

ESCOLARIZAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO SECUNDÁRIO: uma análise de livros didáticos em três períodos do século XX

SCHOOLING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN SECONDARY EDUCATION: an analysis of textbooks in three periods of the 20th century

Mariana Figueira Siqueira¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5539-0964>


Lincoln Garcia David²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8158-9667>

Daniel José de Paula³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4881-9456>

Maria Cristina Araújo de Oliveira⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3346-1578>

Submetido: 20 de julho de 2020

Aprovado: 06 de setembro de 2020

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar três livros didáticos de Geometria Analítica ou conteúdo Geometria Analítica, publicados no Brasil em três diferentes períodos do século XX, na perspectiva de compreender historicamente como esse tema se configura como saber do ensino secundário. O trabalho iniciou-se com uma catalogação de livros didáticos, a partir da qual foram selecionadas as obras que foram analisadas, levando em conta aspectos pré-estabelecidos. Foram observadas características representativas dos diferentes momentos, considerando o contexto histórico e social em que se inserem, como a linguagem matemática que se altera com a intensificação do uso da simbologia; a diminuição no tratamento das curvas transcendentais com o passar do tempo e quanto aos exercícios e problemas, que vão adquirindo outras possibilidades que incluem a demonstração além daqueles de resolução numérica e de construção.

ABSTRACT/RESUMEN/ RÉSUMÉ

The present work aims to analyze three textbooks of Analytical Geometry or content Analytical Geometry, published in Brazil in three different periods of the 20th century, with the perspective of historically understanding how this theme is configured as secondary education knowledge. The work started with a cataloging of textbooks, from which the works that were analyzed were selected, taking into account pre-established aspects. Representative characteristics of the different moments were observed, considering the historical and social context in which they are inserted, as the changes in mathematical language improving the symbolic language; the decrease in the treatment of transcendent curves over time; exercises and problems, which acquire other possibilities that include demonstration and construction in addition to those of numerical resolution.

¹Licencianda da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Dr. Constantino Paleta, 10, apartamento 402, Centro, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP: 36015-450. E-mail: mariana3@ice.ufjf.br.

²Licenciando da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço para correspondência: Rua dos Guararapes, 60, sobrado, Benfica, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP: 36090-370. E-mail: lincoln@ice.ufjf.br.

³Licenciando da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Dimas Bergo Xisto, 170, apartamento 202, São Pedro, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP: 36037-510. E-mail: danieljose@ice.ufjf.br.

⁴Professora Associada do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, MG, Brasil. Pesquisadora do GHEMAT – Brasil. Endereço para correspondência: Rua Doutor Vilaça 33, Poço Rico, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP: 36020-030. E-mail: crisrina.oliveira@ice.ufjf.br.

Palavras-chave: Geometria Analítica; Ensino Secundário; História da Educação Matemática.

Keywords: Analytical Geometry; Secondary Education; History of Mathematics Education.

1 - Introdução

A pesquisa em História da educação matemática, pensada numa perspectiva de articulação com a formação de professores que ensinam matemática, e tomada a partir de questões postas na contemporaneidade permite desnaturalizar processos e dinâmicas relativos ao ensino e à aprendizagem em matemática; revelando contradições, idas e vindas, releituras, reorganizações e reinterpretções que só se tornam compreensíveis por meio da investigação histórica. Nesse sentido, a Geometria Analítica como componente curricular é um tema particularmente interessante por sua trajetória histórica de apropriação primeiramente pelo ensino superior, a partir de sua criação como campo investigativo pelos trabalhos de Descartes e Fermat no século XVII. A partir do final do século XIX já se verifica a presença da Geometria Analítica nos programas de ensino do Colégio Pedro II, ministrada no 4º ano do secundário, que na época era constituído de 7 anos (BELTRAME, 2000).

Assim, analisar o processo histórico de escolarização da Geometria Analítica no ensino secundário brasileiro constitui-se num investimento de pesquisa de longa duração, que permite diferentes trabalhos acadêmicos em níveis de iniciação científica, mestrado, doutorado, entre outros.

Entendemos por escolarização da Geometria Analítica a construção e objetivação de saberes próprios para o ensino e a aprendizagem desse tema no secundário. Tomando como referência, a constituição de *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* de Hofstetter e Schnueuwly (2017), a elaboração particular da Geometria Analítica para o secundário é resultado de processos e dinâmicas de produção de saberes que tem relação com o campo da Geometria Analítica em termos acadêmicos ou ainda com o ensino superior, e também, saberes específicos para o ensino no secundário.

A Geometria Analítica na perspectiva da História da Matemática é um marco, a partir do século XVII, no processo de legitimação dos procedimentos algébricos, em nível de igualdade aos geométricos historicamente consolidados. A escolarização desse saber se insere numa tendência internacional e recorrente de incluir conteúdos matemáticos, tratados inicialmente somente no ensino superior, no secundário de modo a aproximar os estudos matemáticos nesses dois níveis.

Assim, com base em um projeto maior que orienta-se pela questão: *como se caracteriza o processo de escolarização da Geometria Analítica no Brasil a partir do século XIX?*, foram desenvolvidos 3 projetos de iniciação científica cujos resultados deram origem ao texto ora proposto:

Projeto 1 – Circulação da Geometria Analítica no Brasil no período da Primeira República, coordenado pela professora Maria Cristina Araújo de Oliveira;

Projeto 2 – Circulação da Geometria Analítica no ensino secundário do Brasil, décadas de 1930 a 1950, inclusive, coordenado pelo professor José Manuel Matos;

Projeto 3 – A Matemática Moderna e a Geometria Analítica no ensino secundário, coordenado pela professora Maria Cristina Araújo de Oliveira.

Neste artigo o objetivo é apresentar os resultados das análises de 3 livros didáticos de Geometria Analítica ou contendo Geometria Analítica, que caracterizam também 3 períodos distintos da educação nacional: o primeiro deles corresponde à Primeira República, o segundo compreende as Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema e o terceiro o Movimento da Matemática Moderna.

A perspectiva metodológica adotada corresponde a uma etapa no desenvolvimento da pesquisa de *recompilação de experiências docentes*, que

envolve a seleção e separação de informações relatadas em revistas pedagógicas; organizadas em livros didáticos e manuais pedagógicos; normatizadas em leis do ensino; contidas em documentação pessoal de alunos e professores; materializadas em dispositivos pedagógicos para o ensino dentre outros tipos de documentação passíveis de evidenciar informações sobre o trabalho pedagógico dos professores. O conjunto obtido de tal procedimento de pesquisa representa uma coleção de conhecimentos dispersos num dado tempo histórico (VALENTE, 2018).

Assim, os resultados das análises realizadas trazem contribuição nesse processo de *recompilação* para o ensino de Geometria Analítica.

Pela presença da Geometria Analítica tanto no ensino superior quanto no secundário e por sua configuração neste último em relação direta com sua inserção no primeiro, o movimento de pesquisa de iniciação científica se iniciou com um levantamento de livros didáticos de Geometria Analítica em diferentes instituições brasileiras.

2 – Busca e catalogação de livros de Geometria Analítica (1889 a 1980)

O levantamento dos livros didáticos teve como critérios iniciais conter Geometria Analítica no título e ser publicado no Brasil entre os anos de 1889 e 1980. Foram analisados

repositórios e bibliotecas virtuais de todo o Brasil, principalmente de universidades. A busca abrangeu as seguintes instituições: Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Universidade de São Paulo (USP), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Fundação Biblioteca Nacional (FBN), Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), tendo como foco os maiores acervos do país (USP e UFRJ)¹ e os principais de Minas Gerais (UFJF, UFMG, UFOP). Esses livros foram catalogados com título, autor, data, local de publicação, editora, repositório e público alvo. Observou-se que muitos possuíam mais de uma edição, como acontece atualmente.

A escolha por catalogar inicialmente e analisar posteriormente especificamente livros didáticos se deu devido à importância dos mesmos para o estudo histórico do processo de escolarização da Geometria Analítica. Segundo Valente (2008) o que nos foi deixado acerca das práticas da educação matemática de outros tempos, suscita perguntas que transformamos livros didáticos em fontes privilegiadas para a pesquisa histórica. “A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, é algo que ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica” (VALENTE, 2008, p. 141).

Com o objetivo de entender com mais clareza a publicação nacional sobre Geometria Analítica entre 1889 e 1980, foram feitas análises quantitativas das obras encontradas por: intervalo de tempo da data de publicação e instituição onde a obra foi encontrada; de obras e autores com mais edições publicadas; de livros por tipo (livro-texto, com foco na teoria, livro de exercício, voltado para problemas e exercícios; ou livro misto, que possui teoria e exercício) e por público alvo (ensino secundário ou superior), totalizando 160 obras distintas. A seguir são apresentadas as quantidades referentes a cada instituição e intervalo de tempo.

¹ Segundo: ERMAKOFF, George. **Bibliotecas Brasileiras**. Traduzido por Brown, Luis. Rio de Janeiro: George Ermakoff Casa Editorial, 2015.

Tabela 1 - Quantidade de livros por intervalo de tempo e instituição

Intervalo	UFJF	USP	UFMG	UFRJ	FBN	UFOP	Total
Sem data ou 19--	2	4	2	1	-	-	9
1889 – 1930	-	-	-	-	-	-	-
1931 – 1959	8	15	10	11	3	5	52
1960 – 1980	26	52	37	34	9	5	163
Total	36	71	49	46	12	10	224

Fonte: elaborada pelos autores

Observa-se um total de 224 livros, isso ocorre devido ao fato de que um ou mais exemplares podem estar presentes em mais de uma instituição. A USP foi instituição com mais exemplares encontrados e os anos 1960 - 1980 compreende o período com mais publicações. Já no Quadro 1 temos a contagem de autores com mais publicações dentro do período em análise.

Quadro 1 - Obras e autores mais publicados

Título	Autor	Nº de volumes
Geometria analítica plana e no espaço	Kindle, Joseph Henry	9 – 1959, 1962, 1965, 1972, 1974, 1976, 1977, 1978 e 1979
Elementos de geometria analítica	Peixoto, Roberto	7 – 1938, 1941, 1945, 1951, 1955, 1957 e 1963
Matrizes vetores geometria analítica: teoria e exercícios	Caroli, Alesio de; Callioli, Carlos A. e Feitosa, Miguel Oliva.	5 - 1968, 1974, 1976, 1978 e 1980
Problemas e exercícios de geometria analítica no plano	Pinto, Herbert F.	5 - 19-- , 1900, 1950, 1956 e 1967
Matemática superior,	Quinet, Jean	5 – 1966, 1967, 1968,

cálculo diferencial e integral, geometria analítica plana		1969 e 1970
Geometria Analítica	Smith, Percey F.	5 – 1954, 1957, 1960, 1964 e 1967
Álgebra linear e geometria analítica	Steinbruch, Alfredo	5 – 1970, 1972, 1973, 1975 e 1979

Fonte: elaborado pelos autores

Joseph Henry Kindle aparece em nossa pesquisa como o autor com mais edições publicadas de um livro com Geometria Analítica no título. Kindle foi um professor de matemática francês e suas obras, traduzidas para português, circularam no Brasil entre as décadas de 1950 e 1970. Outro autor que teve muitas edições de um mesmo exemplar, sendo 7, foi o professor do Instituto de Educação do Rio de Janeiro, Roberto Peixoto, que apesar de ser um número menor de edições com relação à Kindle, teve seus livros ativos por mais tempo: entre o final da década de 1930 e início da década de 1960.

Na sequência, 5 obras tiveram 5 edições publicadas, sendo a mais longa de Herbert F. Pinto: *Problemas e exercícios de geometria analítica no plano*, que circulou entre 1900 e 1967. Porém, essa duração de 67 anos gerou uma dúvida sobre a veracidade e investigamos a respeito, por ser um exemplar relevante para compor as análises dos livros (essa incerteza será abordada no próximo tópico deste artigo). Das outras 4 obras com 5 edições, quatro circularam mais ou menos nos mesmos períodos, entre as décadas de 1960 e 1970, que são: *Matrizes, vetores e geometria analítica: teoria e exercícios*, dos autores brasileiros Alesio de Caroli, Carlos A. Callioli e Miguel Oliva Feitosa, cuja obra ainda tem fácil acesso em formato *pdf* encontrado ao pesquisar na plataforma *google* e chegou a ter uma edição na década de 1980; *Matemática superior, cálculo diferencial e integral, geometria analítica plana*, de Jean Quinet, autor francês; *Geometria Analítica* de Percey F. Smith, matemático norte-americano que teve edições publicadas ainda na década de 1950 também. Por fim, o livro de título *Álgebra linear e Geometria Analítica* de Alfredo Steinbruch, professor do Instituto de Matemática da PUCRS (Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul), circulou em 5 edições apenas na década de 1970.

A influência de autores estrangeiros nas publicações de livros didáticos em território nacional é marcante desde a época do Brasil Colonial. As primeiras publicações de livros didáticos no Brasil, relativamente à matemática, se deram ainda nesse período, como

resultado da experiência de professores portugueses em: Aulas de Fortificação e de Artilharia. A matemática, em especial a geometria, era necessária para os novos engenheiros, formados em território nacional, aprenderem a fortificar e proteger a Colônia (VALENTE, 2007).

Sobre Geometria Analítica as obras em língua estrangeira formaram a maioria das circulantes em território brasileiro até a década de 1940 (SOARES, 2013). Aqui (Quadro 1) onde vemos nomes estrangeiros junto com os nomes nacionais ganhando destaque no número de reedições de exemplares publicados ao longo do tempo, podemos observar essa influência.

Depois de catalogados foi possível classificar a que níveis de ensino se destinavam as obras, os dados são apresentados na tabela 2.

Tabela 2² - Quantidade de livros por tipo e por público alvo

Público alvo	Livros-texto	Livros de exercícios	Livros mistos	Não identificado	Outras áreas³	Total
Ensino secundário	38	13	–	11	–	62
Ensino superior	20	–	–	2	–	22
Sem destinação específica	57	9	6	2	2	76
Total	115	22	6	15	2	160

Fonte: elaborada pelos autores

Observamos, entre os livros em que foi possível estabelecer a destinação, que existe um número maior de publicações voltadas para o ensino secundário. Notamos também que pelos títulos dos livros, poucas vezes apareciam outros campos da matemática indicados numa mesma obra com Geometria Analítica. Por exemplo, o aparecimento de “álgebra linear”, “cálculo” e “cálculo vetorial” ocorreu em 5, 3 e 2 livros, respectivamente, além de apenas um exemplar contendo “aritmética”.

Os livros com “cálculo” no título, encontrados na catalogação, foram publicados entre 1958 e 1967. As duas obras contendo “cálculo vetorial” apareceram com duas edições cada, compreendendo os anos de 1973 até 1980. Já os livros com “álgebra linear” em seus nomes aparecem entre 1967 e 1980, sendo que um também teve mais de uma edição, com 5 no total,

²A tabela 2 foi construída com base nas informações contidas nos registros das bibliotecas e/ou nos títulos dos livros, logo trata-se de um levantamento limitado, não foi possível olhar detalhadamente cada obra.

³Foram encontrados 2 livros das áreas de fotografia e odontologia – *Geometria analítica da fotografia aérea*, de Earl Frank Church, e *Estudo da morfologia do arco dentário decíduo, tipo I e II de Baune, pela geometria analítica: contribuição para seu estudo*, de Marli Almeida.

citado no Quadro 1. Não sabemos como era trabalhada a relação entre Álgebra Linear e Geometria Analítica nesses exemplares, se aparecia de forma mais direta ou se cada área tinha seu espaço separado nas obras, mas podemos ver que pelas datas só foi aparecer mais no fim do Movimento da Matemática Moderna.

Dessa forma, esses exemplares retomavam a tradição histórica da matemática ser trabalhada de forma separada, ou seja, as áreas: aritmética, álgebra e geometria, incluindo a trigonometria, ainda apareciam em obras distintas, mesmo com a junção dessas áreas em uma disciplina Matemática no ensino secundário resultante de proposta por Euclides Guimarães de Medeiros Roxo, catedrático e diretor do Colégio Pedro II do Rio de Janeiro. Roxo, propôs a criação da disciplina Matemática, que foi implementada primeiramente no Colégio Pedro II a partir de 1929, e posteriormente, promulgada para o Brasil inteiro na Reforma Francisco Campos de 1931 (ALVAREZ, 2004).

3 – A seleção de livros para análise

Os livros escolhidos para as análises correspondem aos períodos históricos referentes a cada pesquisa individual, cuja proposta inicial era escolhê-los dentro do levantamento feito, foi também dada prioridade às obras de autores brasileiros.

Para o primeiro período (1889 - 1930) o único livro, dentro do levantamento, com publicação nesta faixa era: *Problemas e exercícios de geometria analítica no plano* de Herbert F. Pinto, datado de 1900 e encontrado no acervo da biblioteca da UFMG. Porém, o mesmo autor possui publicações de mesmo título em 1950, 1956 e 1967, obras encontradas na UFMG e USP, uma publicação em 1959 com mesmo título, mas acrescida de um subtítulo (*questões propostas para os concursos de habitação as escolas superiores e cursos colegiais*), encontrada na USP e UFOP e ainda um exemplar na UFRJ, UFJF e UFMG onde na data consta 19--.

Essas informações levantaram a suspeita de um erro na data do exemplar de 1900. Assim, tendo acesso ao livro na UFMG, este foi escaneado para que se pudesse analisar a fim de verificar a data de publicação. Foi então possível constatar que não era uma obra publicada em 1900: o tipo de impressão não condizia com o período e em seu interior foram encontrados exercícios da Escola Nacional de Engenharia, com datas posteriores a 1900.

Visto que não foi encontrada obra correspondente ao primeiro período histórico dentro do levantamento realizado e tendo a prioridade de analisar exemplares que possuíssem o conteúdo de Geometria Analítica e pertencessem ao período temporal do projeto, foi

escolhido o livro *Apontamentos de Geometria*, de Antônio Ferreira de Abreu⁴, publicado em 1921. A escolha desse livro se deu pelos orientadores do projeto, por conter Geometria Analítica como conteúdo, mesmo não constando em seu título.

Para o segundo período (1930 - 1950) e o terceiro (1960 - 1980) foram facilmente encontrados livros de autores brasileiros dentro do levantamento realizado, contudo os livros selecionados para análise tiveram maior utilização nas escolas em nível secundário.

Foi escolhido para o segundo período o exemplar *Geometria Analítica - Primeira parte - Geometria Analítica no espaço de duas dimensões*, de Júlio César de Mello e Souza⁵, publicado em 1943, por sua publicação datar de um período de transição entre as Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema, que visavam nortear a educação brasileira.

Foi selecionado o livro *Vetores, geometria analítica e álgebra linear, um tratamento moderno*, de João Pitombeira de Carvalho⁶, publicado em 1975, para o terceiro período. Seu subtítulo nos levou a crer que em seu interior existiriam características do Movimento da Matemática Moderna, movimento de forte influência no período em análise.

Os aspectos levados em conta para as análises foram: proposta da obra no prefácio, onde a Geometria Analítica é apresentada, como é a exposição do conteúdo, quais os tipos de exercícios e quais os temas, se há uso de problemas, referência ao cotidiano, e, quando possível, estabelecer relação com exemplares atuais.

3.1 - Primeiro Período (1889 – 1930)

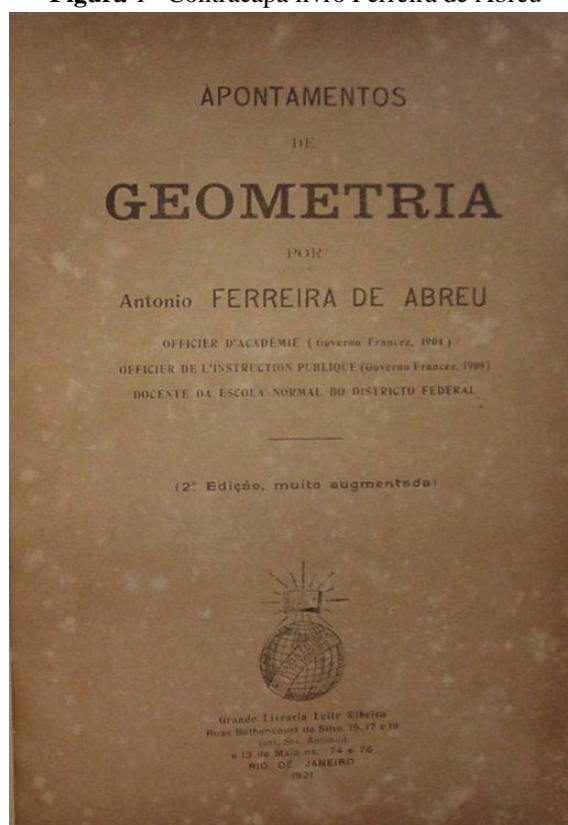
O livro analisado está inserido no período da República Velha ou Primeira República (1889 – 1930) e seu título é *Apontamentos de Geometria*, de autoria de Antônio Ferreira de Abreu. Foi publicado no Rio de Janeiro, em 1921, pela editora Grande Livraria Leite Ribeiro, sendo esta a 2ª edição (figura 1). Os orientadores cederam a versão escaneada da obra para essa análise.

⁴Docente da Escola Normal do Distrito Federal, Officier d'Académie do governo francês em 1904 e Officier de l'instruction publique do governo francês em 1909.

⁵Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, foi um professor de matemática do Colégio Pedro II, e escritor do modernismo brasileiro, e, através de seus romances infanto-juvenis, foi um dos maiores divulgadores da matemática do Brasil.

⁶Professor associado ao Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (entre os anos de 1968 e 2009), onde adquiriu grande experiência no ensino de matemática para os alunos recém-chegados à Universidade.

Figura 1 – Contracapa livro Ferreira de Abreu



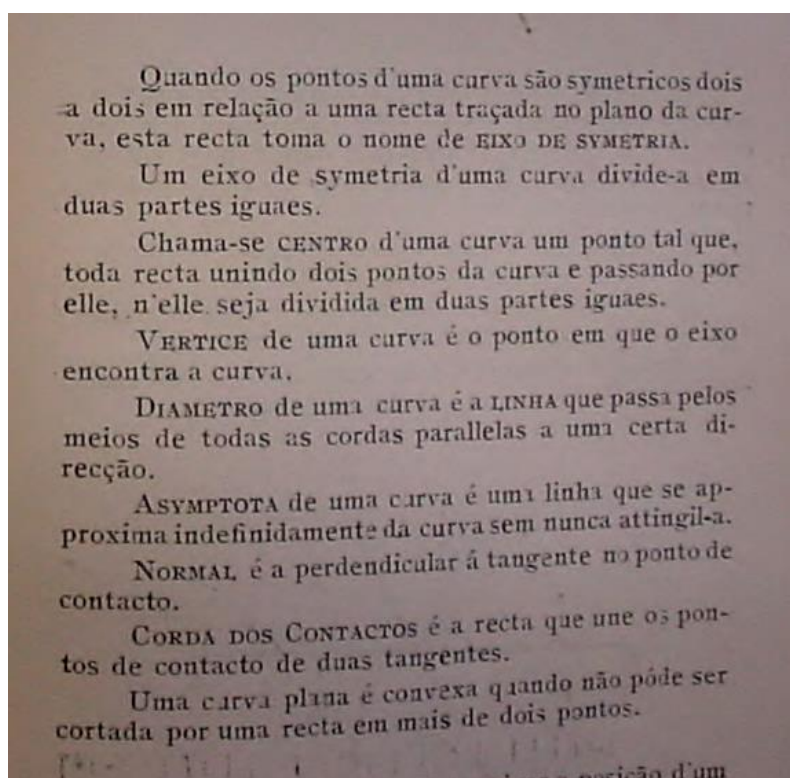
Fonte: Abreu (1921, contracapa)

O livro está dividido em oito partes e aborda a geometria plana de maneira dedutiva, com definições e teoremas demonstrados e ilustrados com figuras. Traz também o conteúdo de linhas proporcionais, semelhança de triângulos, figuras homotéticas, polígonos semelhantes, cálculo de π , construções geométricas, perímetros e áreas, geometria espacial, noções de geometria analítica, cônicas e curvas notáveis. Apresenta também numerosos problemas propostos, sem respostas. No final do livro traz problemas de geometria dados em provas escritas no Colégio Pedro II, em 1919 e 1920.

O livro não possui prefácio que identifique o seu público-alvo. Entretanto, a grande quantidade de problemas nos sugere que ele era destinado a alunos do secundário como uma preparação para a Matemática do ensino superior.

O autor usa teoremas e corolários para apresentar todo o conteúdo de sua obra. Na introdução de algumas partes do livro, que é dividido em oito partes, o autor destaca as definições que são úteis para o entendimento do texto. Por exemplo, na oitava parte da obra apresenta-se a Geometria Analítica e em sua introdução estão as definições de eixo de simetria, centro, vértice, diâmetro, assíntota e normal de uma curva, corda dos contatos, curva plana convexa, coordenadas, entre outras (figura 2). Observa-se que o termo “quadrante”, tão comum atualmente, não é usado na apresentação do plano cartesiano.

Figura 2 –Definições da parte de Geometria Analítica

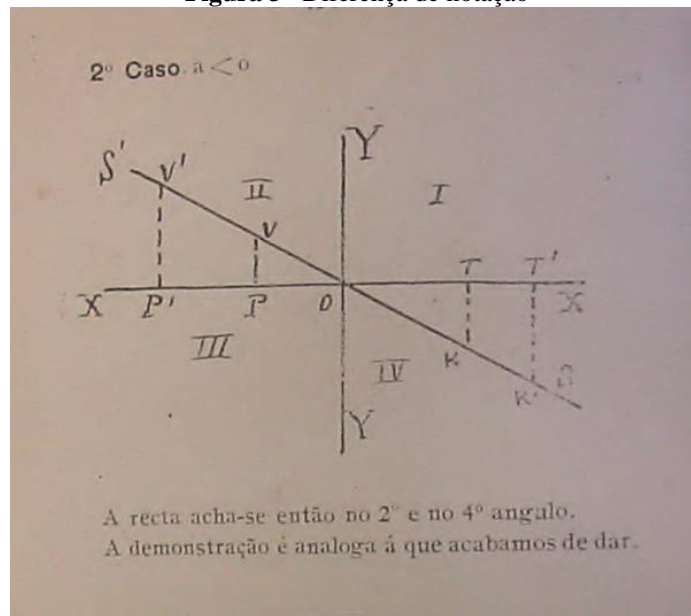


Fonte: Abreu (1921, p. 449)

A Geometria Analítica da obra aborda o estudo de reta, círculo, elipse, hipérbole, parábola e algumas curvas notáveis como a hélice, cissoide, cicloide, epicicloide e hipocicloide.

No capítulo do estudo de retas, o autor apresenta os gráficos da equação de uma reta quando $a > 0$, $a < 0$ e não faz o estudo quando $a = 0$. Observa-se o termo 'ângulo' para se referir aos quadrantes do plano cartesiano. Na figura 3 em que $a < 0$ a reta encontra-se no 2º e no 4º ângulo.

Figura 3 –Diferença de notação



Fonte: Abreu (1921, p. 454)

Ao final deste capítulo, observa-se a definição do coeficiente a como ‘coeficiente angular’ da reta e do coeficiente b como ‘ordenada no ponto origem’. Não fica evidente a relação que existe entre os coeficientes a quando as retas são perpendiculares ou paralelas. Veja também que existe a definição do coeficiente a como tangente trigonométrica. No texto lê-se:

O coeficiente b chama-se ordenada no ponto origem.
O coeficiente a de x na equação

$$y = ax + b$$

chama-se coeficiente angular da reta

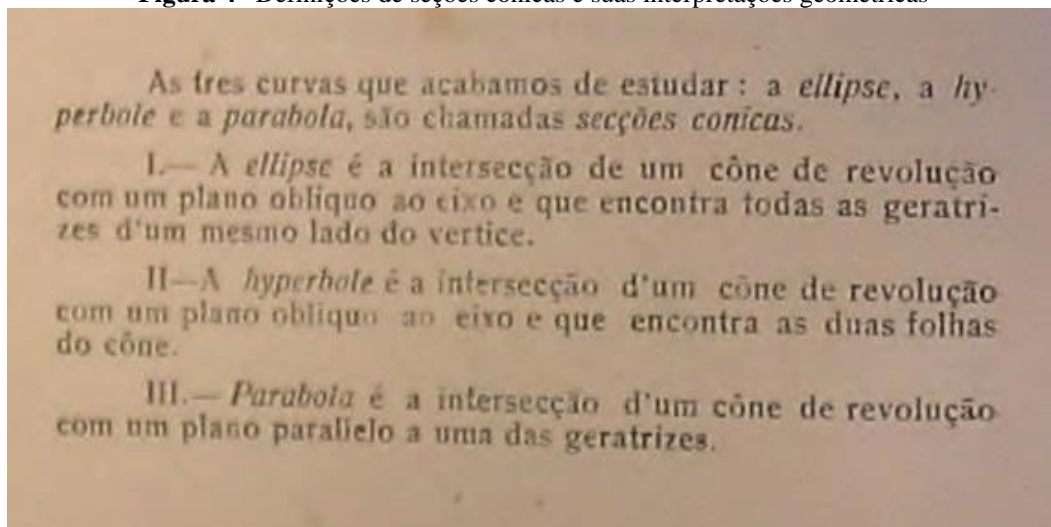
(...)

O coeficiente angular de uma reta é pois a tangente trigonométrica do ângulo que faz a direção positiva do eixo dos X com a paralela a reta dada traçada pelo ponto origem
(Abreu, 1921, p. 455).

O capítulo do estudo do círculo apresenta as equações da circunferência na origem e fora dela. Os capítulos com as seções cônicas são os mais interessantes, elaborados e extensos. A equação de cada seção cônica – termo observado apenas no final do capítulo, são mais usados outros como ‘curva’ e ‘lugar geométrico’ para referenciá-las – aparece depois de muitos teoremas. A equação da elipse, por exemplo, a primeira cônica apresentada, aparece depois de dez teoremas! Os capítulos de reta, círculo e curvas notáveis são breves, não possuem tantos teoremas e problemas como nos capítulos das seções cônicas. Na figura 4,

observa-se o uso do termo “seções cônicas” no final do capítulo e das definições delas como interseção de um cone com um plano.

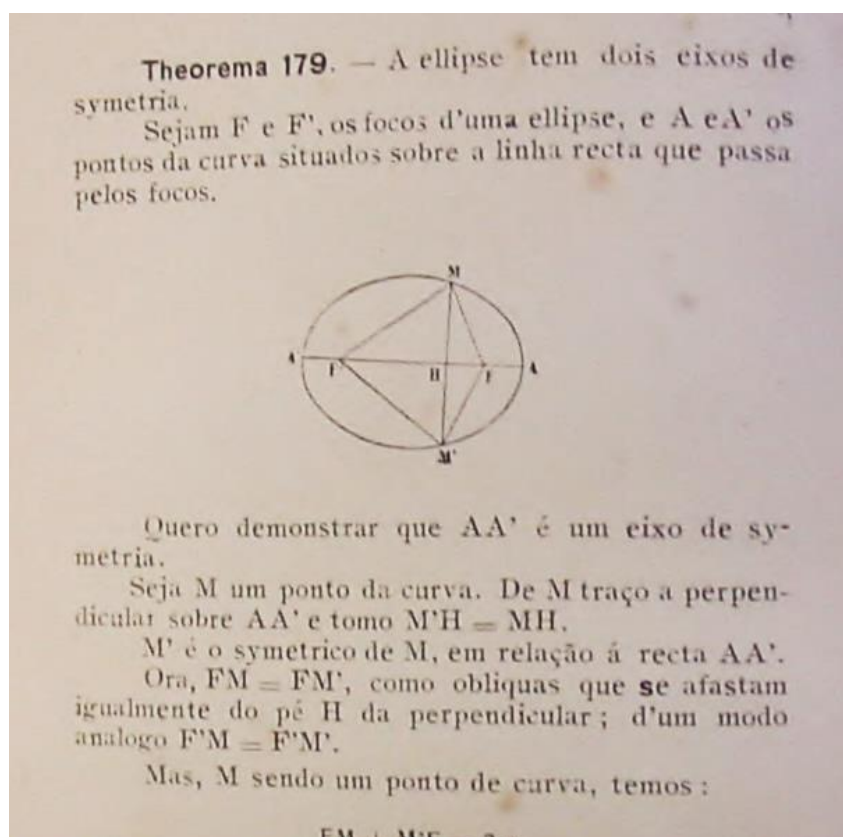
Figura 4 – Definições de seções cônicas e suas interpretações geométricas



Fonte: Abreu (1921, p. 498)

Os teoremas da parte de Geometria Analítica são demonstrados com auxílio de técnicas de desenho com régua e/ou compasso, ou seja, traçam-se perpendiculares, arcos, pontos médios etc. Na figura 5, foram construídos perpendicular e ponto simétrico na demonstração do teorema, por exemplo.

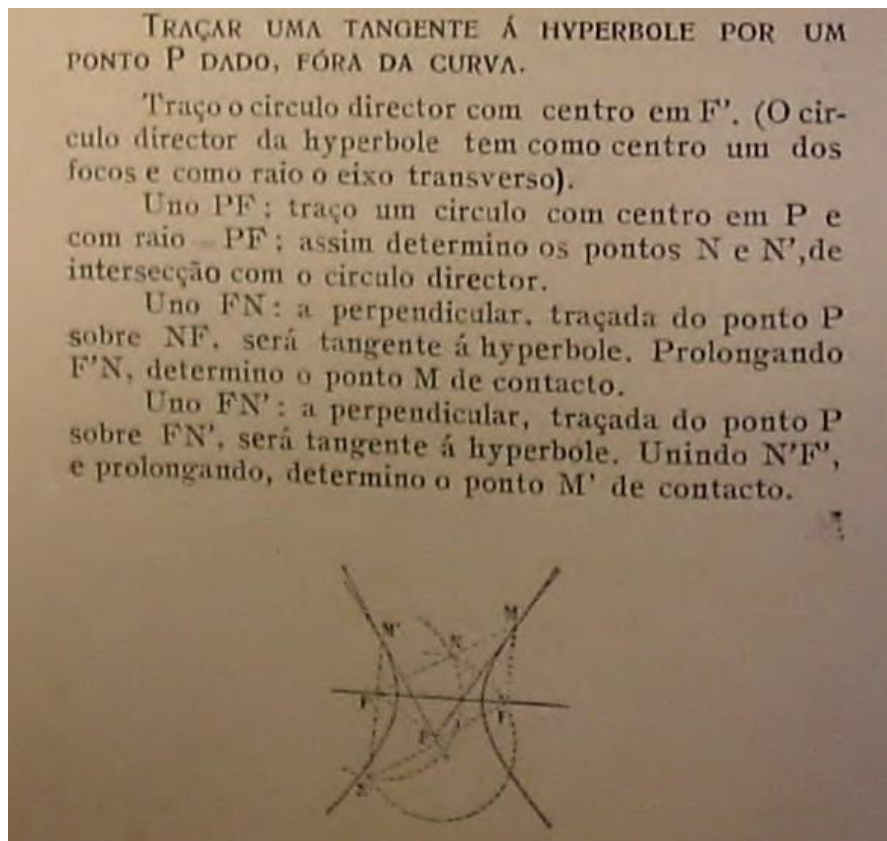
Figura 5 – Uso de técnicas de desenho geométrico na demonstração de teoremas de Geometria Analítica



Fonte: Abreu (1921, p. 460)

O autor apresenta para fixação dos conteúdos apenas o que ele chama de "problemas" que são de 3 tipos. Os primeiros tipos são problemas que acompanham a apresentação dos conceitos, definições e teoremas, com alguns resolvidos e outros não e que aparecem em poucas partes do livro. O autor preferiu não usar a palavra "problema" ou outra como "exercício" na parte de Geometria Analítica (figura 6), mas nas outras partes ela aparece. Geralmente são problemas que consideramos de valor numérico ou construção. Os problemas de Geometria Analítica são todos de construção.

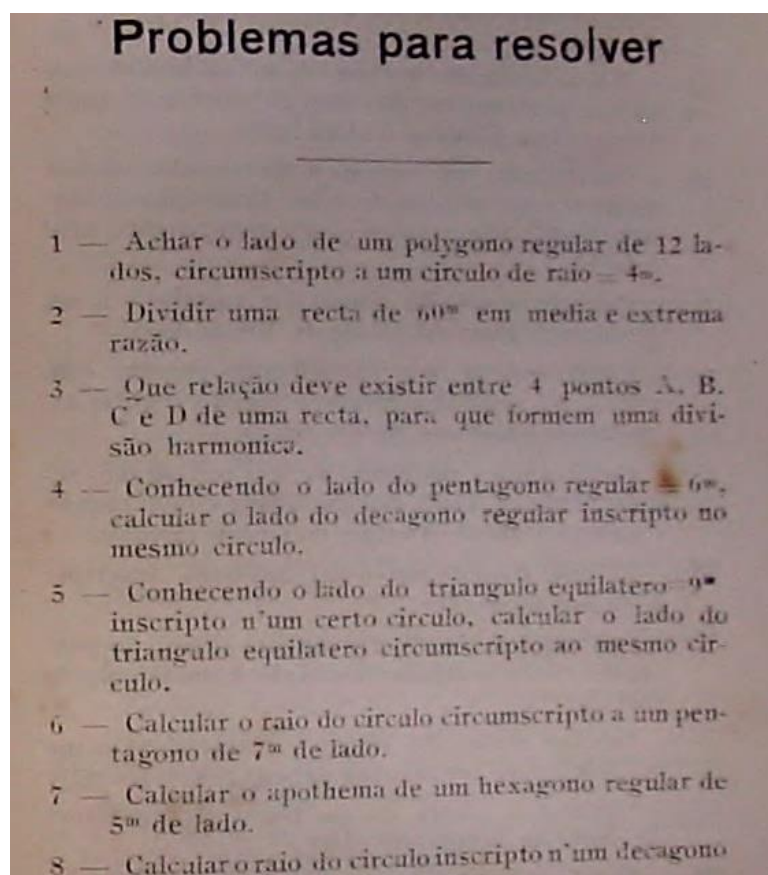
Figura 6 - Problema de construção de Geometria Analítica



Fonte: Abreu (1921, p. 484)

Os segundos tipos são o que o autor chama de “problemas para resolver” no final de algumas partes do livro, e como o próprio nome sugere são deixados para serem resolvidos e não estão presentes na parte de Geometria Analítica. Geralmente são o que consideramos problemas de valor numérico (figura 7).

Figura 7 – Problemas para resolver



Fonte: Abreu (1921, p. 221)

Por fim, os terceiros tipos são o que o autor chama de “problemas dados em prova escrita no Colégio Pedro II”, dos anos de 1919 e 1920 no final do livro, seguem o mesmo padrão dos “problemas para resolver”, e possuem todos os conteúdos das partes anteriores menos da parte de Geometria Analítica. É possível conjecturar, com essa omissão de problemas de Geometria Analítica, que esse tema era visto com menos ênfase, como uma introdução para a Matemática do ensino superior.

A linguagem matemática usada é bem formal, não existem contextos e exemplos do cotidiano ou aplicações. A apresentação dos conteúdos, por teoremas e corolários, deixa o livro mais parecido com um livro atual do ensino superior do que com um livro do ensino médio, que corresponde ao secundário da época. É possível que esse fosse um tipo de linguagem comumente usada nos livros didáticos da época e talvez ela não fosse um problema, visto que a educação brasileira era elitista, logo supostamente bem letrada.

Durante a Primeira República, um dos sistemas educacionais mais comuns eram os colégios. Os colégios tiveram origem com a chegada dos jesuítas, que tiveram grande influência na introdução da cultura letrada quando a oralidade ainda predominava. A escrita

deixou de ser exclusividade dos religiosos, juízes e comerciantes e tornou-se um elemento de distinção de classe, um privilégio da burguesia (NUNES, 2000). O principal colégio desse período era o Colégio Pedro II, situado na então capital do país, e as primeiras inovações de currículo no ensino secundário eram lá introduzidas para então serem disseminadas para os demais colégios. O currículo do Colégio Pedro II era marcado pelo enciclopedismo, com o predomínio dos estudos clássicos e os estudos científicos (incluindo as ciências exatas) em menor número (NUNES, 2000). Paralelo a isso, o currículo nesse período trazia os conteúdos matemáticos divididos por áreas e não existia o termo Matemática como disciplina.

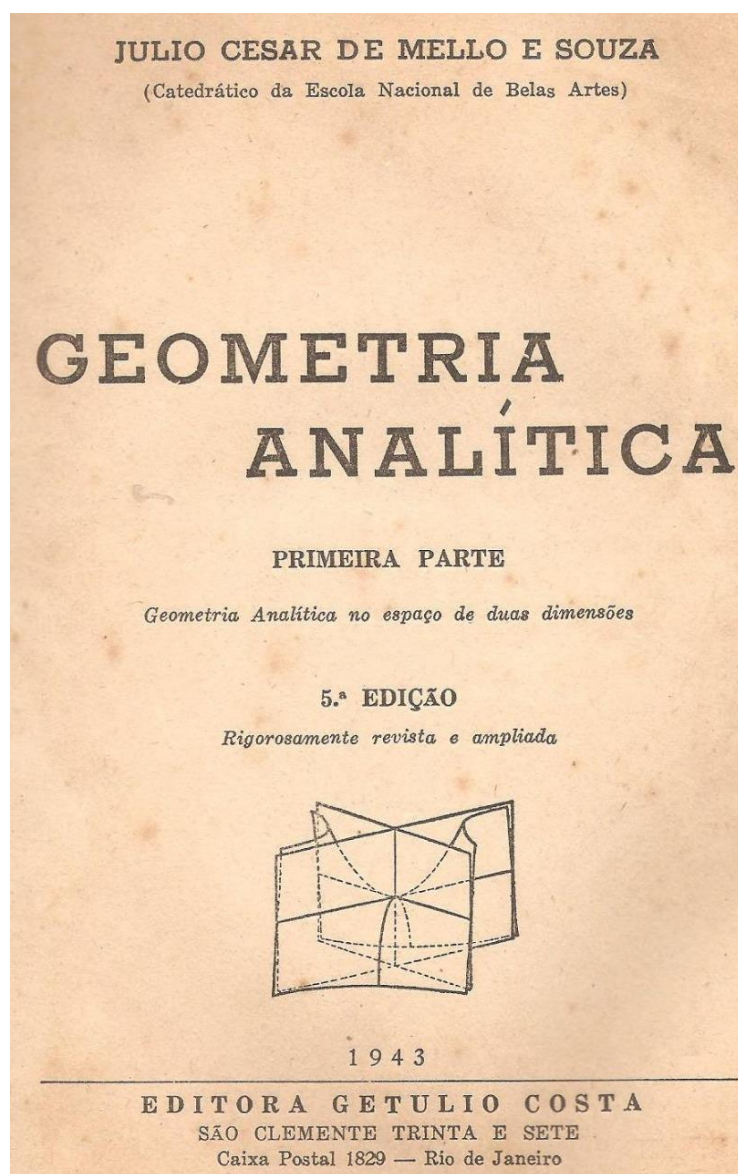
Na década de 1920, ocorreram propostas educacionais inovadoras no Brasil. A sociedade da época crescia aceleradamente nos centros urbanos devido à industrialização em expansão, logo a formação profissional dos trabalhadores das indústrias era uma demanda urgente. As inovações, em particular, para a matemática do ensino secundário surgiram das discussões de um movimento internacional, liderado por Felix Klein, com a participação de vários países, entre eles França, Alemanha, Inglaterra, Itália e Estados Unidos, que culminou na criação do IMUK (*Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission*), a “Comissão Internacional para o Ensino da Matemática”. O professor Euclides Roxo, defensor das ideias de Klein, foi o principal responsável pelo surgimento de novos programas de matemática, implantados primeiramente no Colégio Pedro II, em 1929 (DUARTE, 2019).

O conteúdo de Geometria Analítica da obra é bem elaborado na parte de seções cônicas pelas razões já descritas, entretanto os tópicos de reta e círculo deixam a desejar, não possuindo teoremas, nem problemas. Observa-se a ausência de uma seção de respostas dos problemas não resolvidos.

3.2 - Segundo Período (1930-1950)

Geometria Analítica - Primeira parte – Geometria Analítica no espaço de duas dimensões, de Júlio César de Mello e Souza foi o livro escolhido para análise que compreende as décadas de 1930 a 1950, inclusive.

Figura 8—Contracapa livro Mello e Souza



Fonte: Souza (1943, contracapa)

O exemplar, cuja contracapa está ilustrada na figura 8 foi publicado em 1943, no Rio de Janeiro pela editora Getúlio Costa, sendo esse a 5ª edição. Um dos critérios de escolha da obra foi devido o ano de publicação ser próximo às duas últimas reformas de ensino vigentes no Brasil: a Reforma Francisco Campos de 1931 e a Reforma Capanema de 1942, que estão no período a ser analisado nesse segundo projeto.

A Reforma Francisco Campos estruturou o ensino secundário, comercial e superior no Brasil, estabelecendo: um currículo seriado, a frequência obrigatória e um ensino em dois ciclos básicos: um fundamental (1º ciclo), com duração de cinco anos, e outro complementar (2º ciclo), com dois anos, visando preparar para o ingresso no curso superior (VALENTIM JUNIOR, 2013). Com relação a matemática, como já mencionado anteriormente, foi na

Reforma Francisco Campos, que teve Euclides Roxo responsável pela matemática, que em portaria ministerial de 30 de junho de 1931, são oficializados os programas elaborados que instituem, em âmbito nacional, uma nova disciplina escolar no ensino secundário: a *matemática* (ALVAREZ, 2004).

O período de vigência da Reforma Francisco Campos foi de 10 anos até a inserção da Reforma Gustavo Capanema em 1942. Esta por sua vez, foi gerada em clima de constantes pressões de diversas áreas envolvidas em educação na época. A Igreja defendia um curso mais humanista com pouca ênfase ao ensino de função; os colégios militares preferiam um ensino de matemática sem interações com outras áreas do ensino; professores e professoras questionavam a aplicação de princípios do movimento modernizador quanto à sua eficiência e quanto ao atendimento de certas finalidades julgadas ideais trazidas na lei, como: a formação da personalidade integral dos(as) adolescentes, a acentuação e elevação da consciência patriótica e da consciência humanística, além de, dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial (VALENTIM JUNIOR, 2013).

O livro de Mello e Souza, conta com uma estrutura simples, ou seja, sem muitas especificações de partes dos livros como: unidades ou módulos. O conteúdo é distribuído apenas entre capítulos (um total de quinze), quatro notas (que na linguagem mais atual seriam apêndices) e uma seção com as respostas da maioria dos exercícios propostos pelo autor. Não é possível determinar qual o público alvo, por ser essa uma informação que não consta de forma clara, e, além disso, o autor não colocou um prefácio ou uma introdução. Apesar do exemplar ter sido publicado próximo às duas importantes reformas citadas, não constam referências a elas no livro. Vale ressaltar que a obra analisada foi encontrada no acervo da UFMG durante a catalogação e depois de escolhida a coordenadora do projeto conferiu que tinha o livro físico, disponibilizando para o bolsista fazer a análise.

O livro é todo de Geometria Analítica começando com noções preliminares, que englobam os conceitos de reta, ponto, eixo, plano cartesiano, coordenadas e distância entre pontos. Apresenta em seguida a representação gráfica de funções, representação paramétrica, sistema de coordenadas polares, estudo de diversas curvas, transformação de coordenadas, reta e problemas sobre a reta, elipse, hipérbole, parábola, lugar geométrico, curvas algébricas e transcendentais, explora rapidamente funções modulares e finaliza com as notas relativas às curiosidades citadas durante o livro como: outros sistemas de coordenadas, distância entre pontos em eixos oblíquos, área de um triângulo no plano cartesiano e equação paramétrica da reta.

O tratamento da Geometria Analítica proposta pelo autor segue a linha da definição colocada por ele no início do primeiro capítulo em um tópico chamado “Noções preliminares”:

A Geometria Analítica é a parte da Matemática que tem por objeto a aplicação da análise algébrica ao estudo das propriedades das figuras geométricas (linhas e superfícies).

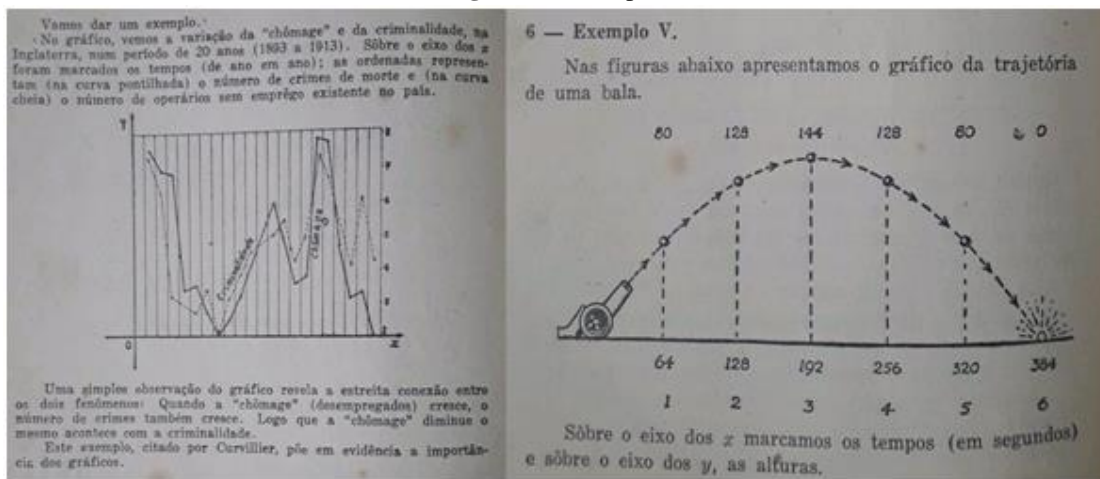
A Geometria Analítica – escreve A. Cuvilier – inventada por Descartes (1637), realiza a síntese da Geometria e da Álgebra, permitindo traduzir na linguagem do número as grandezas contínuas do espaço. (Souza, p. 7, 1943).

Após essa definição, Mello e Souza dividiu o “estudo da ciência”, como ele mencionou, em duas partes: a primeira seria a Geometria Analítica em duas dimensões, que é o estudo no plano e a segunda em três dimensões, que seria o estudo no espaço. O livro, como já mencionado no título compreende a primeira parte.

O conteúdo é apresentado de forma descritiva, isto é, separado por definições inclusas em tópicos e com uma escrita matemática simples, ou seja, sem apropriação de símbolos ou termos do tipo “teorema”, “proposição”, “corolário”, etc. Em alguns momentos o autor utiliza o recurso de exemplos resolvidos como apoio ao que está sendo ensinado e sempre que possível utiliza ilustrações durante as explicações. O uso de demonstrações aparece poucas vezes: no primeiro capítulo ao ensinar distância entre pontos; em alguns tópicos do capítulo que se refere às transformações de coordenadas; ao tratar da equação geral da reta e no capítulo seguinte chamado “Problemas sobre as retas”; no estudo das cônicas: elipse, hipérbole e parábola e, por último, na nota destinada a uma explicação de como se deduz uma equação paramétrica.

Algumas referências ao cotidiano são encontradas no livro durante a exposição do conteúdo. No capítulo de representação gráfica de funções são apresentados exemplos que destacam a importância que um gráfico tem numa pesquisa e numa situação cotidiana que pode ser estudada na matemática, como mostrado na figura 9: do lado esquerdo um exemplo de gráfico numa pesquisa estatística, que relaciona desempregados e criminalidade em um determinado período na Inglaterra, e do lado direito um gráfico da trajetória de uma bala de canhão.

Figura 9 - Exemplos



Fonte: Souza (1943, p. 26 e p. 28)

Nos capítulos que tratam de elipse, hipérbole e parábola, o autor separou um tópico chamado de "Observação" para mencionar em quais outras áreas cada um desses três lugares geométricos podem ser encontrados, como por exemplo, a elipse é muito explorada em Geometria Descritiva para a construção de sombras e na Astronomia; a hipérbole tem grande importância em problemas sobre o fluxo estacionário de eletricidade, calor e ainda sobre outros que se referem às corrente líquidas; a parábola é muito utilizada na Física, em Resistência dos Materiais, teoria dos momentos de inércia, teoria dos espelhos côncavos e as três cônicas são exploradas em Mecânica.

Quanto aos tipos de exercícios propostos no livro, o autor trabalha com: aqueles mais diretos que envolvem cálculos com aplicação de propriedades e fórmulas; exercícios práticos de construção no plano cartesiano; aqueles que exigem, do(a) aluno(a), mais raciocínio, conhecimentos prévios de uma geometria plana ou outros conceitos matemáticos e, por fim, alguns exercícios de demonstração. Também constam exercícios que propõem mais de um dos tipos citados na mesma questão.

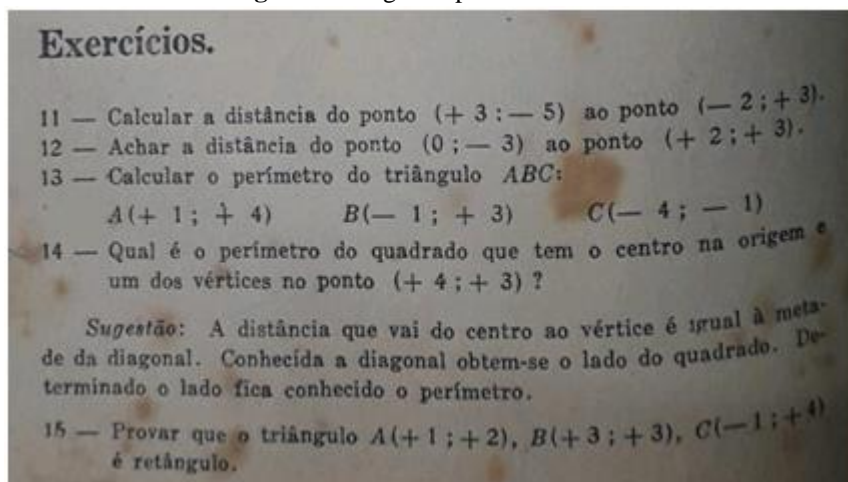
Nem todos os capítulos possuem exercícios propostos, como é o caso do capítulo "Curva – Definição – Generalidades sobre as curvas", que traz definições breves, acompanhadas de ilustrações, sobre, por exemplo: eixo, centro, tangentes e assíntotas. Isso também acontece no último capítulo "Curvas algébricas e transcendentais – Funções moduladas", contendo definições de curvas, pouco mencionadas nos dias de hoje, como cissoide, conchoides, cicloide, epicicloide, hipocicloide, dentre outras.

Por outro lado, o capítulo com mais exercícios é chamado "Problemas sobre a reta", onde o autor propõe questões que trabalha como encontrar a equação da reta partindo de alguma informação como, pontos que ela passa, sua inclinação (coeficiente angular ou

declividade, que são termos utilizados pelo autor), ângulos entre retas e distância de um ponto a uma reta, além de tratar das condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas. Contudo, o termo “Problemas” aparece apenas no título desse capítulo, prevalecendo “Exercícios” no início de cada lista.

Para exemplificar, podemos ver abaixo na figura 10 exercícios mais diretos como os números 11 e 12, bem como exercícios que exigem um pouco mais de raciocínio (13, 14 e 15).

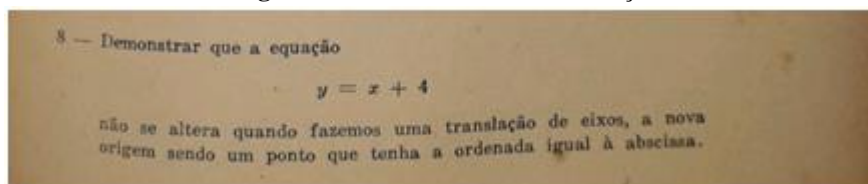
Figura10 - Alguns tipos de exercícios



Fonte: Souza (1943, p. 18)

Enquanto na figura 11 temos um exemplo de exercício de demonstração.

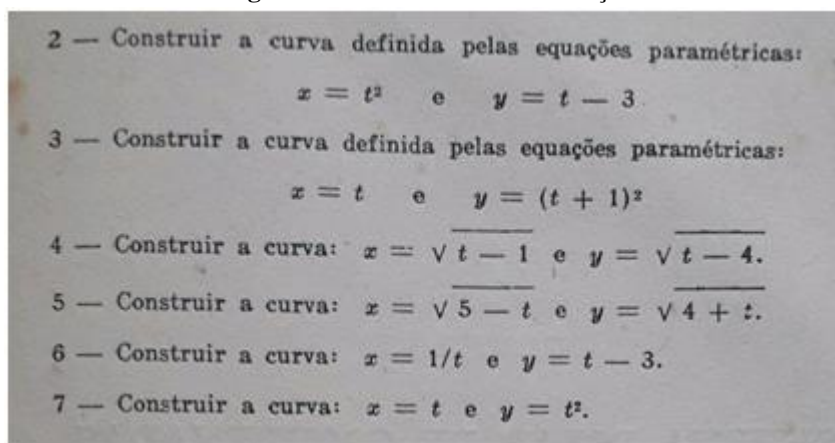
Figura 11 – Exercício de demonstração



Fonte: Souza (1943, p. 79)

Na figura 12 temos alguns exercícios de construção de curvas.

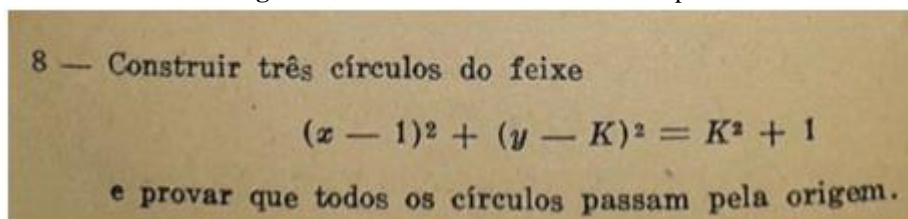
Figura 12 – Exercícios de Construção



Fonte: Souza (1943, p. 47)

E um outro modelo é mostrado na figura 13, em que o autor propõe construção e demonstração em um mesmo exercício:

Figura 13 – Exercício com mais de um tipo



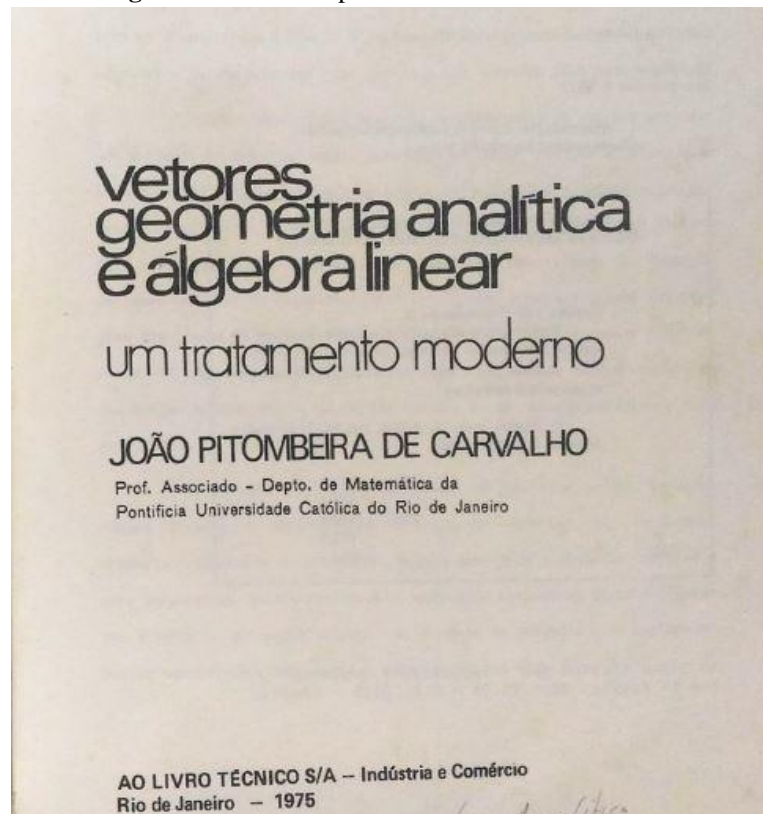
Fonte: Souza (1943, p. 174)

O autor deixa um aviso na contracapa de que no final do livro o leitor encontraria as soluções de todos os exercícios propostos, mas as respostas presentes são dos exercícios numéricos, ou seja, não foram disponibilizadas soluções daqueles de construção de curvas ou de outras figuras. Além disso, os registros colocados são respostas diretas e não a solução detalhada de cada um como se imagina ao ler o aviso.

3.3- Terceiro Período (1960-1980)

O livro analisado pertencente ao período entre as décadas de 1960 a 1980, possui o título: *Vetores, Geometria Analítica e Álgebra Linear*, e o subtítulo: *um tratamento moderno*. O autor é João Pitombeira de Carvalho. A obra foi publicada em 1975, no Rio de Janeiro, pela editora Ao Livro Técnico, sendo utilizado o exemplar da 1ª edição que se encontra no acervo da biblioteca da Universidade Federal de Juiz de Fora. Na figura 14 abaixo temos sua contracapa.

Figura 14 – Contracapa livro Pitombeira de Carvalho



Fonte: Carvalho (1975, contracapa)

A obra está inserida no período do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Segundo Valentim Júnior (2013) esse movimento visava a valorização da compreensão em detrimento à mecanização, da aprendizagem por descoberta, da intuição como algo que deve preceder o ensino dedutivo, e a importância ao trabalho experimental como uma etapa anterior à abstração. Sendo o caráter abstrato da matemática outra característica importante desse movimento (OLIVEIRA et al, 2011).

O livro possui capa, segunda capa, prefácio, introdução e sumário. A partir da segunda capa pode-se identificar qual o público alvo: “O Público: Todos os alunos de segundo grau ou os que se preparam para os exames de admissão às Universidades” (Carvalho, 1975). Ainda na segunda capa constam os seguintes dizeres sobre o conteúdo do livro:

Este livro visa a apresentar aos alunos do segundo grau ou àqueles que se preparam para os exames vestibulares uma visão integrada e moderna da geometria analítica, familiarizando-os com o tipo de raciocínio e os conceitos que encontrarão na universidade (Carvalho, 1975, segunda capa).

Em seu prefácio se lê:

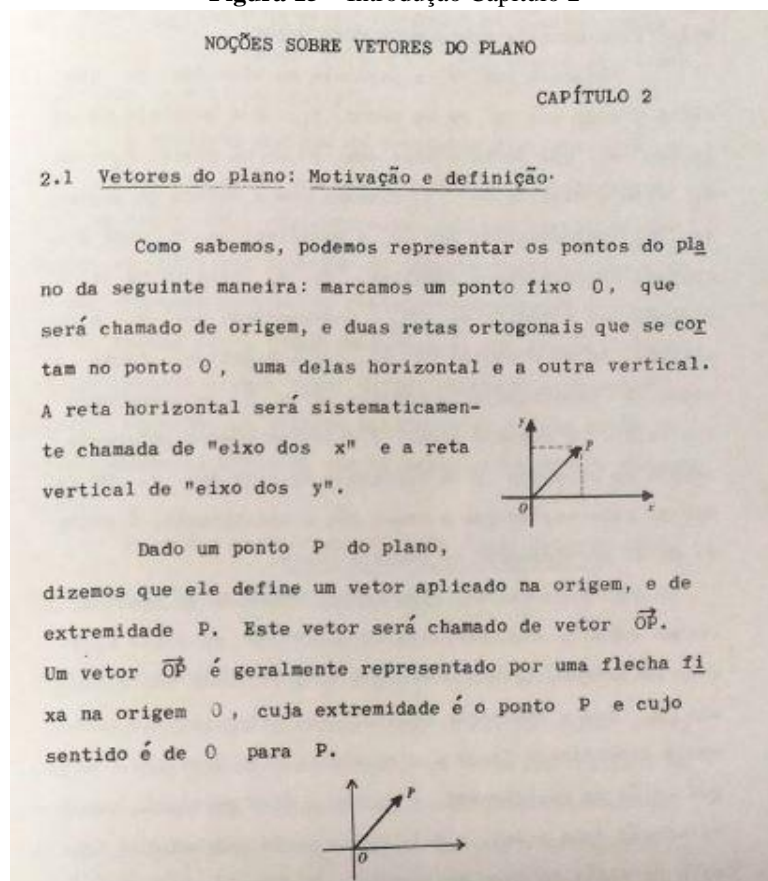
Tentamos apresentar pontos que possam ser expostos a alunos do segundo grau e que, além de lhes dar uma ideia do tipo de matemática que encontrarão na

universidade, possam interessá-los devido a seu conteúdo intuitivo e visual. (...). Não tivemos a intenção de fazer um curso de geometria analítica. Assim, embora tratemos das equações analíticas de algumas curvas, não estudamos exaustivamente este assunto. Um tratamento mais aprofundado deverá ser adiado para o momento em que surjam aplicações, a fim de não incluir em um estudo estéril e sem motivação (Carvalho, 1975, prefácio).

Se observa que o autor tem por finalidade apresentar um livro preparatório, para alunos que irão realizar exames de admissão às universidades. Sua obra busca mostrar uma visão moderna da Geometria Analítica, não se tratando, porém, de um curso de Geometria Analítica, deixando um tratamento mais aprofundado para a própria universidade. Tem o propósito de introduzir o conteúdo de forma intuitiva e visual, o que condiz com as propostas do MMM.

Seguindo o sumário são apresentados 5 capítulos, sendo eles: 1- Funções e Transformações; 2- Noções sobre Vetores no Plano; 3- Introdução à Matrizes; 4- Transformações no Plano, e 5- Desigualdades Lineares e Introdução à Programação Linear. O capítulo onde se encontra a Geometria Analítica é o capítulo 2, onde a presente análise se centrará. A teoria do livro é apresentada por meio de definições, com textos explicativos e representações gráficas e geométricas, seguindo de demonstrações teóricas.

Figura 15 – Introdução Capítulo 2

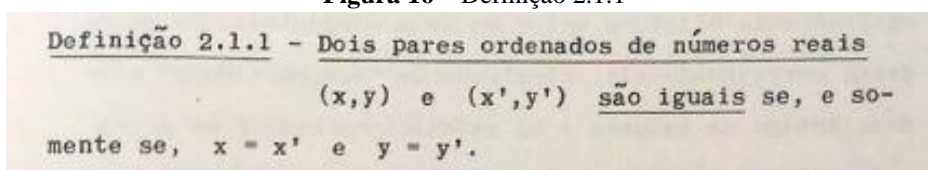


Fonte: Carvalho (1975, p. 39)

Na figura 15 acima temos o texto de apresentação do Capítulo 2. Nela pode-se observar que o autor se preocupa em mostrar de forma intuitiva para o aluno o assunto em questão, através de uma explicação clara e utilizando-se de representações visuais para auxiliar na compreensão do que está escrito e na construção da abstração do conhecimento matemático.

As figuras 16 e 17 trazem exemplos de definições utilizadas na exposição do conteúdo. Após as definições encontram-se textos explicativos que buscam elucidar possíveis questionamentos do estudante, ou exercícios. As proposições a serem demonstradas recebem o nome de fatos ou afirmações, e algumas ficam como exercício a cargo do leitor.

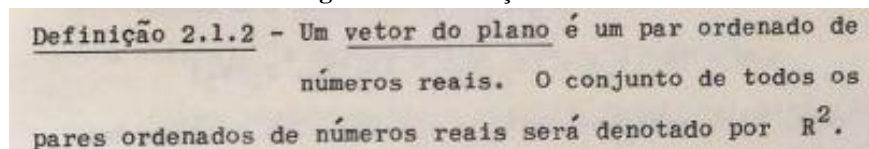
Figura 16 – Definição 2.1.1



Definição 2.1.1 - Dois pares ordenados de números reais
 (x,y) e (x',y') são iguais se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$.

Fonte: Carvalho (1975, p. 41)

Figura 17 – Definição 2.1.2



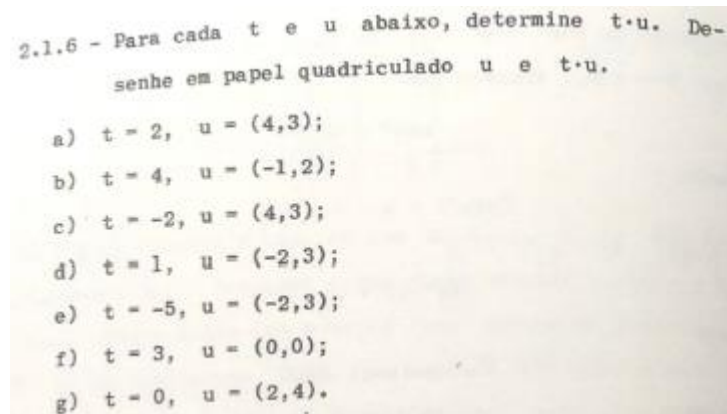
Definição 2.1.2 - Um vetor do plano é um par ordenado de números reais. O conjunto de todos os pares ordenados de números reais será denotado por \mathbb{R}^2 .

Fonte: Carvalho (1975, p. 41)

São poucas as vezes que a palavra “teorema” aparece, e a numeração segue a mesma das definições. Em alguns casos a demonstração vem logo depois do enunciado do teorema, em outros isso não ocorre e não há demonstrações.

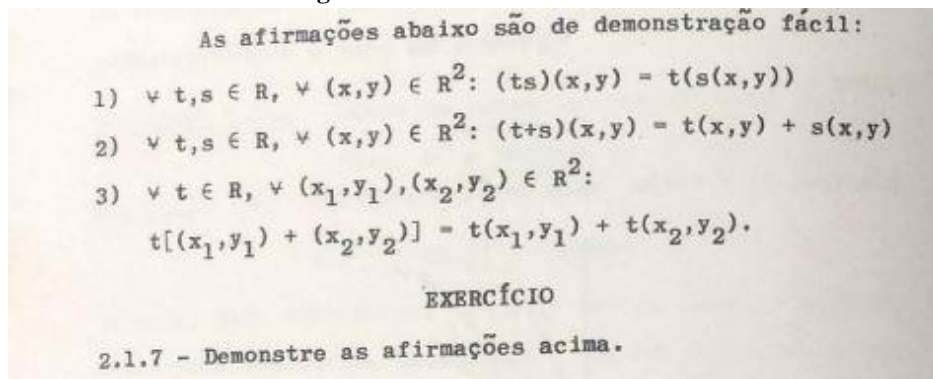
Na obra os exercícios não vêm divididos por categorias (exercícios propostos, exercícios de fixação, exercícios de aprofundamento, entre outros) e são em um número menor se comparado aos livros preparatórios de cursinhos atuais. O termo “problemas” não aparece no decorrer do texto. O autor também não apresenta respostas ou sugestões de respostas para os exercícios. Além das demonstrações que ficam como exercícios, estão presentes também os que usam verbos de comando (calcule/resolva/determine, mostre que, interprete e desenhe), não apresentando contextualizações. Os exercícios numéricos são minoria. As figuras 18, 19 e 20 mostram exemplos de exercícios.

Figura 18 – Exercício determine e desenhe



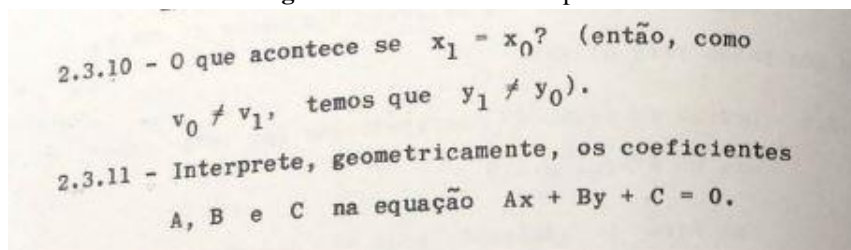
Fonte: Carvalho (1975, p. 46)

Figura 19 – Exercícios demonstre



Fonte: Carvalho (1975, p. 46)

Figura 20 – Exercícios interprete

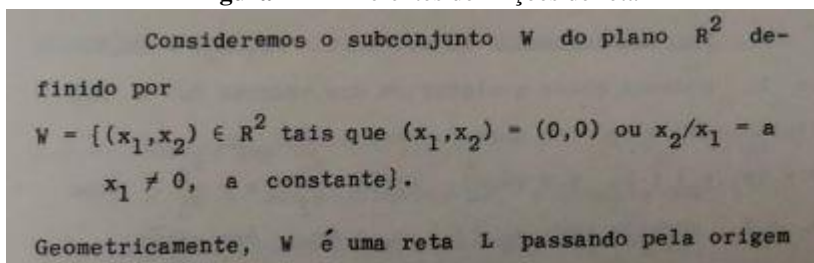


Fonte: Carvalho (1975, p. 58)

Na figura 19, exercício 2.1.7, pode-se observar o emprego de uma linguagem matemática rebuscada com a utilização de vários símbolos, ela aparece no decorrer de todo o capítulo, nos exercícios e nos enunciados de definições, afirmações e teoremas. Por se tratar de um livro preparatório para as universidades acredita-se que o autor possa ter assumido que o contato do aluno com esse tipo de linguagem já tenha ocorrido em outras ocasiões, por isso não é de preocupação ao longo do texto explicar o significado dos símbolos.

Com relação à Geometria Analítica o livro trabalha equações analíticas de algumas curvas no plano, depois repete a ideia para o espaço. Na figura 21 vemos que a reta é definida geometricamente como um subconjunto do \mathbb{R}^2 e, na figura 22, é considerada como gerada por um vetor.

Figura 21 – Diferentes definições de reta



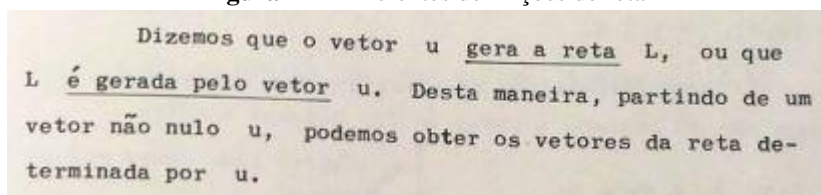
Consideremos o subconjunto W do plano \mathbb{R}^2 definido por

$$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ ou } x_2/x_1 = a, x_1 \neq 0, a \text{ constante}\}.$$

Geometricamente, W é uma reta L passando pela origem

Fonte: Carvalho (1975, p. 53)

Figura 22 – Diferentes definições de reta



Dizemos que o vetor u gera a reta L , ou que L é gerada pelo vetor u . Desta maneira, partindo de um vetor não nulo u , podemos obter os vetores da reta determinada por u .

Fonte: Carvalho (1975, p.55)

Após as definições iniciais são trabalhados os tipos de equações de retas (vetorial, paramétrica e normal) e a ideia de distância no \mathbb{R}^2 . Todos os conceitos de Geometria Analítica são trabalhados em conjunto com os de Álgebra Linear, seja no plano ou no espaço. Os exercícios desse tópico seguem o padrão que o livro propõe, mostrado anteriormente, majoritariamente demonstrações e interpretações geométricas.

Sobre aplicações ao cotidiano e o uso de problemas pode-se observar que o autor não utiliza essas ferramentas no decorrer do capítulo, seguindo as características do período em que o texto está inserido. O cotidiano não é usado como cenário durante as explicações teóricas. Problemas contextualizados também não aparecem, tornando os exercícios puramente teóricos.

No restante do livro, pode-se encontrar no capítulo 3, Introdução à Matrizes, um tópico específico de aplicações, mas não são aplicações ao cotidiano e sim aplicações do campo Matrizes em problemas de outros campos já apresentados antes no próprio livro.

A partir da análise feita se observa que a Geometria Analítica nesta obra pode ser encarada como uma ferramenta auxiliar ao campo de Álgebra Linear. A matemática não aparece totalmente dividida por áreas. O autor cumpre no decorrer das páginas o que se propôs no dizeres iniciais da segunda capa e do prefácio. O livro não é um curso de Geometria

Analítica, alguns tópicos, como o estudo das cônicas, não são abordados, se limitando ao estudo de equações de retas no plano e no espaço, sempre amparando o estudo de vetores.

A linguagem escolhida e sua forma de ser trabalhada no interior do livro mostram aos alunos um pouco da matemática que encontrariam no ensino superior.

Durante o período de análise da obra surgiram algumas questões, entre elas: onde o livro foi utilizado? Por que a obra não trata das cônicas? Qual era o objetivo ao tratar a Geometria Analítica da forma abordada? E, a obra foi inovadora para época? Com isso posto, após a realização da análise inicial da obra, foi possível realizar um breve contato com o autor, via *e-mail*, em que foram realizadas perguntas e alguma clareza foi dada às questões postas.

Segundo o autor, na época da publicação, o vestibular unificado do Rio de Janeiro, que moldava muito o que trabalhar no ensino médio, incluía Álgebra Linear, portanto existia a ideia de se escrever um texto que pudesse ser usado pelos professores para passar algumas noções desse campo. Com relação ao tópico cônicas, ele não tinha ênfase nesse vestibular, assim não foi tratado na obra. A forma de abordagem escolhida reflete sua motivação em mostrar como alguns conceitos poderiam modernizar o estudo da Geometria Analítica.

Ao ser questionado sobre o papel da obra no contexto do MMM o autor respondeu que não considerava o livro como uma proposta do movimento. Uma possível explicação para esse ponto de vista pode ser dada pelo fato de as ideias da matemática moderna não terem se difundido amplamente no Rio de Janeiro, como em São Paulo, por exemplo, com incorporação relativamente tardia aos programas, já nos anos 1970 (RIOS *et al*, 2011).

Nos dizeres do autor, o livro foi considerado inovador para época e não tinha o objetivo de se opor a alguma outra obra específica, mas somente de ser um texto modernizador, simplificando o tratamento dado à Geometria Analítica na época e mostrando como alguns conceitos poderiam modernizar seu estudo.

4 - Conclusões

O trabalho de catalogação foi importante para se perceber, ainda que brevemente, características das publicações de exemplares com Geometria Analítica ou no título ou no conteúdo, em território nacional ao longo do período histórico estudado, como por exemplo, a quantidade de livros por público alvo nos mostra que a demanda de livros didáticos para o ensino secundário predominava em comparação com o ensino superior. Porém, foi constatado um número maior de publicações em que não foi possível determinar para qual nível se

destinava. Além disso, os autores mais recorrentes em publicações, como destacados no Quadro 1, são tanto brasileiros, quanto estrangeiros. Também foi possível observar de que forma a Geometria Analítica aparecia junto com outro campo da matemática, mantendo um padrão do tipo “Álgebra Linear e Geometria Analítica” ou “Cálculo vetorial e Geometria Analítica”, e poucos casos como “Geometria Analítica: com uma introdução ao cálculo vetorial e matrizes”. O que nos deixou questões do tipo: será que o ensino de Geometria Analítica, nessas obras, era levado apenas como complementação das demais áreas? Ou, as áreas como Álgebra Linear e Cálculo Vetorial, nas obras, serviriam de apoio ao ensino de Geometria Analítica? Tais inquietações ainda não foram respondidas e podem ser objetos de outras pesquisas.

No decorrer do trabalho encontramos dificuldades para levantar as informações necessárias sobre público alvo e tipo de livro, por se tratar de muitas obras, dados individuais inicialmente escassos e tempo limitado. Durante a graduação não é comum a oportunidade de analisar livros antigos como esses. A experiência foi extremamente válida, pois é interessante observar a estrutura da obra, sua edição, vocabulário, linguagem usada, peculiaridades de cada época, etc.

O primeiro livro analisado, que data de 1921, é o único dos analisados que é um curso completo de geometria, englobando a plana, a espacial e a analítica. A obra não explicita a que nível de ensino se destina, mas sua grande quantidade de problemas nos sugere estar adequada ao nível secundário. A geometria é completamente dedutiva, observam-se muitos teoremas, corolários e suas demonstrações, nenhum exemplo de situações do cotidiano nem aplicações, e a Geometria Analítica inclui o estudo de reta, círculo, elipse, hipérbole, parábola e algumas curvas notáveis como a hélice, cissoide, cicloide, epicloide e hipocicloide. O autor propõe aos alunos problemas que são em sua maioria de valor numérico, raramente de construção e nenhum de prova ou demonstração.

Quanto ao livro de Júlio César de Mello e Souza, 1943, a Geometria Analítica trabalhada na obra é fiel à definição posta pelo autor, que entende tratar-se de um campo de “aplicação da análise algébrica ao estudo das propriedades das figuras geométricas”. Em comparação com o livro de Abreu (1921), os conteúdos iniciais de Geometria Analítica se diferem em grande parte. No primeiro são trabalhadas “definições iniciais” – assim chamadas por Abreu – que compreendem coordenadas, eixo de simetria, centro, vértice, diâmetro, assíntota, entre outros; no segundo, as “Noções preliminares” – denominadas por Mello e Souza – são os conceitos de coordenadas, ponto, reta e sistema cartesiano. Ou seja, embora coordenadas seja um dos conceitos iniciais comum às duas obras, enquanto na primeira se

exploram aspectos mais gerais das curvas (eixo de simetria, centro, vértice, etc), na segunda, se enfatizam as coordenadas para o tratamento dos entes geométricos. Além disso, curvas transcendentais como a cissoide, cicloide, epicloide e hipocicloide, entre outras constam de ambos livros, porém na obra de 1921 são definidas como lugares geométricos a partir de suas propriedades sem o tratamento em coordenadas. Já no livro de 1943, Mello e Souza além da apresentação como lugares geométricos são também associadas as equações cartesianas.

No que se refere aos exercícios, não constam enunciados elaborados que descrevem uma história ou trazem algum outro assunto seja de outra área ou do dia-a-dia. Entretanto, na apresentação do conteúdo, o autor faz algumas referências às suas aplicações em outras áreas, como por exemplo, as cônicas ele destaca que: a elipse é encontrada na Geometria Descritiva e na Astronomia, a hipérbole é utilizada no fluxo estacionário, calor e questões ligadas às correntes líquidas, a parábola é explorada na Física e Resistências dos Materiais, além de citar que as três cônicas são usadas em Mecânica. Tal menção às outras áreas não apareceu no livro do primeiro período.

Pelos conteúdos apresentados e analisando as reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema que ocorreram em 1931 e 1942, respectivamente, pode-se supor que o livro se encaixaria no currículo do Ensino Secundário, pois segundo Valentim Júnior (2013), alguns tópicos do exemplar aparecem nas obras voltadas para o curso clássico ou científico. Mas o livro não faz referência à nenhuma das reformas citadas. E, além disso, a linguagem utilizada pelo autor atenderia tanto o ensino secundário, quanto o ensino superior.

No livro datado de 1975 escrito por Pitombeira de Carvalho se observa que não se trata de um curso de geometria. O autor ressalta que a obra é um curso preparatório para as universidades, destinada aos alunos do ensino secundário ou aqueles que realizarão os exames de admissão as universidades. Vemos que o estudo da matemática não é feito em blocos, dividido por áreas, a Geometria Analítica e a Álgebra Linear são estudadas juntas e se complementando. A linguagem escolhida pelo autor e a forma de abordar os temas propostos carregam algumas características do período histórico em que a obra se insere, como o carácter abstrato da matemática, o ensino intuitivo e a valorização da compreensão por parte do aluno. Em relação aos exercícios o autor não os divide por categorias e vemos uma predominância daqueles de carácter abstrato, com a ausência de representações numéricas. Assim como nas primeiras obras o cotidiano não é utilizado como cenário para as explicações teóricas ou os exercícios. O estudo de Geometria Analítica se limita ao estudo de retas no plano e no espaço, aparando o estudo de vetores. Não consta nesse livro, o estudo das cônicas, diferentemente das obras anteriores.

É possível observar, analisando os três momentos exemplificados neste trabalho, como ocorre a linguagem matemática. No primeiro período o autor apresenta definições e teoremas, que são demonstrados algebricamente com técnicas de desenho geométrico, no segundo o autor apresenta o conteúdo de forma descritiva, utilizando uma linguagem sem formalidade e em alguns momentos com exemplos resolvidos. Por fim, no terceiro voltamos a observar a utilização pelo autor de definições e teoremas, mas com demonstração exclusivamente algébrica em que as representações gráficas são ilustrativas, tendo um uso maior de símbolos matemáticos e a utilização de uma matemática mais abstrata.

Outro aspecto observado diz respeito ao fato do livro de Júlio César de Mello e Souza (1943) ser o único dos analisados que é exclusivamente de Geometria Analítica, mas compreendendo apenas duas dimensões, enquanto que os livros de Ferreira de Abreu (1921) e de Pitombeira de Carvalho (1945) apresentam a Geometria Analítica em duas e em três dimensões, onde, respectivamente, um trata de um curso completo de Geometria, e o outro a Geometria Analítica é um suporte para o ensino de Álgebra Linear.

Além disso, notamos que no primeiro livro predominam problemas de valor numérico, enquanto que no segundo aparece uma variedade de tipos de exercícios, que envolvem: cálculo com aplicação de propriedades e fórmulas (apenas para trabalhar “distância entre pontos”); construções de curvas partindo de equações dadas; exercícios de demonstrações e exercícios mais complexos, como por exemplo, solicitando a construção de curvas e a demonstração de propriedades. Porém, essas categorias de exercícios não são especificadas pelo autor, em todos os momentos da obra o tópico é denominado por exercícios. Por fim, no terceiro livro prevalecem os exercícios teóricos, sendo poucos os de valor numérico e nenhum onde ocorre contextualização. Nessa última obra é mais comum as demonstrações ficarem a cargo do leitor do que nas outras.

Como indicação para posterior aprofundamento, poderíamos observar como os livros de Geometria Analítica do ensino secundário e superior se distanciam ou se aproximam; como o ensino de Geometria Analítica torna-se mais acessível, mais voltado para o ensino secundário com as reformas ocorridas na educação brasileira após 1931, acompanhando os processos da democratização do ensino e de preparação para o mercado de trabalho em ascensão.

REFERÊNCIAS

ABREU, Antônio Ferreira de. **Apontamentos de Geometria**. Rio de Janeiro: Grande Livraria Leite Ribeiro, 1921.

ALVAREZ, Tania Giannasi. **A Matemática da Reforma Francisco Campos em Ação no Cotidiano Escolar**. 2004. 270 f: Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004.

CARVALHO, João Pitombeira de. **Vetores, geometria analítica e álgebra linear: um tratamento moderno**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1975.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. Mathematics Education in Latin America. In: KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert. **Handbook on the History of Mathematics Education**. New York: Springer Science+Business Media, 2014. p. 335 – 359.

CLEMENTE, Elvo; JOÃO, Faustino. **História da PUCRS**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1997, p. 142 – 144.

DUARTE, A. Euclides Roxo e a Proposta Modernizadora do Ensino da Matemática. **Com a Palavra, o Professor**, v. 4, n. 8, p. 300-317, 2019.

NUNES, Clarice. O “velho” e “bom” ensino secundário: momentos decisivos. **Revista Brasileira de Educação**, nº 14, p. 35 – 60, 2000.

OLIVEIRA, Alexandre Souza de; ROCCO, Cristiani Maria Kusma; LIMA, Eliene Barbosa; FREIRE, Inês Angélica; SANTOS, Ivanete Batista dos; BRIGO, Jussara; CAMARGO, Kátia Cristina; SILVA, Maria Célia Leme da. O Movimento da Matemática Moderna: Novos conteúdos? Nova metodologia?. In: OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues (org). **O Movimento da Matemática Moderna – história de uma revolução curricular**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2011. p. 112 - 130.

RIOS, Diogo Franco; BÚRIGO, Elisabete Zardo; OLIVEIRA FILHO, Francisco de. O Movimento da Matemática Moderna: sua difusão e insticionalização. 1. O MMM no Brasil. In: OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues (org). **O Movimento da Matemática Moderna – história de uma revolução curricular**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2011. p. 14 – 43.

SOARES, Suzana Ribeiro. **Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. 2013. 141 f: Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

SOUZA, Júlio César de Mello e. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Editora Getúlio Costa. 1943.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2.2, p. 28–49, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKE**, v. 16, p. 139 – 162, 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007.

VALENTIM JÚNIOR, Josélio Lopes. **A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise dos livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM**. 2013. 223 f: Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.