intuitivamente falando esse axioma nos garante que quase-conjuntos com “a mesma quantidade” de elementos de um mesmo tipo são indistinguíveis. Para postularmos isso precisamos definir as noções de *similaridade* entre quase-conjuntos, denotada por Sm, e quase-similaridade, denotada por Qs.

Definição 4.17.:

(a) (*similaridade*) $Sm(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall z \forall w(z \in x \wedge w \in y \rightarrow z \equiv w)$;

(b) (*quase-similaridade*) $Qs(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} Sm(x,y) \wedge qc(x) =_E qc(y)$.

Grosso modo, quase-conjuntos similares são aqueles que têm elementos indistinguíveis de um mesmo tipo, e quase-similares são os quase-conjuntos que têm elementos de um mesmo tipo, tendo a mesma quantidade.

Axioma 4.23. (*Extensionalidade fraca* - EF)

$\forall_Q x \forall_Q y((\forall z(z \in x/_\equiv \rightarrow \exists w(w \in y/\equiv \wedge Qs(z,w)) \wedge \forall w(w \in y/_\equiv \rightarrow \exists z(z \in x/_\equiv \wedge Qs(w,z))))) \rightarrow x \equiv y)$

Intuitivamente esse axioma diz que aqueles quase-conjuntos que têm a mesma quantidade de elementos de mesmo tipo são indistinguíveis. Desse modo a noção de indistinguibilidade se estende aos quase-conjuntos, o que permite entre outras coisas tratar esse conceito de um ponto de vista de uma teoria de categorias.

Teorema 4.8.: Sejam x e y quase-conjuntos. Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$, então $x \equiv y$.

Prova. *Seja* $z \in x|_{\equiv}$. *Se* $t \in z$ *e uma vez que* $x \subseteq y$, *então* $t \in y$. *Se* $w \in y|_{\equiv}$, *se* $t \in w$, *então* $t \in x$ *para* $y \subseteq x$. *Isto garante que* $Sm(z, w)$. *Desde que* $x \subseteq y$ *segue-se que* $z \subseteq w$ *e, como* $y \subseteq x$, *também inferimos que* $w \subseteq z$. *A partir de* $z \subseteq w$ *e* $w \subseteq z$, *inferimos a partir do teorema 4.6 que* $qc(z) =_E qc(w)$. *logo* $Qs(z, w)$. *De forma análoga prova-se que para toda classe de equivalência em* $y|_{\equiv}$ *existe um classe* Qs *em* $x|_{\equiv}$ *e, portanto,* $y \subseteq x$. *Logo, por EF obtemos* $x \equiv y$. $\square$

Definição 4.18. (*unitário forte*) o unitário forte de x é um quase-conjunto x' que satisfaz a seguinte propriedade:

$$x' \subseteq [x] \wedge qc(x') =_E 1$$

Teorema 4.9.: Para todo x, existe um unitário forte de x.

Prova. *O quase-conjunto* $[[x]]$ *é balizado pela definição 4.8 e desde que* $x \in [[x]]$. *Além disso a relação* $\equiv$ *é reflexiva, podemos inferir que* $qc([x]) \geq_E 1$. *Posto que* $\forall_Q x(x \neq \emptyset \rightarrow qc(x) \neq 0)$ *(axioma 4.21). Pelo axioma 4.17 deduzimos que existe um subconjunto de* $[[x]]$ *que possui o quase-cardinal* 1. *Tomamos esse conjunto por* x'. $\square$

Teorema 4.10.: Existe um unitário forte de x.

Prova. *A demonstração segue como consequência imediata do axioma 4.23 de extensionalidade fraca já que eles possuem a mesma cardinalidade* 1 *e seus elementos são indistinguíveis por definição.* □

A exposição realizada aqui da teoria $\mathfrak{Q}$ foi basante sucinta, haja vista que não constitui foco desse trabalho uma discussão dessa teoria, mas tão somente uma apresentação sumária com vista ao desenvolvimento de uma abordagem distinta da perspectiva que podemos chamar de *quase-conjuntista* oferecida por esta teoria. Alguns teoremas demonstrados neste capítulo serão úteis ao entendimento da contra parte que denominamos quase-categorial que expomos no capítulo que segue imediatamente este.

4.3 A categoria dos quase-conjuntos

Um dos aspectos filosóficos mais proeminentes da teoria $\mathfrak{Q}$ é que ela permite o tratamento formal de uma metafísica de não-indivíduos, fornecendo nova luz às discussões sobre os fundamentos da física quântica. Nessa teoria a distinção entre indivíduos e não-indivíduos concerne ao fato da igualdade fazer sentido apenas para indivíduos e não para não-indivíduos. Não-indivíduos são essencialmente refratários à identidade.

É importante perguntar se os quase-conjuntos e quase-funções formam uma categoria ou algo semelhante (uma quase-categoria).

Mas que espécie de categoria é essa? Certamente $\mathfrak{Q}$ não satisfaz os usuais requisitos categoriais, haja vista que em categorias há uma relação de identidade para morfismos, o que não ocorre em todo caso com as quase-funções. Como interagem por morfismos seus objetos (os quase-conjuntos - supondo esses os objetos)? Assim, precisamos definir o que seria uma categoria (ou quase-categoria) que envolva desde o início a noção de indiscernibilidade tanto para objetos quanto para morfismos. Além disso, podemos perguntar como essa categoria dos quase-conjuntos interage com outras categorias mediante funtores, ou mesmo se essa categoria é um topos (ou um quase-topos), o que não pode receber uma abordagem adequada simplesmente verificando que os quase-conjuntos e quase-funções formam uma categoria. Certamente essas são questões relevantes a um tratamento de indiscerníveis via categorias que merecem ser exploradas. Como teremos a oportunidade de discutir nas considerações finais, uma abordagem categorial da matemática permite estabelecer o trânsito entre diferentes domínios da matemática. Podemos afirmar que a teoria de categorias confere maior poder de fogo à Matemática. Por outro lado, a teoria de quase-conjuntos coloca em xeque a necessidade de identidade para tratar de certos problemas, o que enseja uma perspectiva profundamente atípica no cenário da ciência. Nosso tratamento categorial da indiscernibilidade se coloca na fronteira entre dois projetos teóricos bastante distintos, um quase-conjuntista outro categorial.

Com alguns conceitos básicos da teoria de quase-conjuntos em mãos, podemos passar à teoria de quase-categorias, o âmago de nosso projeto teórico.

Capítulo 5

Um tratamento categorial da indiscernibilidade

> A collection, be it a set [. . .] or a quasiset [. . .], is a mathematical object of a certain kind. Any coherent account of some domain of mathematical objects, be they vector spaces, or groups, or sets, or quasi-sets, can be formulated in category theory.
>
> George Darby [39] p.104

Este capítulo concentra o que pretende ser a contribuição original deste trabalho. Nossa intenção é esboçar como certas noções quase-conjuntistas, tais como expostas no capítulo precedente, podem receber um tratamento via morfismos e composição de morfismos, isto é, podem ser equacionadas numa versão categorial e, assim, verificar que o conceito de indiscernibilidade também se manifesta por essa perspectiva dos objetos matemáticos, o que efetivamente pode constituir um modo alternativo de conceber a ideia de entidades destituídas de identidade. A relevância de uma descrição categorial da teoria dos quase-conjuntos, e do conceito de indiscernibilidade, é especialmente destacada por A. Volkov em [115] e, mais recentemente, discutida em pormenores por G. Darby [39].[1] Um tratamento categorial da indiscernibilidade certamente possui relevantes contribuições às discussões sobre objetos indiscerníveis.

Vale acentuar que não propomos uma abordagem mais fundamental que a quase-conjuntista, mas um ponto de vista alternativo, que sugere, como já vinhamos afirmando, uma visão não pautada em objetos, mas em interações e transformações entre objetos via morfismos. Em outros termos, de um ponto de vista das categorias, em certa acepção, a identidade ou indiscernibilidade dependem do modo como as entidades (objetos - conjuntos ou quase-conjuntos) interagem por morfismos (funções ou quase-funções). A relação fundamental não é a de pertinência, mas de composição de morfismos.

[1] Darby sustenta que uma condição alternativa e necessária à inteligibilidade da teoria $\mathfrak{Q}$ é a teoria de categorias, cuja linguagem permite falar dos quase-conjuntos sem referência aos seus constituintes internos. Cf. Darby *op.cit.* p.104.

5.1 Universos e quase-universos

Esboçamos nesta seção um tratamento categorial da indiscernibilidade via quase-universos. A finalidade é mostrar a possibilidade de alternativas para além daquela oferecida na seção seguinte. Evidentemente a discussão sobre a relação entre a teoria de categorias e a teoria de conjuntos (qualquer uma que se considere, mas aqui estaremos nos referindo a ZFC), tem sido motivo de debates. Isso se deve ao fato de que, de um certo ponto de vista, uma categoria pode ser vista como um conjunto, formada por um conjunto de objetos e por um conjunto de morfismos, com axiomas conhecidos. O problema é que, via de regra (com as categorias **Set**, **Grp**, **Top**, **Vec** e outras), essas coleções não cabem em ZFC, suposta consistente. Mesmo NBG apresenta dificuldades para fundamentar categorias.[2] Essas teorias de conjuntos são interessantes onde predomina o estudo de objetos matemáticos isolados. Para que se encontre um ambiente conjuntista para essas entidades, é preciso estender a teoria de conjuntos de modo que ela possa comportar coleções gigantescas e o trânsito entre essas coleções.

A teoria dos universos foi originalmente proposta por A. Grothendieck, e de forma independente por Sonner,[3] a fim de lidar com categorias gigantescas no escopo da teoria dos conjuntos.[4] (*universos de Sonner-Grothendieck*) Outro modo de lidar com categorias via universos foi divisada por Ehresmann a partir

[2]Cf. Đurić, M. *On classes and Universes.*
[3]Cf. Sonner [111] *On the Formal Definition of Categories.*
[4]Cf. da Costa [34] *O Conhecimento Científico.* p.78.

de um sistema sugerido por Dedecker (*universos de Ehresmann-Dedecker*).[5] Grosso modo, universos são modelos da teoria dos conjuntos, por exemplo, para os axiomas de ZFC. A ideia simplificada é que todo conjunto pertence a um universo e todo universo é um conjunto, o que permite obter uma hierarquia de universos. As categorias, como as de grupos, referem-se a todos os grupos de um dado universo; para manipulá-las, opera-se em outro universo ao qual o primeiro pertence.

No caso da teoria de quase-conjuntos ocorre algo semelhante. Uma quase-categoria é algo muito grande para poder ser considerada um quase-conjunto. Mostramos aqui de que modo essa teoria pode ser estendida postulando-se a existência de quase-universos. Trata-se sem dúvida de uma questão subsidiária ao que vimos fazendo, mas não poderíamos deixar de mostrar que, assim como no caso de conjuntos, há relações entre quase-conjuntos e quase-categorias. Lançamos mão do conceito de *quase-universo de Grothendieck*, em que acrescenta à teoria $\mathfrak{Q}$ um axioma para quase-universos, postulando a existência de universos arbitrariamente grandes. Este axioma é equivalente ao chamado axioma dos cardinais fortemente inacessíveis.[6] Vale notar que poderíamos ter adotado caminhos alternativos para fundamentar uma categoria de indiscerníveis, por exemplo, fundamentando a matemática de indiscerníveis diretamente sobre noções categoriais, algo análogo ao que propuseram S. MacLane e Lawvere.[7]

[5]Cf. da Costa [36] *Un Nouveaux Système Formel Suggéré par Dedecker.*
[6]Cf. da Costa [34] *O Conhecimento Científico.* p.78.
[7]Cf. Hatcher *op.cit.* p. 237ss.

Quase-universos de Grothendieck[8]

Definição 5.1. Um quase-universo de Grothendieck (**qUG**) é um quase-conjunto não vazio $\mathfrak{A}$ com as seguintes propriedades:

G1. Se $x \in \mathfrak{A}$, então $x \subseteq \mathfrak{A}$.

G2. Se $x \in \mathfrak{A}$, então $\wp(x) \in \mathfrak{A}$.

G3. Se $(x_i)_{i \in I}$ é uma família de quase-conjuntos tal que $x_i \in \mathfrak{A}$, para todo $i \in I$, sendo I um quase-conjunto "clássico", isto é, um quase-conjunto que satisfaz o predicado Z, então $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathfrak{A}$.

Não desenvolvemos neste momento os detalhes de uma teoria de quase-universos de Grothendieck. Deixamos os detalhes para futuras investigações, tratando nesse espaço apenas do que for necessário para a exposição de uma teoria de quase-categorias no escopo de quase-universos.

[8]Existem alternativas para a extensão da teoria $\mathfrak{Q}$ para *quase-universos*. Por exemplo, a teoria $\mathfrak{Q}$ pode ser estendida usando o conceito já citado de universos de *Ehresmann-Dedecker* (Cf. Apêndice B2). Uma definição de *quase-universo de Ehresmann-Dedecker* foi feita por Krause em [67]. Embora esses universos envolvam *Urelemente*, que os tornam uma opção natural para a extensão da teoria $\mathfrak{Q}$, uma abordagem via teoria de categorias normalmente não tem necessidade do uso de *Urelemente* como se faz na teoria de quase-conjuntos. Nossa proposta, como veremos, define os *Urelemente* da teoria $\mathfrak{Q}$ (*m-átomos* e *M-átomos*) como casos particulares de morfismo. De mais a mais, dada a percepção "externa" das categorias não temos necessidade de universos que envolvam *Urelemente*.

Teorema 5.1*.: Se $\mathfrak{A}$ é um quase-universo de Grothendieck, então:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{A}$;

(b) Se $x \in \mathfrak{A}$, então $[[x]]_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$.[9];

(c) Se $x, y \in \mathfrak{A}$, então o par fraco $[[x, y]]_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$;

(d) Se $x, y \in \mathfrak{A}$, então o par ordenado fraco $\langle x, y \rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ e $x \times y \in \mathfrak{A}$.

Prova. *Sendo $\mathfrak{A}$ um quase-universo de Grothendieck. Então:*

(a) Seja $x \in \mathfrak{A}$. Por G2, $\wp(x) \in \mathfrak{A}$. Por G1, $\wp(x) \subseteq \mathfrak{A}$. Como $\emptyset \in \wp(x)$, segue que $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) Seja $x \in \mathfrak{A}$. Por G2, $\wp(\wp(x)) \in \mathfrak{A}$. Por $\wp(\wp(x)) \in \mathfrak{A}$. Como $[[x]] \in \wp(\wp(x))$, então $[[x]] \in \mathfrak{A}$.

(c) Sejam $x, y \in \mathfrak{A}$. Por (b), $[[x]] \in \mathfrak{A}$ e $[[y]] \in \mathfrak{A}$, ou seja, os indiscerníveis de x e de y pertencem a $\mathfrak{A}$. Dado que $I =_E \{0, 1\}$ pertence a $\mathfrak{A}$ (sendo I clássico, i.e., um quase-conjunto que satisfaz o predicado Z), pois $I =_E \wp(\wp(\emptyset))$. Seja $x_0 \equiv [[x]]$ e $x_1 \equiv [[y]]$. Por G3 $x_0 \cup x_1 \in \mathfrak{A}$ e portanto $[[x, y]]_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$.

(d) Basta notar que $\langle x, y \rangle_{\mathfrak{A}} \stackrel{def}{=} [[x]_{\mathfrak{A}}, [x, y]_{\mathfrak{A}}]_{\wp(\wp(\mathfrak{A}))}$. $\square$

[9] Em (b), $[[x]]$ representa o quase-conjunto de todos os indistinguíveis de x que pertencem ao quase-universo. Esse quase-conjunto é chamado de unitário fraco de x.

Axioma AqUG: Todo quase-conjunto é elemento de um **qUG**.[10]

Definição 5.2. $\mathfrak{Q}* \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{Q} + AqUG.$

Ou seja, $\mathfrak{Q}*$ é a teoria obtida de $\mathfrak{Q}$ com adição do axioma **AqUG**. Com $\mathfrak{Q}*$ podemos falar de certas coleções gigantescas no escopo da teoria de quase-conjuntos fortalecida, em particular podemos fazer referência a totalidade dos quase-conjuntos e das quase-funções.

Definição 5.3. Seja $\mathfrak{A}$ um quase-universo de Grothendieck. Um $\mathfrak{A}$-*qset* é um elemento de $\mathfrak{A}$. Uma $\mathfrak{A}$-*qclasse* é um subconjunto de $\mathfrak{A}$. Uma $\mathfrak{A}$-*qclasse própria* é uma $\mathfrak{A}$- *qclasse* que não é um $\mathfrak{A}$-*qset*.

Deve-se considerar que não dispomos de um quase-universo de Grothendieck que contenha todos os universos como elementos.[11]

[10] É comum quando temos a preocupação com uma fundamentação conjuntista à usual teoria de categorias adicionarmos à teoria ZFC o seguinte requisito: para todo o conjunto x existe um universo de Grothendieck com $x \in \mathfrak{A}$. Assim, para cada universo $\mathfrak{A}$ existe um universo $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$. Com isso, para cada universo $\mathfrak{A}$ de Grothendieck existe um universo $\mathfrak{A}'$ de Grothendieck e, portanto, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$. Essa configuração garante a existência de uma *hierarquia* de universos $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{A}_1 \in \ldots \mathfrak{A}_n \in \mathfrak{A}_{n+1} \in \ldots$ que é cumulativa no sentido de que $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1} \subseteq \ldots$ também é válido.

[11] Cf. Apêndice B.

A quase-categoria $\mathfrak{Q}^*$-Cat

Os quase-universos de Grothendieck, como definimos, nos fornecem um alicerce "quase-conjuntista" a partir da qual podemos definir uma categoria de indiscerníveis. É o que podemos chamar "palco conjuntista" no qual edificamos uma versão categorial para o conceito de indiscernibilidade. Vamos, portanto, fazer isso utilizando a linguagem da teoria de quase-conjuntos. Desse modo, por uma *quase-categoria*, que denotamos aqui $\mathfrak{Q}^*$-Cat, entendemos o seguinte: (i) uma $\mathfrak{A}$-*qclasse* $\mathcal{O}$ de elementos chamados de quase-objetos (ou simplesmente objetos) de $\mathrm{Cq}_{\mathfrak{A}}$. Denotamos os quase-objetos $A, B, C, \ldots$; (ii) uma $\mathfrak{A}$-*qclasse* $\mathcal{H}$ de elementos chamados quase-setas (ou simplesmente setas). Denotamos quase-setas por $f, g, h, \ldots$

Antes de apresentarmos as condições que regem nossa *quase-categoria*, listamos algumas observações que baseiam as intuições por trás dos quase-objetos e quase-setas: (i) os quase-objetos correspondem aos quase conjuntos da teoria $\mathfrak{Q}$; (ii) as quase-setas correspondem as quase-funções de $\mathfrak{Q}$; (iii) tanto quase-objetos quanto quase-setas podem ser indiscerníveis de outros quase-objetos e quase-setas. Como estamos trabalhando num quase-universo de Grothendieck, que é uma extensão da teoria $\mathfrak{Q}$, vale em $\mathfrak{Q}^*$-Cat uma relação binária de indiscernibilidade $\equiv$. Assim, se A e B são quase-objetos indiscerníveis, escrevemos $A \equiv B$ e se f e g são quase-setas indiscerníveis, escrevemos $f \equiv g$. (v) Existem certos quase-objetos e quase-setas, chamados *Z-objetos* e *Z-setas*, para os quais vale a noção usual de identidade tal como definida na teoria $\mathfrak{Q}$ (Na teoria de quase-conjuntos os *Z-objetos* são conjuntos e as *Z-setas* são funções). *Z-objetos* denotamos por $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \ldots$ e *Z-setas* designamos por $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \ldots$ Com isso, se α e β (aqui metavariáveis) são *Z-entidades* (quase-objetos ou quase-setas), então $\alpha =_E \beta$ implica $\alpha \equiv \beta$. A recíproca não vale em geral isto é, podemos ter $\alpha \equiv \beta$ com $\alpha \neq \beta$. No que segue exibimos as condições que se impõem à *quase-categoria* $\mathfrak{Q}^*$-Cat:

Q1. A cada quase-seta f associamos dois quase-objetos A e B chamados o domínio de f e o codomínio de f, denotados respectivamente por $\mathbb{D}(f)$ e $\mathbb{C}(f)$. Se f é uma quase-seta com domínio A e codomínio B, dizemos que f é uma quase-seta de A para B (ou uma transformação sobre A que gera B). Escrevemos neste caso

$$f : A \to B.$$

É importante notar que se $A \xrightarrow{f} B$ e $A \xrightarrow{g} B$ representam quase-setas indiscerníveis, então escrever $f \equiv g$ (Para $\hat{f}$ e $\hat{g}$ *Z-setas* com $f \equiv g$, então $f = g$). Na realidade, em nossa *quase-categoria*, raramente, exceto no caso de *Z-entidades*, falamos de quase-objetos ou quase-setas particulares, mas em "coleções" de entidades, onde os elementos dessas "coleções" são indiscerníveis (no caso de *Z-entidades* as coleções correspondentes têm apenas um elemento e, portanto, podem ser identificadas com esses elementos).

Q2. Para quaisquer quase-setas $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tais que $\mathbb{C}(f) \equiv \mathbb{D}(g)$ associamos um quase-seta $g \circ f : A \to C$ chamada a *composição* de f e g de tal forma que vale a associatividade, isto é, se h é um quase-seta tal que $\mathbb{D}(h) \equiv \mathbb{D}(f)$ e $\mathbb{C}(h) \equiv \mathbb{C}(g)$, então $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$.

Q3. Para todo quase-objeto A existe uma quase-seta, chamada *seta quase-identidade* de A (para um quase-objeto A, denotamos a a seta quase-identidade de A por iq_A), tal que $\mathbb{D}(iq_A) \equiv A \equiv \mathbb{C}(iq_A)$ e para qualquer quase-seta $f : B \to C$ temos $f \circ iq_B \equiv f$ e $iq_C \circ f \equiv f$.

Do modo como esboçamos um tratamento categorial da indiscernibilidade acima, pode-se ampliar essa teoria definindo outros conceitos categorias como os de *objeto inicial*, *objeto terminal*, *produto* e *coproduto* etc. Nossa estratégia no que segue será a seguinte: inspirados na abordagem de Hatcher [57] para a teoria usual de categorias, que por sua vez segue Lawvere [74],[12] erigimos uma teoria axiomática de primeira ordem *sem* identidade que captura a noção de indiscernibilidade mediante morfismos e composição de morfismos independentemente de considerações "quase-conjuntistas", isto é, sem recurso a definição de quase-universos de Grothendieck. É uma abordagem categorial para a indistinguibilidade em que desenvolvemos alguns conceitos tipicamente categoriais que têm contraparte "quase-conjuntista".

[12]Diferentemente de Hatcher e Lawvere que definem objeto como uma espécie de morfismo estabelecemos a ideia de certos objetos como primitivos.

5.2 A categoria dos indiscerníveis

Nesta seção introduzimos uma teoria de primeira ordem que denominamos *teoria das quase-categorias* ou $\mathfrak{Q}$-**Cat**. A linguagem de $\mathfrak{Q}$-**Cat** tem como símbolos lógicos aqueles de um sistema completo para o cálculo de predicados de primeira ordem *sem* identidade. Os símbolos específicos dessa linguagem são apresentados como segue:

$$\pounds_{qcat} = \{\mathcal{O}, P, Z, \hbar, \Bbbk, \mathbb{D}, \mathbb{C}, \equiv\}$$

A intuição que subjaz a cada um destes símbolos é dada pelo que segue:

1. $\mathcal{O}$ é um predicado unário. $\mathcal{O}(x)$ diz que x é um *quase-objeto* ou simplesmente um *objeto*;

2. $\hbar$ é um predicado unário, tal que $\hbar(x)$ significa que x é um *quase-morfismo*, que chamaremos daqui para frente simplesmente de morfismo;

3. P e Z são símbolos de predicado unários que se aplicam tanto a objetos quanto a morfismos. $P(x)$ diz intuitivamente que x é um *P-objeto* ou um *P-morfismo.* Na interpretação pretendida, diremos que x é um termo destituído de identidade (um *não-indivíduo*). $Z(x)$ afirma que x é um *Z-objeto* ou um *Z-morfismo.* Pretende-se, neste caso, que *Z-entidades* correspondam intuitivamente à contraparte clássica e usual da teoria de categorias (Cf. Capítulo 2);

4. $\Bbbk$ é um predicado ternário e $\Bbbk(x, y, z)$ deve ser lido "z é a composição de x e y, sendo x, y e z morfismos;

5. $\equiv$ é um símbolo de predicado binário de tal sorte que $x \equiv y$ significa que x é indistinguível (ou indiscernível) de y. Em $\mathfrak{Q}$-Cat certos objetos e morfismos são indiscerníveis sem, no entanto, serem o mesmo objeto ou morfismo;

6. $\mathbb{D}$ e $\mathbb{C}$ são símbolos funcionais unários, com $\mathbb{D}(x)$ e $\mathbb{C}(x)$ significando respectivamente o domínio de x e o codomínio de x.

Usamos $x, y, z \ldots$ como metavariáveis para variáveis individuais. Além disso, utilizamos $(\prod)\alpha$ para indicar que todas as variáveis da fórmula α estão quantificadas universalmente. Por exemplo,

$$(\prod)(\Bbbk(x, y, z) \Rightarrow \mathbb{D}(z) \equiv \mathbb{D}(x) \wedge \mathbb{C}(z) \equiv \mathbb{C}(y))$$

abrevia

$$\forall x \forall y \forall z(\Bbbk(x, y, z) \Rightarrow \mathbb{D}(z) \equiv \mathbb{D}(x) \wedge \mathbb{C}(z) \equiv \mathbb{C}(y)).$$

Axiomas e definições de $\mathfrak{Q}$-cat

Axioma 5.1. $(\prod)(x \equiv x)$

Axioma 5.2. $(\prod)(x \equiv y \Rightarrow y \equiv x)$

Axioma 5.3. $(\prod)(x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z)$

Esses três primeiros axiomas dizem que $\equiv$ tem as propriedades de uma relação de equivalência. O que estamos dizendo é que a indiscernibilidade, do mesmo modo que a identidade em conjuntos, como ZFC, não é a rigor uma relação de equivalência, mas satisfaz as propriedades de uma tal relação. O axioma que segue afirma que a todo morfismo z estão relacionados quase-objetos $\mathbb{D}(z)$ e $\mathbb{C}(z)$ chamados, respectivamente, o domínio e o codomínio de z.

Axioma 5.4.

$$\forall z(\hbar(z) \Rightarrow \exists x \exists y(\mathcal{O}(x) \wedge \mathcal{O}(y) \wedge \mathbb{D}(z) \equiv x \wedge \mathbb{C}(z) \equiv y))$$

Definição 5.4. $x \xrightarrow{z} y \stackrel{\text{def}}{=} \hbar(z) \wedge \mathbb{D}(z) \equiv x \wedge \mathbb{C}(z) \equiv y$.[13]

Dizemos que z é uma "transformação" sobre x que produz y, ou simplesmente que z é um morfismo de x para y. É importante deixar claro que x e y não denotam objetos específicos, nem z um morfismo específico, mas "coleções" de objetos indiscerníveis e morfismos indiscerníveis.

Axioma 5.5. Para x, y e z quase-morfismos:

$$\forall x \forall y(\exists z(\mathbb{k}(x, y, z) \Leftrightarrow \mathbb{C}(x) \equiv \mathbb{D}(y))).$$

O axioma precedente fornece uma condição necessária e suficiente para a existência da composição de morfismos.

[13] $\stackrel{\text{def}}{=}$ é um símbolo metalinguístico.

Axioma 5.6. Sendo x, y, z e x', y', z' morfismos:

$$(\prod)(\Bbbk(x,y,z) \wedge \Bbbk(x',y',z') \wedge x \equiv x' \wedge y \equiv y' \Rightarrow z \equiv z')$$

Esse axioma expressa a "unicidade" da composição de morfismos indiscerníveis. Informalmente, se os domínios e codomínios são indiscerníveis, então as composições também o são.

Axioma 5.7. Para x, y, z morfismos:

$$(\prod)(\Bbbk(x,y,z) \Rightarrow \mathbb{D}(z) \equiv \mathbb{D}(x) \wedge \mathbb{C}(z) \equiv \mathbb{C}(y)),$$

ou seja, se z é a composição de x como y, então o domínio de z é indiscernível do domínio de x e o codomínio de z é indiscernível do codomínio de y.

Para simplificar a escrita vamos denotar a composição de morfismo de acordo com a seguinte definição.

Definição 5.5. $z \equiv y \circ x \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk(x,y,z)$.

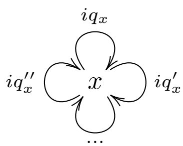
Definição 5.6. (*quase-identidade*)

$iq_x \stackrel{\text{def}}{=} \hbar(iq_x) \wedge \mathbb{D}(iq_x) \equiv x \equiv \mathbb{C}(iq_x) \wedge \forall z(x \xrightarrow{z} y \Rightarrow z \circ iq_x \equiv z \wedge iq_y \circ z \equiv z)$.

Teorema 5.1.: O morfismo quase-identidade é único, a menos de indistinguibilidade.

Prova. *Seja por hipótese um quase-objeto* x *com* $x \overset{iq_x}{\rightarrow} x$ *e* $x \overset{iq'_x}{\rightarrow} x$. *Fazendo a composição obtemos* $iq'_x \circ iq_x \equiv iq'_x$ *e* $iq_x \circ iq'_x \equiv iq_x$. *Assim* $iq_x \equiv iq'_x$. □

Podemos ter mais de um morfismo quase-identidade para um quase-objeto. Intuitivamente denotamos essa ideia pelo seguinte diagrama:



Axioma 5.8. Para x, y, z morfismos:

$$(\prod)(x \circ (y \circ z) \equiv (x \circ y) \circ z).$$

Ou seja, a composição de quase-morfismos é associativa.

Axioma 5.9. $\forall x(\neg(Z(x) \wedge P(x)))$

Ou seja, nenhuma *Z-entidade* é uma *P-entidade* e vice-versa.

A teoria de quase-categoria $\mathfrak{Q}$**-Cat** não dispõe de uma relação de identidade na linguagem. Introduzimos essa relação por definição estabelecendo que ela se aplica apenas a *Z-objetos* e *Z-morfimos* do seguinte modo:

Definição 5.7. (*identidade*) $x = y \stackrel{\text{def}}{=} x \equiv y \wedge Z(x) \wedge Z(y)$.

Axioma 5.10. $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow \alpha(x) \Rightarrow \alpha(y))$, onde $\alpha(x)$ é uma fórmula com x livre e $\alpha(y)$ resulta da substituição de algumas ocorrências de x por y e y é livre para x em α.

Evidentemente que o axioma 5.10 refere-se apenas a *Z-objetos* e *Z-morfismos*, isto é, não se aplicam em todos os casos. Com esse axioma e a reflexividade da identidade podemos garantir que a relação de identidade definida é simétrica e transitiva.[14]

Teorema 5.2.: Se x é um *Z-objeto* ou um *Z-morfismo*, então $x = x$.

Prova. *Do axioma 5.1 temos que* $x \equiv x$ *e da definição de identidade obtemos* $x = x$. $\square$

O próximo axioma estabelece uma condição necessária e suficiente para a indiscernibilidade de morfismos:

Axioma 5.11. $\forall x \forall y (\hbar(x) \wedge \hbar(y) \wedge x \equiv y \Leftrightarrow (\mathbb{D}(x) \equiv \mathbb{D}(y) \wedge \mathbb{C}(x) \equiv \mathbb{C}(y)))$.

Vamos denotar doravante quase-objetos por letras latinas maiúsculas e quase-morfismos por letras minúsculas do mesmo alfabeto sempre que conveniente.

[14] Cf. Mendelson [93]. Cap.2.

Os axiomas acima inauguram uma perspectiva que podemos chamar quase-categorial da indiscernibilidade. A partir desses postulados, introduzimos os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo, além de outras noções próprias de uma perspectiva categorial tais como definidas no capítulo 2. Os possíveis modelos dessa axiomática podem ser chamados de *quase-categorias.*[15] Assim, são exemplos de quase-categorias **Set** a quase-categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções entre conjuntos e $\mathfrak{Q}$-**Set**, a quase-categoria cujos objetos são quase-conjuntos e os morfismos são as quase-funções entre quase-conjuntos.

Metateorema 5.1.: $\mathfrak{Q}$-**Set** é uma quase-categoria.

Prova.

Afim de provarmos que $\mathfrak{Q}$-**Set** *é uma quase-categoria precisamos verificar que os quase-conjuntos e as quase-funções satisfazem os postulados da teoria* $\mathfrak{Q}$-**Cat**. *Assumimos que os quase-conjuntos correspondem aos quase-objetos e as quase-funções correspondem aos quase-morfismos. Com isso, os três primeiros axiomas de* $\mathfrak{Q}$-**Cat** *são automaticamente satisfeitos pela teoria* $\mathfrak{Q}$ *que adota pelo axioma 4.1 (a), (b) e (c) uma relação de indistinguibilidade análoga a teoria* $\mathfrak{Q}$-**Cat** *que vale para quase-conjuntos e quase-funções. A definição 4.11 (definição de quase-função) da teoria dos quase-conjuntos verifica o axioma 5.4 da teoria*

[15]Vamos designar doravante quase-categorias por letras manuscritas $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ etc.

de quase-categorias, isto é, a cada quase-função f associamos quase-conjuntos x e y chamados respectivamente o domínio e codomínio da quase-função f de tal sorte que para $u \in \mathbb{D}(f)$ temos $f(u) \in \mathbb{C}(f)$. O axioma 5.5 de $\mathfrak{Q}$-**Cat** *também é atendido pela teria dos quase-conjuntos que adota a composição de quase-funções pela definição 4.12 (definição da composição de quase-funções). Além disso, dadas as quase-funções f e g, a composição $g \circ f$ só é possível em $\mathfrak{Q}$ se, e só se, $\mathbb{C}(f) \equiv \mathbb{D}(g)$, ou seja, dadas as quase-funções $f : x \to y$, $g : y \to z$ e $h : x \to z$ tais que $h \equiv g \circ f$ vale: para $u \in \mathbb{D}(f)$ temos $f(u) \in \mathbb{D}(g) \equiv y$. Logo, $\mathbb{C}(f) \equiv \mathbb{D}(g)$. Por outro lado, pela relação de indiscernibilidade $\mathbb{D}(g) \equiv \mathbb{D}(f)$. Afim de provar que o axioma 5.6 de* $\mathfrak{Q}$-**Cat** *é satisfeito pela teoria $\mathfrak{Q}$ devemos verificar que para quaisquer quase-funções se $h \equiv g \circ h$ e $h' \equiv g' \circ f'$ (com $f \equiv f'$ e $g \equiv g'$), então $h \equiv h'$. À vista disso basta constatar que $h \equiv g' \circ f'$ e $h' \equiv g \circ f$ e, portanto, $h \equiv h'$. A prova de que o axioma 5.7 das quase-categorias é validado pelas quase-funções é dada pelo seguinte: sejam as quase-funções $f : x \to y$ e $g : y \to z$ tais que $g \circ f \equiv h$. Portanto, para $u \in \mathbb{D}(h)$, temos $h(u) \in \mathbb{C}(h) \equiv \mathbb{C}(g)$, ou seja, $\mathbb{C}(h) \equiv \mathbb{C}(g)$. Sejam também $u \in \mathbb{D}(h)$ e $g(f(u)) \in \mathbb{C}(g) \equiv$ e, portanto, $f(u) \in \mathbb{D}(g) \equiv \mathbb{C}(f)$. Assim, $u \in \mathbb{D}(f)$. Por conseguinte $u \in \mathbb{D}(f)$ e $u \in \mathbb{D}(h)$. Logo, $\mathbb{D}(h) \equiv \mathbb{D}(f)$. O axioma 5.8 das quase-categorias anuncia o neutro da composição como o morfismo quase-identidade que corresponde na teoria $\mathfrak{Q}$ a função quase-identidade (definição 4.13). Essa quase-função satisfaz a noção de neutro da composição de quase-funções, isto é, para qualquer quase-função $f : x \to y$ vale: $iq_x \circ f \equiv f$ e $f \circ iq_x \equiv f$. Em outros termos, vale a regra $iq_x(f(u)) \equiv f(u)$ e $f(iq_x(u)) \equiv f$. A função quase-*

*identidade também satisfaz o axioma 5.8 das quase-categorias. Assim, a todo quase-conjunto x podemos associar uma função quase-identidade tal que $\mathbb{D}(iq_x) \equiv x \equiv \mathbb{C}(x)$, i.e., para $u \in x$ vale a regra $iq_x(u) \equiv u$. O axioma 5.9 de $\mathfrak{Q}$-**Cat** declara o análogo da associatividade usual que também comparece na teoria $\mathfrak{Q}$ (teorema 4.1. do capítulo anterior). O axioma 5.9 da teoria de quase-categorias encontra guarida na teoria dos quase-conjuntos, pois não ocorre em $\mathfrak{Q}$ de conjuntos clássicos (que satisfazem o predicado Z para o qual vale a noção usual de identidade) sejam quase-conjuntos puros, ou seja, quase-conjuntos que atendem o predicado P (pela definição 4.2.) e vice-versa. O axioma 5.9 de substituição também é válido em $\mathfrak{Q}$.* $\square$

Como corolário da demonstração anterior prova-se que **Set** é uma quase-categoria, haja vista que conjuntos e funções são respectivamente casos particulares de quase-conjuntos e quase-funções.[16] Além disso, se nos limitamos aos *Z-objetos* e *Z-morfismos* de nossa categoria de indiscerníveis, obtemos a noção usual de categorias, o que nos permite supor que categorias como **Grp**, **Top**, **Vec** etc também são quase-categorias restritas ao que designamos *Z-entidades* (sejam morfismo ou objetos).

Diagramas

Dada a utilidade dos diagramas comutativos no tratamento e exposição da teoria de categorias (ou mesmo quase-categorias), como já referido no capítulo 02, vamos doravante adotá-los tendo

[16] Cf. Axioma 4.5 e definição 4.11.

em mente os seguintes casos mais expressivos:

1. Afirmar que o seguinte triângulo comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "z"'] & B \arrow[d, "y"] \\ & C \end{tikzcd}$$

   é exatamente o mesmo que afirmar a seguinte fórmula $z \equiv y \circ x$

2. De forma semelhante afirmar que o quadrado que segue comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"'] & B \arrow[d, "y"] \\ D \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

   equivale a fórmula $y \circ x \equiv k \circ z$.

Definição 5.9. Uma *quase-subcategoria* $\mathscr{D}$ de uma determinada quase-categoria $\mathscr{C}$ é definida como aqueles morfismos e objetos de $\mathscr{C}$ (não necessariamente todos os objetos e morfismos de $\mathscr{C}$) que também formam uma quase-categoria.

Morfismos especiais

Definição 5.10. Um morfismo da forma $A \xrightarrow{x} B$ diz-se um *quase-monomorfismo* numa $\mathscr{C}$ quase-categoria sempre que a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"'] & A \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "x"'] & B \end{tikzcd}$$

implica $y \equiv z$. Denotamos um quase-monomorfismo por $A \overset{x}{\rightarrowtail} B$.

Definição 5.11. Um morfismo da forma $A \overset{x}{\to} B$ diz-se um *quase-epimorfismo* numa $\mathscr{C}$ quase-categoria quado o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & B \arrow[d, "y"] \\ B \arrow[r, "z"'] & C \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, se $y \circ x \equiv z \circ x$, então $y \equiv z$. Designamos um quase-epimorfismo por $A \overset{x}{\twoheadrightarrow} B$.

Definição 5.12. O *quase-produto* de dois *objetos* A e B é um objeto $A \times B$ associado a morfismos $A \times B \to A$ e $A \times B \to B$ tal que qualquer que seja o *objeto* C, existe um único morfismo

z (a menos de indiscernibilidade) que faz com que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "w"] \arrow[r, "k"'] & B
\end{tikzcd}$$

comute, isto é, $w \circ z \equiv x$ e $k \circ z \equiv y$.

Definição 5.13. O *quase-coproduto* de dois *objetos* A e B é um objeto $A + B$ associado a morfismos $A \to A + B$ e $B \to A + B$ tal que qualquer que seja o objeto C, existe um único morfismo z (a menos de indiscernibilidade) que faz com que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "x"] \arrow[r, "w"'] & A + B \arrow[u, "z"] & B \arrow[ul, "y"'] \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

comute, isto é, $z \circ w \equiv x$ e $z \circ k \equiv y$.

Definição 5.14. (*quase-isomorfismo*) Seja $A \stackrel{x}{\to} B$ um morfismo numa quase-categoria $\mathscr{C}$. Em $\mathscr{C}$, diz-se que x é um *quase-isomorfismo*, se existe ao menos um *$\mathscr{C}$-morfismo* $B \stackrel{x'}{\to} A$ (chamado morfismo *quase-inversível*) tal que $x \circ x' \equiv iq_B$ e $x' \circ x \equiv$

iq_A. Na linguagem dos diagramas dizemos que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "iq_A"'] & B \arrow[dl, "x'"] \arrow[d, "iq_B"] \\ A \arrow[r, "x"'] & B \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $x' \circ x \equiv iq_A$ e $x \circ x' \equiv iq_B$.

Escrevemos $A \overset{x}{\leftrightsquigarrow} B$ para denotar quase-isomorfismos.

Teorema 5.3.: o morfismo *quase-inversível* x' é único, a menos de indiscernibilidade.

Prova. *Considere qualquer outro morfismo inversível* x'' *tal que* $x'' \circ x \equiv iq_A$ *e* $x \circ x'' \equiv iq_B$, *então temos* $x'' \equiv iq_A \circ x'' \equiv (x' \circ x) \circ x'' \equiv x'' \circ (x \circ x'') \equiv x' \circ iq_B \equiv x''$. $\square$

O morfismo quase-inverso de x denotamos x^{-1}.

Teorema 5.4.: se $A \overset{x}{\to} B$ e $B \overset{y}{\to} C$ são quase-isomorfismos, então sua composição $A \overset{z}{\to} C$ também é um quase-isomorfismo.

Prova. *Neste caso, temos de verificar que* z *possui quase-inverso tal que* $z \circ z^{-1} \equiv iq_C$ *e* $z^{-1} \circ z \equiv iq_A$. *Como* x *é um quase-isomorfismo, então possui quase-inverso* x^{-1} *com* $x^{-1} \circ x \equiv iq_A$. *Admitindo por hipótese* z^{-1}, *temos que* $x^{-1} \equiv z^{-1} \circ y$ *e, portanto,* $(z^{-1} \circ y) \circ x \equiv iq_A$, *ou seja,* $z^{-1} \circ (y \circ x) \equiv iq_A$. *Logo,* $z^{-1} \circ z \equiv iq_A$. *Por outro lado, se* y *é um quase-isomorfismo,* *então possui quase-inverso com* $y \circ y^{-1} \equiv iq_C$. *Mas como,* $y \equiv z \circ x^{-1}$ *então deduzimos que* $(z \circ x^{-1}) \circ y^{-1} \equiv iq_C$, *isto é,* $z \circ (x^{-1} \circ y^{-1}) \equiv iq_C$. *Portanto,* $z \circ z^{-1} \equiv iq_C$. □

Teorema 5.5.: todo *morfismo quase-identidade* é um quase-isomorfismo.

Prova. *Basta constatar que* iq_A *possui morfismo quase-inverso. Assim, seja por hipótese* i *o quase-inverso de* iq_A, *então* $i \circ iq_A \equiv iq_A$ *e* $iq_A \circ i \equiv iq_A$. *Portanto,* $i \circ iq_A \equiv iq_A \circ i$ *o que demonstra a suposição de* i *é o quase-inverso de* iq_A. *Em outros termos, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "iq_A"] \arrow[d, "iq_A"'] & A \arrow[d, "iq_A"] \arrow[dl, "i"] \\ A \arrow[r, "iq_A"'] & A \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $i \circ iq_A \equiv iq_A$ *e* $iq_A \circ i \equiv iq_A$. □

A partir do conceito de quase-isomorfismo definimos as noções de objetos quase-isomorfos.

Definição 5.15. Dois objetos A e B são *quase-isomorfos* se, e só se, existe um quase-isomorfismo entre eles. Denotamos $A \cong B$.

O teorema seguinte afirma que o quase-isomorfismo de objetos é uma relação de equivalência.

Teorema 5.6. $\cong$ é uma relação de equivalência:

(a) $\forall A(A \cong A)$;

(b) $\forall A \forall B(A \cong B \Rightarrow B \cong A)$;

(c) $\forall A \forall B \forall C(A \cong B \wedge B \cong C \Rightarrow A \cong C)$.

Prova. *Análoga a do teorema 2.8 capítulo 2 p.43.* □

Segundo Barry Mazur, "o coração e alma da matemática consistem no fato de um "mesmo" objeto poder ser apresentado de diferentes maneiras."[17] Grosso modo, nas usuais apresentações da teoria de categorias, qualquer objeto matemático é primariamente entendido em termos de suas relações estruturais e único *a menos de isomorfismo*. Com isso, de um ponto de vista categorial, uma teoria matemática envolve *objetos* da teoria e *transformações* admissíveis entre esses objetos. Dentre os aspectos que se destacam dessa perspectiva é a substituição do conceito de *igualdade* pelo de *isomorfismo*. De um ponto de vista estritamente matemático objetos isomorfos numa categoria são indiscerníveis, haja vista que a linguagem categorial não permite expressar identidade para objetos, embora, a teoria *standard* de categoria esteja comprometida com a noção de indivíduo e, portanto, com a ideia de identidade. A teoria $\mathfrak{Q}$-Cat pretende entre outras coisas relacionar os conceitos de *isomorfismo*, oriundo da usual teoria de categorias, ao de *indiscernibilidade*, tal como proposto na teoria de quase-conjuntos.

[17] Cf. Mazur [90] *When is one thing equal to some other thing?*

Objetos terminal e inicial

Definição 5.17. Seja $\mathscr{C}$ uma quase-categoria. Um X-*objeto* é *terminal* se, para todo A-*objeto* em $\mathscr{C}$, existe um morfismo $A \xrightarrow{x} X$. Se X é terminal, escrevemos $\mathbf{1}$.

Informalmente o conceito de objeto terminal permite estabelecer uma versão quase-categorial da noção de "elemento de um (conjunto) quase-conjunto". Em **$\mathfrak{Q}$-Cat** permite definir os correspondentes conceitos de *m-átomo* e *M-átomo* da teoria $\mathfrak{Q}$.

Teorema 5.8.: Quaisquer dois objetos terminais são quase-isomorfos.

Prova. *Sejam* $\mathbf{1}$ *e* $\mathbf{1}'$ *objetos terminais. Desde que* $\mathbf{1}$ *é terminal e* $\mathbf{1}'$ *é um objeto de* $\mathfrak{Q}$*-cat, podemos inferir pela definição de objeto terminal que* $\mathbf{1}' \xrightarrow{x} \mathbf{1}$*, mas como* $\mathbf{1}'$ *é terminal e* $\mathbf{1}$ *é um* $\mathfrak{Q}$*-cat objeto, temos* $\mathbf{1} \xrightarrow{y} \mathbf{1}'$*. Compondo* x *e* y *obtemos* $y \circ x \equiv iq_{\mathbf{1}}$ *e* $x \circ y \equiv iq_{\mathbf{1}'}$*. Logo, pela definição de isomorfismo,* $\mathbf{1} \cong \mathbf{1}'$. $\square$

Com efeito, intuitivamente na categoria **Set**, o *objeto terminal*, como acima definido, equivale a qualquer conjunto unitário. Por outro lado, o *unitário forte* de $\mathfrak{Q}$ corresponde ao conjunto unitário de **Set** e, portanto, o objeto terminal de **$\mathfrak{Q}$-Cat** representa o unitário forte dos quase-conjuntos. O conceito de objeto terminal nos permite definir uma versão "quase-categorial" do elemento de um objeto (conjunto ou quase-conjunto). Numa **$\mathfrak{Q}$-Cat** quase-categoria permite tratar por meio de morfismos dos

Urelemente da teoria $\mathfrak{Q}$, isto é, dos *m-átomos* e *M-átomos*.

Definição 5.18. Seja $\mathscr{C}$ uma quase-categoria. Um X-*objeto* é inicial se, para todo A-*objeto* em $\mathscr{C}$, existe um morfismo $X \stackrel{x}{\to} A$. Se X é um objeto inicial, então escrevemos Φ.

Teorema 5.9.: Quaisquer dois objetos iniciais são isomorfos.

Prova. *Análoga a demonstração do teorema 5.8.* $\square$

Definimos agora o conceito de *micro-morfismo* como um morfismo com domínio num objeto terminal e codomínio num *P-objeto*. *micro-morfismos* atuam de forma semelhante numa quase-categoria aos *m-átomos* da teoria dos quase-conjuntos.

Definição 5.19. Um morfismo x é um *micro-morfismo* (denotamos $m(x)$) se, e só se, o domínio de x é o objeto terminal é seu codomínio é um *P-objeto*.

De um ponto de vista heurístico, um *micro-morfismo* atua como um "elemento" de seu codomínio, no caso um *P-objeto* de **$\mathfrak{Q}$-cat**. O próximo teorema corresponde ao axioma 4.7 (a) da teoria $\mathfrak{Q}$.

Teorema 5.10.: $\forall x \forall y (m(x) \wedge x \equiv y \Rightarrow m(y))$

Prova. *Seja $m(x)$ um m-morfismo e $x \equiv y$. Neste caso, $\mathbb{D}(x) \equiv \mathbf{1}$ é isomorfo ao domínio de y e, portanto, $\mathbb{D}(y) \equiv \mathbf{1}$. Por outro lado, como x é um m-morfismo seu codomínio é um*

P-objeto e da hipótese de que y é indiscernível x temos que o codomínio de y é indiscernível do codomínio de x, logo, pelo axioma 5.11 o codomínio de y é um P-objeto. Portanto, y é um m-morfismos. $\square$

Também definimos o conceito correspondente aos *M-átomos* da teoria dos quase-conjuntos, os *Macro-morfismos*, que atuam de forma análoga aos *Urelemente.*

Definição 5.20. Diz-se que um morfismo x é um *Macro-morfismo* (denotamos $M(x)$) se, e somente se, o domínio de x é o objeto terminal e seu codomínio é um *Z-objeto*, isto é, um objeto para o qual vale a noção usual de identidade.

Teorema 5.11.: Se $M(x)$ e $x \equiv y$, então $M(y)$.

Prova. *Se $M(x)$, então $Z(x)$, ou seja, Macro-morfismos são morfismos clássicos. Desde que $x \equiv y$, pela definição 5.8. temos que $x = y$.* $\square$

O teorema anterior corresponde ao *axioma 4.7.(b)* da teoria de quase-conjuntos.

Distinguimos o comportamento dos *Macro-morfismos*, para os quais vale a noção de identidade, dos *micro-morfismos*, que são indistinguíveis entre si sem serem idênticos. Assim, vale o seguinte teorema que corresponde ao axioma 4.3. da teoria $\mathfrak{Q}$.

Teorema 5.12.: $\forall x \neg(m(x) \wedge M(x))$.

Prova. *Seja por hipótese* $\forall x(m(x) \wedge M(x))$. *Assim se* $m(x)$, *então* $\mathbb{C}(x)$ *é um P-objeto e se* $M(x)$, *então* $\mathbb{C}(x)$ *é um Z-objeto. Mas pelo axioma 5.11.(a) não ocorre que* $\mathbb{C}(x) \equiv Z' \wedge \mathbb{C}(x) \equiv P'$, *i.e., o codomínio de* x *não pode ser ao mesmo tempo um Z-objeto e um P-objeto. Logo,* $\forall x \neg(m(x) \wedge M(x))$. $\square$

Axioma 5.12. (*indiscernibilidade de quase-objetos*)

$$\forall A \forall B(A \equiv B \Leftrightarrow A \cong B \wedge \forall x \forall y(1 \xrightarrow{x} A \wedge 1 \xrightarrow{y} B \wedge x \equiv y))$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, bend right, "z"'] \\
1 \arrow[ur, bend left, "x"] \arrow[dr, bend right, "y"'] & \\
 & B \arrow[u, bend right, "z^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Esse axioma estabelece uma condição necessária e suficiente para a indiscernibilidade de quase-objetos.

É importante lembrar que em quase-categorias, como em categorias, não temos a necessidade de "olhar para dentro" dos objetos (sejam eles conjuntos ou quase-conjuntos). O axioma acima estabelece uma condição necessária e suficiente para a indiscernibilidade de quase-objetos.

Em $\mathfrak{Q}$-Cat podemos substituir a expressão "a menos de isomorfismo" (muito comum numa perspectiva categorial padrão) por “a menos de indiscernibilidade”. A tese de que isomorfismo é um conceito mais interessante quando tratamos de comparar objetos é especialmente destacada por Bell quando afirma: “ que a essência dos objetos matemáticos não deve ser buscada em sua constituição interna, como objetos conjuntistas, mas sim em sua interação com outros objetos (estruturas) através de uma rede de morfismos.”[18]

Indiscernibilizador e Co-indiscernibilizador

Um indiscernibilizador de quase-morfismos corresponde, intuitivamente, ao equalizador da teoria usual de categorias. Assim do mesmo modo que um equalizador “igualiza” (torna iguais) dois morfismos com mesmo domínio e codomínio, um indiscernibilizador estabelece as condições que tornam dois quase-morfismos indiscerníveis.

Definição 5.22. Dada uma quase-categoria $\mathscr{C}$, um quase-morfismo $E \xrightarrow{i} A$ é um indiscernibilizador de quase-morfismos $A \xrightarrow{x} B$ e $A \xrightarrow{y} B$ se: (i) $x \circ i \equiv y \circ i$ e (ii) dado um quase-morfismo $E' \xrightarrow{i'} A$, existe um quase-morfismo $E' \xrightarrow{k} E$, a menos de indiscernibilidade, que faz com que o seguinte diagrama co-

[18] Cf. Bell *op.cit.* p.235.

mute:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "i"] & & \\ & A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \\ E' \arrow[uu, "k"] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

Se na definição de indiscernibilizador temos apenas *Z-objetos* e *Z-morfismos* envolvidos, então temos a definição usual de equalizador. Na categoria $\mathfrak{Q}$-Set um indiscernibilizador de duas quase-funções f e g é o quase-conjunto

$$E = \{u : u \in A \wedge x(u) \equiv y(u)\} \subseteq A.$$

Em outros termos, duas quase-funções f e g são indiscerníveis quando: (i) $\mathbb{D}(f) \equiv \mathbb{D}(g)$ e $\mathbb{C}(f) \equiv \mathbb{C}(g)$ e (ii) para $\langle u, v\rangle \in f$ e $\langle w, k\rangle \in g$ se $u \equiv w$, então $v \equiv k$.

Definição 5.23. Dados quase-morfismos $A \stackrel{x}{\to} B$ e $A \stackrel{y}{\to} B$, o quase-morfismo $B \stackrel{c}{\to} C$ é um co-indiscernbilizador de x e y se as seguintes condições são satisfeitas: (i) $c \circ x \equiv c \circ y$ e dado qualquer outro quase-morfismo $B \stackrel{c'}{\to} C'$ tal que $c' \circ x \equiv c' \circ y$ existe um quase-morfismo $C \stackrel{u}{\to} C'$ que faz com que o seguinte diagrama comute:

$$
\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dd, "u"] \\
A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[ur, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & \\
 & & C'
\end{tikzcd}
$$

Quando restringimos o co-indiscernibilizador a *Z-objetos* e *Z-morfismos* temos a definição padrão de co-equalizador, que na categoria **Set** corresponde ao conceito de relação de equivalência. Na teoria $\mathfrak{Q}$ definem-se relações de equivalência da mesma forma que em teorias usuais de conjuntos. Assim, uma relação de equivalência para quase-conjuntos é uma quase-relação (definição 4.10) que é reflexiva, simétrica e transitiva. Com isso, o co-indiscernibilizador equivale ao conceito de relação de equivalência de $\mathfrak{Q}$.

Subobjeto

Definição 5.24. Um subobjeto de um $\mathscr{C}$-objeto A consiste de um $\mathscr{C}$-monomorfismo $B \overset{x}{\rightarrowtail} A$ com codomínio A. Denotamos, $[x] \sqsubseteq A$.

Na quase-categoria $\mathfrak{Q}$**-Set** qualquer quase-injeção $f : A \to X$ determina uma quase-bijeção $j : A \to f[A] \subseteq X$. Num diagrama:

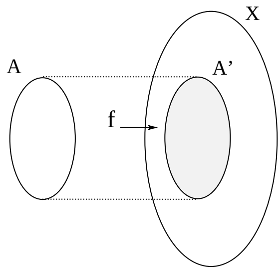


Figura 5.1: Uma quase-injeção $f : A \to X$ induz uma quase-bijeção do domínio de f com um subconjunto de $A' \subseteq X$. Ou seja, $A \leftrightsquigarrow A'$ e, portanto, $A \cong A'$.

O conceito de subobjeto corresponde na categoria **Set** ao de subconjunto, e como na categoria $\mathfrak{Q}$-**Set** o conceito de quase-subconjunto corresponde ao de subconjunto, então o conceito de subobjeto equivale a de quase-subconjunto em $\mathfrak{Q}$-**Set**.

O que exposto até aqui revela alguns aspectos importantes de uma categoria de indiscerníveis, como as noções de objeto inicial e objeto terminal, produto e coproduto, além de uma versão categorial para os átomos da teoria $\mathfrak{Q}$. Seria desejável em trabalhos futuros comparar as quase-categorias **Set** e $\mathfrak{Q}$-**Set** apresentadas nesse trabalho, além de desenvolver conceitos como de *exponencial* e *classificador de subobjetos*, o que nos permitiria definir um topos (ou talvez melhor um "*quase-topos*"). Além disso podemos avançar ainda mais desenvolvendo aspectos funtoriais e definindo o que seriam transformações naturais e adjunções em nossa quase-categoria que envolve objetos e morfismos despidos de identidade. Naturalmente o desenvolvimento desses conceitos são bastante exigentes e envolvem um trabalho que está muito além dos propósitos dessa tese que apenas introduz a teoria **$\mathfrak{Q}$-Cat**. De qualquer modo é importante destacar $\mathfrak{Q}$-Cat é uma generalização da definição padrão de categoria.

Capítulo 6

Considerações finais

> The aim of science is not things themselves, [...] but the relation between things; outside those relations there is no reality knowable.[a]
>
> [a] Do prefácio da edição inglesa de *Science et Hypothèse*.
>
> H. Poincaré [100] p.xxiv

> Category theory unifies the working methods with the foundations and the ontology in one insight: "It's the arrows that really matter!"
>
> Colin McLarty [91] p.7.

Devemos, neste momento, traçar algumas notas de caráter filosófico a respeito de nossa categoria de indiscerníveis e dos quase-conjuntos. Embora nossas observações aqui sejam preliminares e certamente exijam reparos e acréscimos futuros, pretendemos tecer algumas observações sobre possíveis desdobramentos de nossa teoria e de suas limitações, além de contrastar nessa oportunidade o que chamamos uma "*filosofia de setas*"[1] com uma "*filosofia de pertinência*". A primeira associada a uma perspectiva categorial dos objetos matemáticos, a segunda o que chamamos conjuntista. Não se trata de qualquer forma de uma discussão que vá às minúcias, mas apenas da indicação de pontos que consideramos relevantes ou desafiadores a um tratamento categorial da identidade e indiscernibilidade.

6.1 Uma "filosofia de setas"

A primeira citação que introduz este capítulo, revela um aspecto significativo latente à nossa compreensão filosófica das categorias, que se estende até mesmo ao nosso tratamento categorial da indiscernibilidade. Numa perspectiva categorial não perguntamos sobre os objetos e suas propriedades intrínsecas, mas suas relações ou interações. Com isso, à luz das categorias, os conceitos de identidade e indiscernibilidade podem ser explorados pelo modo como os objetos se relacionam por morfismos, e mais geralmente por funtores. Como temos defendido, a teoria de categorias dá ênfase a uma perspectiva externa e sociológica das entidades matemáticas, destarte, via de regra um objeto só

[1]Devemos mencionar aqui o fato de von Neumann antecipar a ideia da teoria de categorias de que funções devam desempenhar papel mais fundamental do que coleções.

ganha "identidade" pelo modo como interage com outros objetos num determinado contexto categorial. Podemos afirmar que em categorias não pensamos os objetos isoladamente, sua "psicologia", mas sobretudo suas relações, isto é, sua "sociologia". Dada essa diferença justifica-se a tese de um ponto de vista filosófico, categorias constituem uma abordagem bastante diferente da usual abordagem zermeliana, por exemplo, por sua generalidade e visão externa dos objetos. É importante ressaltar que uma das ideias centrais da teoria de categorias é que um domínio matemático pode ser abstratamente caracterizado não pela descrição das propriedades inerentes a todos os objetos incluídos nesse domínio, mas sobretudo examinando as conexões entre esses objetos. Em conformidade com essa perspectiva, em matemática não temos objetos com uma constituição "interna" organizados em estruturas, temos apenas estruturas. Os objetos da matemática são estruturas ou posições em estruturas e como posições em estrutura eles não têm identidade ou propriedades fora da estrutura, isto é, só podem ser pensados a partir de suas relações estruturais. Obviamente categorias não são necessárias para um tratamento dos objetos matemáticos como estruturas até o ponto em que passamos a lidar com essas próprias estruturas e as transformações entre coleções extraordinariamente grandes. Segundo da Costa "a teoria de categorias ... impôs-se em matemática para sistematizar e simplificar domínios como a geometria algébrica e a álgebra homológica. Eliminá-la de partes da matemática, onde ela encontra aplicação óbvia, torna tudo mais complexo e artificial".[2]

[2]Cf. da Costa [34] *O Conhecimento Científico.* p. 78.

Vale também lembrar que qualquer abordagem por meio de categorias da matemática envolve generalidade não alcançada pelas usuais teorias de conjuntos. Além disso, como já evidenciamos, uma perspectiva categorial é externa e põe em relevo o conceito de função (morfismo), secundário nas abordagens conjuntistas ou mesmo quase-conjuntistas. Nesta abordagem não são objetos que estão em foco ou uma relação de pertinência, mas morfismos e composição de morfismos. Estudam-se vários sistemas de morfismos que relacionam estruturas, bem como as conexões entre vários desses sistemas. O estudo prossegue examinando como um determinado sistema de funções se comporta sob a operação da composição (aplicando um morfismo a outro). Naturalmente, esses aspectos de uma perspectiva categorial possuem significativas implicações sobre o entendimento da matemática em geral, e em particular sobre os conceitos aqui ventilados. Em especial é possível considerar o trânsito funtorial entre categorias como **Set** e $\mathfrak{Q}$-**Set** e entre outras categorias. Considerar essa ótica pode ser bastante promissora ao tratamento da noção de indiscernibilidade em matemática sem que isso colapse em identidade. A questão fundamental que se impõe nesse caso é se o conceito de indiscernibilidade pode ser admitido quando consideramos categorias isomorfas. Categorias isomorfas podem ser consideradas "essencialmente" a mesma ou tão somente indiscerníveis?[3] Nossa opinião é que parece mais interessante que sejam vistas como entidades indiscerníveis como propomos neste projeto.

[3]Cf. Goldblatt *op.cit.* p.42.

É possível afirmar que a relação fundamental envolvida numa perspectiva zermeliana da matemática é a relação de *pertinência*, que se estabelece entre conjuntos ou entre indivíduos ("átomos") e conjuntos. Como consequência, asserções sobre existência, nesse modo de entender a matemática, tendem a ser acompanhadas por uma especificação completa dos elementos de um conjunto, cuja existência é admitida. Por exemplo, quando assentimos a existência do produto cartesiano, admitimos que para quaisquer conjuntos A e B, existe um conjunto $A \times B$, cujos elementos são pares ordenados de elementos $\langle a, b \rangle$, tais que a é um elemento de A e b é um elemento de B, de tal modo que pares ordenados também sejam um certo tipo de conjunto. De um ponto de vista conjuntista, produtos, relações, funções, etc. São, em última instância, conjuntos. Por outro lado, numa perspectiva categorial, o foco não se encontra num instrumento capaz de estabelecer algo como uma relação de pertinência entre objetos (conjuntos, no caso da categoria **Set**). Numa perspectiva conjuntista, que denominamos "filosofia de pertinência", tudo é reduzido a "ser elemento de" tipificado pela relação de pertinência. Um elemento pertence a um conjunto ou não pertence a ele, o que é uma expressão da lógica clássica bivalente. Categorias nos permitem a rigor apenas estabelecer morfismos (funções, em **Set**) entre objetos (conjuntos). Podemos dizer que categorias são agnósticas sobre a relação de pertinência. Dessa forma, quando fazemos asserções existenciais em categorias não declaramos a existência de um objeto particular munido de algo como uma identidade. Essa perspectiva não está disponível numa visão categorial dos objetos. Ao invés disso, afirmamos a existência de *pelo menos um* objeto (conjunto), que associamos a certos morfismos (funções). Por exemplo, quando admitimos a existência de *produtos* em categorias, dizemos que para quaisquer objetos A e B, existe pelo menos um objeto $A \times B$ equipado de morfismos (funções) $p_A : A \times B \to A$ e $p_B : A \times B \to B$ que desempenham o papel do produto. Vale lembrar que o objeto $A \times B$ é único, *a menos de isomorfismo*. Numa perspectiva categorial tudo é referido por "*setas*", como entidades fundamentais, indicando uma ação ou referência. É o que chamamos "*filosofia de setas*".

Em especial, nossa categoria de indiscerníveis vincula os conceitos de isomorfismo e indistinguibilidade. Assim, para certos objetos, que denominamos *Z-objetos* (objetos que reproduzem em $\mathfrak{Q}$-**Cat** objetos "clássicos" da usual teoria de categorias, entre os quais os conjuntos da teoria $\mathfrak{Q}$), isomorfismo pode significar identidade; entretanto, para certos quase-objetos, os *P-objetos* (que representam coleções de *m-átomos* da teoria $\mathfrak{Q}$, ou seja, os quase-conjuntos puros)[4], isomorfismo não significa necessariamente identidade, mas possivelmente indiscernibilidade. Dessa forma, nossa categoria de indiscerníveis dispõe de morfismos e objetos para os quais a noção de identidade não se aplica de nenhum modo. Assim, se os objetos B e C no diagrama são *P-objetos* e existe um isomorfismo entre eles, então são indiscerníveis entre si, porém distintos do objeto A com o qual não

[4]Os *m-átomos* em $\mathfrak{Q}$-**Cat** são morfismos do objeto terminal em qualquer *P-objeto*.

mantém qualquer interação por isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, bend right, "z"'] \\
A \arrow[ur, bend left, "x"] \arrow[dr, bend right, "y"'] & \\
 & C \arrow[uu, bend right, "z^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Na base da "perspectiva", explorada no presente trabalho, estão os conceitos de identidade e indistinguibilidade. Na visão teórica oferecida pelos quase-conjuntos, que sem dúvida enseja uma perspectiva "conjuntista" um elemento de quase-conjunto é dada desde o início e é independente de sua relação com o contexto. Na perspectiva determinada pela estratégia da filosofia das setas a identidade ou indiscernibilidade é contextual ("sociológica") e externa desde o início. Aqui pretendemos, entre outras coisas, ilustrar a tese segundo a qual "o universo absoluto de conjuntos" pode ser substituído em favor de uma pluralidade de estruturas matemáticas que interagem por morfismos e, mais geralmente, por funtores.

Em suma, um primeiro aspecto que distingue o que chamamos uma abordagem quase-categorial de uma abordagem quase-conjuntista da indiscernibilidade é sua caráter externo. Quase-categorias envolvem em todo caso a composição de quase-morfismos, ao passo que um tratamento quase-conjuntista é por sua vez internalista, no sentido de que comparece na teoria $\mathfrak{Q}$ uma relação de pertinência. Outro aspecto que distingue uma e outra perspectiva é que a quase-categorial é tremendamente mais geral, haja vista que concerne a totalidade dos quase-conjuntos como quase-objetos e das quase-funções como quase-morfismos, o que não ocorre na teoria $\mathfrak{Q}$ suposta consistente. Essa perspectiva só é possível para a teoria dos quase-conjuntos quando esta é fortalecida por meio do quase-universos, por exemplo, como definição na seção 5.1 do capítulo anterior. Outra dimensão posta em evidência é que quase-categorias encerra a noção de transformação entre quase-objetos via quase-morfismos, o que realça os aspectos dinâmicos de uma teoria de indiscerníveis. A perspectiva quase-categorial também oferece uma abordagem interativa da indiscernibilidade, haja vista que nessa teoria a indiscernibilidade está relacionada ao modo como os objetos (por exemplo, os quase-conjuntos) interagem por quase-morfismos. É o que chamamos uma perspectiva sociológica da indiscernibilidade.

Diversos aspectos de uma abordagem categorial da indiscernibilidade, aqui não ventilados, merecem destaque e devem ser objeto de investigação posterior, entre os quais, gostaríamos de destacar alguns de caráter filosófico, e outros de ordem matemática:

1. Não tratamos aqui dos aspectos funtorias de nossa categoria de indiscerníveis, o que limita bastante este trabalho do ponto de vista categorial. Esse aspecto certamente permitiria tratar do trânsito funtorial entre, por exemplo, a categoria dos conjuntos **Set** e a categoria dos quase-conjuntos

$\mathfrak{Q}$-**Set** de modo análogo ao que ocorre entre **Set** e outras categorias como **Grp**, **Mon**, **Vec** etc. Por exemplo, seria admissível um funtor esquecimento $\mathbf{Set} \xrightarrow{e} \mathfrak{Q}\text{-}\mathbf{Set}$ no qual os objetos (conjuntos) da categoria **Set** perdem identidade quando mergulhados em $\mathfrak{Q}$-**Set**? Como podemos definir transformações naturais nesse caso? Pode ser de grande valia para uma matemática de indiscerníveis desenvolver essa dimensão das quase-categorias.

2. Também não erigimos um topos ou algo análogo a um topos de indiscerníveis que represente efetivamente um modo de expressar por meio de categorias diversos conceitos da teoria $\mathfrak{Q}$ (algo análogo ao proposto por Lawvere para a categoria **Set**).[5] Para a formulação de um quase-topos seria necessário acrescentar à teoria $\mathfrak{Q}$-**Cat** um classificador de subobjetos e um objeto exponencial tais como descritos no Capítulo 02. Essa é uma tarefa que poderá receber tratamento em trabalhos futuros sobre quase-categorias.

3. A teoria de categorias, originalmente definida por Mac Lane e Eilenberg, é uma linguagem unificadora para a matemática que serve como alternativa à teoria dos conjuntos nas discussões sobre fundamentos da matemática. Por outro lado, o *programa Langlands*,[6] envolve uma ambiciosa série de conjecturas que se relacionam com a geometria algébrica em sua forma mais geral, tratando justamente

[5] Cf. Apêndice D.

[6] cf. Langlands [71] *Problems in the Theory of Automorphic Forms* e também Rios [104] *On a Final Theory of Mathematics and Physics.*

do trânsito entre mega-estruturas matemáticas via funtores, ou seja, o programa Langlads faz ampla utilização da linguagem de categorias. Assim, pode-se questionar quais as possíveis conexões entre o que aqui dá início a um tratamento categorial da indiscernibilidade e esse atualíssimo projeto matemático.[7] Seria lícito ou mesmo interessante considerar que a noção de indiscernibilidade, como estabelecida na teoria $\mathfrak{Q}$-Cat, é mais afeita na comparação de "mega estruturas matemáticas" por isomorfismos? Essa nos parece ser uma questão promissora a ser discutida no âmbito da teoria de quase-categorias.

4. Possíveis aplicações da teoria $\mathfrak{Q}$-**Cat** à indiscernibilidade na mecânica quântica são desejáveis. Recentemente diversos trabalhos têm dado ênfase a um tratamento categorial da física quântica[8] e uma abordagem da indiscernibilidade neste campo parece interessante tanto do ponto de vista filosófico quanto matemático.

5. Seria desejável explorar a ideia de que morfismos são transformações sobre objetos e que a matemática é, deste ponto de vista, mais dinâmica do que aquela oferecida por uma abordagem conjuntista? Como poderíamos justificar essa perspectiva da matemática com o fato de tanto categorias

[7]Eduard Frenkel descreve o programa Langlands como "uma espécie de grande teoria unificadora da matemática" (Cf. Frenkel [49] *Math Quatet Join Forces on Unified Theory.*

[8]Cf. Flori *A First Course in Topos Quantum Theory.* [47], Cocke [29] (ed.) *New Structures for Phisics* e Isham & Butterfield [23] *Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity.*

quanto conjuntos almejam invariantes?[9] Com isso poderíamos afirmar que uma abordagem categorial se aproxima de uma filosofia do processos análoga à ofertada por Whitehead em contraste com uma perspectiva estática da matemática? Vale lembrar que após sua tentativa de completar os fundamentos da matemática em colaboração com Russell, o empreendimento de Whitehead nas ciências naturais o fez perceber que a tradicional ontologia atemporal das substâncias, em sua base estática, não se adéqua completamente à natureza fulgaz dos fenômenos. Em vez disso, afirma ele, são os processos e seus relacionamentos que devem sustentar nossa compreensão dos fenômenos naturais. Pode-se transformar essa postura em uma base matemática para as ciências naturais, p.ex., como a física ou a biologia? Supomos que a teoria de categorias seja um passo nessa direção, embora não chegue a se livrar completamente das amarras de uma perspectiva estática da matemática. Essa discussão pode ser bastante interessante à filosofia da matemática e, em particular, talvez fosse mais proveitoso considerar que o conceito de indiscernibilidade é mais apropriado que o de identidade quando consideramos objetos (ou processos) que se modificam.

Este projeto de pesquisa inaugura uma ponte entre duas perspectivas matemáticas, uma quase-conjuntista, cujo núcleo investigativo está centrado no conceito de indiscernibilidade, e

[9] Grosso modo, um objeto é um invariante se sob um conjunto de transformações sua imagem transformada é indistinguível do objeto original. Cf. E.T. Bell [16] *The Development of Mathematics.* Cap. 20.

outra categorial, centrada na ideia de transformação entre objetos via morfismos. No que consiste a teoria de categorias? Em muitas coisas, mas para nossos propósitos, a ideia fundamental da teoria de categorias repousa no entendimento de toda a matemática em termos de funções (ou transformações). O ponto de vista categorial é bastante recente, datando dos anos 1940, e ainda é objeto tanto de aprimoramentos matemáticos quanto de interesse filosófico. Trás à baila questões relacionadas a tensão entre uma matemática estática e uma matemática dinâmica, entre uma percepção externa e outra interna dos objetos matemáticos, entre uma abordagem que privilegia os objetos e outra que dá ênfase as relações entre objetos. No caso do estudo de **Set** (a categoria dos conjuntos e funções) ou de $\mathfrak{Q}$-**Set** (a categoria dos quase-conjuntos e quase-funções) isto significa que no tratamento de conjuntos ou de quase-conjuntos não estudamos os elementos de que eles são constituídos, mas funções ou quase-funções entre conjuntos (ou quase-conjuntos). A teoria de Quase-categorias aqui delineada oferece um ponto de vista categorial ao debate sobre a noção de indiscernibilidade tendo como pano de fundo a hipótese de que isomorfismo indiscernibilidade são conceitos intimamente conectados em alguma acepção desses termos. A investigação aqui iniciada é ainda preliminar, mas pode contribuir em muitas frentes de trabalho quando temos em mente o leque de possibilidades teóricas que promove em filosofia, matemática e mesmo em mecânica quântica.

Apêndice A

Tabela de Categorias

Tabela 1 - Categorias e morfismos

categoria	**objetos**	**morfismos**
Set	conjuntos	funções
Top	espaços topológicos	funções contínuas
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Gf	grafos	homomorfismos de grafos
Vec	espaços vetoriais	transformações lineares
Pos	c.p.o.	funções monotônicas
Mon	monoides	homomorfismos
Lat	Reticulados	homomorfismos d reticulados
Bool	álgebras booleanas	homomorfismos booleanos
Log	proposições	consequência lógica
Ring	anéis	homomorfismo de anéis

A generalidade da teoria de categorias se manifesta no trânsito entre categorias via funtores.

Apêndice B

Grupos e Monoides

Sem pretendermos explorar às minúcias a tabela do apêndice A, vamos considerar os casos particular das categorias **Mon** e **Grp** afim de ilustrar o poder expressivo da teoria de categorias no trato dos objetos matemáticos. Na apresentação que segue considerarmos um universo de Gröthendieck como universo subjacente à categoria **Cat**, isto é, a categoria que possui como objetos *categorias* e como morfismos *funtores* entre essas categorias.

Um monoide é uma tripla $\mathscr{M} = \langle M, *, e \rangle$ onde:

M1. M é um conjunto não vazio;

M2. $*$ é uma operação binária sobre M, i.e., $M \times M \to M$ associa $\langle x, y \rangle \in M \times M$ um elemento $x * y \in M$. $*$ é *associativa*, ou seja, $(x*(y*z) = (x*y)*z$ para quaisquer $x, y, z \in M$.

M3. e é um elemento identidade de M que satisfaz a seguinte condição: $e * x = x * e = x$, para todo $x \in M$.

Qualquer monoide $\mathscr{M}$ dá origem a uma categoria com um objeto. Tomamos como objeto M e os morfismos $M \to M$ os elementos de M. Estabelecemos $e = id_M$, ou seja, o elemento neutro do monoide é o morfismo identidade. A composição de setas $x, y \in M$ é dada por $x \circ y = x * y$. Inversamente, se $\mathscr{C}$ é uma categoria com apenas um objeto a, e M é sua coleção de morfismos, então $\langle M, \circ, id_a \rangle$ é um monoide. Todos os morfismos de $\mathcal{M}$ tem o mesmo domínio e codomínio e assim todos os pares de morfismos são componíveis. Daí a composição $\circ$ é uma função de $M \times M$ em M, ou seja, uma operação binária em M, que é associativa pela lei de associatividade de categorias. id_a é uma identidade para monoides pela lei da identidade para categorias. A coleção de todos os monoides forma a categoria **Mon**.

Também grupos são categorias. Um grupo $\mathscr{G}$ é de um ponto de vista conjuntista é um monoide que satisfaz a seguinte condição extra: (M4) $\forall x \exists x'(x * x' = e)$, ou seja, é um monoide com inverso.

Esse ponto de vista pode ser cambiado por uma abordagem via teoria de categorias. Nesse caso, um grupo $\mathscr{G}$ é uma categoria (pequena) tal que a todo morfismo x está associado um morfismo inverso x^{-1} tal que $x \circ x^{-1} = id_M$ e $x^{-1} \circ x = id_M$.

O que visto nos parágrafos anteriores revela tão somente monoides e grupos como categorias pequenas (categorias cujos objetos são conjuntos munidos de uma estrutura matemática e os morfismos são funções). Entretanto, devemos ter em mente que se pode dar um passo além tomando monoides ou grupos como objetos e considerando homomorfismos de monoides ou de grupos como funtores entre essas categorias. Consideremos apenas a categoria **Grp** para exemplificar. Nesse caso os objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Um funtor (homomorfismo de grupos) entre grupos $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ ($\mathscr{G} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathscr{G}'$) é tal que $\mathcal{F}(y \circ x) = \mathcal{F}(y) \circ \mathcal{F}(x)$ para $x, y \in \mathscr{G}$ (note que essa condição também preserva o morfismo identidade e o morfismo inverso). De mesmo modo, dados funtores $\mathcal{F} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ e $\mathcal{G} : \mathscr{G}' \to \mathscr{G}''$ a composição de funtores é satisfeita, i.e., $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ é um funtor $\mathcal{H} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}''$ ($\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$). O funtor identidade para um grupo $\mathscr{G}$ é um morfismo $id_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ com $id_{\mathscr{G}}(x) = x$ para todo $x \in \mathscr{G}$. Num diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathcal{H}"'] & \mathscr{G}' \arrow[d, "\mathcal{G}"] \\
 & \mathscr{G}''
\end{tikzcd}$$

A partir do exposto podemos definir as usuais construções categorias como as de monomorfismo (homomorfismos injetivos), epimorfismo (homomorfismos sobrejetivos) e isomorfismo (isomorfismo de grupos), etc. Relativamente a outras categorias se destacam certos funtores, como os funtores esquecimento $\mathbf{Grp} \stackrel{es}{\to} \mathbf{Set}$ e $\mathbf{Grp} \stackrel{es}{\to} \mathbf{Mon}$. O primeiro esquece a estrutura de grupo relativamente a categoria **Set** e o segundo esquece parte da estrutura de grupo relativamente a categoria **Mon**.

Apêndice C

Universos

C.1 Universos de Grothendieck

A ideia dos universos se deve originalmente a A. Grothendieck, que os utilizou como uma forma de evitar classes próprias em geometria algébrica. Basicamente um universo de Grothendieck visa fornecer um conjunto a partir do qual toda a matemática padrão pode ser expressa. Os conjuntos de um universo de Grothendieck são usualmente chamados de *conjuntos pequenos* (*small sets*). A existência de um universo não trivial de Grothendieck permite que se vá muito além dos usuais axiomas da teoria dos conjuntos ZFC; em especial, implica a existência de cardinais fortemente inacessíveis. O conceito de um universo de Grothendieck também é definido em um topos (*topos* *de Grothendieck).*

Um universo de Grothendieck é um conjunto não vazio $\mathfrak{A}$ com as seguintes propriedades:

G1. se $x \in \mathfrak{A}$, então $x \subseteq \mathfrak{A}$.

G2. se x é um elemento de $\mathfrak{A}$, então $\wp(x) \in \mathfrak{A}$.

G3. se $\{x_i\}_{i \in I}$ é uma família de $\mathfrak{A}$, e I um elemento de $\mathfrak{A}$, então a união $\bigcup_{i \in I} x_i$ é um elemento de $\mathfrak{A}$.

Teorema: Seja $\mathfrak{A}$ um universo não vazio de Grothendieck. Então:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) $x \in \mathfrak{A} \to \{x\} \in \mathfrak{A}$.

(c) se $x, y \in \mathfrak{A}$, então $\{x, y\} \in \mathfrak{A}$.

(d) se $x, y \in \mathfrak{A}$, então $\langle x, y \rangle \in \mathfrak{A}$.

Prova.

(a) Seja $x \in \mathfrak{A}$. Por G2, $\wp(x) \in \mathfrak{A}$. Dado que $\emptyset \in \wp(x)$, segue que $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) Seja $x \in \mathfrak{A}$. Por G2, $\wp(\wp(x)) \in \mathfrak{A}$. Por G1, $\wp(\wp(x)) \subseteq \mathfrak{A}$. Como $\{x\} \in \wp(\wp(x))$, então $\{x\} \in \mathfrak{A}$.

(c) Sejam $x, y \in \mathfrak{A}$. Conforme (b), $\{x\} \in \mathfrak{A}$ e $\{y\} \in \mathfrak{A}$. Por G3, I pertence a $\mathfrak{A}$. Seja $x_0 = \{x\}$ e $x_1 = \{y\}$. Por G3, $x_0 \cup x_1 \in \mathfrak{A}$ e portanto $\{x, y\} \in \mathfrak{A}$.

(d) Basta constatar que $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. $\square$.

C.2 Universos de Ehresmann-Dedecker

Chama-se universo de Ehresmann-Dedecker um conjunto $\mathfrak{D}$ que satisfaz as seguintes condições:

D1. Se $x \in \mathfrak{D}$, então $\{x\} \in \mathfrak{D}$;

D2. Se $x \in \mathfrak{D}$, então $\wp(x) \in \mathfrak{D}$;

D3. Se $I \in \mathfrak{D}$, $I \neq \emptyset$ e $X : I \to \mathfrak{D}$, então $\bigcup X(I) \in \mathfrak{D}$.

Observações:

1. Os requisitos **D2** e **D3** coincidem respectivamente com os requisitos **G2** e **G3** dos universos de Grothendieck;

2. Os universos de Ehresmann-Dedecker não são usualmente conjuntos transitivos. Nesse caso, a condição **G1** foi substituída pela condição **D1**;

3. A coleção $\{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \notin \mathfrak{A}\}$ não é um universo e não existe um universo contenha todos os universos com elementos. Naturalmente essas afirmações requerem demonstração que não fazemos nesse apêndice de caráter sinóptico, mas podem ser facilmente encontradas em textos introdutórios de categorias que utilizam o conceito de universo.

Apêndice D

A Teoria ETCS

Os postulados de ETCS[1]

Apresentamos aqui uma exposição sumária dos postulados da *teoria elementar da categoria dos conjuntos*. Essa teoria afirma que conjuntos e funções entre conjuntos formam um topos não degenerado que satisfaz o axioma da escolha. O relato que segue é informal e visa apenas situar o leitor no contexto das discussões expostas no trabalho.

Axioma 01: Existem objetos inicial e terminal.

[1]ETCS (*Elementary Theory of Category of Sets*). A exposição deste apêndice está parcialmente baseada em ØYSTEIN, L. & PETTIGREW, R. [98] *Only up to isomorphism? Category Theory and the Foundations of Mathematics.*

No topos de **Set**, o objeto inicial corresponde ao conjunto vazio e o objeto terminal corresponde ao conjunto unitário. Em ZFC, o postulado da extensionalidade garante que existe apenas um conjunto vazio. Porém num topos não há garantias da existência de um único conjunto vazio. Em um topos tomamos um conjunto vazio arbitrário e o denotamos por Φ e um conjunto unitário arbitrário e o denotamos por 1. Dado um conjunto A, escrevemos $\Phi : \Phi \to A$ para a única função de Φ para A; e escrevemos $1 : A \to 1$ para a única função de A para 1.

Axioma 02: Existe um classificador de subobjetos $\tau : 1 \to \Omega$.

Ω é um conjunto que representa o conjunto de valores de verdade e a função característica que escolhe o elemento distinguido de Ω que denota o valor de verdade. Dizer que $1 \xrightarrow{\tau} \Omega$ é um classificador de subobjetos é o mesmo que afirmar que cada subconjunto de um conjunto A é representado por uma função característica de A para Ω, que mapeia todos e somente os elementos de A que pertencem ao subconjunto verdade. Naturalmente essa ideia depende da noção de subconjunto, que é introduzida na teoria usual de conjuntos usando a relação de pertinência. Como, então, seria legítimo apelar para a noção de subconjunto num topos como ETCS, que não recorre a ideia de pertinência? Em ETCS, um subconjunto de um conjunto A é denotado por uma função injetiva $B \xrightarrow{i} A$, onde i é injetiva, e para quaisquer duas funções distintas $a : 1 \to B$ e $b : 1 \to B$, $i \circ a \neq i \circ b$. Assim, como uma função de 1 para A representa um elemento de A, uma função injetiva de B para A denota um subconjunto de A. Dada essa definição, afirmar que $1 \to \Omega$ é um *classificador de subobjetos* é, primeiro, afirmar que cada subconjunto $i : B \to A$, corresponde uma função $X_i : A \to \Omega$ que associa a um elemento de A o elemento de Ω que atribuímos como elemento verdadeiro se, e somente se, aquele elemento de A for imagem de i. Isto é, $\tau \circ id_B = X_i \circ i$ assegura que se um elemento de A se encontra na imagem de i, deve ser mapeado por X_i em τ. Segundo, a definição requer que se existe um conjunto C com uma função $j : C \to A$ tal que $\tau \circ id_C = X_i \circ j$, então existe uma única função $h : C \to B$ tal que $j = i \circ h$. Isso garante que se um elemento de A é mapeado por X_i em τ, então está na imagem de i; porque, se este não fosse o caso, não haveria nenhuma garantia de que h existe. Chamamos X_i a função característica do subconjunto $i : B \to A$. Essa situação é ilustrada pelo seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_B"'] & A \arrow[d, "X_i"] \\
& 1 \arrow[r, "T"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Axioma 03: (*produto cartesiano*) para quaisquer dois conjuntos A e B, existe o produto cartesiano $\pi_A, \pi_B : A \times B \rightrightarrows A, B$.

O produto cartesiano de A e B é um conjunto $A \times B$, equipado com funções $\pi_A : A \times B \to A$ e $\pi_B : A \times B \to B$ que podem representar qualquer par de funções $f : C \to A$ e $g : C \to B$ unicamente por meio de uma função $f \times g : C \to A \times B$. Isto é, para cada par de funções f e g, podemos recuperar f aplicando π_A a $f \times g$ e podemos recuperar g aplicando π_B em $f \times g$, ou seja, $f = \pi_A \circ (f \times g)$ e $g = \pi_B \circ (f \times g)$. E $f \times g$ é a única aplicação que tem essa propriedade. Novamente, ilustramos essa situação com um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "f \times g"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Axioma 04: (*Equalizador*) Para quaisquer dois morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$, existe um equalizador $e : E \to A$.

Um equalizador de f e g é um conjunto E equipado com uma função $e : E \to A$ tal que um elemento de A é imagem de e, se e somente se, f e g coincidem naquele elemento. Um requisito é então que $f \circ e = g \circ e$. Isto assegura que, se um elemento de A é imagem de e, então f e g coincidem no elemento. Outro requisito é que, se existe uma função $e^{'} : E^{'} \to A$ para o qual $f \circ e^{'} = g \circ e^{'}$, então existe uma única função $k : E^{'} \to E$ tal que $e \circ k = e^{'}$. Isso garante que, se f e g coincidem num elemento de A, então este elemento é a imagem de e; porque se este não fosse o caso, não haveria nenhuma garantia da existência de k.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "e"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& E' \arrow[ul, dotted, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Decorre desta definição que e é um subconjunto de A em termos categoriais tal como apresentado acima.

Axioma 05: (*objeto potência*) Para qualquer conjunto A, existe um objeto potência $\wp(A)$ equipado com uma função-pertinência $\in_A$: $A \times \wp(A) \to \Omega$.

Um objeto potência para A é qualquer conjunto $\wp(A)$ associado a uma função-pertinência $\in_A$ que representa qualquer subconjunto de $A \times C$ unicamente por uma função de C em $\wp(A)$. Uma tal função pode ser pensada como tendo cada elemento c de C do referido subconjunto de A, cujos elementos são os elementos a de A para o qual (a, c) está no subconjunto de $A \times C$. Dado um subconjunto $i : D \to A \times C$, primeiro representamos i por sua função característica X_i, função dada pelo axioma do classificador de subobjetos. O axioma do objeto potência, então afirma que há uma função $\hat{X}_i : C \to \wp(A)$ que representa X_i exclusivamente no seguinte sentido. Primeiro, podemos recuperar X_i aplicando a função-pertinência $\in_A$ a função $id_A \times \hat{X}_i$; isto é, $\in_A \circ (id_A \times \hat{X}_i) = X_i$. E, segundo, $\hat{X}_i$ é a única função com essa propriedade.

$$
\begin{tikzcd}
A \times C & \Omega & A \times \wp(A) \arrow[r, "\in_A"] & \Omega \\
D \arrow[u, "i"] & A \times C \arrow[u, "X_i"] & A \times C \arrow[u, dotted, "(id_A \times \hat{X}_i)"] \arrow[ur, "X_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

O exemplo mais importante desse axioma é aquele em que $C = id$. Neste caso, o objeto potência afirma que $\wp(A)$ junto com $\in_A$ pode representar qualquer subconjunto $i : B \to A$ (representado por sua função característica X_i) como uma função $\hat{X}_i : id \to \wp(A)$. Isto é, a cada subconjunto de A corresponde um elemento de $\wp(A)$.

Os axiomas 1-5 afirmam que a categoria dos conjuntos e funções é um topos. Mas ETCS não pará por aí. Vai ao ponto de atribuir aos topos diversos outros recursos.

Axioma 06: (*não-degenerabilidade*) Φ não pode ser colocado numa correspondência um-a-um com $\mathbf{1}$. Ou seja, $\neg(\mathbf{1} \cong \Phi)$

Axioma 07: (*well-pointedness*) Não há duas funções distintas $f : A \to B$ e $g : A \to B$ tal que $f \circ x = g \circ x$ para todo $x : \mathbf{1} \to A$.

Se denotamos os elementos de um conjunto A por funções $x : \mathbf{1} \to A$, então este axioma afirma que uma função sobre um conjunto A é determinada exclusivamente pelo seu comportamento sobre os elementos de A. Isto é, o axioma de *well-pointedness* é o axioma da extensionalidade para funções. Como observado acima, não constitui um axioma de extensionalidade para conjuntos, um vez que ETCS possui modelos que contém muitos conjuntos vazios. Num diagrama comutativo temos:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, dotted] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Axioma 08: (*Escolha*) Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetiva, então existe $g : B \to A$ para a qual $f \circ g = id_B$.

O axioma da escolha faz aqui uma afirmação existencial hipotética não sobre conjuntos, mas sobre funções. Esta é uma afirmação que corresponde ao axioma da escolha na teoria dos conjuntos ortodoxa (ZFC) que afirma que todo conjunto não-vazio de conjuntos não-vazios disjuntos tem um conjunto escolha.

Axioma 09: (*Objeto natural*) A categoria dos conjuntos e funções contém um objeto natural.

Em ETCS, um objeto natural é um conjunto N munido de duas funções $z : 1 \to N$ e $s : N \to N$ que juntas garantem a eficácia de qualquer definição recursiva. Isto é, para qualquer conjunto X com um elemento inicial obtido por $a : 1 \to X$ e uma função $f : X \to X$, existe uma função $h : N \to X$ que toma o elemento zero de N para a e toma o sucessor de um 'número' em N para o elemento de X que resulta a aplicação de f a qualquer elemento de X associado ao número por h; em outras palavras, $h \circ z = a$ e $h \circ s = f \circ h$.

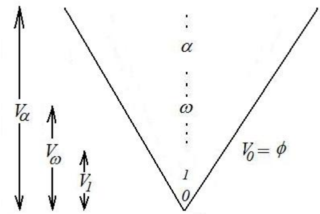
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "a"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "h"] & N \arrow[d, dotted, "h"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Apêndice E

Universo de von Neumann

O universo de von Neumann (ou herarquia de von Neumann), abreviado V, é uma classe obtida por recursão transfinita partindo do conjunto vazio e por aplicação sucessiva da operação do conjunto potência $\wp$. Isto é, $\mathsf{V}_0 = \emptyset$, $\mathsf{V}_1 = \wp(\emptyset) = \{\emptyset\}, \ldots$, $\mathsf{V}_{n+1} = \wp(\mathsf{V}_n)$ e $\mathsf{V}_n \subseteq \mathsf{V}_{n+1}$. As únicas restrições que devem ser observadas são as seguintes: 'todos os elementos de um conjunto devem ser conjuntos' e a 'coleção de todos os conjuntos não é um conjunto'.

Num diagrama temos a seguinte representação:



Definimos um universo de von Neumann pelas cláusulas:[1]

(a) $\mathsf{V}_0 = \emptyset$,

(b) $\mathsf{V}_{\alpha+1} = \wp(\mathsf{V}_\alpha)$,

(c) $\mathsf{V}_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathsf{V}_\beta$, ($\alpha$ é um ordinal limite $\alpha \geq 0$).

as quais podem ser condensada na seguinte condição:

$$\mathsf{V}_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \wp(\mathsf{V}_\beta),$$

com $\alpha \in On$, i.e., α é um *ordinal.*

Admitindo os axiomas de ZFC, a fórmula $\varphi(\alpha, x)$ da linguagem de **ZFC** denota "$x \in \mathsf{V}_\alpha$" que é equivalente ao axioma da função. Se ω é o conjunto dos números naturais, então V_ω é a

[1]Note-se que V não é um conjunto.

classe dos conjuntos hereditariamente finitos que é um modelo de ZFC sem o axioma do infinito. Os conjuntos em $\mathsf{V}_{\omega+\omega}$ são suficientes para tratar de toda a "matemática padrão".

Apêndice F

A teoria de conjuntos ZFC

ZFC1. (Axioma da extensionalidade). Se dois conjuntos x e y têm os mesmos elementos, então $x = y$.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

ZFC2. (Axioma esquema de separação). Se α é uma propriedade, então para todo conjunto x existe um conjunto y que contém todos os elementos de x que satisfazem a propriedade α.

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \alpha(x))$$

ZFC3. (Axioma dos pares não ordenados). Para quaisquer conjuntos u e v existe um conjunto $\{u, v\}$ que contém como elementos u e v.

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (u = x) \vee (u = y))$$

ZFC4. (Axioma da união). Para todo conjunto x existe um conjunto y que contém como elementos exatamente todos os elementos do conjunto x.

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \exists u (u \in z \wedge x \in u))$$

ZFC5. (Axioma do conjunto potência). Para todo conjunto x existe um conjunto y que tem como elementos todos os subconjuntos de x.

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \forall u (u \in x \to u \in z))$$

ZFC6. (Axioma do infinito). Existe um conjunto x que satisfaz as seguintes condições: (i) $\emptyset \in x$; (ii) para todo conjunto $y \in x$ também $y \cup y \in x$.

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

ZFC7. (Axioma esquema de substituição). Se f é uma função, então para todo x existe um conjunto y tal que $y = f(x)$.

$$\forall x \exists y (f(x,y) \wedge \forall z (f(x,z) \to y = z)) \to \forall u \forall v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge f(x,y)))$$

ZFC8. (Axioma da fundação). Todo conjunto não vazio contém ao menos um elemento cujos elementos não pertencem ao conjunto de partida.

$$\forall x (\exists y (y \in x) \to (\exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))))$$

ZFC9. (Axioma da escolha). Todo conjunto de conjuntos não vazios e disjuntos entre si tem uma função escolha.

$$\forall x(\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \rightarrow (y \notin \emptyset \wedge y \cap z = \emptyset))$$

$$\rightarrow \exists y \forall z(z \in x \rightarrow \exists w(y \cap z = \{w\})))$$

Referências Bibliográficas

[1] ACZEL, P. *Non well-founded sets.* Stanford: center for the study of language and information, 1988.

[2] ADÁMEK, J. *et alii. Abstract and Concrete Categories: the joy of cats.* Wiley-Interscience, 1990.

[3] AWODEY, S. *Category Theory.* 2ed., Oxford, Oxford Logic Guides **52**, Oxford Univ. Press, 2011.

[4] AWODEY, S. *Structuralism, Invariance, and Univalence.* Philosphia Mathematica, v. **22**, Issue 1, p.1-11, 2014.

[5] AWODEY, S. *An answer to Hellman's question: 'does category theory provide a framework for mathematical sturcturalism?'* Philosphia Mathematica **12**(3), 54-64.

[6] AWODEY, S. *Structure in Mathematics and Logic: a categorical perspective*. Philosophia Mathematica, 4(3), 209237. 1996.

[7] BACH, A. *Indistinguishable Classical Particles*. Lectures Notes in Physics. Berlin, Springer, 1997.

[8] BACHELARD, G. *La Philosophie du Non: essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique*. 4ed., Presses Universitarires de France, Paris, 1966.

[9] BACHELARD, G. *Le Nouvel Esprit Scientifique*. Paris, Le Presses Univ. de France, 1968.

[10] BAEZ, J.C. & DOLAN, J. *Categorificantion*. arXiv:math.QA/9802029 v1, 5feb, 1998 (doc. internet).

[11] BALAGUER, M. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1998.

[12] BARR, M. & WELLS, C. *Category Theory for Computing Science*. Reprints in Theory and Applications of Categories, n.22, 2012.

[13] BECKER, J. & KRAUSE, D. *Hume, Schrödinger e a individuação dos objetos físicos*. Revista Eletrônica de Informação e Cognição. 5(2), 2006, p.59-71.

[14] BECKER, A.J. & KRAUSE, D. *Quantum non-individuality: background concepts and possibilities*.

In: Map and Territory, Exploring the Foundations of Science, Though and Reality. Springer Frontiers Collection, S. Wuppuluri and F.A. Doria (eds.), 281-305, 2018.

[15] BELL, J.L. *Toposes and Local Set Theory: an introduction.* Dover, New York, 2008.

[16] BELL, E.T. *The Development of Mathematics.* New York - London, McGraw-Hill, 1945.

[17] BLASS, A. *The Interation between Category Theory and Set Theory.* In *Mathematical Applications of Category Theory.* Denver, col. 1983, v. **30** of Contemporary Mathematics, p.5-29.

[18] BERNAYS, P. *On Platonism in Mathematics.* In BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. *Philosophy of Mathematics.* 2ed, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983

[19] BÉZIAU, J-Y. *La Théorie des ensemble et la théorie des catégories: présentation de deux soeurs ennemies du point de vue de leurs relations avec les fondements des mathématique.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, v. **IX**, n. 1, 2002.

[20] BORCEUX, F. *Handbook of Categorical Algebra I: basic category theory.* Enciclopedia of Mathematics and its applications **50**, Cambridge University Press, 1994.

[21] BOURBAKI, N. *Elements de Mathématique: théorie des ensembles.* Paris, Diffusion CCLS, 1997.

[22] BUENO, O. *Why Identity is Fundamental.* American Philosphical Quartely **51**(4), 2014, p325-332.

[23] BUTTERFIELD, J. & ISHAM, C.J. *Some Possibles Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quamtum Gravity.* In: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9910005v1

[24] CANTOR, G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* New York, Dover, 1955.

[25] CAROLI, A.J. de *Sobre a Teoria dos Universos.* Tese de Doutorado, São Paulo, 1972.

[26] CATREN, G. & PAGE, J. *On the notion of indiscernilibity in the light of Galois-Grothendieck theory.* Internet document: http://philsci-archive.pitt.edu/10117/, 2013.

[27] CIFUENTES, J.C.V. *O Método dos Isomorfismos Parciais: um estudo da expressividade matemática.* Campinas, Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1992.

[28] COELHO, A. M. *Indistinguibilidade: uma abordagem por meio de estruturas.* São Paulo, Tese de Doutorado, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, 2005.

[29] COECKE, B. *Ed. New Structures for Phisics.* Lect. Notes Phys. 813, Springer, 2011.

[30] COELHO, A. M. & KRAUSE, D. *Identity, Indiscernibility, and Philosophical Claims.* Axiomathes, v.15(2), jun. 2005, p.191-210.

[31] CORFIELD, D. *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2003.

[32] CORRY, L. *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Berlin, 2ed., Springer Basel, 2004.

[33] da COSTA, N.C.A. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. São Paulo, EPU/EDUSP, 1980.

[34] da COSTA, N.C.A. *O Conhecimento Científico*. São Paulo, Discurso Editorial, 1997.

[35] da COSTA, N.C.A. *Logique Classique et non Classique*. Paris, Masson, 1997.

[36] da COSTA, N.C.A. *Un Nouveux Système Formel Suggéré par Dedecker*. C.R. Acad. Sc. Paris, A. **265**, 85-88, 1967.

[37] da COSTA, N.C.A. & KRAUSE, D. *Lógica*. Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência - UFSC/CNPq internet document: https://vdocuments.site/logica-decio-krause-e-newton-costa.html

[38] DALLA CHIARA, M. L. & TORALDO di FRANCIA, G. *Individuals, kinds and names in phisics*. in: G. CORSI, *et al.*, *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, Physics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 39-46., 1993.

[39] DARBY, G. *Vague Objects in Quantum Mechanics?* In: AKIBA, K. & ABASNEZHAD, A. (Ed.) *Vague Objects and Identity: new essay on ontic vagueness*. New York, Springer, v.**33**.

[40] DEDECKER, P. *Introduction aux Structures Locales.* Colloque de géométrie differencialle globale, Bruxelles, 19-22, dec. 1958, 103-135.

[41] ĐURIĆ, M. *On Classes and Universes.* Publications de L'institut Mathématique, Nouvelle Série, Tome 14(28), 1972, p. 39-48.

[42] EHRESMANN, C. *Catégories et Structures.* Dunod, 1965.

[43] EILENBERG, S. and MACLANE, S. *General Theory of Natural Equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc. **58**, 231-294. 1945.

[44] ENDERTON, H.B. *Introduction to Set Theory.* Academic Press, 1977.

[45] FERREIRÓS, J.D. *Labyrinth of Thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* New York, Spring-Verlag, 2007.

[46] FERREIRÓS, J.D. *O Surgimento da Abordagem Conjuntista em Matemática.* Revista Brasileira de História da Matemática, v.**2**, n.4, p.141-154.

[47] FLORI, C. *A first Course in Topos Quantum Theory.* Berlin, Lecture Notes in Physics, **868**, Springer-Verlag, 2013.

[48] FRENCH, S. & KRAUSE, D. *Identity in physics: a historical, philosophical, and formal analysis.* Oxford, Clarendon Press, 2010.

[49] FRENKEL, E. *Math Quartel Joins Forces on Unified Theory.* Quanta, Dec. 8, 2015.

[50] GABRIEL, P. *Des Catégories Abéliennes.* Bulletin de la Sociéte Mathématique de France, **90**, 1962, 324-448.

[51] GALLOIS, A. *Occasions of Identity: a study in the metaphysics of persistence, change, and sameness.* Clarendon Press, Oxford, 1998.

[52] GEROCH, R. *Mathematical Physics.* Chicago, Univ. of Chicago Press, 1985.

[53] GOLDBLATT, R. *Topoi: the categorial analysis of logic.* New York, Dover, 2006.

[54] GONSETH, F. *La Géométrie et le Problème de l'espace.* 2ed., Griffon, Neuchêtel, 2018.

[55] GELOWATE, G. *Observações sobre Matemática e Comprometimento Ontológico.* Florianópolis, Dissertação de mestrado, 2004.

[56] GROTHENDIECK, A. et Verdier, J.L. (eds.) *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas Seminaire de Géometrie Algebrique du Bois-Marie.* SGA, 4, Tome I, Théorie des Topos (Lecture Notes in Mathematics, 269). Amerian Mathematical Society, 1972.

[57] HATCHER, W. S. *The Logical Foundations of Mathematics.* Oxford, Pergamon Press, 1982.

[58] HOBBES, T. *De Corpore*, in: The English Works of Thomas Hobbes, v.**1**, organizado por Sir William Molesworth. London: John Bohn, 1839.

[59] HUME, D. *Investigação Acerca do Entendimento Humano*. São Paulo, Nova Cultura, 1986.

[60] ISBELL, J.R. *Structures of Categories*. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 619-655, 1966.

[61] KAN, D.M. *Adjoint functors*. Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 294-329.

[62] KRAUSE, D. *On quasi-set theory*. Notre Dame J. of Formal Logic, **33**, p.402-11.

[63] KRAUSE, D. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. São Paulo, EPU, 2002.

[64] KRAUSE, D. *Quantum Mechanics, Ontology, and Non-reflexive Logics*. In: K. Sienicki (ed.) *Quantum Mechanics Interpretations*. Open Academic Press, 2016.

[65] KRAUSE, D. *Non-Reflexividade, Indistinguibilidade e Agregados de Weil*. Tese Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990.

[66] KRAUSE, D. *Entity, but no Identity*. Internet Document: in http://philsci-archive.pitt.edu/3283/1/Entities.pdf

[67] KRAUSE, D. *A Note on Quasi-Ehresmann-Dedecker Universes*. Internet document: in https://arxiv.org/pdf/1708.05839.pdf

[68] KRÖMER, R. *Tool and Object: a history and philosophy of category theory*. Berlin, Springer Verlag, 2007.

[69] LAMBEK, J. & SCOTT, P.J. *Reflexion on Categorical Foundations of Mathematics*. In: SOMMARUGA, G. (ed.) *Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics*. New York, Springer, v. **76**.

[70] LANDRY, E. *Categories for the Working Philosopher*. Oxford, Oxford Un. Press. 2018.

[71] LANGLANDS, R.P. *Problems in the Theory of Automorphic Forms*. Lectures in modern analysis and applications, III, Lecture Notes in Math 170, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1970.

[72] LAWVERE, F.W. *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. Berlin, Springer-Verlag, 1966, p.1-20.

[73] LAWVERE, F.W. & McLARTY, C. *An Elementary Theory of the Category of Sets*. (long version with commentary). In: Theory and Applications of Categories, **12**, 1-35.

[74] LAWVERE, F.W. & ROSEBRUGH, R. *Sets for Mathematics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2003.

[75] LAWVERE, F.W & SCHANEL, S.H. *Conceptual Mathematics: a first introduction to categories*. Cambridge, Cambridge Uni. Press, 1997.

[76] LEIBNIZ, G.W. & CLARKE, S. *Leibniz and Clarke: Correspondence*. Edited by Roger Ariew, Indianapolis & Cambridge: Hackett, 2000.

[77] LEINSTER, T. *Basic category theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2014.

[78] LOWE, E.J. *The Metaphysics of Abstract Objects*. The Journal of Philosophy, v. **92**, Issue 10 (Oct. 1995), 509-524.

[79] LOWE, E.J. *The Possibility of Metaphysics: substance, identity, and time*. Oxford, Clarendon Press, 1999.

[80] LOWE, E.J. *A Survey of Metaphysics*. Oxford, Oxford Univ. Press. 2002.

[81] LOUX, M.J. *Metaphysics: a contemporary introduction*. 3^{ed}, Routledge, 2006.

[82] MACHOVER, M. *Set Theory, Logic and their Limitations*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996.

[83] MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematicians*. v.**5** of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2nd, 1971.

[84] MAC LANE, S. *Mathematics, Form and Function*, New York, Springer-Verlag, 1986.

[85] MAC LANE, S. & MOERDIJK, I. *Sheaves in Geometry and Logic: a first introduction to topos theory*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[86] MAC LANE, S. *Internal Logic in Topoi and other Categories.* J. Symb. Logic. **39**(2), 427-428.

[87] MAC LANE, S. *The PNAS way back them.* Proc. Nat. Acad. Sci., USA, v. 94, jun. 1997, p.5983-5985.

[88] MARQUIS, Jean-Pierre. *From a Geometrical Point of View: a study of the history and philosophy of category theory.* Springer, 2009.

[89] MAZUR, B. *Theory of Categories.* Academic Press, Elsevier v. **17**, New York, 1965.

[90] MAZUR, B. *When is one thing equal to some other thing?.*

[91] McLARTY, C. *Exploring Categorial Structuralism.* Philosophia Mathematica, **12**(3), 37-53.

[92] MEYERSON, E. *Identité et Realité.* Paris, Félix Alcan, 1908.

[93] MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic.* New York, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

[94] MENEZES, P. *Teoria das Categorias para Ciência da Computação.* São Paulo, Editora Sagra Luzzatto, 2006.

[95] NOONAN, H.W. *Objects and Identity: an examination of the relative identity thesis and its consequences.* Martinus Nijhoff Publishers, Netherlands, 1980.

[96] von Neumann, J. *An Axiomatization of Set Theory*, in J. van Heijenoort (ed.) From Frege to Gödel, Harvard University Press, Cambridge, p. 346-254. 1967.

[97] ORŁOWSKA, E. & PAWLAK, Z. *Expressive Power of Knowledge Representation Systems.* International Journal of Man-Machine Studies, v.20, Issue 5, May 1984, p. 485-500.

[98] ØYSTEIN, L. & PETTIGREW, R. *Only up to Isomorphism? Category Theory and the Foundations of Mathematics.* Internet document: http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/5392.

[99] PAVOL, H. *An Introduction to the Category of Graphs.* The New York Academy of Science, 1979.

[100] POINCARÉ, H. *Science and Hypothesis.* The Walter Scott Publishing, New York, 1905.

[101] QUINCEY, T. *Kant in his Miscellaneous Essays.* In: Blackwood's Edinburgh Magazine, **v. XXVIII**, Jul-Dec., 1830.

[102] RESCHER, N. *Process Metaphysics: an introduction to process philosophy.* Suny Press, 1996.

[103] RESNIK, M. *Mathematics as a science of patterns: ontology and reference.* Noûs **15**, 1981, 529-550.

[104] RIOS, M. *On a Final Theory of Mathematics and Physics.* Internet document: https://arxiv.org/pdf/1502.04794.

[105] RODIN, A. *Axiomatic Method and Category Theory.* New York, Studies in epistemology, logic, methodology, and philosophy of science, v. **364**, Springer, 2014.

[106] RODIN, A. *Categories without Structures.* In: Philosophia Mathematica, v. 19, Issue 1, Feb.2011, p.20-46.

[107] SAKURAI, J.J. *Modern Quantum Mechanics.* Addison-Wesley, Reading, 1994.

[108] SHAPIRO, S. *Intensional Mathematics.* Elsvier Science Publisher, **v. 113**, New York, 1985.

[109] SKOL, B. *Objective Becoming.* Oxford, Oxford Univ. Press, 2015.

[110] SPANIER, H.E. *Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos.* Curitiba, Soc. Parnaenese de Matemática, 1961.

[111] SONNER, J. *On The Formal Definition of Categories.* Math. Zeitschr. **80**, 1962, P. 163-176.

[112] TORRETTI, R. *El Paraíso de Cantor: la tradición Conjuntista en la Filosofia Matemática.* Editora Universitaria, Universidad Nacional Andrés Bello, 1998.

[113] van FRAASSEN, B. *Quantum Mechanics: an empiricist view.* Oxford, Clarendon, 1991.

[114] van HEIJENOORT, J. ed. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic.* 1879-1931. Cambridge, M.A. Harvard Press. 1967.

[115] VOLKOV, A. G. *Teoria das Categorias e Teoria dos Conjuntos*. São Paulo, Univ. São Paulo, Dissertação de Mestrado, 1997.

[116] WANG, H. *Popular Lectures on Mathematical logic*. New York, Dover, 1993.

[117] WHITEHEAD, A.N. *Process and Reality*. New York, Macmillan, 1929.

[118] WILLIAMS, C.J.F. *What is Identity?* Oxford, Clarendon press, 1989.

Esta tese foi elaborada no sistema LaTeX.