



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE SISTEMAS
ELETRÔNICOS

STEFANY PATRICIA DUTRA

PROJETO INTEGRADO DE SISTEMAS DE SUSPENSÃO ATIVA VEICULAR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO – DM - PPGESE - 004

JOINVILLE

2019

Stefany Patricia Dutra

PROJETO INTEGRADO DE SISTEMAS DE SUSPENSÃO ATIVA VEICULAR

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

Orientador: Prof. Dr. Alexandro Garro Brito.

Joinville

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dutra, Stefany Patricia
Projeto integrado de sistemas de suspensão ativa
veicular / Stefany Patricia Dutra ; orientador, Alexandre
Garro Brito, 2019.
118 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Campus Joinville, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Sistemas Eletrônicos, Joinville, 2019.

Inclui referências.

1. Engenharia de Sistemas Eletrônicos. 2. Projeto
combinado. 3. Suspensão automotiva. 4. Desigualdades
matriciais lineares. 5. Estratégia sequencial, iterativa e
aninhada. I. Brito, Alexandre Garro. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Sistemas Eletrônicos. III. Título.

Stefany Patricia Dutra

Projeto Integrado de Sistemas de Suspensão Ativa Veicular

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Lucas Weihmann, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Profª. Mariana Santos Matos Cavalca, Dra.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Prof. Tiago Jackson May Dezuo, Dr.
Universidade do Estado de Santa Catarina

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

Prof. Alexandro Garro Brito, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Alexandro Garro Brito, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Joinville, 08 de outubro de 2019.

Dedico este trabalho a Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por estar presente em minha vida e iluminar o meu caminho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alexandro Garro Brito, pela amizade, confiança e ajuda constante no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também pelas oportunidades oferecidas e por incentivar meu desenvolvimento científico.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Lucas Weihmann, Profa. Dra. Mariana Santos Matos Cavalca e Prof. Dr. Tiago Jackson May Dezuo, pela disponibilidade, atenção e por contribuírem para a melhoria do trabalho.

“Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.”

(Ayrton Senna da Silva).

RESUMO

Neste trabalho, é estudada a aplicação das estratégias de otimização sequencial, iterativa e aninhada no problema de projeto integrado dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador H_∞ em sistemas de suspensão automotiva. Além disso, uma estratégia de otimização sequencial com incertezas paramétricas é estudada. O problema de controle H_∞ é formulado usando desigualdades matriciais lineares. Esta abordagem permite que os parâmetros da estrutura mecânica sejam considerados como variáveis de decisão, caracterizando o problema de projeto combinado da planta e do controlador. O estudo é baseado no modelo de um quarto de carro com dois graus de liberdade. O controlador é projetado visando otimizar o conforto de condução e a segurança veicular, sujeito a restrições físicas da mola e do amortecedor. O desempenho do projeto integrado é avaliado e comparado com o projeto ativo, mediante simulações computacionais. As irregularidades da estrada são representadas pelas excitações do tipo lombada e senoidal. A aceleração vertical sobre a massa suspensa é utilizada para avaliar o conforto proporcionado pelo sistema, enquanto a segurança veicular é auferida através da força de contato entre o pneu e a pista. Os resultados demonstram que, de forma geral, a aplicação das estratégias de otimização no projeto integrado da suspensão automotiva melhora o comportamento global do veículo, proporcionando melhores margens de conforto e segurança.

Palavras-chave: Projeto combinado. Suspensão automotiva. Desigualdades matriciais lineares. Estratégia sequencial, iterativa e aninhada.

ABSTRACT

In this work, the sequential, iterative and nested optimization strategies for a co-design problem are studied. This includes both the mechanical structure and the H_∞ controller design for an automotive suspension system. In addition, a sequential optimization strategy with parametric uncertainties is studied. The control design problem is formulated using linear matrix inequalities. This approach allows the parameters of the mechanical structure to be considered as decision variables, characterizing the combined design problem of the plant and the controller. The study is based on a quarter car model with two degrees of freedom. The controller is designed to optimize ride comfort and vehicle safety, subject to physical restrictions of the spring and damper. The performance of the co-design is evaluated and compared to the active design methodology. The road irregularities are represented by speed bump and sinusoidal inputs. The vertical acceleration over the sprung mass is used to evaluate the comfort provided by the system, while the vehicle safety is measured through the contact force between the tire and the track. The results show that, in general, the application of the optimization strategies in the co-design of the automotive suspension improves the overall vehicle behavior, providing better comfort and safety margins.

Keyword: Combined design. Automotive suspension. Linear matrix inequalities. Sequential, iterative and nested strategy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estratégias de otimização da planta e do controlador.	24
Figura 2 – Componentes da suspensão passiva e representação dos principais parâmetros. ...	36
Figura 3 – Tipos de molas de sistemas de suspensão passiva.	38
Figura 4 – Amortecedor hidráulico.	39
Figura 5 – Modelo de um quarto de carro do sistema de suspensão ativa: (a) eletro-hidráulica ou pneumática e (b) eletromagnética.	40
Figura 6 – Modelo de um quarto de carro do sistema de suspensão ativa.	41
Figura 7 – Diagrama de corpo livre para o modelo de um quarto de carro.	42
Figura 8 – Mola de compressão helicoidal.	45
Figura 9 – Diagrama de blocos para o controle H_{∞}	51
Figura 10 – Politopo formado pelos pontos extremos para representar um sistema incerto como combinação convexa de sistemas conhecidos.	63
Figura 11 – Excitação lombada de 3,70 m de comprimento e 0,10 m de altura.	80
Figura 12 – Excitação senoidal.	81
Figura 13 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.	83
Figura 14 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.	83
Figura 15 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.	85
Figura 16 – Resposta da força de contato para excitação senoidal.	85
Figura 17 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.	88
Figura 18 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.	88
Figura 19 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.	90
Figura 20 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal.	90
Figura 21 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.	92
Figura 22 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.	92
Figura 23 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.	94
Figura 24 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal.	94
Figura 25 – Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.	96

Figura 26 – Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação senoidal, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	96
Figura 27 – Caso 1: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	98
Figura 28 – Caso 2: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	98
Figura 29 – Caso 3: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	99
Figura 30 – Caso 1: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	99
Figura 31 – Caso 2: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	100
Figura 32 – Caso 3: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	100
Figura 33 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.....	105
Figura 34 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.....	106
Figura 35 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.....	107
Figura 36 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.....	108
Figura 37 – Resposta do veículo ao passar pela excitação lombada para o PSP, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	110
Figura 38 – Resposta do veículo ao passar pela excitação senoidal para o PSP, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.....	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros referentes a um quarto de carro do Fiat Uno do ano de 2006.....	73
Tabela 2 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.....	84
Tabela 3 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.....	84
Tabela 4 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.....	87
Tabela 5 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.....	87
Tabela 6 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.....	93
Tabela 7 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.....	93
Tabela 8 – Casos dispersivos dos valores iniciais da constante de rigidez da mola e do coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão.....	97
Tabela 9 – Parâmetros do projeto da planta otimizados.....	104
Tabela 10 – Valores das normas H_{∞} , do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor para o projeto sequencial, iterativo, aninhado e o PSP.....	104
Tabela 11 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.....	106
Tabela 12 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.....	107
Tabela 13 – Aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.....	108

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequalities</i> – Desigualdades Matriciais Lineares
<i>ARE</i>	<i>Algebraic Riccati Equations</i> – Equações Algébricas de Riccati
<i>SISO</i>	<i>Single Input Single Output</i> – Entrada Única Saída Única
<i>MIMO</i>	<i>Multiple Input Multiple Output</i> – Entrada Múltipla Saída Múltipla
<i>RMS</i>	<i>Root Mean Square</i>
<i>GA</i>	Algoritmos Genéticos
<i>LQR</i>	<i>Linear Quadratic Regulator</i> – Regulador Quadrático Linear
<i>LQG</i>	<i>Linear Quadratic Gaussian</i> – Gaussiano Quadrático Linear
<i>CVT</i>	Transmissão Continuamente Variável

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{x}	Letras minúsculas e em negrito itálico representam vetores
\mathbf{X}	Letras maiúsculas e em negrito itálico representam matrizes
\mathbf{A}^*	Matriz conjugada transposta de \mathbf{A}
\mathbf{A}'	Matriz transposta de \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Matriz inversa de \mathbf{A}
m_s	Massa suspensa
m_u	Massa não suspensa
b_s	Coefficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão
k_s	Coefficiente de rigidez da mola da suspensão
k_t	Coefficiente de rigidez do pneu
F_A	Força aplicada pelo atuador no sistema de suspensão
Z_s	Deslocamento vertical da massa suspensa
Z_u	Deslocamento vertical da massa não suspensa
Z_r	Irregularidade da pista
t	Tempo
F	Força
m	Massa
α	Aceleração
l_o	Comprimento livre da mola
l_s	Comprimento sólido da mola
n_a	Número de bobinas ativas
$passo$	Passo da mola
ϕ_f	Diâmetro do fio
G	Módulo de cisalhamento do material
ϕ_h	Diâmetro médio da hélice
ι	Índice da mola
r	Restrição de projeto da planta

E	Módulo de elasticidade do material
$l_{o_{max}}$	Comprimento especificado
$\phi_{int_{mola}}$	Diâmetro interno da mola
$\phi_{ext_{mola}}$	Diâmetro externo da mola
$\phi_{ext_{max}}$	Diâmetro externo máximo permitido
$\phi_{int_{min}}$	Diâmetro interno mínimo permitido
δ_{dc}	Folga entre a mola e o amortecedor
ϕ_p	Diâmetro do pistão de trabalho do amortecedor
ε	Espessura da parede do amortecedor
κ_v	Constante da mola da válvula de carretel
ρ	Densidade do fluido do amortecedor
κ_d	Coefficiente de descarga
κ_2	Coefficiente da válvula do amortecedor
ϕ_o	Diâmetro da válvula
η	Coefficiente que define o limite superior da proporção da circunferência externa da válvula de carretel que pode ser exposta
a_f	Fator de área
h_m	Máxima elevação da válvula na máxima pressão permitida no amortecedor
a_o	Área frontal da válvula de carretel
p_{allow}	Máxima pressão permitida no amortecedor
$v_{p_{max}}$	Máxima velocidade do pistão do amortecedor
$Y(s)$	Transformada de Laplace de \mathbf{y}
$U(s)$	Transformada de Laplace de \mathbf{u}
$\mathbf{G}(s)$	Matriz de transferência
$G(s)$	Função de transferência
s	Variável no domínio da Transformada de Laplace
j	Unidade imaginária $j = \sqrt{-1}$
ω	Frequência angular
Σ_i	I-ésimo valor singular
λ_i	I-ésimo autovalor
$\underline{\Sigma}$	Menor valor singular
$\bar{\Sigma}$	Maior valor singular

λ_{max}	Máximo autovalor
sup	Supremo
$ \cdot $	Módulo
$\ \cdot\ _2$	Norma euclidiana
$\ \cdot\ _\infty$	Norma infinita
$P(s)$	Matriz de transferência da planta do sistema
$K(s)$	Matriz de transferência do controlador
$x(t)$	Vetor do espaço de estado
$w(t)$	Vetor de entradas exógenas (sinais de perturbações e ruídos de medição)
$u(t)$	Vetor de entradas de controle (atuadores)
$z(t)$	Vetor de desempenho do sistema
$y(t)$	Vetor de saídas medidas e utilizadas para realimentar o sistema (sensores)
A	Matriz dinâmica do sistema
B_1	Matriz de entrada de perturbações
B_2	Matriz de entrada de atuadores
C_1	Matriz de saída de desempenho
C_2	Matriz de saída de sensores
D_{11}	Matriz que determina, no sinal de desempenho, onde $w(t)$ é aplicado
D_{12}	Matriz que determina, no sinal de desempenho, onde $u(t)$ é aplicado
D_{21}	Matriz que determina, no sinal de medição, onde $w(t)$ é aplicado
D_{22}	Matriz que determina, no sinal de medição, onde $u(t)$ é aplicado
P_{zw}	Matriz de transferência da planta entre $W(s)$ e $Z(s)$
P_{zu}	Matriz de transferência da planta entre $U(s)$ e $Z(s)$
P_{yw}	Matriz de transferência da planta entre $W(s)$ e $Y(s)$
P_{yu}	Matriz de transferência da planta entre $U(s)$ e $Y(s)$
T_{zw}	Matriz de transferência entre a entrada de perturbação $w(t)$ e a saída de desempenho $z(t)$
I	Matriz identidade
ζ	Função objetivo
$\mu = \gamma^2$	Custo ou valor mínimo encontrado
q	Variável de otimização
H	Matriz simétrica
$\mathcal{E}(q)$	Matriz dependente das variáveis de otimização q

$\zeta_{\varepsilon}(\mathbf{q})$	Função objetivo linear em \mathbf{q}
$\mathbf{x}_K(\mathbf{t})$	Vetor do espaço de estado do controlador
\mathbf{A}_K	Matriz dinâmica do controlador
\mathbf{B}_K	Matriz de entrada do controlador
\mathbf{C}_K	Matriz de saída do controlador
\mathbf{D}_K	Matriz de transmissão direta do controlador
$\mathbf{x}_{cl}(\mathbf{t})$	Vetor do espaço de estado do sistema em malha fechada
\mathbf{A}_{cl}	Matriz dinâmica do sistema em malha fechada
\mathbf{B}_{cl}	Matriz de entrada do sistema em malha fechada
\mathbf{C}_{cl}	Matriz de saída do sistema em malha fechada
\mathbf{D}_{cl}	Matriz de transmissão direta do sistema em malha fechada
\mathbf{T}	Matriz de transformação
Φ	Conjunto convexo
φ	Parâmetros incertos
$V(\chi)$	Função de Lyapunov
\mathbf{Q}	Matriz simétrica
β_p	Vetor de projeto dos parâmetros da planta
β_c	Vetor de projeto dos parâmetros do controlador
\mathbf{o}	Vetor de restrição de igualdade
\mathbf{e}	Vetor de restrição de desigualdade
$peso$	Peso da mola
γ	Peso específico do material
σ_r	Tensão radial nas paredes do corpo do amortecedor
σ_{θ}	Tensão tangencial nas paredes do corpo do amortecedor
σ_z	Tensão longitudinal nas paredes do corpo do amortecedor
τ_{max}	Tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor
ϕ_{int}	Diâmetro interno do corpo do amortecedor
p_{int}	Máxima pressão no interior do corpo do amortecedor
p_{atm}	Pressão atmosférica
v	Fator de segurança
S_y	Limite de escoamento do material
ζ_{planta}	Função objetivo da planta

i	Contador de iterações
$\mathbf{P}(i)$	Modelo de estados da estrutura da planta
tol	Tolerância
f_{n1}	Frequência natural da massa suspensa
f_{n2}	Frequência natural da massa não suspensa
h_i	Altura da irregularidade
t_p	Tempo de passagem do veículo pela irregularidade
v_v	Velocidade do veículo
l_{lom}	Comprimento da lombada
ω_{ms}	Frequência de ressonância da massa suspensa
ω_{roda}	Frequência de ressonância da roda
F_z	Força de contato entre o pneu e a pista
F_{din}	Força dinâmica
F_{est}	Força estática
g	Aceleração da gravidade
Δ_{pico}	Percentual de redução do valor de pico
$pico$	Valores de pico
Δ_{RMS}	Percentual de redução do valor RMS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	20
1.1 OBJETIVO GERAL	22
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	23
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1 OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL	25
2.2 OTIMIZAÇÃO ITERATIVA	25
2.3 OTIMIZAÇÃO ANINHADA.....	26
2.4 OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA	26
2.5 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
3 SUSPENSÃO VEICULAR	35
3.1 SUSPENSÃO PASSIVA	36
3.1.1 Molas	37
3.1.2 Amortecedores	38
3.2 SUSPENSÃO ATIVA	39
3.2.1 Modelagem matemática do sistema de suspensão ativa	40
3.2.1.1 Projeto da mola.....	45
3.2.1.2 Projeto do amortecedor	47
4 CONTROLE H_∞	49
4.1 CONCEITOS MATEMÁTICOS	49
4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA H_∞	51
4.3 PROBLEMA H_∞ SOB O ENFOQUE DE LMI	54
4.3.1 Desigualdades matriciais lineares	54
4.4 MALHA FECHADA PARA A SÍNTESE DO CONTROLADOR H_∞	55
4.5 NORMA H_∞ COMO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO LMI	57
4.6 INCERTEZAS PARAMÉTRICAS	62
4.6.1 Representação politópica	62

5 PRINCIPAIS ESTRATÉGIAS DE PROJETO INTEGRADO DA PLANTA E DO CONTROLADOR	65
5.1 PARÂMETROS DE PROJETO	65
5.2 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL	69
5.3 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO ITERATIVA.....	70
5.4 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO ANINHADA.....	71
6 CONDIÇÕES DE PROJETO DA SUSPENSÃO AUTOMOTIVA E RESULTADOS PRELIMINARES.....	73
6.1 CONDIÇÕES DE PROJETO DA ESTRUTURA MECÂNICA DO SISTEMA DE SUSPENSÃO	73
6.2 CONDIÇÕES DE PROJETO DO CONTROLADOR H_{∞} DO SISTEMA DE SUSPENSÃO	77
6.3 IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DO PROJETO INTEGRADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO	78
6.4 PROJETO INTEGRADO SEQUENCIAL.....	82
6.4.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto sequencial.....	82
6.5 PROJETO INTEGRADO ITERATIVO.....	86
6.5.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto iterativo	87
6.6 PROJETO INTEGRADO ANINHADO	91
6.6.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto aninhado	91
6.7 COMENTÁRIOS.....	95
7 PROPOSTA DE PROJETO INTEGRADO SEQUENCIAL VIA CONTROLE ROBUSTO POLITÓPICO	101
7.1 ALGORITMO DO PROJETO SEQUENCIAL POLITÓPICO	101
7.2 PROJETO E RESULTADOS	103
7.2.1 Análise comparativa da dinâmica do sistema de suspensão	104
7.3 ANÁLISE CRÍTICA DO MÉTODO.....	108
8 CONCLUSÕES.....	111
REFERÊNCIAS	114

1 INTRODUÇÃO

A demanda em alcançar as rigorosas especificações de desempenho de conforto de condução, estabilidade e segurança dos veículos rodoviários motivaram muitas indústrias automotivas a considerarem o uso de suspensões ativas (TAGHIRAD; ESMAILZADEH, 1998). De acordo com Santos (1998), estes sistemas utilizam atuadores cuja entrada de comando é dada pela saída de um controlador, possibilitando modificar as características dinâmicas do sistema em tempo real. Pela capacidade de modular o fluxo e prover de energia o sistema, a suspensão ativa é capaz de prover as compensações entre os requisitos de desempenho conflitantes (ALYAQOUT; PAPALAMBROS; ULSOY, 2012).

Segundo Crivellaro (2008), os primeiros trabalhos expressivos relacionados ao controle ativo de sistemas de suspensão datam do início dos anos de 1970. Desde então, esta área tem sido objeto de intensa investigação e desenvolvimento e muitos trabalhos têm sido propostos na literatura (APPLEYARD; WELLSTEAD, 1995; HROVAT, 1997; XUE et al., 2011; TSENG; HROVAT, 2015).

O projeto convencional do sistema de suspensão ativa embasa-se em técnicas de projeto dos parâmetros da estrutura mecânica, seguido do projeto de controle, com a finalidade de melhorar o desempenho dinâmico do sistema (DUTRA; BRITO, 2018 apud WUWEI; QIRUI, 2003). Contudo, embora a estratégia convencional tenha sido usada com êxito na maioria dos trabalhos presentes na literatura, ela conduz a sistemas com desempenho ótimo somente para um conjunto nominal de parâmetros. Se os parâmetros da estrutura mecânica forem modificados, o controlador deixa de ser ótimo e precisa ser reprojetoado (SOUBHIA, 2011).

Dessa forma, a principal desvantagem de resolver os problemas de projeto da estrutura mecânica e do controlador da maneira convencional é que este projeto não garante a otimização completa do sistema dinâmico (DUTRA; BRITO, 2018 apud PATIL et al., 2010). Portanto, o método convencional não garante o ideal acoplamento entre o projeto mecânico e o sistema de controle, produzindo resultados sub-ótimos (DUTRA; BRITO, 2018 apud ALLISON; GUO; HAN, 2014).

Estratégias de projeto que gerenciam o acoplamento entre a definição dos artefatos físicos e do sistema de controle estão sendo desenvolvidos e são nomeados métodos de projeto integrado (do inglês *co-design*) (DUTRA; BRITO, 2018 apud ALLISON; GUO; HAN, 2014). Essa abordagem propicia realizar o projeto com base no equilíbrio entre o desempenho da estrutura mecânica e do controlador. Dessa maneira, um método de projeto integrado da estrutura mecânica e dos parâmetros do controlador permite que os valores ótimos possam ser obtidos (DUTRA; BRITO, 2018 apud WUWEI; QIRUI, 2003).

De acordo com Fathy (2003 apud REYER, 2000), existem diversas estratégias de otimização que podem ser aplicadas aos problemas de projeto integrado. As principais estratégias são: a sequencial, a iterativa, a aninhada e a simultânea.

A maioria dos estudos de projeto integrado com aplicação em sistemas de suspensão ativa presentes na literatura simplificou o projeto físico desprezando as restrições de desigualdade não lineares e fazendo com que as variáveis dependentes fossem tratadas como variáveis de otimização independentes. Os problemas de projeto integrado que tratam os aspectos do projeto físico de forma mais realista apresentam as seguintes dificuldades: i) devido à inclusão de restrições de desigualdade não lineares o projeto integrado da planta e do controlador tem acoplamento bidirecional, ou seja, o projeto da planta depende do projeto de controle e vice-versa e, ii) realizam a otimização em relação às variáveis dependentes, o que pode resultar em formulações problemáticas que não são bem representadas (DUTRA; BRITO, 2018 apud ALLISON; GUO; HAN, 2014).

Neste sentido, este trabalho propõe aplicar estratégias de otimização de projeto integrado em sistemas de suspensão automotiva, com o intuito de melhorar o desempenho do sistema em termos de conforto de condução e segurança veicular. Inicialmente, as estratégias de otimização aplicadas no sistema de suspensão automotiva consistem no método sequencial, no método iterativo e no método aninhado. Além disso, para se resolver o problema de projeto dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador H_∞ do sistema de suspensão automotiva é proposta uma estratégia de otimização sequencial com incertezas paramétricas, denominada neste trabalho como Projeto Sequencial Politópico (PSP).

Nesta proposta se pretende tratar o coeficiente de rigidez da mola e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão como variáveis de otimização dependentes, os relacionando através de restrições geométricas, seguindo o mesmo raciocínio de Allison, Guo e Han (2014). Entretanto, diferentemente do trabalho referido, neste estudo considera-se incertezas nos parâmetros da planta.

O algoritmo proposto considera incertezas em dois parâmetros da planta, os quais são o coeficiente de rigidez da mola e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão, sendo que foram selecionados cinco parâmetros do sistema de suspensão para serem otimizados. Os parâmetros de otimização consistem no diâmetro da hélice ϕ_h [m], no diâmetro do fio ϕ_f [m], no passo da mola *passo* [m], no diâmetro do pistão de trabalho ϕ_p [m] e no diâmetro da válvula ϕ_o [m]. Os três primeiros parâmetros são referentes ao coeficiente de rigidez da mola e os dois últimos referentes ao coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão.

A contribuição principal deste trabalho é a realização do projeto integrado de sistemas de suspensão automotiva considerando incertezas paramétricas nos parâmetros da planta para obtenção do controlador robusto H_∞ de realimentação dinâmica de saída. Além disso, tem-se também como contribuição adicional um estudo detalhado de técnicas de projeto integrado e sua aplicação com um enfoque na área mecânica em termos de identificação de parâmetros mais reais e apropriados para construção da mola e do amortecedor da suspensão automotiva.

A aplicação de controladores H_∞ no projeto é interessante, pois eles podem ser usados com a finalidade de manter um determinado desempenho no sistema sob condições adversas tais como erros de modelagem e perturbações externas. Além disso, sua obtenção pode ser feita através da solução de problemas de otimização baseados na utilização de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI)¹, que permite flexibilidade na formulação dos problemas de otimização (SANTOS, 2010).

As incertezas paramétricas, quando aplicadas ao projeto integrado, são interessantes, pois permitem que os parâmetros de projeto da suspensão sofram pequenas variações, e mesmo assim, continuem com o desempenho satisfatório, pelo fato do controlador ser estabilizante para toda faixa considerada.

1.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo aplicar estratégias de otimização no problema de projeto integrado dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador H_∞ de um sistema de suspensão automotiva, com o intuito de melhorar o desempenho do sistema em termos de conforto de condução e segurança veicular.

¹ *Linear Matrix Inequalities* (LMI).

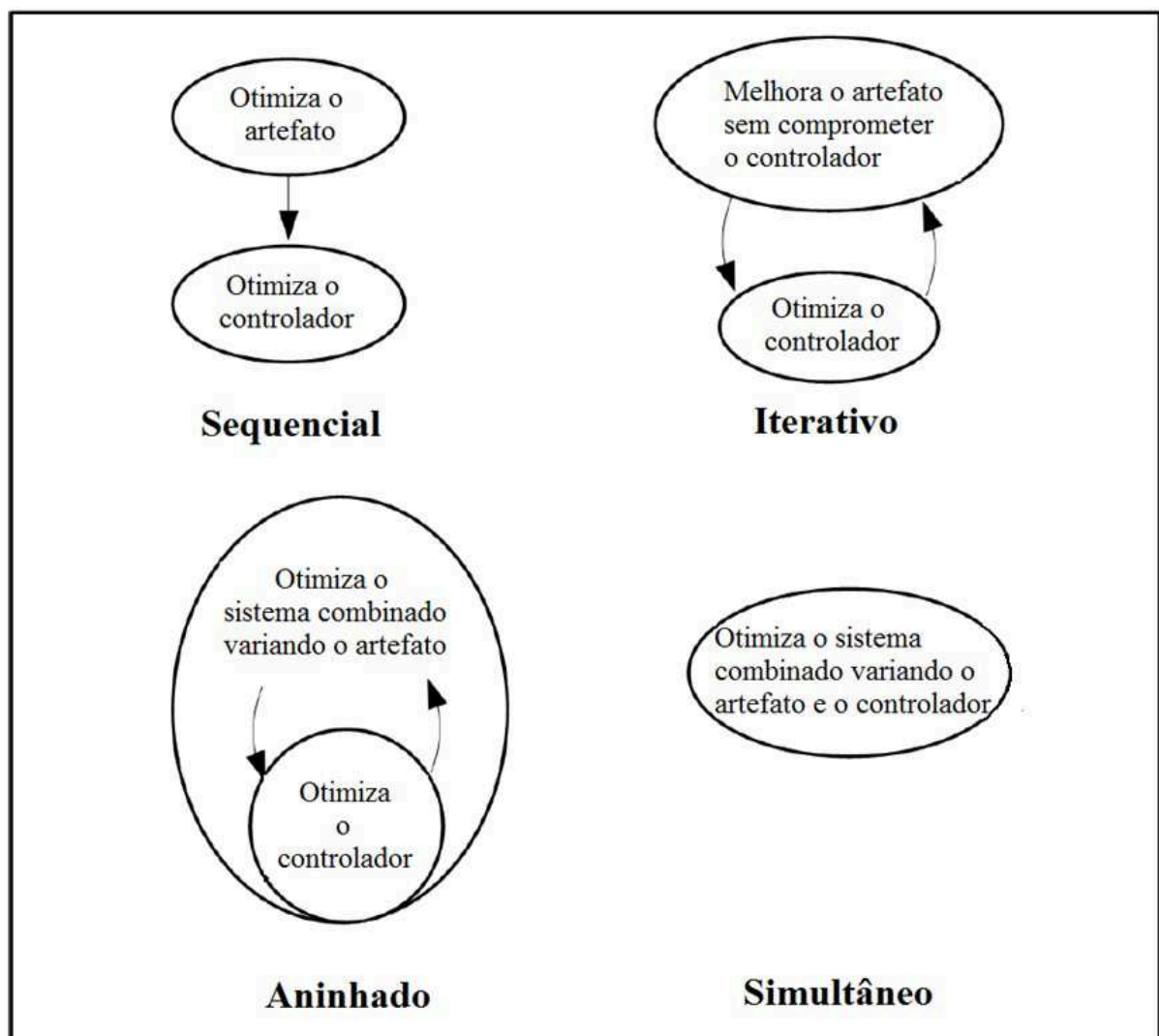
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Estudar os tipos de estratégias de otimização aplicados no projeto integrado;
- ✓ Realizar a modelagem matemática do sistema de suspensão veicular para um quarto de carro;
- ✓ Compreender os conceitos básicos do controle H_∞ e sua abordagem sob o enfoque de desigualdades matriciais lineares;
- ✓ Implementar os métodos de projeto integrado sequencial, iterativo e aninhado para o sistema de suspensão automotiva;
- ✓ Propor o método de projeto integrado denominado Projeto Sequencial Politópico, objetivando considerar incertezas paramétricas nos parâmetros da planta para obtenção do controlador robusto H_∞ de realimentação dinâmica de saída;
- ✓ Simular numericamente o comportamento em malha fechada do sistema de suspensão ativo e do projeto integrado a partir de excitações do tipo lombada e senoidal;
- ✓ Obter as respostas do veículo no domínio do tempo e analisar os resultados com base na aceleração vertical da massa suspensa e na força de contato entre o pneu e a pista.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estudos sobre projeto integrado podem ser encontrados em diversos contextos na literatura. De acordo com Fathy (2003 apud REYER, 2000), existem várias estratégias para o projeto de otimização da planta e do controlador. As principais estratégias podem ser divididas em quatro categorias: estratégias sequenciais, iterativas, aninhadas e simultâneas, conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Estratégias de otimização da planta e do controlador.



Fonte: Adaptado de Fathy (2003, p. 11).

2.1 OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL

A estratégia sequencial é a abordagem convencional para otimizar problemas de projeto integrado, no qual existem pelo menos dois problemas de otimização separados (HERBER, 2014). Na estratégia sequencial o artefato (ou a planta) é otimizado primeiro. No caso do acoplamento unidirecional, a arquitetura do controlador é completamente ignorada na fase do projeto do artefato. Se houver acoplamento bidirecional, assumem-se determinados valores para as variáveis do projeto de controle, que são considerados parâmetros na otimização inicial. Concluído o projeto do artefato, as variáveis de projeto são tratadas como parâmetros no projeto do controlador (PETERS, 2010).

De acordo com Fathy (2003), os problemas de otimização da planta e do controlador eram resolvidos, tradicionalmente, de forma sequencial. No entanto, fazendo uso dessa técnica de otimização, é possível encontrar um projeto ótimo somente se não houver acoplamento entre o artefato e o controlador. Em sistemas com acoplamento unidirecional, a solução otimizada é ótima para o objetivo do artefato, porém, o mesmo não ocorre para o objetivo de controle, podendo até não ser possível encontrar uma solução factível para o projeto do controlador. Em sistemas com acoplamento bidirecional, a solução otimizada pode não ser ótima para ambas as funções objetivo (PETERS, 2010).

2.2 OTIMIZAÇÃO ITERATIVA

Nesta estratégia a otimização é resolvida iterativamente, realizando primeiro o projeto do artefato, sem comprometer o projeto do controlador. A seguir, o projeto do controlador é realizado com os parâmetros do artefato congelados. Este ciclo ocorre até que a convergência seja alcançada. Nesta abordagem, a solução de cada iteração torna-se o ponto inicial da nova iteração (PETERS, 2010 apud GRIGORIADIS; SKELTON, 1998).

Sendo assim, o problema de otimização do artefato e do controlador é subdividido em um problema de reprojeto do artefato e um problema de reprojeto do controlador, e estes dois subproblemas são resolvidos iterativamente até a convergência. Se ambos os subproblemas forem convexos, cada etapa de otimização resolverá um subproblema de otimização convexa. Neste caso, para cada etapa de otimização existirá um ótimo global (FATHY, 2003).

O projeto integrado iterativo pode ser formulado como um problema multiobjetivo cuja solução é um conjunto de Pareto, que consiste em um conjunto de pares

artefato/controlador para o qual o desempenho do artefato não pode ser aprimorado sem comprometer o desempenho do controlador e vice-versa (FATHY, 2003 apud PAPALAMBROS; WILDE, 2000). Uma das formas de gerar pontos no conjunto de Pareto é formular um problema de otimização cujas variáveis incluam as variáveis de projeto do artefato e do controle, as restrições sejam a totalidade das restrições individuais do artefato e do controlador e o objetivo seja uma função objetiva escalar que substitui o vetor de objetivos do artefato e do controlador. No entanto, mesmo que os subproblemas de otimização do artefato e do controlador para um determinado sistema sejam convexos, montá-los em um problema de otimização desta maneira pode resultar em perda de convexidade (FATHY, 2003).

2.3 OTIMIZAÇÃO ANINHADA

A estratégia de otimização aninhada (ou de dois níveis) requer duas rotinas de otimização: um laço externo que resolva o problema de projeto ótimo do artefato e um laço de otimização interno que identifica o controle ótimo para cada projeto do artefato considerado pelo laço exterior (DUTRA; BRITO, 2018 apud HERBER, 2014). Os resultados de cada iteração se tornam o ponto de partida para a próxima iteração, sendo este processo repetido até a convergência (PETERS, 2010).

A principal vantagem da abordagem aninhada é a capacidade de empregar os métodos de projeto de controle existentes para resolver o problema do laço interno, sem a complexidade de gerenciar variáveis de projeto do artefato (DUTRA; BRITO, 2018 apud HERBER, 2014). Tem sido demonstrado na literatura que, no caso do acoplamento unidirecional, esta abordagem produz soluções ótimas para o sistema (PETERS, 2010 apud FATHY, 2003), porém no caso do acoplamento bidirecional não é capaz de produzir soluções ótimas (PETERS, 2010 apud REYER, 2000).

2.4 OTIMIZAÇÃO SIMULTÂNEA

O projeto integrado simultâneo otimiza as variáveis do artefato e do controle na mesma formulação de otimização. Ou seja, o algoritmo de otimização simultâneo tenta otimizar uma função combinada de objetivo do artefato/controlador, variando os projetos do artefato e do controlador simultaneamente, sujeito ao conjunto combinado de restrições do artefato e do controlador (FATHY, 2003; DUTRA; BRITO, 2018 apud HERBER, 2014).

Esta abordagem tem a vantagem de, se uma solução for encontrada, tal sistema é ótimo. Porém, esta estratégia tem algumas desvantagens. A otimização não pode ser resolvida até que os objetivos do artefato e do controle tenham sido formulados, isto requer que a escolha da arquitetura do controle seja feita no início do processo de projeto (PETERS, 2010).

Mesmo que os subproblemas de otimização do artefato e do controlador individuais sejam convexos, os problemas de otimização combinada geralmente são não convexos. Além disso, o problema combinado de otimização do artefato/controlador é frequentemente apresentado como um problema de otimização estático/variacional, no qual o projeto do artefato é expresso em termos de variáveis que são invariantes no tempo, e o projeto do controlador descrito em termos de variáveis que são funções do tempo, como os vetores de entrada de estado e de controle (FATHY, 2003).

A otimização simultânea também é computacionalmente intensiva devido ao seu tamanho maior. Por essas razões, a solução simultânea dos problemas de otimização combinados é, em geral, complexa (FATHY, 2003; PETERS, 2010).

2.5 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em Niewhoener e Kaminer (1996), o problema de projeto integrado dos parâmetros de uma aeronave com o projeto do sistema de controle H_∞ foi reduzido a um problema de otimização restrita, onde o custo a ser minimizado foi uma função linear dos tamanhos das superfícies de controle da aeronave e o conjunto de restrições foi descrito por desigualdades matriciais lineares. O algoritmo iterativo baseado em LMI consistia em cada iteração para uma planta fixa encontrar um controlador factível e então para um controlador fixo minimizar a função custo sobre os parâmetros da planta. A solução numérica proposta pelos autores resultou em tamanhos reduzidos das superfícies da aeronave e um controlador de realimentação de estado que atendeu aos requisitos de desempenho para uma única condição de voo. No entanto, as propriedades de convergência não puderam ser garantidas para o algoritmo proposto.

Em Fathy et al., (2001), as condições necessárias de otimalidade do projeto integrado da planta e do controlador para as estratégias sequenciais, aninhadas e iterativas foram derivadas. No artigo foi considerado que todos os estados estavam acessíveis para medição e que os objetivos de otimização da planta e do controlador eram separáveis. Os autores mostraram que o conjunto das condições para a otimização combinada não consiste na união dos conjuntos de condições para otimização da planta e do controlador. Esta diferença

consiste no termo de acoplamento, cuja expressão analítica quantifica o acoplamento entre os problemas de otimização da planta e do controlador considerando a influência do projeto da planta no objetivo de controle ótimo. No entanto, a formulação desenvolvida pelos autores pressupõe que há somente o acoplamento unidirecional.

Yang e Lum (2003) continuaram o trabalho desenvolvido por Niewhoener e Kaminer (1996), na busca para o problema de projeto integrado dos parâmetros da aeronave e do controlador H_∞ de realimentação de estado. No artigo de Yang e Lum (2003), dois algoritmos iterativos baseados em LMI foram desenvolvidos para obter soluções para o problema, sendo que os algoritmos propostos garantiram convergência. Porém, apenas a realimentação de estados foi considerada.

O problema dinâmico de realimentação de saída que satisfaz o requisito de desempenho H_∞ de malha fechada foi tratado por Chen et al., (2003). O projeto integrado simultâneo da suspensão semi-ativa foi realizado com base em algoritmos genéticos (GA) e controle H_∞ de realimentação de saída, também usando a abordagem LMI. O sistema de suspensão semi-ativa foi projetado com o objetivo de satisfazer aos requisitos mutuamente conflitantes de melhoria do conforto de condução e segurança veicular. Para comprovar a eficácia do método proposto foram realizadas simulações computacionais e uma análise experimental foi proposta para verificar a melhoria do conforto de condução. As simulações mostraram que o projeto integrado do sistema de suspensão semi-ativo conduziu a melhores resultados em termos de conforto de condução e segurança veicular. Além disso, os resultados experimentais comprovaram que, de fato, o método de projeto integrado proposto conduziu a melhores resultados em termos de conforto.

Em Fathy et al., (2003), o projeto integrado aninhado foi aplicado ao problema de otimização de uma suspensão ativa. Foram selecionados dois parâmetros da planta para serem otimizados, sendo estes a rigidez da mola da suspensão e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão. O vetor de ganho de realimentação foi selecionado como sendo a variável de otimização do controlador. No projeto considerou-se o controlador Regulador Quadrático Linear (LQR)², com realimentação estática de estados, tendo como objetivo de otimização a soma ponderada da aceleração da massa suspensa, deflexão do pneu, curso da suspensão e força de controle ativa. Foram realizadas simulações no domínio do tempo e da frequência, as quais mostraram que o projeto integrado aninhado apresentou desempenho superior em comparação com as suspensões passivas e ativas otimizadas sequencialmente. No

² *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

entanto, a suspensão aninhada superou a suspensão otimizada sequencialmente por apenas 2,35% em termos de desempenho global.

Fathy, Papalambros e Ulsoy (2003) continuaram o trabalho desenvolvido por Fathy et al., (2003), apresentando pela primeira vez um estudo do acoplamento entre otimização da planta, controle e observadores. O acoplamento trilateral foi analisado através de um estudo de caso de projeto integrado aninhado da suspensão ativa. A estratégia aninhada consistiu em dois laços de otimização: um externo que otimizou o projeto da planta e um interno que encontrou o par observador/controlador ótimo para cada planta projetada pelo laço externo. Dessa forma, a otimização foi realizada para as variáveis de projeto da planta, do observador e do controlador. O laço interno consistiu em um problema de controle ótimo Gaussiano Quadrático Linear (LQG)³, que foi particionado em dois subproblemas de otimização, um referente ao observador e o outro ao controlador LQR . Com base no estudo de caso, os autores concluíram que a escolha entre a otimização sequencial e a aninhada depende da magnitude do acoplamento do problema, sendo que o projeto aninhado é atraente somente quando o acoplamento é forte. Caso contrário a estratégia sequencial conduz a resultados satisfatórios de forma mais rápida.

O problema dinâmico de realimentação de saída que satisfaz o requisito de desempenho H_∞ de malha fechada foi tratado também por Liao, Lum e Wang (2005a), usando uma abordagem LMI iterativa. No artigo, foi considerado o modelo da planta com incertezas politópicas e a otimização de um único parâmetro da planta. Neste caso, onde somente um único parâmetro da planta teve que ser determinado, o problema de otimização do parâmetro foi reformulado como um problema de autovalor generalizado. De acordo com os autores esta abordagem não pode garantir a obtenção dos parâmetros ótimos da planta. Sendo assim, com o valor do parâmetro subótimo da planta, os parâmetros do controlador foram obtidos. No entanto, os autores não abordaram o problema de projeto de otimização da planta/controlador integrado para o caso de otimização de vários parâmetros da planta.

Em um estudo subsequente, Liao, Lum e Wang (2005b), investigam o problema de otimização do artefato e do controlador de realimentação dinâmica de saída, que satisfaz o desempenho H_2/H_∞ , com vários parâmetros da planta a serem otimizados. No artigo também foi considerado o modelo da planta com incertezas politópicas e o uso de um algoritmo iterativo baseado em LMIs. O problema de projeto dos parâmetros da planta e dos parâmetros do controlador foram separados em dois problemas de otimização. O projeto da planta

³ *Linear Quadratic Gaussian (LQG).*

consistiu em projetar, através do problema de autovalor generalizado, um único parâmetro da planta, enquanto mantinham em valores nominais os demais parâmetros, e em seguida, este procedimento era repetido até que todos os parâmetros da planta fossem definidos. Com os valores dos parâmetros subótimos da planta, os parâmetros do controlador foram obtidos. No entanto, de acordo com os autores, esta abordagem não pode garantir a obtenção dos parâmetros ótimos do sistema.

Em Velni, Meisami-Azad e Grigoriadis (2009), o projeto integrado simultâneo foi aplicado em sistemas estruturais, com o objetivo de determinar os valores dos parâmetros de amortecimento da estrutura e o ganho de controle de realimentação de saída. O problema de otimização dos parâmetros da planta e dos controladores H_2 e H_∞ foram tratados utilizando a abordagem LMI. O método de projeto integrado proposto foi aplicado primeiramente no modelo de uma estrutura de construção isolada com cinco andares, considerando o controlador H_∞ e na segunda simulação computacional, o método foi aplicado em um sistema estrutural aeroespacial de grande porte, considerando o controlador H_2 . Os autores comprovaram que o método de projeto integrado proposto pode ser aplicado em sistemas de grande escala, uma vez que as simulações conduziram a resultados satisfatórios.

Em Hiramoto, Mohammadpour e Grigoriadis (2009), o problema de projeto integrado dos parâmetros de amortecimento da planta de sistemas simétricos e do controlador H_2 e H_∞ de realimentação estática de saída foi estendido para incluir também como um objetivo de projeto adicional o posicionamento dos sensores e atuadores do sistema. Foi desenvolvido um algoritmo iterativo baseado em LMI, obtendo nas simulações uma solução ótima localmente para o problema de controle modal de um sistema de vigas flexíveis.

Paiva (2009) realizou o projeto integrado dos parâmetros da estrutura e do controlador de vibração de uma viga flexível usando as estratégias de otimização passiva estrutural, que consiste em uma estratégia de controle passivo com otimização apenas estrutural, otimização iterativa e otimização simultânea. O projeto foi baseado na minimização da norma H_∞ , onde se considerou o controlador de realimentação dinâmica das saídas e a formulação foi desenvolvida em termos de LMIs. Para a resolução dos problemas de otimização foi utilizado o comando *hinflmi* do *Matlab*. As estratégias de otimização foram aplicadas em quatro tipos de viga flexíveis e verificou-se que o algoritmo simultâneo foi o que apresentou maior redução no valor da norma H_∞ , no entanto, ele conduziu ao pior desempenho no quesito de tempo de processamento.

Em Soubhia (2011), o projeto integrado de uma suspensão ativa usando a estratégia de otimização iterativa e simultânea foi realizado. Três parâmetros da planta foram selecionados para serem otimizados: o coeficiente de rigidez da mola da suspensão, o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão e o coeficiente de rigidez do pneu. No projeto considerou-se o controlador ótimo *LQR* de realimentação completa de estados. O índice de desempenho considerado foi um índice quadrático, que levou em conta os requisitos de conforto de condução, deformação do pneu e espaço de trabalho da suspensão. As estratégias foram resolvidas utilizando a função *fmincon* do *Matlab*. Verificou-se que os menores valores da função custo foram obtidos com a estratégia simultânea, no entanto, a estratégia iterativa conduziu a valores próximos. Com relação ao desempenho do sistema em malha fechada, observou-se que a otimização simultânea apresentou os melhores resultados.

Em Alyaqout, Papalambros e Ulsoy (2011) foi realizado o projeto integrado de um motor elétrico DC, considerando as estratégias de otimização sequencial, iterativa e simultânea. No artigo foi examinada a relação entre o nível de incerteza e a força de acoplamento entre o artefato robusto e o controle robusto. As otimizações foram realizadas fazendo uso da função *fmincon* do *Matlab*. Considerando incertezas nos modelos, os resultados mostraram que a estratégia sequencial apresentou a menor robustez quando comparada com as demais estratégias. Apesar de possuir um tempo computacional eficiente comparado às estratégias iterativa e simultânea, os resultados que a otimização sequencial conduziu foram altamente dependentes dos valores iniciais dos parâmetros estabelecidos para começar o projeto. A estratégia iterativa produziu maior robustez em comparação com a estratégia sequencial. No entanto, devido à incerteza, o esforço computacional aumentou consideravelmente e exigiu mais iterações até a convergência. A estratégia simultânea conduziu ao melhor desempenho e, apesar de aumentar o esforço computacional em relação à estratégia sequencial, permaneceu menor do que na estratégia iterativa. Os autores concluíram que o aumento do nível de incerteza tende a aumentar o acoplamento entre o artefato e o controlador. Além disso, se a estratégia iterativa for utilizada, os autores recomendam que os modelos sejam bem representados na prática, ou seja, possuam baixa incerteza, a fim de obter bons resultados.

Alyaqout, Papalambros e Ulsoy (2012) propõem uma metodologia de projeto combinado sequencial e controle robusto aplicado ao problema de otimização de uma suspensão ativa tendo como objetivo investigar a relação entre o acoplamento e robustez resultante da variação de diferentes parâmetros da suspensão. Foram selecionados dois

parâmetros da planta para serem otimizados, sendo estes o coeficiente de rigidez da mola da suspensão e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão. Consideraram-se também incertezas associadas à massa suspensa, que é um dos parâmetros de projeto da planta. O vetor de ganho de realimentação de estados foi selecionado como sendo a variável de otimização do controlador. Com base em simulações, os autores mostraram que o acoplamento entre o projeto da planta e do controlador robusto aumenta à medida que o nível de incerteza aplicado na planta aumenta. Mostraram também que os sistemas de suspensão com grande coeficiente de rigidez do pneu tende a ter robustez aprimorada e grande acoplamento. Além disso, os sistemas de suspensão com pequena massa não suspensa tendem a aumentar a robustez quanto menor for o acoplamento. No entanto, os autores consideraram somente o modelo de um quarto de carro para realizar a análise e também a inclusão de incertezas em apenas uma variável de parâmetro da planta.

Patil, Filipi e Fathy (2012) propõem uma abordagem que usa o termo de acoplamento derivado em Fathy et al., (2001) para quantificar o impacto das variáveis de projeto da planta no custo ótimo de controle do projeto combinado simultâneo de um feixe cantilever (feixe ancorado em apenas uma das extremidades) e seu controlador. O problema de otimização da planta tinha como objetivo obter uma estrutura com a massa total mínima do feixe e o problema de otimização do controlador foi representado como um problema *LQR*. O problema combinado foi resolvido utilizando a função *fmincon* do *Matlab*. Os resultados mostraram que a abordagem proposta apresentou melhorias computacionais significativas em relação à estratégia de otimização sequencial. Além disso, mostrou-se também que a redução no custo computacional torna-se mais evidente à medida que o número de variáveis de projeto da planta aumenta.

Medeiros (2013) propôs uma extensão ao trabalho de Paiva (2009), com o objetivo de estudar a teoria sobre modelagem e otimização do referido trabalho, adicionando a técnica de algoritmos genéticos para a resolução do problema de otimização simultânea. A estratégia simultânea proposta foi aplicada em um estudo de caso de uma viga engastada, visando à otimização da base de sua seção transversal e a minimização da norma H_∞ de malha fechada. Tal estratégia foi comparada com a otimização passiva estrutural e otimização iterativa, conforme derivado por Paiva (2009). Com base nos resultados, comprovou-se que a redução da norma H_∞ no projeto simultâneo foi de fato verificada. No entanto, a otimização simultânea demonstrou necessidade de maiores esforços de controle do que as demais abordagens, além disso, foi mais custosa nas simulações computacionais.

Allison, Guo e Han (2014) realizam o projeto integrado de uma suspensão ativa usando uma otimização dinâmica simultânea conhecida como transcrição direta. Dois parâmetros da planta foram selecionados para serem otimizados: o coeficiente de rigidez da mola da suspensão e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão. Porém, diferentemente dos outros trabalhos, os autores realizaram o projeto tratando as variáveis de otimização da planta dependentes, os relacionando através das variáveis geométricas independentes de projeto da mola e do amortecedor. Para isso, os autores desenvolveram a modelagem matemática da mola e do amortecedor da suspensão, juntamente com suas respectivas restrições físicas. Os requisitos do controlador foram selecionados como sendo a segurança veicular, o conforto de condução e a força de controle. A abordagem de otimização simultânea foi resolvida utilizando um algoritmo de ponto interior do *toolbox* de otimização do *Matlab*. Através de uma comparação da abordagem proposta com a estratégia de otimização sequencial, os autores concluíram que, apesar do problema de otimização simultânea ser extenso, ele tem vantagens sobre a abordagem de projeto sequencial, pois conduziu a melhores resultados em termos de projeto.

Em Herber e Allison (2017), as formulações e as condições de otimalidade para os projetos combinados simultâneos e aninhados foram examinados e uma comparação das estratégias, com base na literatura, foi fornecida. Os autores comentam que, em alguns casos, o tamanho e a complexidade das formulações simultâneas pode tornar a estratégia inviável, sendo melhor aplicar a estratégia de otimização aninhada. Em contrapartida, em alguns problemas, tal estratégia pode ser o único método viável devido à complexidade ou a impossibilidade de separar os domínios da planta e do controlador. Os autores expressam a dificuldade em fazer recomendações gerais, pelo fato de não ser comum para o estudo de projeto integrado comparar as estratégias simultâneas e aninhadas para um mesmo problema de projeto específico. Isso ocorre, pois, em grande parte dos estudos de projeto integrado, apenas uma estratégia é necessária se estiver produzindo os resultados desejados.

Em Hofman e Janssen (2017) foi realizado o projeto integrado do sistema de transmissão e do sistema de controle para um veículo elétrico, com o objetivo de minimização do consumo de energia. Os autores selecionaram dois sistemas de transmissão, uma engrenagem fixa e uma transmissão continuamente variável (CVT). O problema integrado foi formulado como um problema de otimização aninhado, onde o laço externo otimizou os parâmetros do projeto da transmissão e no laço interno a otimização de controle foi executada. O problema do laço externo foi resolvido a partir da função *fminsearch* do *Matlab*, e o problema do laço interno pelo algoritmo *Bocop*, que consiste em um método direto de

solução. Os resultados das simulações mostraram que o método de projeto aninhado proposto tem potencial para melhorar o consumo de energia. Ainda, segundo os autores, quando os sistemas têm forte acoplamento entre os parâmetros da planta e os parâmetros de controle, as abordagens de projeto sequencial e iterativo podem não conduzir a soluções ótimas globais, quando poucas iterações são executadas.

Herber e Allison (2018) desenvolveram o projeto integrado aninhado de um sistema de suspensão ativa considerando mudanças de arquitetura dos elementos da suspensão, ou seja, consistiu em um projeto de três níveis, que englobou arquitetura, planta e controle combinados. O primeiro nível consiste em definir e fornecer as arquiteturas candidatas para os outros níveis. O próximo nível recebe as arquiteturas candidatas e executa as tarefas do laço externo do projeto integrado aninhado para o projeto da planta. Com a planta candidata, o terceiro nível, que consiste no laço interno da abordagem aninhada, realiza o projeto do controlador. Os autores obtiveram 4374 arquiteturas candidatas à suspensão ativa e pelos resultados obtidos demonstraram que as mudanças na arquitetura da suspensão resultam em melhor desempenho, porém ao custo de maior complexidade mecânica.

Neste trabalho propõem-se aplicar as estratégias de otimização sequencial, iterativa e aninhada no projeto integrado de sistemas de suspensão automotiva, com o intuito de melhorar o desempenho do sistema em termos de conforto de condução e segurança veicular. Além disso, para se resolver o problema de projeto dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador H_∞ do sistema de suspensão automotiva é proposta uma estratégia de otimização sequencial com incertezas paramétricas, denominada como Projeto Sequencial Politópico (PSP).

3 SUSPENSÃO VEICULAR

A suspensão veicular existe desde os primórdios da indústria automotiva, antes mesmo da invenção do primeiro veículo automotor. No princípio, o sistema de suspensão era composto basicamente por uma mola, porém, ao longo do tempo, foi adicionado um elemento amortecedor. Nos anos de 1930, foram adotados sistemas com baixo amortecimento, que garantiam aos ocupantes uma considerável sensação de conforto. No entanto, com o surgimento dos veículos mais velozes e potentes, o número de acidentes começou a aumentar nos anos de 1940. Nesse momento, os projetos de sistemas de suspensão passaram a não se preocupar somente com o conforto, mas também com a segurança e estabilidade veicular (CRIVELLARO, 2008; DUTRA, 2016).

Segundo Gillespie (1992), as funções principais de um sistema de suspensão são: isolar os passageiros das perturbações rodoviárias a fim de proporcionar boa qualidade de passeio; manter os pneus em contato com o solo com variações mínimas de carga para garantir boa aderência à estrada; reagir às forças de controle geradas nos pneus, como forças longitudinais (aceleração e frenagem), forças laterais (esterçamentos), torques de frenagem e direção; e resistir à rolagem do chassi.

Em síntese, diz-se que os conceitos de segurança e conforto devem sempre acompanhar o projeto de suspensões automotivas. Dessa forma, os primeiros fabricantes de automóveis começaram a procurar soluções para os problemas de conforto de condução e segurança veicular (ANDRADE, 2001).

No entanto, segundo Dutra (2016 apud SENTHILKUMAR, 2012), uma suspensão rígida e amortecida é capaz de produzir boa movimentação e controle do veículo em várias condições de funcionamento, pois é capaz de garantir contato constante das rodas com o solo, porém transfere grande parte das irregularidades da estrada para a carroceria. Em contrapartida, uma suspensão suave e levemente amortecida garante alto nível de conforto, mas reduz significativamente a estabilidade do veículo em curvas e manobras de mudança de pista. Verifica-se, portanto, que em projetos de suspensão automotiva, os conceitos conforto e segurança são conflitantes, uma vez que a melhoria de um conceito gera a deterioração do outro (DUTRA, 2016 apud PICADO, 1998).

De acordo com Andrade (2001), diferentes sistemas de suspensão satisfazem os critérios de conforto e segurança em diferentes graus. Pode-se classificar as suspensões em ordem ascendente de desempenho desejado como: suspensões passivas, semi-ativas e ativas. As suspensões passivas e ativas serão abordadas com mais detalhes nas próximas seções.

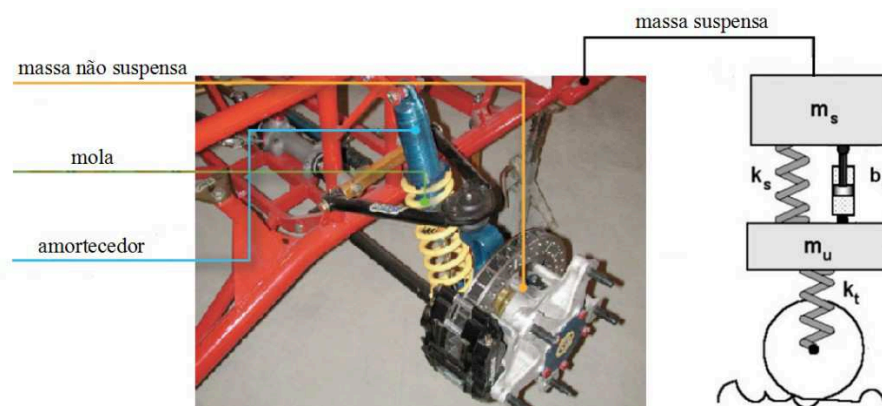
3.1 SUSPENSÃO PASSIVA

Suspensão passiva é aquela em que as propriedades dos componentes mecânicos não podem ser modificadas em tempo real através de sinais externos. Neste sistema de suspensão não é possível a adição de energia externa para exercer qualquer tipo de ação de controle. A vibração é controlada apenas armazenando ou dissipando a energia mecânica associada ao movimento, e para isso, ela utiliza elementos convencionais como molas e amortecedores trabalhando mecanicamente entre a massa suspensa e a massa não suspensa (PICADO, 1998; ANDRADE, 2001; DUTRA, 2016).

Apesar do avanço tecnológico alcançado no projeto e desenvolvimento dos sistemas de suspensão semi-ativa e ativa, as suspensões passivas demonstram ser bastante competitivas, devido ao baixo custo, confiabilidade, simplicidade de montagem e manutenção. São as suspensões mais utilizadas pela indústria automotiva, pois têm apresentado a melhor relação entre o custo do sistema e a satisfação dos anseios de conforto e segurança aos ocupantes do veículo (PICADO, 1998; ANDRADE, 2001; CRIVELLARO, 2008 apud MOTTA; ZAMPIERI, 2005).

Os principais componentes do sistema de suspensão passiva são as molas e os amortecedores, os quais podem ser visualizados na Figura 2.

Figura 2 – Componentes da suspensão passiva e representação dos principais parâmetros.



Fonte: Adaptado de Pereira (2011, p. 22) e Martins et al. (2006, p. 87).

No modelo de um quarto de carro, ilustrado na Figura 2, a massa suspensa m_s representa um quarto da massa da carroceria do veículo, designando toda massa sustentada ou suportada pelas molas (GILLESPIE, 1992). Segundo Pereira (2011), o termo massa não suspensa m_u é usado para definir os componentes do veículo que estão diretamente sujeitos aos choques da superfície da estrada, os quais incluem os eixos, as rodas, os cubos de rodas e partes do sistema de direção.

As massas não suspensas estão separadas da superfície da estrada pelos pneus, que funcionam como pequenas molas pneumáticas, com coeficiente de rigidez k_t . Além disso, as massas não suspensas estão conectadas às massas suspensas através dos componentes do sistema de suspensão: mola com coeficiente de rigidez k_s e amortecedor com coeficiente de amortecimento b_s (PEREIRA, 2011).

Dessa forma, a vibração da massa não suspensa é transmitida para a massa suspensa através da mola, e uma vez que a vibração de elevada frequência da massa não suspensa é convertida em vibração de baixa frequência pelos elementos da suspensão, as duas massas vibram em frequências diferentes (PEREIRA, 2011).

3.1.1 Molas

De acordo com Pereira (2011), “qualquer elemento mecânico, metálico ou não, pode ser considerado uma mola”. Segundo Andrade (2001), as molas são o elo flexível que permite ao corpo do veículo trafegar relativamente tranquilo enquanto os pneus e a suspensão acompanham os buracos e impactos da estrada. Assim sendo, as molas têm papel fundamental para absorver as irregularidades da estrada, suportar o peso do veículo e manter a distância do solo durante o percurso (PEREIRA, 2011 apud PASSARINI, 2009).

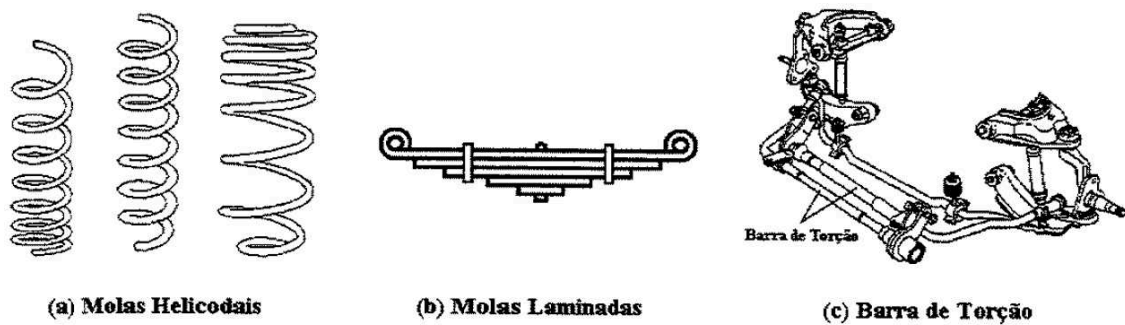
De acordo com Pereira (2011), é possível encontrar três concepções principais de molas para veículos, que consistem em molas helicoidais, molas laminadas e molas de torção, conforme ilustrado na Figura 3. As molas helicoidais são as mais utilizadas nos veículos por serem de fácil montagem e pela forma dimensional que ocupa pouco espaço na carroceria (PEREIRA, 2011 apud MAIA, 2002). Segundo Andrade (2001), na mola helicoidal não ocorre atrito interno e, devido a isso, esta mola proporciona um percurso mais suave.

Nas molas laminadas, em contrapartida, há a presença de atrito interno pelo fato deste tipo de mola ser construída por certo número de feixes de lâminas de aço superpostas de comprimento decrescente e mantidas unidas através de um parafuso central. As molas laminadas têm a vantagem de serem de mais simples fabricação em relação às molas

helicoidais. Além disso, outra vantagem da mola laminada é a obtenção facilitada da ligação entre o eixo e o chassi longitudinalmente e transversalmente (PEREIRA, 2011 apud ALMEIDA, 2002). No entanto, sua desvantagem é que, devido a sua alta histerese quando submetida a pequenas vibrações, o tipo construtivo da mola laminada gera alta transmissibilidade aos condutores dos veículos e seus passageiros, comprometendo o conforto de condução (MONDADORI, 2017).

A barra de torção pode ter um formato reto ou ser em forma de L. Uma das suas extremidades é montada firmemente no chassi, enquanto a outra extremidade é fixada na suspensão. Durante o movimento do veículo, a barra de torção irá se torcer, exercendo dessa maneira a ação da mola (ANDRADE, 2001).

Figura 3 – Tipos de molas de sistemas de suspensão passiva.



Fonte: Andrade (2001, p. 25).

3.1.2 Amortecedores

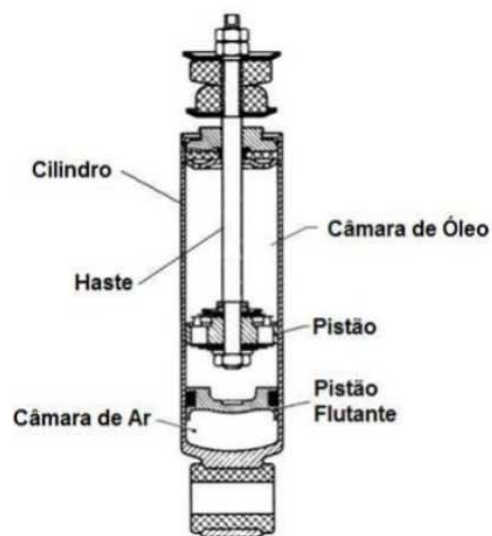
Segundo Pereira (2011 apud MAIA, 2002), o amortecedor é o componente responsável pela dissipação da energia oriunda das irregularidades da estrada e absorvida pelas molas. Ele é montado associado às molas e tem a função de, através das rodas do veículo, absorver as vibrações do sistema.

No momento em que as rodas do veículo passam sobre um obstáculo, as rodas podem oscilar para cima ou para baixo devido à ligação elástica que mantém com o chassi ou com a carroceria. Essa oscilação situa-se entre dois valores máximos fixados pelo projeto e delimitados pelos designados limitadores de curso. As molas continuam oscilando por certo tempo, mesmo após o término da passagem do veículo pelo obstáculo. Sem a presença de um elemento dissipativo na suspensão a absorção dessas oscilações ficaria confinada aos atritos da suspensão e à geração de calor na mola. Dessa forma, sem a presença de amortecedores

adequados, a roda poderia perder o contato com o terreno, contra o qual poderia se chocar com violência (ANDRADE, 2001).

Os amortecedores utilizados nos veículos são mecanismos hidráulicos sensíveis a variações de velocidade, ou seja, quanto mais rápido a suspensão se mover, maior será a resistência oferecida pelo amortecedor, conforme ilustrado na Figura 4. O princípio de funcionamento do amortecedor se dá através da dissipação de energia. Para que ocorra essa dissipação é necessário que o pistão se mova no interior de um cilindro fechado agindo sobre um fluido. À medida que o veículo trafega pelas irregularidades da estrada, o fluido é forçado a passar por pequenos orifícios dentro do pistão para ir de uma câmara à outra. Essa passagem é controlada fazendo com que apenas pequena quantidade de fluido consiga fluir pelo pistão, desacelerando o mesmo, que por sua vez, desacelera a mola e a suspensão (ANDRADE, 2001; PEREIRA, 2011).

Figura 4 – Amortecedor hidráulico.



Fonte: Mondadori (2017, p. 13).

3.2 SUSPENSÃO ATIVA

Os projetos de suspensão ativa têm sido amplamente analisados desde os anos de 1970 como alternativa para solucionar o conflito inerente entre os requisitos de desempenho de conforto de condução e segurança veicular. Segundo Dutra (2016 apud ANDRADE, 2001), a suspensão ativa possibilita modificar as características dinâmicas do sistema em tempo real através de forças de controle geradas pelos atuadores, e ao contrário da suspensão passiva que

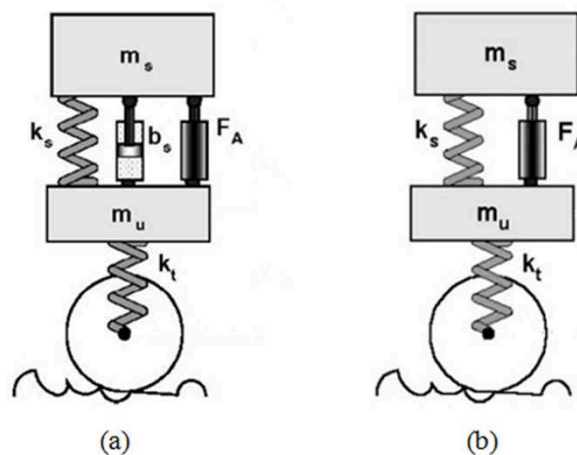
só pode armazenar ou dissipar energia, é possível modular o fluxo e prover de energia o sistema.

Este sistema é caracterizado por um atuador embutido que pode fornecer força ativa através de algoritmos de controle usando dados de sensores ligados ao veículo. O atuador é posicionado entre o corpo do veículo e o eixo, sendo responsável por exercer os movimentos verticais, elevando ou abaixando a carroceria do veículo. Sendo assim, ele é o elemento fundamental no sistema de suspensão ativa (DUTRA, 2016).

De acordo com Dutra (2016 apud XUE et al., 2011), a suspensão ativa pode ser classificada, em relação ao tipo de componente de atuação, em: suspensão eletro-hidráulica, pneumática ou eletromagnética. A suspensão eletro-hidráulica ou pneumática é composta por um atuador eletro-hidráulico ou pneumático em paralelo com uma mola e um amortecedor, conforme mostrado na Figura 5(a). A suspensão eletromagnética consiste de um atuador eletromagnético e uma mola, ambos trabalhando mecanicamente em paralelo, conforme mostrado na Figura 5(b).

A descrição e o princípio de funcionamento dos atuadores eletro-hidráulicos, pneumáticos e eletromagnéticos podem ser consultados em Dutra (2016).

Figura 5 – Modelo de um quarto de carro do sistema de suspensão ativa: (a) eletro-hidráulica ou pneumática e (b) eletromagnética.



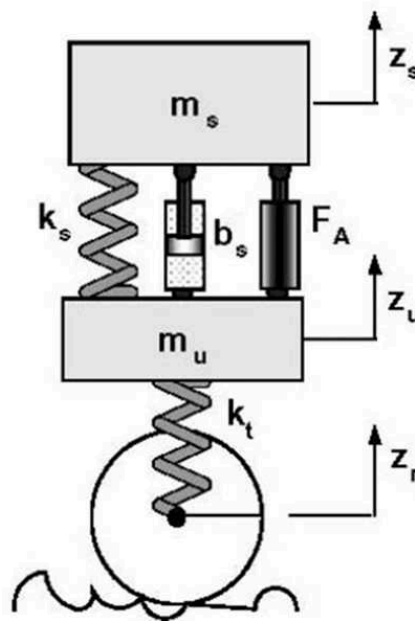
Fonte: Adaptado de Martins et al. (2006, p. 87).

3.2.1 Modelagem matemática do sistema de suspensão ativa

A dinâmica da suspensão baseia-se no modelo de um quarto de carro, representado por um sistema linear de dois graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 6. Neste

modelo, a mola e o amortecedor são funções lineares do deslocamento e da velocidade, respectivamente. A área de contato entre o pneu e a pista é considerada como sendo pontual, produzindo forças somente na direção vertical proporcional à deformação do pneu, cuja modelagem se dá através de uma mola mecânica (DUTRA, 2016 apud PICADO, 1998; SANTOS, 1998).

Figura 6 – Modelo de um quarto de carro do sistema de suspensão ativa.



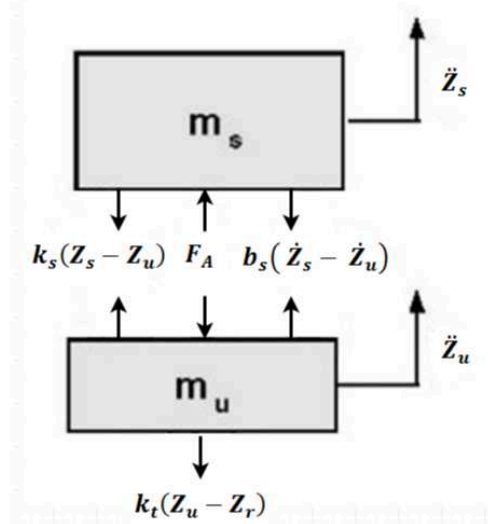
Fonte: Adaptado de Martins et al. (2006, p. 87).

Para o modelo de um quarto de carro apresentado na Figura 6, têm-se os seguintes parâmetros:

m_s	Massa suspensa	[kg]
m_u	Massa não suspensa	[kg]
k_s	Coefficiente de rigidez da mola da suspensão	[N/m]
b_s	Coefficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão	[Ns/m]
k_t	Coefficiente de rigidez do pneu	[N/m]
$F_A(t)$	Força aplicada pelo atuador no sistema de suspensão	[N]
$Z_s(t)$	Deslocamento vertical da massa suspensa	[m]
$Z_u(t)$	Deslocamento vertical da massa não suspensa	[m]
$Z_r(t)$	Irregularidade da pista	[m]

O diagrama de corpo livre é formulado, conforme ilustra a Figura 7, considerando como ponto de referência de coordenadas a posição da massa suspensa e da massa não suspensa.

Figura 7 – Diagrama de corpo livre para o modelo de um quarto de carro.



Fonte: Adaptado de Martins et al. (2006, p. 87).

O modelo dinâmico do sistema de suspensão ativa é obtido por meio da aplicação da segunda lei de Newton a cada uma das massas. De acordo com a segunda lei de Newton, o somatório das forças atuando em um determinado corpo é igual à massa do corpo multiplicada pela aceleração do corpo (DUTRA, 2016):

$$\sum F(\mathbf{t}) = m\alpha(\mathbf{t}). \quad (1)$$

Sendo assim, o modelo de um quarto de carro do sistema de suspensão ativa, mostrado na Figura 7, pode ser descrito a partir das equações diferenciais do movimento dadas pelas Equações (2) e (3), referentes ao somatório de forças da massa suspensa e da massa não suspensa, respectivamente (DUTRA, 2016).

$$m_s \ddot{Z}_s(\mathbf{t}) + b_s(\dot{Z}_s(\mathbf{t}) - \dot{Z}_u(\mathbf{t})) + k_s(Z_s(\mathbf{t}) - Z_u(\mathbf{t})) = F_A(\mathbf{t}) \quad (2)$$

$$m_u \ddot{Z}_u(\mathbf{t}) - b_s(\dot{Z}_s(\mathbf{t}) - \dot{Z}_u(\mathbf{t})) - k_s(Z_s(\mathbf{t}) - Z_u(\mathbf{t})) + k_t(Z_u(\mathbf{t}) - Z_r(\mathbf{t})) = -F_A(\mathbf{t}) \quad (3)$$

Para o projeto de controle, as Equações (2) e (3), são representadas na forma de espaço de estados, sendo as equações diferenciais escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, se definem as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) &= Z_s(\mathbf{t}) - Z_u(\mathbf{t}) && \text{Deslocamento entre a massa suspensa e a massa não suspensa} \\
 \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_s(\mathbf{t}) - \dot{Z}_u(\mathbf{t}) && \text{Velocidade entre a massa suspensa e a massa não suspensa} \\
 \mathbf{x}_3(\mathbf{t}) &= Z_u(\mathbf{t}) && \text{Deslocamento da massa não suspensa} \\
 \mathbf{x}_4(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_u(\mathbf{t}) && \text{Velocidade da massa não suspensa}
 \end{aligned}$$

As derivadas das variáveis de estado se relacionam com as variáveis originais de velocidade e aceleração, conforme:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) &= Z_s(\mathbf{t}) - Z_u(\mathbf{t}) & \dot{\mathbf{x}}_1(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_s(\mathbf{t}) - \dot{Z}_u(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) \\
 \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_s(\mathbf{t}) - \dot{Z}_u(\mathbf{t}) & \dot{\mathbf{x}}_2(\mathbf{t}) &= \ddot{Z}_s(\mathbf{t}) - \ddot{Z}_u(\mathbf{t}) \\
 \mathbf{x}_3(\mathbf{t}) &= Z_u(\mathbf{t}) & \dot{\mathbf{x}}_3(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_u(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_4(\mathbf{t}) \\
 \mathbf{x}_4(\mathbf{t}) &= \dot{Z}_u(\mathbf{t}) & \dot{\mathbf{x}}_4(\mathbf{t}) &= \ddot{Z}_u(\mathbf{t})
 \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo as variáveis de estado nas Equações (2) e (3), obtém-se o seguinte sistema de equações de estado:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_1(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}_2(\mathbf{t}), \\
 \dot{\mathbf{x}}_2(\mathbf{t}) &= -k_s \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) - b_s \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) + \\
 &+ \frac{k_t}{m_u} \mathbf{x}_3(\mathbf{t}) + \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) F_A(\mathbf{t}) - \frac{k_t}{m_u} Z_r(\mathbf{t}), \\
 \dot{\mathbf{x}}_3(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}_4(\mathbf{t}),
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4(\mathbf{t}) = \frac{k_s}{m_u} \mathbf{x}_1(\mathbf{t}) + \frac{b_s}{m_u} \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) - \frac{k_t}{m_u} \mathbf{x}_3(\mathbf{t}) - \frac{1}{m_u} F_A(\mathbf{t}) + \frac{k_t}{m_u} Z_r(\mathbf{t}).$$

A equação de estado em forma matricial é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_A F_A(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_r Z_r(\mathbf{t}), \quad (6)$$

onde:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_1(\mathbf{t}) \\ x_2(\mathbf{t}) \\ x_3(\mathbf{t}) \\ x_4(\mathbf{t}) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_s \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) & -b_s \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) & \frac{k_t}{m_u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_u} & \frac{b_s}{m_u} & \frac{k_t}{m_u} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_u} \right) & 0 & -\frac{1}{m_u} \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

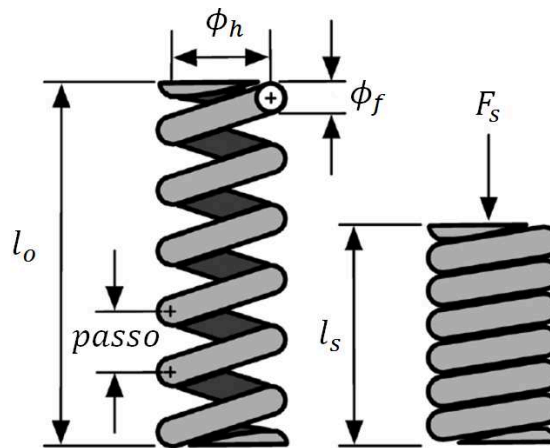
$$\mathbf{B}_r(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k_t}{m_u} & 0 & \frac{k_t}{m_u} \end{bmatrix}^T. \quad (10)$$

Como mencionado anteriormente, os parâmetros k_s e b_s têm sido tratados como variáveis de projeto independentes em muitos trabalhos de projeto integrado de sistemas de suspensão. No entanto, sabe-se que, de fato, eles dependem do projeto geométrico e restrições. Neste trabalho, com base nos estudos apresentados em Allison, Guo e Han (2014), k_s e b_s são tratados como variáveis dependentes, relacionadas através de restrições geométricas. É utilizado um modelo de planta que calcula o coeficiente de rigidez e o coeficiente de amortecimento em função das variáveis geométricas independentes do projeto da mola e do amortecedor.

3.2.1.1 Projeto da mola

A Figura 8 apresenta uma mola de compressão helicoidal com extremidades quadradas e uma das extremidades fixadas na terra. No sistema de suspensão, a mola envolve o amortecedor, formando um conjunto coaxial.

Figura 8 – Mola de compressão helicoidal.



Fonte: Allison, Guo e Han (2014, p. 6).

De acordo com Shigley, Mischke e Budynas (2003), o comprimento livre da mola l_o e o comprimento sólido da mola l_s são dados, respectivamente, por:

$$l_o = n_a \text{passo} + 2\phi_f, \quad (11)$$

$$l_s = \phi_f(n_a + 3), \quad (12)$$

onde n_a é o número de bobinas ativas, passo é o passo da mola e ϕ_f é o diâmetro do fio.

O coeficiente de rigidez da mola da suspensão é dado por (ALLISON; GUO; HAN, 2014):

$$k_s = \frac{\phi_f^4 G}{8\phi_h^3 n_a \left(1 + \frac{1}{2l^2}\right)}, \quad (13)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do material, ϕ_h é o diâmetro médio da hélice e $\iota = \phi_h/\phi_f$ é o índice da mola, que é uma medida de curvatura da espira.

De acordo com Shigley, Mischke e Budynas (2003), para a maioria das molas helicoidais ι situa-se na faixa de 4 a 12. Esses requisitos fornecem as duas primeiras restrições de projeto da planta (β_p):

$$r_1(\beta_p) = 4 - \iota \leq 0, \quad (14)$$

$$r_2(\beta_p) = \iota - 12 \leq 0. \quad (15)$$

Como forma de garantir a estabilidade absoluta da mola, ou seja, evitar o seu encurvamento (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2003):

$$r_3(\beta_p) = l_o - \frac{\pi\phi_h}{\zeta} \left[\frac{2(E - G)}{2G + E} \right]^{1/2} \leq 0, \quad (16)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e $\zeta = 0,5$ para molas com extremidades quadradas e uma das extremidades fixadas na terra.

A mola não comprimida deve caber dentro do comprimento especificado $l_{o_{max}}$ para o veículo:

$$r_4(\beta_p) = l_o - l_{o_{max}} \leq 0. \quad (17)$$

O diâmetro interno e o diâmetro externo da mola são definidos, respectivamente, como:

$$\phi_{int_{mola}} = \phi_h - \phi_f, \quad (18)$$

$$\phi_{ext_{mola}} = \phi_h + \phi_f. \quad (19)$$

Com essa definição, tem-se a restrição que o diâmetro externo da mola não deve exceder o diâmetro máximo permitido $\phi_{ext_{max}}$ para evitar interferências com os componentes do veículo:

$$r_5(\beta_p) = \phi_f + \phi_h - \phi_{ext_{max}} \leq 0. \quad (20)$$

Além disso, o diâmetro interno da mola deve ser maior que o diâmetro mínimo permitido $\phi_{int_{min}}$ e grande o suficiente para caber em torno do amortecedor com pelos menos δ_{dc} de folga. Esses requisitos fornecem as restrições dadas pelas Equações (21) e (22), respectivamente.

$$r_6(\boldsymbol{\beta}_p) = \phi_h - \phi_f - \phi_{int_{min}} \geq 0 \quad (21)$$

$$r_7(\boldsymbol{\beta}_p) = \phi_f - \phi_h + \phi_p + 2(\delta_{dc} + \varepsilon) \leq 0 \quad (22)$$

Na Equação (22), ϕ_p é o diâmetro do pistão de trabalho do amortecedor e ε é a espessura da parede do amortecedor. (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

3.2.1.2 Projeto do amortecedor

No projeto se considera um amortecedor telescópico de tubo único, conforme foi mostrado na Figura 4, onde se assume amortecimento linear, no qual a força de amortecimento é proporcional à velocidade do pistão do amortecedor (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

De acordo com Allison, Guo e Han (2014), o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão é dado por:

$$b_s = \frac{\phi_p^4}{8\kappa_d\kappa_2\phi_o^2} \sqrt{\frac{\pi\kappa_v\rho}{2}}, \quad (23)$$

onde κ_v é a constante da mola da válvula do carretel, ρ é a densidade do fluido do amortecedor, κ_d é o coeficiente de descarga, κ_2 é o coeficiente da válvula do amortecedor, dado pela Equação (24) e ϕ_o é o diâmetro da válvula (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

$$\kappa_2 = \eta a_f \sqrt{h_m} \quad (24)$$

O coeficiente $0 < \eta < 1$ define o limite superior da proporção da circunferência externa da válvula de carretel que pode ser exposta. O fator de área $0 < a_f < 1$ é usado para

ajustar a forma da porta e h_m é a máxima elevação da válvula na máxima pressão permitida no amortecedor, dada pela Equação (25) (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

$$h_m = \frac{a_o p_{allow}}{\kappa_v} \quad (25)$$

A área frontal da válvula de carretel a_o é obtida através da Equação (26) e a máxima pressão permitida no amortecedor p_{allow} é dada pela Equação (27).

$$a_o = \frac{\pi \phi_o^2}{4} \quad (26)$$

$$p_{allow} = \frac{4b_s v_{p_{max}}}{\pi \phi_p^2} \quad (27)$$

Na Equação (27), $v_{p_{max}}$ é a máxima velocidade do pistão do amortecedor (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

4 CONTROLE H_∞

O controle H_∞ é empregado quando se deseja que um sistema mantenha um determinado desempenho em condições adversas. Em termos gerais, almeja-se, através de um método de otimização no domínio da frequência, reduzir os efeitos de perturbações externas e ruídos de sensores no processo tendo em vista o pior caso, ou seja, o valor de pico da função de resposta em frequência (SARRACINI JÚNIOR, 2006; DUTRA, 2016).

O termo H_∞ faz referência ao espaço de Hardy, em que as funções de transferência devem ser assintoticamente estáveis⁴ e próprias⁵, e o termo ∞ denota a norma H_∞ (SARRACINI JÚNIOR, 2006; DUTRA, 2016).

4.1 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Seja um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO)⁶ escrito como:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s). \quad (29)$$

Os valores singulares, σ_i , são as raízes quadradas positivas dos autovalores do produto $\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega)$, onde $\mathbf{G}^*(j\omega)$ é o complexo-conjugado transposto da matriz $\mathbf{G}(j\omega)$, isto é (SARRACINI JÚNIOR, 2006 apud SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 1996; DUTRA, 2016):

$$\Sigma_i(\mathbf{G}(s)) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega))}. \quad (30)$$

⁴ Função de transferência com polos no semiplano esquerdo do eixo imaginário.

⁵ Função de transferência com grau do polinômio do numerador menor ou igual ao grau do polinômio do denominador.

⁶ *Multiple Input Multiple Output* (MIMO).

Definindo, respectivamente, o menor e o maior valor singular como:

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma} &= \min\{\Sigma_i\}, \\ \bar{\Sigma} &= \max\{\Sigma_i\},\end{aligned}\tag{31}$$

tem-se que:

$$\underline{\Sigma} \leq \|G(s)\| \leq \bar{\Sigma},\tag{32}$$

ou seja, os ganhos de um sistema multivariável são limitados pelo maior e menor valor singular do sistema, e estes valores podem ser utilizados para análise do sistema (DUTRA, 2016 apud MACIEJOWSKY, 1989).

A norma H_∞ da matriz de transferência $G(s)$, denotada $\|G(s)\|_\infty$, é calculada como sendo o maior valor singular de $G(j\omega)$ para todos os valores de frequência ω :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\Sigma}(G(j\omega)), \quad 0 < \omega < \infty,\tag{33}$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ denota o maior valor singular do argumento. (DUTRA, 2016).

No caso em que se tem apenas uma única entrada e uma única saída (SISO)⁷, a norma H_∞ é o valor de pico no diagrama de Bode da amplitude (DUTRA, 2016 apud OGATA, 2000):

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)|, \quad 0 < \omega < \infty.\tag{34}$$

De forma a compreender o significado de $\|G(s)\|_\infty$ em um sistema monovariável, suponha o sinal de entrada $u(t)$ e defina:

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)u(t)dt,\tag{35}$$

se o sinal de entrada é limitado em energia, $\|u\|_2 < \infty$, o sinal de saída $y(s) = G(s)u(s)$, e $G(s)$ uma função de transferência assintoticamente estável, própria e não tem polo no eixo

⁷ *Single Input Single Output (SISO).*

imaginário, então:

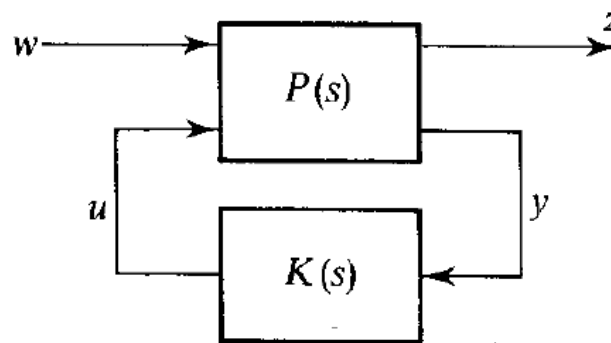
$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{u(t)} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}, \quad (36)$$

ou seja, $\|G(s)\|_{\infty}$ representa o maior aumento de energia que pode ocorrer entre a entrada e a saída para um dado sistema (DUTRA, 2016).

4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA H_{∞}

O diagrama de blocos geral para o sistema de controle H_{∞} é mostrado na Figura 9. Neste modelo w é o vetor de entradas exógenas (sinais de perturbação e ruídos de medição), u é o vetor de controle, z consiste do sinal utilizado para avaliar o desempenho do sistema face às entradas w e y é o sinal medido e usado para realimentar o sistema (DUTRA, 2016 apud BOYD; BARRATT, 1991).

Figura 9 – Diagrama de blocos para o controle H_{∞} .



Fonte: Maciejowsky (1989, p. 267).

Suponha que a planta $P(s)$ do sistema mostrado na Figura 9 possui a seguinte realização em espaço de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad (37)$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \quad (38)$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t). \quad (39)$$

Este sistema pode ser representado de forma compacta por (PAIVA, 2009):

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Com isso, a matriz de transferência do sistema pode ser representada da seguinte maneira (SARRACINI JÚNIOR, 2006):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

onde \mathbf{P}_{zw} é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{w}(t)$ e a saída $\mathbf{z}(t)$, \mathbf{P}_{zu} é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{z}(t)$, \mathbf{P}_{yw} é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{w}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$ e \mathbf{P}_{yu} é a função de transferência entre a entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$.

Portanto, tem-se que:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w}(t) + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{u}(t), \quad (42)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w}(t) + \mathbf{P}_{yu} \mathbf{u}(t). \quad (43)$$

A lei de controle é dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(s) \mathbf{y}(t). \quad (44)$$

Substituindo a Equação (44) na Equação (43), obtém-se $\mathbf{y}(t)$ em função de $\mathbf{w}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w}(t) + \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K} \mathbf{y}(t) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K}) \mathbf{y}(t) &= \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (45)$$

Da mesma maneira, substituindo Equação (44) na Equação (42), obtém-se $\mathbf{z}(t)$ em função de $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}_{zw} \mathbf{w}(t) + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} \mathbf{y}(t). \quad (46)$$

A relação entre $\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ no sistema de malha fechada pode ser obtida substituindo a Equação (45) na Equação (46):

$$\mathbf{z}(t) = \left[\mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \right] \mathbf{w}(t). \quad (47)$$

A Equação (47) é chamada de transformação linear inferior e é tradicionalmente representada da seguinte forma (SARRACINI JÚNIOR, 2006):

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{yu} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw}, \quad (48)$$

onde \mathbf{T}_{zw} é a matriz de transferência entre a entrada de perturbação $\mathbf{w}(t)$ e a saída de desempenho $\mathbf{z}(t)$.

No projeto H_∞ deseja-se encontrar um controlador real e racional próprio $\mathbf{K}(s)$ que estabilize a planta generalizada $\mathbf{P}(s)$ de modo a minimizar ζ , dado por (PEREIRA, 2008):

$$\zeta = \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \max_\omega \bar{\Sigma}(\mathbf{T}_{zw}(j\omega)). \quad (49)$$

Desse modo, o controlador ótimo H_∞ minimiza o valor de pico da matriz de transferência \mathbf{T}_{zw} entre a entrada de perturbação $\mathbf{w}(t)$ e a saída de desempenho $\mathbf{z}(t)$, considerando a resposta em frequência respectiva. No entanto, encontrar o controlador ótimo H_∞ pode ser muito complicado. Dessa forma, é comum satisfazer os requisitos para o controlador utilizando uma solução sub-ótima (PEREIRA, 2008; PAIVA, 2009), expresso como:

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma, \quad \text{com } \gamma > 0, \quad (50)$$

onde se procura o menor γ possível de forma que a estabilidade seja mantida.

4.3 PROBLEMA H_∞ SOB O ENFOQUE DE LMI

A solução do problema H_∞ no espaço de estados é abordada por dois métodos: Equações Algébricas de Riccati (ARE)⁸ ou Desigualdades Matriciais Lineares (LMI). O primeiro método, de formulação analítica, parte das equações de espaço de estados propostas por Doyle et al. (1989) e baseia-se nas Equações de Riccati. Esta forma de solução não é o objetivo de investigação deste trabalho, e conforme Mazoni (2008), informações desse método podem ser encontradas em (GAWRONSKI, 1998; SÁNCHEZ-PENÃ; SZNAIER, 1998).

Uma das técnicas mais recentes para a solução do problema H_∞ representado pela Equação (50) é o emprego das formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares, no qual a síntese do controlador pode ser simplificada devido às propriedades de linearidade e convexidade desta abordagem matemática quando aplicada na teoria de controle (MEDEIROS, 2013 apud BOYD et al., 1994).

4.3.1 Desigualdades matriciais lineares

Uma desigualdade matricial linear tem a forma (BOYD et al., 1994):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{H}_0 + \sum_{i=1}^m q_i \mathbf{H}_i > \mathbf{0}, \quad (51)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^m$ é a variável e as matrizes simétricas $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são dadas. O símbolo de desigualdade na Equação (51) significa que $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ é positiva definida, isto é, $\mathbf{u}'\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{u} > \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^n$ diferente de zero. Dado que todos os autovalores de uma matriz simétrica real são reais, a Equação (51) é equivalente a dizer que todos os autovalores $\lambda(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ são positivos. De forma equivalente, o máximo autovalor $\lambda_{max}(\mathbf{H}(\mathbf{q})) > \mathbf{0}$.

A LMI dada na Equação (51) é uma restrição convexa em \mathbf{q} , ou seja, o conjunto $\{\mathbf{q} | \mathbf{H}(\mathbf{q}) > \mathbf{0}\}$ é um conjunto convexo, sendo este resultado importante no contexto dos problemas de otimização (SARRACINI JÚNIOR, 2006; SANTOS, 2010).

Embora a LMI pareça possuir uma forma padrão, ela pode representar uma ampla variedade de problemas de restrições convexas em \mathbf{q} (SARRACINI JÚNIOR, 2006). Um

⁸ Algebraic Riccati Equations (ARE).

típico problema de otimização com restrições na forma de LMI é escrito, de forma genérica, como (PAIVA, 2009):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \zeta_{\mathcal{E}}(\mathbf{q}) \\ &\text{sujeito a} && \mathcal{E}(\mathbf{q}) < \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (52)$$

para o qual $\zeta_{\mathcal{E}}(\mathbf{q})$ representa a função objetivo linear em \mathbf{q} , $\mathcal{E}(\mathbf{q})$ representa a matriz dependente das variáveis de otimização \mathbf{q} e $\mathcal{E}(\mathbf{q}) < \mathbf{0}$ significa que a matriz $\mathcal{E}(\mathbf{q})$ é negativa definida.

O problema quando expresso nesta forma permite que os projetos de controladores sejam numericamente resolvidos como problemas de otimização convexa, onde diversas restrições podem ser adicionadas (PAIVA, 2009).

4.4 MALHA FECHADA PARA A SÍNTESE DO CONTROLADOR H_{∞}

O modelo de estados do controlador dinâmico $\mathbf{K}(s)$ do sistema mostrado na Figura 9 é definido como:

$$\dot{\mathbf{x}}_K(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_K \mathbf{x}_K(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_K \mathbf{y}(\mathbf{t}), \quad (53)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_K \mathbf{y}(\mathbf{t}), \quad (54)$$

onde $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ é o vetor de entrada do controlador, $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ é o vetor de saída do controlador e $\mathbf{x}_K(\mathbf{t})$ é o vetor de estados do controlador.

Com o modelo de estados da planta e o modelo de estados do controlador definidos, a obtenção do sistema em malha fechada é realizada através de algumas manipulações algébricas. Substituindo a Equação (39) na Equação (54), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_K (\mathbf{C}_2 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}(\mathbf{t})), \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{22}) \mathbf{u}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(\mathbf{t}), \\ \mathbf{u}(\mathbf{t}) &= \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (55)$$

com $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{22})^{-1}$.

Considera-se $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ e $\mathbf{x}_K(\mathbf{t})$ como estados do sistema de malha fechada, o vetor $\mathbf{w}(\mathbf{t})$

como entrada exógena e o vetor $\mathbf{z}(t)$ como saída de desempenho e se escrevem as equações de $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_K(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ em função da entrada $\mathbf{w}(t)$ e dos estados $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}_K(t)$ (PEREIRA, 2008).

Substituindo a Equação (55) na Equação (37), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}(t).\end{aligned}\quad (56)$$

Substituindo a Equação (55) na Equação (38), obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)), \\ \mathbf{z}(t) &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}(t).\end{aligned}\quad (57)$$

Substituindo as Equações (39) e (55) na Equação (53), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_K(t) &= \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{B}_K(\mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}_K(t) &= \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \\ &\quad + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{22}(\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}_K(t) &= (\mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{22}\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2)\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_K + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{22}\boldsymbol{\psi}\mathbf{C}_K)\mathbf{x}_K(t) + \\ &\quad + (\mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{22}\boldsymbol{\psi}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}(t).\end{aligned}\quad (58)$$

Logo, o sistema de malha fechada pode ser obtido agrupando-se matricialmente as Equações (56), (57) e (58), que de forma compacta é dado por (PAIVA, 2009):

$$\dot{\mathbf{x}}_{cl}(t) = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(t) + \mathbf{B}_{cl}\mathbf{w}(t), \quad (59)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(t) + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{w}(t), \quad (60)$$

onde:

$$\mathbf{x}_{cl}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_K(t) \end{bmatrix}, \quad (61)$$

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{22} \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K + \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{22} \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}_K \end{bmatrix}, \quad (62)$$

$$\mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{21} + \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{22} \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\mathbf{C}_{cl} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}_K], \quad (64)$$

$$\mathbf{D}_{cl} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \boldsymbol{\psi} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21}. \quad (65)$$

Caso particular de $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$

Neste caso, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{I}$ e as matrizes de malha fechada tornam-se (PAIVA, 2009):

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\mathbf{C}_{cl} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_K], \quad \mathbf{D}_{cl} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21}. \quad (67)$$

De acordo com Santos (2010 apud SÁNCHEZ-PENÃ; SZNAIR, 1995), a matriz de transferência do sistema de malha fechada entre \mathbf{w} e \mathbf{z} pode ser descrita por:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1} \mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}. \quad (68)$$

4.5 NORMA H_∞ COMO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO LMI

Como critério de desempenho do sistema em malha fechada, se deseja limitar em certo valor γ a norma H_∞ da matriz de transferência expressa na Equação (68) entre a entrada de perturbação \mathbf{w} e a saída de desempenho \mathbf{z} , isto é (PAIVA, 2009):

$$\|\mathbf{T}(s)\|_\infty < \gamma. \quad (69)$$

Lema 1: Lema Real Limitado. Seja um sistema estável descrito como na Equação (68). Este possui uma norma H_∞ limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existir uma matriz simétrica

positiva definida \mathbf{W} tal que (MAZONI, 2008):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{W}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}'_{cl} \\ \mathbf{B}'_{cl}\mathbf{W} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (70)$$

■

Dessa forma, o Lema Real Limitado (*Bounded Real Lemma*) é uma ferramenta teórica que ajuda a transformar o problema do projeto de controladores sub-ótimos H_∞ em um problema de otimização convexa com restrições matriciais lineares (MAZONI, 2008).

O problema de cálculo da norma H_∞ é aproximado como um problema de otimização da seguinte maneira (PAIVA, 2009):

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{W}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}'_{cl} \\ \mathbf{B}'_{cl}\mathbf{W} & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (71) \\ & \mathbf{W} > \mathbf{0}. \quad (72) \end{aligned}$$

As Inequações (71) e (72) têm como incógnitas μ , \mathbf{W} e as matrizes do modelo de estados do controlador ($\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K, \mathbf{D}_K$), conforme Equações (53) e (54), que se encontram dentro das matrizes do modelo de estados da malha fechada ($\mathbf{A}_{cl}, \mathbf{B}_{cl}, \mathbf{C}_{cl}, \mathbf{D}_{cl}$), conforme Equações (66) e (67). É possível verificar que a expressão dada pela Equação (71) é uma desigualdade não linear. Dessa forma, é necessário transformar a Equação (71) em uma desigualdade matricial linear (PAIVA, 2009).

Segundo Santos (2010), para transformar a restrição dada pela Equação (71) em uma desigualdade matricial linear, aplica-se uma Transformação de Congruência. Para isso, pré

multiplica-se a Equação (71) por $\begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ e pós multiplica-se por $\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, ou

seja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{W}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}'_{cl} \\ \mathbf{B}'_{cl}\mathbf{W} & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (73)$$

cujo resultado é dado por:

$$\begin{bmatrix} T'A'_{cl}WT + T'WA_{cl}T & T'WB_{cl} & T'C'_{cl} \\ B'_{cl}WT & -\mu I & D'_{cl} \\ C_{cl}T & D_{cl} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (74)$$

De acordo com Cabello (2009), a matriz simétrica W pode ser escrita como:

$$W = \begin{bmatrix} X & N' \\ N & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} S & J' \\ J & \hat{S} \end{bmatrix}, \quad (75)$$

onde X , S , \hat{X} e \hat{S} são matrizes simétricas.

De acordo com Santos (2010 apud SÁNCHEZ-PENÁ; SZNAIR, 1995), ao calcular WW^{-1} encontra-se:

$$WW^{-1} = \begin{bmatrix} X & N' \\ N & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & J' \\ J & \hat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XS + N'J & XJ' + N'\hat{S} \\ NS + \hat{X}J & NJ' + \hat{X}\hat{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} = W^{-1}W. \quad (76)$$

Segundo Cabello (2009), define-se a matriz de transformação não singular T e sua transposta T' como:

$$T = \begin{bmatrix} S & I \\ J & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad T' = \begin{bmatrix} S & J' \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Como a matriz W é positivo-definida, isto é, $W > \mathbf{0}$, ao aplicar a Transformação de Congruência $T'WT > \mathbf{0}$, o resultado também será uma matriz positivo definida (SANTOS, 2010). Portanto:

$$T'WT = \begin{bmatrix} S & J' \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & I \\ J & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & I \\ I & X \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (78)$$

onde:

- X e S são variáveis matriciais simétricas que serão determinadas na resolução do

problema de otimização com restrições na forma de LMI;

- N é uma matriz invertível arbitrária;
- J é uma matriz calculada a partir de N , X e S .

É necessário expandir os termos $T'WA_{cl}T$, $B'_{cl}WT$ e $C_{cl}T$ da Inequação (74) e reescreve-los através de variáveis auxiliares para eliminar aqueles que causam não linearidades. Para isso, são usadas as matrizes do sistema em malha fechada, conforme as Equações (66) e (67) (CABELLO, 2009).

Substituindo as Equações (77), (75) e (66) no termo $T'WA_{cl}T$, obtém-se:

$$T'WA_{cl}T = \begin{bmatrix} S & J' \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & N' \\ N & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & I \\ J & 0 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

o que leva à Equação (80):

$$T'WA_{cl}T = \begin{bmatrix} AS + B_2 O & A + B_2 RC_2 \\ M & XA + LC_2 \end{bmatrix}, \quad (80)$$

em que foram feitas as substituições:

$$M = XAS + XB_2 O + N'B_K C_2 S + N'A_K J, \quad (81)$$

$$L = XB_2 R + N'B_K, \quad (82)$$

$$O = RC_2 S + C_K J, \quad (83)$$

$$R = D_K. \quad (84)$$

Substituindo as Equações (66), (75) e (77) no termo $B'_{cl}WT$, resulta em:

$$B'_{cl}WT = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & N' \\ N & \hat{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & I \\ J & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'_{cl}WT = [B'_1 + D'_{21} R' B'_2 \quad B'_1 X + D'_{21} L']. \quad (85)$$

Substituindo as Equações (67) e (77) no termo $\mathbf{C}_{cl}\mathbf{T}$, resulta em:

$$\mathbf{C}_{cl}\mathbf{T} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_K] \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{I} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{cl}\mathbf{T} = [\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{O} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}\mathbf{C}_2]. \quad (86)$$

Substituindo as Equações (80), (85) e (86) na Equação (74), obtém-se a matriz de restrição linearizada, conforme mostrado na Equação (87) (CABELLO, 2009).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{B}_2\mathbf{O} + \mathbf{S}\mathbf{A}' + \mathbf{O}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}\mathbf{C}_2 + \mathbf{M}' & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{R}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{S}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{O}'\mathbf{D}'_{12} \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}' + \mathbf{C}'_2\mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{C}'_2\mathbf{L}' & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}'_1 + \mathbf{C}'_2\mathbf{R}'\mathbf{D}'_{12} \\ \mathbf{B}'_1 + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{L}' & -\mu\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} + \mathbf{D}'_{21}\mathbf{R}'\mathbf{D}'_{12} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{O} & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}\mathbf{D}_{21} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (87)$$

Assim, o problema de otimização H_∞ na forma de LMI torna-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (78), \end{aligned} \quad (88)$$

$$(87), \quad (89)$$

com as variáveis de otimização μ , \mathbf{X} , \mathbf{S} , \mathbf{R} , \mathbf{O} , \mathbf{L} e \mathbf{M} (CABELLO, 2009).

De acordo com Mazoni (2008), as Equações (81) a (84) correspondem às relações que podem ser isoladas para obter as matrizes do controlador \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K , \mathbf{D}_K . Dessa forma, permite-se encontrar as matrizes do controlador pelas relações (CABELLO, 2009):

$$\mathbf{D}_K = \mathbf{R}, \quad (90)$$

$$\mathbf{C}_K = (\mathbf{O} - \mathbf{R}\mathbf{C}_2\mathbf{S})\mathbf{J}^{-1}, \quad (91)$$

$$\mathbf{B}_K = (\mathbf{N}')^{-1}(\mathbf{L} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{R}), \quad (92)$$

$$\mathbf{A}_K = (\mathbf{N}')^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{O} - \mathbf{N}'\mathbf{B}_K\mathbf{C}_2\mathbf{S})\mathbf{J}^{-1}. \quad (93)$$

Pela Equação (76), tem-se que (CABELLO, 2009):

$$\mathbf{J} = (\mathbf{N}')^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{S}). \quad (94)$$

4.6 INCERTEZAS PARAMÉTRICAS

Os parâmetros nominais da planta do sistema podem sofrer variações em seus valores, as quais podem ser consideradas como incertezas de modelagem. Essas incertezas podem ser classificadas em dois tipos: incertezas dinâmicas e incertezas paramétricas. As incertezas dinâmicas são originadas pela ausência da representação de certos efeitos dinâmicos da planta. As incertezas paramétricas são aquelas onde não se conhece o valor exato de alguns parâmetros que compõem a planta do sistema (MAZONI, 2008; SANTOS, 2010).

Nesse estudo se considera apenas as incertezas paramétricas. De acordo com Santos (2010), uma das maneiras de considerar as incertezas paramétricas no projeto de controle é através da abordagem politópica.

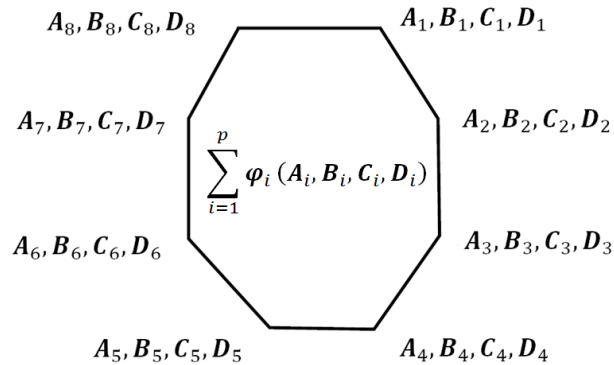
4.6.1 Representação politópica

Na representação de incerteza politópica, se considera que as matrizes de estado da planta, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$, possuam parâmetros incertos $\boldsymbol{\varphi}$, de modo que $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{C}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}))$ pertença a um conjunto admissível. O conjunto admissível é representado por pontos que geram um conjunto convexo Φ , dado por (SANTOS, 2010):

$$\Phi = \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\varphi}_i (\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i) \mid \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\varphi}_i = 1, \boldsymbol{\varphi}_i > \mathbf{0} \right\}. \quad (95)$$

Uma das características importantes da abordagem politópica para descrever as incertezas é a convexidade do conjunto resultante Φ , o qual pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})_i$ do politopo conforme mostrado na Figura 10. Diz-se que a propriedade de convexidade é importante pois ela garante que se as condições estão satisfeitas nos vértices então todas as condições também estarão satisfeitas no interior desta região (MAZONI, 2008; SANTOS, 2010).

Figura 10 – Polítipo formado pelos pontos extremos para representar um sistema incerto como combinação convexa de sistemas conhecidos.



Fonte: Adaptado de Santos (2010, p. 26).

A estabilidade do sistema é expressa através do conceito de estabilidade quadrática. Seja $V(\chi) = \chi'Q\chi$, onde $Q > 0$, uma função de Lyapunov. Estabelece-se que o sistema é estável se existe uma função $V(\chi)$ positiva e a derivada temporal $\dot{V}(\chi)$ desta função seja negativa, isto é (SANTOS, 2010 apud SARRACINI; SERPA, 2006):

$$V(\chi) > 0, \forall \chi \neq 0 \text{ e } \forall t, \quad (96)$$

$$\dot{V}(\chi) < 0, \forall \chi \neq 0 \text{ e } \forall t. \quad (97)$$

Para um sistema linear na forma $\dot{\chi} = A\chi$ é possível verificar que (SANTOS, 2010):

$$\dot{V}(\chi) = \dot{\chi}'Q\chi + \chi'Q\dot{\chi} = \chi'A'Q\chi + \chi'QA\chi = \chi'(A'Q + QA)\chi < 0, \quad (98)$$

que, por ser uma forma quadrática, está garantida se:

$$A'Q + QA < 0. \quad (99)$$

Sendo assim, o sistema linear $\dot{\chi} = A\chi$ é estável se existir $Q > 0$ tal que a inequação de Lyapunov (Equação (99)) é satisfeita (SANTOS, 2010). De acordo com Mazoni (2008), o projeto de controladores depende da variável Q , que descreve a função de Lyapunov, cuja existência garante a estabilidade do sistema linear.

Segundo Santos (2010), para um sistema com incertezas paramétricas adota-se uma restrição para cada vértice e se resolve um problema matemático que inclui todas as restrições. Em termos da equação de Lyapunov, o sistema incerto pertencente ao politopo de vértices A_i é estável se e somente se:

$$A'_i Q + Q A_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, q. \quad (100)$$

Neste caso, a Equação (100) pode ser escrita para cada um dos vértices da região politópica e o problema de otimização a ser resolvido, considerando as incertezas paramétricas e o conceito de estabilidade quadrática, é dado pela Equação (101) (SANTOS, 2010).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} & LMI_1 < 0, \\ & LMI_2 < 0, \\ & \vdots \\ & LMI_i < 0, \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (101)$$

Segundo Mazoni (2008), se o controlador H_∞ fosse projetado para o sistema correspondente a um vértice do politopo, ele seria otimizado para esta condição. Ao adicionar restrições para que o controlador as satisfaça em todos os vértices, tem-se um projeto que não é ótimo em nenhum vértice específico, isto é, introduz-se um conservadorismo inevitável (SANTOS, 2010).

5 PRINCIPAIS ESTRATÉGIAS DE PROJETO INTEGRADO DA PLANTA E DO CONTROLADOR

Neste capítulo são apresentadas três estratégias normalmente aplicadas ao problema de projeto integrado da planta e do controlador: a estratégia sequencial, a estratégia iterativa e a estratégia aninhada.

5.1 PARÂMETROS DE PROJETO

Como forma de uniformizar as discussões dos variados métodos de projeto integrado, as principais condições e restrições associadas ao projeto da suspensão automotiva são estabelecidas nesta seção.

De forma geral, o problema de otimização da planta e do controlador pode ser descrito através da Equação (102).

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\beta}_p, \boldsymbol{\beta}_c} \zeta(\boldsymbol{\beta}_p, \boldsymbol{\beta}_c) \\ \text{sujeito a } \boldsymbol{o}(\boldsymbol{\beta}_p, \boldsymbol{\beta}_c) = 0, \\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\beta}_p, \boldsymbol{\beta}_c) \leq 0. \end{aligned} \tag{102}$$

Na Equação (102), ζ é a função objetivo a ser minimizada, $\boldsymbol{\beta}_p$ e $\boldsymbol{\beta}_c$ são, respectivamente, os vetores de projeto dos parâmetros da planta e do controlador a serem determinados e \boldsymbol{o} e \boldsymbol{e} são os vetores de restrição de igualdade e de desigualdade, respectivamente (PAIVA, 2009).

As variáveis $\boldsymbol{\beta}_p$ representam os parâmetros de projeto da planta a serem determinados durante o processo de otimização. Neste trabalho se estuda o sistema de suspensão automotiva, no qual as variáveis de otimização do projeto da planta consistem dos parâmetros geométricos da mola e do amortecedor da suspensão. Sendo assim, o vetor do projeto da planta $\boldsymbol{\beta}_p$ é composto pelo: diâmetro da hélice ϕ_h [m], diâmetro do fio ϕ_f [m],

passo da mola $passo$ [m], diâmetro do pistão de trabalho ϕ_p [m] e pelo diâmetro da válvula ϕ_o [m].

As variáveis β_c representam os parâmetros de projeto do controlador a serem determinados durante o processo de otimização, que consistem nas matrizes A_K, B_K, C_K, D_K do controlador.

As variáveis de projeto da planta β_p e do controlador β_c podem ser limitadas através de restrições de igualdade e de desigualdade. Ao limitar β_p especifica-se uma faixa de valores com as dimensões máximas e mínimas dos parâmetros da estrutura a ser projetada. De acordo com Paiva (2009), é conveniente limitar β_c a uma faixa de valores para evitar divergência do algoritmo.

Neste estudo, é definida uma faixa de valores para cada parâmetro de projeto da planta, o qual será apresentado no próximo capítulo. Em relação ao controlador, procura-se garantir que a máxima parte real dos autovalores, ou dos polos, da matriz A_{cl} do sistema de malha fechada seja negativa, de forma a garantir a estabilidade do sistema. No entanto, nenhuma restrição foi imposta ao processo de otimização do controlador, além da estabilidade.

No sistema de suspensão ativa em estudo, a norma H_∞ da matriz de transferência entre a entrada de perturbação e a saída de desempenho considera a minimização da aceleração da massa suspensa, da variação da força de contato entre o pneu e a pista e o espaço de trabalho da suspensão. Neste estudo, uma parte da função objetivo da planta será composta pela norma H_∞ do sistema. No entanto, para levar em conta o projeto da mola e do amortecedor, tem-se a necessidade de encontrar uma função objetivo referente à mola e outra ao amortecedor.

De acordo com Carvalho (2015 apud CHOI 2011), ao longo das três últimas décadas, esforços consideráveis foram realizados no desenvolvimento de aços para molas, a fim de atender às necessidades de peso e redução de custos na indústria automotiva. A redução de peso no automóvel é fundamental para diminuir o consumo de combustível e pode ser conseguido, em parte, por meio da melhoria do projeto das molas da suspensão (CARVALHO, 2015).

Neste caso, o peso da mola, (calculado pela Equação (103) em kg), é incluído na função objetivo da planta deste trabalho.

$$peso = \frac{\pi^2 \phi_f^2 \phi_h n_a Y}{4} \quad (103)$$

Na Equação (103), Y é o peso específico do material, para o aço ASTM A401 tem o valor de 7850 kg/m^3 (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2003).

Ao se elaborar o projeto do amortecedor, fazendo uso de um material em específico, se deve estabelecer um limite superior para o estado de tensão que defina o material. O caso mais comum de escoamento do aço, que consiste em um material dúctil, é o deslizamento que ocorre devido à tensão de cisalhamento (HIBBELER, 2004).

Segundo Oliveira (2014), o corpo do amortecedor pode ser modelado como um vaso de pressão fechado em ambas extremidades, o qual deve resistir ao diferencial de pressão gerado durante o deslocamento do pistão. O estado de tensões em um vaso de pressão sujeito a uma determinada pressão é dado pelas Equações (104) a (106) (BORESI; SCHIMIDT, 2003).

$$\sigma_r = c - \frac{d}{\left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2} \quad (104)$$

$$\sigma_\theta = c + \frac{d}{\left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2} \quad (105)$$

$$\sigma_z = \frac{\left[p_{int} \pi \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2 \right]}{\left[\pi \left(\frac{\phi_{int}}{2} + \varepsilon\right)^2 \right] - \left[\pi \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2 \right]} \quad (106)$$

Sendo:

$$c = \left\{ \frac{\left[p_{int} \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2 \right] - \left[p_{atm} \left(\frac{\phi_{int}}{2} + \varepsilon\right)^2 \right]}{\left(\frac{\phi_{int}}{2} + \varepsilon\right)^2 - \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2} \right\} \quad (107)$$

$$d = (p_{int} - p_{atm}) \left\{ \frac{\left(\frac{\phi_{int}}{2} + \varepsilon\right)^2 \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{\phi_{int}}{2} + \varepsilon\right)^2 - \left(\frac{\phi_{int}}{2}\right)^2\right]} \right\} \quad (108)$$

Onde σ_r é a tensão radial no tubo, σ_θ é a tensão tangencial no tubo e σ_z é a tensão longitudinal no tubo. A espessura da parede do tubo é denominada ε , ϕ_{int} é o diâmetro interno do tubo, p_{int} é a máxima pressão no interior do tubo e p_{atm} é a pressão externa, neste caso, é a pressão atmosférica (OLIVEIRA, 2014).

A teoria da tensão de cisalhamento máxima ou critério de escoamento de Tresca é utilizada para prever a tensão de falha dos materiais dúcteis. Essa teoria afirma que a falha ocorre quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta em uma região excede a tensão máxima de cisalhamento de um corpo de prova que provoca o escoamento do material quando ele está submetido apenas à tensão axial (HIBBELER, 2004).

A tensão de cisalhamento máxima absoluta é dada pela Equação (109).

$$\tau_{max} = \max \left(\left| \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2} \right| \right) \quad (109)$$

Uma vez que o fator de segurança, pelo critério de escoamento de Tresca, é dado pela Equação (110), se deve minimizar a tensão de cisalhamento máxima absoluta nas paredes do corpo do amortecedor a fim de aumentar sua vida útil (HIBBELER, 2004).

$$v = \frac{0,5S_y}{\tau_{max}} \quad (110)$$

Na Equação (110), S_y é o limite de escoamento do material. Sendo assim, a função objetivo da planta é dada por:

$$\zeta_{planta} = \%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} \frac{\|T_{wz}(s)\|_\infty}{\|T_{wz}(s)\|_{\infty_{max}}} + \%_{peso} \frac{peso}{peso_{max}} + \%_{\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{\tau_{max_{max}}}, \quad (111)$$

onde $\%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty}$ é a ponderação referente a norma H_∞ da matriz de transferência entre a entrada de perturbação e a saída de desempenho, $\%_{peso}$ é a ponderação referente ao peso da mola e $\%_{\tau_{max}}$ é a ponderação referente a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor.

A norma H_∞ da matriz de transferência entre a entrada de perturbação e a saída de desempenho, o peso da mola e a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor são calculadas a cada processo de otimização. São definidos valores máximos para esses parâmetros a fim de normalizar a Equação (111), ou seja, $\|\mathbf{T}_{wz}(s)\|_{\infty_{max}} = 1000$, $peso_{max} = 10$ kg e $\tau_{max_{max}} = 100$ MPa.

5.2 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL

A otimização sequencial consiste em dois problemas de otimização separados. Em um deles os parâmetros da estrutura são otimizados, mantendo-se fixo o controlador. No outro, realiza-se a otimização do controlador, com os parâmetros da estrutura fixos (PETERS, 2010).

O algoritmo sequencial consiste nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Define-se o contador de iterações $i = 0$. São dados os parâmetros iniciais da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i = 0)$, sendo que $\boldsymbol{\beta}_p^L \leq \boldsymbol{\beta}_p(0) \leq \boldsymbol{\beta}_p^U$.
- Etapa 2: Formula-se o modelo de estados da estrutura $\mathbf{P}(i)$, correspondente a $\boldsymbol{\beta}_p(i)$, conforme detalhado nas Equações (37) a (39).
- Etapa 3: Para a estrutura $\mathbf{P}(i)$ obtida na Etapa 2 projeta-se o controlador H_∞ , denotado por $\boldsymbol{\beta}_c(i)$, pelo método das LMIs. Assim sendo, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (78), \\ & (87). \end{aligned} \tag{112}$$

- Etapa 4: Determinado o controlador $\boldsymbol{\beta}_c(i)$, otimiza-se a soma ponderada da norma H_∞ da malha fechada, o peso da mola e a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, variando-se os parâmetros da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i)$ e mantendo fixo o controlador. Sendo assim, o seguinte problema é resolvido:

$$\min \quad \%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} \frac{\|T_{wz}(s)\|_\infty}{\|T_{wz}(s)\|_{\infty_{max}}} + \%_{peso} \frac{peso}{peso_{max}} + \%_{\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{\tau_{max_{max}}} \quad (113)$$

$$\text{sujeito a} \quad \beta_p^L \leq \beta_p \leq \beta_p^U.$$

- Etapa 5: O algoritmo é terminado.

5.3 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO ITERATIVA

A otimização iterativa, assim como a otimização sequencial, consiste em dois problemas de otimização separados, onde em um deles realiza-se o projeto dos parâmetros da estrutura, sem comprometer o projeto do controlador, e no outro problema é realizado o projeto do controlador com os parâmetros da estrutura fixos. No entanto, ao contrário da estratégia sequencial, nesta estratégia, a otimização é resolvida iterativamente até que a convergência seja alcançada (PETERS, 2010 apud GRIGORIADIS; SKELTON, 1998).

O algoritmo iterativo consiste nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Define-se o contador de iterações $i = 0$. São dados os parâmetros iniciais da estrutura $\beta_p(i = 0)$, sendo que $\beta_p^L \leq \beta_p(0) \leq \beta_p^U$.
- Etapa 2: Formula-se o modelo de estados da estrutura $P(i)$, correspondente a $\beta_p(i)$, conforme detalhado nas Equações (37) a (39).
- Etapa 3: Para a estrutura $P(i)$ obtida na Etapa 2 projeta-se o controlador H_∞ , denotado por $\beta_c(i)$, pelo método das LMIs. Assim sendo, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (78), \\ & (87). \end{aligned} \quad (114)$$

- Etapa 4: Determinado o controlador $\beta_c(i)$, otimiza-se a soma ponderada da norma H_∞ da malha fechada, o peso da mola e a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, variando-se os parâmetros da estrutura $\beta_p(i)$ e mantendo fixo o controlador. Sendo assim, o seguinte problema é resolvido:

$$\min \quad \%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} \frac{\|T_{wz}(s)\|_\infty}{\|T_{wz}(s)\|_{\infty_{max}}} + \%_{peso} \frac{peso}{peso_{max}} + \%_{\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{\tau_{max_{max}}} \quad (115)$$

$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{\beta}_p^L \leq \boldsymbol{\beta}_p \leq \boldsymbol{\beta}_p^U.$$

- Etapa 5: Verifica-se os critérios de convergência e de parada do algoritmo.

– O critério de convergência do algoritmo é dado pela relação:

$$|\boldsymbol{\beta}_p^* - \boldsymbol{\beta}_p(i)| < tol, \quad (116)$$

onde tol é uma tolerância dada e $\boldsymbol{\beta}_p^*$ são os parâmetros da estrutura otimizados.

– O critério de parada do algoritmo, para o caso de não convergência, é dado pelo número máximo de iterações em $\boldsymbol{\beta}_p$ permitido.

Se todos os critérios forem satisfeitos, o algoritmo termina. Caso contrário, faz-se:

- $i = i + 1$;
- $\boldsymbol{\beta}_p(i) = \boldsymbol{\beta}_p^*$;
- Retorna para a Etapa 2.

5.4 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO ANINHADA

A estratégia aninhada consiste em duas rotinas de otimização: um laço externo que executa o projeto dos parâmetros da estrutura e um laço de otimização interno que identifica o controlador para cada projeto dos parâmetros da estrutura considerado pelo laço exterior (DUTRA; BRITO, 2018 apud HERBER, 2014).

O algoritmo aninhado consiste nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Define-se o contador de iterações $i = 0$. São dados os parâmetros iniciais da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i = 0)$, sendo que $\boldsymbol{\beta}_p^L \leq \boldsymbol{\beta}_p(0) \leq \boldsymbol{\beta}_p^U$.
- Etapa 2: O laço externo otimiza a soma ponderada do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, variando os parâmetros da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i)$. Sendo assim, o seguinte problema é resolvido:

$$\min \quad \%_{\text{peso}} \frac{\text{peso}}{\text{peso}_{\text{max}}} + \%_{\tau_{\text{max}}} \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}_{\text{max}}}} \quad (117)$$

$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{\beta}_p^L \leq \boldsymbol{\beta}_p \leq \boldsymbol{\beta}_p^U.$$

- Etapa 3: Formula-se o modelo de estados da estrutura $\mathbf{P}(i)$, correspondente a $\boldsymbol{\beta}_p(i)$, conforme detalhado nas Equações (37) a (39).
- Etapa 4: Para a estrutura $\mathbf{P}(i)$ obtida na Etapa 3, o laço interno projeta o controlador H_∞ , denotado por $\boldsymbol{\beta}_c(i)$, pelo método das LMIs. Assim sendo, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mu = \gamma^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (78), \\ & (87). \end{aligned} \quad (118)$$

- Etapa 5: Com base no valor de γ , que é o custo ou valor mínimo encontrado para $\|\mathbf{T}_{wz}(s)\|_\infty$ obtido na Etapa 4, retorna-se, então a Etapa 2, no qual o laço externo otimiza a função objetivo em relação à planta, com o controlador para essa planta. O laço interno encontra o novo controlador para a nova planta candidata gerado pelo laço externo.
- Etapa 6: Esse processo é repetido até que o índice de desempenho otimizado do sistema é encontrado, e dessa forma, a estrutura mecânica e os parâmetros de controle são determinados.

6 CONDIÇÕES DE PROJETO DA SUSPENSÃO AUTOMOTIVA E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, as condições de projeto e os resultados para o problema de otimização dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador da suspensão automotiva são apresentadas. Três estratégias de otimização foram estudadas para resolver o problema proposto, sendo elas a estratégia sequencial, a estratégia iterativa e a estratégia aninhada.

6.1 CONDIÇÕES DE PROJETO DA ESTRUTURA MECÂNICA DO SISTEMA DE SUSPENSÃO

Os dados nominais da suspensão foram retirados de Pereira (2011), referente ao veículo Fiat Uno do ano de 2006, com seus parâmetros definidos na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros referentes a um quarto de carro do Fiat Uno do ano de 2006.

Variável	Descrição	Valor
m_s	Massa suspensa	260 kg
m_u	Massa não suspensa	31,5 kg
k_s	Coefficiente de rigidez da mola da suspensão	16878,32 N/m
b_s	Coefficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão	1554 Ns/m
k_t	Coefficiente de rigidez do pneu	190000 N/m

Fonte: Pereira (2011).

O procedimento de cálculo dos limitantes superiores e inferiores dos coeficientes de rigidez da mola e de amortecimento do amortecedor da suspensão são dados através da definição das frequências naturais da massa suspensa e da massa não suspensa, conforme Equações (119) e (120), respectivamente.

$$f_{n1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s k_t}{m_s (k_s + k_t)}} \quad (119)$$

$$f_{n2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_s + k_t}{m_u}} \quad (120)$$

Sabe-se que a amplitude da aceleração cresce com a frequência, sendo assim a maneira mais eficaz de isolar o veículo das irregularidades da pista é mantendo o valor da frequência fundamental o mais baixo possível. De acordo com Nicolazzi, Rosa e Leal (2012), a faixa de frequência recomendável para a seleção da rigidez das molas da suspensão dos veículos de passeio situa-se na faixa de 1,0 a 1,5 Hz. Os veículos de alto desempenho, que sacrificam o conforto em detrimento de melhores características de manobrabilidade, tem a rigidez das molas das suspensões selecionadas para a faixa de frequência natural de 2,0 a 2,5 Hz. Quando o veículo é grande e o espaço disponível para o curso da suspensão também, existe a possibilidade de fazer uso de frequências naturais baixas para a seleção da rigidez da mola. Segundo Gillespie (1992), a rigidez das molas da suspensão fica em torno de 10% da rigidez dos pneus e os valores típicos para a frequência natural das massas não suspensas é na faixa de 10 a 15 Hz.

Com a definição de $1,0 \leq f_{n1} \leq 1,5$ e $10 \leq f_{n2} \leq 15$ obtêm-se os limitantes do coeficiente de rigidez da mola da suspensão, que corresponde em aproximadamente $\pm 30\%$ do valor nominal definido na Tabela 1.

$$11814,82 \text{ N/m} \leq k_s \leq 21941,81 \text{ N/m} \quad (121)$$

O coeficiente de amortecimento pode ser estimado a partir da Equação (122) proposta por Genta e Morello (2009):

$$b_s = \sqrt{\frac{k_s m_s}{2}} \sqrt{\frac{k_t + (2k_s)}{k_t}} \quad (122)$$

Substituindo os respectivos valores na Equação (122), encontram-se os limitantes do coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão, que corresponde em aproximadamente $\pm 20\%$ do valor nominal definido na Tabela 1.

$$1243,20 \text{ Ns/m} \leq b_s \leq 1864,80 \text{ Ns/m} \quad (123)$$

Como mencionado anteriormente, os parâmetros k_s e b_s são tratados como variáveis de projeto dependentes, os relacionando através de restrições geométricas. É utilizado um modelo de planta que calcula o coeficiente de rigidez e o coeficiente de amortecimento em função das variáveis geométricas independentes do projeto da mola e do amortecedor, conforme as Equações (13) e (23).

As variáveis de otimização do projeto da planta, que compõe o vetor do projeto da planta $\boldsymbol{\beta}_p$, são o diâmetro da hélice ϕ_h , o diâmetro do fio ϕ_f , o passo da mola $passo$, o diâmetro do pistão de trabalho ϕ_p e o diâmetro da válvula ϕ_o .

Os valores nominais do diâmetro da hélice, do diâmetro do fio e do número de bobinas ativas para a mola empregado no veículo Fiat Uno do ano de 2006 foram retirados de Pereira (2011), que consiste, respectivamente, em $\phi_h = 0,123 \text{ m}$, $\phi_f = 0,012 \text{ m}$ e $n_a = 6$. Especificando o comprimento livre da mola $l_{o_{max}} = 0,330 \text{ m}$ e fazendo uso da Equação (11), com os valores nominais de ϕ_f e n_a , obtém-se $passo = 0,051 \text{ m}$.

Definem-se os limitantes superiores e inferiores do diâmetro da hélice como sendo $\pm 30\%$ do valor nominal e do diâmetro do fio como sendo $\pm 25\%$ do valor nominal, isto é:

$$0,0861 \leq \phi_h \leq 0,16, \quad (124)$$

$$0,009 \leq \phi_f \leq 0,015. \quad (125)$$

Dessa forma, através das Equações (18) e (19), definem-se o diâmetro interno mínimo como sendo $\phi_{int_{min}} = 0,071 \text{ m}$ e o diâmetro externo máximo como sendo $\phi_{ext_{max}} = 0,175 \text{ m}$.

No projeto da mola se considera o aço ASTM A401, que possui módulo de elasticidade $E = 203,4 \text{ GPa}$ e módulo de cisalhamento $G = 77,2 \text{ GPa}$. De acordo com Allison, Guo e Han (2014), considera-se uma folga de $\delta_{dc} = 0,0090 \text{ m}$ entre a mola e o amortecedor e a espessura da parede do amortecedor como sendo $\varepsilon = 0,0020 \text{ m}$.

O limitante inferior e o superior do passo da mola são dados pela Equação (126). Sendo assim, as restrições de projeto referentes à mola da suspensão são dadas pelas Equações (126) a (132).

$$0,030 \leq passo \leq 0,072 \quad (126)$$

$$4\phi_f \leq \phi_h \leq 12\phi_f \quad (127)$$

$$l_o \leq 5,26\phi_h \quad (128)$$

$$l_o \leq 0,330 \quad (129)$$

$$\phi_f + \phi_h \leq 0,175 \quad (130)$$

$$\phi_h - \phi_f \geq 0,071 \quad (131)$$

$$\phi_f - \phi_h + \phi_p + 0,022 \leq 0 \quad (132)$$

No projeto do amortecedor especifica-se o coeficiente de descarga como sendo, aproximadamente, $\kappa_d = 0,70$ para válvulas de carretel, a constante da mola da válvula de carretel $\kappa_v = 7500$ N/m e a densidade do fluido do amortecedor $\rho = 850$ kg/m³. Considere-se $\eta = 0,9$ e $a_f = 0,1$ (ALLISON; GUO; HAN, 2014).

O valor nominal do diâmetro do pistão foi estimado com base na literatura, que informa que, para uma suspensão automotiva dianteira do tipo *McPherson*, o valor do diâmetro do pistão pode ser de 0,030 m ou 0,032 m (REIMPELL et al., 2001). Considerou-se $\phi_p = 0,030$ m como limite inferior e $\phi_p = 0,036$ m como limite superior, conforme dado na Equação (133). O limitante inferior e o superior do diâmetro da válvula são dados pela Equação (134).

$$0,030 \leq \phi_p \leq 0,036 \quad (133)$$

$$0,0042 \leq \phi_o \leq 0,0061 \quad (134)$$

Para análise comparativa entre os sistemas sem o projeto integrado (sistema ativo) e os sistemas com o projeto integrado (sequencial, iterativo e aninhado), assume-se que os valores iniciais dos parâmetros de projeto da planta são iguais para todos os casos.

Os valores iniciais referentes ao projeto da mola são selecionados como sendo os nominais, $\phi_h^o = 0,123$ m, $\phi_f^o = 0,012$ m, $passo^o = 0,051$ m. Em relação aos valores iniciais do projeto do amortecedor, assume-se $\phi_p^o = 0,033$ m e $\phi_o^o = 0,0051$ m, que corresponde ao valor médio do limitante inferior e superior de cada parâmetro. Estes parâmetros conduzem a $k_s = 17837,080679$ N/m e $b_s = 1510,307857$ Ns/m, conforme Equações (13) e (23).

6.2 CONDIÇÕES DE PROJETO DO CONTROLADOR H_∞ DO SISTEMA DE SUSPENSÃO

De acordo com Gillespie (1992), as duas principais funcionalidades do sistema de suspensão são isolar os passageiros das perturbações rodoviárias a fim de proporcionar boa qualidade de passeio e manter os pneus em contato com o solo com variações mínimas de carga para garantir boa aderência à estrada.

Portanto, visando melhorar o comportamento dinâmico do veículo considerado neste trabalho, o projeto de controle H_∞ do sistema de suspensão foi efetuado de forma a garantir ambos os requisitos, conforto de condução e segurança veicular.

Neste âmbito, como saídas a serem controladas $\mathbf{z}(t)$ têm-se a aceleração vertical da massa suspensa \ddot{Z}_s e a diferença entre o deslocamento da massa não suspensa e da irregularidade da pista $Z_u - Z_r$. O espaço de trabalho da suspensão, $Z_s - Z_u$, também foi adicionado como saída de desempenho.

A saída de controle $\mathbf{y}(t)$ utilizada para realimentar o sistema é o espaço de trabalho da suspensão $Z_s - Z_u$. A razão disso é que esta variável corresponde à extensão/compressão do atuador, grandeza esta que pode ser medida pelos sensores (DUTRA, 2016).

A partir dessas considerações, definem-se as matrizes da formulação de controle H_∞ do sistema de suspensão ativa para otimização do conforto e da segurança:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t), \quad (135)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t), \quad (136)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t), \quad (137)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_r$ e $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_A$, definidas nas Equações (8) a (10), respectivamente.

A entrada exógena $\mathbf{w}(t)$ é a perturbação Z_r proveniente das irregularidades da estrada e a entrada de controle $\mathbf{u}(t)$ é a força ativa F_A entre as massas suspensas e não suspensas. Esta força pode ser realizada através de um atuador eletro-hidráulico, pneumático ou eletromagnético, porém os detalhes do atuador não serão considerados neste trabalho.

As matrizes relacionadas com a saída a ser controlada e com a saída de controle são dadas respectivamente por:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (138)$$

$$\mathbf{C}_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad \mathbf{D}_{21} = 0, \quad \mathbf{D}_{22} = 0. \quad (139)$$

6.3 IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DO PROJETO INTEGRADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO

No trabalho, são utilizadas funções do *Yalmip Toolbox* (SANTOS, 2010 apud MAZONI; SERPA, 2007 e LÖFBERG, 2004) para a solução dos problemas de otimização do controlador H_∞ . Esse *Toolbox* permite ao usuário entrar com os dados do problema e a solução para os problemas é dada de forma intuitiva. As principais características desse aplicativo é que ele tem uma interface amigável e oferece a possibilidade de uso de *solvers* externos para encontrar a solução dos problemas de otimização.

Os problemas de otimização dos parâmetros da planta deste trabalho foram realizados utilizando a função de otimização *fmincon* e os problemas de otimização do controlador H_∞ foram feitas através do *solver sdpt3*.

Os sistemas de suspensão são comparados em relação às respostas a uma dada excitação a partir das irregularidades da estrada. Neste estudo, definem-se dois perfis de estrada para excitar o sistema de suspensão, os quais são a excitação lombada e a excitação senoidal.

“A excitação lombada, com altura e largura definidas, representando um obstáculo à frente do veículo, é um tipo de entrada de excitação a qual o sistema real está sujeito frequentemente” (DUTRA, 2016). De acordo com a resolução 39/98 do conselho nacional de trânsito CONTRAN (1998), existe dois tipos de ondulações transversais:

- TIPO I – somente poderão ser instaladas quando houver necessidade de serem desenvolvidas velocidades até um máximo de 20 km/h, em vias locais, onde não circulem linhas regulares de transporte coletivo, com as seguintes dimensões:
 - a) largura: igual à da pista, mantendo-se as condições de drenagem superficial;
 - b) comprimento: 1,50 m;
 - c) altura: até 0,080 m.

- TIPO II – só poderão ser instaladas nas vias rurais (rodovias) em segmentos que atravessam aglomerados urbanos com edificações lindeiras, em vias coletoras ou em vias locais, quando houver necessidade de serem desenvolvidas velocidades até um máximo de 30 km/h, com as seguintes dimensões:
 - a) largura: igual à da pista, mantendo-se as condições de drenagem superficial;
 - b) comprimento: 3,70 m;
 - c) altura: até 0,10 m.

De acordo com Dutra (2016), a lombada pode ser representada pela parte positiva de uma função seno. Assim sendo, a expressão matemática da lombada é dada por:

$$Z_r(t) = \frac{h_i(t)}{2} (1 - \cos(\omega(t)t_p)), \quad (140)$$

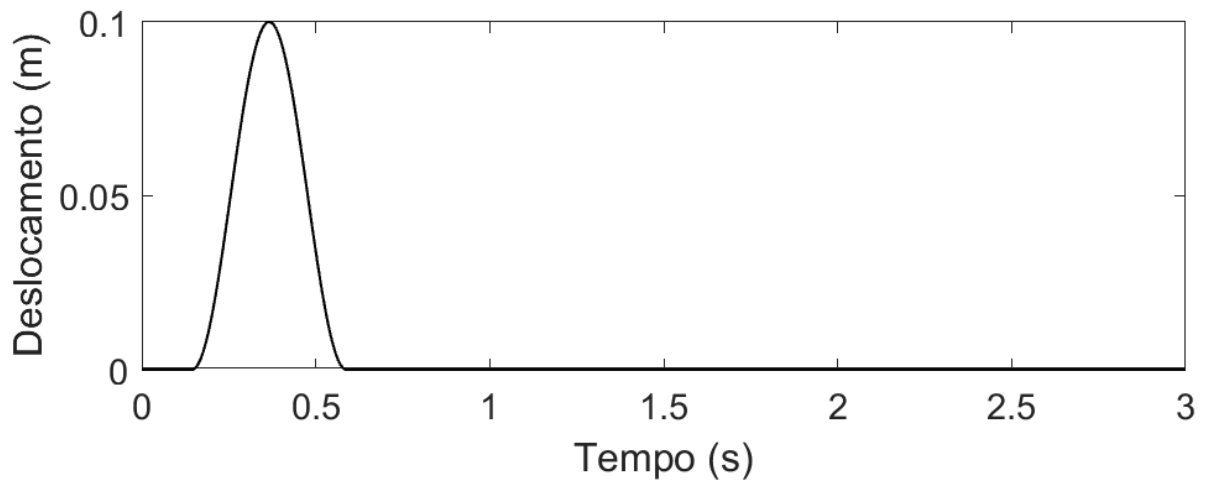
onde $h_i(t)$ representa a amplitude da irregularidade, t_p representa o tempo de passagem do veículo pela lombada e ω representa a frequência angular, dada por:

$$\omega(t) = \frac{2\pi v_v(t)}{l_{lom}}, \quad (141)$$

em que $v_v(t)$ é a velocidade na qual o veículo se move e l_{lom} é o comprimento da lombada (DUTRA, 2016).

Nas simulações deste trabalho, considera-se o veículo passando pela excitação lombada tipo II, de 3,70 m de comprimento e 0,10 m de altura, a uma velocidade de 30 km/h, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Excitação lombada de 3,70 m de comprimento e 0,10 m de altura.



Fonte: Autora (2019).

A excitação senoidal é dada por (DUTRA, 2016):

$$Z_r(t) = h_i(t) \sin(\omega(t)t_p), \quad (142)$$

onde $h_i(t)$ representa a amplitude da irregularidade e $\omega(t)$ representa a frequência angular.

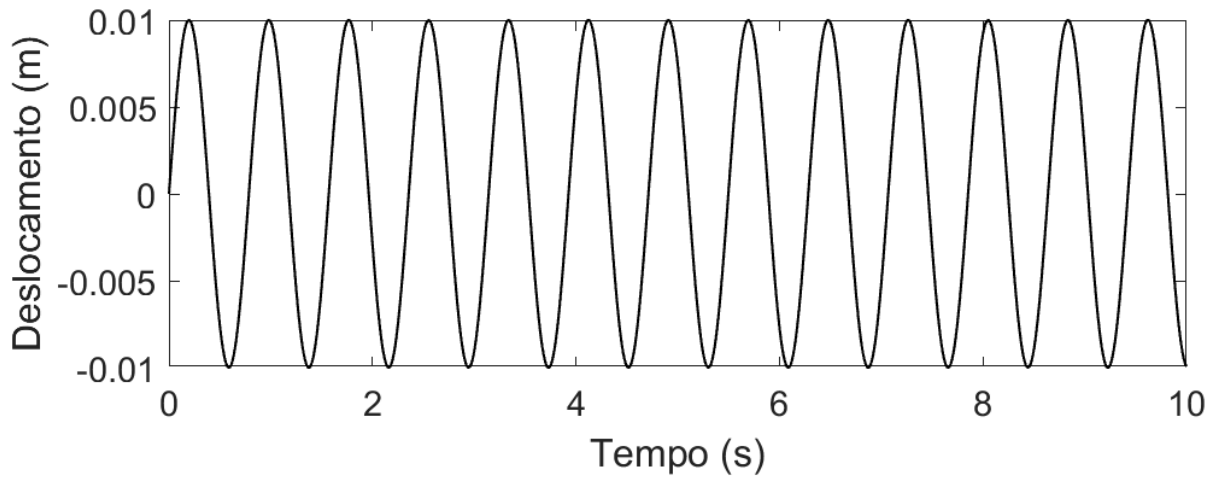
De acordo com Dutra (2016 apud CORRÊA, 2011), a escolha da frequência de excitação do sinal senoidal tem como objetivo a imposição do sistema a condições críticas, ou seja, a frequência de ressonância da massa suspensa e a frequência de ressonância da roda, dada pelas Equações (143) e (144).

$$\omega_{ms}(t) = \sqrt{k_s/m_s} \quad (143)$$

$$\omega_{roda}(t) = \sqrt{k_t/m_u} \quad (144)$$

Para as simulações considerando o perfil de estrada senoidal, define-se $\omega(t) = 8$ rad/s, que é próximo da frequência de ressonância da massa suspensa. Considera-se a amplitude da onda senoidal 0,010 m, conforme mostrado na Figura 12.

Figura 12 – Excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

Dado que tenha sido aceito que uma suspensão ativa tem melhor conforto de condução e segurança veicular do que uma suspensão passiva, se presta mais atenção às comparações entre a suspensão ativa sem projeto integrado e com projeto integrado.

Os índices de desempenho de conforto e segurança veicular são, respectivamente, a aceleração da massa suspensa \ddot{Z}_s e a força de contato entre o pneu e a pista F_z , dada pela soma da força dinâmica com a força estática (DUTRA, 2016 apud LAJQI; PEHAN, 2012):

$$F_z = F_{din} + F_{est} = k_t(Z_u - Z_r) + g(m_s + m_u). \quad (145)$$

O valor de pico é a amplitude que o sistema atinge em sua resposta no domínio do tempo. A comparação entre as amplitudes máxima e mínima do sistema ativo sem projeto integrado e do sistema ativo com projeto integrado é dada pela Equação (146):

$$\Delta_{pico} = \frac{(pico_{max_a} - pico_{min_a}) - (pico_{max_o} - pico_{min_o})}{pico_{max_a} - pico_{min_a}} \times 100, \quad (146)$$

onde Δ_{pico} é o percentual de redução em termos do valor pico a pico das respostas temporais dos sistemas ativo sem projeto integrado e com projeto integrado, $pico_{max_a} - pico_{min_a}$ é a diferença entre o máximo e o mínimo valor de pico na resposta temporal do sistema ativo sem projeto integrado e $pico_{max_o} - pico_{min_o}$ é a diferença entre o máximo e o mínimo valor de pico na resposta temporal do sistema otimizado.

6.4 PROJETO INTEGRADO SEQUENCIAL

A primeira estratégia de otimização empregada foi a otimização sequencial, que consiste em realizar o projeto dos parâmetros da planta e o projeto dos parâmetros do controlador por meio de dois problemas de otimização separados.

Dados os parâmetros iniciais de projeto da planta, conforme especificado na Seção 6.1, calcula-se o controlador inicial. Com este controlador, dadas as condições iniciais dos parâmetros de projeto da planta e as restrições dadas pelas Equações (126) a (134), realiza-se a otimização dos parâmetros da planta.

A função objetivo utilizada na etapa de otimização dos parâmetros da planta consiste na soma ponderada da norma H_∞ do sistema em malha fechada, do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, conforme foi definido na Equação (111). Na Equação (111), $\%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} = 0,10$, $\%_{peso} = 0,30$ e $\%_{\tau_{max}} = 0,60$.

Os parâmetros otimizados da planta resultaram em $\phi_h = 0,12260436$ m, $\phi_f = 0,01032186$ m, $passo = 0,06171409$ m, $\phi_p = 0,03595024$ m e $\phi_o = 0,00609998$ m. Substituindo estes valores nas Equações (13) e (23), resulta, respectivamente, em $k_s = 11814,921726$ N/m e $b_s = 1243,202124$ Ns/m. Com estes valores otimizados realiza-se a otimização do controlador H_∞ , onde a função custo é a própria norma infinita.

6.4.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto sequencial

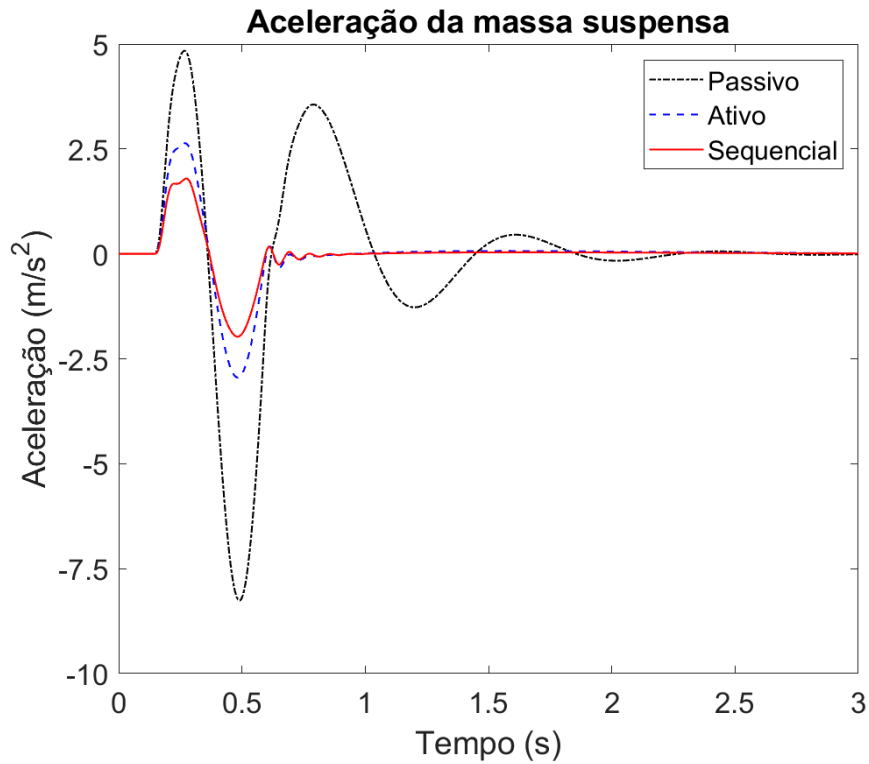
Para análise comparativa do desempenho entre os sistemas considera-se o veículo passando pela excitação lombada, conforme foi ilustrado na Figura 11.

Como parâmetros de comparação são utilizados a aceleração vertical da massa suspensa, conforme mostrado na Figura 13 e a força de contato entre o pneu e a pista, conforme apresentado na Figura 14.

Vale ressaltar que o valor inicial da força de contato entre o pneu e a pista, igual a 2860 N, mostrado na Figura 14, é referente à força estática, pois antes da perturbação a parcela da força dinâmica da Equação (145) é nula.

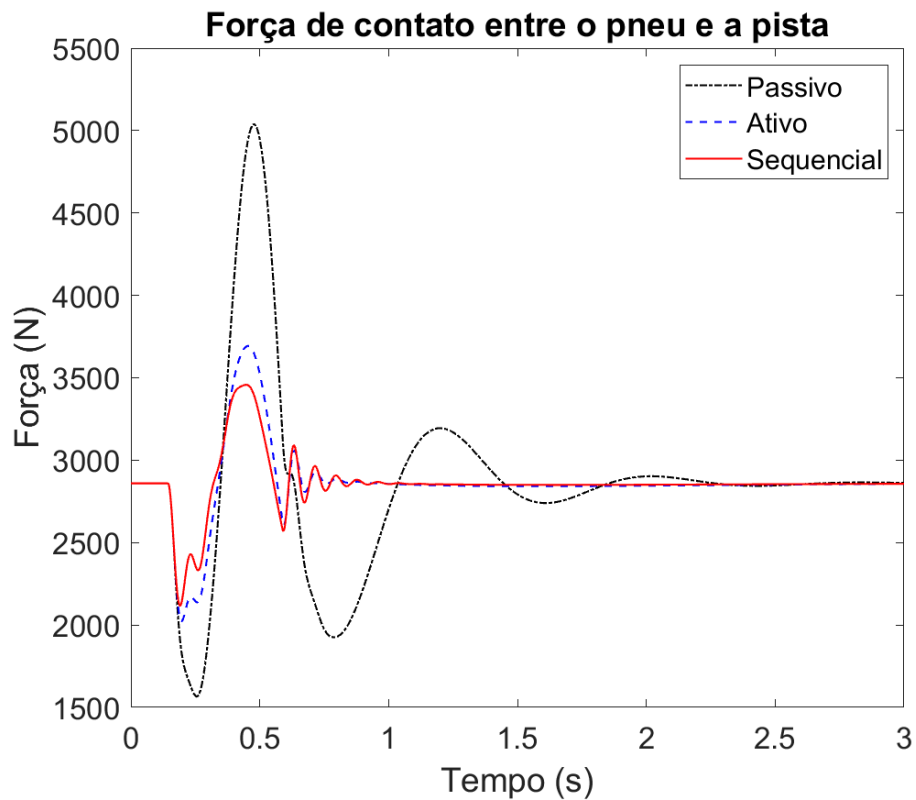
Na Tabela 2 são mostrados os valores da aceleração vertical da massa suspensa para o sistema passivo, o sistema ativo e o sistema sequencial.

Figura 13 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Figura 14 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Tabela 2 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.

Aceleração [m/s^2]	Pico Máximo	Pico Mínimo	RMS
Sistema Passivo	4,839	-8,261	2,133
Sistema Ativo	2,636	-2,945	0,773
Sistema Sequencial	1,795	-1,973	0,519

Fonte: Autora (2019).

A partir dos valores da Tabela 2 e fazendo uso da Equação (146), verifica-se que o sistema sequencial reduz em 32,4% o valor pico a pico da resposta temporal da aceleração da massa suspensa. A partir da Figura 13 e dos valores da Tabela 2 nota-se que além da redução no valor pico a pico, houve também uma redução de 32,8% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa.

Na Tabela 3 são mostrados os valores da força de contato entre o pneu e a pista para o sistema passivo, o sistema ativo e o sistema sequencial.

Tabela 3 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.

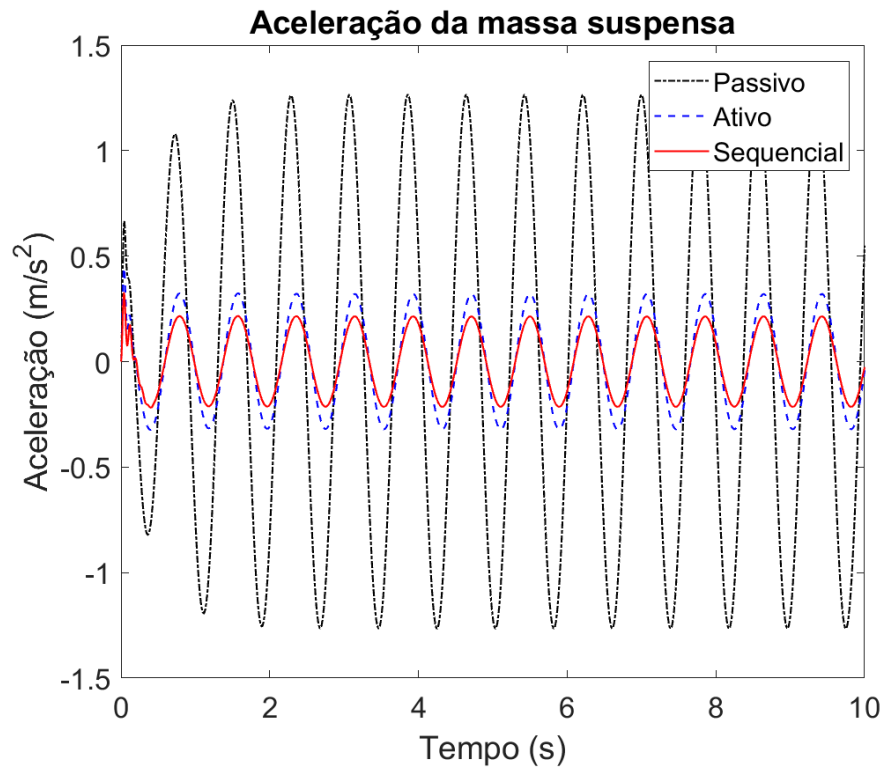
Força de contato [N]	Pico Máximo	Pico Mínimo
Sistema Passivo	5037,9985	1566,0959
Sistema Ativo	3693,1757	2023,3707
Sistema Sequencial	3457,5713	2116,6824

Fonte: Autora (2019).

Em relação à força de contato entre o pneu e a pista, verifica-se, a partir dos valores da Tabela 3 e fazendo uso da Equação (146), que o sistema sequencial reduz em 19,6% o valor pico a pico da resposta temporal. Os resultados mostram que, a força de contato forneceu sempre valores positivos, demonstrando que o pneu se manteve em contato constante com a pista.

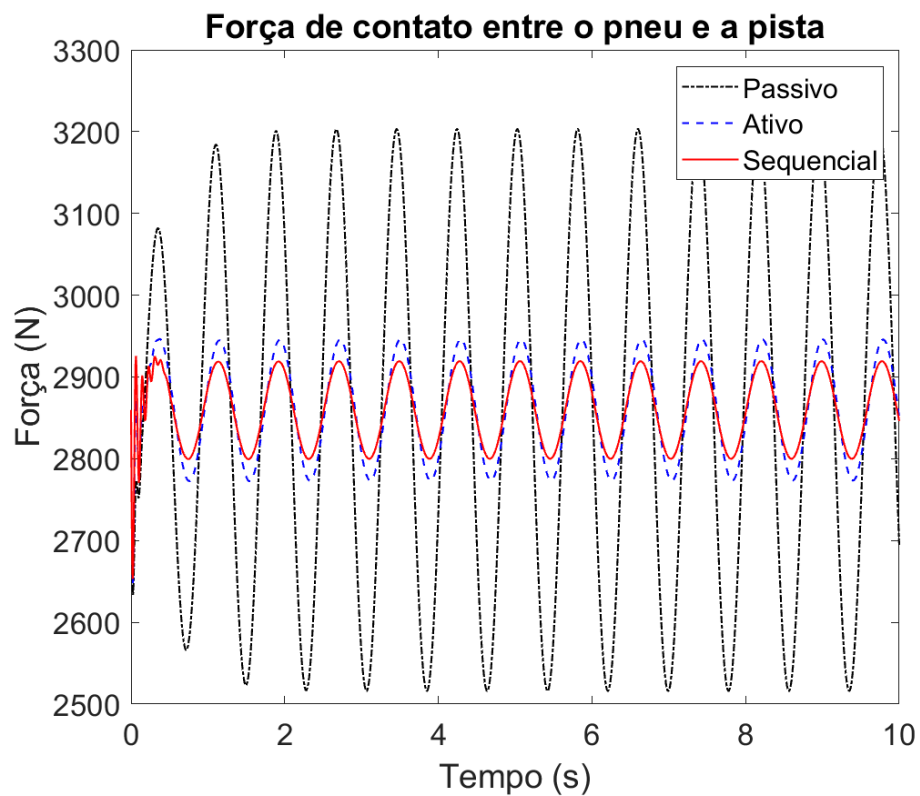
Na segunda simulação utiliza-se a excitação senoidal conforme foi mostrado na Figura 12. Na Figura 15 e na Figura 16 são mostradas, respectivamente, a aceleração da massa suspensa e a força de contato entre o pneu e a pista.

Figura 15 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

Figura 16 – Resposta da força de contato para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

A partir da Figura 15, observa-se que o sistema sequencial melhora a aceleração vertical na frequência de ressonância da massa suspensa em relação ao sistema ativo. O valor *RMS* da aceleração da massa suspensa no sistema ativo é de 0,226 e no sistema sequencial é de 0,151. Sendo assim, nota-se que houve uma redução de 33,2% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa.

Em relação à segurança, observa-se através da Figura 16, que o sistema sequencial apresenta valores da variação da força de contato entre o pneu e a pista inferiores ao do sistema ativo, contribuindo para a melhoria da segurança veicular.

Portanto, o projeto integrado dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador fazendo uso da estratégia de otimização sequencial reduz a aceleração vertical da massa suspensa e a variação da força de contato entre o pneu e a pista, contribuindo para a melhoria do conforto e da segurança veicular.

6.5 PROJETO INTEGRADO ITERATIVO

A segunda estratégia de otimização empregada foi a otimização iterativa, que consiste em realizar o projeto dos parâmetros da planta e o projeto dos parâmetros do controlador por meio de dois problemas de otimização separados. Este ciclo ocorre iterativamente até que a convergência seja alcançada.

Dados os parâmetros iniciais de projeto da planta, conforme foi definido na Seção 6.1, calcula-se o controlador inicial. Com este controlador, dado as condições iniciais dos parâmetros de projeto da planta e as restrições dadas pelas Equações (126) a (134), realiza-se a otimização dos parâmetros da planta.

A função objetivo utilizada na etapa de otimização dos parâmetros da planta consiste na soma ponderada da norma H_∞ do sistema em malha fechada, do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, conforme foi definido na Equação (111). Na Equação (111), $\% \|r_{wz(s)}\|_\infty = 0,10$, $\%_{peso} = 0,30$ e $\%_{\tau_{max}} = 0,60$.

Com os valores dos parâmetros da planta otimizados realiza-se a otimização do controlador H_∞ , onde a função custo é a própria norma infinita. Este processo é resolvido iterativamente até que a convergência seja alcançada ou até alcançar o número de iterações máximas permitidas pelo usuário.

Considerou-se como critério de convergência a Equação (116), com a tolerância $tol = 0,001$ e caso a convergência não seja alcançada, considerou-se como critério de parada o número máximo de 1000 iterações.

Os parâmetros otimizados da planta resultaram em $\phi_h = 0,10609323$ m, $\phi_f = 0,00975475$ m, $passo = 0,05072590$ m, $\phi_p = 0,03578456$ m e $\phi_o = 0,00606090$ m. Substituindo estes valores nas Equações (13) e (23), resulta, respectivamente, em $k_s = 11903,619364$ N/m e $b_s = 1244,199198$ Ns/m.

6.5.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto iterativo

O comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista quando o veículo é submetido à excitação lombada, conforme foi ilustrado na Figura 11, são mostrados, respectivamente, na Figura 17 e na Figura 18.

Os valores da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista para o sistema passivo, o sistema ativo e o sistema iterativo são apresentados, respectivamente, na Tabela 4 e na Tabela 5.

Tabela 4 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.

Aceleração [m/s^2]	Pico Máximo	Pico Mínimo	RMS
Sistema Passivo	4,839	-8,261	2,133
Sistema Ativo	2,636	-2,945	0,773
Sistema Iterativo	1,602	-1,754	0,461

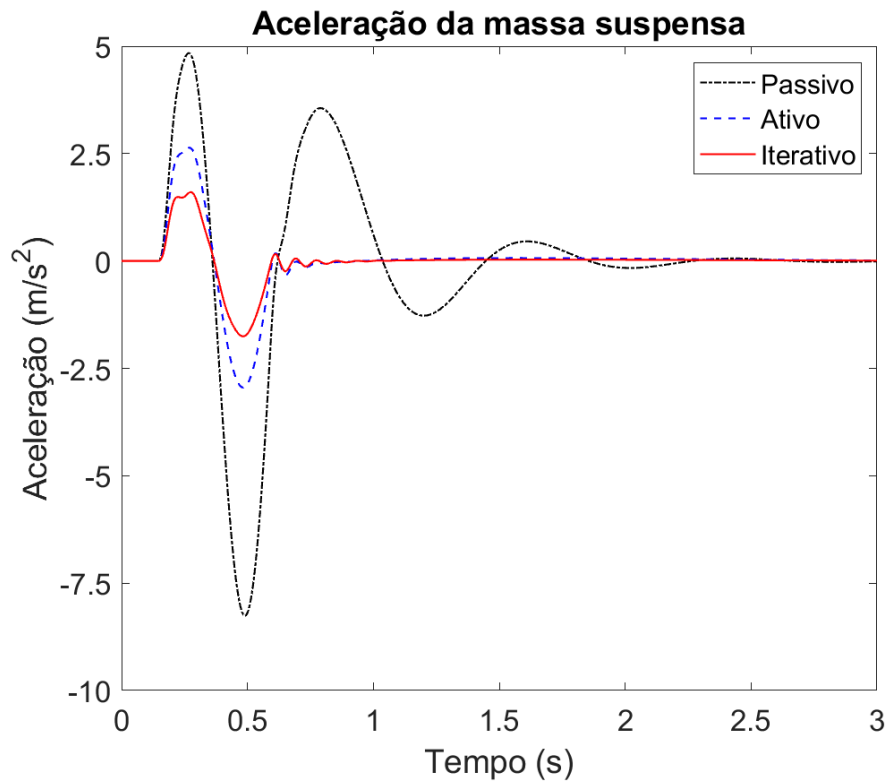
Fonte: Autora (2019).

Tabela 5 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.

Força de contato [N]	Pico Máximo	Pico Mínimo
Sistema Passivo	5037,9985	1566,0959
Sistema Ativo	3693,1757	2023,3707
Sistema Iterativo	3403,3703	2135,4319

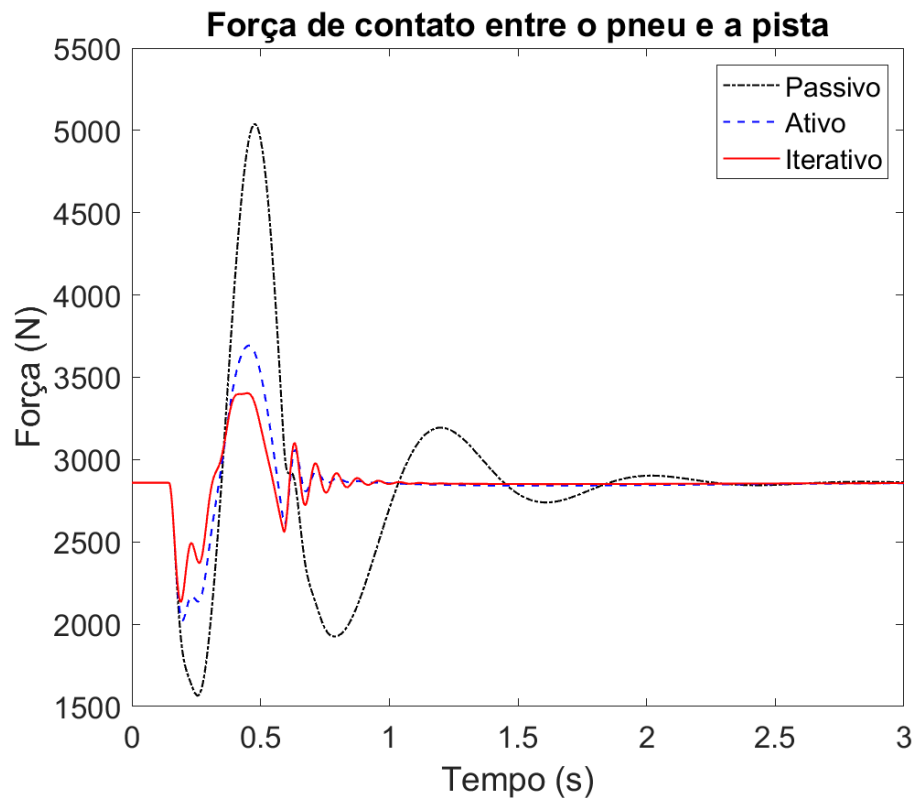
Fonte: Autora (2019).

Figura 17 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Figura 18 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Verifica-se, através da Tabela 4 e fazendo uso da Equação (146), que o sistema iterativo reduz em 39,8% o valor pico a pico da resposta temporal da aceleração da massa suspensa. Pela Figura 17 e através dos valores da Tabela 4, nota-se que além da redução no valor pico a pico, houve também uma redução de 40,3% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa no sistema iterativo quando comparado ao sistema ativo.

A partir dos valores da Tabela 5 e fazendo uso da Equação (146), verifica-se que o sistema iterativo reduz em 24,0% o valor pico a pico da resposta temporal da força de contato entre o pneu e a pista em relação ao sistema ativo. Os resultados mostram que, a força de contato forneceu sempre valores positivos, demonstrando que o pneu manteve contato constante com a pista.

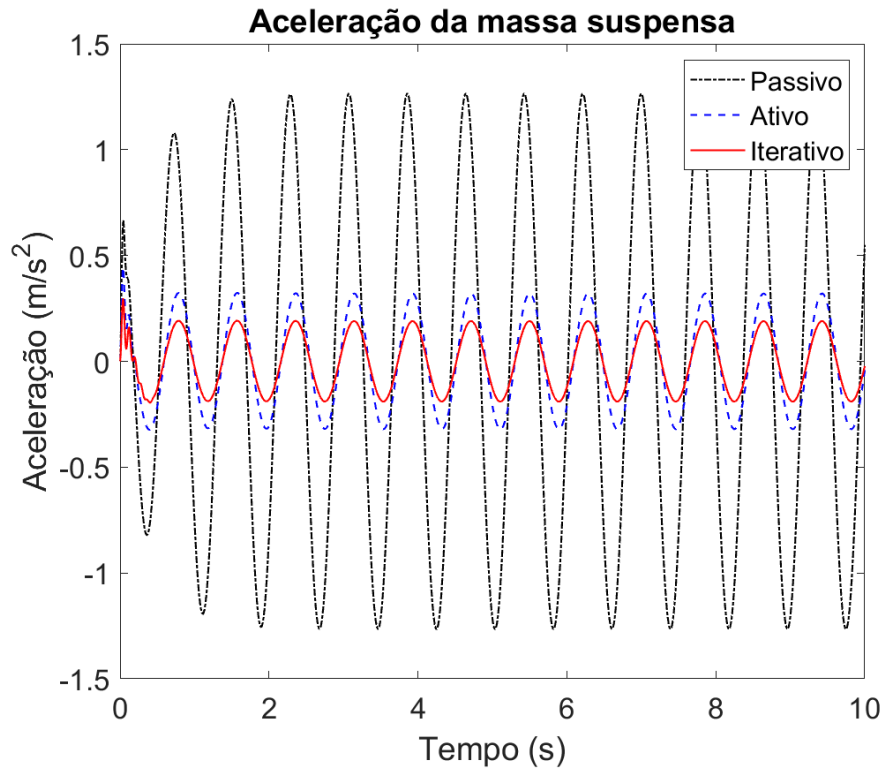
Sendo assim, pode-se constatar que o projeto integrado dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador, fazendo uso da estratégia de otimização iterativa, também melhora o comportamento em termos de conforto e segurança, pois assim como no caso sequencial, os valores da aceleração vertical da massa suspensa e da variação da força de contato entre o pneu e a pista são reduzidos.

Na segunda simulação do projeto integrado iterativo, utiliza-se novamente a excitação senoidal conforme foi ilustrado na Figura 12. Na Figura 19 e na Figura 20 são mostradas, respectivamente, a aceleração da massa suspensa e a força de contato entre o pneu e a pista.

Pela Figura 19, atesta-se que o sistema iterativo melhora a aceleração vertical na frequência de ressonância da massa suspensa em relação ao sistema ativo. O valor *RMS* da aceleração da massa suspensa no sistema ativo é de 0,226 e no sistema iterativo é de 0,134. Sendo assim, nota-se que houve uma redução de 40,7% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa.

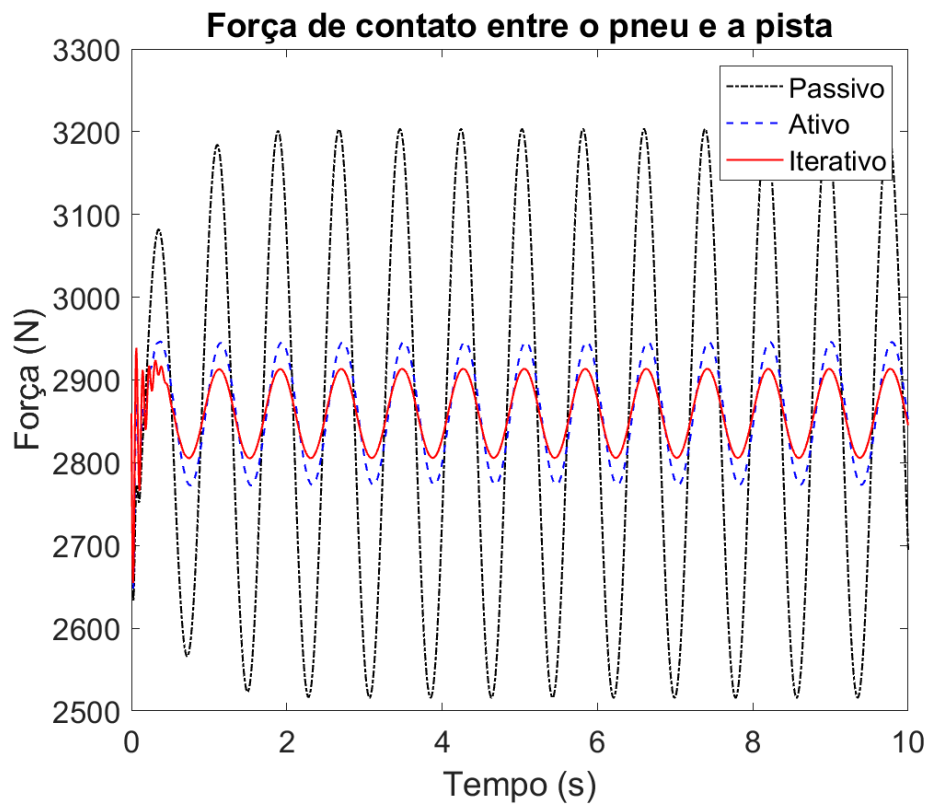
Em relação à segurança, observa-se pela Figura 20, que o sistema iterativo apresenta valores de força de contato entre o pneu e a pista inferiores ao do sistema ativo, contribuindo para a melhoria da segurança veicular.

Figura 19 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

Figura 20 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

6.6 PROJETO INTEGRADO ANINHADO

Na terceira estratégia, optou-se por utilizar a estratégia de otimização aninhada para realizar o projeto integrado dos parâmetros da planta e do controlador do sistema de suspensão veicular. Nesta metodologia, um laço de otimização externo executa o projeto da planta e um laço de otimização interno identifica o controle ótimo para cada projeto de planta testado pelo laço externo. Esse processo é repetido até que o índice de desempenho otimizado do sistema é encontrado.

Dados os parâmetros iniciais de projeto da planta, conforme foi definido na Seção 6.1, com as restrições dadas pelas Equações (126) à (134), o laço externo realiza a otimização dos parâmetros da estrutura. A função objetivo utilizada na etapa de otimização dos parâmetros da planta consiste na soma ponderada do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, conforme foi definido na Equação (111). Na Equação (111), $\%_{\|T_{wz}(s)\|_{\infty}} = 0,00$, $\%_{peso} = 0,40$ e $\%_{\tau_{max}} = 0,60$.

Para o modelo de estados da estrutura $\mathbf{P}(i)$, correspondente a $\beta_p(i)$, o laço interno projeta o controlador H_{∞} pelo método das LMIs, onde a função objetivo é a própria norma infinita. O algoritmo avalia o custo ou o valor mínimo encontrado para $\|T_{wz}(s)\|_{\infty}$ e repete este processo até encontrar o índice de desempenho otimizado do sistema.

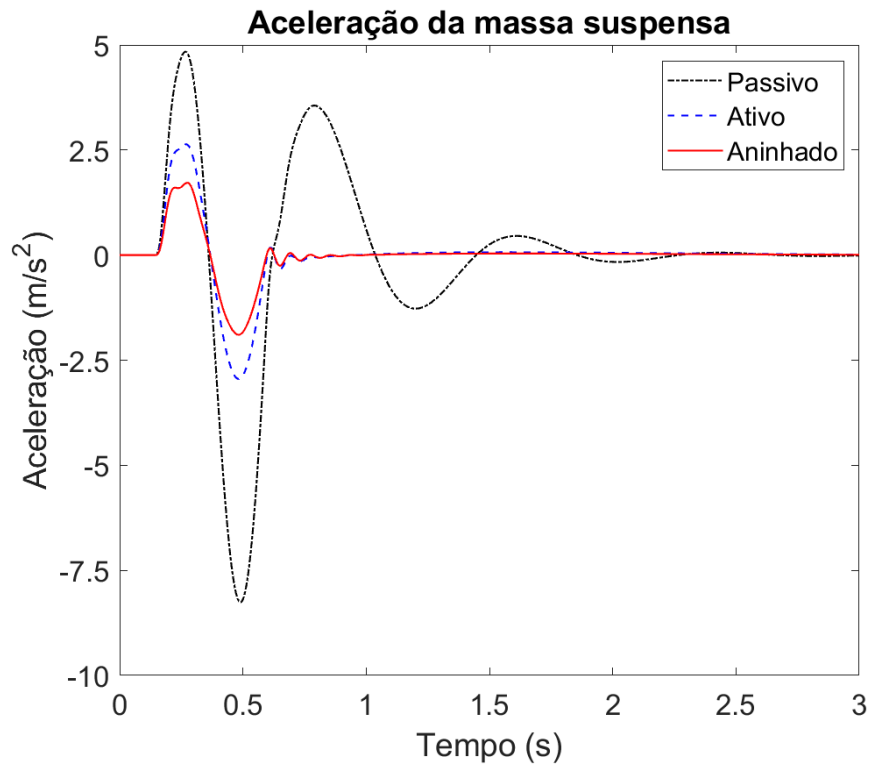
Os parâmetros otimizados da planta resultam em $\phi_h = 0,09039112$ m, $\phi_f = 0,00929881$ m, $passo = 0,05612528$ m, $\phi_p = 0,03348779$ m e $\phi_o = 0,00525523$ m. Substituindo estes valores nas Equações (13) e (23), resulta, respectivamente, em $k_s = 17514,819186$ N/m e $b_s = 1463,827370$ Ns/m.

6.6.1 Análise da dinâmica do sistema de suspensão para o projeto aninhado

A Figura 21 mostra o comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e a Figura 22 mostra o comportamento da força de contato entre o pneu e a pista, quando o veículo é submetido à excitação lombada, conforme foi ilustrado na Figura 11.

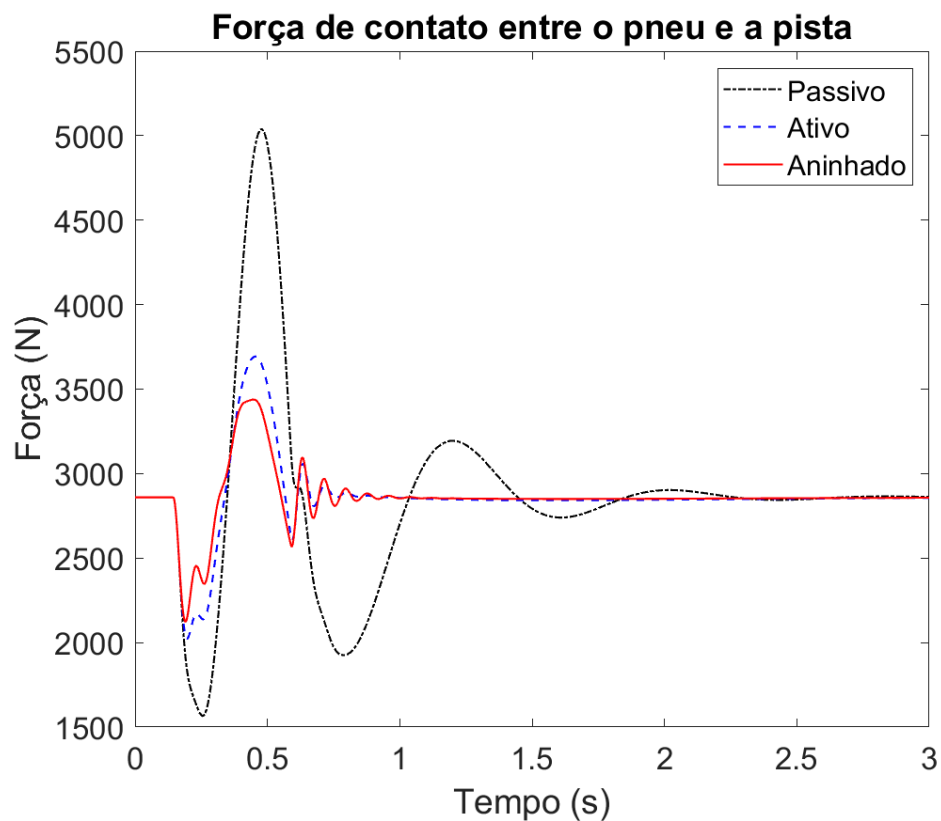
Os valores da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista para o sistema passivo, o sistema ativo e o sistema aninhado são apresentados, respectivamente, na Tabela 6 e na Tabela 7.

Figura 21 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Figura 22 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada.



Fonte: Autora (2019).

Tabela 6 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.

Aceleração [m/s^2]	Pico Máximo	Pico Mínimo	RMS
Sistema Passivo	4,839	-8,261	2,133
Sistema Ativo	2,636	-2,945	0,773
Sistema Aninhado	1,721	-1,895	0,498

Fonte: Autora (2019).

Tabela 7 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.

Força de contato [N]	Pico Máximo	Pico Mínimo
Sistema Passivo	5037,9985	1566,0959
Sistema Ativo	3693,1757	2023,3707
Sistema Aninhado	3438,3152	2123,9616

Fonte: Autora (2019).

A partir dos valores da Tabela 6 e fazendo uso da Equação (146), verifica-se que o sistema aninhado reduz em 35,2% o valor pico a pico da resposta temporal da aceleração da massa suspensa. A partir da Figura 21 e dos valores da Tabela 6, nota-se que além da redução no valor de pico, houve também uma redução de 35,5% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa no sistema aninhado quando comparado ao sistema ativo.

Verifica-se, através dos valores da Tabela 7 e fazendo uso da Equação (146), que o sistema aninhado reduz em 21,2% o valor pico a pico da resposta temporal da força de contato entre o pneu e a pista em relação ao sistema ativo.

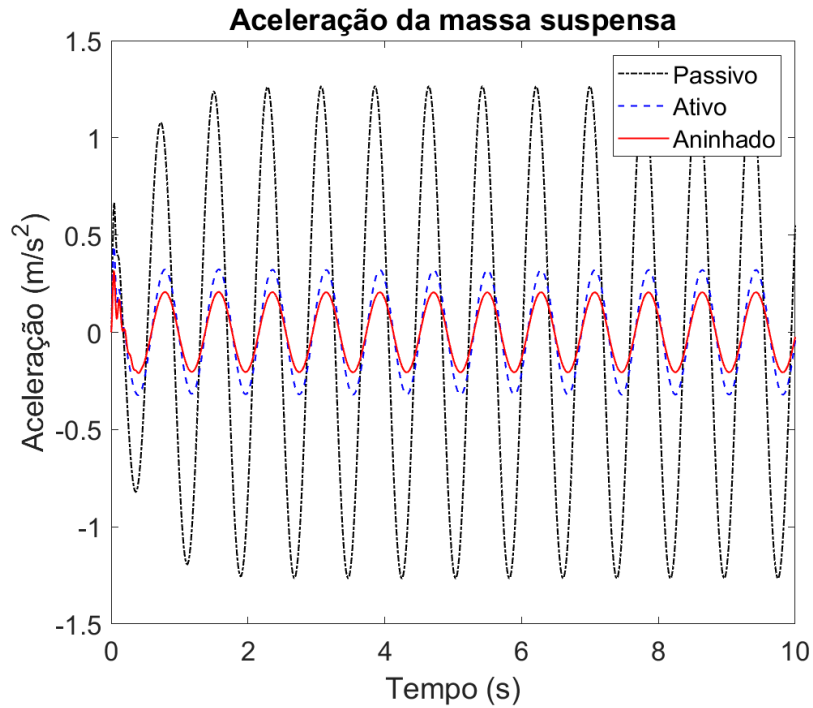
Na segunda simulação do projeto integrado aninhado, utiliza-se novamente a excitação senoidal conforme foi ilustrado na Figura 12. Na Figura 23 e na Figura 24 são mostradas, respectivamente, a aceleração da massa suspensa e a força de contato entre o pneu e a pista.

Observa-se através da Figura 23 que o sistema aninhado melhora a aceleração na frequência de ressonância da massa suspensa em relação ao sistema ativo. O valor *RMS* da aceleração da massa suspensa no sistema ativo é de 0,226 e no sistema aninhado é de 0,145. Sendo assim, houve uma redução de 35,8% no valor *RMS* da aceleração da massa suspensa.

Em relação à segurança, observa-se através da Figura 24, que o sistema aninhado apresenta valores da variação da força de contato entre o pneu e a pista inferiores ao do sistema ativo. Sendo assim, aqui também se observou que o projeto integrado dos parâmetros

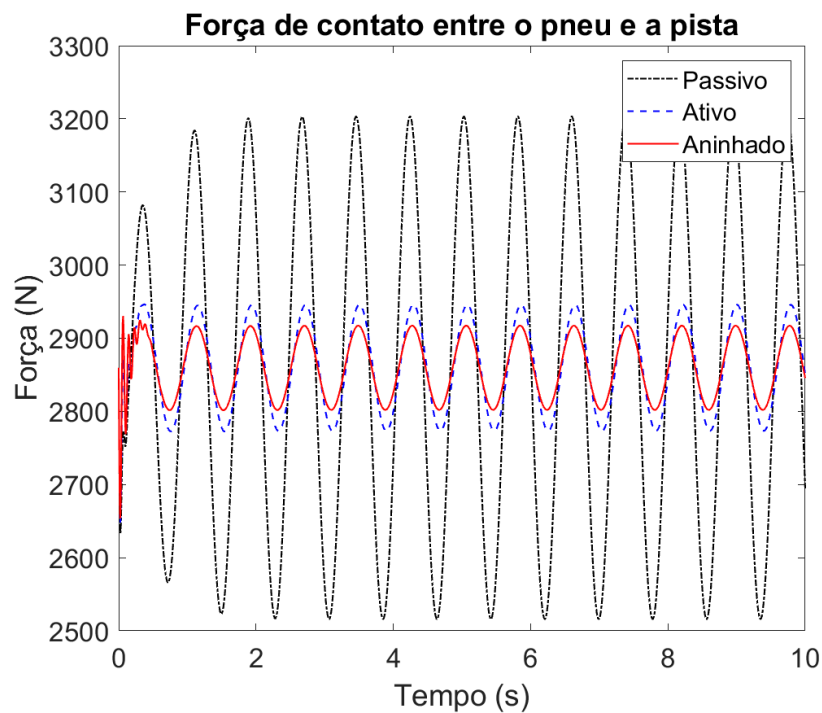
da estrutura mecânica e do controlador fazendo uso da estratégia de otimização aninhada contribui para a melhoria do conforto e da segurança veicular.

Figura 23 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

Figura 24 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal.



Fonte: Autora (2019).

6.7 COMENTÁRIOS

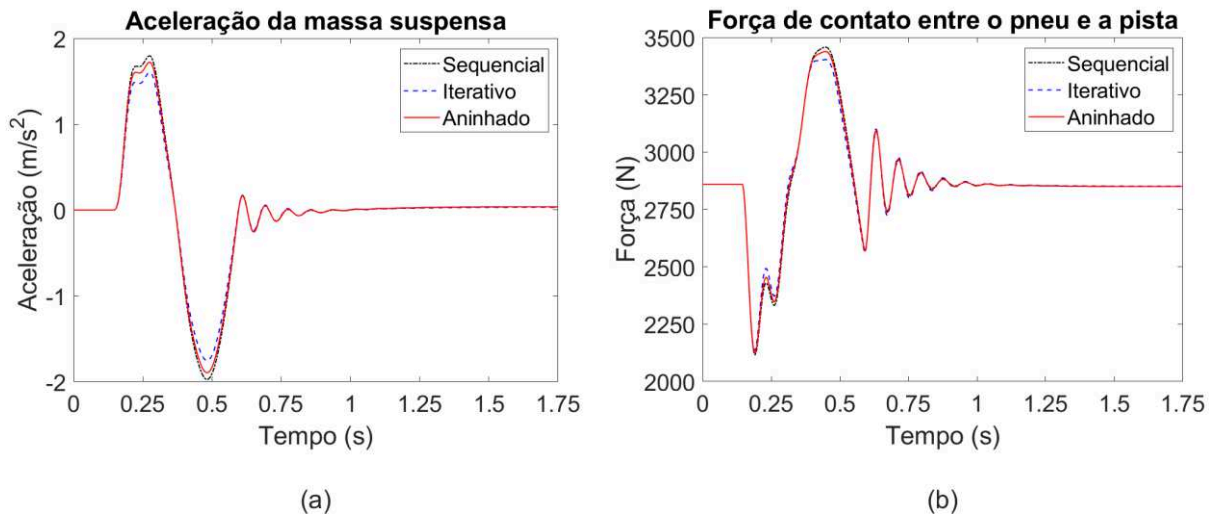
Os métodos de projeto integrado estudados conduziram a resultados superiores ao projeto ativo. Podem-se classificar os métodos, em ordem decrescente de desempenho, como: iterativo, aninhado e sequencial. Apesar dos parâmetros do sistema de suspensão sofrerem variações de acordo com a estratégia de otimização empregada, o desempenho em termos de redução da aceleração vertical da massa suspensa e da variação da força de contato entre o pneu e a pista foram semelhantes para os três métodos, conforme mostrado na Figura 25 e na Figura 26.

Entretanto, as estratégias de otimização estudadas para aplicação no sistema de suspensão apresentaram algumas dificuldades. Uma delas faz referência à função objetivo da planta ser composta pela norma H_∞ . Houve a necessidade de considerar na função objetivo da planta a inclusão de uma função relacionada à mola e outra função referente ao amortecedor da suspensão. O motivo é que, ao considerar a norma H_∞ , os parâmetros otimizados da estrutura mecânica conduzem para os valores da barreira de restrição ou próximos dela. Esse fato pode ser verificado nos resultados obtidos através dos métodos sequencial e iterativo.

Uma das formas de eliminar este problema é não considerar o valor da norma na função objetivo da planta. Isso foi possível no projeto integrado aninhado, onde não se tem a necessidade da obtenção do sistema em malha fechada no processo de otimização da planta, devido a própria estrutura construtiva do algoritmo. Este algoritmo consiste em dois laços de otimização: um externo que executa o projeto da planta e um laço interno que identifica o controlador para cada projeto da planta considerado pelo laço exterior. Como a norma H_∞ está presente na função objetivo do controlador, a mesma não precisa ser incluída na função objetivo da planta, por se tratar de uma estrutura de dois níveis. Neste caso, observou-se que os parâmetros otimizados localizaram-se em pontos mais distantes das barreiras de restrição.

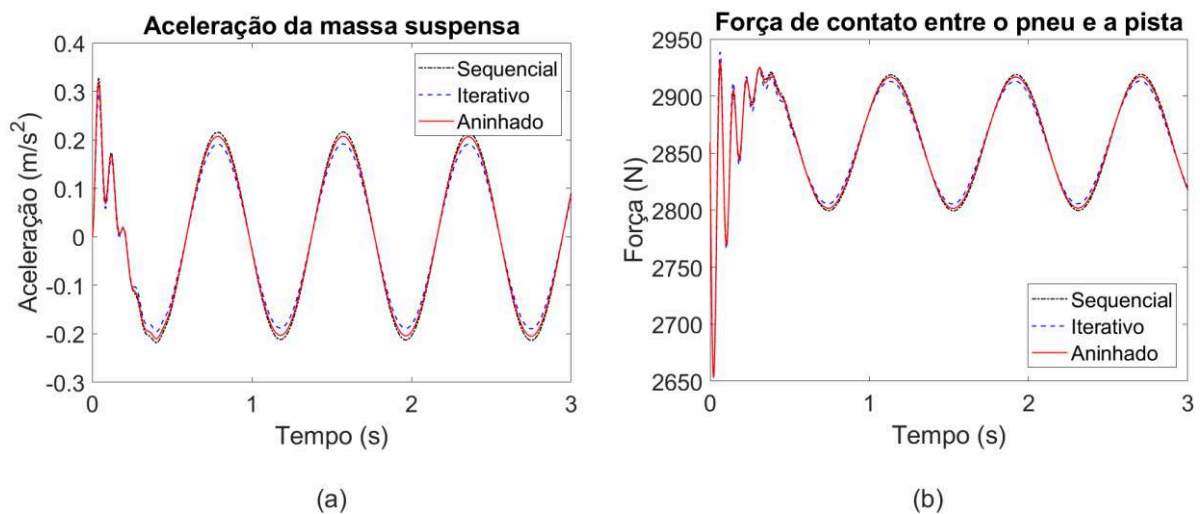
No entanto, ambos os projetos, sequencial e iterativo, consistem em dois problemas de otimização separados. Em um problema de otimização realiza-se o projeto dos parâmetros da planta, sem comprometer o projeto do controlador. E no outro, o projeto do controlador é realizado com os parâmetros da planta fixos. Dessa maneira, para levar em conta o projeto do controlador no processo de otimização da planta, o algoritmo sequencial e o iterativo necessitam do cálculo do sistema em malha fechada e o valor de sua norma H_∞ deve ser considerada como parte da função objetivo da planta.

Figura 25 – Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Figura 26 – Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação senoidal, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Outra dificuldade encontrada é que, ao alterar os parâmetros iniciais do veículo, perde-se a garantia de que o projeto sequencial, o projeto iterativo e o projeto aninhado conduzam sempre a melhores resultados quando comparado com o projeto ativo. Acredita-se que isso se deve pelo fato de existir o acoplamento entre a planta e o controlador, que torna os métodos apresentados sensíveis às condições iniciais de projeto da planta. Além disso, dependendo da condição inicial adotada, não é possível garantir a convergência dos

algoritmos apresentados e a estabilidade dos sistemas durante o processo de otimização da planta. A razão disso é que o projeto do controlador, como conduzido, só garante estabilidade e desempenho para a respectiva condição de planta. Uma vez modificada a planta – durante o processo de otimização – o par planta-controlador pode não conduzir a um sistema em malha fechada estável.

Como forma de ilustrar a sensibilidade dos métodos de projeto integrado sequencial, iterativo e aninhado às condições iniciais de projeto da planta, realizou-se as simulações fazendo uso do controlador obtido em cada método de projeto integrado, e variando-se os valores iniciais de k_s^0 e b_s^0 . Consideraram-se três casos dispersivos de k_s^0 e b_s^0 , conforme mostrado na Tabela 8. Para as simulações do Caso 1, do Caso 2 e do Caso 3, considerou-se a excitação lombada, conforme foi ilustrado na Figura 11.

Tabela 8 – Casos dispersivos dos valores iniciais da constante de rigidez da mola e do coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão.

Valores iniciais	Caso 1	Caso 2	Caso 3
k_s^0 (N/m)	17734,534841	17787,818370	17761,176606
b_s^0 (Ns/m)	1436,529093	1440,845154	1438,687123

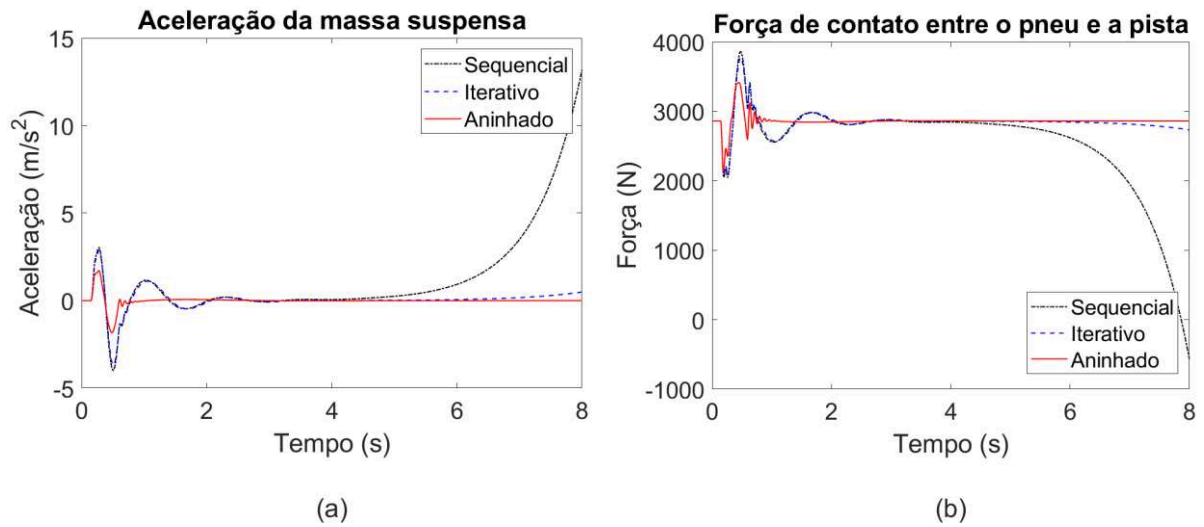
Fonte: Autora (2019).

O comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista do projeto sequencial, iterativo e aninhado, para o Caso 1, Caso 2 e Caso 3, são mostrados, respectivamente, na Figura 27, na Figura 28 e na Figura 29.

Verifica-se, através da Figura 27, da Figura 28 e da Figura 29, que o projeto integrado sequencial e o projeto integrado iterativo, conduziram a um sistema em malha fechada instável. No tempo de simulação considerado não foi possível verificar o comportamento em termos de estabilidade do projeto integrado aninhado.

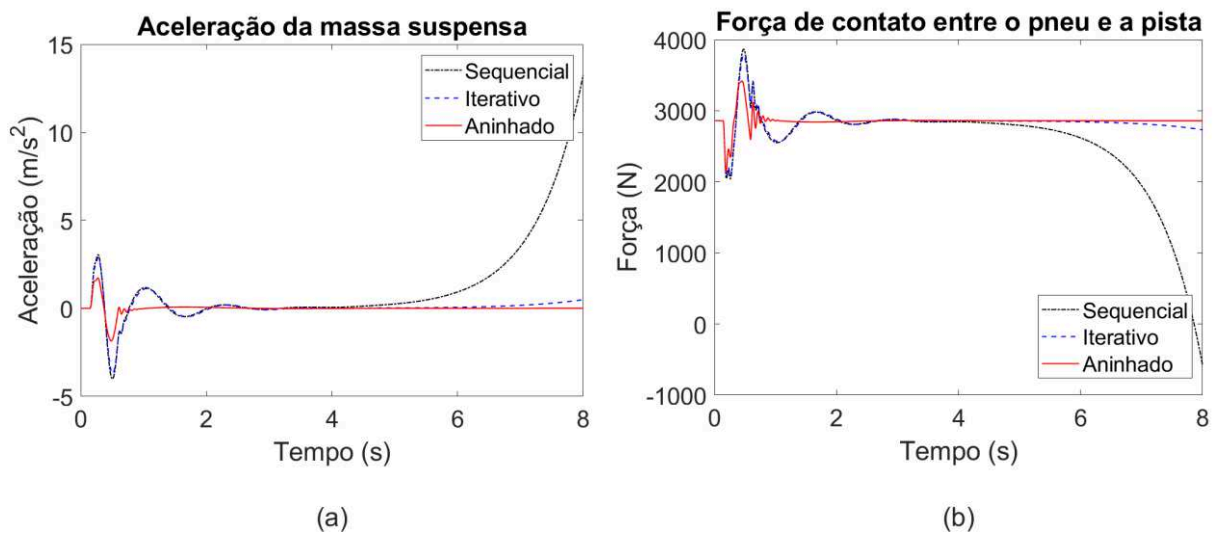
O comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista do projeto integrado aninhado, considerando o tempo de simulação de 25 segundos, para o Caso 1, Caso 2 e Caso 3, são mostrados, respectivamente, na Figura 30, na Figura 31 e na Figura 32.

Figura 27 – Caso 1: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



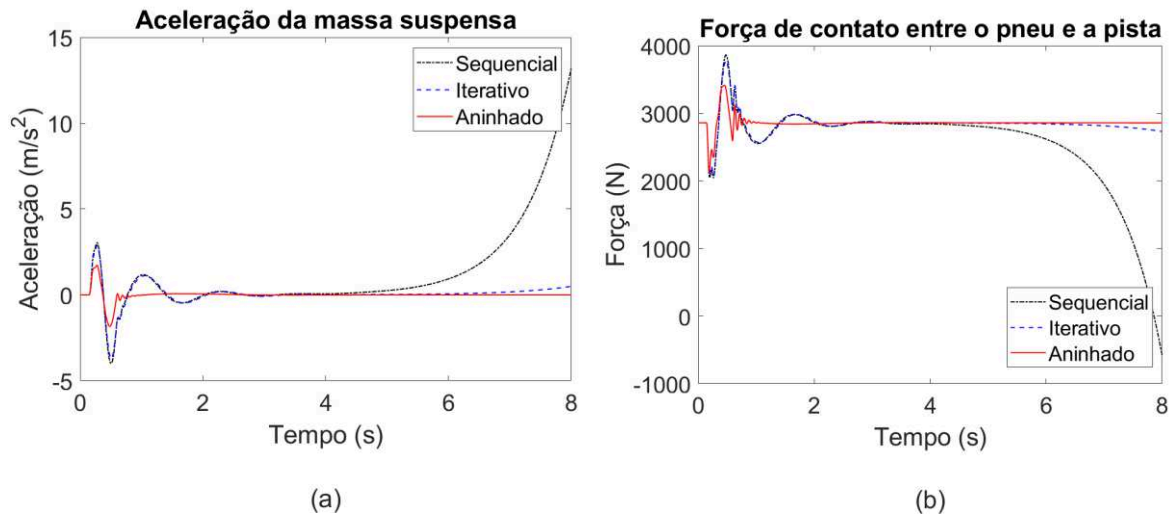
Fonte: Autora (2019).

Figura 28 – Caso 2: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



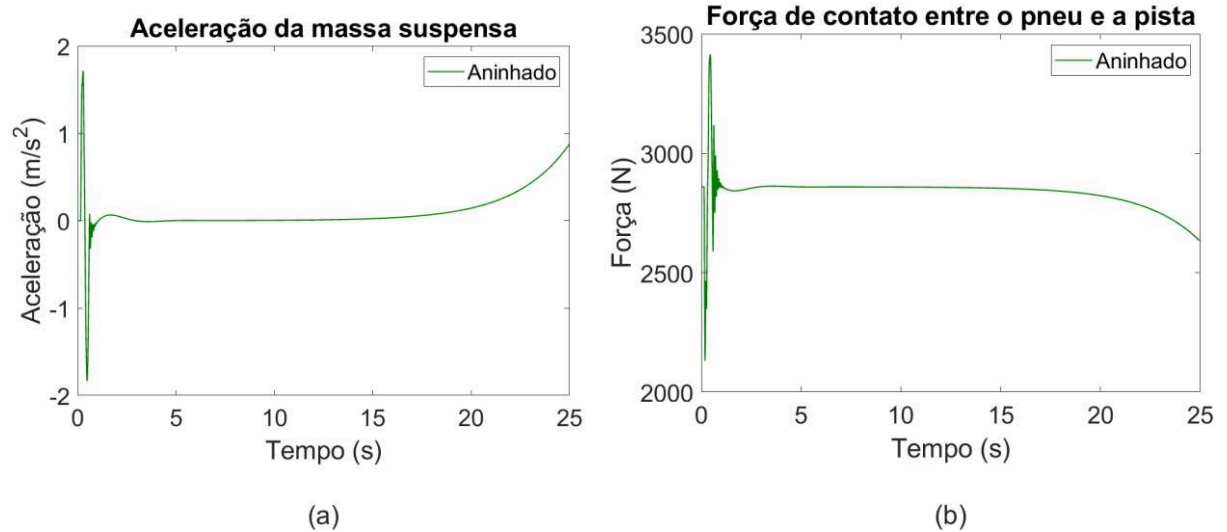
Fonte: Autora (2019).

Figura 29 – Caso 3: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



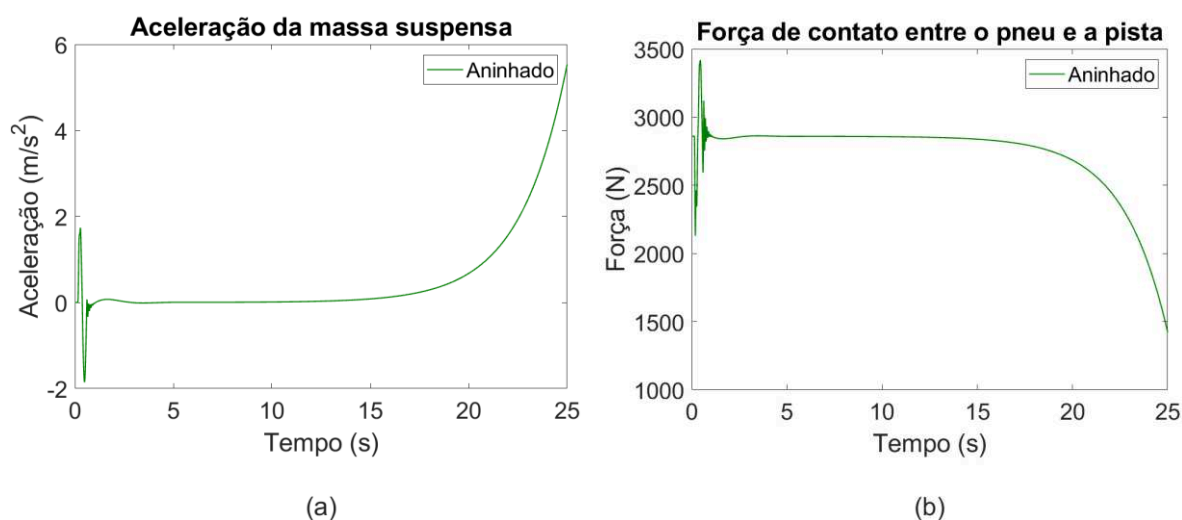
Fonte: Autora (2019).

Figura 30 – Caso 1: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



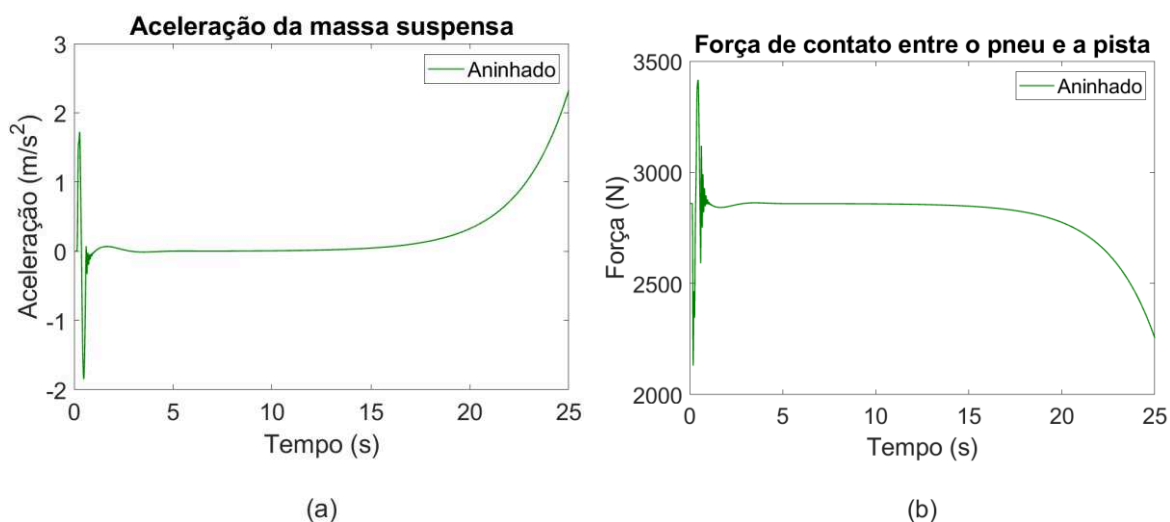
Fonte: Autora (2019).

Figura 31 – Caso 2: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Figura 32 – Caso 3: Resposta do comportamento do veículo ao passar pela excitação lombada, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Verifica-se, através da Figura 30, da Figura 31 e da Figura 32, que o projeto integrado aninhado também conduziu a um sistema em malha fechada instável.

Essas dificuldades motivaram a proposição de um método alternativo de projeto integrado, considerando o controlador robusto para incertezas politópicas na planta. Esta estratégia é descrita no próximo capítulo.

7 PROPOSTA DE PROJETO INTEGRADO SEQUENCIAL VIA CONTROLE ROBUSTO POLITÓPICO

Neste capítulo propõem-se resolver o problema de projeto dos parâmetros da estrutura mecânica e do controle H_∞ do sistema de suspensão através da estratégia de otimização sequencial com incertezas paramétricas, denominada neste trabalho como Projeto Sequencial Politópico (PSP).

7.1 ALGORITMO DO PROJETO SEQUENCIAL POLITÓPICO

A ideia básica por trás deste método é realizar um projeto sequencial, mas com a otimização da planta sempre sendo realizada via um controlador estabilizante para toda a faixa de parâmetros.

Dados os parâmetros máximos e mínimos de k_s e b_s , conforme as Equações (121) e (123), calcula-se o controlador H_∞ para esta faixa. Com este controlador, e utilizando as mesmas condições iniciais e restrições de projeto da Seção 6.1, realiza-se a otimização dos parâmetros da planta.

A função objetivo utilizada na etapa de otimização dos parâmetros da planta consiste na soma ponderada da norma H_∞ do sistema em malha fechada, do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, conforme foi definido na Equação (111). A ponderação dos termos da Equação (111) foi mantida igual aos casos sequencial e iterativo apresentado nas Seções 6.4 e 6.5, respectivamente.

Com os parâmetros otimizados da planta $\phi_n, \phi_f, passo, \phi_p, \phi_o$ e fazendo uso das Equações (13) e (23), respectivamente, obtém-se os valores de k_s e b_s . Considerando que estes parâmetros podem variar em torno de $\pm 1,5\%$ dos seus valores, definem-se os novos limitantes máximos e mínimos de k_s e b_s e calcula-se o novo controlador H_∞ para esta faixa. Para este controlador, realiza-se a otimização dos parâmetros da planta, respeitando as restrições de projeto definidas na Seção 6.1.

O algoritmo referente ao projeto sequencial politópico consiste nas seguintes etapas:

- Etapa 1: Define-se o contador de iterações $i = 0$. São dados os parâmetros máximos e mínimos de k_s e b_s .
- Etapa 2: Para o modelo de estados da estrutura politópica $\mathbf{P}(i = 0)$, correspondente aos parâmetros máximos e mínimos de k_s e b_s da Etapa 1, projeta-se o controlador H_∞ , denotado por $\boldsymbol{\beta}_c(i = 0)$, pelo método das LMIs. Assim sendo, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mu = \gamma^2 \\
 \text{sujeito a} \quad & (78), \\
 & (87)_1, \\
 & (87)_2, \\
 & (87)_3, \\
 & (87)_4.
 \end{aligned} \tag{147}$$

- Etapa 3: São dados os parâmetros iniciais da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i = 0)$, sendo que $(\phi_h, \phi_f, passo, \phi_p, \phi_o)^L \leq \boldsymbol{\beta}_p(0) \leq (\phi_h, \phi_f, passo, \phi_p, \phi_o)^U$.
- Etapa 4: Para o controlador $\boldsymbol{\beta}_c(i)$ determinado na Etapa 2, otimiza-se a soma ponderada da norma H_∞ da malha fechada, o peso da mola e a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, variando-se os parâmetros da estrutura $\boldsymbol{\beta}_p(i)$ conforme mostrado na Etapa 3, e mantendo fixo o controlador. Sendo assim, o seguinte problema é resolvido:

$$\min \quad \%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} \frac{\|T_{wz}(s)\|_\infty}{\|T_{wz}(s)\|_{\infty_{max}}} + \%_{peso} \frac{peso}{peso_{max}} + \%_{\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{\tau_{max_{max}}} \tag{148}$$

$$\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{\beta}_p^L \leq \boldsymbol{\beta}_p \leq \boldsymbol{\beta}_p^U.$$

- Etapa 5: Para os parâmetros otimizados da estrutura obtida na Etapa 4, calcula-se os valores de k_s e b_s e formula-se a nova estrutura politópica, utilizando a faixa de $\pm 1,5\%$ dos valores otimizados de k_s e b_s .
- Etapa 6: Faz-se $i = i + 1$. Para o modelo de estados otimizado da estrutura politópica $\mathbf{P}(i = 1)$, correspondente a $\pm 1,5\%$ dos valores otimizados de k_s e b_s , projeta-se o

controlador H_∞ , denotado por β_c^* , pelo método das LMIs. Assim sendo, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mu = \gamma^2 \\
 \text{sujeito a} \quad & (78), \\
 & (87)_1, \\
 & (87)_2, \\
 & (87)_3, \\
 & (87)_4.
 \end{aligned} \tag{149}$$

- Etapa 7: Para o controlador β_c^* determinado na Etapa 6, otimiza-se a soma ponderada da norma H_∞ da malha fechada, o peso da mola e a tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor, variando-se os parâmetros da estrutura $\beta_p(i)$, e mantendo fixo o controlador. Sendo assim, o seguinte problema é resolvido:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \%_{\|T_{wz}(s)\|_\infty} \frac{\|T_{wz}(s)\|_\infty}{\|T_{wz}(s)\|_{\infty_{max}}} + \%_{\text{peso}} \frac{\text{peso}}{\text{peso}_{max}} + \%_{\tau_{max}} \frac{\tau_{max}}{\tau_{max_{max}}} \\
 \text{sujeito a} \quad & \beta_p^L \leq \beta_p \leq \beta_p^U.
 \end{aligned} \tag{150}$$

- Etapa 8: Faz-se $\beta_p(i) = \beta_p^*$.

7.2 PROJETO E RESULTADOS

Os parâmetros otimizados da planta para o PSP estão mostrados na Tabela 9, juntamente com os parâmetros dos casos estudados no capítulo anterior. Substituindo os valores otimizados nas Equações (13) e (23), obtêm-se, respectivamente, k_s e b_s para o PSP, os quais também estão mostrados na Tabela 9.

Pode-se verificar, através da Tabela 9, que os parâmetros do sistema de suspensão variam ligeiramente dependendo da estratégia de otimização empregada. As estratégias de otimização sequencial e iterativa conduziram a parâmetros iguais ou próximos da barreira de restrição. Já nas estratégias de otimização aninhada e sequencial politópica, os parâmetros otimizados localizaram-se em pontos mais distantes das barreiras de restrição. Entretanto, em todos os casos se conseguiu obter resultados satisfatórios em relação ao cumprimento das

restrições de projeto da planta. E como será mostrado, todos os métodos apresentaram desempenho similar em termos de segurança e conforto.

Tabela 9 – Parâmetros do projeto da planta otimizados.

Projeto	Sequencial	Iterativo	Aninhado	PSP
ϕ_h [m]	0,12260436	0,10609323	0,09039112	0,09105455
ϕ_f [m]	0,01032186	0,00975475	0,00929881	0,01016144
<i>passo</i> [m]	0,06171409	0,05072590	0,056125280	0,04060987
ϕ_p [m]	0,03595024	0,03578456	0,03348779	0,03385427
ϕ_o [m]	0,00609998	0,00606090	0,00525523	0,00536293
k_s [N/m]	11814,921726	11903,619364	17514,819186	17761,172743
b_s [Ns/m]	1243,202124	1244,199198	1463,827370	1438,687113

Fonte: Autora (2019).

7.2.1 Análise comparativa da dinâmica do sistema de suspensão

Nesta subseção, se realiza a análise comparativa do PSP com as estratégias de otimização sequencial, iterativa e aninhada para o sistema de suspensão automotiva, às quais foram apresentadas no capítulo anterior.

Os valores das normas H_∞ da matriz de transferência entre a entrada exógena e as saídas controladas $\mathbf{T}_{wz}(s)$, dos pesos da mola e das tensões de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor para o projeto sequencial, iterativo, aninhado e o projeto sequencial politópico são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Valores das normas H_∞ , do peso da mola e da tensão de cisalhamento máxima nas paredes do corpo do amortecedor para o projeto sequencial, iterativo, aninhado e o PSP.

Projeto	$\ \mathbf{T}_{wz}(s)\ _\infty$	<i>peso</i> [kg]	τ_{max} [MPa]
Sequencial	730,782215	1,268253	30,158477
Iterativo	730,788701	1,196873	30,342312
Aninhado	730,787911	0,839951	38,587834
PSP	730,870460	1,389113	37,446747

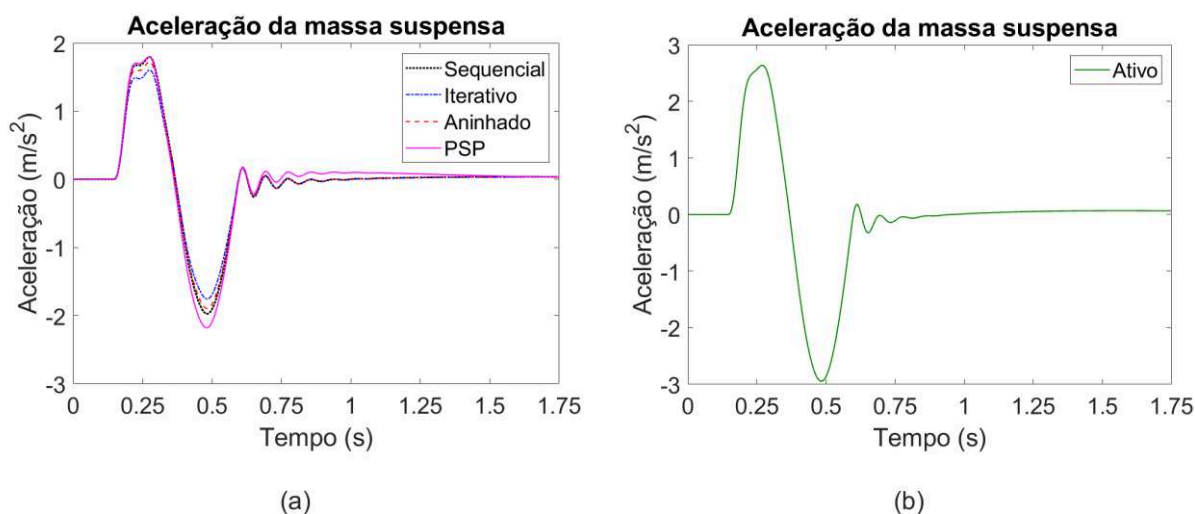
Fonte: Autora (2019).

Pode-se verificar que, independente da estratégia de otimização empregada, obtêm-se valores muito próximos para o valor da norma. Em termos de redução dos valores do peso da mola, o projeto aninhado apresentou o melhor resultado. Em relação à redução da tensão de cisalhamento máximo nas paredes do corpo do amortecedor, o projeto integrado sequencial apresentou o melhor resultado.

Será feita uma análise comparativa dos métodos de projeto integrado pela verificação da resposta temporal dos movimentos que representam o conforto e a segurança do sistema veicular, os quais são a aceleração da massa suspensa e a força de contato entre o pneu e a pista. Nas simulações realizadas para o projeto sequencial politópico, consideram-se os mesmos perfis de estrada definidos na seção 6.3.

A Figura 33 mostra o comportamento da aceleração vertical da massa suspensa ao passar pela excitação lombada, conforme foi apresentada na Figura 11.

Figura 33 – Resposta da aceleração da massa suspensa ao passar pela excitação lombada, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.



Fonte: Autora (2019).

A Tabela 11 apresenta os valores de pico máximo, de pico mínimo e RMS da aceleração vertical da massa suspensa para o projeto sequencial, o projeto iterativo, o projeto aninhado e o projeto sequencial politópico. Além disso, são mostrados também o percentual de redução em relação ao projeto ativo. Considera-se, para os picos, a redução obtida em termos do valor pico a pico.

Verifica-se, através da Figura 33(a) e da Tabela 11, que o PSP tem desempenho equivalente aos demais métodos, mas com ligeira piora em relação ao valor de pico da

resposta temporal e ao valor RMS da aceleração da massa suspensa. No entanto, o método manteve uma melhora substancial em relação ao projeto ativo não otimizado, como pode ser verificado pela comparação da Figura 33(a) com a Figura 33(b).

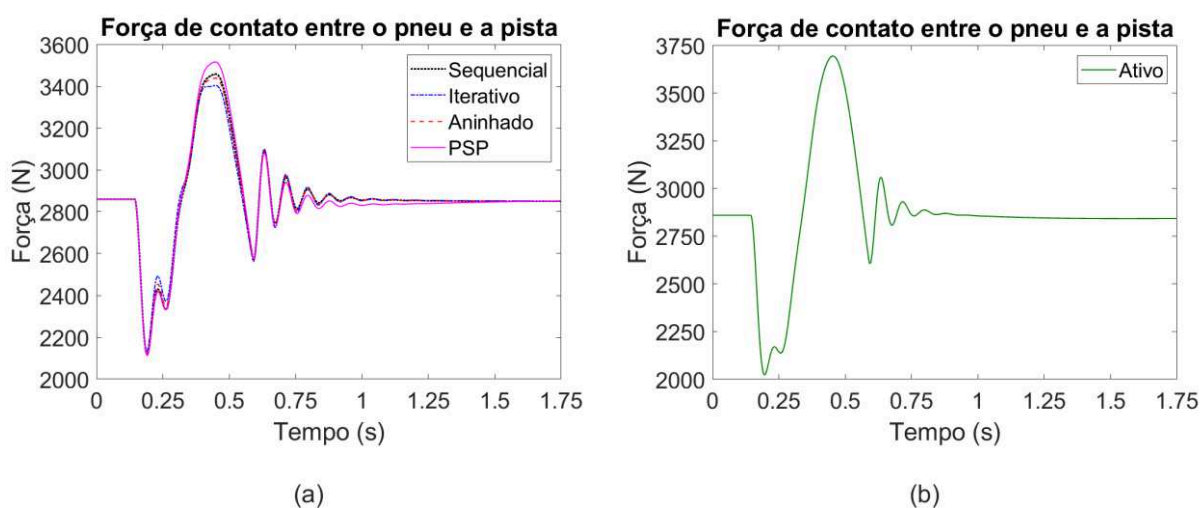
Tabela 11 – Aceleração da massa suspensa para excitação lombada.

Aceleração [m/s^2]	Pico Máx.	Pico Mín.	RMS	Δ_{pico} [%]	Δ_{RMS} [%]
Sequencial	1,795	-1,973	0,519	32,4	32,8
Iterativo	1,602	-1,754	0,461	39,8	40,3
Aninhado	1,721	-1,895	0,498	35,2	35,5
PSP	1,794	-2,178	0,553	28,8	28,4

Fonte: Autora (2019).

A Figura 34 mostra o comportamento da força de contato entre o pneu e a pista quando o veículo é submetido à excitação lombada.

Figura 34 – Resposta da força de contato ao passar pela excitação lombada, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.



Fonte: Autora (2019).

Os valores de pico máximo e de pico mínimo da força de contato entre o pneu e a pista para o projeto sequencial, o projeto iterativo, o projeto aninhado e o PSP são apresentados na Tabela 12. Além disso, é mostrado também o percentual de redução do valor de pico da resposta temporal de cada projeto integrado em relação ao sistema ativo.

Tabela 12 – Força de contato entre o pneu e a pista para excitação lombada.

Força de contato [N]	Pico Máx.	Pico Mín.	Δ_{pico} [%]
Sequencial	3457,5713	2116,6824	19,6
Iterativo	3403,3703	2135,4319	24,0
Aninhado	3438,3152	2123,9616	21,2
PSP	3515,4371	2112,5924	15,9

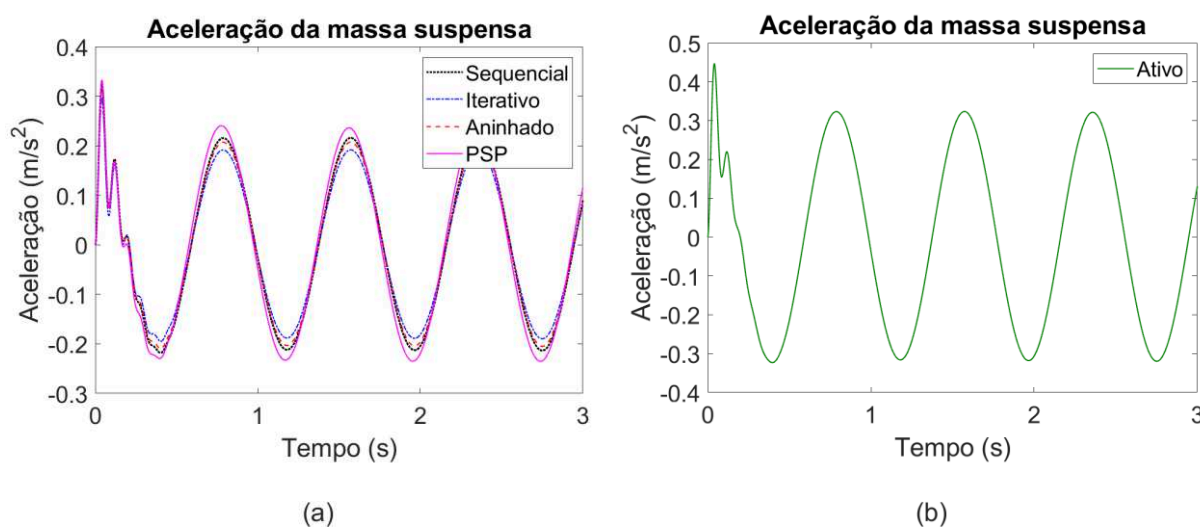
Fonte: Autora (2019).

Por meio da Figura 34(a) e da Tabela 12, confirma-se o desempenho similar entre os métodos otimizados, com resultado superior para o caso iterativo. O PSP teve desempenho mais próximo ao método sequencial, talvez pela característica similar entre os métodos. O aninhado teve um desempenho intermediário em termos de margens de segurança veicular.

Ao realizar a comparação entre a Figura 34(a) e a Figura 34(b), verifica-se que o método de projeto integrado sequencial, iterativo, aninhado e o PSP mantiveram melhoria em relação ao projeto ativo não otimizado.

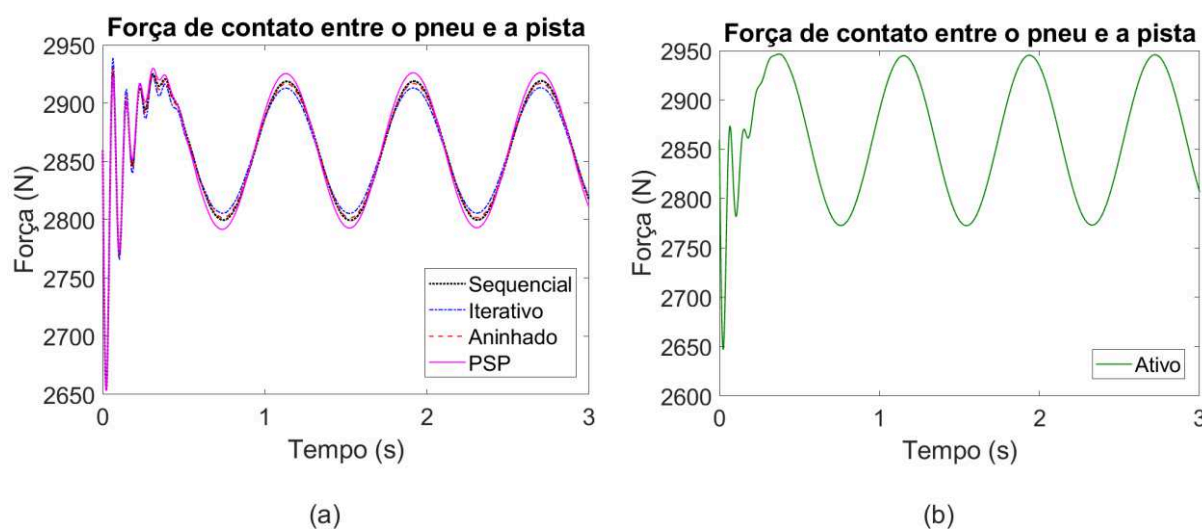
O comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista, ao passar pela excitação senoidal, conforme foi ilustrado na Figura 12, é mostrado, respectivamente, na Figura 35 e na Figura 36.

Figura 35 – Resposta da aceleração da massa suspensa para excitação senoidal, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.



Fonte: Autora (2019).

Figura 36 – Resposta da força de contato entre o pneu e a pista para excitação senoidal, em (a) para os sistemas otimizados e em (b) para o sistema ativo.



Fonte: Autora (2019).

A Tabela 13 apresenta os valores RMS da aceleração vertical da massa suspensa para o projeto sequencial, o projeto iterativo, o projeto aninhado e o PSP. Além disso, é mostrada também a redução do valor RMS de cada projeto integrado em relação ao sistema ativo.

Tabela 13 – Aceleração da massa suspensa para excitação senoidal.

Aceleração [m/s^2]	RMS	Δ_{RMS} [%]
Sequencial	0,151	33,2
Iterativo	0,134	40,7
Aninhado	0,145	35,8
PSP	0,166	26,5

Fonte: Autora (2019).

Comparando-se os métodos com este tipo de excitação, notam-se características similares ao do caso da lombada.

7.3 ANÁLISE CRÍTICA DO MÉTODO

O método do PSP, como esperado, conduz a resultados bastante superiores ao projeto ativo não otimizado. Tanto o conforto quanto a segurança veicular foram substancialmente

melhorados. A técnica, entretanto, apresentou desempenho ligeiramente inferior aos demais métodos estudados, cujas razões precisam ser melhores exploradas em trabalhos futuros.

O PSP, entretanto, tem algumas vantagens sobre os demais. Ao escolher realizar a otimização do controlador considerando o politopo com os valores dos limitantes máximos e mínimos dos parâmetros da planta, garante-se estabilidade e robustez para qualquer planta otimizada no passo seguinte.

A otimização combinada da planta e do controlador é possivelmente multimodal e não-convexa, além de acoplada e dependente do controlador usado. Este acoplamento pode tornar os demais métodos apresentados no capítulo anterior não-convergentes e altamente dependentes das condições iniciais – o que de fato ocorreu. O método proposto reduz tal acoplamento, já que o controlador calculado garante, pelo menos estabilidade, durante todo o processo de otimização da planta. Tal garantia não existe para os demais métodos.

No passo final de cálculo do controlador busca-se obter um resultado menos conservador, mas ainda robusto em comparação com os demais métodos. Em se tratando de elementos que serão fisicamente construídos, isso é importante, dada as esperadas dispersões dos parâmetros.

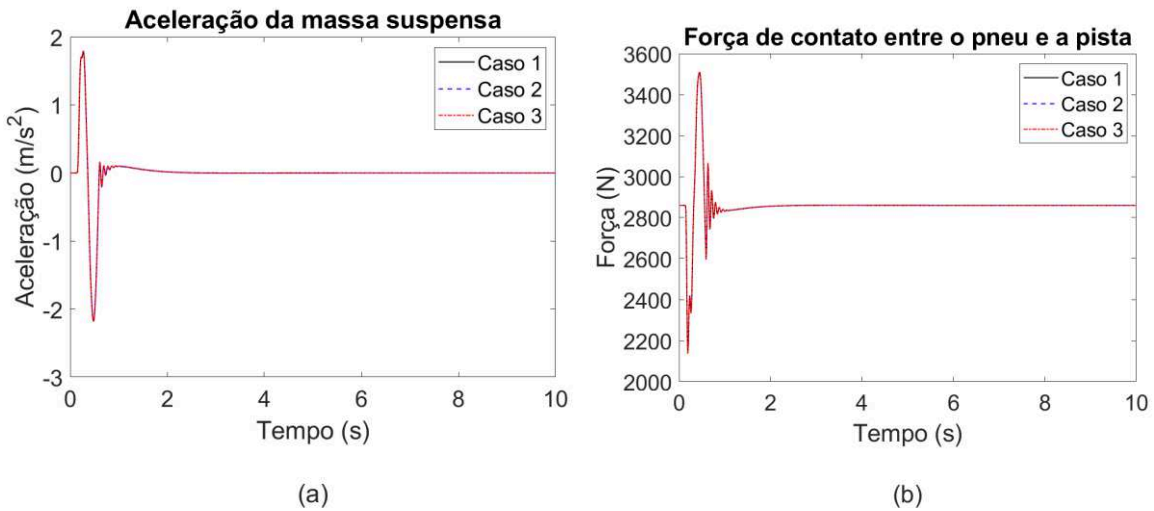
Além disso, o fato de considerar incertezas paramétricas nos parâmetros da planta é vantajoso para os projetistas da estrutura mecânica da suspensão, pois se ocorrer dos parâmetros da mola e do amortecedor serem construídos com valores que divirjam ligeiramente dos nominais de projeto, o sistema de controle ainda conduzirá a resultados satisfatórios.

Como forma de ilustrar a garantia de estabilidade do método PSP durante todo o processo de otimização da planta, realizou-se as simulações fazendo uso do controlador robusto obtido, e variando-se os valores iniciais de k_s^0 e b_s^0 . Consideraram-se os Casos 1, 2 e 3, definidos na Seção 6.7, com os valores iniciais conforme foi definido na Tabela 8.

O comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista, ao passar pela excitação lombada, conforme foi ilustrado na Figura 11, é mostrado na Figura 37, para o Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

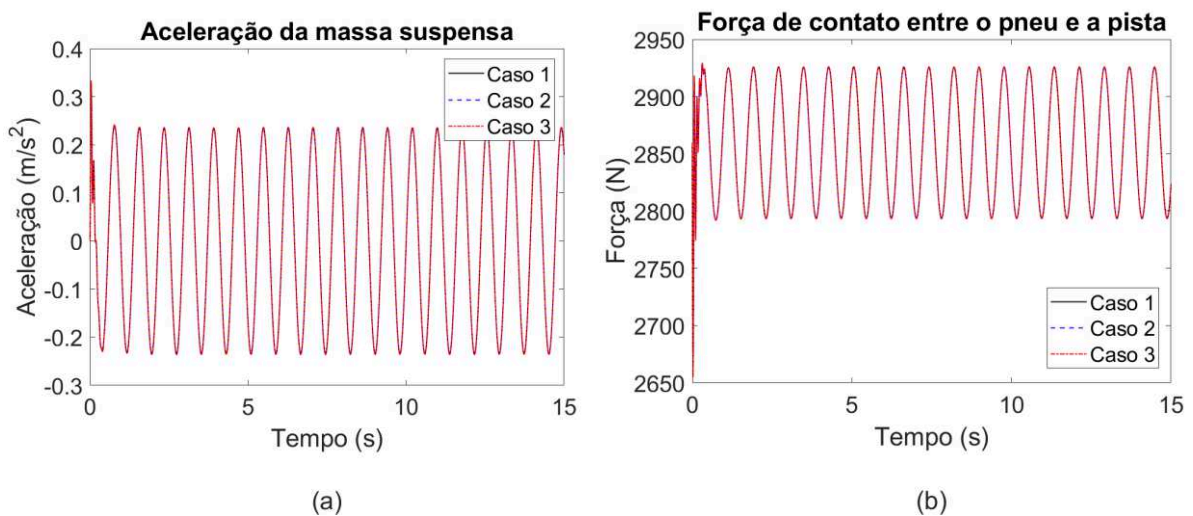
A Figura 38 mostra o comportamento da aceleração vertical da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista, ao passar pela excitação senoidal, conforme foi apresentada na Figura 12, para o Caso 1, Caso 2 e Caso 3.

Figura 37 – Resposta do veículo ao passar pela excitação lombada para o PSP, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Figura 38 – Resposta do veículo ao passar pela excitação senoidal para o PSP, em (a) da aceleração da massa suspensa e em (b) da força de contato.



Fonte: Autora (2019).

Verifica-se, através da Figura 37 e da Figura 38, que o PSP conduziu a sistemas em malha fechada estável. Dessa forma, comprova-se a estabilidade e robustez do método PSP.

8 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi apresentado um panorama detalhado das estratégias de projeto integrado da planta e do controlador, com foco em sistemas de suspensão veicular. A ideia foi realizar uma otimização no problema de projeto integrado dos parâmetros da estrutura mecânica e do controlador. Essa abordagem teve o intuito de melhorar o desempenho do sistema em termos de conforto de condução e segurança veicular. No trabalho, o coeficiente de rigidez da mola e o coeficiente de amortecimento do amortecedor da suspensão foram tratados como variáveis de otimização dependentes, os relacionando através de restrições geométricas.

Os cálculos referentes aos problemas de otimização dos parâmetros da planta foram efetuados através da função de otimização *fmincon* e os problemas de otimização do controlador H_∞ foram realizados através do *solver sdpt3*. Foram definidas excitações do tipo lombada e senoidal para analisar o comportamento do sistema.

Inicialmente, três métodos de projeto integrado foram estudados. O primeiro método de projeto integrado aplicado ao sistema de suspensão automotiva foi a otimização sequencial, que consistiu em otimizar os parâmetros de projeto da planta e os parâmetros de projeto do controlador por meio de dois problemas de otimização separados.

O segundo método aplicado ao projeto de suspensão automotiva foi a otimização iterativa. Nesta estratégia, se realizou o projeto dos parâmetros da planta e dos parâmetros do controlador através de dois problemas de otimização separados. Este ciclo se repetiu iterativamente até que a convergência foi alcançada.

A otimização aninhada foi o terceiro método de projeto integrado aplicado no sistema de suspensão automotiva. Esta estratégia consistiu em dois laços de otimização: o laço externo executou a otimização dos parâmetros de projeto da planta e o laço interno executou a otimização dos parâmetros de projeto do controlador para cada projeto da planta testado pelo laço externo. Esse processo foi repetido até que o índice de desempenho otimizado do sistema foi encontrado.

Os sistemas otimizados foram comparados com o sistema ativo em relação à resposta temporal dos movimentos que representam o conforto e a segurança do sistema veicular, os quais foram, respectivamente, a aceleração vertical da massa suspensa e a força de contato entre o pneu e a pista.

Em relação ao critério do percentual de redução em termos do valor pico a pico das respostas temporais da aceleração da massa suspensa e da força de contato entre o pneu e a pista a estratégia de otimização iterativa apresentou os melhores resultados. Além disso, o projeto integrado iterativo também apresentou os melhores resultados em termos de redução do valor RMS da aceleração da massa suspensa.

De forma geral, verificou-se que os métodos de projeto integrado sequencial, iterativo e aninhado conduziram a resultados superiores ao projeto ativo. Os métodos de projeto integrado foram classificados, em ordem decrescente de desempenho, como: iterativo, aninhado e sequencial.

Este trabalho propôs, ainda, um método de projeto integrado denominado Projeto Sequencial Politópico (PSP). O objetivo primário foi contornar algumas das desvantagens dos métodos anteriores e garantir um projeto que seja mais robusto do ponto de vista de dispersão dos parâmetros da planta.

O método PSP consistiu em realizar a otimização dos parâmetros do controlador considerando o politopo com os valores dos limitantes máximos e mínimos dos parâmetros da planta a fim de obter estabilidade garantida e robustez para qualquer planta otimizada. Em seguida, para o controlador obtido, realizou-se a otimização dos parâmetros de projeto da planta. No passo final de cálculo do controlador para os parâmetros da planta otimizados, buscou-se obter um resultado menos conservador, mas ainda robusto considerando-se os demais métodos de projeto integrado.

O método PSP proposto reduziu, em parte, o acoplamento existente no projeto combinado da planta e do controlador, uma vez que o controlador calculado garantiu, pelo menos estabilidade, durante todo o processo de otimização da planta.

Aplicando-se este método no projeto integrado de suspensão veicular, observou-se um comportamento similar aos demais métodos no que tange ao conforto e segurança veicular, apesar de que os índices sejam ligeiramente piores no método proposto exclusivamente para os casos ótimos calculados. Entretanto, consideradas as dispersões construtivas, o PSP tem desempenho melhor. Considerando as vantagens em relação aos demais métodos, sobretudo no que se refere à robustez do projeto, a técnica parece promissora.

Um importante estudo futuro inclui a extensão do projeto integrado ao modelo do veículo completo, com maior número de parâmetros de otimização. Propõem-se ainda investigar se outros métodos de otimização poderiam conduzir a resultados melhores do ponto de vista numérico. Uma possibilidade seria investigar mais a fundo o desenvolvimento da otimização simultânea, mencionada no trabalho.

Seria interessante comparar o comportamento em malha fechada do sistema de suspensão automotiva em termos do deslocamento e da velocidade vertical da massa suspensa e os esforços de controle obtidos em cada método de projeto integrado. A simulação do sistema poderia ser realizada tanto no *Matlab*, através do pacote matemático *Simulink*, quanto no *Scilab* através do pacote matemático *Xcos*. No entanto, considerando que o projeto já levou em conta uma otimização indireta sobre estas variáveis, acredita-se que os resultados advindos desta simulação não produzirão algo substancialmente diferente entre os métodos.

Os resultados demonstraram que, de forma geral, a aplicação das estratégias de otimização sequencial, iterativa, aninhada e sequencial politópica no projeto integrado da suspensão automotiva melhorou o comportamento global do veículo, proporcionando melhores margens de conforto de condução e segurança veicular.

Como contribuições para a literatura, este trabalho realizou o projeto integrado de sistemas de suspensão automotiva considerando incertezas paramétricas nos parâmetros da planta para obtenção do controlador robusto H_∞ de realimentação dinâmica de saída. Além disso, também realizou um estudo detalhado de técnicas de projeto integrado e sua aplicação com um enfoque na área mecânica em termos de identificação de parâmetros mais reais e apropriados para construção da mola e do amortecedor da suspensão automotiva.

REFERÊNCIAS

- ALLISON, J. T.; GUO, T.; HAN, Z. Co-design of an active suspension using simultaneous dynamic optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 136, p. 1-14, 2014.
- ALYAQOUT, S. F.; PAPALAMBROS, P. Y.; ULISOY, A. G. Combined robust design and robust control of an electric DC motor. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, v. 16, n. 3, p. 574-582, set. 2011.
- ALYAQOUT, S. F.; PAPALAMBROS, P. Y.; ULISOY, A. G. Combined design and robust control of a vehicle passive/active suspension. **International Journal Vehicle Design**, v. 59, n. 4, p. 315-330, 2012.
- ANDRADE, A. F. A. de. **Controle de suspensões utilizando redes neurais**. 2001. 155 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2001.
- APPLEYARD, M.; WELLSTEAD, P. E. Active suspensions: some background. In: Control Theory Applications, p. 123-128, **Proceedings...** mar. 1995.
- BORESI, A. P.; SCHIMIDT, R. J. **Advanced mechanics of materials**. United States of America: John Wiley & Sons, 2003.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. Vol. 15.
- CABELLO, R. V. C. **Controle H-infinito de vibrações com restrições no esforço de controle**. 2009. 111 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2009.
- CARVALHO, L. M. de. **Prospecção de novos materiais para molas de suspensão automotiva**. 2015. 77 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Engenharia de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina. 2015.
- CHEN, W. et al. Integrated design of structure/control systems of semi-active suspension using genetic algorithms and H_∞ control scheme. **International Journal Vehicle Autonomous Systems**, v. 1, n. 3/4, p. 387-404, 2003.
- CONSELHO NACIONAL DE TRÂNSITO 1998. Resolução 39/98. **Art. 12 da lei n 9.503 de 23 de set. de 1997**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9503.htm>. Acesso em: 10 set. 2019.

CRIVELLARO, C. **Controle robusto de suspensão semi-ativa para caminhonetes utilizando amortecedores magneto-reológicos**. 2008. 439 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica. São Paulo. 2008.

DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 34, n. 8, p. 831-847, aug. 1989.

DUTRA, S. P. **Controle H_∞ de sistemas de suspensão ativa veicular**. 2016. 86 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Engenharia Automotiva, Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville. 2016.

DUTRA, S. P.; BRITO, A. G. Projeto integrado da planta e do controlador de sistemas de suspensão ativa usando a estratégia de otimização aninhada. In: XXII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2018, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: ISSN, 2010. Disponível em: < <https://ssl4799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-0659.pdf> >. Acesso em: 31 jan. 2019.

FATHY, H. K. **Combined plant and controller optimization: theory, strategies and applications**. 2003. 177 p. Thesis (Doctoral) – Mechanical Engineering, University of Michigan, Ann Arbor. 2003.

FATHY, H. K. et al. On the coupling between the plant and controller optimization problems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2001, Arlington. **Proceedings...** Virgínia: IEEE, 2001, p. 1864-1869.

FATHY, H. K. et al. Nested plant/controller optimization with application to combined passive/active automotive suspensions. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2003. **Proceedings...** 2003, p. 3375-3380.

FATHY, H. K.; PAPALAMBROS, P. Y.; ULISOY, A. G. Integrated plant, observer, and controller optimization with application to combined passive/active automotive suspensions. In: MECHANICAL ENGINEERING CONGRESS AND EXPOSITION, 2003, Washington. **Proceedings...** USA: ASME, 2003, p. 15-21.

GAWRONSKI, W. K. **Dynamic and control of flexible structures**. New York: Springer, 1998.

GENTA, G.; MORELLO, L. **The Automotive Chassis: Volume 1: Components Design**. Dordrecht: Springer, 2009.

GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of vehicle dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1992.

HERBER, D. R. **Dynamic system optimization of wave energy converters utilizing direct transcription**. 2014. 137 p. Thesis (Master) – Science in Systems and Entrepreneurial Engineering, Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana. 2014.

HERBER, D. R.; ALLISON, J. T. Nested and simultaneous solution strategies for general combined plant and controller design problems. In: INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE, 2017, Cleveland. **Proceedings...** Ohio: ASME, 2017, p. 1-12.

HERBER, D. R.; ALLISON, J. T. A problem class with combined architecture, plant, and design applied to vehicle suspensions. In: INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE, 2018, Quebec City. **Proceedings...** Canada: ASME, 2018, p. 1-12.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

HIRAMOTO, K.; MOHAMMADPOUR, J.; GRIGORIADIS, K. M. Integrated design of system parameters, control and sensor/actuator placement for symmetric mechanical systems. In: 48TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND 28TH CHINESE CONTROL CONFERENCE, 2009, Shanghai. **Proceedings...** China: IEEE, 2009, p. 2855-2860.

HOFMAN, T.; JANSEN, N. H. J. Integrated design optimization of the transmission system and vehicle control for electric vehicles. **IFAC PapersOnline**, v. 50, n. 1, p. 10072-10077, 2017.

HROVAT, D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications. **Automatica**, v. 33, n. 10, p. 1781-1817, 1997.

LIAO, F.; LUM, K. Y.; WANG, J. L. An LMI-based optimization approach for integrated plant/output-feedback controller design. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2005a, Portland. **Proceedings...** Orlando: AACC, 2005a, p. 4880-4885.

LIAO, F.; LUM, K. Y.; WANG, J. L. Mixed H_2/H_∞ sub-optimization approach for integrated aircraft/controller design. In: IFAC WORLD CONGRESS, 2005b, Prague. **Proceedings...** Czech Republic: IFAC, 2005b, p. 103-108.

MACIEJOWSKY, J. M. **Multivariable feedback design**. Cambridge: Addison-Wesley, 1989.

MARTINS, I. et al. Permanent-magnets linear actuators applicability in automobile active suspension. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, New York, v. 55, n. 1, p. 86-94, jan. 2006.

MAZONI, A. F. **Estudo de técnicas de controle H-infinito para estruturas flexíveis com incertezas**. 2008. 130 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2008.

MEDEIROS, M. M. **Otimização simultânea de estrutura e controlador para atenuação de vibrações em estruturas via algoritmos genéticos.** 2013. 125 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2013.

MONDADORI, V. Y. **Análise do comportamento de um sistema de suspensão com diferentes alturas de molas.** 2017. 56 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Engenharia Automotiva, Universidade Federal de Santa Catarina, Joinville. 2017.

NICOLAZZI, L. C.; ROSA, E.; LEAL, L. C. M. **Uma introdução à modelagem quase estática de automóveis.** Florianópolis: UFSC, 2012.

NIEWHOENER, R. J.; KAMINER, I. On integrated aircraft/controller design using linear matrix inequalities. **AIAA Journal of Guidance and Control**, v. 19, n. 2, p. 445-452, mar. 1996.

OLIVEIRA, F. S. **Projeto de um amortecedor para protótipo de veículo fora-de-estrada.** 2014. 79 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

PAIVA, M. Z. de. **Controle de estruturas flexíveis levando em conta o projeto simultâneo da estrutura e do controlador.** 2009. 135 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2009.

PATIL, R.; FILIPI, Z.; FATHY; H. Computationally efficient combined plant design and controller optimization using a coupling measure. **Journal of Mechanical Design**, v. 134, p. 1-8, 2012.

PEREIRA, D. A. **Projeto de filtros para detecção de falhas usando a norma H-infinito.** 2008. 144 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2008.

PEREIRA, L. D. **Análise da metodologia de levantamento experimental para obtenção dos parâmetros da suspensão de um veículo automotor.** 2011. 78 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pará, Belém. 2011.

PETERS, D. L. **Coupling and controllability in optimal design and control.** 2010. 155 p. Thesis (Doctoral) – Mechanical Engineering, University of Michigan, Ann Arbor. 2010.

PICADO, R. M. **Controle semi-ativo em suspensões automotivas.** 1998. 101 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 1998.

REIMPELL, J.; STOLL, H.; BETZLER, J. W. **The automotive chassis: engineering principles.** Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

SÁNCHEZ-PENÃ, R. S.; SZNAIER, M. **Robust systems: theory and applications**. United States of America: John Wiley & Sons, 1998.

SANTOS, J. F. C. dos. **Análise de suspensões veiculares utilizando técnicas de controle robusto**. 1998. 116 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 1998.

SANTOS, M. M. dos. **Controle H-infinito em suspensões ativas aplicando técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares**. 2010. 200 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2010.

SARRACINI JÚNIOR, F. **Síntese de controladores H_{∞} de ordem reduzida com aplicação no controle ativo de estruturas flexíveis**. 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2006.

SHIGLEY, J.; MISCHKE, C.; BUDYNAS, R. **Mechanical engineering design**. New York: McGraw-Hill, 2003.

SOUBHIA, A. L. **Otimização simultânea dos parâmetros da planta e do controlador LQR usando uma formulação analítica para o gradiente**. 2011. 75 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2011.

TAGHIRAD, H. D.; ESMAILZADEH, E. Automobile passenger comfort assured through LQG/LQR active suspension. **Journal of Vibration and Control**, v. 4, n. 5, p. 603-618. 1998.

TSENG, H. E.; HROVAT, D. State of the art survey: active and semi-active suspension control. **International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, v. 53, n. 7, p. 1034-1062, maio. 2015.

VELNI, J. M.; MEISAMI-AZAD, M.; GRIGORIADIS, K. M. Integrated damping parameter and control design in structural systems for H_2 and H_{∞} specifications. **Struct Multidisc Optim**, v. 38, p. 377-387, 2009.

XUE, X. D. et al. Study of art of automotive active suspensions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER ELECTRONICS SYSTEMS AND APPLICATIONS, 4., 2011, Pittsburgh. **Proceedings...** New York: IEEE, 2011, p. 1-7.

YANG, G. H.; LUM, K. Y. An optimization approach to integrated aircraft-controller design. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2003, Denver. **Proceedings...** Colorado: IEEE, 2003, p. 1649-1654.