



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Felipe Augusto Tasca

**Um estudo do espaço dos caminhos de fronteira e da C^* -álgebra
associada a um ultragrafo com sinks**

Florianópolis
2019

Felipe Augusto Tasca

Um estudo do espaço dos caminhos de fronteira e da C^* -álgebra associada a um ultragrafo com sinks

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em Matemática com área de concentração em Análise.

Orientador: Prof. Daniel Gonçalves, Dr.

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Tasca, Felipe

Um estudo do espaço dos caminhos de fronteira e da C^*
álgebra associada a um ultragrafo com sinks / Felipe Tasca
; orientador, Daniel Gonçalves, 2019.

71 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. C^* -álgebras de
Ultragrafos. 3. Produto Cruzado Parcial. 4. Grupóides. 5.
Estados KMS. I. Gonçalves, Daniel . II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Felipe Augusto Tasca

Um estudo do espaço dos caminhos de fronteira e da C^* -álgebra associada a um ultragrafo com sinks

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Presidente e Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Danilo Royer, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Gilles Gonçalves de Castro, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Alexandre Tavares Baraviera, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Daniel Willem van Wyk, Dr.
Dartmouth College, USA

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Matemática com área de concentração em Análise.

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Daniel Gonçalves, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2019

Resumo

Mostramos que certas C^* -álgebras de ultragrafos podem ser vistas como um produto cruzado parcial. Focamos nos ultragrafos que satisfazem uma condição chamada RFUM2 que é uma restrição nos ranges das arestas. Uma versão para este resultado já existia mas apenas para ultragrafos sem sinks. Generalizamos tal resultado pois aqui permitimos sinks e com isso, todas as C^* -álgebras de grafos ficam inclusas no nosso caso. Mostramos uma maneira alternativa de provar que a C^* -álgebra do ultragrafo é isomorfa à uma C^* -álgebra de um grupóide através do grupóide de transformação. Obtemos uma condição equivalente para que se tenha um isomorfismo entre dois grupóides de ultragrafos. Caracterizamos os estados KMS e os estados ground de uma C^* -álgebra associada a um ultragrafo que satisfaz RFUM2.

Palavras-chave: C^* -álgebra de ultragrafo. Produto cruzado parcial. Grupóide. Estado KMS.

Abstract

We have proved that certain ultragraph C^* -algebras can be viewed as a partial crossed product. We focus on ultragraphs that satisfy a condition called RFUM2 which is a restriction on ranges of the edges. A version for this result already existed but only for ultragraphs without sinks. We generalize this result because here we allow sinks and with that, all graph C^* -algebras are included in our case. We show an alternative way of proving that the ultragraph C^* -algebra is isomorphic to a C^* -algebra of a groupoid through the transformation groupoid. We obtained an equivalent condition to have an isomorphism between two ultragraph groupoids. We characterize the KMS states and ground states of a C^* -algebra associated to an ultragraph that satisfies RFUM2.

Keywords: Ultragraph C^* -álgebra. Partial crossed product. Groupoid. KMS state.

Sumário

Introdução	7
1 Ultragrafos	9
1.0.1 C^* -álgebra do Ultragrafo	9
1.1 Notações e definições	10
1.2 Espaço Topológico	11
2 C^*-álgebra do ultragrafo vista como produto cruzado parcial	23
2.1 A ação parcial	26
2.2 O isomorfismo	27
3 Espaço Shift e Grupóides do Ultragrafo	32
3.1 Espaço Shift de Ultragrafo	32
3.2 Grupóides de Ultragrafo	33
3.3 Grupóide de Deaconu-Renault	37
3.3.1 Pontos isolados	38
3.3.2 Órbita Equivalência Contínua	39
3.3.3 Conjugação Eventual	46
4 Estados KMS EM $C^*(\mathcal{G})$	47
4.1 Estados KMS em $C^*(\mathcal{G})$	47
4.2 Estados KMS em $C^*(\mathcal{G})$ visto como $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$	49
4.3 A medida em X	52
4.4 Isomorfismo entre Conjuntos de Estados	59
4.5 Estados Ground	61
Anexos	67

Introdução

No final do século XX (mais precisamente em 1980), Joachim Cuntz e Wolfgang Krieger introduziram uma classe de C^* -álgebras que surgiram no estudo de cadeias de Markov [10]. Estas C^* -álgebras de Cuntz-Krieger, denotadas por \mathcal{O}_A , são geradas por isometrias parciais que são determinadas por uma matriz quadrada finita com entradas em $\{0, 1\}$. Dentre as muitas generalizações destas C^* -álgebras que surgiram ao longo dos anos, destacaram-se duas importantes, que são as C^* -álgebras de Exel-Laca [14] e as C^* -álgebras de grafos dirigidos [3], [17], [18]. Estas classes de C^* -álgebras são diferentes, mas possuem uma interseção que são as C^* -álgebras de grafos row finite que não contém sinks nem sources.

No ano de 2001, Mark Tomforde introduziu as C^* -álgebras de ultragrafos [25] que generalizam tanto as C^* -álgebras de grafos quanto as C^* -álgebras de Exel-Laca. Já em 2003, Tomforde mostrou [24] que existem C^* -álgebras de ultragrafo que não são C^* -álgebras de grafos nem C^* -álgebras de Exel-Laca. Além disso, no mesmo trabalho, mostrou que as C^* -álgebras de ultragrafos são também C^* -álgebras de Cuntz-Pimsner.

Neste Trabalho, vamos estudar o comportamento de certas C^* -álgebras de ultragrafos. No ano de 2017, Daniel Gonçalves e Danilo Royer provaram em [16] que C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem a condição (RFUM) são isomorfas ao produto cruzado parcial do espaço das funções contínuas definidas no espaço localmente compacto Hausdorff de caminhos de fronteira X associado ao ultragrafo \mathcal{G} , pelo grupo livre \mathbb{F} gerado pelas arestas do ultragrafo. Porém, os ultragrafos considerados em [16] não contém sinks, sendo assim, neste trabalho mostramos que mesmo que o ultragrafo \mathcal{G} contenha uma quantidade infinita de sinks, os resultados continuam valendo, ou seja, a C^* -álgebra do ultragrafo continuará isomorfa à um produto cruzado parcial. Para isso, alguns ajustes nos cilindros para o espaço topológico X foram necessários. Além disso, a condição RFUM2 para o ultragrafo foi introduzida (obviamente inspirada em (RFUM)), para que o espaço topológico X continuasse localmente compacto Hausdorff. Um fato importante aqui é que mesmo que não provemos o resultado para um ultragrafo qualquer, qualquer grafo pode ser visto como um ultragrafo que satisfaz RFUM2.

Em 2018, Daniel Gonçalves e Gilles G. de Castro [11], descreveram estados KMS e estados ground oriundos de uma ação de gauge generalizada em C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem (RFUM). Mostramos aqui que uma mesma caracterização de estados KMS pode ser construída ou adaptada para C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem RFUM2. Isso faz com que o resultado aqui (assim como era o resultado em [11], mas lá, sem sinks), seja uma generalização do resultado de Toke Carlsen e Nadia Larsen em [8].

Em vista do Teorema 4.2 de [9]: Dados dois grafos dirigidos E e F , considere \mathcal{G}_E e \mathcal{G}_F os seus grupóides associados, então \mathcal{G}_E e \mathcal{G}_F são isomorfos se, e somente se, existe uma órbita equivalência $h : \partial E \rightarrow \partial F$ que preserva pontos isolados eventualmente periódicos. Tentamos desenvolver uma versão para ultragrafos, porém, durante esta tentativa, surgiu o artigo [7], que é uma generalização do resultado que almejávamos. Com isto, nos baseamos na Seção 8 de [7] (que se encontra em anexo) para demonstrar a versão que propomos e utilizamos suas técnicas.

Capítulo 1

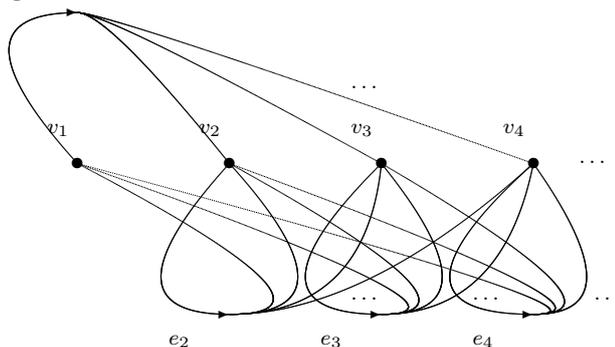
Ultragrafos

Neste primeiro capítulo iremos definir os objetos fundamentais e as notações que serão utilizadas ao longo do texto. O mais relevante objeto a ser definido será o ultragrafo, que foi introduzido por Mark Tomforde em [25]. A maior parte das definições e resultados expostos aqui, foram inspirados pelo artigo [15]. Sendo assim, muitas das demonstrações e exemplos são semelhantes àquelas do referido artigo. Alguns resultados ficaram iguais, outros foram adaptados ou refeitos. Para começar, note que denotamos por $P(G^0)$ a coleção de todos os subconjuntos não-vazios de G^0 e por $\mathcal{P}(G^0)$ a coleção de todos os subconjuntos de G^0 .

Definição 1.1 (Ultragrafo). *Um ultragrafo $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$ consiste de um conjunto enumerável de vértices G^0 , um conjunto enumerável de arestas \mathcal{G}^1 , uma função source $s : \mathcal{G}^1 \rightarrow G^0$ e uma função range $r : \mathcal{G}^1 \rightarrow P(G^0)$.*

Observação 1.2. *Diante de tal definição, podemos observar que um ultragrafo é um objeto mais geral do que um grafo. Um grafo é um ultragrafo cujo range $r(e)$ de cada aresta e é um conjunto unitário.*

Exemplo 1.3. *Considere \mathcal{G} o ultragrafo com $G^0 = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, e arestas $\mathcal{G}^1 = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tais que $s(e_i) = v_i$, para todo i , $r(e_1) = \{v_2, v_3, \dots\}$ e $r(e_j) = G^0$ para todo $j \neq 1$.*



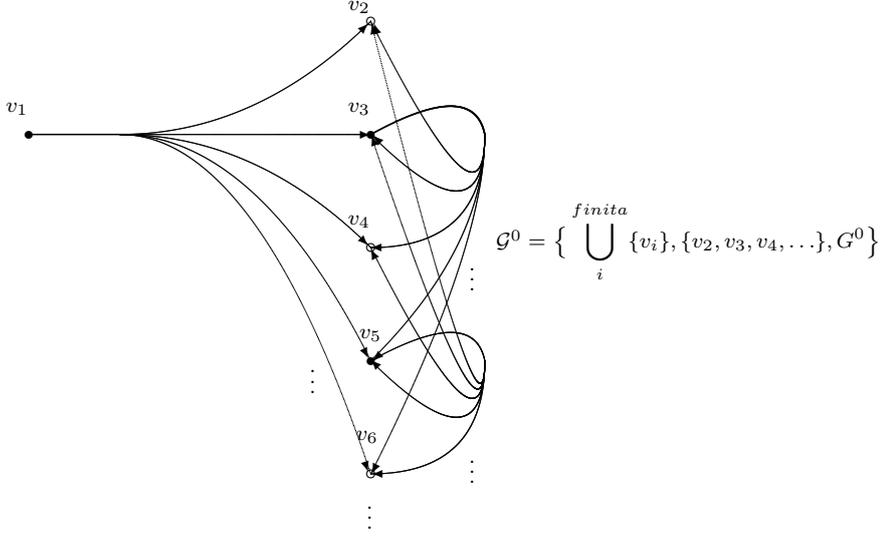
A partir daqui, escreveremos apenas \mathcal{G} quando nos referirmos a um ultragrafo $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$.

1.0.1 C*-álgebra do Ultragrafo

A fim de definirmos a C*-álgebra de um ultragrafo, é necessário definir o seguinte conceito:

Definição 1.4. *Para um ultragrafo $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$, denote \mathcal{G}^0 como sendo a menor subcoleção de $\mathcal{P}(G^0)$ que contém $\{v\}$ para todo $v \in G^0$, contém $r(e)$ para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e é fechado por uniões finitas e interseções finitas (não-vazias). Todo elemento A de \mathcal{G}^0 será chamado de vértice generalizado.*

Exemplo 1.5. Considere o ultragrafo \mathcal{G} em que $G^0 = \{v_i\}_{i \geq 1}$, com arestas $\mathcal{G}^1 = \{e_i\}_i$ em que i é natural ímpar, tais que $s(e_i) = v_i$, para todo i ímpar e $r(e_i) = G^0 \setminus \{v_1\}$ para todo i ímpar. Então temos:



Existe uma caracterização desta coleção dos vértices generalizados que será útil em algumas demonstrações posteriores:

Proposição 1.6 ([25], Lemma 2.12). *Se \mathcal{G} é um ultragrafo, então*

$$G^0 = \left\{ \bigcap_{e \in X_1} r(e) \cup \dots \cup \bigcap_{e \in X_n} r(e) \cup F : X_1, \dots, X_n \text{ são subconjuntos finitos de } G^1 \text{ e } F \text{ é um subconjunto finito de } G^0 \right\}.$$

Definição 1.7 (C*-álgebra do ultragrafo). *Seja \mathcal{G} um ultragrafo. A C*-álgebra de ultragrafo $C^*(\mathcal{G})$ é a C*-álgebra universal gerada por uma família de isometrias parciais $\{s_e : e \in \mathcal{G}^1\}$ e uma família de projeções $\{p_A : A \in \mathcal{G}^0\}$ satisfazendo:*

1. $p_\emptyset = 0$, $p_{A \cap B} = p_A \cap p_B$, $p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$, para todo $A, B \in \mathcal{G}^0$;
2. $s_e^* s_e = p_{r(e)}$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e $s_e^* s_f = 0$, se $e \neq f$;
3. $s_e s_e^* \leq p_{s(e)}$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$; e
4. $p_v = \sum_{s(e)=v} s_e s_e^*$ sempre que $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$.

Como já vimos na Observação 1.2, todo grafo G pode ser visto como um ultragrafo \mathcal{G} . A C*-álgebra de um ultragrafo $C^*(\mathcal{G})$ se reduz à uma C*-álgebra de grafo $C^*(G)$ quando o ultragrafo em questão é um grafo. É o que diz a Proposição 3.1 de [25].

1.1 Notações e definições

As notações introduzidas a seguir são baseadas em [19] e em [15]. Considere \mathcal{G} um ultragrafo. Um *caminho finito* em \mathcal{G} de tamanho n é: ou uma sequência de arestas em \mathcal{G}^1 da forma $e_1 \dots e_n$ em que $s(e_{i+1}) \in r(e_i)$, para todo $1 \leq i < n$, ou um elemento de \mathcal{G}^0 , que tem tamanho zero.

Denotaremos o tamanho de um caminho α por $|\alpha|$ e chamamos de \mathcal{G}^* o conjunto de todos os caminhos finitos de \mathcal{G} . Se $\alpha = e_1 \dots e_n$ então definimos $r(\alpha) = r(e_n)$ e $s(\alpha) = s(e_1)$. Para $A \in \mathcal{G}^0$ definimos $r(A) = A = s(A)$.

Um caminho infinito em \mathcal{G} é uma sequência infinita de arestas $\beta = e_1 e_2 e_3 \dots \in \prod \mathcal{G}^1$ em que $s(e_{i+1}) \in r(e_i)$ para todo $i \geq 1$. Mantenha, claro, $s(\beta) = s(e_1)$. O tamanho de um caminho infinito β é definido como sendo ∞ e o conjunto de todos os caminhos infinitos é denotado por \mathfrak{p}^∞ . Um vértice $v \in \mathcal{G}^0$ é chamado de *sink* se $|s^{-1}(v)| = 0$ e é chamado de *emissor infinito* se $|s^{-1}(v)| = \infty$. Se um vértice é um sink ou um emissor infinito, então é um vértice *singular*. Caso contrário, isto é, caso $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$, tal vértice é chamado de *regular*. Todas estas nomenclaturas foram herdadas da teoria de grafos.

Agora como definiremos objetos diferentes, mudaremos alguns nomes. Para $n \geq 1$, defina

$$\mathfrak{p}^n := \{(\alpha, A) : \alpha \in \mathcal{G}^*, |\alpha| = n, A \in \mathcal{G}^0, A \subseteq r(\alpha)\}.$$

Convencionamos que $(\alpha, A) = (\beta, B)$ se, e somente se $\alpha = \beta$ e $A = B$. Agora, fazendo $\mathfrak{p}^0 := \mathcal{G}^0$ podemos definir o *espaço de ultracaminhos* associado ao ultragrafo \mathcal{G} como sendo $\mathfrak{p} := \bigsqcup_{n \geq 0} \mathfrak{p}^n$.

Os elementos de \mathfrak{p} serão chamados de ultracaminhos. Note que podemos identificar os caminhos finitos de \mathcal{G}^* dentro de \mathfrak{p} enviando α para $(\alpha, r(\alpha))$. Diremos que o tamanho do par (α, A) , denotado por $|(\alpha, A)|$, será o mesmo tamanho de α , ou seja, $|(\alpha, A)| = |\alpha|$. Assim, cada $A \in \mathcal{G}^0$ pode ser visto como um ultracaminho de tamanho zero e pode ser identificado com o par (A, A) . Com isso, vamos estender as funções range e source para \mathfrak{p} , fazendo $r(\alpha, A) = A$, $s(\alpha, A) = s(\alpha)$ e $r(A, A) = r(A) = A = s(A) = s(A, A)$.

Vamos definir uma “operação” de concatenação “.” em \mathfrak{p} da seguinte maneira: sejam $x = (\alpha, A)$ e $y = (\beta, B)$, com $|x| \geq 1$ e $|y| \geq 1$, então $x.y$ está definido se, e somente se, $s(\beta) \in A$. Neste caso, $x.y := (\alpha\beta, B)$. Também definimos:

$$x.y = \begin{cases} x \cap y, & \text{se } x, y \in \mathcal{G}^0 \text{ e se } x \cap y \neq \emptyset \\ y, & \text{se } x \in \mathcal{G}^0, |y| \geq 1, \text{ e se } s(y) \in x \\ x_y, & \text{se } y \in \mathcal{G}^0, |x| \geq 1, \text{ e se } r(x) \cap y \neq \emptyset, \end{cases}$$

em que, x_y é definido por $(\alpha, A \cap y)$, sendo $x = (\alpha, A)$, com $|\alpha| \geq 1$ e $y \in \mathcal{G}^0$. Podemos também concatenar ultracaminhos de \mathfrak{p} com caminhos de \mathfrak{p}^∞ , desde que $s(\beta) \in r(\alpha, A) = A$, então fazemos $(\alpha, A).\beta = \alpha\beta \in \mathfrak{p}^\infty$, em que $(\alpha, A) \in \mathfrak{p}$ e $\beta \in \mathfrak{p}^\infty$. Além disso, se $\alpha = A$ então $(A, A).\beta = \beta \in \mathfrak{p}^\infty$. Quando $s(\beta) \notin A$, $(\alpha, A).\beta$ não está definido. Diremos que $x \in \mathfrak{p} \sqcup \mathfrak{p}^\infty$ tem $y \in \mathfrak{p}$ como um *segmento inicial* se $x = y.x'$, para algum $x' \in \mathfrak{p}$, com $s(x') \cap r(y) \neq \emptyset$.

Assim como no produto de funções, iremos omitir a notação da concatenação acima. Assim, escreveremos apenas xy ao invés de $x.y$.

1.2 Espaço Topológico

Nesta seção, uma vez definido o espaço de ultracaminhos associado a um ultragrafo, vamos definir um espaço topológico associado a um ultragrafo. Esta definição é uma generalização do espaço de caminhos de fronteira de um grafo dirigido (boundary path space) vista por exemplo em [5], [8] e [26]. Antes disso, precisamos de algumas definições.

Definição 1.8. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo. Para cada subconjunto $A \in \mathcal{G}^0$, seja $\varepsilon(A) = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A\}$. Diremos que $A \in \mathcal{G}^0$ é um emissor infinito se $|\varepsilon(A)| = \infty$. Caso contrário, isto é, caso $|\varepsilon(A)| < \infty$ diremos que A é um emissor finito.*

Note que se $\varepsilon(A) = \emptyset$, então A contém apenas sinks.

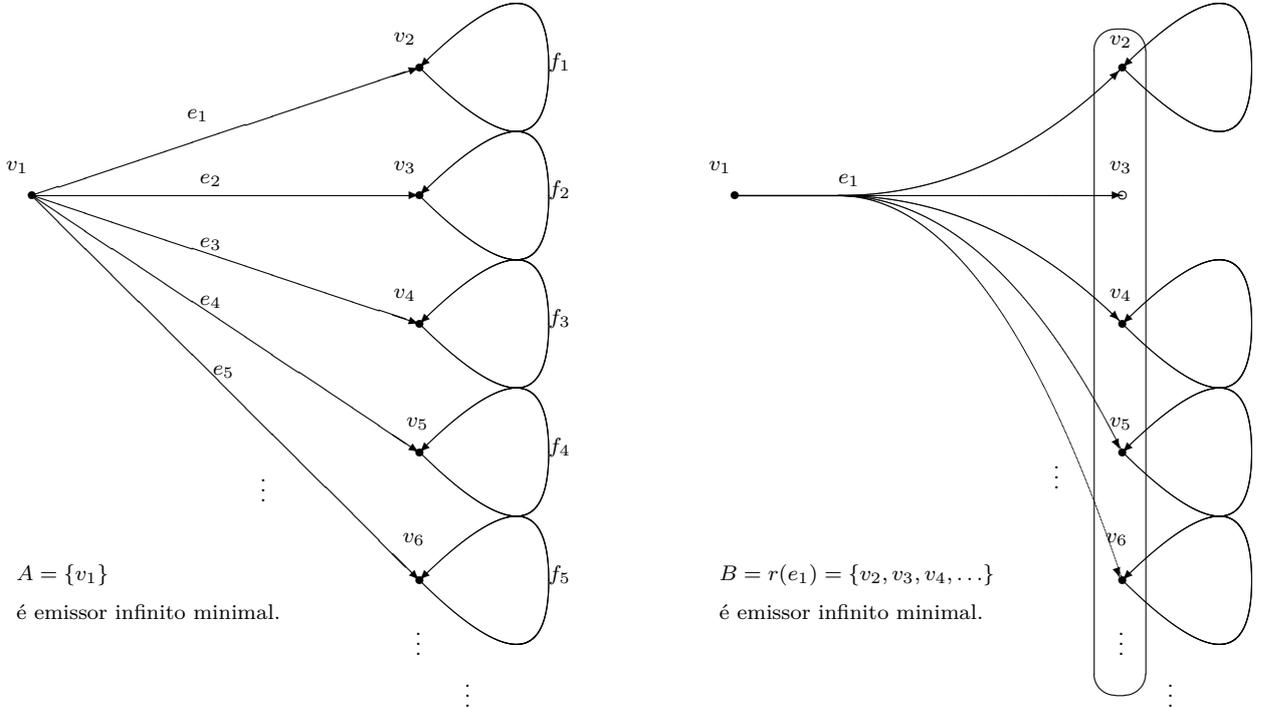
Definição 1.9. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo e $A \in \mathcal{G}^0$. Diremos que A é um emissor infinito minimal se A é um emissor infinito, A não contém emissores infinitos próprios (em \mathcal{G}^0) e A não contém nenhum subconjunto próprio de A em \mathcal{G}^0 que é emissor finito e que tenha cardinalidade infinita, (sejam eles sinks ou vértices regulares). Equivalentemente, A é um emissor infinito minimal se é um emissor infinito (ou seja, $|\varepsilon(A)| = \infty$) e $\nexists B \subsetneq A \cap \mathcal{G}^0$ tal que $|\varepsilon(B)| = \infty$ e $\nexists B \subsetneq A \cap \mathcal{G}^0$ tal que $|B| = \infty$ e $|\varepsilon(B)| < \infty$. Denotaremos por A_∞ o conjunto de todos os emissores infinitos minimais em \mathcal{G}^0 . Sendo assim,*

$$A_\infty = \{A \in \mathcal{G}^0 : |\varepsilon(A)| = \infty; \nexists B \subsetneq A \cap \mathcal{G}^0 / |\varepsilon(B)| = \infty \text{ e } \nexists B \subsetneq A \cap \mathcal{G}^0 / |B| = \infty \text{ e } |\varepsilon(B)| < \infty\}$$

Note que se o ultragrafo não contém sink, esta definição de emissor infinito minimal é exatamente igual àquela feita em [15].

Exemplo 1.10.

Abaixo temos dois exemplos diferentes de emissores infinitos minimais:



Observação 1.11. *Note que no segundo ultragrafo do exemplo acima, o range $r(e_1)$ contém um sink. Se tivéssemos mais alguns sinks, não haveria problema, pois o emissor infinito continuaria sendo minimal. O que não pode haver é uma quantidade infinita de sinks contidos em $r(e_1) \cap \mathcal{G}^0$.*

Proposição 1.12. *Se A é um emissor infinito minimal e B é um emissor infinito em \mathcal{G}^0 , então $A \subseteq B$ ou a interseção $A \cap B$ tem cardinalidade no máximo finita.*

Demonstração. De fato, se $A \cap B = \emptyset$ então a interseção é finita e segue o resultado. Suponha então que $A \cap B \neq \emptyset$. Nesse caso, temos 2 casos:

- Se $|A \cap B| < \infty$, o resultado segue.
- Se $|A \cap B| = \infty$, temos 2 subcasos:

- Caso $|\varepsilon(A \cap B)| = \infty$, então temos de ter $A \cap B = A$, pois caso contrário, teríamos $A \cap B \subsetneq A$ e $|\varepsilon(A \cap B)| = \infty$, o que contraria a minimalidade de A . Logo $A \subseteq B$.
- Caso $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$, então como $|A \cap B| = \infty$ temos que $A \cap B (\subseteq A)$ contém uma quantidade infinita de sinks, o que contraria a minimalidade de A . Logo, não pode ocorrer $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$ e $|A \cap B| = \infty$.

■

O lema a seguir é uma boa caracterização do que é um emissor infinito minimal e será útil nas demonstrações ao longo deste capítulo. Além disso, tal resultado é uma generalização do Lema 3.3 em [15].

Lema 1.13. *Seja $x = (\alpha, A) \in \mathfrak{p}$ em que A é um emissor infinito minimal. Se a cardinalidade de A é finita, então é igual a um. Se a cardinalidade de A é infinita, então $A = \bigcap_{e \in Y} r(e)$ para algum conjunto finito $Y \subseteq \mathcal{G}^1$.*

Demonstração. Suponha primeiro que a cardinalidade de A é finita. Então existe algum vértice $v \in A$ que é um emissor infinito. Então, obrigatoriamente $A = \{v\}$ pois, caso contrário, contradiria a minimalidade de A . Logo, a cardinalidade é um.

Suponha agora que a cardinalidade de A é infinita. Da Proposição 1.6 sabemos que

$$A = \bigcap_{e \in Y_1} r(e) \cup \dots \cup \bigcap_{e \in Y_n} r(e) \cup F,$$

em que Y_1, \dots, Y_n são subconjuntos finitos de \mathcal{G}^1 e $F \subseteq G^0$ é finito. Como A é emissor infinito, temos que pelo menos para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ o conjunto $\bigcap_{e \in Y_i} r(e)$ é emissor infinito ou F é um emissor infinito. Assim, pela minimalidade de A temos que $A = \bigcap_{e \in Y_i} r(e)$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ ou $A = F$. Como supomos que a cardinalidade de A é infinita, e F é finito, temos que $A \neq F$. Portanto, $A = \bigcap_{e \in Y_i} r(e)$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. ■

Agora, vamos definir um outro tipo de subconjunto $A \subseteq \mathcal{G}^0$ que será útil no decorrer do texto. Mas primeiro, vamos considerar a seguinte definição. Lembrando que sink é um vértice $v \in G^0$ tal que $|s^{-1}(v)| = 0$.

Definição 1.14. *Defina o conjunto $G_{sink}^0 := G_s^0 := \{v \in G^0 : |s^{-1}(v)| = 0\} \subseteq G^0$, ou seja, o conjunto de todos os sinks em G^0 . Defina agora, $\mathcal{G}_{sink}^0 := \mathcal{G}_s^0 := \bigsqcup_{v_i \in G_s^0} \{\{v_i\}\} \subseteq \mathcal{G}^0$, ou seja, \mathcal{G}_s^0 é a coleção de todos os subconjuntos unitários de \mathcal{G}^0 que contém apenas um sink como elemento.*

Definição 1.15. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo e $A \in \mathcal{G}^0$. Diremos que A é um sink minimal se $|A| = \infty$, $|\varepsilon(A)| < \infty$ e A não contém subconjuntos (em \mathcal{G}^0) com cardinalidade infinita. Chamaremos o conjunto de todos os sinks minimais de \mathcal{G}^0 de A_s . Assim, temos que*

$$A_s = \{A \in \mathcal{G}^0 : |A| = \infty; \varepsilon(A) < \infty; \nexists B \subsetneq A \cap \mathcal{G}^0 \text{ tal que } |B| = \infty\}.$$

Proposição 1.16. *Se $A_1, A_2 \in A_s$, então $|A_1 \cap A_2| < \infty$ ou $A_1 = A_2$.*

Demonstração. De fato, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, segue o resultado. Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, então $|A_1 \cap A_2| < \infty$ (e segue o resultado) ou $|A_1 \cap A_2| = \infty$. Neste caso, se existe um vértice $v \in A_1 \setminus A_2$, então temos que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}^0$ é tal que $A_1 \cap A_2 \subsetneq A_1$ e $|A_1 \cap A_2| = \infty$, o que contraria a minimalidade de A_1 . Logo $A_1 = A_2$. \blacksquare

Os conjuntos considerados a seguir serão necessários na construção do espaço que vamos trabalhar ao longo de todo o texto. Considere

$$X_{min} := \{(\alpha, A) \in \mathfrak{p} : |\alpha| \geq 1, A \in A_\infty\} \cup \{(A, A) \in \mathfrak{p}^0 : A \in A_\infty\};$$

$$X_{sin} := \{(\alpha, A) \in \mathfrak{p} : |\alpha| \geq 1, A \in \mathcal{G}_s^0 \sqcup A_s\} \cup \{(A, A) \in \mathfrak{p}^0 : A \in \mathcal{G}_s^0 \sqcup A_s\}$$

Definição 1.17. O espaço dos ultracaminhos de fronteira X é definido por

$$X := \mathfrak{p}^\infty \sqcup X_{min} \sqcup X_{sin}.$$

Definimos também

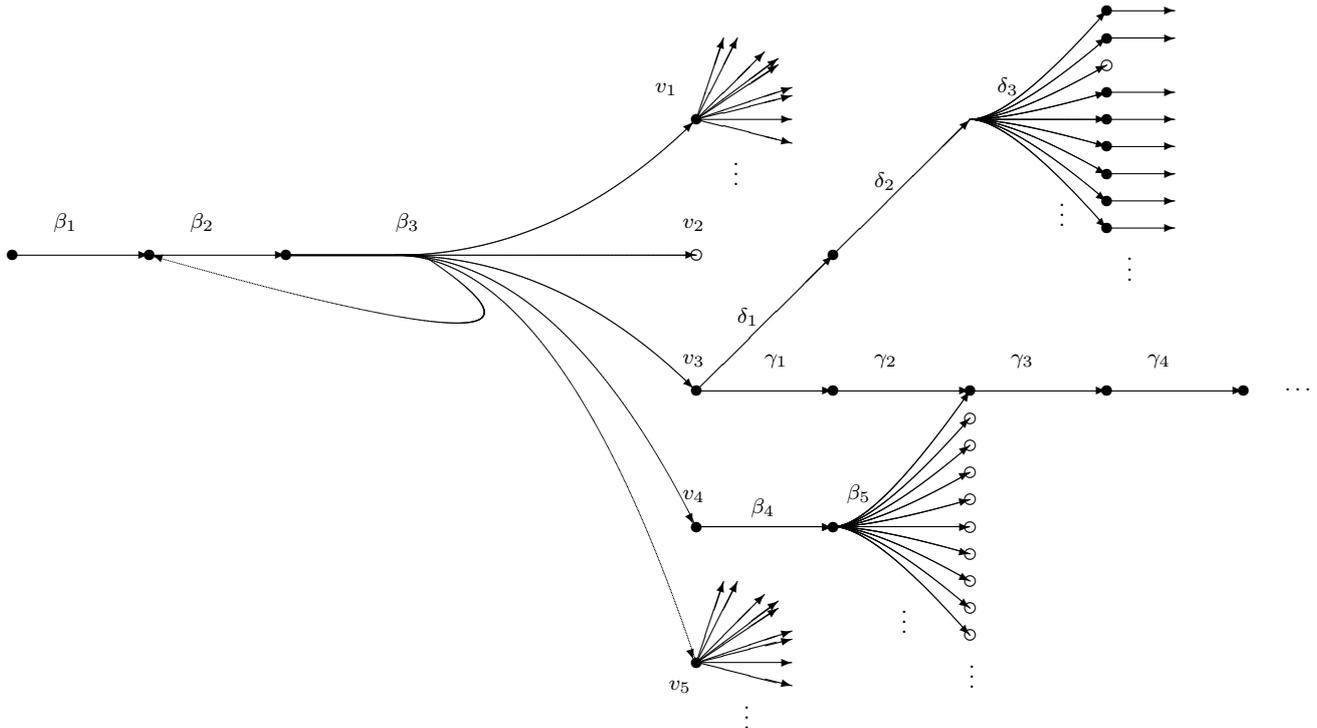
$$X_{fin} := X_{min} \sqcup X_{sin}.$$

Com isso, $X = \mathfrak{p}^\infty \sqcup X_{fin}$.

Observação 1.18. As notações utilizadas aqui são semelhantes àquelas em [15]. Porém aqui, o conjunto X_{fin} tem outra definição. Contudo, quando o ultragrafo não contém sinks, temos que $X_{sin} = \emptyset$ e, conseqüentemente, $X_{fin} = X_{min}$, ou seja, as definições são equivalentes.

Observação 1.19. Note que se $(\alpha, A) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$, então $|A| = 1$ ou $|A| = \infty$.

Exemplo 1.20. Se o ultragrafo for da forma a seguir, teríamos, por exemplo, os ultracaminhos $(\beta_1\beta_2\beta_3, \{v_1\})$, $(\beta_3, \{v_2\})$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_2\beta_3\dots$, $(\beta_2\beta_3, \{v_5\})$, $\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots$, $(\{v_1\}, \{v_1\})$, $(\{v_2\}, \{v_2\})$, $(\{v_5\}, \{v_5\})$, $\beta_2\beta_3\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots$, $(\delta_1\delta_2\delta_3, r(\delta_3))$ etc. Assim, os ultracaminhos que tem range igual à $\{v_1\}$, ou $\{v_5\}$ ou $r(\delta_3)$ pertencem à X_{min} . Se tem range igual à $\{v_2\}$ ou $r(\beta_5)$ pertence à X_{sin} e por fim, se o caminho passa por $\gamma_3\dots$ então o caminho é infinito e portanto pertence à \mathfrak{p}^∞ .



Vamos agora definir os conjuntos que serão utilizados na construção da base para uma topologia em X . Tais conjuntos serão chamados de *cilindros*.

Para cada $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, seja

$$D_{(\beta, B)} := \{y \in X : y = \beta\gamma; s(\gamma) \in B\}.$$

Observação 1.21. Note que se $(\beta, B) \in \mathfrak{p}^0$, então $(\beta, B) = (B, B)$ e assim,

$$\begin{aligned} D_{(\beta, B)} = D_{(B, B)} &= \{(A, A) \in X_{fin} : A \subseteq B\} \cup \{(\alpha, A) \in X_{fin} : s(\alpha) \in B\} \cup \{\gamma \in \mathfrak{p}^\infty : s(\gamma) \in B\} \\ &= \{y \in X : s(y) \in B\}. \end{aligned}$$

Suponha que $(\beta, B) \in X_{fin}$, $F \subseteq \varepsilon(B)$ finito e $S \subseteq B \cap G_s^0$ finito. Defina

$$D_{(\beta, B), F, S} := \{(\beta, B)\} \sqcup \{y \in X : y = \beta\gamma', |\gamma'| \geq 1, \gamma'_1 \in \varepsilon(B) \setminus F\} \sqcup \{y \in X_{sin} : y = (\beta, \{v\}) : v \in B \setminus S\}.$$

Observação 1.22. Novamente note que se $(\beta, B) \in \mathfrak{p}^0 \cap X_{fin}$, então $(\beta, B) = (B, B)$ e assim,

$$D_{(\beta, B), F, S} = D_{(B, B), F, S} = \{(B, B)\} \sqcup \{\gamma \in X : \gamma_1 \in \varepsilon(B) \setminus F\} \sqcup \{(\{v\}, \{v\}) \in X_{sin} : v \in B \setminus S\}.$$

Disso, podemos concluir que se $B = \{v\}$ em que v é sink, então $D_{(\beta, B), F, S} = D_{(B, B)} = \{(\{v\}, \{v\})\}$, ou seja, o cilindro é um conjunto unitário. Analogamente, $D_{(\beta, \{v\}), F, S} = \{(\beta, \{v\})\}$.

Note ainda que quando $F = \emptyset$ ou $S = \emptyset$, podemos escrever apenas $D_{(\beta, B), F}$ ou $D_{(\beta, B), S}$ sem que haja confusão já que $F \subseteq \mathcal{G}^1$ e $S \subseteq G_s^0$.

Observação 1.23. Para facilitar a escrita e a leitura, omitiremos G_s^0 quando estivermos nos referindo ao subconjunto finito $S \subseteq B \cap G_s^0$ do cilindro $D_{(\beta, B), F, S}$. Escreveremos somente $S \subseteq B$ e fica subentendido que $S \subseteq G_s^0$.

Diante do exposto, temos ingredientes suficientes para descrever uma base para uma topologia em X .

Proposição 1.24. A coleção de cilindros

$$\left\{ \{D_{(\beta, B)} : (\beta, B) \in \mathfrak{p}, |\beta| \geq 1\} \cup \{D_{(\beta, B), F, S} : (\beta, B) \in X_{fin}, F \subseteq \varepsilon(B), S \subseteq B, |F|, |S| < \infty\} \right\}$$

é uma base enumerável para uma topologia em X . Além disso, se $\gamma = e_1 e_2 \dots \in \mathfrak{p}^\infty$ então uma base de vizinhanças para γ é dada por

$$\{D_{(e_1 \dots e_n, r(e_n))} : n \in \mathbb{N}\},$$

e se $x = (\alpha, A) \in X_{fin}$, em que A é emissor infinito minimal ou sink minimal, então uma base de vizinhanças para x é dada por

$$\{D_{(\alpha, A), F, S} : F \subseteq \varepsilon(A), S \subseteq A, |F|, |S| < \infty\}.$$

Demonstração. Obviamente o espaço X pode ser escrito como a união dos cilindros descritos na coleção acima, isto é, todo elemento $x \in X$ pode ser “encoberto” por um cilindro adequado ou por uma união deles. Além disso, tal coleção de cilindros será enumerável já que o conjunto de arestas que dá origem ao conjunto dos índices dos cilindros é enumerável.

Agora, temos de mostrar que se $x \in X$ é tal que $x \in A \cap B$ com A e B cilindros, então existe um cilindro C tal que $x \in C \subseteq A \cap B$. Primeiro, se $\gamma \in \mathfrak{p}^\infty$ é tal que $\gamma \in A \cap B$ com A, B cilindros, então claramente é possível achar um segmento inicial de γ , digamos γ_1 (com $|\gamma_1|$ maior que os

tamanhos dos ultracaminhos que definem A e $e=B$, então $\gamma = \gamma_1\gamma'$, tal que $D_{(\gamma_1, r(\gamma_1))}$ contém γ e está contido em $A \cap B$.

Seja $x = (\alpha, A) \in X_{min}$. Suponha que $x \in D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta_2, B_2), F_2, S_2}$ com $|\beta_2| > |\beta_1|$ (note que $|\beta_1|$ pode ser igual a zero). Então (β_1, B_1) é segmento inicial de (β_2, B_2) e assim, $x \in D_{(\beta_2, B_2), F_2, S_2} \subseteq D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1}$. Caso $|\beta_1| = |\beta_2| = 0$, pelas minimalidades de B_1 e de B_2 , temos que $\beta_1 = B_1$ e $\beta_2 = B_2$ e assim, se $|x| > 0$ basta observarmos que $x \in D_x \subseteq D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta_2, B_2), F_2, S_2}$. Por outro lado, se $|x| = 0$, então $x = (A, A)$ e então não podemos ter B_1 nem B_2 sinks minimais (nem conjuntos unitários com um único sink), uma vez que sinks minimais não emitem infinitas arestas e A emite. Deste modo B_1 e B_2 tem de ser emissores infinitos minimais. Então, pela Proposição 1.12, temos que $|B_1 \cap B_2| < \infty$ ou $B_1 = B_2$. Em ambos os casos, como $A \subseteq B_1 \cap B_2$ e A, B_1 e B_2 são emissores infinitos minimais, segue que $x \in D_{(A, A), F_1 \cup F_2, S_1 \cup S_2} \subseteq D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta_2, B_2), F_2, S_2}$.

Supondo que $x = (\alpha, A) \in D_{(\beta, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta, B_2), F_2, S_2}$, com $|\beta| \geq 1$. Se $|x| > |\beta| \geq 1$ basta observarmos que $x \in D_{(\alpha, A)} \subseteq D_{(\beta, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta, B_2), F_2, S_2}$. Por outro lado, se $|x| = |\beta|$, então $x = (\beta, A)$ com A é emissor infinito. Diante disso, B_1 e B_2 não podem ser sinks minimais (nem conjuntos unitários que contém apenas um sink). Logo B_1 e B_2 são emissores infinitos minimais. Pela Proposição 1.12, temos que $|B_1 \cap B_2| < \infty$ ou $B_1 = B_2$. Como no caso mostrado acima $x \in D_{(\alpha, A), F_1 \cup F_2, S_1 \cup S_2} \subseteq D_{(\beta, B_1), F_1, S_1} \cap D_{(\beta, B_2), F_2, S_2}$.

Se supormos que $x \in D_{(\beta, B)} \cap D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1}$, então temos 3 casos: se $|\beta| > |\beta_1|$ então $D_{(\beta, B)} \subseteq D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1}$. Se $|\beta_1| > |\beta| \geq 1$ então $D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1} \subseteq D_{(\beta, B)}$. Mas se $|\beta_1| = |\beta| \geq 1$ temos que $\beta_1 = \beta$ e, pela minimalidade de B_1 , temos que $|B \cap B_1| < \infty$ ou $B_1 \subseteq B$. Se $|B \cap B_1| < \infty$, então $x \in D_{(\beta, B \cap B_1), F_1, S_1} \subseteq D_{(\beta, B)} \cap D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1}$. Porém, se ocorrer $B_1 \subseteq B$ então $D_{(\beta_1, B_1), F_1, S_1} \subseteq D_{(\beta, B)}$.

Por último, se $x \in D_{(\beta_1, B_1)} \cap D_{(\beta_2, B_2)}$ e $|\beta_1| > |\beta_2|$ então $D_{(\beta_1, B_1)} \subseteq D_{(\beta_2, B_2)}$. Mas se $|\beta_1| = |\beta_2| > 0$ então $\beta_1 = \beta_2$ e $x \in D_{(\beta_1, B_1 \cap B_2)} \subseteq D_{(\beta_1, B_1)} \cap D_{(\beta_2, B_2)}$.

Para $x = (\alpha, A) \in X_{sin}$ com A sink minimal, a demonstração é similar ao que foi feito nos parágrafos anteriores. Basta trocar, eventualmente, $|A \cap B| < \infty$ por $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$.

Para $x = (\alpha, \{v\}) \in X_{sin}$, com v sink, basta notar que $(\alpha, \{v\}) \in \{(\alpha, \{v\})\} = D_x \subseteq A \cap B$, para quaisquer cilindros A e B .

Para caracterizar as bases de vizinhanças, precisamos mostrar que se $x \in X$ pertence a um aberto A , então existe alguma vizinhança básica de x que está contida em A . Seja $\gamma \in \mathfrak{p}^\infty$, então $\gamma = e_1 e_2 \dots$. Suponha que $\gamma \in D_{(\beta, B), F, S}$. Então, temos que $(\beta, B) = (e_1 \dots e_n, B)$ ou $(\beta, B) = (B, B)$, em que B é emissor infinito minimal ou sink minimal. Se $(\beta, B) = (e_1 \dots e_n, B)$, então $e_{n+1} \notin F$ e assim, $\gamma \in D_{(\beta e_{n+1}, r(e_{n+1}))} \subseteq D_{(\beta, B), F, S}$. Se $(\beta, B) = (B, B)$, então $e_1 \notin F$ e portanto $\gamma \in D_{(e_1, r(e_1))} \subseteq D_{(\beta, B), F}$. Por outro lado, se $\gamma \in D_{(\beta, B)}$ então obviamente $(\beta, B) = (e_1 \dots e_n, B)$, e assim, $\gamma \in D_{(\beta e_{n+1}, r(e_{n+1}))} \subseteq D_{(\beta, B)}$.

Para $x = (\alpha, A) \in X_{fin}$, com A emissor infinito minimal ou sink minimal, suponha primeiro que $x \in D_{(\beta, B), F, S}$. Obviamente $|\alpha| \geq |\beta| \geq 0$. Se $|\alpha| = |\beta| = 0$, então $\alpha = A$ e $\beta = B$, além disso, $A \subseteq B$. Como A é minimal e B é minimal, então $A = B$. Assim, basta considerar $F' = F$ e $S' = S$ que temos $x \in D_{(\alpha, A), F', S'} \subseteq D_{(\beta, B), F, S}$. Se $|\alpha| > |\beta| = 0$ ou $|\alpha| > |\beta| > 0$ temos que β é segmento inicial de α . Em ambos os casos, temos que $x \in D_{(\alpha, A)} \subseteq D_{(\beta, B), F, S}$. Por fim, se $|\alpha| = |\beta| > 0$, temos que $\alpha = \beta$ e $A \subseteq B$. Como os 2 conjuntos são minimais, $A = B$. Deste modo, $x \in D_{(\alpha, A), F, S} \subseteq D_{(\beta, B), F, S}$. Por outro lado, se $x \in D_{(\beta, B)}$, então $|\alpha| \geq |\beta| \geq 1$. Se $|\alpha| > |\beta|$, então β é segmento inicial de α e portanto $x \in D_{(\alpha, A), \emptyset} \subseteq D_{(\beta, B)}$. Se $|\alpha| = |\beta|$, temos que $x \in D_{(\alpha, A), \emptyset} \subseteq D_{(\beta, B)}$. ■

Observação 1.25. Note que se \mathcal{G} é um ultragrafo que não contém sinks, nossa proposição coincide com a Proposição 3.4 em [15] e o espaço topológico aqui coincide com o espaço topológico definido lá. Além disso, se \mathcal{G} é um grafo, os únicos emissores infinito minimais são os conjuntos consistindo

de apenas um vértice que é singular nos grafos. Nestas condições, nosso espaço topológico coincide com o espaço de caminhos de fronteira da Definição 2.1 em [26].

Diante da Proposição 1.24, conseguimos obter uma topologia para X . Este espaço topológico tem algumas propriedades interessantes que serão mostradas a seguir.

Proposição 1.26. *Os cilindros que formam a base da topologia definida para X são fechados.*

Demonstração. De início, vamos mostrar para um cilindro da forma $D_{(\beta,B)}$, com $|\beta| \geq 1$. Suponha que $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$. Seja $\delta \in D_{(\beta,B)}^C$, então temos 4 casos:

- Se $|\delta| = \infty$, digamos $\delta = \delta_1 \delta_2 \dots$, então $s(\delta_{n+1}) \notin B$ ou $\delta_1 \dots \delta_n \neq \beta$. Em ambos os casos, temos que $\delta \in D_{(\delta_1 \dots \delta_{n+1}, r(\delta_{n+1}))} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
- Se $|\delta| < \infty$ e $\delta = (\delta, \{v\}) \in X_{sin}$, temos que $\delta \in \{\delta\} = D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
- Se $|\delta| < \infty$ e $\delta = (\delta, A) \in X_{min}$, temos 3 subcasos
 - $|\delta| < |\beta|$: Claro que precisamos lidar apenas com o caso em que δ é segmento inicial de β , pois caso contrário, o resultado é óbvio. Note que $\delta_1 \dots \delta_k = \beta_1 \dots \beta_k$ em que $|\delta| = k < n$. Se $s(\beta_{k+1}) \in A$, então $\delta \in D_{(\delta,A),\{\beta_{k+1}\}} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$. Se $s(\beta_{k+1}) \notin A$, então $\delta \in D_{(\delta,A)} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
 - $|\delta| = |\beta|$: Lidamos apenas com o caso em que $\beta = \delta$ pois, caso contrário, obviamente $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$. Suponha então que $\beta = \delta$, temos 2 casos: Se $|A| < \infty$ então pelo Lema 1.13, $|A| = 1$ e portanto, $A = \{u\}$ em que u é um emissor infinito minimal. Assim, $u \notin B$ pois $\delta \in D_{(\beta,B)}^C$. Assim, $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$. Caso $|A| = \infty$, então $|A \cap B| < \infty$, pois caso contrário, pela minimalidade de A teríamos, $A \cap B = A$, ou seja, $A \subseteq B$, o que faria com que $\delta \in D_{(\beta,B)}$, um absurdo. Note ainda que $A \cap B$ não contém nenhum emissor infinito, pois iria contrariar a minimalidade de A . Então considere $F = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A \cap B\}$. Além disso, considere $S = \{v \in \mathcal{G}_s^0 : v \in A \cap B\}$. Assim, claro que os conjuntos F e S são finitos e $\delta \in D_{(\delta,A),F,S} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
 - $|\delta| > |\beta|$: Novamente, basta considerar apenas o caso em que $\delta_1 \dots \delta_n = \beta_1 \dots \beta_n$. Mas note que para que $\delta \in D_{(\beta,B)}^C$, temos de ter $s(\delta_{n+1}) \notin B$, e assim, $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
- Se $|\delta| < \infty$ e $\delta = (\delta, A) \in X_{sin}$ com A sink minimal, temos 3 subcasos
 - $|\delta| < |\beta|$: basta fazer para o caso em que δ é segmento inicial de β , pois caso contrário, o resultado é óbvio. Note que $\delta_1 \dots \delta_k = \beta_1 \dots \beta_k$ em que $|\delta| = k < n$. Se $s(\beta_{k+1}) \in A$, então $\delta \in D_{(\delta,A),\{\beta_{k+1}\}} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$. Se $s(\beta_{k+1}) \notin A$, então $\delta \in D_{(\delta,A)} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
 - $|\delta| = |\beta|$: Consideramos apenas o caso em que $\beta = \delta$ pois, caso contrário, obviamente $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$. Suponha então que $\beta = \delta$. Como $|A| = \infty$, temos, pela minimalidade de A que $|A \cap B| < \infty$, pois caso contrário, teríamos $|A \cap B| = \infty$ com $A \cap B \subsetneq A$, o que fere a minimalidade de A ou $A \cap B = A$ e assim, $A \subseteq B$ e por conseguinte $(\delta, A) \in D_{(\beta,B)}$, absurdo. Além disso, como A é sink minimal, $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$. Portanto, temos que $\delta \in D_{(\delta,A),\varepsilon(A \cap B),A \cap B} \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.
 - $|\delta| > |\beta|$: Mais uma vez, basta considerar apenas o caso em que $\delta_1 \dots \delta_n = \beta_1 \dots \beta_n$. Mas note que para que $\delta \in D_{(\beta,B)}^C$, temos de ter $s(\delta_{n+1}) \notin B$, e assim, $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(\beta,B)}^C$.

Agora, provamos para $D_{(B,B)}$ com B emissor infinito minimal. Seja $\delta \in D_{(B,B)}^C$. Mais alguns casos:

- Suponha inicialmente que $|\delta| = 0$, então $\delta = (A, A) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ com A minimal ou $\delta = (\{v\}, \{v\}) \in X_{sin}$. Se $\delta = (\{v\}, \{v\})$, então obviamente $v \notin B$ e portanto, $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(B,B)}^C$. Por outro lado, se $\delta = (A, A)$ com A minimal (sink ou emissor infinito), então $0 \leq |A \cap B| < \infty$, pois caso contrário, pelas minimalidades de A e de B , teríamos $A = B$, um absurdo já que $\delta \in D_{(B,B)}^C$. Além disso, $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$, pois caso contrário, contrariamos as minimalidades de A e de B . Assim, se $F = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A \cap B\}$ e $S = A \cap B$, temos que $\delta \in D_{(\delta,A)F,S} \subseteq D_{(B,B)}^C$.
- No caso em que $|\delta| > 0$, temos que $\delta \in D_\delta \subseteq D_{(B,B)}^C$.

Para $D_{(\{v\},\{v\})}$ com v sink, se for necessário, basta considerarmos $S = \{v\}$ e observarmos que $\delta \in D_{\delta,S} \subseteq D_{(\{v\},\{v\})}^C$.

Para $D_{(B,B)}$, com B sink minimal, é análogo ao que foi feito para emissor infinito minimal.

Falta apenas mostrar para os cilindros da forma, $D_{(\beta,B),F,S}$ com B emissor infinito minimal ou sink minimal. Mas para isso, basta notar que

$$D_{(\beta,B),F,S} = D_{(\beta,B)} \bigcap_{\gamma \in F} D_{(\beta\gamma,r(\gamma))}^C \bigcap_{v \in S} D_{(\beta,\{v\})}^C.$$

■

Outro fato importante deste espaço topológico X é que ele é Hausdorff.

Proposição 1.27. *O espaço de ultracaminhos de fronteira X munido da topologia que tem como base os cilindros da forma*

$$\left\{ \{D_{(\beta,B)} : (\beta, B) \in \mathfrak{p}, |\beta| \geq 1\} \cup \{D_{(\beta,B),F,S} : (\beta, B) \in X_{fin}, F \subseteq \varepsilon(B), S \subseteq B, |F|, |S| < \infty\} \right\}$$

é Hausdorff.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Se $x, y \in \mathfrak{p}^\infty$, então $x = \alpha_1\alpha_2\dots$ e $y = \beta_1\beta_2\dots$. Como são diferentes, existe algum n para o qual $\alpha_n \neq \beta_n$. Com isso, é só notar que $D_{(\alpha_1\dots\alpha_n,r(\alpha_n))} \cap D_{(\beta_1\dots\beta_n,r(\beta_n))} = \emptyset$ enquanto são vizinhanças de x e de y .

Sejam agora $x = \alpha_1\alpha_2\dots \in \mathfrak{p}^\infty$ e $y = (\beta, B) \in X_{fin}$ com B minimal. Claro que se β não for segmento inicial de x conseguiríamos facilmente separar os pontos. Suponha então que β seja segmento inicial de x . Assim, $\beta = \alpha_1\dots\alpha_{|\beta|}$. Se $s(\alpha_{|\beta|+1}) \notin B$ o resultado segue facilmente. Se $s(\alpha_{|\beta|+1}) \in B$, então, pelo fato de B ser emissor infinito minimal ou sink minimal, temos que $y \in D_{(\beta,B),\{\alpha_{|\beta|+1}\}}$. Além disso, $x \in D_{(\alpha_1\dots\alpha_{|\beta|+1},r(\alpha_{|\beta|+1}))}$ e a interseção destes cilindros é obviamente vazia.

Para separar $x = \alpha_1\alpha_2\dots \in \mathfrak{p}^\infty$ e $y = (\beta, \{v\}) \in X_{sin}$ é mais simples, basta considerarmos $D_{(\alpha_1\dots\alpha_{|\beta|+1},r(\alpha_{|\beta|+1}))}$ e D_y .

Suponha que $x = (\alpha, A) \in X_{min}$ e $y = (\beta, B) \in X_{min}$. Então, caso $|\alpha| > |\beta|$ precisamos considerar apenas o caso em que β é segmento inicial de α e $\alpha_{|\beta|+1} \in B$. Neste caso, basta utilizar as vizinhanças D_x e $D_{(\beta,B),\{\alpha_{|\beta|+1}\}}$. No caso em que $\alpha = \beta$, temos que $A \cap B$ é finita ou $A = B$, pela Proposição 1.12. Mas se fossem iguais teríamos $x = y$. Além disso, $A \cap B$ não contém nenhum emissor infinito, pois isto contrariaria a minimalidade de A . Assim, se definirmos $F = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A \cap B\}$ e $S = \{v \in A \cap B \cap G_s^0\}$, obtemos as vizinhanças necessárias, que são $D_{(\alpha,A),F,S}$ e $D_{(\beta,B),F,S}$.

Sejam agora $x \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ e $y = (\beta, \{v\}) \in X_{sin}$ e digamos que $x = (\alpha, A)$ em que A é minimal (sink, ou emissor infinito). Se $|\alpha| > |\beta|$, basta considerar as vizinhanças D_x e D_y .

Se $|\beta| > |\alpha|$ e $s(\beta_{|\alpha|+1}) \in A$, basta considerar as vizinhanças D_y e $D_{(\alpha,A),\{\beta_{|\alpha|+1}\}}$. Se $|\alpha| = |\beta|$, considerando $\alpha = \beta$ (pois o outro caso é óbvio), consideramos $S = \{v\}$, assim basta utilizarmos as vizinhanças $D_{(\alpha,A),S}$ e D_y .

Se $x = (\alpha, A) \in X_{min}$ e $y = (\beta, B) \in X_{sin}$ com B minimal, temos alguns casos:

- Caso $|\alpha| > |\beta|$ e β é segmento inicial de α (caso contrário é óbvio), basta considerar D_x e $D_{(\beta,A),\{\alpha_{|\beta|+1}\}}$;
- Caso $|\beta| > |\alpha|$ e α é segmento inicial de β (caso contrário é óbvio), basta considerar D_y e $D_{(\alpha,A),\{\beta_{|\alpha|+1}\}}$;
- Caso $|\alpha| = |\beta|$, temos que $|A \cap B| < \infty$ pois caso contrário, isto é, caso $|A \cap B| = \infty$, como $A \cap B \subseteq A$ temos que A contém, infinitos sinks, já que B é sink minimal. Mas isto é um absurdo já que A é emissor infinito minimal. Além disso, $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$, pois caso contrário, fere-se a minimalidade de B , já que B é sink minimal. Logo basta considerarmos $F = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A \cap B\}$ que tem cardinalidade finita e $S = A \cap B$ que também tem cardinalidade finita. Assim, $x \in D_{(\alpha,A),F,S}$ e $y \in D_{(\beta,B),F,S}$ ao mesmo tempo que $D_{(\alpha,A),F,S} \cap D_{(\beta,B),F,S} = \emptyset$.

Por fim, no caso em que $x, y \in X_{sin}$ em que $x = (\alpha, \{v\})$ e $y = (\beta, \{w\})$, basta considerar as vizinhanças D_x e D_y . Por outro lado, se $x = (\alpha, A)$ e $y = (\beta, B)$ com A e B sinks minimais, temos 2 casos:

- Se $|x| > |y|$, basta considerarmos quando β é segmento inicial de α . Caso isso ocorra, consideramos as vizinhanças $D_{(\beta,B),\{\alpha_{|\beta|+1}\}}$ e D_x .
- Se $|x| = |y|$, consideramos somente o case em que $\alpha = \beta$. Então, pela Proposição 1.16, $|A \cap B| < \infty$ pois, caso contrário, $A = B$ e assim $x = y$. Além disso, $A \cap B$ não contém nenhum emissor infinito, logo $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$. Portanto, basta considerar $F = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in A \cap B\}$ que tem cardinalidade finita e $S = A \cap B$ que também tem cardinalidade finita. Assim, $x \in D_{(\alpha,A),F,S}$ e $y \in D_{(\beta,A),F,S}$ ao mesmo tempo que $D_{(\alpha,A),F,S} \cap D_{(\beta,A),F,S} = \emptyset$.

■

Diante disto, como o espaço X é Hausdorff e possui uma base enumerável de abertos fechados (clopens), segue pelo Teorema de metrização de Urysohn que tal espaço é metrizável. Sendo assim, é interessante descrever uma noção de convergência de sequências em X . Pela Proposição 1.24 temos o seguinte:

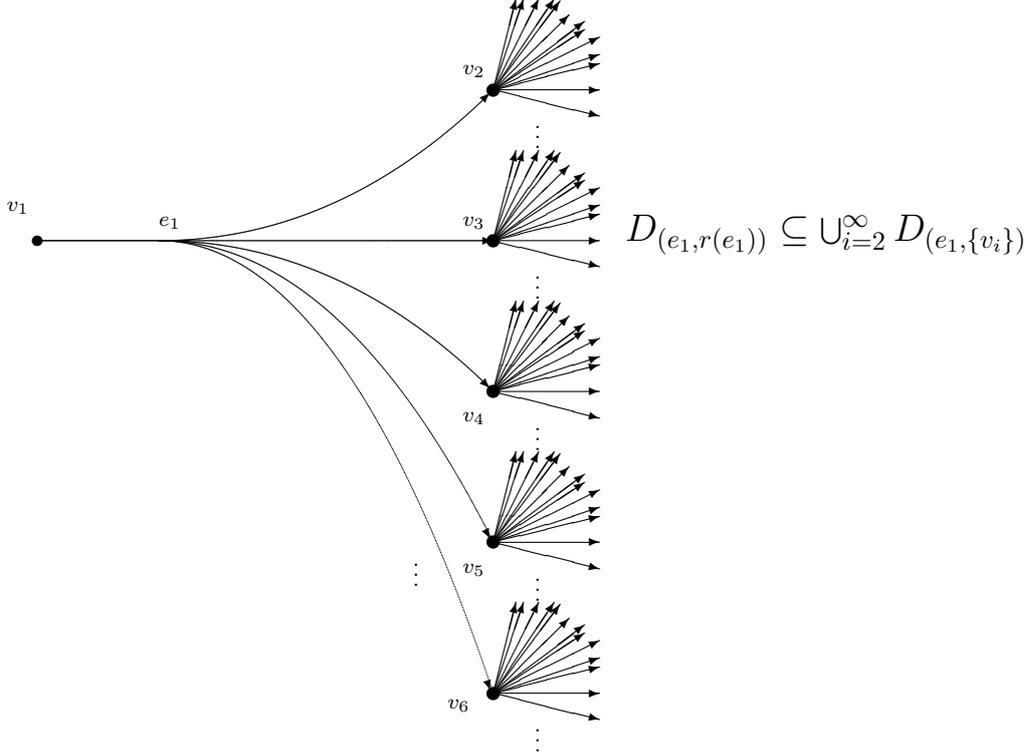
Corolário 1.28. *Seja $(x^n)_{n=1}^\infty \subseteq X$ uma seqüência e $x \in X$. Claramente temos que $x^n = (\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, A_n)$ com $A_n \in A_\infty \sqcup A_s$ ou $x^n = (\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, \{v_n\})$, com v_n sink, ou $x^n = \gamma_1^n \gamma_2^n \dots$. Sendo assim, temos que:*

- Se $|x| = \infty$, digamos $x = \gamma_1 \gamma_2 \dots$, então $(x^n)_{n=1}^\infty$ converge para x se, e somente se, para cada $M \in \mathbb{N}$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|x^n| \geq M$ e $\gamma_i^n = \gamma_i$ para todo $i = 1, \dots, M$.
- Se $|x| < \infty$, digamos $x = (\gamma_1 \dots \gamma_k, A)$ com A emissor infinito minimal, então $(x^n)_{n=1}^\infty$ converge para x se, e somente se, para cada subconjunto finito $F \subseteq \varepsilon(A)$ e cada subconjunto finito $S \subseteq A$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $x^n = x$ ou $|x^n| > k$, $\gamma_{k+1}^n \in \varepsilon(A) \setminus F$ e $\gamma_i^n = \gamma_i$ para todo $i = 1, \dots, k$;

iii. Se $|x| < \infty$, digamos $x = (\gamma_1 \dots \gamma_k, A)$ com A sink minimal, então $(x^n)_{n=1}^\infty$ converge para x se, e somente se, para cada subconjunto finito $S \subseteq A \cap G_s^0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $x^n = x$ ou $|x^n| = k$, $\gamma_i^n = \gamma_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ e $v_n \in A \setminus S$ (isto é, neste ultimo caso, $x^n = (\gamma_1, \dots, \gamma_k, \{v_n\})$, com v_n sink e $v_n \in A \setminus S$).

iv. Se $|x| < \infty$, digamos $x = (\gamma_1 \dots \gamma_k, \{v\})$ com v sink, então $(x^n)_{n=1}^\infty$ converge para x se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual temos que se $n \geq N$ então $x^n = x$.

Observação 1.29. Os cilindros da forma $D_{(\beta, B)}$ com $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$ não são, em geral, compactos. De fato, basta notarmos que se consideramos um ultragrafo \mathcal{G} no qual existe uma aresta e que contém infinitos emissores infinitos minimais em seu range, então $D_{(e, r(e))}$ não é compacto.



Sendo assim, visando obter conjuntos básicos compactos, iremos impor uma condição nos ultragrafos que trabalharemos. Com isso, obviamente perdemos generalidade. A hipótese extra exigida será chamada de RFUM2. Tal condição é baseada na condição (RFUM) exigida em [15]. Note que se o ultragrafo não contém sinks então (RFUM) e RFUM2 coincidem.

Condição. (RFUM2) Um ultragrafo \mathcal{G} satisfaz a condição RFUM2 se para cada aresta $e \in \mathcal{G}^1$ seu range pode ser escrito como

$$r(e) = \bigcup_{n=1}^k A_n,$$

em que A_n é ou um emissor infinito minimal ou um sink minimal ou um conjunto unitário que contém um sink ou vértice regular.

Proposição 1.30. Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz a condição RFUM2. Então cada elemento básico da topologia definida em X , como na Proposição 1.24, é compacto.

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que $D_{(\beta, B)}$, com $|\beta| \geq 1$ e $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, é sequencialmente compacto. Seja (x^n) uma sequência em $D_{(\beta, B)}$. Então $x^n = (\beta, A_n)$, $x^n = (\beta \alpha_1^n \dots \alpha_{k_n}^n, A_n) \in X_{fin}$ com A_n minimal, ou $x^n = (\beta, \{v_n\})$, $x^n = (\beta \alpha_1^n \dots \alpha_{k_n}^n, \{v_n\}) \in X_{sin}$ ou $x^n = \beta \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \in \mathfrak{p}^\infty$. Precisamos achar subsequências convergentes. Temos 2 casos:

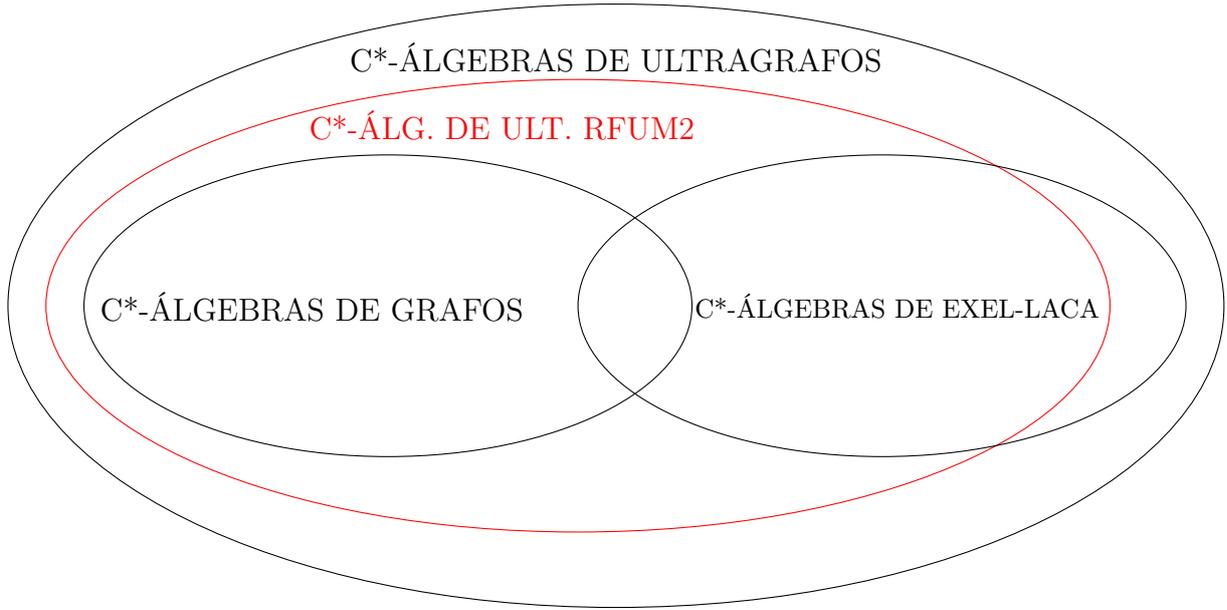
- Se existe uma subsequência de x^n tal que $|x^n| = |\beta|$: Como \mathcal{G} satisfaz a condição RFUM2 e $B(\subseteq r(\beta))$, temos que B contém apenas uma quantidade finita de A_n 's (sejam eles emissores infinitos minimais ou sinks minimais) e v_n 's sinks ou regulares que não pertencem a nenhum A_n . Desta forma, se tivéssemos infinitos termos da forma $x^n = (\beta, A_n)$, obteríamos uma subsequência que converge para algum (β, A_{n_0}) , para algum n_0 . Agora, se tivermos infinitos termos da forma $(\beta, \{v_n\})$, em que v_n não é elemento de nenhum sink minimal, como temos finitos v_n 's, existe uma subsequência constante de x^n convergindo para algum $(\beta, \{v_{n_0}\})$, para algum n_0 . Caso os v_n 's sejam elementos de A_n 's sinks minimais, como temos finitos A_n 's, existe um sink minimal $A \subseteq B$ tal que $|\{n : v_n \in A\}| = \infty$. Logo, existe uma subsequência de x^n que converge para (β, A) (no caso em que os x^n 's sejam distintos) ou para $(\beta, \{v_{n_0}\})$ para algum v_{n_0} (caso os x^n 's repitam uma quantidade infinita de vezes).
- Caso contrário, existe uma subsequência de x^n tal que $|x^n| > |\beta|$: Se não existe um número infinito de índices tal que α_1^n coincidam, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\alpha_1^n \neq \alpha_1^m$ para todo $n \neq m$, passando talvez, para uma subsequência. Assim, pela descrição de \mathcal{G}^0 , B deve conter ao menos um emissor infinito, e por $B \subseteq r(\beta)$ e por \mathcal{G} satisfazer a condição RFUM2, B pode ser escrito como união finita de emissores infinitos minimais, sinks minimais, conjuntos unitários de sinks e vértices regulares. Então, como os vértices regulares são finitos, existe um $A \in A_\infty$, $A \subseteq B$, tal que $|\{n : s(\alpha_1^n) \in A\}| = \infty$, ou seja, encontramos uma subsequência que converge para (β, A) .

Agora, se existe um número infinito de índices para o qual α_1^n coincidam, digamos $\alpha_1^n = \gamma_1$, então passamos para uma subsequência tal que $x^n = (\beta\gamma_1\alpha_2^n \dots \alpha_{k_n}^n, A_n)$, ou $x^n = (\beta\gamma_1\alpha_2^n \dots \alpha_{k_n}^n, \{v_n\})$ ou $x^n = \beta\gamma_1\alpha_2^n\alpha_3^n \dots$. Note que $x^n \in D_{(\beta\gamma_1, r(\gamma_1))}$. Agora, repetimos o procedimento realizado no parágrafo anterior e então obtemos uma subsequência convergindo para uma sequencia finita ou passamos a uma subsequência tal que $x^n = (\beta\gamma_1\gamma_2\alpha_3^n \dots \alpha_{k_n}^n, A_n)$, ou $x^n = (\beta\gamma_1\gamma_2\alpha_3^n \dots \alpha_{k_n}^n, \{v_n\})$ ou $x^n = \beta\gamma_1\gamma_2\alpha_3^n\alpha_4^n \dots$. Procedendo dessa maneira indutivamente, obtemos em um passo k , uma subsequência convergindo para uma sequêcia finita ou, devido ao argumento diagonal de Cantor, obtemos uma subsequência convergindo para uma sequêcia infinita $\beta\gamma_1\gamma_2 \dots$.

Assim, concluímos que $D_{(\beta, B)}$ é sequencialmente compacto. Por fim, basta notar que a prova de que os conjuntos da forma $D_{(\beta, B), F, S}$ são sequencialmente compactos é completamente análoga. ■

Corolário 1.31. *Se X é o espaço de ultracaminhos de um ultragrafo \mathcal{G} que satisfaz RFUM2, então X é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff.*

Mesmo exigindo a condição RFUM2 em um ultragrafo, todo grafo pode ser visto como um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e com isso, as C^* -álgebras de grafos estão contidas nas C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem RFUM2. Em [15], como os ultragrafos não continham sinks, as C^* -álgebras de ultragrafos consideradas em [15] não continham as todas as C^* -álgebras de grafos, enquanto que as C^* -álgebras tratadas aqui contém todas as C^* -álgebras de grafos. Porém, como visto no Exemplo 3.11 em [15], existem C^* -álgebras de Exel-Laca que não são isomorfas a C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem (RFUM), e portanto RFUM2. Além disso, por [25], as C^* -álgebras de grafos e as C^* -álgebras de Exel-Laca estão contidas nas C^* -álgebras de ultragrafos, mas por [24], estas não são todas as C^* -álgebras de ultragrafos. Diante disso, temos o seguinte esboço de onde estamos trabalhando.



Para finalizar esta seção, note que existe um subconjunto que é denso em X .

Proposição 1.32. *Considere $X_{\mathcal{G}_s^0} := \{(\alpha, A) \in \mathfrak{p} : |\alpha| \geq 1, A \in \mathcal{G}_s^0\} \cup \{(A, A) \in \mathfrak{p}^0 : A \in \mathcal{G}_s^0\}$. O conjunto dos caminhos infinitos junto dos ultracaminhos (finitos) que tem como range um conjunto unitário com um sink, $\mathfrak{p}^\infty \cup X_{\mathcal{G}_s^0}$, é denso em X .*

Demonstração. De fato, se $x = (\alpha, A) \in X_{min}$, então $|\varepsilon(A)| = \infty$ e para cada $e_n \in \varepsilon(A)$ ou existe um caminho infinito $\gamma^n = \gamma_1^n \gamma_2^n \dots$ com $e_n = \gamma_1^n$ ou existe um ultracaminho finito $\gamma^n = (\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, \{v_n\})$ tal que v_n é sink e $\gamma_1^n = e_n$. Assim, x é limite da sequência $\{\alpha \cdot \gamma^n\}$. Por outro lado, se $x = (\alpha, A) \in X_{sin}$, com A sink minimal, então $|A| = \infty$, digamos $A = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$. Então, $\{(\alpha, \{v_n\})\}_{n=1}^\infty$ converge para x . ■

Capítulo 2

C*-álgebra do ultragrafo vista como produto cruzado parcial

Utilizando as definições e proposições introduzidas no capítulo anterior, vamos agora mostrar que a C*-álgebra de um ultragrafo que satisfaz RFUM2 é isomorfa a um produto cruzado parcial. Para isso, provaremos alguns resultados sobre subconjuntos que serão necessários na construção da ação parcial em X . Este isomorfismo generaliza o Teorema 4.12 em [15] que por sua vez é uma generalização do Teorema 4.11 em [16]. Tal isomorfismo pode ainda ser visto como uma generalização do Teorema 3.1 em [8].

Observação 2.1. *É importante enfatizar que neste capítulo, a não ser que mencionemos o contrário, todos os ultragrafos satisfazem a condição RFUM2.*

Proposição 2.2. *Para cada $v \in G^0$ o conjunto*

$$X_v := \{(\alpha, A) \in X_{fin} : s(\alpha) = v\} \cup \{\gamma \in \mathfrak{p}^\infty : s(\gamma) = v\} = \{x \in X : s(x) = v\}$$

é não-vazio, aberto, fechado e compacto.

Demonstração. Claro que se v é sink então $X_v = \{(\{v\}, \{v\})\}$ e assim, $X_v \neq \emptyset$. Além disso, por ser um ponto isolado claramente $\{(\{v\}, \{v\})\} = D_{(\{v\}, \{v\})}$ é aberto, fechado e compacto.

Se v não é sink, então claramente $X_v \neq \emptyset$. No caso em que v é emissor infinito então $X_v = D_{(\{v\}, \{v\})}$, que é aberto, é fechado pela Proposição 1.26 e também é compacto pela Proposição 1.30.

Se v é um emissor finito então $s^{-1}(v)$ é um conjunto finito e $X_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)}^{finita} D_{(e, r(e))}$. Novamente, pelas Proposições 1.26 e 1.30, cada $D_{(e, r(e))}$ é aberto, fechado e compacto. Como a união é finita, segue que X_v é aberto, fechado e compacto. ■

Vamos agora definir os conjuntos que serão utilizados na construção da ação parcial.

Definição 2.3. *Seja \mathbb{F} o grupo livre gerado por \mathcal{G}^1 . Seja $P \subseteq \mathbb{F}$ definido da seguinte maneira:*

$$P := \{e_1 \dots e_n \in \mathbb{F} : e_i \in \mathcal{G}^1 : n \geq 1\};$$

Para cada $c \in \mathbb{F}$ o conjunto X_c é definido por:

- $X_0 = X$, em que 0 é o elemento neutro do grupo \mathbb{F} .

- Se $a \in P$ então (lembre que $X_{fin} = X_{min} \sqcup X_{sin}$)
 $X_a = \{(\beta, B) \in X_{fin} : \beta_1 \dots \beta_{|a|} = a\} \cup \{\gamma \in \mathfrak{p}^\infty : \gamma_1 \dots \gamma_{|a|} = a\}$;
 $X_{a^{-1}} = \{(A, A) \in X_{fin} : A \subseteq r(a)\} \cup \{(\beta, B) \in X_{fin} : s(\beta) \in r(a)\} \cup \{\gamma \in \mathfrak{p}^\infty : s(\gamma) \in r(a)\}$;
- Se $a, b \in P$, em que ab^{-1} está na forma reduzida, então
 $X_{ab^{-1}} = \{(a, A) \in X_{fin} : A \subseteq r(a) \cap r(b)\} \cup \{(\beta, B) \in X_{fin} : \beta_1 \dots \beta_{|a|} = a \text{ e } s(\beta_{|a|+1}) \in r(a) \cap r(b)\} \cup \{\gamma \in \mathfrak{p}^\infty : \gamma_1 \dots \gamma_{|a|} = a \text{ e } s(\gamma_{|a|+1}) \in r(a) \cap r(b)\}$;
- Para qualquer outro $c \in \mathbb{F}$, defina $X_c = \emptyset$.

Observação 2.4. Note que se $a \in P$ não é um caminho que exista no ultragrafo, então X_a é vazio. Analogamente, é claro que $X_{ab^{-1}} = \emptyset$ sempre que $a, b \in P$ são tais que $r(a) \cap r(b) = \emptyset$.

Proposição 2.5. Os subconjuntos X_c , com $c \in \mathbb{F}$, são abertos, fechados e compactos em X .

Demonstração. Para $a \in P$ (com a sendo um caminho no ultragrafo), note que $X_a = D_{(a, r(a))}$, logo é aberto. Além disso, X_a é fechado e compacto, pelas Proposições 1.26 e 1.30 respectivamente.

Vamos então analisar o conjunto $X_{a^{-1}}$. Pela condição RFUM2, temos que $r(a) = r(a_{|a|}) = \bigcup_{n=1}^k A_n$ em que cada A_n é emissor infinito minimal ou sink minimal ou vértice regular ou sink. Se A_n é emissor infinito minimal ou sink minimal, então $D_{(A_n, A_n)}$ (aberto) é fechado e compacto, pelas Proposições 1.26 e 1.30 respectivamente. Se A_n é um vértice regular ou sink, então pela Proposição 2.2 $D_{(A_n, A_n)}$ é aberto, fechado e compacto. Assim, $X_{a^{-1}} = \bigcup_{n=1}^k D_{(A_n, A_n)}$ é aberto, fechado e compacto.

Falta mostrar para $X_{ab^{-1}}$ com $a, b \in P$, em que a e b são caminhos no ultragrafo e $r(a) \cap r(b) \neq \emptyset$. Primeiro, mostramos que $X_{ab^{-1}}$ é aberto, ou seja, se $\beta \in X_{ab^{-1}}$, então existe um aberto U tal que $\beta \in U \subseteq X_{ab^{-1}}$. Seja $\beta \in X_{ab^{-1}}$.

- Se $\beta \in \mathfrak{p}^\infty$ então $\beta = a\beta'$ com $s(\beta') \in r(a) \cap r(b)$ e $\beta \in D_{(a\beta', r(\beta'))} \subseteq X_{ab^{-1}}$;
- Se $\beta = (\alpha, A) \in X_{fin}$ com A emissor infinito minimal ou sink minimal, temos 2 casos:
 - Caso $|\alpha| > |a|$, então $\alpha = a\alpha'$ com $s(\alpha') \in r(a) \cap r(b)$, assim $\beta \in D_{(a\alpha', r(\alpha'))} \subseteq X_{ab^{-1}}$;
 - Caso $|\alpha| = |a|$, então $\alpha = a$ e assim $\beta = (a, A)$ com $A \subseteq r(a) \cap r(b)$ e assim $\beta \in D_{(a, A)} \subseteq X_{ab^{-1}}$.
- Se $\beta = (\alpha, \{v\}) \in X_{sin}$, com v sink, temos novamente 2 casos:
 - Caso $|\alpha| > |a|$, então $\alpha = a\alpha'$ com $s(\alpha') \in r(a) \cap r(b)$, assim $\beta \in D_{(a\alpha', r(\alpha'))} \subseteq X_{ab^{-1}}$;
 - Caso $|\alpha| = |a|$, então $\alpha = a$ e assim $\beta = (a, \{v\})$ com $v \in r(a) \cap r(b)$ e assim $\beta \in D_{(a, \{v\})} \subseteq X_{ab^{-1}}$.

Agora, mostramos que $X_{ab^{-1}}$ é fechado e compacto. Seja $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{ab^{-1}}$ que converge para $\beta \in X$. Como, $X_{ab^{-1}} \subseteq X_a$ e X_a é fechado, temos que $\beta \in X_a$. Agora temos 2 casos:

- Se $|\beta| > |a|$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^n \in D_{(\beta_1 \dots \beta_{|a|+1}, r(\beta_{|a|+1}))}$, para todo $n \geq n_0$. Então $a = \beta_1^{n_0} \dots \beta_{|a|}^{n_0} = \beta_1 \dots \beta_{|a|}$ e $\beta_{|a|+1}^{n_0} = \beta_{|a|+1}$. Como $s(\beta_{|a|+1}^{n_0}) \in r(a) \cap r(b)$, temos que $\beta \in X_{ab^{-1}}$;

- Se $|\beta| = |a|$, então $\beta = (a, A)$ com $A \in r(a)$ um emissor infinito minimal ou um sink minimal ou sink.
 - Se A é sink, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^n = \beta = (a, A)$, $\forall n \geq N$. Assim, $A = r(\beta) = r(\beta^n) \in r(a) \cap r(b)$, $\forall n \geq N$, já que $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{ab^{-1}}$. Portanto $\beta \in X_{ab^{-1}}$.
 - Se A é emissor infinito minimal, precisamos mostrar que $A \subseteq r(b)$. Como $\beta^n \rightarrow \beta$, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ então $\beta^n = \beta$ ou $|\beta^n| > |a|$ com $\beta_1 \dots \beta_{|a|} = a$ e $\beta_{|a|+1}^n \in \varepsilon(A)$. Se $\beta^n = \beta$ para algum n segue o resultado. Sendo assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|\beta^n| > |a|$, $\forall n \geq n_0$. Suponha que $F := \{\beta_{|a|+1}^n : n \geq n_0\}$ é um conjunto finito. Então, $\beta^n \notin D_{(a,A),F}$, o que é um absurdo pelo Corolário 1.28, já que $\beta^n \rightarrow (a, A) \in X_{min}$. Logo, o conjunto F é infinito. Como $\{s(\beta_{|a|+1}^n) : n \geq n_0\} \subseteq r(a) \cap r(b)$ e $\{s(\beta_{|a|+1}^n) : n \geq n_0\} \subseteq A$, então $\{s(\beta_{|a|+1}^n) : n \geq n_0\} \subseteq A \cap r(b)$. Assim, $A \cap r(b)$ é um emissor infinito. Uma vez que A é minimal, temos que $A = A \cap r(b)$, ou seja, $A \subseteq r(b)$ e portanto, $\beta = (a, A) \in X_{ab^{-1}}$.
 - Se A é sink minimal, como $\beta^n \rightarrow \beta$, existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ então $\beta^n = \beta$ ou $|\beta^n| = |a|$ com $\beta_1 \dots \beta_{|a|} = a$ e $\beta^n = (a, \{v_n\})$ em que $v_n \in A$. Se $\beta^n = \beta$ para algum n segue o resultado. Sendo assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|\beta^n| = |a|$, $\forall n \geq n_0$ com $\beta_1 \dots \beta_{|a|} = a$ e $\beta^n = (a, \{v_n\})$ em que $v_n \in A$. Suponha que $H := \{v_n : n \geq n_0\}$ seja um conjunto de cardinalidade finita. Então, $\beta^n \notin D_{(a,A),H}$, o que é um absurdo pelo Corolário 1.28, já que $\beta^n \rightarrow (a, A) \in X_{sin}$. Logo, o conjunto H tem cardinalidade infinita. Claro que $H \subseteq A$ e como $H = \{v_n : n \geq n_0\} \subseteq r(a) \cap r(b)$, temos que $H \subseteq A \cap r(b)$. Assim, $A \cap r(b)$ é um conjunto que tem cardinalidade infinita ao mesmo tempo que $|\varepsilon(A \cap r(b))| < \infty$, já que $|\varepsilon(A)| < \infty$. Uma vez que A é sink minimal, temos que $A = A \cap r(b)$, ou seja, $A \subseteq r(b)$ e portanto, $\beta = (a, A) \in X_{ab^{-1}}$.

Concluimos então que $X_{ab^{-1}}$ é fechado.

Como X_a é compacto e $X_{ab^{-1}} \subseteq X_a$ é fechado, segue que $X_{ab^{-1}}$ é também, compacto. ■

Definição 2.6. Para cada $A \in \mathcal{G}^0$ defina $X_A \subseteq X$ por $X_A = \{x \in X : s(x) \subseteq A\}$.

O lema a seguir será útil no final deste capítulo, quando fizermos a caracterização do conjunto imagem do que virá a ser o isomorfismo que identifica $C^*(\mathcal{G})$ com o produto cruzado parcial que definiremos ao longo das próximas seções.

Lema 2.7. Para cada $A, B \in \mathcal{G}^0$, tem-se que $X_{A \cap B} = X_A \cap X_B$ e $X_{A \cup B} = X_A \cup X_B$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{G}^0$, então

$$X_{A \cap B} = \{x \in X : s(x) \subseteq A \cap B\} = \{x \in X : s(x) \subseteq A\} \cap \{x \in X : s(x) \subseteq B\} = X_A \cap X_B.$$

Por outro lado, é claro que $X_A \subseteq X_{A \cup B}$ e que $X_B \subseteq X_{A \cup B}$, portanto, $X_A \cup X_B \subseteq X_{A \cup B}$. Suponha que $x \in X_{A \cup B}$. Então $s(x) \subseteq A \cup B$. Se $|x| \geq 1$ então $x = (\gamma, C)$ e $s(\gamma) = s(x)$, em que $s(x)$, neste caso é um vértice em G^0 e assim, $s(x) \subseteq A$ ou $s(x) \subseteq B$, ou seja, $x \in X_A \cup X_B$. Se $|x| = 0$ e $s(x)$ é um sink (não minimal), então $s(x)$ novamente é um vértice em G^0 e portanto $x \in X_A \cup X_B$. Se $|x| = 0$ e $s(x)$ não é um sink, então $x = (C, C)$ com $C \in \mathcal{G}^0$ emissor infinito minimal ou sink minimal. Se C é emissor infinito minimal, como $C \subseteq A \cup B$ temos que $C \cap A$ ou $C \cap B$ é emissor infinito. Suponha, sem perda de generalidade, que $C \cap A$ é emissor infinito. Como C é minimal, temos de ter $C \cap A = C$ e assim $C \subseteq A$. Logo $x \in X_A$, isto é, $X_{A \cup B} \subseteq X_A \cup X_B$. Por outro lado, se C é sink minimal, como $C \subseteq A \cup B$ temos que $|C \cap A| = \infty$ ou $|C \cap B| = \infty$. Suponha, sem perda de generalidade, que $|C \cap A| = \infty$. Como C é minimal, temos de ter $C \cap A = C$ e assim $C \subseteq A$. Logo $x \in X_A$. Portanto $X_{A \cup B} \subseteq X_A \cup X_B$. ■

Corolário 2.8. Para cada $A \in \mathcal{G}^0$, tem-se que X_A é aberto, fechado e compacto em X .

Demonstração. Para vértices da forma $v \in G^0$, temos pela Proposição 2.2 que X_v é aberto, fechado e compacto. Para vértices generalizados da forma $r(e)$, note que $X_{r(e)} = X_{e^{-1}}$ para todo $e \in \mathcal{G}^1$. Sendo assim, pela Proposição 2.5, $X_{r(e)} = X_{e^{-1}}$ é aberto, fechado e compacto. Por fim, pela Proposição 1.6 e pelo Lema 2.7, temos que para todo vértice generalizado $A \in \mathcal{G}^0$, o conjunto X_A é aberto, fechado e compacto. ■

2.1 A ação parcial

Com os conjuntos definidos na seção anterior, já possuímos as ferramentas necessárias para construir a ação parcial topológica. Esta construção consiste em definir funções bijetoras entre subconjuntos não-vazios da forma X_c , com $c \in \mathbb{F}$.

Definição 2.9. Para $a, b \in P$, em que X_a e $X_{ab^{-1}}$ são conjuntos não-vazios, considerando A um emissor infinito minimal ou um sink minimal ou um conjunto unitário que contém apenas um sink, defina:

$$\begin{array}{lll}
 \theta_a : X_{a^{-1}} \rightarrow X_a & \theta_{a^{-1}} : X_a \rightarrow X_{a^{-1}} & \theta_{ab^{-1}} : X_{ba^{-1}} \rightarrow X_{ab^{-1}} \\
 x \mapsto ax & ay \mapsto \widehat{a}y = y & bx \mapsto \widehat{a}bx = ax \\
 (A, A) \mapsto (a, A) & (a, A) \mapsto (A, A) & (b, A) \mapsto (a, A) \\
 (\beta, A) \mapsto (a\beta, A) & (a\beta, A) \mapsto (\beta, A) & (bc, A) \mapsto (ac, A) \\
 \gamma \mapsto a\gamma & a\gamma \mapsto \gamma & b\gamma \mapsto a\gamma
 \end{array}$$

onde $x, y, \gamma \in X$.

Note que estamos denotando a no lugar de $(a, r(a)) \in \mathfrak{p}$ e assim, $\theta_a(x) = a.x = (a, r(a)).x$, para $x \in X_{a^{-1}}$. Além disso, o símbolo “ $\widehat{}$ ” (chapéu) em cima de uma letra a é entendido como algo que “retira” a letra a da frente do caminho. Note também que $\theta_a^{-1} = \theta_{a^{-1}}$ e que $\theta_{ab^{-1}}^{-1} = \theta_{ba^{-1}}$.

Proposição 2.10. Para cada $c \in \mathbb{F}$, a função $\theta_c : X_{c^{-1}} \rightarrow X_c$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Sejam $a, b \in P$. Mostremos que $\theta_{ab^{-1}} : X_{ba^{-1}} \rightarrow X_{ab^{-1}}$ é contínua. Seja $(x^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{ba^{-1}}$ uma sequência tal que $x^n \rightarrow x \in X_{ab^{-1}}$. Como $x^n \in X_{ba^{-1}} \subseteq X_b$ temos que $x^n = b\gamma_1^n \gamma_2^n \dots$ ou $x^n = (b\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, A_n)$ ou $x^n = (b\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, \{v_n\})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

- Se $x \in \mathfrak{p}^\infty$, digamos $x = b\gamma_1\gamma_2\dots$, então para cada $M \in \mathbb{N}$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x^n| > M + |b|$ e $b\gamma_1^n \dots \gamma_M^n = b\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_M$, $\forall n \geq n_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $y^n = \theta_{ab^{-1}}(x^n)$ e $y = \theta_{ab^{-1}}(x)$. Então, para cada n , temos que $y^n = a\gamma_1^n \gamma_2^n \dots$, $y^n = (a\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, A_n)$ ou $y^n = (a\gamma_1^n \dots \gamma_{k_n}^n, \{v_n\})$. Como $a\gamma_1^n \dots \gamma_M^n = a\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_M$, para cada $n \geq n_0$, então pelo Corolário 1.28, temos que $y^n \rightarrow a\gamma_1\gamma_2\dots = y$.
- Se $x \in X_{min}$ ou $x \in X_{sin}$ com range minimal, então $x = (b, B)$ ou $x = (b\gamma_1 \dots \gamma_{|x|-|b|}, B)$:
 - Se $x = (b, B)$, então para cada conjunto finito $F \subseteq \varepsilon(B)$ e cada conjunto finito $S \subseteq B$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, temos $x^n = x$ ou $|x^n| > |x| = |b|$ e $\gamma_{|b|+1}^n \in \varepsilon(B) \setminus F$ ou $|x^n| = |x|$ com $x^n = (b, \{v_n\})$ tal que $v_n \in B \setminus S$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $y^n = \theta_{ab^{-1}}(x^n)$ e $y = \theta_{ab^{-1}}(x) = (a, B)$. Então, para cada $F \subseteq \varepsilon(B)$ e cada conjunto finito $S \subseteq B$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$, então $y^n = y$ ou $|y^n| > |y| = |a|$ e $\gamma_{|a|+1}^n \in \varepsilon(B) \setminus F$ ou $|y^n| = |y|$ com $y^n = (a, \{v_n\})$ tal que $v_n \in B \setminus S$, isto é, pelo Corolário 1.28, $y^n \rightarrow y$.

- Se $x = (b\gamma_1 \dots \gamma_{|x|-|b|}, B)$, é análogo ao subitem anterior, basta trocar b por $b\gamma_1 \dots \gamma_{|x|-|b|}$.
- Se $x \in X_{sin}$ em que $x = (b, \{v\})$ ou $x = (b\gamma_1 \dots \gamma_{|x|-|b|}, B)$, então x^n é eventualmente constante. Com isso, $y^n := \theta_{ab^{-1}}(x^n)$ também será eventualmente constante e obviamente $y^n \rightarrow y := \theta_{ab^{-1}}(x)$.

Por outro lado, temos que $\theta_{ba^{-1}}$ também é contínua e como $\theta_{ab^{-1}}^{-1} = \theta_{ba^{-1}}$, concluímos que $\theta_{ab^{-1}}$ é homeomorfismo.

A demonstração de que θ_a é homeomorfismo é exatamente igual ao que foi feito anteriormente, mostrando que θ_a é contínua, separando em casos, e posteriormente mostrando que $\theta_{a^{-1}}$ é contínua, separando em casos novamente. Por fim, basta notar que $\theta_a^{-1} = \theta_{a^{-1}}$, concluindo que são homeomorfismos. ■

As Proposições anteriores dão origem ao seguinte corolário, que também serve como uma definição.

Corolário 2.11. *Para cada $t \in \mathbb{F}$, a função*

$$\begin{aligned} \alpha_t : C(X_{t^{-1}}) &\rightarrow C(X_t) \\ f &\mapsto f \circ \theta_{t^{-1}} \end{aligned}$$

é um $*$ -isomorfismo. Além disso, a coleção $(\{X_t\}_{t \in \mathbb{F}}, \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{F}})$ é ação parcial topológica. Consequentemente, $(\{C(X_t)\}_{t \in \mathbb{F}}, \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{F}})$ é ação parcial C^* -algébrica de \mathbb{F} em $C_0(X)$.

Demonstração. Pelas definições de X_t e θ_t , temos que $\theta_t(X_{t^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{th}$ e que $\theta_t(\theta_h(x)) = \theta_{th}(x)$, para todo $x \in X_{(th)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}$. Deste modo, $(\{X_t\}_{t \in \mathbb{F}}, \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{F}})$ é ação parcial topológica. Por [13] uma consequência imediata disto é que $(\{C(X_t)\}_{t \in \mathbb{F}}, \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{F}})$ é ação parcial C^* -algébrica de \mathbb{F} em $C_0(X)$. ■

Note que no Corolário anterior, se $t \in \mathbb{F}$ não é da forma ab^{-1} , com $a, b \in P \cup \{0_{\mathbb{F}}\}$, então $C(X_t)$ é um ideal nulo e α_t é função nula.

Observação 2.12. *Quando \mathcal{G} é um ultragrafo sem sinks (mas ainda satisfaz RFUM2), então a ação parcial definida acima coincide com àquela introduzida em [15]. Além disso, se \mathcal{G} é um grafo dirigido então esta ação parcial coincide com àquela dada em [8].*

2.2 O isomorfismo

Diante da ação parcial definida na seção anterior, podemos considerar o produto cruzado parcial $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ (ver, por exemplo [13]). Com isso, finalizamos este capítulo com o teorema que mostra o isomorfismo entre $C^*(\mathcal{G})$ e o produto cruzado parcial $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$. Mas antes, precisamos de um lema que caracteriza o conjunto imagem de elementos da forma P_A em $C^*(\mathcal{G})$, pelo isomorfismo que iremos introduzir somente no último teorema.

Observação 2.13. *Antes do lema, note que pelo Corolário 2.8, X_A é aberto e compacto para cada $A \in \mathcal{G}^0$. Assim, a função característica 1_A do conjunto X_A é um elemento de $C(X)$. Além disso, pela Proposição 2.5, cada X_c , com $c \in \mathbb{F}$ é aberto e compacto e assim, a função característica 1_c de X_c também é um elemento de $C(X)$.*

Lema 2.14. *Sejam $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G}^1)^n$ e $A \in \mathcal{G}^0$. Então a subálgebra $D \subseteq C_0(X)$ gerada por todas as funções características $1_c, 1_A$ e $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A)$ é densa em $C_0(X)$. Além disso, para cada $0 \neq g \in \mathbb{F}$, a subálgebra $D_g \subseteq C(X_g)$ gerada por todas as funções $1_g1_c, 1_g1_A$ e $1_g\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A)$ é densa em $C(X_g)$.*

Demonstração. Vamos utilizar o Teorema de Stone-Weierstrass. É claro que D é obviamente auto-adjunta. Vamos mostrar que D não se anula em nenhum lugar (vanishes nowhere). Seja $x \in X$. Se $|x| = 0$, então temos 2 casos:

- Se $x = (A, A)$, em que $A \in \mathcal{G}^0$ é emissor infinito minimal ou sink minimal, então $x \in X_A$ e $1_A(x) = 1$;
- Se $x = (\{v\}, \{v\})$, em que $v \in \mathcal{G}^0$ é sink, então $x \in X_v := X_{\{v\}}$ e assim, $1_v(x) = 1_{\{v\}}(x) = 1$.

Por outro lado, se $|x| \geq 1$, temos mais 3 casos:

- Se $x = (\alpha, A)$, em que $A \in \mathcal{G}^0$ é emissor infinito minimal ou sink minimal, então $x \in X_\alpha$ e $1_\alpha(x) = 1$;
- Se $x = (\alpha, \{v\})$, em que $v \in \mathcal{G}^0$ é sink, então $x \in X_\alpha$ e assim, $1_\alpha(x) = 1$;
- Se $|x| = \infty$ então, $x = \gamma_1\gamma_2 \dots$. Assim, existe um segmento inicial (β, B) , tal que $\beta_i = \gamma_i$, para todo $i = 1, \dots, |\beta|$, e assim, $x \in X_\beta$ e $1_\beta(x) = 1$.

Vamos mostrar agora que D separa pontos. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Então temos alguns casos:

- Se $|x| = |y| = 0$, com $x, y \in X_{sin}$, então $x = (\{v\}, \{v\})$ e $y = (\{w\}, \{w\})$ e assim, $1_v(x) = 1$ e $1_v(y) = 0$;
- Se $|x| = |y| = 0$, com $x, y \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ com ranges minimais, então $x = (A, A)$ e $y = (B, B)$ e assim, $1_A(x) = 1$ e $1_A(y) = 0$ pois $B \notin X_A$ pelas minimalidades de A e de B ;
- Se $|x| = |y| = 0$, com $x = (\{v\}, \{v\}) \in X_{sin}$ e $y = (A, A) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ com A minimal, temos que $1_v(x) = 1$ e $1_v(y) = 0$;
- Se $|x| = 0$ e $|y| \geq 1$, com $x \in X_{fin}$, então $y = (\beta_1 \dots \beta_{|\beta|}, \{w\}) \in X_{sin}$ ou $y = (\beta_1 \dots \beta_{|\beta|}, B) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ ou $y = \beta_1\beta_2 \dots \in \mathfrak{p}^\infty$. Em cada um destes casos, $1_{\beta_1}(x) = 0$ e $1_{\beta_1}(y) = 1$.
- Se $|x| \geq 1, |y| \geq 1$, então $x = (\alpha_1 \dots \alpha_{|\alpha|}, \{v\}) \in X_{sin}$, ou $x = (\alpha_1 \dots \alpha_{|\alpha|}, A) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ ou $x = \alpha_1\alpha_2 \dots \in \mathfrak{p}^\infty$ e $y = (\beta_1 \dots \beta_{|\beta|}, \{w\}) \in X_{sin}$, ou $y = (\beta_1 \dots \beta_{|\beta|}, B) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$ ou $y = \beta_1\beta_2 \dots \in \mathfrak{p}^\infty$. Diante disto, temos 4 subcasos:
 - Se $|x| \neq |y|$, suponha, sem perda de generalidade, que $|x| < |y|$, então $1_{\beta_1 \dots \beta_{|x|+1}}(y) = 1$ e $1_{\beta_1 \dots \beta_{|x|+1}}(x) = 0$;
 - Se $1 \leq |x| = |y| < \infty$, mas $\alpha_i \neq \beta_i$ para algum $i = 1, \dots, |x|$, então $1_{\alpha_1 \dots \alpha_i}(x) = 1$ e $1_{\alpha_1 \dots \alpha_i}(y) = 0$;
 - Se $1 \leq |x| = |y| < \infty$, com $\alpha = \beta$, então temos 3' subcasos:

- Se $x, y \in X_{sin}$, então $x = (\beta, \{v\})$ e $y = (\beta, \{w\})$. Assim, se considerarmos a função $\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})$, temos que ela separa os pontos x e y , pois:

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})(x) = (1_{\beta^{-1}1_v}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(x) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) \cdot (1_v \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) = 1.1 = 1.$$

Por outro lado, temos que

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})(y) = (1_{\beta^{-1}1_v}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(y) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) \cdot (1_v \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) = 1.0 = 0.$$

- Se $x, y \in X_{min} \sqcup X_{sin}$, com $x = (\beta, A)$ e $y = (\beta, B)$ em que A e B são minimais, sejam eles sinks ou emissores infinitos. Como $x \neq y$ e A e B são minimais, temos que $A \neq B$, $|A \cap B| < \infty$ e que $|\varepsilon(A \cap B)| < \infty$. Assim, consideramos a função $\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_A})$, para separar x e y :

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_A})(x) = (1_{\beta^{-1}1_A}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(x) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) \cdot (1_A \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) = 1.1 = 1.$$

Por outro lado,

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_A})(y) = (1_{\beta^{-1}1_A}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(y) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) \cdot (1_A \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) = 1.0 = 0.$$

- Se $x = (\beta, \{v\}) \in X_{sin}$ e $y = (\beta, A) \in X_{min} \sqcup X_{sin}$, então vamos considerar a função $\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})$, e assim:

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})(x) = (1_{\beta^{-1}1_v}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(x) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) \cdot (1_v \circ \theta_{\beta^{-1}})(x) = 1.1 = 1.$$

Enquanto que, por outro lado

$$\alpha_\beta(1_{\beta^{-1}1_v})(y) = (1_{\beta^{-1}1_v}) \circ (\theta_{\beta^{-1}})(y) = (1_{\beta^{-1}} \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) \cdot (1_v \circ \theta_{\beta^{-1}})(y) = 1.0 = 0.$$

- Se $|x| = |y| = \infty$ e $x = \alpha_1\alpha_2\dots$ e $y = \beta_1\beta_2\dots$ então existe algum n para o qual $\alpha_n \neq \beta_n$. Assim $1_{\alpha_1\dots\alpha_n}(x) = 1$ e $1_{\alpha_1\dots\alpha_n}(y) = 0$.

Com isso, D é denso em $C_0(X)$.

Por fim, falta mostrar que D_g é denso em $C(X_g)$. Claro que D_g é subálgebra auto-adjunta de $C(X_g)$. Vamos mostrar que D_g não se anula em nenhum ponto e separa pontos de X_g . Para $x \in X_g$ já mostramos que existe $f \in D$ tal que $f(x) \neq 0$. Então, $(1_g.f)(x) = 1_g(x)f(x) = f(x) \neq 0$. Além disso, para $x, y \in X_g$, com $x \neq y$, existe uma função $h \in D$ tal que $h(x) = 1$ e $h(y) = 0$. Então, $(1_g.h)(x) = 1_g(x)h(x) = 1$ e $(1_g.h)(y) = 1_g(y)h(y) = 0$. Portanto, novamente por Stone-Weierstrass, D_g é denso em $C(X_g)$. ■

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo. A versão para grafos dirigidos deste resultado é o Teorema 3.1 em [8]. A versão para ultragrafos sem sinks é o Teorema 4.12 em [15].

Teorema 2.15. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então, existe um *-isomorfismo $\Phi : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ tal que $\Phi(s_e) = 1_e\delta_e$, para cada $e \in \mathcal{G}^1$, e $\Phi(p_A) = 1_A\delta_0$, para $A \in \mathcal{G}^0$.*

Demonstração. Vamos utilizar a universalidade de $C^*(\mathcal{G})$ para mostrar que Φ definida nos geradores da forma s_e , com $e \in \mathcal{G}^1$ e da forma p_A , com $A \in \mathcal{G}^0$ se estende a todo $C^*(\mathcal{G})$. Para isso, precisamos mostrar que o conjunto $\{\Phi(s_e)\}_{e \in \mathcal{G}^1} \cup \{\Phi(p_A)\}_{A \in \mathcal{G}^0}$ satisfaz as relações da Definição 1.7. Começamos notando que $\{\Phi(s_e) : e \in \mathcal{G}^1\}$ é uma família de isometrias parciais já que

$$\begin{aligned} \Phi(s_e)\Phi(s_e)^*\Phi(s_e) &= 1_e\delta_e(1_e\delta_e)^*1_e\delta_e = 1_e\delta_e(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})1_e\delta_e = 1_e\delta_e\alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_{e^{-1}e} = \\ &= 1_e\delta_e\alpha_{e^{-1}}(1_e1_e)\delta_0 = 1_e\delta_e\alpha_{e^{-1}}(1_e)\delta_0 = 1_e\delta_e1_{e^{-1}}\delta_0 = \underbrace{\alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{e^{-1}})\delta_{0e^{-1}}}_{0e=e0=e} = \\ &= \alpha_e(1_{e^{-1}}1_{e^{-1}})\delta_e = \alpha_e(1_{e^{-1}})\delta_e = 1_e\delta_e = \Phi(s_e). \end{aligned}$$

A relação 1 é verdadeira pelo Lema 2.7. A relação 2 é verdadeira pois se $e, f \in \mathcal{G}^1$ com $f \neq e$, temos

$$\begin{aligned}\Phi(s_e)^*\Phi(s_e) &= (1_e\delta_e)^*1_e\delta_e = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})1_e\delta_e = \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_e)\delta_{e^{-1}e} = \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e1_e)\delta_0 = \alpha_{e^{-1}}(1_e)\delta_0 = 1_{e^{-1}}\delta_0 = 1_{r(e)}\delta_0 = \Phi(p_{r(e)}),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\Phi(s_e)^*\Phi(s_f) &= (1_e\delta_e)^*1_f\delta_f = (1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}})1_f\delta_f = \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_f)\delta_{e^{-1}f} = \\ &= \alpha_{e^{-1}}(1_e1_f)\delta_{e^{-1}f} = \alpha_e(0)\delta_{e^{-1}f} = 0.\end{aligned}$$

Para a terceira relação temos que $X_e \subseteq X_{s(e)}$ implica que $1_e \leq 1_{s(e)}$ e assim

$$\begin{aligned}\Phi(s_e)\Phi(s_e)^* &= 1_e\delta_e(1_e\delta_e)^* = 1_e\delta_e(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e)1_{e^{-1}})\delta_{ee^{-1}} = \\ &= \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e))\alpha_e(1_{e^{-1}})\delta_0 = 1_e1_e\delta_0 = 1_e\delta_0 \leq 1_{s(e)}\delta_0 = \Phi(p_{s(e)}).\end{aligned}$$

Para a quarta e última relação, seja $v \in \mathcal{G}^0$ tal que $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$. Então $X_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} X_e$ e assim, como as projeções $\{1_e : e \in \mathcal{G}^1\}$ são ortogonais duas a duas, temos que $1_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} 1_e$.

Diante disso,

$$\sum_{e \in s^{-1}(v)} \Phi(s_e)\Phi(s_e)^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} 1_e\delta_e1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = \sum_{e \in s^{-1}(v)} 1_e\delta_0 = 1_v\delta_0 = \Phi(p_v).$$

Deste modo, existe um único homomorfismo de $C^*(\mathcal{G})$ para $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ que por abuso de notação, chamaremos também de Φ . Vamos mostrar que Φ é sobrejetora. Claro que pela definição de Φ , temos que $Im(\Phi) \subseteq C_0(X)\delta_0$ e $Im(\Phi) \subseteq C(X_g)\delta_g$ para todo $0 \neq g \in \mathbb{F}$. Vamos mostrar as continências contrárias. Primeiro note que se $t, r \in \mathbb{F}$ então $\alpha_t(1_r) = 1_r \circ \theta_{t^{-1}} = 1_{tr}$ e com isso

$$\Phi(s_{tr}) = \Phi(s_t s_r) = \Phi(s_t)\Phi(s_r) = 1_t\delta_t1_r\delta_r = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(1_t)1_r)\delta_{tr} = \alpha_t(1_{t^{-1}1_r})\delta_{tr} = 1_t1_{tr}\delta_{tr} = 1_{tr}\delta_{tr}.$$

Assim, fica fácil ver que para $a = a_1 \dots a_n, b = b_1 \dots b_m \in P$, com $a_i, b_i \in \mathcal{G}^1$, tem-se que

$$\Phi(s_a) = \Phi(s_{a_1}) \dots \Phi(s_{a_n}) = 1_a\delta_a,$$

$$\Phi(s_a)\Phi(s_b)^* = \Phi(s_{a_1}) \dots \Phi(s_{a_n})\Phi(s_{b_m})^* \dots \Phi(s_{b_1})^* = 1_a\delta_a1_{b^{-1}}\delta_{b^{-1}} = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}},$$

e

$$\Phi(s_a)\Phi(s_b)^*\Phi(s_b)\Phi(s_a)^* = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}1_{ba^{-1}}\delta_{ba^{-1}} = 1_{ab^{-1}}\delta_0.$$

Assim, para todo $c \in \mathbb{F}$, os elementos da forma $1_c\delta_0$ e $1_c\delta_c$ pertencem à $Im(\Phi)$. Com isso, para cada $c \in \mathbb{F}$ e $A \in \mathcal{G}^0$ temos que $\alpha_c(1_{c^{-1}1_A})\delta_c = 1_c\delta_c1_A\delta_0 \in Im(\Phi)$ e $\alpha_c(1_{c^{-1}1_A})\delta_0 = \alpha_c(1_{c^{-1}1_A})\delta_c1_{c^{-1}}\delta_{c^{-1}} \in Im(\Phi)$. Do Lema 2.14, temos que $C_0(X)\delta_0 \subseteq Im(\Phi)$.

Por outro lado, se $0 \neq g \in \mathbb{F}$ e $A \in \mathcal{G}^0$, então é claro que $(1_g1_c)\delta_g = 1_c\delta_01_g\delta_g \in Im(\Phi)$, $(1_g1_A)\delta_g = 1_A\delta_01_g\delta_g \in Im(\Phi)$ e $1_g\alpha_c(1_{c^{-1}1_A})\delta_g = \alpha_c(1_{c^{-1}1_A})\delta_01_g\delta_g \in Im(\Phi)$. Novamente pelo Lema 2.14, temos que $C(X_g)\delta_g \subseteq Im(\Phi)$. Portanto, Φ é sobrejetora.

Para terminar a demonstração falta mostrar que Φ é injetora. Para tal feito, vamos utilizar o Teorema Gauge-Invariant Uniqueness que pode ser conferido em [25, Teorema 6.8]. Por [25, logo após Observação 2.13], existe uma ação de Gauge $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow Aut(C^*(\mathcal{G}))$ que leva $z \mapsto \varphi_z$, tal que $\varphi_z(s_e) = zs_e$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e $\varphi_z(p_A) = p_A$ para todo $A \in \mathcal{G}^0$.

Vamos construir uma ação de \mathbb{T} em $C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Para $g = ab^{-1} \in \mathbb{F}$, com $a, b \in P \cup \{0\}$, defina $|g| = |a| - |b|$. Para cada $z \in \mathbb{T}$ defina $\psi_z : C_0(X) \rtimes_{alg} \mathbb{F} \rightarrow C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ por $\psi_z(\sum_g a_g \delta_g) = \sum_g z^{|g|} a_g \delta_g$. Note que ψ_z é $*$ -homomorfismo e que $\|\psi_z(\sum_g a_g \delta_g)\| = \|\sum_g z^{|g|} a_g \delta_g\| \leq \sum_g \|a_g \delta_g\|$. Por [13, Corolário 17.11], temos que, para cada $g \in \mathbb{F}$, $\|a_g \delta_g\| = \|a_g\|$, assim, $\|\psi_z(\sum_g a_g \delta_g)\| \leq \sum_g \|a_g\|$ e temos uma contração. Então, ψ_z se estende a um $*$ -homomorfismo $\psi_z : C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} \rightarrow C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$. Mais do que isso, $\mathbb{T} \ni z \mapsto \psi_z \in Aut(C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F})$ é uma ação fortemente contínua. E ainda, $\Phi \circ \varphi_z = \psi_z \circ \Phi$, para todo $z \in \mathbb{T}$. Agora, mais uma vez por [13, Corolário 17.11] temos que $1_A \delta_0 \neq 0$, para todo $A \in \mathcal{G}^0$ e portanto, pelo Teorema Gauge-Invariant Uniqueness de [25] concluímos que Φ é injetora. \blacksquare

Observação 2.16. *Já é sabido que toda C^* -álgebra de grafo pode ser escrita como um produto cruzado parcial, assim como C^* -álgebras de Exel-Laca. Pelo Teorema 2.15, toda C^* -álgebra de Ultragrafo em que o ultragrafo satisfaz RFUM2 também pode ser escrita como um produto cruzado parcial. Ainda não é conhecida uma construção de um isomorfismo que descreva qualquer C^* -álgebra de ultragrafo como um produto cruzado parcial.*

Capítulo 3

Espaço Shift e Grupóides do Ultragrafo

Neste capítulo vamos apresentar algumas das primeiras consequências do Teorema 2.15. Para um melhor entendimento da Subseção 3.3.2, a Seção 8 de [7] encontra-se em anexo.

3.1 Espaço Shift de Ultragrafo

Para um ultragrafo \mathcal{G} podemos associar o espaço de ultracaminhos de fronteira, e para este espaço, podemos associar um espaço shift. Para construir o espaço shift, como visto em [15, Seção 3.2], precisamos da função shift, mas antes, vejamos algumas notações.

Definição 3.1. *Sabe-se que $X = X_{fin} \cup \mathfrak{p}^\infty$. Defina os seguintes subconjuntos de X :*

Para $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, defina $X^n = \mathfrak{p}^n \cap X_{fin} = \{x \in X_{fin} : |x| = n\}$;

$$X^{\geq n} = \bigcup_{k \geq n} X^k = \bigcup_{k \geq n} \mathfrak{p}^k \cap X_{fin};$$

$$X_\infty^{\geq n} = X^{\geq n} \cup \mathfrak{p}^\infty = \bigcup_{k \geq n} X^k \cup \mathfrak{p}^\infty := \left(\bigcup_{k \geq n} \mathfrak{p}^k \cap X_{fin} \right) \cup \mathfrak{p}^\infty;$$

Note que $X_\infty^{\geq 1} = X \setminus X^0$ e que $X_\infty^{\geq 0} = X$.

Definição 3.2. *Se X é o espaço de ultracaminhos de fronteira associado a um ultragrafo \mathcal{G} , a função shift $\sigma : X_\infty^{\geq 1} \rightarrow X$ é definida por:*

$$\sigma(x) = \begin{cases} \gamma_2\gamma_3\dots, & \text{se } x = \gamma_1\gamma_2\dots \in \mathfrak{p}^\infty; \\ (\gamma_2\dots\gamma_n, A), & \text{se } x = (\gamma_1\dots\gamma_n, A) \in X^{\geq 2}; \\ (A, A), & \text{se } x = (\gamma_1, A) \in X^1. \end{cases}$$

Defina ainda, para $n \geq 1$, σ^n como sendo a composição n vezes de σ . Claro que quando escrevemos $\sigma^n(x)$ estamos assumindo implicitamente que $x \in X_\infty^{\geq n}$. Defina também, σ^0 como sendo a identidade em X .

Proposição 3.3. *A função shift definida acima é contínua em todos os pontos de $X_\infty^{\geq 1}$. Além disso, se $x \in X \setminus X^0$ então existe um aberto U de X que não contém elementos de tamanho zero e é tal que $x \in U$, $\sigma(U)$ é um subconjunto aberto de X , e $\sigma|_U : U \rightarrow \sigma(U)$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ uma sequência que converge para $x \in X$. Então podemos afirmar que $x^n = (\gamma_1^n, \dots, \gamma_k^n, A_n)$, ou $x^n = (\gamma_1^n, \dots, \gamma_k^n, \{v_n\})$ ou $x^n = \gamma_1^n\gamma_2^n\dots$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $|x| = \infty$ é óbvio que $\sigma(x^n)$ converge para $\sigma(x)$ pela caracterização de convergência dada no Corolário 1.28. Para o caso em que $|x| < \infty$ e $x \in X_{sin}$ com $r(x) \in G_s^0$, temos que x^n fica constante a partir de algum N , e portanto $\sigma(x^n)$ também fica constante a partir do mesmo N . Com isso $\sigma(x^n)$ converge para $\sigma(x)$.

Caso $|x| < \infty$ e $x = (\gamma_1 \dots \gamma_k, A) \in X_{min}$, pelo item (ii) de Corolário 1.28, dados $F \subseteq \varepsilon(A)$ e $S \subseteq A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $x^n = x$ ou temos que $|x^n| > k$, $\gamma_i^n = \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, e $\gamma_{k+1}^n \in \varepsilon(A) \setminus F$. Então, para todo $n \geq N$, $\sigma(x^n) = \sigma(x)$, ou $|\sigma(x^n)| > k - 1$ e $\sigma(x^n)_k = \gamma_{k+1}^n \in \varepsilon(A) \setminus F$, ou seja, $\sigma(x^n)$ converge para $\sigma(x)$ e portanto σ é contínua.

Caso $|x| < \infty$ e $x = (\gamma_1 \dots \gamma_k, A) \in X_{sin}$ com $r(x) \in G_s^0$, pelo item (iii) de Corolário 1.28, para qualquer $S \subseteq A \cap G_s^0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $x^n = x$ ou temos que $|x^n| = k$, $\gamma_i^n = \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, e $r(x^n) = \{v_k\} \in A \setminus S$. Então, para todo $n \geq N$, $\sigma(x^n) = \sigma(x)$, ou $|\sigma(x^n)| = k - 1$ e $r(\sigma(x^n)_{k-1}) = r(\gamma_k^n) = \{v_k\} \in A \setminus S$, ou seja, $\sigma(x^n)$ converge para $\sigma(x)$ e portanto σ é contínua.

Por fim, note que se $|x| \geq 1$ e U é uma vizinhança básica daquelas na Proposição 1.24 que contém x , então σ é claramente um homeomorfismo entre U e $\sigma(U)$. ■

Definição 3.4. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo e X seu espaço de ultracaminhos de fronteira com a topologia definida anteriormente e σ a função (contínua) shift definida acima. Então definimos o par (X, σ) como sendo o espaço shift associado ao ultragrafo \mathcal{G} .*

Observação 3.5. *No caso em que \mathcal{G} é um grafo finito sem sinks, \mathcal{G} não possuirá emissores infinitos e assim X , visto como espaço topológico, é o espaço de caminhos infinitos usual associado ao grafo. Diante disso, nossa definição coincide com o espaço shift de arestas (one sided edge shift). No caso em que \mathcal{G} é um grafo, nossa definição de espaço shift coincide com aquela em [5].*

3.2 Grupóides de Ultragrafo

Nesta seção, vamos provar que a C^* -álgebra do ultragrafo é isomorfa à uma C^* -álgebra de um grupóide. Existem duas maneiras de se fazer isso: uma delas é definir diretamente o grupóide, analogamente ao que foi feito com grafos, por exemplo em [18], [2] e principalmente [5] e provar que a C^* -álgebra do grupóide é a C^* -álgebra do ultragrafo (via core subálgebras). A outra maneira é perceber que o grupóide anterior é o mesmo que o grupóide de transformação dado pela ação parcial da Definição 2.9. Por [1], sabemos que a C^* -álgebra do Grupóide de transformação é isomorfa ao produto cruzado parcial (que por sua vez é isomorfo à C^* -álgebra do ultragrafo, pelo Teorema 2.15). Precisamos das seguintes definições:

Definição 3.6. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo (satisfazendo RFUM2). Definimos o grupóide associado à \mathcal{G} por $G(X, \sigma) := \{(x, m-n, y) : x, y \in X; m, n \in \mathbb{N}; \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\}$. A função source é definida por $s(x, k, y) = y$ e a range por $r(x, k, y) = x$. A multiplicação é dada por $(x, k, y)(y, l, z) = (x, k+l, z)$ e a inversa é $(x, k, y)^{-1} = (y, -k, x)$. Diante disso, o unit space será $\{(x, 0, x) : x \in X\} \cong X$ e a topologia considerada é a dos cilindros (como em [5] e em [21, 8.3]), ou seja, a topologia gerada pelos conjuntos básicos*

$$Z(U, m, n, V) = \{(x, k, y) \in G(X, \sigma) : x \in U, k = m - n, y \in V; \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\}.$$

em que $U \subseteq X_{\infty}^{\geq m}$, $V \subseteq X_{\infty}^{\geq n}$ são abertos tais que $\sigma|_U^m$ e $\sigma|_V^n$ são injetoras e $\sigma^m(U) = \sigma^n(V)$.

Observação 3.7. *O grupóide definido acima será o mesmo grupóide de Deaconu-Renault definido na Seção 3.3.2. A princípio será chamado de Grupóide associado à um ultragrafo.*

Para definir o grupóide de transformação, vamos nos basear em [1].

Definição 3.8. Considere \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e a ação parcial da Definição 2.9. O grupóide de transformação associado à \mathcal{G} é dado por $\mathcal{G}_T := \{(x, c, y) \in X \times \mathbb{F} \times X; x = \theta_c(y) = cy\}$. A função source é dada por $s(x, c, y) = y$ e a range por $r(x, c, y) = x = cy$. A multiplicação $(x, c, y)(w, d, z)$ só estará definida quando $s(x, c, y) = r(w, d, z) \iff y = w = dz$, e assim, $(x, c, y)(y, d, z) := (x, cd, z)$. A inversa é dada por $(x, c, y)^{-1} = (y, c^{-1}, x)$. O unit space é X . A topologia é a produto herdada de $X \times \mathbb{F} \times X$. Como \mathbb{F} é discreto temos que é grupóide étale.

Observação 3.9. Note que $\mathcal{G}_T \cong X \rtimes_{\theta} \mathbb{F} = \{(c, x) \in \mathbb{F} \times X; c \in \mathbb{F}, x \in X_c\}$. O source seria $s(c, x) = x$ e o range $r(c, x) = cx$. A multiplicação é dada por $(a, bx)(b, x) = (ab, x)$ e a inversa por $(a, x)^{-1} = (a^{-1}, ax)$. O grupóide de transformação construído em [1] tem esse formato.

Vamos então mostrar que os dois grupóides definidos acima são isomorfos, conseguindo assim um isomorfismo entre a C^* -álgebra do ultragrafo e a C^* -álgebra de um grupóide de uma maneira diferente.

Lema 3.10. Um elemento em \mathcal{G}_T é sempre da forma $((\alpha, A).x, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A).x)$, com $x \in X$.

Demonstração. De fato, suponha que $((\alpha, A), \gamma\delta^{-1}, (\beta, B)) \in \mathcal{G}_T$. Então, temos que $\theta_{\gamma\delta^{-1}}(\beta, B) = (\alpha, A)$, isto é, $(\gamma\widehat{\delta}\beta, B) = (\alpha, A)$, logo $B = A$ e $\gamma\widehat{\delta}\beta = \alpha$. Com isso, pela definição dos elementos de \mathcal{G}_T , temos que $\alpha = \gamma\alpha'$ e $\beta = \delta\beta'$. Assim, $\gamma\alpha' = \alpha = \gamma\widehat{\delta}\beta = \gamma\widehat{\delta}\delta\beta' = \gamma\beta'$, ou seja, $\alpha' = \beta'$ e segue a afirmação pois, $\alpha\beta^{-1} = \gamma\alpha'(\delta\beta')^{-1} = \gamma\alpha'(\beta')^{-1}\delta^{-1} = \gamma\delta^{-1}$. Portanto $\theta_{\alpha\beta^{-1}}(\beta, A) = (\alpha, A)$. ■

Teorema 3.11. Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Considere $G(X, \sigma)$ e \mathcal{G}_T os grupóides definidos acima. Se ab^{-1} está na forma reduzida em que $x = ax'$, $y = bx'$ e $x = \theta_{ab^{-1}}(y)$, então a função

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{G}_T &\rightarrow G(X, \sigma) \\ (x, ab^{-1}, y) &\mapsto (x, |a| - |b|, y) \end{aligned}$$

é um $*$ -isomorfismo de grupóides topológicos.

Demonstração. De fato, note primeiro que, usando o lema anterior, para Ψ estar bem definida é necessário que ab^{-1} esteja na forma reduzida. Além disso, como um elemento em \mathcal{G}_T é da forma (ax, ab^{-1}, bx) (comparando com o Lema 3.10, existe aqui um abuso de notação), para mostrar que Ψ é multiplicativa, sejam $(ax, ab^{-1}, bx), (bx, bc^{-1}, cx) \in \mathcal{G}_T$. Então:

$$\begin{aligned} \Psi\left((ax, ab^{-1}, bx).(bx, bc^{-1}, cx)\right) &= \Psi(ax, ab^{-1}bc^{-1}, cx) \\ &= (ax, |a| - |c|, cx) \\ &= (ax, |a| - |b| + (|b| - |c|), cx) \\ &= (ax, |a| - |b|, bx).(bx, |b| - |c|, cx) \\ &= \Psi(ax, ab^{-1}, bx).\Psi(bx, cd^{-1}, cx) \end{aligned}$$

Também, Ψ preserva inversa, uma vez que $\Psi\left((x, ab^{-1}, y)^{-1}\right) = \Psi(y, ba^{-1}, x) = (y, |b| - |a|, x) = (x, |a| - |b|, y)^{-1} = \Psi\left((x, ab^{-1}, y)\right)^{-1}$.

Vamos mostrar que Ψ é injetora. Sejam (x, ab^{-1}, y) e (w, cd^{-1}, z) elementos de \mathcal{G}_T tais que $\Psi(x, ab^{-1}, y) = \Psi(w, cd^{-1}, z)$, ou seja, $(x, |a| - |b|, y) = (w, |c| - |d|, z)$. Então, $x = w$, $y = z$, $|a| - |b| = |c| - |d|$, $\sigma^{|a|}(x) = \sigma^{|b|}(y)$ e $\sigma^{|c|}(w) = \sigma^{|d|}(z)$.

Precisamos mostrar que $ab^{-1} = cd^{-1}$. Mas sabemos que $\theta_{ab^{-1}}(y) = \widehat{a}by = x = w = \widehat{c}dz = \widehat{c}dy$. Assim $a = ca'$ ou $c = ac'$ ou $a = c$. Suponha, sem perda de generalidade, que $c = ac'$. Então,

$$\widehat{b}y = \sigma^{|a|}(\widehat{a}by) = \sigma^{|a|}(x) = \sigma^{|a|}(w) = \sigma^{|a|}(\widehat{c}dy) = \sigma^{|a|}(ac'\widehat{d}y) = c'\widehat{d}y. \quad (3.1)$$

Mas como $y \in X_{ba^{-1}}$, temos que $y = by'$. Logo, por (3.1), temos

$$y' = \widehat{b}by' = \widehat{b}y = c'\widehat{d}y'. \quad (3.2)$$

Por outro lado, como $c = ac'$, temos $|c| \geq |a|$ e assim, $|d| - |b| = |c| - |a| \geq 0$, o que implica em $|d| \geq |b|$. Como $y = z \in X_{dc^{-1}}$, temos que $d = bd'$. Com isso, por (3.2)

$$y' = c'\widehat{d}by' \underset{d=bd'}{=} c'\widehat{d}'\widehat{b}by' = c'\widehat{d}'y'. \quad (3.3)$$

Ou seja, $y' = c'\widehat{d}'y' = \theta_{c'd'^{-1}}(y')$. Agora, note que se $c' \neq d'$, então $c'd'^{-1}$ é irredutível e $\theta_{c'd'^{-1}}$ não pode conter pontos fixos. Logo, existir esse y' é um absurdo. Portanto, devemos ter $c' = d'$, e com isso, $cd^{-1} = ac'd^{-1} = ac'd'^{-1}b^{-1} = ab^{-1}$ e Ψ é injetora.

Agora, mostremos que Ψ é sobrejetora. Sejam $x, y \in X$ tais que existem $m, n \in \mathbb{N}$ com $\sigma^n(x) = \sigma^m(y)$. Então, $(x, n - m, y) \in G(X, \sigma)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $n \geq m$. Então, $x = x_1 \dots x_m \dots x_n e_1 e_2 \dots$ e $y = y_1 \dots y_m e_1 e_2 \dots$. Tome $a = x_1 \dots x_n$ e $b = y_1 \dots y_m$. Então é claro que $(x, ab^{-1}, y) \in \mathcal{G}_T$ e $\Psi(x, ab^{-1}, y) = (x, |a| - |b|, y) = (x, n - m, y)$.

Falta mostrar que Ψ é contínua e aberta. Para isso, vamos analisar como são os abertos básicos das topologias de cada espaço. Primeiro, note que $G(X, \sigma)$ tem a topologia dos cilindros como aquela construída em [5]. Seja $(x, m - n, y) \in G(X, \sigma)$. Temos que se $x \in X_{fin}$, então $y \in X_{fin}$ e $(x, m - n, y) = ((\alpha, A), m - n, (\beta, B))$ e também $\sigma^m(\alpha, A) = \sigma^n(\beta, B)$, ou seja, $(\alpha_{m+1} \dots \alpha_{|\alpha|}, A) = (\beta_{n+1} \dots \beta_{|\beta|}, B)$, isto é, $A = B$ e $\alpha_{m+1} \dots \alpha_{|\alpha|} = \beta_{n+1} \dots \beta_{|\beta|}$, e com isso, $|\alpha| - (m + 1) + 1 = |\beta| - (n + 1) + 1$, ou seja, $|\alpha| - |\beta| = n - m$. Isso acontece com A, B ambos sendo emissores infinitos minimais, ou com ambos sendo sinks. Por outro lado, se $x \in \mathfrak{p}^\infty$, então temos que ter $y \in \mathfrak{p}^\infty$ e assim, $(x, m - n, y) = (\gamma_1 \gamma_2 \dots, m - n, \delta_1 \delta_2 \dots)$, e também $\sigma^m(\gamma_1 \gamma_2 \dots) = \sigma^n(\delta_1 \delta_2 \dots)$, ou seja, $\gamma_{m+1} \gamma_{m+2} \dots = \delta_{n+1} \delta_{n+2} \dots$. Portanto, elementos em $G(X, \sigma)$ são da forma $((\alpha, A)y, m - n, (\beta, A)y)$, com $y \in X$ e $|\alpha| - |\beta| = n - m$, ou da forma $(\gamma_1 \dots \gamma_m y, m - n, \delta_1 \dots \delta_n y)$, com $y \in X$. Sabemos pela Definição 3.6 (que vem de [5]) que os abertos de $G(X, \sigma)$ são da forma:

$$Z(U, m, n, V) = \{(x, k, y) \in G(X, \sigma) : x \in U, k = m - n, y \in V; \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\}.$$

em que $U \subseteq X^{\geq m}$, $V \subseteq X^{\geq n}$ são abertos tais que $\sigma|_U^m$ e $\sigma|_V^n$ são injetoras e $\sigma^m(U) = \sigma^n(V)$. Mas, assim como em [21, 8.3], iremos usar uma subcoleção mais grossa destes abertos: dados (α, A) e (β, A) em X_{fin} , considerando compactos abertos $U \subseteq D_{(\alpha, A)}$ e $V \subseteq D_{(\beta, A)}$, a coleção $\{Z(U, |\alpha|, |\beta|, V) : \sigma^{|\alpha|}(U) = \sigma^{|\beta|}(V)\}$ é base para a topologia em $G(X, \sigma)$. De fato, note que esta subcoleção é base do grupóide de ultragrafos: Para mostrar isto, usaremos a seguinte caracterização de base: Um subconjunto δ de uma topologia τ , em um conjunto X é uma base quando todo elemento x de algum aberto U_0 da topologia é elemento de um elemento V_0 da base, e este elemento da base é um subconjunto do aberto inicial U_0 . Ou seja:

$$\forall x \in X, \forall U_0 \in \tau, (x \in U_0 \implies \exists V_0 \in \delta, (x \in V_0 \subseteq U_0))$$

No nosso caso δ é a coleção dos $Z(U, |\alpha|, |\beta|, V)$, X é $G(X, \sigma)$ e é claro que $\delta \subseteq \tau$, em que τ é a topologia em $G(X, \sigma)$ gerada pelos abertos $Z(U, m, n, V)$ acima. Seja então $(x, m - n, y) \in U_0$ em que $U_0 = Z(U, m, n, V)$ e $U \subseteq X^{\geq m}$, $V \subseteq X^{\geq n}$ são abertos tais que $\sigma|_U^m$ e $\sigma|_V^n$ são injetoras

e $\sigma^m(U) = \sigma^n(V)$. Então, como $x = (\alpha, A) \in U$, temos que $x \in D_x = D_{(\alpha, A)} \subseteq U$ e como $y = (\beta, A) \in V$, temos que $y \in D_y = D_{(\beta, A)} \subseteq V$. Pela Proposição 1.30, D_x e D_y são compactos e é claro que $(x, m - n, y) \in Z(D_x, |\alpha|, |\beta|, D_y)$, pois se $\sigma^m(x) = \sigma^n(y)$, então $\sigma^{|x|}(x) = \sigma^{|y|}(y)$ já que $|x| \geq m$ e $|y| \geq n$. É claro que $\sigma^{|\alpha|}(U) = \sigma^{|\beta|}(V)$, já que $\sigma^m(U) = \sigma^n(V)$ e que $|x| \geq m$ e $|y| \geq n$. Falta mostrar que $Z(D_x, |\alpha|, |\beta|, D_y) \subset U_0$. De fato, se $(x', m' - n', y') \in Z(D_x, |\alpha|, |\beta|, D_y)$, é claro que $x' = xx''$ e $y' = yy''$, pois $x' \in D_x$ e $y' \in D_y$. Além disso, pela definição de $Z(D_x, |\alpha|, |\beta|, D_y)$, temos que $\sigma^{|\alpha|}(x') = \sigma^{|\beta|}(y')$, ou seja, $x'' = \sigma^{|\alpha|}(xx'') = \sigma^{|\alpha|}(x') = \sigma^{|\beta|}(y') = \sigma^{|\beta|}(yy'') = y''$. Com isso, como $m \leq |x|$ e $n \leq |y|$ temos que $\sigma^m(x') = \sigma^m(xx'') = \sigma^m(x)x'' = \sigma^n(y)y'' = \sigma^n(yy'') = \sigma^n(y')$, isto é, $(x', m' - n', y') \in U_0$. Portanto δ é base para $G(X, \sigma)$.

Note que $Z(U, |\alpha|, |\beta|, V) = \{((\alpha, A)y, |\alpha| - |\beta|, (\beta, A)y) : y \in X\}$.

Por outro lado, para analisar os abertos básicos em \mathcal{G}_T , usamos a caracterização de seus elementos feita no lema anterior. Como a topologia em \mathcal{G}_T é herdada de $X \times \mathbb{F} \times X$, um aberto básico é da seguinte forma: Dados $(\alpha, A), (\beta, A) \in X_{fin}$ então, um aberto básico é

$$D_{\alpha, \beta}^A = \left\{ \left((\alpha, A)x, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)x \right) : s(x) \in A, x \in X \right\}.$$

Outros abertos, quando $F \subseteq \varepsilon(A)$ e $S \subseteq A \cap G_s^0$ são finitos, seria da forma

$$D_{\alpha, \beta}^{A, F, S} = \left\{ \left((\alpha, A)x, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)x \right) : s(x) \in A, x \in X, x_1 \in \varepsilon(A) \setminus F \right\} \cup \left\{ \left((\alpha, v), \alpha\beta^{-1}, (\beta, v) \right) : v \notin S \right\}$$

Ou seja, estes abertos dependem de (α, A) e (β, A) , e eventualmente de F e S . Assim, quando aplicamos Ψ em um aberto básico de \mathcal{G}_T temos:

$$\begin{aligned} \Psi\left(D_{\alpha, \beta}^A\right) &= \Psi\left(\left\{ \left((\alpha, A)x, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)x \right) : s(x) \in A, x \in X \right\}\right) \\ &= \left\{ \Psi\left((\alpha, A)x, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)x \right) : s(x) \in A, x \in X \right\} \\ &= \left\{ \left((\alpha, A)x, |\alpha| - |\beta|, (\beta, A)x \right) : x \in X \right\} \\ &= Z(U, |\alpha|, |\beta|, V), \end{aligned}$$

com $U \subseteq D_{(\alpha, A)}$ compacto aberto, $V \subseteq D_{(\beta, A)}$ compacto aberto e é claro que $\sigma^{|\alpha|}(U) = \sigma^{|\beta|}(V)$. Com isso, $\Psi\left(D_{\alpha, \beta}^A\right)$ é um aberto básico em $G(X, \sigma)$.

Por outro lado, sejam $(\alpha, A), (\beta, A) \in X$, $U \subseteq D_{(\alpha, A)}$ compacto aberto e $V \subseteq D_{(\beta, A)}$ compacto aberto. Vamos analisar a imagem inversa do cilindro $Z(U, |\alpha|, |\beta|, V)$, isto é, $\Psi^{-1}(Z(U, |\alpha|, |\beta|, V))$. Mas note que

$$Z(U, |\alpha|, |\beta|, V) = \{((\alpha, A)y, |\alpha| - |\beta|, (\beta, A)y) : y \in X : \sigma^{|\alpha|}(U) = \sigma^{|\beta|}(V)\}.$$

Note ainda que $((\alpha, A)y, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)y) \in \mathcal{G}_T$ é tal que $\Psi((\alpha, A)y, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)y) = ((\alpha, A)y, |\alpha| - |\beta|, (\beta, A)y)$ e como Ψ é injetora, $((\alpha, A)y, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)y)$ é o único elemento que será levado em $((\alpha, A)y, |\alpha| - |\beta|, (\beta, A)y)$. Assim, temos que

$$\Psi^{-1}(Z(U, |\alpha|, |\beta|, V)) = \{((\alpha, A)y, \alpha\beta^{-1}, (\beta, A)y) : y \in X\} \subseteq X \times \mathbb{F} \times X$$

é um aberto básico na topologia herdada da topologia produto em $X \times \mathbb{F} \times X$. Portanto, segue o isomorfismo de grupóides. ■

3.3 Grupóide de Deaconu-Renault

Esta seção visa a generalização do Teorema 4.2 de [9]: (note que ∂E é o espaço de caminho de fronteiras, definido (em [9]) por $\partial E = E^\infty \cup \{\mu \in E^*; r(\mu) \in E_{sing}^0\}$). Dados dois grafos dirigidos E e F , considere \mathcal{G}_E e \mathcal{G}_F os seus grupóides associados (então $\mathcal{G}_E^0 = \partial E$ e $\mathcal{G}_F^0 = \partial F$). Se $\phi : \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{G}_F$ é um isomorfismo, então o homeomorfismo $h : \partial E \rightarrow \partial F$ induzido por ϕ , é uma órbita equivalência que preserva pontos isolados eventualmente periódicos. Por outro lado, se $h : \partial E \rightarrow \partial F$ é uma órbita equivalência que preserva pontos isolados eventualmente periódicos, então existe um isomorfismo $\phi : \mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{G}_F$ que induz h . Isto é, \mathcal{G}_E e \mathcal{G}_F são isomorfos se, e somente se, existe uma órbita equivalência $h : \partial E \rightarrow \partial F$ que preserva pontos isolados eventualmente periódicos.

Durante a tentativa de desenvolver a versão para ultragrafos, surgiu o artigo [7], que é uma generalização do resultado que almejávamos. Diante disto, nos baseamos na Seção 8 deste artigo para demonstrar a versão que propomos.

Para o caso dos ultragrafos, precisamos definir alguns elementos que podem ser encontrados em [2], em [24] ou que foram adaptados do caso em que era grafo e não ultragrafo. Mas antes note que, pela definição de segmento inicial feita na página 11, podemos decompor um ultracaminho de tamanho n em n ultracaminhos de tamanho 1, ou seja, se $|(\alpha, A)| = n$, então, podemos escrever, $(\alpha, A) = (\alpha_1, A_1)(\alpha_2, A_2) \dots (\alpha_n, A_n)$, em que $s(\alpha_{i+1}) \in A_i \subseteq r(\alpha_i)$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$.

Definição 3.12. *Um ciclo em \mathcal{G} é um ultracaminho $(\alpha, A) \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^0$, tal que $s(\alpha) \in A$. Uma saída para um ciclo $(\alpha, A) = (\alpha_1, A_1)(\alpha_2, A_2) \dots (\alpha_n, A_n)$ é da seguinte forma:*

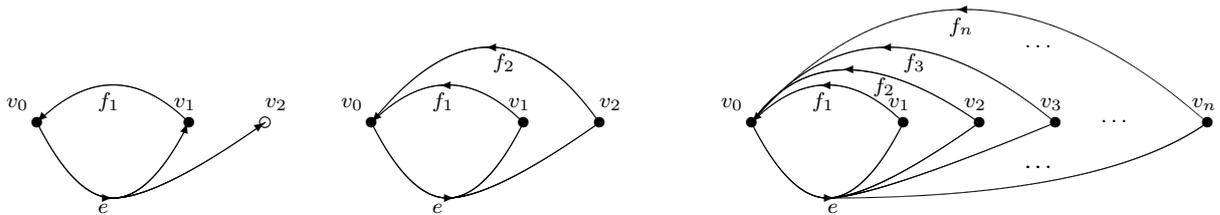
- i) *um ultracaminho $(e, E) \in \mathfrak{p}^1$, tal que $\exists i$ para o qual $s(e) \in r(\alpha_i)$ mas $e \neq \alpha_{i+1}$. (Note que não precisa, necessariamente, que $s(e) \in A_i$ para algum i).*
- ii) *um sink $v \in \mathcal{G}^0$ tal que $v \in r(\alpha_i)$ para algum i .*

Neste caso, dizemos que $x = (\alpha, A)$ é um ciclo de tamanho n . Quando $n = 1$, chamamos tal ciclo de loop.

Observação 3.13. *Note que podemos ter ciclos dentro de ciclos já que a concatenação de ciclos continua sendo um ciclo. Note ainda que em [24] foi utilizado o nome loop para o que chamamos aqui de ciclo.*

Definição 3.14. *Quando um ciclo não é decomponível em ciclos menores dizemos que tal ciclo é simples.*

Exemplos 3.15. *Os três ultragrafos a seguir contém ciclos.*



Alguns exemplos de ciclos no primeiro ultragrafo são: $(ef_1, \{v_0\})$, $(f_1e, \{v_1\})$, $(f_1e, \{v_1, v_2\})$, enquanto que $(f_1e, \{v_2\})$ não é ciclo. O ciclo $(ef_1, \{v_0\})$ é um ciclo simples enquanto que o ciclo $(ef_1ef_1, \{v_0\})$ não o é.

Alguns exemplos de ciclos no segundo ultragrafo são: $(ef_1, \{v_0\})$, $(ef_1ef_2, \{v_0\})$, $(f_2e, \{v_1, v_2\})$, $(f_2ef_1e, \{v_2\})$, enquanto que $(f_2e, \{v_1\})$ não é ciclo. O ciclo $(f_2ef_1e, \{v_2\})$ pode ser decomposto da seguinte maneira: $(f_2ef_1e, \{v_2\}) = (f_2e, \{v_1, v_2\})(f_1e, \{v_2\})$;

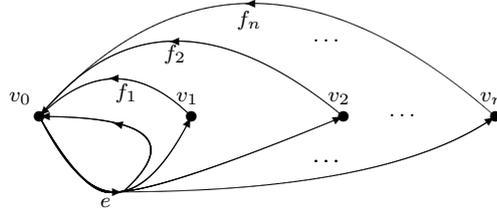
Alguns exemplos de ciclos no terceiro ultragrafo são: $(ef_i, \{v_0\})$, para todo i , $(ef_1ef_2ef_3, \{v_0\})$, $(f_i e, \{v_i\})$, para todo i , $(f_i e, r(e))$, para todo i , enquanto que $(f_i e, \{v_j\})$ com $i \neq j$ não é ciclo.

Todos os ciclos citados acima contém saída. Por exemplo, no primeiro ultragrafo, $(e, \{v_2\})$ é saída para $(f_1e, \{v_1\})$ e para $(f_1e, \{v_1, v_2\})$. No segundo e no terceiro ultragrafos, $(e, \{v_j\})$ é sempre saída de um ciclo da forma $(f_i e, \{v_i\})$ quando $j \neq i$.

Existe também uma condição (L) para ultragrafos:

Definição 3.16. Um ultragrafo \mathcal{G} satisfaz a Condição (L) se todo ciclo em \mathcal{G} tem uma saída.

Exemplo 3.17. O ultragrafo a seguir contém o loop (e, v_0) e satisfaz a condição (L):



3.3.1 Pontos isolados

Podemos afirmar que um ultracaminho (finito) $(\alpha, A) \in \mathfrak{p}$ pertence à X_{fin} se e somente se A é emissor infinito minimal, ou um sink minimal ou um sink. Além disso, (α, A) é ponto isolado de X (isto é, $\{(\alpha, A)\}$ é aberto) se, e somente se, A é um conjunto formado apenas por um sink.

Assim como em grafos, um caminho infinito de $x \in \mathfrak{p}^\infty$ é dito um ponto periódico se $x = \gamma\gamma\gamma\dots$ em que $\gamma \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^0$ é um ciclo. Além disso, um caminho infinito $x \in \mathfrak{p}^\infty$ é dito um ponto eventualmente periódico se $x = \mu\gamma\gamma\gamma\dots$ em que $\mu \in \mathfrak{p}$, $\gamma \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^0$ e γ é um ciclo. Claro que todo ponto periódico é eventualmente periódico.

Proposição 3.18. Um caminho infinito não eventualmente periódico $x = x_1x_2x_2\dots \in \mathfrak{p}^\infty$ é um ponto isolado de X (no sentido topológico) se, e somente se os conjuntos $S_1 := \{n \in \mathbb{N} : |\varepsilon(r(x_n))| \geq 2\}$ e $S_2 := \{n \in \mathbb{N} : |r(x_n)| \geq 2\}$ são finitos. Já um caminho que é um ponto eventualmente periódico será isolado se, e somente se, o seu ciclo não tem saída.

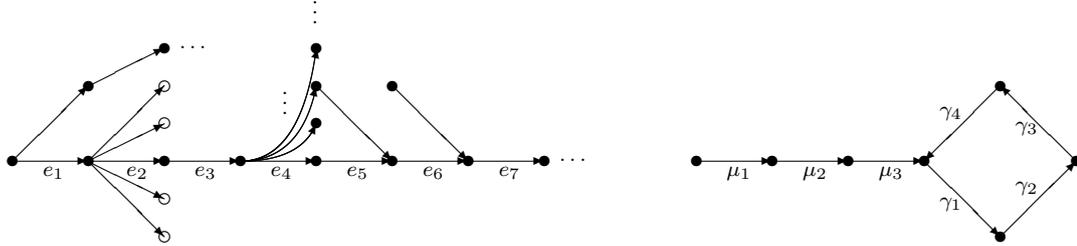
Demonstração. De fato, para mostrar que se x é um ponto isolado então os conjuntos S_1 e S_2 são finitos vamos utilizar a contra-positiva: suponha então que S_1 ou S_2 sejam conjuntos infinitos. Como x é caminho infinito, existe um segmento inicial y de x tal que $x \in D_y$ (aliás, pela definição dos cilindros, todo aberto D_w que contém x é tal que w é segmento inicial de x). Assim, podemos considerar $n \in S_1 \cup S_2$, de modo que $n > |y|$. Com isso, $|r(x_n)| \geq 2$ ou $|\varepsilon(r(x_n))| \geq 2$. Temos então que, ao mesmo tempo que $x \in D_y$, tem-se que $(x_1x_2\dots x_n, \{v_0\}) \in D_y$, com $v_0 \in r(x_n) \setminus s(x_{n+1})$ ou tem-se que $(x_1x_2\dots x_n e, r(e))w \in D_y$, com $e \in \varepsilon(r(x_n)) \setminus \{x_{n+1}\}$ e $s(w) \in r(e)$, $w \in X$. Ou

seja, D_y contém mais que um elemento sempre. Como y foi escolhido arbitrariamente, não existe y tal que $D_y = \{x\}$ (ou uniões de D_y 's). Logo, x não é isolado.

Por outro lado, se S_1 e S_2 são finitos, podemos considerar $n_0 = \max\{S_1, S_2\}$. Então, $y := (x_1x_2 \dots x_{n_0+1}, r(y)) \in \mathfrak{p}$ é segmento inicial de x e assim $x \in D_y$. Não existe outro elemento em D_y pois, caso existisse, teríamos de ter $|\varepsilon(r(x_m))| \geq 2$ ou $|(r(x_m))| \geq 2$ para algum $m > n_0$, o que é um absurdo. Logo, $D_y = \{x\}$, ou seja, x é isolado.

A segunda afirmação é demonstrada analogamente ao que foi feito acima. Basta notar que um ciclo γ ter saída significa que $|\varepsilon(r(\gamma_i))| \geq 2$ ou $|(r(\gamma_i))| \geq 2$, para algum $i = 1, \dots, |\gamma|$. ■

Exemplo 3.19. Os pontos $x = e_1e_2e_3 \dots$ e $y = \mu_1\mu_2\mu_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \dots$ a seguir são isolados



Note que o ponto x continua isolado mesmo quando “chegam” arestas nos ranges dos e_i 's. O que não pode acontecer é “sair” mais do que uma aresta destes ranges, para uma quantidade infinita de arestas e_i e nem ter range com cardinalidade maior que um para infinitas arestas e_i . No caso do ponto y também podem chegar arestas nos ranges dos γ_i 's, o que não pode é sair nada deles além dos próprios γ_i 's, além de que seus ranges são conjuntos unitários, que contém apenas o source de sua aresta seguinte.

Assim, um ultragrafo \mathcal{G} satisfaz a condição (L) se, e somente se não existem pontos eventualmente periódicos que são isolados em X . Seguindo [2], podemos definir ainda os pontos não-nômades (non-wandering) e com isso caracterizar todo tipo de ponto isolado em um ultragrafo.

Definição 3.20. Um caminho $x \in \mathfrak{p}^\infty$ é um ponto não-nômade se $\varepsilon(r(x_i)) = \{x_{i+1}\}$ e também $|r(x_i)| = 1$, para todo i . Um ponto eventualmente não-nômade é um elemento $x = \mu\gamma \in \mathfrak{p}^\infty$ em que $\mu \in \mathfrak{p}$, $\gamma \in \mathfrak{p}^\infty$ é não-nômade.

Note que um ciclo sem saída é não-nômade. Disso, temos que pontos eventualmente periódicos isolados são eventualmente não-nômades. Note ainda que existem os pontos que são eventualmente não-nômades mas não são periódicos. Por fim, pode se concluir que:

Proposição 3.21. Os pontos isolados de X são exatamente os pontos que são eventualmente sinks (ou seja, cujo range é um conjunto unitário com um sink) ou eventualmente não-nômades.

Demonstração. Segue diretamente da Definição 3.20 e da Proposição 3.18. ■

3.3.2 Órbita Equivalência Contínua

Já temos quase todos os ingredientes necessários para enunciar o resultado a ser provado. Nas próximas duas definições cometemos dois abusos de notação, pois já utilizamos (X, σ) para o espaço shift e $G(X, \sigma)$ para o grupóide associado ao ultragrafo. Tais abusos se justificam logo após a Definição 3.23. Baseando-se em [7, Seç. 8] que está em anexo, temos que:

Definição 3.22. Um sistema de Deaconu-Renault é um par (X, σ) consistindo de um espaço localmente compacto Hausdorff X e um homeomorfismo local $\sigma : \text{Dom}(\sigma) \rightarrow \text{Im}(\sigma)$ que sai de um aberto $\text{Dom}(\sigma) \subseteq X$ para um aberto $\text{Im}(\sigma) \subseteq X$. Indutivamente define-se $\text{Dom}(\sigma^n) := \sigma^{-1}(\text{Dom}(\sigma^{n-1}))$, então cada $\sigma^n : \text{Dom}(\sigma^n) \rightarrow \text{Im}(\sigma^n)$ é um homeomorfismo local e $\sigma^m \circ \sigma^n = \sigma^{m+n}$ em $\text{Dom}(\sigma^{m+n})$.

Definição 3.23. O Grupóide de Deaconu-Renault de (X, σ) é

$$G = G(X, \sigma) = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \{(x, n - m, y) \in X_\infty^{\geq n} \times \{n - m\} \times X_\infty^{\geq m} : \sigma^n(x) = \sigma^m(y)\},$$

cujas topologia é gerada pelos abertos básicos $Z(U, n, m, V) := \{(x, n - m, y) : x \in U, y \in V, \text{ e } \sigma^n(x) = \sigma^m(y)\}$ indexado por quádruplas (U, n, m, V) em que $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq X_\infty^{\geq n}$ e $V \subseteq X_\infty^{\geq m}$ são abertos e $\sigma^n|_U$ e $\sigma^m|_V$ são homeomorfismos. Cada $Z(U, n, m, V)$ pode ser escrito como $Z(U', n, m, V')$ com $\sigma^n(U') = \sigma^m(V')$. Com isso, tal G é grupóide étale localmente compacto Hausdorff, com unit space $G^{(0)} = \{(x, 0, x) : x \in X\}$ que pode ser identificado com X . É também amenable e portanto $C_r^*(G) = C^*(G)$.

Diante disso, podemos afirmar que dado um ultragrafo que satisfaz RFUM2, o espaço shift (X, σ) associado a \mathcal{G} é um sistema de Deaconu-Renault. Além disso, o Grupóide de Deaconu-Renault é o mesmo que o Grupóide associado à um ultragrafo $G(X, \sigma)$ definido na página 33. Lembre-se que quando escrevemos $\sigma^n(x)$ estamos assumindo implicitamente que $x \in X_\infty^{\geq n}$.

Definição 3.24. Seja $x \in X^{\geq 1}$, o grupo estabilizador de x é

$$\text{stab}(x) := \{m - n : m, n \in \mathbb{N}, x \in X_\infty^{\geq m} \cap X_\infty^{\geq n} \text{ e } \sigma^m(x) = \sigma^n(x)\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

O grupo estabilizador essencial de $x \in X$ é

$$\text{stab}^{\text{ess}}(x) = \{m - n : m, n \in \mathbb{N} \text{ e } \exists U \text{ vizinhança de } x; U \subseteq X_\infty^{\geq m} \cap X_\infty^{\geq n}, \text{ tal que } \sigma^m|_U = \sigma^n|_U\}.$$

Observação 3.25. Note que para qualquer $x \in X$, temos $\text{stab}^{\text{ess}}(x) \subseteq \text{stab}(x)$.

Definição 3.26. Com a convenção de que $\min \emptyset = \infty$, definimos o estabilizador minimal de $x \in X$ como sendo

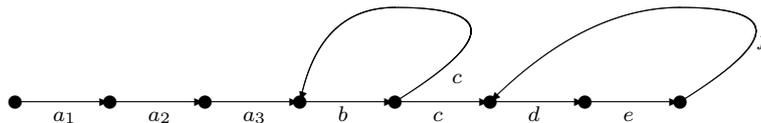
$$\text{stab}_{\min}(x) = \min\{n : n \in \text{stab}(x); n \geq 1\},$$

e ainda o estabilizador essencial minimal como

$$\text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(x) = \min\{n : n \in \text{stab}^{\text{ess}}(x); n \geq 1\}.$$

Observação 3.27. Note que para qualquer $x \in X$, temos $\text{stab}_{\min}(x) \leq \text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(x)$.

Exemplo 3.28. Considere o ultragrafo a seguir:



Note que um elemento que pertence ao espaço de ultracaminhos associado a este ultragrafo é $x = a_1 a_2 a_3 b c b c b c b c b c \dots$. Tal ponto é eventualmente periódico e $\text{stab}(x) = \{5 - 3, 7 - 5, 7 - 3, 9 -$

$7, 9 - 5, 9 - 3, 5 - 5, 7 - 7, 3 - 7, 3 - 7, 5 - 7, \dots\} = 2\mathbb{Z}$. Assim, $stab_{min}(x) = 2$. Porém note que $stab^{ess}(x) = \{0\}$ pois, não existe $U \subseteq X_{\infty}^{\geq m} \cap X_{\infty}^{\geq n} = X_{\infty}^{\max\{m,n\}}$ tal que $x \in U$ e $\sigma^m|_U = \sigma^n|_U$. De fato, dados m, n , $m \neq n$, para os quais $\sigma^m(x) = \sigma^n(x)$, se existisse tal U , como os conjuntos da Proposição 1.24 são base para a topologia em X , deve existir um D_{α} para o qual $x \in D_{\alpha} \subseteq U$. Assim, $\alpha = a_1 a_2 a_3 \underbrace{bc \dots bc}_{|\alpha| - 3 + m + n} defdef \dots \in$

$D_{\alpha} \subseteq U$, temos que $\sigma^m(z) \neq \sigma^n(z)$, pois $m \neq n$. Logo $stab^{ess}(x) = \{0\}$ e conseqüentemente $stab_{min}^{ess}(x) = \infty$. Note ainda que bc é um ciclo que tem saída.

Por outro lado, para $y = a_1 a_2 a_3 bcdefdefdef \dots$ temos que $stab(y) = stab^{ess}(y) = 3\mathbb{Z}$. O ciclo de f não tem saída.

Precisamos de uma definição para órbita equivalência contínua na versão ultragrafos. Para isso utilizamos a definição mais geral encontrada em [7] e posteriormente reduzimos ao nosso caso.

Definição 3.29. *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu-Renault. Dizemos que (X, σ) e (Y, τ) são órbita equivalente contínuos se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ e funções contínuas $k, l : Dom(\sigma) \rightarrow \mathbb{N}$, $k', l' : Dom(\tau) \rightarrow \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{aligned} \tau^{l(x)}(h(x)) &= \tau^{k(x)}(h(\sigma(x))) \\ \sigma^{l'(y)}(h^{-1}(y)) &= \sigma^{k'(y)}(h^{-1}(\tau(y))), \end{aligned}$$

$\forall x, y$. Dizemos que (h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua e chamamos h de homeomorfismo fundamental. Dizemos que (h, l, k, l', k') preserva estabilizadores se $stab_{min}(h(x)) < \infty \Leftrightarrow stab_{min}(x) < \infty$ e

$$\left| \sum_{n=0}^{stab_{min}(x)-1} l(\sigma^n(x)) - k(\sigma^n(x)) \right| = stab_{min}(h(x)) \quad (3.4)$$

e

$$\left| \sum_{n=0}^{stab_{min}(y)-1} l'(\tau^n(y)) - k'(\tau^n(y)) \right| = stab_{min}(h^{-1}(y)) \quad (3.5)$$

sempre que $stab(x) \neq \{0\}$, $stab(y) \neq \{0\}$, $\sigma^{stab_{min}(x)}(x) = x$ e $\sigma^{stab_{min}(y)}(y) = y$. Dizemos ainda que (h, l, k, l', k') preserva estabilizadores essenciais se $stab_{min}^{ess}(h(x)) < \infty \Leftrightarrow stab_{min}^{ess}(x) < \infty$ e

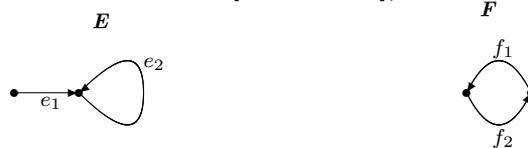
$$\left| \sum_{n=0}^{stab_{min}^{ess}(x)-1} l(\sigma^n(x)) - k(\sigma^n(x)) \right| = stab_{min}^{ess}(h(x)) \quad (3.6)$$

e

$$\left| \sum_{n=0}^{stab_{min}^{ess}(y)-1} l'(\tau^n(y)) - k'(\tau^n(y)) \right| = stab_{min}^{ess}(h^{-1}(y)) \quad (3.7)$$

sempre que $stab^{ess}(x) \neq \{0\}$, $stab^{ess}(y) \neq \{0\}$, $\sigma^{stab_{min}^{ess}(x)}(x) = x$ e $\sigma^{stab_{min}^{ess}(y)}(y) = y$.

Exemplo 3.30. (Exemplo baseado em [5, Ex. 3.2]) Considere os grafos E e F a seguir:



É sabido que $C^*(F) \cong M_2(\mathbb{C})$. Temos que $X_E = \{e_1 e_2 e_2 \dots, e_2 e_2 \dots\}$. Além disso $X_F = \{f_1 f_2 f_1 f_2 \dots, f_2 f_1 f_2 f_1 \dots\}$. Para abreviar vamos chamar $e_1 e_2 e_2 \dots = e_1 \bar{e}_2$, $e_2 e_2 \dots = \bar{e}_2$, $f_1 f_2 f_1 f_2 \dots =$

$\overline{f_1 f_2}$ e $f_2 f_1 f_2 f_1 \dots = \overline{f_2 f_1}$. Vamos mostrar que existe uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores. Primeiro calculamos os estabilizadores:

$$\begin{aligned} \text{stab}(e_1 \overline{e_2}) &= \mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}(e_1 \overline{e_2}) = 1 \\ \text{stab}(\overline{e_2}) &= \mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}(\overline{e_2}) = 1 \\ \text{stab}(\overline{f_1 f_2}) &= 2\mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}(\overline{f_1 f_2}) = 2 \\ \text{stab}(\overline{f_2 f_1}) &= 2\mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}(\overline{f_2 f_1}) = 2 \end{aligned}$$

Por outro lado, calculando os estabilizadores essenciais temos:

$$\begin{aligned} \text{stab}^{\text{ess}}(e_1 \overline{e_2}) &= \mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(e_1 \overline{e_2}) = 1 \\ \text{stab}^{\text{ess}}(\overline{e_2}) &= \mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(\overline{e_2}) = 1 \\ \text{stab}^{\text{ess}}(\overline{f_1 f_2}) &= 2\mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(\overline{f_1 f_2}) = 2 \\ \text{stab}^{\text{ess}}(\overline{f_2 f_1}) &= 2\mathbb{Z} \Rightarrow \text{stab}_{\min}^{\text{ess}}(\overline{f_2 f_1}) = 2 \end{aligned}$$

Defina agora,

$$\begin{array}{lll} h : X_E \longrightarrow X_F & l : X_E \longrightarrow \mathbb{N} & k : X_E \longrightarrow \mathbb{N} \\ e_1 \overline{e_2} \longmapsto \overline{f_1 f_2} & e_1 \overline{e_2} \longmapsto 1 & e_1 \overline{e_2} \longmapsto 0 \\ \overline{e_2} \longmapsto \overline{f_2 f_1} & \overline{e_2} \longmapsto 3 & \overline{e_2} \longmapsto 1 \\ \\ h^{-1} : X_F \longrightarrow X_E & l' : X_F \longrightarrow \mathbb{N} & k' : X_F \longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{f_1 f_2} \longmapsto e_1 \overline{e_2} & \overline{f_1 f_2} \longmapsto 1 & \overline{f_1 f_2} \longmapsto 0 \\ \overline{f_2 f_1} \longmapsto \overline{e_2} & \overline{f_2 f_1} \longmapsto 0 & \overline{f_2 f_1} \longmapsto 2 \end{array}$$

Então (h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua entre (X_E, σ) e (X_F, τ) . De fato,

$$\left. \begin{array}{ll} \bullet \tau^{l(x)}(h(x)) = \tau^{k(x)}(h(\sigma(x))) & \bullet \sigma^{l'(y)}(h^{-1}(y)) = \sigma^{k'(y)}(h^{-1}(\tau(y))) \\ e_1 \overline{e_2} : \tau^{l(e_1 \overline{e_2})}(h(e_1 \overline{e_2})) = \tau^{k(e_1 \overline{e_2})}(h(\sigma(e_1 \overline{e_2}))) & \overline{f_1 f_2} : \sigma^{l'(\overline{f_1 f_2})}(h^{-1}(\overline{f_1 f_2})) = \sigma^{k'(\overline{f_1 f_2})}(h^{-1}(\tau(\overline{f_1 f_2}))) \\ \tau^1(\overline{f_1 f_2}) = \tau^0(\overline{f_2 f_1}) & \sigma^1(e_1 \overline{e_2}) = \sigma^0(\overline{e_2}) \\ \overline{f_2 f_1} = \overline{f_2 f_1} & \overline{e_2} = \overline{e_2} \\ \\ \overline{e_2} : \tau^{l(\overline{e_2})}(h(\overline{e_2})) = \tau^{k(\overline{e_2})}(h(\overbrace{\sigma(\overline{e_2})}^{\overline{e_2}})) & \overline{f_2 f_1} : \sigma^{l'(\overline{f_2 f_1})}(h^{-1}(\overline{f_2 f_1})) = \sigma^{k'(\overline{f_2 f_1})}(h^{-1}(\tau(\overline{f_2 f_1}))) \\ \tau^3(\overline{f_2 f_1}) = \tau^1(\overline{f_2 f_1}) & \sigma^0(\overline{e_2}) = \sigma^2(e_1 \overline{e_2}) \\ \overline{f_1 f_2} = \overline{f_1 f_2} & \overline{e_2} = \overline{e_2} \end{array} \right|$$

Além disso, preserva estabilizadores: Os elementos que são periódicos são $\overline{e_2}$, $\overline{f_1 f_2}$ e $\overline{f_2 f_1}$. Temos de mostrar que $\overline{e_2}$ satisfaz a equação (3.4):

$$\left| \sum_{n=0}^{\text{stab}_{\min}(x)-1} l(\sigma^n(x)) - k(\sigma^n(x)) \right| = \text{stab}_{\min}(h(x))$$

Calculando para $\overline{e_2}$, temos

$$|l(\overline{e_2}) - k(\overline{e_2})| = |3 - 1| = 2 = \text{stab}_{\min}(\overline{f_2 f_1}).$$

Os outros dois elementos tem de satisfazer equação (3.5). Calculando para $\overline{f_1 f_2}$, temos

$$|(l'(\tau(\overline{f_1 f_2})) - k'(\overline{f_1 f_2})) + (l'(\tau(\overline{f_2 f_1})) - k'(\overline{f_2 f_1}))| = |(1 - 0) + (0 - 2)| = 1 = \text{stab}_{\min}(e_1 \overline{e_2}).$$

Calculando para $\overline{f_2 f_1}$, temos

$$|(l'(\tau(\overline{f_2 f_1})) - k'(\overline{f_2 f_1})) + (l'(\tau(\overline{f_1 f_2})) - k'(\overline{f_1 f_2}))| = |(0 - 2) + (1 - 0)| = 1 = \text{stab}_{\min}(\overline{e_2}).$$

Portanto, existe uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores (essenciais também) entre (X_E, σ) e (X_F, τ) .

Diante dos subgrupos de \mathbb{Z} definidos anteriormente, temos os seguintes resultados.

Lema 3.31. *Se $x \in X$ é um ponto eventualmente periódico, então existe um ciclo simples $\gamma \in \mathfrak{p}^n$, com $0 < n < \infty$, tal que $\text{stab}(x) = |\gamma|\mathbb{Z}$. Além disso, n é o tamanho do ciclo simples de x .*

Demonstração. De fato, como x é eventualmente periódico, temos que

$$x = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots$$

Sendo assim, faça $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$, (supondo claramente que $\gamma_i \neq \gamma_j$, se $i \neq j$. Caso contrário reescrevemos x). Então, $|\gamma| = n$, isto é, $\gamma \in \mathfrak{p}^n$ e é claro que $\text{stab}(x) = n\mathbb{Z} = |\gamma|\mathbb{Z}$ em que n é o tamanho do ciclo simples de x . ■

Lema 3.32. *Se $x \in X_{fin}$, então $\text{stab}(x) = \{0\}$ e portanto, $\text{stab}_{\min}(x) = \infty$. Consequentemente $\text{stab}^{ess}(x) = \{0\}$ e $\text{stab}_{\min}^{ess}(x) = \infty$.*

Demonstração. De fato, se $x = (x_1 x_2 \dots x_{|x|}, r(x))$, então para qualquer $0 \leq m, n \leq |x|$, em que $m \neq n$ teremos $\sigma^m(x) \neq \sigma^n(x)$. ■

Proposição 3.33. *Seja $x \in X$. Então, $\text{stab}_{\min}(x) < \infty \iff x \in \mathfrak{p}^\infty$ é eventualmente periódico.*

Demonstração. Suponha que $\text{stab}(x)_{\min} < \infty$. É claro que $x \in \mathfrak{p}^\infty$ pois, pelo lema 3.32 se $x \in X_{fin}$ teríamos então que $\text{stab}(x) = \{0\}$ e portanto, $\text{stab}_{\min}(x) = \infty$. Então existem m, n naturais, em que $m \neq n$, tais que $x \in X^{\geq m} \cap X^{\geq n}$ e $\sigma^m(x) = \sigma^n(x)$. Com isso, se $n < m$, temos que $x_{n+1} \dots = x_{m+1} \dots$, e portanto,

$$x = x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots x_m x_{m+1} \dots = x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots x_m x_{n+1} \dots x_m \dots = x_1 \dots x_n (x_{n+1} \dots x_m)^\infty.$$

Fazendo $\mu = x_1 \dots x_n$ e $\gamma = x_{n+1} \dots x_m$, temos que $x = \mu \gamma \gamma \dots$ e portanto x é eventualmente periódico.

Por outro lado, suponha que x é eventualmente periódico. Então $x = \mu \gamma \gamma \dots$ e pelo Lema 3.31, existe $\gamma \in \mathfrak{p}^n$, com $n > 0$ tal que $\text{stab}(x) = |\gamma|\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Portanto, $\text{stab}_{\min}(x) = n < \infty$. ■

Observação 3.34. *Diante da Proposição 3.33, temos que $\text{stab}(x) \neq \{0\}$ e $\sigma^{\text{stab}_{\min}(x)}(x) = x \iff x$ é periódico. Sendo assim, adaptando a Definição 3.29, percebe-se que preservar estabilizadores é o mesmo que preservar pontos eventualmente periódicos e além disso, sempre que x e y são periódicos, as equações (3.4) e (3.5) são satisfeitas.*

Definição 3.35. Diremos que uma órbita equivalência contínua (h, l, k, l', k') entre sistemas de Deaconu-Renault (X, σ) e (Y, τ) preserva pontos eventualmente periódicos isolados se $x \in X$ é eventualmente periódico isolado $\iff h(x)$ é eventualmente periódico isolado. Além disso, $y \in Y$ é eventualmente periódico isolado $\iff h^{-1}(y)$ é eventualmente periódico isolado.

Com as definições adaptadas acima, podemos enunciar o resultado que almejávamos, o qual será um caso particular da Proposição 8.3 de [7] (Proposição H.2 no anexo) e uma generalização do Teorema 4.2 de [9]. Isto se deve ao fato de termos adicionado os itens (4) e (5) no teorema. Mas antes, uma definição:

Definição 3.36. Se (X, σ) é um espaço shift, então o cociclo contínuo $c_X : G(X, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ é definido por $c_X(x, n, y) = n$, como em [7, Pág. 26].

Teorema 3.37. Sejam $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ ultragrafos que satisfazem RFUM2. Sejam (X_1, σ) e (X_2, τ) os sistemas de Deaconu-Renault correspondentes. Sejam $h : X_1 \rightarrow X_2$ um homeomorfismo e $k, l : X_1^{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}$, $k', l' : X_2^{\geq 1} \rightarrow \mathbb{N}$ funções contínuas. São equivalentes:

- (1) Existe um isomorfismo de grupóides $\theta : G(X_1, \sigma) \rightarrow G(X_2, \tau)$ tal que $\theta|_{X_1} = h$, $\theta(x, 1, \sigma(x)) = (h(x), l(x) - k(x), h(\sigma(x)))$ e $\theta^{-1}(y, 1, \tau(y)) = (h^{-1}(y), l'(y) - k'(y), h^{-1}(\tau(y)))$;
- (2) (h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores;
- (3) (h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores essenciais;
- (4) (h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua que preserva pontos eventualmente periódicos isolados e satisfaz as equações (3.4) e (3.5).

Demonstração. As equivalências (1) \iff (2) \iff (3) estão mostradas em [7, Prop. 8.3]. O item adicionado foi o (4). Primeiro, mostremos (2) \implies (4). Seja $x \in X_1$ um ponto eventualmente periódico isolado. Então, pelo Lema 3.31 e Proposição 3.33, existe um $\gamma \in \mathfrak{p}$ para o qual $x = \mu\gamma\gamma\dots$ e $stab_{min}(x) = |\gamma| < \infty$. Como h preserva estabilizadores, temos que $stab_{min}(h(x)) < \infty$ e, com isso, pelo mesmo lema, $h(x)$ é eventualmente periódico. Agora, como h é homeomorfismo, se x é um ponto isolado, então $h(x)$ também o é. Para $y \in X_2$ e $h^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ é análogo.

Agora mostramos (4) \implies (1). Usaremos a mesma ideia da demonstração feita em [7, Prop. 8.3]. Por [7, Lema 8.8] (no anexo Lema H.6), como (h, l, k, l', k') é órbita equivalência contínua entre (X_1, σ) e (X_2, τ) , existe um homomorfismo contínuo de grupóides $\theta_{k,l} : G(X_1, \sigma) \rightarrow G(X_2, \tau)$ que leva $(x, m - n, x') \mapsto (h(x), l_m(x) - k_m(x) - l_n(x') + k_n(x'), h(x'))^1$ sempre que $\sigma^m(x) = \sigma^n(x')$. Além disso, para cada $x \in X_1$ existe um homomorfismo de grupo $\pi_x : stab(x) \rightarrow stab(h(x))$ em que $\pi_x(m - n) = l_m(x) - k_m(x) - l_n(x) + k_n(x)^2$, sempre que $\sigma^m(x) = \sigma^n(x)$. E mais, para $x \in X_1$, $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, temos que $stab(\sigma^m(x)) = stab(\sigma^n(x))$, $stab(h(\sigma^m(x))) = stab(h(\sigma^n(x)))$ e $\pi_{\sigma^m(x)} = \pi_{\sigma^n(x)}$.

Falta provar que $\theta := \theta_{k,l}$ é bijetiva e que θ^{-1} é contínua (baseado em [7, Prop. 8.3] (no anexo Proposição H.2)). Primeiro mostremos que θ é injetora: suponha que $\theta(x_1, n_1, x'_1) = \theta(x_2, n_2, x'_2)$. Como h é um homeomorfismo, $x_1 = x_2$ e $x'_1 = x'_2$. Então $\theta(x_1, n_1 - n_2, x_1) = \theta(x_1, n_1, x'_1)\theta(x_1, n_2, x'_1)^{-1} = (h(x_1), 0, h(x_1))$, ou seja, $\pi_{x_1}(n_1 - n_2) = 0$. Agora, note que se x_1 não é eventualmente periódico, pela Proposição 3.33, temos que $stab(x_1) = \{0\}$. Como h preserva pontos eventualmente periódicos, $h(x_1)$ não pode ser eventualmente periódico. Logo, pela

¹Tal elemento está no grupóide pois pelo Lema H.5 no anexo (Lema 8.7 em [7]), como (h, l, k, l', k') é órbita equivalência contínua de (X, σ) para (Y, τ) , então existe um cociclo contínuo $c_{(h,l,k,l',k')} : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $c_{(h,l,k,l',k')}(x, m - n, x') = l_m(x) - k_m(x) - l_n(x') + k_n(x')$.

² π_x está bem definida pelo Lema H.6 no anexo (Lema 8.8 em [7])

mesma Proposição, $\text{stab}(h(x_1)) = \{0\}$. Assim, nesse caso, π_{x_1} é homomorfismo nulo que é bijetor. Caso x_1 seja eventualmente periódico, como h preserva tais pontos, temos que $h(x_1)$ é eventualmente periódico. Pela Proposição 3.33, $\text{stab}(x_1)$ e $\text{stab}(h(x_1))$ são subgrupos não nulos de \mathbb{Z} . Como, por hipótese, (h, l, k, l', k') satisfaz as equações (3.4) e (3.5), pelo Lema H.6 no anexo ([7, Lema 8.8]), temos que $\text{stab}(\cdot)$, $\text{stab}(h(\cdot))$ e $x \mapsto \pi_x$ são constantes em órbitas, com isso, $\pi_{x_1} : \text{stab}(x_1) \rightarrow \text{stab}(h(x_1))$ é uma bijeção de grupos. Como $\pi_{x_1}(n_1 - n_2) = 0$, e π_{x_1} é bijetora sendo x_1 eventualmente periódico ou não, temos que $n_1 - n_2 = 0$, ou seja, $n_1 = n_2$, o que mostra a injetividade de θ .

Para mostrar a sobrejetividade de θ seja $(y, n, y') \in G(X_2, \tau)$. Então $\theta(\theta'(y, n, y')) \stackrel{(*)}{=} (y, m, y')$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Assim, $n - m \in \text{stab}(y)$, já que se $a \in \text{stab}(x)$ e $b \in \text{stab}(x)$, então $a - b \in \text{stab}(x)$. Como $\pi_{h^{-1}(y)} : \text{stab}(h^{-1}(y)) \rightarrow \text{stab}(y)$ é bijetivo, temos $n - m \stackrel{(**)}{=} \pi_{h^{-1}(y)}(p)$ para algum $p \in \text{stab}(h^{-1}(y))$. Então,

$$\begin{aligned} \theta(h^{-1}(y), p + c_{X_1}(\theta'(y, n, y')), h^{-1}(y')) &= \theta(h^{-1}(y), p, h^{-1}(y))\theta(h^{-1}(y), c_{X_1}(\theta'(y, n, y')), h^{-1}(y')) \\ &\stackrel{(**)}{=} (y, \pi_{h^{-1}(y)}(p), y)(y, m, y') = (y, n - m + m, y') \\ &= (y, n, y'), \end{aligned}$$

em que c_{X_1} é o cociclo contínuo de $G(X_1, \sigma)$ em \mathbb{Z} , definido por $c_{X_1}(x, n, y) = n$.

Resta mostrar que θ^{-1} é contínua. Suponha que $(y_n, m_n, y'_n) \stackrel{(***)}{\longrightarrow} (y, m, y') \in G(X_2, \tau)$. Mostremos que $\theta^{-1}(y_n, m_n, y'_n) \longrightarrow \theta^{-1}(y, m, y')$. Fixe $p, q \in \mathbb{N}$, $U, V \subseteq X_1$ abertos tais que $h^{-1}(y) \in U$, $h^{-1}(y') \in V$, $\sigma^p|_U = \sigma^q|_V$ são homeomorfismos tais que $\sigma^p(h^{-1}(y)) = \sigma^q(h^{-1}(y'))$ (existem pois $(y, m, y') \xrightarrow{\theta^{-1}} (h^{-1}(y), \dots, h^{-1}(y')) \in G(X_1, \tau)$ e o grupóide é étale) e ainda $\theta^{-1}(y, m, y') = (h^{-1}(y), p - q, h^{-1}(y'))$. Assim, claro que $\theta^{-1}(y, m, y') \in Z(U, p, q, V)$ (estes cilindros estão na demonstração do Teorema 3.11). Agora, sejam U', V' subvizinhanças de U, V , com $h^{-1}(y) \in U'$, $h^{-1}(y') \in V'$, tais que $\theta(x, p - q, x') = (h(x), m, h(x'))$ sempre que $x \in U'$, $y \in V'$ e $\sigma^p(x) = \sigma^q(x')$. Fixe N tal que $y_n \in h(U')$, $y'_n \in h(V')$ e $m_n = m$ para todo $n \geq N$ (N existe pela convergência $(***)$ e h ser homeomorfismo). Então, $\theta^{-1}(y_n, m_n, y'_n) \in Z(U', p, q, V') \subseteq Z(U, p, q, V)$ para todo $n > N$, isto é, $\theta^{-1}(y_n, m_n, y'_n) \longrightarrow \theta^{-1}(y, m, y')$. ■

Diante do exposto, segue o resultado à seguir, vide [7, Teorema 8.2] (no anexo Teorema H.1).

Corolário 3.38. *Sejam $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ ultragrafos que satisfazem RFUM2. Sejam (X_1, σ) e (X_2, τ) os espaços shift correspondentes. Considere $h : X_1 \rightarrow X_2$ um homeomorfismo. Então, são equivalentes:*

- (1) *Existe uma órbita equivalência contínua de (X_1, σ) para (X_2, τ) que preserva estabilizadores em que h é homeomorfismo fundamental;*
- (2) *Existe um isomorfismo de grupóides $\theta : G(X_1, \sigma) \rightarrow G(X_2, \tau)$ tal que $\theta|_{X_1} = h$;*
- (3) *Existe um isomorfismo $\phi : C^*(G(X_1, \sigma)) \longrightarrow C^*(G(X_2, \tau))$ tal que $\phi(C_0(X_1)) = C_0(X_2)$, com $\phi(f) = f \circ h^{-1}$ para todo $f \in C_0(X_1)$;*
- (4) *Existe um isomorfismo $\varphi : C_0(X_1) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F} \longrightarrow C_0(X_2) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$ tal que $\varphi(C_0(X_1)) = C_0(X_2)$, com $\varphi(f) = f \circ h^{-1}$ para todo $f \in C_0(X_1)$;*
- (5) *Existe uma órbita equivalência contínua de (X_1, σ) para (X_2, τ) que preserva pontos eventualmente periódicos isolados e que satisfaz as equações (3.4) e (3.5) em que h é homeomorfismo fundamental.*

Demonstração. Este é um caso particular do Teorema H.1 no anexo (Teorema 8.2 em [7]). O item (5) equivale ao item (1) pelo Teorema 3.37. O item (4) equivale ao item (3) pois, por [1], sabemos que o produto cruzado parcial é isomorfo a C^* -álgebra do Grupóide de transformação, que por sua vez é isomorfo à C^* -álgebra do Grupóide do ultragrafo, pelo Teorema 3.11. ■

3.3.3 Conjugação Eventual

Especializando as noções em [7], definimos conjugação eventual entre espaços shift (X, σ) e (Y, τ) em que X e Y são espaços de ultracaminhos de fronteira associados ultragrafos que satisfazem RFUM2.

Definição 3.39. *Sejam (X, σ) e (Y, τ) espaços shift em que X e Y são espaços de ultracaminhos de fronteira associados ultragrafos que satisfazem RFUM2. Então, dizemos que (X, σ) e (Y, τ) são eventualmente conjugados se existe uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores (h, k, l, k', l') de (X, σ) para (Y, τ) tal que $l(x) = k(x) + 1$, para todo $x \in X$.*

Além disso, se (X, σ) é um sistema de Deaconu-Renault, então existe uma ação $\gamma^X : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(C^*(G(X, \sigma)))$ que satisfaz $\gamma_z^X(f)(x, n, x') = z^n f(x, n, x')$, para todo $z \in \mathbb{T}$, $(x, n, x') \in G(X, \sigma)$ e $f \in C_c(G(X, \sigma))$.

Com isso, destacamos o resultado a seguir como sendo um caso particular de [7, Teorema 8.10] (Teorema H.7 no anexo) ao mesmo tempo em que é uma generalização de [6, Teorema 4.1].

Teorema 3.40. *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu-Renault em que X e Y são espaços de ultracaminhos de fronteira associados ultragrafos que satisfazem RFUM2. São equivalentes:*

1. *Existe uma conjugação eventual de (X, σ) para (Y, τ) com homeomorfismo fundamental h ;*
2. *Existe um isomorfismo $\theta : G(X, \sigma) \rightarrow G(Y, \tau)$ tal que $\theta|_X = h$ e $c_X = c_Y \circ \theta$;*
3. *Existe um isomorfismo $\phi : C^*(G(X, \sigma)) \rightarrow C^*(G(Y, \tau))$ tal que $\phi(C_0(X)) = C_0(Y)$, com $\phi(f) = f \circ h^{-1}$ para todo $f \in C_0(X)$ e $\phi \circ \gamma_z^X = \gamma_z^X \circ \phi$ para todo $z \in \mathbb{T}$.*
4. *Existe um isomorfismo $\varphi : C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F} \rightarrow C_0(Y) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ tal que $\varphi(C_0(X)) = C_0(Y)$, com $\varphi(f) = f \circ h^{-1}$ para todo $f \in C_0(X)$ e $\varphi \circ \gamma_z^X = \gamma_z^X \circ \varphi$ para todo $z \in \mathbb{T}$.*

Demonstração. Decorre do [7, Teorema 8.10] (Teorema H.7 no anexo) e do Corolário 3.38. ■

Capítulo 4

Estados KMS EM $C^*(\mathcal{G})$

O presente capítulo é todo fundamentado em [11] o qual é uma generalização de [8]. O objetivo aqui é mostrar que mesmo quando consideramos ultragrafos que satisfazem RFUM2, os diferentes conjuntos de estados que aparecem nos artigos continuam tendo uma correspondência biunívoca entre eles. Para provar isto, basta fazer algumas alterações em certas hipóteses e adaptações em demonstrações. Muitos dos resultados citados ao longo do capítulo já foram demonstrados e apenas a referência foi colocada no lugar de suas demonstrações.

Primeiro, algumas definições sobre estados.

4.1 Estados KMS em $C^*(\mathcal{G})$

Nesta seção, vamos definir os estados KMS e estados ground e introduzir estados KMS associados a um certo grupo a 1 parâmetro de automorfismos de $C^*(\mathcal{G})$ em termos de estados da álgebra de core $C^*(\mathcal{G})^\gamma$, em que \mathcal{G} é um ultragrafo arbitrário.

Definição 4.1. *Dada uma C^* -álgebra A e um homomorfismo (uma dinâmica) $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$, um elemento $a \in A$ é analítico sempre que $t \mapsto \sigma_t(a)$ se estende à uma função analítica $z \mapsto \sigma_z(a)$ em \mathbb{C} .*

Observação 4.2. *Os elementos analíticos de uma C^* -álgebra A formam um subconjunto denso em A [22, Cap. 8.12].*

Definição 4.3. *Para $\beta \in (0, \infty)$, um estado KMS_β de (A, σ) é um estado ψ de A que satisfaz a condição KMS:*

$$\psi(ab) = \psi(b\sigma_{i\beta}(a))$$

para todo $a, b \in A$ analíticos.

É sabido, por [4, Seção 5.3.7], que é suficiente mostrar que a condição KMS é satisfeita para um subconjunto denso de elementos analíticos cujo span é denso em A .

Definição 4.4. *Um estado ϕ em A é um estado ground de (A, σ) se para cada $a, b \in A$ analíticos, a função inteira $z \mapsto \phi(a\sigma_z(b))$ é limitada na parte de cima do plano complexo, isto é, temos de ter*

$$\sup_{\text{Im}z > 0} |\phi(b\sigma_z(a))| < \infty,$$

para todo $a, b \in A$ analíticos.

Novamente, para que ϕ seja um estado ground basta mostrar a condição de limitação acima para um subconjunto de elementos analíticos cujo span seja uma subálgebra densa em A .

Agora, vamos definir a ação de Gauge generalizada em $C^*(\mathcal{G})$. Para tanto, seja $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função positiva em que existe uma constante k tal que $N(e) > k$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$. Estendemos $N : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ fazendo $N(A) = 1$, para todo $A \in \mathcal{G}^0$, e $N(e_1 e_2 \dots e_m) = N(e_1)N(e_2) \dots N(e_m)$.

Proposição 4.5. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo e $N : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ como acima. Então existe uma ação fortemente contínua $\rho^C : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(C^*(\mathcal{G}))$ tal que $\rho_t^C(p_A) = p_A$, para todo $A \in \mathcal{G}^0$, e $\rho_t^C(s_e) = N(e)^{it} s_e$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$.*

Demonstração. A demonstração é exatamente a mesma que a feita em [11, Lema 3.1]. ■

Assim, a partir de uma função positiva N , conseguimos uma ação fortemente contínua que é um grupo a 1 parâmetro de automorfismos de $C^*(\mathcal{G})$.

Agora sobre $C^*(\mathcal{G})$, dado um ultragrafo \mathcal{G} , foi mostrado em [25, Obs. 2.10] que

$$C^*(\mathcal{G}) = \overline{\text{span}}\{s_\mu p_A s_\nu^* : \mu, \nu \in \mathcal{G}^*, A \in \mathcal{G}^0\}.$$

Considerando então N e a ação ρ da proposição anterior, temos que para cada $s_\mu p_A s_\nu^* \in C^*(\mathcal{G})$ a função $t \mapsto \sigma_t(s_\mu p_A s_\nu^*) = N(\mu)^{it} N(\nu)^{it} s_\mu p_A s_\nu^*$ se estende a uma função analítica em todo plano complexo. Assim, os elementos $s_\mu p_A s_\nu^*$ são analíticos de $C^*(\mathcal{G})$, associados a ação ρ , e então existem elementos analíticos cujo span é uma subálgebra densa de $C^*(\mathcal{G})$. Com isso, para estudar estados KMS podemos considerar somente tais elementos.

Além disso, como mostrado em [25, Pág. 350], para $\mu, \nu \in \mathcal{G}^*$ com $|\mu|, |\nu| \geq 1$, temos:

$$s_\mu^* s_\nu = \begin{cases} s_{\nu'}, & \text{se } \nu = \mu\nu' \text{ e } \nu' \notin \mathcal{G}^0; \\ s_{\mu'}, & \text{se } \mu = \nu\mu' \text{ e } \mu' \notin \mathcal{G}^0; \\ p_{r(\nu)}, & \text{se } \mu = \nu; \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases}$$

Por outro lado, existe também uma ação de Gauge fortemente contínua $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(C^*(\mathcal{G}))$ tal que $\gamma_z(s_\mu) = z s_\mu$ e $\gamma_z(p_A) = p_A$, para todo $z \in \mathbb{T}, \mu \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0, A \in \mathcal{G}^0$. Definimos a álgebra de core $C(\mathcal{G})^\gamma$ como sendo a subálgebra dos pontos fixos pela ação de Gauge, ie,

$$C^*(\mathcal{G})^\gamma = \{a \in C^*(\mathcal{G}); \gamma_z(a) = a, \forall z \in \mathbb{T}\}.$$

Diante de tais definições, por [23] temos os seguintes lemas (no livro os lemas são feitos para grafos, mas podemos adaptar para o caso de ultragrafos utilizando a mesma demonstração):

Lema 4.6. *Considerando as hipóteses acima:*

$$C^*(\mathcal{G})^\gamma = \overline{\text{span}}\{s_\mu p_A s_\nu^* : \mu, \nu \in \mathcal{G}^*, A \in \mathcal{G}^0 \text{ e } |\mu| = |\nu|\}.$$

Lema 4.7. *Existe uma esperança condicional $\Psi : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C^*(\mathcal{G})^\gamma$ em que*

$$\Psi(s_\mu p_A s_\nu^*) = \delta_{|\mu|, |\nu|} s_\mu p_A s_\nu^*$$

para todo $\mu, \nu \in \mathcal{G}^*, A \in \mathcal{G}^0$.

Analisando mais cuidadosamente os estados KMS para a ação de Gauge generalizada, temos o seguinte resultado.

Lema 4.8. *Seja $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $N(\mu) \neq 1$ para todo $\mu \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e seja ρ a ação da Proposição 4.5. Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ e que ϕ e ϕ' são estados KMS_β em $C^*(\mathcal{G})$ que coincidem na álgebra de core $C^*(\mathcal{G})^\gamma$. Então $\phi = \phi'$.*

Demonstração. De fato, a demonstração é a mesma que a do Lema 3.4 em [11] ■

Com o Lema acima e a Proposição a seguir, surge uma correspondência entre os estados KMS de $C^*(\mathcal{G})$ e certos estados KMS em $C^*(\mathcal{G})^\gamma$.

Proposição 4.9. *Seja $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $N(\mu) \neq 1$ para todo $\mu \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e seja ρ a ação da Proposição 4.5. Suponha que $\beta \in \mathbb{R}$ e que ϕ é um estado KMS_β em $C^*(\mathcal{G})$. Então a restrição $\psi := \phi|_{C^*(\mathcal{G})^\gamma}$ satisfaz:*

$$\psi(s_\mu p_{AS_\nu}^*) = \delta_{\mu,\nu} N(\mu)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(\mu)}).$$

Por outro lado, dado um estado KMS ψ em $C^(\mathcal{G})^\gamma$ que satisfaz a igualdade acima, temos que $\phi = \psi \circ \Psi$ é um estado KMS_β em $C^*(\mathcal{G})$, em que Ψ é a esperança condicional do Lema 4.7. Além disso, a correspondência obtida é uma bijeção a fim.*

Demonstração. A demonstração está feita em [11, Prop. 3.5]. ■

Sendo assim, trabalhar com estados KMS em $C^*(\mathcal{G})$ que provém de um certo grupo a 1 parâmetro de automorfismos de $C^*(\mathcal{G})$ é o mesmo que trabalhar com estados da álgebra de core $C^*(\mathcal{G})^\gamma$.

4.2 Estados KMS em $C^*(\mathcal{G})$ visto como $C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$

Nesta seção, vamos descrever melhor estados KMS associados a um grupo a 1 parâmetro de automorfismos, utilizando o isomorfismo entre $C^*(\mathcal{G})$ e $C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$, em que X é o espaço de ultracaminhos de fronteira de um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Para isso, usamos as ideias propostas em [8] que também foram usadas em [11]. Como se trata de um produto cruzado parcial, utilizamos também alguns resultados de [14].

De [14, Teo. 4.3], dada qualquer função $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow (1, \infty)$, existe um único (fortemente contínuo) grupo a 1 parâmetro σ de automorfismos de $C_0(X) \rtimes \mathbb{F}$ tal que:

$$\sigma_t(b) = (N(e))^{it} b \text{ e } \sigma_t(c) = c, \tag{4.1}$$

para todo $e \in \mathcal{G}^1$, todo $b \in C(X_e)\delta_e$, e todo $c \in C_0(X)\delta_0$.

Note que se $N(e) = \exp(1)$ para todo $e \in \mathcal{G}^1$, então σ_t será 2π -periódica e com isso induz uma ação fortemente contínua $\beta : \mathbb{T} \rightarrow \text{Aut}(C_0(X) \rtimes \mathbb{F})$ tal que

$$\beta_z(1_e \delta_e) = z 1_e \delta_e \text{ e } \beta_z(f \delta_0) = f \delta_0,$$

para todo $z \in \mathbb{T}$, $e \in \mathcal{G}^1$, e $f \in C_0(X)$. Diante disso, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.10. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Sejam γ a ação de Gauge em $C^*(\mathcal{G})$ definida na página 48, β a ação considerada acima e $\Phi : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C_0(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ o isomorfismo do Teorema 2.15. Então,*

$$\Phi \circ \gamma_z = \beta_z \circ \Phi$$

para todo $z \in \mathbb{T}$.

Demonstração. De fato, seja $z \in \mathbb{T}$. Como $C^*(\mathcal{G})$ é gerada por $\{s_e : e \in \mathcal{G}^1\} \cup \{p_A : A \in \mathcal{G}^0\}$, basta mostrar que a igualdade ocorre para estes elementos. Para $A \in \mathcal{G}^0$, temos que $\Phi \circ \gamma_z(p_A) = \Phi(p_A) = 1_A \delta_0 = \beta_z(1_A \delta_0) = \beta_z \circ \Phi(p_A)$. Para $e \in \mathcal{G}^1$, temos que $\Phi \circ \gamma_z(s_e) = \Phi(zs_e) = z1_e \delta_e = \beta_z(1_e \delta_e) = \beta_z \circ \Phi(s_e)$. ■

Sendo assim, dada uma função positiva $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow (1, \infty)$ considere σ o único grupo a 1 parâmetro fortemente contínuo de automorfismos de $C_0(X) \rtimes \mathbb{F}$ dado em (4.1). Temos então, pelo Teorema 2.15 e o Corolário anterior, que a ação σ (como na Proposição 4.5, que discutiu a existência) é o único grupo a 1 parâmetro fortemente contínuo de automorfismos de $C^*(\mathcal{G})$ e é tal que $\sigma_t(s_e) = N(e)^{it}s_e$ e $\sigma_t(p_A) = p_A$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e $A \in \mathcal{G}^0$.

Para fechar esta seção com outro resultado, precisamos da observação e do lema adiante.

Observação 4.11. Note que no Lema 2.14, exigimos que $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G}^1)^n$ e $A \in \mathcal{G}^0$, assim, a subálgebra $D \subseteq C_0(X)$ gerada por todas as funções características $1_c, 1_A$ e $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A)$ é densa em $C_0(X)$. Mas note que, para todo $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G}^1)^n$, temos que $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_{r(c)}) = 1_c$. Também, como $1_{c^{-1}} = 1_{r(c)}$ temos que $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A) = 1_{r(c) \cap A} \circ \theta_{c^{-1}}$. Portanto, podemos dizer que a subálgebra D citada acima é uma álgebra gerada pelas funções características 1_A e $1_{r(c) \cap A} \circ \theta_{c^{-1}}$ em que $A \in \mathcal{G}^0$ e $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$.

Lema 4.12. Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então $C_0(X)$ é *-isomorfo à C^* -subálgebra de $C^*(\mathcal{G})$ gerado por

$$\{s_c p_A s_c^* | A \in \mathcal{G}^0, c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0\} \cup \{p_A | A \in \mathcal{G}^0\} = \{s_c p_A s_c^* | A \in \mathcal{G}^0, c \in \mathcal{G}^*\},$$

em que se $c = B \in \mathcal{G}^0$, então $s_c := p_B$.

Demonstração. De fato, podemos identificar $C_0(X)$ com $C_0(X)\delta_0$ em $C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F}$. Pelo Lema 2.14, e Observação 4.11, a subálgebra $D \subseteq C_0(X)$ gerada por 1_A e $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A) = 1_{r(c) \cap A} \circ \theta_{c^{-1}}$ em que $A \in \mathcal{G}^0$ e $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ é densa em $C_0(X)$. Temos ainda que a função Φ^{-1} do Teorema 2.15 é um *-isomorfismo, quando levamos $1_A \delta_0$ para p_A , $1_c \delta_c$ para s_c e $1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}}$ para s_c^* . Basta então nos restringirmos aos elementos $1_A \delta_0$ e $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A) \delta_0$ para termos o *-isomorfismo desejado, fazendo $1_A \delta_0 \mapsto p_A$ e $\alpha_c(1_{c^{-1}}1_A) \delta_0 = 1_c \delta_c 1_A \delta_0 1_{c^{-1}} \delta_{c^{-1}} \mapsto s_c p_A s_c^*$, para todo $A \in \mathcal{G}^0$ e $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$. ■

Proposição 4.13. Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então existe uma bijeção (afim) entre o conjunto dos estados ω em $C_0(X)$ que satisfazem a condição $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = N(e)^{-\beta} \omega(f)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e toda $f \in C_0(X_{e^{-1}})$ e o conjunto dos estados ψ em $C^*(\mathcal{G})^{\gamma}$ que satisfazem $\psi(s_c p_A s_d^*) = \delta_{c,d} N(c)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(c)})$, para todo $c, d \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e $A \in \mathcal{G}^0$.

Demonstração. De fato, seja ψ um estado em $C^*(\mathcal{G})^{\gamma}$ que satisfaz a igualdade $\psi(s_c p_A s_d^*) = \delta_{c,d} N(c)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(c)})$, para todo $c, d \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e $A \in \mathcal{G}^0$. Defina o estado ω em $C_0(X)$, por $\omega = \psi \circ \Phi^{-1}$ em que $\Phi : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow C_0(X) \rtimes \mathbb{F}$ é o isomorfismo do Teorema 2.15. Lembre que, pelo Lema 4.12 temos um *-isomorfismo entre $C_0(X)$ e uma C^* -subálgebra de $C^*(\mathcal{G})$. Um mapeamento do que será feito é o seguinte esboço:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Phi & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 C^*(\mathcal{G}) & \supseteq & C^*(\mathcal{G})^{\gamma} & \xleftrightarrow[\Phi^{-1}]{\Phi} & C_0(X)\delta_0 \subseteq C_0(X) \rtimes_{\alpha} \mathbb{F} \\
 & & \downarrow \psi & & \downarrow \omega \\
 & & \mathbb{C} & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

Agora, pelo Lema 4.12, para provarmos a condição exigida de ω , basta mostrar a condição para um subconjunto denso (Observação 4.11). Mas antes de mostrarmos a condição, note que

$$\Phi(s_e p_A s_e^*) = \Phi(s_e)\Phi(p_A)\Phi(s_e^*) = 1_e \delta_e 1_A \delta_0 1_{e^{-1}} \delta_{e^{-1}} = \alpha_e (1_{e^{-1}} 1_A) \delta_0 = 1_{r(e) \cap A} \circ \theta_{e^{-1}} \delta_0.$$

De modo que, como $C_0(X) \cong C_0(X) \delta_0$, temos que

$$\Phi^{-1}(1_{r(e) \cap A} \circ \theta_{e^{-1}}) = s_e p_A s_e^*. \quad (4.2)$$

Assim, seja $e \in \mathcal{G}^1$, então se $1_A \in C_0(X_{e^{-1}})$ temos que $A \subseteq X_{e^{-1}} = X_{r(e)}$. Então,

$$\begin{aligned} \omega(1_A \circ \theta_{e^{-1}}) &= \omega(1_{A \cap r(e)} \circ \theta_{e^{-1}}) \\ &= \psi \circ \Phi^{-1}(1_{A \cap r(e)} \circ \theta_{e^{-1}}) \\ (4.2) \quad &= \psi(s_e p_A s_e^*) \\ (\text{condição de } \psi) \quad &= N(e)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(e)}) \\ &= N(e)^{-\beta} \psi(\Phi^{-1}(1_{A \cap r(e)})) \\ &= N(e)^{-\beta} \omega(1_{A \cap r(e)}) \\ &= N(e)^{-\beta} \omega(1_A). \end{aligned}$$

Agora, para o outro tipo de gerador, sejam $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e $A \in \mathcal{G}^0$. Suponha que $1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}} \in C_0(X_{e^{-1}})$. Como $1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}} : X_{e^{-1}} \rightarrow \mathbb{C}$, então se $x \in \text{Dom}(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}})$ temos que $x \in X_{e^{-1}} \cap X_c = X_{r(e)} \cap X_c$. Logo $s(c) \in r(e)$ e com isso $r(c) = r(ec)$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}} \circ \theta_{e^{-1}}) &= \omega(1_{A \cap r(ec)} \circ \theta_{(ec)^{-1}}) \\ &= \psi \circ \Phi^{-1}(1_{A \cap r(ec)} \circ \theta_{(ec)^{-1}}) \\ &= \psi(s_{ec} p_A s_{ec}^*) \\ &= N(ec)^{-\beta} \psi(p_{r(ec) \cap A}) \\ &= N(e)^{-\beta} N(c)^{-\beta} \psi(p_{r(c) \cap A}) \\ &= N(e)^{-\beta} \psi(s_c p_A s_c^*) \\ &= N(e)^{-\beta} \psi(\Phi^{-1}(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}})) \\ &= N(e)^{-\beta} \omega(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}}), \end{aligned}$$

e a condição é satisfeita.

Por outro lado, dado um estado ω em $C_0(X)$ que satisfaz a condição $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = N(e)^{-\beta} \omega(f)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e toda $f \in C_0(X_{e^{-1}})$, considere $\psi = \delta_{c,d} \omega \circ \Phi : C^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$. Sejam $c = c_1 \dots c_n \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e $A \in \mathcal{G}^0$, então, se $c \neq d$, temos que $\psi(s_c p_A s_d^*) = 0 = N(c)^{-\beta} \cdot 0 = N(c)^{-\beta} \cdot \psi(p_{A \cap r(c)})$. Agora, caso $c = d$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(s_c p_A s_d^*) &= \omega(\Phi(s_c p_A s_d^*)) = \omega(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c^{-1}}) \\ &= \omega(1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c_n^{-1}} \circ \theta_{c_{n-1}^{-1}} \circ \dots \circ \theta_{c_1^{-1}}) \\ &= \omega([1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c_n^{-1}} \circ \theta_{c_{n-1}^{-1}} \circ \dots \circ \theta_{c_2^{-1}}] \circ \theta_{c_1^{-1}}) \\ &= N(c_1)^{-\beta} \omega([1_{A \cap r(c)} \circ \theta_{c_n^{-1}} \circ \theta_{c_{n-1}^{-1}} \circ \dots \circ \theta_{c_3^{-1}}] \circ \theta_{c_2^{-1}}) = \dots \\ &= N(c_1)^{-\beta} \dots N(c_n)^{-\beta} \omega(1_{A \cap r(c)}) = N(c)^{-\beta} \omega(1_{A \cap r(c)}) = N(c)^{-\beta} \omega(\phi(p_{A \cap r(c)})) \\ &= N(c)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(c)}). \end{aligned}$$

■

4.3 A medida em X

O objetivo desta seção será a construção de uma medida no espaço shift X definido na página 33 na Definição 3.4. Para isto, com base em [11] e em [12], será necessário estabelecermos uma descrição mais concreta dos vértices generalizados e por conseguinte uma melhor descrição dos cilindros do espaço de ultracaminhos de fronteira. Por fim, vamos definir a medida através de um sem-anel gerado pelos cilindros.

Lema 4.14. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então, cada $A \in \mathcal{G}^0$ pode ser escrito unicamente da forma $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, em que existe um único k tal que $|A_k| < \infty$ e $|\varepsilon(A_k)| < \infty$, A_j é emissor infinito minimal ou sink minimal e $A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k$. Além disso, A_k é formado por vértices regulares e sinks (não minimais).*

Demonstração. A existência segue diretamente da condição RFUM2 definida na página 20 e da caracterização dos vértices generalizados dada pela Proposição 1.6. Basta reescrever $A \in \mathcal{G}^0$ como a união dada pela condição RFUM2:

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

em que cada A_i é ou um emissor infinito minimal, ou um sink minimal, ou um sink, ou um vértice regular. A união dos sinks (que não pertencem a nenhum minimal) com os vértices regulares (que não pertencem a nenhum minimal) gera o A_k . Os outros A_j 's podem ser tomados de modo que se $j \neq k$, tenhamos $A_j \cap A_k = \emptyset$, reescrevendo-os, caso necessário.

Provemos a unicidade. Suponha que $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, que $A = \bigcup_{i=1}^m A'_i$, que $|A_k|, |A'_k| < \infty$, que $|\varepsilon(A_k)|, |\varepsilon(A'_k)| < \infty$ e ainda que $A_j \cap A_k = \emptyset$ e $A'_j \cap A'_k = \emptyset$ sempre que $j \neq k$.

Se $A_i \in r(e) \cap A_\infty$, isto é, se A_i é emissor infinito minimal ($i \neq k$), pelo Lema 1.13, temos que $|A_i| = 1$ ou $|A_i| = \infty$:

- Se $|A_i| = 1$, então $\exists A'_j$ tal que $A_i \subseteq A'_j$ para algum $j \neq k$. Então A'_j é também emissor infinito minimal. Novamente pelo Lema 1.13, temos que $|A'_j| = 1$ ou $|A'_j| = \infty$. Pela minimalidade de A'_j e por A_i que está contido em A'_j ter cardinalidade igual a 1, não podemos ter $|A'_j| = \infty$. Logo $|A'_j| = 1$. Sendo assim, temos que $A_i = A'_j$.
- Se $|A_i| = \infty$, então $\exists j \neq k$ tal que $|A_i \cap A'_j| = \infty$. Como emissores infinitos minimais não contém infinitos sinks (em \mathcal{G}^0), temos também que $|\varepsilon(A_i \cap A'_j)| = \infty$. Assim, $A'_j \cap A_i$ é emissor infinito minimal e, portanto, A'_j é emissor infinito minimal. Como A_i e A'_j são minimais, pela Proposição 1.12 temos que $A_i = A'_j$.

Se $A_i \in r(e) \cap A_s$, isto é, se A_i é sink minimal ($i \neq k$), então $|A_i| = \infty$. Assim $\exists j \neq k$ tal que $|A_i \cap A'_j| = \infty$. Como sinks minimais não contém emissores infinitos (em \mathcal{G}^0), temos também que $|\varepsilon(A_i \cap A'_j)| < \infty$. Assim, $A'_j \cap A_i$ é sink minimal e, portanto, A'_j é sink minimal. Como A_i e A'_j são sinks minimais e $|A_i \cap A'_j| = \infty$, pela Proposição 1.16 temos que $A_i = A'_j$.

Assim, $\bigcup_{i \neq k} A_i = \bigcup_{i \neq k} A'_i$ e $A_k = A'_k$.

A segunda parte é óbvia pois, como A_j é emissor infinito minimal ou sink minimal para todo $j \neq k$, é claro que os sinks que (eventualmente) estão em A e não estão contidos nos minimais, pertencem a A_k . Além disso, como o ultragrafo satisfaz RFUM2, $|A_k| < \infty$ e $|\varepsilon(A_k)| < \infty$, então A_k contém os outros finitos vértices regulares (que não estão contidos nos minimais). ■

Observação 4.15. Note que, para cada $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, podemos identificar $D_{(\beta, B)}$ com $D_{(\beta, B), F, S}$, onde $F = \emptyset$ e $S = \emptyset$. Assim, todo cilindro pode ser escrito da forma $D_{(\beta, B), F, S}$.

Corolário 4.16. Sejam $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, $F \subseteq \varepsilon(B)$ finito e $S \subseteq B$ finito (F e S podem ser o conjunto vazio). Então $D_{(\beta, B), F, S}$ pode ser escrito como uma união finita e disjunta de cilindros da seguinte coleção:

$$\{D_{(\beta, A), F', S'} : (\beta, A) \in X_{fin}, A \text{ minimal}, F' \subseteq \varepsilon(A), |F'| < \infty, S' \subseteq B, |S'| < \infty\}$$

união com uma coleção finita disjunta de cilindros da forma

$$\{D_{(\beta, A)} : (\beta, A) \in \mathfrak{p} : |A| < \infty, |\varepsilon(A)| < \infty\}.$$

Demonstração. De fato, pelo Lema 4.14, se $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, então $B = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e existe um único k tal que $|A_k| < \infty$ e $|\varepsilon(A_k)| < \infty$, além disso, para cada $j \neq k$, tem-se que A_j é emissor infinito minimal ou sink minimal e $A_j \cap A_k = \emptyset$. Para cada $i \neq k$, considere $F_i = \{e \in \mathcal{G}^1 : s(e) \in \cup_{j \neq k} (A_i \cap A_j)\}$, $S_i = \{v \in G_s^0 : v \in \cup_{j \neq k} (A_i \cap A_j)\}$, $V = \{s(e) : e \in \cup_{i \neq k} F_i, e \notin F\}$ e $W = \{v : v \in \cup_{i \neq k} S_i, s \notin S\}$. Claro que cada um destes conjuntos é finito. Assim,

$$D_{(\beta, B), F, S} = \bigsqcup_{i \neq k} D_{(\beta, A_i), F_i \cup F, S_i \cup S} \bigsqcup_{s(e) \in V} D_{(\beta, s(e))} \bigsqcup_{v \in W} D_{(\beta, \{v\})} \bigsqcup_{v \in A_k} D_{(\beta, \{v\})}.$$

Note que cada $s(e) \in V$ é um vértice regular, pois caso contrário, contraria a minimalidade de A_i . Assim, para finalizar a demonstração, se chamarmos $s(e)$ em V de v , temos que

$$D_{(\beta, B), F, S} = \bigsqcup_{i \neq k} D_{(\beta, A_i), F_i \cup F, S_i \cup S} \bigsqcup_{v \in V \sqcup W \sqcup A_k} D_{(\beta, \{v\})}.$$

Por \mathcal{G} satisfazer RFUM2, todas as uniões anteriores são finitas. ■

Diante do Corolário 4.16 podemos inferir a seguinte conclusão:

Proposição 4.17. A coleção de cilindros da forma $\{D_{(\beta, A), F, S} : (\beta, A) \in X_{fin}, A \text{ minimal}, F \subseteq \varepsilon(A), |F| < \infty, S \subseteq A, |S| < \infty\}$ união com uma coleção de cilindros da forma $\{D_{(\beta, A)} : (\beta, A) \in \mathfrak{p} : |A| < \infty, \varepsilon(A) < \infty\}$ formam uma base para a topologia em X definida na Proposição 1.24.

Demonstração. De fato, segue diretamente do Corolário 4.16 e pelo fato de que se $(\alpha, A) \in \mathfrak{p}$, $|A| < \infty$ e $|\varepsilon(A)| < \infty$, então $D_{(\alpha, A)} = \bigsqcup_{e \in \varepsilon(A)} D_{(\alpha, r(e))} \bigsqcup_{v \in A \cap G_s^0} D_{(\alpha, \{v\})}$. ■

Diante do exposto, seguindo as ideias de [12, Sec. 5.5], podemos construir um semi-anel.

Definição 4.18. Um semi-anel \widehat{S} é a classe que satisfaz:

1. $\emptyset \in \widehat{S}$;
2. $A, B \in \widehat{S} \implies A \cap B \in \widehat{S}$;
3. $A, B \in \widehat{S} \implies A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$, em que $E_i \in \widehat{S}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

Proposição 4.19. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então a coleção \widehat{S} de todos os cilindros da forma $\{D_{(\beta,A),F,S} : (\beta,A) \in X_{fin}, A \text{ minimal}, F \subseteq \varepsilon(A), |F| < \infty, S \subseteq A, |S| < \infty\}$ união com uma coleção de cilindros da forma $\{D_{(\beta,A)} : (\beta,A) \in \mathfrak{p} : |A| < \infty, |\varepsilon(A)| < \infty\}$ união com o conjunto vazio, é um semi-anel.*

Demonstração. Claro que o conjunto vazio \emptyset e qualquer interseção de dois elementos de \widehat{S} está em \widehat{S} .

Sejam $C, C_0 \subseteq \widehat{S}$ tais que $C_0 \subseteq C$. Temos de mostrar que existem finitos $C_1, C_2, \dots, C_n \in \widehat{S}$ disjuntos tais que $C \setminus C_0 = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ (união disjunta). Suponha primeiro que C é da forma $D_{(\beta,B),F,S}$ para algum $(\beta,B) \in X_{fin}$, com B minimal, $F \subseteq \varepsilon(B)$ finito e $S \subseteq B$ finito. Se $C = C_0$ então o resultado é óbvio. Suponha então que $C \setminus C_0 \neq \emptyset$. Como $C_0 \subsetneq C$, temos que $C_0 = D_{(\beta\beta',A),F',S'}$ em que podemos ter $\beta\beta' = \beta$ com $A \subsetneq B$, $F' = \emptyset$ e $S' = \emptyset$. Temos alguns casos:

- Se $C_0 = D_{(\beta,A),F',S'}$ em que $(\beta,A) \in X_{fin}$, com A minimal, então claro que, como $(\beta,B) \in X_{fin}$, com B minimal, temos que $A = B$ (seja qual for a minimalidade de B , sink ou emissor infinito) e assim, $C_0 = D_{(\beta,B),F',S'}$. Diante disso, também é claro que $F' \supseteq F$ e que $S' \supseteq S$. Com isso, $C \setminus C_0 = \bigsqcup_{e \in F' \setminus F} D_{(\beta e, r(e))} \bigsqcup_{v \in S' \setminus S} D_{(\beta, \{v\})}$ (união finita e disjunta). Mas note que, como $r(e) \in \mathcal{G}^0$, pelo Corolário 4.16, cada $D_{(\beta e, r(e))}$ é uma união finita e disjunta de elementos de \widehat{S} , assim como os elementos $D_{(\beta, \{v\})}$. Logo, $C \setminus C_0$ é união finita disjunta de elementos de \widehat{S} .

- Se $C_0 = D_{(\beta,A)}$ com $|A| < \infty$ e $|\varepsilon(A)| < \infty$, então $C \setminus C_0 = D_{(\beta,B), F \cup \varepsilon(A), S \cup A} \in \widehat{S}$.
- Se $C_0 = D_{(\beta\beta',A),F',S'}$ com $|\beta'| \geq 1$ e $(\beta\beta',A) \in X_{fin}$, suponha que $\beta' = \beta'_1 \dots \beta'_n$. Como $r(\beta') \in \mathcal{G}^0$, pelo Lema 4.14, temos que $r(\beta') = \cup_{i=1}^m A_i$ (únicos A_i 's) e que existe um único k para o qual $|A_k| < \infty$, $|\varepsilon(A_k)| < \infty$, e também $A_k \cap A_j = \emptyset$ para todo $j \neq k$ e ainda, A_j é emissor infinito minimal ou sink minimal para todo $j \neq k$. Com isso, como $A \subseteq r(\beta')$ e A é minimal, temos que $A = A_i$ para algum $i \neq k$, e com isso, para todo $j \neq i, k$, temos que $|\varepsilon(A_j \cap A_i)| = |\varepsilon(A_j \cap A)| < \infty$ e que $|A_j \cap A_i| = |A_j \cap A| < \infty$. Diante disso, podemos escrever:

$$C \setminus C_0 = D_{(\beta,B), F \cup \{\beta'_1\}, S} \sqcup D_{(\beta\beta'_1, r(\beta'_1)), \{\beta'_2\}} \sqcup \dots \sqcup D_{(\beta\beta'_1 \dots \beta'_{n-1}, r(\beta'_{n-1})), \{\beta'_n\}} \bigsqcup_{j \neq i, k} D_{(\beta\beta', A_j), \varepsilon(A_j \cap A_i), (A_j \cap A_i)} \bigsqcup_{e \in F' \cup \varepsilon(A_k)} D_{(\beta\beta' e, r(e))} \bigsqcup_{v \in S' \cup A_k} D_{(\beta\beta', \{v\})}.$$

Pelo Corolário 4.16, cada $D_{(\beta\beta'_1 \dots \beta'_p, r(\beta'_p)), \{\beta'_{p+1}\}}$, com $1 \leq p \leq n-1$, é união finita e disjunta de elementos de \widehat{S} . Também, pelo Corolário 4.16, cada $D_{(\beta\beta' e, r(e))}$ é união finita e disjunta de elementos de \widehat{S} , assim como os elementos $D_{(\beta\beta', \{v\})}$. Com isso, segue a descrição que desejávamos de $C \setminus C_0$.

- Se $C_0 = D_{(\beta\beta',A)}$ com $|A| < \infty$ e $|\varepsilon(A)| < \infty$, usamos a mesma descrição para $r(\beta')$ no item anterior e então temos que $A \subseteq A_k$. Assim, temos a seguinte descrição para $C \setminus C_0$:

$$C \setminus C_0 = D_{(\beta,B), F \cup \{\beta'_1\}, S} \sqcup D_{(\beta\beta'_1, r(\beta'_1)), \{\beta'_2\}} \sqcup \dots \sqcup D_{(\beta\beta'_1 \dots \beta'_{n-1}, r(\beta'_{n-1})), \{\beta'_n\}} \bigsqcup_{j \neq k} D_{(\beta\beta', A_j), \varepsilon(A), A} \bigsqcup_{e \in \varepsilon(A_k \setminus A)} D_{(\beta\beta' e, r(e))} \bigsqcup_{v \in A_k \setminus A} D_{(\beta\beta', \{v\})}.$$

que novamente pelo Corolário 4.16 é união finita e disjunta de elementos de \widehat{S} .

Para o caso em que C é da forma $D_{(\beta,A)}$ com $|\varepsilon(A)| < \infty$, a demonstração é análoga.

■

Considere uma função $M : \mathcal{G}^1 \rightarrow [0, 1]$ e uma função $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ que juntas, satisfazem as seguintes **condições**:

m1. $\lim_{A \in \mathcal{G}^0} m(A) = 1;$

m2. $m(A) = \sum_{e:s(e) \in A} M(e)m(r(e)) + \sum_{v \in A \cap G_s^0} m(v)$, se $|A| < \infty$ e $|\epsilon(A)| < \infty$,
em que $m(v) = m(\{v\});$

m3. $m(A) \geq \sum_{e \in F} M(e)m(r(e)) + \sum_{v \in S} m(v)$, para todo $F \subseteq \epsilon(A)$, F finito e todo $S \subseteq A \cap G_s^0$, S finito;

m4. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$

Estenda M para \mathcal{G}^* fazendo $M(A) = m(A)$, para todo $A \in \mathcal{G}^0$ e $M(\beta) = M(e_1)M(e_2) \dots M(e_n)$ sempre que $\beta = e_1 e_2 \dots e_n \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$. Com isso, podemos definir, para cada $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$, $F \subseteq \epsilon(B)$, $S \subseteq B$, F e S finitos, a função $\kappa : \{\text{Cilindros } D_{(\beta,B),F,S}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ por:

$$\kappa(D_{(\beta,B),F,S}) = M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F} M(\beta e)m(r(e)) - \sum_{v \in S} M(\beta)m(v) \quad (4.3)$$

se $|\beta| \geq 1$, por

$$\kappa(D_{(A,A),F,S}) = m(A) - \sum_{e \in \epsilon(F)} M(e)m(r(e)) - \sum_{v \in S} m(v)$$

se $A \in \mathcal{G}^0$, $F \subseteq \epsilon(A)$ e $S \subseteq A$, e por fim, $\kappa(\emptyset) = 0$.

Claro que, por m3., $Im(\kappa) \subseteq \mathbb{R}_+$ (para mostrar, basta colocar $M(\beta)$ em evidência em (4.3)). Podemos então restringir κ para o conjunto \hat{S} da Proposição 4.19 para construir uma medida. Então temos:

Lema 4.20. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e κ a função definida pela equação (4.3). Então, a restrição de κ ao semi-anel \hat{S} da Proposição 4.19 é uma medida tal que $\kappa(\theta_e(V)) = M(e)\kappa(V)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e todo subconjunto $V \subseteq X_{e^{-1}} \cap S \subseteq X$.*

Demonstração. Como $\kappa(\emptyset) = 0$, precisamos mostrar que κ é enumeravelmente aditivo em \hat{S} . Mas como os elementos que geram \hat{S} são compactos e abertos, basta mostrar que κ é aditiva em \hat{S} ,

isto é, se $D_{(\beta,B),F,S} = \bigsqcup_{i=1}^n D_{(\beta_i,B_i),F_i,S_i}$, então

$$\kappa\left(\bigsqcup_{i=1}^n D_{(\beta_i,B_i),F_i,S_i}\right) = \sum_{i=1}^n \kappa\left(D_{(\beta_i,B_i),F_i,S_i}\right).$$

Suponha então que

$$D_{(\beta,B),F,S} = \bigsqcup_{i=1}^n D_{(\beta_i,B_i),F_i,S_i} \quad (4.4)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\beta_i = \beta\beta'_i$, para todo i . Note que podemos ter $|\beta'_i| = 0$, mas isso não ocorre necessariamente. Assim, vamos utilizar uma indução em $m = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\beta_i| - |\beta|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |\beta'_i|$.

Suponha que $m = 0$, então temos que $\beta_i = \beta$, para todo i , além disso, $B_i \subseteq B$, para todo i . Agora analisando cada caso:

- Se B é tal que $|B| < \infty$ e $|\varepsilon(B)| < \infty$, então B é formado apenas por finitos sinks e finitos vértices regulares e assim, temos que $B = \{v_1, \dots, v_p\}$, $F = S = \emptyset$, e assim $F_i = \emptyset$ e $S_i = \emptyset$ para todo i . Então podemos escrever, $D_{(\beta, B), F, S} = \bigsqcup_{i=1}^n D_{(\beta_i, B_i)}$ (note que poderíamos ter, para cada $i = 1, \dots, n$, $B_i = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, em que cada B_i contém uma quantidade finita de vértices regulares ou sinks v_i 's). Com isso,

$$\kappa(D_{(\beta, B)}) = M(\beta)m(B) = M(\beta)m(\bigsqcup_{i=1}^n B_i) \stackrel{\text{por } m^4}{=} M(\beta) \sum_{i=1}^n m(B_i) = \sum_{i=1}^n \kappa(\beta_i, B_i).$$

- Agora, se $B \in X_{fin}$ e B é minimal, e além disso, vale (4.4), pela minimalidade de B temos que existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, tal que $B_{i_0} = B$. Com isso, os outros B_i 's não podem ser emissores infinitos nem ter cardinalidade infinita pois a união em (4.4) é disjunta. Isso faz com que $F_i = \emptyset$ e $S_i = \emptyset$ para todo $i \neq i_0$. Além disso, por (4.4), $F_{i_0} \supseteq F$, $S_{i_0} \supseteq S$. Assim, $F_{i_0} \setminus F = \bigsqcup_{i \neq i_0} \varepsilon(B_i)$, e $S_{i_0} \setminus S = \bigsqcup_{i \neq i_0} B_i \cap G_s^0$. Logo, temos:

$$\begin{aligned} \kappa(D_{(\beta, B), F, S}) &= M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F} M(\beta e)m(r(e)) - \sum_{v \in S} M(\beta)m(v) \\ &= M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F_{i_0}} M(\beta e)m(r(e)) + \sum_{e \in F_{i_0} \setminus F} M(\beta e)m(r(e)) - \sum_{v \in S_{i_0}} M(\beta)m(v) + \sum_{v \in S_{i_0} \setminus S} M(\beta)m(v) \\ &= M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F_{i_0}} M(\beta e)m(r(e)) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \sum_{e \in \varepsilon(B_i)} M(\beta e)m(r(e)) - \\ &\quad - \sum_{v \in S_{i_0}} M(\beta)m(v) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \sum_{v \in B_i \cap G_s^0} M(\beta)m(v) \\ &= M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F_{i_0}} M(\beta e)m(r(e)) - \sum_{v \in S_{i_0}} M(\beta)m(v) + \\ &\quad + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \left(\sum_{e \in \varepsilon(B_i)} M(\beta e)m(r(e)) + \sum_{v \in B_i \cap G_s^0} M(\beta)m(v) \right) \\ &= \kappa(D_{(\beta, B_{i_0}, F_{i_0}, S_{i_0})}) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n M(\beta) \left(\sum_{e \in \varepsilon(B_i)} M(e)m(r(e)) + \sum_{v \in B_i \cap G_s^0} m(v) \right) \\ &= \kappa(D_{(\beta, B_{i_0}, F_{i_0}, S_{i_0})}) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n M(\beta)M(B_i) \\ &= \kappa(D_{(\beta, B_{i_0}, F_{i_0}, S_{i_0})}) + \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \kappa(D_{(\beta, B_i)}) = \sum_{i=1}^n \kappa(D_{(\beta, B_i), F_i, S_i}). \end{aligned}$$

Note que para todo $i \neq i_0$, usamos que $\kappa(D(\beta, B_i)) = \kappa(D(\beta, B_i), F_i, S_i) = M(\beta)m(B_i)$, pois $F_i = \emptyset$ e $S_i = \emptyset$ para todo $i \neq i_0$.

Agora, suponha que a igualdade acima valha para todo $0 \leq k < m$. Novamente faremos para o caso em que $(\beta, B) \in X_{fin}$ com B minimal, o outro caso é análogo ao que foi feito quando $m = 0$. Utilizando a minimalidade de B mais uma vez, deve existir i_0 tal que $\beta_{i_0} = \beta$, $B_{i_0} = B$, $F_{i_0} \supseteq F$ e $S_{i_0} \supseteq S$. Suponha, sem perda de generalidade, que i_1 é tal que $\beta_i = \beta$ sempre que $1 \leq i \leq i_1$ e $\beta_i \neq \beta$ sempre que $i_1 < i \leq n$. Pelo caso $m = 0$ visto anteriormente, $F_i = \emptyset$ e $S_i = \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq i_1$, $i \neq i_0$. Além disso, A_i não é nem emissor infinito nem tem cardinalidade infinita para

nenhum $1 \leq i \leq i_1$, $i \neq i_0$. Também agora, $\bigsqcup_{i \neq i_0, i=1}^{i_1} B_i \cap G_s^0 = S_{i_0} \setminus S$, porém $\bigsqcup_{i \neq i_0, i=1}^{i_1} \varepsilon(B_i) \subseteq F_{i_0} \setminus F$.

Então defina $C = s \left((F_{i_0} \setminus F) \setminus \bigsqcup_{i \neq i_0, i=1}^{i_1} \varepsilon(B_i) \right)$. Então claro que $|\varepsilon(C)| < \infty$. Note que

$$D_{(\beta, B), F, S} = D_{(\beta, C)} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{i_1} D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}$$

e que

$$D_{(\beta, C)} = \bigsqcup_{i=i_1+1}^n D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}.$$

Pelo caso $m = 0$, temos que

$$\kappa(D_{(\beta, B), F, S}) = \kappa(D_{(\beta, C)}) + \sum_{i=1}^{i_1} \kappa(D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}). \quad (4.5)$$

Como $|\varepsilon(C)| < \infty$ temos que $D_{(\beta, C)} = \bigsqcup_{s(e) \in C} D_{(\beta e, r(e))}$ e a união é finita. Por outro lado, pelo Corolário 4.16, m2. e m4., podemos escrever a união finita

$$D_{(\beta, C)} = \bigsqcup_j D_{(\beta e_j, A_j)},$$

em que cada $D_{(\beta e_j, A_j)} \in \widehat{S}$, de tal maneira que

$$\kappa(D_{(\beta, C)}) = \sum_j \kappa(D_{(\beta e_j, A_j)}). \quad (4.6)$$

Assim

$$D_{(\beta e_j, A_j)} = D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta, C)} = \bigsqcup_{i=i_1+1}^n D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i},$$

e note que $D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i} = D_{(\gamma_j, D_j)}$ para algum elemento de \widehat{S} em que $|\gamma_j| = |\beta_i|$ (pois $|\beta_i| \geq |\beta| + 1 = |\beta e_j|$). Isto implica que $\max_j \{|\gamma_j| - |\beta e_i|\} < m$. Pela hipótese de indução,

$$\kappa(D_{(\beta e_j, A_j)}) = \sum_{i=i_1+1}^n \kappa(D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}). \quad (4.7)$$

Por outro lado, para $i_1 + 1 \leq i \leq n$,

$$D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i} = D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i} \cap D_{(\beta, C)} = \bigsqcup_j D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i},$$

usando novamente o caso $m = 0$ (mesmo se alguma interseções são vazias) temos que

$$\kappa(D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}) = \sum_j \kappa(D_{(\beta e_j, A_j)} \cap D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}). \quad (4.8)$$

Juntando as equações (4.6), (4.7) e (4.8) concluímos que

$$\kappa(D_{(\beta, C)}) = \sum_{i=i_1+1}^n \kappa(D_{(\beta_i, B_i), F_i, S_i}),$$

e assim, por (4.5), temos que κ é de fato medida.

Falta mostrar que $\kappa(\theta_e(V)) = M(e)\kappa(V)$. Mas note que se $\hat{S} \ni V = D_{(\beta,B),F,S}$ e $V \subseteq X_{e^{-1}}$, então é claro que $\theta_e(V) = D_{(e\beta,B),F,S}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\kappa(\theta_e(V)) &= \kappa(D_{(e\beta,B),F,S}) \\
&= M(e\beta)m(B) - \sum_{e \in F} M(e\beta f)m(r(f)) - \sum_{v \in S \cap G_s^0} M(e\beta)m(v) \\
&= M(e)M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F} M(e)M(\beta f)m(r(f)) - \sum_{v \in S \cap G_s^0} M(e)M(\beta)m(v) \\
&= M(e) \left(M(\beta)m(B) - \sum_{e \in F} M(\beta f)m(r(f)) - \sum_{v \in S \cap G_s^0} M(\beta)m(v) \right) \\
&= M(e)\kappa(D_{(\beta,B),F,S}) \\
&= M(e)\kappa(V).
\end{aligned}$$

e segue o resultado. ■

Por fim, com o semianel \hat{S} conseguimos definir uma medida. Disso, resulta o seguinte resultado:

Proposição 4.21. *Sejam \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e $M : \mathcal{G}^1 \rightarrow [0, 1]$. Então existe uma função convexa entre o conjunto das funções $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem m1., ..., m4. da página 55 e o conjunto das medidas de probabilidade, borel, regulares μ em X que satisfazem $\mu(\theta_e(V)) = M(e)\mu(V)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e para todo subconjunto borel mensurável $V \subseteq X_{e^{-1}}$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.20, temos uma medida κ com o semianel \hat{S} . Assim, invocando o Teorema de extensão de Carathéodory, existe uma única medida μ definida na σ -álgebra gerada por \hat{S} . Como \hat{S} forma uma base enumerável, μ está definida na σ -álgebra de Borel.

Por definição de κ , temos que $\mu(D_{(A,A)}) = \kappa(D_{(A,A)}) = m(A)$, para todo $D_{(A,A)} \in S$. Assim, considerando que μ é medida, \mathcal{G}^0 um conjunto dirigido via inclusão e usando o princípio da inclusão exclusão juntamente com m4., temos

$$\mu(X) = \mu \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}^0} D_{(A,A)} \right) = \sum_{A \in \mathcal{G}^0} \mu(D_{(A,A)}) = \sum_{A \in \mathcal{G}^0} m(A) = \lim_{A \in \mathcal{G}^0} m(A) \stackrel{m1.}{=} 1.$$

Logo, μ é medida de probabilidade, o que implica também que é regular, já que toda medida de Borel finita é regular.

Uma combinação convexa de funções m é preservada quando passamos para medidas κ em \hat{S} e portanto, medidas μ em X , devido à equação 4.4.

Agora, para mostrar que para todo $V \subseteq X_{e^{-1}}$ borel mensurável e $e \in \mathcal{G}^1$ temos $\mu(\theta_e(V)) = M(e)\mu(V)$, basta mostrar para os elementos do semianel \hat{S} uma vez que θ_e é bijeção e preserva uniões e interseções. Mas para os elementos de \hat{S} , já foi feito na demonstração do Lema 4.20 ■

Para fechar esta seção, um último resultado que é baseado em [8, Lema 4.7] e em [11, Prop. 4.8]. A demonstração aqui é a mesma dos artigos citados.

Proposição 4.22. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e $M : \mathcal{G}^1 \rightarrow [0, 1]$. Então existe uma bijeção (afim) entre o conjunto dos estados ω em $C_0(X)$ que satisfazem a condição $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = M(e)\omega(f)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e toda $f \in C_0(X_{e^{-1}})$ e o conjunto das medidas de probabilidade, borel, regulares μ em X que satisfazem $\mu(\theta_e(V)) = M(e)\mu(V)$, $\forall e \in \mathcal{G}^1$ e para todo subconjunto borel mensurável $V \subseteq X_{e^{-1}}$.*

Demonstração. De fato, a demonstração segue utilizando o Teorema de Representação de Riesz como feito em [8, Lema 4.7] e em [11, Prop. 4.8]. ■

4.4 Isomorfismo entre Conjuntos de Estados

Agrupando alguns resultados obtidos neste capítulo, temos condições de provar o seu resultado principal, que será o Teorema 4.24. Mas antes precisamos mostrar o resultado a seguir que é uma generalização da Proposição 4.4 em [11] que por sua vez generaliza o Lema 4.9 em [8].

Proposição 4.23. *Sejam \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2 e $M : \mathcal{G}^1 \rightarrow [0, 1]$. Então existe uma função que preserva combinações convexas, que leva o conjunto das funções $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem $m1.$, ..., $m4.$ da página 55 e o conjunto dos estados ω em $C_0(X)$ que satisfazem a condição $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = N(e)^{-\beta} \omega(f)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e toda $f \in C_0(X_{e^{-1}})$. Além disso, tal correspondência é da forma $\omega \mapsto (A \xrightarrow{m} \omega(1_A))$, $\forall A \in \mathcal{G}^0$.*

Demonstração. Seja ω um estado em $C_0(X)$ tal que $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = M(e)\omega(f)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e $f \in C_0(X_{e^{-1}})$. Seja $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ dada por $m(A) = \omega(1_A)$. Vamos conferir que m satisfaz os *mi.*'s.

m1. O conjunto $\{A : A \in \mathcal{G}^0\}$ torna-se dirigido via inclusão, assim, $\{1_A : A \in \mathcal{G}^0\}$ é uma unidade aproximada crescente para $C_0(X)$. Então, como ω é estado, $1 = \lim_{A \in \mathcal{G}^0} \omega(1_A) = \lim_{A \in \mathcal{G}^0} m(A)$.

m2. Primeiro note que se $e \in \mathcal{G}^1$ então

$$\omega(1_e) = \omega(1_{e^{-1}} \circ \theta_{e^{-1}}) = M(e)\omega(1_{e^{-1}}) = M(e)\omega(1_{r(e)}) = M(e)m(r(e)).$$

Além disso, note que se $|A| < \infty$ e $|\varepsilon(A)| < \infty$, então pelo Corolário 4.16 temos que

$$1_A = \sum_{e:s(e) \in A}^{finita} 1_e + \sum_{v \in A \cap G_s^0}^{finita} 1_v.$$

Assim

$$\begin{aligned} m(A) &= \omega(1_A) = \omega \left(\sum_{e:s(e) \in A} 1_e + \sum_{v \in A \cap G_s^0} 1_v \right) \\ &= \sum_{e:s(e) \in A} \omega(1_e) + \sum_{v \in A \cap G_s^0} \omega(1_v) \\ &= \sum_{e:s(e) \in A} M(e)m(r(e)) + \sum_{v \in A \cap G_s^0} m(v). \end{aligned}$$

m3. Sejam $A \in \mathcal{G}^0$, F um subconjunto finito de $\varepsilon(A)$ e S um subconjunto finito de $A \cap G_s^0$. Então novamente pelo Corolário 4.16, tem-se que $1_A \geq \sum_{e \in F} 1_e + \sum_{v \in A \cap G_s^0} 1_v$. Com isso,

$$m(A) = \omega(1_A) \geq \omega \left(\sum_{e \in F} 1_e + \sum_{v \in A \cap G_{sink}^0} 1_v \right) = \sum_{e \in F} M(e)m(r(e)) + \sum_{v \in G_s^0} m(v).$$

m4. Segue pela linearidade de ω .

Portanto, para um estado ω em $C_0(X)$ atribuímos um $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz $m1., \dots, m4.$. Para provar a injetividade de tal correspondência, suponha que existem ω_1 e ω_2 estados tais que $\omega_i(f \circ \theta_{e^{-1}}) = M(e)\omega_i(f)$, $i = 1, 2$, $\forall f \in C_0(X_{e^{-1}})$ e $e \in \mathcal{G}^1$. Suponha ainda que $\omega_1(1_A) = \omega_2(1_A)$, $\forall A \in \mathcal{G}^0$. Devemos mostrar que $\omega_1 = \omega_2$. Pela Observação 4.11, basta mostrarmos que $\omega_1(1_{r(c)\cap A} \circ \theta_{c^{-1}}) = \omega_2(1_{r(c)\cap A} \circ \theta_{c^{-1}})$, para todo $c \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e todo $A \in \mathcal{G}^0$. Para isso, note primeiro que

$$1_A \circ \theta_{ef}^{-1} = 1_A \circ \theta_{f^{-1}e^{-1}} = 1_A \circ \theta_{f^{-1}} \circ \theta_{e^{-1}} = 1_{\theta_f(A)} \circ \theta_{e^{-1}}.$$

Então, se $c = c_1 \dots c_n \in \mathcal{G}^*$ e $A \in \mathcal{G}^0$, temos:

$$\begin{aligned} \omega_1(1_{r(c)\cap A} \circ \theta_{c^{-1}}) &= \omega_1(1_{r(c)\cap A} \circ \theta_{c_n^{-1} \dots c_1^{-1}}) = \\ &= \omega_1(1_{\theta_{c_n}(r(c)\cap A)} \circ \theta_{c_{n-1}^{-1} \dots c_1^{-1}}) = \dots \\ &= \omega_1(1_{\theta_{c_2 \dots c_n}(r(c)\cap A)} \circ \theta_{c_1^{-1}}) = \\ &= M(c_1)\omega_1(1_{\theta_{c_2 \dots c_n}(r(c)\cap A)}) = \\ &= M(c_1)\omega_1(1_{\theta_{c_3 \dots c_n}(r(c)\cap A)} \circ \theta_{c_2^{-1}}) = \\ &= M(c_1)M(c_2)\omega_1(1_{\theta_{c_4 \dots c_n}(r(c)\cap A)} \circ \theta_{c_3^{-1}}) = \dots \\ &= M(c_1) \dots M(c_n)\omega_1(1_{r(c)\cap A}) = \\ &= M(c_1) \dots M(c_n)\omega_2(1_{r(c)\cap A}) = \dots \\ &= \omega_2(1_{r(c)\cap A} \circ \theta_{c^{-1}}). \end{aligned}$$

■

O Teorema a seguir é o último desta seção. Este resultado generaliza o Teorema 4.3 de [11] que por sua vez, já era uma generalização do Teorema 4.1 de [8].

Teorema 4.24. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Considere a função $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow (1, \infty)$ e $0 \leq \beta < \infty$. Considere também os seguintes conjuntos:*

A^β : O conjunto de estados KMS_β para $C^*(\mathcal{G})$;

B^β : O conjunto dos estados ω de $C_0(X)$ que satisfazem a condição $\omega(f \circ \theta_e^{-1}) = N(e)^{-\beta}\omega(f)$ para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e todo $f \in C_0(X_{e^{-1}})$;

C^β : O conjunto das medidas de probabilidade, borel, regulares μ em X que satisfazem $\mu(\theta_e(V)) = N(e)^{-\beta}\mu(V)$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e para todo subconjunto borel mensurável $V \subseteq X_{e^{-1}}$;

D^β : O conjunto das funções $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ que satisfazem

m1. $\lim_{A \in \mathcal{G}^0} m(A) = 1$;

m2. $m(A) = \sum_{e:s(e) \in A} N(e)^{-\beta}m(r(e)) + \sum_{v \in A \cap G_s^0} m(v)$, se $|A| < \infty$ e $|\epsilon(A)| < \infty$;

m3. $m(A) \geq \sum_{e \in F} N(e)^{-\beta}m(r(e)) + \sum_{v \in S} m(v)$, para todo $F \subseteq \epsilon(A)$, F finito e todo $S \subseteq A \cap G_s^0$, S finito;

m4. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

E^β : O conjunto dos estados ψ em $C^*(\mathcal{G})^\gamma$ que satisfazem $\psi(s_c p_A s_d^*) = \delta_{c,d} N(c)^{-\beta} \psi(p_{A \cap r(c)})$, para todo $c, d \in \mathcal{G}^* \setminus \mathcal{G}^0$ e $A \in \mathcal{G}^0$.

Então existe um isomorfismo convexo entre $A^\beta, B^\beta, C^\beta, D^\beta$ e E^β .

Demonstração. De fato, pela Proposição 4.9 existe um isomorfismo afim entre A^β e E^β . A Proposição 4.13 nos dá um isomorfismo afim entre B^β e E^β .

Por outro lado, usamos a Proposição 4.22 para mostrar o isomorfismo afim entre B^β e C^β . Para isso, note que existe uma correspondência entre as funções $N : \mathcal{G}^1 \rightarrow (1, \infty)$ e as funções $M : \mathcal{G}^1 \rightarrow [0, 1]$: basta fazer $M(e) = N(e)^{-\beta}$.

Até aqui temos $A^\beta \iff E^\beta \iff B^\beta \iff C^\beta$. Falta incluir D^β . Fazendo novamente $M(e) = N(e)^{-\beta}$, mas agora na Proposição 4.23 obtemos uma correspondência afim injetora de B^β para D^β e com a mesma função M na Proposição 4.21 obtemos uma função afim de D^β para C^β . Por fim, o resultado segue pelo fato de que as funções de B^β para D^β , de D^β para C^β e de C^β para B^β compõem a identidade. ■

4.5 Estados Ground

Utilizando os resultados vistos na seção anterior, podemos caracterizar o conjunto dos estados ground em C^* -álgebras de ultragrafos que satisfazem RFUM2.

Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Defina

A^{gr} : o conjunto dos estados ground em $C^*(\mathcal{G})$,

B^{gr} : o conjunto dos estados ω de $C_0(X)$ tal que $\omega(1_e) = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$,

C^{gr} : o conjunto das medidas de probabilidade, borel, regulares μ em X tais que $\mu(A) = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e para todo subconjunto borel mensurável A de X_e ,

D^{gr} : o conjunto das funções $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo

- m1. $\lim_{A \in \mathcal{G}^0} m(A) = 1$;
- m2. $m(A) = 0$ se $|A| < \infty$ e $|\epsilon(A)| < \infty$;
- m3. $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Diante de tais conjuntos, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 4.25. *Seja \mathcal{G} um ultragrafo que satisfaz RFUM2. Então existe um isomorfismo afim entre A^{gr}, B^{gr}, C^{gr} , e D^{gr} .*

Demonstração. (Prova baseada em [11, Teo. 5.1]) A existência de um isomorfismo afim entre A^{gr} e o conjunto de estados ϕ de $C_0(X)$ tais que $\phi(f) = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}^1$ e $f \in C(X_e)$ segue de [14, Teorema 4.3]. Como ϕ é um estado, e 1_e é unidade para $C(X_e)$, segue que se $\phi(1_e) = 0$ então $\phi(f) = 0$ para todo $f \in C(X_e)$. Então temos que A^{gr} é isomorfo à B^{gr} , via um isomorfismo afim.

Como nos estados KMS, um isomorfismo entre B^{gr} e C^{gr} é obtido analogamente ao que foi feito em [8, Proposição 4.8].

Por fim, um isomorfismo afim entre B^{gr} e D^{gr} é obtido pela aplicação da Proposição 4.21 e 4.23 com $M(e) = 0$ para todo $e \in \mathcal{G}^1$, e procedendo como na prova do Teorema 4.24. ■

Observação 4.26. De acordo com [8, Obs 4.4], uma vez que conseguimos caracterizar a C^* -álgebra de ultragrafos como C^* -álgebra de um grupóide, podemos relacionar os estados KMS_β estudados neste capítulo com as C^* -álgebras de grupóides de Deaconu-Renault $C^*(G(X, \sigma))$ do capítulo anterior. Para isto, considere neste tal grupóide o cociclo contínuo $c : G(X, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $c((ux, |u| - |u'|, u'x)) = \ln N(u) - \ln N(u')$, em que N é a função real positiva considerada no Teorema anterior. Para $x \in X$ seja $G(X, \sigma)_x^x := \{(x, n, x) \in G(X, \sigma) : n \in \mathbb{Z}\}$ o estabilizador de x . Claro que $G(X, \sigma)_x^x$ é subgrupo de \mathbb{Z} . Defina agora a dinâmica σ^c em $G(X, \sigma)$ por $\sigma_t^c(g) = e^{itc(g)}f(g)$ para $f \in C_c(G(X, \sigma))$ e $g \in G(X, \sigma)$. Então, por [20, Teo 1.3], existe, para cada $\beta \in \mathbb{R}$, uma correspondência biunívoca entre os estados σ^c - KMS_β em $C^*(G(X, \sigma))$ e o conjunto dos pares $\{\mu, \{\varphi_x\}_x\}$ que consiste de uma medida de probabilidade μ no unit space com cociclo de Radon-Nikodym $e^{-\beta c}$ e um corpo mensurável de estados φ_x , cada um definido em $C^*(G(X, \sigma)_x^x)$ e satisfazendo $\varphi_x(u_g) = \varphi_{r(h)}(u_{hg}h^{-1})$ e $\varphi_x(u_{g'}) = 0$ para μ -a.e. x , todo $g \in G(X, \sigma)_x^x$, todo $h \in G(X, \sigma)_x$ e todo $g \in G(X, \sigma)_x^x \setminus c^{-1}(0)$. Note que uma medida de probabilidade no unit space com cociclo de Radon-Nikodym $e^{-\beta c}$ é da mesma forma que um elemento de C^β definido acima.

Observação 4.27. Considere o exemplo da Seção 6 em [11], que passa pela reconstrução do ultragrafo criado em [24, Seção 5], cuja C^* -álgebra associada não é nem C^* -álgebra de grafo nem C^* -álgebra de Exel-Laca.

Definição 4.28. Se I é um conjunto enumerável e A é uma matriz $I \times I$ com entradas em $\{0, 1\}$, então podemos considerar o ultragrafo $\mathcal{G}_A := (G_A^0, \mathcal{G}_A^1, r, s)$ definido por $G_A^0 := \{v_i : i \in I\}$, $\mathcal{G}_A^1 := \{e_i : i \in I\}$, $s(e_i) = v_i$ para todo $i \in I$, e $r(e_i) = \{v_j : A(i, j) = 1\}$.

Seja A uma matriz infinita enumerável

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Para a matriz A , seja $\mathcal{G} := (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$ o ultragrafo \mathcal{G}_A da Definição 4.28. Definimos um ultragrafo \mathcal{F} adicionando um vértice simples $\{w\}$ para \mathcal{G} e um número enumerável de arestas com source w e range G^0 . Mais precisamente, definimos $\mathcal{F} := (F^0, \mathcal{F}^1, r, s)$ por

$$F^0 := \{w\} \cup G^0 \quad \mathcal{F}^1 := \{f_i\}_{i=1}^\infty \cup \mathcal{G}^1$$

e estendemos r e s para \mathcal{F}^1 definindo $s(f_i) = \{w\}$ e $r(f_i) = G^0$ para todo $1 \leq i < \infty$.

Note que este exemplo continua válido mesmo com os conjuntos de estados definidos aqui. O ultragrafo \mathcal{F} é um ultragrafo que não contém sinks. Com isso, o conjunto D^β do Teorema 4.24, é tal que m.2 fica

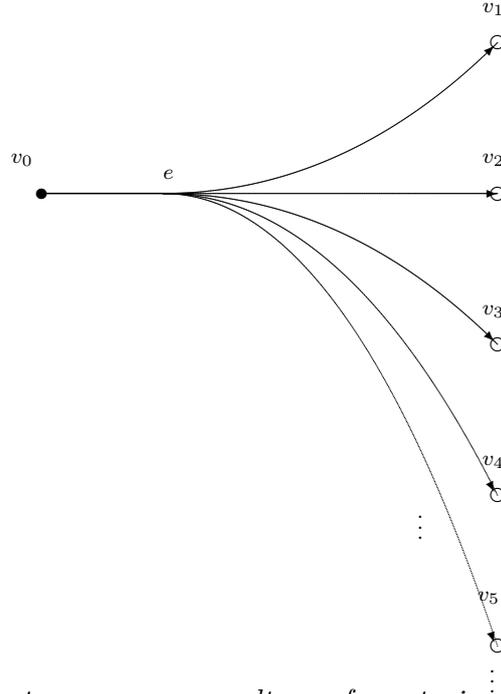
$$m(A) = \sum_{e:s(e) \in A} N(e)^{-\beta} m(r(e)),$$

se $|A| < \infty$ e $0 < |\epsilon(A)| < \infty$, e m.3 fica

$$m(A) \geq \sum_{e \in F} N(e)^{-\beta} m(r(e)),$$

para todo $F \subseteq \epsilon(A)$, F finito, ou seja, as condições m.2 e m.3 do Teorema 4.24 coincidem com as condições m.2 e m.3 de D^β definido logo após a Observação 4.2 em [11].

Exemplo 4.29. Considere o ultragrafo \mathcal{G} à seguir:



Note primeiramente que, para o ultragrafo anterior, que satisfaz RFUM2, temos que \mathcal{G}^0 é formado por subconjuntos finitos de G^0 além de uniões finitas com $r(e) = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$. Em particular, $G^0 \in \mathcal{G}^0$. Também podemos descrever

$$X = \{(e, v_i)\}_{i \geq 1} \cup \{(v_i, v_i)\}_{i \geq 1} \cup \{(e, r(e)), (r(e), r(e))\},$$

em que $r(e) = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$.

Nosso objetivo é encontrar m que satisfaça as condições **m1** a **m4** que definem o conjunto D^β . Para existir uma função m , que satisfaz **m1** a **m4**, temos de ter, para N e β dados, que:

$$m(\{v_0\}) + m(r(e)) = m(G^0) = 1. \quad (4.9)$$

Também, para satisfazer **m2**, **m4** e por $s(e) \in \{v_0\}$, devemos ter

$$m(\{v_0\}) = N(e)^{-\beta} m(r(e)), \quad (4.10)$$

ou seja, $m(\{v_0\})$ depende de N , β e de $r(e)$.

Agora, juntando (4.9) e (4.10), temos que

$$m(r(e)) = \frac{1}{1 + N(e)^{-\beta}}$$

ou seja, $m(r(e))$ depende apenas de N e de β .

Para que **m3** seja satisfeito temos de ter, para todo $k \in \mathbb{N}^*$

$$m(r(e)) \geq \sum_{i=1}^k m(v_i),$$

isto é,

$$\frac{1}{1 + N(e)^{-\beta}} \geq \sum_{i=1}^k m(v_i),$$

Pela definição de N na página 4.2, temos que $N(e) \in (1, \infty)$ e assim, $N(e)^{-\beta} \in (0, 1)$. Com isso, se $\beta \rightarrow \infty$, então $N(e)^{-\beta} \rightarrow 0$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}^*$, considere

$$m(\{v_i\}) = \frac{1 - N(e)^{-\beta}}{1 + N(e)^{-\beta}} \left(N(e)^{-\beta} \right)^{(i-1)}$$

Para facilitar a escrita faça $r = N(e)^{-\beta}$ e $a = \frac{1 - N(e)^{-\beta}}{1 + N(e)^{-\beta}} = \frac{1 - r}{1 + r}$. Então, já que $1 \geq a$, temos, para todo $k \in \mathbb{N}^*$

$$m(r(e)) = \frac{1}{1 + r} \geq \frac{1 - r^k}{1 + r} \geq \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right) \frac{1 - r^k}{1 + r} = \sum_{i=1}^k m(v_i),$$

Além disso,

$$m(r(e)) = \sum_{i=1}^{\infty} m(v_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a \cdot r^{(i-1)} = a \sum_{i=1}^{\infty} r^{(i-1)} = a \left(\frac{1}{1 - r} \right) = \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - r} \right) = \frac{1}{1 + r},$$

e então **m3** é válida para qualquer subconjunto finito S de $r(e)$.

Também, independente de N e de β , se escolhermos $m(\{v_0\}) = 1$ and $m(r(e)) = m(\{v_i\}) = 0$ for $i \in \mathbb{N}^*$, teríamos que **m1-m4** seria satisfeito.

No caso dos estados ground, a função $m : \mathcal{G}^0 \rightarrow [0, 1]$ está em D^{gr} se, e somente se, $m(\{v_i\}) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e $m(r(e)) = 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Abadie. On partial actions and groupoids. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132:1037–1047, 04 2004. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34, and 46.
- [2] S. E. Arklint, S. Eilers, and E. Ruiz. A dynamical characterization of diagonal-preserving $*$ -isomorphisms of graph C^* -algebras. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(7):2401–2421, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 33, 37, and 39.
- [3] T. Bates, D. Pask, I. Raeburn, and W. Szymaski. The C^* -algebras of row-finite graphs. *New York Journal of Mathematics New York J. Math*, 6:307–324, 01 2000. Citado na página 8.
- [4] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics: Volume 2: Equilibrium States Models in Quantum Statistical Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 47.
- [5] N. Brownlowe, T. M. Carlsen, and M. F. Whittaker. Graph algebras and orbit equivalence. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 37(2):389–417, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 11, 33, 35, and 41.
- [6] T. Carlsen and J. Rout. Diagonal-preserving gauge-invariant isomorphisms of graph C^* -algebras. *Journal of Functional Analysis*, 273:2981–2993, 11 2017. Citado na página 46.
- [7] T. Carlsen, E. Ruiz, A. Sims, and M. Tomforde. Reconstruction of groupoids and C^* -rigidity of dynamical systems. *arXiv e-prints*, page arXiv:1711.01052, Nov. 2017. Citado 10 vezes nas páginas 8, 32, 37, 39, 41, 44, 45, 46, 68, and 69.
- [8] T. Carlsen and N. S. Larsen. Partial actions and KMS states on relative graph C^* -algebras. *Journal of Functional Analysis*, 271:2090–2132, 10 2016. Citado 12 vezes nas páginas 8, 11, 23, 27, 29, 47, 49, 58, 59, 60, 61, and 62.
- [9] T. Carlsen and M. Winger. Orbit equivalence of graphs and isomorphism of graph groupoids. *Mathematica Scandinavica*, 123(2):239–248, Sep. 2018. Citado 3 vezes nas páginas 8, 37, and 44.
- [10] J. Cuntz and W. Krieger. A class of C^* -algebras and topological Markov chains. *Inventiones mathematicae*, 56(3):251–268, Oct 1980. Citado na página 8.
- [11] G. G. de Castro and D. Gonçalves. KMS and Ground States on Ultragraph C^* -Algebras. *Integral Equations and Operator Theory*, 90(6):63, Sep 2018. Citado 10 vezes nas páginas 8, 47, 48, 49, 52, 58, 59, 60, 61, and 62.
- [12] G. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 52 and 53.

- [13] R. Exel. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications*, volume 224. American Mathematical Soc., 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 and 31.
- [14] R. Exel and M. Laca. Partial Dynamical Systems and the KMS Condition. *Communications in Mathematical Physics*, 232, 07 2000. Citado 3 vezes nas páginas 8, 49, and 61.
- [15] D. Gonçalves and D. Royer. Infinite alphabet edge shift spaces via ultragraphs and their C^* -algebras. *International Mathematics Research Notices*, 2019(7):2177–2203, 08 2017. Citado 12 vezes nas páginas 9, 10, 12, 13, 14, 16, 20, 21, 23, 27, 29, and 32.
- [16] D. Gonçalves and D. Royer. Ultragraphs and shift spaces over infinite alphabets. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 141(1):25 – 45, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 8 and 23.
- [17] A. Kumjian, D. Pask, and I. Raeburn. Cuntz–Krieger algebras of directed graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, 184(1):161–174, 1998. Citado na página 8.
- [18] A. Kumjian, D. Pask, I. Raeburn, and J. Renault. Graphs, groupoids, and Cuntz–Krieger algebras. *Journal of Functional Analysis*, 144(2):505–541, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 8 and 33.
- [19] A. E. Marrero and P. S. Muhly. Groupoid and inverse semigroup presentations of ultragraph C^* -algebras. *Semigroup Forum*, 77(3):399–422, Dec 2008. Citado na página 10.
- [20] S. Neshveyev. KMS states on the C^* -algebras of non-principal groupoids. *Journal of Operator Theory*, 70, 06 2011. Citado na página 62.
- [21] P. Nyland and E. Ortega. Topological full groups of ample groupoids with applications to graph algebras. *International Journal of Mathematics*, 30(04):1950018, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 33 and 35.
- [22] G. K. Pedersen. *C^* -algebras and their automorphism groups*. Academic press, 1979. Citado na página 47.
- [23] I. Raeburn. *Graph algebras*. Number 103. American Mathematical Soc., 2005. Citado na página 48.
- [24] M. Tomforde. Simplicity of ultragraph algebras. *Indiana University Mathematics Journal*, 52, 07 2001. Citado 4 vezes nas páginas 8, 21, 37, and 62.
- [25] M. Tomforde. A unified approach to Exel-Laca algebras and C^* -algebras associated to graphs. *Journal of Operator Theory*, pages 345–368, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 10, 21, 30, 31, and 48.
- [26] S. Webster. The path space of a directed graph. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142, 02 2011. Citado 2 vezes nas páginas 11 and 17.

Anexos

(Alguns resultados extraídos da Seção 8 do artigo [7])

[7, Seç. 8.1] Órbita equivalência contínua

Teorema H.1. [7, Teorema 8.2] *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault com X, Y segundo enumeráveis, e suponha que $h : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo. Então são equivalentes:*

1. *existe uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores de (X, σ) para (Y, τ) com homeomorfismo fundamental h ;*
2. *existe um isomorfismo de grupóides $\Theta : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ tal que $\Theta|_X = h$; e*
3. *existe um isomorfismo $\phi : C^*(\mathcal{G}(X, \sigma)) \rightarrow C^*(\mathcal{G}(Y, \tau))$ tal que $\phi(C_0(X)) = C_0(Y)$ com $\phi(f) = f \circ h^{-1}$ for $f \in C_0(Y)$.*

Proposição H.2. [7, Proposição 8.3] *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault. Seja $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e sejam $l, k : \text{Dom}(\sigma) \rightarrow \mathbb{N}$ e $l', k' : \text{Dom}(\tau) \rightarrow \mathbb{N}$ funções contínuas tais que $h(x) \in \text{Dom}(\tau^{l(x)})$ e $h(\sigma(x)) \in \text{Dom}(\tau^{k(x)})$ para $x \in \text{Dom}(\sigma)$, e $h^{-1}(y) \in \text{Dom}(\sigma^{l'(y)})$ e $h^{-1}(\tau(y)) \in \text{Dom}(\sigma^{k'(y)})$ para $y \in \text{Dom}(\tau)$. São equivalentes:*

1. *existe um isomorfismo de grupóides $\Theta : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ tal que $\Theta|_X = h$, $\Theta(x, 1, \sigma(x)) = (h(x), l(x) - k(x), h(\sigma(x)))$ para $x \in \text{Dom}(\sigma)$, e $\Theta^{-1}(y, 1, \tau(y)) = (h^{-1}(y), l'(y) - k'(y), h^{-1}(\tau(y)))$ para $y \in \text{Dom}(\tau)$;*
2. *(h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores essenciais; e*
3. *(h, l, k, l', k') é uma órbita equivalência contínua que preserva estabilizadores.*

Lema H.3. [7, Lema 8.5] *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault. Suponha que $\Theta : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ é um isomorfismo de grupóides. Seja $h : X \rightarrow Y$ a restrição de Θ para $\mathcal{G}(X, \sigma)^{(0)}$. Para $p \in \mathbb{N}$, as funções $l_p, k_p : D_p \rightarrow \mathbb{N}$ dadas por*

$$l_p(x) := \min\{l \in \mathbb{N} : \tau^l(h(x)) = \tau^{l - c_Y(\Theta(x, p, \sigma^p(x)))}(h(\sigma^p(x)))\}, \quad e$$

$$k_p(x) := l_p(x) - c_Y(\Theta(x, p, \sigma^p(x))).$$

são contínuas, e $\tau^{l_p(x)}(h(x)) = \tau^{k_p(x)}(h(\sigma^p(x)))$ para todo $x \in D_p$. Para $p \in \mathbb{N}$ e $x \in D_p$,

$$\sum_{n=0}^{p-1} (l_1(\sigma^n(x)) - k_1(\sigma^n(x))) = l_p(x) - k_p(x) = c_Y(\Theta(x, p, \sigma^p(x)))$$

Lema H.4. [7, Lema 8.6] *Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault como anteriormente. Suponha que $\Theta : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ é um isomorfismo. Sejam h, k_p, l_p como no Lema H.3. Seja $x \in X$. Então $\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(x) < \infty$ se, e somente se $\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(h(x)) < \infty$, e se $\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(x) < \infty$ e $\sigma^{\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(x)}(x) = x$, então $|\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(x) - k_{\text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(x)}(x)| = \text{Stab}_{\min}^{\text{ess}}(h(x))$.*

Dado um sistema de Deaconu–Renault (X, σ) e $l : \text{Dom}(\sigma) \rightarrow \mathbb{N}$, podemos indutivamente definir $l_m : \text{Dom}(\sigma^m) \rightarrow \mathbb{N}$, $m \geq 1$ por $l_1 = l$ e $l_{m+1}(x) = l(x) + l_m(\sigma(x))$. Para $m, n \geq 1$ temos

$$l_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} l(\sigma^i(x)) \quad e \quad l_{m+n}(x) = l_m(x) + l_n(\sigma^m(x)). \quad (\text{H.11})$$

Lema H.5. [7, Lema 8.7] Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault e seja (h, l, k, l', k') uma órbita equivalência contínua de (X, σ) para (Y, τ) . Então existe um cociclo contínuo $c_{(h,l,k,l',k')} : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $c_{(h,l,k,l',k')}(x, m - n, x') = l_m(x) - k_m(x) - l_n(x') + k_n(x')$.

Lema H.6. [7, Lema 8.8] Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault, e seja (h, k, l, k', l') uma órbita equivalência contínua de (X, σ) para (Y, τ) . Então existe um homomorfismo contínuo de grupóides $\Theta_{k,l} : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ tal que $\Theta_{k,l}(x, m - n, x') = (h(x), l_m(x) - k_m(x) - l_n(x') + k_n(x'), h(x'))$ sempre que $\sigma^m(x) = \sigma^n(x')$. Para cada $x \in X$ existe um homomorfismo de grupo $\pi_x : \text{Stab}(x) \rightarrow \text{Stab}(h(x))$ tal que

$$\pi_x(m - n) = l_m(x) - k_m(x) - l_n(x) + k_n(x) \text{ sempre que } \sigma^m(x) = \sigma^n(x). \quad (\text{H.12})$$

Para $x \in X$ e $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $\text{Stab}(\sigma^m(x)) = \text{Stab}(\sigma^n(x))$, $\text{Stab}(h(\sigma^m(x))) = \text{Stab}(h(\sigma^n(x)))$ e $\pi_{\sigma^m(x)} = \pi_{\sigma^n(x)}$.

[7, Seç. 8.2] Conjugação eventual

Teorema H.7. [7, Teorema 8.10] Sejam (X, σ) e (Y, τ) sistemas de Deaconu–Renault e seja $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Então são equivalentes:

1. existe uma conjugação eventual de (X, σ) para (Y, τ) com homeomorfismo fundamental h ;
2. existe um isomorfismo $\Theta : \mathcal{G}(X, \sigma) \rightarrow \mathcal{G}(Y, \tau)$ tal que $\Theta|_X = h$ e $c_X = c_Y \circ \Theta$; e
3. existe um isomorfismo $\phi : C^*(\mathcal{G}(X, \sigma)) \rightarrow C^*(\mathcal{G}(Y, \tau))$ tal que $\phi(C_0(X)) = C_0(Y)$, com $\phi(f) = f \circ h^{-1}$ para $f \in C_0(X)$, e $\phi \circ \gamma_z^X = \gamma_z^Y \circ \phi$.

Índice Remissivo

- A_∞ , 12
- A_s , 13
- $D_{(\beta,B),F,S}$, 15
- $D_{(\beta,B)}$, 15
- $G(X, \sigma)$, 33
- G_s^0 , 13
- X , 14
- X^0 , 32
- $X^{\geq 1}$, 32
- X_A , 25
- $X_\infty^{\geq 1}$, 32
- X_{fin} , 14
- X_{min} , 14
- X_{sin} , 14
- \mathcal{G}^0 , 12
- \mathcal{G}_T , 34
- \mathcal{G}_s^0 , 13
- p^∞ , 11
- Álgebra de Core, 48
- Órbita Equivalência Contínua, 41
 - Que Preserva Estabilizadores, 41
 - Que Preserva Estabilizadores Essenciais, 41
 - Que Preserva Pontos Eventualmente Periódicos, 44
- C*-álgebra
 - do Ultragrafo, 10
- Caminho finito, 10
- Caminho infinito, 11
- Ciclo, 37
 - simples, 37
 - tamanho do, 37
- Cilindros, 15
- Cociclo, 44
- Condição
 - (L), 38
 - (RFUM), 20
 - RFUM2, 20
- Conjugação Eventual, 46
- Deaconu-Renault
 - Grupóide de, 40
 - Sistema de, 40
- Emissor
 - Infinito Minimal, 12
 - Infinito, 11
- Emissor infinito, 11
- Espaço
 - de Ultracaminhos, 11
 - dos ultracaminhos de fronteira, 14
 - Shift, 33
- Esperança Condicional, 48
- Estabilizador
 - Minimal, 40
 - Minimal Essencial, 40
- Estados
 - ground, 47
 - KMS $_\beta$, 47
- Função
 - Analítica, 47
- Ground
 - Estados, 47
- Grupóide
 - de Deaconu-Renault, 40
 - associado à um ultragrafo, 33
 - de Deaconu-Renault, 37
 - de Transformação, 34
- Grupo
 - Estabilizador, 40
 - Estabilizador Essencial, 40
- Homeomorfismo Fundamental, 41
- KMS $_\beta$
 - Estados, 47
- Loop, 37
- Medida, 55

Minimal

- Emissor infinito, 12
- Sink, 13

Ponto

- Isolado, 38
- Periódico, 38
- Eventualmente não-nômade, 39
- Eventualmente Periódico, 38
- não-nômade, 39

Range, 9

Regular

- vértice, 11

Saída, 37

Segmento Inicial, 11

Semi-Anel, 53–55

Shift

- Espaço, 33
- Função, 32

Singular

- vértice, 11

Sink, 11

- Minimal, 13

Sistema de Deaconu-Renault, 40

Source, 9

Tamanho

- do caminho, 11
- do caminho infinito, 11
- do ultracaminho, 11

Ultracaminho

- tamanho do, 11

Ultracaminhos, 11

Ultragrafo, 9

- C^* -álgebra do, 10
- definição, 9

Vértice

- generalizado, 9
- regular, 11
- singular, 11