Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval

Organizadores
Méricles T. Moretti
Celia Finck Brandt

Desconstrução geométrica
Reta
Parábola
GeoGebra
Interpretação global
Operações cognitivas
Geometria
Quádricas
Design
Escritos algébricos
Frege
Números racionais
Álgebra
Registro
Infinitésimo
Mudança de dimensão
Funções discursivas
Educação inclusiva
Modelagem
Contribuições TRRS
Gesto intelectual
Pensamento computacional
Salva denotatione veritate suppositione
Parte-todo
Criatividade
Signo

Em homenagem ao prof. François Pluvinage

Méricles Thadeu Moretti
Celia Finck Brandt (Orgs.)

Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval

Edição REVEMAT/UFSC

Florianópolis

2020

Homenagem a François Pluvinage
(In Memoriam)

François Pluvinage doutorou-se em didática da matemática em 1977 com a tese intitulada “Dificuldades de Exercícios Escolares em Matemática. Estudo do comportamento de respostas através de enquetes a diversas modalidades” cuja temática tratava de métodos estatísticos aplicados aos estudos em educação matemática.

Professor da Universidade Louis Pasteur, hoje Universidade de Estrasburgo (UNISTRA), participou, com Georges Glaeser (matemático e didata), Raymond Duval (filósofo, psicólogo e pesquisador em ciências cognitivas) e de outros colegas, da criação da equipe didática de matemática de Estrasburgo, responsável por um DEA (Diplôme d'Etudes Approfondies) que funcionou ininterruptamente até os anos 2000. Durante muitos anos, dirigiu o Instituto de Pesquisa Sobre o Ensino de Matemática (IREM) em Estrasburgo. Orientou várias teses e muitos trabalhos de conclusão de DEA. Em 1988 fundou, juntamente com Raymond Duval a revista “Annales de Didactique et de Sciences Cognitives” e foi seu editor-chefe por muitos anos, um trabalho que realizou com paixão até o final de sua vida. Participou de vários projetos de ensino de matemática, em particular do projeto de pedagogia diferenciada na escola Martin Schongauer em Ostwald, iniciado por Louis Legrand (1921-2015) professor de Ciências da Educação e autor do relatório “Pour un collège démocratique” (1982). Colaborou, em diversas situações, com o Ministério da Educação francesa, particularmente durante a vigência do programa *Évaluation en Sixième*. Orientou, em didática da matemática, diversos alunos de diversos países, entre esses países, cita-se a Argélia, Brasil, Canadá, Costa Rica, Chile, Chipre, França, Grécia, Guatemala, Madagascar, México, Marrocos, Peru, Portugal, Ruanda...Após a aposentadoria e até dezembro de 2019, continuou a trabalhar no CINVESTAV (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional) no México, contribuindo para a formação de gerações de estudantes de doutorado, não só desse país, mas também de outros países da América Latina.

Deixou-nos, alunos, colegas de trabalho, amigos, três filhos, seis netos e a esposa Geneviève em 23 de março de 2020.

Texto elaborado a partir da contribuição de Jean-Claude Rauscher, Rosa Páez, Robert Adjiage, Claire Dupuis, Raymond Duval, Fernando Hitt, Kallia Pavlopoulou e Ana Mesquita.

Méricles Thadeu Moretti
(Ex-aluno de doutorado
de F. Pluvinage)

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina

F636 Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis : Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p. : il., gráf., tab.

ISBN: 978-65-00-04795-0

E-book (PDF).
Disponível em:
https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Semiótica. 3. Duval, Raymond, 1937. I. Moretti, Méricles Thadeu II. Brandt, Celia Finck.

CDU: 51:37

Elaborada pela bibliotecária Suélen Andrade – CRB-14/1666

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Os grupos de pesquisa GPEEM e GEPAM, por meio de seus líderes, têm a grata satisfação de apresentar, neste e-book, diversas pesquisas recentes que se debruçam na teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. São resultantes de dissertações e teses concluídos ou ainda em andamento.

O e-book contemplará, também, um ensaio de Raymond Duval voltado para as condições para compreensão da álgebra elementar e uma pesquisa desenvolvida por Jean-Claude Rauscher que apresenta os resultados do acompanhamento de um aluno com dificuldades na aprendizagem da álgebra. Os capítulos serão publicados em versão original em francês e sua tradução.

A apresentação dos capítulos caracterizará a importância da disseminação dos resultados das pesquisas subsidiadas pela teoria dos Registros de representações semiótica de Raymond Duval orientadas pelo Professor Dr. Méricles Thadeu Moretti do PPGECT/UFSC e pela Professora Dra. Celia Finck Brandt da UEPG.

São pesquisas sobre as especificidades relacionadas à aprendizagem de objetos matemáticos, como por exemplo, álgebra e geometria. Outras relacionadas às formas de conduzir o ensino subsidiadas pela teoria de Duval. E, ainda, pesquisas sobre a aprendizagem de pessoas deficientes: uma cega congênita e um estudante com Discalculia do Desenvolvimento.

São apresentadas pesquisas que evidenciam tanto as funções discursivas como as funções meta-discursivas e suas operações cognitivas a serem contempladas no ensino e a serem objeto da análise das produções acadêmicas no tocante às compreensões e superação de dificuldades para a aprendizagem da matemática.

O e-book inicia com a preciosa colaboração de Raymond Duval por meio de discussões apresentadas em seu ensaio intitulado "Escritos simbólicos e operações heterogêneas de substituição de expressões: as condições de compreensão em álgebra elementar" que se voltam para análises dos diferentes tipos de operações de substituição possíveis a serem feitos com os escritos simbólicos. São análises que dizem respeito à tomada de consciência de operações semio-cognitivas que permitirão entender como trabalhar com escritos algébricos e reconhecer quando aplicá-los. Duval apresenta no primeiro capítulo do e-book quatro questões relacionadas às condições semio-cognitivas condicionantes para a compreensão e aquisição de conhecimento em álgebra bem como para o seu uso espontâneo em situações de resolução de problemas fora do âmbito matemático: designar objetos em linguagem natural, utilizando letras ou símbolos; visualizar a estrutura matemática da formulação de um problema, em um texto que articula diversas frases; formular problemas cujas resoluções requerem a designação funcional de uma segunda quantidade desconhecida para escrever duas expressões incompletas, a partir do enunciado do problema e formar os dois membros de uma equação. Em seu capítulo Duval apresenta distinções necessárias para descrever e definir a especificidade dos escritos simbólicos. Primeiro sobre a importância de não confundir dois níveis de unidades de sentido: dos elementos significantes (fonemas, morfemas e palavras de uma linguagem natural, dígitos que designam números em um sistema de numeração); das expressões incompletas ou completas, (sintagmas nominais e verbais para frases e sintagmas operatórios para os escritos simbólicos). Em relação aos escritos simbólicos Duval evidencia dois tipos de substituições que devem ser diferenciados: conforme sejam relativos aos sintagmas operatórios (substituições com expressões incompletas); ou à igualdades, equações ou expressões (substituições em expressões completas). Essa diferenciação coloca em cena a "denotação" que é a unidade de sentido próprio de uma expressão completa, e o "sentido" que é a unidade de sentido de uma expressão incompleta. A denotação em equações incompletas torna-se "o objeto designado" por um sintagma operatório ou nominal, e o sentido torna-se a "significação" própria de cada expressão incompleta usada para denotar ou designar um objeto. E isso significa que ela resulta de uma operação de designação e caracteriza SUBSTITUIÇÃO SEMÂNTICA (por exemplo (a + b) /2 = a/2 + b/2) que não deve ser confundida com SUBSTITUIÇÃO OPERATÓRIA (por exemplo 2×2 = 4). A conclusão da análise linguística dos escritos algébricos simbólicos apresentada por Duval no capítulo aponta para a necessidade da distinção semântica de Frege entre o sentido de uma expressão e o que ela denota. Com o capítulo Duval aponta que uma análise semio-cognitiva dos escritos simbólicos significa analisar as necessidades e as dificuldades de aprendizagem da álgebra antes de organizar o seu ensino cujo objetivo é, por um lado, sensibilizar tanto para as operações discursivas específicas da linguagem natural, como para os escritos simbólicos, e por outro, quebrar a parede de vidro que os separa. Os excertos apresentados no capítulo foram feitos para que os próprios professores possam apropriar-se desse instrumento analítico, a fim de apreender as causas profundas dos bloqueios dos alunos e desenvolver atividades, cujo objetivo seja a tomada de consciência por parte dos alunos.

Também contamos com a preciosa colaboração Jean-Claude Rauscher com a apresentação de seu estudo realizado, por um período de três anos, com um estudante com dificuldades em álgebra elementar. Os resultados do estudo são apresentados no capítulo intitulado “O caso Jonathan: o complexo de álgebra”. No início, o trabalho com o estudante foi para ajudá-lo em atividades matemáticas que exigiam transformações de expressões algébricas, resolução de equações e equacionamento dos dados de um problema em uma equação para a sua solução. Foi no período de equacionamento dos dados de um problema que uma tabela bidimensional foi utilizada para ajudar o aluno nos diferentes tipos de designações dos diferentes sintagmas do problema: designação direta, indireta, funcional, dupla designação e equivalência referencial. Antes, porém foi apresentado um trabalho realizado para o desenvolvimento da capacidade de efetuar diferentes designações a partir de listas abertas de números inteiros que possuíam relações funcionais (duplos, quadrados etc.) para permitir que o aluno efetuasse os seus primeiros passos na álgebra elementar. Foram tarefas semio-cognitivas propostas que permitiram ao aluno aprender a fazer o caminho da álgebra. O trabalho desenvolvido com o aluno exigira verdadeiras abordagens matemáticas dentre as quais: exploração, conjectura, generalização e prova e caracterizaram a utilização do cálculo algébrico, como ferramenta para fazer generalizações e prova relativas à generalização de regularidades numéricas.

As demais pesquisas apresentadas na sequência voltam-se para a disseminação de seus resultados com o objetivo de oferecer aos professores subsídios teóricos de natureza semio-cognitiva para a organização de suas práticas educativas voltadas para a aprendizagem da matemática.

Nessa direção caminha o capítulo de autoria de Bárbara Cristina Pasa e Méricles Thadeu Moretti intitulado “O esboço de curvas no ensino médio na perspectiva da interpretação global de unidades figurais: possibilidades a partir da noção de infinitésimo” no qual o esboço de curvas de funções do ensino médio é problematizado a partir da abordagem de interpretação global de propriedades figurais, preconizada por Duval. Neste estudo, os autores apresentam um caminho alternativo para esboçar e compreender curvas utilizando as taxas de variação instantâneas da função como recurso orientador para a interpretação global, calculadas e interpretadas por meio da noção de infinitésimos. A fim de suscitar reflexões sobre as potencialidades do esboço de curvas na perspectiva do caminho alternativo sob a ótica da teoria cognitiva de Duval, foram consideradas algumas construções de estudantes e verificou-se que os polinômios do segundo e terceiro graus mostram-se muito convenientes para esse tipo de estudo, entre outras coisas, por permitirem uma compreensão inicial sobre a variabilidade de funções.

Igualmente o capítulo intitulado “Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas mediado pelo GeoGebra: articulações entre a abordagem de interpretação global e a teoria das situações didáticas” de autoria de Sérgio Florentino da Silva e Méricles Thadeu Moretti discute o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas. Para tanto, do ponto de vista da aprendizagem os autores apoiaram-se na abordagem de interpretação global de propriedades figurais de Raymond Duval. Para seu ensino, os autores sugerem que a participação dos alunos esteja em sintonia com elementos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Nesse caminho propõem algumas atividades com o uso do software GeoGebra e discutem, ainda, que esse software, de forma dinâmica, interativa e experimental, é um facilitador na articulação entre a teoria semio-cogntiva de Duval e elementos da TSD de Brousseau.

Contribui para a divulgação de resultados de pesquisas subsidiadas pela teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval o capítulo intitulado “Esboço da parábola por meio de translações no ensino médio” de autoria de Djerly Simonetti e Méricles Thadeu Moretti no qual é realizada uma discussão sobre o esboço da parábola por meio de translações ao mesmo tempo que apresenta registros de uma primeira experiência com estudantes do ensino médio destacando as operações cognitivas de tratamento e conversão, bem como, as variáveis visuais que se fazem presentes considerando os estudos de Duval sobre interpretação global de propriedades figurais.

Da mesma forma o capítulo de autoria de Carine Scheifer e Celia Finck Brandt intitulado “Design teórico do pensamento geométrico” apresenta um quadro teórico que contempla, de forma prática e sucinta, as diversas especificidades sobre o que Raymond Duval considera ser necessário para a aprendizagem da Geometria. Cada categoria criada para compor o quadro diz respeito a um tipo de atividade cognitiva que deve ser trabalhada junto com o aluno durante o processo de ensino da Geometria. Entre as contribuições deste quadro teórico estão: a análise de questões de avaliação em larga escala; o conhecimento de um panorama da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a Geometria; a utilização como consulta para organizações didáticas e/ou de pesquisas; e ainda pode ser utilizado para avaliar o que está sendo valorizado ou deixado de lado tanto no ensino quanto nos materiais didáticos utilizados para o ensino da Geometria.

Contribuições significativas podem ser encontradas no capítulo de autoria de Fátima Aparecida Queiroz Dionizio e Celia Finck Brandt intitulado "Ensino da geometria na infância: saberes e conhecimentos na aprendizagem da docência" no qual são apresentados resultados de uma investigação relativa à aprendizagem da docência para o ensino da geometria a partir de uma análise dos saberes e conhecimentos geométricos manifestados por um grupo de professoras das séries iniciais do ensino fundamental. Com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, o estudo abordou o papel das operações cognitivas necessárias para a organização do trabalho com a geometria. Foram estabelecidas relações entre os saberes e conhecimentos docentes, a prática pedagógica e o desenvolvimento do pensamento geométrico pelos estudantes no período da infância.

Igualmente o capítulo de autoria de Franciele Isabelita Lopes Novak e Celia Finck Brandt intitulado "Uma experiência com uso do ambiente dinâmico GeoGebra e os aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional". O capítulo traz os resultados de uma pesquisa relativa à utilização do ambiente dinâmico GeoGebra à luz das especificidades da teoria de Duval quanto à geometria. Na pesquisa foram analisadas as produções dos alunos, tanto digitais quanto escritas, em tarefas propostas para a dedução da Lei de Euler para poliedros regulares. O estudo mostrou, dentre os principais achados, a simultaneidade que há entre as modificações posicional e ótica, além da apreensão sequencial ser presente de modo singular quando se trata de um ambiente dinâmico.

O capítulo de Roberta Nara Sodré de Souza e Méricles Thadeu Moretti intitulado "A aprendizagem de geometria sob o olhar da desconstrução dimensional das formas" apresenta os resultados de uma pesquisa voltada ao estudo semio-cognitivo das mudanças dimensionais no processo de aprendizagem de geometria relacionadas a resolução de problemas com figuras. Na análise, os autores revelaram elementos que indicam fortemente a desconstrução dimensional como um alicerce a aprendizagem e promoção do conhecimento geométrico.

No capítulo de Daiana Zanelato dos Anjos e Méricles Thadeu Moretti intitulado "Elementos semio-cognitivos para a aprendizagem de estudantes cegos em matemática: o livro didático em Braille" a teoria de Raymond Duval é entrelaçada a uma questão sensível e contemporânea: a educação inclusiva. Neste estudo, os autores apresentaram uma análise tanto semiótica quanto cognitiva sobre a aprendizagem de matemática de uma estudante cega congênita. Considerou-se o livro didático de matemática em Braille e as possíveis armadilhas semióticas que se revelam para além da visão.

O capítulo de Jorge Paulino da Silva Filho e Méricles Thadeu Moretti intitulado "Percepções de um estudo de caso com um aluno com discalculia do desenvolvimento – uma abordagem baseada nas funções discursivas de Raymond Duval" apresenta os resultados de uma pesquisa também no âmbito da educação inclusiva, no qual são trazidas algumas questões que emergiram de um estudo de caso com um estudante com Discalculia do Desenvolvimento, transtorno de aprendizagem que afeta de 3 a 6,5% das crianças em idade escolar. O objetivo foi o de analisar algumas de suas produções escritas e orais, por intermédio das Funções Discursivas.

Ainda na direção da disseminação de resultados de pesquisas subsidiadas pela teoria de Raymond Duval encontra-se o capítulo intitulado "Características visuais das figuras geométricas empregadas no estudo da relação parte-todo dos números racionais” de autoria de Andréa Fernandes Silva e Méricles Thadeu Moretti onde os autores buscaram analisar as características visuais das figuras geométricas utilizadas para trabalhar na escola a relação parte-todo dos números racionais, a partir da Teoria de Raymond Duval. Dessa forma, analisaram os elementos visuais, bem como os tipos de apreensões que podem ser evocadas e as possíveis modificações que sejam necessárias, no estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais, para caracterizar a utilização desses tipos de figuras geométricas.

O capítulo intitulado “O papel das funções discursivas na aprendizagem matemática: um olhar para os problemas do campo aditivo” de autoria de Eduardo Sabel e Méricles Thadeu Moretti apontou os resultados de uma pesquisa que indicam de que forma eles foram levados a pensar sobre o papel da linguagem no processo de ensino e aprendizagem da matemática. No presente estudo, os autores apresentaram as funções discursivas e meta-discursivas de uma língua, realizando uma discussão sobre a importância e o papel dessas funções e operações discursivas na compreensão de problemas no campo conceitual aditivo de Vergnaud.

Igualmente encontra-se na presente coletânea o capítulo de autoria de Luani Griggio Langwinski, Tânia Stella Bassoi (in memoriam) e Celia Finck Brandt intitulado “Os registros de representação semiótica nas aulas de álgebra do 8º ano: uma caracterização de como os professores identificam e ensinam os objetos matemáticos algébricos”. O capítulo estrutura-se a partir das contribuições de Raymond Duval para o ensino de álgebra relativa às três atividades cognitivas associadas à representação: formação, tratamento e conversão, dando ênfase ao discurso utilizado pelos professores, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014)**.** Neste estudo, as autoras identificaram as formas de abordagens do ensino de álgebra utilizadas por professores do 8º ano para a formalização desse ensino. Verificou-se o zelo dos professores quanto às formalizações de conceitos e termos utilizados, estando sempre atentos as dúvidas dos alunos, contudo, foi evidente a ênfase dada por eles ao tratamento algébrico e a ausência de registros figurais.

As contribuições do estudo de José Luiz Rosas Pinho e Méricles Thadeu Moretti são apresentadas no capítulo intitulado “O papel das descrições e o potencial semiótico dos softwares de geometria dinâmica na criação e resolução de problemas de geometria no ensino superior”. No capítulo é apresentada uma discussão sobre o papel das descrições, segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, na criação de problemas, partindo-se de uma formulação completa de um problema até chegar a formulações mínimas. Um exemplo instigante para estudantes do ensino superior é apresentado pelos autores, gerando diversos problemas, com hipóteses variadas, mas com uma mesma conclusão. Os resultados do potencial semiótico do GeoGebra, explorado para se obter a resolução de um desses problemas, foi apresentado.

Jessica Rohden Schlickmann e Mericles Thadeu Moretti no capítulo intitulado “O pensamento computacional na perspectiva da teoria dos registros de representação semiótica no ensino de geometria” desenvolveram uma pesquisa voltada para o Pensamento Computacional Desplugado para a criação de registros representações de quadriláteros por meio da plataforma Scratch. Os autores apontam ser Pensamento Computacional Desplugado uma alternativa para a inserção de atividades do meio virtual para resolver a ausência de computadores nas salas de aulas, ou ainda a ausência de uma internet de qualidade.

A disseminação dos resultados de pesquisas com subsídios da Teoria de Raymond Duval é incrementada com os estudos de Crislaine Costa e Méricles Thadeu Moretti no capítulo intitulado "A contribuição da teoria dos registros de representação semiótica nas pesquisas científicas brasileiras: tendências e reflexões" voltada para a identificação do panorama das pesquisas científicas, pontuando as tendências e reflexões sobre a aplicação da Teoria. Os autores investigaram de que forma os Registros de Representação Semiótica de Duval têm sido utilizado nas pesquisas brasileiras e os resultados são apresentados com destaque nos aspectos teóricos abordados, os níveis de abrangência e estratégias metodológicas que foram empregadas.

E por fim o capítulo de autoria de Helaine Maria de Souza Pontes e Celia Finck Brandt intitulado "Modelagem matemática sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica e da educação dialógica" que traz os resultados de um pesquisa voltada para alguns aspectos das implicações da Modelagem Matemática, para a aprendizagem da matemática, em duas dimensões: uma dimensão cognitiva, levando em consideração as proposições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica; e uma dimensão social, embasada no entendimento de Paulo Freire sobre educação dialógica.

As pesquisas apresentadas compreendem um período de aproximadamente 15 anos de estudos da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Os estudos voltaram-se ora para conteúdos matemáticos, ora para enfrentamento das dificuldades dos alunos e de erros recorrentes que se apresentam ao longo de sua escolaridade e ora para as práticas dos professores na busca incansável, ao longo de sua carreira profissional, das melhores formas de organizar o ensino e proceder com a avaliação da produção discente.

A teoria é complexa e densa, mas da forma como os resultados dos estudos são apresentados, torna-se acessível a professores dos diferentes graus de ensino: fundamental, médio e superior. Por essa razão a importância da disseminação desses resultados e de sua contribuição para a formação matemática dos alunos.

Esperamos, por meio dessa coletânea e das pesquisas divulgadas uma referência a um quadro teórico para a organização de sequências de atividades que conduzam à aquisição tanto de conceitos como de procedimentos matemáticos.

Méricles Thadeu Moretti
Celia Finck Brandt

CAPÍTULO I

Escritos simbólicos e operações heterogêneas de substituição de expressões: *as condições de compreensão em álgebra elementar*

Les écritures symboliques
et les opérations hétérogènes de substitution d'expressions
Les conditions de compréhension en algèbre élémentaire[1]

Raymond Duval
Trad. Méricles Thadeu Moretti

Na aprendizagem de álgebra durante o Ensino Fundamental 2 (EF-2)[2], os alunos enfrentam constantemente uma espécie de parede de vidro: os escritos simbólicos, ou seja, a variedade de expressões que combinam números, letras e símbolos de operações, cujo registro semiótico permite-lhes escrever; bem como a heterogeneidade das operações de substituição umas pelas outras dessas expressões. As palavras da língua e da matemática parecem transparentes, como as que designam operações, relações, propriedades das equações e explicam como utilizá-las nos cálculos. Mas, na verdade, para três quartos dos estudantes, e todos aqueles que não estudaram ciências, tal parede é opaca, uma vez que eles não conseguem ver através dela o que os professores veem e que não há meio algum de passar do registro da língua natural, no qual, as operações exigidas para transitar de uma expressão verbal a outra são efetuadas por associações de palavras "que fazem pensar em...". No entanto, as operações de substituição de expressões simbólicas requerem a análise exclusiva da forma das combinações de números, letras e

---

[1] *Dans l'Annexe 1, la version originale en français*.
[2] Nota do Tradutor. Usaremos os termos entre colchetes e em negritos, a seguir, para designar os níveis de ensino equivalentes, no Brasil, aos níveis de ensino Francês: o ensino básico francês obrigatório é composto de 12 anos: 5 anos em nível de ensino *primaire (école élémentaire)* (6 a 10 anos de idade) [Ensino Fundamental 1 – **EF-1**]; 4 anos do *collège* (11 e 14 anos de idade) [Ensino Fundamental 2 – **EF-2**] e; 3 anos do *lycée* (15 a 17 anos de idade) [Ensino Médio – **EM**].

símbolos das operações. Como não confundir as expressões obtidas por meio das múltiplas operações de substituição possíveis, tendo em conta a uniformidade das expressões escritas? Como equacionar os dados de um problema concreto ou não-matemático, e resolvê-lo usando uma equação como “ferramenta”? De outra forma, quais são os primeiros passos a serem seguidos, a fim de que os alunos aprendam álgebra? Há dois pontos de vista radicalmente diferentes para responder essa pergunta.

Em primeiro lugar, há o ponto de vista matemático que é, obviamente, primordial e serve para estruturar as análises, que levam à organização dos programas. Essas análises advêm de um objetivo, institucionalmente fixado, a ser atingido no final do EF-2: o uso de equações na resolução de problemas extra matemáticos. Então, a *análise matemático-regressiva* é realizada. O processo de aprendizado de uma equação, como sendo uma “ferramenta”, é desconstruído por pré-requisitos de conhecimento e *savoir-faire,* os quais também o são por outros pré-requisitos mais elementares. Esse processo avança até chegar à introdução de uma ou duas letras no cálculo com números. Os currículos para cada ano escolar são então determinados para fazer os alunos seguirem o caminho inverso dessa *análise matemático-regressiva*, em quatro ou cinco anos. Com o intuito de ajudar os professores a implementá-los em sala de aula, os currículos são enriquecidos com explicações de aquisição de conhecimento e aprendizagem, epistemológicas, psicogênicas, psicológicas, sociológicas ou pedagógicas. Mas nenhuma das explicações as quais eles fornecem é realmente relevante, pois ignoram o fato de que aprender matemática ocasiona dificuldades intrínsecas de compreensão, que não são encontradas em nenhum outro campo do conhecimento.

O outro ponto de vista é a análise do funcionamento semio-cognitivo subjacente à atividade matemática. Quais são os gestos intelectuais que permitem “fazer matemática”? Desse ponto de vista, a discriminação imediata da variedade uniforme dos escritos simbólicos, bem como a consciência de múltiplas operações de substituição possíveis são os dois primeiros passos a serem trabalhados com os alunos no ensino da álgebra. Os objetivos da aprendizagem não são a aquisição de conhecimentos e habilidades, mas *uma tomada de consciência de operações semio-cognitivas*, que permite entender como trabalhar com escritos algébricos e *reconhecer quando e em qual situação aplicar os conhecimentos adquiridos*. No entanto, só se pode tomar consciência fazendo, no seu próprio ritmo, tarefas que são desenvolvidas para cada uma das *diferentes operações semio-cognitivas específicas dos escritos* *simbólicos*, e que podem ser geridas individualmente. Essa tomada de consciência é um pré-requisito para a aquisição de conhecimento em álgebra elementar. Os critérios de sucesso que possibilitam avaliar o desempenho escolar dos alunos são diferentes daqueles, geralmente, adotados na sala de aula em sequências de atividades e em questões nacionais ou internacionais. Tais critérios de desempenho são, tanto, a rapidez de resposta, quanto, uma completa mudança de atitude em relação às tarefas matemáticas e à resolução de problemas, uma vez que, nessas tarefas específicas, acertar não basta, deve-se considerar o tempo de resposta, pois um aluno deve ser capaz de realizar as tarefas em *menos de trinta segundos*, independentemente, das variações da apresentação dos dados, das restrições da instrução e *do sentido da conversão a ser feita entre a linguagem natural e a escrita simbólica da expressão, seja ela completa ou incompleta*. Em outras palavras, o aluno deve reconhecer rapidamente os diferentes níveis de unidades de sentido em uma equação e as operações de substituição a serem realizadas, *sem ter que perguntar (professor ou aluno), ou ter alguém que lhe diga o que fazer*; sem isso não há outra aprendizagem possível em álgebra para o aluno.

*

***

São quatro questões que estão na base das pesquisas, sobre as condições semio-cognitivas condicionantes, para a compreensão e aquisição de conhecimento em álgebra, bem como para *o seu uso espontâneo em situações de resolução de problemas fora do âmbito matemático*.

A primeira pode parecer simples e até trivial: como designar objetos em linguagem natural, utilizando letras ou símbolos? O terceiro capítulo de *Semiose e Pensamento Humano*, de Duval (1995), com ênfase em uma citação em *Begriffsschrift*, de Frege, foi inteiramente dedicado a linguagem natural e linguagem formal.

A segunda tornou-se evidente por meio da pesquisa *Estruturas aditivas e complexidade psicogenética*, de G. Vergnaud (1976), sobre os problemas aditivos, e com a tese *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*, de Damm (1992). Como visualizar a estrutura matemática da formulação de um problema, em um texto que articula diversas frases, para descrever um cenário da vida real? (Duval, 2005).

A terceira surgiu com as formulações de problemas, cujas resoluções já não requerem a designação de uma quantidade desconhecida, mas a designação funcional de uma segunda quantidade desconhecida. Sem a consciência de que esse modo de designação não existe na língua, os alunos não podem equacionar os dados dos problemas que tenham duas unidades desconhecidas e não apenas uma (Duval, 2002, 2011). Como escrever duas expressões incompletas, a partir do enunciado do problema, que formarão os dois membros de uma equação?

A quarta questão, na verdade, pertence as três anteriores e diz respeito a todos os problemas que são dados no EF-2 para preparar a introdução de um novo conceito, novas operações, ou em exercícios com fins exploratórios e de pesquisa. O que vem a ser um problema matemático, desenvolvido para fins didáticos, e o que significa resolver matematicamente um problema? Em outras palavras, essa é a assustadora questão do papel dos problemas na aquisição de conhecimentos matemáticos, mas não parece sê-lo para os professores e para a grande maioria dos didatas. Foi só mais tarde que a enfrentei de frente: é preciso aprender a formular esses problemas para tornar-se capaz de resolvê-los (Duval, 2013).

Infelizmente, em um diálogo póstumo que tentei travar com Jean-Philippe Drouhard, toda essa pesquisa teve um resultado imprevisível. Encontramo-nos, com relativa regularidade, mas sem que eu tenha tentado compreender o que ele pensava. Tive que ler a sua tese, defendida em 1992[3], por conta de um encontro em torno do seu trabalho, no qual, realmente, haveria de empreender uma discussão sobre as nossas diferentes abordagens na análise dos escritos simbólicos.

Os trechos do confronto entre duas análises de escritos simbólicos[4], aqui apresentados, foram feitos primeiro para Jean-Claude Rauscher, que estava envolvido num trabalho de acompanhamento com Jonathan[5], e retomados depois para o benefício dos professores, que só lecionam no EF-2. O objetivo era reter apenas os pontos essenciais, que pudessem ser úteis em sala de aula no ensino e aprendizagem de álgebra, independentemente, de alguma teoria psicológica, semiótica, linguística, pedagógica ou didática; enfim, que os professores fossem capazes de observar e analisar por si mesmos as causas profundas das dificuldades e dos bloqueios recorrentes dos seus alunos.

Desde as primeiras linhas da introdução da sua tese, Jean-Philippe Drouhard apresentava a ideia orientadora da sua pesquisa, que tratava de duas

---

[3] Drouhard J.-P, 1992. *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de Doctorat. Paris VII.

[4] 2019, *Jean-Philippe Drouhard. de la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques* (Ed. M Maurel) pp. 105-139. Academia.edu *Ces extraits sont publiés avec l'aimable autorisation de l'éditrice de cet ouvrage*, Maryse Maurel.

[5] Ver Capítulo II deste e-book (Jean-Claude Rauscher. Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre).

mudanças de perspectiva a serem consideradas em relação ao que era, consensualmente, admitido nos trabalhos didáticos sobre álgebra elementar.

Logo no início desse trabalho há a hipótese muito geral de que na álgebra, *além das dificuldades conceituais*, o aprendente também se depara com dificuldades linguísticas ligadas *à complexidade da linguagem simbólica da matemática*. Em outras palavras, a "transparência" da linguagem simbólica é apresentada como ilusória e, um dos objetivos desse trabalho, fora, precisamente, remover essa *"ilusão de transparência"* (Duval, 1992, p. 3).

Em primeiro lugar, ao falar de "ilusão de transparência", Drouhard questionava uma ideia, que se tornou óbvia com o desenvolvimento da álgebra, *a ideia do carácter inteiramente explícito e controlável dos escritos simbólicos*[6]. A escrita simbólica é, de fato, o único tipo de representação utilizada na matemática na qual, por um lado, todos os elementos significantes necessários para se compreender uma expressão completa, são explicitamente dados, com pequenas exceções, por exemplo em: "*a*", em vez de "*1a*"[7], e na qual, por outro lado, cada elemento significante é unívoco. De outro modo, as igualdades ou equações são autossuficientes, pois não dependem de nenhum contexto ou situação, como em quase todas as afirmações em língua natural. Além disso, as transformações de uma para outras expressões simbólicas são totalmente explícitas e perfeitamente controláveis. *Razão pela qual, ao contrário de todas as proposições em linguagem natural, elas são algoritmizáveis. Portanto, os escritos simbólicos devem ser mais fáceis de se entender do que os enunciados em linguagem natural, as figuras geométricas ou, mesmo, do que os gráficos que devem ser entendidos qualitativamente e não, pontualmente. Mas, esse não é o caso.* Se os escritos simbólicos são matematicamente transparentes, trata-se de uma "ilusão de transparência", *pois eles sobrepõem, em uma mesma sucessão, diferentes tipos de agrupamentos de números, letras e símbolos, e tais agrupamentos constituem unidades de sentido em diferentes níveis,* quase impossíveis de serem discriminados e reconhecidos pela maioria dos jovens alunos. Em trabalhos posteriores, Jean-Philippe Drouhard preferiu falar de "implícito" em vez de "ilusão de transparência", o que não foi uma escolha casual, pois enquanto a noção de implícito conota algo que não é dito por ser

---

[6] Condillac expressou-se, no final do século XVIII, desta forma: a álgebra, que é a linguagem da matemática, é uma simplificação da linguagem e uma economia de signos, que possibilitam o aumento da capacidade de cálculo.
[7] Escreve-se "a" no lugar de "1 × a" e "2a" em vez de "2 × a".

conhecido ou demasiado óbvio, a expressão “ilusão de transparência” caracteriza a própria natureza dos escritos simbólicos da álgebra elementar.

1 DISTINÇÕES PRELIMINARES PARA DESCREVER E DEFINIR A ESPECIFICIDADE DOS ESCRITOS SIMBÓLICOS

Os escritos simbólicos são um tipo de representação gráfica que, verdadeiramente, nada tem em comum com a linguagem ou com as figuras. Para compreender isso, paremos um momento para refletir sobre o que há de específico na escrita, em comparação a dois outros tipos de representação mais comuns: as expressões linguísticas e as figuras, instrumentalmente, construídas em função de propriedades geométricas.

1.1 OS ESCRITOS SIMBÓLICOS VERSUS ESCRITOS ALFABÉTICOS: UMA RUPTURA COMPLETA COM A FALA

Os escritos simbólicos são um tipo de representação gráfica, que consiste em *uma sequência linear de elementos, que se distinguem visualmente e, cuja ordem de sucessão, obedece a certas restrições*. Esses elementos são letras de um alfabeto ou números de um sistema de numeração. Portanto, é importante separar dois tipos de escritos: os escritos alfabéticos e OS ESCRITOS SIMBÓLICOS. Os primeiros são uma codificação da fala, ou seja, de uma enunciação oral. Os últimos foram desenvolvidos para fins exclusivos do cálculo e são ESCRITOS OPERATÓRIOS, que não podem ser enunciados em língua natural nem falados oralmente.

Em relação aos escritos simbólicos, é importante não confundir dois níveis de unidades de sentido:

- O primeiro nível de sentido é o dos elementos significantes, que dependem inteiramente do sistema semiótico utilizado, como definido por Saussure (1972): fonemas, morfemas e palavras de uma linguagem natural, dígitos que designam números em um sistema de numeração. Assim, os dígitos “0” e “1”, por exemplo, não têm o mesmo valor de escolha opositivo em relação a um sistema de escrita binária ou a um sistema de escrita decimal;
- O segundo nível de sentido é o das expressões incompletas ou completas, que podem ser produzidas usando um sistema semiótico: sintagmas nominais e verbais para frases e, o que chamaremos de sintagmas operatórios para os escritos simbólicos.

Figura 1. Dois níveis de sentido dos escritos simbólicos

	ESCRITOS SIMBÓLICOS
1. SISTEMA DE ESCRITA DECIMAL	4 (*elemento que designa* um número) 44 (*sequência de dois elementos que designam* um outro número)
2. EXPRESSÃO INCOMPLETA: Os sintagmas operatórios articulam ao menos um dígito (ou uma letra) e um SÍMBOLO DE OPERAÇÃO	(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) , (8 : 2), 8/2 40 + 4, 12 × 2 *Sintagmas operatórios*

Portanto, de um ponto de vista estritamente linguístico e semiótico, é importante não confundir os escritos simbólicos utilizados em matemática com os escritos alfabéticos, que permitem transcrever alguma expressão oral de uma língua natural. Opõem-se, entre eles, os quatro critérios seguintes:

Figura 2. A distinção entre escritos simbólicos e alfabéticos

	ESCRITOS SIMBÓLICOS	ESCRITOS ALFABÉTICOS
1. Comutação oral/escrita, sem ambiguidade e reflexiva	NÃO	SIM
2. Restrições que determinam a ordem de sucessão de elementos com um *valor oposto de escolha*	Sintaxes	Reprodução de elementos articulados na produção vocal
3. Função de designação de objetos para os elementos	SIM *Designação de números*	NÃO
4. Concatenação de elementos em unidades de sentido de um nível mais complexo de expressão	Formação de sintagmas operatórios (expressões incompletas)	Reprodução de unidades de sentido na fala oral

Em outras palavras, se a álgebra é uma linguagem, é uma linguagem totalmente muda, que não pode ser falada. O seu objetivo é, simplesmente, realizar algoritmos de operações, isso se se preferir uma linguagem puramente operacional. Qualquer propriedade matemática que se pode mobilizar, implícita ou explicitamente, em paralelo ao uso de escritos algébricos, revela um emprego matemático da linguagem natural. Não ver isso é negar-se a ver a complexidade e as dificuldades de se ensinar álgebra elementar para os alunos com idade entre 11 e 16 anos.

1.2 A GAMA DE ESCRITOS SIMBÓLICOS E EXPRESSÕES COMPLETAS

Os escritos simbólicos referem-se a toda gama de escritos desenvolvidos para a realização de cálculos. Qualquer cálculo é uma sequência de operações, que consiste em substituir uma expressão simbólica por outra, quer essas expressões sejam numéricas ou literais. Dois tipos de substituições devem ser diferenciados, conforme sejam relativos aos sintagmas operatórios, isto é, substituições com expressões incompletas, ou à igualdades, equações ou expressões, que constituem um terceiro nível de sentido, aqui chamado de expressões completas.

A substituição de uma EXPRESSÃO INCOMPLETA por outra consiste em reduzi-la:

- a um elemento do sistema de escrita decimal: $\mathbf{(2 + 2) \rightarrow 4}$, ou $\mathbf{12 \times 12 \rightarrow 144}$;
- a um sintagma operacional menos complexo: $\mathbf{3\,(a + 2/3b\,) \rightarrow 3a + 2b}$;
- ou a um sintagma operacional de grau inferior: $\mathbf{x^2 \rightarrow (x \times x)}$.

Obviamente, essas substituições são reversíveis, determinadas pelas propriedades dos símbolos de operação ou pela natureza dos números. Por isso, vamos chamá-los de SUBSTITUIÇÕES OPERATÓRIAS.

A substituição de uma EXPRESSÃO COMPLETA por outra é uma operação diferente. Por um lado, pretende-se que um termo possa ser alterado de um membro da equação a outro, e que se possa efetuar uma substituição operatória em um dos dois membros:

$$\mathbf{a + 2 = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \qquad\qquad 2a = 8 \;\rightarrow\; a = 4}$$

Por outro lado, requer-se que nessa substituição as duas expressões completas conservem o mesmo valor de sentido. A substituição deve ser feita *salva veritate*, de acordo com a expressão utilizada por Leibniz*, enquanto as* *expressões incompletas, relacionadas em cada uma das duas expressões incompletas, não são as mesmas*! Foi para descrever esse mecanismo de substituição semiótica, que Frege (1971/1892) introduziu a sua famosa distinção entre sentido (*Sinn*) e denotação (*Bedeutung*).

A "denotação" é a unidade de sentido próprio de uma expressão completa, e "sentido" é a unidade de sentido de uma expressão incompleta. Ao estender-se essa distinção para expressões incompletas, a denotação torna-se "o objeto designado" por um sintagma operatório ou nominal, e o sentido torna-se a "significação" própria de cada expressão incompleta usada para denotar ou designar um objeto. Em outras palavras, com expressões incompletas, a denotação resulta de uma operação de designação. Essas são SUBSTITUIÇÕES SEMÂNTICAS.

Comparemos, agora, quatro expressões completas do ponto de vista das substituições a serem efetuadas para calcular ou "resolver":

Figura 3. Continuum dos escritos simbólicos ao nível das expressões completas

	$2 \times 2 = 4$	**$2 \times 2 = 8 : 2$**	**$2 \times \ldots = 8 : 2$** ou **$2 \ldots = 8 : 2$**	**$(a + b) /2 = a/2 + b/2$**
1. Apenas um membro a ser considerado	SIM			
2. os dois membros independentemente um do outro		SIM		
3. Possibilidade de passar de um termo a outro, ***salva denotatione***			SIM $2 \times \ldots = 8 : 2$ $\ldots = (8 : 2) /2$	
4. Necessidade de mover um termo de um membro para outro na equação, ***salva veritate***				SIM $(a + b) /2 = a/2 + b/2$ $a + b = 2 (a/2) + 2(b/2)$

As duas primeiras expressões (nas duas primeiras colunas) requerem não mais do que substituições operatórias. O sintagma operacional é reduzido à escrita de um número no sistema decimal. Não há substituição semântica a ser feita. Por outro lado, tudo muda quando se calcular, ou resolver, as duas expressões nas linhas da tabela mais abaixo, mesmo no caso de uma igualdade com um elemento vago a ser completado (terceira coluna), que não comporte alguma letra. Em outras palavras, a substituição semântica não deve ser confundida com a substituição operatória, mesmo que a resolução de uma equação recorra a ambas.

Com essas distinções e comparações, torna-se possível fazer três observações importantes para penetrar na problemática de pesquisa de Jean-Philippe:

(1) Elas destacam a complexidade da escrita simbólica.

> Por um lado, *exigem que três níveis de unidades de sentido interligadas sejam imediatamente reconhecíveis*: os elementos significantes em um sistema semiótico, que muitas vezes são confundidos com "signos"; as expressões incompletas e as expressões completas. Sem o devido reconhecimento, as expressões simbólicas não podem ser lidas, apenas soletradas, elemento por elemento.
>
> É *preciso estar consciente da operação específica de substituição semântica* para poder "resolver" uma equação, ou para poder aplicar uma fórmula numa situação particular, e resolver um problema concreto.

(2) *O primeiro passo em álgebra não começa com a introdução das letras, mas com a escrita de expressões incompletas* para formar uma expressão completa, cuja resolução exigirá a substituição semântica. As equações numéricas, com elementos vagos a serem completados, são um primeiro exemplo (Duval e al., 2015, pp. 67, 73).

> Assim, qualquer expressão simbólica na qual o símbolo de relação "=" possa ser substituído pelo símbolo de designação de um resultado "→", não é uma expressão simbólica algébrica completa. O uso do símbolo "=" para designar

> o resultado de uma operação aritmética, cria um equívoco que constituirá um obstáculo aos primeiros passos na entrada dos escritos simbólicos algébricos.
>
> A introdução das letras começa com a formação de expressões incompletas, o que exige, como veremos mais adiante, a consciência de uma operação discursiva específica dos escritos simbólicos: a designação funcional.

(3) Estritamente falando, a álgebra não é uma língua e nem pode sê-lo. É um registro cognitivamente monofuncional discursivo e não multifuncional, como são as linguagens naturais.

Portanto, a leitura e compreensão de expressões simbólicas *requer o reconhecimento visual dos diferentes níveis de sentido de uma expressão, a fim de poder distinguir todas as unidades de sentido*. Caso contrário, ficamos com o simples reconhecimento de diferentes caracteres (dígitos, letras, símbolos de operação ou de relação), que só podem ser soletrados um após o outro. Na sequência, deparamo-nos com sérias dificuldades para transformar sintagmas operatórios em outros sintagmas e, *mais ainda, para fazer substituições semânticas*. Essas dificuldades podem bloquear de imediato a grande maioria dos estudantes, não só durante a resolução de equações, mas, mais simplesmente, quando na aplicação de uma fórmula!

II. CONCLUSÃO DA ANÁLISE LINGUÍSTICA DOS ESCRITOS ALGÉBRICOS SIMBÓLICOS: A NECESSIDADE DA DISTINÇÃO FREGEANA ENTRE SENTIDO E DENOTAÇÃO

A hipótese anunciada por Jean-Philippe Drouhard (1992, p. 4) na introdução da própria tese foi: “as ESA (Expressões Simbólicas da Álgebra Elementar) podem ser descritas por um modelo linguístico (uma gramática)”. Em sua pesquisa, Jean-Philippe chegou a uma conclusão paradoxal em relação a essa hipótese. Para destacar o implícito dos escritos simbólicos algébricos, é necessário recorrer à distinção semântica de Frege entre o sentido de uma expressão e o que ela denota.

A complexidade dos escritos fracionários aparece, não como sintagmas operatórios que giram em torno de um único símbolo de operação (1/2, ou a/b), mas como aqueles que giram em torno de dois símbolos de operação (3 + 1/2) e, ainda mais, com a inclusão de três símbolos de operação ((4 + 6) / (4 + 1)) (Drouhard, 1992, pp. 298, 314, 344-348). A partir de um exemplo citado por Stella Baruk, um aluno foi perguntado sobre a seguinte escrita:

2 = 10/5 = (4 + 6) / (4 + 1) = 6 /1 = 6

> Então, Jean-Philippe explicou a reação do aluno, que admitiu as duas simplificações e não viu por que uma deveria se impor em relação a outra.
>
> Como Stella Baruk apontou, a sequência das igualdades torna-se 2 = 6 e o estudante respondeu: “E daí?”. No entanto, como constatado no decorrer da entrevista, o número 2 não é igual ao 6. Na nossa opinião, a resolução dessa contradição reside no fato de que, *para o estudante, a ESA 10/5 não designa o número 2 nem a ESA 6/1 designa o número 6*. De fato, *se os escritos são privados de uma designação ausente*, não se pode exigir da igualdade que ela indica essa designação ausente. Como consequência disso, a igualdade desempenha, em relação às transformações, um papel idêntico e que é bem conhecido na aritmética de transformações, a saber, o signo do resultado de uma operação.
>
> Em última análise, a ausência de designação de frações conduz à designação de relações e, em particular, de igualdade... e, dificilmente, a igualdade 10/5 = 6/1 *designará um valor de verdade* (neste caso, “Falso”).
>
> Portanto, a ausência de denotação torna muito difícil julgar a correção de uma transformação contestada. Para o aluno, o debate é percebido como uma troca de argumentos de autoridade (Drouhard, 1992, pp. 360-361).

Em outras palavras, a transformação dos escritos fracionários revela uma profunda diferença entre a substituição operatória, que lida com *expressões lineares incompletas*, e a substituição semântica, que lida com *expressões completas não lineares*. O cálculo de expressões incompletas fracionárias constitui o caso, cuja substituição semântica já é implicitamente necessária antes mesmo do trabalho com equações.

A segunda conclusão diz respeito à necessidade de sensibilizar os alunos para a diferença entre o sentido de uma expressão simbólica e a sua denotação.

> *Para além de um discurso sobre a própria noção de denotação (ou seja, um meta-discurso sobre expressões matemáticas), o discurso permanece um diálogo de surdos... Para os alunos há diferença, mas não uma contradição. Para que haja contradição, tem de haver denotação* (Drouhard, 1992, p. 374).

Essa conclusão invalida a hipótese, anunciada desde as primeiras linhas da referida tese e reafirmada a médio prazo, a saber, de que as ESA são independentes dos números que representam? Não, uma vez que a distinção de Frege é impossível de ser feita com um termo, um signo, ou uma expressão incompleta. *Portanto, dizer que um signo, um termo ou um sintagma operatório representa um número é o mesmo que não dizer nada*. Em um signo, um termo ou numa expressão, considerada isoladamente ou em si mesmo, *não pode haver a distinção entre sentido e denotação*, seria arbitrário fazê-lo. Imediatamente, entramos no mal-entendido e no diálogo de surdos evocado por Jean-Philippe. Foi aqui que Jean-Philippe teve de abandonar a análise das ESA, em termos de gramática generativa, para regressar às análises semântico-lógicas, de Frege, sem abandonar, porém, o ponto de vista matemático.

De fato, sucessivamente, Frege tem dado duas explicações diferentes para essa distinção, uma é matemática (1891) e a outra cognitiva (1892):

- A explicação matemática diz respeito à natureza do objeto denotado e é a que Jean-Philippe escolheu:

> Da leitura da Frege retivemos a ideia de que é do nosso interesse (de um ponto de vista lógico, mas também didático) considerar *a denotação de uma expressão não como um número, mas como uma função* (Drouhard, 1992, p. 267).

E isso o leva a distinguir entre o sentido de uma função e a sua interpretação:

> Chamo interpretação de uma ESA X, num determinado quadro, qualquer objeto correspondente à denotação de X nesse quadro (Drouhard, 1992, p. 280).
>
> Isso pode ser um número ou qualquer outra coisa, dependendo do quadro do problema em que uma equação é utilizada (Drouhard, 1992, p. 280).

- A explicação cognitiva e epistemológica trata do mecanismo semântico-semiótico do cálculo e do raciocínio matemático. *Isso exige o confronto com DOIS termos, DOIS signos, ou DUAS expressões incompletas, com sentidos diferentes, a fim de discernir o sentido e a denotação*.

A análise dos escritos simbólicos algébricos não é, de todo, a mesma, dependendo se se utiliza a explicação matemática ou a cognitiva da distinção entre sentido e denotação. De acordo com a explicação matemática, a denotação só se refere aos três valores verdade (verdadeiro, falso, indecidível), ou mais precisamente ao único valor verdadeiro, e diz respeito apenas a expressões completas. Conforme a explicação cognitiva, a denotação refere-se a dois termos, ou duas expressões de sentidos diferentes, e refere-se apenas a expressões incompletas, ou seja, termos, sintagmas operatórios e, também, sintagmas nominais em línguas naturais.

A conclusão, a partir da análise linguística das ESA (correta), é paradoxal e suscita várias questões.

Q. 1 No continuum da escrita simbólica (ver Figura 3), *onde se situa a guinada para que os alunos possam ser introduzidos na álgebra elementar*? Seria no momento enquanto ocorre a introdução das letras, ou com a conscientização entre o sentido e denotação de expressões simbólicas, que podem ser tanto numéricas quanto algébricas?

Q. 2 A distinção entre sentido e denotação, que se mostra necessária na utilização e transformação correta dos escritos simbólicos, *é essa distinção de mesma ordem que o conhecimento das propriedades dos números e das operações?*

> Q.3 *A noção de escrita simbólica algébrica (ESA) não é uma noção demasiado global e, portanto, inutilizável para analisar o funcionamento dos escritos simbólicos?* Não deveríamos, primeiro, distinguir os sistemas de escrita simbólica de números e o conjunto de tipos de expressões que podem ser formados, utilizando esses sistemas? E não deveríamos, então, distinguir expressões incompletas (os sintagmas operatórios) e expressões completas (as equações)?

A conclusão final da tese trata dos quatro aspectos distintos das ESA, que devem ser levados em consideração e são requisitos para utilizá-las e transformá-las corretamente.

> "compreender" as ESA é levar em conta a sua sintaxe, denotação, sentido e interpretação (Drouhard, 1992, p. 376).

Essa conclusão suscita a seguinte questão, relativamente, à utilização da distinção de Frege:

> Q. 4 A distinção entre denotação, sentido e interpretação é pertinente para analisar-lhe a compreensão em uma perspectiva didática e não apenas matemática?

2.1 A COMPLEXIDADE DAS ESA: UM IMPLÍCITO SINTÁTICO OU A SOBREPOSIÇÃO DE UNIDADES DE DIFERENTES TIPOS DE SENTIDO?

Interessa a teoria linguística de Chomsky, pois permite distinguir dois níveis de organização completamente diferentes: em primeiro lugar, a da estrutura profunda, na qual devem ser explicadas todas as regras sintáticas para a produção de expressões completas e incompletas. Em seguida, a estrutura de superfície, como sendo o nível de todas as expressões possíveis, que essas regras permitem produzir. Para o ensino da álgebra elementar, são as expressões numéricas, literais e algébricas que o professor utiliza e calcula ou pede que sejam produzidas. Elas preenchem os capítulos dos manuais escolares. Uma comparação entre esses dois níveis revela o que está implícito.

Será, então, suficiente tornar explícito o que está implícito para que as ESA deixem de ser opacas ou falaciosamente transparentes?

A questão é que não há nada de comum entre dois tipos de explicitação do implícito:

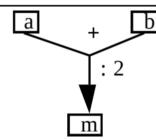
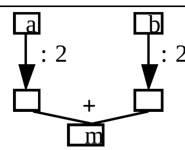
- Um, que torna necessário desenvolver um *software* para gerar expressões simbólicas e as transforme em outras, ou seja, que as calcule;

- e, dois, que torna necessário ao aluno *reconhecer visualmente* as diferentes unidades de sentido, que compõem qualquer expressão simbólica relativamente complexa, como é o caso da escrita fracionária (4 + 6) / (4+1).

O equívoco na leitura de expressões simbólicas consiste em reduzir as unidades de sentido de um sintagma operatório ou de uma equação em uma sequência linear de elementos visualmente separados por espaços em branco. Quando dizemos oralmente uma equação a ser escrita, fazemos assim: soletramo-la! Na realidade, *os escritos simbólicos algébricos sobrepõem-se e fundem-se em três tipos de unidades de sentido, em uma sucessão linear de números, letras e símbolos*, como vimos em 1.2. Evidentemente, há os termos enumerados sucessivamente que dizem respeito a sistemas de escrita de números e a um *corpus* de símbolos de operação e relação. Mas há, sobretudo, as unidades de sentido formadas por agrupamentos de termos. E aqui, é crucial separar claramente expressões completas (equações) das incompletas que, também, chamamos "sintagmas operatórios". Os sintagmas operatórios apresentam um tipo de dificuldade bem conhecido: o da ordem das operações. A transformação dos sintagmas operatórios é independente da resolução das equações, mesmo que a resolução das equações os implique.

Tomemos, de novo, o caso particular das frações que são sintagmas operatórios. Em sua tese, Jean-Philippe analisou-as, como se calculá-las implicasse uma expressão completa, o que o levou a um impasse didático (ver 2). Na realidade, *trata-se de um sintagma operatório que precisa ser delineado, visualizando-o, como uma árvore de operações*. Eis um exemplo, em parte retirado de um manual escolar publicado há quase quarenta anos, cuja originalidade era explicar os escritos simbólicos, *uma vez que é com a escrita de números e letras, representando números ou conjuntos de números, que trabalhamos*[8]. Esse exemplo mostra a necessidade de distinguir graus de complexidade na escrita de um sintagma operatório. O grau de complexidade depende tanto do número de símbolos de operação quanto da ordem das operações.

Figura 4. Análise do grau de complexidade dos sintagmas operatórios.

	Número de unidades de sentido elementar	Número de sintagmas operatórios	Número de NÍVEIS DE UNIDADES DE SENTIDO	Diagrama das operações	Condição fregeana de reescrita
$\frac{a + b}{2}$	5	**2**	1		SIM
a/2 + b/2	7	**3**	2		NÃO

Esse tipo de visualização, congruente com a ordem de prioridade das operações, indica todos os esclarecimentos verbais para explicar ou justificar o procedimento de cálculo dos sintagmas operatórios.

A resolução das equações exige, ao contrário, um tipo de substituição a que chamamos condição fregeana de invariância da denotação. E aqui chegamos ao segundo ponto de desdobramento.

---

[8] Deledicq e Lassave (1979, p. 80).

2.2 A DENOTAÇÃO DE EXPRESSÕES SIMBÓLICAS: UMA FUNÇÃO MATEMÁTICA OU INVARIÂNCIA DE UMA DESIGNAÇÃO, UTILIZANDO DUAS EXPRESSÕES DIFERENTES?

Encontramos aqui as duas explicações dadas por Frege, que mencionamos acima (ver 1): uma matemática e outra cognitiva.

A primeira foi eleita por Jean-Philippe, na própria tese, e retomada em trabalhos posteriores, trata-se de *aplicar a distinção entre sentido e denotação a uma única expressão simbólica considerada em si mesma*, ou seja, a cada expressão simbólica considerada, independentemente da anterior ou da seguinte em um cálculo ou em um processo de resolução. O sentido e a denotação de uma expressão aparecem, então, como dois aspectos associados e, no entanto, totalmente independentes um do outro:

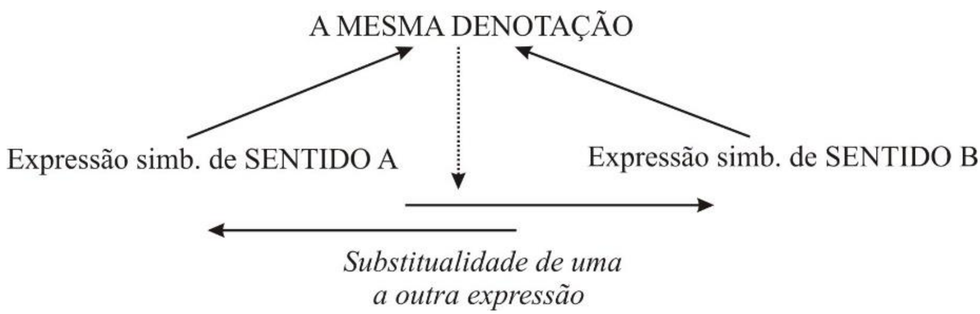
O sentido de uma expressão A e *a denotação* dessa mesma expressão.

Isso leva a identificar o sentido da expressão com o objeto denotado, ou seja, uma função ou valor verdade, independentemente do sentido da expressão. Por isso, Jean-Philippe sempre teve o cuidado de especificar que *a denotação de uma equação não é um número*. Isso justifica-se matematicamente, uma "vez que uma equação de segundo grau com coeficientes reais pode ter duas ou nenhuma solução real, mas para uma equação do terceiro grau com coeficientes reais existe sempre solução real (uma ou três)".

Mas essa escolha é paradoxal, na medida em que, o problema de Jean-Philippe era analisar a especificidade da ESA, independentemente do que as diferentes expressões representassem matematicamente.

A explicação cognitiva é totalmente diferente, *equivale a aplicar a distinção entre duas expressões simbólicas para explicar o mecanismo de cálculo*. Calcular significa substituir, de forma não tautológica, uma expressão B por uma expressão A, cujo sentido é diferente de B, mas mantendo invariavelmente a denotação de A, ou seja, o que A designa. Aplicada as frases da língua natural, essa distinção permite levar em conta a coerência ou incoerência de um encadeamento de propostas em um raciocínio, argumento ou descrição. Assim, o mecanismo de substituição subjacente ao cálculo, como explica Frege (1971/1892), pode ser esquematizado da seguinte forma:

Figura 5. Esquema do mecanismo de operação de substituição das operações de cálculo



As duas setas sólidas representam as duas possíveis substituições de uma expressão A por outra expressão, dependendo da que foi dada no início. Essa substituição só é possível sob a condição de mesma denotação, ou seja, de equivalência semântica. Para o cálculo de sintagmas operatórios, a expressão "*salva suppositione*" é mais apropriada do que a expressão *salva veritate*, que só é relevante para expressões completas.

Duas observações permitem ver a importância crucial dessa explicação cognitiva para uma teoria da compreensão e aprendizagem da escrita simbólica por parte dos alunos.

A primeira diz respeito à comparação entre duas formas de escrever ou representar números, uma em termos de sentidos elementares e outra em termos de sintagmas operatórios. Qual é a diferença entre os escritos:

"4" e (1+1 +1 +1) ou (2 + 2) ou (2 × 2) ou (6 – 4) ou, ainda, (8 / 2) ?

Por um lado, não há diferença entre sentido e denotação para a escrita 4, como para todas resultantes da utilização exclusiva de um sistema numérico de posição de base n. E isso por uma razão muito simples, explicada por Saussure: os signos não existem por si só, mas apenas dentro de um sistema semiótico, no qual se opõem entre si, como valores de escolha para significar ou designar. O sentido de um signo é o seu valor de escolha. *Assim, a simples utilização de um dígito, ou de vários dígitos no sistema decimal, denota, automaticamente, um número,* e não há substituição possível, por exemplo: para que os dígitos 0, 1 e 6 possam alterar a sua denotação, é necessário alterar o seu sentido e, para isso, a base do sistema precisa ser alterada.

Por outro lado, a distinção entre sentido e denotação impõe-se, cognitiva e didaticamente, com o mais simples sintagma operatório (2 + 2) ou (2 × 2). Portanto, não há necessidade de esperar-se pela introdução de escritos fracionários, como pensava Jean-Philippe, para que a consciência dessa distinção torne-se uma condição necessária à compreensão dos escritos simbólicos. Caso contrário, cada vez que o segundo membro de uma expressão completa contenha apenas uma unidade elementar de sentido,

$$\mathbf{2 \times 2 = 4} \qquad \mathbf{2x = 4}$$

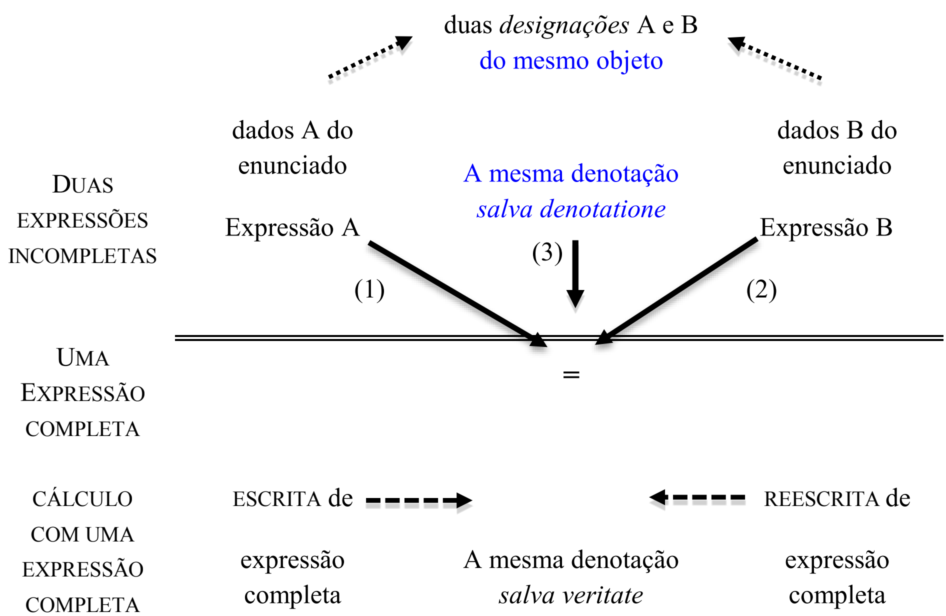
o símbolo "=" será automaticamente entendido como o resultado de um cálculo. E isso cria um obstáculo intransponível não só para a compreensão das letras como sendo variáveis, mas, sobretudo, para compreender-se que uma equação pode ter várias soluções

$$\mathbf{x^2 = 4.}$$

A segunda observação diz respeito à equação: equacionar os dados de um problema é o teste, por excelência, para uma aquisição significativa e útil de conhecimentos em álgebra, pois, sem ela, os alunos não poderão usar equações para resolver problemas, mesmo aqueles de aplicação concreta de uma fórmula. Recordemos aqui de que nos inquéritos PISA nem sequer isso é exigido, mas apenas a utilização de uma fórmula dada no problema (Duval e Pluvinage, 2016).

Contudo*, equacionar os dados de um problema exige dos alunos a consciência da necessidade de uma dupla designação do mesmo objeto*. Em outras palavras, é preciso "*saber*" *escrever sozinho, e espontaneamente, duas expressões simbólicas com sentidos diferentes*: uma letra sendo escolhida para designar um dos dados do problema, a segunda, um sintagma operatório construído com essa letra, para designar funcionalmente o outro dado do problema. Equacionar os dados de um problema consiste em alterar o registo de representação, no qual os dados são apresentados. O diagrama seguinte mostra a complexidade das operações de conversão cognitiva.

Figure 6. Esquema do mecanismo de conversão de dados para o equacionamento de dados de um problema



As duas primeiras linhas correspondem ao equacionamento dos dados de um problema e são marcadas por três flechas numeradas. Mas a terceira flecha vertical é completamente diferente das outras duas, pois pressupõe a tomada de consciência da distinção de Frege. A última linha refere-se ao cálculo, como sendo uma sequência de substituições entre expressões simbólicas escritas e que acontece em uma igualdade numérica, em uma fórmula literal ou em uma equação. O problema da enquete PISA "*n/L = 140. Se n = 70, quanto vale L*?" (Duval e Pluvinage, 2016, p. 119-121). Essas substituições supõem também uma conscientização da distinção de Frege, mas em um sentido puramente formal (as duas flechas pontilhadas). A denotação concerne ao valor verdade da expressão completa. Portanto, é essencial não confundir a *equivalência salva denotatione* e a *equivalência salva veritate,* que pode ser uma identidade (ver 1.2).

E, claro, *conscientizar não é conhecer, mas reconhecer*. Não é adquirir conhecimentos e *savoir-faire*, mas tornar-se capaz de tais aquisições.

2.3 ESCRITA E SEMIÓTICA: OS SIGNOS PURAMENTE ESCRITOS DA ÁLGEBRA AINDA SÃO SIGNOS?

A autonomia semiótica dos signos, que foi imposta com a álgebra, fez-se ao preço de uma neutralização completa da sua função cognitiva de evocação de algum outro. Essa neutralização teve duas consequências revolucionárias para o desenvolvimento da matemática: a supressão da distinção entre significante e significado e, igualmente, a supressão do seu valor de oposição dentro de um sistema semiótico, o que não é o caso da escrita de números (Duval, 2006, p. 82). Leibniz foi o primeiro a perceber a novidade radical daí advinda para o pensamento matemático e para a forma de trabalhar em matemática. Em um texto de 1684, portanto, pouco depois da formação da escrita algébrica moderna, ele observa:

> ... Estou habituado a chamar este pensamento de *cego* ou s*imbólico*...; é aquele que usamos em álgebra e aritmética... (Leibniz, 1972, pp. 152-153).

Em outras palavras, os signos puramente escritos de álgebra ainda o seriam, no sentido de quando falamos de signos fora dos sistemas de escrita de álgebra e números? Para compreender essa questão, é importante não confundir três tipos de escrita: a escrita significativa, a conceptual e a simbólica.

Os escritos significantes são os signos alfabéticos, que transcrevem a palavra, ou qualquer discurso em língua natural (ver Figura 2). Tais escritos requerem vocalização, subvocalização ou leitura mental, completa ou por amostragem, cuja velocidade varia consideravelmente de acordo com o tipo de texto. O primeiro esquema de análise semiótica desenvolvido pelos estoicos, distinguindo o significante, o significado e o objeto denotado pelo signo, aplica-se à linguagem natural e aos escritos alfabéticos. Foi esse o esquema imposto até Peirce. De outra maneira, a distinção entre o significante e o significado de um signo é uma distinção lógico-linguística, não matemática (Duval, 2006, p. 93).

Os escritos conceituais são o que as palavras, símbolos ou diagramas representam: o conhecimento de uma forma, mais ou menos, convencional. Nesse caso, trata-se de um conceito que é significado de um signo, seja ele uma palavra ou um símbolo. Em outras palavras, a aquisição de conceitos é a condição essencial para compreender-se o que está escrito ou esquematizado. Já não basta ser capaz de ler, ou ter um bom domínio da língua, para compreender-se a escrita conceitual faz-se necessário a compreensão dos conceitos e não apenas das palavras.

Na maioria dos estudos didáticos de álgebra, os escritos algébricos são equiparados aos escritos conceituais que são mais econômicos e seriam mais simples. O uso do simbolismo matemático deve, então, estar subordinado ao conhecimento matemático. Esse postulado teórico tem sido predominante há muito tempo na didática e, mesmo, na didática da álgebra. G. Vergnaud formulou-o perfeitamente na conclusão do seu artigo "*Les champs conceptuels*":

> Em conclusão, vou limitar-me à seguinte tese: *o simbolismo matemático não é uma condição necessária nem suficiente para a conceitualização,* mas contribui para essa conceitualização, especialmente para a transformação de categorias do pensamento matemático em objetos matemáticos. A linguagem natural é o meio essencial de representação e identificação das categorias matemáticas, mas não possui, tanto quanto os diagramas, fórmulas e equações, o laconismo indispensável para a seleção e processamento das informações e relações relevantes. *Essa ênfase no simbolismo não impede que, em última análise, seja a ação do sujeito,* que constitui a fonte e o critério de conceitualização (Vergnaud, 1990, p. 166).

Os escritos simbólicos são aqueles que utilizam apenas números, letras, símbolos de operação, de relação e de quantificação. Em outras palavras, são apenas caracteres, que se distinguem, não mais do que, pelas suas formas e regras de agrupamentos. A sua função não é cognitiva, mas puramente operatória. As sequências formadas possibilitam que *expressões sejam substituídas por outras, sem que se leve em conta o seu significado, o sentido, a denotação nem mesmo a mobilização de propriedades matemáticas*. Foi o que David Hilbert explicou no texto o qual expõe o problema da decidibilidade em aritmética, um problema que levou Turing a imaginar uma máquina semiótica autônoma para efetuar cálculos e desenvolver a noção de programação:

> Para que o raciocínio lógico seja seguro, os objetos discretos e extralógicos devem ser dados como experiência imediata para cada pensamento... a sua apresentação, diferenciação e sequência devem ser acessíveis em uma intuição imediata... Quando adoto esse ponto de vista, *os objetos* da teoria dos números *são, eles mesmos, signos, cuja configuração pode ser reconhecida por nós de uma forma geral e certa*... Sobre isto repousa a sólida posição filosófica, que considero indispensável à base da matemática pura, bem como, a todo o pensamento científico, compreensão e comunicação: no princípio é o signo (Hilbert, 1922).

Em outros termos, com os escritos simbólicos, os signos podem-se reduzir aos objetos, ou seja, à forma de um caractere ou uma sequência deles, que são utilizados independentemente do que possam vir a significar, a fim de manter-se apenas o seu poder de cálculo.

A dificuldade com a qual Jean-Philippe deparou-se no próprio trabalho foi a de ter analisado os escritos algébricos, como se pudessem ser simultaneamente escritos operatórios e escritos conceituais, sem sequer excluir a possibilidade de que pudessem ser escritos significantes também.

Obviamente, essa dificuldade não é exclusiva do trabalho de Jean-Philippe. Encontra-se em quase todas as investigações didáticas sobre o ensino da álgebra elementar no EF-2. Todos os escritos simbólicos, aritméticos ou algébricos são introduzidos como escritos conceituais. E todas as teorias semióticas, utilizadas na análise, *são teorias generalistas dos signos, que não levam realmente em conta a ruptura entre a linguagem falada e a escrita*, entre os conhecimentos matemáticos e outros tipos de conhecimentos, entre o que está sob um suporte de comunicação e o que está sob um sistema de tratamento. Com todas as teorias globalizantes da noção de signo, torna-se impossível intentar e levar em conta a especificidade da escrita simbólica algébrica em relação aos outros dois tipos de escrita, bem como a sua irredutibilidade a outros registos de representação semiótica.

Enfim, as unidades elementares de sentido como os números, letras e símbolos de operações, normalmente chamadas de "signos", têm uma característica primordial, qual seja A SUA OCORRÊNCIA, isto é, o número de vezes que aparecem numa expressão completa. *As ocorrências de uma letra, ou seja, o seu número e o seu lugar em expressões algébricas, constituem a base do cálculo algébrico*. A simplificação dos sintagmas operatórios, que podem ser mais ou menos complexos, baseia-se na redução do número de ocorrências de uma das três unidades elementares de sentido que as compõem. Do mesmo modo, a resolução de uma equação exige o deslocamento de certas unidades de sentido de um membro para outro, a fim de separar as frases operacionais que incluem letras e as que são puramente numéricas (Duval e Pluvinage, 2016, p. 148-150). O cálculo algébrico e a resolução de equações baseiam-se, fundamentalmente, no reconhecimento visual das ocorrências de letras e na forma dos seus arranjos em sintagmas operacionais. O cálculo algébrico é "formal" no sentido visual do termo. Mas, é claro, isso exige que se possa reconhecer rapidamente os diferentes tipos de unidades de sentido que constituem uma expressão simbólica completa. Esse processo pode, sem dúvida, ser reduzido para a resolução de equações de primeiro grau e torna-se central para a resolução de equações do segundo grau. O obstáculo será maior ainda para aqueles alunos que, na aprendizagem da álgebra elementar, não foram introduzidos com exercícios de resolução de igualdades com elemento vago a ser completado (Duval, 2015, pp. 62 - 67).

A diferença entre cálculo numérico e algébrico não está na utilização de uma letra, se dá pelo fato de que o *resultado do cálculo numérico acaba sempre em um nome próprio de número e não somente em outro sintagma operacional*, o qual pode ser sempre reduzido a um nome próprio de número. Por sua vez, esse nome é a escrita de um número resultante da mera mobilização de um sistema de numeração (3, 14, 144,). Assim, pode-se reconhecer se dois escritos numéricos diferentes **(2+4) e (2 × 3)** têm o mesmo nome próprio ou se são os mesmos signos encontrados, segundo o critério de Hilbert. A mesma ideia aplica-se à resolução de equações do primeiro grau, o resultado é verificável porque se trata de um nome próprio e a letra utilizada possui (ou as letras possuem) um estatuto de incógnita.

Aquilo a que Jean-Philippe chamou "escritos simbólicos algébricos" abrange toda a gama de escritos simbólicos que permitem a utilização de algoritmos, engloba desde o cálculo com números inteiros até a resolução de equações, passando pelo cálculo com casas decimais e, na sequência, com frações racionais. As ESA constituem um *continuum* que só pode ser percebido e estudado ao nível do currículo de ensino de matemática comum aos alunos do EF-1 ao EF-2. Esse *continuum* é completamente obscurecido em nível local pela organização de sequências didáticas, ou seja, sequências de algumas semanas de duração, cujo objetivo de aquisição é um conteúdo matemático local, que é apenas um dos múltiplos componentes de um conhecimento mais global, objetivo final de aquisição de um ciclo de três ou quatro anos de ensino! Nesse *continuum*, o limiar decisivo para entrar na álgebra não é a introdução das letras, ou a generalização que elas propiciam, mas a consciência da diferença entre a denotação das expressões simbólicas e o seu sentido. Essa conscientização deve ter um lugar muito antes da introdução das letras. As dificuldades que os alunos enfrentam, na aprendizagem da álgebra elementar, são apenas a síndrome da ausência total dessa consciência.

A segunda contribuição da obra de Jean-Philippe é, portanto, considerar os "escritos simbólicos algébricos" como um todo. Igualmente, todos estão sujeitos ao mesmo conjunto de regras de formação na semântica fregeana. Para designar esse conjunto, falamos de regras de um "*continuum*". Jean-Philippe, por seu lado, retomou o termo "registro", especificando "registro algébrico". Neste sentido, só podemos concordar. Pois, ao retomar esse termo, ele enfatiza o fato de que todas as expressões simbólicas devem ser consideradas por si mesmas e que são radicalmente diferentes da língua materna utilizada para as interações verbais em sala de aula. Se a escrita simbólica é uma linguagem, é mais estrangeira do que as línguas estrangeiras, que os alunos têm de aprender a falar. Apesar disso, existe ainda a crença, apenas do ponto de vista matemático, de que os escritos simbólicos seriam mais simples e rápidos de aprender! Pois bem, teremos de ouvir Jean-Philippe, que nunca deixou de afirmar o contrário.

*

***

Como fazer as pessoas reconhecerem, à primeira vista, as diferentes unidades de sentido embutidas em uma expressão simbólica e como torná-las conscientes da diferença entre os sentidos de uma expressão simbólica e o que ela denota? Jean-Philippe salientou a natureza crucial dessa questão para a compreensão e aprendizagem da álgebra, também tinha notado que as teorias didáticas ao priorizarem o ponto de vista dos professores e o conteúdo matemático a ser ensinado, não apresentam resposta nenhuma a essa questão. O trabalho de Jean-Philippe também não lhe permitiu progredir mais nesse assunto e esse é o limite do problema da sua investigação. Qual a razão disso?

Essa questão, da compreensão e da aprendizagem do registro de escritos simbólicos, requer uma abordagem cognitiva em termos de registros, uma vez que a regra de ouro de tal análise assevera que um registro só pode ser analisado com base nas variações de outro. Em outras palavras, para analisar o registro de escritos simbólicos, é preciso considerar vários pares de registros, dentro dos quais as conversões diretas e as conversões inversas devem ser estudadas, em primeiro lugar, entre si:

- (Escritos simbólicos e linguagem natural),

- (Escritos simbólicos e gráficos cartesianos),

- (Escritos simbólicos e esquemas),

- (Escritos simbólicos e tabelas),

- (Linguagem natural e tabelas).

A problemática de Jean-Philippe permanece, fundamentalmente, uma problemática monorregistro e isso constitui o interesse e o aporte, uma vez que contribui para destacar a complexidade do funcionamento e da mobilização dos "Escritos Simbólicos Algébricos" em alunos do EF-2.

A escrita, e não apenas a linguagem e a fala, tem sido o patamar decisivo na evolução da humanidade. O nascimento da escrita não só marca o início da história, como permitiu o desenvolvimento do conhecimento e, em particular, da matemática. Isso destaca um ponto fundamental característico da atividade matemática: não se pode fazer matemática sem primeiro escrever. *A matemática é escrita. Não se pode realmente dizer... sem escrever, ou rabiscar alguma coisa.* A escrita é um dos fatores primordiais do desenvolvimento cognitivo do pensamento, porque permite uma objetivação que se torna impossível com o imediatismo do que se diz, e do que se quer dizer com a palavra (Duval, 2000).

Os escritos simbólicos algébricos são radicalmente diferentes de todos os escritos, cuja função principal é codificar visualmente a fala, fixá-la para apresentar o pleno desenvolvimento da sua expressão. Mesmo que as equações remontem aos babilônios[9], só apareceram muito tarde[10] e só foram constituídas há menos de dois séculos, desde Cardan e Viète, até Descartes e Leibniz.

Os escritos alfabéticos são imediatamente alternáveis com a fala para quem aprendeu a ler, assim como, obviamente, a fala pode ser imediatamente transcrita para quem aprendeu a escrever. No entanto, do ponto de vista dos atos de expressão propriamente ditos, *falar e escrever não são atividades passíveis de mudança, porque quando se passa da palavra para a escrita, a relação com a língua muda*. Por um lado, as operações discursivas de designação a serem feitas são mais complexas quando se trata de escrevê-las do que, simplesmente, de falá-las. Por outro lado, o foco é parcialmente deslocado das palavras ou frases nominais para as unidades superiores de sentido, que são as equações e proposições. Por isso, a escrita cumpre funções

[9] A história começa na Mesopotâmia. Catálogo da exposição no Museu do Louvre-Lente, Nov/2016-Jan/2017. A exposição inclui reproduções de dois prismas gravados na escrita cuneiforme do período 1749-1712 a.C. Para um, as faces correspondem a tabelas numéricas e metrológicas, e para o outro, a oito problemas relacionados com retângulos e tijolos (n.ºs 261 e 262, pp. 240-241). As primeiras pastilhas escritas em argila cuneiforme datam de 3300-3000 d.C., (Fig. 66, p. 217).

[10] F. Pluvinage, que acaba de nos deixar, chamou a atenção para a coincidência entre o aparecimento dos escritos simbólicos e o desenvolvimento da impressão, que impôs a padronização de caracteres (Duval & Pluvinage, 2016, p. 130).

de distanciamento, objetivação, controle e, finalmente, consciência de que a fala e as interações verbais não podem ser realizadas. *Escrever estrutura o pensamento. Não é falando que se aprende a escrever.*

Os escritos simbólicos, numéricos ou algébricos (ESA) são operatórios e puramente operacionais. Isso significa que a sua única função é permitir *operações algoritmizáveis de substituição de expressões simbólicas por outras expressões simbólicas, de acordo com as ocorrências dos signos que as compõem*. Isso implica, naturalmente, termos um sistema de numeração que funciona como um sistema semiótico, no sentido de Saussure. É por isso que não se pode, de forma alguma, trocar os escritos simbólicos pela fala, uma vez que essas operações de substituição não são possíveis com a utilização, mesmo que apenas mental, de uma linguagem natural. *E, inversamente, as operações de associação de palavras e ideias, que constituem o poder da linguagem natural, não são possíveis com os escritos simbólicos.*

A linguagem natural e os escritos simbólicos são dois registros de representação semiótica irredutíveis entre si. De um ponto de vista matemático, o registro de escritos simbólicos tornou-se o registro por excelência da matemática. Mas de um ponto de vista didático, há uma dupla tarefa a ser feita: sobre as operações de designação específicas de cada um desses dois registros e sobre a não-congruência das conversões na passagem de um a outro.

Contra o uso equivocado da palavra “linguagem” na didática, Jean-Philippe salientou a autonomia e o poder incomparável da escrita em relação à fala.

PERSPECTIVAS

O ensino e aprendizagem da álgebra elementar no EF-2 é organizado de acordo com uma progressão de (re)-“construção” da análise matemático-regressiva discutida na início desse texto. A análise semio-cognitiva dos escritos simbólicos foge completamente desse quadro, significa analisar as necessidades e as dificuldades de aprendizagem da álgebra antes de organizar o seu ensino. Por um lado, o seu objetivo é sensibilizar, tanto para as operações discursivas específicas da linguagem natural, como para os escritos simbólicos, e por outro, quebrar a parede de vidro que os separa. Esses excertos foram feitos para que os próprios professores possam apropriar-se desse instrumento analítico, a fim de apreender as causas profundas dos bloqueios dos alunos e desenvolver atividades, cujo objetivo seja a tomada de consciência por parte dos alunos. Será isso possível? E quais tarefas devem ser desenvolvidas para atingir esse objetivo desde os primeiros anos do EF-2, ou pelo menos, ao final do segundo ano, para 80% dos alunos? Na realidade, esses objetivos só podem ser plenamente atingidos se forem perseguidos, pela primeira vez, durante os dois primeiros anos do EF-2. Isso implica dizer que, *devem ser explicitamente integrados na organização dos programas!* uma vez que dizem respeito ao lado oculto da atividade matemática e não ao lado exposto.

Voltemos agora às diferenças de abordagem entre a análise dos escritos simbólicos algébricos, de Jean-Philippe, e a análise do funcionamento semio-cognitivo que esses escritos pressupõem. Em primeiro lugar, o verdadeiro ponto de encontro dessas duas abordagens é o papel crucial que nelas desempenha a distinção entre sentido e denotação, feita por Frege. A divergência se dá pelo fato de que a abordagem de Jean-Philippe é unilateral. Além disso, trata apenas de escritos algébricos, sem considerar, também, o funcionamento específico da linguagem natural e nem a questão da sua coordenação cognitiva. Essa divergência é evidenciada pela sua escolha da palavra "implícito" em detrimento da expressão "ilusão de transparência". De uma problemática, centrada em um problema crucial de aprendizagem de álgebra, passamos a um problema de algoritmização da escrita algébrica para fins de ensino. Pode-se dizer dos algoritmos, ao menos durante o período de formação inicial dos jovens estudantes, o mesmo que Leibniz já dizia sobre os signos? O ensino da álgebra obriga-nos a fazer essa questão.

REFERÊNCIAS

Damm, R. F. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. (Thèse de doctorat). IREM, Unistra, IREM, France.

Deledicq, A. e Lassave, C. (1979). *Faire des Mathématiques, 4ème*. Paris: Cedic.

Drouhard J. P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. (*Thèse de Doctorat). Université Paris VII, France

Drouhard, J. P. e Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, N° spécial *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*, pp. 209-236.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 20/2, 135-170.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Dans J.P. Drouard et M.Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (pp.67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques *? Relime*, N°. 45-81.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT* (Trad. de M. T. Moretti), V. 8, n. 1, 1-45.

Duval R., Campos T. M. M., Barros, L. G. & Dias, M. A. (2015). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo: Proem Editora.

Duval, R. e Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, pp. 117-152.

Frege, G. (1971), (1891). Fonction et concept. Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (Tr. Imbert*)*, 80-101. Paris : Seuil.

Frege, G. (1971), (1892). Sens et dénotation. Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (Tr. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.

Hilbert, D. (1922). *Neubegründung der Mathematik*. Erste Mitteilung. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 1: 157–177.

Leibniz, G. W. (1972). *Oeuvres* I (Ed., L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne**.**

Nichanian, M. (1979). La *question générale du fondement : écriture et temporalité*. (Thèse de doctorat). Université des lettres et des sciences humaines de Strasbourg, France.

Vergnaud, G. e Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique, *Revue française de pédagogie*, 36, pp. 28-43.

Vergnaud, G. (1990). Les champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 10/2.3, pp. 133-170.

CAPÍTULO II

O caso Jonathan
O complexo de álgebra

Le cas Jonathan
Le complexe de l'algèbre[1]

Jean-Claude Rauscher
Trad. Méricles Thadeu Moretti

"Eles são malucos em matemática. Eles não sabem o que querem"...
Jonathan

RESUMO
Este estudo apresenta o acompanhamento realizado durante três anos, que vai do *quatrième*[2] ao *seconde*, de um aluno com muitos problemas de aprendizagem em álgebra. O jovem confundia os escritos de expressões numéricas e algébricas, assim como todos os termos que designavam operações de cálculo a serem feitas. Inicialmente, o acompanhamento consistiu em ajudá-lo nos deveres escolares que tratavam de três categorias de atividades matemáticas: transformação de expressões algébricas, resolução de equação, equacionamento[3] dos dados de um problema para

[1] *Dans l'Annexe 2 la version originale en français*.
[2] N. do tradutor. O ensino básico francês obrigatório é composto de 12 anos: 5 anos do nível de ensino *primaire (école élémentaire)* (6 a 10 anos de idade) (CP, CE1, CE2, CM1, CM2); 4 anos do *collège* (11 e 14 anos de idade) (sixième, cinquième, quatrième, troisième) e; 3 anos do *lycée* (15 a 17 anos de idade) (*seconde, premier*, *terminale)*. A denominação utilizada pelo autor será mantida.
[3] N. do tradutor. Usaremos o termo "equacionamento" para o termo francês *mise en équation*, cujo significado é transformar em equação elementos matemáticos que constam na formulação em língua natural de um dado problema para, em seguida, obter-lhe a solução.

resolvê-lo. Essas três categorias pareciam-lhe sem relação. Para ajudá-lo na aprendizagem, foi necessário inventar atividades que tratavam de substituições das escritas de expressões no cálculo algébrico, no cálculo com números e na articulação da linguagem com as escritas correspondentes. Isso promoveu-lhe uma grande mudança de atitude e foi, desse modo, possível começar a fazê-lo compreender o equacionamento de um problema e a sua resolução. O objetivo deste estudo clínico é, por um lado, ouvir a voz de um aluno face às atividades e às tarefas algébricas propostas em sala de aula e, por outro lado, evidenciar a complexidade semio-cognitiva dessas atividades e tarefas. Para tanto, escrevo a evolução de Jonathan abordando os pontos seguintes: análise semio-cognitiva de atividades em álgebra, as transformações de expressões algébricas, resolução de equação, o equacionamento de dados do enunciado de um problema, análise retrospectiva da análise do equacionamento de um problema e os primeiros passos em álgebra feitos por Jonathan. Finalizo com uma perspectiva que a evolução de Jonathan pode trazer aos professores na maneira de como fazer com que os alunos entrem na compreensão da álgebra e a utilização de equações.

O CONTEXTO

Tudo começou, fortuitamente, em janeiro de 2016, Jonathan era um estudante com dificuldades escolares, especialmente em matemática. Eu o conheci através dos seus pais quando ele cursava o *quatrième* (ver nota de rodapé 2) e me ofereci para acompanhá-lo nos estudos escolares de uma forma flexível (é claro, não remunerada). E eles aceitaram. O pedido inicial dos pais era que ele tivesse “ao menos a nota mínima de aprovação”.

Jonathan, por outro lado, reclamava com muita veemência que não gostava dessa disciplina e que não percebia a serventia dela. Não obstante, ele era um aluno “aplicado”. No início da nossa caminhada, ele disse-me várias vezes que aceitava esse trabalho de acompanhamento na esperança de não ser notado negativamente pelos seus professores e de obter notas que agradassem aos seus pais. Foi assim que me reuni regularmente, semana após semana, em períodos escolares e, por vezes durante as férias, com Jonathan. E, na oportunidade, não imaginávamos que os encontros ocorreriam por três anos:

de janeiro a junho de 2016, quando o jovem estava no *quatrième*. Depois, em 2016/2017, no *troisième,* ao final do qual obteve o "*Diplôme National du Brevet*"[4]. Tinha, então, o desejo de fazer uma aprendizagem nos ofícios da pintura, mas foi-lhe recusada por ser demasiado jovem. Ele não queria repetir também o *trosième,* conforme era o desejo de seus pais, para que pudesse se preparar melhor para o que vinha pela frente. Finalmente, em 2017/2018, no *second* de uma escola secundária profissional, na seção "colaborador de arquiteto", depois de um curso dito de imersão[5], foi aceito, em abril, em uma seção de preparação para as profissões de pintura, um tipo de formação que correspondia bem ao seu desejo.

Isso foi para mim uma verdadeira aventura, pude observar a profundidade das dificuldades que Jonathan enfrentava quando da abordagem da álgebra elementar. Acima de tudo, pude ver que, mês após mês, ano após ano, nada tinha mudado realmente para Jonathan. As mesmas dificuldades profundas reapareciam, quaisquer que fossem as atividades ou tarefas matemáticas propostas em sala de aula. E isso levou-me, gradualmente, a desenvolver atividades e tarefas muito diferentes para o estudante na esperança de que o ajudasse a superar aquele primeiro limiar invisível que torna a álgebra incompreensível para muito mais alunos do que se pode imaginar. E para Jonathan isso foi um processo muito lento na conscientização do modo de trabalhar com os escritos simbólicos. A evolução do desenvolvimento de nossas reuniões e o que provocaram é o que vou apresentar neste trabalho.

1 O DESENROLAR DOS ENCONTROS

Em geral, quer seja frente a frente ou lado a lado no convívio, o trabalho foi feito, prioritariamente, conforme os "deveres escolares" do estudante, muitas vezes de urgência, como: um trabalho de casa, exercícios

[4] N. do tradutor: é um diploma que é conferido ao aluno após a aprovação no último ano do *collège* (*troisième*) e de uma prova bem sucedida.
[5] N. do tradutor: é um estágio onde o aluno não vai à escola por uma semana ou duas, mas vai trabalhar para um artesão profissional.

no livro de teste ou na preparação para uma avaliação etc.

Já no começo, percebi que o caminho seria enorme, pareceu-me até assustador. Pude observar, de imediato, que Jonathan estava completamente sem ação nos cálculos com números inteiros. Essas dificuldades inibiam-no nas tarefas matemáticas propostas em sala de aula. Desde o início e, por vezes, durante as férias escolares, propus a Jonathan tarefas no conjunto dos inteiros, tarefas que eram independentes das solicitadas nas aulas. Confiando em mim, ele estava feliz por fazê-las. Mais tarde, como era de se esperar, essas atividades paralelas também se aplicavam ao domínio da álgebra. Jonathan viu-se, assim, confrontado com duas fontes de atividades ou tarefas: as encontradas na escola, que o preocupavam principalmente; e àquelas inventadas por mim à medida que nos encontrávamos, observações e minhas análises. Foi assim que se instalou e se desenvolveu o acompanhamento de Jonathan desde o *quatrième* até o final do *seconde* profissional no *lycée* (ver a nota 2 de rodapé).

A necessidade de registrar as observações após cada sessão de trabalho para poder bem acompanhar o estudante impôs-se. A partir destas notas relatarei a trajetória do jovem ao longo de quase três anos. Foi necessário voltar às dificuldades encontradas e não ultrapassadas, nas atividades numéricas, no cálculo com números negativos e depois com os escritos algébricos. Evidentemente, tarefas específicas seriam necessárias para ajudarem-me a compreender as razões que levavam o rapaz a bloqueios e confusões, bem como permitissem-lhe compreender as tarefas matemáticas exigidas em aula. Essas anotações permitem-me hoje descrever a evolução de Jonathan na sua aprendizagem matemática, compreendendo-se tal evolução pela relação de confiança estabelecida e afirmada entre nós, numa mudança gradual de atitude, baseada em, primeiro lugar, “resistir” e, segundo, aceitar as inovações propostas, interessando-se por elas; algo que, ao fim, permitiu-lhe acessar verdadeiras atividades matemáticas.

A primeira etapa (janeiro de 2016 a junho de 2017 nas séries do *quatrième* e *troisième*) foi aquela em que, com paciência, tentei devolver a confiança a Jonathan, acompanhando-o no percurso escolar prescrito por seus professores. Foi o período no qual, apesar da sua boa vontade aparente, o jovem mostrou-se, ao mesmo tempo, relutante e ansioso. Naquele período, o estudante encontrava pretexto em tudo para fugir do trabalho (em um SMS de algum de seus colegas de turma, na ida ao toalete etc.). Foi, também, uma época em que eu estava bastante perdido, tendo em vista as suas dificuldades, mas não deixou de ser um período precioso e fundamental, uma vez que, com o recuo necessário, permitiu-me analisar o que não ia bem nas nossas trocas e, assim, elaborar e apresentar novas tarefas extracurriculares. Além disso, foi um momento inestimável para compreender como se ensina álgebra a uma grande parte dos alunos, começar a olhar o ensino da álgebra no *collège* de uma forma diferente e considerar atividades que levem, de fato, os alunos a compreensão e utilização da álgebra. A segunda fase é o último ano (de setembro de 2017 a junho de 2018, *seconde* em *lycée* profissional). Na verdade, essa etapa começou com a minha leitura do artigo de Duval e Pluvinage (2016) o qual deu origem a trocas sobre o que eu já tinha observado e tentado fazer durante os dois primeiros anos. Desde então, pude, em consulta com eles, propor e testar novas tarefas para Jonathan. As propostas inovadoras poderiam ser testadas e modificadas de acordo com as reações do estudante. Foi durante esse período que a atitude do aluno em relação à aprendizagem mudou realmente para melhor. As suas táticas dilatórias em relação aos trabalhos de casa tornaram-se raras e quase desapareceram, dando lugar a um entusiasmo, moderado é verdade, mas real nas suas manifestações.

2 JÁ NO COMEÇO, OS MAL-ENTENDIDOS E BLOQUEIOS COM O CÁLCULO COM NÚMEROS

Jonathan ficava completamente travado com o cálculo com números inteiros. Tinha até mesmo dificuldades com a adição, subtração e multiplicação de números inteiros com apenas um único dígito. Quando lhe pedia para calcular 4 × 6 sem a calculadora, ele jogava o jogo da adivinhação à espera da minha aprovação. Para subtrações de números com dois dígitos, o estudante utilizava a calculadora ou realizava a operação subtraindo em cada coluna o menor do maior dígito: “43 - 17= 34”. *A escrita de números* *inteiros parecia-lhe apenas uma justaposição de dois dígitos,* uma vez que não estava ciente do princípio da escrita posicional de base 10. Isso o impedia, obviamente, de fazer a operação mentalmente (ou mesmo, com um suporte material) de adições simples como 17 + 23. E quando se tratava de calcular 54 – 41, sem a utilização da calculadora ou operação armada (em que 41 é colocado sob 54 com um traço), e que eu propunha questionando a diferença entre 41 e 54: “41 + ? = 54”, ele permanecia com ares de dúvida.

A distinção entre “expressões incompletas” (54 – 41 ou 24 : 8) e “expressões completas” (41 + ? = 54 ou 41 + 13 = 54) (Duval, 2019, p. 107) permite-nos compreender por que razão essas operações numéricas têm, de alguma forma, o mesmo funcionamento que os escritos literais utilizados em fórmulas ou nos escritos simbólicos da álgebra elementar: baseia-se no fato de que duas expressões equivalentes poderem ser substituídas uma pela outra. Para Jonathan, não havia nenhuma relação entre “54 - 41 = ? ” e “41 + ? = 54”, eram expressões totalmente diferentes, pois ele não tinha ideia da equivalência das duas proposições, em que uma das quais poderia ser obtida a partir da outra, apenas passando um termo de um membro para o outro de igualdade numérica. Ele, também, enfrentava essas mesmas dificuldades com multiplicações e divisões: “8 × ? = 24 e 24 ÷ 8 = ?”. No entanto, a possibilidade de considerar esse tipo de substituição está na base de qualquer atividade do cálculo.

Jonathan já apresentava dificuldades no ensino *primaire*, razão a mais para que apresentasse dificuldades crescentes em noções sobre números com os quais se deparava no *collège*: confusão entre o quadrado e o dobro de um inteiro, decomposição de inteiros em produtos de inteiros para simplificar frações, para facilitar os cálculos ou para realizar linhas de cálculos onde as operações +, × e parênteses aparecem misturadas. Por exemplo, confundia 3 + 2 × 5 e (3 + 2) × 5, efetuando uma sequência de operações que, em ambos os casos, correspondia a uma leitura da esquerda para a direita, como em uma leitura de uma frase. Outro bloqueio, igualmente crucial, dizia respeito aos termos matemáticos que descrevem cálculos numéricos complexos, escritos sequencialmente em uma linha: “soma”, “diferença”, “produto”. Para Jonathan, não havia articulação ou coordenação entre essas palavras que descrevem operações frequentemente referidas por verbos, como “adicionar”, “subtrair”, “multiplicar” e os símbolos das operações para os números inteiros.

Todas essas dificuldades no âmbito dos escritos e cálculos aritméticos pareciam dificultar a sua entrada no mundo dos escritos e dos cálculos algébricos onde encontram-se o mesmo funcionamento de substituições entre expressões completas e incompletas.

Assim, propus tarefas que implicavam em substituições de expressões no cálculo numérico, na articulação da linguagem e da escrita numérica: tabelas multiplicativas ou aditivas a serem completadas, designação verbal qualificando listas do dobro ou do quadrado de números inteiros etc. Pouco a pouco, Jonathan progredia no campo numérico. Ao retomar os deveres de aula, a referência a essas tarefas diferenciadas permitia-lhe ultrapassar certos percalços no campo dos cálculos e de sua formulação. Por exemplo, às vezes, para desbloqueá-lo, eu fazia com que ele recitasse a tabela do quadrado e do dobro.

3 ANÁLISE SEMIO-COGNITIVA DAS ATIVIDADES EM ÁLGEBRA

Regularmente, Jonathan confrontava-se em sala aula com tarefas as quais se deparava com expressões simbólicas que misturavam letras desprovidas de sentido, números e símbolos de operações e relações. Os seus deveres de casa e cadernos de apontamentos cobriam três áreas de tarefas matemáticas e pareciam-lhe não estar relacionadas. Essas áreas foram feitas com o objetivo de ensino visando **a aquisição das equações, como instrumento de resolução de problemas,** ao final do *troisième*. Em um primeiro momento, eu deixava-o exausto com tantos exercícios de transformação de expressões algébricas; para formular as instruções, utilizava o vocabulário das operações de álgebra elementar (“fatoração”, “desenvolvimento”, “redução”) e o das operações aritméticas (“soma”, “produto”). O segundo momento consistia em exercícios de resoluções formais de equações e, o terceiro momento, de resolução de problemas "concretos" por meio da álgebra, em que uma equação é contextualizada em uma situação familiar. Por conseguinte, a linguagem natural fora utilizada para descrever essa situação e os dados necessários para resolver o problema concreto, mediante resolução de uma equação. A tarefa solicitada ao aluno é, então, equacionar os dados do problema, ou seja, encontrar a equação que estrutura matematicamente o enunciado do problema.

Seguiremos essas áreas de tarefas para analisar o comportamento de Jonathan quando confrontado com os seus trabalhos de casa. Veremos que lançando-o em três momentos de atividades de matemática que lhe pareciam sem relação, tentava valentemente sobreviver à sua maneira, agarrando-se o melhor que podia nos recortes que havia retido, ao menos, nos momentos em que não estava tão desanimado. As suas reações revelaram muitos mal-entendidos e confusões acerca das tarefas matemáticas. Para compreendê-las, será preciso primeiro fazer-se três questões:

> 1) O vocabulário das operações aritméticas e o das operações algébricas elementares faz sentido para os alunos? Ou, dito de uma forma mais precisa, e, sobretudo, mais fácil de ser controlada pelo professor e pelo próprio aluno: podem eles, de modo *quasi-reflexo*, passar de um desses termos matemáticos à escrita de uma expressão numérica incompleta (3 - 2), ou uma expressão literal incompleta (4a + 2), *e inversamente*?
>
> 2. *Esse é o mesmo trabalho que se pede ao aluno* em uma resolução formal de uma equação e no equacionamento de um problema?
>
> 3. Por que a resolução de problemas concretos *não permite reconhecer em uma situação real,* fora de um contexto muito local de treinamento, *a possibilidade de utilizar uma equação ou uma fórmula*? Essa questão também pode ser feita para os alunos com "sucesso" nesses tipos de exercícios.

A resposta a essas três perguntas desagua em uma exigência incontornável. Para adquirir conhecimentos matemáticos, ou seja, para aprender matemática e ser capaz de utilizar tais conhecimentos, *é necessário, em primeiro lugar, CONSCIENIZAR-SE da maneira como se trabalha para* *fazer matemática.* Porque a forma de fazê-la (explicá-la, raciociná-la, vê-la etc.) é totalmente diferente da forma de trabalhar-se em outros campos do conhecimento, pois consiste em um funcionamento semio-cognitivo subjacente às abordagens propriamente matemáticas. Os registros de representações semióticas são a ferramenta que permite analisar esse funcionamento cognitivo, e essa análise é decisiva para saber *como conscientizar-se do modo como trabalhar, no presente caso, em álgebra.*

As minhas observações e análises serão concernentes, portanto, ao comportamento de Jonathan em:

- Atividades algébricas formais de transformação de expressões algébricas;

- Resolução de equação;

- Atividades de equacionamento para resolver problemas.

Veremos, enfim, que de um ponto de vista semio-cognitivo, resolver uma equação e equacionar os dados do enunciado de um problema, para o resolvê-lo, são atividades radicalmente diferentes e que devem ser bem diferenciadas uma da outra.

4 JONATHAN E AS TRANSFORMAÇÕES DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Em contrapartida às expressões denominadas completas (equações, desigualdades, fórmulas), que se articulam em torno de um símbolo de relação (=, $\leq$ etc...), susceptíveis de serem verdadeiras ou não (Duval, Pluvinage, 2016, p. 124), consideraremos, aqui, as expressões algébricas que podem ser chamadas de incompletas, como por exemplo $3(x + 7)$, $3x + 21$ ou ainda $(x + 5)(x - 3)$. Em aula, Jonathan teve que aprender como desenvolver, reduzir ou fatorar tais expressões, ou seja, como substituir expressões incompletas por outras expressões semanticamente equivalentes. Por exemplo, substituir $3x + 21$ por $3(x + 7)$, duas expressões que não utilizam os mesmos números e símbolos operacionais, mas que são equivalentes. A substituição de uma expressão incompleta por outra semanticamente equivalente é, geralmente, uma primeira operação a ser feita para resolver uma equação. Por exemplo, dependendo do caso, “desenvolve-se” ou, ao contrário, “fatora-se” uma expressão incompleta que aparece em um membro da equação. Mas para Jonathan, em sala de aula, essas transformações pareciam-lhe algo isolado, as quais não via sentido e causavam-lhe grandes dificuldades. E a mim repetia:

“Pra que serve isso?”

Em momentos de desânimo para fazer os seus trabalhos de casa, ou preparar avaliações cujo objetivo era rever o que tinha sido feito na aula, Jonathan, sob a minha vigilância e com a minha orientação, realizava transformações de expressões algébricas, por vezes corretas, muitas vezes falsas, confundindo fatoração, desenvolvimento e redução...

“É a mesma coisa né?”

Para poder prosseguir nos seus estudos, muitas vezes, tive que me lançar ao trabalho para que ele também se empenhasse como que por mimetismo.

Em relação ao procedimento de desenvolver e reduzir, ele se lembrava de “dicas” vistas em sala de aula, mas não relacionados a nenhuma dessas palavras. Assim, quando precisava desenvolver e reduzir uma expressão incompleta, do tipo: $(a + b)(c + d)$, preenchia a expressão inicial com quatro setas correspondentes aos produtos ac, ad, bc, bd e depois acabava escrevendo esses quatro termos. É um procedimento que ele se recordava e o permitia iniciar corretamente a desenvolver uma expressão. *Ele não se dava conta se estava desenvolvendo, reduzindo ou fatorando, mas sabia como fazê-lo...* Mas, quando se tratava de desenvolver e reduzir a expressão $(x + 4)(x + 2) + (x + 3)(x + 1)$, ele fazia aparecer um monte de setas. Começava colocando as que correspondiam a $(x + 4)(x + 2)$ e, também, juntava com setas as letras e números desse primeiro bloco às letras e números do segundo bloco $(x + 3)(x + 1)$. Não diferenciava a ordem das operações nos tratamentos. Esse também foi um tipo de dificuldade que encontrou ao realizar cálculos numéricos complexos escritos em linha, por exemplo, confusão entre $3 + 2\times5$ e $(3 + 2) \times 5$. Em ambos os casos, Jonathan segmentou os escritos lineares sem levar em conta regras de prioridade e parênteses, na maioria das vezes, da esquerda para a direita, como na leitura de uma frase em língua natural.

As expressões que precisavam ser fatoradas variavam de simples exemplos, como: $3x + 3 \times 7$, à expressões mais complexas, como: $(x + 3)(7 - 2x) + 5(x + 3)$, ou expressões que necessitavam o *reconhecimento* de identidades notáveis! Mas, diante desse cenário *de símbolos de operações, números, letras e parênteses,* Jonathan se perdia! E, para sua consternação, eu também! Quando tentei ajudá-lo, ele ficou intrigado com as palavras matemáticas, como "termos" e "fatores" que eu costumava usar para descrever as expressões algébricas a serem transformadas em outras expressões:

“Não entendo o que isso significa.”

E brincava:

“Fator, oh sim, o fator!” ou “A soma, ah, sim, me nocauteia”[6]

Durante a campanha eleitoral presidencial, Jonathan me confidenciou: “A matemática é tal e qual os presidentes, eles falam e você não consegue entender o que querem dizer”.

De minha parte, no início, jogava o seu jogo, mostrando a minha surpresa e prazer com os seus trocadilhos. Às vezes, eu acrescentava: “**Ah sim, eu te nocauteio, é isso!**”. Ele ria e concordava. No entanto, eu retomava com ele as expressões algébricas para aplicar estas palavras: *“3(a + 5) significa que 3 é multiplicado pela somado com 5 e que 3 é um fator desta soma, lê-se 3 fatores de a + 5”.* Em seguida, ele acrescentava um sinal × entre 3 e (a+5): $3\times(a+5)$. Para o caso das fatorações, entendeu que quando existiam dois fatores idênticos, poder-se-ia *“prescindir dos dois fatores para fazer o*

[6] N. do Tradutor. Um trocadilho entre *somme* (soma) e *assomme* (noucateia) na frase “La *somme*, ah, oui, çà *assomme*” (“A soma, ah, sim, me nocauteia”).

trabalho e manter apenas um". Assim, desde que lhe fosse lembrado que 5x significava 5× x, poderia conceber que 5x +7x é 12x e até x × (5 + 7). Observo que quando se deparou com 0x, ficou em dúvida: não resultava 0 para ele... Do mesmo modo, 1x não se tornava forçosamente x e, de maneira oposta, ele não concebia que escrever x = 1x poderia ser útil. Eu observava também, em Jonathan, mediante a sua postura perplexa e dos seus erros, *a ambiguidade existente entre os sinais de operação + ou - e esses mesmos sinais ligados a um número.* Por exemplo, ao fator 5a + 5 × (-3), ele poderia igualmente escrever diretamente 5(a + 3) ou 5(a - 3) ou ainda 5(a+ - 3) sem saber qual escolher e nem passar por 5(a + (- 3)) para chegar em 5 (a - 3).

Com as minhas explicações pontuais e elaboradas de formas mais sólidas, o progresso perceptível era tênue, incoerente, superficial, sempre para ser retomado, sempre em função das minhas explicações. Tive a impressão de um trabalho de Sísifo! Obviamente, essas observações mostraram que um trabalho fundamental, em direção à compreensão do funcionamento semio-cognitivo dos escritos simbólicos e a sua coordenação com termos matemáticos, ainda faltava ser pensado.

5 JONATHAN E AS RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES

Com a resolução das equações entramos no domínio daquilo que se pode chamar de expressões completas, porque se articulam em torno de um símbolo de relação, nesse caso "=", com cada um dos membros da equação em uma expressão incompleta.

Em sala de aula, o trabalho de resolução havia sido abordado, nos exercícios a serem feitos. Jonathan deveria resolver equações que variavam desde os casos mais simples, no início, como: x + a = b, ou cx = d (com variações nos valores numéricos a, b, c, d e que poderiam tornar as resoluções, mais ou menos, fáceis, do tipo: 3x = 15 ou 3x = 17 ou - 3x = - 15) aos casos mais complexos com incógnitas de cada lado do símbolo " = " ou, ainda, os membros com expressões incompletas que eram, mais ou menos, complexas para serem reduzidas ou fatoradas.

A primeira dificuldade que observei em Jonathan foi a sua falta de compreensão da tarefa:

"Resolver a equação...? O que deve ser feito?"

Ele não compreendia o que se esperava dele. Tive de explicar-lhe o que significa resolver uma equação, ou seja, "descobrir para que valor(es) de x, a equação dada é verdadeira". No exemplo da equação $x + 2 = 5$, compreendia ele que a solução era 3 e respondia corretamente às questões quando se tratava de verificar se um certo número era de fato a solução de uma dada equação, mesmo sendo do segundo grau. Por exemplo: "Consideremos a equação em x: $x^2 + x = 6$, o valor 2 é a solução para esta equação?".

A segunda dificuldade observada em Jonathan dizia respeito a sua interpretação do sinal "=", encontrado nas equações. Quando se trata de descobrir para que valor(es) a equação seria verdadeira, a sua primeira tendência foi adicionar novamente, após o segundo membro da equação, o "=", como se faz quando se tem que substituir uma expressão algébrica inicial por outras para, conforme o caso, expandir, reduzir ou fatorar a expressão inicial. Pela reação de Jonathan, pode-se concluir que, as duas expressões incompletas de cada lado do sinal "=" eram independentes. E quando o guiei laboriosamente e autoritariamente para que pudesse transformar a equação dada, no início, em equações equivalentes, por exemplo, movendo todos os "x" para um lado, mas também fazendo com que, gradualmente, o jovem limpasse, reduzisse e fatorasse as expressões incompletas de cada lado do símbolo "=", ele exclamou:

"Eles são malucos em matemática, não sabem o que querem".

Dá para entender a consternação do estudante perante dois significados radicalmente diferentes do símbolo "=". Por um lado, para anotar as sucessivas substituições de uma expressão inicial incompleta (...=...=...=...) e, por outro lado, para marcar a equivalência entre a equação inicial e a equação final obtida (...=... equivalente a ...=... etc.).

No entanto, ele também se lembrava de tratamentos que tinha feito em aula, mas sem compreender o seu significado, nos quais tentava isolar x do lado esquerdo do símbolo “=”. Para isso, quando os símbolos operacionais que articulavam a expressão incompleta eram símbolos de operações aditivas, como as do tipo x + a = b, ele aplicava a “regra da mudança de sinal” e, assim, por vezes, conseguia isolar x como lhe havia sido pedido. Mas, quando os símbolos operacionais que articulavam a expressão incompleta eram os de operações multiplicativas, ele confundia operações aditivas e multiplicativas. Apesar de alguns progressos no cálculo com números (nos quais conseguia fazer corretamente substituições de expressões entre elas para efetuar o cálculo), *não percebia a semelhança entre a transformação de grafia entre os escritos literais e os escritos numéricos*. Para as equações da forma ax = b, ele hesitava entre x = b - a, x = a/b e x = b/a. Eu, ainda, precisava muitas vezes lembrar-lhe ou explicar-lhe que ax significava a×x. Ele podia, então ver muito facilmente, por exemplo, que a solução para a equação 3x = 21 era x = 7, transformando 3x=21 em 3×x = 21. *Mas, a dúvida voltava quando o número do segundo membro da equação não era um inteiro*. Assim, para 3x = 20, ele propunha x = 20 - 3 ou x = 3/20. Ele ficava, também, perturbado quando, após as devidas substituições, um “-x”, finalmente, apareceu à direita do símbolo “=”. A equação “-x = -7” paralisou-o. Transformar “-x = -7” em “-1×x = -7”, como eu sugeria-lhe, deixava-o na dúvida! Ficava do mesmo jeito quando eu lhe falava sobre o “oposto de x”. Ele concordava em passar “- x para a direita” e “- 7 à esquerda” para chegar a “7 = x”, mas isso parecia-lhe estranho, uma vez que, x era para estar do lado esquerdo do símbolo “=”. Outro exemplo, ao resolver a equação 5x - 3 = 8x + 1, para a qual ele escrevia sucessivamente 5x - 8x = 1 + 3, -3x = 4, depois x = 4 + 3 e x = 7, fazia-lhe falta a compreensão dos diferentes empregos do símbolo “-”. A conscientização para essa diferenciação parece ser uma questão de aprendizagem necessária para que estudantes como Jonathan, que são na realidade muitos, possam progredir.

Nesse domínio da resolução de equação, nada exprime melhor a profunda incompreensão que levou Jonathan ao desânimo do que a frase:

“Eles são doidos em matemática, não sabem o que querem”.

A resolução das equações mais simples requer, de fato, duas operações semio-cognitivas diferentes: transformar as expressões incompletas constituídas pelos membros das equações pelo desenvolvimento, redução ou fatorização e; transformar as expressões completas das equações em expressões completas equivalentes. Isso é feito trabalhando com o símbolo do camaleão “=” (Duval, Pluvinage, 2016, p. 122). Como se pode constatar, essa distinção entre as diferentes funções do sinal “=” não fora alcançada! O principal desafio para Jonathan seria compreender em uma equação a diferença entre as duas expressões incompletas em cada lado do sinal de igualdade (a expressão da direita não é uma transformação da expressão da esquerda), mas que elas não são independentes, precisamente, por conta do símbolo “=”, e que estamos, portanto, na configuração de uma expressão completa, a ser transformada em uma outra expressão completa com a mesma “denotação”, no sentido de Frege[7] citado por (Duval, 2019, p. 115). Nesse caso, as sucessivas equações pelas quais a primeira é substituída não contêm os mesmos escritos, mas referem-se sempre à mesma questão: “*Para que valor(es) de x a equação inicial dada é verdadeira?”*

Jonathan estava muito distante dessa constatação. Uma observação sobre as suas reações no domínio da resolução de equações em que, paradoxalmente, fora bem sucedido confirmava-o. Tratava-se de resolver equações em exercícios os quais entrava, em jogo, relações de proporcionalidade (cálculo de comprimento, com Thales, problema de proporções, cálculo das percentagens etc.). Jonathan já não conseguia, de modo autônomo, estabelecer as igualdades formais que lhe permitiam resolver esses problemas, porque as noções subjacentes não estavam ainda dominadas. Por exemplo, analisar uma figura em subfiguras para determinar as condições de aplicação do Teorema de Thales, elaborar uma tabela de correspondência entre os dados de uma situação de proporcionalidade etc. Mas, uma vez que aceitou a tabela 2 x 2 ou o tipo de igualdade a/b=c/d que permitia a resolução desses tipos de problemas, ficava mais tranquilo:

[7] Frege G., (1971/1892). Sens et dénotation. Écrits logiques et philosophiques (trad. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.

"Eu consigo fazer!"

Ele conhecia um "truque" o qual lhe permitia encontrar o valor desconhecido que instanciava igualdade. A rotina aprendida em sala de aula consistia em desenhar ou andar por um caminho contínuo de setas para chegar à resposta. Para obter um valor faltante, gestos e setas contínuas o apoiavam, multiplicava os valores conhecidos que figuravam em dois lugares diagonais e dividia pelo terceiro valor conhecido. Mas, na verdade, esse é um procedimento que esconde as substituições de expressões completas a serem feitas para resolver tais equações e que afastava a possibilidade de apreender a operação, consistindo na substituição de uma expressão completa por outra expressão equivalente. A prova disso era a resistência do estudante a qualquer outro tratamento que não fosse aquele no qual ele agarrava-se, como se fosse uma boia de salvação. Quando lhe disse que poderíamos substituir a equação inicial $a/b=c/d$ pela equação $ad = bc$, ele se rebelava:

"Mas pra que complicar as coisas"

O meu argumento era dizer que se tratava de uma forma mais útil de lidar, de um modo geral, com os casos. Mas não lhe convencia. E com razão, certamente, porque como vimos anteriormente, ele não fora capaz de mudar, espontaneamente, de $ac=bd$ para $a=bd/c$. Tratava-se de um mal-entendido que não é surpreendente, como mostra a enquete PISA 2003, no qual uma questão do cálculo da duração de uma etapa L – a partir da fórmula $n/L = 140$, sendo que o número de etapas por minuto n vale 70 – faz com que mais de 50% dos estudantes de 15 anos errem-na (Duval, Pluvinage, 2016, p. 121). Estamos aqui também diante do caso de escritos fracionários de relações ou substituições a serem feitas, para isolar a incógnita, que são complexas de serem realizados (Adjiage, Pluvinage, 2012, p. 49).

Finalmente, independentemente da complexidade das equações de primeiro grau a serem resolvidas, as sessões repetidas de exercícios sobre este tema, acompanhadas das minhas explicações, não foram eficazes. De um tempo a outro, geralmente começavam com:

"Eu não me lembro! Me mostre!".

Além disso, os “truques” que ele trazia na aula, como a mudança de sinal quando se passa de um membro a outro de uma equação ou, ainda, o caminho com flechas para encontrar o termo faltante em uma igualdade de proporção, eram apenas “apoios locais” que não lhe permitiam “caminhar de forma independentemente”, na verdade eram manobras que mascaravam as operações cognitivas envolvidas.

6 JONATHAN E O EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS

Os dados de um problema podem ser encontrados de muitas formas: no trabalho de campo, registrando-se observações feitas durante manipulações físicas em “laboratório”, em tabelas de dados ou em um enunciado de um problema que descreve uma certa situação. Esse tipo de apresentação de dados de um problema é comum e frequentemente encontrado no ensino e nos manuais escolares. Era bem esse tipo de problema o enfrentado por Jonathan em aula ou nos trabalhos de casa os quais já tínhamos tentado resolver juntos, ou mais precisamente ao lado dele! Após avaliações fracassadas em aula, ele se justificava:

> “Eu não lembrava mais como fazer. O senhor me explicou, mas *durante a prova*, eu não me lembrava de mais nada”

Quando eu mesmo lecionava no *collège*, utilizava frequentemente o “problema do peso da garrafa e da rolha” para tentar conscientizar os alunos a interessassem-se por recorrer ao uso da equação na solução de um problema. Tentei, corajosamente, experimentar com Jonathan, mas foi um fracasso. Mas, um fracasso que nos permite analisar não só a complexidade cognitiva de equacionar os dados de um problema, bem como a ambiguidade e as armadilhas dos chamados enunciados de problemas ditos “concretos”.

Apresentei este enunciado a Jonathan:

> Uma garrafa e a sua rolha pesam juntas 110 gramas. A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha. Quantos pesam a garrafa e a tampa, respectivamente?

Como eu esperava, ele respondeu que a garrafa pesava 100g e a rolha 10g. Tinha a certeza da sua resposta e a sua certeza provava que ele acreditava ter compreendido o enunciado. Ele ficou surpreendido por eu ter-lhe questionado a resposta, confrontando-a com a segunda frase do enunciado do problema: “A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha”. O jovem permanecia em dúvida e calado diante do meu questionamento! Não tinha, certamente, considerado a complexidade dessa frase. Diante da perplexidade demonstrada resolvi, então, evocar o peso do seu cão e o do seu gato. Iniciou-se então o diálogo seguinte, conduzido, de minha parte, de forma mais ou menos hábil:

- “Digamos que o seu cão pese 5 kg e o gatinho 4 kg. Quanto a mais do que o gato pesa o cão?”

- “Oh, sim, ele pesa 1kg a mais do que o gato.”

- “E se a garrafa pesa 100g e a rolha 10g?”

- “Ah sim, então a garrafa pesa 90g a mais do que a rolha!”

E, no calor das trocas na conversa, ele acrescentou:

- “Mas, então a garrafa deve pesar 80 gramas!”

Então, pedi-lhe que voltasse a ler a primeira frase do enunciado do problema e ele suspirou:

- "Pfff...! »

O estudante tinha tomado consciência da complexidade dos dados constantes no enunciado. De minha parte, a essa altura dos fatos, estava igualmente aborrecido e não sabia como reagir, de forma pertinente (volto a esse ponto na seção seguinte). Sob a pressão do tempo que passava, precipitei as coisas, dizendo “e se chamássemos x o peso da garrafa?”. Isso também bloqueou Jonathan na possibilidade de iniciar eventuais tentativas numéricas (volto também a esse ponto na seção 7). Ele não ficou muito surpreendido com a minha proposta, uma espécie de proposta que já encontrara em aula ou na retomada da correção de exercícios, mas replicou:

"Não, x é o peso da rolha, eu prefiro..."

Eu disse: "Está bem, vamos chamar x o peso da rolha. Então qual é o peso da garrafa baseado em x?". Diante dessa questão típica de um professor de matemática, ele respondeu:

"Não se pode saber por que não se conhece o peso da rolha!"

Essa frase era indicativa da principal dificuldade com que Jonathan se confrontava: não compreender que para dar início ao equacionamento do enunciado do problema, seria necessário não só designar por uma letra o peso de um dos dois objetos evocados, *e não se contentar em designar o peso do outro objeto por uma outra letra de forma independente*. Seria necessário empregar a primeira letra para exprimir o peso do segundo objeto, utilizando a relação com o peso do outro tal como foi dada em linguagem natural no enunciado! Para ele, o peso da garrafa era uma quantidade isolada e "x" não tinha o estatuto de uma designação do peso da garrafa, cujo valor devia permanecer transitoriamente desconhecido e depois ser encontrado. Surpreso com a sua categórica declaração, eu não soube o que fazer! Tentei convencê-lo, mas as minhas explicações, mais ou menos, equivaleram a propor sucessivos passos, ditando as diferentes escritas que conduziriam à equação final: situação idêntica que acontece em geometria, quando apresenta-se uma demonstração na qual os alunos não compreendem o que vem a ser uma demonstração matemática. Evidentemente, tudo o que eu encontrava era perplexidade e resignação. Que paciência ele tinha! E eu então!

7 ANÁLISE RETROSPECTIVA RELATIVA À COMPLEXIDADE PARA EQUACIONAR OS DADOS DO ENUNCIADO DE UM PROBLEMA

Foi só depois que percebi a complexidade das operações discursivas quando se pede aos alunos que os dados de um problema desse tipo resultem em uma equação. Para compreender essa complexidade, utilizei o modelo de análise bidimensional semio-cognitiva de Duval, Campos, Barros & Dias (2015) que toma a forma da Tabela 1, a seguir.

Na margem vertical da Tabela 1 colocamos as diferentes designações possíveis do mesmo objeto em linguagem natural e simbólica. E na margem horizontal vão os três tipos utilizados de designações de objetos apresentados no enunciado: verbal, numérica e literal. Para escrever a equação correspondente aos dados do problema que são fornecidos no enunciado, é necessário primeiro preencher as nove casas das primeiras linhas. *Isso, porque cada uma dessas caixas corresponde a uma pergunta que deve, explicitamente ou implicitamente, ser feita quando da leitura do enunciado,* corresponde ao fato de que existi três objetos diferentes que são designados no enunciado e que podem, cada um, dar origem a uma das quatro designações discursivas diferentes. Esses objetos são obviamente quantidades ou números.

Tabela 1: modelo de análise bidimensional semio-cognitiva

	DESIGNAÇÃO VERBAL DOS três objetos do problema	DESIGNAÇÃO NUMÉRICA	RE-DESIGNAÇÃO LITERAL
1. Designação direta			
Designação indireta 2. *descritiva* (LÍNGUA) 3. *funcional* (LETRAS)			
4. *Dupla designação de um mesmo objeto*			
EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL			

A possibilidade de dupla designação de um mesmo objeto é de importância crucial. Com efeito, satisfaz o requisito fundamental formulado por Frege (1971/1892) para qualquer atividade matemática: dispor de duas designações (Sinn) do mesmo objeto (Bedeutung) para poder reconhecer a sua equivalência referencial, ou a sua não-equivalência referencial, é o reconhecimento dessa dupla designação relativa ao mesmo objeto que finalmente chega-se à equação. A última linha da tabela, separada das operações discursivas, aponta para essa constatação.

Aplicando o modelo de análise da Tabela 1, para o problema:

> Uma garrafa e a sua rolha pesam juntas 110 gramas. A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha. Quanto pesa, respectivamente, a garrafa e a tampa?

obtém-se a seguinte tabela preenchida:

Tabela 1: Análise bidimensional semio-cognitiva de Duval et al. (2015) aplicada ao problema do peso da garrafa e da rolha

	DESIGNAÇÃO VERBAL DOS três objetos do problema	DESIGNAÇÃO NUMÉRICA	RE-DESIGNAÇÃO LITERAL
1. Designação direta	Peso da GARRAFA Peso da ROLHA Peso dos DOIS	.. **.?..**. … **?..**. 110	a b (a + b)
Designação indireta 2. *descritiva* (LÍNGUA) 3. *funcional* (LETRAS)	A garrafa "*pesa ... a mais do que a rolha"*	(… + 100)	(b + 100)
4. *Dupla designação de um mesmo objeto*	*Peso dos dois* "a garrafa e a sua rolha pesam 110g"	110	(a + b) *ou* ((b+100) + b)
EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL			2b +100 = 110 (EQUAÇÃO)

Essa Tabela permitiu-me decifrar, retrospectivamente, o modo como tentei guiar Jonathan passo a passo ao longo das sete etapas seguintes:

1. Seleção de um dos sintagmas nominais do enunciado nominal da declaração ("O peso da rolha");

2. Escolha de uma letra para designar a primeira quantidade verbalmente

designada (“Vamos designar por b o peso da rolha”);

3. Seleção de outro sintagma nominal (“Peso da garrafa”);

4. Utilização funcional da mesma letra para designar a segunda quantidade (“peso da garrafa: b+100”);

5. Seleção do terceiro sintagma nominal (“o peso da cortiça e da garrafa”);

6. A Utilização funcional da letra para designar a terceira quantidade (“Peso da tampa e da garrafa: b+(b+100)”);

7. Reconhecimento da dupla designação da terceira quantidade que finalmente dá a equação (“110g e b+(b+100)”).

Essa abordagem para equacionar o enunciado de um problema é, obviamente, nada fácil para os alunos compreenderem. E explicar aos alunos ou guiá-los em cada passo, pergunta após pergunta, decisão após decisão, linearmente, como tentei fazer com Jonathan e, mesmo que seja ainda de um modo mais engenhoso, não vai ajudá-los a compreenderem o conjunto desse processo. Mas, permitiu-me ver como eu poderia ter agido com Jonathan de forma mais astuta em dois momentos:

- o primeiro momento foi quando, após a sua resposta imediata, tive de reler as duas primeiras frases do enunciado para ele e no qual, um pouco desanimado, conscientizou-se da dupla barreira que elas impunham. Poder-se-ia prever duas possibilidades diferentes: uma, certamente, permitir-lhe-ia resolver o problema, mas sem passar pela equação resultante da leitura do problema; a outra possibilitaria a Jonathan iniciar uma análise mais aprofundada do enunciado do problema. A primeira possibilidade poderia ter sido fazer tentativas numéricas, com pares de números, em função das condições impostas no enunciado do problema. Como, por vezes, é feito por pessoas a quem esse enunciado é submetido em um jogo de adivinhação, os quais descobrem que a resposta é falsa, e que poderia ter se envolvido no chamado método “de tentativa e erro”, consistindo em considerar cada uma das duas condições separadamente para testar diferentes pares de números. Poder-se-ia pensar no encontro de “um” par de números inteiros que satisfizesse, portanto, encontrar "uma" solução para o problema, sem passar pelo equacionamento do problema. Mas, o objetivo (que não deu certo) da sequência não era introduzir Jonathan na resolução, baseada no equacionamento de dados desse tipo de problema concreto, que aparecia em sua turma na escola? E quanto ao método de tentativa e erro, há uma questão de rigor matemático que é preciso considerar (mesmo que a situação não estivesse madura para Jonathan perguntar-se): não há garantia da unicidade da solução encontrada. Por outro lado, os problemas dessa natureza se prestam à utilização de um método desse tipo. A segunda possibilidade teria sido iniciar um trabalho de compreensão das duas frases do enunciado e da sua relação. Por exemplo, como sugeriu Raymond Duval, eu poderia ter sinalizado ou pedido uma reformulação da segunda frase, dessa vez, fixando-a no peso da cortiça: "A cortiça pesa 100 gramas a menos do que a garrafa". A inversão desse ponto de apoio teria permitido a Jonathan a possibilidade de comparar diferentes versões não congruentes, mas equivalentes, dessa frase que lhe traziam dificuldades de compreensão, e para avançar em uma discussão sobre os pesos indicados no enunciado e os não indicados, talvez para que ele pudesse conscientizar-se da designação indireta dos objetos.

- o segundo momento foi quando sugeri a Jonathan a ideia de chamar "x o peso da garrafa", crucial na escolha do objeto a ser designado diretamente por uma letra, para iniciar o equacionamento do problema. Crucial porque envolve a complexidade da redesignação funcional que virá em seguida. Nesse caso, poder-se-ia redesignar por uma letra tanto o peso da rolha quanto o da garrafa. Se chamássemos x o peso da rolha e sabendo que "a garrafa pesa 100 g a mais do que a rolha", acabaríamos com a seguinte redesignação indireta do "peso da garrafa: x + 100". Uma formulação literal congruente com a formulação verbal. Se, por outro lado, x é chamado o peso da garrafa, a designação indireta funcional do peso da rolha deixará de ser congruente com a designação descritiva da afirmação "peso da rolha: x – 100". Para fazer a designação funcional indireta, a equivalência entre as duas formulações deve ser considerada ou identificada: "A garrafa pesa100 gramas a mais do que a cortiça" e "A cortiça pesa 100 gramas a menos do que a garrafa". Um professor ou um aluno estudioso escolherá como objeto de designação direta aquele que poderá trazer-lhe menos dificuldades na realização da nova designação funcional e no prosseguimento das operações a serem realizadas para chegar à equação final. Nesse caso, ao dizer a Jonathan: “E se chamássemos x o peso da garrafa?”, eu não havia feito a escolha mais simples, contrariamente ao que Jonathan me retrucou: “Não, x é o peso da cortiça, eu prefiro...”, sem ter ideia do que estava por vir na sequência das operações.

Retificar, desta forma, as minhas intervenções não teria certamente permitido a Jonathan compreender melhor o processo de equacionar um problema. Na verdade, em momento algum Jonathan estava em posição de tomar a iniciativa, *era eu, de fato, que fazia o trabalho*. Essa análise retrospectiva permite ver os impasses e os limites dos procedimentos, em sala de aula, trabalhados em um modo “maiêutico”. Elas podem não contribuir para que os alunos se tornem autossuficientes no equacionamento de problemas.

8 OS PRIMEIROS PASSOS DE JONATHAN EM ÁLGEBRA

Quais tarefas devem ser desenvolvidas para que possam, realmente, ajudar Jonathan a compreender as atividades algébricas? Essa foi a questão que se fazia a partir das observações e análises relatadas até esse momento. As trocas e discussões sustentadas com Raymond Duval e François Pluvinage permitiram conceber e testar algumas atividades, especificamente, cognitivas desconectadas das obrigações escolares imediatas. Foram bem aceitas por Jonathan, especialmente, porque não estava em jogo apenas o acerto ou erro. Ele levava essas atividades como se fossem um jogo e tinha sempre confiança em mim. Oh, bem claro, estávamos numa fase de tentativa e erro e, muitas vezes, eu ainda tinha que dar apoio a Jonathan com algumas explicações. As suas reações nos permitiam relançarmo-nos ao trabalho.

Qual foi o principal objetivo dessas atividades? Permitir que Jonathan dê um primeiro passo essencial na álgebra elementar. Vimos, no equacionamento do problema do peso da cortiça e da garrafa, que Jonathan não aceitava que se pudesse designar, por uma mesma letra, o peso da cortiça e o peso da garrafa. O primeiro passo essencial que queríamos fazer é que

Jonathan pudesse se conscientizar da designação funcional na utilização de uma letra para designar um número por uma expressão incompleta, como 2x ou x+2. Para isso, as propostas que lhe foram apresentadas, estavam na forma de tabelas a serem preenchidas. Eis uma panorâmica significativa de um primeiro exemplo que lhe foi apresentado, uma panorâmica acompanhada de um breve relato das reações de Jonathan.

Esta tabela (Tabela 2) de preenchimento comporta duas listas abertas de números inteiros.

Jonathan começa o trabalho, na parte numérica, com um sorriso diz:

"Queres me ensinar a contar?"

Após um lembrete do significado da palavra sucessiva, ele preenche corretamente a tabela por 4 e 5, confunde-se um pouco na sequência, preenchendo as colunas, independentemente, uma da outra com uma lógica vertical e enganando-se na contagem, retifica e volta à corresponder horizontalmente os números das duas listas e pula para 107 para colocar 108 na frente.

Tabela 2: Tabela de exercício apresentada a Jonathan

Dois números inteiros sucessivos	
1	**2**
2	**3**
3	**4**
4	**…**
5	**…**
…	**…**
…	**…**
107	**…**
Uma letra?	E o que escrever aqui, então?

Para a célula “uma letra?” correspondente à primeira coluna, ele propõe “x” e para a outra célula “E o que escrever aqui, então?” sugere, sorridente, imediatamente “y”. Uma resposta lógica porque ele se depara frequentemente com “x” e “y” em sala de aula.... Eu proponho-lhe utilizar “x” para a segunda coluna. Desta vez, um pouco surpreendido e, após um momento de reflexão, escreve “1x”. Pergunto-lhe a razão e ele me responde:

“*1x quer dizer que a gente acrescenta 1 à x”,*

e eu digo-lhe que significa “1 multiplicado por x”. Lembremos que, para uma expressão como “3a”, Jonathan sempre precisou de “3×a” para ser escrita. Ele objetou:

“*Eu me entendo*”

Mesmo que para ele “1x” signifique “x+1”, ele aceita, finalmente, escrever “x+1” para executar o uso que lhe indiquei... Podemos ver aqui que Jonathan faz uso de um código pessoal e que não integrou o código comum. Mas, apesar dessa dificuldade de expressão, Jonathan conseguiu redesignar a segunda célula com a letra que foi utilizada para designar a primeira. Essa é uma operação que ele compreendeu bem e que reproduzirá sem hesitação em outras situações do mesmo tipo que lhe serão propostas (duplo, quadrado etc.).

Na sequência, propus a Jonathan tabelas incompletas com várias linhas e colunas que cruzavam expressões numéricas, expressões algébricas e sintagmas nominais. Para completá-las, foi necessário articular esses diferentes modos de expressão. Na sequência, apresento dois exemplos:

- Primeiro exemplo

Número escolhido	Triplo do número escolhido	………………………
1	3	4
2	6	7
3	9	10
4	……	13
5	……	……
……	……	……
……	……	……
…….	24	25

x	3 x	…….

- Segundo exemplo

Número escolhido	Dobro do número escolhido	………………………
1	2	4
3	6	36
2	4	16
4	……	64
5	……	
……	……	……
……	……	……
……	16	…..
……	……	324

x	2 x	…….

Jonathan lançava-se na aventura com júbilo. A partir das células preenchidas dadas, propunha conteúdos para as células vazias, as controlava, voltava atrás etc. Tudo isso em uma ordem indeterminada e sem a minha intervenção. Ele estava feliz, o tempo passava e já não contava mais.

Nesses últimos meses, quando pude acompanhá-lo, com esses tipos de tarefas puramente semio-cognitivas e radicalmente diferentes das que tinha encontrado até então em sua escolaridade, ele ganhava confiança! Jonathan começava a aprender a fazer o caminho da álgebra.

Mas não fora só isso. Durante esse período, paralelamente a essas atividades que lhe devam confiança e sempre longe de qualquer cobrança escolar, Jonathan teve a oportunidade de se envolver em verdadeiros procedimentos matemáticos. O que essas oportunidades tinham em comum era a utilização do cálculo algébrico, como ferramenta de generalização e prova relativas à identificação das regularidades numéricas[8]. Os enunciados exigiam verdadeiras abordagens matemáticas, tais como: exploração, conjectura, generalização e prova. Apoiado em suas aprendizagem iniciais em álgebra e pelos suportes constituídos por tabelas, foi possível organizar o seu trabalho e compreender as etapas, Jonathan podia passar as três primeiras etapas de forma quase autônoma e compreender a necessidade da 4ª etapa, mesmo quando ele ainda não era capaz de efetuá-la.

Quanto aos cálculos algébricos, ele ainda dependia das minhas explicações e dos escritos que anotava. Parecia que me escutava, assim de um jeito meio que distraído. Mas, ao guardar o seu material, pedia as minhas anotações, o que confirmava o seu interesse pela abordagem global. Em suma, se eu continuasse a bricolagem nas atividades propostas, eu tinha assim um Jonathan interessado e ativo a minha frente, e orgulhoso quando lhe dizia que o trabalho que estávamos fazendo era como o que é feito por verdadeiros investigadores matemáticos. A matemática, sobre a qual tínhamos sido tão ousados no início das nossas reuniões, começava finalmente a ter um rosto mais simpático e até mais entusiasta para ele.

9 FIM DA AVENTURA COM JONATHAN. O QUE SE SEGUE (2018-2021): PERSPECTIVAS PARA OS PROFESSORES NAS SUAS SALAS DE AULA

[8]Exemplo: “Escolha dois números que totalizem 300 e efetue o seu produto. Acrescente 7 a cada um deles. Em quanto aumenta o seu produto?”

Jonathan estava “no caminho certo”, como se lê por vezes nos boletins escolares, havia chegado em um ponto de alternância e, durante um dos últimos episódios, François Pluvinage partilhava comigo o seu sentimento:

> “Formidável, como Stromae cantaria! E tenho de admitir que o seu relatório e as folhas escritas por Jonathan me provocaram uma certa emoção: vê-se, realmente, alguém que está sendo introduzido no cálculo algébrico. É claro que no início a sua ajuda foi necessária antes que ele “tirasse a poeira dos sapatos” e colocasse um dispositivo semiótico (soma, diferença, ...), o que os anglo-saxões chamariam de *scaffolding*, mas em seguida ele vai em frente, como mostra a sua produção”.

Essa apreciação me deixou feliz e estimulou Jonathan quando lhe falei sobre o assunto. Mas, isso abriu um debate. O meu sentimento era de fato menos eufórico e me juntei a Raymond Duval que achava ainda esse momento precipitado. É certo que Jonathan estava cumprindo os seus primeiros passos, mas faltava-lhe a resolução de problemas e o equacionamento de problemas, levando em conta critérios semio-cognitivos de sucesso: ter sucesso sozinho, sem qualquer ajuda e de forma rápida.

Mas, o meu acompanhamento parou aí, uma vez que, no ano seguinte, Jonathan entrou finalmente em uma aprendizagem em alternância em uma empresa que desenvolve design, uma situação que respondia bem a sua sensibilidade artística. Continuo a ver Jonathan de vez em quando, mas a parte escolar que subsiste no seu caminho deixa, agora, pouco espaço e necessidade de álgebra...

No entanto, não posso deixar de imaginar como poderia ter continuado a trabalhar com o Jonathan, em particular, para ajudar-lhe em álgebra, para resolver problemas matemáticos ou concretos, combinando duas abordagens sugeridas por Raymond Duval (2002, 2013). Em todo o caso, ainda em contato com um grupo de professores universitários do IREM, em Estrasburgo, relatei os progressos realizados com o Jonathan e partilhei todas as minhas observações feitas durante esses encontros, bem como o apoio às tarefas inovadoras experimentadas nessas ocasiões. Pergunto- me se isso foi uma boa base para o início da prospecção e dos testes em sala de aula?

Raymond Duval alertava-me sobre as dificuldades de uma tal abordagem, que já não se desenvolve mais no contexto de trabalhos individuais. O prosseguimento de uma pesquisa clínica seria difícil, senão impossível. A entrega de fichas de trabalho aos colegas não permitiria compreender as reações dos alunos e aí reagir para acompanhar os seus encaminhamentos. De fato, em sala de aula, sem entender o que Jonathan quer dizer com: "1x quer dizer que se adiciona 1 a x", e eu "me compreendo" percebendo que havia tomado consciência do funcionamento da designação funcional com a mesma letra, mas tinha desenvolvido para esse efeito um código pessoal "1x" para designar o sucessor de um "x" inteiro? De um modo geral, as tarefas que poderiam ser propostas aos alunos para acompanhá-los nos seus primeiros passos em álgebra, segundo o modelo que eu tinha proposto a Jonathan, exigiriam um acompanhamento individualizado. Raymond Duval fazia, nesse caso, a comparação com o que é realmente necessário na aprendizagem da leitura, e acrescentou que as condições cognitivo-didáticas seriam conscientes ou inconscientemente difíceis de serem aceitas por muitos professores.

François Pluvinage foi menos reservado e escreveu em maio de 2018:

> Talvez eu esteja demasiado otimista, mas, para mim, agora está bem. Os colegas docentes estão dispostos a fazer experiências em sala de aula com algumas eventuais modificações?"

E é consciente dessas dificuldades que, em 2018, com Anne Schultz, Audrey Candeloro, Hélène Chilles Brix e Pauline Wiederhold, professores do *Collège* e, desde então, com outros professores do *Collège* que se juntaram a nós, assumimos esse desafio no âmbito de um grupo IREM, em Estrasburgo, intitulado "*Algebraic learning in middle school*": fazer com que cada um dos alunos das suas turmas faça a mesma evolução feita por Jonathan. Mas de uma forma que inclua a resolução de problemas e de uma maneira mais rápida, sem, contudo, abandonar os objetivos globais que são perseguidos não ao fim de cada ano escolar, mas ao fim do *Collège*. Até agora, apesar da nossa tentativa e erro, das diferenças nas nossas experiências e das nossas convicções, como professores, os resultados têm sido encorajadores. Provavelmente, vamos demorar tanto tempo quanto eu e o Jonathan demoramos. Mas, pensamos que em breve poderemos comunicar em um documento o que é uma aventura partilhada entre nós e nossos alunos.

Bibliografia

Adjiage, R. et Pluvinage, F. (2012). Strates de compétence en mathématiques. *Repères-IREM* 88, 42-72.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Dans J.P. Drouard et M. Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (p.67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT* (Trad. en Portugais M. T. Moretti)V. 8, n. 1, 1-45.

Duval R., Campos T. M. M., Barros, L.G. et Dias, M. A. (2015). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, 117-152.

Duval, R. (2019). Écriture et pensée mathématique : le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. *Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques* (Ed. M. Maurel) Academia.edu, 105-139.

Frege G., (1971/1892). Sens et dénotation. Écrits logiques et philosophiques (trad. Imbert) pp. 102-126. Paris : Seuil.

CAPÍTULO III

O ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO NA PERSPECTIVA DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE UNIDADES FIGURAIS: POSSIBILIDADES A PARTIR DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMO

Bárbara Cristina Pasa
Méricles Thadeu Moretti

As representações gráficas, enquanto formas de comunicação com capacidade de facilitar a compreensão de fenômenos ou de situações cotidianas, são cada vez mais utilizadas, tanto diariamente, em jornais e revistas, como em pesquisas científicas nas diversas e distintas áreas do conhecimento. Dentre essas formas de representação, *o esboço de curvas*, enquanto imagem geométrica de uma função real de variável real é o cerne das reflexões suscitadas neste trabalho.

Na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a compreensão de um objeto matemático está vinculada à articulação de diferentes registros de representação semiótica deste objeto. Assim, compreender as dificuldades que grande parte dos estudantes demonstra na percepção de um mesmo objeto sob diferentes formas de representação, perpassa refletir o ensino e a aprendizagem da Matemática de forma a valorizar as representações semióticas e, mais do que isso, as conversões[1] entre elas.

Com base nisso, na atividade de esboçar curvas de funções, as representações necessárias e a serem articuladas são a algébrica, dada pela lei

[1] Operação cognitiva de transformação de representações que consiste em mudar de registro, conservando o objeto.

da função e a figural, dada pelo gráfico no plano cartesiano. A maior parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes se encontra justamente na conversão entre essas representações semióticas. Isso, pois, de acordo com pesquisas na área de Educação Matemática (Duval (2011a), Mattos Filho e Menezes (2010) e Rezende (2003, 2007)), as dificuldades de aprendizagem se originam de um enfoque, praticamente único, dado no ensino, à construção de gráficos a partir da abordagem “ponto a ponto”, que consiste em, tendo como referência os eixos coordenados, encontrar alguns pontos particulares (pares de números) e marcá-los no plano referencial. Esta é a abordagem mais utilizada senão a única no ensino tradicional e pode favorecer o traçado da função afim ou de intervalos de outras funções, contudo, restringe o olhar quanto a características fundamentais presentes no conceito de funções: movimento, transformação e dinamismo; bem como não proporciona a tomada de consciência das conversões entre registros de representação semióticas necessárias, característica esta fundamental para a aprendizagem de acordo com a teoria de Raymond Duval.

Devido a essas questões, diversas pesquisas estão sendo realizadas (Moretti (2003); Silva (2008); Luiz (2010); Moretti, Ferraz e Ferreira (2008); Menoncini e Moretti (2017); Martins (2017); Pasa (2017) entre outros) no sentido de propor e discutir formas distintas de esboçar e compreender curvas, que valorizam as conversões entre representação algébrica e figural e, mais do que isso, proporcionam uma compreensão efetiva da curva e do conceito de função. Especificamente para o ensino da função afim e esboço do seu gráfico, Duval (2011a) apresenta a *abordagem de interpretação global das propriedades figurais* como uma possibilidade de compreensão integral deste objeto. Esta abordagem perpassa a análise da congruência entre registro algébrico e gráfico com base nas unidades significativas de cada representação a partir dos parâmetros do registro algébrico e a relação destes com unidades significativas gráficas.

Na direção destas ideias, apresentamos a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, direcionando nosso olhar para as taxas de variação de uma função enquanto recurso orientador para articulação de unidades significativas básicas. Na sequência, expomos o *caminho alternativo*[2] para as atividades de esboçar e compreender curvas das funções reais polinomiais do segundo e terceiro graus do ensino médio. Por fim, visando refletir sobre as potencialidades e limitações do esboço de curvas na perspectiva do caminho alternativo, discutimos algumas construções de estudantes no esboço de curvas, destacando aspectos relativos à teoria cognitiva de Raymond Duval.

TAXA DE VARIAÇÃO POR MEIO DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMOS NA DIREÇÃO DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL

De acordo com a teoria de Raymond Duval (2004), a aprendizagem matemática está relacionada à diversidade dos registros de representação semiótica de um objeto matemático e, além disso, à coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Especificamente em relação ao ensino e à aprendizagem de gráficos, este autor ressalva que somente a *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* possibilita a compreensão integral da curva e do que ela representa (Duval, 2011a). Na perspectiva desta abordagem, a compreensão de um gráfico perpassa a

---

[2] O caminho alternativo para esboçar curvas é apresentado e amplamente discutido na tese Pasa (2017).

realização de uma análise das propriedades peculiares de partes constituintes da curva (Moretti et al., 2008), mais especificamente, a identificação, em uma função, de variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico e unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico), e, além disso, à coordenação destas.

Duval (2011a) apresenta esta abordagem para o caso específico da função polinomial real do primeiro grau ($y = ax + b$) ressaltando a importância da análise qualitativa no sentido de perceber no coeficiente angular a, por exemplo, o sentido da inclinação da reta. A partir deste estudo de Duval (2011a), esta abordagem vem inspirando pesquisadores na busca por recursos e/ou elementos que permitam esta associação entre variáveis visuais e unidades significativas algébricas de outras funções.

O *caminho alternativo* aqui apresentado culmina no esboço de curvas de funções reais polinomiais do segundo e terceiro graus por meio do emprego de uma ideia que se aproxima da de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), no sentido de utilizar elementos do Cálculo como orientadores de conversão, mas que possam ser calculados e compreendidos no âmbito do ensino médio, sem o rigor e formalização de limites e derivadas. Esses elementos/recursos orientadores são as *taxas de variação da função* que carregam informações valiosas para o esboço e a compreensão da curva de uma função.

As taxas de variação, ainda que vastamente utilizadas no ensino médio, são somente trabalhadas com profundidade no ensino superior, mais especificamente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, e com rigor e formalização inapropriados para o trabalho no ensino médio. Por isso, a fim de proporcionar a interpretação global a partir de unidades visuais significativas e possibilitar ao estudante deste nível de ensino a compreensão de variabilidade necessária não só para esboço de curvas, mas para a compreensão de fenômenos e análises de situações, utilizamos o potencial didático da *noção de infinitésimos* no cálculo das taxas de variação, não no sentido de seu rigor e formalização, mas no de possibilitar o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas e sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada.

Assim, para encontrar a taxa de variação instantânea de primeira ordem[3] - $TVI_1(x)$ de uma função, encontra-se primeiramente a taxa média de variação da função em um intervalo genérico Δx: $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e considera-se Δx um infinitésimo, ou seja, um número muito próximo de zero (infinitamente próximo de zero), de forma que às vezes pode ser desprezado, mas, ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ele mesmo quando isso for conveniente. Desta forma, a noção de infinitésimo é utilizada intuitivamente e se mostra um recurso interessante e frutífero neste contexto devido ao fato de ela proporcionar uma compreensão intuitiva sobre a variabilidade de funções, favorável ao entendimento de fenômenos no ensino médio.

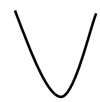
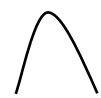
[3] $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função, enquanto que a ideia de *variação da taxa de variação instantânea*, ou taxa de variação instantânea de segunda ordem da função é representada por $TVI_2(x)$.

CAMINHO ALTERNATIVO PARA ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO MÉDIO

Estudar elementos do cálculo no ensino médio, mais precisamente a variabilidade de funções, além de desafiador, pode proporcionar uma compreensão efetiva do conceito de função, conforme Ávila (1991), Duclos (1992), Rezende (2003, 2007) e Silva, Andrade e Azevedo (2013) sinalizam. O esboço de curvas a partir do caminho alternativo perpassa a variabilidade de uma função, concluída por meio do estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ($TVI_1(x)$) ou, se necessário for, de segunda ($TVI_2(x)$) ordem. Deste modo, a identificação de unidades básicas simbólicas se refere à expressão algébrica da $TVI_1(x)$ e as unidades básicas gráficas, aos intervalos de crescimento e decrescimento, aos pontos máximos e mínimos. Para algumas funções, faz-se necessário o estudo da taxa de variação instantânea de segunda ordem ($TVI_2(x)$), a qual permite concluir sobre concavidade e pontos de inflexão.

Tomando, por exemplo, uma função polinomial real do segundo grau na forma $y = ax^2 + bx + c$, a $TVI_1(x)$ em um valor qualquer de x será $TVI_1(x) = 2ax + b$. Utilizando o mesmo processo, encontra-se a $TVI_2(x) = 2a$, a qual não é necessária para esboçar curvas dessas funções, mas permite concluir sobre a concavidade da curva. Utilizando as taxas de variação ($TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$) da função quadrática nesta perspectiva, são analisadas importantes variáveis relativas à função, apresentadas na tabela 1, a seguir.

Tabela 1 - Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau

Unidades básicas simbólicas				**Unidades básicas gráficas**			
TVI_1	**Valor de** a	TVI_1	**Valor de** x	**Reta Tangente**	**Concavidade** (TVI_2)	**Ponto crítico**	**Esboço curva**
$2ax + b$	$a > 0$	< 0	$x < b/2\,a$	Decrescente	Para cima (positiva)	Mínimo absoluto em $x = -b/2\,a$	
		$= 0$	$x = -b/2\,a$	Constante			
		> 0	$x > -b/2\,a$	Crescente			
	$a < 0$	< 0	$x > -b/2\,a$	Crescente	Para baixo (negativa)	Máximo absoluto em $x = -b/2\,a$	
		$= 0$	$x = -b/2\,a$	Constante			
		> 0	$x < b/2\,a$	Decrescente			

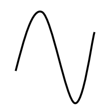
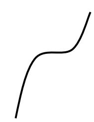
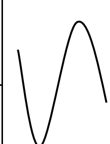
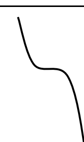
Fonte: Pasa (2017, p. 146).

Com relação às conversões expostas na tabela 1, cabe salientar que o relevante na perspectiva do caminho alternativo é a conversão que permite uma compreensão global de propriedades fundamentais relacionadas à variabilidade: crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo, concavidade.

No esboço de funções polinomiais reais de terceiro grau, além da análise da $TVI_1(x)$, algumas funções requerem a análise da variação da $TVI_1(x)$, nomeada de $TVI_2(x)$, a qual possibilita concluir sobre a concavidade da curva. Portanto, sendo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, tem-se $TVI_1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $TVI_2(x) = 6ax + 2b$. O esboço da curva pode acontecer estudando apenas a $TVI_1(x)$ da função ou, quando este dado é insuficiente, analisando a $TVI_2(x)$.

A tabela 2, a seguir, expõe a relação entre as unidades básicas simbólicas, referentes à $TVI_1(x)$, e as unidades básicas gráficas, referentes à reta tangente, aos pontos críticos e ao esboço da curva.

Tabela 2 - Esboço de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau a partir da análise da $TVI_1(x)$

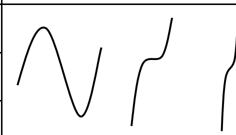
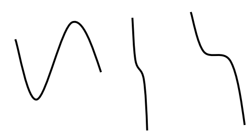
Unidades básicas simbólicas					Unidades básicas gráficas		
TVI_1	**Coef.** a	**NR***	TVI_1	**Valores de** x	**RT****	**Esboço curva**	**Pontos críticos**
$3ax^2+2bx+c$	>0	2	<0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto Inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			>0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Cresc		
		0	>0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ – Ver tabela 3.	Cresc		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
	<0	2	<0	$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x>\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Decres		Máx. e mín. relativos ($TVI_1(x)=0$). Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			$=0$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Const		
			>0	$\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$	Cresc		
		1	$=0$	$x=\frac{-b}{3a}$	Const		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)
			<0	$x<\frac{-b}{3a}$ e $x>\frac{-b}{3a}$	Decres		
		0	<0	$x\in R$ Esboço a partir da análise da $TVI_2(x)$ - Ver tabela 3.	Decres		Ponto inflexão ($TVI_2(x)=0$)

*NR = Número de Raízes
**RT = Reta Tangente - Crescente (Cres), Decrescente (Decres) ou Constante (Const).

Fonte: Pasa (2017, p. 149).

A tabela 3 apresenta o esboço da curva de uma função real polinomial de terceiro grau a partir da análise da concavidade - $TVI_2(x)$.

Tabela 3 - Análise da concavidade de curvas de funções reais polinomiais do terceiro grau

Unidades básicas simbólicas				**Unidades básicas gráficas**	
TVI_2	**Coef.** a	**Sinal da** TVI_2	**Valor de** x	**Concavidade**	**Possíveis esboços da curva**
$6ax + 2b$	$a > 0$	< 0	$x < b/3a$	Negativa – para baixo	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		> 0	$x > -b/3a$	Positiva – para cima	
	$a < 0$	< 0	$x < b/3a$	Positiva – para cima	
		$= 0$	$x = -b/3a$	Local de Inflexão	
		> 0	$x > -b/3a$	Negativa – para baixo	

Fonte: Pasa (2017, p. 150).

As tabelas 1, 2 e 3 se constituem em uma referência do caminho alternativo para esboço de curvas de funções polinomiais reais do segundo e terceiro graus, apontando elementos essenciais na perspectiva deste trabalho.

CONSTRUÇÕES DOS ESTUDANTES: REFLEXÕES SOBRE O CAMINHO ALTERNATIVO

A fim de refletir sobre as potencialidades e limitações do esboço de curvas na perspectiva do caminho alternativo foi realizado um trabalho pedagógico com estudantes do terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual de Erechim, RS, da qual foram coletados os esboços de curvas de funções construídos pelos estudantes. Elementos da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996) balizaram a organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa empírica possibilitando uma análise mais criteriosa do caminho alternativo para esboçar curvas.

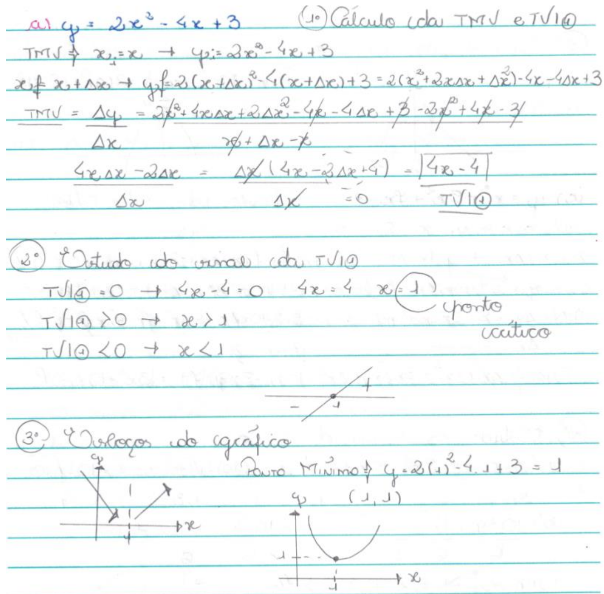
Nas análises apresentadas são pontuados aspectos da produção dos estudantes relacionados às compreensões concebidas no âmbito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no sentido de identificação e coordenação de unidades significativas simbólicas relativas à taxa de variação e unidades significativas gráficas. Além disso, são evidenciadas, nas reflexões, questões relativas ao discurso utilizado pelos estudantes com base nas diferentes funções[4] e operações do discurso de uso de uma língua no funcionamento do pensamento, referenciadas por Duval (2004): expansão discursiva, apofântica e referencial.

A análise do discurso que leva em conta as operações supracitadas proporciona compreensões a respeito do que é explícito ou não nas construções dos estudantes e do que foi mobilizado em termos de conhecimentos. As operações de expansão discursivas envolvem as explicações, descrições, narrações e raciocínios, os quais podem ser de natureza lógica ou natural e ainda podem se constituir por acumulação ou por substituição, utilizando regras que podem estar explícitas ou não. As operações da função apofântica, de predicação ou locução, nos permitiram inferir sobre o valor lógico, epistêmico e/ou social do discurso utilizado pelos estudantes, ou seja, nos permite argumentar a favor da validade da construção. As operações da função referencial, por sua vez, serão destacadas quando evidenciadas designações de objetos.

[4] Em Brandt, Moretti e Bassoi (2014) é possível identificar, compreender e clarificar as funções do discurso de Duval (2004) quando os autores discutem sobre essas funções na resolução de problemas matemáticos.

Na figura 1, a seguir, apresentamos o esboço da curva da função $y = 2x^2 - 4x + 3$.

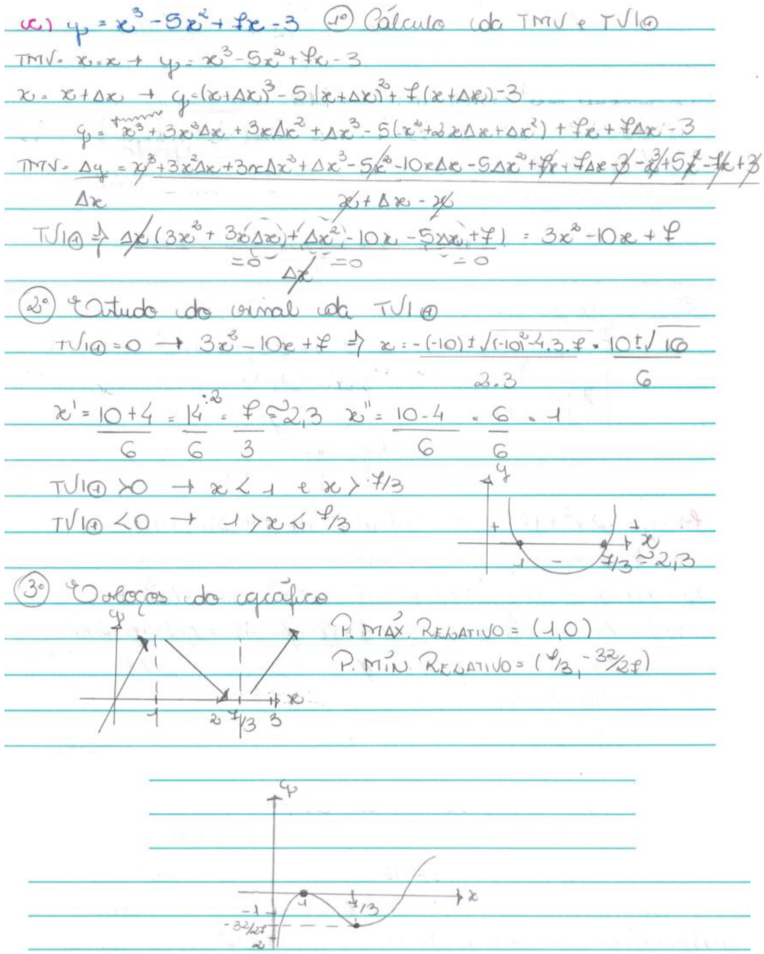
Figura 1: Esboço da curva da função $y=2x^2-4x+3$



Fonte: Pasa (2017, p. 275).

No esboço exposto na figura 1, observa-se que o estudante estruturou seu discurso em etapas como forma de organizar os procedimentos necessários e antes do esboço “final” foi construído um esboço de variabilidade com flechas que determinam o crescimento e decrescimento, chamada por Thomas Jr. e Finney (1988) de “envoltória” formada pelas retas tangentes dentro da qual a curva fica contida e indica seu formato. Com relação ao seu discurso, o estudante utilizou uma expansão do tipo lógica, formada por proposições válidas matematicamente, tendo assim, um valor lógico de verdade.

Figura 2: Esboço da curva da função $y=x^3-5x^2+7x-3$

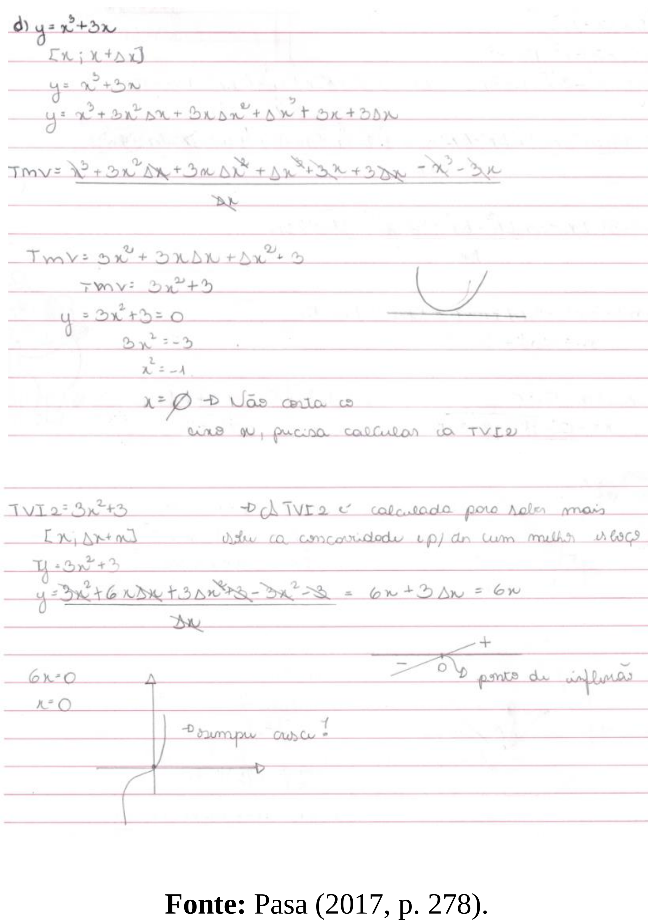


Fonte: Pasa (2017, p. 277).

O tipo de discurso apresentado na figura 1, a partir de uma expansão do tipo lógica, não utilizando a expansão em língua natural para expressar suas conclusões, foi recorrente, podendo ser verificado também nas construções das figuras 2 e 3, exposta a seguir. No caso da figura 2, a $TVI_1(x)$ da função é uma função polinomial do segundo grau com duas raízes reais e distintas, cuja análise do sinal foi realizada esboçando a parábola por meio das suas raízes e da concavidade, identificada pelo sinal do coeficiente a da $TVI_1(x)$. É uma resolução com valor lógico de verdade, valor epistêmico e social.

O esboço a seguir é da função $y = x^3 + 3x$, cuja $TVI_1(x)$ não possui raízes reais e a única análise possível é a da $TVI_2(x)$.

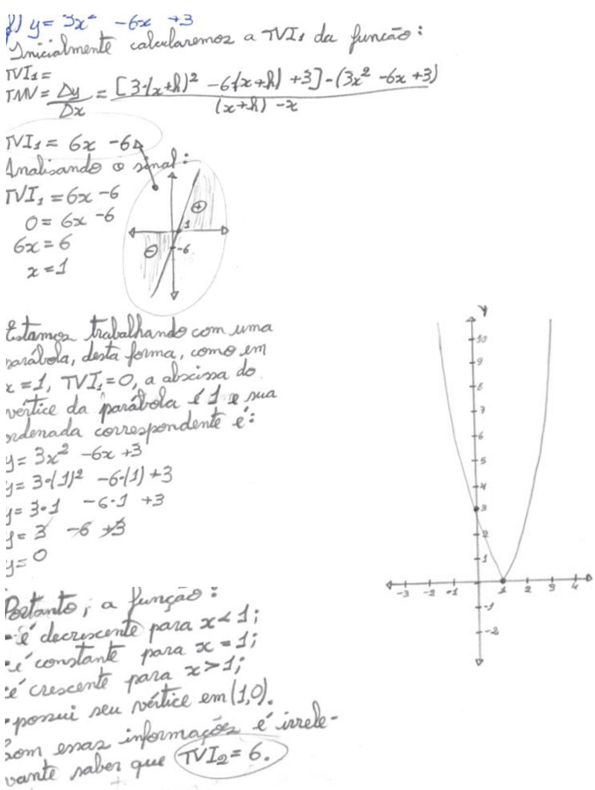
Figura 3: Esboço da curva da função y=x^3+$3x$



Fonte: Pasa (2017, p. 278).

Para o esboço da curva da função $y = x^3 + 3x$, na figura 3, foi necessário encontrar e analisar a $TVI_2(x)$, uma vez que a $TVI_1(x)$ é sempre positiva e informa apenas que a curva é crescente. Para melhorar o esboço, o estudante calculou a $TVI_2(x)$, a qual informa sobre os pontos de inflexão e a concavidade. Contudo, não fica claro se o estudante utilizou a relação entre a $TVI_2(x)$ e a concavidade para esboçar a curva, pois não está explícito se o estudo do sinal da $TVI_2(x)$ foi realizado para avaliar a concavidade, mesmo porque, também não é possível concluir a partir do esboço final da curva.

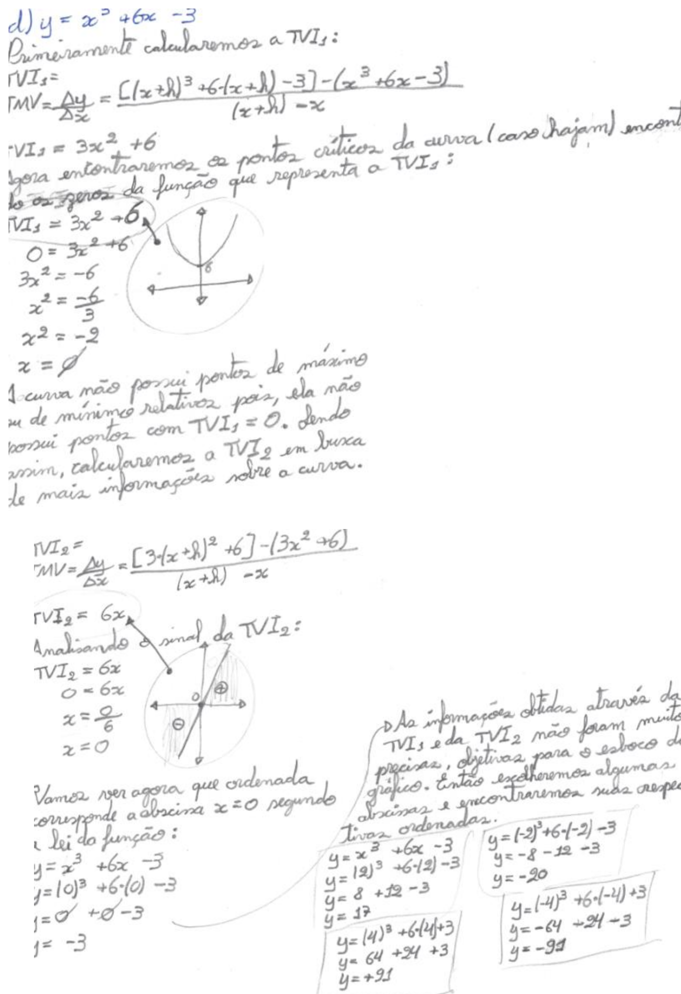
Figura 4: Esboço da curva da função *y=3x²-6x+3*



Fonte: Pasa (2017, p. 279-280).

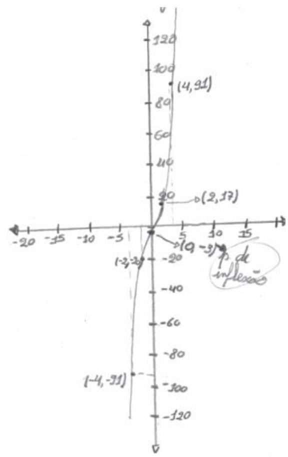
Na figura 4 apresentada, o esboço da curva $y = 3x^2 - 6x + 3$ se dá a partir de um discurso repleto de inferências, alternando a expansão natural e lógica que demonstra o engajamento o estudante na comunição de suas conclusões. Este mesmo tipo de discurso é evidenciado na figura 5, a seguir, que apresenta a construção do esboço da curva da função $y = x^3 + 6x - 3$.

Figura 5: Construção do esboço da curva da função y=x^3+$6x$-3



Fonte: Pasa (2017, p. 280-281).

Figura 6: Esboço da curva da função y=x^3+6x-3



Fonte: Pasa (2017, p. 280-281).

A figura 5, que culmina no esboço da figura 6, expõe o raciocínio do estudante que afirma que "a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x)$ não foram muito precisas", o que o levou a encontrar alguns pontos da curva da referida função e localizá-los no plano cartesiano a fim de tornar o gráfico mais preciso. Esta atitude evidencia o apego à abordagem ponto a ponto, mesmo compreendendo a curva em seus aspectos variacionais, ainda assim, a necessidade de exatidão se fez presente. No discurso desta construção, recheada de registros algébricos, gráficos e em língua natural; fica evidente o ato ilocutório, demonstrando o comprometimento do estudante em "se fazer entender", com a intenção de organizar o pensamento e orientar o leitor. Este tipo de construção, em que o ato ilocutório enquanto função do discurso é um comprometimento do estudante, deve ser valorizada e incentivada no ensino a fim de possibilitar aprendizagens mais significativas e atribuição de sentido às soluções apresentadas para quaisquer tipos de problemas matemáticos.

O material coletado referente às resoluções dos estudantes, com algumas particularidades, explicita o caminho alternativo trilhado de forma coerente, fazendo uso de proposições válidas segundo a argumentação matemática. Na maioria dos esboços, percebemos um discurso com expansão do tipo lógica, mesclando registros algébricos e gráficos, mas utilizando pouco a língua natural. Evidenciamos que as unidades básicas simbólicas foram identificadas e coordenadas com unidades básicas gráficas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisar o caminho alternativo apresentado para estudar curvas de funções perpassa a importância do papel das representações semióticas na atividade matemática. Dois aspectos são essenciais sobre as representações semióticas: a questão epistemológica de acesso aos objetos matemáticos que ocorre somente a partir das representações semióticas e a questão cognitiva da natureza da atividade matemática e funcionamento do pensamento, relacionada aos "gestos intelectuais" (Duval, 2011b, p. 41) exigidos na atividade matemática e descritos em termos de transformações de representações semióticas.

Diante disso, um trabalho em sala de aula que leva em conta o ponto de vista cognitivo em que a aprendizagem perpassa a análise dos gestos intelectuais requeridos e necessários de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica e que, além disso, avalia as conjecturas elaboradas pelos estudantes, o estabelecimento de hipóteses, a designação de relações e as inferências realizadas para que um problema seja resolvido, é de extrema relevância. Esse tipo de análise possibilita que o professor tenha um olhar diferenciado para o seu ensino, a elaboração e a correção das avaliações matemáticas.

A abordagem de esboçar curvas “ponto a ponto”, quando é a única trabalhada no ensino, pode tornar-se um processo mecânico que não possibilita compreender as correspondências semióticas entre o registro algébrico e gráfico, sendo assim, fonte de inúmeras dificuldades. Esboçar curvas na perspectiva do caminho alternativo é desafiador, pois perpassa uma mudança de concepção no ensino de Matemática como um todo. Por outro lado, a compreensão e o esboço de uma curva a partir da sua variabilidade e mediada pela utilização da noção de infinitésimos no âmbito do ensino médio possibilita uma ampla e profunda compreensão do conceito de função relacionada ao dinamismo, transformação e movimento inerentes a este objeto matemático.

As resoluções dos estudantes apresentadas expõem a forma como estes conceberam o caminho alternativo e fizeram uso das relações entre expressão algébrica e gráfica da função. A análise das funções do discurso e suas operações presentes nas construções dos estudantes evidenciam como os estudantes designam objetos de conhecimento (como fazem, entendem e procedem), de como ocorre o ato ilocutório, o qual permite a identificação dos valores lógicos e epistêmicos das respostas/construções apresentadas caracterizando e possibilitando uma forma de avaliação que não se limita a olhar resultados e sim o processo. Além disso, é importante também para análise dos modos de expansão do discurso que permitem as inferências sobre os modos de pensar dos estudantes revelados nos discursos explicitados nas construções.

É necessário e urgente que se promova, no contexto do ensino médio, um ensino de funções e esboço de curvas em sintonia com as possibilidades de aprendizagem dos estudantes e, mais do que isso, com as necessidades atuais em termos de conhecimentos demandados pelo cidadão. Por isso, iniciativas de refletir caminhos alternativos possibilitam que o ensino de esboço de curvas seja permeado por diferentes olhares, formando um conjunto de possibilidades que se complementam com potencialidades a novas leituras e interpretações gráficas.

REFERÊNCIAS

Artigue, M. (1996). *Engenharia Didática*. In: Brun, J. (Org.). Didática das Matemáticas. Instituto Piaget – Coleção Horizontes Pedagógicos.

Ávila, G. (1991). O ensino de Cálculo no 2° grau. *Revista do Professor de Matemática*, 18, pp. 1– 9.

Brandt, C. F.; Moretti, M. T. & Bassoi, T. S. (2014). Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educ. Matem. Pesq*., São Paulo, 16 (2), pp. 479-503.

Duclos, R.C. (1992). Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, 20, p. 28.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2011a) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, 6 (2), p.91-112.

Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.

Luiz, L. S. (2010). *Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias*. (142 fl.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Martins, M.H.S. (2017). *A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas.* (220fl.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Mattos Filho, M. S. & Menezes, J. E. (2010). Como os alunos do ensino médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais 1º e 2º graus. *Anais do X ENEM*, Salvador, BA.

Menoncini, L. & Moretti, M.T. (2017). A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista – RS*, Ano 18, 1 (18), v.1, pp. 126-134.

Moretti, M.T. (2003). *A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais*. In: Machado, S. D. A. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, p. 149-160.

Moretti, M.T.; Ferraz, G. A. & Ferreira, V. G. G. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática, XVII (2)*.

Pasa, B.C. (2017). *A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais*. 311 fl. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Rezende, W.M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 468 fl. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Rezende, W.M. (2007). Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico. *Anais do IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.* Belo Horizonte, Minas Gerais.

Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica* (143 fl.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Silva, C.C; Andrade, A.P.R. & Azevedo, C.L.V.R. (2013). O Cálculo no Ensino Médio: as taxas de variação e o conceito de derivada. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM.*

Thomas Jr, G. B. & Finney, R. L. (1988). *Cálculo e Geometria Analítica*. Tradução de Denise Paravato. Rio de Janeiro: LTC.

CAPÍTULO IV

ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS MEDIADO PELO GEOGEBRA: ARTICULAÇÕES ENTRE A ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Sérgio Florentino da Silva
Méricles Thadeu Moretti

Entre as superfícies estudadas no Ensino Superior destacam-se as que são conhecidas como quádricas (elipsoides; hiperboloides de uma e de duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos (selas); cilindros quádricos elípticos, hiperbólicos e parabólicos).

O ensino dessas superfícies, comum nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, não é simples e, ademais, sua aprendizagem possui um grande custo cognitivo para os alunos. Diante dessa problemática, este artigo tem como objetivo discutir como enfrentar tais dificuldades. Para tanto, do ponto de vista da aprendizagem apoiamo-nos na *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* de Raymond Duval (1988). Para seu ensino, sugerimos que a participação dos alunos esteja em sintonia com elementos da *Teoria das Situações Didáticas* (*TSD*) de Guy Brousseau (2008). Nesse enfrentamento propomos algumas atividades com o uso do *software* Geogebra e discutiremos ainda que esse *software*, de forma dinâmica, interativa e experimental, é um facilitador na articulação entre a teoria semio-cogntiva de Duval (1988) e elementos da TSD de Brousseau (2008).

De maneira ampla, segundo Brousseau (2008, p. 21) “a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional.” Como característica da TSD não nos limitamos a apenas comunicar um conhecimento pois, mais do que isso, tentamos anunciar as atividades e transferir a responsabilidades aos alunos. O termo transferir refere-se a tentativa de compartilhar responsabilidades e não tem o sentido de que o professor seja negligente no cumprimento de suas atribuições. Nesse processo, o professor procede de tal forma que os alunos aceitem a atividade como um desafio seu a ser resolvido. Enfim, trata-se do que ficou conhecido como *devolução* de uma situação para os alunos. Nesse caminho, aspira-se que surjam momentos em que os alunos trabalhem de forma independente ou sem a "intervenção direta" do professor. Para tanto, é claro que o nível das atividades que os professores elaboram é tal que os alunos possam, ao menos em parte, realizá-las. Essa ideia almeja o que Brousseau (2008) chamou como *situações a-didáticas*. Com elas,

> as concepções de ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. (Brousseau, 2008, p. 35)

Como vemos, na TSD o processo de ensino e aprendizagem não se limita a apenas informar aos alunos os conhecimentos matemáticos pois, ao invés disso, dá-se oportunidades para que os estudantes sejam ativos no processo e incentiva-se uma forma de abordar em que eles participem de atividades investigativas que, inclusive, possam testar, validar ou refutar conjecturas e, paralelamente, desenvolver sua autonomia.

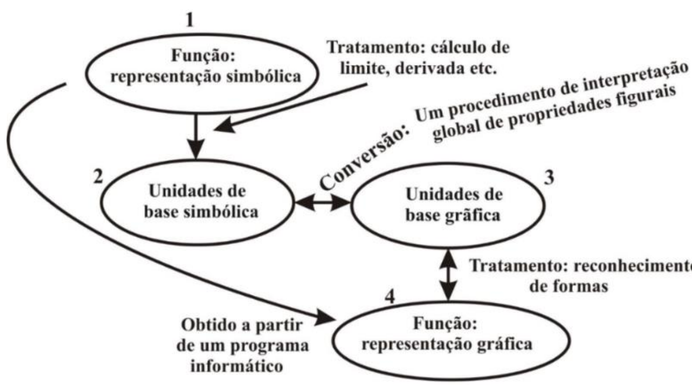
ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

As dificuldades na aprendizagem de gráficos são reconhecidas por Duval (1988) e para seu enfrentamento ele propõe o que chamou de abordagem de interpretação global de propriedades figurais (também chamaremos de *abordagem de interpretação global*). Nesse artigo, escrito em francês, o pesquisador expõe teoricamente essa forma de abordar e, além disso, detalha acerca da aplicação dessa teoria para o caso das funções polinomiais do 1º grau. No Brasil, essa produção foi traduzida pelo Dr. Méricles T. Moretti, líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) – UFSC, e está acessível em Duval (2011) sendo que ele desencadeou numa sequência de pesquisas que analisou como usar tal abordagem em outras curvas e em superfícies.

Na abordagem de interpretação global, leva-se em consideração as propriedades globais da figura. Ela é feita com a discriminação e a correspondência explícita das *unidades significantes* próprias a cada registro. No caso do registro gráfico, as unidades significantes, chamadas de *variáveis visuais*, são figurais e indicam o que é visualmente diferente de modo significativo. Para Duval (2009, p. 109), recorrendo ao clássico princípio de oposição de Ferdinand de Saussure, elas são “ ... puramente visuais e devem corresponder às oposições qualitativas no reconhecimento visual da forma do gráfico ... ”. Metodologicamente, para a identificação das variáveis visuais e consequentemente das *unidades simbólicas* correspondentes (pertinentes as representações simbólicas - equações), fazem-se todas as modificações possíveis no registro gráfico e observam-se quais delas geram modificações no registro simbólico. O processo no sentido inverso (do registro simbólico para o gráfico) não deve ser negligenciado e, assim, a abordagem de interpretação global exige *conversões* (mudança de registro de representação) nos dois sentidos do processo. Dessa forma, permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na equação.

Para o esboço de curvas do Ensino Superior utilizando a abordagem de interpretação global Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) propõem que seja usado um *software.* A Figura a seguir apresenta essa proposta para o ensino.

Figura 1 - Esquema de conversão entre as representações simbólicas e gráficas



Fonte: Obtido a partir de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008).

Conforme indica a Figura anterior, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) não têm como ideia a conversão direta de $\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{1}$ e, ao invés disso, em função da complexidade das curvas do Ensino Superior, outro caminho é sugerido. A proposta, também utilizada por Luiz (2010) e por Moretti e Luiz (2010, 2014), é utilizar as unidades significantes das curvas do Ensino Superior com o uso da informática e fazer as operações $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{4}$ e $\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{3} \leftrightarrow \mathbf{2} \leftarrow \mathbf{1}$. Em resumo, Moretti e Luiz (2014) esclarecem essa abordagem da seguinte forma:

> **1** $\rightarrow$ **4**: a conversão direta da representação simbólica (1) para a gráfica (4) da função por meio da informática;
> **4** $\rightarrow$ **3**: tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (4) para reconhecer e destacar as unidades básicas gráficas (3);
> **2** $\leftarrow$ **1**: tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (1) para determinar as unidades básicas simbólicas (2) relacionadas às unidades básicas gráficas (3);
> **3** $\leftrightarrow$ **2**: conversão que confirma as correspondências entre as unidades básicas gráficas (3) e as unidades básicas simbólicas (2). (p. 79)

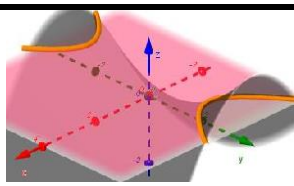
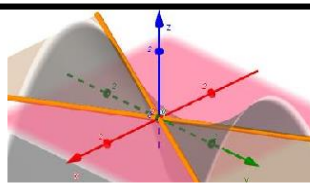
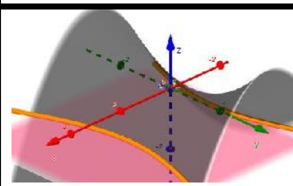
Diferente da maneira como normalmente é utilizado um *software* no ensino de matemática, dessa maneira não se limita a apenas digitar uma equação num *software* e, a seguir, *plotar* o gráfico sem, portanto, dar atenção as unidades significantes e as conversões em duplo sentido. Mais do que isso, depois de feito a *plotagem*, segue-se o esquema que foi apresentado pela Figura 1 e detalhado na citação anterior para, dessa forma, analisar os gráficos qualitativamente tendo as unidades significantes como referência. Dessa forma, fazendo o uso paralelo entre os procedimentos algébricos subjacente ao Cálculo e a informática, podemos articular as unidades significantes das curvas e, claro, fazer conversões em duplo sentido.

No caso das quádricas o uso da abordagem de interpretação global possui dificuldades específicas na análise e identificação das variáveis cognitivas. Essas dificuldades se devem, em primeiro lugar, ao fato de que as quádricas incluem vários *casos* (elipsoides; hiperboloides; ...) e, além disso, cada um desses casos pode estar em *posições diferentes no sistema cartesiano* (paraboloide elíptico padrão abrindo em z_+; paraboloide elíptico padrão abrindo em y_-; ... ; paraboloide elíptico transladado; paraboloide elíptico rotacionado; ...). Além disso, há outras dificuldades gráficas, geométricas e algébricas que estão detalhadas em Silva (2018) e Silva e Moretti (218a).

Diante dessas dificuldades para estar em sintonia com a abordagem de interpretação global no ensino das quádricas propomos algumas adaptações. Primeiramente tomamos variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Assim, consideramos as oposições qualitativas que existem entre os vários casos e as que são específicas de cada quádrica. Adiantamos que as interseções com planos permitem tal análise/identificação. Para simplificar, os termos *interseções com planos* se referem apenas às interseções com planos coordenados (1) e com planos paralelos aos planos coordenados (2). No primeiro caso (1), elas se dividem em interseção com o plano xy, interseção com o plano xz e interseção com o plano yz. No segundo caso (2), de forma análoga, elas também se dividem em 3. Em todas essas interseções os valores visuais determinados são cônicas. Mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, consideramos que todos os valores visuais determinados por todos esses casos de interseções (não apenas as curvas de nível) sejam reconhecidos, pois o desconhecimento delas, que são desconstruções dimensionais que permitem visualizar dimensões menores do que três, prejudica a visualização da quádrica e, além disso, a identificação e diferenciação tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano.

Note ainda que a visualização de tais valores visuais (cônicas) pode ser custosa para os alunos devendo, assim, ser trabalhado no ensino. Como exemplo de tal custo, considere as figuras do Quadro a seguir em que estão registrados as interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$. Note que se $k = 0$, então o valor visual determinado nas interseções são retas concorrentes (cônica degenerada). Já nos demais valores reais de k os valores visuais determinados são hipérboles. Porém, a direção que essas hipérboles abrem muda conforme $k > 0$ ou $k < 0$. No caso das interseções com os planos de equações $x = k$ e $y = k; k \in R$, há complicadores análogos.

Quadro 1 - Interseções da sela ($z = -x^2 + y^2$) com planos de equação $z = k; k \in R$

Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}; \boldsymbol{k} > 0$	Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}; \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$	Interseção da sela com o plano $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{k}; \boldsymbol{k} < 0$
		

Fonte: Os autores.

Diante do que dissemos, a visualização de tais interseções devem ser considerada no ensino não se limitando as curvas de nível. Porém, em função do tempo de sala de aula, propomos que o citado reconhecimento seja feito com algum *software*, como o Geogebra, para apenas uma das posições que cada caso de quádrica padrão pode estar no sistema cartesiano. A partir daí, as interseções das quádricas que estão em outras posições padrão podem ser entendidas usando o recurso das *reflexões em torno de planos*. Em Silva (2018) e Silva & Moretti (2018a) há mais detalhamento sobre as reflexões (incluindo propriedades), aqui cabe apenas dizer que dada uma quádrica numa das posições padrão podemos determinar as outras posições a partir de reflexões. Assim, podemos estender o que soubermos acerca de uma das quádricas numa das posições padrão para as demais posições padrão.

Ainda com relação às interseções com planos, as correspondentes unidades significantes simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor numérico do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas. Os Quadros 2 ao 7 a seguir tratam do conjunto dessas unidades além de como elas estão combinadas. Neles, ao dizermos "termo quadrático com sinal positivo/negativo" queremos dizer que o coeficiente desse termo é positivo/negativo.

Quadro 2 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos elipsoides padrão

Registro básico simbólico do **elipsoide**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	3 termos quadráticos com sinais iguais e positivos	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores.

Sabemos que um hiperboloide de uma folha padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (*abrindo em* z, *em* y *ou em* x) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente. Por isso há três equações para essa quádrica no Quadro seguinte. O análogo também vale para as demais quádricas seguintes.

Quadro 3 – Unidades simbólicas dos hiperboloides de uma folha padrão

Registro básico simbólico dos **hiperboloides de uma folha**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com **sinal diferente** e negativo.	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores.

Quadro 4 – Unidades simbólicas dos hiperboloides de duas folhas padrão

Registro básico simbólico dos **hiperboloides de duas folhas**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo.	Um só termo igual a 1

Fonte: Os autores.

Quadro 5 – Unidades significantes simbólicas dos cones quádricos elípticos padrão

Registro básico simbólico dos **cones quádricos elípticos**	1ºmembro da equação	2º membro da equação
$\frac{1x^2}{a^2}+\frac{1y^2}{b^2}-\frac{1z^2}{c^2}=0$ $\frac{1x^2}{a^2}-\frac{1y^2}{b^2}+\frac{1z^2}{c^2}=0$ $-\frac{1x^2}{a^2}+\frac{1y^2}{b^2}+\frac{1z^2}{c^2}=0$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal **diferente** e negativo. Se multiplicarmos as equações por (-1) teremos uma equação com 3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo. O que é importante é que em ambos os casos a variável com sinal diferente é a mesma.	Um só termo igual a 0

Fonte: Os autores.

Quadro 6 – Unidades significantes simbólicas dos paraboloides elípticos padrão

Registro básico simbólico dos **paraboloides elípticos**			1ºmembro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **positivo)**
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	$y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **negativo**)

Fonte: Os autores.

Quadro 7 – Unidades significantes simbólicas dos paraboloides hiperbólicos padrão

Registro básico simbólico dos **paraboloides hiperbólicos**			1ºmembro da equação	2º membro da equação
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	$x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente igual a 1	2 termos quadráticos com sinais opostos

Fonte: Os autores.

Didaticamente, diferente da prática de ensino recorrente em que se limita a apenas apresentar as equações como um todo, a partir das unidades significantes dos Quadros anteriores é semioticamente importante reconhecer os elementos que constituem *conjunto das unidades simbólicas* da equação além de como é a *combinação* desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas das diferentes equações das quádricas. Ademais, é desse conjunto/combinação que podemos analisar se haverá ou não os valores visuais elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas (o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes) nas interseções com planos. Inclusive, podemos "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um desses planos. Nesse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e cartesianos se correspondem da maneira como conhecemos.

Como vemos, para que o ensino das superfícies quádricas esteja em sintonia com a abordagem de interpretação global sugerimos, principalmente, que o recurso das interseções com os planos esteja articulado à compreensão de que os valores visuais determinados (elipses; parábolas; ...) dependem ou são condicionados ao conjunto/combinação das unidades simbólicas que a equação correspondente possui. Esse reconhecimento é fundamental para a diferenciação tanto dos diferentes casos de quádricas quanto de uma quádrica em diferentes posições. Além disso, também propomos que ele seja combinado ao uso de algum *software*, como o Geogebra (trataremos dele na seção seguinte), e ao recurso das reflexões.

Algebricamente para o estudo da interseção de uma quádrica de equação Q com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados costumasse substituir a equação do plano na correspondente variável de Q e, a seguir, fazer simplificações. Feito essa substituição sabemos que a variável da equação da quádrica que foi substituída pela equação do plano se *transformará* numa constante e, consequentemente, determinaremos uma equação com duas variáveis que irá se referir a uma das cônicas. No uso desse procedimento, mesmo que ele seja algébrico, pensamos que é relevante considerar sua interpretação geométrica. Chamaremos o referido de *procedimento P*. Como exemplo, para determinar algebricamente a interseção entre o plano de equação $z = 3$ e a quádrica de equação $z = -x^2 + y^2$, basta substituir a equação desse plano na variável

z da equação da quádrica e, assim, ficamos com a equação $3 = -x^2 + y^2 \rightarrow -\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$. Note que essa última equação é tal que no primeiro membro há dois termos quadráticos com sinais opostos e no segundo membro há apenas o número 1, ou seja, trata-se das unidades significantes simbólicas de uma hipérbole. Logo, concluímos que na interseção em questão determinamos uma hipérbole contida no plano de equação $z = 3$. A primeira figura do Quadro 1 representa no sistema cartesiano essa interseção.

Outro elemento semiótico que pode contribuir para a abordagem das quádricas é incluir nas conversões os registros em língua natural. Em Silva (2018) e Silva & Moretti (2018b; 2018c) há mais detalhamentos nesse sentido. Neste artigo, discutiremos brevemente apenas o caso dos paraboloides elípticos nas posições padrão. Para essas quádricas, sabemos que as interseções com planos paralelos *a um dos* planos coordenados determinam infinitas elipses ou cônicas degeneradas. Genericamente, chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e indicaremos respectivamente por α_+ e α_- as partes positivas e negativas de α. Voltando as referidas elipses, visualmente é significativo que os *eixos maior e menor (ou diâmetro) dessas elipses aumentam* de tamanho à medida que elas se afastam da origem seguindo em α_+ ou em α_-. Para essas cônicas usaremos os termos "*elipses com eixos aumentando*" e note que o aumento de seus eixos dá a noção de que as quádricas correspondente estão abrindo. A partir da posição das "elipses com eixos aumentando" em relação aos eixos coordenados podemos reconhecer *as diferentes posições padrão* e, ainda, propor registros linguísticos conforme mostra quadro seguinte.

Quadro 8 - Registros básicos em língua natural para os paraboloides elípticos padrão

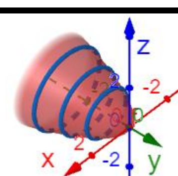
Registros básicos em língua natural	Variável visual	Unidades simbólicas correspondentes
Paraboloide elíptico *abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}_{+}$.	Elipses com eixos aumentando perpendiculares" ao semieixo $\boldsymbol{\alpha}_{+}$.	A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; as variáveis quadráticas têm **coeficientes positivos**.
Paraboloide elíptico *abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}_{-}$.	Elipses com eixos aumentando perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha}_{-}$.	A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; as variáveis quadráticas têm **coeficientes negativos**.

Fonte: Os autores.

Como exemplo, considere o paraboloide elíptico de equação $y = -\frac{x^2}{4} - z^2$. Nessa equação a variável linear é y e as variáveis quadráticas tem coeficiente negativos. Logo, segundo o Quadro anterior, as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_{-} e, portanto, a partir dessas elipses podemos reconhecer a posição do paraboloide no sistema cartesiano (veja o Quadro seguinte). Além disso, podemos usar os seguintes registros linguísticos para essa quádrica: *paraboloide elíptico abrindo em* y_{-}.

Quadro 9 - Registros do paraboloide elíptico padrão de equação

$$y = -\frac{x^2}{4} - z^2$$

Registro básico simbólico	Registro cartesiano	Registro básico em língua natural
$y = -\frac{x^2}{4} - z^2$		*Paraboloide elíptico abrindo em* $\boldsymbol{y}_{-}$

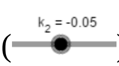
Fonte: Os autores.

No ensino a forma de abordar as questões semio-cognitivas que aqui discutimos podem ser articulas a elementos da TSD. Para tanto, o Geogebra pode ser uma ferramenta interessante. A seguir discutiremos essa questão.

LIMITES E POSSIBILIDADES DO GEOGEBRA

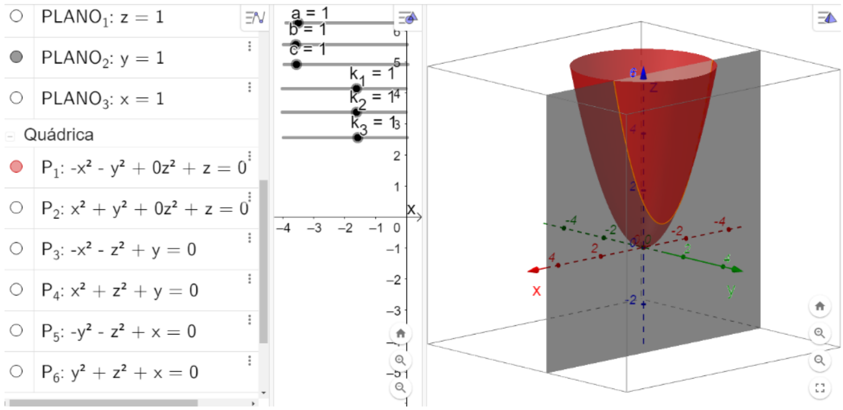
Com relação as possibilidades do *software* Geogebra, ele permite visualizar ao mesmo tempo os registros gráficos, simbólicos e em língua natural das quádricas. Com comandos e ícones simples, diretamente com o mouse ou toque podemos analisar o que acontece com os registros gráficos ou figurais ao modificarmos os coeficientes do correspondente registro simbólico. Da mesma forma também podemos movimentar, ampliar/reduzir ou modificar as cores os eixos e dos registros gráficos ou figurais das quádricas. Assim, é possível reconhecer e articular as unidades significantes das quádricas e, claro, propor uma abordagem de interpretação global. Durante esse reconhecimento e articulação os alunos podem de forma dinâmica, interativa e experimental assumirem ativamente o processo e, inclusive, testar, validar ou refutar conjecturas e, paralelamente, desenvolver sua autonomia o que, portanto, pode incluir elementos da TSD. Como vemos, o Geogebra contribui para que seja articulado a abordagem de interpretação global e elementos da TSD no ensino e na aprendizagem das quádricas.

Do ponto de vista algébrico um facilitador, que não é possível em qualquer *software*, é que o Geogebra não exige que se usem as equações das quádricas em sua forma paramétrica e, inclusive, pode-se usar as equações implícitas. No Geogebra, as equações podem ser digitadas diretamente sem a necessidade de um comando específico. Também é interessante o fato de que o Geogebra é gratuito. Outro ponto positivo é que há uma grande quantidade de materiais pedagógicos disponíveis na internet que tomam o Geogebra como *software*. Como exemplo, acesse: tube.Geogebra.org.

Outra possibilidade é que o Geogebra permite criar cenários. Os cenários são apenas arquivos desse *software* em que previamente já criamos representações de alguns objetos. No cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO (a Figura a seguir apresenta um recorte desse cenário), por exemplo, estão previamente registrados os registros simbólicos e gráficos dos seis paraboloides elípticos padrão (cujas notações são $P_1, \dots, P_6$), dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados (cujas notações são $PLANO_1, PLANO_2, PLANO_3$). Para visualizar qualquer um desses objetos basta clicar, no canto esquerdo da tela, na bolinha que fica ao lado da notação do objeto. Na figura a seguir, por exemplo, já estão selecionados P_1 e o $PLANO2$ (por isso suas bolinhas estão fechadas). No cenário em questão as equações dos $PLANO_1, PLANO_2$ e $PLANO_3$ são respectivamente $z = k_1, y = k_2$ e $x = k_3$; $k_1, k_2,$ e k_3 são números reais (quando essas constantes valem zero temos os planos coordenados). Para fazer com que o plano indicado por $PLANO2$ "se movimente" ao longo do eixo y basta modificar os valores de k_2 no controle deslizante (

). Com isso, claro, a equação do plano $PLANO2$ também se modificará. O Geogebra ainda é capaz de determinar algebricamente e graficamente a interseção entre dois objetos como uma quádrica e um plano (acesse o ícone ). Como vemos, nesse cenário podemos visualizar de maneira bastante rápida os seis tipos de paraboloides elípticos padrão bem como as interseções deles com planos.

Figura 2 - Recorte do cenário Paraboloide Elíptico



Fonte: os autores.

Quanto aos limites, deve-se estar atento ao fato de que o Geogebra pode cometer falhas ao medir ângulos ou até mesmo ao esboçar gráficos. Como exemplo, o registro gráfico dado pelo Geogebra a $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}; x \neq 2$ é uma reta que inclui de maneira equivocada o ponto de coordenadas $(2;\ 4)$.

Outro limite importante no uso do Geogebra é que ele não é capaz de plotar gráficos de superfícies mais sofisticadas. Porém, estudos no sentido de sanar esses problemas e outros têm sido feitos constantemente. Destacamos ainda que a ênfase do Geogebra é com o Ensino de Matemática e não com a produção de conhecimentos Matemáticos.

PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE ENSINO PARA AS QUÁDRICAS

Nesta seção traremos algumas propostas de como abordar as quádricas estando em sintonia com os referenciais teóricas que aqui adotamos. As atividades que aqui propomos podem ser adaptadas para outras quádricas. Em Silva (2018) há diversas outras atividades. Antes de apresentar as atividades para os alunos sugerimos discutir o cenário que será usado. Assim, ao abordar os paraboloides elípticos padrão primeiro devemos apresentar o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO (veja a Figura 2).

Nesse momento, o professor pode destacar que há seis posições padrão para os paraboloides elípticos e que é possível conjecturar que um paraboloide numa das posições padrão pode estar em outras posições recorrendo as reflexões com planos. Feito as apresentações iniciais, passamos para as atividades como as seguintes.

Atividade 1: Abra o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, movimente o plano designado como $PLANO1$ e, a seguir, conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

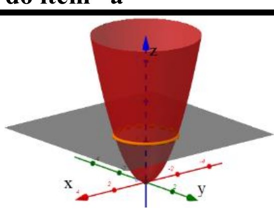
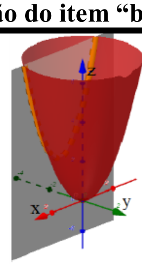
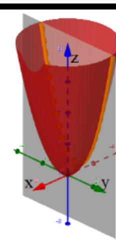
a) P_1 e o plano $PLANO1$?

b) P_1 e o plano $PLANO2$?

c) P_1 e o plano $PLANO3$?

O quadro a seguir representa a solução da ***atividade 1***:

Quadro 10 - Representa da solução da ***atividade 1***

Representação da solução do item "a"	**Representação da solução do item "b"**	**Representação da solução do item "c"**
 As interseções são elipses, ou um ponto ou o conjunto vazio. Para visualizá-las movimente o $PLANO_1$.	 As interseções são "parábolas paralelas ou contida no plano xz".	 As interseções são "parábolas paralelas ou contida no plano yz".

Fonte: os autores.

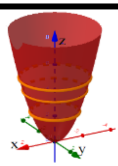
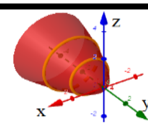
Nessa atividade os alunos podem, de maneira bastante rápida, fazer conjecturas acerca da variável visual mais importante para a aprendizagem das quádricas: as interseções com planos. É possível analisar as interseções de P_1 (um dos 6 paraboloides elípticos padrão) com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados sem se limitar, portanto, apenas as curvas de nível. Note ainda que essa atividade não inclui um estudo algébrico mais formal acerca das interseções. Porém, é importante que tal formalidade seja trabalhada em atividades subsequentes - em Silva (2018, p. 434) há atividades nesse sentido. Outra ressalva é que em função do tempo de sala de aula propomos que o estudo completo das interseções (conjecturas feitas no Geogebra mais os cálculos algébricos) seja feito apenas para um dos seis paraboloides elípticos padrão. Para os demais, pode-se recorrer ao recurso das reflexões e, assim, estender o que foi anteriormente estudado num dos paraboloides para os demais. A seguir traremos outra atividade.

Atividade 2: Na atividade anterior vimos que as interseções de um paraboloide elíptico padrão com planos perpendiculares a um dos semieixos coordenados determinam elipses. A partir do cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, conjecture:

a) O que acontece visualmente com essas elipses à medida que elas se afastam da origem? b) Qual a diferença visual entre a posição das elipses determinadas em P_1 e em P_4?

O Quadro a seguir representa a resolução da ***atividade 2***.

Quadro 11 - Representa da solução da ***atividade 2***

Representação da solução do item "a"	**Representação da solução do item "b"**
 As elipses aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que se afastam da origem.	 Comparando essa figura com a figura ao lado vemos que a posição das elipses muda em cada tipo de paraboloide elíptico. Em P_1 as "elipses são perpendiculares" ao semieixo z_+ já em P_4 as elipses são perpendiculares ao semieixo y_-.

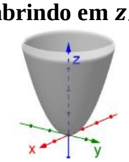
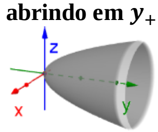
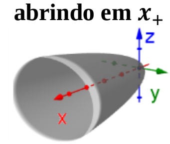
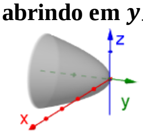
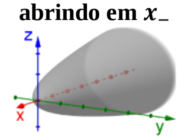
Fonte: os autores.

Apenas para facilitar a comunicação, depois que os alunos resolverem essa questão podemos definir que ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo α" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo (o análogo vale para elipse paralela a um plano). Dito isso, podemos discutir que para os paraboloides elípticos padrão visualmente é significativo o fato de que as interseções dessas quádricas com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos semieixos coordenados determinam "elipses perpendiculares a esse semieixo" que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas se afastam da origem. Chamaremos aquelas cônicas de "elipses com eixos aumentando" e, com elas, temos a impressão de que os paraboloides estão abrindo. A partir da posição dessas elipses ainda podemos definir os registros em língua natural do Quadro 8. Nesse momento, sugerimos dar atenção apenas aos aspectos visuais e linguísticos e não aos aspectos algébricos (na **atividade 3** a álgebra será trabalhada). Ainda na **atividade 2** podemos dizer aos alunos que tendo como base o conhecimento de que semieixo coordenado as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares" podemos diferenciar e reconhecer a posição da correspondente quádrica no sistema cartesiano (o análogo pode ser feito para os hiperboloides de uma e duas folhas e para os cones quádricos elípticos). Ainda podemos realizar conversões envolvendo os registros em língua natural e gráficos.

A **atividade 3** apresenta o Quadro 13 que sintetiza os registros em língua natural, gráficos e simbólicos dos 6 tipos de paraboloides elípticos padrão. Nessa atividade daremos atenção aos aspectos algébricos desse Quadro e os demais registros desse Quadro serão usados na **atividade 4**.

Atividade 3: Considere as equações do Quadro seguinte. Sem se ater aos aspectos visuais e linguísticos, escreva quais as semelhanças e diferenças entre essas *equações*.

Quadro 13 - Correspondentes registros dos paraboloides elípticos padrão

Paraboloide elíptico abrindo em z_+  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	**Paraboloide elíptico abrindo em y_+**  $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$	**Paraboloide elíptico abrindo em x_+**  $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
Paraboloide elíptico abrindo em z_-  $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	**Paraboloide elíptico abrindo em y_-**  $y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$	**Paraboloide elíptico abrindo em x_-**  $x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

Fonte: Os autores.

Nossa intenção com a ***atividade 3*** é que os alunos reconheçam claramente as oposições qualitativas (semelhanças e diferenças) entre as equações que neste artigo já discutimos no Quadro 6. É a partir do reconhecimento de tais unidades significantes que os alunos realizarem conversões envolvendo os registros simbólicos. Para os professores tal reconhecimento é óbvio, no entanto, em Silva (2018) notou-se que para os alunos isso não é bem assim sendo necessário, portanto, não o negligenciar.

Atividade 4: Já discutimos que para os paraboloides elípticos padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos semieixos coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o Quadro 13 e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos semieixos coordenados às elipses com eixos aumentando são perpendiculares?

Nessa atividade esperamos que os alunos concluam que primeiro é necessário identificar duas coisas: que variável é a linear; qual é o sinal dos coeficientes das variáveis quadráticas. Se a variável linear é α e as variáveis quadráticas têm coeficientes positivos (negativos), então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo α_+ (α_-). Assim, diremos paraboloide elíptico abrindo em α_+ (α_-). Note que finalmente podemos fazer conversões entre os registros gráficos, em língua natural e simbólicos.

Atividade 5: Considere a sela de equação $z = -x^2 + y^2$ (representada no Quadro 1). A partir das unidades simbólicas dessa quádrica (veja o Quadro 7), responda: por que as interseções entre essa quádrica com qualquer um dos planos coordenados ou com qualquer um dos planos paralelos aos planos coordenados não determinam elipses na posição padrão ou transladada?

Para responder a essa questão recorrendo aos elementos semióticos, inicialmente podemos destacar para os alunos que em $z = -x^2 + y^2$ as unidades significantes simbólicas são as seguintes: no primeiro membro da equação há um termo linear com coeficiente igual a 1; no segundo membro da equação há dois termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro negativo). Além disso, sabemos que na equação canônica de uma elipse na posição padrão ou transladada devemos ter dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação. Daí, é fácil “prever” que é impossível determinar elipses nas tais interseções. Isso se deve ao fato de que ao realizarmos o procedimento *P* em qualquer uma das variáveis da equação da quádrica nunca determinaremos dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação o que é o suficiente para provar a citada impossibilidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mediados pelo Geogebra, neste artigo apresentamos atividades que têm potencial para articular a abordagem de interpretação global de Duval (1988) com os elementos da TSD de Brousseau (2008) que aqui tratamos. Portanto, inferimos que tal aproximação é possível e que o Geogebra é um facilitador em tal junção. Além disso, conforme o entendimento do professor as atividades aqui propostas bem como o uso dos cenários podem integralmente ou ao menos em parte serem propostas como tarefa de casa.

Especificamente quanto a TSD, podemos incluir outros elementos dessa teoria na referida aproximação tais como a *tipologia das situações didáticas.* Nessa tipologia, há as seguintes situações*: situações de ação; situações de formulação; situações de validação; situações de institucionalização*. Nas situações de ação os alunos resolvem as atividades realizando ações mais imediatas e operacionais não sendo essencial explicitar uma argumentação mais teórica. Nelas, de acordo com Freitas (2002),

> ... há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento. Este é o caso, por exemplo, quando na solução de um problema de construção geométrica o aluno se contenta com a solução

> apresentada exclusivamente através da realização de um desenho utilizando régua e compasso. (p. 78)

Nas situações de formulação as soluções apresentadas pelos alunos já apresentam explicitamente alguns modelos ou esquemas teóricos. Para isso, os alunos tentam modificar sua linguagem habitual numa linguagem formal mesmo que para isso possa ocorrer "... ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retro-ações contínuas." (Pommer, 2008, p. 7). Nessa fase, mesmo que possa ocorrer por parte dos alunos a intenção de validação do que foi produzido bem como de seus porquês, isso não é exigido.

As situações de validação são caracterizadas pela utilização de mecanismos de prova. Nesse momento, rejeitasse ou confirma-se as conjecturas das fases anteriores e há, portanto, preocupação com a veracidade do conhecimento. Aqui, segundo Brousseau (2008),

> os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teoria - na qualidade de conjuntos de enunciados de referência - e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à produção, à soberba, a intimidações etc. As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possam aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar a opinião ou apresentar uma demonstração. (p. 27)

Nas situações de institucionalização o professor fará sínteses que garantem o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. De acordo com Freitas (2002, p. 83), "faz-se necessário igualmente estabelecer as devidas correlações com outros saberes; essas sínteses são necessárias para que possam ser reinventadas em outras situações."

As atividades que propomos utilizaram o Geogebra *principalmente* com o intuito de contemplar as situações de ação e de formulação, mas nossa compreensão é que o sistema de ensino não deve negligenciar momentos em que se contemplem as situações de validação e de institucionalização. Por isso, de alguma maneira todas essas situações estão presentes nas atividades que aqui propomos. Em todo esse caminho, a abordagem semio-cognitiva de Duval (1988) é condição necessária para a aprendizagem das quádricas.

Finalizamos conjecturando que o sistema de ensino tem dado pouca atenção aos elementos da TSD o que, infelizmente, implica alunos menos autônomos e mais dependentes do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (2008). Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 128 p. (Educação em ação). Tradução de: Camila Bógea.

Corrêa, Madeline O. Silva e Moretti, Méricles T.. (2014). Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: Brand, C.F., & Morreti, M.T. (Orgs). As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática. Ijuí: Ed. Unijuí.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives. v.1. Strasbourg: ULP – IREM.

Duval, R. (2009). Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física. 120 p. (Coleção contextos da ciência). Tradução de: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. REVEMAT, Florianópolis, v.6, n.2, pp.91-112. Trad. Méricles T. Moretti. Disp. em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 ago. 2013.

Freitas, J.L.M. Situações Didáticas. (2002). In: Machado, S.D.A. (Org.). Educação Matemática: uma introdução. 2. Ed. São Paulo: Educ/pucsp, pp. 65-87. (Trilhas).

Moretti, Méricles Thadeu, Ferraz, Ademir Gomes e Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. (2008). Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. Revista Quadrante, v. 17, n. 2, pp. 97-122.

Moretti, Méricles T. e Luiz, Learcino S. (2010). O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.12, n.3, pp.529-547.

Pommer, W.M. (2008). Brousseau e a idéia de Situação Didática. Coordenação de Nilson José Machado. Disponível em: www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf. Acesso: 10 fev. 2016.

Silva, Sérgio Florentino da. (2018). Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do Geogebra. 555 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Silva, Sérgio Florentino da. Moretti, Méricles T. (2018a). A abordagem de interpretação global no ensino e na aprendizagem das superfícies quádricas. Educação Matemática Pesquisa, S.P., v.20, n.2, pp. 283-308.

Silva, Sérgio Florentino da e Moretti, Méricles Thadeu. (2018b). Registros em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.20, n.1, pp.294-314.

Silva, Sérgio Florentino da e Moretti, Méricles Thadeu. (2018c). Estudo Semiótico em Língua Natural das Cônicas: possibilidades de uso de novos registros. Acta Scientiae, Canoas, v.20, n.3, pp. 386-405.

CAPÍTULO V

ESBOÇO DA PARÁBOLA POR MEIO DE TRANSLAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Djerly Simonetti
Méricles Thadeu Moretti

Ao pensar na aprendizagem de matemática é fundamental considerarmos os objetos de conhecimento envolvidos, pois, a aprendizagem que ocorre é sobre um campo científico específico que difere em muito de outras áreas. As especificidades que a matemática apresenta, seja de sua complexa linguagem, de seu raciocínio lógico, ou até mesmo de sua estrutura, acabam influenciando no domínio dos objetos que o sujeito precisa adquirir.

A atividade cognitiva requerida pela matemática não deve ser pensada a partir dos conceitos envolvidos, mas sim, na importância primordial das representações semióticas (Duval, 2008). Sendo assim, precisamos considerar que os objetos matemáticos diferem de suas representações semióticas, ou seja, é preciso não confundir o objeto representado com sua representação (Duval, 2004). Por isso, para abordar o objeto parábola temos que em um primeiro momento elencar as atividades cognitivas presentes no trabalho com suas diferentes representações.

Para tanto, neste artigo apresentamos resultados que discutem as atividades cognitivas de tratamento e conversão presentes no esboço da parábola por meio de translações com estudantes do ensino médio[1].

[1] No presente texto apresentamos resultados parciais de uma pesquisa intitulada "Processos algébricos no Esboço de Curvas: o caso da parábola à luz dos registros de representação semiótica" (Simonetti, 2020).

Entendemos que esboçar a parábola fazendo uso do recurso de translação apresentado por Moretti (2008) contempla a perspectiva de uma aprendizagem que leva em conta Registros de Representação Semiótica; respaldo teórico emergente na prática de todo professor de matemática.

Sendo assim, abordamos, inicialmente, aspectos da teoria de Duval (2004) sobre os registros de representação semiótica. Em seguida, exploramos o recurso de translação no esboço da parábola de Moretti (2008) considerando uma Interpretação Global das Propriedades Figurais também elaborada por Duval (2011a). Apresentamos nossos encaminhamentos metodológicos e descrevemos a atividade realizada pelos estudantes. Uma análise da situação, em termos dos registros escritos produzidos pelos estudantes é contemplada com intuito de explorar as discussões em torno de um ensino que prioriza as representações semióticas.

APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA PAUTADA EM REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

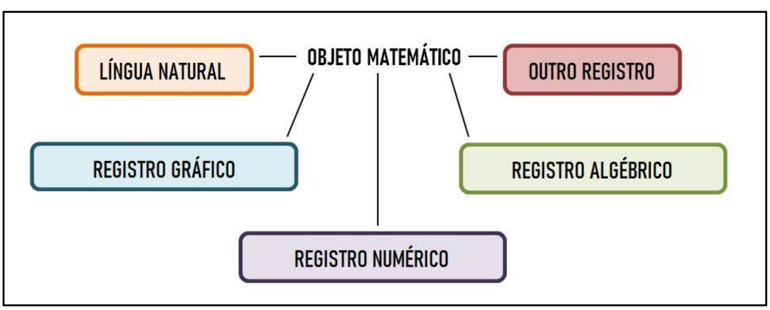
Como ocorre a aprendizagem em matemática? Para melhor explorar essa questão, é imprescindível entendermos que

> A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação. Nesse caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenho é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático (Damm, 2016, p. 169-170).

Ou seja, a aprendizagem em matemática está atrelada aos seus objetos, que por sua vez são objetos inacessíveis no concreto. Embora, podemos trabalhar com eles por meio de suas representações. As representações semióticas de um objeto não é o objeto em si. Portanto, é de fundamental importância não confundir o objeto representado e sua representação (Duval, 2008). O "conhecimento começa quando não adotamos mais uma representação do objeto no lugar do próprio objeto" (Duval, 2011b, p. 16).

Há inúmeras representações para um mesmo objeto matemático. Dentre elas, há algumas que possuem tantas semelhanças entre si que podemos reuni-las em um único conjunto de representações. Como por exemplo, podemos pensar nas representações $y = x^2 - 2x - 3$ e $y = (x-3)(x+1)$ do objeto parábola, ambas representações diferentes, mas, com mesma forma de representação. Duval (2004) denominou conjunto de representações semelhantes de registro de representação semiótica. Assim, pela Figura 1, podemos perceber que cada objeto matemático pode ser expresso em seus diferentes registros de representação.

Figura 1 – Objeto matemático e seus possíveis registros de representação



Fonte: Os autores.

Para Duval (2004) todo registro de representação semiótica permite três atividades cognitivas: a *formação de uma representação identificável*, o *tratamento* e a *conversão*. Por isso os registros algébrico, gráfico, numérico e até mesmo a língua natural, dentre outros registros precisam ser abordados nas aulas de matemática considerando se o sujeito está realizando com êxito as três atividades cognitivas citadas. Vejamos alguns aspectos do registro língua natural em relação às três atividades cognitivas. Considere a frase:

Seja uma figura plana com três lados de medidas congruentes...

Estamos diante de um enunciado expresso em língua natural. É um registro de representação semiótica porque a formação ocorre já que, em um dado contexto, a frase é aceitável e, portanto, faz "evocar" um objeto. O registro de representação dado é passível de tratamento, uma vez que, podemos trocar a frase por: "Seja um triângulo equilátero...". Observe que ainda continuamos com um registro de representação em língua natural mesmo após a troca. E, por fim, se mudarmos a frase para a representação de uma figura geométrica, estaremos, diante de uma atividade cognitiva de conversão, já que a representação final (figura geométrica) pertence a outro registro. Diante disso, a língua natural possibilita que as três atividades cognitivas se façam presentes, portanto é um exemplo de registro de representação semiótica.

Em síntese, a formação é um processo que permite reconhecer a representação produzida; o tratamento é uma transformação da representação semiótica em outra representação no mesmo registro; é uma mudança interna ao registro, e a conversão é uma transformação da representação em outra representação pertencente a um registro diferente, ou seja, é uma mudança externa ao registro de representação semiótica inicial (Duval, 2004).

Em muitas situações de sala de aula o que é proposto não propicia que a atividade cognitiva de conversão se faça presente, prioriza-se muito mais as atividades de tratamento, ou seja, o trabalho com transformações apenas internas ao registro de representação. E mais, quando conversões aparecem, elas ocorrem apenas em um sentido, da representação no registro A para a representação no registro B, entendendo que a volta é imediata. Embora, sabemos que a partir da teoria de Duval (2004) nem sempre é imediata a volta. No próprio esboço da parábola, em geral, parte-se da equação (registro algébrico) para uma tabela de pares de pontos cartesianos e, em seguida, para o gráfico (registro gráfico). E a volta? Do gráfico para a equação. Por que não realizamos no ensino médio? A seguir vamos discutir essa situação.

ESBOÇO DA PARÁBOLA POR MEIO DE TRANSLAÇÕES E DA INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE UMA CURVA

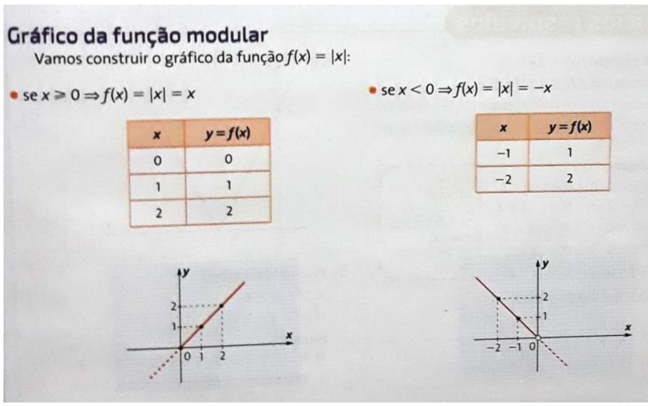
Em seus estudos Duval (2004, 2011a) nos chama a atenção sempre para os elos que existem entre diferentes registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático. No caso da parábola, por exemplo, prevalece o trabalho com a equação e o gráfico. Em cada um desses registros existem unidades significativas importantes e elas possuem relação entre si.

Um olhar voltado para as unidades simbólicas significativas da equação e para as unidades visuais do gráfico, considerando as possíveis associações entre essas unidades caracteriza-se como uma interpretação global de propriedades figurais (Duval, 2011a). A interpretação global só existirá de fato se as variáveis visuais forem discriminadas. “O conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica” (Duval, 2011a, p. 99).

Por isso que métodos como o apresentado na Figura 2, muito presentes na maioria dos livros didáticos e em práticas de ensino, como nos mostra Silva

(2008), Côrrea e Moretti (2014), Menoncini (2017), não é o ideal em uma ótica de interpretação global, já que deixa de trabalhar com as unidades significativas.

Figura 2 – Construção do gráfico com auxílio de tabela



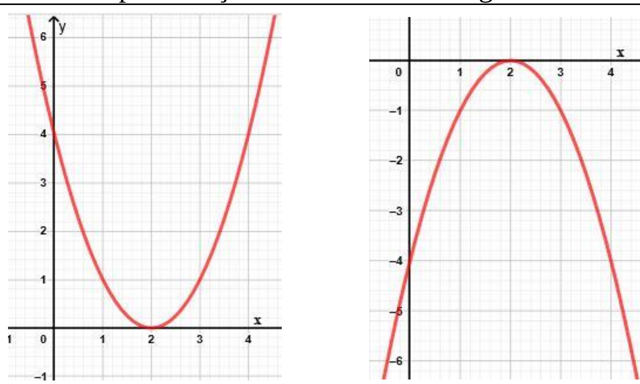
Fonte: Dante (2016, p. 97).

Duval (2011a) apresenta de modo organizado um estudo sobre a reta a partir da abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Nesse estudo ele explica e indica claramente as variáveis visuais envolvidas na representação gráfica da reta, seus respectivos valores e unidades simbólicas correspondentes, chegando a obter dezoito representações de variáveis visuais. Contudo, não exemplificou o caso das outras curvas no plano cartesiano, apesar de afirmar que poderia ser construído o estudo de modo semelhante. Neste cenário Moretti (2008, p. 152) afirma que

> [...] o uso de uma noção bastante simples como a *translação* pode contribuir para que o esboço de curva mantenha-se bastante próximo do procedimento que permite estabelecer correspondência entre gráfico e expressão algébrica. Essa transformação possibilita que se percebam mudanças tanto na posição da curva quanto na expressão algébrica correspondente.

Uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica existe quando modificações significativas na curva geram modificações expressivas na representação algébrica. Por exemplo, na Figura 3 a concavidade é uma variável visual gráfica. Bem provável, que seja uma das mais conhecidas e trabalhadas em sala de aula. A variável visual no gráfico aqui discutida está diretamente ligada a unidade simbólica da equação coeficiente *a* em $y = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$.

Figura 3 – Representação da variável visual gráfica concavidade



$y = x^2 - 4x + 4$ $\qquad$ $y = -x^2 + 4x - 4$

Fonte: Os autores.

Há outras variáveis visuais que se fazem presentes se considerarmos apenas as possíveis translações no plano cartesiano. A representação gráfica da parábola com vértice na origem do plano que possui a seguinte representação algébrica $y = x^2$ ou, até mesmo, $y = -x^2$ permite quatro situações, a saber: translação na direção do eixo das abscissas (sentido positivo ou negativo) e translação na direção do eixo das ordenadas (sentido positivo ou negativo). São essas quatro situações que colaboram para discutir a relação da representação gráfica com a expressão algébrica de modo mais transparente.

A partir do momento que a parábola representada por $y = x^2$ no plano é transladada, há alterações em sua equação. Admitindo a, m e k como números reais e $a \neq 0$, da forma canônica $y = a(x - m)^2 + k$ de uma parábola, vamos modificá-la para $y- k = a(x- m)^2$ e usar $y- (\pm k)=a(x- (\pm m))^2$. Assim, $y- (\pm k)$ indica a movimentação, a partir da origem do plano cartesiano, no sentido do eixo y de k unidades (ou frações da unidade de medida) para cima (+) ou para baixo (–). Já $x- (\pm m)$ aponta para o movimento no eixo das abscissas de m unidades (ou frações da unidade de medida) à direita (+) ou à esquerda (–).

Com as translações é possível relacionar se as raízes existem ou não, sem ficar fazendo uso de fórmulas, veja o Quadro 1. E quando direcionarmos o olhar para a equação no formato $y- (\pm k)=a(x- (\pm m))^2$, também é possível fazer essa análise.

Quadro 1 – Relação da existência de raízes com as translações

<table>
<tr><td>Translação acima do eixo x</td><td>Translação abaixo do eixo x</td><td>Sem translação no eixo y</td></tr>
<tr><td>Não há raízes reais
$y- (+k) = ax^2$</td><td>Raízes reais distintas
$y- (-k) = ax^2$</td><td rowspan="2">Raízes reais com duplicidade

$y = \pm a(x- (\pm m))^2$</td></tr>
<tr><td>Raízes reais distintas
$y- (+k) = -ax^2$</td><td>Não há raízes reais
$y- (-k) = -ax^2$</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Simonetti (2020, p. 51).

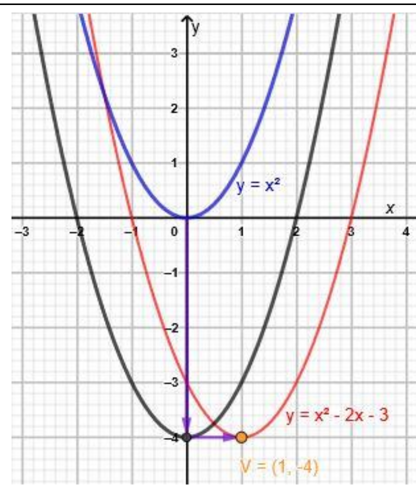
Sendo assim, vamos ilustrar que o uso da translação permite esboçar o gráfico da parábola em uma perspectiva de interpretação global de propriedades figurais, sem fazer uma tabela com mais de dezoito variações visuais.

Primeiramente, vamos entender que, por exemplo, $y = x^2 -2x -3$ pode ser representada graficamente se estiver em outro formato, porque, essa representação não estabelece relação direta com a curva a ser esboçada. Precisamos que a parábola esteja representada assim: $y- (-4) = (x- (+1))^2$. Sabemos que a parábola $y = x^2$ está na origem do plano cartesiano e sua concavidade é para cima - uma variável visual importante - e sendo a equação $y = x^2 -2x-3$ já podemos afirmar de antemão que a mesma não está com vértice na origem. Com o formato $y- (-4) = (x- (+1))^2$ vamos associar $y- (-4)$ ao movimento de quatro unidades para baixo no eixo das ordenadas, a partir da origem. Assim, $(x- (+1))$ remete a um deslocamento no sentido do eixo das abscissas de uma unidade para a direita. Em síntese temos o Quadro 2. Nele podemos perceber que $y- (-4) = (x- (+1))^2$ possui maior relação com o esboço do gráfico do que $y = x^2-2x-3$.

Quadro 2 – Esboço de uma parábola por deslocamento

$$y = x^2-2x-3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$y- (-4) = (x- (+1))^2$$

Translação no eixo y — Translação no sentido do eixo x



Fonte: Os autores.

A passagem de $y = x^2-2x-3$ para $y- (-4) = (x- (+1))^2$ exige o tratamento da representação. Para se atingir o objetivo proposto basta fazer uso do processo de completar quadrados, quando não se tem um trinômio quadrado perfeito na equação. Vejamos:

$$y = x^2-2x-3 \qquad (1)$$

$$y = x^2-2x+1-1-3 \qquad (2)$$

$$y = (x-1)^2-4 \qquad (3)$$

$$y+4 = (x-1)^2 \qquad (4)$$

$$y- (-4) = (x- (+1))^2 \qquad (5)$$

Um ponto interessante desta abordagem com translações é que ao optar por não calcular o foco da parábola[2], podemos ter de igual modo maior precisão no esboço se obtermos as raízes reais quando existem. Observem que da expressão *(4)* que é $y+4 = (x-1)^2$ ao considerar $y = 0$, chegamos em $x' = -1$ e $x'' = 3$, os valores das raízes da parábola.

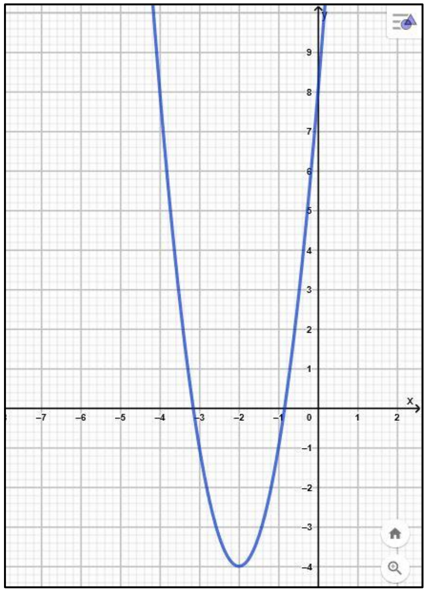
Considerando as translações da parábola no plano cartesiano, é possível também expressar a representação algébrica da mesma. Vamos ilustrar essa situação com um caso qualquer. Lembrando que, independente da posição em que a parábola se encontra no plano cartesiano, a ideia é ir transladando a mesma.

Para a Figura 4, como não estamos nos debruçando nos cálculos do foco para obter o valor do a, apesar de poder ser feito, vamos considerar que a parábola pertence a família $y = 3x^2$.

---

[2] Em Moretti (2008) são apresentadas discussões em torno do foco e da reta diretriz dentro da abordagem de translação para o esboço da parábola.

Figura 4 – Representação gráfica de parábola



Fonte: Os autores.

Diante disso, podemos perceber que essa parábola foi translada da origem 2 unidades para a esquerda no eixo das abscissas, portanto, temos a seguinte equação para essa movimentação $y = 3(x - (-2))^2$. Agora, também podemos observar que houve uma translação na vertical de 4 unidades para baixo, tendo o vértice as seguintes coordenadas $(-2, -4)$, o que acarreta na representação $y - (-4) = 3(x - (-2))^2$. Caso seja de interesse, é possível reescrever no formato mais usual $y = ax^2 + bx + c$; após algumas manipulações algébricas teremos $y - (-4) = 3(x - (-2))^2 \Leftrightarrow y = 3x^2 + 12x + 8$.

Com isso, discorremos sobre a possibilidade de trabalhar o esboço da parábola por meio de translações, sem deixar de estabelecer as conexões existentes entre a curva representada e a equação considerando as unidades visuais e simbólicas, ou seja, fundamentando em uma intepretação global das propriedades figurais. E mais, sendo possível passar da representação algébrica para a representação gráfica, bem como, da gráfica para a algébrica, de modo mais espontâneo. Nesse caminho, chegamos ao que Duval (2004) denomina de coordenação entre registros: “a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos” (Henriques, & Almouloud, 2016, p. 470). A seguir apresentamos a primeira experiência com esse processo em turmas do ensino médio.

ALGUNS REGISTROS REALIZADOS NO ENSINO MÉDIO

Na presente seção vamos apresentar alguns registros de uma atividade realizada no ano de 2019 com estudantes do ensino médio de uma escola pública de Santa Catarina - Brasil. Foi realizada uma primeira experiência fazendo uso do processo de translação para o esboço da parábola, considerando a interpretação global. Alguns apontamentos sob o viés da Teoria Registros de Representação Semiótica serão considerados com a finalidade de discutir as atividades cognitivas de tratamento e conversão presentes nesse esboço de acordo com os registros.

Aqui estamos considerando um recorte da atividade. Apenas a avalição final será analisada. Em um todo a atividade esteve fundamentada com alguns elementos do referencial teórico metodológico Engenharia Didática de Michèle Artigue (1996) para manter o estudo incorporado a parâmetros criteriosos de pesquisa. As atividades ocorreram com duas turmas do 1º ano, uma com 20 estudantes e a outra com 32 estudantes.

Estabelecemos que o trabalho com o esboço da parábola seria no âmbito do próprio contexto matemático. Concordamos com Ponte e

Quaresma (2012) quando afirmam que o contexto matemático é o universo experiencial associado à atividade, o qual remete para o universo matemático e não remete a vida quotidiana do estudante.

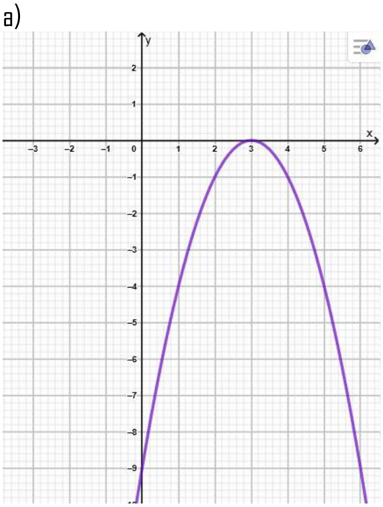
Diante disso, a atividade avaliativa teve duração de uma hora-aula (45 minutos), na qual o estudante deveria analisar cada questão fazendo uso adequado de algum aspecto do objeto matemático necessário para obter a solução. A avaliação apresentou as seguintes questões:

1. Para cada representação algébrica da parábola a seguir, esboce o gráfico considerando as translações em relação à origem do plano cartesiano e o processo de completar quadrado.

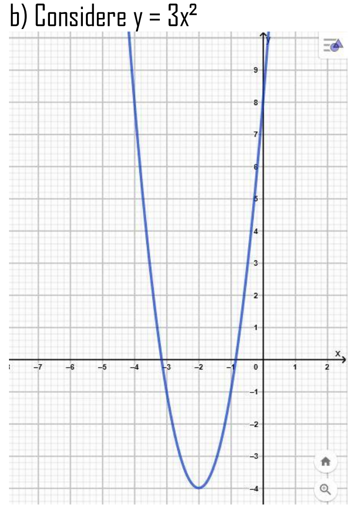
a) $y = 3x^2 - 12x + 9$ b) $y = x^2 - 6x + 9$ c) $y = -4x^2 - 8x$

2. Para cada representação gráfica a seguir escreva a equação correspondente.

a)



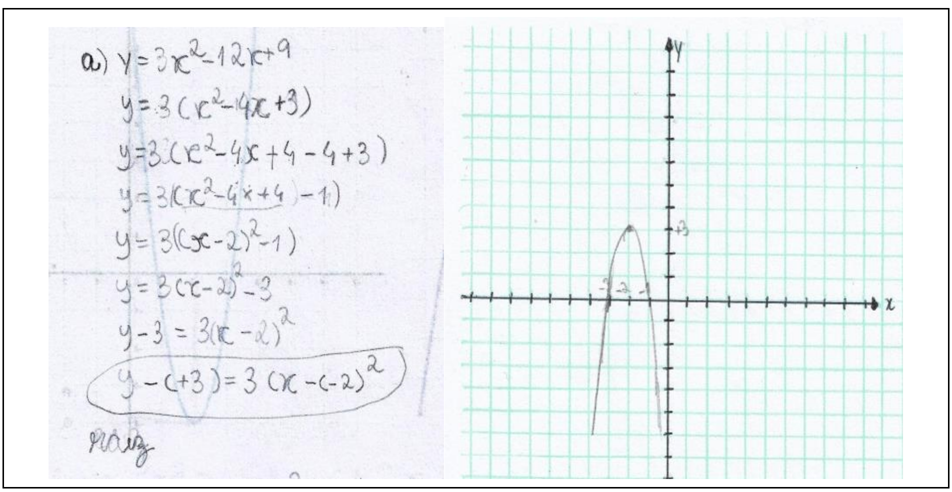
b) Considere $y = 3x^2$



Na avaliação ainda continha um item *c)* na questão 2 com o gráfico de uma reta, mas, pensamos que aqui podemos focar apenas no que se refere a parábola. Observamos que na questão 1 estamos diante de três equações com formato $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^2 + bx + c$ e $y = ax^2 + bx$. Deixamos de fora o caso $y = ax^2 + c$ por considerá-lo com menos tratamentos necessários.

Na Figura 5 podemos observar um dado importante que o próprio Duval (2004) menciona. A aluna realiza a conversão da representação algébrica para a representação gráfica, mas, uma variação visual importante, a concavidade, não é levada em consideração, nem o intercepto *y*. Ou seja, no processo de conversão, a coordenação entre as diferentes representações do objeto matemático em questão ainda não foi concretizada.

Figura 5 – Conversão entre representações de registros diferentes

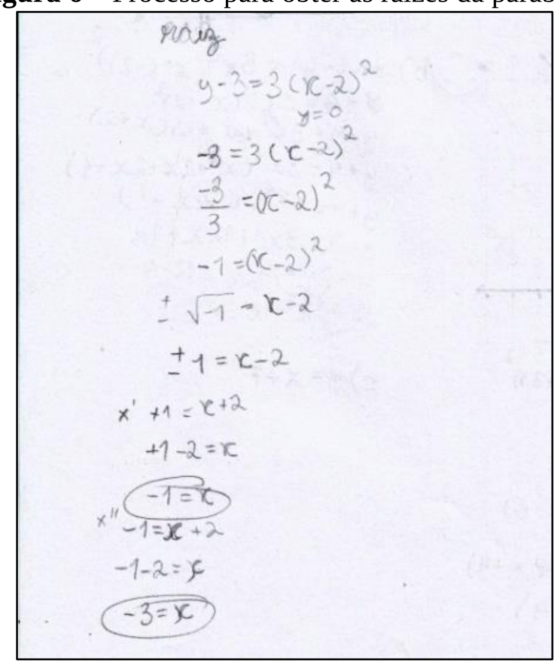


Fonte: Os autores.

Nesse caso, somente a compreensão de cada uma das variáveis visuais gráficas colabora para o sujeito que desenvolve a expressão $y = 3x^2 -12x +9$ perceber se a expressão final de fato faz sentido. Sabendo que há raízes reais (Figura 6) e que a parábola era côncava para cima, não seria possível as coordenadas do vértice ser (-2, 3) como a estudante registrou.

Especialmente, na equação $y- (-3) = 3(x- (+2))^2$ temos as relações com os movimentos da parábola no plano cartesiano, podemos indicar a concavidade da parábola, embora, é preciso retornar a equação inicial $y = 3x^2 -12x +9$ para relacionar com a variável visual intercepto y. Por isso que, como cada representação semiótica evidencia alguma variação visual diferente, ou seja, nem sempre a mesma variação é ressaltada, que entendemos a importância desse processo de esboço por meio de translações. O processo corrobora para ampliar o repertório de diferentes registros de representação, bem como, permitir o reconhecimento do mesmo objeto em diferentes representações.

Figura 6 – Processo para obter as raízes da parábola



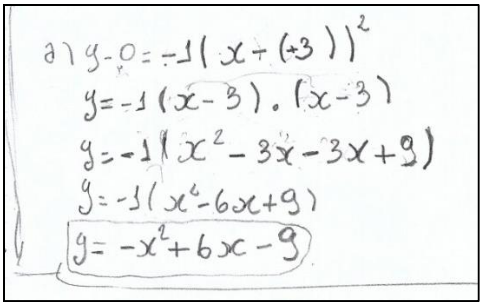
Fonte: Os autores.

Estamos diante de um problema não só de incompreensão de todas as variáveis visuais, mas também, de tratamento. É possível constatar (Figura 5) que há certa dificuldade principalmente relacionada aos membros da igualdade (o 3 estava subtraindo de um lado e ‘passou’ para o outro lado subtraindo no registro da estudante) e sobre a relação das equações entre si (a última equação, $y- (+3)=3(x- (–2))^2$, não está de acordo com a penúltima, $y-3=3(x-2)^2$, no registro apresentado).

Apesar disso, percebemos que a estudante realiza as passagens passo a passo de uma equação a outra. E reconhecer que ali não há um trinômio quadrado perfeito e até mesmo completar quadrados ocorreu com facilidade. Então, o procedimento de esboço da parábola por meio de translações se mostra um processo adequado para o objetivo proposto.

Contudo, um dos maiores obstáculos na questão 1 foi justamente no tratamento. Em diversos registros dos estudantes presenciamos o não reconhecimento de trinômios quadrados perfeitos. Em contra partida temos que os estudantes os quais realizam com êxito a questão 2, não necessariamente atingiram a mesma eficácia na questão 1. Como exemplo, temos o registro de uma estudante - Figura 7, a qual não realizou o tratamento necessário, e nem as conversões na questão 1, mas, na questão 2 fez com total acerto.

Figura 7 – Tratamento e conversão realizados



Fonte: Os autores.

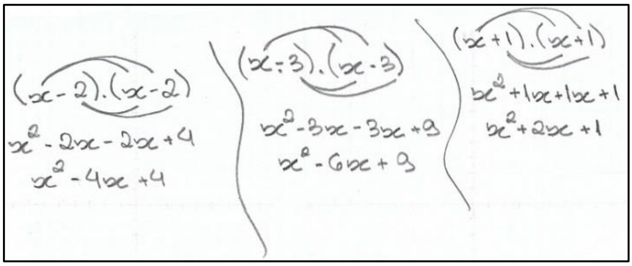
Sendo assim, podemos afirmar, de modo geral, os estudantes que de fato compreenderam o objeto foram os que obtiveram sucesso nos três itens da questão 1, e por mais que houve muitos acertos no item b) da questão 1, isso não pode ser visto de modo isolado. Há sim uma lacuna na compreensão do objeto como um todo. Até mesmo Duval (2008, p. 27) pondera que

> Do ponto de vista cognitivo, os acertos elementares não são determinados por cada item separadamente, mas por reagrupamento de itens, porque esses acertos só podem ser definidos em termos de discriminação: é necessário ser capaz de reconhecer no que diferem duas representações cujas componentes significantes, salvo uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem diferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferenças.

Já na questão 2 vale pontuar que a conversão da representação gráfica para a algébrica sendo da forma $y- (k) = a(x- (m))^2$ (Figura 7) foi a operação cognitiva com menos custo realizada pelos estudantes. Da mesma forma o tratamento, já que Duval (2015, p. 39) aponta que o desenvolvimento de um produto como $(x-m)^2$ "é uma operação que se começa e que se desenvolve automaticamente aplicando uma sequência de operações (...). Eu vejo, eu faço, eu passo ao termo seguinte".

Verifiquem o rascunho utilizado pela estudante na questão 1 mesmo após ter completado quadrados de modo adequado. Ela buscou confirmar que a substituição do trinômio quadrado perfeito realizado estava de acordo – Figura 8.

Figura 8 – Desenvolvimento de trinômios quadrados perfeitos



Fonte: Os autores.

A nosso ver entendemos que possivelmente o desenvolvimento de um trinômio quadrado perfeito é um processo de tratamento o qual se dá maior ênfase nos anos finais do que a fatoração, a passagem de ax^2+bx+c para $(x-m)^2$, o que justificaria o sucesso, pela maioria dos estudantes, no tratamento da questão 2 somente. Da mesma forma podemos cogitar sobre o não reconhecimento de que cada uma das representações de equações no tratamento diz respeito ao mesmo objeto, ideia essa nem sempre abordada na escola.

Especificamente sobre a conversão pontuamos que a quantidade de variáveis visuais gráficas ainda é numerosa, portanto, o fator tempo de aprendizagem é um elemento com certa relevância nesse processo para compreendê-las. Embora, percebemos que foi possível os estudantes trabalharem com o esboço da parábola por meio de translações e relacionar as unidades significantes dos dois registros considerados.

CONSIDERAÇÕES

Uma das preocupações em muitas pesquisas é estabelecer que os objetos da pesquisa tornem-se objetos de ensino. No presente artigo, temos indícios de que a Teoria de Registros de Representação Semiótica, em especial a interpretação global de propriedades figurais possibilita discutir o ensino, e mais, a aprendizagem em torno do objeto parábola.

Duval (2008) ao questionar qual o método para pesquisar processos de aprendizagem, afirma "é necessário *distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e aquilo que sobressalta em uma conversão*" (p. 24). Por isso, concluímos que o esboço da parábola por meio de translações permite fazer essa distinção, o que enriquece a apreensão do estudante em relação ao objeto trabalhado, já que se busca uma análise do todo da curva, e não apenas pontual.

Diante disso, buscamos apresentar resultados que discutem as atividades cognitivas de tratamento e conversão presentes no esboço da parábola por meio de translações com estudantes do ensino médio. Encontramos que no tratamento há dificuldades para reescrever um trinômio quadrado perfeito com três termos para o formato no qual temos algo ao quadrado. Bem como, entender que cada nova equação ainda diz respeito ao mesmo objeto matemático. E na conversão entram em cena as variáveis visuais, o reconhecimento delas acaba garantindo a conversão. Os estudantes apresentaram muito mais dificuldades no tratamento do processo do que na conversão, o que denota que a abordagem em si não é tão complexa para o nível dos estudantes. Atribuímos a referida facilidade ao recurso que Moretti (2008) propõe para as conversões: translações.

De todo modo, percebemos que somente quando o estudante faz uma coordenação entre os diferentes registros é que a compreensão do objeto de fato acontece. Portanto, pensamos que o processo aqui abordado, de esboço da parábola por meio de translações, é um caminho que possibilita um olhar direcionado do estudante para as unidades significantes de cada registro.

Contudo, falta ainda que no ensino médio o esboço de curvas seja discutido no âmbito das representações semióticas, uma vez que, os gestos intelectuais apresentados pelos estudantes no fazer matemática são de natureza semio-cognitiva, visto que, só assim chegamos mais próximos de não confundir o objeto representado com sua representação.

REFERÊNCIAS

Artigue, M. (1996). Engenharia Didática. In: Brun, J. (Org.). *Didática das Matemáticas* (pp. 193-218). Tradução de Maria José de Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Côrrea, M. O. S. & Moretti, M. T. (2014). Esboçando Curvas de Funções a Partir de Suas Propriedades Figurais: uma Análise sob a Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. In: C. F., Brandt & M. T. Moretti (org.), *As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática* (pp. 39-65). Ijuí: Unijuí.

Damm, R. F. (2016). Registros de Representação. In: S. D. A., Machado (org.), *Educação Matemática: Uma (nova) introdução* (pp. 167-188). São Paulo: EDUC. 3ed.

Dante, Luiz Roberto. (2016). *Matemática: Contexto & Aplicações.* Ensino Médio. Volume 1. Manual do Professor. São Paulo: Ática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2008). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. A., Machado (org.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-34). Campinas: Papirus. 4ed.

Duval, R. (2011a). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Revemat* (Trad. de M. T. Moretti), *6*(2), pp. 96-112.

Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.

Duval, R. (2015). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso*. São Paulo: Proem.

Henrique, A. & Almouloud, S. A. (2016). Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. *Ciência & Educação*, 22(2). pp. 465-487.

Menoncini, L. (2017). A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista*, *1*(18), pp. 126-134.

Moretti, M. T. (2008). A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: S. D. A., Machado (org.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 149-160). Campinas: Papirus. 4ed.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, (22), pp. 196-216.

Silva, M. O. (2008). *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica.* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Simonetti, D. (2020). *Processos Algébricos no Esboço de Curvas: o caso da parábola à luz dos Registros de Representação Semiótica.* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

CAPÍTULO VI

DESIGN TEÓRICO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Carine Scheifer
Celia Finck Brandt

A teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica é bastante complexa, extensa e repleta de termos específicos de uma abordagem cognitiva de aprendizagem. As pesquisas encontradas no âmbito do desenvolvimento cognitivo da Geometria, normalmente são desenvolvidas com base em aprofundamento de alguma das diversas especificidades da qual trata essa Teoria. Neste artigo, porém, o grande diferencial é o fato de estar contemplado em um mesmo trabalho a maioria dos aspectos proposto por Raymond Duval a respeito da aprendizagem da Geometria, de forma compilada e de fácil acesso.

Portanto, este artigo é uma exposição de um dos resultados da pesquisa de mestrado intitulada *Design metodológico para análise de Atividades de Geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (Scheifer, 2017). Trata-se do Quadro Teórico compilado durante a referida pesquisa com uma síntese das especificidades requeridas no ensino da Geometria sob o ponto de vista cognitivo da teoria de Raymond Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b, 2013).

As especificidades são as categorias que compõem o Quadro Teórico. Em cada categoria há muito que ser explorado para além desse artigo, devido a complexidade da Teoria dos Registros, portanto este quadro não pretende esgotar nem em número de categorias, nem em aprofundamento de cada categoria o estudos sobre o pensamento geométrico. Ao invés disso, este quadro, denominado Quadro Teórico do Pensamento Geométrico, pode facilitar um acesso prático, operacional e didático para conhecimento das ideias que o autor propõe em seus diversos trabalhos de pesquisa a respeito da maioria das especificidades da Geometria. As categorias propostas no quadro são apresentadas de forma sucinta, a fim de possibilitar uma visão geral e panorâmica do que o autor considera importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Uma das inúmeras utilizações possíveis para esse Quadro Teórico é de subsidiar teoricamente a organização do ensino da Geometria, bem como a elaboração de questões e atividades para desenvolver com os alunos. Outra possibilidade é a análise de materiais elaborados para o ensino e a avaliação referente à Geometria, pois permite ao professor ter uma visão mais ampla do que está sendo valorizado ou deixado de lado no processo de ensino e de aprendizagem.

Na pesquisa original (Scheifer, 2017) foram analisadas questões da Prova Brasil, e concluiu-se que tais questões não são suficientes para avaliar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois as especificidades da aprendizagem da Geometria estão contempladas de maneira incompleta nessas questões, reflexo, portanto de um ensino de Geometria fragilizado e sem fundamentação teórica, que é fruto também de livros didáticos mal elaborados[1]. A elaboração de questões para avaliações em larga escala precisa ser feita de forma pontual e objetiva, sem interferências de variáveis que possam atrapalhar a verificação do

[1] Eis algumas pesquisas sobre análise de livros didáticos fundamentadas pela Teoria dos Registros: Carvalho, 2008; Ordem, 2010; Rodrigues, 2011; Silva, 2014; Kluppel, 2012.

desempenho dos alunos, além disso, é necessária uma organização prévia sobre o que e como avaliar, bem como as possibilidades resolutivas para elaborar os extratores. E o que se percebe com a análise feita sobre a Prova Brasil, é que esse processo parece estar bastante debilitado por parte dos educadores. O desempenho dos alunos nos mostra que mesmo em questões que pareciam simples e elementares e que não exigiam habilidades cognitivas complexas e elaboradas, os alunos apresentavam alto índice de erro. Ou seja, para os alunos que não desenvolveram as habilidades básicas necessárias para resolver questões de Geometria, algumas atividades simples são, para eles, cognitivamente complexas.

COMPILAÇÃO DO QUADRO TEÓRICO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Na Geometria há uma originalidade que difere de outras atividades matemáticas, trata-se da necessidade de coordenação entre os tratamentos figurais (o registro da figura e suas propriedades) e o discurso teórico em língua natural (enunciados, definições, teoremas, propriedades) (DUVAL, 2004, p.156).

Duval (2004) afirma que “ver” uma figura em Geometria não é algo simples, e por isso precisa ser ensinado. Um registro figural é constituído por unidades figurais elementares (ponto, reta, plano) que, articulado ao discurso teórico deste registro, permite diferentes tratamentos figurais (ver categorias) e tratamentos matemáticos (operações aritméticas e/ou algébricas), bem como modificações (óticas, posicionais, mereológicas) das figuras obtidas, conforme veremos a seguir.

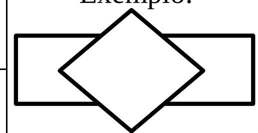
Para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem precisar mudar a representação no papel. É necessário também estar atento à passagem da dimensão física à dimensão representada (física/representada), conforme as situações que Duval (2011, p. 86) coloca: maquetes de cubo (3D/3D), gabaritos (2D/3D), fios estendidos ou um raio de laser (1D/3D).

O Quadro Teórico do Pensamento Geométrico compilado com as especificidades é bastante sucinto, portanto, para melhor compreensão de cada categoria, a leitura dele deve ser feita concomitantemente com as breves descrições que virão na sequência.

Quadro 01 – Quadro Teórico do Pensamento Geométrico

Indicador da atividade cognitiva	**Índices**	**Descrição**
1. Configuração global: Unidades figurais elementares	Qualidade – determinada por características	Forma (linha reta ou curva), contorno (aberto ou fechado), variação de tamanho, orientação, etc.
	Dimensão	Cubos, pirâmides, esferas (3D), polígonos, círculos (2D), retas, curvas (1D) e pontos (0D).
2. Evolução dos olhares	Olhar icônico	Botanista - reconhecer o contorno das formas.
		Agrimensor - propriedades são as mobilizadas para fins de medidas.
	Olhar não icônico	Construtor - se forma no uso de instrumentos.
		Inventor - opera sobre a figura e a modifica.

Continuação do Quadro 1

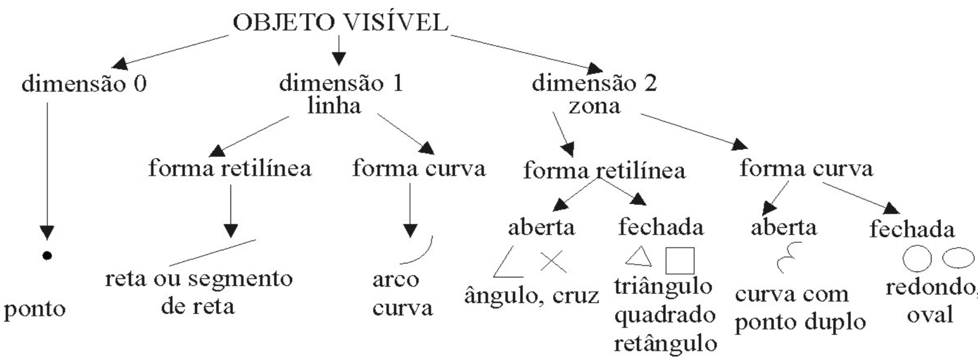
<table>
<tr><td rowspan="3">3. Maneiras de ver</td><td>Justaposição</td><td>Um losango e um retângulo (2D/2D)</td><td rowspan="3">Exemplo:
</td></tr>
<tr><td>Superposição</td><td>2 pentágonos e 1 losango (2D/2D)</td></tr>
<tr><td>Unidades figurais</td><td>10 segmentos de reta ou 8 retas subjacentes (1D/2D)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4. Apreensão dos registros figurais</td><td>Perceptiva</td><td colspan="2">Na qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada.</td></tr>
<tr><td>Operatória</td><td colspan="2">Na qual se operam modificações na figura do tipo: Mereológica (modifica uma figura sem modificar sua dimensão), ótica (ver em profundidade ou em perspectiva) e posicional (deslocamento em relação a um referencial).</td></tr>
<tr><td>Discursiva</td><td colspan="2">Na qual se opera a coordenação entre figura e discurso.</td></tr>
<tr><td>Sequencial</td><td colspan="2">Solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5. Tipos de problemas – resulta da articulação das apreensões requerida na resolução</td><td>Figura geométrica</td><td colspan="2">Articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva.</td></tr>
<tr><td>Visualização</td><td colspan="2">Articulação entre as apreensões perceptiva e operatória.</td></tr>
<tr><td>Heurística e demonstração</td><td colspan="2">Articulação entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva.</td></tr>
<tr><td>Construção</td><td colspan="2">Articulação entre as apreensões perceptiva, discursiva e sequencial.</td></tr>
</table>

Fonte: Quadro retirado de Scheifer, (2017).

CATEGORIA 1 – Configuração global: Unidades figurais elementares

Toda figura apresenta valores que Duval (2004, p. 157) classifica em dois grandes tipos de variação visual. Uma que trata da **qualidade** da figura, determinada por características, tais como: forma (linha reta ou curva), contorno (aberto ou fechado), variação de tamanho, orientação, etc. Outra que se refere à **dimensão** que a figura apresenta, como cubos, pirâmides, esferas (3D), polígonos, círculos (2D), retas, curvas (1D) e pontos (0D). Em uma figura geométrica, a característica que se destaca é a *forma*, ela é essencial para determinar uma unidade de base representativa. O cruzamento desses valores permite definir as **unidades figurais elementares,** conforme a classificação apresentada pelo autor na Figura 1.

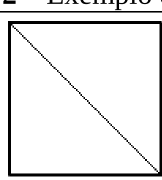
Figura 1 – Classificação de unidades figurais elementares



Fonte: Duval (2004, p.159).

As figuras apresentam uma heterogeneidade de unidades figurais e de diferentes dimensões, conforme pode ser observado no exemplo do quadro a seguir, que apresenta uma representação de um quadrado traçado por uma de suas diagonais.

Quadro 2 – Exemplo de unidades figurais elementares de um registro figural

	Unidades figurais elementares presentes na figura: - 1 quadrado (2D) - 2 triângulos (2D) - 5 segmentos de reta (1D) - 4 pontos (0D)

Fonte: as autoras.

A articulação do registro das figuras com o discurso matemático exige uma mudança contínua de dimensões a fim de discernir as unidades figurais, isto porque, enquanto a percepção automática das figuras se dá na dimensão 2, as aplicações de definições e de teoremas se fazem em unidades figurais de dimensões 1 e 0. Este é um fenômeno geral ao qual é atribuída a complexidade da atividade geométrica e que deve ser superado para que realmente haja aprendizagem. Isto explica a dificuldade dos alunos nas tarefas que exigem a descrição de figuras geométricas. Nessas tarefas o aluno deve passar do registro figural para o registro discursivo, portanto a apreensão do fenômeno apresentado acima é indispensável. A maioria dos alunos não emprega um vocabulário correto, não reconhece a intersecção de retas como sendo um ponto, troca termo como redondo no lugar de círculo, e também não consegue identificar corretamente os objetos representados. Com base neste tipo de atividade, o autor constatou que os alunos evitam ao máximo transformar uma unidade figural de dimensão 2 em uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 e 0 (Duval, 2004, p. 160-161).

CATEGORIA 2 – Evolução dos olhares

Aprender a olhar, segundo Duval (2005[2] apud Moretti, 2013, p. 293), exige que passemos do olhar icônico para o olhar não-icônico seguindo o percurso que se inicia no olhar Botanista, evolui para um olhar Agrimensor, seguido do Construtor, e finalmente o Inventor.

a. Botanista: é aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, é um

---

[2] Duval, R. **Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie**: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leursfonctionnements. Annales de didactiqueet de sciencescognitives, 2005. v. 10, p. 5-53

“olhar qualitativo”. Não há nenhum tipo de propriedade, medida ou relação que precisa ser reconhecida em atividades que requerem este tipo de olhar, apenas observar semelhanças e diferenças sem, no entanto, quantificá-las ou estabelecer relações métricas entre elas. Mas, as qualidades requeridas neste olhar preparam os alunos para os demais olhares.

b. Agrimensor: é aquele que faz medidas no terreno e consegue passar essas medidas para o plano do papel. As atividades que exigem este tipo de olhar são aquelas que passam de uma escala de grandeza a outra: “[...] neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida”, como por exemplo, o procedimento utilizado por Erastóstenes para medir o raio da terra. (Duval, 2005, p. 6, apud Moretti, 2013, p. 294).

c. Construtor: se forma no uso de instrumentos – régua não graduada e compasso. O aluno pode verdadeiramente tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva (Duval, 2005, p. 6). Atualmente, alguns programas computacionais – como, por exemplo, o GeoGebra e o Cabrigéomètre – podem substituir o uso desses instrumentos.

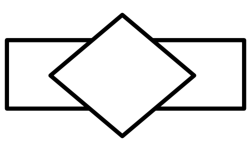
d. Inventor: é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. Um exemplo de uma atividade para o inventor é: Como dividir um triângulo em duas partes para que essas partes possam ser acopladas para formar um paralelogramo (Duval, 2005).

CATEGORIA 3 – Maneiras de ver

Existem três maneiras de "ver" uma figura geométrica. Duas delas são comuns a qualquer imagem, trata-se da decomposição por (a) **justaposição** e da decomposição por (b) **superposição.** A terceira maneira é ver em (c) **unidades figurais**, e só tem sentido em matemática. A percepção focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão maior da figura (justaposição ou superposição), enquanto o tratamento da situação matemática representada requer que se restrinjam as unidades figurais de dimensões menores. Esta mudança de dimensão é necessária nas atividades de Geometria.

O quadro a seguir apresenta uma figura de configuração global (2D/2D)[3] e as diferentes maneiras de ver esta figura, segundo Duval.

Quadro 3 – Maneiras de ver uma figura geométrica



- Decomposição por **superposição**: 1 losango e 1 retângulo. (2D/2D)

- Decomposição por **justaposição**: 3 formas poligonais 2 pentágonos e 1 losango (2D/2D)

- Ver em unidades **figurais**: 10 segmentos de reta ou 8 retas subjacentes (1D/2D)

Fonte: Scheifer (2017).

A primeira forma de "ver" esta figura e que nos salta aos olhos é a decomposição por superposição, pois a percepção imediata é a de um losango superposto a um retângulo (2D→2D). A segunda maneira é a decomposição por justaposição, na qual se visualizam três figuras justapostas (2D→2D), ou

[3] (2D/2D) - objetos de dimensão 2 representados no plano (2D)

seja, um losango e dois pentágonos. E a terceira é a visualização das unidades figurais, que exige um salto cognitivo em relação à maneira normal de ver. Esta forma de "ver" exige a desconstrução dimensional, possibilitando uma visualização de unidades figurais de dimensão inferior à da figura dada (2D→ 1D), que podem ser interpretadas de duas maneiras, ou uma configuração de figura formada por dez segmentos de reta, ou uma configuração formada por oito retas.

Nesse exemplo, a superposição se impõe ao olhar bloqueando a visualização de outros reconhecimentos das unidades figurais. Para ir além da visão natural é necessário um longo treinamento. Não é o que ocorre nas escolas onde, segundo Duval (2011, p.88) se proporciona o ensino de "ver" de maneira violenta e irrealista, que se fundamenta em enunciado de propriedades, definições e teoremas.

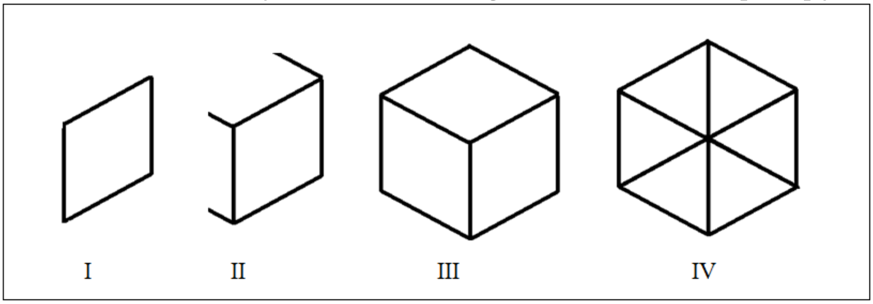
CATEGORIA 4 – Apreensões dos Registros Figurais

Os tratamentos figurais dizem respeito ao registro das figuras independente de todo conhecimento matemático, e são vinculados à possibilidade de modificações que podem efetuar-se nas figuras. Essas modificações podem ser óticas ou posicionais, e podem ser efetuadas física ou mentalmente. Sua importância se dá pelo fato de que nem sempre é fácil "ver" sobre uma figura as relações e propriedades pertinentes à solução. Há, segundo o autor, quatro tipos possíveis de apreensões de uma figura: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial. (Duval, 2004, 2011, 2012a, 2012b).

a. Apreensão Perceptiva: reconhecimento das unidades figurais em uma figura geométrica. A percepção corresponde ao primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, no qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada.

Observe o Quadro 4 abaixo com a sucessão de figuras apresentadas:

Quadro 4 – Modificação de elementos figurais e as diferentes percepções



Fonte: Scheifer (2017).

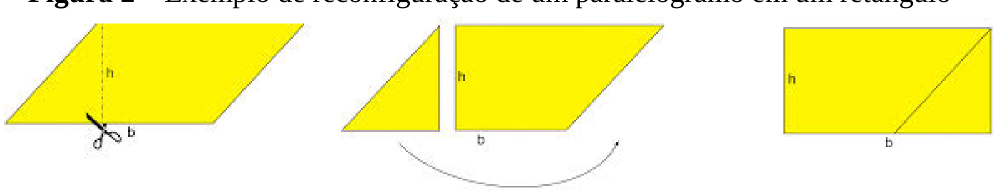
Analisando as figuras podemos verificar que, em primeiro lugar, não se tratam de figuras geométricas, pois para isto, falta algum discurso a respeito do que se apresenta no desenho. Sob o olhar da apreensão perceptiva a figura I passa a impressão de ser a figura plana de um paralelogramo, enquanto as figuras II e III, depois de algumas modificações realizadas, apresentam outra configuração cuja percepção é a de um objeto tridimensional, o cubo. Finamente, com mais alguns modificações, na figura IV percebe-se um hexágono regular de dimensão 2. Alguns traços nas figuras podem mudar completamente a percepção sobre ela. Este primeiro nível de apreensão é independe de qualquer propriedade, definição ou teorema, pois não há nenhum discurso que acompanha a figura, portanto podemos dizer que não se trata de atividade geométrica propriamente dita, porém sua apropriação é indispensável para a aprendizagem da Geometria. Além disso, é extremamente importante, pois todas as demais apreensões são subordinadas a apreensão perceptiva, é ela que orienta os demais níveis de apreensão.

b. Apreensão Operatória: modificações possíveis de uma figura geométrica. As unidades figurais podem ser separadas, recombinadas, movidas, ampliadas, reduzidas, etc. Duval (2012b, p.289) afirma que “os tratamentos que são reveladores de uma apreensão operatória, quer dizer, os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura”.

A apreensão operatória é subdividida em modificações mereológicas, óticas e de posição, que são operações que constituem a produtividade heurística das figuras e serão apresentadas a seguir. (Duval, 2004, 2011, 2012a, 2012b)

(i) <u>Modificação mereológica</u> (relação parte/todo): apoia-se diretamente na percepção. Modifica uma figura sem modificar sua dimensão, é passível de manipulação do objeto (Duval, 2011 p. 88-89). Para uma modificação mereológica, o processo heurístico (ou seja, as operações que modificam a figura) se dá por meio de reconfigurações. Uma delas é a reconfiguração intermediária que consiste em dividir uma figura em subfiguras, reagrupando-as em um eventual contorno global diferente. Naturalmente, se pode aumentar o número das partes da figura por um fracionamento de suas unidades figurais elementares.

Figura 2 – Exemplo de reconfiguração de um paralelogramo em um retângulo



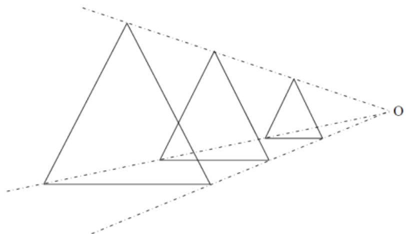
Fonte: Scheifer, (2017).

Houve, na operação de reconfiguração da Figura 2, uma divisão em sub figuras (um triângulo e um trapézio), modificando a partir disto, a configuração global da figura de partida. Uma sub figura pode ser uma unidade figural de dimensão 2, por exemplo, o triângulo, ou um reagrupamento de unidades figurais elementares também de dimensão 2, como o trapézio, que pode ser visto como um reagrupamento de triângulo e retângulo, que são unidades figurais elementares.

(ii) Modificação ótica: As operações da modificação ótica podem ocorrer quando há a mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho: superposição em profundidade de duas figuras semelhantes. Ou então, quando há variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, variando forma e constância e tamanho. Entre os fatores internos que disparam ou inibem a visibilidade destas operações, estão: a mesma orientação das figuras (objeto e imagem), as linhas de perspectiva são todas distintas dos lados das duas figuras, o centro de homotetia no interior ou no exterior do contorno convexo envolvendo as duas figuras (Duval, 2012b, p. 288). Apresentam-se aqui dois tipos de modificação ótica, a anamorfose e a superposição.

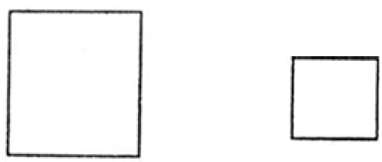
- colocar em perspectiva (ou superposição): esta operação permite “ver em profundidade” uma representação plana, constituindo a produtividade heurística do registro figural em relação com o discurso matemático. Está relacionado com a distância que se vê um objeto em relação a outro. Por meio desta operação é possível compreender que um objeto visto menor significa que está mais longe em relação a outro maior. Esta operação requer que uma unidade figural possa servir de sinal para um centro organizador no desenho (o ponto de fuga). (Duval, 2004, p. 173).

Figura 3 – Operação ótica de colocar em perspectiva



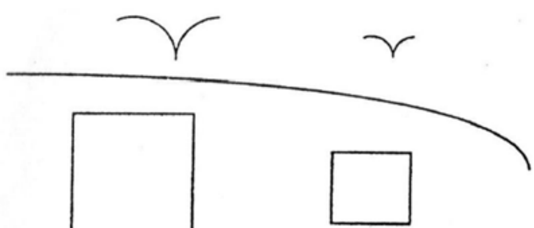
Fonte: a autora.

Figura 4 – Duas unidades figurais de mesmo valor e com a mesma orientação



Fonte: Duval (2004, p. 166).

Figura 5 – Colocar em perspectiva duas unidades figurais por contextualização

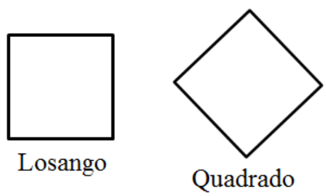


Fonte: Duval (2004, p. 167).

Colocar em perspectiva é uma operação cuja percepção se volta para a modificação das unidades figurais de dimensão 2 no espaço. Mas ao tratar de homotetia, o discurso de "conservação das relações de tamanho" que acompanha a atividade, conduz a selecionar somente as unidades figurais de dimensão 1 e 0. "O tratamento figural em questão guia a análise matemática da configuração homotética plana, que deve ser lida unicamente em termos de ponto e de relações de longitude de segmentos.” (Duval, 2004, p. 167).

(iii) Modificação de posição: É o deslocamento da figura em relação a um referencial. As operações requeridas neste tipo de modificação mantêm o mesmo tamanho e forma, variando a orientação, rotação, translação, [...] (Duval, 2012B, p. 288). As simples modificações de posição por rotação ou por translação de uma unidade figural elementar pode ser um obstáculo para o seu reconhecimento.

Figura 6 – Representação do losango e do quadrado



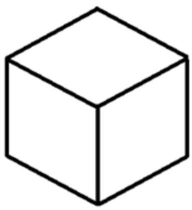
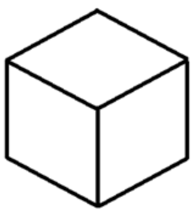
Fonte: os autores.

Para o aluno o reconhecimento de um quadrado como sendo um losango, pode levar mais ou menos tempo dependendo da sua posição e orientação no plano do papel. Da mesma forma que o reconhecimento de um losango é mais ou menos espontâneo, dependendo da sua orientação. A rotação mental exigida pela figura 6 está longe de ser espontânea e imediata. Este tipo de apreensão exige treinamento, no entanto os meios escolares não o privilegiam.

c. Apreensão discursiva: a coordenação entre figura e discurso. Uma figura só é considerada uma situação geométrica, se estiver acompanhada de algum discurso sobre ela. Segundo Duval (2004, p. 168), um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes, é necessário, pois, uma indicação verbal para ancorar a figura como representação do objeto matemático.

Observe a situação ilustrada no quadro a seguir:

Quadro 5 – Diferentes apreensões perceptivas e discursas para uma mesma representação.

Figura Geométrica		**Desconstrução dimensional**
Figura	Discurso	
	Poliedro regular formado por seis faces planas quadrangulares, sendo que cada vértice une três faces.	Para conseguir identificar o cubo (3D), precisamos fixar o olhar nas faces (2D) unidas pelas arestas (1D) (3D →2D→1D) E para identificarmos cada face do quadrado (2D) precisamos nos fixar nas retas (1D) que a delimita, e a qual pertence outra face (2D→ 1D)
	Hexágono regular formado pelo conjunto de segmentos consecutivos e não-colineares contidos num mesmo plano e que formam uma figura fechada.	Para identificar o hexágono (2D), precisamos fixar o olhar nos segmentos de reta (1D) que formam o lados do polígono e ignorar, pela conduta de abdução, os três segmentos de reta do interior da figura. (2D→ 1D)

Fonte: Scheifer, (2017).

A apreensão discursiva é que torna a figura passível de interpretações e entendimento, e só ocorre quando há domínio da apreensão perceptiva. Muitas vezes, uma contrapõe a outra, porém não pode ser dissociada uma da outra. No Quadro 5 observa-se que, a descrição da figura em 3D se dá em termos de dimensões 2, 1 e 0. E a figura de dimensão 2 é descrita em termos de dimensões 1 e 0, ou seja, sempre em termos inferiores ao discurso, o que, segundo Duval, os alunos evitam fazer.

d. Apreensão Sequencial: A apreensão sequencial é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura. (Duval, 2012a, p. 120)

Solicitar ao aluno que reproduza o desenho de um quadrado, por exemplo, pode parecer uma tarefa simples. Porém, para que a figura realmente satisfaça as propriedades dos lados e dos ângulos congruentes, o processo exige alguns passos que devem ser seguidos na ordem correta, conforme a sugestão do Quadro 6.

Quadro 6 – Processo para construção de um quadrado de lado igual a 4 cm.

Construir um quadrado de lado igual a 4 cm.

1) Trace o segmento AB de medida igual a 4 cm.
2) Trace a reta perpendicular a AB pelo ponto A.
3) Com a ponta seca do compasso em A e com abertura igual à AB, trace um arco que corte a perpendicular em C.
4) Com a ponta seca do compasso em C e mesma abertura, trace um arco.
5) Com a ponta seca do compasso em B e mesma abertura trace outro arco que intersecta o último arco traçado em D.
6) Com a régua construa o quadrado, ligando os pontos CD e BD.

Fonte: acervo das autoras.

Esta é uma atividade de construção geométrica, que exige do aluno as apreensões discursiva, sequencial e perceptiva.

CATEGORIA 5 – Articulação entre as diferentes apreensões: Tipos de Problemas

Segundo Moretti (2015, p.605), as apreensões não aparecem de forma isolada. Em algum problema, uma pode ser mais requisitada do que outra, mas todas elas aparecem em maior ou menor grau, havendo uma sinergia das várias apreensões na resolução de um mesmo problema, o que pode tornar o problema mais complexo. Duval[4] (1997 apud Moretti & Brandt, 2015, p. 607) destaca quatro delas:

(i) **Figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;

(ii) **Visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória;

(iii) **Heurística e Demonstração** são resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;

(iv) **Construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – especialmente requisitada em atividades dessa natureza, de construção geométrica, também requer a apreensão perceptiva.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para exemplificar a análise das questões com base neste Quadro Teórico, apresentaremos aqui uma questão analisada sob o crivo de algumas especificidades apresentadas no Quadro 7 e com as devidas inferências. Trata-se de uma questão de terceiro ano do Ensino Médio. A resposta correta desta questão é a letra C.

---

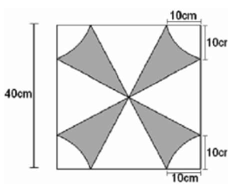
[4] DuvaL, R. **La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée**. 1997. IN: *CURSO DADO A PUC/SP*.

Quadro 7 – Exemplo de questão analisada sob ponto de vista cognitivo

<table>
<tr><th>Questão – 3º ano</th><th>Olhar:</th><th>Inventor.</th></tr>
<tr><td rowspan="7">

Exemplo de item:

Paulo resolve modificar o revestimento do piso de sua sala de estar e escolhe uma cerâmica cujo formato está representado na figura a seguir. A cerâmica escolhida tem a forma de um quadrado cujo lado mede 40cm e possui 4 arcos de circunferência, de raio igual a 10cm, cujos centros estão localizados nos vértices do quadrado.



Com base nessas informações, qual é a área do desenho formado na cerâmica, em centímetros quadrados? (Considere π = 3,14)

(A) 314 (B) 400 ➡ (C) 486 (D) 1114 (E) 1286

<table>
<tr><th colspan="5">Percentual de respostas às alternativas</th></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr>
<tr><td>22%</td><td>26%</td><td>21%</td><td>12%</td><td>14%</td></tr>
</table>

</td><td>Apreensões:</td><td>Perceptiva, Discursiva, Operatória (mereológica e posicional).</td></tr>
<tr><td>Tipo de problema</td><td>Heurística.</td></tr>
<tr><td>Enunciado:</td><td>Figural e numérico.</td></tr>
<tr><td>Resolução:</td><td>Figural e algébrico.</td></tr>
<tr><td>Dimensão (obj/fig):</td><td>2D/2D</td></tr>
<tr><td>Desc. dimensional:</td><td>2D→1D</td></tr>
<tr><td>Tratamento matemático:</td><td>Cálculo de área do quadrado e do círculo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Esta atividade consiste em identificar as diversas unidades figurais que compõem a figura, e operar sobre elas, inventando traços que permitam compor e decompor a figura em outras unidades figurais que permitam o cálculo da área solicitada no enunciado. A operação posicional pode se fazer presente ao identificar que os quatro arcos de circunferência com centro nos vértices do quadrado compõem uma circunferência. Para o desenvolvimento da resolução, a apreensão discursiva deve estar integrada à apreensão figural.</td></tr>
</table>

Fonte: As autoras.

Esta é uma das inúmeras formas de utilização do Quadro Teórico, mas pode ir muito além, conforme o interesse do leitor. Ele pode ser útil tanto para aquelas pessoas que querem ter um primeiro contato com a Teoria dos Registros a fim de ter uma compreensão geral para um futuro aprofundamento com outras bases bibliográficas (lembrando que trata-se de um quadro bastante sucinto, portanto, para um estudo mais aprofundado recomenda-se acessar o trabalho completo que originou este artigo, com mais exemplos e aplicações de cada categoria). E também pode ser útil para aquelas pessoas que já tem uma boa compreensão da Teoria dos Registros, a fim de utiliza-lo como um Memorex, em suas organizações didáticas e/ou de pesquisas.

REFERÊNCIAS

Brandt, C. F.; Moretti, M. T. (2014) O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Revista Perspectivas da Educação Matemática. Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul (UFMS), V. 7, N. 13.

Brasil. Ministério da Educação/INEP. Prova Brasil: avaliação do rendimento escolar. **Recuperado em 2 março, 2016, de** http://provabrasil.inep.gov.br/..

Carvalho, L. C. (2008) Análise da organização didática da Geometria espacial métrica nos livros didáticos. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Duval, R.; Freitas, J. L. M.; Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, p. 10-34.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang. Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles T. Moretti. Revemat, Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138.

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Moretti, M. T. Revemat: R. Eletr. De Edu. Mat e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297.

Duval, R. (2011). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem.

Moretti, M. T.; Brandt, C. F. (2015). Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de Geometria que envolvem figuras. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.17, n.3, pp.597-616.

Ordem, J. (2010). Prova e demonstração em Geometria: uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6ª a 8ª séries de Moçambique. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

Rodrigues, W. P. (2011). Uma abordagem conceitual de volumes no ensino médio. 2011. 87 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Scheifer, C (2017). Design Metodológico para análise de atividades de geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta, Ponta Grossa, Brasil.

Silva, A. B. (2014) Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2014. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Estadual de Pernambuco, Recife.

CAPÍTULO VII

ENSINO DA GEOMETRIA NA INFÂNCIA: SABERES E CONHECIMENTOS NA APRENDIZAGEM DA DOCÊNCIA

Fátima Aparecida Queiroz Dionizio
Celia Finck Brandt

A matemática para a Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental (EF) é constituída por conteúdos que podem propiciar atividades cognitivas pelas crianças, mas que requerem aprendizagem e compreensão por parte dos professores para sua realização em sala de aula. Essa aprendizagem também é necessária nas demais áreas que esses professores lecionam, de forma que possam levar os estudantes a se apropriarem dos conhecimentos e articulá-los com aspectos mais amplos dos contextos sociais em que se encontram. Porém, tem sido possível constatar na literatura que os cursos de formação de professores para essas etapas da educação, não tem conseguido alcançar plenamente os objetivos de formação para o ensino da matemática e isso tem refletido na prática pedagógica desses profissionais. Os motivos são diversos e compreendem fatores como o tempo e o espaço que a matemática ocupa nos cursos de Pedagogia, a forma como ela é desenvolvida nesses cursos, como essa disciplina é encarada pelos licenciandos e professores, entre outros.

Por se tratar de um assunto amplo e que permitiria uma investigação por diferentes vertentes, em nossa tese (Dionizio, 2019) optamos por um dos conteúdos que compõe a matemática, que é a geometria. Vamos apresentar nesse texto a justificava para escolha do tema e alguns elementos teóricos que subsidiaram parte das análises que compõem a referida tese.

Um dos motivos da escolha do conteúdo se deve ao fato de que os conhecimentos geométricos continuam sendo deixados de lado no processo de ensino pelos professores dos anos iniciais do EF, conforme Passos e Nacarato (2014) revelam. Segundo as autoras, a geometria tem ganhado mais espaço no campo acadêmico desde o final do século XX, mas alertam que isso não tem refletido em seu ensino nas salas de aula. Elas indicam que esse fato pode estar ocorrendo porque talvez os professores se sintam inseguros para ensinar geometria, por terem lacunas em seu processo formativo escolar. Esse aspecto também foi constatado em nosso estudo, ao evidenciarmos que os professores acabam priorizando outros conteúdos matemáticos no ensino, em detrimento da geometria (Dionizio, 2019).

A escolha da geometria também se deve a especificidade da atividade cognitiva exigida para sua aprendizagem, conforme um de nossos referenciais teóricos que é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval. O autor ressalta a importância do caráter semiótico dos conhecimentos matemáticos para o desenvolvimento cognitivo e destaca que o objetivo de ensino na escola consiste em "contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização" (Duval, 2013b, p .11).

Na geometria, o registro de representação semiótico formado pelas figuras requer o desenvolvimento de um tipo de pensamento que possibilite a tomada de consciência sobre maneiras de transformar as figuras observadas em outras na resolução de problemas, sobre o processo de desconstrução dimensional e sobre as apreensões e os olhares que caracterizam as atividades geométricas.

A necessidade de compreensão sobre as particularidades da geometria pelos professores e sobre os demais conhecimentos necessários para o exercício da prática pedagógica, nos levou a elencar outros referenciais teóricos que possibilitassem discorrer sobre a aprendizagem da docência, a formação de professores, conhecimentos e saberes docentes para o ensino da geometria nos anos iniciais do EF. Levamos em conta também o que Shulman (1986) evidencia sobre a necessidade de se resgatar o papel dos conteúdos a serem ensinados nas pesquisas sobre os conhecimentos docentes e os conhecimentos que ele indica como sendo os mínimos necessários ao professor (Shulman, 2001). Consideramos ainda que a aprendizagem da docência se constitui no decorrer da vida do professor e a partir de diversas fontes, por isso seria necessário considerar o papel da formação inicial e continuada, do exercício da profissão e de momentos anteriores a formação inicial, conforme Tardif (2014).

Desta forma, o problema que norteou a elaboração da tese foi: *Como tem ocorrido a aprendizagem da docência para o ensino da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental e o que influencia nesse processo?* A partir desse questionamento, iremos abordar nesse texto um dos objetivos específicos que foi o de explicitar os saberes e os conhecimentos que os professores mobilizam para ensinar geometria (Dionizio, 2019).

Para a realização da pesquisa foram considerados os dados empíricos obtidos em três etapas compostas por entrevistas, oficinas pedagógicas e grupo focal com professoras que lecionam matemática nos anos iniciais do EF, envolvendo 25 participantes ao todo. Nesse texto serão apresentados apenas alguns elementos teóricos e partes das análises que foram realizadas no decorrer da tese.

A GEOMETRIA EM PESQUISAS SOBRE OS ANOS INICIAIS DO EF E CONSIDERAÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM DA DOCÊNCIA, CONHECIMENTOS E SABERES DOCENTES

Para conhecermos o que tem sido pesquisado sobre a geometria nos anos iniciais do EF, procedemos com uma revisão de literatura que se pautou na busca de teses e dissertações em duas fontes: na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT) e no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Com a pesquisa realizada até maio de 2019, conseguimos localizar 61 trabalhos entre os anos de 2000 e 2019, utilizando os seguintes termos: “geometria no curso de pedagogia”, “geometria nos anos iniciais”, “geometria nas séries iniciais”, “espaço e forma nos anos iniciais”, “espaço e forma nas séries iniciais”. Como não foram localizados os resumos ou os trabalhos completos de 4 dissertações, as análises foram realizadas a partir de 57 trabalhos, sendo 53 dissertações e 4 teses.

Com base na leitura dos resumos e em alguns casos dos textos completos, os trabalhos foram categorizados por assuntos. Essa categorização pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1 – Organização dos trabalhos sobre geometria dos anos iniciais por categoria/assunto

Assunto	N° de trabalhos
Contribuições de cursos de **formação continuada** e de grupos de estudos sobre geometria para a formação dos professores.	24 (sendo 3 teses)
Contribuições de cursos de **formação inicial** para a formação dos professores.	8 (sendo 1 tese)
Desenvolvimento de atividades de geometria com estudantes dos anos iniciais.	15
Análise de livros didáticos.	4
Estudo de conteúdos desenvolvidos em sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	4
Estudo histórico e bibliográfico sobre motivos para o ensino da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	2

Fonte: Dionizio (2019, p. 33).

A partir dessa organização foi possível constatar uma preocupação dos pesquisadores com a formação de professores, resultando em 32 trabalhos que se voltam à formação inicial ou continuada. São trabalhos que partem da constatação sobre fragilidades na formação dos professores para o ensino de geometria nos anos iniciais do EF e que apresentam propostas formativas para superar as dificuldades. Porém, essas pesquisas centram-se principalmente nos conteúdos a serem ensinados e nas formas de abordá-los em sala de aula.

Não observamos nos trabalhos localizados uma preocupação específica com a aprendizagem do professor para o ensino da geometria nos anos iniciais do EF. Alguns pesquisadores apenas fazem menção à elementos que podem se caracterizar dessa forma, embora não seja o foco, como é o caso dos trabalhos que apontam as contribuições de fatores como "a coletividade, a partilha de experiências, as reflexões sobre teorias e práticas, o comprometimento dos professores participantes, a dinâmica dos encontros, o diálogo" (Dionizio, 2019, p. 39) na realização dos processos formativos.

Enfatizamos a aprendizagem da docência para o ensino da geometria na realização de nossa pesquisa, por entenderemos que ela tem grande influência na forma como o professor irá ensinar esse conteúdo aos estudantes. Não se trata apenas de ter acesso ou não à processos formativos voltados ao trabalho com essa área da matemática, mas sim do que o professor constitui como conhecimentos e saberes próprios no decorrer desses e de outros momentos de formação e como isso influencia em sua prática pedagógica.

De toda forma, o conceito de formação é o que melhor contribui para expressar o processo de aprendizagem de adultos. Segundo Vaillant e Marcelo (2012, p. 29), isso ocorre porque a formação incorpora uma dimensão pessoal de desenvolvimento humano global, que mobiliza a capacidade e a vontade de quem está se formando, de maneira que a própria pessoa será "o último responsável pela ativação e desenvolvimento dos processos formativos". Porém, isso não significa que essa aprendizagem ocorrerá de forma isolada, ela terá uma dimensão pessoal, mas a partir de um sujeito social que se desenvolve em práticas sociais. A formação poderá ocorrer de maneira individual ou coletiva, quando propiciada por trabalhos de pesquisa em grupos, cursos, oficinas, entre outras atividades.

No decorrer do processo formativo, conforme Vaillant e Marcelo (2012), a aprendizagem aparece interrelacionada aos conceitos de formação e experiência, embora isso não signifique que estarão determinados reciprocamente. Assim, eles consideram que pode haver experiência e ela não resultar em aprendizagem, mas a experiência do trabalho terá que ser considerada como fundamental nos processos de formação e de aprendizagem dos adultos. O desafio, segundo os autores, é criar condições para que os professores possam aprender tanto em cursos de formação de professores quanto na atuação nas escolas. Assim, consideramos que os processos formativos “terão de evidenciar o papel ativo do professor no processo, suas experiências e os espaços que os conhecimentos cultural e historicamente produzidos irão ocupar nesse cenário” (Dionizio, 2019, p. 63).

Os conhecimentos que serão abordados em propostas formativas nessa perspectiva, também precisarão contemplar o ensino dos conteúdos acadêmicos. Para elencar os demais conhecimentos a serem contemplados para a constituição dos saberes docentes no decorrer da aprendizagem da docência, em nossa tese tomamos como referência os elementos teóricos apresentados por Shulman (1986, 2001) e Tardif (2014). Devido a limitação de páginas desse texto, iremos apenas recuperar alguns desses aspectos no decorrer das análises.

Porém, é importante pontuar que consideramos a expressão “saberes docentes” na perspectiva de Tardif (2014), que diz respeito a algo que se manifesta quando os professores têm consciência sobre o que sabem e fazem, de maneira que podem justificar e argumentar sobre suas ações e proposições em contextos que lhes conferem reconhecimento social. Por outro lado, entendemos que a expressão “conhecimentos docentes” remete ao que pode ser consolidado em determinado assunto, reconhecido socialmente, aprendido e reproduzido pelos professores, mas que ainda não foi incorporado como saberes que fundamentam sua atuação profissional. Dessa forma, a aprendizagem da docência pode se constituir de saberes e de conhecimentos docentes, bem como de outras aprendizagens inerentes à profissão. (Dionizio, 2019).

Ao ponderarmos sobre os conhecimentos e saberes necessários aos professores para o ensino da geometria, além de aspectos mais amplos relacionados aos contextos educacional e social, também abordamos alguns conhecimentos geométricos e suas particularidades. São conhecimentos que consideramos relevantes para a constituição dos saberes docentes no decorrer da aprendizagem da docência e que se pautam nas proposições teóricas de Duval (1995, 2004, 2011, 2012a, 2012b).

Entre as características específicas da geometria, conforme Duval (2011), faz-se necessário considerar que o tratamento figural e o discursivo terão que ocorrer simultaneamente, pois as figuras levam a uma interpretação perceptiva quase imediata, devido ao seu caráter intuitivo, mas que podem incorrer em equívocos em relação aos objetos matemáticos. As particularidades no trabalho com atividades geométricas, ainda podem ser explicadas por operações puramente figurais, que segundo Duval (2012a) ocorrem até mesmo antes do uso de propriedades matemáticas, sendo identificadas como apreensões: operatória, sequencial, discursiva e perceptiva. A importância da apreensão perceptiva, leva ainda a considerar maneiras de olhar que Duval (2005), citado por Moretti (2013), caracterizou como olhares: botânico, agrimensor, construtor e inventor.

O detalhamento sobre essas apreensões e olhares não serão realizadas nesse momento, mas é importante ressaltar que nos anos iniciais do EF se faz necessário entender “[...] como fazer a passagem desse olhar que reconhece e diferencia formas, para a identificação dessas formas” (Moretti, 2013, p. 290). É um trabalho que poderá levar em consideração os elementos que Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) ressalta como necessários para o trabalho com o sistema semiótico figural e que visam contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Trata-se de valorizar as operações cognitivas que se apoiam na percepção visual e na desconstrução dimensional, que possibilitam reconhecer as diversas unidades figurais que constituem as formas em dimensões superiores. Também de realizar transformações figurais que permitam a resolução de problemas variados, as quais podem ser propiciadas em práticas pedagógicas que conduzam a esse tipo de atividade.

As proposições de Raymond Duval foram contempladas em nossa tese por ser uma teoria que apresenta uma epistemologia dos conhecimentos matemáticos que estamos de acordo. Também por sua preocupação com o desenvolvimento de atividades cognitivas globais pelos estudantes, pela apresentação de encaminhamentos metodológicos para que tais propostas possam se efetivar e por suas considerações sobre possibilidades de avaliação da aprendizagem, que requerem que se torne explícito os conhecimentos, por meio dos registros de representação. São elementos que entendemos que poderiam ser articulados aos demais subsídios teóricos adotados na pesquisa e que são importantes de serem considerados no processo de aprendizagem da docência para o ensino da geometria.

No próximo tópico passamos apresentar recortes dos procedimentos metodológicos adotados e das análises realizadas no decorrer da pesquisa, como o aporte dos referenciais teóricos.

DELINEAMENTO DA PESQUISA E ANÁLISES DOS CONHECIMENTOS E SABERES DOCENTES SOBRE GEOMETRIA

A pesquisa para a tese, de natureza qualitativa e abordagem interpretativa (Moreira & Caleffe, 2008), ocorreu com base em dados empíricos obtidos em três etapas, que envolveram 25 participantes ao todo.

Inicialmente foram realizadas entrevistas com 22 professoras que atuam com o ensino da matemática nos anos iniciais do EF. Em seguida foram feitas observações durante um ciclo de oficinas pedagógicas sobre geometria, planejadas especificamente para o trabalho com as entrevistadas, em que 9 professoras participaram, das quais três não haviam participado da primeira etapa da pesquisa. Por fim, foi realizado um grupo focal com 7 professoras que haviam participado das oficinas pedagógicas.

A coleta de dados iniciou-se após a autorização da Secretaria Municipal de Educação e a aprovação da pesquisa pelo Comitê de Ética e Pesquisa (CEP), com o Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) sob o número 70854417.1.0000.5694, sendo aprovada em julho de 2017. Todas as participantes foram informadas sobre os propósitos da investigação e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, em que autorizam a utilização dos dados para a realização da pesquisa.

As 25 professoras participantes são do sexo feminino, com faixa etária predominante entre 30 e 40 anos, sendo que a maioria possui formação em Pedagogia e outra formação. No grupo também prevalece professoras que atuam a menos de 10 anos na Educação Básica. As três escolas (A, B e C), nas quais as professoras que participaram das entrevistas trabalham, são públicas e municipais de uma cidade do estado do Paraná e pertencem a um dos bairros da cidade, que fica entre 5 e 6 quilômetros de distância do centro.

Não estabelecemos contato com as escolas em que as 3 professoras que participaram apenas das oficinas pedagógicas e do grupo focal atuam. O nome da cidade bem como das escolas e das professoras participantes da pesquisa não serão informados, para preservar suas identidades. A forma de referência às professoras será por meio de uma letra e um número, como P1, P2, ..., P25.

Os dados empíricos obtidos no decorrer das entrevistas e do grupo focal foram transcritos e organizados com o auxílio do software NVivo e analisados com base na metodologia de Análise Textual Discursiva - ATD (Moraes & Galliazzi, 2016). O delineamento da pesquisa também ocorreu de forma articulada aos princípios do pensamento complexo na perspectiva de Morin (2010). Os instrumentos utilizados em cada etapa da pesquisa foram elaborados com base nos objetivos gerais e específicos.

Para proceder com as análises, só foi possível recuperar a relação entre os dados e os objetivos da pesquisa, após a desmontagem do texto e os agrupamentos das unidades elementares, que são dois dos processos da ATD. Ou seja, após a organização e categorização dos dados obtidos com as entrevistas e com o grupo focal, foi possível relacioná-los com os objetivos da pesquisa para prosseguir com as análises. Os dados obtidos com as observações no decorrer das oficinas pedagógicas não foram submetidos à organização sistemática com o auxílio do Nvivo, por isso essas informações foram apenas recuperadas no decorrer das demais análises.

Nesse texto iremos apresentar considerações sobre os dados que se relacionam a um dos objetivos específicos da pesquisa. Há dois temas inerentes a esse objetivo em nossa tese, mas vamos recuperar apenas o que diz respeito ao tema A, que aborda os conhecimentos e saberes dos professores sobre a Geometria, conforme pode-se observar no Quadro 1.

Quadro 1 – Articulação entre os dados empíricos e um dos objetivos da pesquisa

Objetivos da pesquisa	Temas	Categorias levantadas a partir das entrevistas	Categorias levantadas a partir do grupo focal
Objetivo 1: Explicitar os saberes e conhecimentos que os professores mobilizam para ensinar geometria	Conhecimentos e saberes sobre a geometria	A1 - Conhecimentos e saberes docentes sobre geometria.	A. Apontamentos sobre a matemática ou a geometria.
		A2 - Papel atribuído à geometria na formação.	
		A3 - Apontamentos sobre a geometria.	

Fonte: Adaptado de Dionizio (2019, p. 158).

Os dados que possibilitaram e elaboração das categorias A1, A2 e A3 no decorrer das análises das entrevistas, indicadas no Quadro 1, foram organizados em três tabelas distintas para o detalhamento das subcategorias que deram origem a elas, mas apenas a tabela com os dados de A1 será apresentada na sequência. Antes de apresentá-la, é preciso observar que as respostas de algumas professoras podem ter sido incluídas em mais de uma subcategoria (unidades elementares da ATD), devido a desmontagem dos textos. Assim, a coluna denominada “fontes”, que corresponde a identificação e ao número de professoras respondentes em cada subcategoria, nem sempre irá corresponder ao número total relacionado à categoria A1 de nível superior. Também por esse motivo, é possível que haja mais de uma referência na resposta de cada professora, por ela ter sido subdividida em excertos menores. A coluna “referências” corresponde ao número de unidades de análise que se relacionam com as subcategorias em questão.

A Tabela 2, apresenta as unidades elementares identificadas nas respostas das professoras no decorrer das entrevistas, correspondentes a categoria A1 “conhecimentos e saberes docentes sobre geometria”.

Tabela 2 – Conhecimentos e saberes docentes sobre geometria

Categoria e subcategorias de A1 - entrevistas	Fontes	Referências
A1 - Conhecimentos e saberes docentes sobre geometria	**21**	**29**
1. Expressa equívocos ao falar sobre conhecimentos geométricos.	**1** → P5	1
1. Geometria como estudo do espaço.	**3** → P9, P18, P22	3
1. Geometria é entendida como estudo de formas geométricas.	**10** → P6, P7, P8, P10, P11, P12, P13, P15, P16, P21	10
1. Geometria é entendida como estudo do espaço e de figuras planas e espaciais.	**6** → P3, P6, P14, P17, P19, P20	6
1. Geometria é entendida como localização espacial.	**3** → P1, P3, P20	3
1. Geometria é entendida como medida.	**3** → P1, P2 (2 ref.), P3	4
2. Geometria é entendida como medida.	**1** → P1	1
3. Geometria é entendida como medida.	**1** → P2	1

Fonte: Dionizio (2019, p. 163).

As subcategorias (primeira coluna da tabela) foram criadas no decorrer das análises das respostas das professoras. O número que vem antes das subcategorias corresponde as questões que estavam sendo feitas durante as entrevistas. Assim, foram elencadas como pertencentes a categoria A1, algumas respostas feitas no decorrer das seguintes questões: 1) O que é geometria para você?; 2) O que é necessário para que uma criança possa aprender geometria?; 3) Que tipo de atividades costuma realizar para trabalhar com o conteúdo de geometria? Que aspectos da geometria você tem priorizado em sua prática?

A maior parte das participantes, sendo 10 das 21 respondentes, apresentaram respostas que se articulam à subcategoria “1. Geometria é entendida como estudo de formas geométricas”. Nessa categoria as professoras mencionaram que a geometria envolve figuras planas, sólidos geométricos e suas propriedades. Pode-se observar na sequência, algumas respostas:

> ***P6*** *- Formas, eu penso relacionado a formas geométricas, sólidos, essas questões, mais relacionado a isso... que considero geometria.*
> ***P7*** *- É tudo o que envolve as questões de formas, a primeira coisa que vem na cabeça é isso, só que é mais amplo.*
> ***P8*** *- Estudo das formas geométricas, lados, vértices, essas [coisas]. É o básico, né? A gente sabe o básico.*
> ***P10*** *- Para mim, é tudo que envolve formas, sólidos e as planificações.*
> ***P11*** *- Geometria, para mim, são as figuras planas, sólidos geométricos, vértices, é isso.*
> ***P12*** *- Para que a gente possa trabalhar com as crianças, elas têm que conhecer a geometria mais simples, que são as formas geométricas. Elas têm que compreender a geometria, conhecendo as formas geométricas, elas vão começar a compreender que nós podemos ter uma visão além, porque, às vezes, as crianças... Precisamos trabalhar as formas geométricas. Quadrado?! mas onde está o quadrado? É só no desenho, não é só no desenho.*
> ***P13*** *- Acho que geometria é a parte que..., para eles poderem entender o que são as figuras, até as tridimensionais, por exemplo, como são e de que modo são. Mas envolve muita coisa nisso tudo.*
> ***P21*** *- Uma parte da matemática que traz as questões de reta, dos sólidos, que é o que mais se aproxima da gente, para trabalhar com eles, itinerário, arestas vértices, essas coisas.*

Ao analisarmos tais respostas inferimos que o conhecimento do conteúdo a ser ensinado (Shulman, 1986, 2001) está atrelado ao entendimento de que a geometria compreende os estudos das figuras geométricas bi e tridimensionais, suas propriedades e relações. Constatamos que nas respostas de P7, P12, P13 e P21, há alguns indicativos de que parece haver algo a mais, porém não encontraram palavras para expressar o que seria.

Ressaltamos que os elementos que as professoras citam, realmente fazem parte do que pode ser entendido como conhecimento geométrico. Porém, faltou em suas respostas considerar que geometria envolve ainda a localização, movimentação, visualização e representação espacial, as simetrias e o que mais tem nos instigado, que é o desenvolvimento do pensamento geométrico. Com base em Broitman e Itzcovich (2006) e Van de Walle (2009), evidenciamos que os conhecimentos geométricos podem ser organizados a partir de dois grandes objetivos, com referenciais diferentes e que podem ser organizados em duas dimensões fundamentais:

> 1) os conteúdos de ensino no sentido tradicional, em que se contemplam partes dos conhecimentos geométricos produzidos historicamente; 2) o desenvolvimento de um modo próprio de pensar e de raciocinar sobre o espaço e sobre as formas geométricas. (Dionizio, 2019, p. 165).

Dentre essas dimensões, a primeira costuma ser contemplada nos currículos escolares, já a segunda tem sido objeto de estudo em pesquisas relacionadas ao tema, desde a década de 1950, mas como podemos observar nas respostas das professoras, não se apresenta como parte de seus conhecimentos sobre geometria. Essas duas dimensões para o trabalho com a geometria, tem relação com as faces da atividade matemática que Duval (2011, 2013a, 2015) apresenta em suas obras. A primeira dimensão relacionada aos conteúdos de ensino, caracteriza-se pelo que o autor denomina de *face exposta* e a segunda, pela *face oculta* por abordar o desenvolvimento do modo de pensar geométrico. Porém, não foi possível constatar no decorrer da pesquisa, conhecimentos docentes que remetam ao desenvolvimento modos de pensar que a geometria possibilita.

Para contemplar em sala de aula as duas dimensões do conhecimento geométrico, é preciso que os professores tenham domínio sobre o que Shulman (1986) aponta como conhecimento do conteúdo, que envolve a compreensão sobre como esses conhecimentos são produzidos, como são estruturados, o que é considerado válido ou não, etc. Esse conhecimento "possibilita ao professor escolher a melhor forma de organizar os conteúdos de ensino, decidindo sobre as possibilidades de articulação entre as unidades temáticas da própria disciplina ou conhecimentos mais amplos." (Dionizio, 2019, p. 25). Entretanto, percebemos no decorrer das oficinas pedagógicas, que mesmo os conhecimentos sobre as figuras geométricas bi e tridimensionais, mais presentes na fala das professoras, precisavam ser aprofundados no processo formativo.

Em uma das oficinas desenvolvemos atividades voltadas ao estudo das formas bi e tridimensionais e de suas propriedades, de simetrias, de conceitos como ponto, segmento de reta e plano e cálculo de área e perímetro. Na atividade relacionada à classificação de figuras planas, constatamos que não era familiar para as participantes afirmações como de que o quadrado é um tipo especial de retângulo, que o cubo é um tipo especial de prisma, etc. O uso instrumentos de desenho geométricos para o desenho de figuras planas também foi novidade para elas, bem como a forma como exploramos o Tangram, formando novas figuras geométricas a partir das peças que o compõem, entre outras atividades. Por isso entendemos que é preciso propiciar atividades formativas que garantam a aprendizagem docente, de forma que tenham domínio sobre conteúdos e procedimentos metodológicos que podem ser realizados para o ensino da geometria, caso contrário a aprendizagem das crianças ficará comprometida.

Entendemos que a efetiva compreensão sobre os conhecimentos que compõem a dimensão 1, ocorre quando é desenvolvido um trabalho pedagógico que contemple a dimensão 2. E isso pode ser considerado tanto na formação docente quanto dos estudantes da Educação Básica. Ao consideramos as proposições de Duval (2004, 2011, 2012a) sobre as particularidades do sistema semiótico figural, estamos diante de encaminhamentos que se voltam para o desenvolvimento de formas de pensar que se constituem em operações cognitivas apoiadas na percepção visual, na desconstrução dimensional e em outras atividades cognitivas que contribuem para o avanço dos conhecimentos em geometria. Embora as professoras possam se pautar em outras teorias, não se pode deixar de considerar a importância desse conhecimento sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico fazer parte de seu repertório de saberes docentes.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

Não temos a intenção de generalizar os achados da tese a respeito dos conhecimentos e saberes docentes sobre geometria, mas eles nos trazem um alerta importante. Se as professoras participantes dessa pesquisa não mencionam a dimensão relativa ao desenvolvimento do pensamento geométrico, como algo que caracteriza a geometria, é porque no decorrer de seu processo de aprendizagem da docência, esse elemento pode não ter sido contemplado. Isso significa que ele não foi abordado de maneira consistente em nenhum momento da vida acadêmica desses professores, o que inclui os cursos de formação para o magistério e mesmo momentos anteriores, de acordo com as fontes para a constituição dos saberes docentes elencadas por Tardif (2014). Esses fatos podem influenciar em suas práticas pedagógicas e limitar as possibilidades de contribuição desse conhecimento para o desenvolvimento da autonomia intelectual dos estudantes no período da infância.

Embora tenha sido apresentado apenas um pequeno recorte das análises sobre os conhecimentos e saberes docentes para o ensino da geometria, é possível dizer que as constatações que foram aqui apresentadas têm relação com as demais categorias de análise elencadas na tese. Elas refletem na forma como os professores realizam suas práticas pedagógicas junto as crianças e se relacionam diretamente com os processos formativos vivenciados. Entretanto, a participação em cursos que abordem o trabalho com a geometria não garante a aprendizagem da docência. Constatamos em nossa pesquisa que um mesmo processo formativo vivenciado por diferentes professoras foi considerado importante para algumas e não para outras, pois dependerá ainda do que Vaillant e Marcelo (2012) apontam como a qualidade das experiências formativas para cada indivíduo.

Diante dos aspectos que apresentamos nesse texto e das análises dos demais dados que obtivemos em nossa pesquisa, constatamos que a aprendizagem da docência para o ensino da geometria, quando ocorre, é por meio de formações específicas voltadas a esse propósito ou por meio de estudos individuais, que considerem as duas dimensões do conhecimento, a dos conteúdos e das formas de pensar. Por isso é importante a proposição de processos formativos que atendam a essa demanda e com encaminhamentos condizentes, sejam nos cursos de formação inicial ou continuada.

REFERÊNCIAS

Broitman, C., Itzcovich, H. (2006). Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: problemas de seu ensino, problema para seu ensino. In: PANIZZA, M. (org.). *Ensinar Matemática na Educação Infantil e séries iniciais: análise e propostas* (pp. 169-188). Porto Alegre, RS: Artmed.

Dionizio, Fátima Aparecida Queiroz. (2019). *Aprendizagem da docência para o ensino de geometria na infância no contexto da formação e da prática pedagógica.* (Tese de Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil.

Duval, Raymond. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, Raymond. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, Raymond. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.* (M. A. Dias, Trad.). São Paulo: PROEM.

Duval, Raymond. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática (7)*1, 118-138.

Duval, Raymond. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática (7)*2, 266-297.

Duval, Raymond. (2013a). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. [Entrevista cedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende]. *Revista Paranaense de Educação Matemática (2),* 10-34.

Duval, Raymond. (2013b). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. (pp. 11-33). In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* Campinas: Papirus.

Duval, Raymond. (2015). Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática (10)*1, 1-23.

Moraes, Roque; Galiazzi, Maria do Carmo. (2016). *Análise textual discursiva.* (3a ed.). Ijuí: UNIJUÍ.

Moreira, Herivelton; Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador.* (2a ed.). Rio de Janeiro: Lamparina.

Moretti, Méricles Thadeu. (2013). Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiæ (15)*2, 289-303.

Morin, Edgar. (2010). *Ciência com consciência.* (14ª ed.). (M. D. Alexandre e M. A. S. Dória, Trad.). Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Passos, Cármen Lúcia Brancaglion; Nacarato, Adair Mendes. (2014). O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. *EMP -Educação Matemática Pesquisa (16)*4, 1147-1168.

Shulman, Lee S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher (15)*2, 4-14.

Shulman, Lee S. (2001). Conocimiento y enseñanza (pp. 163-196). In: Estudios públicos, 83. *Centro de Estúdios Públicos.* (A. Ide, Trad.). Chile: Santiago.

Tardif, Maurice. (2014). *Saberes docentes e formação profissional*. (17a ed.). Petrópolis: Vozes.

Vaillant, Denise; Marcelo, Carlos. (2012). *Ensinando a ensinar: as quatro etapas de uma aprendizagem.* Curitiba: UTFPR.

Van de Walle, John. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.* (6a ed.). Porto Alegre: Artmed.

CAPÍTULO XIII

UMA EXPERIÊNCIA COM USO DO AMBIENTE DINÂMICO GEOGEBRA E OS ASPECTOS ESPECÍFICOS DA APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA SEGUNDO RAYMOND DUVAL: OLHARES, APREENSÕES E DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL

Franciele Isabelita Lopes Novak
Celia Finck Brandt

Esse trabalho é parte de uma dissertação de mestrado que tratou da aprendizagem de conteúdos básicos de geometria com uso do ambiente dinâmico *GeoGebra*. Foi considerado como recurso didático a ser analisado, visto a diversidade de possibilidades oferecidas por esse ambiente, pela facilidade em manipular e explorar figuras geométricas e as ações possíveis envolvendo a construção de figuras em um curto espaço de tempo.

Para essa caminhada, optou-se por um aporte teórico que fornecesse amparo para análise de processos cognitivos envolvendo essa área da matemática, considerando pertinente os estudos de Raymond Duval. Esse teórico trata de maneira especial da geometria, retratando a presença de diferentes tipos de atividades cognitivas, denominadas de apreensões (perceptiva, operatória, discursiva e sequencial,), olhares (botânico, agrimensor, construtor e inventor) e também de desconstrução dimensional.

Até o ano de 2016, Novak (2018) destaca um aumento em pesquisas (teses, dissertações e artigos) que relacionaram algum tipo de ambiente dinâmico ao conteúdo de Geometria. Foram encontrados seis trabalhos entre os anos de 2000 e 2008, e quarenta e três trabalhos entre os anos de 2008 e

2016. Sendo que desses quarenta e três trabalhos, apenas três trabalharam com a educação básica e, em especial, Assumpção (2015) articulou a Teoria dos Registros de Representações Semióticas a um ambiente dinâmico com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Foi considerado relevante, que nosso estudo contribuísse com uma prática para o ensino de geometria, a fim de ressaltar a importância da presença desse tema nas aulas de matemática da Educação Básica, nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tanto, escolhemos conteúdos básicos envolvendo polígonos e poliedros, com uso do ambiente dinâmico *GeoGebra*. A partir disso, os pressupostos teóricos de Raymond Duval nos foram fundamentais para o entendimento de quais aspectos são necessários considerar em atividades de ensino e aprendizagem da geometria.

Desse modo, nossa inquietação se voltou aos tipos de atividades cognitivas específicas da geometria segundo Raymond Duval que foram identificadas a partir da experiência com o uso do ambiente dinâmico *GeoGebra* com a participação de 30 estudantes de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná.

Destaca-se nesse trabalho os apontamentos mais relevantes dessa experiência em relação ao uso do GeoGebra para o ensino da Geometria, sendo eles, o estímulo da visualização de características envolvendo as figuras geométricas e os desafios encontrados, bem como perspectivas futuras.

CONSIDERAÇÕES DE RAYMOND DUVAL A RESPEITO DA GEOMETRIA E DOS AMBIENTES DINÂMICOS

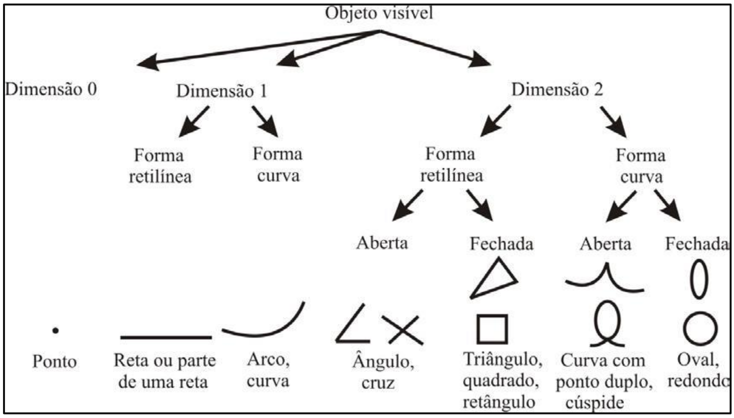
Os pressupostos teóricos de Duval (2004, p. 155-183, 2005, 2011, 2012a, 2012b) mostram que a aprendizagem da geometria depende da coordenação simultânea de tratamento de dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo, em língua natural e o registro figural.

O aprender em geometria necessita, por parte do aluno, da coordenação de um enunciado que guiará os dados do problema e quais dados matemáticos estão associados à determinada figura. Além de interpretar o enunciado, certamente, há a presença da figura geométrica, seja ela desenhada ou imaginada.

De posse desses dois tipos de registros é que o aluno decide como resolverá o problema, quais conceitos matemáticos fará uso, se precisará modificar a figura ou considerar apenas parte dela. Trata-se de algo singular e exigente sob o ponto de vista cognitivo, porque o aluno estará mobilizando em geometria “o gesto, a linguagem e o olhar” (Duval, 2005, p. 06, tradução nossa).

Ao mobilizar o olhar, para Duval (2011) há uma maneira matemática de ver, que é contrária a um reconhecimento automático de uma figura. Esse olhar precisa reconhecer as unidades figurais elementares que são as características qualitativas dos formatos e os valores dimensionais a eles relacionados. Por meio da figura 1 é exemplificada uma classificação das unidades figurais elementares:

Figura 1 - Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Duval (2004, p. 159).

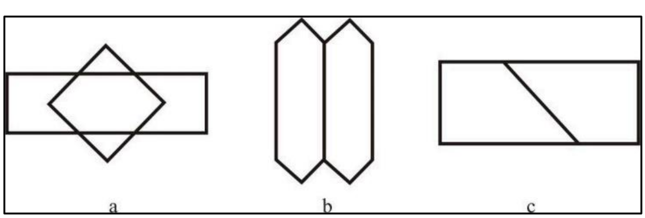
Ao observar na figura 1 anterior, encontra-se uma descrição do triângulo, quadrado e retângulo. Esses objetos visíveis, são de dimensão 2 com formas retilíneas e fechadas. Os valores dimensionais, por exemplo do retângulo incluem: a dimensão 2 (2D), a dimensão 1 (1D) referente aos segmentos de retas e mais além, pode-se dizer que os quatro pontos de intercessão dos segmentos de reta que formam o retângulo possuem a dimensão 0 (0D). Duval (2004, p. 159, tradução nossa, grifos do autor) explica que "**uma figura geométrica é sempre uma configuração de ao menos duas unidades figurais elementares**.". Esta atividade cognitiva, que consiste em ver essas unidades figurais, é denominada de desconstrução dimensional.

Desse modo, a visualização de uma figura geométrica deve contemplar, segundo Duval (2011, p. 87, grifos do autor), a "[...] desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel. ”. Esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável e pode ser fonte de dificuldades para os alunos, no entanto, trata-se de um processo essencial para o entendimento de propriedades geométricas. Por exemplo, quando se pensa em um triângulo qualquer que é formado pela união de três pontos não colineares pertencentes a um mesmo plano, por meio de segmentos de reta é requisitada uma desconstrução dimensional de 2D➔0D➔1D.

Além da desconstrução dimensional, Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) estabelece que outras atividades cognitivas são requisitadas na aprendizagem da Geometria, sendo por ele chamadas de apreensões. As apreensões são de quatro tipos: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão sequencial.

O primeiro nível de apreensão é a perceptiva que permite o “reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada”. (Duval, 2004, p. 162, tradução nossa). É o modo como se percebe e entende uma figura num primeiro momento. As Figuras 2a, 2b e 2c ilustram diferentes maneiras de interpretação visual de uma figura independentemente de um enunciado:

Figura 2 - Exemplos de diferentes organizações perceptivas das figuras



Fonte: (Duval, 2012a, p. 121).

De acordo com Duval (2012a), por meio da apreensão perceptiva, a Figura 2a de maneira imediata é identificada com a superposição entre um retângulo e um quadrado, a Figura 2b mostra duas formas iguais com um lado em comum, enquanto a Figura 2c mostra um retângulo dividido em duas partes.

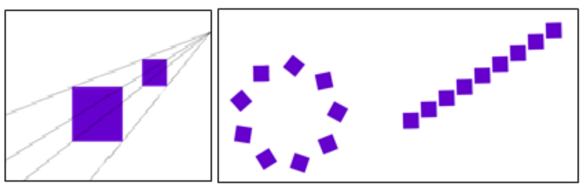
Retomando o exemplo da Figura 2a, pode ser feita outra decomposição, em que a figura poderia ter sido formada por, ao invés de um quadrado e um retângulo, dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono justapostos. Esse ato de pensar em diferentes modos de organizar as figuras geométricas, como o exemplo dado, mobiliza uma outra apreensão, chamada de apreensão operatória.

A apreensão operatória é mobilizada de modo controlado e está "centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações." (Duval, 2012a, p. 125). Essa apreensão faz parte do processo heurístico de uma figura, "de descoberta da resolução do problema." (Moretti & Brandt, 2015, p. 604). Na apreensão operatória, há três tipos de modificações em uma figura geométrica, sendo elas: a modificação mereológica, a modificação ótica e a modificação posicional.

A modificação mereológica, Duval (2004) explica que é uma decomposição da figura de partida em outras subfiguras de dimensão 2; essas subfiguras podem ser homogêneas, de mesmo formato, ou heterogêneas, em que as subfiguras podem possuir formatos diferentes. Do exemplo dado anteriormente, a Figura 2a teve uma modificação mereológica heterogênea pois poderia ser formada por diferentes polígonos.

A modificação ótica segundo Duval (2012b) ocorre pela variação de tamanho de uma mesma figura, conservando a forma e orientação no plano fronto-paralelo. É uma modificação que "consiste em ver em profundidade". (Duval, 2004, p. 166). Já a modificação posicional, é aquela em que na figura são preservados o tamanho e a forma, porém, ocorre a variação de orientação: rotação ou translação (Duval, 2012b). Nas Figura 3A e 3B a seguir, ilustramos essas duas modificações:

Figura 3 - Exemplos de modificações ótica e posicional



A B

Fonte: As autoras.

A apreensão operatória, composta pelas três classes de modificações apresentadas acima, permite que as figuras geométricas cumpram a função de suporte intuitivo, favorecendo a interpretação das atividades de geometria. Dependendo do número, heterogeneidade e das posições das unidades figurais que compõem a figura ocorrerá um custo de tempo para a efetivação desta apreensão (Duval, 2004). Mas, é por meio desta apreensão e da articulação de um discurso de inferências com a utilização de uma rede de conceitos e teoremas é que ocorrerá o êxito na exploração de uma figura.

Por fim a outra apreensão, denominada de sequencial, segundo Duval (2012a, p. 120), "é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.”. É uma apreensão exigida para o seguimento correto de um passo-a-passo de uma construção geométrica.

Na resolução de um problema de Geometria é possível que as quatro apreensões – perceptiva, operatória, sequencial e discursiva – sejam requisitadas, sendo que algumas dessas apreensões serão mais necessárias que outras.

Além das apreensões, Duval (2005) destaca tipos de olhares mobilizados em atividades de geometria. Sendo eles: o botanista, o agrimensor, o construtor e o inventor. Os dois primeiros – botanista e agrimensor – são olhares icônicos, em que as formas que se observam podem se relacionar com objetos da realidade. Segundo Duval (2005, p. 18, tradução nossa), “a visualização icônica é totalmente independente de qualquer enunciação explícita ou implícita. Em outras palavras, não é de modo algum subordinado ao conhecimento de propriedades geométricas”. Uma visualização icônica prioriza, portanto, o reconhecimento e a diferenciação de formas.

No olhar botanista está presente o reconhecimento tanto dos contornos das formas focalizando os aspectos qualitativos quanto da nomeação dada para a figura a partir de suas características perceptivas. As atividades que privilegiam esse olhar consistem na observação de semelhanças e diferenças e não relacionam as figuras com propriedades. No entanto, este olhar é o que prepara o aluno para os demais.

O olhar agrimensor tem a finalidade de trabalhar com medidas, trabalhando com escalas de grandezas. Por exemplo, um arquiteto, ao efetuar as medidas de um cômodo em uma casa, precisa passá-las para o papel.

Os outros dois olhares: construtor e inventor são caracterizados por Duval (2005) como não-icônicos, por se relacionarem diretamente a objetos matemáticos. O olhar não icônico permite a identificação de variância ou invariância de certas características presentes em uma determinada figura. Essas variações ou invariâncias são resultado de propriedades implícitas que regem as figuras geométricas.

No olhar construtor, a partir do uso de instrumentos, como a régua não graduada, o compasso ou algum programa computacional, é feita a tomada de consciência sobre uma propriedade geométrica que ocorre não apenas pela característica perceptiva. Por exemplo, para construir um polígono regular é preciso compreender que as medidas de todos os lados são iguais, bem como as medidas dos ângulos.

Por fim, o olhar inventor, que percebe a necessidade de reconfiguração da figura de partida ou o acréscimo de traços, a fim de modificá-la para descobrir um procedimento de resolução de determinado problema proposto. Por exemplo, como dividir um paralelogramo para obter dois triângulos?

Assim como as apreensões, esses olhares também estão presentes em atividades de Geometria e são em maior ou menor intensidade privilegiados, dependendo da atividade proposta. A intenção desse trabalho foi de propor atividades no ambiente dinâmico *GeoGebra,* para isso, algumas considerações sobre esse tipo de recurso foram analisadas.

De acordo com Duval (2013, p. 31) a importância dos ambientes informatizados se dá de tal modo que "se tornaram os ambientes que comandam tão poderosamente todos os setores da atividade humana que se adaptar à realidade e ao mundo, é hoje se adaptar às telas via utilização de softwares.". Para Duval (2011), o computador não produz um novo tipo de registro de representação semiótica, pois as imagens que exibe são as mesmas que podem ser produzidas no papel. O autor complementa ainda que, por exemplo, para a interpretação das figuras geométricas, a necessidade de modificação mereológica ou desconstrução dimensional permanece inalterada.

No entanto, o computador é visto como uma ferramenta com potencial de tratamento ilimitado e imediato, com a possibilidade de que um registro se torne manipulável, arrastando-o, rodando-o ou mesmo estendendo-o a partir de um ponto. Essa característica favorece a "exploração heurística de problemas matemáticos." (Duval, 2011, p. 137).

Duval (2011) pontua que as atividades cognitivas necessárias de acordo com cada software estão relacionadas com o menu de comandos. O menu de comandos corresponde ao modo de controle que é feito pelo indivíduo sobre o software. Cada item do menu de comandos exigirá ações e atividades cognitivas diferenciadas. Duval (2015) destaca que, para uma autonomia intelectual em Matemática, é necessário considerar as variáveis pertinentes, articular a representação do monitor com os enunciados, propriedades e teoremas. Considera que, com o uso do computador, as atividades matemáticas se tornam mais acessíveis e tornam as representações semióticas automáticas, o que caracteriza o recurso como inovador e interessante.

ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA: ATIVIDADES PROPOSTAS NO GEOGEBRA E DESAFIOS ENCONTRADOS

Esse estudo de caso qualitativo, contou com a participação de uma turma de 30 alunos do oitavo ano de uma escola pública do estado do Paraná.

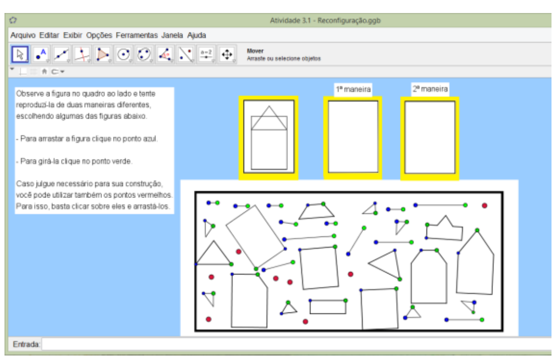
Devido ao laboratório de informática conter 09 computadores disponíveis, a turma foi dividida em dois grupos, que trabalharam em duplas em cada computador. Esses grupos foram denominados, respectivamente pelas letras A e B seguida de números para diferenciar as duplas.

A metodologia escolhida para análise de dados foi a de Bardin (2016). A fim de respeitar o limite de páginas, nesse trabalho será apresentada a etapa de interpretação e inferência em relação à três das treze atividades aplicadas.

A atividade 3.1, chamada de Reconfiguração, adaptada de Assumpção (2015), mostrava na interface do *GeoGebra* uma figura, a qual precisaria ser reorganizada de duas maneiras diferentes. As figuras geométricas poderiam ser arrastadas pelo clique nos pontos de cor azul ou giradas a partir do clique nos pontos de cor verde.

Conforme a Figura 4 a seguir, a interface dessa atividade é apresentada:

Figura 4 - Interface da atividade 3.1 – Reconfiguração



Fonte: As autoras.

Para cada uma das atividades propostas, um quadro de análise adaptado do trabalho de Scheifer (2017) foi elaborado. Para que as dimensões da página fossem respeitadas, as categorias de análise tiveram suas denominações abreviadas: D. D. Desconstrução Dimensional, P refere-se à apreensão perceptiva, D à apreensão discursiva, O para apreensão operatória e S para a apreensão sequencial. As modificações foram abreviadas, de modo que Mer refere-se à modificação mereológica, Otc modificação ótica e Pos. para modificação posicional. Do mesmo modo os olhares: B para olhar botanista, A para olhar agrimensor, C para olhar construtor e I para olhar inventor.

O Quadro 1 a seguir, apresenta parte da análise da primeira tentativa de reprodução da figura da atividade 3.1, chamada de Reconfiguração:

Quadro 1 - Análise da atividade 3.1

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Enunciado da Atividade</th><th colspan="2" rowspan="3">Maneiras de reprodução das figuras</th><th rowspan="3">Duplas</th><th rowspan="3">D.D.</th><th colspan="6">Apreensões</th><th colspan="4">Olhares</th></tr>
<tr><th rowspan="2">P.</th><th rowspan="2">D.</th><th rowspan="2">S.</th><th colspan="3">O.</th><th rowspan="2">B.</th><th rowspan="2">A.</th><th rowspan="2">C.</th><th rowspan="2">I.</th></tr>
<tr><th>Mer.</th><th>Otc.</th><th>Pos.</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Observe a figura no quadro ao lado e tente reproduzi-la de duas maneiras diferentes, escolhendo algumas das figuras abaixo.
- Para arrastar a figura clique no ponto azul.
- Para girá-la clique no ponto verde.
Você pode utilizar também os pontos vermelhos.
Para isso, basta clicar sobre eles e arrastá-los.</td><td rowspan="4">1ª tentativa</td><td rowspan="2">Sobreposição de duas ou mais figuras</td><td>Correta</td><td>A1, A4, A5, A6, A9, B2, B3, B4 e B7</td><td>X*[1]</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td>A2, A8</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sobreposição e justaposição de duas ou mais figuras</td><td>Correta</td><td>B1, B5</td><td>X*</td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Incorreta</td><td>A7, B6</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fonte: As autoras.

[1] X* Esse símbolo indica que a desconstrução dimensional foi presente nas reproduções das figuras de algumas duplas.

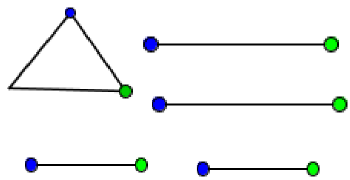
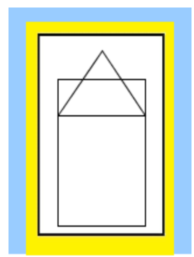
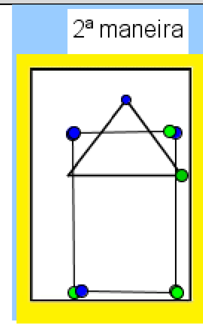
Para reproduzir a figura, foram identificadas sobreposição e sobreposição com justaposição de duas ou mais figuras. Apenas uma dupla fez uso apenas de justaposição de figuras. Foi constatado, a partir dos dados empíricos coletados, que nem todos os sujeitos conseguiram reproduzir a figura de partida da atividade 3.1. Por esse motivo, no Quadro 1 anterior, foi indicado se a reprodução da figura foi realizada acertadamente ou erroneamente.

Por meio dos dados, inferiu-se que a atividade envolveu visualização em um nível de reconhecimento das formas com a apreensão perceptiva e o olhar botanista mais evidenciados. Atividades como essa corroboram com Duval (2011, p. 85, grifos do autor) de que "ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas**,** isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados.". Por meio do olhar botanista, os sujeitos precisaram identificar contornos e características da figura de partida para tentar reproduzi-la de dois modos distintos. Aliada à apreensão perceptiva, a apreensão operatória com modificação posicional e mereológica foi mobilizada pela mudança de posição das formas geométricas, bem como da identificação de subfiguras que compunham a figura de partida.

Cinco duplas mobilizaram a desconstrução dimensional, porém foi possível observar alguns equívocos cometidos. Por exemplo, a dupla B1 utilizou a justaposição de duas formas geométricas e a sobreposição de um segmento de reta e não observou que a figura obtida estava incompleta. As duplas A2, A4, A5 e B3 também fizeram uso de pelo menos um segmento de reta para a obtenção da figura de partida, o que indicou uma desconstrução dimensional de 2D➔ 1D.

No Quadro 2, a seguir, é apresentada a reproduções da figura pela dupla B3, que fez uso da maior quantidade de segmentos de reta.

Quadro 2 – Atividade 3.1 – algumas reproduções da figura

Dupla	Formas geométricas utilizadas	Figura de partida	Figura reproduzida
B3			

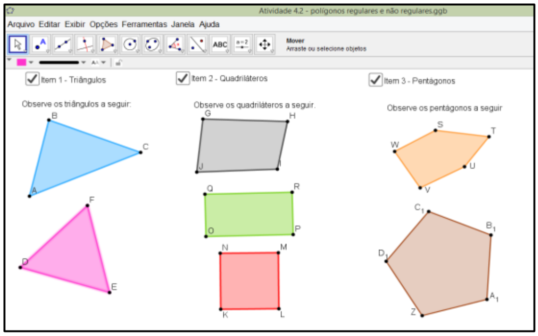
Fonte: As autoras.

A partir dessa verificação quanto ao uso de segmentos de reta para a reprodução da figura de partida, foi possível corroborar com o que Duval (2011) afirma, que a mudança de uma dimensão a outra é laboriosa, pois contraria a percepção imediata, que é a da dimensão superior.

A atividade a seguir, foi chamada de Polígonos Regulares e Não Regulares. Nela foi utilizado material impresso com instruções para o uso de ferramentas de medida de comprimento dos lados e também para a medida dos ângulos internos das figuras. Na interface do GeoGebra três grupos de figuras eram exibidas. Após a movimentação e observação de cada grupo de figuras, os alunos registravam por escrito suas conjecturas.

A figura 5 a seguir, mostra a interface dessa atividade:

Figura 5 - Interface da atividade sobre polígonos regulares e não regulares



Fonte: As autoras.

Para cada tipo de polígono houve três categorias de respostas dessa atividade. A primeira categoria, tanto para o triângulo e o quadrado, quanto para o pentágono, indicava a compreensão de que as medidas dos lados das figuras mudavam quando movimentadas. A dupla A1, por exemplo, foi caracterizada nesse primeiro grupo, pois escreveu *"A[s] medidas dos triângulos mudam toda vez que movemos as figuras. Porque a cada vez que movemos as figuras os lados aumentam ou diminuem mudando assim as medidas."*.

A segunda categoria reuniu respostas que mostravam a compreensão que dentre as figuras, após serem movimentadas, ao menos uma de cada formato mantinha as mesmas medidas para todos os lados. A dupla A5, por exemplo, escreveu sobre os quadriláteros: *"O 1º quadrilátero muda totalmente o tamanho de seus segmentos de reta, após o movimento. O 2º muda o tamanho, mas as linhas posicionadas de frente uma com a outra tem a mesma medida. O 3º é um polígono regular, pois seus lados continuam com a mesma medida."*.

Por fim, a terceira categoria, chamada de *outras,* contemplou respostas incompreensíveis sem a possibilidade de relação com as categorias anteriores e também as respostas em branco.

Dentre as atividades cognitivas observadas, as apreensões sequencial, perceptiva, discursiva e operatória com modificações ótica e posicional foram presentes. Nos arquivos digitais, se observou que a sequência de instruções para obtenção das medidas dos lados foi seguida corretamente, caracterizando a apreensão sequencial. As apreensões perceptiva e discursiva foram requisitadas, pois, pela apreensão perceptiva, o reconhecimento das figuras era imediato e a presença de um discurso no material impresso guiava o olhar sobre as figuras.

A apreensão operatória foi identificada com a modificação ótica. A dupla A8, caracterizada no grupo de respostas, aponta que: *as medidas mudam, mas o formato é o mesmo,* e menciona sobre os quadriláteros que: *"A numeração mudou, mas não houve mudança no formato*". Quando a dupla escreveu a palavra *"numeração",* é possível inferir que se refere às medidas dos lados dos quadriláteros. A dupla A1 conjecturou que as medidas dos triângulos mudavam: "*Porque a cada vez que movemos as figuras os lados aumentam ou diminuem mudando assim as medidas."* Tanto as respostas de A1 quanto de A8 indicaram que a modificação ótica esteve presente. De acordo com Duval (2012b), nesse tipo de modificação a figura é aumentada, diminuída ou deformada. No entanto, é possível inferir que, a modificação posicional também foi presente.

Segundo Duval (2012a, p. 126) na figura em que ocorre a modificação posicional "pode-se deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca". Quando a dupla B5 (grifos nossos) escreveu sobre o quadrado que*"[...] no KLMN ao movimentar um vértice a figura gira e a medida fica igual"*, compreendeu-se que a modificação posicional também esteve presente.

Dentre as questões propostas serão apresentadas as respostas escritas sobre quais polígonos eram regulares e quais características lhes poderiam ser atribuídas. A respeito das características que esses polígonos possuíam, quatro categorias de respostas foram frequentes (todos os lados e ângulos iguais, ângulos iguais, lados iguais e outros). Em relação à segunda categoria, chamada de: *todos os ângulos iguais*, dentre as duplas A1, A6, A9, B4 e B7, três delas conjecturaram, respectivamente, que: *"os polígonos regulares não há alterações nos ângulos", "que o triângulo só chega a 60° o quadrilátero a 90° e o pentágono a 108° mais só soube isso por causa da ferramenta ângulo"* e que "*eles não mudam seus ângulos".* Despertou interesse nas respostas dadas por essas duplas, pois, quando se referiram aos quadriláteros, mencionaram que eram regulares tanto o quadrado quanto o retângulo. Uma das respostas denotou a potencialidade do uso do software GeoGebra, que por meio da ferramenta ângulo, no movimento das figuras, a percepção é aguçada, facilitando conjecturas.

Uma observação interessante é que embora tenham visto as medidas dos lados dos polígonos regulares não se alterarem nem todas as duplas mencionaram que os lados de um polígono regular também possuem a mesma medida, caracterizaram um indicativo de que não houve a desconstrução dimensional de 2D➔1D.

Segundo Duval (2011), a mudança de uma dimensão a outra é contrária ao reconhecimento imediato das formas, porque a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção. Os sujeitos que consideraram somente características dos polígonos regulares, referente aos ângulos iguais, permaneceram na dimensão dois, sem voltar o olhar para os lados dos polígonos que estão na dimensão inferior. Isso levou ao equívoco de mencionarem o retângulo como um polígono regular.

Somente as duplas A5, A7, B5 responderam, respectivamente, que os polígonos regulares possuem *"ângulos do mesmo tamanho, segmentos de reta do mesmo tamanho"*, *"todos tem lados do mesmo tamanho (os lados) e o mesmo tamanho de ângulos*", "*tem as medidas dos lados e dos ângulos iguais*". Ao mencionarem sobre as características observadas nos lados dos polígonos, compreendeu-se que uma desconstrução dimensional de 2D➔1D foi estabelecida, pois dos polígonos (2D) os olhares se voltaram para os lados (1D).

Por fim, a terceira atividade apresentada é a respeito da construção dos poliedros regulares. A partir de instruções no material impresso, as duplas construíram os poliedros regulares, bem como suas planificações.

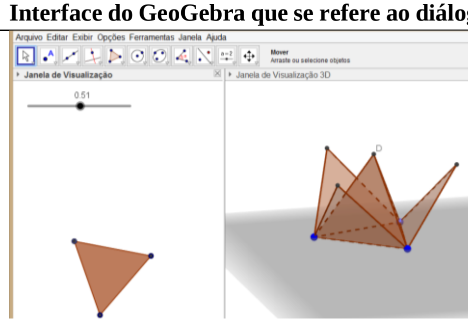
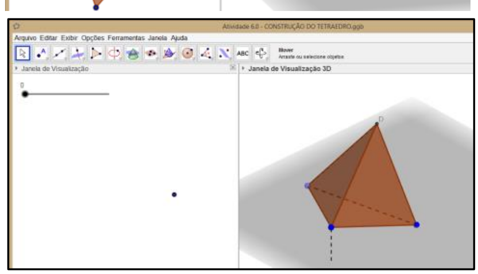
As instruções de construção caracterizaram a apreensão sequencial, enquanto que a designação de elementos dessas instruções, como as palavras: pontos, arestas e vértices compreenderam uma apreensão discursiva, pois os alunos precisavam compreender o significado dessas palavras para conferirem se o que aparecia construído na tela do GeoGebra era condizente com o que se pedia. Todas as duplas obtiveram êxitos ao seguirem os comandos.

Não se pode deixar de destacar que a apreensão perceptiva também foi necessária, pois a cada passo da construção era preciso identificar os formatos que apareciam na tela. Outra apreensão presente foi a apreensão operatória com modificações ótica e posicional. Os alunos arrastavam com o *mouse* os poliedros e também podiam aumentá-los ou diminui-los para conseguirem estabelecer quantas arestas, vértices e faces possuíam. Ao voltarem-se para esses elementos, foi presente a desconstrução dimensional na realização dessa atividade.

Quando apresentada a ferramenta de planificação, foi notório o encantamento dos alunos. Sob um ponto de vista cognitivo, a presença da desconstrução dimensional de 3D➔2D foi estimulada. A partir da construção do poliedro, ao clicar nessa ferramenta era possível, pelo arrastamento do controle deslizante, “montar e desmontar” o poliedro, facilitando a observação de suas faces.

O quadro 3 a seguir ilustra essa situação, juntamente com um diálogo gravado em áudio sobre o momento dessa atividade:

Quadro 3 - Experiência com a ferramenta de planificação no GeoGebra

Trecho do diálogo da pesquisadora	**Interface do GeoGebra que se refere ao diálogo**
Pesquisadora - Aí quando vocês forem contar o número de faces, tem aqui uma ferramenta chamada planificação que é essa última aqui. Todo mundo consegue ver? Alunos – sim. Pesquisadora - Vocês vão clicar sobre ela e vão clicar sobre o tetraedro. O que que aconteceu? Um aluno de B4 – Meu Deus. Umas coisas. Pesquisadora - Apareceu a planificação do tetraedro e apareceu essa outra ferramenta que se chama controle deslizante. O que vocês vão fazer com ela, vão vir aqui e vão movimentar esse controle deslizante. Um aluno de B5 - nooossa que legal. Vários alunos - oohhh Um dos alunos de B3 - nossa que massa	

Fonte: Adaptado de Novak (2018, p. 115-117).

Como é possível observar pelo Quadro 3, na interface do GeoGebra, na janela de visualização 2D, é exibido o formato da face que está sobre o plano na cor cinza na janela 3D. Situação essa que favorece a desconstrução dimensional e pode ser explorada de diferentes maneiras pelo professor. Na segunda imagem ao movimentar o poliedro, o triângulo da primeira janela desaparece. Ao perguntar aos alunos do grupo 2 sobre o ocorrido, um dos integrantes da dupla B5 explica: *"quando você levantou o poliedro ele não está mais na base, só aparece [sic] aquela pontinha."* A fala do aluno indicou a observação coerente sobre o GeoGebra de que exibe, na janela de visualização 2D, somente as faces que estão sobre o plano na região em cinza da janela de visualização 3D.

Como o poliedro foi levantado, somente um dos vértices ficou sobre o plano de cor cinza e, por esse motivo, na janela de visualização 2D, somente esse vértice foi exibido. Mesmo tendo os primeiros contatos com o *software*, falas como a desse aluno evidenciam as potencialidades de seu uso para o estabelecimento de conjecturas. É possível verificar que mesmo tendo os primeiros contatos com o *software*, as falas dos alunos evidenciaram entusiasmo com o uso do ambiente dinâmico.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

O GeoGebra contribuiu para que a apreensão perceptiva fosse estimulada, pois as figuras geométricas por meio do movimento assumiam posições não canônicas. A apreensão operatória com as modificações, posicional e ótica acontecem simultaneamente ao arrastar, girar, aumentar ou diminuir as figuras geométricas presentes na interface do GeoGebra. Ao articularem o que viam na interface do GeoGebra com os enunciados das atividades a apreensão discursiva também foi verificada.

Pelo uso do GeoGebra, o seguimento de instruções de construção de figuras geométricas é resgatado de maneira singular. É necessário tanto o conhecimento de termos matemáticos como reta, ponto, polígono, quanto o conhecimento das ferramentas que permitem determinada construção.

O GeoGebra é um instrumento de construção facilitador por possuir um painel de comandos intuitivo, com ícones representados, em grande maioria, pelo desenho das construções possíveis seguidas de uma pequena descrição do que será obtido a partir da seleção de determinado ícone. Foi verificado que, para as atividades em que os alunos precisaram seguir instruções de construção no GeoGebra, não houve dificuldades, caracterizando a apreensão sequencial presente.

O que precisa ser levado em conta é que essas facilidades de construção podem omitir compreensões necessárias a respeito das figuras geométricas. Por exemplo, uma questão que pode ser colocada aos alunos é sobre como obter um quadrado considerando suas principais características (todos os ângulos retos e todos os lados iguais) com ferramentas diferentes daquela que constrói polígonos regulares no GeoGebra.

Dentre os quatro diferentes tipos de olhares descritos por Duval (2005), a presença dos olhares icônicos foi mais evidente. A partir de observações qualitativas nas figuras, característica essencial do olhar botanista, e, em especial, pela possibilidade de medir tanto o comprimento de lados ou arestas como dos ângulos dos polígonos, movimentar, arrastar, girar, planificar e remontar de modo imediato os poliedros, os alunos puderam estabelecer conjecturas.

O trabalho com o GeoGebra favoreceu a desconstrução dimensional pela facilidade em manipular as representações dos objetos matemáticos. Para o caso dos polígonos, os alunos puderam observar de maneira dinâmica o comportamento das figuras, para isso voltaram os olhares tanto para os lados quanto para os vértices, o que evidenciou a desconstrução dimensional de 2D➔1D➔0D.

Com o uso desse *software,* é possível que explorações dos conteúdos matemáticos, bem como dos pressupostos teóricos de Raymond Duval, sejam eficientes. No entanto, a elaboração de atividades no ambiente dinâmico sobre alguns dos conteúdos de geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sustentada em aspectos cognitivos, revelou-se laboriosa.

Como indicativo para futuras pesquisas que complementem o presente estudo, uma lacuna a ser preenchida poderá ser a proposta de atividades no ambiente dinâmico que mobilizem, em especial, os olhares não icônicos, a apreensão operatória com modificação mereológica, e a desconstrução dimensional para a resolução de problemas de geometria envolvendo o papel heurístico das figuras geométricas.

REFERÊNCIAS

Assumpção, P. G. S. (2015) *Perímetro e área de polígonos: abordagem através de um ambiente dinâmico sob o olhar das representações semióticas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

Bardin, L. (2016). *Análise de Conteúdo.* Tradução de L. A. Reta e A. Pinheiro. Lisboa: Edições 70.

Duval, R. (2015). Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030!. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação*

Matemática, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 1-23, set. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p1>. Acesso em: 10 fev. 2017.

Duval, R. (2012a) Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática* – Revemat: Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, jul.. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/reve mat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>. Acesso em: 28 jan. 2017.

Duval, R. (2012b) Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática* – Revemat: Florianópolis, v.7, n.2, p. 266-297. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 27 jan. 2017

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Duval, R.(2005) *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie:* développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: ANNALES DE DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES. p. 5-53. Disponível em: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/volu me_10/Duval.pdf> Acesso em: 01 fev. 2017.

Duval, R.(2004). *Semiosis y pensamiento humano:* registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myrian V. Restrebo. Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Peter Lang.

Gravina, M. A; E. (Org.) *et alii*. (2010). Geometria Dinâmica na Escola. In: Gravina, M. A; E. (Org.) *et alii Matemática, Mídias Digitais e Didática:* tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS. p. 37-60 Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat >. Acesso em: 05 Jan. 2018.

Lorenzato, S. (1995) Por que não ensinar Geometria? *Revista A Educação Matemática em Revista,* São Paulo: SBEM, 1º sem., v.4., p. 3-13.

Moretti, M. T.; Brandt, C. F. (2015) Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 17, n. 3, p. 597-616, nov.. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25673>. Acesso em: 01 fev. 2017.

Pavanello, R. M. (1993) O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*. n. 7, Ano I, n. 1, p. 7-17.

Scheifer, C. (2017) *Design Metodológico para análise de atividades de geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.* 2017. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa.

CAPÍTULO IX

A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA SOB O OLHAR DA DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL DAS FORMAS

Roberta Nara Sodré de Souza
Méricles Thadeu Moretti

A aprendizagem dos conceitos de geometria perpassam pela proposição de problemas com suas figuras. Em geral, ao transformar a figura dada em um problema matemático que envolva a geometria temos acesso ao reconhecimento e designação de vários elementos nas diferentes dimensões. As figuras são permeadas de elementos teóricos e a desconstrução dimensional se revela como uma operação cognitiva a ser desenvolvida no ensino. Em nosso estudo trouxemos atividades que possibilitavam o aspecto transitório de figuras, que inicialmente nos passavam uma boa forma e estimulavam as mudanças dimensionais.

Ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa e é preciso ter consciência sobre seu o seu papel no ensino de conceitos de geometria. Os elementos perceptivos das figuras, como também os discursivos provocam a apreensão operatória a se desenrolar numa atividade proposta. As mudanças dimensionais são necessárias já no primeiro contato com a figura, seja no olhar para além dos seus limites visuais, seja para inserção de novos elementos não explícitos que podem modificá-la. Nesse sentido, como pesquisadores e/ou docentes na área da Educação Matemática, as passagens entre dimensões envolvidas com o conhecimento de geometria precisam ser avaliadas e discutidas no processo do ensinar-aprender. As discussões resultantes de pesquisas trazem referências robustas em prol da aprendizagem do estudante e podem direcionar a olhar de escolhas didáticas ao considerar seus resultados

Neste estudo trazemos elementos sobre as mudanças dimensionais no processo de aprendizagem de geometria que se relacionam com a resolução de problemas com figuras em diferentes dimensões. A base teórica de nossa investigação se vincula a Teoria Registros de Representação de Raymond Duval. Com essa orientação semio-cognitiva, como caminho de análises, consideramos que o conhecimento dos objetos matemáticos são intrínsecos ao trânsito entre suas representações e se fazem necessário no processo de desconstrução das formas nas diferentes dimensões e no aprender de geometria.

Os problemas selecionados, construídos ou reconstruídos pelos pesquisadores para essa investigação e foram aplicados com estudantes voluntários do Ensino Médio. Desenvolvemos a experimentação com 13 voluntários, estudantes do Ensino Médio Integrado do IFSC que compareceram a 5 encontros. A cada encontro foi realizado uma revisão de conceitos básicos envolvidos na atividade e uma sequência de atividades previamente elaboradas e analisadas apoiando-se nos aportes teóricos envolvidos na pesquisa.

Os olhares abordados sob os problemas e os registros dos sujeitos levantam uma série de observações cotidianas, que quando referenciados na teoria trazem respostas que superam nossas perspectivas iniciais. Considerar as habilidades dos estudantes nesse nível de ensino vinculadas a importância da ação metodológica focada por aportes teóricos semio-cognitivos são discussões fortemente importantes a serem refletidas pelos que atuam na Educação Matemática.

COMPREENSÕES, DISCUSSÕES E ANÁLISES QUE PERMEIAM A DESCONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

A relevância do ensino da geometria no contexto escolar é notória, e a importância dada nos encontros, congressos e pesquisas que dessa forma convergem para o entendimento de que o ensino da geometria fornece elementos indispensáveis à formação escolar. A duplicidade de linguagens, com pelo menos, dois registros de representação semióticos, a linguagem materna e a linguagem figural nos problemas de geometria que envolvem figuras, trazem situações ricas para o desenvolvimento conceitual.

As imagens que formamos de um objeto é feito por processos que envolvem a linguagem nas suas diferentes formas, aqui representarão na sua amplitude, os signos, esses darão a estrutura do que pensamos e conhecemos (Duval, 2012b, p. 270). As diferentes linguagens, presentes nos meios aos quais acessamos diariamente, agem de forma perceptiva e combinada entre vários de nossos sentidos. Dessa forma, "o exercício da linguagem como pensamento [...] é o que nos permite estabelecer relações, concebê-las e compreendê-las " (Chauí, 2003, p. 160).

O trânsito entre diferentes Registros de Representação Semiótica (RRS) compreende as variações dadas sobre o registro inicial relacionado a associações para um segundo, essas variações precisam ser coordenadas pelo sujeito que durante esse processo, aprende. A isso denominamos coordenação entre registro de representações e é por meio dela que o conhecimento é ampliado (Duval, 1995). "(...) Há, para um mesmo objeto matemático, muitos registros que o representam e que cada um desses registros comporta o objeto em sua plenitude, mas revela mais fortemente uma das suas facetas" (Moretti, Brandt & Souza, 2016, p. 7). Dessa forma, são premissas para a própria construção do conceito de figura geométrica, vê-la por meios dos registros de representação, seus tratamentos e coordenações, sejam na mesma unidade dimensional ou em unidades diferentes.

As trocas dimensionais em figuras são necessárias em grande parte de problemas que se compõem de contextos geométricos. As mudanças dimensionais aproximam os diferentes registros de representação e oportunizam interconexões entre diferentes sistemas semióticos que irão permitir o desenvolvimento favorável à construção dos objetos matemáticos.

A forma de pensar as possíveis modificações em uma figura dada num problema, ocorrem já de primeiro momento, sob a forma de ver a figura. A forma perceptiva, se destaca em relação a discursiva, no caso, o texto do problema envolvido, pois existe uma tendência de olhar para o aspecto visual (Moretti e Brandt, 2015, p. 605). É por meio da apreensão perceptiva, que podemos conseguir ideias para resolver um problema, como prever caminhos de subdivisões, criação de linhas auxiliares, rotações, dentre outros procedimentos, permitimos que a figura possa exercer o seu papel heurístico (Duval, 1998, p. 147).

A leitura das características das figuras geométricas, colocadas em atividades de ensino, podem contribuir nos aspectos relacionados a percepção de uma " boa forma" (Penna, 2000, p.28). O olhar dos problemas propostos sobre elementos destacados, ampliados ou que sofram ações na figura inicial dada, podem levar o estudante a se aproximar da percepção de dimensões inferiores necessárias à resolução.

Nossa percepção ocorre por variações de contrastes ocorrem por diferenças de estímulo visual por diferentes unidades da forma, sejam elas: ponto, linha, plano, volume, configuração real ou esquemática (Gomes Filho, 2009, p.36). A tendência perceptiva gestálticas, que envolvem figuras geométricas, podem comandar ou não a possibilidade de ir a dimensões inferiores, ou seja, a desconstrução geométrica.

O ato de perceber é dado em função da presença de um objeto, os objetos ausentes podem apenas ser evocados (Penna, 2000, p. 42). Ao evocar objetos ausentes requeremos uma apreensão diferenciada, que vai além de processos perceptivos. O ver além do explícito determina as dificuldades maiores dos estudantes pois requerem outras formas de apreensão. As modificações e reorganizações possíveis numa figura geométrica, caracterizam a apreensão chamada de apreensão operatória de modificação da figura inicial, que envolve os aspectos heurísticos do pensamento para resolver o problema em si (Duval, 2012a, p. 136).

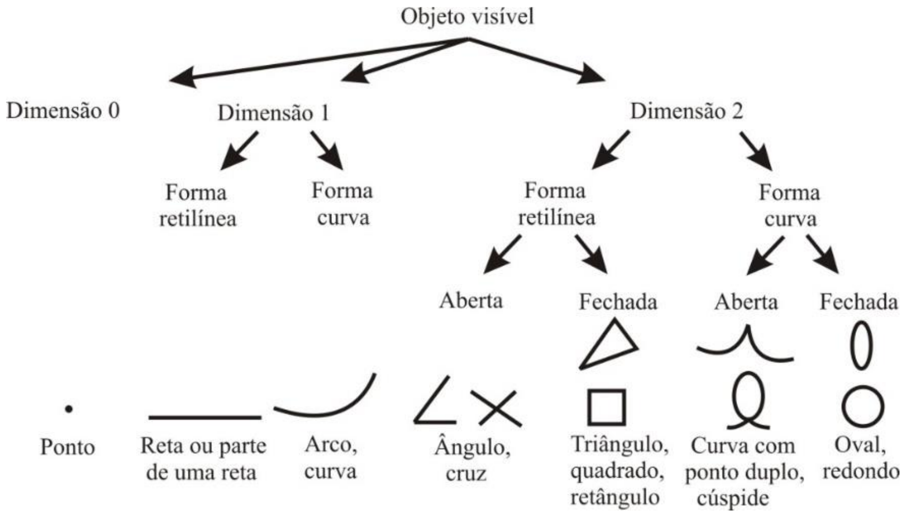
As dificuldades dos estudantes em resolver problemas em geometria ocorrem por serem incapazes, muitas vezes de unir o duplo estatuto necessário para raciocinar e argumentar em matemática, considerando a parte teórica (definições, teoremas, ...) unida aos processos operatórios (desconstruir e reconstruir formas, por exemplo) que coordenarão a visualização em matemática. A forma do proceder matemático se remete ao que chamamos de um gesto intelectual e está fortemente ligada a mobilização entre registros caracterizando a maneira de pensar na área e que revela a face oculta de sua aprendizagem, sem a qual seria impossível compreender matemática (Duval, 2016).

Na primeira fase da visualização aparece, em geral, a necessidade de operar cognitivamente sobre a figura geométrica dada e a ver matematicamente. Nesse processo, tem-se a preocupação em considerar as unidades figurais, em variar a dimensão, que irá se sobrepondo ao que se percebe a primeira vista (Duval, 2011, p. 88). O mecanismo da função cognitiva da visualização matemática que se sobrepõe a qualquer outra função é a desconstrução dimensional de formas (Duval, 2005, p. 7).

As reflexões advindas de desconstruir em dimensões se remetem a outras unidades figurais diferentes das explícitas, transformando a figura. “Com a desconstrução dimensional, a figura não é mais do que uma configuração particular e transitória” (Duval, 2005, p. 26). No entanto, vemos primeiramente um cubo, do que os quadrados que o compõe. Vemos os lados de um retângulos, antes de seus vértices. Para ver uma figura geométrica, num problema, temos a tendência de olhar aquela de maior dimensão que é apresentada, nos colocando, geralmente, em clausura para ver as dimensões inferiores, visto as questões gestálticas. "Em certos casos, os fatores próprios à apreensão perceptiva podem favorecer estas operações e, em outros casos, ao contrário, inibi-las" (Duval, 2012b, p. 287).

Quando um objeto visível muda de dimensão poderá apresentar diferentes características no seu "desmanche". Para que possa ser analisado as variáveis didáticas na desconstrução de dimensões que um problema contempla se requer uma classificação organizada das unidades figurais elementares (Duval,1995, p. 177). A Figura 1, traz um esquema que procura apresentar como a mudança de dimensão se operacionaliza mentalmente.

Figura 1: Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Duval (1995, p. 177).

Na desconstrução de dimensões de 3D para 2D, 2D para 1D, 1D em 0D, existe um salto cognitivo ao se reduzir a dimensão de uma figura a outra, em diferentes formas, que podemos observar na Figura 1. Sendo assim, a importância da aprendizagem para olhar as figuras as propriedades e as múltiplas unidades figurais são essenciais no fazer docente.

Para treinar o olhar a ver além do desenho é preciso contemplar as variações nas figuras e nas situações possibilitando o ver e tornando-se variáveis didáticas relevantes para a organizar a aprendizagem em matemática (Duval, 2011, p. 92).

No currículo escolar é simples que operações importantes como as transformações em figuras e a mudança dimensional passem despercebidas já que as mesmas não estão ligadas a nenhum conteúdo, perpassando de forma oculta (Duval, 2011, p. 92). Para que isso não ocorra temos que ser capazes de propor ações didáticas intencionais que articulem a forma de ver as dimensões, percebendo suas unidades figurais.

O aporte teórico levantado nos inquieta a entender se problemas que envolvem figuras podem abordar intencionalmente a desconstrução geométrica das formas possibilitando a aprendizagem desse gesto intelectual na construção dos conceitos em Geometria no Ensino Básico?

Como hipóteses preliminares e que justificaram a intenção de nosso estudo temos os seguintes elementos que permearam nossas análises e observações na aplicação dos problemas propostos aos nossos sujeitos:

- desconstrução geométrica é a operação intelectual e constituinte de muitos problemas com figuras em Geometria, ela não é algo que se constrói naturalmente pois envolve elementos semióticos e cognitivos que interagem junto aos problemas que precisam ser aprendidos;

-a desconstrução geométrica pode ser abordada de forma intencional em problemas que envolvem figuras e que tenham esse objetivo;

- a desconstrução geométrica constitui-se um gesto intelectual essencial nas significações dos objetos matemáticos da Geometria e pode contribuir para que os estudantes minimizem dificuldades de visualizar elementos em dimensões diferentes das dadas.

Na buscar por analisar o problema e hipóteses levantadas buscamos na sequência didática construída, com o olhar dos aportes teóricos já destacados, elaborar nossas considerações para o estudo proposto.

OS OLHARES DA DESCONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA FORMAS NA PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COM FIGURAS

Nosso interesse na investigação foi de verificar as trajetórias do gesto intelectual da desconstrução geométrica das formas na aprendizagem dos estudantes de forma a considerar caminhos as nossas inquietações. Em nosso estudo selecionamos problemas matemáticos que envolvessem figuras que permitissem ao sujeito desenvolver elementos de geometria em dimensões diversas.

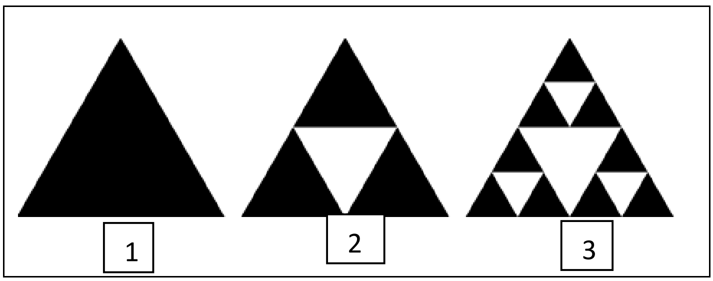
Os princípios da Engenharia Didática (Artigue, 1988), caracterizada como um esquema experimental baseado em realizações didáticas foram utilizados para a construção, análise e a experimentação das atividades propostas em nossa investigação. As análises preliminares se deram sobre o embasamento teórico permeando as propostas de instrumentos elaborados.

Para este artigo, selecionamos, dentre as quatorze questões propostas na sequência didática, três atividades e apresentamos as análises das produções dos sujeitos. Para cada atividade, foram feitas análises baseadas nos aspectos semióticos e cognitivos de forma preditiva, com base teórica e sob as possíveis trajetórias de resolução dos sujeitos.

Os sujeitos tiveram a necessidade de mobilizar saberes já adquiridos do campo geométrico nas atividades propostas e desenvolver ao menos uma desconstrução de unidade figural. Foram utilizados também registros por entrevista individual, bem como registro fotográfico dos procedimentos dos sujeitos. Os registros dos sujeitos foram confrontados com os aportes teóricos da pesquisa. Nossas análises tiveram o foco principal nas desconstruções dimensionais envolvidas na resolução das atividades propostas aos sujeitos. Apresentamos, a seguir, três atividades selecionadas para essa discussão.

Na atividade 3 propomos a seguinte questão: Que características destacam-se na construção da imagem dos triângulos do Quadro 1 a seguir, de 1 para 2 e para 3?

Quadro 1: Sequência da formação do triangulo de Sierpinska



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na atividade proposta, pretendíamos que os sujeitos percebessem o objeto visível em 2D e as propriedades geométricas apontados na sequência dos triângulos apresentados nas etapas da construção do triangulo de Sierpinska. Os triângulos foram numerados para facilitar a visualização de uma sequência. O contraste de cores cumpria o papel estímulo a visualização de boa forma (Gomes Filho, 2009, p. 18).

O problema delimitou o objetivo de comunicar com fins a requisitar a análise sobre um tratamento de dimensões (Duval, 1995, pp. 89-91). A priori a passagem da desconstrução da segunda dimensão para a primeira dimensão se dariam na observação dos triângulos compostos por lados menores. Já para a dimensão zero, na construção dos novos triângulos baseados na ligação entre pontos médios dos lados dos triângulos anteriores.

Da percepção inicial do Quadro 1, provocaria nos sujeitos, uma ação sob o discurso com intenção de operar e expandir conceitualmente.

Sobre as conversões e tratamentos da atividade, *a priori* consideramos que haveria a conversão língua natural-formal para uma figura geométrica bidimensional e desta ao tratamento em primeira dimensão mantendo o registro. Existiria a necessidade de uma conversão a um registro discursivo, para poder relatar as observações desenvolvidas usando a designação dos objetos que levaria, a coordenação entre registros semióticos.

Nas considerações feita sob a produção dos sujeitos, nessa atividade, apresentamos as análises que nos permitiram acrescentar os aspectos na análise *a posteriori*.

Na fala do sujeito SG, que finaliza a resolução indicando que a característica em destaque seria o fato de serem triângulos compostos por mais triângulos que se repetem, condensamos o que ocorreu na maioria das análises o enclausuramento na segunda dimensão. Em dez registros dos sujeitos percebemos procedimentos de resolução com a manutenção da segunda dimensão. Assim, a desconstrução dimensional da forma para compor a análise, foi dificultada e até foi inibida pela visibilidade da operação de apreensão perceptiva (Duval, 2012b, p. 287) e a não obrigatoriedade explícita da atividade em levar para discutir o que ocorria em outras dimensões.

A troca de dimensão ocorreu nos registros de três dos sujeitos da pesquisa, contudo com dificuldades de designação correta de objetos matemáticos nas dimensões inferiores. A desconstrução dimensional apresentou-se no sentido da indicação do vértice do triângulo pelo sujeito SH e pelo sujeito SE nomeado como "ponta". O sujeito SB não deixou claro a indicação do vértice, mas, em sua produção, colocou em destaque que os triângulos vão ficando no centro. Na entrevista individualizada realizada com

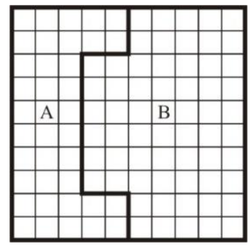
SB orientando o seu pensamento questionamos: “-Vértice?”, e este responde: "-sim, se encostam no lados ou base do triângulo maior". Nesse momento, ficou explícita a passagem para 2D. Levar o sujeito a pensar sobre o discurso produzido e que este poderia dar margem a outras interpretações possibilita uma correção na designação dos objetos matemáticos e traz o indicativo da desconstrução dimensional.

A mudança da 2D para a 0D, sem a necessidade de passar pela 1D fica mais evidente, contudo, com dificuldades do uso adequado para designá-los. A indicação do ponto médio aparece na fala dos sujeitos como "meio" ou "centro" da figura plana por sete sujeitos.

Consideramos que a não requisição de cálculos e ou construções na questão promovem a não percepção, ou até mesmo a *cegueira* para as dimensões inferiores da figura. Os sujeitos da pesquisa procuram explicar o raciocínio da construção do Triângulo de Sierpinski na mesma dimensão. A possibilidade da repetição infinita dos triângulos e a construção fractal é indicada apenas pelo sujeito SB que conseguiu desconstruir nas dimensões 1D e 0D.

A atividade 5 foi dividida em dois itens. Os sujeitos só receberam o item 5.2, após terminar e entregar o item 5.1. No item 5.1, pretendíamos que o estudante percebesse o objeto visível, identificando-o como um quadrado, que foi repartido em duas figuras de oito lados, cada uma, A e B, vazadas e com quadriculados no preenchimento. E que a partir disso percebesse as medidas dos lados, em primeira dimensão e calculasse o perímetro de A e B, considerando por fim, serem iguais e apontando a alternativa "a" como correta. A atividade proposta aos sujeitos é a exposta no Quadro 2.

Quadro 2: Proposta da Atividade 5-5.1

5.1- Assinale a resposta correta: a) O perímetro da parcela A é igual ao perímetro da parcela B b) O perímetro da parcela A é maior do que o perímetro da parcela B- c) O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B **5.2** Com a resposta dada no item 5.1, calcule o perímetro de A e de B, mostre o desenvolvimento abaixo e compare com a resposta dada anteriormente. Justifique.	

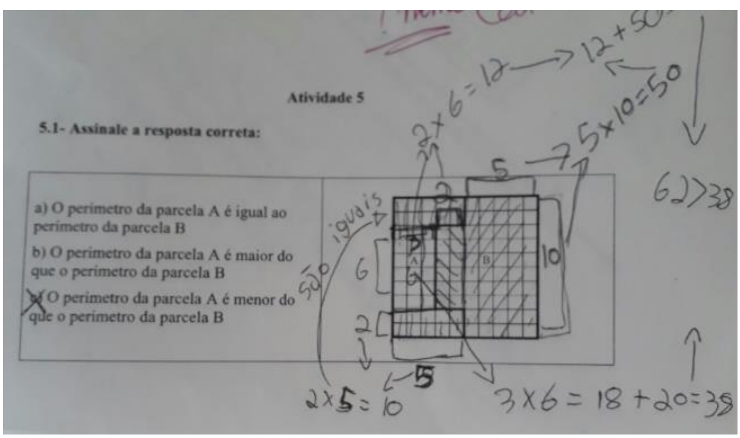
Fonte: Adaptado de CAPES/COFECUB, 1996.

Ao realizar a atividade 5, os sujeitos precisaram “quebrar” o contorno visual destacado. Já no item 5.2 pretendíamos um confronto dos resultados numéricos com a apreensão perceptiva inicial da questão 5.1, que provocava a clausura na segunda dimensão. A priori esperávamos que os sujeitos conseguissem confirmar a solução dada no item 5.1 indicando os perímetros de A e B. Contudo, prevíamos que alguns se “enclausurariam” na dimensão 2 e que, por meio da orientação didática dada na atividade no item 5.2, ao mudarem de registro poderiam visualizar a figura apontando seus respectivos erros.

A combinação utilizada de figuras e quadriculados direcionava o olhar à diferença entre as áreas em 2D. Os polígonos A e B que se encaixam, apresentados no Quadro 2, destacam em termos de estar com o traço mais espesso e negrito o aspecto de 1D, que seria o olhar sobre o perímetro, deixando para um plano perceptivo secundário, o que poderia não favorecer a desconstrução dimensional de 2D (a figura plana) para 1D. É necessário para essa situação o olhar do docente que seleciona a atividade de ensino já que, algumas combinações entre enunciados e figuras, podem trazer uma ligeira não congruência visual com o que está sendo requerido (DUVAL, 2012a, p. 123).

Em nossa análise a posteriori percebemos o que a priori prevíamos e uma evolução de alguns dos sujeitos relacionada a apreensão operatória com modificações na figura inicial dada. O sujeito SH indicou ser o perímetro de A maior do que B (A>B) e os outros 5 sujeitos indicaram ser o perímetro de A menor do que o de B (A<B) enquanto o sujeito SB mostra cálculos de medida de área de retângulos certificando a sua visualização para a área construindo recortes na figura dada, como mostra na Figura 2.

Figura 2: Registro do Sujeito SB na atividade 5.1

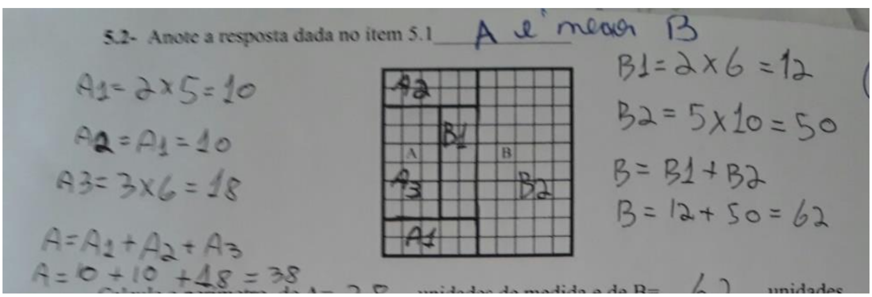


Fonte: Souza (2018, p.146).

Consideramos que nem sempre uma figura se encaminha como um elemento facilitador do raciocínio para os sujeitos. Para alguns deles, ficaram aprisionados no conceito de área ao olhar a 2D (Duval, 1998, p. 143), não conseguiram focar o olhar sobre a apreensão discursiva envolvida olhando à 1D, o perímetro.

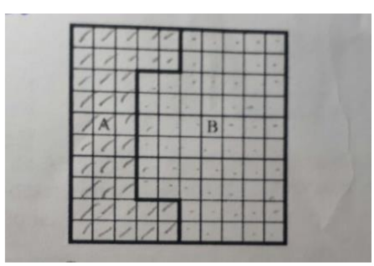
No item da 5.2 da atividade 5, observamos que mesmo solicitando a forma como operaram o cálculo do perímetro alguns ficam aprisionados na dimensão 2D, continuando no conceito de área. A situação ocorreu para os sujeitos SB, SC e SJ que mostramos pelos exemplos de registros nas Figuras 3 e 4. Na Figura 3 pelos cálculos de medidas de áreas apresentadas e repartições da figura dada inicialmente, e na Figura 4, pelas contagens mostradas por pontos no interior da figura. Contudo, os sujeitos ao serem envolvidos na sequência da atividade, com o item 5.2, com necessidade da conversão numérica, a desconstrução para 1D foi facilitada.

Figura 3: Registro do Sujeito SB na atividade 5.2



Fonte: Souza (2018, p.147).

Figura 4: Registro do Sujeito SC na atividade 5.2



Fonte: Souza (2018, p.148).

Quando foi distribuído o item 5.2, alguns sujeitos verbalizaram se poderiam corrigir a 5.1. A orientação para que os sujeitos fizessem a conversão numérica do que afirmaram no item 5.1 levou a orientação e direcionamento para comporem medidas que levantaram a percepção do erro cometido. Mesmo indicando de forma incorreta o valor final do perímetro na atividade 5, percebemos que cinco sujeitos conseguiram descer a 1D, quando solicitados os cálculos.

Observamos que os registros de conversão da linguagem discursiva para a figural, apesar de equivalentes, tornaram-se mais próximos no sentido do direcionamento à conversão numérica. Pelos registros dos sujeitos evidenciamos em seus procedimentos que os diferentes registros de representação semióticas interagem num ambiente didático (Moretti, Brandt & Souza, 2016).

Mesmo deixando explícito que o objetivo na atividade cinco era o cálculo do perímetro, seis sujeitos focaram no cálculo da medida da área e três sujeitos, de um total de treze, ficaram na 2D, mesmo quando a atividade solicita numericamente. A dificuldade de olhar dimensões inferiores em problemas de geometria constitui a causa de insucesso (Moretti & Brandt, 2015).

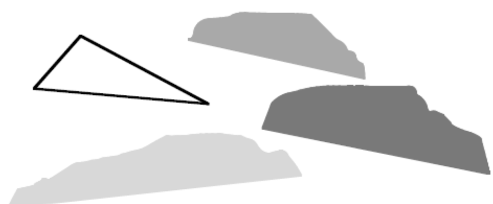
No segundo encontro da pesquisa fizeram outra atividade indicada como atividade 3. Para que fosse desenvolvida, os sujeitos deveriam perceber que os lados formavam a figura, desconstruindo para a 1D. No encontro dos lados, ao fazer marcações e posicionamentos de réguas, intencionávamos provocar a desconstrução à 0D, determinando os vértices.

Com o objetivo de que os lados fossem destacados, o objeto visível dado, um triângulo, veio vazado de forma a direcionar o olhar da 2D à 1D.

Os instrumentos de medida que poderiam ser utilizados foram as réguas, como mostra na Figura 5, elas foram fornecidas recortadas, facilitando o seu uso na construção e identificação de marcações.

Figura 5: Triângulo e réguas da Atividade 3

Atividade 3: Dado o modelo de um triângulo, reconstrua ele utilizando as réguas em papel não graduadas que serão disponibilizadas a seguir.

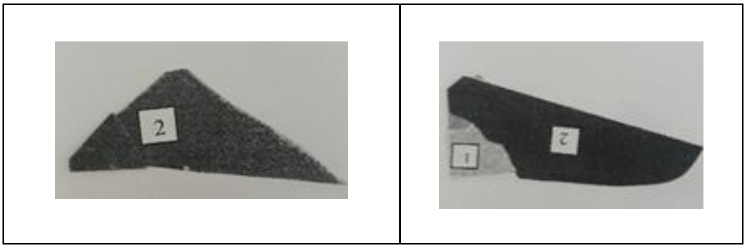


Fonte: Adaptado de Duval (2005, pp.18-19).

Ao realizar a atividade, os sujeitos precisam quebrar a unidade figural e o contorno visual em cada um dos três lados (Duval, 2005, p. 19). Prevíamos que os sujeitos executariam apreensões que poderiam trazer os aspectos de modificações, desenhar segmentos para determinar a medida dos lados, ou utilizar ambas situações. As mudanças dimensionais ocorreriam de 2D a 1D e para 0D. Caminhariam pelas propriedades da figura ao desenhá-la.

De forma bastante inusitada algumas resoluções construídas pelos sujeitos foram feitas por dobraduras, recortes e colagens, não desconstruindo para a 1D. No Quadro 3, mostramos os registros de SF e SE que confirmam o ocorrido.

Quadro 3: Registro da atividade dos sujeitos SF e SE

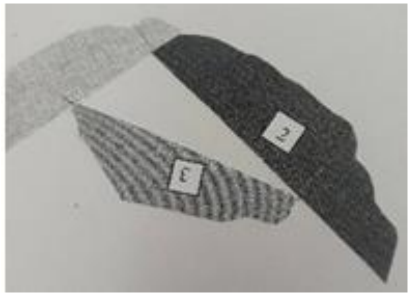


Fonte: Souza (2018, p.156).

As resoluções indicadas Quadro 3 apresentam a construção de moldes mantendo a 2D. Nesse modo, o sujeito não visualiza as dimensões inferiores, as unidades figurais que poderiam descer para realizar a atividade. A forma de resolução utilizada não garantiu as medidas do triângulo fornecidas inicialmente na atividade. Os registros dos sujeitos apresentados no Quadro 3 confirmam que a desconstrução dimensional se encontra na contramão da percepção de unidades de figuras. Sendo assim, organizar as tarefas específicas com objetivos de desenvolver o olhar sobre as trocas dimensionais, torna-se complexo, já que, o que se vê de imediato é o que se torna obstáculo a percepção das demais unidades figurais (Duval, 2011, p.93).

No registro da resolução pelo sujeito SN, observada na Figura 6, temos: "Quis usar todas as réguas pois achei que seria mais fácil, então vi como eu iria encaixar para que formassem o mesmo ângulo da figura original e depois marquei". O sujeito expõe o que esperávamos a priori, bem como SA e SG. O sujeito SN, mostra um procedimento de resolução bem elaborado e transitando entre desconstruções dimensionais, consegue estabelecer uma sequência de construção para reproduzir a figura, elabora uma estratégia com proposições e uso de técnicas que envolveram a expansão conceitual não explicita.

Figura 6: Registro do sujeito SN



Fonte: Souza (2018, p.158).

Para os sujeitos da pesquisa que não conseguiram dispor das etapas de desconstrução dimensional, observamos que os mesmos não obtiveram êxito na atividade proposta. Essa identificação pode se ligar ao fato de que a dificuldade de olhar dimensões inferiores se relaciona ao insucesso em problemas de geometria (Moretti e Brandt, 2015, p. 602).

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

Baseados em nossa inquietações pela compreensão da relevância da desconstrução dimensional de figuras geométricas na aprendizagem de Geometria nos inserimos nesse estudo. Procuramos entender se problemas que envolvem figuras, podem abordar intencionalmente a desconstrução geométrica das formas possibilitando a aprendizagem desse gesto intelectual na construção dos conceitos de Geometria.

A visão teórica abordada considera que os estudantes precisam mudar a forma de ver as dimensões, aprender a quebrar o que se impõe perceptivamente, enxergar o implícito e as possibilidades de operações numa figura em suas dimensoes inferiores. A literatura científica revela que os processos semio-cognitivos devem perpassar de forma contínua o ensino da matemática, já que eles em si constituem as ferramentas operatórias que permitem os sujeitos transitar com mais facilidade em problemas que envolvam figuras.

Quando pensamos em construir o desenvolvimento da capacidade de desconstrução dimensional mostra-se relevante perceber as variáveis didáticas que estão envolvidas nas figuras descobrindo todas as suas configurações possíveis. Uma análise visual das capacidades das figuras inseridas em atividades é essencial.

Nas atividades propostas para o estudo, percebemos fortemente o enclausuramento dos sujeitos na dimensão da imagem dada na atividade. Na questão 3, do primeiro encontro, os elementos da formação do Triangulo de Sierpisnki, levou os sujeitos a se manterem na mesma dimensão. Consideramos, para nossa investigação, que não ocorreu um salto cognitivo na interpretação da maioria dos sujeitos na atividade dissertativa proposta em função da não percepção das demais dimensões. Ocorreram fortes indicativos de fatores de apreensão perceptiva que inibiram a desconstrução (Duval, 2012c, p. 287), confirmados pela não observação, dos sujeitos, de análises descritivas de lados e/ou de pontos.

Na atividade 5, o aspecto perceptivo do quadrado em 2D salta os olhos e os sujeitos respondem automaticamente focando para a diferença entre áreas, quando o solicitado era o perímetro. No segundo encontro, a atividade 3, levou os alguns sujeitos a fazerem moldes na figura para construírem triângulos semelhantes ao dado e dessa forma, repetem em suas ações heurísticas de resolução a persistência de se manterem na mesma dimensão. Esse gesto de se manter na mesma dimensão acarreta dificuldades para a aprendizagem de geometria, de perceber as figuras geométricas em seus aspectos transitórios considerando seus elementos e propriedades.

As dificuldades de desenvolver problemas que envolvam figuras geométricas passam pela forma de ver geometricamente elementos em dimensões diferentes das que são dadas e algumas modificações em atividades propostas podem evidenciar esse gesto. A questão 5.2 serve de exemplo, ao solicitar os cálculos relacionados ao perímetro da figura, alguns estudantes que haviam focado no conceito de área, dado a imagem 2D, conseguiram a desconstrução e inclusive solicitando inclusive correções no que haviam feito no item 5.1.

Evidenciamos a partir dos constructos teóricos e das atividades experimentais desenvolvidas que a desconstrução dimensional das figuras geométricas na resolução de problemas é uma operação fundamental, e assim a importância de ser considerada como fortemente relevante à aprendizagem de Geometria. No que tange ao ensino vimos faltar conhecimento em relação a complexidade cognitiva envolvida nas abordagem de geometria e isso é prejudicial ao ensino bem como não considerar as pesquisas sobre o aprendizado de geometria (Duval, 2005, p. 51).

As inserções pedagógicas em ambientes escolares para o gesto da desconstrução dimensional podem preferencialmente ocorrer por meio de ações didáticas específicas em atividades que contenham figuras geométricas previamente pensados para esse propósito. A escolha das atividades e figuras a serem dispostos aos estudantes precisam ter intencionalidade envolvendo o desconstruir das dimensões nas suas unidades figurais estabelecendo coordenação entre diferentes registros de representação semióticos.

Os elementos que compõem a desconstrução destacados nessa investigação deveriam perpassar de forma contínua no ensino da matemática, especialmente no Ensino Básico, de forma a possibilitar o desenvolvimento de gestos intelectuais que permitam resoluções de situações-problema com figuras. Diante disso, faz-se necessária uma mudança na cultura dos processos de ensino e aprendizagem dos objetos da geometria, com o exercício do pensar intencional sobre a transformação da unidade figural, num estado transitório.

Os estudantes precisam mudar a forma de ver as dimensões, aprender a quebrar o que se impõe perceptivamente, enxergar o implícito e as possibilidades de operações numa figura em dimensões inferiores.

O desenvolvimento da habilidade de desconstrução de dimensões, no decorrer do Ensino Básico, poderá formar alicerces conceituais e promover o conhecimento geométrico. No entanto, outras questões merecem aprofundamentos em função das limitações desse estudo fortalecendo e revelando indicativos do olhar intencional do docente que vislumbra consolidar o desenvolvimento da desconstrução dimensional das formas para os diferentes níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble, 9(3), 281- 308.

CAPES/COFECUB (1996). Relatório n. 174/95 – Relatório das atividades referentes ao período de junho de 1995 a agosto de 1996. Brasília.

Chauí, M.(2003). Convite à Filosofia. São Paulo: Ática.

Duval, R (2016). Questions épistémologiques et cognitives, avant d’entrer dans une classe de mathématiques. Tradução: Méricles T. Moretti.

Florianópolis: REVEMAT, 11(2), 1-78, Recuperado de: <periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

Duval, R (2012a). Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. Méricles T. Moretti. Florianópolis: REVEMAT, 7(1), Recuperado de: <periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

Duval, R (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles T. Moretti. Florianópolis: REVEMAT,7(2),266-297. Recuperado de: <periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

Duval, R (2011). Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de La géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. IREM, Strasbourg : Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5 – 53.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. In C. Mammana and V. Villani (Eds), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1994). Les differents fonctionnements d'une figure dans une demarche geometrique. Répères. Pont-à-Mousson, Topiques éditions, 17, 121-138.

Gomes Filho, J (2009). Gestalt do objeto: Sistema de leitura visual da forma. São Paulo: Escrituras (9.ed.).

Moretti, M. T. Brandt, C & Souza, R. N. S (2016). Linguagem natural versus formal: diferenciação importante na construção de uma semiosfera de aprendizagem da matemática. Curitiba: ANPE. Recuperado de: <http://www.anpedsul2016.ufpr.br>

Moretti, M. T. e Brandt, C. F. (2015). Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. Educação Matemática em Pesquisa, São Paulo, .17(3), 597-616.

Penna, A. G. (2000). Introdução ao Gestaltismo. Rio de Janeiro: Ed. Imago.

Souza, R. N. S. (2018). Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

CAPÍTULO X

ELEMENTOS SEMIO-COGNITIVOS PARA A APRENDIZAGEM DE ESTUDANTES CEGOS EM MATEMÁTICA: O LIVRO DIDÁTICO EM BRAILLE

Daiana Zanelato dos Anjos
Méricles Thadeu Moretti

O presente estudo aborda um tema sensível e urgente na Educação Matemática: a aprendizagem de estudantes com deficiência visual em classes inclusivas. Em foco, a aprendizagem matemática por uma estudante cega congênita que cursou o terceiro ano do Ensino Médio analisada por meio de um acompanhamento com o livro didático em Braille durante dez semanas.

A análise realizada teve na Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval o principal aporte teórico que nos deu um caminho a ser seguido nas análises semióticas e cognitivas (semio-cognitivas) que fizemos. Para além da análise semio-cognitiva realizada, buscamos compreender de que forma se dava a aprendizagem da estudante, investigando as dimensões da Relação com o Saber estabelecida por ela na classe inclusiva da qual fez parte.

Esse trabalho trata de um Estudo de Caso que teve como protagonista principal uma única estudante cega, o que não nos permite generalizações. Mas vale lembrar que documentos, leis, livros, manuais escolares também foram investigados e compuseram o arsenal mostrado na sequência que apresenta elementos relevantes no que cerca aprendizagem matemática dos estudantes cegos.

Compreender matemática é algo que desafia a grande maioria dos estudantes da Educação Básica tanto pela condição epistemológica quanto cognitiva dos objetos de saber matemáticos a serem apreendidos. Afinal, que elementos semio-cognitivos precisamos considerar quando ensinamos matemática ao estudante cego?

1 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA DE ESTUDANTES CEGOS

Em um mundo pautado pelo visual, como seria para você não enxergar? Mesmo que não sejamos capazes de sentir por completo a experiência invisual do outro, por instantes podemos perceber o quão diferente seria esta experiência para nós que enxergamos e então, muitos questionamentos florescem. Acrescentando a essa situação a necessidade de aprender matemática, os questionamentos multiplicam-se exponencialmente. A matemática, por si só, é uma disciplina que gera dificuldades para a aprendizagem, tanto pelo aspecto epistemológico quanto cognitivo, uma vez que o acesso aos objetos de saber por ela compreendidos se faz de uma forma diferente das demais disciplinas (Duval, 2011). Esta consideração envolve todos os estudantes, mas que particularidades ela pode apresentar quando o estudante em questão não enxerga?

A estimativa atual aproxima-se ao número de 37 milhões (OMS, 2018) de pessoas cegas no mundo. E, mesmo tratando-se de um número elevado, em muitos dos espaços que nos cercam cotidianamente há desinformação e intolerância no que cerca à cegueira. No âmbito educacional, percebe-se o número aumentado de matrículas dos estudantes, que no caso da cegueira (incluindo cegos e baixa visão), chega a 80.397 de estudantes matriculados no ano de 2018 (Brasil, 2019).

Considerando todas as deficiências, o percentual de escolas brasileiras que possui pessoas com deficiência incluídas em classes regulares de ensino chega a 57,8% em 2016. Esse número representa um aumento de 26,8 pontos percentuais comparados ao ano de 2008 (Brasil, 2017). A existência dessas classes no ensino regular faz parte das discussões educacionais desde a Constituição Federal Brasileira de 1988 (Brasil, 1988) em seus incisos III, IV e V do Artigo 208. O aspecto legislatório tomou um caminho longo e sinuoso e culminou na Lei Brasileira de Inclusão (julho de 2015) que, entre outros aspectos, versa sobre o sistema educacional inclusivo (Brasil, 2015).

Os números apresentados anteriormente nos levam, automaticamente, a questionar a formação de professores frente a necessidade da inclusão escolar. São alvo das nossas inquietações não só a formação, mas também a situação das pesquisas brasileiras que estão sendo empreendidas no sentido de discutir esta temática. No que se refere à formação docente, o trabalho de Bock e Nuernberg (2018) alerta para a falta de discussão da temática da inclusão escolar em cursos de formação inicial. As disciplinas desses cursos não chegam a abordar sobre o perfil dos estudantes da Educação Básica e "muitas disciplinas insistem em um modelo de ensino idealizado, padrão, a partir da lógica da normalidade" (Bock, & Nuernberg, 2018, p. 8).

No que se refere às pesquisas na temática específica da formação de professores de matemática para a inclusão de estudantes cegos, o trabalho de Pereira e Borges (2017) mostra um levantamento em periódicos online nas áreas de ensino e educação especial de 2006 a 2016. Nessa pesquisa, uma das categorias investigadas mostrou a ênfase dada à formação de professores para a classe inclusiva. Borges e Pereira (2017) evidenciaram que as pesquisas giram em torno tanto da “falta de preparo dos professores para atuarem em sala de aula com alunos inclusos”, da “importância da formação continuada” e ainda, para alguns casos, referem-se a “uma análise do nível de conhecimento dos docentes para discutir a necessidade de uma melhor preparação por parte dos professores” (Pereira & Borges, 2017, pp. 11-12).

Extrapolando as pesquisas relacionadas à temática da formação docente para a inclusão de estudantes cegos, levantamos em uma pesquisa do tipo Estado da Arte[1], uma quantidade razoável de trabalhos que abordam o ensino e aprendizagem de estudantes cegos em matemática (Anjos & Moretti, 2017). Constatamos que, dos 58 trabalhos encontrados, as temáticas de pesquisa centraram-se nos “resultados obtidos com a investigação e proposta de criação de materiais voltados ao ensino e aprendizagem de matemática”, e sobre a “elucidação do ensino de determinado conceito ou construção de propostas de ensino.” (Anjos & Moretti, 2017, pp. 17-18). Estas pesquisas nos mostram que a questão de que mobiliza atualmente os pesquisadores não têm como foco a aprendizagem do estudante e, muito menos, a questão do acesso ao objeto de saber em matemática. Esse foi um resultado que

---

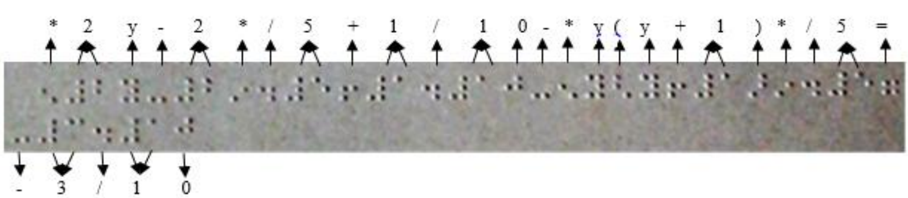
[1] As fontes pesquisadas para compor esse Estado da Arte foram: teses e dissertações da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), da Universidade do Estado de São Paulo (UNESP) e da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Para além das universidades, investigamos o banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela Plataforma Sucupira, devido a sua amplitude nacional. E ainda, os resultados de pesquisa nos dois principais eventos do campo da Educação Matemática tanto em âmbito nacional como internacional: o ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática e o SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

fortaleceu a nossa preocupação inicial e nos auxiliou a lapidar o nosso questionamento central, afinal: de que forma se dá o acesso ao objeto de saber matemático pelo estudante cego?

2 INQUIETAÇÕES SEMIÓTICAS NO ACESSO AOS OBJETOS DE SABER EM MATEMÁTICA POR ESTUDANTES CEGOS

Algumas inquietações serão postas por nós como hipóteses preliminares advindas de trabalhos anteriores (Anjos, 2015; Moretti & Anjos, 2016). Naqueles trabalhos levantamos algumas diferenças de *forma* nas representações utilizadas no sistema Braille em relação à escrita em tinta. A diferença da forma nas representações da tinta ao Braille acontece, por exemplo, em expressões do tipo fracionárias, quando em tinta a representação semiótica é bidimensional e, na transcrição para o Braille, devido às regras do próprio Sistema, a mesma expressão passa a ser escrita unidimensional. Percebemos tal situação na Figura 1 a seguir:

Figura 1 – Transcrição e correspondência de $\frac{2y-2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{y(y+1)}{5}=-\frac{3}{10}$ para o Braille



Fonte: Moretti e Anjos (2016, p. 405).

Esse modo torna a escrita matemática unidimensional e apaga a sua organização sintáxica bidimensional. Além disso, o número de caracteres é aumentado significativamente quando da conversão da expressão para o

Braille (de 25 caracteres em tinta para 39 caracteres em Braille). Somado a estas constatações, outra questão relacionada à possibilidade de inclusão nos inquietou: o estudante cego recebe um livro didático transcrito que é produzido levando em conta o material de quem enxerga. Nesse caso, como são tratadas as diferenças existentes da tinta ao Braille no material do estudante cego?

Nas linhas que seguem, apresentamos alguns elementos semio-cognitivos percebidos na aprendizagem do estudante cego em matemática por meio de uma análise semio-cognitiva que empreendemos. A investigação teve como suporte o acompanhamento de uma estudante cega do Ensino Médio e que utiliza o Livro Didático de matemática em Braille. Fundamentamos a pesquisa nos aspectos semio-cognitivos (semióticos e cognitivos) da Teoria de Representação Semiótica de Raymond Duval. Os resultados aqui explanados integram o Estudo de Caso que deu origem a uma tese de doutorado em que houve uma investigação sobre como se dava o acesso semio-cognitivo aos objetos de saber em matemática por uma estudante cega (Anjos, 2019).

3 DOS ELEMENTOS SEMIO-COGNITIVOS NA APRENDIZAGEM DO ESTUDANTE CEGO EM MATEMÁTICA À RELAÇÃO COM O SABER ESTABELECIDA NA CLASSE INCLUSIVA

Os acompanhamentos feitos com a estudante cega nos mostraram que, em expressões do tipo $y = \frac{x+1}{2}$, tanto existe um aumento no número de caracteres na transcrição da tinta ao Braille, como a opacidade no acesso ao objeto de saber. Esta opacidade acontece, uma vez que a expressão em tinta se mostra bidimensional e a expressão transcrita para o Braille se mostra unidimensional.

A maior dificuldade foi percebida na identificação de numeradores e denominadores, que no caso de expressões em tinta, podem ser observados pelos estudantes de maneira automática devido ao traço da fração e devido a visão global da forma bidimensional, o que não acontece com o estudante cego, pois para ele o traço da fração é representado com o mesmo símbolo utilizado para representar a operação de divisão e a expressão é escrita de forma unidimensional em Braille. No aspecto relacionado aos numeradores e denominadores, como a leitura da estudante cega se dá de forma tátil e sequencial, há uma lenta diferenciação entre esses elementos, pois a escrita unidimensional dificulta a organização sintática dos escritos literais.

Duval (2004, p. 63) nos alerta sobre a significância por traz dos signos que compõem uma representação. Isso porque dependendo do acesso ao significante, o significado será prejudicado. O traço ou barra da fração é identificado por Duval (2004, p. 97) como uma problemática no caso de quem enxerga, uma vez que, por si só, ele não designa o objeto de saber, culminando em um custo para a aprendizagem, pois modifica o significado e a referência da escrita posicional ao objeto. No caso da estudante cega, além da escrita ser unidimensional e dificultar a identificação do numerador e denominador, há um signo (símbolo de divisão) que remete a uma operação e não ao objeto de saber fração. Esses dois aspectos nos fazem chamar à atenção de maneira especial para as expressões fracionárias.

Além disso, em Duval (2004, p. 53) percebemos que, para o caso de quem enxerga, o fenômeno da não congruência semântica (operação de conversão) pode acarretar atrasos e bloqueios na aprendizagem em matemática. Nos parece que para o caso da estudante cega, esse fenômeno também pode acontecer, pois basta analisarmos a situação do aumento do número de caracteres, em expressões fracionárias, por exemplo, e confrontarmos com o fato do tempo de leitura desta estudante que, tanto é mais lento quanto mais cansativo do que a leitura em tinta (Nolan & Kederis, 1969, p. 70; Gil, 2000, p. 45; Ochaita & Rosa, 1995, p. 190).

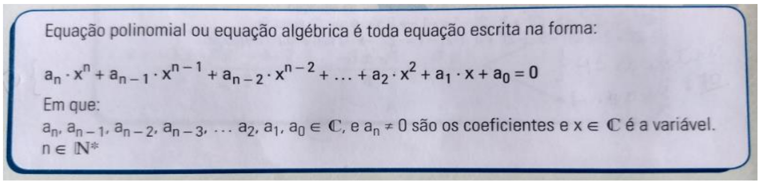
Vale salientar que não mencionamos todos os objetos de saber matemáticos em que o número aumentado de caracteres se faz presente, mas mostramos sérios indícios, como esse apresentado na Figura 1 e outras situações (função inversa e função composta; na escrita dos sistemas lineares; no cálculo da inversa de uma matriz). Esses indícios reforçam a necessidade de uma análise realizada com parcimônia pelo professor de matemática quando da escrita de expressões em Braille.

Outro elemento marcante do acompanhamento é que a estudante cega não lembra de certos elementos da linguagem formal matemática presente no Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa - CMU[2]. Nesse acompanhamento, levantamos que certos símbolos relacionados a conceitos matemáticos não eram conhecidos, tais como, arco, ângulo, logaritmo, entre outros. Isso pode ter levado, por exemplo, a estudante a não compreender a definição de Equação Polinomial apresentada conforme mostramos na Figura 2 da sequência:

---

[2] O Código Matemático Unificado é um documento oficial do Ministério da Educação (MEC) e trata-se de um compêndio dos símbolos utilizados na linguagem formal de matemática para os três níveis de ensino com devida representação em Braille (Brasil, 2006).

Figura 2 - Definição de Equação Polinomial dos livros didáticos em tinta e em Braille

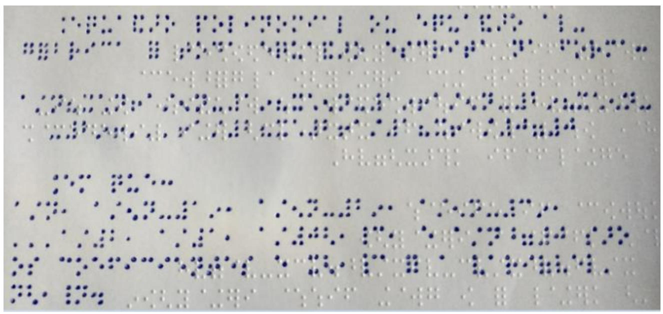


Equação polinomial ou equação algébrica é toda equação escrita na forma:

$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

Em que:

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, e $a_n \neq 0$ são os coeficientes e $x \in \mathbb{C}$ é a variável.
$n \in \mathbb{N}^*$



Fonte: Anjos (2019, p. 207).

A tarefa solicitada à estudante cega consistiu na leitura e interpretação da definição de Equação Polinomial mostrada acima. Além disso, a estudante daria um exemplo de uma equação polinomial, como forma de averiguar a compreensão de sua leitura. Percebemos que, diante dos 70 caracteres em Braille presentes na primeira parte da definição, a estudante fez a leitura, mas não conseguiu dar um exemplo de Equação Polinomial. Na segunda parte da definição, segundo ela, apareciam índices inferiores e parênteses auxiliares[3]e ela não conseguiu fazer a leitura:

[3] Segundo o Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa – CMU, os parênteses auxiliares são “uma alternativa de recurso de representação em Braille nos casos em que a escrita linear dificulta o entendimento das expressões matemáticas” (BRASIL, 2006, 15).

> **P –** Você conseguiu fazer a leitura?
> **A –** Só da equação até agora.
> **P –** Só da definição mesmo.
> **A –** Só a equação mesmo, só a definição. E embaixo tem uma "equaçãozinha" que tem duas linhas, que me complicou um pouco por causa do índice, dos parênteses auxiliares e esse tipo de coisa.
> **P –** Certo. Na parte de baixo que você fala, é no 'em que'? Depois do 'Em que'?
> **A –** É, essa parte eu não li.

Usam-se léxicos da linguagem formal que não são utilizados com frequência pelos estudantes de uma maneira geral em seu cotidiano e entorno cultural. Tanto esse fato, como o desconhecimento ou esquecimento de alguns léxicos na linguagem Braille pela estudante cega nos levam a acreditar, assim como Dionísio, Brandt, e Moretti (2014, p. 518) que esses léxicos se tornam objeto de aprendizagem, além do que buscam representar. Além disso, desconsiderando o texto em extenso, a definição da Equação possui 43 caracteres em tinta, já em Braille possui 70 caracteres. A diferença de 27 caracteres da tinta ao Braille, tanto acarreta maior tempo de leitura, como parece dificultar a compreensão pela estudante.

Nesse caso, o alerta se faz também, pois a partir do momento em que os símbolos em Braille não são identificados pode haver um impedimento na designação do objeto do saber e assim, na função referencial da língua (Duval, 2004, p. 88). Como consequência, a compreensão do objeto de saber poderá ficar comprometida. Percebemos então, a necessidade do trabalho com os símbolos matemáticos em Braille do CMU em sala de aula com mais frequência, seja pelo professor de matemática ou na sala de AEE (Atendimento Educacional Especializado), pois constatamos em entrevista com uma professora alfabetizadora do Estado que os símbolos de matemática em Braille não são revistos durante a vida estudantil.

As problemáticas levantadas pela breve análise do CMU, tanto pelas suas faltas como pelos seus excessos no que cerca a linguagem matemática em Braille nos levam a reiterar nesta pesquisa, o que havia sido indicado em Anjos (2015, p. 133): a necessidade urgente de revisão do Código.

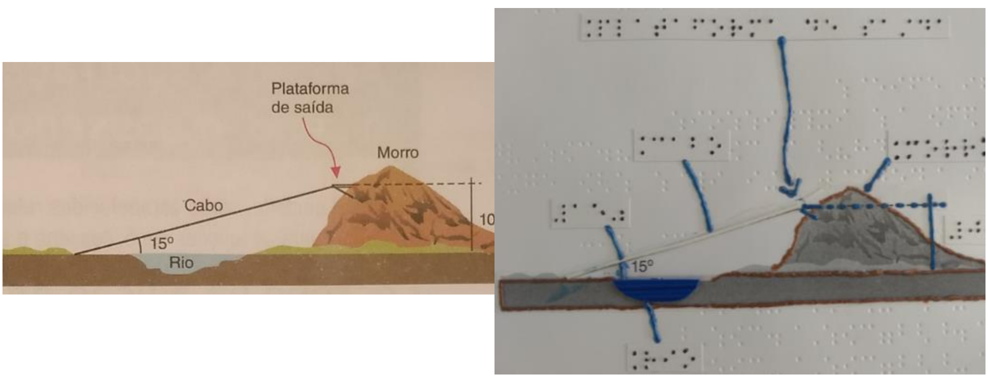
Outro elemento de destaque relaciona-se à limitação de escritos em Braille no papel. Percebemos, assim, que alguns desses escritos não eram produzidos pelas mãos da própria estudante cega, tanto pela dificuldade de escrita na máquina Braille de algumas representações em matemática (por exemplo, o algoritmo da divisão, operações em figuras geométricas, matrizes, alguns tipos de tabelas) como também, pela valorização dada por ela mesma, aos cálculos mentais. Percebemos que a dificuldade encontrada em representar alguns conceitos matemáticos no papel, geralmente, pela demora na execução desta tarefa, fez a estudante tratar alguns conceitos apenas pela via das representações mentais.

Em muitas situações, os cálculos mentais feitos pela estudante não alcançavam o resultado esperado, o que causava certa insatisfação e, como consequência disso, para determinados conceitos, o desinteresse em aprender aumentava, caso que pode ocorrer conforme prevê Charlot (2000, p. 70), uma vez a aprendizagem não se mostra significativa e apresenta dificuldades acentuadas. Assim, como indicado por Charlot (2000, p. 55), a desmotivação pode influenciar na aprendizagem matemática desta estudante, sendo um fator externo envolvendo a Relação com o Saber estabelecida no contato com o material didático em Braille e o saber-objeto.

Além dos elementos apresentados anteriormente, estivemos atentos ao alerta dado por Duval (2004, 2011, 2012) para a necessidade que haja, além da variedade de registros de representação, a coordenação entre eles para que se alcance a compreensão em matemática.

Para tanto, mostramos a situação percebida no Encontro 6 e mostrada na Figura 3 a seguir:

Figura 3 –Imagem do problema em tinta e em Braille



Fonte: Anjos (2019, p. 220).

Ao ser questionada sobre a dificuldade encontrada na questão, a estudante responde que

> **A** – Achar o triângulo retângulo, que já foi falado, que está bem complicado de achar, tanto por causa do tamanho da figura, é difícil de achar na primeira vez que toca e, acho que é isso que mais complica. É a figura de novo, sempre a figura.

Além de deixar explícito o seu desconforto com registros figurais, no desenrolar da questão, no caso em tela, a aluna deveria reconfigurar a figura para perceber nela um triângulo retângulo, ou seja, transportar o segmento vertical para formar um triângulo retângulo. Nesta atividade solicitada, não basta que a estudante reconfigure uma figura geométrica dada para que haja a compreensão, afinal ela não está dada explicitamente e sim, por meio de uma imagem. Para esta situação, Duval (2011, p. 91) nos diz que existe uma oposição entre o desenho e a figura:

> O desenho é a configuração particular que mostra no papel, no quadro negro ou no monitor do computador, enquanto a figura seria as propriedades do objeto representado pelo desenho ou, ainda, a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto (Duval, 2011, p. 9).

Esta oposição "suprime a importância do olhar e da visualização" (Duval, 2011, p. 91), em que não se vê propriedades no desenho e sim, no objeto representado pela figura. Em outras palavras, quando o desenho não permite a identificação da figura geométrica, o acesso ao objeto e às suas propriedades fica comprometido. Nesta situação apresentada, a estudante mostrou que há dificuldades em identificar o triângulo retângulo (figura) pela imagem transcrita.

Diante de todos esses exemplos, podemos inferir que, mesmo com uma diversidade de registros sendo apresentada a estudante em seu material didático em Braille, para alguns deles há a necessidade de modificações visto o acesso diferenciado dessa estudante em alguns objetos que são transcritos para o Braille. A visualização de figuras transcritas para o Braille não transparece a dimensão 3D, pois elas são transcritas no plano e apresentam uma dificuldade de compreensão, anteriormente, já indicada por Thompson e Cronicle (2008, p. 77). Resumidamente, a transcrição que é realizada se utiliza de uma perspectiva linear para mostrar um objeto tridimensional sem recorrer aos artifícios apontados por Gomes Filho (2008, p. 45) para transmitir a ideia de volume, como a utilização de texturas que possam identificar a tridimensionalidade.

Em outro exemplo referente ao acesso às figuras tridimensionais apresentado no Encontro 1, percebemos que a sinergia entre registros figurais e discursivos que é indicada por Duval (2004, p. 155), não permitiu o acesso ao objeto de saber em questão. Nesse Encontro a estudante teve contato com uma figura transcrita na forma de um paralelepípedo retângulo, além do enunciado da questão que apresentada a figura pelo nome. No entanto, mesmo lendo o enunciado, a estudante não conhecia propriedades do objeto geométrico em questão, demonstrando que o que foi tateado e o que foi lido (paralelepípedo retângulo) não a fazia lembrar de nada do seu cotidiano ou mesmo do que já tateou em outros textos matemáticos. Como ela lembraria de algo da qual não possui lembrança tátil?

Como esperado, tendo apenas acesso à palavra e não ao registro figural pela opacidade do objeto ostensivo transcrito, percebemos que a estudante não acessou o objeto do saber em matemática no que se refere à figuras geométricas tridimensionais. Em matemática a palavra faz parte de um léxico que não é comumente utilizado pelos estudantes e nesse caso, ele, por si, se transforma em objeto de aprendizagem (Dionisio, Brandt, & Moretti, 2014, p. 518) o que pode acontecer tanto para o estudante cego como para aquele que enxerga. Mesmo porque, pelo que indica Duval (2004, 2011), precisamos transitar de forma coordenada por, no mínimo dois registros de representação, para compreender o objeto de saber. Na situação anterior, percebemos o uso simultâneo de dois registros de representação, citados por Duval (2004, p. 155) pelo poder de sinergia que demonstram ter, mas para o caso da estudante cega, como a apreensão perceptiva tátil foi transcrita mostrando distorções pela lei gestáltica de continuidade, a figura geométrica, além de não remeter a nada conhecido, por fim é classificada pela estudante como algo “pior para se imaginar.”

Ainda mencionando as figuras geométricas tridimensionais, pontuamos o que foi percebido nos Encontros 4, 5 e 10, como uma possível estratégia de apresentação dos objetos tridimensionais, a utilização de material concreto juntamente à representação semiótica transcrita tendo detectado às fragilidades de acesso aos objetos até aqui mencionados. Em vários exemplos discutidos nos Encontros, a estudante cega mostrou dificuldades no acesso ao objeto pelo uso da representação semiótica transcrita ao Braille, mas ao apresentarmos um objeto concreto, como no caso da vela em forma de cubo, a estudante mostrou compreender o que estava sendo proposto. A vela na forma de cubo é um objeto real e permitiu induzir o acesso ao objeto ostensivo cubo.

Diante de todos os elementos semio-cognitivos apontados acima e de tantos outros apresentados em Anjos (2019), reforçamos a ideia: o livro da estudante cega deve ser pensado levando em conta as especificidades do funcionamento cognitivo e semiótico da sua aprendizagem em matemática e não ser elaborado levando em conta o material de quem enxerga. Mesmo porque a própria estudante menciona a sua insatisfação e desaprovação com o Livro Didático em Braille dizendo que “muitas coisas alí, são apenas escritas para os cegos, mas não explicadas como deve ser. É como se um vidente fosse ler Braille”.

Toda esta análise leva em consideração a possibilidade de existência do Livro Didático em Braille nas classes inclusivas. Assumindo que esta não seja a realidade de algumas classes, as dificuldades aumentam consideravelmente e a discussão se volta para a forma de inclusão que se propõe em nossas classes regulares de ensino, que almejam a inclusão.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

Diante de todos os elementos semio-cognitivos apontados anteriormente, algumas reflexões surgem. A primeira delas tem relação à formação docente do professor de matemática. O que ainda falta em nossa formação para que possamos caminhar na direção de pensarmos a inclusão enquanto estamos nos formando professores? Sabemos que o que acontece ainda em nossos cursos de formação docente não está voltado, na sua maioria, para o perfil de aprendizagem do sujeito, em contraponto, a formação inicial parece preparar o graduando para receber em classes regulares de ensino, um sujeito idealizado e padronizado pela lógica da normalidade (Bock & Nuernberg, 2018, p. 8).

A formação diz respeito também à forma como o professor lida com a diversidade em classes regulares. Citamos a situação em que a estudante cega se mostrou insatisfeita na sua relação com o professor, quando ele ia ao quadro e explicava a resolução de um problema, por exemplo, usando os termos *"ah, esse vezes esse"*, sem ter a preocupação de ditar os números aos quais estava querendo relacionar. Essas simples atitudes diárias e corriqueiras podem impactar negativamente na relação dessa estudante cega com o saber, pois ao não ter um incentivo vindo de fora, a estudante pode sentir-se desmotivada, uma vez que a motivação é um movimento que acontece de fora para dentro no sujeito (Charlot, 2000, p. 55).

É papel também do professor permitir formas de acesso diferenciadas a alguns conhecimentos para desenvolver a autonomia da estudante, o conhecer pelas próprias mãos, pela sua própria capacidade que precisa ser evidenciada. Acreditamos que materiais adaptados, calculadoras que falam ou mesmo o Multiplano podem gerar autonomia e assim, alterar a Relação com o Saber matemático que ela estabelece.

Sabemos do caráter inacabado de um trabalho como esse, assim indicamos uma temática que fica em aberto para futuros trabalhos que é a questão do acesso ao objeto de saber em matemática aos estudantes com baixa visão ou cegueira adquirida, já que nesse trabalho focamos na questão da cegueira congênita. Enfatizando as discapacidades (Torres, Mazzoni, & Mello, 2007) até das deficiências semelhantes, inferimos que existem importantes diferenças a serem levadas em consideração na aprendizagem desses estudantes que apresentem a cegueira adquirida em idade infantil ou adulta e daqueles que possuem a baixa visão.

Sem a pretensão de esgotar o assunto, acreditamos ter caminhado na direção de contribuir para uma discussão com o entorno escolar envolvido com a educação de estudantes cegos em matemática no que cerca algumas das especificidades que não podem ser negligenciadas nem durante as aulas de matemática, nem durante a elaboração do material didático de matemática em Braille.

REFERÊNCIAS

Anjos, D. Z. (2015). *Da tinta ao Braille: estudo de diferenças semióticas e didáticas dessa transformação no âmbito do Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa - CMU e do livro didático em Braille*. 161fl. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e

Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Anjos, D. Z. (2019). *O que se revela quando o olhar não alcança? Em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega*. 389fl. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Anjos, D. Z., & Moretti, M. T. (2017). Ensino e Aprendizagem em Matemática para Estudantes Cegos: Pesquisas, Resultados e Perspectivas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação*, 10(1), 15-22.

Bock, G. L. K., & Nuernberg, A. H. (2018), As concepções de deficiência e as implicações nas práticas pedagógicas. In: VIII Congresso de Educação Básica. *Anais do VIII COEB*, Florianópolis. 1-10.

Brasil. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico.

Brasil. (2006). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. *Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa*. Elaboração: Jonir Bechara Cerqueira et al. Brasília: MEC/SEESP.

Brasil. (2015). *LEI Nº 13.146, de 6 jul.2015*. Dispõe sobre a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência. Brasília, Diário Oficial: 7/7/2015.

Brasil. (2017). INEP. *Censo Escolar da Educação Básica 2016*. Disponível em: http://download.inep.gov.br. Acesso em: out. de 2017.

Brasil. (2019). INEP. *Censo Escolar da Educação Básica 2018*. Disponível em: http://download.inep.gov.br. Acesso em: mar. de 2019.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Dionizio, F. Q., & Brandt, C. F., & Moretti, M. T. (2014). Emprego das funções discursivas da linguagem na compreensão de erros de alunos em uma atividade que envolve noções de trigonometria. *Perspectivas da Educação Matemática*: Mato Grosso do Sul, 7, 513-536.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: Proem.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de M. T. Moretti. *Revemat*, Florianópolis, 7(2), 266-297.

Gil, M. (Org.). (2000). *Deficiência Visual*. Brasília/MEC: Secretaria de Educação à distância.

Gomes Filho, J. (2008). *Gestalt do objeto*: sistema de leitura visual da forma. 8ª ed. São Paulo: Escrituras Editora.

Moretti, M. T., & Anjos, D. Z. (2016). Transcrição da tinta ao Braille: apontamentos de algumas diferenças semio-cognitivas. *Zetetiké*, 24(3), 395-408.

Nolan, C. Y., & Kederis, C. J. (1969). *Perceptual factors in Braille Word recognition*. New York: American Foundation for the Blind.

Ochaita, E., & Rosa, A. (1995). *Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas*. In: COLL, C., & PALACIOS, J., & MARCHESI, A. Desenvolvimento psicológico e educação: necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artmed.

Organização mundial da saúde. (2018). *Dia mundial da visão*. Disponível em: http://www.who.int/blindness/en/. Acesso em: 03/2018.

Pereira, T., & Borges, F. A. (2017). O ensino de matemática para alunos deficientes visuais inclusos: uma análise da produção bibliográfica brasileira em periódicos científicos nos últimos dez anos. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, XIV, 2017, Cascavel. *Anais: XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática*, Cascavel. p. 1-15.

Romanowski, J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. *Diálogo Educacional*. 6(19), 37-50. Recuperado de: https://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-em-ensino-pos.0242-posensino/romanowski-j.-p.-ens-r.-t.-as-pesquisas denominadas-do-tipo-201cestado-da-arte201d.-dialogos-educacionais-v.-6-n.-6-p.-37201350-2006/view.Thompson, L., & Cronicle, E. (2006). Beyond visual conventions: Rethinkingthe design of tactilediagrams. *The British Journal of Visual Impairment*, 24(2), 76-82.

Torres, E. F., & Mazzoni, A. A., & Mello, A. G. (2007). Nem toda pessoa cega lê em Braille nem toda pessoa surda se comunica em língua de sinais. *Educação e Pesquisa*, 33(2), 369-385.

CAPÍTULO XI

PERCEPÇÕES DE UM ESTUDO DE CASO COM UM ALUNO COM DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO – UMA ABORDAGEM BASEADA NAS FUNÇÕES DISCURSIVAS DE RAYMOND DUVAL

Jorge Paulino da Silva Filho
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

A Declaração Universal dos Direitos Humanos, no seu artigo XXVI, afirma que "Todo ser humano tem direito à educação". O não cumprimento desse direito fez com que movimentos internacionais interessados nas garantias das pessoas mais vulneráveis promulgassem, em 1990, na Tailândia, a Declaração Mundial sobre a Educação para Todos, considerada um marco para a Educação Inclusiva. Quatro anos depois, em Salamanca, na Espanha, ocorreu a Conferência sobre Necessidades Educativas Especiais: Acesso e Qualidade, onde foi elaborada a Declaração de Salamanca, um documento que estabeleceu o princípio da inclusão como forma de alcançar a meta da Educação para Todos. (SBEM, 2019).

Uma das vertentes da Educação Inclusiva é a Educação Especial. O Brasil, signatário da Convenção Internacional sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência e seu Protocolo Facultativo, que ocorreu em Nova York, em 30 de março de 2007, promulgou o Decreto 6.949, de 25 de agosto de 2009, conforme Brasil (2009), onde assume cumprir o que propõe essa Convenção. Este movimento Inclusivo fez com que, de 2008 a 2018, aumentasse cerca de 271% o número de alunos com necessidades especiais nas escolas regulares brasileiras, segundo o Censo Escolar de 2018. Esta mesma pesquisa ainda mostrou que 83,61% dos estudantes nesta situação estão em classes comuns. (SBEM, 2019).

Naturalmente que este cenário produziu inúmeras demandas, sejam de natureza logística, operacional, técnica ou pedagógica. Assim, felizmente, a necessária onda da Educação Inclusiva chegou no terreno da Educação Matemática no Brasil. Neste sentido, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática promoveu em outubro de 2019 o Primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática Inclusiva (ENEMI), no Rio de Janeiro, onde foram apresentadas várias pesquisas, já concluídas ou em andamento, acerca da temática da Inclusão.

Participamos daquele evento apresentando um trabalho sobre as possibilidades do uso das Funções Discursivas de Raymond Duval na análise do discurso de um aluno com Discalculia do Desenvolvimento (DD). Tratou-se de um recorte de uma pesquisa de doutorado em andamento que envolve a investigação, via estudo de caso, da aprendizagem de um aluno com DD apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Nosso interesse por essa temática tem forte relação com o sentimento de impotência que inquieta a grande maioria dos professores que têm em suas turmas regulares a presença de alunos com necessidades de constantes adaptações pedagógicas e curriculares. Se a aprendizagem da matemática é um desafio para a maioria dos alunos, como abordar esses saberes com um aluno cego, surdo, com dislexia ou DD, por exemplo? Assim, o presente texto é uma ampliação do trabalho que apresentamos no ENEMI em outubro de 2019.

O QUE É A DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO

É um transtorno de aprendizagem que afeta, principalmente, as habilidades aritméticas, conforme o Código Internacional de Doenças (CID-10) da Organização Mundial da Saúde:

> Transtorno que implica uma alteração específica da habilidade em aritmética, não atribuível exclusivamente a um retardo mental global ou à escolarização inadequada. O déficit concerne ao domínio de habilidades computacionais básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão mais do que as habilidades matemáticas abstratas envolvidas na álgebra, trigonometria, geometria ou cálculo (OMS, 1993, p. 48).

Para Kosc (1974, p. 48), é necessário enfatizar que o termo desenvolvimento tem relação com a criança, pois a DD é um “[...] distúrbio da maturação das habilidades matemáticas”. A intenção, para esse pesquisador, é deixar claro que a DD é um transtorno de ordem genética ou congênita, portanto, não adquirida.

A definição mais atual, proposta pelo Consenso Internacional[1] estabelece que:

> [...] a DD é um transtorno heterogêneo que decorre de diferenças individuais tanto no desenvolvimento quanto no funcionamento da cognição numérica, nos níveis neuroanatômico, neuropsicológico e comportamental, bem como em suas interações (Kaufmann et al., 2013 apud Santos, 2017, p. 62).

[1] Grupo de 14 renomados investigadores de 6 países (Alemanha, Áustria, EUA, Israel, Reino Unido e Suiça) que elaboraram um artigo (Kaufmann et al., 2013) propondo diretrizes mais atuais para tratar a DD (Santos, 2017, p.58).

Com relação às características clínicas, ou sintomas mais comuns, podemos citar, conforme Santos (2017, p. 62), o recurso (recorrente) a “[...] estratégias imaturas, como contar com os dedos para resolver problemas ou desenhar elementos não simbólicos[2] no caderno para apoiar a contagem”. Essa mesma autora também aponta dificuldades para aprender e lembrar fatos aritméticos, prejuízo no senso numérico, dificuldades para estimar quantidades, reduzida capacidade de subitização[3], dificuldades com a transcodificação de representações, dificuldades para contar em ordem inversa, incompreensão do sistema decimal, dificuldades para decompor um problema em partes, incompreensão dos procedimentos de cálculo e seus conceitos etc. como sintomas da DD (Santos, 2017).

Outro pesquisador, Díaz (2011), cita como sintomas, entre outas coisas, a confusão de cifras de sons semelhantes ou de escritas simétricas, a não abreviação (não conseguir contar de “2 em 2”), a confusão de signos semelhantes (+ por – por exemplo), o colunamento deficiente e o início da adição ou subtração pela esquerda.

Quanto à prevalência, Shalev (2004, p. 766) destaca que “Estudos populacionais em países como EUA, Alemanha, Índia e Israel demonstram que a prevalência de discalculia do desenvolvimento varia de 3 a 6,5%”. Confirmando isso, Reigosa-Crespo et al. (2012), numa pesquisa com 11.652

---

[2] Entende-se por elementos não simbólicos (ou representações numéricas não simbólicas) aqueles recursos rudimentares (como desenhos de pontos, linhas, barras, objetos físicos etc.) que servem de suporte para se efetuar operações matemáticas básicas, especialmente na primeira infância, mas que vão sendo gradualmente menos utilizados à medida em que a criança tem acesso às representações numéricas simbólicas (numerais arábicos, sinais de operações, algoritmos etc.) (Barth; La Mont; Lipton; Dehaene; Kanwisher; Spelke, 2006).

[3] Do latim *subitus*, consiste na habilidade de subitamente quantificar um pequeno número de itens (de 1 a 4, aparentemente), sem precisar contá-los conscientemente (SANTOS, 2017, p. 207).

crianças de 27 escolas de Havana, em Cuba, com idades entre 6 e 17 anos, estimaram uma prevalência de 3,4% de DD. Fugindo um pouco desse intervalo, no Brasil, Bastos et al. (2016) estimaram uma prevalência de 7,8% de DD dentre uma população de 2.709 crianças do quinto ano de 28 escolas públicas do município de São José do Rio Preto – SP.

É importante destacar o que afirma Santos (2017) sobre a relação da prevalência entre a dislexia e a DD. Apesar de ambas estarem próximas de 6%, a DD recebe bem menos atenção por parte dos clínicos, pesquisadores e professores, bem como de toda sociedade. Segundo ela, isso explica-se, talvez porque, culturalmente, o insucesso na matemática seja socialmente mais tolerável.

Acerca das causas e origens (etiologia) dos transtornos de aprendizagem, ainda existe certa indefinição. Ohlweiler (2016, p. 109), afirma que “Qualquer fator que possa alterar o desenvolvimento cerebral do feto facilita o surgimento de um quadro de transtorno da aprendizagem”. Kirk (2009) também está nessa linha, e aponta para evidências de fatores genéticos, bem como de causas externas, como pré-natal inadequado ou exposição do feto a substâncias nocivas.

Na próxima seção abordaremos alguns aspectos e conceitos da TRRS, que é o referencial teórico com o qual investigaremos a aprendizagem de um sujeito com DD.

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Ela traz importantes elementos para a compreensão dos mecanismos de aprendizagem da matemática. Segundo Duval (1995), na matemática não temos acesso perceptivo ou instrumental aos objetos, ao contrário do que ocorre em outras áreas do conhecimento, como a biologia ou a geografia, por exemplo. Desse modo, torna-se imprescindível o papel dos registros de representação semiótica, como instrumentos que permitem o "acesso" aos objetos matemáticos. Como exemplos de registros, citamos os gráficos cartesianos, as figuras geométricas, os sistemas de escritas numérica, fracionária, algébrica, simbólica e a própria língua natural.

Duval (2011) concebe um modelo triádico para as representações semióticas, onde se destacam três polos. Os dois primeiros, o conteúdo (ou significado) e a forma (ou significante) compõem o registro. O terceiro polo é o próprio objeto (inacessível perceptivelmente) que é a referência do registro. Moretti e Thiel (2012), na tentativa de organizar essas noções, propuseram o esquema dos polos constitutivos de uma representação, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Esquema constitutivo dos polos da representação

Fonte: Moretti e Thiel (2012, p. 383).

Duval (1995, p. 68) afirma que quando "o objeto pode ser visto, apontado, tocado e manipulado, parece muito fácil fazer a distinção entre o representante e o representado". Já na matemática, por não termos acesso direto ao objeto, é muito frequente a confusão entre o objeto e qualquer um de seus representantes. Para sair desse impasse, Duval (1995) defende que é necessário dispor de várias representações desse objeto e coordená-las. Essa é a sua hipótese fundamental de aprendizagem:

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão" (Duval, 2012, p. 282).

Vê-se, então, que "fazer" matemática é uma tarefa inseparável da manipulação de registros de representação semiótica. Dito de outro modo, através de uma frase emblemática do próprio Duval (1995, p. 5), "não existe noesis sem semiose", em que semiose significa a apreensão ou produção de uma representação semiótica, enquanto que noesis é a apreensão conceitual do objeto representado.

Dentre todos os aspectos contemplados pela vasta teoria de Duval, nosso estudo se apoiará, predominantemente, naquele que lida com a análise do discurso matemático, tratado pelo nome de *Funções Discursivas*. É sobre elas que faremos uma breve discussão nas linhas seguintes.

A ANÁLISE DO DISCURSO MATEMÁTICO

O que é o discurso? Para Duval (1995) o discurso consiste no uso de uma língua para dizer alguma coisa, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários. Esse autor destaca duas funções que uma língua deve cumprir para que possa, não somente haver o discurso, mas também para dar condições de existência à multiplicidade de discursos presentes em nosso entorno cultural. Ele as chama de funções *metadiscursivas* e de *discursivas* (Duval, 1995).

As *metadiscursivas* são funções comuns a todos os sistemas de representação, linguísticos, simbólicos ou figurais. São três: a *comunicação* (a língua natural é o sistema semiótico mais apropriado para cumprir essa função, sob a forma de conversação, interpelação, comentário, exposição, etc.), o *tratamento* (dá potencialidade ao discurso, tornando explícito o que está implícito) e a *objetivação* (tomada de consciência) (Duval, 1995).

Já as funções *discursivas* são específicas do emprego de uma língua e necessárias para que seja possível um discurso, de tal modo que possa ser compartilhado com seus interlocutores. São elas: a função *referencial*, a *apofântica*, a função *de expansão discursiva* e a função de *reflexividade*. Um sistema semiótico que cumpre essas quatro funções pode ser então considerado como uma língua (Duval, 1995). Cada uma dessas quatro funções é cumprida com base em diferentes operações discursivas. Falaremos, a seguir, de cada uma dessas funções e de algumas operações.

A função Referencial - É a que permite designar objetos. As operações discursivas a ela associada são:

- A *designação pura*, que consiste na identificação de um objeto matemático como, por exemplo, chamar de V o vértice de uma pirâmide.
- A *categorização simples*, com a qual se identifica um objeto baseado em uma de suas qualidades. Duval (1995, p. 99) traz como exemplo “Seja I a metade do segmento AB...”. Ele acrescenta que essa operação não é suficiente para identificar um objeto. Ela deve estar combinada com a operação de *determinação*;
- A *determinação*, que dá precisão ao campo de aplicação da operação de *categorização simples*. No exemplo anterior “Seja I a metade do segmento AB...” o artigo “a” torna preciso o termo “metade”;

- A *descrição*, que é usada para identificar um objeto através do cruzamento de diversas operações de *categorização*. De acordo com Brandt, Moretti e Bassoi (2014), na frase “Determinar o MMC dos números 3, 4 e 9”, MMC designa o Mínimo Múltiplo Comum; 3,4 e 9 são algarismos que designam os números e a preposição “dos = de + os” interliga essas duas designações. Em Duval (1999, p. 99, grifo do autor) encontramos o exemplo “Seja I o ponto de intersecção das alturas de um triângulo”. Aqui, “I” é uma designação pura; “intersecção”, “alturas” e “triângulo” são *categorizações simples* e as preposições em negrito fazem a interligação dessas *categorizações*.

A função Apofântica – Está ligada ao ato de se produzir enunciados completos (ou unidades apofânticas, como Duval (1995) prefere) acerca dos objetos que já foram designados. Uma expressão é considerada um enunciado completo quando admite um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores. O que diferencia um enunciado completo de uma mera expressão referencial está no valor que o primeiro assume, que pode ser lógico (verdadeiro ou falso), epistêmico (certeza, necessidade, absurdo etc.) ou social (uma pergunta, uma ordem, um desejo etc.) (Duval, 1995).

O enunciado completo “venha rápido!” (Duval, 1995, p. 112) tem apenas um valor social (uma ordem). Por outro lado, “a soma dos ângulos de um triângulo é maior do que 180º” (Duval, 1995, p. 112) tem um valor epistêmico e lógico (epistêmico-certeza, lógico-falso, considerando o contexto da geometria euclidiana). Duval (1995) também afirma que ao se fazer uma promessa cuja realização é improvável ou absurda, estamos diante de um enunciado completo com valores epistêmico e social combinados. Por exemplo, a frase “Serei o melhor jogador de futebol do mundo!” (epistêmico-certeza, social-promessa).

O cumprimento da *função apofântica* se dá através de duas operações apofânticas que podem ocorrer simultaneamente ou individualmente: a *predicação* e o *ato ilocutório* (Duval, 1995).

A *predicação* vincula a expressão de uma propriedade, de uma ação ou de uma relação, com uma expressão que designa objetos. Assim, esta operação é inseparável das expressões referenciais e, além disso, um enunciado produzido a partir da *predicação* pode assumir um valor epistêmico combinado com um valor lógico ou, exclusivamente, um dos dois (Duval, 1995).

Já o *ato ilocutório* está associado à intencionalidade do locutor. Para Duval (1995, p. 113), “[...] é o ato que, através da produção do enunciado, confere a este enunciado um valor social de ato que compromete o locutor ao destinatário”. Desse modo, o *ato ilocutório* é o responsável por atribuir a uma expressão que provém de uma *predicação* o seu valor de afirmação, declaração, pergunta, ordem etc. (Duval, 1995).

Por exemplo, a frase “Se a, b e c são lados de um triângulo retângulo, com a o maior lado, então $a^2 = b^2 + c^2$” é um enunciado completo (ou uma unidade apofântica), já que ela “fala algo” acerca de objetos já designados, como “a”, “b”, “c”, “triângulo retângulo” etc. A *predicação* ocorre quando se vincula ao sujeito “a, b e c lados de um triângulo retângulo” o predicado “$a^2 = b^2 + c^2$”. Já o *ato ilocutório* está ligado à intencionalidade do locutor e o engaja ao interlocutor (leitor, por exemplo), conferindo a este enunciado um valor social de asserção.

A função de Expansão Discursiva - Considerada por Duval (1995) como a mais importante de todas, tem a finalidade de vincular as unidades apofânticas de forma lógica, harmônica, sistemática, compreensível, cumprindo o sentido literal da expressão “expansão do discurso” e permitindo obter, por fim, o que costuma ser chamado de um relato, demonstração, dedução, narração, explicação, comentário, cálculo etc. (Duval, 1995).

Este autor categoriza quatro formas de expansão discursiva: *lexical*, *formal*, *natural* e *cognitiva*. Elas são definidas através do cruzamento de quatro mecanismos de expansão que se caracterizam pela similaridade entre as unidades apofânticas: *similaridade semiótica* ou *semântica* e *similaridade interna* ou *externa*. Estas similaridades estão ligadas à relação de continuidade entre as unidades apofânticas, quando existe ou não significantes comuns às duas unidades que se pretende ligar e quando se necessita ou não de uma terceira unidade apofântica (terceiro enunciado) para ligá-las.

Duval (1995) chama de expansão *lexical* quando ocorre *similaridade interna e semiótica*, isto é, quando existem significantes comuns entre duas unidades apofânticas e não se recorre a um terceiro enunciado. Segundo ele, essa forma de expansão é baseada “[...] na recuperação de um mesmo significante, por identificação homofônica[4] ou homográfica[5], o que assegura a continuidade e a coesão do discurso de uma frase à outra” (Duval, 1995, p. 130). É nesse tipo de expansão que se baseia o trabalho associativo inconsciente que subjaz a produção das representações mentais. Freud foi o

[4] Homofônicas: palavras que tem a mesma pronúncia, mas grafia e significados diferentes, como “conserto” e “concerto”.
[5] Homográficas: palavras com mesma grafia e pronúncia, mas com significados diferentes, como “manga” (fruta) e “manga” (de camisa).

primeiro a identificar esse tipo de mecanismo de expansão na linguagem do inconsciente (sonhos, lapsos, chistes) (Duval, 1995). Um exemplo está no trecho da música “Vamos fugir” do cantor Gilberto Gil: “[...] Flores que a gente **regue** / Uma banda de maçã / Outra banda de **reggae** [...]” (grifo nosso). As palavras grifadas são homofônicas.

Já *expansão formal*, que evolui por *similaridade semiótica* e *externa*, ou seja, existem significantes comuns entre duas unidades apofânticas, mas recorre-se a um terceiro enunciado na transição delas, tem como característica, segundo Duval (1995, p. 130) “a aplicação de regras de substituição baseadas exclusivamente em símbolos que representam variáveis ou proposições [...]. Estas regras permitem obter uma nova asserção através da substituição de símbolos em uma asserção de partida”. Trazemos, como exemplo, uma proposição da teoria dos números: $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{a}/\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}, \boldsymbol{ent\tilde{a}o}\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}.$ Não somente ela, mas também a sua demonstração são exemplos de *expansão formal*.

A *expansão natural* se dá com *similaridade semântica* e *interna*, isto é, não existem significantes comuns entre duas unidades apofânticas, mas ocorre equivalência referencial entre duas expressões dessas unidades e, além disso, não se recorre a um terceiro enunciado na transição delas. Esse tipo de expansão tem seu habitat no uso da língua natural e mobiliza a rede semântica da língua e os conhecimentos específicos do meio cultural dos interlocutores. Está presente nas descrições, narrações e, no âmbito da matemática, aparece, por exemplo, nas demonstrações por absurdo e no silogismo aristotélico. O encadeamento das frases “Um botijão de gás explodiu. A casa se queimou.” é um exemplo desse tipo de expansão (Duval, 1995). Outro exemplo, via silogismo aristotélico, é: “Todo quadrilátero com dois lados paralelos é trapézio; um quadrado é um quadrilátero que tem dois lados paralelos; logo, todo quadrado é trapézio".

Por fim, a *expansão cognitiva* (*similaridade semântica* e *externa* – não existem significantes comuns entre duas unidades apofânticas, mas ocorre equivalência referencial entre duas expressões dessas unidades e, além disso, recorre-se a um terceiro enunciado na transição delas) é caracterizada pelo uso especializado da língua natural e está presente nas descrições e explicações técnicas ou teóricas. Aqui se faz uso de um vocabulário altamente específico e técnico. No âmbito da matemática, aparece nas demonstrações (inclusive por absurdo), nas explicações e nos raciocínios dedutivos.

A função de Reflexividade - Ela permite assinalar o valor, o modo ou o estatuto de uma expressão por parte de quem a enuncia. Está ligada à intencionalidade que o locutor impõe no enunciado da expressão. É o elo entre o ato intencional de produção da expressão e as condições de interpretação por parte do interlocutor. E essas marcas de intencionalidade não se fazem necessárias apenas na comunicação do dia a dia, mas também nos discursos científicos (Duval, 1995).

Alicerçados nesse corpo teórico, empreendemos nosso *estudo de caso*. Nas linhas que seguem, destacaremos alguns diálogos ocorridos durante a resolução de alguns exercícios, em que certas *Funções* do *Discurso* se impuseram, notadamente a *Referencial* e a de *Expansão Discursiva*.

PERCEPÇÕES DE ALGUNS ENCONTROS

O sujeito do nosso *estudo de caso* é um estudante que chamaremos de José. Ele é um garoto de 16 anos, diagnosticado com DD, dislexia e distúrbio do processamento auditivo central. Concluiu o nono ano do ensino fundamental em uma escola pública do município de São José – SC, em dezembro de 2019. De agosto a dezembro daquele ano realizamos encontros semanais na biblioteca da sua escola, uma vez por semana, no período contraturno e com duração de 50 minutos. Esses primeiros encontros tiveram o formato de aula particular, nos quais tirávamos suas dúvidas e o ajudávamos a refazer algumas provas. A pretensão era, também, naquele momento inicial, a de promover um laço de confiança recíproca, pois pretendemos continuar com esses encontros semanais até a metade 2021. Fomos bem-sucedidos. Tanto no laço de confiança quanto na sua aprovação no colégio.

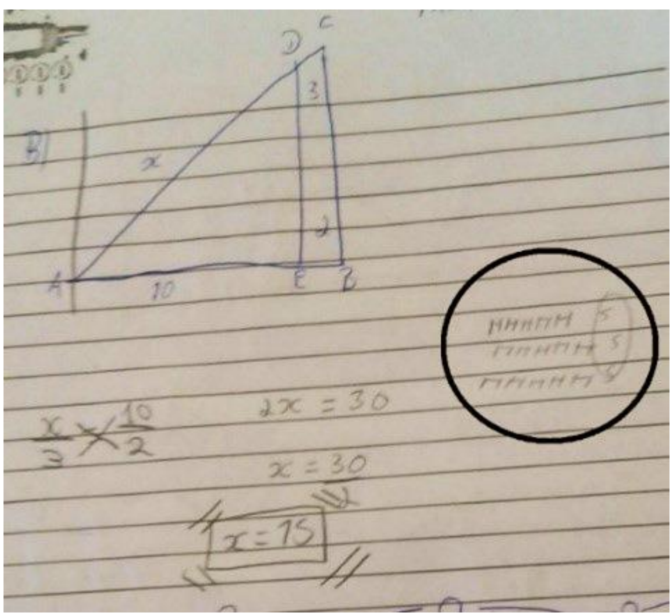
Os relatos que traremos a seguir foram coletados naqueles encontros de 2019. Neste ano de 2020 ele ingressou no ensino médio numa escola diferente e, por conta das mudanças ocorridas no cotidiano mundial, causados pela pandemia do Coronavírus, ainda não retomamos os trabalhos presenciais com José. Apresentamos, a seguir, uma lista de fatos que consideramos relevantes durante aqueles encontros e que dialogam com o referencial teórico da DD e da TRRS que previamente discutimos**.**

Todas as características clínicas trazidas por Santos (2017) e por Díaz (2011), em menor ou maior grau, observamos no nosso aluno. Foi comum vê-lo trocar a operação de adição por multiplicação, não lembrar de fatos aritméticos básicos, como a multiplicação de quatro por três, mesmo alguns minutos depois de já tê-la efetuado. A confusão de cifras de sons semelhantes, como falar dezesseis, mas escrever dezessete, por exemplo, é algo que também presenciamos.

Como é marca registrada da DD, presente em todos os conceitos que trouxemos desse transtorno, ele apresentou grande dificuldade com as quatro operações básicas e com a tabuada. O uso dos dedos para apoiar a resolução de operações aritméticas, mesmo muito simples, foi algo que se destacou dentre as observações que fizemos do aluno, como se fizesse parte do seu aparato comportamental, dos seus trejeitos durante a resolução de exercícios. Isso vem ao encontro do que apontam Souza (2017) e **Díaz (2011),** como características clínicas ou sintomas da DD.

Ilustrando outra característica clínica dos sujeitos com DD – recurso a elementos não simbólicos na resolução de cálculos -, citada por Santos (2017, p. 62), **t**razemos, na Figura 2, uma imagem de um exercício resolvido por José, em que colocamos em destaque sua estratégia para resolver a divisão de 30 por 2.

Figura 2 – Recurso a elementos não simbólicos na resolução de cálculos



Fonte: Acervo dos autores.

Percebemos inicialmente que ele identificou o número 30 com três blocos de dez traços. Em seguida, agrupou-os de dois em dois, totalizando cinco desses grupos em cada linha. Notamos que ele escreveu o número 5 ao final de cada uma dessas linhas. Somando esses três valores (5 + 5+ 5), ele obteve o resultado da divisão de 30 por 2, isto é, 15. Matematicamente, ele usou a propriedade distributiva da divisão em relação à soma, isto é, $\frac{a+b+c}{p} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p}$.

Passaremos, agora, a destacar algumas observações que fizemos acerca do uso das *Funções Discursivas*, por parte do aluno José, ao longo da resolução de alguns exercícios.

Já no primeiro encontro, o enunciado de um exercício pedia para se obter a medida que faltava em um dos lados de um triângulo retângulo em que os catetos vinham indicados por 8 e 6. José usou a *função referencial*, especificamente com a operação de *designação*, chamando o lado que faltava de *x*. Tanto neste exercício, quanto nos outros desse encontro, ele evocou o teorema de Pitágoras para a resolução. Segundo Duval (1995), ele fez uso da função *apofântica*, através da sua operação de *predicação*. Em seguida, ao substituir os valores dados na intenção de obter os lados que faltavam em cada questão, ele usou a função de *expansão discursiva*, através da forma denominada expansão *formal*. Ainda neste primeiro encontro, apresentamos ao aluno alguns triângulos retângulos em posições variadas e lados designados por letras diferentes. Em alguns, designamos os lados por x, y e z; em outros por r, s e t; outros por u, v e w (iniciando com a hipotenusa e depois os catetos). Em todos os casos, quando lhe solicitamos enunciar o teorema de Pitágoras, ele respondeu corretamente: $x^2 = y^2 + z^2$, $r^2 = s^2 + t^2$ e $u^2 = v^2 + t^2$, indicando, via função *apofântica*, compreensão no uso do teorema.

No segundo encontro tratamos da soma dos ângulos internos de um polígono convexo. Iniciamos propondo ao aluno a afirmação de que em um triângulo qualquer a soma dos ângulos internos é 180^{o}. Como a sua reação, que recebemos com contentamento, foi a de questionar o porquê desse valor, decidimos empreender a missão de demonstrar esse fato. Para nossa surpresa, José acompanhou muito bem todos os passos da demonstração e, antes de chegarmos ao final, ele próprio conclui com entusiasmo: “Ahhh, claro, vai dar 180^{o}!”. Mesmo não tendo feito sozinho, o aluno apresentou ótima compreensão nas etapas do processo dedutivo (*expansão discursiva* do tipo *cognitiva*). Ficamos então nos perguntando: o que impede um aluno de aprender a tabuada se ele tem a capacidade de percorrer com boa performance os caminhos de uma demonstração matemática?

Ainda neste mesmo encontro, para entender como somar os ângulos internos de um polígono convexo, propusemos a ele dividir o polígono dado em triângulos. Ele compreendeu muito bem a ideia. A partir do pentágono, deixamos que ele mesmo desenhasse os triângulos internos e obtivesse a soma dos ângulos. Ele fez isso também para o hexágono e o heptágono. Nesses três casos (pentágono, hexágono e heptágono) ele entendeu que a soma dos ângulos era obtida multiplicando-se 180^0 por 3, 4 e 5, respectivamente. Porém, quando tentamos encaminhar um processo de generalização, ao lhe perguntar por quanto deveria multiplicar os 180^0 para encontrar a soma dos ângulos de um polígono de 20 lados, ele não soube responder.

Nas questões envolvendo relações trigonométricas em um triângulo retângulo, é bastante comum, com o uso do seno, cosseno ou tangente, trabalharmos com uma igualdade de frações em que um dos valores é uma incógnita e os outros três são números. Dessa maneira, recorre-se à propriedade fundamental das proporções, isto é, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Notamos que José identificava, em alguns momentos de forma independente, mas em outros com nossa ajuda, qual a razão trigonométrica a ser usada (uso da função *apofântica*). Na linha seguinte organizava a proporção, substituindo o valor do seno, cosseno ou tangente do ângulo em questão, caracterizando mais um passo na expansão do discurso (*expansão formal*). Em seguida oralizava a expressão "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos", o que podemos caracterizar como o uso da operação de *predicação* dentro da função *apofântica* mas, de forma recorrente, essa oralização não se materializava na sua produção escrita, pois na linha seguinte ele escrevia uma nova fração em que o numerador consistia no produto dos meios e o denominador no produto dos extremos. Claramente ele teve muitas dificuldades para converter o enunciado em língua natural "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos" para a linguagem simbólica.

Num outro encontro, ao resolvermos um problema de trigonometria, chegamos no valor $\mathbf{4\sqrt{3}}$ para a medida do lado de um triângulo. Ele questionou se deveríamos "deixar assim mesmo". Dissemos a ele que sim, exceto se fosse um problema, por exemplo, que pedisse uma quantidade, em metros, de arame suficiente para cercar o terreno representado pelo triângulo em questão. Neste caso, o orientamos a usar a calculadora para obter o valor de $\mathbf{\sqrt{3}}$ na forma decimal. Ele perguntou se deveria arredondar para três casas. Propusemos arredondar para duas, dando o valor 1,73m. Então lhe dissemos: "você pode, assim, ir numa loja de material de construção e pedir 1,73m de arame." Ele rebateu com a pergunta: "E não dá pra usar o valor todo da $\mathbf{\sqrt{3}}$? Tem medida que dá isso?". Ficamos novamente surpresos e contentes com o ótimo nível da pergunta. Saímos desse encontro, novamente, questionando-nos acerca do contraste entre a enorme dificuldade enfrentada pelo aluno José com a tabuada e o alcance de suas perguntas em temas delicados da matemática, como os números irracionais. Essa constatação se alinha com a definição de DD proposta no CID-10, que aponta déficit no domínio de habilidades aritméticas básicas maior do que nas habilidades matemáticas abstratas (OMS, 1993).

CONCLUSÃO

As *funções discursivas* são ferramentas metodológicas para analisar o discurso matemático presente nas produções escolares do aluno, desde provas, trabalhos, exercícios no caderno e argumentações verbais.

Entendemos que com essas *funções* podemos compreender melhor o funcionamento do discurso de qualquer aluno e, a partir disso, ter mais subsídios para compreender os processos cognitivos da aprendizagem da matemática, inclusive daqueles alunos com DD. Quiçá possamos propor, a partir desse estudo, estratégias, ferramentas ou encaminhamentos metodológicos que contemplem as necessidades de quem tem esse transtorno. São inúmeros os questionamentos. Como que um aluno que não consegue dominar um fato aritmético básico como a tabuada ou uma simples adição, pode acompanhar uma demonstração e concluir a tese do teorema antes do seu fim? Podemos inferir que se um aluno é capaz de realizar uma atividade com esse grau de sofisticação, então pode realizar outras com semelhantes exigências cognitivas e, quem sabe, até com maiores exigências?

Nesses primeiros encontros nos propusemos a apenas acompanhar o aluno José na forma de monitoria ou de aula particular. Compreendemos que esse é o caminho para estabelecer laços de confiança, essenciais para um trabalho que pretendemos que seja de longo prazo (cerca de 1,5 anos). Almejamos, de forma intercalada com esse tipo de abordagem, também propor atividades próprias, com as quais poderemos investigar outros elementos nas suas produções.

Como estamos apenas nos primeiros passos dessa pesquisa, temos plena convicção de que há muito ainda na teoria de Raymond Duval para trazermos como ferramenta de análise neste *estudo de caso*. Podemos apontar as operações cognitivas de representação ligadas à semiose: formação, tratamento e conversão; o fenômeno da não-congruência semântica; as formas de “ver” uma figura geométrica e, principalmente, um aprofundamento da análise do discurso através das *Funções Discursivas*.

REFERÊNCIAS

Barth, H., & Lamont, K. & Lipton, J. & Dehaene, S. & Kanwisher, N. & Spelke, E. (2006) *Non-symbolic arithmetic in adults and young children.* Cognition, [s.l.], v. 98, n. 3, pp. 199-222. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/j.cognition.2004.09.011.

Bastos, J. A. et al. (2016). *The prevalence of developmental dyscalculia in Brazilian public school system.* Arquivos de Neuro-psiquiatria, [s.l.], v. 74, n. 3, p.201-206. Fap UNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/0004-282x20150212.

Brandt, C. F., & Moretti, M. T., & Bassoi, T. S. (2014). Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 16, n. 2, p.479-503.

Díaz, F. (2011). *O processo de aprendizagem e seus transtornos.* Salvador: Edufba.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* São Paulo: Proem. Organização: Tânia M. M. Campos.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista eletrônica de educação matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, pp. 266-297. Tradução de Méricles T. M.. http://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Kaufmann, L. et al. (2013). *Dyscalculia from a developmental and differential perspective.* Frontiers In Psychology, [s.l.], v. 4, pp.1-5. Frontiers Media SA. http://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516.

Kirk, S. et al. (2009), *Educating Exceptional Children*. 12. ed. Boston: Houghton Miffin.

Kosc, Ladislav. (1974). Developmental Dyscalculia. *Journal Of Learning Disabilities*, [s.l.], v. 7, n. 3, pp.164-177. SAGE Publications. http://dx.doi.org/10.1177/002221947400700309.

Moretti, M. T., & Thiel, A. A. (2012). O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. *Praxis Educativa*, [s.l.], v. 7, n. 2, pp. 379-396. Universidade Estadual de Ponta. http://dx.doi.org/10.5212/praxeduc.v.7i2.0004.

Ohlweiler, L. (Org.). (2016). Introdução aos transtornos da aprendizagem. In: Rotta, Newra Tellechea; Ohlweiler, L. & Riesgo, R. dos Santos. Transtornos da aprendizagem: Abordagem neurobiológica e Multidisciplinar. 2. ed. Porte Alegre: Artmed. Cap. 9. pp. 107-111.

Organização Mundial da Saúde. (1993). *Classificação de transtornos mentais e de comportamento da CID-10*. Porto Alegre: Artmed.

Reigosa-Crespo, V. et al. (2012). Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: The Havana Survey. Developmental Psychology, [s.l.], v. 48, n. 1, pp.123-135. American Psychological Association (APA). http://dx.doi.org/10.1037/a0025356.

Santos, F. H. dos. (2017). *Discalculia do Desenvolvimento*. São Paulo: Pearson Clinical Brasil.

Sbem. (2019). *I Encontro Nacional de Educação Matemática Inclusiva: ENEMI* 2019. Rio de Janeiro. https://sites.google.com/view/enemi2019-gt13sbem/p%C3%A1gina-inicial?authuser=0

Shalev, R. S. (2004). Developmental Dyscalculia. *Journal Of Child Neurology*, [s.l.], v. 19, n. 10, pp. 765-771. SAGE Publications. http://dx.doi.org/10.1177/08830738040190100601

CAPÍTULO XII

CARACTERÍSTICAS VISUAIS DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EMPREGADAS NO ESTUDO DA RELAÇÃO PARTE-TODO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Fernanda Andrea F. Silva
Méricles Thadeu Moretti

Qualquer que seja a figura geométrica numa atividade em matemática desperta dois tipos de conduta: uma espontânea e outra controlada. Uma conduta espontânea, imediata, é a percepção das suas formas, justificada por princípios visuais descritos pela psicologia gestáltica ou psicologia das formas. Enquanto que a conduta controlada leva à aprendizagem em geometria e se refere à interpretação discursiva dos elementos constitutivos da figura, a qual considera o objeto matemático de referência. Pois, nem sempre os elementos visuais que se destacam na figura correspondem ao que se quer 'ver' (Duval, 2012a).

Com as figuras geométricas que representam a relação parte-todo dos números racionais não é diferente. Foi isso que constatamos ao analisar a pesquisa realizada por Lesh et al (1983) em que foi aplicado um teste para alunos do 4° ao 8° graus, nos Estados Unidos, com o objetivo de avaliar conceitos envolvendo os números racionais. Nas questões que solicitavam a fração correspondente a parte pintada de distintas figuras geométricas, os resultados demonstraram uma variação significativa nos índices de acertos, conforme a figura transparecesse ou não os elementos figurais necessários para estabelecer a relação parte-todo.

Por outro lado, Silva (1997) observou que a concepção de futuros professores das séries iniciais, ao associarem frações às figuras geométricas, é que necessariamente as figuras deveriam estar particionadas em subfiguras de mesma forma geométrica e áreas congruentes. Santos (2005) e Costa (2011) reiteram essa autora quando afirmam que os professores, participantes das referidas pesquisas ao serem solicitados a elaborar questões envolvendo ícones no campo dos números racionais, priorizaram o significado parte-todo envolvendo figuras geométricas, notadamente, círculos, triângulos e retângulos, divididas em partes ou subfiguras de áreas congruentes e mesma forma geométrica. Tais práticas reforçam o uso do procedimento da 'dupla contagem', ou seja, a contagem do número de partes pintadas sobre o número de partes que foi particionado o inteiro; assim como dão preferência às figuras que transparecem a relação parte todo, com prejuízo da exploração heurística da figura geométrica que leva a compreensão das relações envolvidas: entre as partes, o todo e as partes, e as partes e o todo.

Damico (2007) aponta como sendo um dos sérios problemas subjacentes à compreensão do significado parte-todo, no registro geométrico bidimensional, a fragilidade dos sujeitos relacionada à noção de área. Como também, afirma o pesquisador, que a instabilidade por parte do sujeito na compreensão da unidade e de seu particionamento em áreas congruentes, nas figuras geométricas, levam a dificuldades, quanto a identificar a relação de equivalência, bem como, compreender a adição de frações e o significado do mínimo múltiplo comum (m.m.c.).

Complementando essa ideia, acreditamos que as fragilidades dos sujeitos perpassam pelos tratamentos que são específicos das figuras geométricas e que não são levados em conta, no momento da aprendizagem desse campo numérico. Pois, como afirmam Campos, Magina & Nunes (2006),

> As situações com significado parte-todo, muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, em geral, em dividir uma área em partes iguais, em nomear uma fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e em analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção. Tais ações levam os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração baseados principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas (Campos, Magina & Nunes, 2006, p. 128).

O sujeito, ao não ultrapassar os limites das divisões explícitas identificadas nas figuras e ao não estabelecer a relação parte todo, não dá significado à necessidade de congruência das áreas das partes ou subfiguras e "valoriza exageradamente o traço das divisões, em detrimento à igualdade das partes." (Jahn, Silva, Silva & Campos, 1995, p. 11). Para o desenvolvimento da relação parte-todo, as figuras geométricas exigem "discussão e comparação do 'tamanho' e 'formas', o que não ocorre na dupla contagem." (Idem p. 13).

Duval (2011) afirma que "É preciso organizar as tarefas fazendo variar a figura geométrica, depois a situação que ajuda a <<ver>> a solução até aquelas em que, ao contrário, torna-se difícil ou impossível vê-la" (Duval, 2011, p. 92). Pois, a figura geométrica pode requerer desde a apreensão espontânea e imediata de suas formas, denominada de apreensão perceptiva das formas, passando pela visualização que envolve o objeto matemático que, de fato, precisa ser apreendido na figura geométrica (apreensão discursiva), até a sua modificação para que o objeto em questão possa ser vislumbrado (apreensão operatória).

Entretanto, ao analisarmos a literatura que envolve os números racionais percebemos a ausência de um estudo que analise as figuras geométricas que compõem essa classe de atividades, quanto às suas formas, tipos de particionamentos, interpretações ou, até mesmo, modificações que evocam suas unidades visuais para que a relação parte-todo possa ser identificada.

Sendo assim, com base nas seguintes perguntas:

- Quais são os elementos básicos constitutivos de uma figura geométrica que podem atuar na visualização da relação entre as partes ou subfiguras pintadas ou hachuradas e àquelas que a figura geométrica (representada como o todo) foi particionada?
- Quais os tipos de interpretações ou apreensões geométricas podem estar envolvidas na visualização da relação parte-todo?
- Para a visualização da relação parte-todo é necessário um tratamento heurístico na figura geométrica?
- Havendo necessidade de um tratamento heurístico, quais os fatores de visibilidade que podem intervir nesse?

O objetivo dessa pesquisa é analisar as características visuais das figuras geométricas que podem ser utilizadas nas atividades de transformações em frações, com base em seus elementos figurais constitutivos, nos tipos de interpretações que possam evocar e possíveis modificações figurais que venham necessitar para que seja visualizada a relação parte-todo. É um estudo inicial e visa fornecer elementos para um aprofundamento posterior de uma análise semiótica e cognitiva, ou semio-cognitiva dessas figuras geométricas.

Temos como pressupostos teóricos a Teoria dos Registros de Representações semióticas de Raymond Duval. Nesse estudo, buscaremos responder as duas primeiras perguntas elaboradas acima e encontrar elementos que subsidiem estudos posteriores que visem responder as demais perguntas.

O REGISTRO GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL DOS NÚMEROS RACIONAIS

A aprendizagem em matemática se diferencia da aprendizagem em outras áreas do conhecimento pelo modo de acesso aos seus objetos do saber. Na matemática, os objetos do conhecimento, a exemplo dos números, das funções, das relações geométricas são todos abstratos, os quais querem dizer que não podem ser diretamente percebidos, tocados, sentidos, ou mesmo, acessados por meio de instrumentos. Desse modo, o acesso a eles se dá sempre de forma indireta, por meio das suas representações semióticas, ou seja, de uma 'atividade de produção semiótica' (Duval, 2013, p. 16).

As frações, os números decimais, as figuras geométricas particionadas em áreas congruentes com algumas dessas partes pintadas são representações semióticas do objeto matemático número racional. Cada uma dessas representações semióticas possuem regras, propriedades e tratamentos específicos, haja vista que o modo de realizar as operações numéricas, por exemplo, com as frações não é igual ao realizado com os números decimais. Enquanto que as figuras geométricas apresentam tratamentos os quais em nada tem a ver com os tratamentos algorítmicos desenvolvidos nos dois sistemas semióticos anteriores. Portanto, essas representações semióticas dos números racionais se constituem como sistemas semióticos distintos que revelam características diferentes, porém, complementares desse objeto matemático.

Como esses sistemas semióticos, todos aqueles utilizados em matemática para representar seus objetos (gráficos, tabelas, sistemas numéricos, escrita algébrica, entre outros), diferenciam-se dos sistemas semióticos usados socialmente apenas para comunicar, devido a sua função de tratamento, ou seja, neles há a possibilidade das representações serem modificadas em seu interior, obedecendo suas regras e propriedades. A esses sistemas semióticos trabalhados em matemática, Duval (2012b, 2013) denominou de 'registros'.

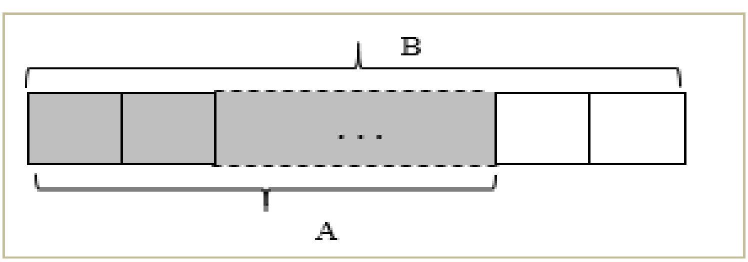
Os registros de representação semiótica são sistemas semióticos que se diferenciam tanto pelo seu modo de funcionamento quanto pela sua natureza. Podendo ser discursivos se suas unidades elementares se organizam de forma linear, como a língua natural e os sistemas numéricos; ou não discursivos se, pelo contrário, essas não se apresentam de forma linear como é o caso das figuras geométricas, cujas unidades figurais estão compondo um todo e a sua apreensão se estabelece de forma global. Além disso, os registros podem apresentar tratamentos por desenvolvimento de algoritmos, como é o caso de todos os registros estritamente matemáticos como os sistemas numéricos e a escrita algébrica, ou não se prestarem a esse tipo de tratamento como na língua materna e nas figuras geométricas.

Em nossa pesquisa, chamaremos de 'registro geométrico bidimensional dos números racionais' ao sistema semiótico constituído de figuras geométricas bidimensionais - polígonos e círculos - particionados em subfiguras justapostas. Nesse tipo de registro, trabalha-se prioritariamente, na escola, a partir do 4° ano do Ensino Fundamental I, o significado parte-todo do número racional.

Assim, cada figura representa o inteiro dividido explícito ou implicitamente em “n” partes de mesma área, sendo cada parte equivalente a 1/n e a fração correspondente ao número de áreas congruentes “m”, hachuradas ou pintadas do inteiro, “m/n”.

Para Post, Behr e Lesh (1982) o significado parte-todo depende diretamente da capacidade de particionar uma quantidade contínua, compreendida como comprimento, área ou volume, em partes congruentes; ou particionar um conjunto discreto de objetos em partes ou subconjuntos de mesma medida. Os autores afirmam que esse significado é aplicado, por exemplo, quando se tem dois conjuntos (A e B) em que o conjunto A é subconjunto do conjunto B e satisfaz os critérios: (a) o subconjunto A é dividido em partes ou subconjuntos equivalentes (frações unitárias); (b) o conjunto B é dividido em partes ou subconjuntos; (c) A medida de cada parte ou subconjunto de A é equivalente à medida de cada parte ou subconjunto de B. Dessa forma, Post et al (op. cit) ilustram com o retângulo da figura 1.

Figura 1 - Retângulo particionado em partes equivalentes



Fonte: Adaptado de Post,Behr e Lesh (1982).

As ideias matemáticas de particionamento em áreas congruentes, tais como, quanto maior a área de cada parte, menor será o número de partes do todo, a conservação do todo e a equivalência de frações são intrínsecas ao registro geométrico bidimensional dos racionais. Pois, no particionamento de uma quantidade contínua há uma relação: (a) entre o número de partes que está sendo dividido o todo e a área de cada parte; (b) de equivalência entre a soma das partes e o todo que foi particionado; (c) entre regiões de mesma área do todo que representam quantidades relativas diferentes deste mesmo todo.

O registro geométrico bidimensional dos números racionais é não discursivo, pois, por terem duas dimensões, exige uma apreensão simultânea ou, não linear, das unidades básicas figurais, como traços, cor e área das partes. E por apresentarem tratamentos próprios que não se prestam ao desenvolvimento de algoritmos é um registro multifuncional (Duval, 2011).

De acordo com Duval (2004), o tratamento dispensado às figuras geométricas é específico destas, ou seja, independe do conhecimento matemático subjacente ao problema ou situação dada, pois,

> nem sempre é fácil 'ver' sobre uma figura as relações ou as propriedades relativas as hipóteses dadas e que correspondem com a solução buscada[...] É essencial do ponto de vista cognitivo e didático não confundir a possibilidade de tratamento figural com a legitimidade ou a justificação matemática destes tratamentos figurais. A possibilidade dos tratamentos figurais está vinculada às possibilidades de modificação que surgem das relações das partes com o todo, por exemplo, relações óticas, visuais ou posicionais de uma figura; modificações que podem efetuar-se física ou mentalmente e é independentemente de todo conhecimento matemático. (Duval, 2004, p. 162)

Entretanto, esse autor afirma ainda ser necessário uma coordenação entre os tratamentos figurais e os que provêm de um outro registro, pois os indivíduos que não se dão conta disso reduzirão os tratamentos matemáticos as “evidências imediatas” de uma “constatação perceptiva” no registro das figuras geométricas o que leva a uma falsa aproximação entre os tratamentos dispensados aos dois registros. Pois, para Duval (2004) uma figura geométrica é o entrelaçamento entre as apreensões perceptiva (interpretação imediata das formas geométricas que compõem uma figura geométrica) e discursiva (interpretação do enunciado ou do que é dito da figura geométrica), ou seja, é preciso ‘ver’ a figura geométrica a partir do que é enunciado sobre ela, sem se deixar influenciar pelas formas geométricas que se destacam dela.

Duval (idem) aponta como tratamento no registro das figuras geométricas, a determinação das unidades figurais que são os elementos básicos constitutivos de uma figura geométrica, as possibilidades de articulação entre elas e as modificações que podem ser efetuadas nas figuras geométricas. Sendo esses tratamentos considerados capazes de cumprir com a função heurística[1] dessas figuras.

As unidades figurais podem ser determinadas a partir das variações visuais - dimensionais e qualitativas, das figuras geométricas. As dimensões podem variar entre zero (ponto), uma (reta) ou duas dimensões (área). As variáveis qualitativas são aquelas quanto à forma, linha reta ou linha curva; contorno, aberto ou fechado; variações de tamanho, orientação, granulação, cor, etc que estão subordinadas as Leis Gestálticas ou das formas (Duval, 2004).

Além disso, as figuras geométricas são representações visuais que permitem reconhecer várias formas geométricas, concebidas como contornos

[1] Capacidade de visualizar as hipóteses de um problema a partir da reorganização da figura inicial dada.

fechados que são justapostos, superpostos ou separados na mesma figura; mesmo que o fato de reconhecer uma forma geométrica implique no não reconhecimento de outras. Uma figura geométrica para ser compreendida matematicamente necessita desse reconhecimento, implicando numa mudança de olhar sem que seja modificada sua representação visual.

De acordo com Duval (1994), os tratamentos que são intrínsecos às figuras geométricas não estão ligados a nenhum conhecimento matemático particular. Esses tratamentos estão relacionados com as possibilidades de modificações da figura, implícita ou explicitamente, a partir das relações das suas partes com o todo, como, por exemplo, a subdivisão ou inclusão de partes; ou aquelas que podem ser de origem ótica, como os casos de homotetia; ou ainda, posicional, transladando ou rotacionando uma figura.

Duval (2011,2012a) designa as formas de “ver” as figuras como apreensões do tipo perceptiva, discursiva, operatória e sequencial das figuras. O desenvolvimento do raciocínio envolvendo esse tipo de registro requer a devida distinção entre esses tipos de apreensões.

A apreensão perceptiva de formas geométricas é imediata, automática, espontânea, relativa aos elementos que se destacam da figura geométrica, sem análise dos elementos figurais e que nem sempre corresponde ao objeto matemático procurado. Esse tipo de apreensão está fortemente condicionado a uma congruência semântica entre o enunciado e a respectiva figura geométrica do problema, o que pode, conforme Duval (2012a) abrir ou fechar a porta de entrada para a resolução buscada.

As figuras geométricas normalmente utilizadas nos livros e materiais didáticos para trabalhar os números racionais geralmente se destacam por traços contínuos e fechados, seguindo a lei Gestáltica do fechamento e da continuidade, a qual os traços da figura geométrica formam um contorno fechado, destacando uma determinada forma geométrica de um fundo. Essa lei, de acordo com Duval (2012a), acaba por impedir de ver traços mais simples e, assim, outras formas de organizações da figura geométrica; podendo ser a origem entre a diferença de uma ‘interpretação discursiva’, ou seja, uma interpretação das propriedades da figura geométrica, do enunciado, das hipóteses que sustentam o problema; e uma apreensão perceptiva da figura geométrica.

A apreensão operatória das figuras é aquela “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas figuras” (Duval, 2012a p. 125). Se a modificação ocorrer por divisão ou inclusão das partes da figura geométrica, ou seja, em função das partes com o todo, é chamada pelo autor de ‘mereológica’. Caso a modificação seja para aumentar, diminuir ou deformar a figura geométrica, é denominada de ‘ótica’. Se for necessário transladar, rotacionar a figura geométrica em relação a um eixo de referência, a modificação é do tipo ‘posicional’

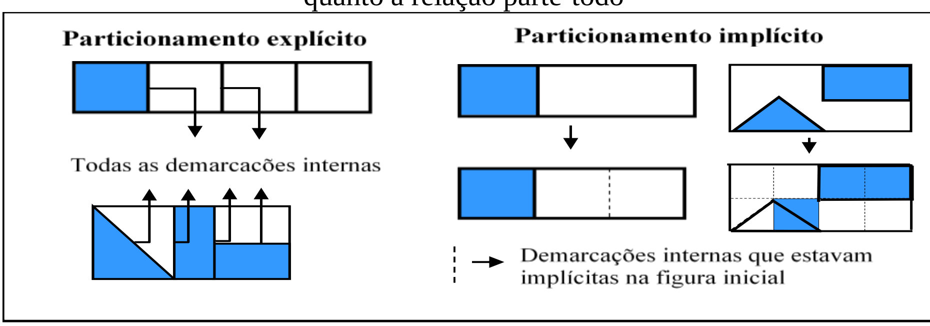
Então, tendo como base figuras geométricas trabalhadas em livros didáticos e em pesquisas, como, Behr et al (1983), Silva (2005), Giménez e Bairral (2005), Damico (2007), com conversões[2] entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos racionais, faremos uma análise das características visuais dessas figuras que devem ser levadas em consideração para a visualização da relação parte-todo.

CARACTERÍSTICAS VISUAIS DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS QUANTO À RELAÇÃO PARTE-TODO DOS NÚMEROS RACIONAIS.

[2] Transformações que mudam de sistemas semióticos

A análise das figuras geométricas trabalhadas nas pesquisas de Behr et al (1983), Silva (2005), Giménez e Bairral (2005), Damico (2007) nos leva a inferir que uma característica visual importante dessas figuras é o particionamento. O objeto matemático, número racional, sendo representado por meio das figuras geométricas bidimensionais requer o seu particionamento em partes ou subfiguras de áreas congruentes. No entanto, esse particionamento pode se apresentar totalmente explícito ou implícito, como podemos observar na Figura 2.

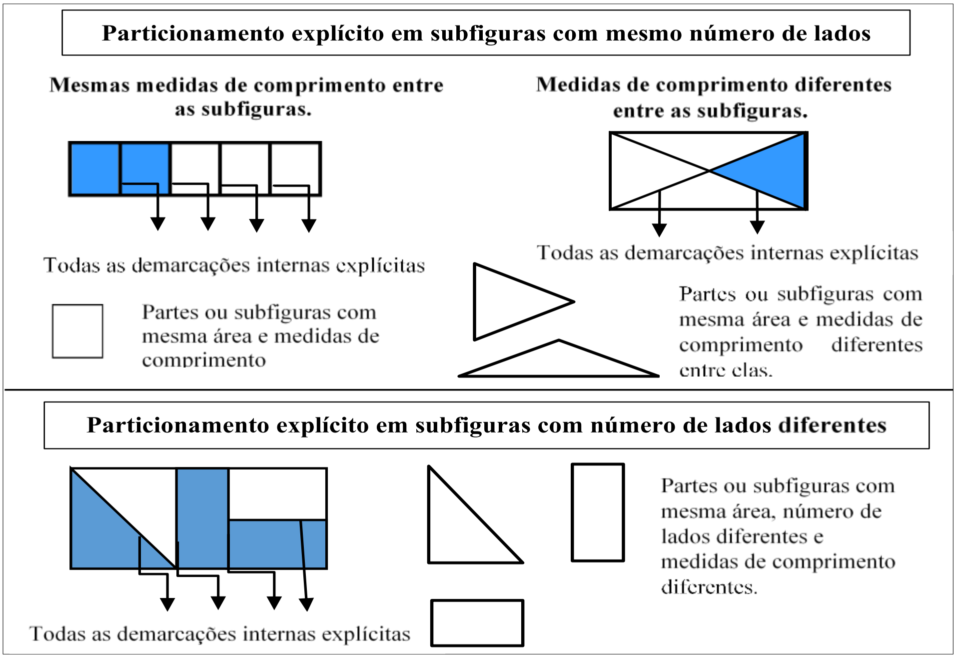
Figura 2 – Tipos de particionamentos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo



Fonte: Autoria própria, 2020

As figuras geométricas que possuem o particionamento totalmente explícito apresentam as áreas das suas partes ou subfiguras, congruentes. Entretanto, as subfiguras podem apresentar as mesmas medidas de comprimento, ou medidas de comprimentos diferentes entre si, apesar de terem a mesma área, conforme a figura 3.

Figura 3 – Tipos de particionamentos explícitos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo

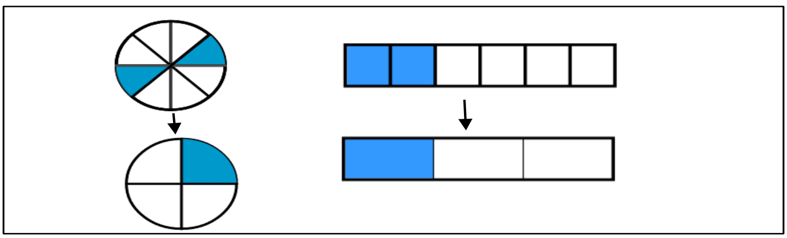


Fonte: Autoria própria, 2020.

As figuras geométricas que possuem particionamento explícito e subfiguras com mesmas medidas de comprimento entre si são figuras prototípicas, pois todos os elementos necessários ao estabelecimento da relação parte-todo estão presentes explicitamente, quais sejam, áreas congruentes e mesmo número de lado das subfiguras. Podemos perceber não ser necessário 'operar com a figura', ou seja, modificá-la para visualizar suas unidades figurais. Entretanto, requer a apreensão perceptiva das suas formas geométricas e respectivas áreas no sentido de identificar suas unidades figurais necessárias para estabelecer a relação parte-todo, além da apreensão discursiva entre essas unidades figurais e as unidades de sentido da fração (numerador e denominador).

Entre essas figuras geométricas podemos encontrar aquelas cujas partes ou subfiguras podem ser sobrepostas de modo a formarem novas partes ou subfiguras, ainda com áreas congruentes e mesmas medidas de comprimento entre elas, de acordo com a figura 4.

Figura 4 – Figuras geométricas com particionamento explícito e formas homogêneas que aceitam sobreposição de partes

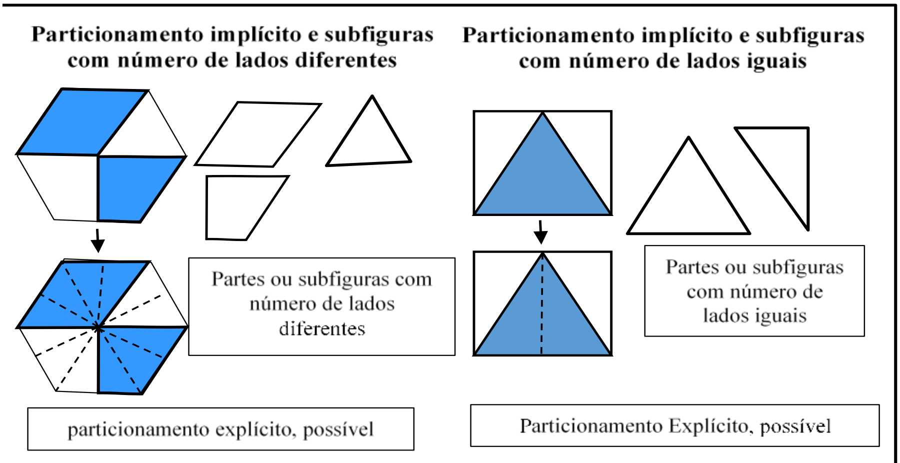


Fonte: Autoria própria, 2020.

Esse tipo de figura geométrica favorece trabalhar o conceito de equivalência, além da relação parte-todo. Enquanto que nas figuras geométricas que possuem particionamento explícito mas medidas de comprimento diferentes entre as subfiguras, ou seja, possuem formas diferentes entre essas, há um prejuízo da visualização das congruências entre as áreas das subfiguras. Nesse caso, faz-se necessário além das apreensões perceptivas e discursiva entre as unidades figurais e entre essas e as unidades de sentido fracionárias, 'operar' sobre as figuras para que a congruência entre as áreas seja vislumbrada.

As figuras geométricas que possuem o particionamento implícito são aquelas cujas partes ou subfiguras possuem áreas explícitas diferentes, podendo essas ter mesmo número de lados, o que não necessariamente significa formas geométricas congruentes; ou número de lados diferentes, entre si, conforme Figura 5.

Figura 5 – Tipos de particionamentos implícitos das figuras geométricas quanto à relação parte-todo



Fonte: Autoria própria, 2020.

As figuras geométricas com particionamento implícito e subfiguras com mesmo número de lados, demandam um esforço maior para o estabelecimento da relação parte-todo, pois as áreas das subfiguras sendo explicitamente diferentes, faz-se necessário encontrar uma unidade-parte[3] para reparticionar a figura geométrica em subfiguras de mesma área; o mesmo número de lados entre as subfiguras pode favorecer o processo heurístico a ser desenvolvido na figura para o estabelecimento da relação parte-todo. As três apreensões: perceptiva, discursiva e operatória são necessárias para atuar nesse tipo de figura geométrica.

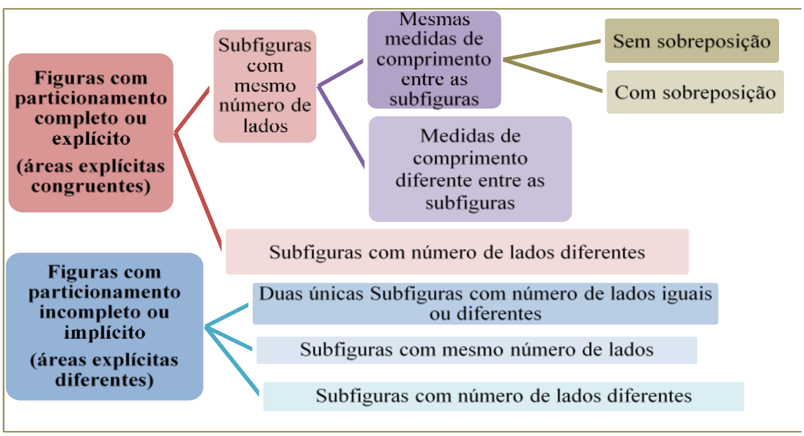
Entretanto, as figuras geométricas que apresentem particionamento implícito e subfiguras com número de lados diferentes podem demandar um esforço cognitivo maior para que seja estabelecida a relação parte-todo. Pois,

[3] Chamamos unidade-parte uma unidade de área que serve como parâmetro para redimensionar as subfiguras e essas passem a ter mesma área explicitamente.

as formas geométricas distintas podem exigir um processo heurístico mais sofisticado para o descobrimento de uma subfigura (unidade-parte) que uniformize não apenas as áreas mas as formas geométricas das subfiguras entre si.

Dessa forma, o Quadro 1 apresenta os tipos de figuras geométricas que podem ser trabalhadas em atividades envolvendo conversões para o registro simbólico fracionário, considerando suas características quanto à visualização da relação parte-todo dos números racionais.

Quadro 1 – Tipos de figuras geométricas que podem ser utilizadas em atividades de conversão para o registro simbólico fracionário



Fonte: Autoria própria, 2020

De acordo com o Quadro 1, existem ao menos cinco tipos de figuras geométricas que podem ser trabalhadas em atividades que envolvem a relação parte-todo e conversão para o registro simbólico fracionário dos números racionais. Essas figuras geométricas possuem características diferentes que podem levar a processos cognitivos distintos para estabelecimento da relação parte-todo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise das características visuais das figuras geométricas que são utilizadas para trabalhar a relação parte-todo e a conversão dessas para o registro numérico fracionário dos números racionais nos fez verificar que essas figuras geométricas podem requerer não só uma apreensão perceptiva e discursiva de suas unidades figurais e das unidades de sentido da fração, bem como a relação entre elas, mas uma apreensão operatória dessas figuras geométricas.

Entretanto, vimos que nem todo tipo de figura geométrica leva à uma apreensão operatória para o estabelecimento da relação parte-todo. Mas a apreensão operatória, ou seja, a transformação de figuras geométricas na busca da relação parte-todo faz com que essas sejam trabalhadas heuristicamente, podendo favorecer a compreensão e a aprendizagem dos conceitos interligados a relação parte-todo, como os conceitos de área, relação parte-parte e a relação todo-parte. Como também, levar o sujeito a realizar e se familiarizar com tratamentos que são intrínsecos a figura geométrica, como os movimentos de rotação e translação.

Essa pesquisa de caráter inicial, faz-se compreender o quão é necessário um estudo que busque analisar mais profundamente os elementos constitutivos dos diferentes tipos de figuras encontrados nesse trabalho. E ainda, o quanto esses elementos transparecem ou não, a relação parte-todo e consequentemente, a conversão no registro numérico fracionário. Ou seja, uma análise do fenômeno da congruência semântica[4] na conversão entre o

[4] Congruência e não congruência semântica, de acordo com Duval (2011) é o quanto uma representação contida no registro de partida transparece ou não na representação do registro de chegada, no momento da conversão.

registro geométrico bidimensional e numérico fracionários dos números racionais.

E, dessa forma, analisar a existência ou não de correspondência semântica entre as unidades de sentido dos registros mencionados e no que elas influenciam para a não congruência semântica entre os elementos que são equivalentes. Além, da análise para cada correspondência semântica que se verifique entre as unidades de sentido, é necessário verificar se essa é única; e ainda, observar os tipos de apreensões que podem ser empregadas e os possíveis tratamentos figurais que podem ser realizados. Tudo isso para que possamos compreender com maior propriedade os processos cognitivos que subjazem a relação parte-todo e a conversão do registro geométrico bidimensional para o numérico fracionário dos números racionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M. J. et al. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes.*New York: Academic Press : Nova York, p. 91-126.

Campos, T. ; Magina, S. & Nunes, T. (2006). *O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias d ensino*. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.8, n.1, p 125-136. Disponível em : http://revistas.pucsp.br/emp/issue/archive. Acesso em : 02 fev 2018

Costa, F. M. (2011). *Concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados.* São Paulo, 2011. 175p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.* São Paulo, 2007. 313p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Duval, R. (1994). *Les diferentes fonctionnements d'une figure dans une demarche géométrique*. Repères, IREM, 17, p.121-138.

_________. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* trad. Myriam Veja Rastrepo. Universidad Del Valle. 2004

_________. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

__________ *Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.* REVEMAT. (Trad. Méricles T. Moretti). Florianópolis, Santa Catarina, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

_________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT*. (Trad. Méricles T. Moretti). Florianópolis Florianópolis, Santa Catarina, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015

Giménez, J. Bairral, M. (2005). *Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas.* GEPEM/EDUR, v.2, Rio de Janeiro.

Jahn, A. P.; Silva, M. J. F.; Silva, M.C.L.; Campos, T. M.M. .(1995). *Lógica das Equivalências. Relatório de Pesquisa não publicado.* PUC - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 1995.

Lesh, R.; Landau, M.; Hamilton, E. (1983). *Conceptual models in applied mathematical problem solving research.* In R. Lesh & M. Landau 226 (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts & Processes (pp. 263-343). NY: Academic Press.

Post, T., Behr, M., Lesh, R. (1982). *Interpretations of Rational Number Concepts*. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), Mathematics for Grades 5-9, NCTM Yearbook (pp. 5972). Reston, Virginia: NCTM.

Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental*. São Paulo, 2005. 196p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Silva, M.J.F. (1997). *Sobre a introdução do conceito de número fracionário.* São Paulo, 1997. 208 p. Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática). Pontifícia Universidade Católica.

CAPÍTULO XIII

O PAPEL DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA OS PROBLEMAS DO CAMPO ADITIVO

Eduardo Sabel
Méricles Thadeu Moretti

Dentro do campo da didática da matemática, existem diferentes olhares para o ensino e aprendizagem dessa ciência, e um deles se preocupa com a construção da linguagem nos processos de ensino e aprendizagem. No que se refere à matemática, sua linguagem admite características ainda mais complexas visto que os discursos podem carregar vários sistemas semióticos como a língua natural, gráficos, números, letras, figuras e símbolos específicos da matemática.

O domínio da linguagem matemática é essencial para sua compreensão, uma vez que o pensamento matemático é externalizado através dessa linguagem. Sobre isso Granger (1974, p. 32) diz que "[...] para a matemática, a linguagem é, ainda mais diretamente, parte integrante da atividade científica. [...] a matemática poderia ser qualificada de ciência por 'construção da linguagem'".

Sobre esse tema, D'Ambrosio (1998, p. 35), argumenta que:

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, consequentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve.

Dessa forma, reconhecendo a importância da linguagem na aprendizagem matemática, utilizaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval como principal aporte teórico, dando ênfase em suas contribuições sobre o papel da linguagem. Duval (2004) explica que existem algumas funções discursivas que um sistema semiótico precisa cumprir para ser uma língua.

Um discurso para Duval "é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, para falar dos objetos físicos, imaginários e ideais e está conectada a um funcionamento cognitivo." (2004, p. 86). Tal discurso em matemática está atrelado à capacidade de utilizar as diferentes funções discursivas e suas respectivas operações.

Duval (2004, pp. 85-124) defende, em seus estudos, que análise de uma produção matemática perpassa pelo ponto de vista dos diferentes registros de representação semióticos que são utilizados. Nos discursos são as diferentes funções discursivas que ganham destaque: a função referencial, a apofântica, a expansão discursiva e reflexividade social. Cada uma delas irá possibilitar a construção de tais discursos e a mobilização das diferentes linguagens (algébrica, geométrica, numérica e língua materna).

Duval destaca a relevância da língua na aprendizagem quando explica que "A língua não é um código, mas um registro de representação semiótica [...]. Ela repousa nas operações discursivas que cumprem as funções cognitivas que um discurso produz." (Duval, 2011, p. 76). Por isso, ao desconhecer tais funções do discurso, análises importantes do funcionamento cognitivo estão sendo desconsideradas no processo de ensino e aprendizagem.

Das possibilidades de analisarmos o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática, consideramos como contexto analítico os problemas do Campo Conceitual aditivo de Vergnaud (1990, 1996a, 1996b), onde explica que existem certos conhecimentos com especificidades parecidas em seu aprendizado, caracterizando um campo conceitual.

Sobre o campo conceitual aditivo, Vergnaud (1990) apresenta características da sua compreensão e analisa situações problema a fim de discutir os caminhos de sua aprendizagem. Nosso objetivo neste capítulo é fazer uma análise qualitativa sobre a importância dessas funções e operações discursivas na compreensão de problemas do campo aditivo.

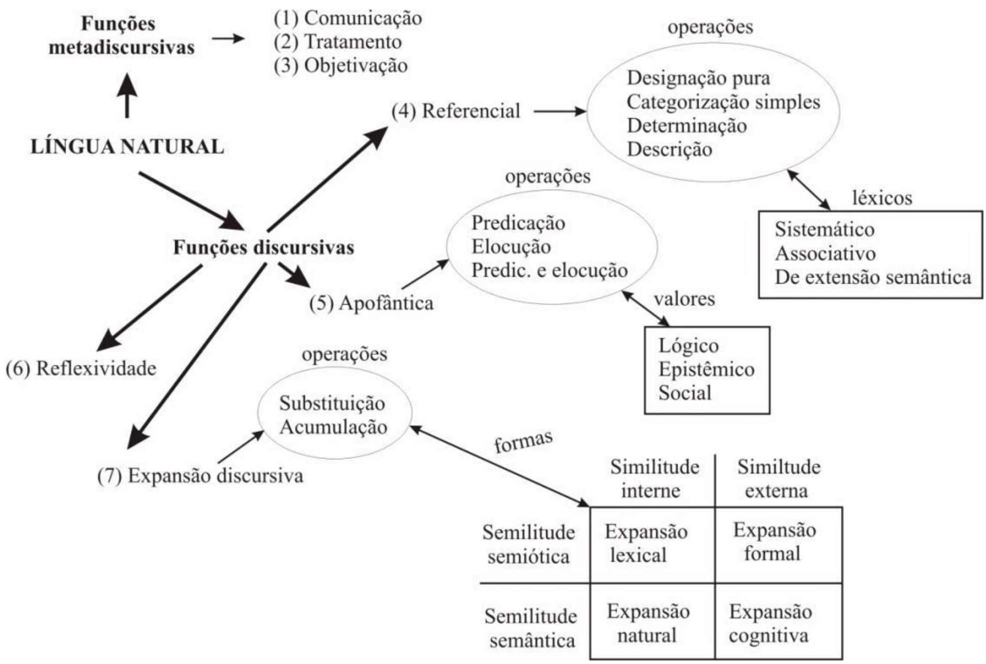
Este capítulo está organizado em quatro seções: a primeira dispõe sobre as Funções Discursivas e Meta-Discursivas de Duval (2004), a segunda apresenta conceitos principais da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1996a, 1996b), a terceira apresenta os problemas aditivos, analisando o papel das funções discursivas nesse contexto e, por último, nossas considerações finais.

AS FUNÇÕES DISCURSIVAS E META-DISCURSIVAS

Para Duval (2004, p. 88) um sistema semiótico ao cumprir certas funções discursivas se torna uma língua. Elas estão separadas em dois grupos: As Funções Meta-Discursivas e as Discursivas.

Cada uma delas admite algumas operações e formas de agir em um discurso e atuam em conjunto para a construção de um enunciado. Na figura 1, temos um esquema que mostra o conjunto de todas as funções propostas por Duval (2004), bem como suas operações e formas que serão explicadas em seguida:

Figura 1 - Esquema das funções e operações discursivas



Fonte: Dionízio, Brandt, &Moretti (2014, p. 517) a partir de Duval (2004).

AS FUNÇÕES META-DISCURSIVAS

As funções meta-discursivas segundo Duval são caracterizadas como "as funções cognitivas comuns a todos os registros de representação (linguísticos, simbólicos, figurativos...)."(2004, p. 87). Estão relacionadas a qualquer registro de representação e não apenas aos escritos. São três as funções meta-discursivas: Comunicação, Tratamento e Objetivação.

Comunicação: essa função é a primordial que todo sistema de representação deve cumprir. Cabe a ela o papel de agir como instrumento de comunicação, compartilhando e socializando as informações entre os sujeitos. Ela acontece em uma conversa, comentário ou argumentação, por exemplo.

Tratamento: Dada uma informação, deve ser possível fazer alterações sobre ela com intuito de extrair novos elementos. Essa atividade configura a função de tratamento. Ela deve acontecer dentro de um mesmo sistema de representação semiótica, permanecendo no sistema de partida. Um exemplo de tratamento seria:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{4} = \frac{4}{20} + \frac{10}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

Notemos que a expressão fracionária acima, está inserida dentro do sistema de representação numérico e a operação realizada alterou a representação inicial e permaneceu no interior desse mesmo sistema, caracterizando essa atividade como um tratamento.

Objetivação: Para Duval essa é uma função necessária para o desenvolvimento que um sujeito pode ter em suas atividades, experiências e potencialidades. "É a externalização ou conscientização que não se tinha antes." (Duval, 2004, p. 88). Aqui acontece a tomada de consciência do sujeito, onde se dá conta do que aprendeu. Geralmente, essa atividade é manifestada por algum gesto, figura, escrita ou expressão oral do estudante.

AS FUNÇÕES DISCURSIVAS

Essas são as funções elementares para que haja um discurso em um sistema semiótico segundo Duval (2004). Da mesma forma que nas meta-discursivas, essas funções também são classificadas conforme sua funcionalidade em um discurso, são elas: função referencial (designação de objetos), apofântica (falar sobre os objetos por meio de enunciados), expansão discursiva (interligar preposições de forma coerente) e reflexividade social (indicar o estatuto, modo ou valor da expressão).

Função Referencial: o principal objetivo dessa função em um discurso é designar objetos, ou seja, atribuir signos (palavras, letras, símbolo, números...) para representar um objeto. Duval (2004, p. 88) estabelece quatro operações discursivas promovidas por essa função: designação pura, categorização simples, determinação e descrição.

A Designação Pura ocorre na atribuição de uma marca, gesto ou signo para identificar um elemento específico. Para exemplificar, observamos o uso das letras "P" e "AB" na seguinte frase: "Seja P um ponto da reta AB". Nesse caso, o uso das letras foi importante para nomear e representar os objetos (ponto e reta).

A Categorização Simples exprime qualidades e características dos objetos designados. Ela é importante por permitir dizer a qual grupo esses elementos pertencem, como por exemplo: "Considere A uma matriz quadrada, com determinante não nulo." Veja que a letra "A" foi designada para representar uma matriz, em seguida, as expressões "quadrada" e "determinante não nulo" atribuíram a essa matriz certas propriedades específicas. Com essas informações poderíamos definir então que se trata de uma matriz inversível (pois é quadrada e com determinante diferente de zero), e isso só foi possível devido ao uso da categorização.

A Determinação consiste na aplicação artigos definidos ou indefinidos, como por exemplo os artigos "o" "os" a" "as" em proposições para indicar existência ou unicidade dos objetos. Ela atua em conjunto com as demais operações completando e atribuindo maior precisão nas informações.

A Descrição tem como objetivo combinar as demais operações com relações diretas para indicar os objetos. Duval diz que "Nenhuma língua, mesmo a natural, pode ter um nome para cada objeto ou classe de objetos. Portanto, é por meio da operação de descrição que se pode nomear qualquer objeto, apesar da limitação lexical" (Duval, 2004, p. 95). Nem sempre existem nomes específicos para os elementos que estamos trabalhando, então a descrição permite que criemos e atribuímos novas nomenclaturas para representar esses objetos.

Função Apofântica: Para Duval "somente designar objetos não cria uma língua, é preciso poder dizer qualquer coisa sobre os objetos sob a forma de uma proposição, ou seja, cumprir a Função Apofântica" (2004, p. 104). A função apofântica serve para criarmos expressões, falas e escritas sobre os objetos de modo coerente e coeso. Além da criação das frases, ela também permite atribuir valor lógico (verdadeiro ou falso), valor epistêmico (se a frase segue as regras internas da matemática) e valor social (a razão que motivou a construção da frase). Ela ocorre por meio de duas operações:

A predicação tem o objetivo de falar sobre os objetos por meio de preposições escritas, que tenham sentido e valor lógico. Um exemplo pode ser a preposição: "a medida x no segmento representa seu ponto médio".

O ato ilocutório acontece na ação de criar raciocínios e pensamentos através da oralidade. É o diálogo que ocorre entre os sujeitos e que pode advir da necessidade de explicar, argumentar e expressar alguma ideia. Como por exemplo, uma conversa entre professor e aluno na sala de aula para fins de entender algum conceito.

A **Expansão Discursiva:** corresponde a possibilidade de "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (Duval, 2004, p. 94). Ela permite articular frases e relacionar enunciados de forma coerente, permitindo que o sujeito faça inferências e desenvolva novas informações, aumentando o discurso e possibilitando falar sobre um assunto de diferentes formas. (Dionizio, Brandt, & Moretti, 2014). Suas operações discursivas são: a substituição e a acumulação.

A progressão de um discurso se dá pelas substituições das informações por outras, como um resultado da alteração da primeira. Nesse caso, "as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores." (Brandt, Moretti, & Bassoi, 2014, p. 483). Essa substituição deve respeitar as regras internas do sistema semiótico que está inserida.

Na operação discursiva de acumulação, o discurso expande-se por frases que são unidas por conectores, enriquecendo as informações e agregando novos elementos ao texto. Ela acontece por uma narração, explicação ou descrição. (Duval, 2004, p. 117).

Além disso, Duval (2004, p. 118) explica que existem algumas formas que a expansão pode ocorrer, são elas: expansão natural, expansão formal, expansão cognitiva e expansão lexical. Elas acontecem embasadas em similaridades interna e externa, na natureza semântica ou semiótica.

No Quadro 1, temos uma visão sistêmica do envolto que a expansão discursiva se encontra, discutindo sobre suas formas e mecanismos de expansão, trazendo elementos que são característicos a cada uma delas. O conhecimento de cada uma delas é essencial para compreendermos a complexidade de funções que um discurso permite.

Quadro 1: As quatro formas de expansão discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	**Similaridade interna** (continuidade sem um terceiro enunciado)	**Similaridade externa** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	Expansão LEXICAL (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) Associações verbais, ocorrências Linguagem do inconsciente	Expansão FORMAL (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica,...) Raciocínio dedutivo (proposições de estrutura funcional) Cálculo proposicional, cálculos de predicados
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	Expansão NATURAL (somente o conhecimento da linguagem corrente é suficiente) Descrição, Narração Argumentação retórica Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) Raciocínio pelo absurdo	Expansão COGNITIVA (exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) Explicação Raciocínio dedutivo (proposição de estrutura temática condicional) Raciocínio pelo absurdo

Fonte: Duval (2004, p. 119).

A similaridade semântica acontece quando as unidades apofânticas tem como referência o mesmo objeto, porém não abrangem significantes comuns, promovendo assim continuidade entre os enunciados. Exemplo: "o quadrado de um número é menor ou igual a nove" e "$x^2 \leq 9$".

Já a similaridade semiótica se constitui da repetição de alguns signos, mas com referência a elementos diferentes, como no exemplo a palavra "função" em: "a sua <u>função</u> na empresa é ajudar esse setor..." ou "o gráfico da <u>função</u> afim é uma reta...".

Dentro da função de expansão discursiva, é possível identificarmos quatro formas que ela ocorre: a expansão lexical e formal (similaridades semióticas), expansão natural e cognitiva (similaridades semânticas). Cada uma delas pode agir separadamente ou em conjunto em um discurso, sendo que outras operações discursivas também podem aparecer nesse meio.

Na expansão lexical, um significante é recuperado e utilizado para referenciar outro objeto, dando continuidade e coesão as preposições. Por exemplo: "O banco da praça..." e "Fui ao banco tirar um extrato....". Já na expansão formal, utilizamos a substituição dos elementos seguindo as regras internas da matemática, expandindo o que tínhamos e extraindo novas informações.

Um exemplo seria considerarmos como partida a equação "$x^2 - 5x + 6 = 0$" e expandirmos com as regras da linguagem algébrica substituindo os termos até chegarmos em "$(x - 3)(x - 2) = 0$". Note que essa expansão formal permite que agora encontremos as raízes dessa equação apenas olhando para sua forma fatorada, o que implica na simples resolução de duas equações de primeiro grau.

A expansão natural tem como objetivo utilizar somente elementos da linguagem materna. Para Brandt, Moretti e Bassoi é a "[...] mobilização simultânea da rede semântica de uma língua natural e dos conhecimentos práticos do próprio meio sociocultural dos alunos que produziram esses discursos." (2014, p. 7). É o uso prático da linguagem natural para escrever as proposições.

Por fim, temos a expansão cognitiva que usa a língua natural de caráter especializado, onde as palavras são mobilizadas de forma exclusiva a um conhecimento determinado. Exemplo: "Um número ímpar excede um número par em uma unidade. Logo, a soma de dois ímpares resulta em um número par" (Brandt, Moretti, & Bassoi, 2014, p. 7).

Com essas formas elencadas finalizamos as possibilidades de expandir um discurso, lembrando que apesar de terem sido exemplificadas separadamente, elas aparecem em conjunto nos discursos.

O EMPREGO DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS NOS PROBLEMAS ADITIVOS

Nesta seção, pretendemos discutir sobre a importância das funções discursivas nos problemas do campo aditivo de Vergnaud, com o olhar sob a perspectiva da teoria de Duval.

O CAMPO DOS PROBLEMAS ADITIVOS DE VERGAUD

A teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida por Gerard Vergnaud que buscou fornecer um estudo sobre alguns aspectos de aprendizagem, elencando características que um determinado campo de conhecimento exige para ser compreendido (Vergnaud, 1990).

Vergnaud diz que elaborou "[..] a teoria dos campos conceituais para tentar melhor compreender os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um campo de conhecimento" (1996b, p. 11). Ele acredita que os conhecimentos estão organizados em campos conceituais e sua aprendizagem depende da delineação de problemas e as ações dos sujeitos sobre eles.

A formação de um conceito estaria apoiada em três situações destacadas por Vergnaud (1996a) denominados (S, I, R), onde: S é o grupo de situações que constituem o sentido (a referência do conceito); I se relaciona com as invariantes (objetos e propriedades) que o conceito é operacionalizado, sendo reconhecidas pelos sujeitos (significado do conceito); e por último R que é vinculado às representações, linguagens e símbolos para indicar as invariantes e as situações envolvidas (o significante do conceito).

Dentro da variedade de campos conceituais que a matemática permite, iremos discutir sobre os aspectos do campo aditivo, onde cada um deles contém especificidades na construção dos problemas e nas formas de resolução.

No **campo conceitual dos problemas aditivos**, Vergnaud (1990) explica que eles formam um conjunto de relações onde existem adições, subtrações e combinações destas operações. Os problemas aditivos podem ser classificados em situações de: composição, transformação e comparação.

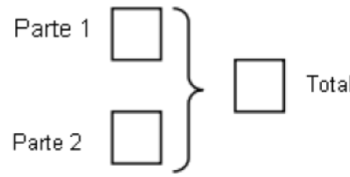
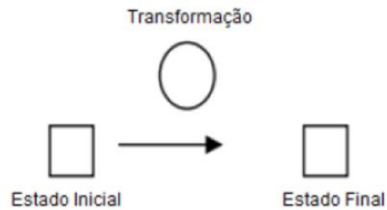
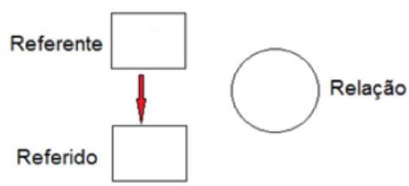
Os problemas de composição relacionam a parte e o todo. Ocorre quando a situação apresentada dispõe de algumas partes e o estudante deve obter o valor total, ou ainda quando o todo é dado e pede-se uma das partes.

Os de transformação são os problemas que relacionam um valor inicial e o final, onde as quantidades sofrem ações positivas ou negativas. Podem acontecer em problemas que informam os dados iniciais e as transformações para calcular o valor final, ou ainda os que indicam os valores finais e iniciam para que seja descoberto qual transformação sofreu.

O terceiro caso é dos problemas de comparação. Aqui os enunciados apresentam um referente, um referido e uma relação sobre eles. Esses problemas geralmente apresentam duas quantidades sendo um referente e o referido e estabelece uma relação entre elas.

No quadro a seguir, temos uma síntese das características estruturais de cada classificação, proposta por Guimarães (2005):

Quadro 2: Esquema das principais estruturas aditivas

Classificação	Esquema do tipo de problema
Composição	
Transformação	
Comparação	

Fonte: Guimarães (2005, p. 4).

No Quadro 2 vemos um esquema que mostra os elementos que precisam ser identificados para cada tipo de problema aditivo. Apontar corretamente os valores que correspondem às relações, referentes, referidos, transformação, partes e valores finais que vemos no quadro, é uma atividade que atravessa a resolução desses problemas.

Na perspectiva da teoria dos Campos Conceituais, devemos trabalhar com problemas dessas diferentes naturezas para promover um bom raciocínio e fazer com que o estudante compreenda integralmente os problemas aditivos.

AS OPERAÇÕES DISCURSIVAS NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Diante dos aspectos da teoria dos campos conceituais dentro dos problemas aditivos podemos fazer a seguinte indagação: Onde as funções discursivas de Duval são empregadas nessas situações? Essa resposta virá do olhar prático que daremos para elas em seu emprego na resolução de problemas.

Analisando primeiramente o campo aditivo, notamos que para cada classe de problema o estudante precisa compreender a operação que a situação necessita para estruturar a resposta. Essa atividade cognitiva já atravessa a busca por algumas funções discursivas, como destaque a função referencial na operação de designar objetos.

Para entender melhor essa situação, vamos considerar o exemplo do estudo de Etcheverria, Campos e Silva (2015, p. 1185), onde aplicaram algumas atividades com alunos do 3° ano do ensino fundamental. Um dos problemas foi: "*Um aquário tem 13 peixes de cor dourada e cinza. Cinco peixes são dourados. Quantos são os peixes cinza?"* Na figura 2, duas resoluções apresentadas por dois estudantes na busca de obter a solução do problema.

Figura 2: Resoluções apresentadas pelos estudantes

Estudante 1		*Estudante 2*	
Resolução	*Resposta*	*Resolução*	*Resposta*
$\begin{array}{r} 13 \\ -\ 5 \\ \hline 8 \end{array}$	*Tem 8 peixes cinza*	$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 8 \\ \hline 13 \end{array}$	*8 peixes*

Fonte: Etcheverria, Campos e Silva (2015, p. 1185).

A situação anterior trata de um problema aditivo da classe das composições, uma vez que tem como objetivo trabalhar o conceito de parte-todo. Podemos observar que o enunciado da questão é feito através da linguagem natural, e ambas as soluções realizaram uma conversão para o registro simbólico a fim de trabalhar com as quantidades descritas.

Lembramos que uma das três situações de um conceito para Vergnaud é a Representação (R), e pelas respostas percebemos que os esquemas representativos não foram os mesmos, embora ambas respostas estejam corretas. A operação de designação de objetos se tornou crucial nesse ponto, pois foi ela que permitiu aos estudantes atribuírem os números e o sinal da operação corretamente.

Na primeira resposta temos a designação do sinal de subtração onde números 13 e 5 foram ordenados de uma forma onde revela através de uma expansão cognitiva que compreendeu que *se tirarmos uma parte do todo, sobra a outra parte* (característica dos problemas da classe da composição). Na segunda solução, houve a designação do sinal de adição e a estrutura mostra o entendimento de que *a soma das partes é igual ao todo.*

Desta forma, a função referencial ocorreu por meio da designação de objetos e tornou possível o estabelecimento dos elementos descritivos para responder ao problema. Nessa atividade, a designação envolveu principalmente os números, ficando restrito aos léxicos sistemáticos (números e os sinais de operação).

A expansão cognitiva permitiu fazer as inferências conceituais que são reveladas no cálculo apresentado e a expansão formal através da operação de acumulação, permitiu tratamentos no registro simbólico. A função apofântica propiciou o valor lógico de verdade e valor epistêmico, uma vez que os cálculos seguiram as regras internas do registro de representação numérico de forma correta. O valor social esteve presente, pois a resposta apresentada veio da motivação de atender ao professor.

Nas outras classes dos problemas do campo aditivo, também podemos analisar a aplicação dessas atividades cognitivas discursivas. A seguir temos dois exemplos de problemas, um da classe de transformação e outra da comparação e um esquema de que estrutura aditiva está envolvida na situação.

Um exemplo de problema da classe de transformação seria "*Paulo tem quinze bolinhas e deu 4 para Maria. Quantas bolinhas sobraram para ele?"* Uma possível resolução para essa situação pode ser estruturada da seguinte forma:

$$\begin{array}{rl} 15 & \longrightarrow \text{Estado Inicial} \\ -\ 4 & \longrightarrow \text{Transformação} \\ \hline 11 & \longrightarrow \text{Estado Final} \end{array}$$

Nesse exemplo a operação discursiva de designação é empregada três vezes, indicando qual quantidade é a inicial (15), a final (11) e determinando a transformação correta para o cálculo (subtrair 4). É comum nesse tipo de problema que o estudante confunda a expressão *"deu 4 para Maria"* e atribua a operação de adição, entendo que existe um ganho e revelando uma compreensão incompleta do campo aditivo.

Na classe dos problemas de comparação, um exemplo seria "Juliana tem algumas maçãs e Pedro tem doze. Se ele tem três a mais que ela, Juliana tem? Podemos pensar na seguinte estratégia para resolver esse problema:

$$\begin{array}{rcl} 12 & \longrightarrow & \text{Referente} \\ -\,3 & \longrightarrow & \text{Relação (operação)} \\ \hline 9 & \longrightarrow & \text{Referido} \end{array}$$

A estratégia é válida, sendo que a designação do sinal (subtração) é correta, entendendo que expressão "três a mais" exige uma diminuição das quantidades para obter o valor referido. O valor lógico é verdadeiro, e a presença da expansão discursiva formal (tratamentos simbólicos) e cognitiva (a compreensão da operação correta) são necessárias nesse meio.

Destacamos também as similaridades semânticas respeitadas nessas situações, com ênfase na conversão dos números em língua natural para o registro simbólico. Chamamos atenção que nesse tipo de situação comparativa, uma vez que o enunciado induz a utilizar o sinal de adição.

Essa situação é considerada de maior gasto cognitivo, e um dos motivos seria essa maior dificuldade dos elementos a serem designados não estarem evidenciados diretamente.

A linguagem natural desempenha papel fundamental para construir o problema e poderia ser empregada nas resoluções, uma vez que a resposta do problema anterior poderia ter sido: "Se Pedro tem doze e Juliana tem três a menos, então ela tem nove". Aqui não teríamos as designações explícitas do sinal da operação, mas uma expansão do tipo natural (pela língua materna) realizada para construir esse raciocínio.

O que fica evidenciado por meio das discussões apresentadas é a relevância e o papel que as funções discursivas desempenham, sobretudo a de designação de objetos com os léxicos sistemáticos envolvidos.

Sem essa atividade discursiva de designação, o caminho para solucionar qualquer um desses problemas aditivos fica restrito, pois restariam poucas alternativas que permitiriam descrever as soluções. A expansão formal e natural também surgem de forma significativa pois permitem elaborar a continuidade dos cálculos e explicações.

A função apofântica também esteve presente nos processos escritos, constatando valor de verdade aos resultados, bem como o valor epistêmico das regras empregadas e do valor social atendendo a necessidade de responder ao professor. Sua operação de predicação, age na construção de enunciados que podem ser usados pelos estudantes para fins de explicar a solução dos problemas, como por exemplo nos que optam em responderam em língua natural.

Todo discurso presente no enunciado do problema e nas respostas dos alunos, pode ser analisado por essas funções discursivas, deixando claro que elas aditem a função de permitir criar estratégias discursivas com a linguagem, propiciando a compreensão dos conceitos dos problemas aditivos.

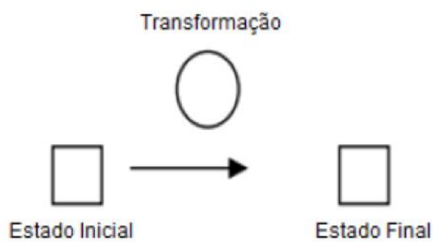
CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das discussões apresentadas por esta pesquisa, entendemos que a teoria dos registros de representação semiótica traz um novo olhar para o campo da linguagem nas aulas de matemática, explicando as funções discursivas que são cumpridas nesse processo.

Realizamos uma análise teórica qualitativa por meio das funções discursivas de Duval (2004, pp. 85-124): a expansão discursiva, a apofântica e a referencial. Foi possível identificarmos seu papel na resolução de problemas do campo aditivo, onde o destaque é dado para a operação de designação de objetos.

Nos exemplos apresentados, observamos que a designação esteve presente nas resoluções e permitiu indicar os sinais de operação e os números envolvidos. Sem seu emprego, não teríamos recursos discursivos para elaborar a estrutura de resolução do problema aditivo.

Dos três tipos de problemas aditivos, podemos retomar o exemplo dos problemas de transformação, onde existem três elementos que devem ser indicados. A seguir temos a estrutura necessária apresentada por Guimarães (2005, p. 4), já explicitado pelo Quadro 2:



Notamos que três designações devem ser realizadas, uma para cada elemento que compõe a figura. Isso evidencia que a função referencial por meio da operação de designação de objetos, é um dos principais papéis das funções discursivas no campo aditivo.

A função Apofântica possibilita criarmos explicações por meio da língua natural caso o sujeito opte em resolver o problema por um registro de representação escrito. Ela também propiciou olharmos a veracidade dos discursos (valor lógico), assim como se respeitam as regras internas dos sistemas semióticos usados (valor epistêmico) e ainda a motivação do sujeito (valor social). As expansões discursivas foram necessárias para os tratamentos simbólicos, uma vez que usou da operação de substituição para efetuar os cálculos.

Dessa maneira, a presente pesquisa trouxe subsídios teóricos para compreender o papel das funções discursivas nos problemas do campo aditivo de Vergnaud, onde elas permitiram criar os caminhos discursivos de resolução, designando os objetos pertinentes e expandindo os discursos.

Consideramos que este campo da linguagem, à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Duval, possui importantes contribuições para fins de aprendizagem que devem ser expandidos para outros contextos do ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

Brandt, Celia F., Moretti, Méricles T. & Bassoi, Tânia S. (2014). Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educação Matemática Pesquisa,16(2)*, 479-503.

D'ambrosio, Ubiratan. (1998). Matemática e Educação Matemática: O problema da convergência. Palestra Proferida em 1998. Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/palestras.htm.

Dionízio, Fátima A. Q., Brandt, Célia F., & Moretti, Méricles T. (2014). Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. *Revista Do Programa De Pós-Graduação Em Educação Matemática Da Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul, 7(15)*, 513-536.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.

Guimarães, Sheila D. (2005). *Problemas aditivos nos manuais de matemática utilizados como materiais didáticos: relação entre frequência e desempenho.* Dissertação (Mestrado).

Granger, G. (1974). *Filosofia do Estilo.* São Paulo: Perspectiva.

Etcheverria, Tereza C.; Campos, Tânia M. M.; Silva & Angélica F G;. (2015). Campo conceitual aditivo: um estudo com as professoras dos anos iniciais do ensino fundamental. *Boletim de Educação Matemática*, 29(53), 1181-1200.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches em didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1996a). A Teoria dos Campos Conceituais. In***:*** *Didáctica das Matemáticas.* 1ª ed. Lisboa: Instituto Piaget, 155–191.

Vergnaud, G. (1996b). A trama dos Campos Conceituais na construção dos conhecimentos. Revista *do GEEMPA*, 1(4), 9-20.

CAPÍTULO XIV

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NAS AULAS DE ÁLGEBRA DO 8º ANO: UMA CARACTERIZAÇÃO DE COMO OS PROFESSORES IDENTIFICAM E ENSINAM OS OBJETOS MATEMÁTICOS ALGÉBRICOS

Luani Griggio Langwinski
Tânia Stella Bassoi (*in memoriam*)
Celia Finck Brandt

Este artigo se estrutura a partir das contribuições de Raymond Duval para o ensino de álgebra relativa às três atividades cognitivas associadas à representação: formação, tratamento e conversão, dando ênfase ao discurso utilizado pelos professores, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014). Os sujeitos da pesquisa foram cinco professores de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental, que atuam nos colégios estaduais do município de Santa Terezinha de Itaipu/PR, a fim de identificar e compreender as formas de abordagens do ensino de Álgebra utilizadas por eles para a formalização desse ensino. Buscando responder: que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra? Que tipo de processo de composição dos conhecimentos a adquirir pode ser visualizado nas atividades propostas?

O modo como o professor concebe o objeto matemático sem dúvida influencia e impacta na maneira como ele realiza o ensino. A língua natural permite produzir uma variedade de tipos de discursos, que podem ser produzidos oralmente ou em forma de escrita. Esses discursos se decompõem em unidades de sentido e podem ser também decompostas em outras unidades de sentido, contudo, em um nível de organização inferior (Duval, 2011).

De acordo com Duval (2004, pp. 88-89) as funções discursivas são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para ser considerada uma língua, devendo ser capaz de: designar os objetos; dizer algo sobre os objetos designados sob a forma de uma proposição; vincular uma proposição enunciada a outra de forma coerente; e marcar o valor, o modo ou estatuto de uma expressão. Duval (2011, p. 76) reconhece que a língua natural “não é um código, mas um registro de representação semiótica. ”, pois cumpre ao mesmo tempo, função de comunicação e de todas as funções cognitivas, uma vez que, preenche um desses dois atos: de dizer ou escrever qualquer coisa e compreender o que o outro quer dizer ou que está escrito.

Compreender como se desenvolve o conhecimento algébrico na atividade humana, como ocorre a apropriação desse conhecimento e de que forma o conceito algébrico pode ser tratado como objeto de ensino sem perder sua especificidade, tem sido preocupação de muitos pesquisadores e instituições de ensino, como será mostrado na próxima seção.

A ÁLGEBRA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: A CONTRIBUIÇÃO DE RAYMOND DUVAL

O trabalho de Duval et al. (2014) “Ver e ensinar a matemática de outra forma: introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso? ” teve como proposta analisar os caminhos e impasses do ensino de Álgebra, atendendo ao quadro de uma decomposição Matemática ou considerando uma decomposição cognitiva, sem querer submetê-la a uma ordem Matemática de progressão para as aquisições.

A questão da compreensão, do ponto de vista cognitivo, não se refere em termos de justificativas ou explicações matemáticas, mas de reconhecimento, já que trabalhamos apenas com as representações semióticas ou sobre as representações semióticas. Principalmente em Álgebra o que é preciso reconhecer, ou seja, não confundir, "*são as operações de substituição semiótica variadas e heterogêneas:* uma letra por um número desconhecido, [...] vários números por uma letra, os símbolos designando as grandezas positivas e negativas [...] etc." (Duval et al., 2014, p. 51 grifos dos autores).

Conforme esses autores, começar a Álgebra pela introdução de letras no quadro de resolução de problemas numéricos, implica na redução da variedade cognitiva dessas operações a uma utilização triplamente unívoca:

> Unicidade do status de incógnita, unicidade de seu emprego (re)designando um objeto porque ela torna incompreensível a designação funcional de outro objeto com a mesma letra, unicidade do jogo de substituições internas na resolução da equação, porque ele focaliza a atenção no que a letra representa e não nas suas ocorrências e nas posições delas. (Duval et al., 2014, p. 51).

De acordo com Duval et al. (2014, p. 54 grifo dos autores) "A Álgebra permite a generalização da operação semiótica de substituição, não de um sinal em um objeto, mas a de um sinal em outro sinal e mais globalmente de uma expressão em outra expressão. ", permitindo uma extensão sem limites da operação semiótica de substituição. Segundo estes autores, a Álgebra requer quatro tipos de substituição semiótica:

1. *Substituir, respectivamente, uma letra e um sintagma operatório compreendendo essa letra por duas listas abertas de números*, quando essas duas listas estão ligadas por uma relação funcional.

2. *Substituir uma letra e/ou sintagma operatório* compreendendo essa letra na designação lexical ou numérica-lexical dos dados de um problema.
3. *Substituir um valor numérico ou um número por uma letra* no contexto de uma fórmula ou de uma equação.
4. *Substituir uma expressão literal por outra expressão literal* que é mais desenvolvida ou mais reduzida.

Mesmo do ponto de vista matemático, não podemos confundir os diferentes tipos de substituição, pois segundo Duval et al. (2014, p. 58-59) “isso equivaleria a não mais distinguir o status da letra como variável, como incógnita ou como codificação de um fator.”. Conforme os autores, propor problemas aritméticos com o propósito de conduzir os alunos a utilizar as letras para resolvê-lo é tornar a Álgebra totalmente incompreensível para eles desde o começo. Causando assim, “um achatamento unidimensional da grande diversidade de operações de substituição semiótica que a álgebra coloca em funcionamento. ” (Ibidem, p. 60).

Duval et al. (2014, p. 69) afirmam que “partir de uma igualdade numérica para elaborar problemas aditivos com uma operação é o caminho mais direto e mais natural para entrar na álgebra.” Um exemplo simples são os problemas aditivos com uma operação. A descrição completa de uma situação requer três dados, suprimindo um dos três, obtemos um problema.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DE COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa devido à sua natureza (Ludke; André, 1986; Gibbs, 2009). A partir disso, as aulas dos professores participantes da pesquisa foram observadas em ambiente natural sem intervenções das pesquisadoras. Os locais de pesquisa foram colégios da rede estadual de ensino situados no município de Santa Terezinha de Itaipu, na região oeste do estado do Paraná. Há quatro colégios estaduais no município, sendo dois na região central e outros dois distribuídos nos bairros de maior concentração populacional. Esses colégios foram nominados como C1, C2, C3 e C4.

Os sujeitos da pesquisa foram selecionados seguindo os seguintes critérios: (a) estarem lecionando nos 8º anos; (b) tempo de trabalho lecionado com esse ano (série) superior a dez anos para atender aos objetivos da pesquisa; (c) estarem lotados nos colégios estaduais do município de Santa Terezinha de Itaipu. A escolha pelo 8º ano justifica-se pelo fato de o ensino de Álgebra iniciar formalmente neste ano escolar. Dessa maneira, fizeram parte deste estudo cinco professores que se enquadraram nos critérios supramencionados. Atribui-se as nomenclaturas P1 e P2 para os sujeitos no colégio C1; P3 ao que lecionava no C2; P4 ao que lecionava no C3 e P5 ao sujeito que lecionava no colégio C4.

A fim de coletar dados para este estudo, foram realizadas entrevistas semiestruturadas, as quais foram registradas em gravações de áudio individuais. Ademais, as aulas observadas foram gravadas em vídeos. Essas gravações foram transcritas para análises.

Cada professor teve quatro aulas observadas, com exceção do P3 que teve seis, totalizando 22h/aula. Como o objetivo era observar o início do conteúdo de Álgebra, as aulas em estudo abordaram os conteúdos a seguir: expressões algébricas, polinômios e suas operações e produtos notáveis. O período de observação foi de 07 de abril a 22 de maio de 2017, sempre em aulas geminadas.

Para a organização das análises, sob o viés de Duval (2003, 2009, 2011) e Duval et. al. (2014), destacou-se o modo como os conteúdos algébricos foram abordados pelos sujeitos da pesquisa, selecionado as atividades cognitivas ligadas à representação, a saber, formação, tratamento e conversão dos registros, e utilizou o termo representações intermediárias[1] para as representações não formais utilizadas pelos professores.

As aulas observadas tiveram como foco a formalização do ensino de Álgebra, desse modo, os conteúdos matemáticos observados foram expressões algébricas, divisão e potenciação de monômios, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios e produtos notáveis. O Quadro 1 apresenta os conteúdos que foram trabalhados pelos professores durante as aulas observadas.

Quadro 1: Conteúdos trabalhados pelos professores durante as observações

Professor	Conteúdos
P1	Soma e subtração de polinômios e multiplicação de polinômios; Expressão numérica com a soma e a diferença dos quadrados, de dois termos.
P2	Divisão de monômio por monômio; Potenciação de monômios.
P3	Divisão de polinômios; Divisão de polinômios; O quadrado da diferença de dois termos.
P4	Expressões algébricas; Atividade com o Tangran; Fatoração da diferença de dois quadrados.
P5	Expressões algébricas; O piquenique algébrico.

Fonte: Langwinski (2018, p. 86).

[1] “Duval chama a atenção para a complementaridade de registros necessários à passagem de um registro a outro que Damm (1999, p.149) denomina de representação intermediária.” (Bassoi, 2006, p. 55).

Ao longo do texto, destacaremos as três atividades cognitivas ligadas à representação: formação, tratamento e conversão, enfatizando o discurso utilizado pelos professores e os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014). Segundo Duval (2009) a *formação* implica em fazer a "designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento." (Duval, 2009, p. 55). Seguindo as regras próprias ao sistema empregado, ou seja, aquelas que definem o sistema de representação.

No decorrer das aulas, os professores fazem a formalização de termos e conceitos utilizando o registro em língua natural, como a formalização do que é perímetro, expressão, equação e até mesmo de um processo de tratamento. P4 e P5 formalizaram a palavra expressão. P4 utilizou um exemplo numérico e P5 fez referência às operações matemáticas. O registro em língua natural foi utilizado por P4 e P5 para identificarem os elementos que constituem uma expressão.

> P4: [...] vamos lá, pensa em um número, todo mundo pensou? (As: aham) Tá, dobra. [...] isso, multiplicar por dois. É a expressão vezes dois. O número que você pensou vezes dois. Tá beleza? Mais dez. O resultado dessa expressão mais dez. Certo? Dividi por dois. (A: eita) Agora este valor menos o número que você pensou. Aquele "xis" que você estava pensando, que você já sabe. (A1: pronto!) A6: dobra é fazer ele [o número pensado] vezes dois? P4: daí ia dar dez. E se eu tivesse mandado vocês somar oito? (As: quatro) E se eu tivesse mandado vocês somar onze? (As: tumulto) Aí vocês se enroscaram, por isso que a gente escreve a expressão.
>
> P5: Expressão é quando a gente tem que fazer multiplicação, potência, raiz quadrada tudo junto.

P4 e P5 estão fazendo a formação da sentença algébrica no registro falado. Que pode ser feito também no registro escrito. À medida que é exposto os dois registros para o aluno, se torna mais fácil a compreensão ao existir congruência entre os dois registros. No entanto, os professores utilizaram apenas do registro língua natural.

Todos os professores apresentaram aos alunos a existência do coeficiente ‘um’ nas expressões, possivelmente para que o aluno não atribua ao termo inexistente o valor zero.

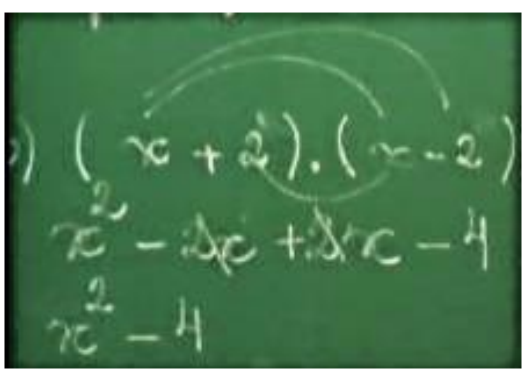
> P1: agora o b, esse primeiro número aqui [apontou para o primeiro termo da expressão], ele não tem nenhum número aqui, ele tá valendo quanto? (As: um) um.
> P2: [...] sempre do lado da letra, do lado esquerdo, quando não aparece é um.
> P3: [...] nesse exemplo b, quer dizer, nessa resolução de exercício, vai ser dividido por? [a professora fez esta pergunta, pois o coeficiente era um] (As: xis/ um) por um.
> P4: [...] Vamos ver aqui, ao invés de eu colocar só letras, mas colocar letras e números. [escreveu a expressão $(x + 2)^2$] pode ter coeficiente aqui? [apontava para o x] aqui que coeficiente é? (A: um).
> P5: [...] e quem que é aqui? [apontou para o menos xis] (As: menos um) Vinte nove mais um? Trinta xis.

Apenas P2 fez uma afirmação referente ao coeficiente um. P1, P3, P4 e P5 questionaram os alunos, contudo somente P4 o chama de coeficiente, P1 chama de número e P3 e P5 querem saber quem é. Chamar de número o coeficiente é destacar apenas o visual, o icônico. Não é o número, ele tem uma função operatória de coeficiente, está mostrando quantas vezes aquele termo (letra) se repete. Se for ‘5x’, o ‘xis’ se repete cinco vezes, x + x + x + x + x, ou seja, tem-se cinco vezes o que o ‘xis’ representa. Visualizar o número alocado a uma ou mais letras, é não conceber o valor operatório ao qual Duval (2003) diz ser importante, a relação operatória do número com a letra.

No entanto, referente ao modo como os alunos foram introduzidos às letras e às operações com letras em expressões literais, os professores reforçavam os procedimentos de resolução, com exercícios de fixação com os registros algébricos, apesar de o livro didático sempre trazer algum exercício com a representação geométrica. P3 e P5 trabalharam com exercícios que solicitavam que fossem encontrados o perímetro e a área das figuras planas, mas o destaque foi dado apenas a manipulação dos símbolos e não houve a designação das relações operatórias, que se enquadraria no terceiro tipo de substituição semiótica, fórmulas para usar na realidade.

Os exercícios abordavam a simplificação de expressões do tipo $(2x - 1)^2 - (x - 3)^2$ e o desenvolvimento algébrico dos produtos notáveis. Para tanto, os professores utilizavam o ‘chuveirinho’ como representação intermediária para operacionalizar a propriedade distributiva da multiplicação, como apresenta a Figura 1.

Figura 1: "Chuveirinho" propriedade distributiva da multiplicação



Fonte: Langwisnki (2018, p. 91)

Ou ainda, com atividades usando tratamento, que não trabalhavam a posição operatória da letra, como por exemplo, a apresentada a seguir, que exigia a substituição e redução dos termos.

Atividade 5. Sendo A = a + b – c, B = a – b – c e C = a – b + c, determine (Silveira, 2015, p. 62):

a) A – B

b) C – A

c) A – B

d) (A + B) – C

e) C – (A + B)

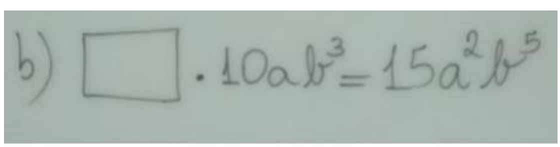
f) B + (A – C)

Atividades como esta, frequentemente encontradas nos livros didáticos e selecionadas pelos professores P1 e P3, enquadram-se no quarto tipo de substituição semiótica, que se refere em substituir uma expressão literal por outra expressão literal que é mais desenvolvida ou mais reduzida e reagrupá-las segundo as propriedades operatórias. Aqui a letra não assume papel nem de incógnita, nem de variável e nem de parâmetro, ela assume o status de codificação, mas que por vezes é transmitida ao aluno como letras que podem ser substituídas por letras, sem a designação e redesignação necessária para a compreensão, fazendo da Álgebra incompreensível desde o começo.

Para Duval (2003, 2009) os *tratamentos* são transformações que acontecem em um mesmo registro. Devido aos conteúdos observados, os registros algébricos foram os que mais se destacaram. Contudo, foram observados o esforço dos professores em utilizar registros numéricos, na tentativa de minimizar o distanciamento na designação com utilização de letras. Aqui está o maior obstáculo didático já apontado por pesquisas: a Álgebra como aritmética generalizada. Os professores não percebem que estão partindo de situações matematicamente diferentes expressas por elementos semelhantes e que não tornam claras as diferentes propriedades as quais essas sentenças matemáticas se referem.

Na resolução da atividade ‘Qual é o monômio que, multiplicado por 10 ab^3, tem como resultado 15 a^2b^5?’, P2 coloca no lugar do monômio que deve ser encontrado, um retângulo, como pode ser visualizado na Figura 2. Essa lacuna a qual ele quer dar um caráter operatório, recorrendo ao pensamento algébrico, procurando minimizar as dificuldades dos alunos de lidarem com o que desconhecem.

Figura 2: Expressão com quadrado no lugar do termo que falta



Fonte: Langwisnki (2018, p. 99).

P2 parte do que os alunos já sabem, tentando sempre impregnar as propriedades algébricas a partir das propriedades numéricas.

> P2: [...] as letras a gente já descobriu, eu quero saber aqui o quinze. [...] vou dar aqui um exemplo numérico. [...] Igual eu falei ontem, quanto que é três vezes quatro? (As: doze). [o professor deu um exemplo numérico, enquanto falava escrevia o algoritmo (3 x 4 =12)] se eu apagar esse que é o que eu quero descobrir [apagou o três e fez um quadrado no lugar x 4 = 12] o que que eu vou fazer com esses dois? [apontou se referindo ao quatro e ao doze] (A: vai dar 3) vai dividir. [e foi escrevendo o algoritmo]. Então o que que a gente vai escrever aqui com esses dois? [e apontou para a expressão, se referindo ao dez e ao quinze]. (As: dividir) Então vamos lá, então vai ficar

> quinze dividido eu posso por assim? [escreve a fração 15/10] (As: pode) Oh, quinze dividido por dez [aponta os números nessa sequência]. Daqui para cá. As letras nós já fizemos, então dois tira um sobra um, cinco tira três sobra dois, agora quinze dividido por dez, quinze décimos, simplificando, (A1: dá 15) não. Por cinco, então quinze por cinco? (As: três) dez por cinco (As: dois). Então três meios [escreve a resposta].

O desenho do retângulo feito pelo professor na expressão que precisa ser encontrada substitui a supressão de um termo, que agora não é mais um número, mas uma expressão, aumentando o grau de dificuldade. O fato de o professor colocar o retângulo para representar a expressão e não outra letra, se fez possivelmente para não confundir ainda mais os alunos. No entanto, isso não garante que o aluno estabeleça a equivalência que aquele retângulo ou espaço vazio representa, exigindo um procedimento de redesignação.

Quando o professor dá um exemplo numérico ele sugere subjacentemente que as propriedades numéricas valem também para os termos algébricos. Contudo, nem sempre isso é verdade na Álgebra, pois nem sempre somamos ou multiplicamos as letras como fazemos com os números. Por exemplo, a divisão de polinômios por polinômios, a divisão não é dividir termo a termo. Esse processo analógico entre os números e monômios, por exemplo, não tem equivalência, a operação está significando a mesma coisa, mas a forma do tratamento não é equivalente com a divisão numérica.

A *conversão* consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação em outro registro, seguindo as mudanças referentes a cada registro. Para Duval (2003, p. 15), "a capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados". As conversões que aconteceram durante as observações das aulas se estabeleceram comumente entre os registros língua falada e escrita algébrica, língua falada e língua escrita, figural e escrita algébrica e vice-versa.

P4 foi o professor que mais utilizou registros diferentes. Fez uso do registro geométrico para a formação do quadrado perfeito, traduzido como o binômio algébrico $(a + b)^2$ e do tangram[2] para apresentar a conversão da forma figural para a escrita algébrica da área do triângulo.

Contudo, P4 não faz uso constante de desenhos e esquemas. Ele prefere o registro língua natural e o repete inúmeras vezes como uma forma de provocar a aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar os tipos de transformações cognitivas: formação, tratamento e conversão, buscando ligações com os quatro tipos de operações de substituição semiótica, propostas por Duval et al. (2014), presentes na condução de aulas de Álgebra, ministradas pelos professores do 8º ano de colégios do município de Santa Terezinha de Itaipu/PR.

Norteados pelo problema: que atividades os professores propõem para o ensino da Álgebra? Que tipo de processo de composição dos conhecimentos a adquirir pode ser visualizado nas atividades propostas? Buscou-se observar a introdução desse conteúdo. Os conteúdos trabalhados pelos professores e observados pela pesquisadora foram: expressões algébricas, divisão de monômio por monômio, potenciação de monômios, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dos polinômios e produtos notáveis.

Segundo Duval et al. (2014) na Álgebra a letra assume um valor operatório, em que, o importante é que o aluno entenda e saiba diferenciar o

[2] Jogo chinês, que é uma espécie de quebra-cabeça.

valor operatório seja ele como incógnita, variável ou como nenhum dos dois – como parâmetro. Verificou-se que isso não está claro para nenhum dos professores sujeitos da nossa pesquisa e somos levados a pensar se esta ocorrência não seria um problema na sua formação inicial.

Sabemos que isso não é um processo simples de acontecer, mas a questão é: que argumentos esses professores estão usando para que os alunos consigam entender isso na sua versão – na versão equacional, na versão funcional, na versão que é só uma expressão algébrica? Haja vista, que selecionaram basicamente exercícios de repetição e fixação para introduzir o ensino de álgebra.

Quanto aos tipos de substituição semiótica propostas dor Duval et al., (2014), apesar de P4 mostrar a fórmula da área do triângulo, o tipo que mais se destacou foi o 4. Substituir uma expressão literal por outra expressão literal, possivelmente por tratar-se dos conteúdos de expressões algébricas, monômios e polinômios que foram observados, ainda que, como já mencionado, o livro didático - LD apresentasse exemplos e exercícios que proporcionavam o uso do registro geométrico, para ensinar a fórmula de grandeza.

Verificou-se o zelo dos professores quanto às formalizações de conceitos e termos utilizados, estando sempre atentos as dúvidas dos alunos. Em vários momentos, os professores fizeram analogias utilizando as representações intermediárias, destacando-se as representações geométrica e numérica. Contudo, evidenciamos uma ênfase dada por eles ao tratamento algébrico e a ausência de registros figurais, tendo em vista que o LD apresenta atividades com figuras planas como outro registro das expressões algébricas. Apesar de sabermos que a Álgebra surgiu como outro registro para representar o mesmo objeto matemático muitas vezes conhecido somente pelo registro geométrico. Disso conclui-se que os professores veem a Geometria e a Álgebra como duas coisas completamente separadas.

As conversões em maior parte se deram entre o registro falado e o registro escrito. Contudo, não houve nenhuma conversão de um problema em linguagem natural para se criar uma expressão algébrica e nem a de elaboração de problemas, apesar de verificarmos que o LD propunha alguns.

Duval et al. (2014) afirmam que é preciso enxergar a totalidade dos objetivos ao longo dos anos escolares e das dificuldades frequentes com as quais os alunos se deparam, conduzindo o professor a uma prática constante de interrogação sobre como organizar as atividades e a importância e adequação destas para fazer com que os alunos tenham acesso à Álgebra. Apesar de não conhecerem a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o professor com sua experiência, encontra empiricamente uma forma de resolver algumas questões didáticas, de como fazer a mobilização de diferentes registros e de conduzir os alunos.

No entanto nos questionamos: será que elas estão chegando à sala de aula? Entendemos que as pesquisas têm que atingir a sala de aula, principalmente as da área de ensino. Uma das coisas que não podemos deixar de fazer é ter essas discussões e fazer essa pesquisa chegar lá. Esses professores precisam ser atendidos, eles precisam ser compreendidos.

Compreendemos o trabalho e o 'mergulho' que esse professor faz todos os dias em ir para as escolas e trabalhar com seus alunos, em que muitas vezes ele é sozinho nas suas dúvidas e nos entendimentos que ele tem que mostrar. Sendo assim, esses resultados contribuem, para a dispersão das ideias de Raymond Duval em relação ao ensino da álgebra.

Sabemos que o que trouxemos neste trabalho é apenas um pequeno recorte da prática do professor em sala de aula. Há muito a ser pesquisado, analisado, refletido e estudado.

REFERÊNCIAS

Bassoi, T. S. (2006). *Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental.* (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, Curitiba, PR, Brasil. Recuperado de https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/6601

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais* (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissagens Intellectuels): (fascículo I) / Raymond Duval. Levy, L. F., & Silveira, M. R. A. (Trad.). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.* São Paulo: Proem.

Duval, R., Campos, T. M. M., Barros, L. G. X., & Dias, M. A. (Orgs.). (2014). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso* (1a ed.). São Paulo: Proem.

Gibbs, G. (2009). *Análise de dados qualitativos.* (R. C., Costa, Trad.). Porto Alegre: Artmed.

Langwisnki, L. G. (2018). *O ensino de álgebra e os registros de representação semiótica: um olhar para a prática dos professores do 8º ano do ensino fundamental* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus Foz do Iguaçu, Centro de Educação, Letras e Saúde, Programa de Pós-Graduação em Ensino.

Lüdke, M., & André M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

CAPÍTULO XV

O PAPEL DAS DESCRIÇÕES E O POTENCIAL SEMIÓTICO DOS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA NA CRIAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO ENSINO SUPERIOR

José Luiz Rosas Pinho
Méricles Thadeu Moretti

Este trabalho aborda a criatividade em matemática, mais especificamente, criatividade na Educação Matemática, com um recorte para a área de Geometria. A criatividade em Educação Matemática é um tema que se desenvolveu com mais intensidade, a partir da segunda metade do século XX, no que se refere à *resolução de problemas* (Pólya, 1954, 1957; Schoenfeld, 1985). Porém, uma nova vertente de investigação surgiu um pouco depois, relativa à *criação/formulação de problemas e conjecturas* em educação matemática (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994, 1997).

Um grande número de artigos sobre a criação de problemas ("problem posing", na língua inglesa, em que se encontra a maioria dos trabalhos) no ensino básico e no ensino superior tem surgido desde então. Eis a questão central que se impõe: é possível ensinar nossos estudantes a serem mais criativos, não somente na resolução de problemas, mas também na elaboração de novos problemas? E se é possível, como estimular esses estudantes a serem mais criativos? Neste trabalho, que é parte de uma tese em desenvolvimento, aborda-se a criatividade em Geometria no ensino superior.

A fundamentação para essa abordagem é a teoria dos registros de representação semiótica apresentada em um trabalho de Duval (2012b) e posteriormente em seu livro fundamental (Duval, 2004). Por que o recorte para a Geometria? Segundo Duval (2012a): “Os problemas em geometria apresentam grande originalidade em relação a muitos outros problemas em matemática que podem ser propostos aos alunos.” (Duval, 2012a, p. 119). Mas a importância da geometria reside no fato de que ela fornece uma forma de expressão que vai além disso. Segundo Thom (1998): “. . . geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a linguagem natural e o formalismo matemático. . .*o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio que é impossível de se omitir no desenvolvimento da atividade racional do ser humano* [grifo nosso] (Thom, 1998, p. 74, tradução nossa).

Duval argumenta que na Geometria é necessário trabalhar também com o registro figural e que os problemas de geometria, cujos enunciados em geral apresentam figuras, podem gerar confusões e dificuldades para os alunos quando a combinação entre figura e enunciado não é semanticamente congruente (Duval, 2012a). Porém, é o registro figural que facilita, talvez paradoxalmente, abordagens criativas em Geometria, por exemplo, por meio de construções geométricas.

Neste aspecto, os Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) ou, mais geralmente, Ambientes de Geometria Dinâmica, desempenham um papel facilitador para a criação e para a verificação ou refutação dos problemas criados. Neste caso, é preciso explorar o *potencial semiótico* (Bussi & Mariotti, 2008) associado a essas ferramentas**.** No entanto, tanto na resolução como na criação de problemas, o registro verbal e o registro escrito são fundamentais para se poder expressar as ideias corretamente. Assim, a função discursiva referencial, através de sua operação de descrição, tem um papel importante para que essa expressão ocorra (Duval, 2003).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na primeira parte será apresentado uma breve revisão da literatura sobre criatividade, do ponto de vista de filósofos, de psicólogos e de pesquisadores em Educação Matemática; na segunda parte será discutido o papel das descrições no processo de criação, segundo o trabalho essencial de Duval (2003), em que é apresentado um procedimento para formulação de problemas a partir de uma descrição completa de um problema; em seguida, visando o uso de um SGD, será analisado o potencial semiótico dessa ferramenta e serão sugeridas fontes para a criação de problemas de Geometria; por fim, será discutido um exemplo, construído a partir do procedimento sugerido por Duval (2003).

UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA DA LITERATURA: CRIATIVIDADE SEGUNDO A FILOSOFIA, A PSICOLOGIA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Criatividade tem sido objeto de estudo por parte de filósofos, psicólogos, cientistas, artistas e educadores. Historicamente, com um sentido de "imaginação", "expressão", "inspiração" ou "emoção", filósofos da antiguidade e da era moderna abordaram esse tema: segundo Platão, a inspiração é uma espécie de loucura e para Kant criatividade e imaginação (a faculdade de intuir mesmo quando um objeto não está presente) estão relacionadas.

Na primeira metade do século XX poucos trabalhos sobre criatividade foram escritos na área da psicologia. Foi Guilford (1950, p. 445), em sua palestra inaugural como presidente da *American Psychological Association*, que chamou a atenção de seus colegas para a negligência dos psicólogos em estudar aquele tema. Nos anos que se seguiram, após a palestra de Guilford, surgiram muitos trabalhos de psicólogos sobre o assunto (Rhodes, 1961, p. 306). Esses trabalhos estabeleceram diversas definições de criatividade, destacaram seus componentes e desenvolveram teorias e tipos de criatividade. Em geral, em seus trabalhos, tanto psicólogos como pesquisadores em educação, afirmam que a criatividade pode e deve ser estimulada em todas as pessoas, em especial nos estudantes do ensino básico e do ensino superior.

Segundo Weisberg (2006, p. 95-96) foi o próprio Guilford na década de 50 do século passado quem cunhou os termos *pensamento divergente* e *pensamento convergente* para explicar o pensamento criativo. O pensamento divergente é aquele que rompe os laços com o estabelecido, divergindo do antigo e produzindo numerosas e novas ideias que irão alimentar o pensamento convergente, e este selecionará essas ideias para transformá-las em algo produtivo. Essas ideias podem ser categorizadas segundo: (i) *fluência*, que corresponde a um grande número de ideias em um mesmo nível; (ii) *flexibilidade*, que indica ideias variadas, em níveis distintos; e (iii) *originalidade*, que corresponde a ideias não usuais (Runco, 1993, p. xiii).

Segundo Boden (2004, p. 1-2) criatividade é a habilidade de produzir ideias e artefatos que são novos, surpreendentes e úteis. A condição de originalidade no entanto pode ser contestada. Boden difere entre *criatividade histórica* (quando ninguém teve certa ideia antes) e *criatividade psicológica* (uma ideia original para um indivíduo). Uma distinção semelhante é dada por Kaufmann e Beghetto (2009): criatividade “grande C” (nível de pessoas eminentes ou gênios) e criatividade “pequeno c” (criatividade comum). É esta última (psicológica ou pequeno c) que justifica o estímulo à criatividade na educação. Em seu artigo, com extensa bibliografia, Papaleontiou-Louca, Varnava-Marouchou, Mihai, e Konis (2014) afirmam: "Assim, a criatividade pequeno c parece particularmente apropriada à Educação Superior, onde sua prioridade deve ser encorajar todos os estudantes a alcançar seu pleno potencial" (Papaleontiou-Louca et al, 2014, p. 133, tradução nossa).

Csikszentmihalyi (1996) dá um enfoque sociocultural à criatividade com o seu *modelo de sistemas* e apresenta três fatores importantes para que a criatividade ocorra: um domínio (cultura) que contém regras simbólicas, um indivíduo (que aporta novidade para o domínio simbólico) e um campo (sociedade) formado por *experts* que reconhecem e validam a inovação em um meio de aprendizagem. Sternberg em sua *teoria de investimento em criatividade*, afirma que a criatividade, como uma atitude de decisão, pode ser desenvolvida no âmbito educacional: "*A visão de criatividade como uma decisão sugere que a criatividade pode ser desenvolvida . . . Podemos ensinar os estudantes a pensar de forma mais criativa*" [grifo nosso] (Sternberg, 2006, pp. 90-93, tradução nossa).

No começo do século XX o matemático francês Henri Poincaré escreve, prevendo a atenção que os psicólogos dedicariam à criatividade no futuro: "A gênese da invenção matemática é um problema que deve inspirar o mais vivo interesse ao psicólogo" (Poincaré, 1908, p. 347, tradução nossa). Nesse trabalho, Poincaré relata com detalhes as etapas de seus processos mentais relacionados com a descoberta das funções Fuchsianas (automórficas). Em 1944 o matemático francês Jacques Hadamard publica um livro, tratando da psicologia da criação no campo da Matemática. Tanto Poincaré como Hadamard referiam-se ao processo de criação do pesquisador, embora Hadamard escrevesse, já indicando um possível viés educacional: "Entre o trabalho do estudante que tenta resolver um problema em geometria ou álgebra e o trabalho de criação, pode-se dizer que existe apenas uma diferença em grau, uma diferença de nível, ambos os trabalhos sendo de natureza semelhante" (Hadamard, 1944, p. 104, tradução nossa).

Pólya foi um dos pioneiros a abordar a questão realmente do ponto de vista da Educação Matemática, tanto no que se refere aos processos criativos (Pólya, 1954), como na resolução de problemas (Pólya, 1957). Kilpatrick foi mais incisivo quanto à criação/invenção de problemas por parte dos estudantes em sala de aula: "No entanto [a formulação de problemas] tem recebido pouca atenção *nos currículos dos cursos de matemática* . . . A experiência de descobrir e criar seus próprios problemas deveria ser parte da educação de todo estudante" [grifo nosso] (Kilpatrick, 1987, pp.123-134, tradução nossa).

O mito da criatividade alcançável apenas por uns poucos 'gênios' é pouco a pouco desbancado e, na última década do século XX, Silver escreve:

> Uma nova visão de criatividade tem surgido de pesquisas contemporâneas – uma visão que se contrapõe em agudo contraste com a visão do gênio ... *além disso, ela é suscetível a influências instrucionais e experimentais ... Essa nova visão de criatividade fornece uma fundamentação para construir aplicações educacionais. De fato, essa visão sugere que uma formação rica em criatividade deva ser apropriada para uma larga faixa de estudantes, e não meramente para uns poucos indivíduos excepcionais* [grifos nossos] (Silver, 1997, p. 75-76, tradução nossa).

No século atual, uma grande quantidade de trabalhos sobre criatividade na Educação Matemática tem surgido, principalmente em língua inglesa. No Brasil destaca-se a tese de Gontijo (2007) e o recente livro de

Gontijo, Carvalho, Fonseca, & Farias, (2019), que contém uma extensa bibliografia sobre o assunto.

O PAPEL DAS ATIVIDADES DE DESCRIÇÃO NO PROCESSO DE CRIAÇÃO

Em matemática, bem como em qualquer ciência, o papel da linguagem sobre o pensamento e sobre a aprendizagem em sala de aula é fundamental. Serão abordados nesta seção os processos de descrição, que são essenciais para quaisquer atividades matemáticas (Duval, 2003).

A finalidade de uma linguagem é produzir um discurso, isto é, uma expressão referencial a tudo que nos rodeia com fins de comunicação entre as pessoas. O discurso é o resultado do emprego da linguagem para se falar de objetos físicos reais e objetos idealizados ou imaginários (Duval, 2004).

As atividades, ou processos de descrição são fundamentais para a aquisição dos conhecimentos científicos, contribuindo para a descoberta de novos dados, base de todo desenvolvimento do conhecimento. A atividade de resolução de problemas propostos aos alunos com fins didáticos, bem como outras atividades matemáticas tais como generalização, produção de contraexemplos, definições e, por conseguinte, de criação de problemas, desenvolvem-se a partir de um trabalho anterior de descrição (Duval, 2003, p. 28).

Todo processo de descrição é uma atividade complexa de representação, tanto mental e interior, como semiótica e material, que dá lugar a uma grande variedade de atividades para o desenvolvimento do conhecimento. A atividade de descrição refere-se tanto a situações de transmissão como a situações de observação e mobiliza dois registros de representação distintos: o verbal ou escrito e o figural.

Segundo Duval (2003, p. 48) a análise dos processos de descrição, bem como da variedade das possíveis descrições, nos levam à questão da produção das representações e da compreensão das representações produzidas, indicando que a atividade de representação está no cerne de todo processo de descrição. Por exemplo, não há conhecimento em ciências sem as descrições relativas às observações e à coleta de dados (relativas a tais tipos de fenômenos). Em seu artigo Duval (2003) procura verificar como esses processos influenciam a aprendizagem matemática. "É preciso não confundir representação e registro de representação. A grosso modo, uma *representação* é qualquer coisa que se coloca no lugar de outra coisa." (Duval, 2003, p. 50, tradução nossa). Há dois tipos de sistemas que produzem uma representação: (i) os sistemas físicos e neuronais, que produzem automaticamente as representações; e (ii) os sistemas semióticos, que contemplam a produção intencional das representações. Os chamados *registros de representação semiótica* formam um subconjunto dos sistemas semióticos.

Outra questão fundamental é a análise das produções dos alunos. É no contexto dos processos de descrição que se obtém as produções mais pessoais e mais diversificadas desses alunos. Do ponto de vista da pesquisa (em educação) trata-se de uma questão metodológica e, do ponto de vista dos professores, de uma questão de diagnóstico. Compreender uma descrição é visualizar o que está descrito, e isso significa que não é somente reconhecer o objeto descrito, mas também poder colocar em correspondência as unidades do desenho e o traçado do objeto descrito. A importância dos processos de descrição se evidenciam através de seu papel heurístico no desenvolvimento dos conhecimentos científicos.

Partindo do princípio de que a resolução de problemas é elemento central na aprendizagem da matemática, então é preciso compreender as características e a estrutura de um enunciado de um problema. Basicamente um enunciado de um problema proposto aos alunos (no ensino básico, mas muitas vezes também no ensino superior) consiste na descrição parcial de uma certa situação. Tal enunciado é obtido de uma *descrição completa* de uma situação (que não é, portanto, um problema) por meio da omissão de alguns dados (diminuição ou "enfraquecimento" de hipóteses) até a obtenção de uma *descrição mínima* (que permite ainda recuperar a descrição completa) ou uma descrição intermediária (Duval, 2003). A análise didática prospectiva centrada na resolução de problemas considera somente a passagem do enunciado dado aos seus diversos tratamentos, sem considerar a passagem de uma descrição completa a uma descrição mínima. Segundo Duval essa passagem é fundamental: "É portanto decisivo que se introduza os alunos nesse jogo particular que constitui a *fabricação de problemas matemáticos didáticos* (grifos nossos) e, em seguida, sua resolução" (Duval, 2003, p. 23, tradução nossa).

A formulação de perguntas, analogamente à fabricação de problemas, é também extremamente importante: ". . .a importância, na aquisição de conhecimentos científicos, do fato de se formular perguntas: trata-se, aí também, de uma condição necessária para o desenvolvimento da compreensão na aprendizagem" (Duval, 2003, p.29, tradução nossa). Em seguida Duval comenta, indicando a necessidade de se trabalhar no ensino superior:

> . . . propõe-se aos alunos que fabriquem eles mesmos enunciados de problemas . . . Para introduzir os alunos na dinâmica, bem particular, do questionamento gerador de problemas matemáticos de natureza "didática", é necessário fazê-los inicialmente trabalhar sobre a descrição completa de uma situação e em seguida fazê-los listar as diferentes maneiras de recortar essa descrição completa para obter descrições mínimas. *E consideraríamos que um tal trabalho talvez seria também necessário de ser feito com os futuros professores* [grifos nossos] (Duval, 2003, pp. 30-31, tradução nossa).

A pergunta "o que é criar um problema de matemática, em particular, de geometria?", deve ser precedida pelas perguntas "o que é um problema de matemática?" e "o que é resolver um problema de matemática?". Duval (2003) aborda essas duas últimas questões introduzindo a distinção entre descrição completa de uma situação e descrição mínima de uma situação. A geração de problemas de matemática no ensino básico, sugerida por Duval, dá uma indicação do que se pode fazer, através dos processos de descrição, no ensino superior.

O POTENCIAL SEMIÓTICO DOS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Os Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) são ferramentas que podem servir de apoio no ensino e nas investigações em Geometria, tanto para a resolução como para a criação de problemas e conjecturas. Além de ser uma *régua e um compasso no computador*, o que permite uma maior precisão no traçado dos objetos geométricos, um SGD possui uma qualidade essencial para o estudo de investigações, que é o seu dinamismo. O adjetivo *dinâmica* significa que, além da possibilidade de se construir uma figura (representação figural), sob certas hipóteses e com determinadas propriedades, é possível modificar essa figura, por meio de deslocamento de alguns de seus elementos, e manter aquelas propriedades se elas forem características invariantes da figura. Por exemplo, se são dados uma reta e um ponto quaisquer (na reta ou não incidente a ela), e traçarmos por esse ponto a reta perpendicular àquela reta, e se modificarmos um daqueles dois elementos (movendo-se), então a reta perpendicular inicialmente traçada modificar-se-á mantendo a propriedade de passar pelo ponto dado (ou modificado) e ser perpendicular à reta dada (ou modificada).

Um software por si só não produz nada. É preciso que haja um usuário que interaja com ele através de algum processo. Rabardel (1995) utiliza os termos *artefato* (material ou simbólico) e *esquema de utilização associado*. O artefato se transforma em *instrumento* à medida que são aplicados os esquemas de utilização através de um processo denominado *Gênese instrumental* (Rabardel, 1995, p. 135) que, por sua vez, é "articulada através de dois processos: a *instrumentalização*, relativa à emergência e evolução dos diferentes componentes do artefato, por exemplo, o progressivo reconhecimento de suas potencialidades e suas limitações; e a *instrumentação*, relativa à emergência e desenvolvimento dos esquemas de utilização." (Bussi & Mariotti, 2008).

A matemática tem como objetos de estudo entes abstratos e somente através dos signos que representam esses entes é que é possível acessá-los e tratá-los, ou seja, através da representação semiótica. O ser humano se relaciona com o mundo por meio da mediação se signos e artefatos. Bussi e Mariotti (2008) desenvolveram a Teoria da Mediação Semiótica para analisar os diferentes tipos de signos envolvidos em atividades de ensino-aprendizagem com o apoio de artefatos. É no desenvolvimento do processo de mediação semiótica que pode ser descrita a evolução de significados que emergem da interação desses signos e é uma tarefa do professor promover e orientar este processo (Stormowski, Gravina, & Lima, 2013, p. 6).

> Ao fazer isso, o professor agirá tanto no nível cognitivo como no nível metacognitivo, ambos estimulando a evolução dos significados e guiando os alunos para terem consciência de seu *status* matemático. Em suma, por um lado, significados pessoais estão relacionados ao uso do artefato, em particular em relação ao objetivo de realizar a tarefa; por outro lado, significados matemáticos podem estar relacionados ao artefato e seu uso. Essa dupla relação semiótica será chamada de *potencial semiótico do artefato* (Bussi & Mariotti, 2008, p. 754, tradução nossa).

Portanto, o que caracteriza o potencial semiótico de um SGD é a capacidade de relacionar conceitos matemáticos identificados no software com signos e significados que emergem de seu uso (Stormowski, Gravina, & Lima, 2013, p. 1).

Na próxima seção será dado um exemplo em que o potencial semiótico do software GeoGebra, emergente da relação dos autores com o artefato, será explorado. Destaca-se aqui, além da consciência das limitações do software por razões epistemológicas (a impossibilidade de se realizar medidas exatas e a limitação de precisão, causando erros de arredondamento) e físicas (o plano, na tela de um computador não é um *continuum*), o emprego do teste de arrastro (*dragging test,* em inglês) para verificação de propriedades e medidas em linhas (um grau de liberdade), em regiões planas (dois graus de liberdade), em regiões planas através de um procedimento de varredura em uma família de linhas e depois em outra linha, o emprego do lugar geométrico e a aproximação (*zoom*) de objetos.

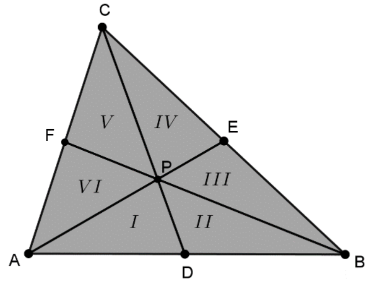
Na tese que está em preparação por um dos autores, são descritas atividades com alunos do ensino superior e o potencial semiótico desenvolvido com o uso do GeoGebra por esses alunos. Também sugere-se ali algumas fontes de investigação para a criação de problemas: construções geométricas, problemas de otimização (extremos) e recíprocas de resultados. O exemplo da próxima seção se origina dessa última fonte, utilizando o processo descrito por Duval (2003) na seção anterior.

EXEMPLO DE FORMULAÇÃO/CRIAÇÃO DE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

Consideremos o seguinte teorema da Geometria Plana:

As três medianas de um triângulo qualquer são concorrentes em um único ponto (no interior do triângulo) e essas medianas dividem o triângulo em seis outros triângulos de mesma área (Figura 1).

Figura 1 – Os seis triângulos equivalentes obtidos pelas medianas do triângulo ABC



Fonte: Os autores.

Há aqui dois resultados: um que diz que as três medianas concorrem em um ponto (que é chamado baricentro do triângulo) e outro que diz que os seis triângulos formados por essas medianas são equivalentes (mesma área). Uma recíproca para a segunda parte desse resultado é:

Sejam três cevianas quaisquer concorrentes em um ponto no interior de um triângulo qualquer. Se os seis triângulos contidos naquele triângulo e obtidos pela subdivisão das três cevianas tiverem a mesma área, então aquelas cevianas são as medianas do triângulo (e o ponto de intersecção delas é o baricentro do triângulo).

Esse resultado tem uma demonstração simples: como, por hipótese, na Figura 1os triângulos *I* e *II* têm a mesma área e como suas alturas relativas ao vértice comum P são congruentes, então AD = BD. Analogamente, obtém--se BE = CE e CF = AF. Logo as cevianas AE, BF e CD são medianas do triângulo ABC. Pode-se considerar esse resultado como um problema completo, na terminologia de Duval (2003).

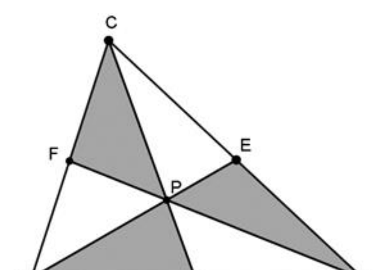
No entanto, aplicando-se as ideias de Duval (2003), é possível obter descrições menores, até se chegar a uma descrição mínima (em termos de hipóteses necessárias) do problema. O que será feito aqui será uma análise dos vários problemas possíveis e suas soluções, um tanto complexa para ser discutida no ensino básico (embora envolva Geometria Plana "elementar"), mas passível de discussão com alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores do ensino básico.

Uma pergunta generalizada, a título de recíproca do resultado do exercício clássico enunciado anteriormente seria:

Sejam três cevianas quaisquer concorrentes em um ponto no interior de um triângulo qualquer. Se n (1<n<6) dentre os seis triângulos contidos *naquele triângulo e obtidos pela subdivisão das três cevianas tiverem a mesma área, então aquelas cevianas são as medianas do triângulo?*

O caso *n* = 5 é bem simples e dá uma resposta afirmativa para o enunciado. Os casos *n* = 4 e *n* = 3 são os que exigem uma análise mais detalhada e complexa. Cada caso desses abrange quatro subcasos. Para listá-los, um procedimento sistemático será necessário. Considera-se inicialmente os três pares de triângulos que compartilham, em cada par, um mesmo vértice do triângulo ABC: par *I* e *II*; par *III* e *IV*; e par *V* e *VI* (figura 1). No caso *n* = 4, necessariamente dois dos quatro triângulos devem estar contidos em algum daqueles pares e os outros dois podem estar contidos em outro par (subcaso 4.1), ou um em cada par de três maneiras distintas (subcasos 4.2, 4.3 e 4.4). No caso *n* = 3, pode-se ter dois triângulos em um mesmo par e o terceiro em outro, de duas maneiras distintas (subcasos 3.1 e 3.2), ou pode-se ter um triângulo em cada par, de duas maneiras distintas (subcasos 3.3 e 3.4).

Figura 2 – Subcaso 3.4: os três triângulos sombreados têm a mesma área



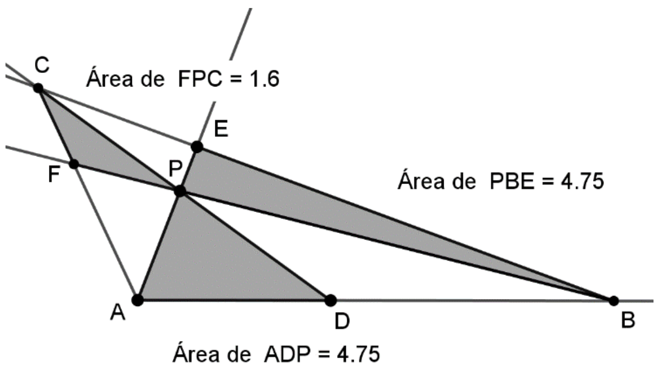
Fonte: Os autores.

É possível verificar que os subcasos do caso *n* = 4 têm resposta afirmativa para a pergunta feita se os subcasos do caso *n* = 3 tiverem resposta afirmativa. As demonstrações dos casos em que *n* = 3, exceto para o subcaso

3.4 se baseiam no traçado de linhas auxiliares, no Teorema de Tales e no Teorema de Ceva que, em geral, não é estudado no ensino básico.

Para o subcaso 3.4 será explorado o potencial semiótico do GeoGebra, tentando-se reconstruir, a partir de um dos seis triângulos da subdivisão, a figura no subcaso 3.4 (Figura 3).

Figura 3 – Situação em que a área do triângulo CPF não é igual às áreas dos triângulos ADP e BEP

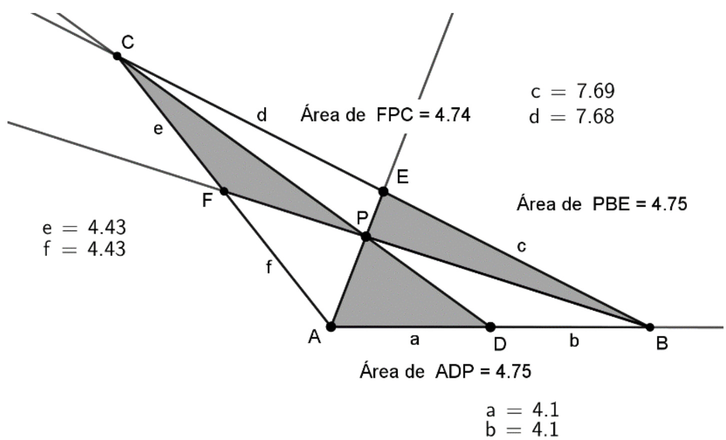


Fonte: Os autores.

Considere então um triângulo ADP, como da figura deste subcaso. Traça-se as semirretas AP e AD, e escolhe-se na semirreta AP um ponto E qualquer de modo que o ponto P esteja entre A e E. Agora, usando a quarta proporcional obtemos um ponto B na semirreta AD, com D entre A e B, de modo que as áreas dos triângulos ADP e BEP sejam iguais. Se movermos o ponto E na semirreta AP, o ponto B será movido na semirreta AD de modo que a igualdade das áreas de ADP e BEP seja mantida. Finalmente, traçam-se as semirretas BE e DP e, em sua intersecção, encontra-se um ponto C. Na intersecção da semirreta BP com o lado AC encontra-se um ponto F (pode ocorrer alguma situação de impossibilidade, mas é possível ajustar o ponto E de modo a se obter os pontos B e F). Verifica-se agora as áreas dos três triângulos ADP, BEP e CPF.

Agora move-se o ponto E na semirreta AP de modo que a área do triângulo CPF se iguale às áreas dos outros dois triângulos (ou fique bem "próxima", pois é muito difícil realizar esse movimento). Verifica-se então se os pontos D, E e F são (aproximadamente) os pontos médios dos lados do triângulo ABC, que é o que ocorre. Conclui-se, por meio desta "prova" que a pergunta no subcaso 3.4 é respondida também afirmativamente.

Figura 6 - Situação em que a área do triângulo CPF é quase igual às áreas dos triângulos ADP e BEP



Fonte: Os autores.

CONCLUSÕES

Viu-se neste trabalho que os processos de descrição, segundo Duval (2003), cumprem um papel importante na criação de problemas de matemática. Em se tratando de criação de problemas em Geometria, os SGD são ferramentas que podem ser úteis e, como tal, é preciso explorar o potencial semiótico que emerge dessa ferramenta. O exemplo dado aqui apresentou peculiaridades que o tornam um tanto complexo para ser analisado no ensino básico, mas bastante plausível para o ensino superior, em que os futuros professores de matemática do ensino básico estão capacitados, ou em capacitação, para compreender e articular conhecimentos avançados. Como foi comentado aqui, a criatividade deve ser estimulada e desenvolvida em todos os estudantes e deve fazer parte do currículo de todos aqueles que estudam matemática.

As palavras do matemático Lockhart enfatizam qual deveria ser o espírito do ensino de matemática: ". . . estudantes e seus professores devem, a todo o instante, estar engajados no processo de ter ideias, não ter ideias, descobrir padrões, fazer conjecturas, construir exemplos e contraexemplos, vislumbrar argumentos e criticar seus trabalhos entre si" (2002, p. 16, tradução nossa).

REFERÊNCIAS

Boden, M. (2004). *The Creative Mind – Myths and Mechanisms.* (2nd ed.) Londres: Routlege.

Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a vygotskian perspective. In: M. A. Clements et al (Eds.), Handbook of international research in mathematics education, New York, p. 746-783.

Csikszentmihalyi, M. (1996). *The Psychology of Discovery and Invention*. New York: Harper Collins Pub.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives,* vol 8, 13-62.

Duval, R. (2004). DUVAL, R. *Semiosis y pensamento humano – Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (M. V. Restrepo, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat*, 7(1), 118-138.

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento (M. T. Moretti, Trad.). *Revemat*, 7(2), 266-297.

Gontijo, C. H. (2007). *Relações entre Criatividade, Criatividade em Matemática e Motivação em Matemática de Alunos do Ensino Médio* (Tese de Doutorado em Psicologia). Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

Gontijo, C. H., Carvalho, A. T., Fonseca, M. G., & Farias, M. P. (2019). *Criatividade em Matemática – conceitos, metodologias e avaliação*. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Guilford, J.P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, 5, 444-454.

Hadamard, J. (1944). An essay on the psychology of invention in the mathematical field. New York: Dover.

Kaufman, J. C., Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and litle: The Four C model of creativity. *Review of General Psychology*, 13, 1-12.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, 123-147.

Lockhart, P. (2002). A mathematician's lament. In *Devlin's Angle* (March 2008) at the Mathematical Association of America website. Retrieved from http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf.

Papaleontiou-Louca, E., Varnava-Marouchou, D., Mihai, S. & Konis, E. (2014). Teaching for Creativity in Universities. *Journal of Education and Human Development*, 3(4), 131-154.

Poincaré, H. (1908). L'Invention Mathématique. *L'Enseigment Mathématique*, 10, 357-371.

Pólya, G. (1954). Mathematics Plausible Reasoning (Vols. 1-2). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Rhodes, M. (1961). An Analysis of Creativity. *The Phi Delta Kappan*, 42(7), 305-310.

Runco, M. (1993). Creativity as an Educational Objective for Disadvantaged Students. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. London: academic Press.

Silver, E. A. (February,1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 29(3), 75-80.

Sternberg, R. J. (2006). The Nature of Creativity. *Creativity Research Journal*, 18(1), 87-98.

Stormowski, V., Gravina, M. A., & Lima, J. V. (2013, dezembro). Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. *Novas Tecnologias na Educação*, 11(3), 1-10.

Thom, R. (1998). “Modern” Mathematics: An Educational and Philosophic Error? In: T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp. 67-78). Princeton: Princeton University Press.

Weisberg, R. W. (2006). Creativity -Understanding Innovation in Problem Solving, Science, Invention, and the Arts. New Jersey: John Wiley.

CAPÍTULO XVI

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ENSINO DE GEOMETRIA

Jessica Rohden Schlickmann
Méricles Thadeu Moretti

As ferramentas tecnológicas existentes possuem objetivos diversos, deste modo, refletir e procurar maneiras e meios diferenciados de conduzir o ensino e aprendizagem é imprescindível.

No que tange à atividade matemática, de acordo com Duval, referencial teórico deste trabalho, apreensão dos objetos matemáticos ocorre somente por meio das representações semióticas e, mais do que isso, das conversões coordenadas entre representações. Por isso, especificamente no campo da geometria, Sodre de Souza, Moretti e Almouloud (2019, p. 323) descrevem que os “baixos desempenhos na resolução de problemas, no campo geométrico, nos levam a buscar elementos, semióticos e cognitivos” que possam proporcionar avanços na didática da matemática. A utilização da tecnologia na perspectiva da exploração de novas formas de se tratar e representar as informações existentes é defendida por Coan, Viseu e Moretti (2013), na busca de situações que promovam a aprendizagem, enquanto a ideia de propor atividade desplugada é sustentada por Brackmann (2017).

Na busca pela utilização de ferramentas digitais que propiciem os diferentes olhares e apreensões em geometria, chega-se na proposta de utilização da ferramenta Scratch. O presente artigo tem como objetivo apresentar a ferramenta e demonstrar como desenvolver atividades que trabalhem com a construção de registros figurais através das apreensões dos olhares que indiquem ângulos e lados através de comandos computacionais**.**

Ao propor a resolução de problema através de meios computacionais, possibilitaremos uma nova experimentação ao aluno. Pois é através da tecnologia computacional que ele irá desenvolver testes e simulações e terá os resultados de forma mais dinâmica. Com o resultado poderá fazer análise da viabilidade, ou ainda, poderá buscar alternativas para otimizar seu resultado ou para corrigir possíveis erros. Caso a atividade seja geométrica, foco deste trabalho, o aluno consegue perceber se seus comandos geraram a figura geométrica esperada além de perceber os conceitos que estas carregam percorrendo os olhares icônicos e não icônicos.

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E A PERCEPÇÃO DA GEOMETRIA

As figuras geométricas possuem uma quantidade de conceitos que por vezes não estão explícitos nas suas representações. E é destacado por Sodre de Souza, Moretti e Almouloud (2019, p. 2) que os “problemas abordados na Geometria, em grande parte, dispõem de figuras geométricas que nem sempre são vistas como deveriam, ou ainda, não são bem elaboradas, assim tornam-se impedimento imediato para o estudante avançar”. Alguns problemas necessitam que se tenha um olhar que transite em diferentes dimensões da mesma figura para que se consiga encontrar uma estratégia adequada para sua resolução. Teixeira (2008) argumenta que “o olhar toma um papel importante para construir não somente uma geometria das formas, mas a caracterização do pensamento geométrico".

Sodre de Souza, Moretti e Almouloud (2019, p. 2) identificam que "as observações realizadas sobre o baixo desempenho na resolução de problemas, no campo geométrico, nos levam a buscar elementos, semióticos e cognitivos, que possam apontar direcionamentos que estabeleçam um salto para o avanço da didática da matemática."

Moretti (2013) preocupa-se com a passagem do olhar que reconhece e diferencia formas para o olhar que identifica estas formas. O mesmo autor desenvolve a Semiosfera do Olhar para a aprendizagem de geometria nos aspectos que se referem à visualização para séries iniciais do ensino fundamental. A Semiosfera é descrita por Lotman (1990) como "o espaço de encontro e de convivência de diversos sistemas semióticos" que possibilita a integração de duas ou mais teorias semióticas visto sua constante interação com as linguagens.

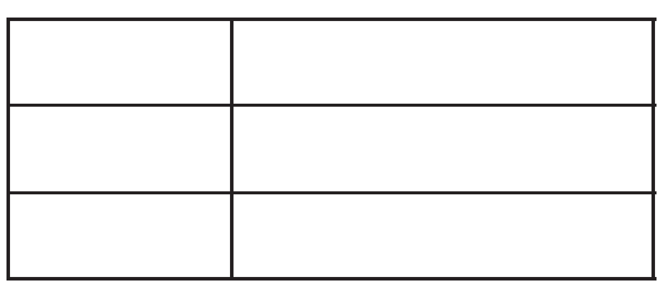
De acordo com a teoria da aprendizagem matemática, proposta por Duval (2003), um objeto matemático pode ser dado e acessado somente através de representações semióticas. No caso da aprendizagem da geometria Duval sugere para a aprendizagem em geometria a apreensão perceptiva, operatória, discursiva e sequencial devem ser desenvolvidas na resolução de problemas. Estas apreensões não são hierárquicas, mas pode haver subordinação entre elas na resolução de problemas "em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais", conforme Moretti (2013, p. 3).

Sobre as apreensões perceptiva e discursiva, Duval (2012B, pp. 120-121) defende que

> Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a **figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente**. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses.

Já a apreensão operatória concerne às modificações e reorganizações perceptivas que estas mudanças possibilitam. Moretti (2013, p. 292), a fim de demonstrar a coordenação entre discurso e figura geométrica utiliza o exemplo tratado em Balacheff (1992) e utilizado também por Duval (1995) que indaga: quantos retângulos possui a figura abaixo:

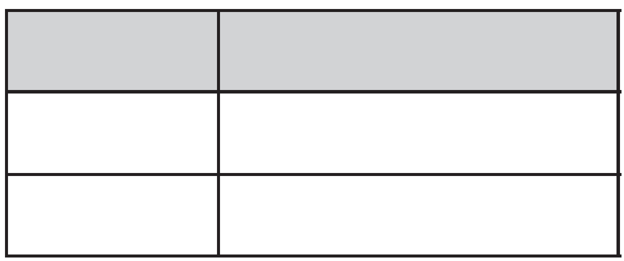
Figura 1: Retângulo de Balacheff



Fonte: Balacheff (1992).

É comum ouvir os alunos responderem que são apenas 6 retângulos presentes na figura pois algumas pessoas têm dificuldade, de perceber o retângulo hachurado na figura 2. A figura 2 é elaborada por Moretti a partir da figura 1 de Balacheff (1992).

Figura 2: Retângulo hachurado de Moretti



Fonte: Moretti (2013, p.292).

A frase “quantos retângulos possui a figura abaixo?” e a imagem apresentada demonstram dois registros de representação. Essa dificuldade de passagem de um registro de representação semiótica (partida) a outro registro (chegada) está relacionada à congruência ou a não congruência semântica entre os registros. No caso de não possuírem congruência semântica, a compreensão do objeto exige um custo cognitivo significativo conforme Duval (2012a, p. 100) como “duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas conjuntamente) e não serem semanticamente congruentes: neste caso há um custo cognitivo importante para a compreensão”.

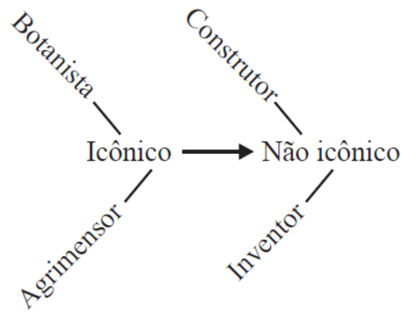
Devido à complexidade, os problemas da geometria podem ter até quádrupla apreensão na resolução, ou ainda podem exigir a articulação entre duas apreensões, o que aumenta o grau de não congruência semântica. As articulações definidas por Duval (1997) podem ser divididas em quadro grupos explicitados em Moretti (2013, p. 293, grifos do autor):

> (1) o que chamamos de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva; (2) o que chamamos de **visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória; (3) A **heurística** e **demonstração** é o resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva; (4) a **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial que também requerem a apreensão perceptiva.

Moretti (2013, p. 293) evidencia o destaque da apreensão perceptiva ao declarar que "as apreensões operatória, discursiva e sequencial se subordinam, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva", e devido a estes aspectos, o autor cita a "importância da associação entre as apreensões de Duval ao desenvolvimento das capacidades espaciais".

Dentre essas apreensões, foram caracterizadas quatro formas de olhar as figuras geométricas, segundo Duval (2005, p. 5), e estes olhares são representados na figura 3:

Figura 3: As quatro maneiras de olhar uma figura geométrica



Fonte: Moretti (2013, p. 293).

a) Botanista: o olhar que percebe semelhanças entre formas distintas e de observar diferenças em formas semelhantes.

b) Agrimensor: Ao observar um terreno e conseguir transpor no papel seu formato e medidas, ou seja, se está transpassando uma escala a outra.

c) Construtor: irá perceber na utilização de ferramentas e instrumentos como régua não graduada, um compasso, ou até mesmo a utilização de um programa que substitua ferramentas.

d) Inventor: ao acrescer informações e modificar a figura para a sua compreensão e resolução.

Estes quatro "olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas", conforme Moretti (2013, p. 294). A aprendizagem de geometria propicia ao olhar compreender o caminho percorrido do botanista ao inventor, sem perder o ponto de vista o construtor e agrimensor, pois esses olhares são exigidos no desenvolvimento de atividades de geometria em diferentes momentos e situações.

Os diferentes olhares podem ser exigidos conforme a resolução de uma atividade. E os registros de representações digitais podem elucidar conceitos e detalhes que estavam até então subentendidos nos registros existentes no livro didático ou no registro feito no quadro escolar.

A TECNOLOGIA COMPUTACIONAL

A necessidade de equipar escolas com a infraestrutura necessária para implementação da utilização tecnológica como ferramenta de aprendizagem e da necessidade de capacitação de professores "para que o seu fazer pedagógico venha ter outra conotação na sociedade que exige constantes adaptações e mudanças". Miranda (2007) defende que inserir a tecnologia em suas salas de aula necessita previamente a modificação de suas concepções e práticas de ensino.

Apesar da formação e o aprimoramento que professores recebem durante suas graduações terem relação direta com a utilização adequada das tecnologias no ambiente escolar, de acordo com Coan, Viseu e Moretti (2013), estes autores destacam ainda que o computador é utilizado somente como um retroprojetor por não sendo percebido como um instrumento didático, evidenciando a pesquisa de Miranda (2007), de Barcelos, Behar & Passerino (2010). O que possibilita a conclusão de que não há professores formados para a utilização dessas ferramentas de modo que se tire o melhor proveito dessas tecnologias.

É descrito por Brackmann (2017, p. 20) que

> é necessário tratar da tecnologia não apenas como ferramenta de aprendizagem, haja visto que, além de ser fascinante recurso didático pedagógico de elevado impacto, também pode ser utilizada como uma forma de estruturar problemas e encontrar soluções para os mesmos,

> utilizando fundamentos da Computação (Pensamento Computacional).

Ao compreender como funcionam as ferramentas computacionais, podemos possibilitar situações onde este otimize a rotina do trabalho e de estudos. O autor Brackmann (2017) ainda destaca que a manipulação dos dados não é exclusiva de computadores pois também ocorre em equipamentos rotineiros, e indica o exemplo da produção de leite que passa por diversos gerenciamentos computacionais até chegar na nossa casa. Defende ainda, que o Pensamento Computacional é ou atividade profissional, assim como ler, escrever e calcular" (Brackmann, 2017, p. 31). O Pensamento Computacional é uma "habilidade que qualquer pessoa deveria saber, independentemente da área de conhecimento definido por Kurshan (2016)[1] , como citado em Brackmann, 2017, p. 29) como

> uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente.

Utilizando os fundamentos da Computação pode-se provocar mudanças na prática pedagógica, apostando em inovação e aprimorando o currículo de cursos de licenciaturas, implementando a ideia de que o computador é um instrumento didático que deve ser utilizado com primazia no ambiente educacional na busca de resolução de variados problemas.

---

[1] Kurshan, B. (2016) Thawing from a Long Winter in Computer Science Education.

Ao propor o Pensamento Computacional como uma habilidade básica, de acordo com Brackmann (2017), o desenvolvimento e formalização de simulações irá diminuir as limitações físicas.

Ramos e Espadeiro (2014)[2] são citados por Brackmann (2017, p. 47) por defenderem que o Pensamento Computacional pode ocorrer na escola desde o ensino fundamental e que a escola deve desenvolver propostas que

> permitam proporcionar a todos uma educação moderna e atualizada, incluindo propostas que permitam aos mesmos aprender a usar a tecnologia de forma inovadora e criativa, aprender a conhecer e a usar as tecnologias, apreender a programar, aprender a ser e estar informado, construir novo conhecimento com as tecnologias disponíveis e avaliar de forma crítica o papel das tecnologias na sociedade, na economia, cultura e estilos de vida.

Ao utilizar as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICS) nas escolas estamos possibilitando que o aluno consiga avaliar com criticidade a melhor maneira de utilizar a tecnologia na sua rotina. Mas apenas dispor de laboratórios de informática não é o suficiente para que este seja utilizado como recurso, segundo Barcelos, Behar & Passerino (2010), é necessário que se entenda e perceba como a ferramenta funciona e pode ser útil na sua vida cotidiana.

De acordo com Calil (2011) não há relação direta entre aprender e utilizar recursos computacionais no ambiente escolar, e que o baixo índice de utilização destes recursos se deve ao fato da necessidade de que o planejamento e a organização destas aulas requerem um detalhamento maior, necessitando de mais tempo para seu planejamento.

---

[2] Ramos, J. L.& Espadeiro, R. G. (2014) Os desafios da introdução ao Pensamento Computacional na escola, no currículo e na aprendizagem. *Revista Educação, Formação & Tecnologias*, 7, 4–25.

As ferramentas tecnológicas necessitam um maior envolvimento dos professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem, e este envolvimento associado a ferramenta potencializam superações no processo de aprendizagem.

A dificuldade com o meio digital é discutida por Prensky (2001), e este denomina como "geração analógica" as pessoas que enfrentam mais desafios quando confrontadas com "nativos digitais", crianças e adolescentes que possuem mais facilidades com tecnologias devido a terem nascido em meio a computadores, tablets e smartphones.

Outro aspecto relevante é o fato de que os atuais professores do nosso país ainda nasceram na cultura da recepção de informações, na cultura analógica. Desta forma, "muitos professores sentem-se perdidos e não sabem o que fazer e como agir. Nem sempre é possível aos professores encontrarem os devidos meios de conciliar sua vida profissional com o grau de exigências advindas da integração de tais recursos", de acordo com Coan, Viseu e Moretti, (2013, p.7). É destacado por Barcelos, Behar & Passerino, (2010), que o tempo demandado ao planejamento e preparação de aulas com meios tecnológicos para esses professores é maior.

Desta forma, a reflexão de como podemos utilizar as ferramentas digitais se faz necessária e essencial, mas sugestões de planejamentos de atividades propicia ao professor a percepção de como executar suas aulas com cada ferramenta. O trabalho colaborativo é apontado por Coan, Viseu & Moretti (2003, p. 242) como uma "nova dimensão porque possibilita o compartilhar de experiências vivenciadas no seu contexto de trabalho", corroborando, Miranda (2007) reforça a necessidade de empenho e dedicação no planejamento e execução destas atividades visto os desafios da mudança na prática.

Os “nativos digitais” estão presentes no ambiente escolar, o que aumenta a motivação dos alunos durante a utilização desta ferramenta. Porém, a falta de recursos, a ausência de laboratórios de informática, computadores ultrapassados e poucos computadores funcionando corretamente são alguns dos obstáculos encontrados pelos professores que desmotivam a utilização de novas ferramentas tecnológicas.

REGISTROS FIGURAIS NO SCRATCH

A ferramenta Scratch é um site de acesso gratuito que possibilita a criação de histórias, animações e jogos criativos através da linguagem de programação de blocos, e da repetição desses blocos e da inserção de mídias. A criação se desenvolve através do processo de refletir e raciocinar criativamente a fim de criar um projeto para solucionar um problema específico ou que solucione problemas. Para ter acesso ao Scratch, basta estar conectado à Internet e criar uma conta através de um endereço de e-mail.

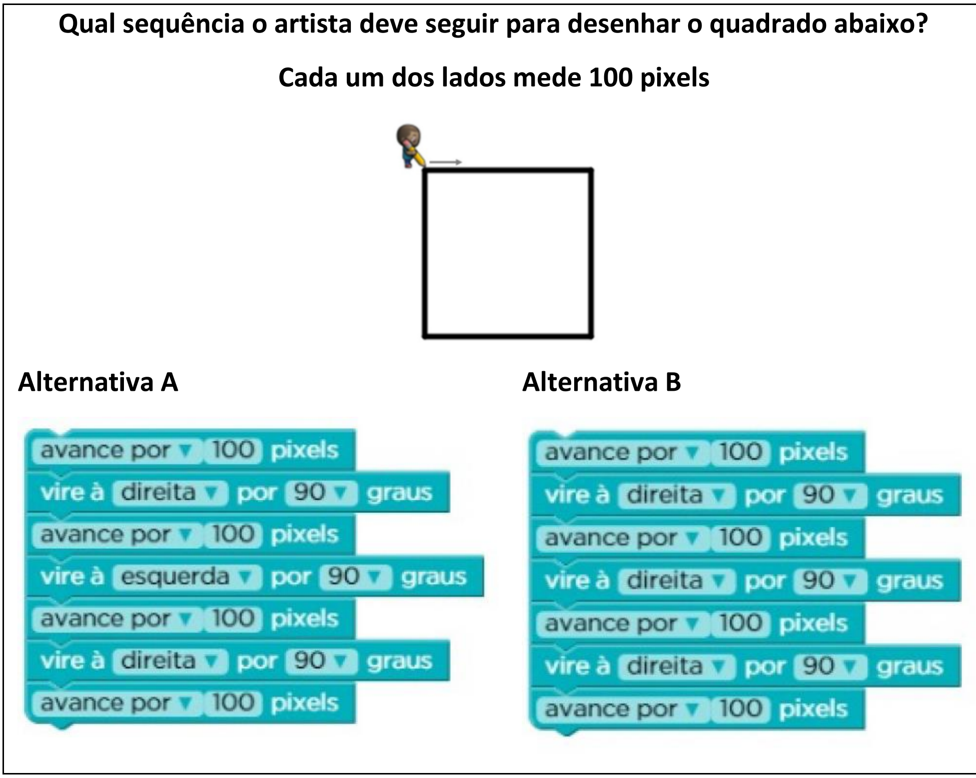
Após a criação de um projeto, o mesmo pode ser disponibilizado para que outras pessoas, que utilizam a ferramenta, acessem e façam uso do projeto. A criação de um projeto demanda conhecimentos básicos de linguagem de programação, porém, a ferramenta é bastante didática, facilitando a compreensão e utilização. Existem diversas linguagens de programação, contudo, o Scratch é relativamente simples e facilita a compreensão dos comandos de algoritmos.

Associar essa ferramenta à construção de representações figurais geométricas possibilita que o aluno percorra os diferentes olhares na resolução dos problemas. Bell (2011) apresenta algumas atividades que desenvolvem o pensamento computacional e que podem ser realizadas com crianças sem a utilização de computadores ou internet. As atividades são baseadas em conceitos como a compreensão e utilização de mapas, a compreensão de números binários ou ainda de problemas que remetem a padrões e ordenamento. Essas atividades são chamadas desplugadas por ocorrerem através da aprendizagem com cartões, recortes, desenhos, pinturas ou ainda jogos e esse estilo de atividade pode ser adaptado para situações que o laboratório de informática não exista.

As atividades propostas por Brackmann (2017, p. 194) possibilitam que o aluno compreenda como o código funciona de forma desplugada, demonstrada na Figura 4. Ao propor uma atividade computacional desplugada, as atividades a serem propostas necessitam ser projetadas ou entregue em papel para que os alunos possam compreender e assim resolvê-la.

De uma forma geral, as atividades consistem em direcionar uma pergunta, juntamente com a imagem do que se queira como objetivo e alternativas que contenham comandos. Ao propor atividades com figuras geométricas, quando o aluno observar os comandos estará aguçando seu olhar agrimensor e visualizando, por exemplo, os ângulos internos da figura geométrica que nem sempre estão indicados nos exercícios escolares.

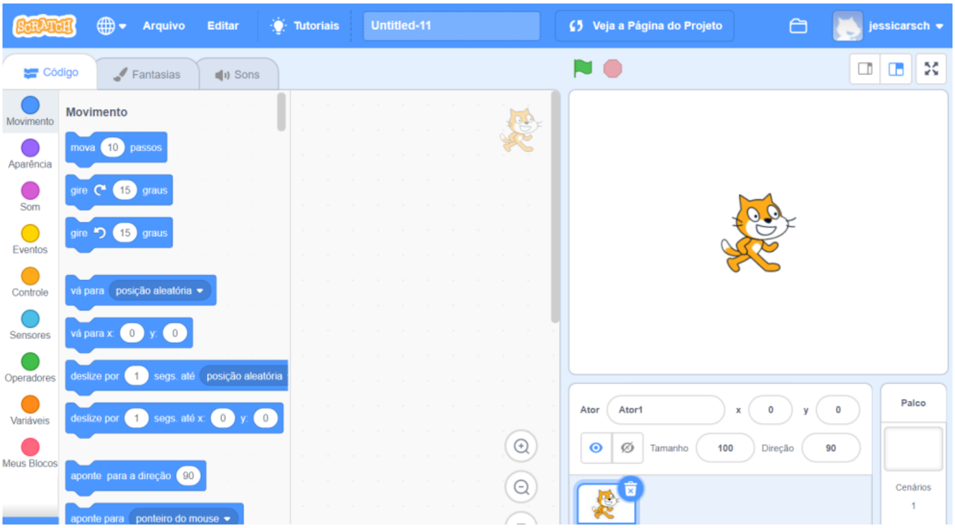
Figura 4: Qual sequência o artista deve seguir para desenhar o quadrado?



Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Brackmann (2017, p. 194).

Outra forma de construir esta mesma atividade diretamente na ferramenta Scratch, é levar os alunos ao laboratório de informática e desenvolver com eles algumas aulas que possibilitem que os mesmos compreendam como funciona a ferramenta na prática, ou seja, solicitar que os mesmos executem os códigos apresentados e verifiquem qual apresenta o resultado obtido. A interface da ferramenta pode ser vista na figura 5.

Figura 5: Interface da ferramenta Scratch

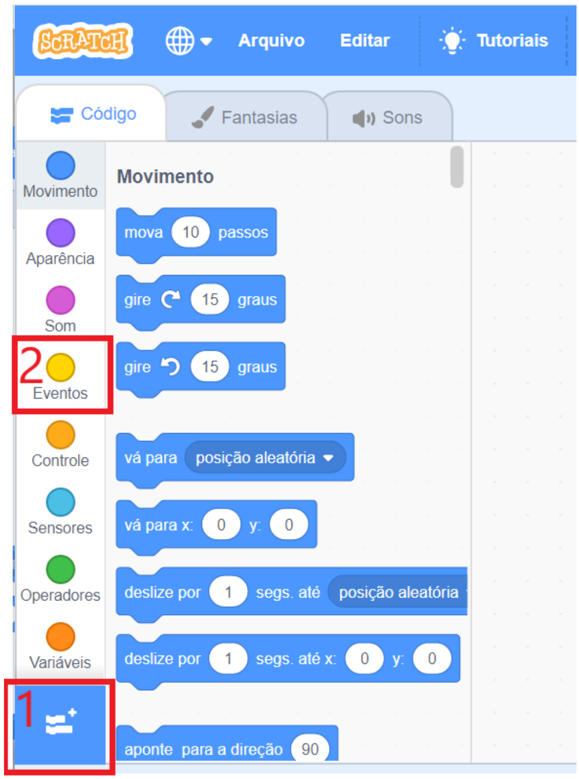


Fonte: elaborado pelos autores.

A produção de projetos que visem a construção de figuras geométricas é interessante para que o aluno consiga visualizar a figura através de novos olhares. Com o desenvolvimento dessas atividades os alunos conseguem corrigir seus códigos até terem os seus objetivos traçados, além do professor possibilitar que estes percebam "propriedades e significados, fundamentais à resolução da situação criada" (Sodre de Souza, Moretti e Almouloud, 2019, p.325).

"O ver na matemática ligado aos objetos matemáticos e, assim, aos conceitos da geometria, difere do ver em outras disciplinas e constitui-se gesto cognitivo ligado à semiótica relacionada nas situações didáticas propostas", segundo Sodre de Souza, Moretti e Almouloud (2019, p. 324). Estes autores ainda descrevem que os problemas geométricos contidos em livros didáticos contemplam figuras geométricas que necessitam da visualização em diferentes dimensões.

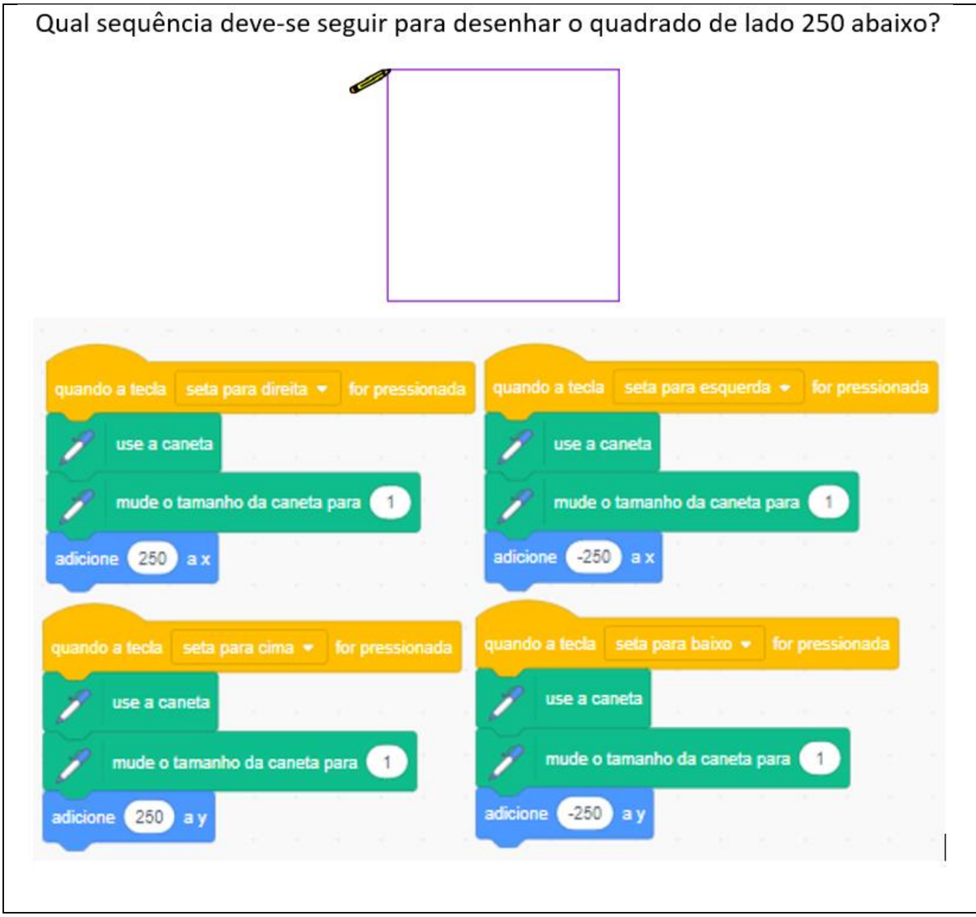
Figura 6: Interface da ferramenta indicando 1 para extensão e 2 para eventos



Fonte: elaborado pelos autores.

E para o desenvolvimento de atividades relacionadas à construção de figuras geométricas através do Scratch é interessante utilizar a extensão de Caneta que há na ferramenta, para que o programa desenhe de acordo com nossos próximos comandos. A utilização de um personagem relacionado a caneta ou lápis não é essencial, apenas proporciona que a atividade fique ainda mais realista, mas caso o aluno opte por outro perfil de personagem a atividade não estará prejudicada.

Figura 7: Comandos para criação de um quadrado

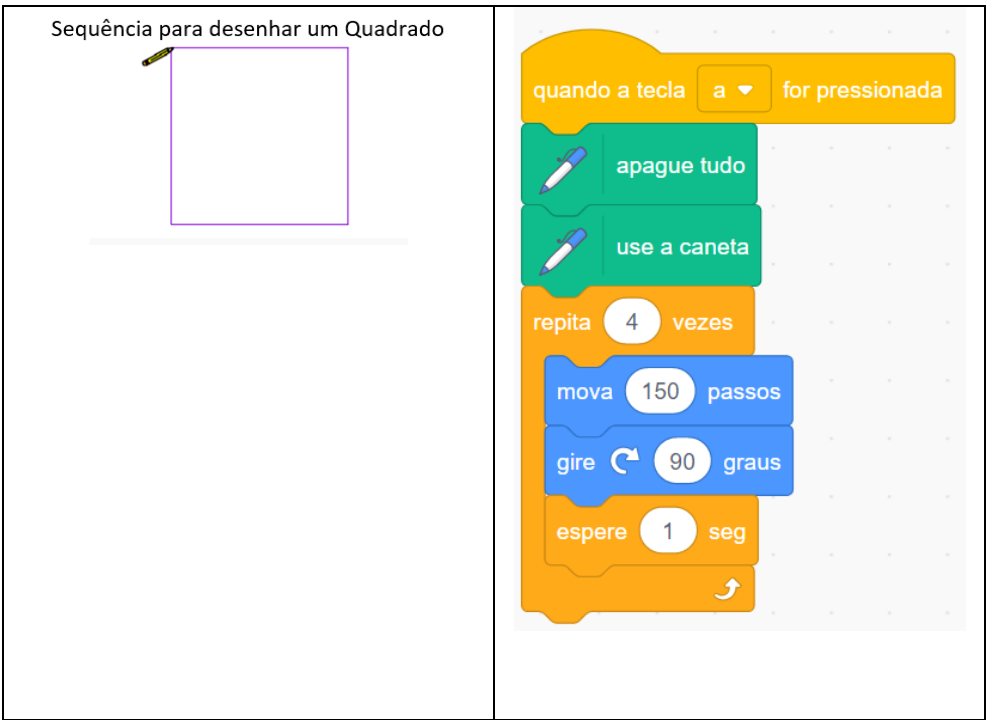


Fonte: elaborado pelos autores.

Em Eventos dá-se início aos comandos desta atividade. A sequência dos comandos, pode ser vista na figura 6 deste artigo. Ao alterar o número do tamanho da caneta, o traço fica mais fino ou grosso, e caso queira uma figura maior ou menor, é só alterar o valor de “adicione 250 a x” para um outro valor que fique mais adequado a atividade. Como estamos pensando em um quadrado, esse passo precisa ser repetido, alterando a tecla a ser clicada e o valor a ser inserido para o seu número oposto. As mesmas situações devem ser repetidas em relação a y. Desta forma, independente da sequência que o aluno aperte no teclado, terá como resultado um quadrado.

Mas caso não se tenha acesso a um computador, pode-se aplicar a atividade no formato desplugado, basta alterar qual botão será pressionada, ou ainda alterar os eixos ou valores numéricos.

Figura 8: Comandos para criação de um quadrado



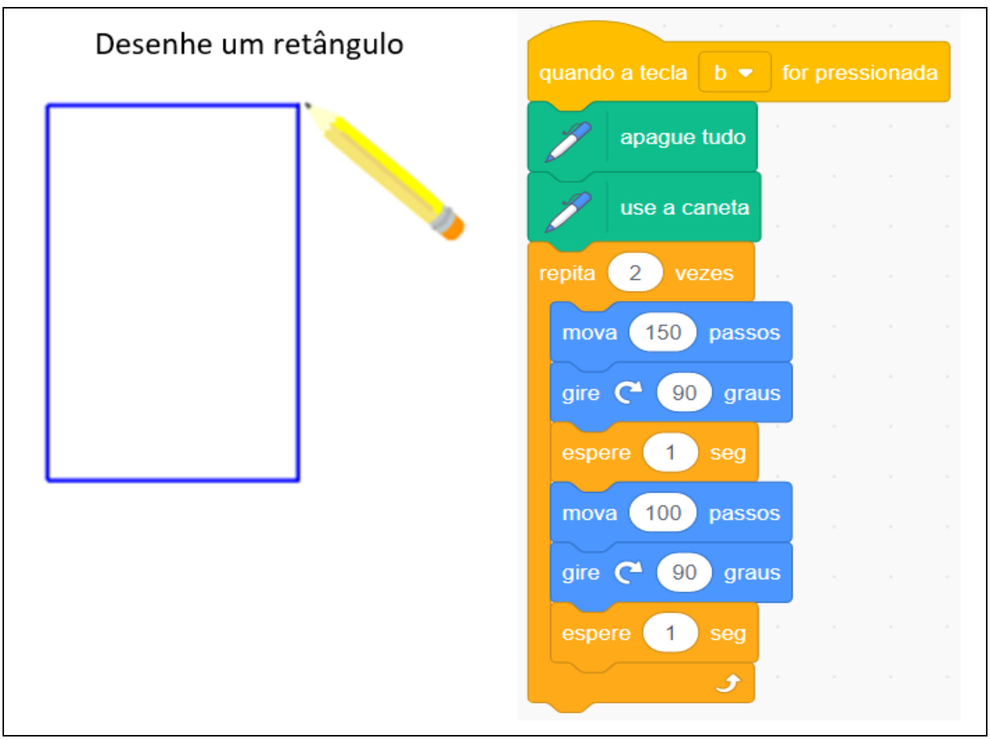
Fonte: elaborada pelos autores.

Outra forma de criar um quadrado no Scratch é através dos blocos de repetição. Deste modo, é necessário informar a medida do lado junto ao ângulo reto conforme está descrito na figura 8. Os valores do lado podem ser alterados que não irão afetar a programação, apenas será construído um quadrado de lados diferentes do aqui exposto.

O comando “apague tudo” serve para limpar o que está desenhado no quadro, para que não se sobreponha um desenho acima do outro. A tecla a ser selecionada para dar início ao desenho pode ser alterada também. Selecionamos teclas distintas para resolver o mesmo problema, a fim de apresentar ao aluno maneiras diferentes de executar as figuras projetadas.

Caso se queira desenhar um retângulo, os passos serão diferentes pelo fato de os comandos terem que seguir a sequência que espero ter de resultado. Uma sugestão de sequência de comandos pode ser vista na figura 9.

Figura 9: Comandos para criação de um retângulo



Fonte: elaborada pelos autores.

O mesmo código da Figura 8 pode ser utilizado para desenvolver um quadrado, basta unificar todas as medidas para um mesmo valor. Os comandos apresentados neste trabalho são apenas sugestões de como instruir aos alunos a desenvolverem o código. Conforme o professor e os alunos vão se familiarizando com a ferramenta, novas formas de realizar as mesmas atividades são percebidas, e as apreensões e olhares vão se modificando e completando, possibilitando uma aprendizagem mais significativa.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

Dentre os obstáculos para o desenvolvimento de aulas que utilizem materiais tecnológicos, Coan, Viseu e Moretti (2013) apontam a falta de formação significativa para que professores tenham conhecimentos e habilidades para trabalhar com esses instrumentos, além da ausência de laboratório de informática atualizados ou ainda internet de boa qualidade.

É válido destacar que para Brackmann (2017) o Pensamento Computacional é a compreensão e a capacidade estratégica de utilizar os fundamentos computacionais com a finalidade de resolver problemas, não podendo ser confundido com a aptidão em manusear aplicativos em smartphones ou computadores. Da mesma forma, puramente criar os quadrados e retângulos apresentados nesse artigo não são suficientes para que o aluno desenvolva os olhares que vai desde o botanista ao construtor. É necessário, sobretudo, apontar a inserção de ângulos, de tamanho dos lados das figuras a serem construídas para que o aluno compreenda num todo o que está fazendo no código.

Reiteramos aqui as ideias de Viseu (2009) quando este afirma que ao utilizar recursos tecnológicos os professores de matemática estão propiciando uma aprendizagem mais significativa "principalmente no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, autonomia e pensamento crítico". E reforçamos que através da construção de figuras geométricas através da plataforma Scratch propiciaremos aos alunos a percepção da figura com diferentes olhares e apreensões.

REFERÊNCIAS

Balacheff, N (1992) *Preuve et démonstrations en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3(3)

Barcelos, G. T.& Behar, P. A.& Passerino, L. (2010) Análise dos Impactos da Integração de Tecnologias na Formação Inicial de Professores de Matemática sobre a prática docente: um estudo de caso. *Anais do XVI Workshop Sobre Informática na Escola – XXX Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*. Belo Horizonte.

Bell, T. W., I. H. & Fellows, M. (2015) Computer Science Unplugged.

Brackmann, C. P. (2017). *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica.* (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Coan, L. G. W.; VISEU, F. & Moretti, M. T. (2013). As TIC no ensino de Matemática: a formação dos professores em debate ICT in the teaching of Mathematics. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*. 8(2), 222-244.

Duval (1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang. 1995.

Duval (2005) Les conditions cognitives de L'apprentissage de la Géométrie: developpement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 10, 5-53.

Duval, R. (1997) La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée. Curso dado à PUC/SP, 1997.

Duval, R. (2012) Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. de M. T. Moretti. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*. 7(1), 118-138.

Duval, R. (2012) Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. de M. T. Moretti. *Revemat*, Florianópolis, 7(1), 97-117.

Kluppel, G. T. (2012) *As contribuições da Teoria das Representações Semióticas para o ensino e Pesquisa na Educação Matemática*. 110 fl. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa.

Lotman, Y. M. (1990) *The universe of the mind: a semiotic theory of culture*. Trad. Ann Shukman, Londres: I. B. Tauris & Co.

Miranda, G. L. (2007) Limites e possibilidades das TIC na educação. *Sísifo*. Revista de Ciências da Educação, 3, 41-50.

Moretti, M. T. (2013) Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*. 15(2), 289-303.

Prensky, M. (2001) *Digital natives, digital immigrants*. On the horizon, Bradford, 9(5), 1-6.

Silva, S. P. (2016) *O uso da lógica de programação para a Educação Matemática no Ensino Médio: experiências com o Scratch.* 135fl Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

Sodré de Souza, R. N. & Moretti, M. T. & Almouloud, S. Ag. (2019) A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. V. 21, n. 1, p.322-346.

Teixeira, M. S. M. (2008) O pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade. Dissertação (Mestrado em Educação Didáctica da Matemática) Universidade de Lisboa, Lisboa.

VISEU, F. (2009) *A formação do professor de matemática, apoiada por um dispositivo de interação virtual no estágio pedagógico*. Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho.

CAPÍTULO XVII

A CONTRIBUIÇÃO DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NAS PESQUISAS CIENTÍFICAS BRASILEIRAS: TENDÊNCIAS E REFLEXÕES

Crislaine Costa
Méricles Thadeu Moretti

Apoiando-se no princípio de que a pesquisa científica na pós-graduação é um fator essencial que contribui diretamente na construção do conhecimento e da tecnologia, sendo nossas universidades instituições que desenvolvem esse papel fundamental para o progresso da sociedade, o presente estudo procura levantar os trabalhos acadêmicos realizados sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval dentro do cenário de pesquisa brasileira. Dessa forma, este trabalho busca mapear as dissertações e teses produzidas até o momento que tenham utilizado esse aporte teórico.

Dessa forma temos como objetivo de pesquisa compreender os aspectos teóricos abordados pelas pesquisas brasileiras, apresentando um panorama das investigações pontuando as tendências e reflexões sobre potencialidades da aplicação da teoria e identificar os níveis de abrangência e estratégias metodológicas que foram empregadas.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica já foi alvo de outros levantamentos, ainda que por meio de recortes temporais, que contribuíram para entendermos o histórico da difusão da teoria nas pesquisas brasileiras. O primeiro trabalho realizado foi dos pesquisadores Colombo, Flores e Moretti (2008), que levantou dados das pesquisas referente aos anos de 1990 a 2005, no qual foram encontradas vinte e sete dissertações e três teses. A pesquisa seguinte, de Brandt e Moretti (2014), buscou mapear dissertações, teses e artigos publicados em periódicos, entre os anos de 2006 e 2009, em que registraram vinte e cinco dissertações, quatro teses, sete artigos em periódicos e vinte comunicações científicas. Ferreira, Santos e Curi (2013) investigaram as publicações disponíveis no banco de dados da CAPES, referentes aos anos de 2002 a 2012, em que encontraram setenta e três dissertações e sete teses. E por último, Pontes, Finck e Nunes (2017) analisaram sessenta e cinco publicações no recorte de tempo de 2010 a 2015, sendo 44 dissertações, 7 teses e 14 artigos publicados em periódicos.

Entretanto, o atual levantamento foco deste estudo vem como um avanço nesses mapeamentos, uma vez que não realizamos nenhum recorte de tempo e encontramos um número mais expressivo de trabalhos que serão analisados. As pesquisas científicas mencionadas neste trabalho foram coletadas em sites de instituições de ensino superior e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Vale ressaltar que analisamos apenas dissertações e teses que utilizam a teoria, sem nos atentarmos aos artigos científicos. O processo de coleta e análise de dados serão melhor explicados mais adiante.

Organizamos este trabalho em quatro etapas: na primeira parte buscamos de maneira concisa apresentar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica Raymond Duval, intitulada de Referencial Teórico. Na segunda, discriminamos os procedimentos de coleta de dados, sob o título de Metodologia de Investigação. Na terceira parte, apresentamos as análises das pesquisas científicas e os resultados obtidos, que chamamos de Discussão e Análise das Pesquisas. E, por fim nossas considerações finais.

A TEORIA DOS REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE DUVAL

A aprendizagem da matemática sempre foi objeto de investigação de inúmeras pesquisas no campo da educação matemática, cuja intenção é contribuir para uma aprendizagem mais rica e significativa. Diante da complexibilidade do processo de ensino da matemática, diversos pesquisadores e professores buscam diferentes métodos ou caminhos para ensinar e para entender como se dá a aprendizagem. Nota-se que é sempre necessário planejar condições favoráveis que estimule o interesse dos alunos, em relação aos conteúdos matemáticos ensinados de forma tradicional. Portanto, existe a necessidade de estabelecer reflexões sobre o ato pedagógico, visando o desenvolvimento cognitivo e a capacidade do domínio e apreensão dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos.

Nesse sentido, entre os anos de 1970 a 1999, Raymond Duval (filósofo e psicólogo francês), desenvolveu sua teoria de aprendizagem matemática. Na qual está fundamentada no entendimento do funcionamento cognitivo do pensamento matemático, promovendo uma reflexão sobre o processo de ensino e compreensão da aprendizagem dos estudantes. A teoria aborda o uso de representações semióticas para a apreensão do conhecimento matemático.

As representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais tem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (Duval, 1993, p. 39). Entende-se que as representações, além de serem essenciais à comunicação, contribuem para as atividades cognitivas. A compreensão de um objeto matemático está relacionada à capacidade de mobilizar deforma coordenada mais de um registro de representação semiótica do mesmo objeto.

Segundo Duval (2003, p. 12) “precisamos considerar que a aquisição na matemática está relacionada a forma que a mesma se apresenta para nós, pois, os processos cognitivos envolvidos para mobilizar os objetos matemáticos pelo sujeito, não são os mesmos de outra área de conhecimento”. O autor separa a matemática de outras áreas de conhecimento, visto que, todos objetos matemáticos apenas são acessíveis através de representações. Os objetos matemáticos são ideais e sendo assim não são acessíveis pelos sentidos, só pelas representações. Para Duval:

> [...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas etc., com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figura... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (Duval, 2009, p. 14).

Compreender e articular diferentes registros de representação matemática proporciona um melhor entendimento do objeto matemático, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Sendo que ao conseguirmos transitar entre as diferentes representações, podemos optar na que acharmos mais conveniente para ser trabalhada dependendo do tipo de problema que temos. Dessa forma, saber qual registro utilizar e que características ele revela do objeto é interessante, pois permite um menor gasto cognitivo para resolver a situação.

Para um sistema de representação ser considerado um registro de representação semiótica, Duval (2009) aponta algumas definições a respeito das três atividades cognitivas fundamentais que ele deve cumprir: a formação (que está ligado a características específicas do objeto, sendo uma maneira de reconhecê-lo), tratamento (mudança na representação que ocorre sempre no mesmo sistema semiótico) e conversão (ocorre quando saímos de um registro de partida para chegarmos em outro registro representação diferente do inicial). A seguir, explicamos mais detalhadamente esses conceitos da teoria:

Formação de Representação Identificável: É a forma de reconhecer um objeto por meio de elementos específicos e regras que o compõem. Por exemplo, ao observarmos $f(x) = 2x^2 - 3$, identificamos que se trata de uma função pela presença de f(x) e sabemos que se trata de uma função quadrática pela presença do x^2. A Formação de Representação Identificável é composta por todos as unidades, informações, princípios e regras que identificam qual objeto matemático se trata.

Tratamento: Essa atividade acontece pela mudança do conteúdo da representação, por meio de operações coerentes que respeitem as regras internas do sistema semiótico, sem mudar o tipo de registro em que se encontra. Consideramos o exemplo da expressão $(x + 4)^2$, que com algumas operações pode ser substituída por $x^2 + 8x + 16$, onde o registro inicial era o algébrico e depois do tratamento efetuado ainda permanecemos nele. Dessa forma, o tratamento faz alterações dentro do mesmo registro de representação semiótico.

Conversão: Essa atividade ocorre no momento que estamos em uma representação semiótica inicial e através de algumas operações extrapolamos esse registro inicial e chegamos em outro. Pensamos por exemplo na expressão "um número ao quadrado menos 1" e "x^2 - 1", perceba que partindo do registro linguístico chegamos no algébrico, representando um mesmo objeto de conhecimento chamado polinômio. Essa atividade cognitiva é considerada a mais importante na aprendizagem e, para Duval (2005, p. 50), ela é a menos imediata e exige um maior custo cognitivo do sujeito.

A compreensão do objeto matemático está diretamente ligada a capacidade de coordenação de diferentes representações em sistemas semióticos diferentes. Nas palavras de Duval:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.[,,,] Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (Duval, 2003, p.14).

Portanto, o entendimento de um conceito matemático só é adquirido quando conseguimos trabalhar com pelo menos dois registros de representação diferentes, realizando as operações cognitivas pertinentes (Duval, 2003, p. 14). Vale lembrar que todo registro de representação contém limitações específicas, o que torna importante coordenar os sistemas de representação. Porém, muitas vezes, a dificuldade, por parte dos alunos, está justamente em identificar as diferentes formas de representar um objeto matemático, tornando-se assim um obstáculo na aprendizagem.

Levando em consideração o estudo desenvolvido por Duval, buscamos analisar os aspectos abordados pelas pesquisas brasileiras que utilizam como aporte teórico os registros de representação semiótica.

METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

a) Procedimentos de coleta

Esta pesquisa utiliza a metodologia de Estado do Conhecimento, pois o objetivo do estudo foi fazer um levantamento da produção de trabalhos científicos abordados e organizados no que tange à utilização dos registros de representação semiótica, analisando os trabalhos entre os anos de 1996 a 2019.

Para Ferreira (2002), pesquisas definidas como Estado do Conhecimento tem por finalidade analisar produções científicas em um certo período a respeito de um determinado tema, com caráter bibliográfico e mapeando publicações de outros pesquisadores.

> [...] discutir uma certa produção acadêmica [...] tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e de seminários. (Ferreira, 2002, p. 257).

Em função disso, essa metodologia vem sendo utilizada para mapear as pesquisas científicas de um determinado campo de estudo e contribuir para uma visão sistemática desse conhecimento, pontuando aspectos teóricos e metodológicos, e possibilitando encontrar novos caminhos para serem abordados. Segundo Romanowski e Ens (2006, p. 39) um estudo que “aborda apenas um setor das publicações sobre o tema estudado vem sendo denominado de estado do conhecimento”, ou seja, estudos que abordam apenas artigos publicados em periódicos, ou em banco de dados de teses e dissertações, anais de eventos científicos, entre outros.

Enquadramos nossa pesquisa como um estado de conhecimento, visto que apesar da análise levantar um grande número de trabalhos em determinado período de tempo, ela tem como campo analítico as dissertações e teses.

O propósito desta pesquisa foi identificar o que já foi produzido sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, buscando entender quais os temas mais abordados, quais os caminhos metodológicos mais usados, os objetivos, quais elementos da teoria foram usados, os conteúdos matemáticos abordados, nível de abrangência.

Para termos condições de organizar todo esse estudo descritivo seguimos os passos de Romanowski e Ens (2006, p.43). Desse modo, começamos a elaborar nossa pesquisa, com consultas *online*. Para tal, decidimos elaborar as seguintes etapas para o procedimento:

a) Definição do descritor: Registros de Representação Semiótica de Duval.
b) Busca no site da na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[1],
c) Com esta delimitação encontramos 211 (duzentos e onze) trabalhos, entre teses e dissertações, produzidas por pesquisadores das universidades. Como tínhamos conhecimento de alguns trabalhos, que não apareceram neste sítio, decidimos realizar nova busca. Fizemos nova procura em bancos de dados de algumas instituições e em pesquisas que já fizeram esse levantamento com algum recorte de

[1] disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/.

tempo, encontrando mais 56 trabalhos. Formando assim o corpus da investigação com o total de 267 trabalhos entre dissertações e teses.

d) Para a análise das publicações criou-se uma tabela, com as seguintes categorias: ano, instituição de ensino, referência, título, autores, conceitos matemáticos, nível de ensino (S.I., S.F., E.M., E.S., F.C.), aspectos da teoria, pesquisa e metodologia. Como mostra o Quadro 1 a seguir.

e) Análise.

Quadro 1 - Categorias da pesquisa

Ano/ Inst./Ref.	Título	Autor	Conceitos matemático	Nível						Aspectos da Teoria	Pesquisa e metodologia
				S.I	S.F	E.M	E.S	F.C			

Fonte: Os autores.

As indicações utilizadas no Quadro 1 têm os seguintes significados:

Inst. - Instituição na qual o trabalho foi desenvolvido.

Ref. - Referência numérica adotada para encontrar e referir-se a determinado trabalho.

S.I. - Séries iniciais do ensino fundamental.

S.F. - Séries finais do ensino fundamental.

E.M. - Ensino médio.

E.S. - Ensino superior.

F.C. - Formação continuada.

DISCUSSÃO E ANÁLISE DAS PESQUISAS

As pesquisas envolvendo os registros de representação semiótica podem ser consideradas recentes, visto que somente a partir do ano de 1996 aconteceram as primeiras publicações no país. O levantamento feito neste estudo analisou 228 dissertações e 39 teses, compreendidas entre os anos de 1996 a 2019, na qual há uma grande concentração de trabalhos em um número menos expressivo de universidade.

No entanto, entre as teses e dissertações analisadas, olhando para a categoria “Instituição de Ensino”, identificamos que 106 trabalhos foram produções das universidades federais, distribuídas em 24 instituições. Nas universidades estaduais, foram 42 trabalhos, registrados em apenas 8 instituições, e nas universidades privadas esse número foi de 119 publicações, compreendidas em apenas 8 instituições, ilustrado na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Produções Por Instituição de Ensino.

Instituição de Ensino	Número de Trabalhos (%)
Federal	39,9
Privada	44,4
Estadual	15,7

Fonte: Os autores.

Vale também ressaltar que o número de universidades federais é um pouco maior que as instituições privadas e muito superior ao número de universidades estaduais, justificando assim a disparidade na quantidade de instituições, com programas de pós-graduação, voltadas a este tipo de pesquisa.

Observamos que a teoria dos registros de representação semiótica foi foco de diversas pesquisas na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), totalizando 100 trabalhos, seguida pelas 24 pesquisas da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), porém com um número muito discreto em algumas universidades do país. Essa constatação em relação ao acúmulo de pesquisas em apenas uma instituição já foi apontada por Brandt e Moretti:

> E pudemos notar, igualmente, a grande concentração de trabalhos numa determinada instituição, a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), talvez pela presença de um ou mais pesquisadores dessa instituição que acreditam na importância dessa teoria para a aprendizagem da matemática. Essa concentração era acompanhada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mais timidamente, mas agora, quem sabe, com a formação do nosso grupo de estudo GEPAM, que se concentra no estudo e pesquisa da teoria de representações semióticas de Raymond Duval, ela se desenvolva mais. Isso ainda é necessário, visto que os subsídios teóricos das representações semióticas para o trabalho com a matemática têm se mostrado como possibilidades para uma melhor compreensão da matemática em qualquer grau de ensino. (Brandt, & Moretti, 2014).

Nos programas de mestrados identificamos que a partir do ano de 2006 houve um grande aumento nas pesquisas referente aos registros de representação, sendo que no ano de 2016 houve o maior número de dissertações registradas. Já nos programas de doutorado, a primeira tese com abordagem da teoria de Duval se deu no ano de 2001, apresentando o maior número de pesquisas no ano de 2018. A seguir o Quadro 2 mostra as produções de dissertação e tese ao longo de cada ano:

Quadro 2: Produção de dissertações e teses por ano

Ano	Dissertações	Teses
1996	1	0
1997	1	0
1998	0	0
1999	2	0
2000	3	0
2001	3	1
2002	5	0
2003	6	1
2004	6	0
2005	2	1
2006	7	2
2007	14	1
2008	15	3
2009	17	0
2010	16	1
2011	13	1
2012	12	0
2013	17	5
2014	12	6
2015	12	2
2016	18	1
2017	16	2
2018	13	7
2019	17	5

Fonte: Os autores.

A partir das análises dos trabalhos foi possível perceber a variedade dos conteúdos matemáticos abordados: geometria, cálculo, equação algébrica, sistemas lineares e matrizes, integral, porcentagem, entre outros, definindo assim o delineamento das pesquisas.

Em relação aos níveis de ensino: formação inicial, matemática nas séries iniciais, séries finais, ensino médio, ensino superior e livros didáticos, estes foram os contextos de estudo que a teoria vem se debruçado. Essa pluralidade de campos caracteriza as subdivisões possíveis dentro do tema principal, que se concentrou na maioria dos trabalhos em compreender e melhorar processos de ensino e aprendizagem.

Entre as pesquisas mapeadas notamos um grande número ligando certo conteúdo matemático com o Geogebra (aplicativo de matemática dinâmico), podemos citar como exemplos os trabalhos: “Registros de representação semiótica e o Geogebra : um ensaio para o ensino de funções trigonométricas” Damasco (2010), em que o autor propôs uma sequência didática para o ensino médio com foco no estudo de funções trigonométricas, priorizando as operações de conversão entre diferentes registros de representação, sendo aqui os discursivo, simbólico e gráfico.

Santos (2011) explorou a função logarítmica com os alunos do ensino médio, “O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra”. A autora apontou os pontos favoráveis da utilização do software, como a visualização e compreensão do gráfico, auxiliando nas dificuldades de conversão do registro gráfico para os registros algébrico e na língua natural.

Almeida (2013) em “Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da Função Afim com uso do software GeoGebra” constatou que uso do GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos alunos, facilitando a compreensão das operações de tratamento em diferentes sistemas de representação (linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica) e os procedimento de conversão.

Outro ponto a destacar, são as recentes pesquisas visando a aprendizagem de alunos com algum tipo de deficiência, como é o caso da investigação de Anjos (2019) “O que se revela quando o olhar não alcança? em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega”. Em Anjos (2019), que referindo-se a aprendizagem de alunos cegos, destaca “o estudo aborda um tema sensível e urgente na Educação Matemática”, em sua tese a autora procurou investigar como uma aluna cega congênita acessa os objetos de saber matemáticos.

Outros autores também desenvolveram seus trabalhos neste nível de abrangência, tais como: Frizzarini (2014), (Estudo dos registros de representação semiótica: implicações no ensino e aprendizagem da álgebra para alunos surdos fluentes em língua de sinais) desenvolveu sua pesquisa com alunos surdos do ensino médio, sendo sete de escola especializada no Paraná e três alunos de Barcelona. Seu objetivo foi investigar a construção dos registros algébricos e suas coordenações nos processos de ensino e aprendizagem, abordando principalmente o conceito de inequação.

Mello (2015) trabalhou “A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval”. Nas entrevistas do seu estudo de caso, cujo objetivo foi compreender como alunos cegos congênitos reconhecem e trabalham com representações de objetos geométricos, constatou que os alunos atingiram as apreensões perceptiva, operatória e discursiva, para as atividades usou material concreto e representação dos objetos em relevo.

Santos (2018) no trabalho intitulado “Ensino de Geometria: Construção de materiais didáticos manipuláveis com alunos surdos e ouvintes” buscou aplicar uma sequência didática a alunos de 9º ano (turma com dois alunos surdos), com o intuito de construir materiais manipuláveis para o ensino de geometria, contando com auxílio do intérprete de libras.

Embora muitas pesquisas tenham se debruçado para a educação básica, notamos uma certa carência em estudos mais específicos para as séries iniciais, pois de fato, a maioria volta-se para séries finais do ensino fundamental e ensino médio. Inferimos que isto ocorra devido a ser nas séries finais que a matemática passa a ser ensinada por um professor específico da área, enquanto nas séries iniciais o pedagogo é quem leciona estas aulas. Dessa forma, enfatizamos trabalhos que se referem aos anos finais do ensino fundamental e ao ensino médio por tratarem de trabalhos especificamente da área de matemática.

As séries iniciais foram contempladas por Nehring (1996), "A multiplicação e seus registros nas séries iniciais", onde a autora propôs uma sequência didática para a 2ª série com o intuito de facilitar a compreensão da multiplicação através da noção de registros de representação semiótica.

Pirola (2012) também pesquisou as séries iniciais, "Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual", destacando a importância da visualização para a aprendizagem em geometria nos primeiros anos escolares, embasando sua pesquisa na teoria de Duval relativa às apreensões (perceptiva, operatória, discursiva e sequencial) no propósito de resolver problemas geométricos.

Cunha (2003), em sua investigação voltada às séries iniciais "Estatística nas séries iniciais do ensino fundamental: buscando caminhos", fez uma reflexão sobre o trabalho docente no desenvolvimento das representações gráficas estatísticas.

Tendo em mente os dados acima, fica clara a aplicabilidade da teoria dos registros de representação nas mais diversas áreas e níveis, o que nos faz acreditar nos avanços que ainda teremos nas pesquisas científicas que recorrem aos estudos de Duval como principal aporte teórico.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

O estudo realizado permitiu um levantamento e análise de pesquisas acadêmicas sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, no período de 1996 a 2019, onde analisamos as contribuições da teoria para o processo de ensino e aprendizagem, mapeando as principais problematizações investigadas.

Com esses dados, compreendemos que grande parte das pesquisas estão estruturadas em forma de sequência didática, onde a diversidades de registros de representação contribuirá para uma melhor apreensão do objeto matemático.

Na análise das teses e dissertações ficou evidenciado que existem diversos estudos baseado na teoria dos registros de representação semiótica, voltados em sua grande maioria para questões envolvendo o ensino e aprendizagem. Muitos analisaram as séries finais da educação básica e ensino superior, onde acreditamos que ficou evidenciado a carência de estudos ligados à séries iniciais.

Vale lembrar que o professor das séries iniciais tem uma formação muito limitada em matemática, fruto de grades curriculares das universidades, que infelizmente não são suficientes para um bom domínio matemático. Sendo que esta lacuna no conhecimento faz com que o professor não tenha facilidade em ir além dos conteúdos abordados em livros didáticos.

Alguns trabalhos voltaram seus olhares para livros didáticos e para os currículos de matemática, demonstrando a importância da estruturação dos conteúdos matemáticos à luz dos registros semióticos, isto é, ofereceram de forma clara e precisa caminhos alternativos para as práticas educativas.

Sabemos que o uso de diferentes registros de representação semiótica pode auxiliar a compreensão de conteúdos matemáticos, facilitando a apropriação do conhecimento. Isto leva a acreditar que a teoria ainda é capaz de fomentar muitas pesquisas que possam colaborar com constantes atualizações para as práticas pedagógicas.

REFERÊNCIAS

Almeida, Dionara Freire de. (2013). *Representações matemáticas nos processos de ensino e aprendizagem da função afim com uso do software geogebra*. Dissertação. UNIVANTES.

Anjos, Daiana Zanelato dos. (2019). *O que se revela quando o olhar não alcança? em busca do acesso semio-cognitivo aos objetos do saber matemático por uma estudante cega*. Tese. UFSC.

Brandt, C. F., & Moretti, M. (2014). O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Perspectiva da Educação Matemática*. Campo Grande, 7(13), 22-37.

Colombo, J. A. A., Flores, C. R., & Moretti, M. T. (2008). Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática: pontuando tendências. Zetetiké – Revista de Educação Matemática, Campinas, 16(29), 41-72. Recuperado de https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/download/8647035/13936.

Cunha, Maria Carolina Cascino da. (2003). *Estatística nas séries iniciais do ensino fundamental: buscando caminhos.* Tese. FEUSP.

Duval, Raymond. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnemente cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences cognitives. *IREM*, Strasbourg, 5(1), 37-65.

Duval, Raymond. (2003). *Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. P. 11- 33. In: Machado, Silvia D. A. (Orgs). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus.

Duval, Raymond. (2009). Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física.

Ferreira, N. S. A. (2002). As pesquisas denominadas “estado da arte”. Educação & Sociedade. *Educação & Sociedade.* São Paulo, 23(79), 257-272. doi: https://doi.org/10.1590/S0101-73302002000300013.

Ferreira, F. A.; Santos, C. A. B.; Curi, E. (2013). Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana.* Recife, 4(2), 1-14.

Frizzarini, Silvia Teresinha. (2014). *Estudo dos registros de representação semiótica: implicações no ensino e aprendizagem da álgebra para alunos surdos fluentes em língua de sinais*. Tese. UEM.

Mello, Elisabete Marcon. (2015). *A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval*. Tese. PUC/SP

Nehring, Cátia M. (1996). *A Multiplicação E Seus Registros Nas Séries Iniciais.* Dissertação. UFSC.

Neto, J. R. D. (2010). *Registros de representação semiótica e o geogebra: Um ensaio para o ensino de funções trigonométricas.* 130fl. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Pirola, Daiani Lodete. (2012*). Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual*. Dissertação. UFSC.

Pontes, H. M. S; Finck, C. B; Nunes, A. L. R. (2017). O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. Educação Matemática. São Paulo, 19(1), 297-325.

Romanowski, J. P.; Ens, R. T. (2006) As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte”. *Diálogo Educacional*, Curitiba, 6(19), 37-50.

Santos, Adriana Tiago Castro dos. (2011). *O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra*. Dissertação. PUC/SP.

Santos, Lijecson Souza dos. (2018). *Ensino de Geometria: Construção de materiais didáticos manipuláveis com alunos surdos e ouvintes*. Dissertação. UEPB.

CAPÍTULO XVIII

MODELAGEM MATEMÁTICA SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DA EDUCAÇÃO DIALÓGICA

Helaine Maria de Souza Pontes
Célia Finck Brandt

Este estudo trata de um recorte da tese de doutorado do programa de pós-graduação em Educação da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), defendida no dia 27 de fevereiro de 2018 e orientada pela Professora Dra. Celia Finck Brandt.

Para tanto, serão levados em conta apenas alguns aspectos dos procedimentos metodológicos, da análise dos dados e das considerações da pesquisa em questão, que teve como metodologia o estudo de caso etnográfico e foi motivada tanto pela trajetória da vida profissional da professora pesquisadora, como pelos seus estudos realizados na academia.

Nas atividades profissionais, o que se destacou foi a preocupação constante com as dificuldades dos estudantes na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Nas atividades acadêmicas, a participação em dois grupos de estudo, o GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática) e o GEPAM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Aprendizagem Matemática), motivou o interesse pelo tema desta pesquisa. No primeiro grupo, o mote das discussões era a Modelagem Matemática e no segundo grupo, o estudo se concentrava nos fundamentos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Percebida a importância da Modelagem Matemática para o ensino, a pesquisa de doutorado buscou evidenciar as implicações desta metodologia para a aprendizagem dos estudantes, nos aspectos cognitivo e social.

Levando em consideração o aspecto cognitivo, os dados foram analisados de acordo com os fundamentos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2004).

Quanto ao aspecto social, as contribuições de Paulo Freire (1979, 2017a, 2017b) sobre a educação dialógica foram consideradas para a interpretação dos dados coletados.

Assim, o estudo foi conduzido de forma que se encontrasse subsídios para responder a seguinte questão: Quais as implicações do ensino, na perspectiva da Modelagem Matemática, para a aprendizagem, nas dimensões cognitiva e social, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e das contribuições de Paulo Freire para a educação dialógica?

Em busca de responder a pergunta norteadora da tese, serão trazidos a seguir, os aspectos fundamentais de algumas etapas da pesquisa de doutorado.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa foi realizada em uma escola municipal dos anos finais do Ensino Fundamental de Araucária – PR. Tanto a professora pesquisadora como seus 32 (trinta e dois) estudantes de uma turma do 9º ano, são sujeitos da pesquisa, que teve como procedimentos metodológicos, a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e embasada na concepção de Burak (2004). Neste sentido, o trabalho foi conduzido a partir dos temas escolhidos pelos estudantes, tendo como critério de escolha, a relevância social.

A partir de questionamentos sobre os assuntos mais comentados na época, pelos meios de comunicação, os estudantes se referiram a vários temas. Sendo assim, foram instigados a pensarem sobre àqueles que afetavam diretamente a vida de cada um, desta forma, a dengue e a crise econômica se destacaram.

Ao serem desafiados a pensarem em uma possibilidade para reduzir os prejuízos causados pela crise econômica e combater a dengue, a ideia da reutilização do lixo para confecção de peças artesanais foi sugerida. Sendo assim, ficou definida a escolha do tema, primeira etapa da Modelagem Matemática defendida por Burak (2004), que propõe a escolha pelos estudantes e mediada pelo professor.

Diante deste desafio, a professora propôs a criação de uma oficina de reutilização do lixo uma vez por semana, para confecção de peças artesanais. A oficina foi oferecida aos estudantes interessados e aconteceu no contra turno, nas dependências da escola, com a preocupação de não transformar o lixo em outro lixo.

Como havia muitos estudantes que não podiam participar da oficina, algumas aulas de Matemática foram disponibilizadas para que os estudantes inscritos pudessem ajudar os não inscritos, orientando como confeccionar as peças artesanais produzidas.

Antes que o trabalho da oficina iniciasse, aconteceu a pesquisa exploratória, segunda etapa da Modelagem Matemática de acordo com Burak (2004). O autor (2004) entende que este é o momento de orientar os estudantes a buscarem conhecer melhor o assunto, explorando informações relacionadas ao tema nos livros, jornais, revistas, sites, pessoas que trabalham na área, campo, etc. Esta etapa foi realizada por meio da busca de vídeos e tutoriais na internet, que orientavam a confecção de peças artesanais com material reutilizável.

Com os dados coletados na pesquisa exploratória, o professor deve instigar os estudantes a relacionar as informações obtidas com a matemática e com outras áreas do conhecimento, para que seja possível elaborar problemas sobre o assunto, que devem ser resolvidos com o auxílio da matemática (Burak, 2004).

O levantamento do problema, terceira etapa da Modelagem Matemática defendida por Burak (2004), surgiu a partir do desafio proposto, ou seja: A reutilização do lixo, para confecção de peças artesanais, poderia ajudar no combate da dengue e diminuir os problemas causados pela crise econômica?

Como os vídeos e tutorias encontrados na pesquisa exploratória traziam muitas sugestões de produtos feitos a partir de objetos cilíndricos, como o rolinho de papel higiênico e a garrafa PET, por exemplo, a professora achou conveniente explorar este material matematicamente em busca da resolução do problema levantado, quarta etapa da Modelagem Matemática, defendida por Burak (2004).

De acordo com o autor (2004), com o auxílio de conteúdos matemáticos é necessário resolver o(s) problema(s) levantado(s) na etapa anterior, desta forma, fica estabelecido um caminho inverso do usual, uma vez que o conteúdo é trabalhado para responder os problemas levantados, diferente do que normalmente ocorre, já que os problemas geralmente são trabalhados a partir dos conteúdos estudados.

Portanto, algumas atividades matemáticas foram desenvolvidas, para trabalhar conceitos necessários ao cálculo do volume de lixo que deixaria de ser descartado com a confecção de peças artesanais. É importante ressaltar que estas atividades foram desenvolvidas na perspectiva da construção do conceito matemático, como por exemplo, dedução da fórmula do comprimento da circunferência e dedução da fórmula da área do círculo. Esta proposta provocou muitas dúvidas nos estudantes.

O resultado das atividades desenvolvidas deu origem à solução encontrada para o problema levantado, trazendo a seguinte constatação:

Reutilizando o equivalente à aproximadamente 400 litros de lixo para confecção de peças artesanais seria possível arrecadar em torno de R$ 2.800,00, na venda destes produtos.

Para Burak (2004), a quinta e última etapa da Modelagem Matemática é a análise crítica da solução. Neste momento faz-se necessário apreciar as soluções encontradas para que se possa analisar a coerência, tanto do aspecto matemático, como da situação estudada. É uma oportunidade para refletir e compreender o estudo, que irá direcionar os encaminhamentos que devem ser adotados em busca das mudanças necessárias.

Esta análise foi feita a partir da simulação de um empreendimento no ramo do artesanato, similar ao trabalho desenvolvido na oficina de reutilização do lixo, por cada estudante, de acordo com a produção de lixo em sua casa. A apresentação de um vídeo sobre o sucesso de uma empreendedora[1] que reutiliza filtro de café usado para confecção de peças artesanais, também fez parte desta etapa da Modelagem Matemática, para que se pudesse discutir a viabilidade de um empreendimento desta natureza.

---

[1] História da empreendedora Rosely Ferraiol, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=M2CmOx-OZ_w>

ANÁLISE DOS DADOS

Um dos subitens do capítulo sobre a análise e interpretação dos dados da pesquisa de doutorado, trata sobre a fragilidade do ensino na perspectiva do método tradicional e a potencialidade do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática. Como não há neste momento, espaço suficiente para discutir todos os aspectos que foram considerados na ocasião da análise dos dados da pesquisa, será destacada a primeira e grande dificuldade observada em relação aos conceitos matemáticos, ou seja, aquela que é discutida no subitem mencionado. Sendo assim,

> [...] há que se alertar sobre a grande dificuldade dos estudantes em relação ao sistema de numeração decimal, demonstrada no uso da calculadora e na escrita dos números. A primeira dificuldade apresentada foi sobre os padrões americano e nacional de caracteres usados nas calculadoras para separação das classes dos números e para separação da sua parte inteira e decimal. Neste sentido, o padrão nacional que está disponível em algumas calculadoras, utiliza o "ponto" para separação das classes das unidades simples, milhares, milhões, etc e a "vírgula" para separar a parte inteira da parte decimal do número. Enquanto em outras calculadoras, prevalece o padrão americano, que de forma invertida, traz o "ponto" para separar a parte inteira da decimal, e a "vírgula" para separar as classes (Pontes, 2018, p. 149).

As calculadoras do quadro a seguir mostram o número 1.245,36 (Um mil, duzentos e quarenta e cinco inteiros e trinta e seis centésimos) que foi digitado como exemplo para que se observe as variações entre os dois padrões.

Quadro 1: Padrões de calculadora

	
Padrão nacional	Padrão americano

Fonte: Pontes (2018, p. 149).

Foi autorizado o uso da calculadora para a solução de algumas atividades anteriores, então, esta discussão já havia acontecido várias vezes. Porém determinados estudantes ainda manifestavam dúvidas e a professora observou que eles utilizavam a tecla da vírgula ou do ponto, com a intenção de separar as classes dos números, mesmo que, para esta finalidade, estes caracteres não devam ser utilizados, ainda que apareçam no visor da calculadora. E é justamente esta incoerência que provocou e costuma provocar confusão.

Desta forma, a professora fez a seguinte intervenção.

> **Professora:** Pelo que eu tenho percebido gente, uma coisa que está dificultando a compreensão dos alunos é a calculadora. A dificuldade de mexer na calculadora. Então, por exemplo, se eu tiver que colocar na calculadora esse número aqui olha (escreveu no quadro 32,43), eu vou digitar lá 32 vírgula ou ponto 43. É assim que eu digito (informação verbal)[2].

[2] Fonte: (Pontes, 218, p. 150).

Para tentar esclarecer a dúvida, a professora registrou o número 12.349 no quadro, utilizando o ponto para separar a classe das unidades simples da classe das unidades de milhar, questionando em seguida, como esse número deveria ser digitado na calculadora. O sujeito A2 se manifestou, informando que não poderia digitar o ponto e a professora concordou ao afirmar que "[...] nesse número aqui (32,43) eu digito ponto ou vírgula, dependendo do que tem na calculadora, já nesse número aqui (12.349 por exemplo) eu não digito nem vírgula nem ponto. Cuidado com isso!" (Pontes, 2018, p. 150).

A expectativa era que a escrita dos números acontecesse naturalmente, levando em consideração que os estudantes desta faixa etária, já deveriam ter internalizadas as regras que estabelecem os critérios definidos pelo sistema de numeração decimal e que poderiam externalizá-las espontaneamente. Porém, as dificuldades apresentadas geraram bastante preocupação.

Diante deste problema, duas dificuldades são consideradas mais relevantes, dentre outras que possam existir. Uma delas está relacionado ao ponto (.) que aparece no visor da calculadora separando as classes dos números, mesmo que ele não seja digitado. A outra dificuldade está no fato de ser atribuído tanto ao ponto, como à vírgula, diferentes funções, dependendo do tipo de calculadora que seja utilizada, ou seja, a que tem o padrão nacional e a que tem o padrão americano.

> Neste sentido, é importante ressaltar que tanto o ponto, como a vírgula, de acordo com Duval (2004), são símbolos incompletos conhecidos como sincategorimáticos[3] e não designam por si só. Para

---

[3] O ponto, a vírgula, os sinais que representam as operações (+, -, x, :) e que dependendo do caso, são substituídos por outro (o ponto ao invés do x na multiplicação, por exemplo).

> Duval (2004) a função de designação de objeto, por meio da operação de descrição é possível a partir de um léxico sistemático, que pode ser formado de acordo com determinada regra. Além disso, a formação deste léxico sistemático, depende também da combinação dos símbolos incompletos (sincategorimáticos) com os símbolos arbitrários (objetos elementares), para designar os objetos complexos. Neste caso específico, é necessário combinar o ponto ou a vírgula (símbolos sincategorimáticos) com os algarismos (objetos elementares), juntamente com as regras do sistema de numeração decimal, para designar o número (objeto complexo) (Pontes, 2018, p. 150 e 151).

O que, a princípio, pretendia-se que fosse natural e espontâneo, passa, a partir deste entendimento, ser de grande complexidade. Não há, de fato, como considerar simples e facilmente compreensível a existência do ponto ou da vírgula no visor da calculadora, sem que seja digitado previamente. Assim como também não é simples entender dois padrões de escrita dos números, cada um obedecendo as regras do sistema de numeração, conforme orientação de países diferentes. Diante das dúvidas provenientes da incompreensão do sistema de numeração decimal, que foram manifestadas com a manipulação da calculadora, os estudantes tiveram dificuldade para resolver o problema levantado na Modelagem Matemática.

Para tanto, um cálculo de volume que resultou 6480 cm^3, deveria ser transformado em medida de capacidade, ou seja, em dm^3, que equivale ao litro. A interação entre professora e estudantes neste momento, iniciou com o questionamento de onde estava a vírgula do número 6480. Para tanto, houve diversas respostas, ou seja, alguns estudantes informaram que estava entre o algarismo 6 e 4, outros disseram que não havia vírgula, houve quem sugerisse que estava entre os algarismos 4 e 8, teve quem afirmou que estava antes do algarismo 6, propuseram também que o algarismo 0 fosse retirado, até que um sujeito sugeriu que estava depois do 0. Partindo desta última informação, a professora explicou que, apesar de o número não mostrar a vírgula, ela existe e está depois do algarismo 0.

Para analisar esta interação, faz-se necessário a apropriação do entendimento de Duval (2004) sobre a designação do léxico sistemático. Mesmo que o os símbolos incompletos ou sincategorimáticos, representados neste caso, pelo ponto e pela vírgula, não apareçam no registro do número, devem ser imaginados nos seus devidos lugares, para que sejam combinados tanto com os objetos elementares, representados neste caso pelos algarismos, como com a regra do sistema de numeração decimal, para que seja possível designar o objeto complexo, que neste caso é representado pelo número.

Não é possível afirmar que isso seja simples, mas mesmo que as dificuldades sejam levadas em consideração, "[...] era esperado que os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental tivessem completo domínio sobre este objeto do conhecimento matemático. No entanto, a interação trazida mostra claramente a dificuldade dos estudantes na escrita do número [...]" (Pontes, 2018, p. 153).

Esta dificuldade é proveniente da incompreensão do sistema de numeração decimal, que é de grande complexidade. A interação deu origem a preocupação da professora ao perceber a fragilidade dos estudantes em relação a conhecimentos elementares da matemática, considerados como pré-requisito para o cálculo necessário à solução do problema levantado na Modelagem Matemática.

É importante alertar que a manifestação dessas dúvidas poderia não ter acontecido no momento da explicação, se o ensino fosse abordado por meio de aula expositiva, com proposta de lista de exercícios, sem qualquer relação com algum contexto. Isso porque, na prática tradicional de ensino, é comum que o professor só tome conhecimento das incompreensões dos estudantes durante a correção das avaliações. E a experiência revela que, mesmo que se retome o conteúdo para esclarecer as dúvidas demonstradas nas avaliações, não se dedica tempo necessário para isso, devido a necessidade de cumprir o programa do ano letivo.

Por outro lado, a Modelagem Matemática requer muita dedicação do professor, no sentido de fazer com que os estudantes compreendam os conteúdos trabalhados, já que a solução do problema levantado só é possível, a partir deste entendimento.

Porém, lamentavelmente, não é possível negar que o ensino tradicional, aquele que Freire (2017b) chama de *bancário*, é predominante nas nossas escolas e tanto os sujeitos da pesquisa como a grande maioria dos estudantes são submetidos a esta metodologia de ensino durante boa parte da educação básica.

Com base na fragilidade do ensino, é preciso rever o amontoado de conteúdos matemáticos listados na grade curricular, para que seja possível garantir o mínimo necessário. De que adianta insistir na quantidade, se a qualidade não está garantida? Ensinar, pressupõe aprender, mas não é isso que os estudos revelam. Se em fase de conclusão do Ensino Fundamental, os estudantes demonstram não dominar o sistema de numeração decimal, é necessário repensar o que realmente importa ser ensinado nesta etapa de ensino.

Para tanto, é interessante trazer o posicionamento de D'Ambrósio (2011) ao se apoiar no entendimento de Hardy (2000) quando estabelece uma grande diferença entre a matemática escolar e a matemática "verdadeira". O autor (2011) considera que a matemática escolar é a que se aprende na escola, enquanto a "verdadeira" é a matemática acadêmica. Ele (2011) entende que a diferença entre as matemáticas são os objetivos, métodos e conteúdos, salvo algumas coincidências e afirma que a matemática escolar é "[...] uma imitação deficiente da matemática acadêmica. Como diz Hardy, é inútil para os alunos, além de desinteressante e obsoleta" (sp).

Muito provavelmente se insiste em trabalhar a matemática escolar com o objetivo de preparar os estudantes para o vestibular, o que demonstra uma clara ineficácia, uma vez que, além de não atingir o objetivo proposto, deixa de prepará-los para situações reais do cotidiano. Assim, de acordo com D'Ambrósio

> Há um descompasso entre a matemática escolar e a vida real. A matemática escolar é apresentada com uma dinâmica que não condiz com o ritmo de nosso dia a dia. No mundo real, tudo é mais rápido e há uma expectativa de resultados mais imediatos. A matemática escolar costuma ser apresentada sob o discurso de que vai ajudar o aluno a entender a realidade e tem um caráter propedêutico, sempre com a justificativa de que serve para estudos posteriores. No entanto, o caráter utilitário e propedêutico da matemática escolar nunca se materializa no decorrer dos estudos (D'Ambrósio, 2011).

Até que ponto é adequado insistir no propósito de direcionar o ensino da educação básica para o vestibular? O que o ensino nesta perspectiva pode acrescentar na vida da maioria dos estudantes que são vítimas da exclusão e da desigualdade social? Estas e muitas outras dúvidas sobre a Educação no Brasil existem desde muito tempo e já foram manifestadas pelos seguintes questionamentos.

> Porque não estabelecer uma necessária "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? Porque não discutir as implicações políticas e ideológicas de um tal descaso dos dominantes pelas áreas pobres da cidade? A ética de classe embutida neste descaso? Porque, dirá um educador reacionariamente pragmático, a escola não tem nada que ver com isso. A escola não é partido. Ela tem que ensinar os conteúdos, transferí-los aos alunos. Aprendidos, estes operam por si mesmos (Freire, 2017a, p. 32).

Como os estudantes podem operar os conteúdos por si mesmos, se, lacunas observadas na falta de domínio de conceitos básicos da matemática, prejudicam a compreensão dos demais conceitos, que são ensinados como se aqueles já estivessem internalizados? Os conteúdos que permanecem listados no programa curricular da educação básica e se mantém perseverantes a mudanças que, por mais que soe incoerente, pretendem a transformação, são efetivamente relevantes para o desenvolvimento da autonomia do sujeito? Esses conteúdos transferidos aos estudantes são, de fato, apreendidos?

Para muito além do ensino de conteúdos que garantem o sucesso no vestibular, estão os assuntos de relevância social, que ao serem discutidos permitem que o conhecimento, que antes fazia parte do senso comum, seja elaborado e transformado em conhecimento científico.

Os questionamentos que foram discutidos anteriormente e destacados por Freire (2017a), são apenas alguns exemplos de muitos outros que podem ser abordados a partir de vários temas relevantes, numa prática de ensino na perspectiva da Modelagem Matemática, que é uma metodologia capaz de dar sentido aos conteúdos trabalhados, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Esses temas quando trabalhados pela metodologia da Modelagem Matemática de acordo com Burak (2004), possibilitam utilizar os conceitos matemáticos para solução de problemas reais.

O diálogo promovido pela interação entre professor e estudantes e dos estudantes entre si, a partir da discussão dos mais variados temas que podem ser levantados na Modelagem Matemática, estimula a pesquisa, desenvolve a criatividade e favorece a criticidade. Sujeitos críticos são capazes, não apenas, de tomar ciência da realidade em que vivem, como também, de nela intervir para transformá-la. De acordo com Freire "Quanto mais refletir sobre a realidade, sobre sua situação concreta, mais emerge, plenamente consciente, comprometido, pronto a intervir na realidade para mudá-la (1979, sp).

A Educação conduzida pela Modelagem Matemática, tem condição de oferecer aos estudantes mais oportunidades de desenvolvimento, enquanto que o ensino pautado na memorização e aplicação de fórmulas, pode dar a eles, apenas a possibilidade de resolver listas de exercícios ou problemas elaborados fora de contexto, somente para treinar o ato mecânico de calcular.

CONSIDERAÇÕES E APONTAMENTOS

As análises permitiram compreender que há um comprometimento na aprendizagem dos estudantes, como consequência da falta do domínio de conhecimentos elementares da matemática, como por exemplo, o sistema de numeração decimal. Essa evidência é proveniente das implicações da Modelagem Matemática para a aprendizagem, no aspecto cognitivo, uma vez que revelam particularidades que normalmente passam despercebidas pelo professor nas aulas tradicionais.

Aliadas à metodologia da Modelagem Matemática adotada na pesquisa, estão as proposições da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymound Duval, que embasaram a análise dos dados coletados e permitiram um olhar cuidadoso sobre as produções dos estudantes, diferente dos critérios adotados para correção de uma avaliação, por exemplo, onde os registros são considerados apenas como *certos* ou *errados*. Neste tipo de avaliação

> Não se observa como se dá ou como não se dá a designação de um objeto matemático, que depende das operações cognitivas das funções discursivas. Estas funções permitem entender a significação que é dada aos léxicos sistemáticos a partir dos símbolos sincategorimáticos, que não designam por si só. Foram estes e outros subsídios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica que contribuíram para viabilizar a compreensão dos motivos dos erros, permitindo não apenas uma análise matemática, mas uma análise cognitiva (Pontes, 2018, p. 224).

Nesse sentido, é importante levar em consideração a face oculta da matemática que "[...] corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. [...] Ela se manifesta indiretamente, por meio de bloqueios ou erros recorrentes [...]" (Duval, Freitas e Rezende, 2013, p. 17 e 18).

Diante da necessidade da construção dos conceitos matemáticos, os estudantes, de modo geral, manifestaram que acharam difícil e consideram mais fácil resolver os exercícios propostos no livro didático, já que estão mais acostumados a fazer.

Houve também resistência de alguns estudantes pela metodologia da Modelagem Matemática, porque temiam não ser possível *aprender* todos os conteúdos listados no programa daquele ano letivo, já que a construção dos conceitos matemáticos, exigia mais tempo do que normalmente é destinado nas aulas tradicionais, que priorizam aulas expositivas e lista de exercícios.

Ainda que não tenha sido abordado no tópico anterior as implicações do ensino na perspectiva da Modelagem Matemática para a aprendizagem dos estudantes, no aspecto social, pelo limite do espaço que é reservado para este estudo, é importante trazê-las de forma sintética.

De acordo com Freire (1979, sp), os sujeitos da pesquisa manifestaram como interviram na sua realidade, visando transformá-la, por meio de mudanças de atitude. Alguns passaram a economizar, evitando o consumismo, ao adquirirem o hábito da reutilização do lixo para decoração de suas casas. Outros, além de adquirirem o hábito da separação do lixo, deixaram de jogá-lo na rua, o que demonstra uma preocupação com os problemas que o lixo causa ao meio ambiente. Houve também quem se interessasse em reforçar a renda familiar num empreendimento de venda de peças artesanais, confeccionadas a partir da reutilização do lixo.

A transformação da realidade desses estudantes, se deu pelo desenvolvimento da autonomia, criatividade e criticidade, que foi possível a partir do diálogo, interação e motivação, sempre presentes na metodologia adotada.

Diante das evidências apontadas, constata-se que a Modelagem Matemática, na forma como foi trabalhada, promoveu a aprendizagem dos estudantes tanto no aspecto cognitivo, como no aspecto social.

REFERÊNCIAS

André, M. E. D. A. (2008). Etnografia da prática escolar. Campinas: Papirus.

Burak, D. (2004). A modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática 1. Londrina. Anais... Londrina: [S.I.]

D’Ambrósio, U. (Fev. Abr. 2011). A matemática escolar, longe de se resumir a um amontoado de números e nomes e de regras impostas, deve ser uma prática cultural que possibilite ao aluno atingir criatividade e manter sua dignidade. Pátio. n. 57. Ano XV. Fev. Abr. 2011. Recuperado do: <http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/6302/matematica-e-cultura.aspx>.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R.; Freitas, J. L. M. & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. Revista Paranaense de Educação Matemática. Campo Mourão, v. 2, p. 10-34.

Freire, P. (1979). Conscientização: teoria e prática da libertação uma introdução ao pensamento de Paulo Freire. São Paulo: Cortez & Moraes, 1979. Recuperado do: <http://www.dhnet.org.br/direitos/militantes/paulofreire/paulo_freire_conscientizacao.pdf>.

Freire, P. (2017a). Pedagogia da autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa. 55.ed. São Paulo: Editora Paz e Terra.

Freire, P. (2017b). Pedagogia do oprimido. 64.ed. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2017b.

Pontes, H. M. de S. (2018). Modelagem matemática sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica e da educação dialógica. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Ponta Grossa.

CAPÍTULO XIX

QUEM SÃO OS CONVIDADOS E OS DEMAIS AUTORES

Filósofo e psicólogo de formação**, Raymond Duval** defendeu a sua tese de doutorado com P. Greco sobre a epistemologia genética de Piaget (1972). Entrou no IREM de Estrasburgo em setembro de 1970 onde participou de enquetes e regularmente ia em salas de aula do ensino fundamental 2 e dirigia grupos de pesquisa. A partir de 1979 coorientou com F. Pluvinage diversos DEA (Diplôme d´Études Approfondies) e teses em didática da matemática. Foi editor dos *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* entre 1988 a 1995. Publicou, em 1995, o livro *Sémiosis et pensée humaine* e neste mesmo ano foi nomeado professor na Universidade do Littoral Côte d´Opale (ULCO/Dunkerque). Trabalha, no que era chamado de Instituto Universitário de Formação de Professores (IUFM - Institut Universitaire de Formation des Maitres) du Nord Pas-de-Calais, na formação de professores do ensino fundamental 1. Desenvolve pesquisa sobre três questões: o funcionamento semio-cognitivo da visualização em matemática; a introdução da álgebra elementar e a questão dos escritos simbólicos e; as duas faces da atividade matemática.

Professor de matemática no ensino fundamental e médio desde 1971, **Jean-Claude Rauscher** frequentemente participou e animou grupos de trabalho no IREM de Estrasburgo. Em 1993 defendeu sua tese sob a direção de Louis Legrand (ciências da educação) e de François Pluvinage (matemática): *A heterogeneidade de professores de matemática face a alunos* *heterogêneos*. *O caso do ensino da geometria no início do ensino fundamental 2*. Em 1997 foi nomeado para o Instituto Universitário de Formação de Professores (IUFM) em Estrasburgo como professor/pesquisador encarregado da formação de professores nos níveis fundamental e médio. Os principais temas de pesquisa foram: o desenvolvimento da aprendizagem em geometria; as funções da escrita na aprendizagem e; a epistemologia dos professores de matemática e de estudantes que se encaminhavam para o magistério. Nos últimos três anos as suas observações e estudos clínicos foram consagradas à questão da introdução da álgebra elementar no ensino fundamental 2 com a participação de Raymond Duval e François Pluvinage.

Bárbara Cristina Pasa é licenciada em Matemática com habilitação em Física pela Universidade Regional Integrada, campus Erechim, RS (2002), possui mestrado em Matemática Aplicada pelo PPGMAp da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2005) e doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2017). Professora de Matemática há 16 anos, atualmente é professora titular na Universidade Federal da Fronteira Sul do Campus Erechim, RS, ministrando disciplinas da área prioritariamente aos cursos de Engenharia Ambiental e Sanitária e Pedagogia. Atua em projetos de extensão com foco na formação de professores e seu interesse de pesquisa engloba as questões da aprendizagem em matemática se embasando na teoria dos Registros de Representação Semiótica. É membro dos grupos de pesquisa GPEEM - Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (UFSC), EMCT – Educação Matemática Científica e Tecnológica (UFFS)) e GEPEM@T –

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Tecnologias (UFFS).

Celia Finck Brandt é professora Adjunta da UEPG. Possui Licenciatura em Matemática pela UFPR, mestrado em Educação pela UEPG, Doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC e Pós Doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC. Atua no Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática e Estatística da UEPG como professora de Estágio Curricular Supervisionado, professora do Curso de Pós Graduação em Educação – Mestrado e Doutorado da UEPG e do Curso de Mestrado em Ciências e Educação Matemática da UEPG. Atua nos seguintes grupos de Pesquisa: GEPAM (líder), GEPEM e GPEEM. Atuou como coordenadora institucional do PIBID na UEPG no período de 2009 a 2013.

Crislaine Costa é professora de matemática da rede estadual de Santa Catarina. Licenciada em matemática (2009) pela UNIASSELVI e mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – UFSC. Participa do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Seu interesse de pesquisa em educação compreende a investigação da aplicação da Teoria de Duval sobre os Registros de Representação Semiótica nas pesquisas científicas brasileiras, onde pretende analisar a contribuição da teoria na educação matemática e promover uma reflexão sobre sua aplicabilidade.

Daiana Zanelato dos Anjos é professora de matemática da rede estadual catarinense há 6 anos. Possui mestrado e doutorado em Educação Científica e Tecnológica, ambos pela Universidade Federal de Santa Catarina, respectivamente em 2015 e 2019. É licenciada em matemática (UFSC/2009) e em Pedagogia (UNINTER/2019). O seu interesse de pesquisa engloba as questões da aprendizagem em matemática pelo estudante cego se embasando tanto na teoria dos Registros de Representação Semiótica (GPEEM - Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática) quanto nos estudos que perpassam a relação entre alteridade e Educação Matemática (GEPAM - Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática).

Djerly Simonetti é professora de matemática da rede pública de ensino de Santa Catarina. Afiliada à Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Integrante do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática – GPEEM. Mestra em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC (2020). Especialista na educação profissional integrada à educação básica na modalidade de EJA-PROEJA pelo IFSC (2019). Licenciada em Matemática pela UTFPR – câmpus Toledo (2015), com magistério nível médio (2010).

Eduardo Sabel é licenciado em matemática (2018) pela Universidade Federal de Santa Catarina e bolsista CAPES de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – UFSC, com início em 2019. É professor em caráter temporário no Instituto Estadual de Educação (IEE), e participa do GPEEM - Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática. Seu interesse na pesquisa em educação envolve os estudos sobre os Registros de Representação Semiótica de Duval e linguagem matemática. A pesquisa que vem realizando no mestrado pretende investigar o papel das funções discursivas da língua na aprendizagem matemática.

Fátima Aparecida Queiroz Dionizio é professora no curso de Pedagogia da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Possui doutorado (2019) e mestrado (2013) em Educação pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da mesma universidade. Especialista em Educação Matemática pela UEPG (2009-2011), licenciada em Matemática pela UENP (2005-2008) e em Pedagogia pela UEPG (2009-2012). Atuou como professora na Educação Básica e atualmente leciona, pesquisa e realiza atividades de extensão na área da Educação, com ênfase em Educação Matemática. É integrante do comitê editorial da Revista Olhar de Professor. Orienta acadêmicos para realização de pesquisas de Iniciação Científica e trabalhos de conclusão de curso. Dedica-se aos estudos sobre ensino, operações cognitivas e aprendizagem da matemática no período da infância, aprendizagem da docência, formação de professores e registros de representações semióticas. É líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática na Infância e pesquisadora no Grupo de Estudo e Pesquisa em Aprendizagem da Matemática - GEPAM/UEPG.

Fernanda Andréa Fernandes Silva é professora da área de matemática da Educação Básica Técnica e Tecnológica do Instituto Federal da Paraíba. Possui mestrado (2013) e doutorado (2018) em Ensino de Ciências e matemática, pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. É especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Alagoas (2009) e licenciada em matemática pela Universidade Federal de Alagoas (2008). O seu interesse de pesquisa envolve a aprendizagem em matemática com fundamento na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. É membro do Grupo de Pesquisa Didática da Matemática e Semiótica e do Grupo Cajazeirense de Pesquisa em Matemática.

Franciele Isabelita Lopes Novak é professora de matemática da rede particular paranaense há 3 anos, e ministra aulas a partir do 4° ano dos Anos Iniciais. Possui mestrado em pela Universidade Estadual de Ponta Grossa, concluído em 2018. É licenciada em matemática (UEPG/2016). Como principais interesses de pesquisa estão a teoria dos Registros de Representação Semiótica (GEPAM - Grupo de Estudos e Pesquisa em Alteridade e Educação Matemática) e os estudos relacionados à Educação Matemática desde a infância. (GEPEMI - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática na Infância).

Helaine Maria de Souza Pontes é professora de matemática da rede municipal de ensino de Curitiba e de Araucária – PR. Possui mestrado e doutorado na área da Educação, pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), tendo concluído o mestrado em 2011 e o doutorado em 2018. É licenciada em matemática pela Universidade do Oeste Paulista (UNOESTE/1998). Tem interesse por pesquisas relacionadas à Modelagem Matemática e à Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Jessica Rohden Schlickmann. Doutoranda em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), Mestre em Educação pela UNISUL (2014), Especialista em Matemática Financeira aplicada aos negócios (2011) e Licenciada em Matemática pela UNISUL (2008). Atualmente atua como Professora de Matemática do Ensino Médio.

Jorge Paulino da Silva Filho é professor de matemática do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) e doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Tem mestrado em Matemática pela UFSC (1999) e licenciatura em Matemática, também pela UFSC (1996). Sua pesquisa (em andamento) de doutorado está centrada no ensino e na aprendizagem de um estudante com Discalculia do Desenvolvimento, usando como suporte a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. É integrante do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM- UFSC), onde os elementos da teoria de Duval estão no centro das discussões.

José Luiz Rosas Pinho é professor do Departamento de Matemática da UFSC há 40 anos. Possui mestrado em matemática pelo IMPA (1980) e é doutorando em Educação Científica e Tecnológica pelo PPGECT da UFSC. É bacharel em química pela UFRJ (1970). Na UFSC, seus interesses em matemática variaram de temas, desde equações diferenciais parciais até geometria euclidiana, área em que tem atuado nos últimos 20 anos. É tutor do PET Matemática da UFSC há 23 anos e, desde então tem se dedicado exclusivamente ao Curso de Matemática da UFSC, tanto à licenciatura, como ao bacharelado. Coordena a Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina desde 1998. A experiência lecionando geometria para aproximaram-no cada vez mais da área de Educação Matemática, na formação de licenciados, futuros professores do ensino básico. Seu interesse em pesquisa é a criatividade em matemática no ensino superior, em especial em geometria, com o desenvolvimento do potencial semiótico dos softwares de geometria dinâmica, em particular do GeoGebra.

Luani Griggio Langwinski é professora de matemática do Ensino Fundamental II do Colégio Bertoni – Foz do Iguaçu e membro do colegiado de Matemática da Uniguaçu – FAESI, na qual leciona nos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharia Civil e Pedagogia. Possui Mestrado em Ensino, pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, 2018. É licenciada em Matemática (UNIOESTE/2014) e especialização em Metodologia do Ensino de Matemática e Física (UNINTER/2016). O seu interesse de pesquisa engloba as questões da aprendizagem em matemática relacionados à álgebra e ao pensamento algébrico e na formação de professores, se embasando especialmente na teoria dos Registros de Representação Semiótica. É membro do GT14 – Didática da Matemática.

Méricles Thadeu Moretti é professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC. Doutor em didática da Matemática sob a orientação do professor François Pluvinage e pós-doutor pelas Universidades de Estrasburgo e de Lisboa. Líder do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) cujo foco de pesquisa é semiótica e aprendizagem matemática. Editor da Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT) e pesquisador do CNPq.

Roberta Nara Sodré de Souza é Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), com linha de pesquisa voltada para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática. Mestre em Educação pela Universidade do Vale do Itajaí (2003) com pesquisa voltada à Educação Matemática. Especialista em Educação Matemática pela FURB (Blumenau) e licenciada em Matemática pela Universidade do Vale do Itajaí (1995). Atualmente é docente de Matemática no Instituto Federal de Santa Catarina, campus Itajaí, onde atua no Ensino Técnico Integrado, Superior e Pós-Graduação. Participante do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática, UFSC e coeditora na Revista Eletrônica de Educação

Matemática. Tem ampla experiência na área de Ensino de Matemática, do Ensino Fundamental, Médio e Superior e pesquisas e produções científicas voltadas a formação de conceitos matemáticos e aspectos semióticos e cognitivos da didática da matemática.

Sérgio Florentino da Silva é professor de matemática do Instituto Federal de Santa Catarina e membro do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Na UFSC licenciou-se em matemática (2003) e cursou mestrado (2011) e doutorado (2018) em Educação Científica e Tecnológica. Seu interesse de pesquisa engloba principalmente os seguintes temas: Teoria dos Registros de Representações Semióticas; Modelagem Matemática; Etnomatemática.

Tânia Stella Bassoi (in memoriam). Possuía graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (1975), mestrado em Educação Matemática pela Universidade do Centro-Oeste (1998) e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Paraná (2006). Foi professora associada do colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, do programa de Pós Graduação em ensino, do campus de Foz de Iguaçu e do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática do campus de Cascavel. Tinha experiência na área de Matemática, ensino de Matemática e formação de professores. Fez parte do grupo de pesquisa Formação de Professores em Ciências e Matemática.

ANEXO 1

Les écritures symboliques et les opérations hétérogènes de substitution d'expressions

Les conditions de compréhension en algèbre élémentaire

Raymond Duval

Les écritures symboliques, c'est-à-dire la variété des expressions combinant des chiffres, des lettres et des symboles d'opérations que ce registre sémiotique permet d'écrire, et l'hétérogénéité des opérations de substitution de ces expressions les unes aux autres, sont le mur de verre auquel les élèves se heurtent sans cesse dans l'apprentissage de l'algèbre au Collège[1]. Elles *paraissent transparentes* aux mots de la langue et aux mots mathématiques qui désignent les opérations, les relations, et les propriétés des équations, et qui expliquent comment les utiliser pour calculer. Mais en fait elles sont *un mur opaque* pour les trois quarts des élèves, et pour tous ceux qui n'ont pas fait des études scientifiques. Car ils ne réussissent pas à voir à travers, ce que les enseignants immédiatement. Car il n'y aucun moyen de passer du registre de la langue naturelle, dans laquelle les opérations pour passer d'une expression verbale à une autre sont des associations de mots « qui font penser à… », les opérations de substitution d'expressions symboliques qui exigent qu'on regarde exclusivement la forme des combinaisons de chiffres, de lettres et de symboles d'opérations. Comment ne pas confondre toutes les expressions obtenues par les multiples opérations possibles de substitution, étant donné l'uniformité de toutes les expressions écrites ? Comment mettre en équation les données d'un problème concret ou non-mathématique pour le résoudre en utilisant « l'outil » des équations ? Autrement dit, quels sont les

[1] Duval, Campos, Barros & Diaz (2015, I, §1 p.13-17 et § 3, p. 28-35).

premiers pas à faire faire aux élèves dans l'apprentissage de l'algèbre ? Il y a deux points de vue radicalement différents pour répondre à cette question.

Tout d'abord, le point de vue mathématique, qui est évidemment primordial et qui sert de cadre pour analyses conduisant à l'organisation des programmes. Ces analyses partent d'un objectif final à atteindre à la fin du Collège et qui a été institutionnellement fixé : l'utilisation des équations pour résoudre les problèmes qu'on rencontre en dehors des mathématiques. On pratique alors une *analyse mathématico-régressive*. L'acquisition de « l'outil » équation est déconstruit en connaissances et en savoir-faire prérequis, puis ces prérequis sont à leur tour déconstruits de d'autres prérequis plus élémentaires. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'on arrive à la première introduction d'une ou de deux lettres dans le calcul numérique. On détermine alors les programmes de chaque année scolaire de manière de manière à faire faire aux élèves le parcours inverse de cette analyse mathématico-régressive en quatre ou cinq ans. Pour aider les enseignants à les mettre en œuvre dans leurs classes, les programmes sont enrichis d'explications épistémologiques, psychogénétiques, psychologiques, sociologiques, ou pédagogiques sur l'acquisition des connaissances et sur l'apprentissage. Mais aucune des explications qu'elles apportent n'est vraiment pertinente. Car elles méconnaissent le fait que l'apprentissage des mathématiques soulève des difficultés intrinsèques de compréhension qu'on ne rencontre dans aucun des autres domaines de connaissance.

L'autre point de vue est l'analyse du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent l'activité mathématique. Quels sont les gestes intellectuels qui permettent de « faire des mathématiques » ? De ce point de vue, la discrimination immédiate de la variété uniforme des écritures symboliques et la prise de conscience de multiples opérations possibles de substitution sont les deux premiers pas préalables à faire faire aux élèves dans l'enseignement de l'algèbre. Les objectifs d'apprentissage ne sont pas l'acquisition de connaissances et de savoir-faire, mais *une prise de consciences des opérations sémio-cognitives* qui permettent de comprendre la manière de travailler avec les écritures algébriques, et *reconnaître où et quand appliquer les connaissances acquises.* Or ne peut prendre conscience qu'en faisant soi-même à son rythme des tâches élaborées pour chacune des différentes *opérations sémio-cognitives spécifiques aux écritures symboliques* et que l'on peut contrôler soi-même. Cette prise de conscience est préalable à l'acquisition de connaissances en algèbre élémentaire. Les critères de réussite et ceux permettant d'évaluer la progression des élèves sont différents de ceux généralement adoptés, en classe pour les séquences d'activités, et dans les enquêtes nationales ou internationales. Ce sont d'une part la rapidité de réponse et, d'autre part, un changement complet d'attitude vis-à-vis des tâches mathématiques et de la résolution de problème. Car la réussite à ces tâches spécifiques n'est pas suffisante. Ce qui est crucial est le temps de réponse. Un élève doit parvenir à les exécuter en *moins d'une trentaine de secondes,* quelles que soient les variations de présentation des données et des contraintes de l'énoncé de la consigne, et *quel que soit le sens de la conversion à faire entre la langue naturelle et l'écriture symbolique d'une expression qu'elle soit complète ou incomplète***.** Autrement dit, dans une équation, l'élève doit reconnaître rapidement les différents niveaux d'unités de sens et les opérations de substitution à faire. *Et cela sans avoir à le demander ou sans que quelqu'un d'autre (enseignant ou élève) vienne lui dire quoi faire*. Sans cela il n'y a plus d'autre apprentissage possible en algèbre pour l'élève.

*

***

Quatre questions ont commandé les recherches sur conditions sémio-cognitives préalables à la compréhension et à l'acquisition de connaissances en algèbre, ainsi qu'à *leur utilisation spontanée en dehors des mathématiques pour résoudre des problèmes*.

> La première peut paraître simple et même triviale. Comment désigner des objets en langue naturelle d'une part et, d'autre part, en utilisant des lettres ou des symboles ? Le chapitre III de *Sémiosis et pensée humaine* (Duval, 1995), avec en exergue une citation de la *Begriffsschrift* de Frege, lui était entièrement consacré : langue naturelle et langue formelle.

La deuxième s'est imposée avec les recherches lancées par G. Vergnaud (1976) sur les problèmes additifs « Structures additives et complexité psychogénétique », et avec la thèse de Damm (1992) *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.* Comment visualiser la structure mathématique d'un énoncé de problème, qui est un texte articulant plusieurs phrases pour décrire un scénario de la vie réelle ? (Duval, 2005).

La troisième s'est imposée avec les énoncés de problèmes dont la résolution ne requiert non plus la désignation d'une quantité inconnue, mais la désignation fonctionnelle d'une deuxième quantité inconnue. Sans la prise de conscience du fait que ce mode de désignation n'existe pas dans la langue, les élèves ne peuvent mettre en équation les données d'un problème comportant deux quantités inconnues, et non pas une seule. L'apprentissage de l'algèbre et le problème de la désignation des objets (Duval, 2002, 2011). Comment écrire, à partir de l'énoncé, les deux expressions incomplètes qui formeront respectivement les deux membres de l'équation ?

La quatrième est en réalité la question préalable aux trois premières. Elles concernent tous les problèmes que l'on donne en Primaire et au Collège, soit pour préparer l'introduction d'une nouvelle notion ou de nouvelles opérations, soit à titre d'exercice, soit encore à des fins d'exploration ou de recherche. Qu'est-ce qu'un problème mathématique élaboré à des fins didactiques, et qu'est-ce que résoudre mathématiquement un problème ? Autrement dit, c'est la question du rôle des problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques. Question redoutable, qui ne semble pas pourtant en être une pour les enseignants et pour la grande majorité des didacticiens. Aussi est-ce plus tardivement que je l'ai abordée frontalement. Il faut apprendre comment poser ces problèmes pour devenir capable de les résoudre (Duval, 2013)

Toutes ces recherches ont eu, hélas, un aboutissement imprévisible dans un dialogue posthume que j'ai tenté avec Jean-Philippe Drouhard. Je l'avais rencontré plus ou moins régulièrement, mais sans avoir cherché à comprendre sa démarche de pensée. Il m'aura fallu lire sa thèse soutenue en 1992, *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*[2], en vue de cette rencontre autour de ses travaux pour vraiment entreprendre une discussion entre nos démarches respectives d'analyse des écritures symboliques.

Les extraits présentés ici de cette confrontation entre deux analyses des écritures symboliques[3] ont été faits d'abord pour Jean-Claude Rauscher dans son étude longitudinale d'un élève en grande difficulté en Algèbre (voir chapitre II), puis repris à l'intention de tous les Professeurs qui enseignent au Collège, et non pas au Lycée ou à l'Université. Il s'agissait de ne retenir que les points essentiels qui pouvaient leur être utile en classe pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre par les élèves, indépendamment de toute théorie, psychologique, sémiotique, linguistique pédagogique ou didactique. Que les enseignants puissent par eux-mêmes observer et analyser les causes profondes des difficultés récurrentes et des blocages de leurs élèves. Tel est leur objectif.

*

***

Dès les premières lignes de l'introduction de sa thèse, Jean-Philippe présentait l'idée directrice de sa recherche. Elle porte sur deux changements de perspective à faire par rapport à ce qui était consensuellement admis dans les travaux didactiques sur l'algèbre élémentaire.

> Au tout début de ce travail il y a l'hypothèse très générale, qu'en algèbre, *à côté de difficultés conceptuelles*, l'apprenant est également confronté à des difficultés d'ordre linguistique, liées à *la complexité du langage symbolique* des mathématiques. En d'autres termes, la « transparence » du langage symbolique est posée comme illusoire, et un des objectifs de ce travail est

---

[2] Drouhard, J.-P, (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de Doctorat. Paris VII.

[3] Drouhard J-P (2019). *de la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques* (Ed. M. Maurel) pp. 105-139. Academia.edu
Ces extraits sont publiés avec l'aimable autorisation de l'éditrice de cet ouvrage, Maryse Maurel.

précisément de lever cette « *illusion de transparence* » (Drouhard, 1992, p. 3).

Tout d'abord, en parlant d'« illusion de transparence », Jean-Philippe remettait en cause une idée dont l'évidence s'est vite imposée avec le développement de l'algèbre, *celle du caractère entièrement explicite et contrôlable des écritures symboliques*[4]. Les écritures symboliques sont, en effet, le seul type de représentation utilisé en mathématiques où, d'une part, tous les éléments signifiants nécessaires pour comprendre une expression complète sont explicitement donnés, à de minimes exceptions près, par exemple « *a* » au lieu de « *1a* »[5], et où, d'autre part ce que chaque élément signifiant est univoque. En d'autres termes, une égalité ou équation sont autosuffisantes. Elles ne dépendent d'aucun contexte, et d'aucune situation comme presque tous les énoncés en langue naturelle. En outre, les transformations d'une expression symbolique en d'autres expressions symboliques sont totalement explicites et parfaitement contrôlables. *C'est pourquoi, à la différence de toutes les propositions en langue naturelle, elles sont algorithmisables. Les écritures symboliques devraient donc être plus faciles à comprendre que tous les énoncés en langage naturel, ou que les figures géométriques ou même que les graphes qui doivent être appréhendés qualitativement et non pas ponctuellement. Or ce n'est pas le cas.* Si les écritures symboliques sont mathématiquement transparentes, c'est une « illusion de transparence ». Car *elles écrasent dans une même succession différents types de groupements de chiffres, de lettres et de symboles. Et ces groupements constituent des unités de sens de niveaux différents.* Ils sont quasiment impossibles à discriminer et à reconnaître pour la majorité des jeunes élèves. Dans ses travaux ultérieurs, Jean-Philippe a préféré parler d'« implicite » plutôt que d'« illusion de transparence ». Ce choix n'est pas neutre. Alors que la notion d'implicite connote un non-dit parce que présupposé

[4] Condillac l'exprimait de cette façon à la fin du XVIIIème : l'algèbre, qui est le langage des mathématiques, est une simplification de la langue et une économie de signes permettant d'augmenter la capacité de calcul.

[5]On écrit « a » au lieu de « 1× a » et « 2a » au lieu de « 2 × a ».

.

connu ou devenu trop évident pour qu'on le dise, l'expression « illusion de transparence » caractérise la nature même des écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.

1 DISTINCTIONS PRÉALABLES POUR DÉCRIRE ET DÉFINIR LA SPÉCIFICITÉ DES ÉCRITURES SYMBOLIQUES

Les écritures symboliques sont un type de représentation graphique qui n'ont rien de véritablement commun ni avec un langage, ni avec des figures. Pour le comprendre, arrêtons un instant sur ce que l'écriture a de spécifique par rapport à deux autres types de représentations plus communes, les expressions linguistiques et les figures instrumentalement construites en fonction de propriétés géométriques.

1.1 ECRITURES SYMBOLIQUES VERSUS ÉCRITURES ALPHABÉTIQUES : UNE RUPTURE TOTALE AVEC LA PAROLE.

L'ECRITURE est une représentation graphique qui consiste en *une suite linéaire d'éléments qui sont visuellement distinguables et dont l'ordre de succession obéit à des contraintes.* Ces éléments sont les lettres d'un alphabet ou les chiffres d'un système de numération. Il est important de bien séparer deux types d'écritures.

Les écritures alphabétiques sont un codage de la parole, c'est-à-dire d'une énonciation orale. Les ECRITURES SYMBOLIQUES, qui ont été développées à des fins exclusives de calcul, sont DES ECRITURES OPERATOIRES qui ne peuvent ni s'énoncer en langue naturelle ni se dire oralement.

Et dans les écritures symboliques, il est important de ne pas confondre deux niveaux d'unités de sens. Le premier niveau de sens est celui des éléments signifiants qui dépendent entièrement du système sémiotique utilisé, tel que Saussure (1972) l'a défini : phonèmes, morphèmes, et mots d'une langue naturelle, chiffres désignant des nombres dans un système de numération. Ainsi, les chiffres « 0 » et « 1 » par exemple n'ont pas la même valeur oppositive de choix dans un système d'écriture binaire et dans un système d'écriture décimale. Le deuxième niveau de sens est celui des expressions incomplètes ou complètes que l'on peut produire en utilisant un système sémiotique : syntagmes nominaux et verbaux pour les phrases, et ce que nous appellerons des syntagmes opératoires pour les écritures symboliques.

	ECRITURES SYMBOLIQUES
1. SYSTÈME D'ÉCRITURE DÉCIMAL	4 (*élément désignant* un nombre) 44 (*suite de deux éléments désignant* un autre nombre)
2. EXPRESSION INCOMPLETE : les syntagmes opératoires *articulent au moins un chiffre (ou une lettre) et* ***UN SYMBOLE D'OPERATION***	**(2 + 2), (5 – 1), (2 × 2) , (8 : 2) , 8/2** **40 + 4, 12 × 2** *syntagmes opératoires*

Figure 1. Deux niveaux d'unité de sens dans les écritures symboliques

D'un strict point de vue linguistique et sémiotique, il est donc important de ne pas confondre les écritures symboliques utilisées en mathématiques et les écritures alphabétiques qui permettent de transcrire toute expression orale d'une langue naturelle. Elles s'opposent entre elles sur les quatre critères suivants :

	ECRITURES SYMBOLIQUES	ECRITURES ALPHABÉTIQUES
1. Commutation oral/écrit, univoque et réflexe	NON	OUI
2. Contraintes déterminant l'ordre de succession des éléments ayant une *valeur oppositive de choix*	Syntaxiques	Reproduction des éléments articulés dans la production vocale
3. Fonction de désignation d'objet pour les éléments	OUI *Désignation de nombres*	NON
4. Concaténation des éléments *en unités de sens* d'un *niveau plus complexe d'expression*	Formation de syntagmes opératoires (expressions incomplètes)	Reproduction des unités de sens du discours oral

Figure 2. La rupture entre écritures symboliques et écritures alphabétiques

Autrement dit, si l'algèbre est un langage, c'est un langage totalement muet qui ne peut pas se dire. Il est simplement destiné à effectuer des algorithmes d'opérations. C'est, si l'on préfère un langage purement opératoire. Toutes les propriétés mathématiques que l'on peut, implicitement ou explicitement mobiliser en parallèle avec l'utilisation des écritures algébriques, relèvent d'un emploi mathématique de la langue naturelle. Ne pas le voir c'est s'interdire de voir la complexité et les difficultés d'un enseignement de l'algèbre élémentaire qui veut être pour tous les élèves de 11 à 16 ans.

1.2 LA GAMME DES ÉCRITURES SYMBOLIQUES ET LES EXPRESSIONS COMPLÈTES

Les écritures symboliques désignent toute la gamme des écritures qui ont été développées pour pouvoir effectuer des calculs. Tout calcul est une suite d'opérations consistant à substituer une expression symbolique à une autre expression symbolique, que ces expressions soient numériques ou littérales. Deux types de substitutions doivent être distingués, selon que les substitutions portent sur des syntagmes opératoires, c'est-à-dire sur des expressions incomplètes, ou sur des égalités, des équations ou des expressions, qui constituent un troisième niveau de sens et que nous appellerons des expressions complètes.

Substituer une EXPRESSION INCOMPLETE à une autre consiste à la réduire
— soit à un élément du système d'écriture décimal : **(2 + 2)→ 4** ou **12 × 12 → 144**
— soit un syntagme opératoire moins complexe : **3 (a + 2/3b) → 3a + 2b**
— soit à un syntagme opératoire de degré inférieur : $\mathbf{x^2 \rightarrow (x \times x)}$.

Ces substitutions sont évidemment réversibles. Elles sont déterminées par les propriétés des symboles d'opérations ou par la nature des nombres. Nous les appellerons donc des SUBSTITUTIONS OPERATOIRES.
Substituer une EXPRESSION COMPLETE à une autre est une opération différente. D'une part, elle exige que l'on puisse changer un terme d'un membre à l'autre de l'équation et que l'on puisse effectuer une substitution opératoire dans l'un des deux membres

$$\mathbf{a + 2 = 4} \rightarrow a = 2 \qquad \mathbf{2a = 8 \rightarrow a = 4}$$

D’autre part, elle exige que dans cette substitution les deux expressions complètes conservent la même valeur de sens. La substitution doit se faire *salva veritate*, selon l’expression employée par Leibniz, *alors que les expressions incomplètes mises en relation dans chacune de deux expressions incomplètes ne sont pas les mêmes* ! C’est pour décrire ce mécanisme de substitution sémiotique que Frege (1971/1892) a introduit sa célèbre distinction entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). La « dénotation » est l’unité de sens propre à une expression complète, et le « sens » étant l’unité de sens d’une expression incomplète. En étendant cette distinction aux expressions incomplètes, la dénotation devient « l’objet désigné » par un syntagme opératoire ou nominal, et le sens devient la « signification » propre à chacune des expression incomplètes employée pour dénoter ou désigner un objet. Autrement dit, *avec les expressions incomplètes, la dénotation résulte d’une opération de désignation.* Ces substitutions sont des SUBSTITUTIONS SEMANTIQUES.

Comparons maintenant les quatre expressions complètes ci-dessous du point de vue des substitutions à faire pour calculer ou pour « résoudre ».

	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 2 = 8 : 2$	$2 \times \ldots = 8 : 2$ ou $2 \ldots = 8 : 2$	$(a + b) /2 = a/2 + b/2$
1.Un seul membre à prendre en compte	OUI			
2. les deux membres indépen-damment l’un de l’autre		OUI		
3. Possibilité de passer un terme à l’autre, ***salva denotatione***			OUI $2 \times \ldots = 8 : 2$ $\ldots = (8 : 2) /2$	
4. Nécessité de faire passer un terme d’un membre à l’autre dans l’équation ***salva veritate***				OUI $(a + b) /2 = a/2 + b/2$ $a + b = 2 (a/2) + 2(b/2)$

Figure 3. Continuum des écritures symboliques au niveau des expressions complètes

Les deux premières expressions (ci-dessus, les deux premières colonnes), n'exigent que des substitutions opératoires. Le syntagme opératoire est réduit à l'écriture d'un nombre dans le système décimal. Aucune substitution sémantique à faire. En revanche, tout change pour calculer ou résoudre les deux expressions suivantes, même si l'égalité numérique à trou (troisième colonne) ne comporte aucune lettre. Autrement dit, la substitution sémantique ne doit jamais être confondue avec une substitution opératoire, même si la résolution d'une équation recourt à l'une et à l'autre.

Ces distinctions et ces comparaisons permettent de faire trois remarques importantes pour entrer dans la problématique des recherches de Jean-Philippe :

(1) Elles mettent en évidence la complexité des écritures symboliques.

D'une part, elles exigent qu'on puisse *reconnaître tout de suite trois niveaux d'unités de sens qui s'emboîtent* : les éléments signifiants dans un système sémiotique et qui sont souvent confondu avec les « signes », les expressions incomplètes et les expressions complètes. Sans leur reconnaissance, on ne peut pas lire les expressions symboliques, mais seulement les épeler, éléments par éléments.

D'autre part, il faut *avoir pris conscience de l'opération spécifique de substitution sémantique* pour pouvoir « résoudre » une équation, ou pour pouvoir appliquer une formule dans une situation particulière et résoudre un problème concret.

(2) *Le premier pas dans l'algèbre ne commence pas avec l'introduction de lettres, mais avec l'écriture d'expressions incomplètes* pour former une expression complète, dont la résolution va exiger une substitution sémantique. Les égalités numériques à trou en sont un premier exemple (Duval et *alii*, 2015, p.67, 73).

Ainsi toute expression symbolique dans laquelle le symbole de relation « = » peut être remplacé par symbole de désignation d'un résultat «→» n'est pas une expression symbolique algébrique complète. L'utilisation du symbole « = » pour désigner le résultat d'une opération arithmétique crée une équivoque, qui va constituer un obstacle pour l'entrée dans les écritures symboliques algébriques.

L'introduction des lettres commence avec la formation des expressions incomplètes, qui exige, comme on le verra plus loin, *la prise de conscience d'une opération discursive spécifique aux écritures symboliques : la désignation fonctionnelle.*

(3) L'algèbre n'est pas et ne peut pas être à proprement parler un langage. *Elle est un registre discursif cognitivement monofonctionnel* et non pas multifonctionnel comme les langues naturelles.

La lecture et la compréhension des expressions symboliques *exigent donc que l'on reconnaisse visuellement les différents niveaux de sens d'une expression, pour pouvoir en distinguer toutes les unités de sens.* Autrement on en reste à la seule reconnaissance des différents caractères (chiffres, lettres, symboles d'opération ou de relation) que l'on peut seulement épeler les uns après les autres. Et on se heurte alors à de sérieuses difficultés pour transformer les syntagmes opératoires en d'autres syntagmes *et, plus encore, pour effectuer des substitutions sémantiques.* Ces difficultés peuvent vite bloquer la grande majorité des élèves, non seulement pour résoudre des équations, mais plus simplement pour appliquer une formule !

2 CONCLUSION DE L'ANALYSE LINGUISTIQUE DES ECRITURES SYMBOLIQUES ALGÉBRIQUES : NÉCESSITÉ DE LA DISTINCTION FRÉGÉENNE ENTRE SENS ET DÉNOTATION.

L'hypothèse de travail annoncée dans l'introduction était : « les ESA peuvent être décrites par un modèle linguistique (une grammaire) » (Drouhard 1992, p. 4). La recherche de la thèse a conduit Jean-Philippe à une conclusion paradoxale par rapport à cette hypothèse. Pour mettre en évidence l'implicite des écritures symboliques algébriques, il faut recourir à la distinction sémantique de Frege entre le sens d'une expression et ce qu'elle dénote.

Le retournement de la problématique, centrée sur les règles récursives apparaît avec l'analyse l'écriture fractionnaire, c'est-à-dire de syntagmes opératoires. Car les règles d'écriture qui permettent d'écrire les fractions s'avèrent insuffisantes pour les calculer et comprendre comment les calculer. Là, il est nécessaire de recourir à la distinction sémantique de Frege entre le sens et la dénotation pour les expressions numériques, incomplètes et complètes : *un même nombre est désignable par des écritures numériques différentes.*

La complexité des écritures fractionnaires apparaît, non pas avec les syntagmes opératoires qui s'articulent autour d'un seul symbole d'opération (**1/2,** ou **a/b**), mais avec ceux qui s'articulent avec autour de *deux symboles d'opération* (**3 + 1/ 2**) (et plus encore avec comprenant *trois symboles d'opérations* **((4 + 6) / (4 +1**) (1992, p. 298, 314, 344-348). Reprenant un exemple cité par Stella Baruk qui avait interrogé un élève sur l'écriture suivante :

$$\mathbf{2 = 10/5 = (4+6)/(4+1) = 6/1 = 6}$$

Jean-Philippe explique la réaction de l'élève qui admettait les deux simplifications et ne voyait pas pourquoi l'une devait s'imposer et non pas l'autre.

> Comme elle faisait remarquer que la suite des égalités revient à 2 = 6, l'élève lui répond « *Et alors* ». Pourtant, cet élève voit bien (on le voit dans la suite de l'entretien) que le nombre 2 n'est pas égal au nombre 6. La résolution de cette contradiction réside selon nous dans le fait *que pour lui l'ESA 10/5 ne désigne pas le nombre 2, ni l'ESA 6/1 le nombre 6*. En effet, *si les écritures sont privées de désignation absente*, on ne peut exiger de l'égalité qu'elle désigne cette désignation absente. En conséquence, l'égalité joue vis-à-vis des transformations un rôle identique à celui bien connu en arithmétique, à savoir le signe du résultat d'une opération
>
> L'absence de désignation des fractions entraîne à terme celle des relations et en particulier celle de l'égalité … et l'égalité 10/5 = 6/1 a peu de chances *de désigner une valeur de vérité* (en l'occurrence « Faux »).

> L'absence de dénotation rend donc très difficile le jugement de correction posé sur une transformation litigieuse. Pour l'élève le débat est perçu comme un échange d'arguments d'autorité (Drouhard, 1992, p. 360-361)

Autrement dit, la transformation des écritures fractionnaires fait apparaître une différence profonde entre la substitution opératoire qui porte sur *des expressions incomplètes linéaires* et la substitution sémantique qui porte sur *des expressions complètes non linéaires*. Le calcul avec des expressions incomplètes fractionnaires constitue le cas où la substitution sémantique est déjà implicitement prérequise avant même que l'on travaille avec des équations.

La deuxième conclusion porte sur la nécessité de faire prendre conscience aux élèves de la différence entre le sens d'une expression symbolique et sa dénotation

> *Hors d'un discours sur la notion de dénotation même (autrement dit un métadiscours sur les expressions mathématiques) le discours reste un dialogue de sourds* … Pour les élèves il y a bien différence mais pas contradiction. Pour qu'il y ait contradiction, il faudrait qu'il y ait dénotation (*ibid.*, p. 374)

Cette conclusion annule-t-elle l'hypothèse qui était annoncé dès les premières lignes de la thèse et qui est réaffirmée à mi-parcours, à savoir que les ESA sont indépendantes des nombres qu'elles représentent ? Non ! Car la distinction de Frege est impossible à faire sur un terme, sur un signe ou sur une expression incomplète. *Aussi dire qu'un signe, un terme ou un syntagme opératoire représente un nombre, c'est ne rien dire*. Sur un signe, un terme ou sur une expression, considérés isolément ou pour eux-mêmes, *on ne peut pas distinguer le sens et la dénotation.* Le faire est arbitraire. On est tout de suite dans le malentendu et le dialogue de sourds évoqués par Jean-Philippe. C'est là que Jean-Philippe a dû abandonner l'analyse des ESA en termes de grammaire générative pour revenir aux analyses sémantico-logiques de Frege. Mais il n'a pas abandonné pour autant le point de vue mathématique.

Frege, en effet, a successivement donné deux explications différentes de cette distinction. L'une est mathématique (1971/1891) et l'autre est cognitive (1971/1892).

— L'explication mathématique porte sur la nature de l'objet dénoté et c'est celle que Jean-Philippe a retenue :

> Nous avons retenu de la lecture de Frege l'idée que l'on a intérêt (d'un point de vue logique mais aussi didactique) à *considérer la dénotation d'une expression non pas comme un nombre mais comme une fonction.* (Drouhard, 1992, p. 267)

Et cela le conduit à distinguer le sens d'une fonction et son interprétation :

> J'appelle interprétation d'une ESA X dans un cadre donné tout objet qui correspond à la dénotation de X dans ce cadre *(ibid.* p. 280).

Cela peut être un nombre ou tout autre chose, selon le cadre du problème dans lequel on utilise une équation (*ibid.*, p. 280).

— L'explication cognitive et épistémologique porte sur le mécanisme sémantico-sémiotique du calcul et du raisonnement mathématique. *Celui-ci requiert que l'on se trouve devant* DEUX *termes,* DEUX *signes ou* DEUX *expressions incomplètes ayant des sens différents pour discerner le sens et la dénotation.*

On ne fait pas du tout la même analyse des écritures symboliques algébriques, selon utilise l'explication mathématique ou l'explication cognitive de la distinction entre sens et dénotation. Selon l'explication mathématique, la dénotation ne renvoie à rien d'autre qu'aux trois valeurs de vérité (vrai, faux, indécidable), ou plus précisément à la seule valeur vraie. Et elle ne concerne que des expressions complètes. Selon l'explication cognitive, la dénotation porte sur deux termes ou deux expressions de sens différents, et elle ne concerne que des expressions incomplètes, c'est-à-dire des termes, des syntagmes opératoires et, aussi, des syntagmes nominaux dans les langues naturelles.

La conclusion à laquelle aboutit l'analyse linguistique des ESA (correctes) soulève plusieurs questions est paradoxale et soulève plusieurs questions.

> Q. 1 Dans le continuum des écriture symboliques (ci-dessus, Fig. 3) *où se situe le saut à faire faire aux élèves pour introduire l'algèbre élémentaires ?* Avec l'introduction des lettres, ou avec la prise de conscience entre le sens et la dénotation d'expressions symboliques qui peuvent être aussi bien des expressions numériques que des expressions algébriques ?
>
> Q.2 Si la distinction entre le sens et la dénotation, qui s'avère nécessaire pour savoir utiliser et transformer et transformer correctement les écritures symboliques, *est-elle une connaissance du même ordre que la connaissance des propriétés des nombres et de celle des opérations ?*
>
> Q.3 *La notion d'écriture symbolique algébrique (ESA), n'est-elle pas une notion trop globale, et donc inutilisable pour analyser le fonctionnement des écritures symboliques ?* Ne faudrait-il pas d'abord distinguer les systèmes d'écriture symbolique des nombres et l'ensemble des types d'expressions que l'on peut former en utilisant ces systèmes ? Et ne faudrait-il pas, ensuite, distinguer les expressions incomplètes (les syntagmes opératoires) et les expressions complètes (les équations) ?

L'ultime conclusion de la thèse porte sur les quatre aspects distincts des ESA dont la prise en compte est requise pour utiliser et transformer correctement les ESA

> « Comprendre » les ESA, c'est prendre en compte leur syntaxe, leur dénotation, leur sens, et leur interprétation (Drouhard, 1992, p. 376).

Cette conclusion soulève la question suivante concernant l'utilisation de la distinction de Frege.

> Q. 4 La distinction entre dénotation, sens, et interprétation est-elle pertinente pour analyser leur compréhension d'un point de vue didactique et non pas seulement mathématique ?

2.1 LA COMPLEXITÉ DES ESA : UN IMPLICITE SYNTAXIQUE OU LA SUPERPOSITION D'UNITÉS DE SENS DE NATURE DIFFÉRENTE ?

Le choix de la théorie linguistique de Chomsky présente un intérêt. Il permet de distinguer deux niveaux d'organisation totalement différents. Il y a tout d'abord celui de la structure profonde où toutes les règles syntaxiques de production des expressions complètes et des expressions incomplètes doivent être explicitées. Il y a ensuite celui de la structure de surface qui est celui de toutes les expressions possibles que ces règles permettent de produire. Pour l'enseignement d'algèbre élémentaire, ce sont toutes les expressions numériques, littérales et algébriques que l'enseignement fait utiliser et calculer, ou demande de produire. Elles remplissent les chapitres de manuels. La comparaison de ces deux niveaux fait alors apparaître tout ce qui est implicite. *Suffirait-il alors d'expliciter ce qui est implicite pour que les ESA cessent d'être opaques ou fallacieusement transparentes ?*

Le problème est qu'il n'y a rien de commun entre deux types d'explicitation de l'implicite.

— celle requise pour élaborer un logiciel qui génère des expressions symboliques et qui les transforme en d'autres, c'est-à-dire qui les calcule,

— celle requise pour qu'un élève *reconnaisse visuellement* les différentes unités de sens qui composent toute expression symbolique un peu complexe comme, par exemple l'écriture fractionnaire **(4 + 6) / (4+1).**

Le piège pour la lecture des expressions symboliques est de réduire les unités de sens d'un syntagme opératoire ou d'une équation à la suite linéaire des éléments visuellement séparés par des blancs. C'est ce que l'on fait lorsqu'on dit oralement une équation à écrire : on l'épelle ! En réalité *les écritures symboliques algébriques superposent et aplatissent en une succession linéaire de chiffres, de lettres et de symboles trois types d'unités de sens,* comme nous l'avons vu dans la section 1.2. Il y a bien évidemment les termes que l'on énumère successivement. Ils relèvent de systèmes d'écriture des nombres et d'un corpus de symboles d'opération et de relation). Mais il y a surtout les unités de sens qui sont formées par des regroupements de termes.

Et ici, il est crucial de bien séparer les expressions complètes (les équations) et les expressions incomplètes que nous avons aussi appelé « syntagmes opératoires ». Les syntagmes opératoires présentent un type de difficulté bien connu, celui de l'ordre des opérations. La transformation des syntagmes opératoires est indépendante de la résolution des équations, même si celle-ci l'implique.

Reprenons le cas particulier des fractions qui sont des syntagmes opératoires. Jean-Philippe dans sa thèse les a analysées comme si leur calcul impliquait une expression complète, et cela l'a conduit à mettre en évidence une impasse didactique (ci-dessus, 2). En réalité, il s'agit *d'un syntagme opératoire qu'il faut délinéariser en le visualisant comme un arbre d'opérations.* En voici un exemple en partie emprunté à un manuel, paru il y a presque quarante ans, et dont l'originalité était d'expliquer les écritures symboliques, *parce que c'est avec l'écriture des nombres et celles de lettres, représentant des nombres ou des ensembles de nombres, que l'on travaille*[6]. Cet exemple montre la nécessité de distinguer des degrés de complexité dans l'écriture d'un syntagme opératoire. Le degré de complexité dépend à la fois du nombre de symboles d'opération et de l'ordre des opérations.

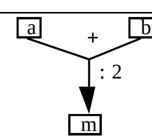
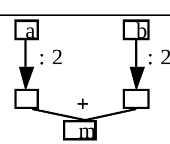
	Nombre d'unités de sens élémentaires	Nombre de syntagmes opératoires	Nombre de NIVEAUX D'UNITES DE SENS	Diagramme des opérations	Condition frégéenne de réécriture
$\frac{a + b}{2}$	5	**2**	1		NON
a/2 + b/2	7	**3**	2		NON

Figure 4. Analyse du degré de complexité des syntagmes opératoires

[6] Deledicq et Lassave (1979, p. 80)

Ce type de visualisation, congruent à l'ordre de priorité des opérations, vaut toutes les explications verbales pour expliquer ou justifier la procédure de calcul des syntagmes opératoires.

La résolution des équations exige au contraire un type de substitution que nous avons appelé la condition frégienne d'invariance de la dénotation. Et là nous touchons au deuxième point de clivage.

2.2 LA DÉNOTATION DES EXPRESSIONS SYMBOLIQUES : UNE FONCTION MATHÉMATIQUE OU L'INVARIANCE D'UNE DÉSIGNATION EN UTILISANT DEUX EXPRESSIONS DIFFÉRENTES ?

Nous retrouvons ici les deux explications données par Frege que nous avons évoquées plus (supra, II) : l'une mathématique, et l'autre cognitive.

La première est celle retenue par Jean-Philippe dans sa thèse et reprise dans les travaux ultérieurs. Elle revient à *appliquer la distinction entre sens et dénotation à une seule expression symbolique considérée pour elle-même*, c'est-à-dire à chaque expression symbolique considérée indépendamment de la précédente, ou de la suivante, dans un calcul ou un processus de résolution. Le sens et la dénotation d'une expression apparaissent alors comme deux aspects associés et cependant entièrement indépendants l'un de l'autre :

Le sens d'une expression *A* et la *dénotation* de cette expression *A*

Cela conduit à identifier le sens de l'expression à l'objet dénoté, c'est-à-dire une fonction ou une valeur de vérité indépendante du sens de l'expression. C'est pourquoi Jean-Philippe prend toujours soin de préciser *que la dénotation d'une équation n'est pas un nombre*. Cela se justifie mathématiquement « ...puisqu'une équation du second degré avec des coefficients réels peut avoir deux ou aucune solution (réel). Mais, pour une équation du troisième avec des coefficients réels on a toujour solution réel (une ou trois) ».

Mais ce choix est paradoxal, dans la mesure où la problématique de Jean-Philippe était d'analyser la spécificité propre aux ESA, indépendamment de ce que les différentes expressions représentent mathématiquement.

L'explication cognitive est totalement différente. *Elle revient à appliquer la distinction entre sens et dénotation à* DEUX EXPRESSIONS SYMBOLIQUES *pour expliquer le mécanisme du calcul, et non pas à une seule comme on le fait depuis Russell (1905).* Calculer, c'est substituer de manière non tautologique une expression B à une expression A dont le sens est différent de B, mais en gardant invariante la dénotation de A, c'est-à-dire ce que A désigne. Appliquée aux phrases de la langue naturelle, cette distinction permet de rendre compte de la cohérence ou de l'incohérence d'un enchaînement de propositions dans un raisonnement, dans une argumentation ou dans une description. Ainsi le mécanisme de substitution qui fonde le calcul, tel que Frege l'explique dans l'article de 1892, peut être schématisé de la manière suivante :

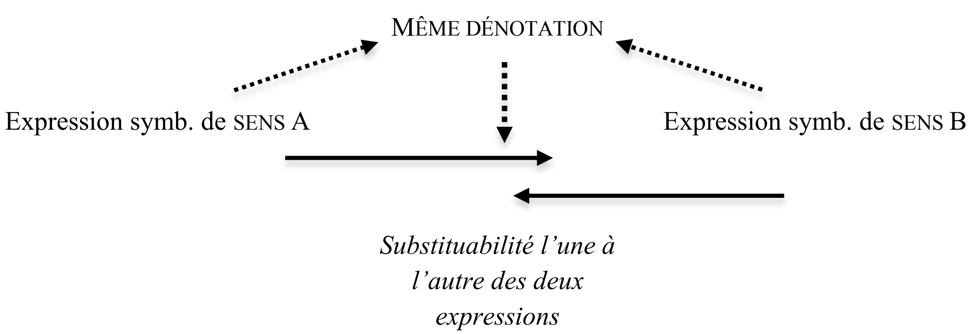


Figure 5. Schéma du mécanisme de substitution de toute opération de calcul

Les deux flèches en trait plein représentent les deux substitutions possibles d'une expression A à une expression, en fonction de celle qui est donnée au départ. Cette substitution n'est possible que sous la condition d'une même dénotation, c'est-à-dire dire d'une équivalence sémantique. Pour le calcul des syntagmes opératoires, l'expression « *salva suppositione* » est plus appropriée que l'expression *salva veritate,* qui n'est pertinente que pour les expressions complètes.

Deux observations permettent de voir l'importance cruciale de cette explication cognitive pour une théorie de la compréhension et de l'apprentissage des écritures symboliques par les élèves.

La première porte sur la comparaison entre deux manières d'écrire ou de représenter les nombres, l'une en termes de sens élémentaires, et l'autre en termes de syntagmes opératoires. Quelle différence, par exemple, entre les écritures

« 4 » et (1+1 +1 +1) ou (2 + 2) ou (2 × 2) ou (6 – 4), ou encore (8 / 2) ?

D'un côté, il n'y a aucune différence entre sens et dénotation pour l'écriture 4, comme pour toutes celles résultant de la seule utilisation d'un système numérique de position en base *n*. Et cela pour une raison très simple expliquée par Saussure. Les signes n'existent pas par eux-mêmes. Les signes ne sont des signes qu'à l'intérieur d'un système sémiotique, dans lequel ils s'opposent entre eux comme des valeurs de choix pour signifier ou désigner. Le sens d'un signe est sa valeur de choix. *Ainsi la seule utilisation d'un chiffre ou de plusieurs chiffres dans le système décimal dénote automatiquement un nombre.* Et il n'y a pas de substitution possible. Pour que les chiffres 0 et 1, 6, par exemple changent de dénotation, il faut qu'ils changent de sens et, pour cela il faut changer la base du système.

De l'autre côté, la distinction entre sens et dénotation s'impose cognitivement et didactiquement avec les syntagmes opératoires les plus simples (2 + 2) ou (2 × 2). Il n'y a donc pas besoin d'attendre l'introduction des écritures fractionnaires, comme Jean-Philippe le pensait, pour que la prise de conscience de cette distinction devienne une condition nécessaire de la compréhension des écritures symboliques. Sinon, chaque fois que le deuxième membre d'une expression complète ne comporte qu'une seule unité élémentaire de sens,

2 × 2 = 4 **2x = 4**

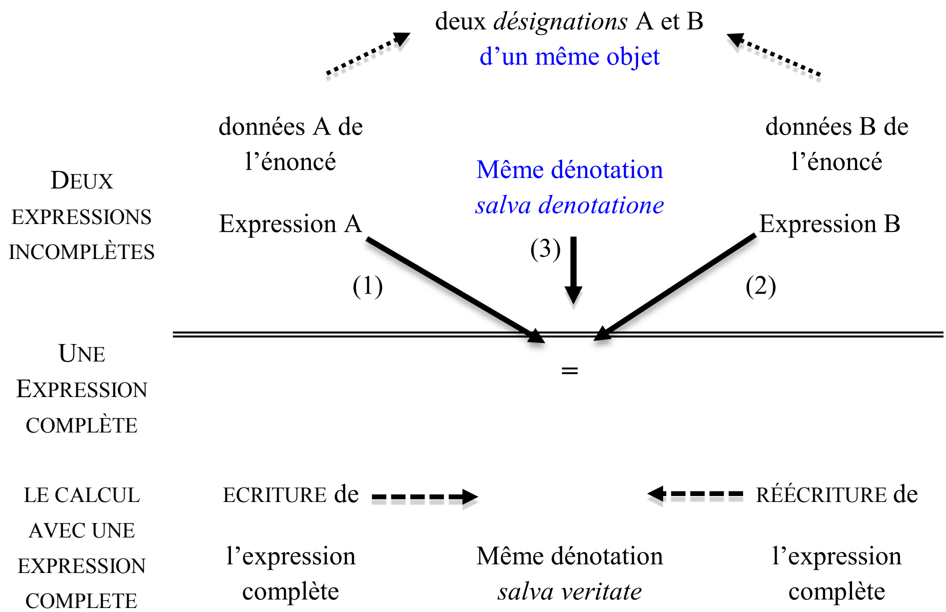
le symbole « = » sera automatiquement compris comme le résultat d'un calcul. Et cela crée un obstacle qui sera insurmontable, non seulement pour comprendre les lettres comme des variables et, surtout pour comprendre qu'une équation puisse avoir plusieurs solutions

$$x^2 = 4$$

La deuxième observation porte sur la mise en équation. La mise en équation des données d'un problème est le test par excellence pour une acquisition significative et utile de connaissances en algèbre. Car sans cela les élèves ne pourront jamais utiliser des équations pour résoudre des problèmes, même des problèmes d'application concrète d'une formule. Rappelons-nous, ici que dans les enquêtes PISA, ce n'est même pas cela qui est demandé, mais seulement l'utilisation d'une formule qui est donnée dans l'énoncé (Duval, Pluvinage, 2016). Or *la mise en équation exige que les élèves aient pris conscience de la nécessité d'une double désignation d'un même objet.* Autrement dit, il faut *« savoir » écrire par soi-même, et spontanément, deux expressions symboliques de sens différents.*

Une expression étant la lettre choisie pour désigner l'une des données du problème, la deuxième peut être une deuxième lettre ou un syntagme opératoire construit avec cette lettre pour désigner fonctionnellement l'autre donnée du problème. Mettre en équation les données d'un problème consiste à changer le registre de représentation dans lequel les données sont présentées.

Le schéma ci-dessous montre la complexité des opérations cognitives à mettre en œuvre. En prenant structure élémentaire des problèmes deux données sont présentées et où il faut trouver une troisième donné manquante, le schéma ci-dessous montre la complexité des différentes opérations de cognitives de substitution dont il faut avoir pris conscience.



Les deux premières lignes correspondent aux opérations de mise en équation des données d'un problème. Elles sont marquées par les trois flèches numérotées. Mais la troisième verticale est radicalement différente des deux premières. Elle suppose la prise de conscience de la distinction de Frege. La dernière ligne concerne le calcul qui est une suite de substitutions les unes aux autres d'expressions symboliques écrites, que ce soit dans une égalité numérique, dans une formule littérale ou dans une équation. Le problème « *n/L = 140. Si n = 70 combien vaut L ?* » (Duval, Pluvinage, 2016, p. 119-121). Ces substituions supposent aussi une prise de conscience de la distinction de Frege, mais en un sens purement formel (les deux flèches pointillés). La dénotation concerne la valeur de vérité de l'expression complète. Il est donc essentiel de ne pas confondre *l'équivalence salva denotatione et l'équivalence salva veritate* qui peut être une identité (ci-dessus § 1.2).

Et, bien évidemment, *prendre conscience ce n'est pas connaître, mais reconnaître*. Ce n'est pas acquérir une connaissance et un savoir ou un savoir-faire, mas devenir capable de telles acquisitions.

2.3 ECRITURE ET SÉMIOTIQUE : LES SIGNES PUREMENT ÉCRITS DE L'ALGÈBRE SONT-ILS ENCORE DES SIGNES ?

L'autonomie sémiotique des signes, qui s'est imposée avec l'algèbre, s'est faite au prix d'une neutralisation totale de leur fonction cognitive d'évocation de quelque d'autre. Cette neutralisation a eu deux conséquences révolutionnaires pour le développement des mathématiques : la suppression de la distinction entre signifiant et signifié et également la suppression de leur valeur d'opposition au sein d'un système sémiotique, ce qui n'est pas le cas pour l'écriture des nombres (Duval, 2006, p. 82). Leibniz est le premier à en avoir perçu la nouveauté radicale pour la pensée mathématique et pour la manière de travailler en mathématiques. Dans un texte de 1684, donc peu après la formation de l'écriture algébrique moderne, il note :

> .. cette pensée là, j'ai coutume de l'appeler *aveugle* ou encore *symbolique*... ; c'est celle dont nous usons en algèbre et en arithmétique… (Leibniz, 1972, p. 152-153).

Autrement dit, les signes purement écrits de l'algèbre sont-ils encore des signes dans le sens où l'on parle de signes en dehors de l'algèbre et des systèmes d'écriture des nombres ? Pour bien comprendre cette question, *il est important de ne pas confondre trois types d'écriture* : les écritures signifiantes, les écritures conceptuelles et les écritures symboliques.

Les *écritures signifiantes* sont toutes les écritures alphabétiques qui transcrivent la parole ou tout discours en langue naturelle (*supra*, Fig. 2). Elles requièrent une oralisation vocale, sub-vocalisée ou dans la tête, complète ou par échantillonnage, dont la rapidité varie considérablement selon le type de texte. Le premier schéma d'analyse sémiotique développé par les stoïciens, et distinguant le signifiant, le signifié et l'objet dénoté par le signe s'applique au langage naturel et aux écritures alphabétiques. C'est ce schéma qui s'est imposé jusqu'à Peirce. Autrement dit la distinction entre le signifiant et le signifié d'un signe est une distinction logico-linguistique, et non pas mathématique (Duval, 2006, p. 93).

Les écritures conceptuelles sont celles dans lesquelles les mots, les symboles ou les schémas représentent une connaissance, de manière plus ou moins conventionnelle. Ici c'est un concept qui est le signifié d'un signe, que ce soit un mot ou un symbole. Autrement dit, l'acquisition de concepts est la condition essentielle pour comprendre ce qui est écrit ou schématisé. Il ne suffit plus alors de savoir lire, ou d'avoir une bonne maîtrise de la langue, pour comprendre les écritures conceptuelles. Cela n'est d'ailleurs pas nécessaire. Il faut avoir la compréhension des concepts et non pas des mots.

Dans la plupart des études didactiques sur l'algèbre, les écritures algébriques sont assimilées à des écritures conceptuelles qui sont plus économiques et qui seraient plus simples. L'utilisation du symbolisme mathématique doit alors être subordonné à des connaissances mathématiques. Ce postulat théorique a longtemps été prédominant en didactique et même en didactique de l'algèbre. G. Vergnaud l'a parfaitement formulée en conclusion de son article « Les champs conceptuels » :

> Je me contenterai pour terminer de formuler la thèse suivante : *le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition nécessaire ni une condition suffisante de la conceptualisation* ; mais il contribue à cette conceptualisation, notamment pour la transformation des catégories de pensées mathématiques en objets mathématiques. Le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques, mais il ne possède pas, autant que les diagrammes, les formules et les équations, le laconisme indispensable à la sélection et au traitement des informations et relations pertinentes. *Cette importance accordée au symbolisme n'empêche pas que, en dernier ressort, c*'est l'*action du sujet* qui constitue la source et le critère de la conceptualisation (Vergnaud, 1990, p.166).

Les écritures symboliques sont les écritures qui n'utilisent que des chiffres, des lettres, des symboles d'opérations, des symboles de relation et des symboles de quantification. Autrement dit, ce ne sont que des caractères qui ne se distinguent que par leurs formes et par les règles de leurs groupements. Leur fonction n'est pas cognitive mais purement opératoire. Les suites qu'ils permettent de tracer permettent *de substituer des expressions à d'autres expressions sans avoir à tenir compte ni de leur signifié, ni de leur sens, ni de leur dénotation, ni même de la mobilisation de propriétés mathématiques*. C'est ce que Hilbert a expliqué dans le texte où il pose le problème de la décidabilité en arithmétique, problème qui a conduit Turing à imaginer une machine sémiotique autonome pour effectuer des calculs, et à développer la notion de programmation.

> Pour que le raisonnement logique soit sûr, des objets extra-logiques discrets doivent être donnés en tant que vécu immédiat pour toute pensée... leur présentation, leur différenciation, leur consécution devant être accessibles dans une intuition immédiate... Lorsque j'adopte ce point de vue, *les objets* de la théorie des nombres *sont les signes eux-mêmes dont la configuration peut être reconnue par nous de façon générale et certaine*... Là-dessus repose la position philosophique solide que je tiens pour indispensable à la fondation de la mathématique pure, aussi bien qu'à toute pensée, compréhension et communication scientifiques : au commencement est le signe (Hilbert, 1992)

Autrement dit, avec les écritures symboliques, les signes peuvent être réduits à des objets, c'est-à-dire à la forme d'un caractère ou d'une suite de caractères que l'on utilise indépendamment de ce que les caractères pourraient signifier, pour ne garder que leur puissance de calcul.

La difficulté à laquelle les travaux de Jean-Philippe se sont heurtés est d'avoir analysé les écritures algébriques comme si elles pouvaient être à la fois des écritures opératoires et des écritures conceptuelles, sans même exclure qu'elles soient aussi des écritures signifiantes.

Cette difficulté n'est évidemment pas propre aux travaux de Jean-Philippe. On la retrouve dans presque toutes les recherches didactiques sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège. Toutes les écritures symboliques, arithmétiques ou algébriques, sont introduites comme des écritures conceptuelles. Et toutes les théories sémiotiques utilisées pour analyser sont *des théories généralistes des signes qui ne prennent pas réellement en compte la rupture entre le langage parlé et l'écriture*, entre les connaissances mathématiques et les autres types de connaissances, entre ce qui relève d'un support de communication et ce qui relève d'un système de traitement. Avec toutes les théories globalisantes de la notion de signe, il devient impossible de saisir et de prendre en compte la spécificité des écritures symboliques algébriques par rapport aux deux autres types d'écriture, ainsi que leur irréductibilité aux autres registres de représentation sémiotique.

Enfin, il y a une caractéristique primordiale des unités élémentaires de sens que sont les chiffres, les lettres et les symboles d'opérations — c'est-à-dire les unités élémentaires de sens qu'on appelle habituellement des « signes » - c'est LEUR OCCURRENCE, c'est à dire le nombre de fois où elles apparaissent dans une expression complète. *Ce sont les occurrences d'une lettre, c'est-à-dire leur nombre et leur place dans les expressions algébriques, qui constituent la base du calcul algébrique.* La simplification des syntagmes opératoires, qui peuvent être plus ou moins complexes, repose sur la réduction du nombre des occurrences de l'une des trois unités de sens élémentaires qui les composent. De même la résolution d'une équation requiert le déplacement d'un membre à l'autre de certaines unités de sens de manières à séparer les syntagmes opératoires comprenant des lettres et ceux purement numériques (Duval, Pluvinage, 2016, p.148-150). Le calcul algébrique et la résolution des équations reposent fondamentalement sur *la reconnaissance visuelle des occurrences de lettres et de la forme de leurs arrangements dans les syntagmes opératoires*. *Le calcul algébrique est « formel » au sens visuel du terme*. Mais, évidemment, cela requiert que l'on puisse rapidement reconnaître les différents types d'unités de sens qui constituent une expression symbolique complète. Certes ce processus peut être squeezé pour la résolution des équations du premier degré. Il devient central pour celle des équations du second degré. Et l'obstacle pour les élèves sera d'autant plus grand qu'on ne l'aura pas pris en compte pour introduire l'algèbre élémentaire la résolution des égalités numériques … à trou ! (Duval, 2015, pp. 62-67).

La différence entre le calcul numérique et le calcul algébrique n'est pas dans le recours à une lettre. Elle tient au fait que *dans le calcul numérique, le résultat du calcul aboutit toujours à un nom propre de nombre, et non pas seulement à un autre syntagme opératoire,* lequel peut toujours être réduit à un nom propre de nombre. Un nom propre de nombre est l'écriture d'un nombre résultant de la seule mobilisation d'un système de numération (3, 14, 144,). On peut ainsi reconnaître si deux écritures numériques différentes (2+4) et (2 × 3) ont le même nom propre ou si, selon le critère de Hilbert, ce sont les mêmes signes que l'on retrouve. Et de même pour la résolution des équations du premier degré que l'on peut donner aux élèves. Le résultat est vérifiable parce c'est un nom propre et que la (ou les deux) lettre(s) utilisée(s) ont un statut d'inconnue.

Ce que Jean-Philippe a appelé « les écritures symboliques algébriques » couvre toute la gamme des écritures symboliques permettant d'utiliser des algorithmes. Cela va du calcul numérique avec les entiers jusqu'à la résolution des équations, en passant bien évidemment, par le calcul avec les décimaux, puis avec les fractions pour les rationnels. Les ESA constituent un continuum. Ce continuum ne peut être perçu et étudié qu'à l'échelle du curriculum d'un enseignement mathématique commun pour tous les élèves, au Primaire et au Collège). Il est totalement occulté à l'échelle locale de l'organisation de séquences didactiques, c'est-à-dire de séquences de quelques semaines dont l'objectif d'acquisition est un contenu mathématique local, qui n'est que l'une des multiples composantes d'une connaissance plus globale, objectif final d'acquisition au terme d'un cycle de trois ou quatre années d'enseignement ! Dans ce continuum, le seuil décisif pour entrer dans l'algèbre n'est pas l'introduction des lettres, ou la généralisation qu'elles permettent, mais la prise de conscience de la différence entre la dénotation des expressions symboliques et leur sens. Cette prise de conscience doit se faire bien avant l'introduction des lettres. Les difficultés auxquelles les élèves se heurtent dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire ne sont que le syndrome de l'absence totale de cette prise de conscience.

Le deuxième apport des travaux de Jean-Philippe est donc d'avoir considéré toutes les « écritures symboliques algébriques » comme formant un tout. Elles ont ceci de commun qu'elles relèvent toutes d'un même ensemble de règles de formation et que leur sémantique et une sémantique frégéenne. Pour désigner ce tout, nous avons parlé de règles d'un « continuum ». Jean-Philippe, lui, a repris le terme « registre » en spécifiant « registre algébrique

». En ce sens nous ne pouvons qu'être d'accord. Car, en reprenant ce terme, il souligne le fait que toutes les expressions symboliques doivent être envisagées pour elles-mêmes, et qu'elles sont radicalement différentes de la langue maternelle utilisée pour les interactions verbales en classe. En ce sens, si les écritures symboliques sont un langage, c'est une langue qui est plus étrangère que les langues étrangères que les élèves doivent apprendre à parler. Malgré cela, on continue de croire, en en restant au seul point de vue mathématique, que les écritures symboliques seraient plus simples et plus rapides à apprendre ! Eh bien, il va falloir écouter Jean-Philippe qui n'a cessé d'expliquer le contraire.

*

***

Comment faire reconnaître, au premier coup d'œil, les différentes unités de sens emboitées dans une expression symbolique, et comment faire prendre conscience de la différence entre le ou les sens d'une expression symbolique et ce qu'elle dénote ? Jean-Philippe avait souligné le caractère crucial de cette question pour la compréhension et l'apprentissage de l'algèbre par tous les élèves. Il avait aussi constaté que les théories didactiques, en donnant la priorité au point de vue des enseignants en classe et aux contenus mathématiques qu'ils ont à faire acquérir, n'y apportent aucune réponse. Les travaux de Jean-Philippe ne lui ont pas davantage permis d'avancer sur cette question. C'est là la limite de la problématique même de ses recherches. Pourquoi ?

Cette question de la compréhension et de l'apprentissage du registre des écritures symboliques exige une approche cognitive en termes de registres. Or la règle d'or d'une telle analyse est qu'un registre ne peut être analysé qu'à partir des variations que l'on fait dans un autre registre. Autrement dit pour analyser le registre écritures symboliques, *il faut prendre en compte plusieurs couples de registres, à l'intérieur desquels les conversions directes et les conversions inverses doivent d'abord être étudiées pour elles-mêmes* :

- (Ecritures symboliques et langage naturel),
- (Ecritures symboliques et graphiques cartésiens),
- (Ecritures symboliques et Schémas),
- (Ecritures symboliques et tableaux),
- (Langage naturel et tableaux).

La problématique de Jean-Philippe est restée fondamentalement une problématique mono-registre. Cela en constitue l'intérêt et l'apport, puisqu'elle a contribué à mettre en évidence la complexité du fonctionnement et de la mobilisation des « **E**critures **S**ymboliques **A**lgébriques » pour les élèves au Collège.

C'est l'écriture, et non pas seulement le langage et la parole, qui a été le seuil décisif dans l'évolution de l'humanité. La naissance de l'écriture ne marque pas seulement les débuts de l'histoire, elle a permis le développement de la connaissance, et en particulier des mathématiques. Cela attire l'attention sur un point fondamental caractéristique de l'activité mathématique. On ne peut faire de mathématiques sans d'abord écrire. *Les mathématiques s'écrivent. Elles ne se racontent pas réellement… sans écrire ou griffonner sur quelque chose*. L'écriture est l'un des facteurs primordiaux du développement cognitif de la pensée, car elle permet une objectivation que l'immédiateté du dire et du vouloir dire de la parole rend impossible (Duval, 2000).

Les écritures symboliques algébriques sont radicalement différentes de toutes les écritures dont la fonction première est de coder visuellement la parole, de la fixer, pour présenter le développement complet de son expression. Même si les équations remontent aux babyloniens[7], elles ne sont apparues que très

[7] *L'histoire commence en Mésopotamie.* Catalogue de l'exposition au Musée de Louvre-Lens, nov.2016-janv.2017. On peut voir, entre autres, les reproductions de deux prismes gravés en écriture cunéiformes de la période 1749-1712 av. J.-C. Pour l'un, les faces correspondent à des tables numériques et métrologiques, et, pour l'autre, à huit problèmes portant sur des rectangles et des briques (n. 261 et 262, p. 240-241). Or les premières tablettes écrites sur l'argile en cunéiforme remontent à 3300-3000 av. J-C., (Fig. 66, p. 217).

tardivement[8] Et elles se sont constituées en moins de deux siècles de Cardan et Viète à Descartes et Leibniz.

Et, d'autre part, le focus de l'attention se trouve en partie déplacé des mots ou des syntagmes nominaux à ces unités de sens supérieures que sont équations et les propositions. C'est pourquoi l'écriture remplit des fonctions de distanciation, d'objectivation, de contrôle, et finalement de prise de conscience que la parole et les interactions verbales ne permettent pas d'accomplir. *Ecrire structure la pensée. Ce n'est pas en parlant qu'on apprend à écrire*.

Les écritures symboliques, qu'elles soient numériques ou algébriques (ESA), sont opératoires et purement opératoires. Cela veut dire que leur seule fonction est de permettre *des opérations algorithmisables de substitution d'expressions symboliques à d'autres expressions symboliques, en fonction des occurrences de signes qui les composent*. Cela implique, évidemment, que l'on dispose d'un système de numération qui fonctionne comme système sémiotique au sens de Saussure. C'est pourquoi les écritures symboliques ne sont d'aucune manière commutable avec la parole. Car ces opérations de substitution ne sont pas possibles avec l'utilisation, même seulement mentale, du langage naturel. *Et inversement, les opérations d'association de mots et d'idées, qui font la puissance du langage naturel, sont impossibles avec les écritures symboliques.*

Le langage naturel et les écritures symboliques sont deux registres de représentation sémiotique irréductibles l'un à l'autre. Du point de vue mathématique, le registre des écritures symboliques est devenu le registre par excellence des mathématiques. Mais du point de vue didactique, il y a un double travail à faire, sur les opérations de désignation propres à chacun de ces deux registres, et sur la non congruence des conversions dans le passage de l'un à l'autre.

---

[8] F. Pluvinage, qui vient de nous quitter, a attiré l'attention sur la coïncidence entre l'apparition des écritures symboliques et le développement de l'imprimerie qui a imposé la standardisation des caractères (Duval et Pluvinage, 2016, p. 130).

Contre l’emploi équivoque du mot « langage » en didactique, Jean-Philippe a mis en évidence l’autonomie et la puissance incomparable de l’écriture par rapport à la parole.

PERSPECTIVES

L’enseignement et l’apprentissage de l’algèbre élémentaire au Collège sont organisés selon une progression faite (re)- « construire » l’analyse mathématico régressive évoquée dans l’introduction. L’analyse sémio-cognitive des écritures symboliques sort totalement de ce cadre. Il s’agit de s’intéresser aux exigences et aux difficultés d’apprentissage de l’algèbre avant d’organiser leur enseignement. Son objectif est la prise de conscience à la fois des opérations discursives qui d’un côté sont spécifiques à la langue naturelle et, de l’autre aux écritures symboliques, pour briser le mur de verre qui les sépare. Ces extraits ont été faits pour que les enseignants puissent s’approprier eux-mêmes cet outil d’analyse pour saisir les causes profondes des blocages de l’élève et élaborer des tâches dont l’objectif soit cette prise de conscience par les élèves. Est-ce possible ? Et quelles tâches élaborer pour atteindre cet objectif dès la première année de Collège, ou tout au moins à la fin de fin de la seconde année pour 80% des élèves ? En réalité ces objectifs ne peuvent être pleinement atteints que s’ils sont d’abord poursuivis durant les deux premières années du Collège. Ce qui implique qu’ils soient explicitement intégrés dans l’organisation des programmes !!! Car ils concernent la face cachée de l’activité mathématique et non pas la face exposée.

En tout cas, le suivi régulier, durant trois années, d’un élève en échec complet, que Jean-Claude Rauscher présente dans *Le Cas Jonathan*, montre tout ce cette analyse apporte. Mais elle ouvre un immense chantier. Car en accompagnant Jonathan, il a fallu peu à peu inventer des tâches radicalement nouvelles pour que Jonathan commence à discriminer les multiples expressions qui combinent des chiffres, des lettres et des symboles d’opération. Et surtout une demande plus complexe et plus redoutable s’est vite formulée. Comment les enseignants peuvent-ils mettre en œuvre eux-mêmes un accompagnement personnel de chacun de leurs élèves, alors qu'ils n'ont déjà pas assez de temps pour faire le programme de l'année ?

Revenons maintenant sur les différences d'approche entre l'analyse des écritures symboliques algébriques de Jean-Philippe et celle du fonctionnement sémio-cognitif que ces écritures présupposent. Tout d'abord le réel point de rencontre de ces deux approches porte sur le rôle crucial que la distinction de Frege entre sens et dénotation y joue. La divergence vient ce que l'approche de Jean-Philippe est unilatérale. Elles ne portent que sur les écritures algébriques, sans prendre aussi en compte ni le fonctionnement propre de la langue naturelle, ni la question de leur coordination cognitive. Cette divergence apparaît dans le choix qu'il a fait de préférer le mot « implicite » à l'expression « illusion de transparence ». D'une problématique centrée sur un problème crucial d'apprentissage de l'algèbre, on a glissé à une problématique d'algorithmisation des écritures algébriques à des fins d'enseignement. Peut-on dire des algorithmes, au moins durant la période de formation initiale des jeunes élèves, ce que Leibniz disait déjà des signes ? L'enseignement de l'algèbre oblige à se poser cette question.

RÉFÉRENCES

Damm, R. F. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. (thèse de doctorat). IREM, U.L.P de Strasbourg, IREM, France.

Deledicq, A. et Lassave, C. (1979). *Faire des Mathématiques, 4ème*. Paris : Cedic.

Drouhard J. P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. (*thèse de Doctorat). Université Paris VII, France

Drouhard, J. P. et Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, N° spécial *Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives*, 209-236.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/2, 135-170.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Dans J.P. Drouard et M. Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (p.67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, N°. 45-81.

Duval, R. (2011). Deux regards opposés sur les points critiques de l'enseignement de l'algèbre au collège (11-15 ans). *SIEMAT 3*. 2011 Sao Paolo. In T. M. M. Campos; U. D'Ambrosio; V. Y. Kataoka; M. Karrer; R. N. de Lima; S. H. A. A. Fernandes. *Proceedings of the III Seminário Internacional de Educação Matemática – SIEMAT)*)

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT* (Trad. en Portugais Méricles T. Moretti) V. 8, n. 1, 1-45. http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Duval R., Campos T. M. M., Barros, L.G et Dias, M. A. (2015). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, 117-152.

Frege, G. (1971/1891). Fonction et concept. Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Imbert), 80-101. Paris : Seuil.

Frege, G. (1971/1892). Sens et dénotation. Dans *Ecrits logiques et philosophiques* (tr. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.

Hilbert, D. (1922). *Neubegründung der Mathematik*. Erste Mitteilung. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 1 : 157–177.

Nichanian, M. (1979). La *question générale du fondement : écriture et temporalité*. (Thèse de doctorat). Université des lettres et des sciences humaines de Strasbourg, France.

Leibniz, G. W. (1972). *Oeuvres* I (Ed., L. Prenant). Paris: Aubier Montaigne**.**

Rauscher, J. C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre.

Russell, B. (1905). On denoting, *Mind, 14, 479-493.*

Vergnaud, G. et Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique, *Revue française de pédagogie*, 36, 28-43.

Vergnaud G. (1990). Les champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 10/2.3, 133-170.

ANEXO 2

Le cas Jonathan

Le complexe de l'algèbre

Jean-Claude RAUSCHER

« Ils sont fous en math. Ils ne savent pas ce qu'ils veulent… »
Jonathan

Résumé

Cette étude présente l'accompagnement durant trois ans, de la quatrième à la seconde, d'un élève qui était complètement bloqué en algèbre. Il confondait toutes les écritures d'expressions numériques et algébriques, ainsi que tous les termes désignant des opérations de calcul à faire. L'accompagnement a d'abord consisté à l'aider dans ses devoirs qui portaient sur trois champs de tâches mathématiques : transformation d'expressions algébriques, résolution d'équation, mise en équation pour résoudre des problèmes. Ces trois champs lui paraissaient sans rapport. Pour l'aider à comprendre, il a fallu inventer des activités portant à la fois sur des substitutions d'écritures d'expressions dans le calcul numérique et algébrique et sur l'articulation du langage avec les écritures correspondantes. Cela a entraîné un changement complet d'attitude. Il a alors été possible de commencer à lui faire comprendre la mise en équation et la résolution de problème.

Le but de cette étude clinique est, d'une part, de faire entendre la voix d'un élève face aux activités et aux tâches algébriques proposées en classe, et, d'autre part de mettre en évidence la complexité sémio-cognitive de ces activités et de ces tâches. Pour cela nous décrirons l'évolution de Jonathan en abordant les points suivants : l'analyse sémio-cognitive des activités en algèbre, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, la mise en équation d'un énoncé de problème, l'analyse rétrospective de la complexité de la mise en équation des données d'un problème et les premiers pas en algèbre faits par Jonathan. Nous terminerons par les perspectives que l'évolution de Jonathan peut ouvrir aux

enseignants sur la manière de faire entrer leurs élèves dans la compréhension de l'algèbre et dans l'utilisation des équations.

Le contexte

Tout a commencé en Janvier 2016, fortuitement. Jonathan était un élève en difficulté scolaire, en particulier en mathématiques. Je l'ai rencontré quand il était en 4ème par l'intermédiaire de ses parents. Je leur ai proposé d'accompagner Jonathan de façon souple (et bien sûr non rémunérée). Ils ont accepté. La demande initiale de leur part était qu'il ait « au moins la moyenne dans ses notes ».

De son côté Jonathan clamait haut et fort qu'il n'aimait pas cette discipline et qu'il ne voyait pas à quoi ça servait. Néanmoins, c'était un élève « sage ». Par la suite, au début de notre cheminement, il m'a confié à plusieurs reprises qu'il se pliait à ce suivi dans l'espoir ne pas se faire remarquer négativement par ses professeurs et pour avoir des notes qui feraient plaisir à ses parents. C'est ainsi que je me suis trouvé lancé, semaine après semaine dans les périodes scolaires, et parfois aussi pendant les congés, dans des rencontres régulières avec Jonathan. Et nous n'avions pas imaginé alors qu'elles dureraient trois ans. De Janvier à Juin. 2016, lorsqu'il était en 4ème. Puis l'année 2016/2017 en 3ème à la fin de laquelle il a réussi le certificat de fin d'études au collège appelé « Diplôme National du Brevet ». Il avait alors le désir faire un apprentissage dans les métiers de la peinture, mais cela lui a été refusé car il était trop jeune. Enfin, en 2017/2018, il se retrouva en seconde dans un lycée professionnel dans la section « collaborateur d'architecte ». Puis en avril 2018, à la suite d'un stage dit d'immersion, il a été accepté dans une section préparant aux métiers de la peinture. C'était une formation qui correspondait à son désir.

Cela a été pour moi une véritable aventure. J'ai pu observer la profondeur des difficultés auxquelles Jonathan se heurtait dans l'approche de l'algèbre élémentaire. Et surtout j'ai pu voir combien, mois après mois, année après année, rien ne changeait réellement pour Jonathan. Les mêmes difficultés profondes réapparaissant quelles que soient les activités et les tâches mathématiques proposées en classe. Et cela m'a conduit peu à peu à élaborer des activités et des tâches radicalement distinctes, pour les proposer à Jonathan. En espérant qu'elles l'aideraient à franchir ce premier seuil invisible qui rend l'algèbre incompréhensible à beaucoup plus d'élèves qu'on ne le pense. Et pour Jonathan cela a été un très lent travail de prise de conscience de la manière de travailler avec des écritures symboliques. C'est l'évolution du déroulement de nos rencontres et de ce qu'elles ont apporté que je vais présenter.

1. Le déroulement de nos rencontres

Soit face à face, soit côte à côte, le travail que nous effectuions en priorité était en général dicté par ses « devoirs scolaires » et cela, souvent en urgence : un devoir à faire à la maison, des exercices inscrits dans le cahier de texte, ou la préparation d'une évaluation, etc.

Dès le départ, j'ai vu que le chantier serait immense, il paraissait décourageant même. D'emblée je constatais que Jonathan était complètement bloqué par les calculs avec les nombres entiers. Ces difficultés l'inhibaient dans les tâches mathématiques proposées en classe. Dès le début, et parfois pendant les congés scolaires, j'ai donc proposé à Jonathan des tâches mathématiques dans le domaine des nombres entiers, tâches indépendantes de celles demandées en classe. Me faisant confiance, il s'y pliait volontiers. Par la suite bien sûr ces activités parallèles ont concerné aussi le domaine de l'algèbre. Jonathan a donc été confronté avec moi à deux sources d'activités ou de tâches : celles qu'il rencontrait à l'école qui étaient sa préoccupation première et celles que j'inventais au fur et à mesure de nos rencontres en fonction des observations et analyses que je faisais. C'est ainsi que s'est installé et déroulé le compagnonnage avec Jonathan de la 4ème en collège jusqu'à la fin de la seconde professionnelle en lycée.

La nécessité de noter les observations après chaque séance de travail pour pouvoir réellement accompagner Jonathan s'est vite imposée. C'est à partir de ces notes que je vais rapporter le cheminement de Jonathan durant presque trois années. Il a fallu revenir sur les difficultés rencontrées, et non surmontées, au niveau des activités numériques, du calcul avec les nombres négatifs, puis avec les écritures algébriques. Il a fallu évidemment des tâches spécifiques qui à la fois m'aidaient à comprendre les raisons de ses blocages et de ses confusions, et qui lui permettaient de comprendre les tâches mathématiques demandées en classe. Ces notes me permettent ainsi aujourd'hui de décrire l'évolution de Jonathan face aux apprentissages en mathématiques, évolution qui se comprend par la relation de confiance qui s'est installée et affirmée entre nous et qui lui a permis petit à petit de changer d'attitude : tout d'abord « tenir » puis et dans un deuxième temps d'accepter les innovations proposées et de s'y intéresser, ce qui lui a permis d'accéder à de véritables activités mathématiques.

La première étape, (janvier 2016 à juin 2017, 4ème et 3ème) a été celle où avec patience j'ai essayé de redonner confiance à Jonathan en l'accompagnant dans son cheminement scolaire prescrit par ses professeurs. C'était la période où, malgré sa très bonne volonté affichée, il était dans une attitude rétive et angoissée. C'est un temps où il trouvait toujours des prétextes pour échapper un instant au travail (un SMS des camarades, aller aux toilettes, etc…). C'était aussi la période où j'étais assez désemparé par rapport à ses difficultés. Mais cela a été aussi une période précieuse et fondamentale. Car c'est elle qui avec du recul me permettait d'analyser ce qui ne passait pas dans nos échanges, puis d'élaborer et de lui présenter des tâches extra-scolaires. En outre, nos échanges durant cette période font comprendre comment une grande partie des élèves reçoivent l'enseignement de l'algèbre. Et ainsi commencer à considérer autrement l'enseignement de l'algèbre au collège en voyant qu'il faut envisager des activités qui fassent rapidement entrer les élèves dans la compréhension et l'utilisation de l'algèbre. La deuxième étape est celle de la dernière année (de septembre

2017 à juin 2018, seconde en lycée professionnel). En réalité cette étape a commencé avec ma lecture de l'article de R. Duval et F. Pluvinage (2016). Sa lecture a donné lieu à des échanges avec eux sur ce que j'avais déjà observé et tenté de faire avec Jonathan durant les deux premières années. À partir de là, j'ai pu, en concertation avec eux, proposer et mettre à l'épreuve des tâches inédites à Jonathan. Ces propositions innovantes ont pu être progressivement modifiées en fonction de ses réactions. C'est au cours de cette période que l'attitude de Jonathan par rapport aux apprentissages a vraiment évolué positivement. Ses prétextes dilatoires à l'égard des devoirs scolaires à faire à la maison se sont raréfiés et ont quasiment disparu, laissant place à un enthousiasme certes modéré dans ses manifestations, mais réel.

2. Déjà des incompréhensions et des blocages avec le calcul numérique

Jonathan était complètement bloqué par les calculs avec les nombres entiers. Il avait même des difficultés avec les additions ou les soustractions et avec les multiplications de nombres entiers à un chiffre. Lorsque je lui demandais de calculer 4 × 6 sans la calculette, il jouait au jeu de la devinette en guettant mon approbation. Pour des soustractions de nombres à deux chiffres, il recourait à la calculette ou effectuait l'opération en soustrayant dans chaque colonne le chiffre le plus petit au plus grand : « *43 - 17= 34* ». *L'écriture des entiers ne semblait pour lui qu'une juxtaposition de deux chiffres*. Car il n'avait pas conscience du principe de l'écriture de position en base 10. Cela le handicapait évidemment pour faire mentalement (ou même en posant l'opération sur un support matériel) de simples additions comme « 17 + 23 ». Et quand il s'agissait de calculer « 54 – 41 » sans recourir à la calculette ou à l'opération posée et que je lui proposais de voir l'écart entre 41 et 54 : « 41 + ? = 54 », il restait dubitatif.

La distinction entre « expressions incomplètes » (54 - 41, ou 24 : 8) et « expressions complètes » (41 + ? = 54, ou 41 + 13 = 54) (Duval R. 2019, p. 107) permet de comprendre pourquoi ces opérations numériques ont en quelque sorte le même fonctionnement que les écritures littérales utilisées dans les formules ou que les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. Elle repose sur le fait que deux expressions équivalentes, peuvent être substituées l'une à l'autre. Pour Jonathan, il n'y avait aucun rapport entre « 54 - 41 = ? » et « 41 + ? = 54 » qui étaient des expressions totalement différentes parce qu'il n'avait aucune idée de l'équivalence de deux propositions dont l'une pouvait être obtenue à partir de l'autre, rien qu'en faisant passer un terme d'un membre à l'autre de l'égalité numérique. Bien évidemment, il se heurtait aux mêmes difficultés pour les multiplications et les divisions : « 8× ? = 24 et 24 ÷ 8 = ? ». Or, la possibilité d'envisager ce genre de substitution est à la base de toute activité de calcul.

A fortiori, je constatais de grandes difficultés dans les notions qu'il rencontrait au collège à propos des nombres : confusion entre le carré et le double d'un nombre entier, décompositions d'entiers en produits d'entiers pour simplifier des fractions ou pour faciliter des calculs~~,~~ ou encore effectuer des lignes de calculs où se mêlent signes + et × et parenthèses. Il confondait par exemple 3 + 2×5 et (3 + 2) × 5 en effectuant une suite d'opérations qui correspondait dans les deux cas à une lecture de gauche à droite comme dans la lecture d'une phrase. Un autre blocage, aussi crucial, concernait les termes mathématiques comme « somme » « différence » « produit », décrivant des calculs numériques complexes écrits en ligne. Il n'y avait pour Jonathan aucune articulation ou coordination entre ces mots qui qualifient les trois opérations souvent désignées par des verbes comme « additionner », « soustraire », « multiplier » et les symboles d'opération pour les nombres entiers.

Toutes ces difficultés dans le domaine des écritures et calculs arithmétiques apparaissaient comme rendant difficile l'entrée dans le monde des écritures et calculs algébriques où on rencontre le même fonctionnement de substitutions entre des expressions complètes et incomplètes.

Je lui ai donc proposé des tâches impliquant des substitutions d'expressions dans le calcul numérique et l'articulation du langage et des écritures numériques : tableaux multiplicatifs ou additifs à compléter, désignation verbale qualifiant des listes de doubles ou de carrés des nombres entiers, etc. Petit à petit, Jonathan faisait quelques progrès dans le domaine numérique. Lors de reprises de devoirs issus de la classe, la référence à ces tâches décrochées lui permettait de surmonter certains obstacles dans le domaine des calculs et de leurs formulations. Par exemple parfois, pour le débloquer, j'étais amené à lui faire réciter la table des carrés et des doubles.

3. Analyse sémio-cognitive des activités en algèbre

Jonathan était confronté régulièrement en classe à des tâches où il rencontrait des expressions symboliques qui mêlaient des lettres dénuées de signification, des nombres et des symboles d'opérations et de relations. Ses devoirs et ses cahiers portaient sur trois champs de tâches mathématiques qui lui apparaissaient sans rapports.

Le découpage était fait dans le but d'un enseignement visant *l'acquisition des équations comme outil de résolution de problèmes* en fin de troisième. Dans un champ on lui faisait faire de la « gymnastique » en transformant des expressions algébriques. Pour formuler les consignes, on employait le vocabulaire des opérations de l'algèbre élémentaire (« factorisation », « développement », « réduction ») et celui des opérations arithmétiques (« somme », « produit »). Le deuxième champ consistait en des tâches de résolutions formelles d'équations. Le troisième champ était celui la résolution de problèmes « concrets » par l'algèbre. Une équation est contextualisée dans une situation familière. On y utilise donc la langue naturelle pour décrire cette situation et pour décrire les données nécessaires permettant de résoudre le problème concret par la résolution de l'équation. La tâche demandée à l'élève est alors de mettre en équation, c'est-à-dire de retrouver l'équation qui structure mathématiquement la rédaction de l'énoncé.

Nous suivrons ce découpage pour analyser les comportements de Jonathan confronté à ses devoirs. Nous verrons comment, ballotté entre trois champs de tâches mathématiques qui lui apparaissaient sans rapports, il essayait vaillamment se débrouiller à sa façon, en se raccrochant tant bien que mal aux bribes qu'il en avait retenues. Du moins dans les moments où il n'était pas trop découragé. Ses réactions révélaient beaucoup d'incompréhensions et de confusions relatives aux tâches mathématiques. Pour les comprendre, il faut d'abord se poser trois questions :

1) Le vocabulaire des opérations arithmétiques et celui des opérations algébriques élémentaires ont-ils un sens pour les élèves ? Ou, pour le dire d'une façon plus précise et surtout facilement contrôlable par l'enseignant et aussi par l'élève lui-même, *peuvent-ils de façon quasi-réflexe passer de* l'un de ces termes mathématiques à l'écriture d'une expression numérique incomplète (3 – 2) ou une expression littérale incomplète (4a + 2) *et inversement ?*

2. *Est-ce le même travail qu'on demande à l'élève* dans la résolution formelle d'une équation et dans la mise en équations de problèmes par l'algèbre ?

3. Pourquoi la résolution de problèmes concrets *ne permet-elle pas de reconnaître en situation réelle,* hors du contexte très local de répétition d'un exercice d'entraînement, *la possibilité d'utiliser une équation ou une formule* ? Cette question se pose même pour les élèves qui « réussissent » à ces exercices.

La réponse à ces trois questions tient en une exigence incontournable. Pour acquérir des connaissances mathématiques, c'est-à-dire pour apprendre en mathématiques et pour pouvoir utiliser des connaissances mathématiques, *il faut AVOIR PRIS CONSCIENCE de la manière dont on travaille pour faire des mathématiques*. Car la manière de faire des mathématiques (expliquer, raisonner, voir, etc.) est totalement différente de la manière de travailler dans les autres domaines de connaissances. Elle consiste en un fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent aux démarches proprement mathématiques. Les registres de représentations sémiotiques sont l'outil qui permet d'analyser ce fonctionnement cognitif. Et cette analyse est décisive pour savoir *comment faire prendre conscience de la manière de travailler, en l'occurrence ici, en algèbre*.

Mes observations et mes analyses concerneront donc le comportement de Jonathan dans :

- les activités algébriques formelles de transformations d'expressions algébriques
- les résolutions d'équations
- les activités de mises en équation pour résoudre des problèmes.

Nous verrons enfin que d'un point de vue sémio-cognitif, résoudre une équation d'une part et d'autre part mettre en équation les données d'un problème pour le résoudre sont des tâches qui sont radicalement différentes et qu'il faut bien distinguer.

4. Jonathan et les transformations d'expressions algébriques

En opposition aux expressions appelées complètes (équations, inéquations, formules) parce qu'articulées autour d'un symbole de relation (=, ≤ etc…), susceptibles d'être vraies ou non (Duval Pluvinage 2016 p124), nous considérerons ici les expressions algébriques que l'on peut appeler des expressions incomplètes comme par exemple 3(x + 7), 3x + 21 ou encore (x + 5)(x - 3). En classe, Jonathan devait apprendre à développer, réduire ou factoriser de telles expressions, c'est-à-dire apprendre à substituer des expressions incomplètes par d'autres, sémantiquement équivalentes. Par exemple remplacer 3x + 21 par 3(x + 7), deux expressions qui n'utilisent pas les mêmes chiffres et symboles opératoires mais qui sont équivalentes. La substitution d'une expression incomplète à une autre par équivalence sémantique est en général une première opération à faire pour résoudre une équation. On est par exemple amené selon le cas à « développer » ou au contraire à « factoriser » l'expression incomplète qui constitue un membre de l'équation. Mais pour Jonathan, en classe, ces transformations apparaissaient comme un domaine de travail isolé dont il ne voyait pas le sens et qui lui causaient de grandes difficultés. Et il me répétait :

« *À quoi ça sert* ? »

Dans sa situation de décrochage, pour faire ses devoirs ou préparer des évaluations dont le but était de réviser ce qui avait été fait en classe, Jonathan, effectuait sous mon regard et avec mon accompagnement des transformations d'expressions algébriques, parfois correctes, souvent fausses mais confondait factoriser, développer et réduire….

« C'est la même chose, non ? »

Pour avancer, il fallait souvent que j'amorce le travail, pour qu'il s'y raccroche par mimétisme.

En ce qui concernait développer et réduire, il se rappelait bien de « trucs » vus en classe mais sans lien avec un de ces mots. Ainsi lorsque qu'il avait à développer et réduire une expression incomplète du type (a + b)(c + d), il garnissait l'expression initiale de quatre flèches correspondant aux produits ac, ad, bc, bd et arrivait ensuite à écrire ces quatre termes. C'est un procédé dont il se rappelait et qui lui permettait d'amorcer correctement le développement. *Il ne savait pas s'il était en train de développer, de réduire ou de factoriser mais il savait faire*… Mais lorsqu'il s'agissait de développer et de réduire l'expression (x + 4)(x + 2) + (x + 3)(x + 1), il mettait une pluie de flèches. Il commençait par mettre celles qui correspondaient à (x + 4)(x + 2) mais rejoignait aussi par des flèches les lettres et chiffres de ce premier bloc à ceux du deuxième bloc (x + 3)(x + 1).Il ne discernait, ni la hiérarchie, ni l'ordre des opérations dans les traitements. Nous retrouvions là les difficultés rencontrées lors du traitement de calculs numériques complexes écrits en ligne, par exemple la confusion entre 3 + 2×5 et (3 + 2) × 5. Dans un cas comme dans l'autre, Jonathan procédait à des segmentations des écritures linéaires sans tenir compte des règles de priorité et des parenthèses, le plus souvent de gauche à droite comme dans la lecture d'une phrase.

En ce qui concerne les factorisations, les expressions amenées à être factorisées allaient d'exemples simples comme 3x + 3 × 7 à des expressions plus complexes comme (x + 3)(7 – 2 x) + 5(x + 3) ou encore des expressions nécessitant de *reconnaitre* des identités remarquables ! Mais devant ce paysage *de signes, de chiffres, de lettres et de parenthèses Jonathan était là* *aussi perdu ! Et, devant son désarroi, moi aussi !* Lorsque j'essayais de l'aider, il était intrigué par les mots mathématiques tels que « termes » « facteurs » que j'employais de mon côté pour lui décrire les expressions algébriques à transformer en d'autres expressions :

« *Je ne comprends pas ce que cela veut dire.* ».

Il rigolait :

« *Facteur, ah oui le facteur… !* » ou « *La somme, ah, oui, ça assomme* ».

Au moment de la campagne pour les élections présidentielles Jonathan m'a confié :

« *Les maths, c'est comme les présidents. Ils parlent et on ne comprend pas ce qu'ils disent.* ».

Pour ma part, dans un premier temps, je jouais son jeu en manifestant ma surprise et mon plaisir devant ses jeux de mots ». Parfois, je renchérissais « *Ah oui, je t'assomme, c'est ça !* ». Il rigolait et acquiesçait. Mais je reprenais aussi avec lui les expressions algébriques pour leur appliquer ces mots : « *3(a + 5) veut dire que 3 est multiplié par la somme a+5 et que 3 est facteur de cette somme, on lit 3 facteur de a + 5* ». Il rajoutait alors un signe × entre 3 et (a+5) : 3×(a+5). Pour les factorisations, il a retenu que quand il y avait deux facteurs identiques, on pouvait « *se passer de deux facteurs pour faire le travail et n'en garder qu'un* ». Ainsi à condition de lui rappeler que 5x signifiait 5 × x, il pouvait concevoir que 5x +7x c'est 12x en passant par x × (5 + 7). A noter que quand il tombait sur 0x, il était dubitatif. Ça ne faisait pas 0 pour lui… De même 1x ne faisait pas forcément x et inversement, il ne concevait pas qu'écrire x=1x puisse être utile. Je voyais par ailleurs chez Jonathan à travers sa posture perplexe et ses erreurs *l'ambiguïté qui existe entre les signes opératoires + ou – et ces mêmes signes attachés à un nombre*. Par exemple pour factoriser 5a + 5 × (-3), il pouvait tout aussi bien écrire directement 5 (a + 3) ou 5(a - 3) ou encore 5 (a+ - 3) sans savoir choisir, ni passer par 5(a + (- 3)) pour arriver à 5 (a – 3).

Avec mes explications ponctuelles et bricolées, les progrès perceptibles étaient ténus, inconsistants, superficiels. Jonathan était toujours en demande d'explications répétées qui restaient sans effets. J'avais l'impression d'un travail de Sisyphe ! De façon évidente ces remarques montraient qu'un travail de fond sur la compréhension du fonctionnement sémio-cognitif des écritures symboliques et de leur coordination avec les termes mathématiques restait à concevoir.

5. Jonathan et les résolutions d'équations

Avec les résolutions d'équations nous entrons dans le domaine de ce qu'on peut appeler des expressions complètes parce qu'articulées autour d'un symbole de relation, en l'occurrence « = », chacun des membres d'une équation constituant une expression incomplète.

En classe, le travail de résolution avait été abordé. Dans les exercices à faire. Jonathan avait à résoudre des équations qui allaient des cas les plus simples dans un premier temps comme $x + a = b$, ou $cx = d$, (avec des variations des valeurs numériques a, b, c et d qui pouvaient rendre les résolutions plus ou moins faciles $3x = 15$ ou $3x = 17$ ou $- 3x = - 15$) à des cas plus complexes avec des inconnues de chaque côté du symbole « = » ou encore des membres comportant des expressions incomplètes plus complexes à réduire ou à factoriser.

La première difficulté que j'ai observée chez Jonathan était son incompréhension de la tâche :

« *Résoudre l'équation… ? Qu'est-ce qu'il faut faire ?*

Il ne comprenait pas ce qu'on attendait de lui. Il a fallu que je lui explique en quoi consiste la résolution d'une équation, à savoir « chercher pour quelle(s) valeur(s) de x, l'équation donnée est vraie ». Sur un exemple d'équation comme $x + 2 = 5$, il comprenait que la solution était 3. Par ailleurs, il répondait correctement aux questions où il s'agissait de vérifier qu'une valeur numérique était bien solution d'une équation donnée, même du second degré. Par exemple : « On considère l'équation d'inconnue x : $x^2+x=6$. Le nombre 2 est-il solution de cette équation ? ».

La deuxième difficulté observée chez Jonathan porte sur son interprétation du signe « = » rencontrée dans l'écriture d'une équation. Quand il s'est agi de trouver pour quelle(s) valeur(s) l'équation était vraie, sa première tendance était d'ajouter une nouvelle fois, après le deuxième membre de l'équation, « = » comme on le fait lorsqu'on a à substituer une expression algébrique initiale par d'autres pour, selon le cas, développer, réduire ou factoriser l'expression initiale. De la réaction de Jonathan on peut penser que, pour lui, les deux expressions incomplètes qui figurent de chaque côté du signe « = » étaient indépendantes. Et quand je l'ai guidé laborieusement et autoritairement pour lui faire transformer l'équation donnée au départ en des équations équivalentes en faisant passer, par exemple, tous les « x » d'un côté mais aussi en lui faisant faire progressivement le ménage, réduire, factoriser dans les expressions incomplètes de chaque côté du symbole « = », il m'a dit :

« Ils sont fous en math. Ils ne savent pas ce qu'ils veulent… ».

On peut comprendre son désarroi, face à deux sens radicalement différents du symbole « = ». D'une part pour marquer les substitutions successives d'une expression initiale incomplète (…=…=…=...) et, d'autre part, pour marquer l'équivalence entre l'équation initiale et l'équation finale obtenue (…=…. équivalent à …=…. etc…).

Mais néanmoins, il se souvenait là aussi de traitements rencontrés en classe mais, sans en saisir le sens. Ainsi, il avait retenu qu'on cherchait à isoler x du côté gauche du symbole « = ». Pour cela, quand les symboles opératoires articulant l'expression incomplète étaient ceux des opérations additives comme celles du type x + a = b, il appliquait « la règle de changement de signe » et arrivait ainsi parfois à isoler x comme on le lui avait demandé. Mais quand les symboles opératoires articulant l'expression incomplète étaient ceux des opérations multiplicatives, il confondait les opérations additives et les opérations multiplicatives. Malgré quelques progrès dans le domaine numérique (où il arrivait à procéder correctement à des substitutions d'expressions entre elles pour faire des calculs), *il ne percevait pas la similitude entre la transformation d'écriture dans le cas des écritures littérales et dans les écritures numériques.* Pour les équations de la forme ax = b, il hésitait entre x = b - a, x = a/b et x = b/a**.** J'étais encore souvent amené à lui rappeler ou lui expliquer que ax signifiait a×x. Il voyait assez alors assez facilement par exemple que la solution de l'équation 3x = 21 était x = 7 en transformant 3x=21 en 3×x = 21. *Mais le doute revenait lorsque le nombre du second membre de l'équation obtenue n'était pas un nombre entier*. Ainsi pour 3x = 20, il proposait x = 20 - 3 ou x = 3/20. Il était aussi déstabilisé quand, suite à des substitutions correctes, apparaissait finalement un « -x » à la droite du symbole « = ». Il restait bloqué devant « -x = - 7 ». Transformer comme je le lui proposais « -x = - 7 » en « -1×x = -7 » le laissait dubitatif ! Lui parler « d'opposé de x » aussi. Il consentait bien de faire passer « -x à droite » et « -7 gauche » pour arriver à « 7 = x » mais cela lui paraissait étrange puisque x n'était pas à gauche du symbole « = ». Autre exemple, dans la résolution de l'équation 5x – 3 = 8x + 1 pour laquelle il écrivait successivement 5x - 8x = 1 + 3, -3x = 4 puis x = 4+3 et x = 7. *La compréhension des emplois différents du symbole « - » faisait défaut.* La prise de conscience de cette distinction apparait comme un enjeu d'apprentissage nécessaire pour que des élèves comme Jonathan, en fait très nombreux, puissent progresser.

Dans le domaine de la résolution d'équations, rien n'exprime mieux l'incompréhension profonde qui a conduit au décrochage de Jonathan que :

« Ils sont fous en math. Ils ne savent pas ce qu'ils veulent… ».

La résolution des équations les plus simples, exige en effet que l'on effectue deux opérations sémio-cognitives différentes : transformer les expressions incomplètes constituées par les membres des équations par des développements, des réductions ou des factorisations et transformer les expressions complètes que constituent les équations en des expressions complètes équivalentes. Et cela en jouant avec le symbole caméléon « = » (Duval, Pluvinage, 2016, p. 122). Comme on a pu le constater, cette distinction entre des fonctions différentes du signe « = » n'était pas acquise ! L'enjeu primordial pour Jonathan serait de comprendre que dans une équation les deux expressions incomplètes qui figurent de chaque côté du signe « = » sont différentes (celle de droite n'est pas une transformée de l'expression de gauche) mais qu'elles ne sont pas indépendantes à cause justement de ce signe « = » et qu'on est donc dans la configuration d'une expression complète qu'il faut *transformer en une expression complète qui a la même « dénotation »*, au sens de Frege[1] (Duval, 2019, p. 115). En l'occurrence les équations successives par lesquelles on remplace la première ne comportent pas les mêmes écritures mais se réfèrent toujours à la même question : *« Pour quelle(s) valeur(s) de x l'équation initiale donnée est-elle vraie ? ».*

Jonathan était bien loin de cette prise de conscience. Une observation sur ses réactions face à un domaine d'équations dans lequel il réussissait paradoxalement bien nous le confirme. Il s'agit des équations qu'il rencontrait dans les exercices où entraient en jeu les relations de proportionnalité (calcul de longueur avec Thalès, problème de proportions, calcul de pourcentages etc.). Déjà, Jonathan ne savait pas de façon autonome établir les égalités formelles qui permettaient de résoudre ces problèmes parce que les notions sous-jacentes n'étaient pas maîtrisées. Par exemple analyser une figure en sous-figure pour déterminer les conditions d'application du théorème de Thalès, ou encore élaborer un tableau de correspondance entre les données dans une situation de proportionnalité, etc. Mais une fois accepté le tableau 2x2 ou l'égalité du type a/b=c/d qui permettaient de résoudre ces problèmes, il était rassuré :

« *Je sais faire !* »

Il connaissait un « truc » qui lui permettait de trouver la valeur inconnue qui instanciait l'égalité. La routine apprise en classe consistait à tracer ou parcourir un chemin continu de flèches pour aboutir à la réponse. Pour obtenir une valeur manquante, gestes et flèches continus à l'appui, il multipliait les valeurs connues figurant dans deux places en diagonale et il divisait par la troisième valeur connue. Mais en fait, c'est là une procédure qui permet de masquer les substitutions d'expressions complètes à effectuer pour résoudre de telles équations. Elle le laissait donc loin de la possibilité d'appréhender l'opération qui consiste à remplacer une expression complète par une expression équivalente. La preuve en était qu'il

[1] Frege G., (1892) 1971. Sens et dénotation. Écrits logiques et philosophiques (tr. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.

était rétif à tout autre traitement que celui auquel il se raccrochait comme à une bouée de sauvetage. Quand je lui disais qu'on pouvait substituer à l'équation initiale a/b=c/d l'équation ad = bc, il se rebellait :

« *Mais pourquoi compliquer !* »

Mon argument de dire que c'était une façon plus utile pour traiter les cas de façon générale ne le convainquait pas. À juste titre certainement parce comme on l'a vu plus haut il n'était pas en mesure de passer spontanément de ac=bd à a=bd/c. C'est une incompréhension qui n'est pas surprenante comme le montre l'enquête PISA 2003 où la question du calcul de la longueur d'un pas L à partir de la formule « n/L =140 », sachant que « n » est le nombre de pas par minutes est de 70, arrête plus de la moitié des élèves de 15 ans (Duval, Pluvinage, 2016, p. 121). Nous sommes là aussi dans le cas d'écritures fractionnaires de rapports où les substitutions à opérer pour isoler l'inconnue sont complexes à effectuer (Adjiage, Pluvinage, 2012, p. 49).

Finalement, indépendamment de la complexité des équations du premier degré à résoudre, les séances répétées d'exercices à ce sujet, accompagnées de mes explications n'étaient pas efficaces. D'une fois à l'autre elles commençaient en général par :

« *Je ne me rappelle plus ; montre-moi !* ».

De plus « les trucs » qu'il rapportait de la classe comme le changement de signe quand on passe d'un membre à l'autre de l'équation ou encore le parcours fléché pour trouver le terme manquant dans une égalité de rapport n'étaient que « des béquilles locales » qui ne lui permettaient pas de « marcher de façon autonome », en fait des leurres qui masquaient les opérations cognitives en jeu.

6. Jonathan et la mise en équation d'un énoncé de problème

Les données d'un problème peuvent se rencontrer de multiples façons : sur le terrain, en enregistrant les observations faites au cours de manipulations physiques en « laboratoire », avec des tableaux de données ou dans un énoncé qui décrit une situation. C'est ce type de présentations des données d'un problème qu'on rencontre fréquemment dans l'enseignement et dans les manuels. En l'occurrence c'était bien le type de problèmes auquel Jonathan était confronté en classe ou dans les devoirs et que j'avais déjà essayé de résoudre avec lui, ou plus exactement devant lui ! Après les évaluations en classe, ratées, il revenait en se justifiant :

« Je ne me souvenais plus comment faire. Tu m'as expliqué mais en interro, je ne me rappelais plus de rien. »

Alors que j'enseignais moi-même en collège, j'utilisais souvent le « *problème du poids de la bouteille et du bouchon* » pour essayer de faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt du recours à une mise en équation pour le résoudre. J'ai hardiment tenté l'expérience avec Jonathan. Ce fut un échec, mais un échec qui permet d'analyser non seulement la complexité cognitive de la mise en équation des données d'un problème, mais aussi l'ambiguïté et les pièges des énoncés de problèmes soi-disant « concrets ». J'ai présenté cet énoncé à Jonathan.

Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?

Comme je m'y attendais, il a répondu que la bouteille pesait 100g et le bouchon 10g. Il était sûr de sa réponse et son assurance prouvait qu'il croyait comprendre l'énoncé. Il fut étonné que je mette sa réponse en doute en la lui faisant confronter à la deuxième phrase de l'énoncé : « *La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon* ». Il restait dubitatif et muet devant ma mise en doute ! Il n'avait certainement pas envisagé la complexité de cette phrase. Devant sa perplexité j'ai alors recouru à l'évocation du poids de son chien et de son chat. S'est alors engagé le dialogue suivant mené plus ou moins adroitement de ma part :

— *« Admettons que ton chien pèse 5kg et le petit chat 4kg. Combien de plus que le chat pèse le chien ? »*

— *« Ah oui, il pèse 1kg de plus que le chat* »

— « *Et si la bouteille pèse 100g et le bouchon 10g ?* »

— « *Ah oui, alors la bouteille pèse 90 g de plus que le bouchon ! »*

Et dans le feu de l'échange, il a ajouté :

— *« Mais alors la bouteille doit peser 80g ! »*

Je lui ai alors fait relire la première phrase de l'énoncé et il a soupiré :

— *« Pfff… ! »*

Il avait pris conscience de la complexité des données de l'énoncé. Pour ma part, sur le coup, j'étais tout aussi embêté et sur le moment, je n'ai pas su réagir de façon pertinente (je reviens sur ce point dans le paragraphe 7). Sous la pression du temps qui passait, j'ai précipité les choses en lui disant « *Et si on appelait x le poids de la bouteille ?* », en bloquant ainsi Jonathan dans une possibilité d'engager d'éventuelles prospections numériques (je reviens aussi sur ce point dans le paragraphe 7). Il n'était pas trop étonné par ma proposition, genre de proposition déjà rencontré en classe ou dans les reprises de corrigé d'exercices mais a répliqué :

« *Non, x c'est le poids du bouchon, j'aime mieux…* »

Je lui ai répondu « *D'accord appelons x le poids du bouchon ; quel est alors le poids de la bouteille en fonction de x ?* » Devant cette question de professeur de mathématique, il m'a alors répondu :

« On ne peut pas savoir car on ne sait pas le poids du bouchon… ! »

Cette déclaration était significative de la difficulté principale que rencontrait Jonathan. Il ne comprenait pas que pour amorcer la mise en équation de l'énoncé, il était certes nécessaire de désigner le poids d'un des deux objets évoqués dans l'énoncé par une lettre, *mais aussi de ne pas se contenter de désigner le poids de l'autre objet par une autre lettre indépendante.* Il fallait utiliser la première lettre pour exprimer le poids du deuxième objet à l'aide de la relation avec le poids de l'autre objet telle qu'elle était donnée en langue naturelle dans l'énoncé ! Pour lui, le poids de la bouteille était une quantité isolée et « x » n'avait pas le statut d'une désignation du poids de la bouteille dont la valeur devait transitoirement rester inconnue pour ensuite la trouver. Surpris par sa déclaration catégorique, je ne savais pas quoi faire ! J'ai essayé de lui expliquer, mais mes explications revenaient plus ou moins à lui proposer les étapes successives en dictant les différentes écritures qui menaient vers l'équation finale. C'était la même situation qu'en géométrie, quand on expose une démonstration à des élèves qui ne comprennent pas ce qu'est une démonstration mathématique. Je ne rencontrais bien sûr que perplexité et résignation. Quelle patience il avait ! Et moi donc !

7. Analyse rétrospective de la complexité de la mise en équation des données d'un problème

C'est après coup que j'ai réalisé la complexité des opérations discursives qu'on demande aux élèves pour mettre les données d'un problème de ce type en équation. Je l'ai analysée à partir du modèle d'analyse sémio-cognitive bidimensionnelle qui se présente sous la forme de la grille suivante (R. Duval et alii, 2015) :

	DESIGNATION VERBALE des trois objets du problème	DÉSIGNATION NUMÉRIQUE	RE-désignation LITTÉRALE
1.Désignation directe			
Désignation indirecte 2. *descriptive* (LANGUE) 3. *fonctionnelle* (LETTRES)			
4. *Double* désignation *d'un même* objet			
EQUIVALENCE RÉFÉRENTIELLE			

Dans la marge verticale du tableau on place les différentes désignations possibles d'un même objet en langue naturelle et dans une écriture symbolique. Et dans la marge horizontale du tableau on place les trois types de désignations utilisées pour désigner les objets présentés dans l'énoncé : verbales, numériques et littérales.

Pour écrire l'équation correspondant aux données du problème qui sont données dans un énoncé, il faut d'abord pouvoir remplir les neuf cases des trois premières lignes. *Car chacune de ces neuf cases correspond à une question qu'il faut explicitement ou implicitement se poser à la lecture de* *l'énoncé.* Elles correspondent au fait qu'il y a trois objets différents qui sont désignés dans l'énoncé, et qui donc peuvent chacun donner lieu à quatre désignations discursives différentes. Ces objets sont évidemment des quantités ou des nombres.

La possibilité d'une double désignation d'un même objet revêt une importance cruciale. Elle répond en effet à l'exigence fondamentale de toute activité mathématique formulée par Frege : disposer de deux désignations (*Sinn*) d'un même objet (*Bedeutung)* pour pouvoir reconnaitre soit leur équivalence référentielle, soit leur non équivalence. Ici, c'est la reconnaissance de cette double désignation référant à un même objet qui donne finalement l'équation. C'est la dernière ligne du tableau séparée des opérations discursives qui pointe cette reconnaissance.

En appliquant cette grille au problème de la bouteille et du bouchon : « *Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?* », on obtient la grille remplie suivante :

	DESIGNATION VERBALE des trois objets du problème	DÉSIGNATION NUMÉRIQUE	RE-désignation LITTÉRALE
1.Désignation directe	Poids de LA BOUTEILLE Poids du BOUCHON Poids DES DEUX	.. .?... … ?... 110	a b (a + b)
Désignation indirecte 2. *descriptive* (LANGUE) 3. *fonctionnelle*(LETTRES)	La bouteille « *pèse .. de plus que* le bouchon	(… + 100)	(b + 100)
4. *Double* désignation *d'un même* objet	*Poids des deux* « la bouteille et son bouchon pèsent 110 g»	110	(a + b) *ou* ((b+100) + b)
EQUIVALENCE RÉFÉRENTIELLE			2b +100 = 110 (EQUATION)

Ce tableau m'a permis de décrypter rétrospectivement comment j'ai essayé de guider Jonathan pas à pas par les sept étapes suivantes :

***1**. Sélection d'un des syntagmes nominaux de l'énoncé (« Le poids du bouchon »)*

***2**. Choix d'une lettre pour désigner la première quantité verbalement désignée (« Désignons par b le poids du bouchon »)*

***3.** Sélection d'un autre syntagme nominal (« Poids de la bouteille »)*

***4**. Utilisation fonctionnelle de la même lettre pour désigner la deuxième quantité (« poids de la bouteille : b+100 »)*

***5.** Sélection du troisième syntagme nominal (« le poids du bouchon et de la bouteille »)*

***6.** Utilisation fonctionnelle de la lettre pour désigner la troisième quantité (« Poids du bouchon et de la bouteille : b+(b+100) »)*

***7.** Reconnaissance de la double désignation de la troisième quantité qui donne finalement l'équation (« 110 g et b+(b+100) »)*

Cette démarche de mise en équation de l'énoncé est évidemment compliquée à comprendre par les élèves. Et l'expliquer ou guider les élèves, pas à pas, question après question, décision après décision, linéairement, comme j'ai tenté de le faire avec Jonathan et même de façon plus habile ne les aidera pas prendre à leur compte l'ensemble de la démarche. Mais elle m'a permis de voir comment à deux moments j'aurais pu réagir plus adroitement.

Le premier moment est celui où après sa réponse immédiate, j'ai fait relire les deux premières phrases de l'énoncé et où, dépité, il a pris conscience de la double contrainte qu'elles imposaient. Pour poursuivre deux possibilités différentes auraient pu être envisagées L'une lui aurait certainement permis de résoudre le problème mais sans passer par une mise en équation. L'autre aurait permis d'amorcer avec Jonathan un travail d'analyse plus approfondi de l'énoncé. La première possibilité aurait été de lui permettre de faire des prospections numériques en mettant des couples de nombres à l'épreuve des contraintes données par l'énoncé. Comme le font parfois les personnes à qui on soumet cet énoncé comme une devinette et qui découvrent que la réponse spontanée est fausse, il aurait pu s'engager dans la méthode dite « par tâtonnement » qui consiste à considérer chacune des deux conditions séparément pour tester différents couples de nombres. On peut penser qu'il aurait ainsi fini par trouver « un » couple de nombres entiers satisfaisant. Il aurait donc trouvé « une » solution du problème sans passer par une mise en équation de l'énoncé. Mais l'objectif (raté) de la séquence n'était-il pas d'initier Jonathan à la résolution par mise en équation de ce type de problèmes dits concrets qu'il rencontrait dans sa classe ? Et au sujet de la méthode dite par tâtonnements une question de rigueur mathématique se pose (même si la situation n'était pas mûre pour que Jonathan se la pose) : elle n'est pas garante de l'unicité de la solution trouvée. Et d'autre part, tous les problèmes de ce type ne se prêtent pas à l'utilisation d'une telle méthode. La deuxième possibilité, aurait été d'initier un travail sur la compréhension des deux phrases de l'énoncé et de leur relation. Par exemple comme me l'a suggéré Raymond Duval, j'aurais pu proposer ou demander une reformulation de la deuxième phrase, en l'ancrant cette fois-ci sur le poids du bouchon : « Le bouchon pèse 100 grammes de moins que la bouteille ». L'inversion d'ancrage aurait permis à Jonathan d'avoir la possibilité de mettre en parallèle différentes versions non congruentes mais équivalentes de cette phrase qui lui posait un problème de compréhension. Et d'ouvrir une discussion sur les poids indiqués dans l'énoncé et ceux non indiqués pour prendre peut-être conscience de la désignation indirecte d'objets.

Le deuxième moment est celui où j'ai suggéré à Jonathan l'idée d'appeler « x le poids de la bouteille ». C'est le moment crucial du choix de l'objet à désigner directement par une lettre pour amorcer le travail de mise en équation. Crucial parce qu'il engage la complexité de la redésignation fonctionnelle qui suivra. En l'occurrence on pouvait redésigner par une lettre soit le poids du bouchon, soit le poids de la bouteille. Si on appelait x le poids du bouchon et sachant que « la bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon » on aboutissait à la redésignation indirecte suivante du poids de la bouteille :

« poids de la bouteille : x + 100 ». Une formulation littérale congruente à la formulation verbale. Si en revanche on appelle x le poids de la bouteille, la désignation indirecte fonctionnelle du poids du bouchon ne sera plus congruente à la désignation descriptive de l'énoncé : « Poids du bouchon : x – 100 ». Pour procéder à la désignation fonctionnelle indirecte ; il faudrait donc envisager ou repérer l'équivalence entre deux formulations : « *La bouteille pèse 100 g de plus que le bouchon* » et *« Le bouchon pèse 100 grammes de moins que la bouteille* ». Un enseignant ou un élève expert choisira comme objet de désignation directe celui qui entrainera le moins de difficulté pour procéder à la redésignation fonctionnelle et ensuite aux opérations à effectuer pour arriver à l'équation finale. En l'occurrence en déclarant à Jonathan « *Et si on appelait x le poids de la bouteille ?* » je n'avais pas fait le choix le plus simple contrairement à Jonathan qui m'avait rétorqué, sans avoir appréhendé la suite des opérations, « *Non, x c'est le poids du bouchon, j'aime mieux…* ». Sans appréhender la suite des opérations en effet comme la suite de la séquence l'a prouvé…

Rectifier ainsi mes interventions n'aurait certainement pas permis à Jonathan de comprendre davantage la démarche de mise en équation du problème. En effet, on voit bien qu'à aucun moment Jonathan n'était en mesure de prendre l'initiative *et que c'est moi qui en fait, faisais le travail*. Cette analyse rétrospective permet de voir les impasses et les limites des conduites de classe menées sur un mode « maïeutique ». Elles ne peuvent pas aider les élèves à devenir eux-mêmes autonomes dans la mise en équations des données d'un problème.

8. Les premiers pas de Jonathan en algèbre

Quel type de tâches élaborer qui puisse véritablement aider Jonathan à comprendre les activités algébriques ? Telle était la question qui se posait à partir des observations et des analyses rapportées jusqu'à présent. Des échanges et des discussions soutenues avec Raymond Duval et François Pluvinage ont permis de concevoir et de mettre à l'épreuve quelques activités spécifiquement cognitives détachées des obligations scolaires immédiates.

Elles étaient bien acceptées par Jonathan, d'autant plus qu'il n'y avait pas d'enjeu de réussite. Il prenait ces activités comme des jeux et avait toujours confiance en moi. Oh bien sûr, on était dans une phase de tâtonnement, et très souvent encore il fallait que j'étaye l'activité de Jonathan par quelques explications. Ses réactions nous permettaient de remettre l'ouvrage sur le métier.
Quelle était la visée principale de ces activités ? C'était de permettre à Jonathan de faire un premier pas essentiel dans l'algèbre élémentaire. Nous avons vu dans la mise en équation du problème du poids du bouchon et du poids de la bouteille, Jonathan ne concevait pas qu'on puisse désigner par la même lettre le poids du bouchon et le poids de la bouteille. Le premier pas essentiel que nous voulions faire faire à Jonathan était de prendre conscience de la désignation fonctionnelle dans l'utilisation d'une lettre pour désigner un nombre par une expression incomplète comme par exemple 2x ou x+2. Pour cela les propositions qui lui ont été faites se présentaient essentiellement sous forme de tableaux à remplir. En voici un aperçu significatif à travers le premier exemple qui lui a été présenté, un aperçu accompagné d'un bref compte rendu des réactions de Jonathan. Ce tableau à remplir comporte deux listes ouvertes de nombres entiers.

Deux nombres entiers successifs	
1	2
2	3
3	4
4	…
5	…
…	…
…	…
107	…
Une lettre ?	Et alors quoi écrire ici ?

Jonathan entame le travail avec le sourire en commençant par la partie numérique :

« Tu veux m'apprendre à compter ? »

Après un rappel de la signification du mot successif, il remplit le tableau correctement pour 4 et 5, se trompe un peu pour la suite en remplissant les colonnes indépendamment l'une de l'autre avec une logique verticale et en se trompant dans le décompte, rectifie en revenant à une mise en correspondance horizontale des nombres des deux listes et il saute à 107 pour mettre en face 108.

Pour la case « *une lettre ?* » correspondant à la première colonne, il propose « x ». Et pour la deuxième avec la case « *Alors quoi écrire ici ?* » il propose immédiatement en souriant « y ». Réponse logique car il en rencontre souvent des « x » et des « y » avec son professeur en classe…. Je lui propose d'utiliser « x » pour la deuxième colonne. Cette fois ci un peu étonné et après un moment de réflexion, il écrit « 1x ». Je lui demande pourquoi.

« *1x veut dire qu'on a ajouté 1 à x* » me répond-il….

Je lui dis que cela veut dire « 1 multiplié par x » en algèbre. Rappelons que pour une expression du type « 3a » Jonathan avait toujours besoin qu'on écrive « 3xa ». Il m'objecte :

« *Je me comprends* ».

Sous-entendant ainsi que pour lui « 1x » veut dire « x+1 ». Il accepte finalement d'écrire « x+1 » pour se plier à l'usage que je viens de lui indiquer... On voit bien là que Jonathan fabrique un code personnel et n'a pas intégré le code commun en usage. Mais malgré cette difficulté d'expression Jonathan a bien *réussi à effectuer une redésignation de la deuxième colonne* avec la lettre utilisée pour désigner la première. C'est là une opération qu'il a bien comprise et qu'il reproduira sans hésitation dans les autres situations du même type qui lui seront proposées (double, carré etc…).

Par la suite j'ai proposé à Jonathan des tableaux incomplets à plusieurs lignes et plusieurs colonnes qui croisaient des expressions numériques, algébriques et des syntagmes nominaux. Pour les compléter il fallait articuler ces différents modes d'expression. En voici deux exemples:

1er exemple

Nombre choisi	*Triple du nombre choisi*	………………………
1	3	4
2	6	7
3	9	10
4	……	13
5	……	……
……	……	……
……	……	……
…….	24	25

x	3 *x*	…….

2ème exemple

Nombre choisi	*Double du nombre choisi*	………………………
1	2	4
3	6	36
2	4	16
4	……	64
5	……	
……	……	……
……	……	……
……	16	…..
……	……	324

x	2 *x*	…….

Jonathan se lançait avec jubilation dans l'aventure. À partir des cases remplies au départ, il proposait des contenus pour des cases vides, les contrôlait, revenait en arrière etc. Tout ceci dans un ordre non déterminé et sans que j'intervienne. Il se montrait heureux, le temps ne comptait plus.

Dans ces derniers mois où j'ai pu l'accompagner, avec ce type de tâches purement sémio-cognitives et radicalement autres que celles qu'il avait rencontrées jusque-là dans sa scolarité, il prenait confiance ! Jonathan commençait à apprendre à marcher en algèbre….

Mais il n'y avait pas que cela. Au cours de cette période, parallèlement à ces activités qui lui donnaient confiance, et toujours en dehors de toute contrainte scolaire, Jonathan a eu des occasions d'amorcer de véritables démarches mathématiques. Ces occasions avaient comme point commun de mettre en jeu le calcul algébrique comme outil de généralisation et de preuve relatives au repérage de régularités numériques[2]. Les énoncés appelaient ainsi de véritables démarches mathématiques en quatre étapes : exploration, conjecture, généralisation et preuve. Ses premiers apprentissages en algèbre et des supports constitués de tableaux lui permettaient d'organiser son exploration et repérer les régularités en jeu et de les traduire par une expression algébrique. Mais il ne voyait pas la nécessité d'aller plus loin. Et si, maladroitement pressé par l'obligation d'achever artificiellement le travail comme lors du problème « du bouchon et de la bouteille », je développais devant lui les calculs à partir de l'expression algébrique pour prouver la conjecture, il m'écoutait d'une oreille distraite. Ce n'était plus son problème… Pourtant en rangeant ses affaires, il me demandait de récupérer mes feuilles, ce qui confirmait son intérêt pour la démarche. Bref, si je continuais à bricoler dans les activités que je lui proposais, j'avais cette fois ci devant moi un Jonathan intéressé, actif. Et fier quand je lui disais que le travail qu'on faisait était comme celui que font les véritables chercheurs en mathématiques. Les mathématiques si honnies au départ de nos rencontres commençaient enfin à prendre un visage plus sympathique et même enthousiasmant pour lui.

9. Fin de l'aventure avec Jonathan. Et la suite (2018-2021) : perspectives pour les enseignants dans leurs classes

Jonathan était en « bonne voie » comme on peut lire parfois dans les bulletins scolaires. Un point de bascule avait été atteint. Et lors d'un des derniers épisodes, François Pluvinage m'avait part de son sentiment :

---

[2] Exemple : « Choisis deux nombres dont la somme est 300 et fais leur produit. Ajoute 7 à chacun d'eux. De combien augmente leur produit ? »

« Formidable, comme le chanterait Stromae ! Et j'avoue que ton compte-rendu et les feuilles écrites par Jonathan m'ont provoqué une certaine émotion : on voit véritablement quelqu'un qui fait son entrée dans le calcul algébrique. Certes, il a fallu au préalable avec ton aide et enfile un équipement sémiotique (somme, différence, ...), ce que les anglo-saxons nommeraient scaffolding, mais ensuite il y va, comme le montre sa production. »

Cette appréciation m'a réjoui et a stimulé Jonathan quand je lui en ai fait part. Mais elle ouvrait un débat. Mon sentiment était en effet moins euphorique et je rejoins Raymond Duval qui la trouvait alors hâtive et prématurée. Certes, Jonathan était en train d'accomplir ses premiers pas, mais il manquait la résolution de problème et la mise en équations et cela en prenant en compte les critères sémio-cognitifs de réussite : réussir tout seul, sans aucune aide, et rapidement.

Mais mon accompagnement s'est arrêté là. Car l'année suivante Jonathan est enfin entré dans un apprentissage en alternance dans une entreprise qui développe du design, situation qui répond bien à sa sensibilité artistique. Je continue à voir Jonathan de temps en temps. Mais la part scolaire restreinte qui subsiste dans son parcours laisse maintenant peu de place et de nécessité à l'algèbre…

Je ne peux m'empêcher néanmoins d'imaginer comment j'aurais pu continuer de cheminer avec Jonathan dans ce domaine. En particulier, pour lui permettre de prendre conscience par lui-même de la manière algébrique de résoudre des problèmes mathématiques ou concrets, en combinant deux approches suggérées par Raymond Duval (2002, 2013). En tout cas, toujours engagé avec un groupe de professeurs de collège au sein de l'IREM de Strasbourg, j'ai rendu compte du cheminement effectué avec Jonathan et partagé toutes mes observations faites au cours de ces rencontres, ainsi que les supports des tâches innovantes expérimentées à ces occasions. Mais était-ce une bonne base pour entamer des prospections et des essais en classes ?

Raymond Duval me mettait en garde sur les difficultés d'une telle démarche qui ne se déroule plus dans le cadre d'entretiens individuels. La poursuite d’une recherche clinique serait difficile voire impossible. Donner des fiches de travail à des collègues ne permettrait pas de comprendre les réactions des élèves et d’y réagir pour accompagner leurs cheminements. Effectivement, en classe comment, sans entendre Jonathan dire que « *1x veut dire qu’on a ajouté 1 à x* » et « *Je me comprends* » saisir qu’il avait bien pris conscience de l’opération de désignation fonctionnelle avec une même lettre mais avait développé pour cela un code personnel « 1x » pour désigner le successeur d’un nombre entier « x » ? De façon générale les tâches que l’on pouvait proposer aux élèves pour les accompagner dans les premiers pas en algèbre, sur le modèle de celles que j’avais proposées à Jonathan, demanderaient un accompagnement individualisé. Raymond Duval faisait à ce propos la comparaison avec ce qui est réellement requis dans l'apprentissage de la lecture, et ajoutait que les conditions cognitivo-didactiques seraient consciemment ou inconsciemment difficiles à accepter par beaucoup d'enseignants.

François Pluvinage était moins réservé et écrivait en mai 2018 :

> *« Peut-être suis-je trop optimiste, mais pour moi maintenant c'est bon. Les collègues enseignants sont-ils prêts à procéder à des essais en classe, moyennant d'éventuels aménagements ? ».*

Et c’est conscient de ces difficultés, qu’en 2018 avec Anne Schultz, Audrey Candeloro, Hélène Chilles Brix et Pauline Wiederhold, professeures de collège et depuis avec d’autres enseignantes de collège qui nous ont rejoints, nous avons relevé ce défi dans le cadre d’un groupe IREM de Strasbourg intitulé « Apprentissages algébriques en collège » : faire faire à chacun des élèves de leurs classes la même évolution que celle faite par Jonathan. Mais d’une manière qui inclut la résolution de problèmes et de manière plus rapide, sans toutefois abandonner les objectifs globaux visés non pas en fin d’années scolaires, mais à la fin du Collège. Jusqu’à présent, malgré nos tâtonnements, les différences de nos vécus et nos convictions d’enseignants, les résultats s’avèrent encourageants. Il nous faudra probablement autant de temps qu’il m’en fallu avec Jonathan. Mais nous pensons pouvoir bientôt communiquer dans un document ce qui est une aventure partagée entre nous et avec nos élèves.

Bibliographie

Adjiage, R., Pluvinage, F. (2012) Strates de compétence en mathématiques. *Repères-IREM* 88, 42-72.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Dans J.P. Drouard et M. Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (p.67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT* (Trad. en Portugais M. T. Moretti) v. 8.1, 1-45.

Duval R., Campos T. M.M., Barros, L.G. Dias, M.A. (2015). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 21, 117-152.

Duval, R. (2019) Écriture et pensée mathématique : le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. *Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie. Didactique des mathématiques* (Ed. M Maurel) Academia.edu, 105-139.