Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

A adjunção (L_Y, F_Y): um exemplo não trivial

Elemar Rapachi Puhl
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Março de 2019

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

A adjunção (L_Y, F_Y): um exemplo não trivial

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Elemar Rapachi Puhl
Florianópolis
Março de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Puhl, Elemar Rapachi
A adjunção (L_Y,F_Y): um exemplo não trivial / Elemar Rapachi Puhl ; orientadora, Virgínia Silva Rodrigues, 2019.
92 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Adjunção. 3. Equivariantização. 4. Categoria k-linear. 5. Funtor. I. Rodrigues, Virgínia Silva. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

A adjunção (L_Y, F_Y): um exemplo não trivial

por

Elemar Rapachi Puhl[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
(Coordenador da Pós-Graduação - UFSC)

Comissão examinadora

Prof^a. Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Profª. Dra. Regina Maria de Aquino
(Universidade Federal do Espírito Santo - UFES participação por videoconferência)

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Profª. Dra. Luz Adriana Mejia Castaño
(Universidad del Norte - Barraquilla - Colômbia participação por videoconferência)

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Março de 2019.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por ter me guiado e protegido durante todos esses anos e por ter me dado sabedoria para a realização deste trabalho.

À minha mãe, Sonilde Rapachi Puhl, por sempre ter me incentivado, pelas noites de orações, às palavras de carinho. Além disso, agradeço aos meus irmãos Naldimar Rapachi Puhl e Jocemar Rapachi Puhl juntamente com suas esposas Eveline Teixeira Puhl e Rosana Cristina Mascena e a nossa princesa Antonella Teixeira Puhl que veio alegrar as nossas vidas.

À minha orientadora e, com todo respeito e carinho, amiga Professora Virgínia Silva Rodrigues. Agradeço por ter aceitado me orientar e por compartilhar seus conhecimentos. Por todas as aulas, pela motivação, amizade e por todo cuidado na leitura e correção deste trabalho.

Aos meus amigos Everton Boos, Rafela Filippozzi, Julio Cáceres, Ever Vásquez, João Paulo Silva, Francieli Triches, Luis Rodrigo, Bruna Caveion, Gruilherme Simion, Jéssica Neckel, Josiane Hoffmann, Mariana Ventureli da Veiga e tantos outros por terem me acompanhado nesses dois anos e tornado eles mais do que especiais.

Aos professores Abdelmoubine Amar Henni, Luz Adriana Mejía Castaño e Regina Maria de Aquino por gentilmente terem aceito participar da banca. Obrigado pelos comentários e sugestões.

À minha amiga Ana Carolina Pereira por fazer parte da minha vida à sete anos, me acompanhando desde o início da graduação, por ter tornado eles especiais, juntamente com Janice Nurse.

À professora Andrea Morgado pelos quatro anos de orientação durante a graduação e por ter me apresentado essa área tão bonita que é a Álgebra.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de mestrado, que foi fundamental na realização deste trabalho.

Resumo

Sejam G um grupo finito que age em uma categoria $\Bbbk$-linear $\mathcal{C}$ e G_Y o subgrupo estável de G. Consideremos as equivariantizações de $\mathcal{C}$ por G e de $\mathcal{C}$ por G_Y, denotadas por $\mathcal{C}^G$ e $\mathcal{C}^{G_Y}$, ambas $\Bbbk$-lineares. O objetivo deste trabalho é apresentar um exemplo de adjunção de funtores entre $\mathcal{C}^G$ e $\mathcal{C}^{G_Y}$.

Palavras chaves: Adjunção, Equivariantização, Categoria $\Bbbk$-linear e Funtor.

Abstract

Let G be a finite group that acts in a $\Bbbk$-linear category $\mathcal{C}$ and G_Y the stable subgroup of G. Let us consider the equivariantizations of $\mathcal{C}$ by G and $\mathcal{C}$ by G_Y, denoted by $\mathcal{C}^G$ and $\mathcal{C}^{G_Y}$, both $\Bbbk$-linears. The purpose of this work is to present an example of functors adjunction between $\mathcal{C}^G$ and $\mathcal{C}^{G_Y}$.

Keywords: Adjoint, Equivariantization, $\Bbbk$-linear category and Functor.

Sumário

Introdução

A teoria de categorias foi divulgada pela primeira vez em 1945, no trabalho intitulado *General Theory of Natural Equivalences*, veja [5]. Por apresentar noções tão gerais, como dito em [8], a mesma chega a ser chamada "abstração sem sentido". Todavia, a teoria ganhou espaço e respeito dentro da matemática após os trabalhos de Grothendieck, D. Kan, entre outros. Desde então, a mesma vem se tornando uma importante ferramenta de estudo para diversas áreas da matemática como teoria da representação, geometria algébrica, topologia algébrica, dentre outros ramos da matemática. Em [6], MacLane e Eilenberg introduziram a noção de funtor, uma das ferramentas essenciais do nosso trabalho.

O objetivo desta dissertação, é construir um exemplo não trivial de adjunção de funtores entre categorias equivariantizadas ($\Bbbk$-lineares) por um dado grupo G, em que $\Bbbk$ é um corpo. Estas categorias surgem pela ação G, que é dada por uma certa coleção de funtores $\{F_g\}_{g\in G}$ e isomorfismos naturais que satisfazem certas condições. Esse resultado é encontrado em ([3], Section 2), mas num contexto de categorias de fusão[2]. Isso pois, em [3], os autores estabelecem uma correspondência entre objetos simples de duas categorias equivariantizadas específicas, para isto, uma das ferramentas eficazes é a dimensão de Frobenius-Perron que só pode ser utilizada em categorias como, por exemplo, as de fusão. Para o que queremos fazer, basta considerarmos categorias $\Bbbk$-lineares (ou simplesmente categorias abelianas).

Em 1947, a teoria da homologia axiomática de Eilenberg referia-se a funtores de uma categoria de espaços topológicos com uma estrutura "aditiva", veja [13]. Em 1950, na publicação [14], MacLane axiomatizou a noção de categoria abeliana, em que o mesmo observou a dualidade existente entre alguns conceitos como produto e coproduto, kernel e cokernel. Na metade dos anos 50, Grothendieck também introduziu

[2] Para mais detalhes, citamos [3] e [4].

categoria abeliana, em [9], de maneira a unificar algumas teorias de cohomologia. Nesse ambiente de ferramentas "básicas" é que desenvolvemos nosso primeiro capítulo, introduzindo os conceitos de categorias, funtores, transformações naturais com ênfase para categorias abelianas e $\Bbbk$-lineares, que são as categorias usadas para os demais capítulos, salvo menção contrária.

No segundo capítulo, apresentamos o conceito de adjunção. Assim como, um resultado que reune várias definições equivalentes do mesmo. Esse resultado é fundamental para provarmos o principal resultado do último capítulo. A definição de adjunção foi introduzida por Daniel Kan em 1958, no seu artigo [11], usando como motivação o isomorfismo natural dado em [6], a saber, $\mathrm{Hom}(-, \mathrm{Hom}(-,-)) \cong \mathrm{Hom}(- \otimes -, -)$, que relaciona os funtores $\mathrm{Hom}(-,-) : \left(Ab^d\right)^{op} \times Ab^{Top} \to Ab^{Top}$ e $\otimes : Ab^d \times Ab^d \to Ab^d$, mas sem menção à ideia de adjunção, em que as categorias Ab^d e Ab^{Top} são as categorias dos grupos abelianos discretos e dos grupos abelianos topológicos, respectivamente.

O termo adjunção foi motivado pela analogia entre categorias e espaços de Hilbert pois, para qualquer par de objetos $(X, Y) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$, o isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ é comparável à definição de operadores adjuntos em espaços de Hilbert $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ (veja [8]), isto é, para $T : H \to H$ e $L : H \to H$ operadores adjuntos, vale a igualdade $\langle T(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle$, para quaisquer $x, y \in H$. Além disso, em [8] é observado que nem todo funtor possui adjunto à direita ou adjunto à esquerda, mas caso isso ocorra, existe uma unicidade, a menos de equivalência.

O conceito de ação de um grupo G em uma categoria $\mathcal{C}$ é apresentado no terceiro capítulo, onde definimos também a nova categoria que surge via esta ação, denotada por $\mathcal{C}^G$ e chamada categoria equivariantizada por G (veja [4] e [7]). Alguns resultados deste capítulo não são provados, pois os mesmos encontram-se feitos com detalhes em [17] e sendo inclusive alguns deles, resultados principais daquela dissertação. Dessa maneira, apresentamos apenas as provas dos resultados essenciais para o trabalho.

No último capítulo, apresentamos o resultado principal deste trabalho, que é exatamente o exemplo não trivial de adjunção que dissemos no início. O mesmo encontra-se em ([3], Lemma 2.8 e Proposition 2.9). Mais especificamente, temos uma adjunção dos funtores F_Y e L_Y entre as categorias $\mathcal{C}^G$ e $\mathcal{C}^{G_Y}$, em que Y é um objeto simples, G_Y é um subgrupo de G denominado subgrupo estável de G. Além disso, neste capítulo, o grupo G é finito, pois queremos garantir que, para qualquer objeto simples Y em $\mathcal{C}$, o índice $[G : G_Y]$ seja finito.

Capítulo 1

Categorias abelianas

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados, além de estabelecermos as nomenclaturas necessárias para a melhor compreensão do trabalho. Começamos com os conceitos fundamentais de categoria, funtor, transformação natural e terminamos o capítulo definindo uma categoria abeliana $\Bbbk$-linear onde damos uma estrutura adicional de aditividade entre os morfismos em uma categoria. Todos os resultados e definições aqui apresentados podem ser encontrados em [12], [15], [16] e [17].

1.1 Categorias

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

(i) *uma coleção de objetos, denotada por* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

(ii) *para cada par de objetos* (X, Y), X, Y *em* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *existe uma coleção de morfismos de* X *para* Y *em* $\mathcal{C}$, *denotada por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

(iii) *para cada* X *em* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *existe um morfismo* $id_X : X \to X$, *chamado morfismo identidade,*

(iv) *para quaisquer* X, Y, Z *em* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *é definida uma operação dada por*

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & (g, f) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Tal operação é chamada composição e deve satisfazer, para quaisquer f em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, g em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e h em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, as seguintes condições

$$\text{(I)}\ \ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad e \quad \text{(II)}\ f \circ id_X = f = id_Y \circ f.$$

Por simplicidade, um morfismo f em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ será denotado por $f : X \to Y$ ou por $X \xrightarrow{f} Y$ Além disso, diremos um objeto em $\mathcal{C}$ ou f um morfismo em $\mathcal{C}$, invés de X em $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ou f em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Por abuso de notação, faremos uso do símbolo de pertinência nos casos $X \in \mathcal{C}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, mesmo sabendo que $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ não sejam necessariamente conjuntos.

Definição 1.1.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \to Y$ diz-se um isomorfismo, se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$.*

Se existir tal isomorfismo entre os objetos X e Y, então X e Y dizem-se isomorfos e denotamos tal isomorfismo por $X \cong Y$.

Verifica-se facilmente que se X e Y são isomorfos, então o morfismo g acima é único e o denotamos por $g = f^{-1}$. Vejamos a seguir alguns exemplos de categorias.

Exemplo 1.1.3. (Categoria *Set*) Nesta categoria, os objetos são conjuntos e os morfismos entre dois conjuntos são as funções entre os mesmos.

De fato, para cada $X \in Set$, consideramos a função $id_X : X \to X$ como sendo o morfismo identidade. A composição de funções é associativa e assim, *Set* é uma categoria.

Exemplo 1.1.4. (Categoria *Grp*) Nesta categoria, os objetos são os grupos e, dados $G, H \in Grp$,

$$\mathrm{Hom}_{Grp}(G, H) = \{f : G \to H : f \text{ é morfismo de grupos}\}.$$

Exemplo 1.1.5. (Categoria *Ab*) A categoria *Ab* é a categoria em que os objetos são grupos abelianos e os morfismos entre os objetos são os mesmos da categoria acima.

Exemplo 1.1.6. (Categoria *Ring*) Na categoria *Ring*, temos que os objetos são os anéis com unidade e, dados $A, B \in Ring$,

$$\mathrm{Hom}_{Ring}(A, B) = \{f : A \to B : f \text{ é morfismo de anéis}\}.$$

Podemos considerar também a categoria *ring*. Neste caso, os objetos são anéis sem unidade e os morfismos são os mesmos da categoria acima.

Exemplo 1.1.7. (Categoria ${}_R\mathcal{M}$) Seja R um anel. Nesta categoria, os objetos são os R-módulos à esquerda e os morfismos são os homomorfismos de módulos à esquerda.

Analogamente, obtemos as categorias $\mathcal{M}_R$, ${}_R\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}_R$, em que as duas últimas são, respectivamente, as categorias dos R-módulos à esquerda, à direita finito dimensionais sobre $\Bbbk$.

Exemplo 1.1.8. (Categoria $Vect_{\Bbbk}$) Seja $\Bbbk$ um corpo. Os objetos são os $\Bbbk$-espaços vetoriais e, dados $V, W \in Vect_{\Bbbk}$,

$$\mathrm{Hom}_{Vect_{\Bbbk}}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ é uma transformação linear}\}.$$

Podemos considerar também a categoria $vect_{\Bbbk}$, cujos objetos são os $\Bbbk$-espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos são os mesmos da categoria acima.

Exemplo 1.1.9. (Categoria Oposta) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Definimos $\mathcal{C}^{op}$ como a categoria cujos objetos são objetos de $\mathcal{C}$ e tal que, para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z)$, então a composição em $\mathcal{C}^{op}$ é dada por $g \circ^{op} f = f \circ g$.

Exemplo 1.1.10. (Categoria $Alg_{\Bbbk}$) Nesta categoria, os objetos são as $\Bbbk$-álgebras e os morfismos são os morfismos de $\Bbbk$-álgebras.

O próximo exemplo é de suma importância e será usado frequentemente nos próximos capítulos.

Exemplo 1.1.11. (Categoria produto) Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e $X', Y', Z' \in \mathcal{D}$. Então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma categoria, chamada *categoria produto*, em que os objetos são os pares $(X, X') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e, dados $(X, X'), (Y, Y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y'))$$

Com isso em mente, dados $(X, X'), (Y, Y'), (Z, Z') \in \mathcal{C}\times\mathcal{D}$, notemos que é possível definirmos a composição

$$\begin{aligned}((g, g'), (f, f')) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((Y, Y'), (Z, Z')) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) =\\ (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', Z')) \times (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y'))\end{aligned}$$

por

$$\circ((g, g'), (f, f')) = (g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f'),$$

em que

$$(g \circ f, g' \circ f') \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Z, Z')).$$

Observação 1.1.12. Com a definição acima, $\circ$ é claramente associativa e $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$. De fato,

$$(f, f') \circ (id_X, id_{X'}) = (f \circ id_X, f' \circ id_{X'}) = (f, f'),$$

para todo $(f, f') \in (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y'))$ e

$$(id_X, id_{X'}) \circ (g, g') = (id_X \circ g, id_{X'} \circ g') = (g, g'),$$

para todo $(g, g') \in (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z', X'))$. Assim, $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$.

Além disso, se (f, f') é um isomorfismo em $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X', Y'))$ então existe $(g, g') \in (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', X'))$ tal que

$$(f, f') \circ (g, g') = (id_Y, id_{Y'}) \quad \text{e} \quad (g, g') \circ (f, f') = (id_X, id_{X'}).$$

Como $(f, f') \circ (g, g') = (f \circ g, f' \circ g')$ e $(g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f')$ e assim, $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$, $f' \circ g' = id_{Y'}$ e $g' \circ f' = id_{X'}$. Logo, $g = f^{-1}$ e $g' = f'^{-1}$. Portanto, $(f, f')^{-1} = (g, g') = (f^{-1}, f'^{-1})$.

Definição 1.1.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $Z \in \mathcal{C}$ diz-se objeto zero se, para todo $X \in \mathcal{C}$ existem únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$ e $\psi_X : Z \to X$, ou seja,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$.

Proposição 1.1.14. *O objeto zero, se existir, é único, a menos de isomorfismo.*

Demonstração. De fato, sejam Z e W objetos zeros em $\mathcal{C}$. Então existem únicos morfismos $\phi_Z : Z \to W$ e $\psi_Z : W \to Z$ e assim, $\phi_Z \circ \psi_Z = id_W$, pois W é um objeto zero. Analogamente, obtemos que $\psi_Z \circ \phi_Z = id_Z$, pois Z é um objeto zero. Portanto, $Z \cong W$. ■

Exemplo 1.1.15. Na categoria *Grp*, o grupo trivial $\{e\}$ é o objeto zero desta categoria.

Exemplo 1.1.16. A categoria *Set* não possui objeto zero. De fato, suponhamos por absurdo que Z seja o objeto zero em *Set*. Se a cardinalidade de Z é maior ou igual a 2 então, dado o conjunto $\{\emptyset\}$, podemos definir, pelo menos, duas funções distintas de $\{\emptyset\}$ para Z e assim, temos um absurdo. Se Z for unitário então, para qualquer conjunto com dois elementos, podemos definir duas funções distintas de Z para esse conjunto e novamente, temos um absurdo.

Definição 1.1.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z. Para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ definimos o morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ como sendo o morfismo que comuta o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & Y \\
& Z. \arrow[ur, "\psi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 1.1.18. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Um núcleo de f é um par $(Ker(f), k)$, em que $Ker(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $k : Ker(f) \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$. Além disso, dados K' um objeto em $\mathcal{C}$ e $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, então existe um único morfismo $\mu : K' \to Ker(f)$ em $\mathcal{C}$ tal que $k \circ \mu = k'$.*

(ii) *Um conúcleo de f é um par $(coKer(f), q)$, em que $coKer(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $q : Y \to coKer(f)$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q \circ f = 0_{coKer(f)}^X$. Além disso dados Q' um objeto em $\mathcal{C}$ e $q' : Y \to Q'$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q' \circ f = 0_{Q'}^X$, então existe um único morfismo $\gamma : coKer(f) \to Q'$ tal que $\gamma \circ q = q'$.*

Ambas as propriedades acima podem ser vistas via diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & coKer(f) \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\
& K' \arrow[u, "k'"'] \arrow[ul, dashed, "\mu"] \arrow[ul, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & Q'. \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

A partir de agora, denotamos por 0 tanto o objeto zero quanto o morfismo nulo.

Exemplo 1.1.19. Na categoria ${}_R\mathcal{M}$, dado um morfismo $f : M \to N$ o núcleo e o conúcleo são dados por $(Ker(f), \iota)$, em que $Ker(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$ e ι é a inclusão canônica, isto é, $\iota : Ker(f) \to X$. O conúcleo de f é o par $(coKer(f), \pi)$, em que $coKer(f) = {}^{N}/_{Im(f)}$, $\pi : N \to {}^{N}/_{Im(f)}$ é a projeção canônica e $Im(f)$ é a imagem de f.

As próximas definições estendem as noções, no contexto categórico, que se aproximam dos conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Definição 1.1.20. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *f diz-se um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : Z \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.*

(ii) *f diz-se um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : Y \to W$ tais que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.*

Na categoria *Ring*, por exemplo, existem epimorfismos que não são sobrejetores, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.1.21. Considere a categoria *Ring*. Então o morfismo inclusão canônica $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ é um epimorfismo, mas não é sobrejetor.

De fato, sejam R um anel e $g, h : \mathbb{Q} \to R$ morfismos de anéis tais que $g \circ \iota = h \circ \iota$. Seja $z \in \mathbb{Z}$. Então

$$g(z) = g(\iota(z)) = (g \circ \iota)(z) = (h \circ \iota)(z) = h(\iota(z)) = h(z).$$

Além disso, para todo $0 \neq z \in \mathbb{Z}$, segue que

$$h(1) = g(1) = g\left(\frac{z}{z}\right) = g(z)g\left(\frac{1}{z}\right) = h(z)g\left(\frac{1}{z}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{z}\right) &= h\left(\frac{1}{z}1\right) \\
&= h\left(\frac{1}{z}\right)h(1) \\
&= h\left(\frac{1}{z}\right)h(z)g\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= h\left(\frac{1}{z}z\right)g\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= h(1)g\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= g(1)g\left(\frac{1}{z}\right) \\
&= g\left(\frac{1}{z}\right).
\end{aligned}$$

Logo, para qualquer $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, temos que

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = h(a)h\left(\frac{1}{b}\right) = g(a)g\left(\frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{a}{b}\right).$$

Portanto, $g = h$. Claramente, ι não é sobrejetor.

Em ([10], Chapter X, p. 481), há um exemplo onde é apresentado um monomorfismo que não é injetor, considerando a categoria dos grupos abelianos divisíveis.

Aqui, surgem algumas perguntas como, por exemplo, os conceitos de injetividade e monomorfismo coincidem em alguma categoria? A mesma pergunta vale para epimorfismo e sobrejetividade. A proposição a seguir responde essas perguntas para a categoria ${}_R\mathcal{M}$.

Proposição 1.1.22. *Seja R um anel. Um morfismo f na categoria ${}_R\mathcal{M}$ é monomorfismo (respectivamente epimorfismo) se, e somente se, f é injetor (respectivamente sobrejetor).*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $f : M \to N$ um morfismo injetor em ${}_R\mathcal{M}$. Sejam $g, h : P \to M$ morfismos em ${}_R\mathcal{M}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Assim, para todo $x \in P$, temos que

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x))$$

e pelo fato de f ser injetor, $g(x) = h(x)$, para todo $x \in P$. Logo, $g = h$ e f é um monomorfismo.

Agora, suponhamos $f : M \to N$ um morfismo sobrejetor em ${}_R\mathcal{M}$. Sejam $g, h : N \to W$ morfismos em ${}_R\mathcal{M}$ tais que $g \circ f = h \circ f$. Seja $n \in N$. Como f é sobrejetor, existe $m \in M$ tal que $n = f(m)$. Daí,

$$g(n) = g(f(m)) = (g \circ f)(m) = (h \circ f)(m) = h(f(m)) = h(n),$$

para todo $n \in N$ e isso nos dia que $g = h$ e portanto, f é um epimorfismo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f não seja injetor. Então $Ker(f) \neq \{0\}$. Consideremos a inclusão canônica $\iota : Ker(f) \to M$. Então $f \circ \iota = 0$ (morfismo nulo). Consideremos $h : Ker(f) \to M$ o morfismo nulo. Assim, $f \circ \iota = 0 = f \circ h$ e naturalmente que $\iota \neq h$, pois $\iota(Ker(f)) = Ker(f) \neq \{0\}$.

Suponhamos que f não seja sobrejetor, assim o R-módulo ${}^{N}/_{Im(f)} \neq \{0\}$. Consideremos a projeção canônica $\pi : N \to {}^{N}/_{Im(f)}$ e o homomorfismo nulo $h : N \to {}^{N}/_{Im(f)}$, isto é, $h(n) = 0 + Im(f) = \overline{0}$. Claramente, $\pi \circ f = 0 = h \circ f$, mas $\pi \neq h$. Logo, f não é epimorfismo. ■

Corolário 1.1.23. *Seja R um anel. Na categoria ${}_R\mathcal{M}$ todo isomorfismo é injetor e sobrejetor e reciprocamente.*

Demonstração. Não é difícil ver que todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo (isso vale para qualquer categoria). Pela proposição acima, um isomorfismo é injetor e sobrejetor. Por outro lado, se $f : M \to N$ é injetor e sobrejetor em ${}_R\mathcal{M}$, existe $f^{-1} : N \to M$

tal que $f \circ f^{-1} = id_N$ e $f^{-1} \circ f = id_M$ e isso nos diz que f é um isomorfismo. ∎

Lembramos que um *subobjeto* de X é uma classe de equivalência de monomorfismos para X.

Dois monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$ e $\iota_2 : X_2 \to X$ dizem-se equivalentes, se existe um isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Se Y é um subobjeto de X, então existe um monomorfismo $\iota : Y \to X$.

Finalizamos esta seção com a definição de objeto simples que embora usada apenas no Capítulo 4, achamos apropriado defini-la neste momento.

Definição 1.1.24. ([15], Definición 2.7.55) *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $S \in \mathcal{C}$ que não seja o objeto zero. Então S diz-se simples se todo subobjeto de S é isomorfo ao objeto zero ou a S.*

Exemplo 1.1.25. Consideremos a categoria $Vect_{\Bbbk}$. Temos que o objeto $\Bbbk \in Vect_{\Bbbk}$ é simples.

1.2 Funtores e transformações naturais

O objetivo desta seção é apresentarmos algumas definições e resultados acerca de funtores e transformações naturais, que nos serão úteis para o entendimento de conceitos e resultados apresentados adiante e, também, bastante utilizados nas demonstrações aqui apresentadas.

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de duas aplicações*

(i) *uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) & \to & \mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \\ & X & \mapsto & F(X), \end{array}$$

em que cada $X \in \mathcal{C}$ está associado $F(X)$,

(ii) *uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

tal que, para qualquer $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, está associado $F(f)$.

Além disso, são satisfeitas

$$\text{(I)}\ F(id_X) = id_{F(X)} \quad e \quad \text{(II)}\ F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

Vale ressaltarmos aqui, que a palavra “função” dita na definição acima nos diz apenas uma regra e não uma função no sentido usual da Teoria de Conjuntos. A seguir segue algumas propriedades e exemplos de funtores.

Exemplo 1.2.2. (Funtor Identidade) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Definimos o *funtor identidade* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ por $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, para todo $X \in \mathcal{C}$ e para todo $f : X \to Y$ morfismo em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.2.3. (Funtor Esquecimento) Seja $F : Ring \to Ab$ dado por $F(A) = A$ e $F(f) = f$, para todo $A \in Ring$ e qualquer $f : A \to B$ morfismo em $Ring$. Este funtor F é chamado *funtor esquecimento*, pois em $F(A) = A$ é esquecida a estrutura de anéis e é considerada apenas sua estrutura de grupo abeliano. Em $F(f) = f$ é esquecida a estrutura de morfismo de anéis e é considerada apenas f como morfismo de grupos (abelianos).

Um outro exemplo útil de funtor esquecimento é $F : Ab \to Grp$.

Para alguns dos seguintes exemplos, consideremos $\mathcal{C}$ uma *categoria localmente pequena*, isto é, para quaisquer objetos X, Y em $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um conjunto. Tal definição e inclusive o próximo exemplo podem ser encontrados em ([8], ps. 179 e 180).

Exemplo 1.2.4. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena e X um objeto fixo em $\mathcal{C}$. Definimos $L_X : \mathcal{C} \to Set$ dado por $L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para todo $Y \in \mathcal{C}$. Além disso, dado um morfismo $f : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$ definimos

$$\begin{array}{cccc} L_X(f): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & g & \mapsto & f \circ g\ , \end{array}$$

para todo morfismo $g : X \to Y$ em $\mathcal{C}$. De fato, L_X é um funtor. Verifiquemos que, para todo $Y \in \mathcal{C}$, $L_X(id_Y) = id_{L_X(Y)} = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}$.

Temos que $L_X(id_Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e portanto, para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, segue que

$$L_X(id_Y)(g) = id_Y \circ g = g = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(g).$$

Logo, $L_X(id_Y) = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)} = id_{L_X(Y)}$.

Finalmente provemos que $L_X(f\circ g)=L_X(f)\circ L_X(g)$, para todo $g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ e $f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$. Seja $h\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Então

$$\begin{aligned} L_X(f\circ g)(h) &= (f\circ g)\circ h\\ &= f\circ(g\circ h)\\ &= L_X(f)(g\circ h)\\ &= L_X(f)(L_X(g)(h))\\ &= (L_X(f)\circ L_X(g))(h)\end{aligned}$$

e portanto, $L_X(f\circ g)=L_X(f)\circ L_X(g)$.

Vejamos um caso particular do exemplo acima.

Exemplo 1.2.5. Sejam R um anel e $M\in {}_R\mathcal{M}$ fixado. Definimos o funtor

$$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,-):{}_R\,\mathcal{M}\to Ab$$

por $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,-)(N)=\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,N)$, para qualquer R-módulo à esquerda N. Além disso, dado um morfismo $f:P\to N$ temos que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,f): & \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,P) & \to & \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,N)\\ & g & \mapsto & f\circ g.\end{array}$$

Exemplo 1.2.6. Sejam $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{D},\mathcal{D}'$ categorias, $f:X\to Y$ e $g:Y\to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$, $f':X'\to Y'$ e $g':Y'\to Z'$ morfismos em $\mathcal{D}$. Assim, dados $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ e $G:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ dois funtores, definimos o funtor

$$F\times G:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}'\times\mathcal{D}'$$

por $(F\times G)(X,X')=(F(X),G(X'))$ e $(F\times G)(f,f')=(F(f),G(f'))$. Logo,

$$\begin{aligned} (F\times G)\left(id_{(X,X')}\right) &\overset{(1)}{=} (F\times G)(id_X,id_{X'})\\ &= (F(id_X),G(id_{X'}))\\ &= \left(id_{F(X)},id_{G(X')}\right)\\ &\overset{(2)}{=} id_{(F(X),G(X'))}\\ &= id_{(F\times G)(X,X')},\end{aligned}$$

em que nas igualdades (1) e (2) usamos a Observação 1.1.12. Finalmente,

$$(F\times G)((g,g')\circ(f,f'))\overset{(3)}{=}(F\times G)(g\circ f,g'\circ f')$$

$$\begin{aligned}
&= (F(g \circ f), G(g' \circ f')) \\
&= (F(g) \circ F(f), G(g') \circ G(f')) \\
&\overset{(4)}{=} (F(g), G(g')) \circ (F(f), G(f')) \\
&= (F \times G)(g, g') \circ (F \times G)(f, f'),
\end{aligned}$$

em que nas igualdades (3) e (4) usamos a composição do Exemplo 1.1.11. Portanto, $F \times G$ é um funtor.

Exemplo 1.2.7. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X \in \mathcal{C}$ um objeto fixado. Definimos

$$X \times Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

por $(X \times Id_{\mathcal{C}})(Y) = (X, Y)$ e $(X \times Id_{\mathcal{C}})(f) = (id_X, f)$, para qualquer $Y \in \mathcal{C}$ e qualquer morfismo f em $\mathcal{C}$. De fato, $X \times Id_{\mathcal{C}}$ é um funtor pois, para todo $Y \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
(X \times Id_{\mathcal{C}})(id_Y) &= (id_X, id_Y) \\
&\overset{(*)}{=} id_{(X,Y)} \\
&= id_{(X \times Id_{\mathcal{C}})(Y)},
\end{aligned}$$

em que na igualdade $(*)$ usamos a Observação 1.1.12. Além disso, para quaisquer morfismos $f : Y \to Z$ e $g : Z \to W$ em $\mathcal{C}$, segue que

$$\begin{aligned}
(X \times Id_{\mathcal{C}})(g \circ f) &= (id_X, g \circ f) \\
&= (id_X \circ id_X, g \circ f) \\
&= (id_X, g) \circ (id_X, f) \\
&= (X \times Id_{\mathcal{C}})(g) \circ (X \times Id_{\mathcal{C}})(f).
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos definir o funtor $Id_{\mathcal{C}} \times X$, em que $X \in \mathcal{C}$ é um objeto fixado.

Podemos generalizar o exemplo anterior, via o exemplo abaixo, que será de grande ajuda para definirmos funtores adjuntos no Capítulo 2.

Exemplo 1.2.8. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena. Definimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$$

da seguinte forma

(a) para cada par de objetos $(X', X) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)(X', X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$,

(b) para cada par de morfismos $(f', f) \in (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X', Y'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((X', X), (Y', Y))$,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(f', f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', f): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', Y) \\ & \alpha & \mapsto & f \circ \alpha \circ f'. \end{array}$$

Verifiquemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ é um funtor. Mostremos que, para todo par $(X', X) \in \mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\left(id_{(X',X)}\right) = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(X',X)}$.

Temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\left(id_{(X',X)}\right) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ e portanto, para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$, segue que

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\left(id_{(X',X)}\right)\right)(\alpha) &= (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(id_{X'}, id_X))(\alpha) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_{X'}, id_X)(\alpha) \\ &= id_X \circ \alpha \circ id_{X'} \\ &= \alpha \\ &= id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',X)}(\alpha) \\ &= id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(X',X)}(\alpha). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\left(id_{(X',X)}\right) = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(X',X)}$. Finalmente provemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)((f', f) \circ (g', g)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(f', f) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(g', g)$$

para quaisquer morfismos $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y', Z')$ e $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X', Y')$ e quaisquer morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Temos que

$$f' \circ^{op} g' : X' \to Z' \qquad \text{e} \qquad f \circ g : X \to Z$$

e portanto,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f' \circ^{op} g', f \circ g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z).$$

Seja $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f' \circ^{op} g', f \circ g)(\alpha) &= f \circ g \circ \alpha \circ f' \circ^{op} g' \\ &= f \circ g \circ \alpha \circ g' \circ f' \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', f)(g \circ \alpha \circ g') \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', f)(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g', g)(\alpha)) \\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f', f) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g', g))(\alpha) \\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(f', f) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)(g', g))(\alpha). \end{aligned}$$

Nos próximos dois resultados veremos que dado um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se f é um isomorfismo em $\mathcal{C}$, então $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ e, além disso, a composição de funtores (quando possível) é um funtor. Este resultado será muito utilizado ao longo deste trabalho.

Proposição 1.2.9. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $f : X \to Y$ um isomorfismo em $\mathcal{C}$. Então $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ e $F(f)^{-1} = F\left(f^{-1}\right)$.*

Demonstração. Como f é um isomorfismo, existe um morfismo $f^{-1} : Y \to X$ em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ f^{-1} = id_Y$ e $f^{-1} \circ f = id_X$. Deste modo,

$$id_{F(X)} = F(id_X) = F\left(f^{-1} \circ f\right) = F\left(f^{-1}\right) \circ F(f).$$

Por outro lado,

$$id_{F(Y)} = F(id_Y) = F\left(f \circ f^{-1}\right) = F(f) \circ F\left(f^{-1}\right).$$

Por conseguinte, $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$ com $F(f)^{-1} = F\left(f^{-1}\right)$. ■

A proposição acima nos diz $F(X) \cong F(Y)$, sempre que $f : X \to Y$ for um isomorfismo e F for um funtor.

Proposição 1.2.10. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. Então $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor.*

Demonstração. Observemos que, para todo $X \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}(G \circ F)(id_X) &= G(F(id_X)) \\ &= G\left(id_{F(X)}\right) \\ &= id_{G(F(X))} \\ &= id_{(G \circ F)(X)}.\end{aligned}$$

Para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned}(G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(g) \circ F(f)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f).\end{aligned}$$

Logo, $G \circ F$ é um funtor. ■

Embora neste trabalho usamos apenas funtores covariantes, vale comentar que existe o *funtor contravariante*, o qual definimos a seguir.

Definição 1.2.11. *Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se contravariante se satisfaz*

(i) *os itens* (i) *e* (ii) *da* Definição 1.2.1,

(ii) $F(id_X) = id_{F(X)}$,

(iii) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

O próximo exemplo é análogo ao Exemplo 1.2.5, porém o funtor é contravariante.

Exemplo 1.2.12. Sejam R um anel e $N \in {}_R\mathcal{M}$ fixado. Definimos o funtor

$$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N) : {}_R\mathcal{M} \to Ab$$

por $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(M) = \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N)$, para qualquer R-módulo à esquerda M. Dado um morfismo $f : P \to M$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(f, N) : & \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N) & \to & \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(P, N) \\ & g & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Tal funtor é contravariante. De fato, verifiquemos que $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(id_M) = id_{\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-,N)(M)}$, para todo $M \in {}_R\mathcal{M}$.

Temos que $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(id_M) : \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N)$ e portanto, para todo $g \in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N)$, segue que

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(id_M))(g) &= \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(id_M, N)(g) \\ &= g \circ id_M \\ &= g = id_{\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M,N)}(g) \\ &= id_{\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-,N)(M)}(g) \end{aligned}$$

e portanto, $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(id_M) = id_{\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-,N)(M)}$. Agora, mostremos que $\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(f \circ h) = \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(h) \circ \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(f)$, para $h \in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(P, Q)$ e $f \in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(Q, M)$. Temos que

$$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(f \circ h) : \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(P, N).$$

Seja $g \in \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(M, N)$. Então

$$(\mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(-, N)(f \circ h))(g) = \mathrm{Hom}_{{}_R\mathcal{M}}(f \circ h, N)(g)$$

$$
\begin{aligned}
&= g \circ (f \circ h) \\
&= (g \circ f) \circ h \\
&= \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(h, N)(g \circ f) \\
&= \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(h, N)(\mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(f, N)(g)) \\
&= (\mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(h, N) \circ \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(f, N))(g) \\
&= (\mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(-, N)(h) \circ \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(-, N)(f))(g).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(-, N)(f \circ h) = \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(-, N)(h) \circ \mathrm{Hom}_{_R\mathcal{M}}(-, N)(f)$.

Na próxima definição associamos um funtor a outro, isto se dá através das chamadas transformações naturais.

Definição 1.2.13. *Sejam F, G funtores, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é uma coleção de morfismos*

$$\{\mu_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$$

em $\mathcal{D}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y),
\end{tikzcd}
$$

isto é, $G(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ F(f)$, para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

Se $\mu_X : F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$, μ diz-se um *isomorfismo natural.* Neste caso, dizemos que os funtores F e G são *equivalentes* e denotamos $F \sim G$.

Exemplo 1.2.14. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Observemos que sempre existe a *transformação natural identidade* $ID : F \to F$ definida pela coleção de morfismos $\{ID_X = id_{F(X)} : F(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$. Além disso, notemos que ID é um isomorfismo natural, pois ID_X é um isomorfismo, para todo $X \in \mathcal{C}$.

No exemplo a seguir definimos dois funtores que serão úteis para exibir um exemplo de adjunção no Capítulo 2.

Exemplo 1.2.15. Consideremos o funtor esquecimento $J : Ab \to Grp$. Definimos $U : Grp \to Ab$ por $U(H) = {}^{H}/_{[H,H]}$, é conhecido que tal grupo quociente é abeliano. Seja $f : G \to H$ um morfismo de grupos. Então

$$\begin{array}{rccc} U(f): & {}^{G}/_{[G,G]} & \to & {}^{H}/_{[H,H]} \\ & x[G,G] & \mapsto & f(x)[H,H]. \end{array}$$

Observamos que $U(f)$ está bem definido, pois dados $x, y \in G$ tais que $x[G,G] = y[G,G]$, então $x^{-1}y \in [G,G]$. Daí,

$$x^{-1}y = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, \text{ em que } a_i, b_i \in G, \text{ para } i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x)^{-1}f(y) &= f(x^{-1}y) \\ &= f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(a_i)f(b_i)f(a_i)^{-1}f(b_i)^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, $f(x)^{-1}f(y) \in [H,H]$. Logo, $f(x)[H,H] = f(y)[H,H]$.

Mostremos que U é um funtor. Sejam H um grupo e $x \in H$. Então

$$\begin{aligned} U(id_H)(x[H,H]) &= id_H(x)[H,H] \\ &= x[H,H] \\ &= id_{H/_{[H,\,H]}}(x[H,H]) \\ &= id_{U(H)}\left(x[H,H]\right). \end{aligned}$$

Logo, $U(id_H) = id_{U(H)}$. Sejam $f : G \to H$ e $h : H \to W$ morfismos de grupos. Então

$$\begin{aligned} U(h \circ f)(x[G,G]) &= (h \circ f)(x)[W,W] \\ &= h(f(x))[W,W] \\ &= U(h)(f(x)[H,H]) \\ &= U(h)(U(f)(x[G,G])) \\ &= (U(h) \circ U(f))(x[G,G]), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Logo, $U(h \circ f) = U(h) \circ U(f)$.

Observemos ainda, que a coleção de morfismos projeção dados por,

$$P = \left\{P_G : G \to {}^{G}/_{[G,G]} : G \in Grp\right\},$$

é uma transformação natural entre os funtores Id_{Grp} e $J \circ U$. De fato, seja $f : G \to H$ um morfismo em Grp. Então o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "P_G"] \arrow[d, "f"'] & (J \circ U)(G) = {}^{G}/_{[G,G]} \arrow[d, "(J\circ U)(f)"] \\ H \arrow[r, "P_H"'] & (J \circ U)(H) = {}^{H}/_{[H,H]}, \end{tikzcd}$$

pois dado $x \in G$, segue que

$$\begin{aligned} (P_H \circ f)(x) &= P_H(f(x)) \\ &= f(x)[H,H] \\ &= U(f)(x[G,G]) \\ &= J(U(f))(x[G,G]) \\ &= (J \circ U)(f)(x[G,G]) \\ &= (J \circ U)(f)\,(P_G(x)) \\ &= ((J \circ U)(f) \circ P_G)(x). \end{aligned}$$

Portanto, P é uma transformação natural.

A seguir observemos o seguinte fato geral sobre transformação natural que nos será útil no Capítulo 2.

Observação 1.2.16. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Se $\eta : F \to G$ é um isomorfismo natural, isto é, $\{\eta_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ é uma coleção de isomorfismos em $\mathcal{D}$, então $\eta^{-1} : G \to F$ dada pela coleção $\{\eta_X^{-1} : G(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ de isomorfismos em $\mathcal{D}$, ou seja, η^{-1} é um isomorfismo natural.

De fato, $\eta_X^{-1} : G(X) \to F(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Mostremos que η^{-1} é uma transformação natural. Temos, para todo morfismo $f : X \to Y$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\eta_X^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(Y) \arrow[r, "\eta_Y^{-1}"'] & F(Y) \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

comuta, pois o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

comuta, uma vez que η é uma transformação natural. Assim,

$$G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f),$$

o que implica

$$\eta_Y^{-1} \circ G(f) = F(f) \circ \eta_X^{-1}$$

e essa é a comutatividade do diagrama (1.1).

Definição 1.2.17. *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$. Além disso, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas se $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$.*

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas, obviamente são equivalentes. A definição de equivalência entre categorias é um resultado importante e interessante na literatura. O resultado a seguir é uma aplicação da definição acima.

Proposição 1.2.18. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ uma equivalência de categorias. Então $f : X \to Y$ é um monomorfismo (epimorfismo) em $\mathcal{C}$ se, e somente se, $F(f)$ é um monomorfismo (epimorfismo) em $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Como $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias, existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ G \sim Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F \sim Id_{\mathcal{C}}$.

Dessa maneira, existem $\mu : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\gamma : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$ isomorfismos naturais. Mostremos que $f : X \to Y$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$ se, e somente se, $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathcal{D}$.

Sabemos $F(f) : F(X) \to F(Y)$ e sejam $g, h : Z \to F(X)$ morfismos em $\mathcal{D}$ tais que $F(f) \circ g = F(f) \circ h$. Logo,

$$G(F(f) \circ g) = G(F(f) \circ h),$$

ou seja,

$$(G \circ F)(f) \circ G(g) = (G \circ F)(f) \circ G(h). \tag{1.2}$$

Temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\ Y \arrow[r, "\mu_Y"'] & (G \circ F)(Y), \end{tikzcd}$$

pela naturalidade de μ, ou seja, $\mu_Y \circ f = (G \circ F)(f) \circ \mu_X$ e isso implica que

$$(G \circ F)(f) = \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1}, \tag{1.3}$$

pois μ é um isomorfismo natural. Substituindo (1.3) em (1.2), temos

$$\mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(g) = \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ G(h)$$

e como μ_Y é um isomorfismo, segue que

$$f \circ \mu_X^{-1} \circ G(g) = f \circ \mu_X^{-1} \circ G(h).$$

Por hipótese, f é um monomorfismo e assim, $\mu_X^{-1} \circ G(g) = \mu_X^{-1} \circ G(h)$. Sendo μ_X um isomorfismo segue que $G(g) = G(h)$.

Por outro lado, como o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} (F \circ G)(Z) \arrow[r, "\gamma_Z"] \arrow[d, shift right, "(F\circ G)(g)"'] \arrow[d, shift left, "(F\circ G)(h)"] & Z \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\ (F \circ G)(F(X)) \arrow[r, "\gamma_{F(X)}"'] & F(X), \end{tikzcd}$$

segue que $\gamma_{F(X)} \circ (F \circ G)(g) = g \circ \gamma_Z$ e como γ_Z é um isomorfismo, temos que

$$\begin{aligned} g &= \gamma_{F(X)} \circ (F \circ G)(g) \circ \gamma_Z^{-1} \\ &= \gamma_{F(X)} \circ (F(G(g)) \circ \gamma_Z^{-1} \\ &\overset{(*)}{=} \gamma_{F(X)} \circ (F(G(h)) \circ \gamma_Z^{-1} \\ &= \gamma_{F(X)} \circ (F \circ G)(h) \circ \gamma_Z^{-1} \\ &= h, \end{aligned}$$

em que na igualdade $(*)$ usamos que $G(g) = G(h)$. Portanto, $g = h$ e isso nos diz que $F(f)$ é um monomorfismo.

Agora, por hipótese, suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathcal{D}$. Sejam $g, h : Z \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Assim,

$$F(f \circ g) = F(f \circ h),$$

ou seja,

$$F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$$

mas, por hipótese, $F(f)$ é um monomorfismo e daí, $F(g) = F(h)$. Assim, $(G \circ F)(g) = (G \circ F)(h)$.

Como o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\mu_Z"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] & (G \circ F)(Z) \arrow[d, shift right, "(G\circ F)(g)"'] \arrow[d, shift left, "(G\circ F)(h)"] \\ X \arrow[r, "\mu_X"'] & (G \circ F)(X), \end{tikzcd}$$

segue que $(G \circ F)(g) \circ \mu_Z = \mu_X \circ g$, ou seja,

$$g = \mu_X^{-1} \circ (G \circ F)(g) \circ \mu_Z = \mu_X^{-1} \circ (G \circ F)(h) \circ \mu_Z = h.$$

Portanto, $g = h$ e isso nos diz que f é um monomorfismo.

Analogamente, mostra-se que $f : X \to Y$ é um epimorfismo em $\mathcal{C}$ se, e somente se, $F(f)$ é um epimorfismo em $\mathcal{D}$. ■

O próximo resultado nos diz que a composição de duas transformações naturais, quando possível, ainda é uma transformação natural.

Proposição 1.2.19. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores e $\mu : F \to G$ e $\lambda : G \to H$ transformações naturais. A composição $\lambda \circ \mu : F \to H$ dada pela coleção $\{(\lambda \circ \mu)_X : F(X) \to H(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ de morfismos em $\mathcal{D}$, em que $(\lambda \circ \mu)_X = \lambda_X \circ \mu_X$ é uma transformação natural.*

Demonstração. De fato, para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "(\lambda\circ\mu)_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "(\lambda\circ\mu)_Y"'] & H(Y). \end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\lambda \circ \mu)_Y \circ F(f) &= (\lambda_Y \circ \mu_Y) \circ F(f)\\ &= \lambda_Y \circ (\mu_Y \circ F(f))\\ &\overset{(*)}{=} \lambda_Y \circ (G(f) \circ \mu_X)\\ &= (\lambda_Y \circ G(f)) \circ \mu_X\\ &\overset{(**)}{=} (H(f) \circ \lambda_X) \circ \mu_X\\ &= H(f) \circ (\lambda_X \circ \mu_X)\\ &= H(f) \circ (\lambda \circ \mu)_X,\end{aligned}$$

em que as igualdade $(*)$ e $(**)$ seguem da naturalidade de μ e λ, respectivamente. Tal composição é chamada *composição vertical.* ■

1.3 Categorias $\Bbbk$-lineares

Nesta seção, o objetivo é estudarmos sobre categorias com uma estrutura adicional entre os morfismos, a aditividade entre os mesmos. Tal seção é finalizada com a definição de categorias abelianas que são as categorias consideradas neste trabalho.

Definição 1.3.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se pré-aditiva se*

(i) *$\mathcal{C}$ possui objeto zero,*

(ii) *para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano,*

(iii) *a composição de morfismos é bilinear, isto é, para quaisquer morfismos $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ valem*

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$$

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e dados $X, Y \in \mathcal{C}$, uma *soma direta* de X e Y é uma quíntupla $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, \iota_X, \iota_Y)$, em que $X \oplus Y$ é um objeto em $\mathcal{C}$, $\pi_X : X \oplus Y \to X$, $\pi_Y : X \oplus Y \to Y$, $\iota_X : X \to X \oplus Y$ e $\iota_Y : Y \to X \oplus Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$ que satisfazem as seguintes igualdades

$$\pi_X \circ \iota_X = id_X \quad \text{e} \quad \pi_Y \circ \iota_Y = id_Y, \tag{1.4}$$

$$\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y = id_{X \oplus Y}. \tag{1.5}$$

Os morfismos π_X e π_Y são chamados projeções e os morfismos ι_X e ι_Y chamamos inclusões. Além disso, tais morfismos satisfazem

$$\pi_X \circ \iota_Y = 0 \quad \text{e} \quad \pi_Y \circ \iota_X = 0, \tag{1.6}$$

veja ([17], Observação 3.7). Lembremos que a soma direta de dois objetos quaisquer é única, a menos de isomorfismo.

Exemplo 1.3.2. Consideremos a categoria ${}_R\mathcal{M}$ e sejam M e N R-módulos. Então a quíntupla $(M \oplus N, \pi_M, \pi_N, \iota_M, \iota_N)$ é a soma direta de M e N, onde π_M e π_N são as projeções canônicas e ι_M e ι_N são as inclusões canônicas.

Definição 1.3.3. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se aditiva se*

(i) *$\mathcal{C}$ é pré-aditiva,*

(ii) *para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, existe a soma direta $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, \iota_X, \iota_Y)$ de X e Y.*

Exemplo 1.3.4. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ é aditiva. Basta considerarmos o módulo trivial $\{e\}$ como sendo o objeto zero nessa categoria e a soma direta de módulos sempre existe para quaisquer dois R-módulos.

Definição 1.3.5. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se abeliana se*

(i) *$\mathcal{C}$ é aditiva,*

(ii) *todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui um núcleo e um conúcleo,*

(iii) *todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.*

Exemplo 1.3.6. Seja R um anel. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ é abeliana. De fato, pelo Exemplo 1.3.4 a mesma é aditiva e pelo Exemplo 1.1.19 todo morfismo em ${}_R\mathcal{M}$ possui núcleo e conúcleo. Assim, resta-nos mostrar o item (iii) da definição acima.

Lembremos da Proposição 1.1.22 que em ${}_R\mathcal{M}$ monomorfismos (epimorfismos) são injetores (sobrejetores) e reciprocamente.

Seja $f : M \to N$ um monomorfismo. Mostremos que (M, f) é um núcleo do morfismo $p : N \to {}^{N}/_{Im(f)}$ (projeção canônica). De fato, $p \circ f = 0$. Pelo fato de f ser um monomorfismo, temos que $f : M \to Im(f)$ é um isomorfismo, ou seja, existe $f^{-1} : Im(f) \to M$. Seja (K, k) em que K é um R-módulo e $k : K \to N$ um morfismo em

${}_R\mathcal{M}$ tal que $p \circ k = 0$. Claramente, $Im(k) \subset Ker(p) \overset{(*)}{=} Im(f)$ e assim, $k : K \to Im(f)$. Tal situação é expressa pelo diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & Im(f) \arrow[r, hook, "\iota"] & N \arrow[r, "p"] & N/Im(f) \\
& & K, \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

ι é a inclusão canônica e a igualdade $(*)$ acima segue da exatidão da sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} N/Im(f) \longrightarrow 0.$$

Definimos $u = f^{-1} \circ k$ (que é claramente um morfismo em ${}_R\mathcal{M}$) e verifica-se que $f \circ u = f \circ (f^{-1} \circ k) = k$. Portanto, (M, f) é um núcleo de p.

Seja $g : L \to W$ um epimorfismo. Mostremos que (W, g) é um conúcleo do morfismo $\iota : Ker(g) \to L$ (inclusão canônica). De fato, $g \circ \iota = 0$. Seja (Q, q) em que Q é um R-módulo e $q : L \to Q$ um morfismo em ${}_R\mathcal{M}$ tal que $q \circ \iota = 0$. Por hipótese, g é um epimorfismo e assim, para todo $w \in W$, existe $l \in L$ tal que $w = g(l)$. Assim, podemos definir $h : W \to Q$ por $h(w) = h(g(l)) = q(l)$. Em termos de diagrama temos

$$\begin{tikzcd}
Ker(g) \arrow[r, hook, "\iota"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & W \arrow[dl, "h"] \\
& Q. &
\end{tikzcd}$$

Verifiquemos que h está bem definida. Suponhamos $l, l' \in L$ tais que $g(l) = g(l')$ o que implica $g(l - l') = 0$. Logo $l - l' \in Ker(g)$ e daí, $l - l' = \iota(l - l')$. Portanto, $q(l - l') = q(\iota(l - l')) = (q \circ \iota)(l - l') = 0$, ou seja, $q(l) = q(l')$.

Claramente, h comuta o diagrama acima, $(h \circ g)(l) = h(g(l)) = q(l)$, para todo $l \in L$. Logo, $g \circ h = q$.

Finalmente, mostremos que h é um morfismo em ${}_R\mathcal{M}$. Sejam $w, w' \in W$ e $r \in R$. Então $w = g(l)$ e $w' = g(l')$, para alguns $l, l' \in L$ e

$$\begin{aligned}
h(rw + w') &= h(rg(l) + g(l')) = h(g(rl + l')) \\
&= q(rl + l')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= rq(l) + q(l') \\ &= rh(w) + h(w'). \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos que $\mathcal{M}_R$, ${}_R\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}_R$ são categorias abelianas.

Exemplo 1.3.7. A categoria Ab dos grupos abelianos é uma categoria abeliana.

Exemplo 1.3.8. Se as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são abelianas, então as categorias do Exemplo 1.1.9 e do Exemplo 1.1.11, a saber $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, respectivamente, são abelianas.

Definição 1.3.9. *Seja $\Bbbk$ um corpo. Uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ diz-se $\Bbbk$-linear se, para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial e a composição de morfismo é $\Bbbk$-bilinear, isto é, satisfaz* (iii) *da* Definição 1.3.1 *e $\alpha(f + f') = \alpha f + \alpha f'$, para quaisquer $f, f' : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$* e $\alpha \in \Bbbk$.

Exemplo 1.3.10. A categoria $Vect_{\Bbbk}$ é uma categoria $\Bbbk$-linear pois, para quaisquer $V, W \in Vect_{\Bbbk}$, $\mathrm{Hom}_{Vect_{\Bbbk}}(V,W)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial.

Com os resultados apresentados até o momento, podemos definir funtor aditivo, o qual será muito utilizado nos capítulos seguintes.

Definição 1.3.11. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se aditivo se, para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, satisfaz a seguinte igualdade*

$$F(f + g) = F(f) + F(g),$$

para quaisquer $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$.

Definição 1.3.12. *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias $\Bbbk$-lineares. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se $\Bbbk$-linear se*

(i) *F é aditivo,*

(ii) *$F(\alpha f) = \alpha F(f)$, para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ e para todo $\alpha \in \Bbbk$.*

Exemplo 1.3.13. Consideremos a aplicação $F : Vect_{\Bbbk} \to Vect_{\Bbbk}$ definido por $F(V) = V^{**}$, em que $V^{**} = \{T : V^* \to \Bbbk : T$ é $\Bbbk$-linear$\}$

$$\begin{array}{rccc} F(f): & V^{**} & \to & W^{**} \\ & T & \mapsto & F(f)(T): \quad W^* \to \Bbbk \end{array}$$

dado por $F(f)(T) = T \circ f^*$, em que $f : V \to W$ e $f^* : W^* \to V^*$ é definida por $f^*(h) = h \circ f$, para todo $h \in W^*$. Observamos que $(id_V)^* = id_{V^*}$, pois $(id_V)^*(h) = h \circ id_V = h$, para todo $h \in V^*$. Também, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, para quaisquer morfismos $f : U \to W$ e $g : V \to U$. De fato, para todo $h \in W^*$, temos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^*(h) &= h \circ (f \circ g) \\
&= (h \circ f) \circ g \\
&= g^*(h \circ f) \\
&= g^*(f^*(h)) \\
&= (g^* \circ f^*)(h).
\end{aligned}$$

Mostremos que F definido acima é um funtor $\Bbbk$-linear. Verifiquemos que F é um funtor. De fato, para quaisquer $V \in Vect_{\Bbbk}$ e $T \in V^{**}$ temos que

$$\begin{aligned}
F(id_V)(T) &= T \circ (id_V)^* \\
&= T \circ id_{V^*} \\
&= T \\
&= id_{V^{**}}(T) \\
&= id_{F(V)}(T).
\end{aligned}$$

Logo, $F(id_V) = id_{F(V)}$. Além disso, para quaisquer morfismos $f : U \to W$ e $g : V \to U$ em $Vect_{\Bbbk}$, segue que

$$\begin{aligned}
F(f \circ g)(T) &= T \circ (f \circ g)^* \\
&= T \circ (g^* \circ f^*) \\
&= (T \circ g^*) \circ f^* \\
&= F(f)(T \circ g^*) \\
&= F(f)(F(g)(T)) \\
&= (F(f) \circ F(g))(T).
\end{aligned}$$

Logo, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Finalmente mostremos que F é $\Bbbk$-linear. Notemos que, para quaisquer $f, g \in \mathrm{Hom}_{Vect_{\Bbbk}}(V, W)$ e $\alpha \in \Bbbk$, temos

$$\begin{aligned}
((\alpha f + g)^*(h))(v) &= (h \circ (\alpha f + g))(v) \\
&= h((\alpha f + g)(v)) \\
&= h(\alpha f(v) + g(v))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h((\alpha f)(v)) + h(g(v)) \\
&= \alpha h(f(v)) + h(g(v)) \\
&= \alpha f^*(h)(v) + g^*(h)(v) \\
&= (\alpha f^*(h) + g^*(h))(v) \\
&= ((\alpha f^* + g^*)(h))(v),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $h \in W^*$ e $v \in V$. Logo,

$$
(\alpha f + g)^* = \alpha f^* + g^*. \tag{1.7}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
F(\alpha f + g) &= (\alpha f + g)^{**} \\
&= ((\alpha f + g)^*)^* \\
&\overset{(1.7)}{=} (\alpha f^* + g^*)^* \\
&\overset{(1.7)}{=} \alpha f^{**} + g^{**} \\
&= \alpha F(f) + F(g).
\end{aligned}
$$

Terminamos este capítulo relembrando o conceito de produto, pois queremos enunciar (sem provar) a Proposição 1.3.15 que auxilia na prova do Teorema 2.5.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $X, Y \in \mathcal{C}$. Um *produto* de X e Y é uma tripla (P, p_X, p_Y), em que $P \in \mathcal{C}$, $p_X : P \to X$ e $p_Y : P \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$. Além disso, se existirem outro objeto $Q \in \mathcal{C}$ e morfismos $q_X : Q \to X$ e $q_Y : P \to Y$ em $\mathcal{C}$ então existe um único morfismo $\phi : Q \to P$ tal que $p_X \circ \phi = q_X$ e $p_Y \circ \phi = q_Y$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \\
Q \arrow[r, dashed, "\phi"'] \arrow[urr, bend left, "q_X"] \arrow[drr, bend right, "q_Y"'] & P \arrow[ur, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
 & & Y.
\end{tikzcd}
$$

Analogamente, é definido um coproduto para quaisquer dois objetos em $\mathcal{C}$.

É conhecido que numa categoria pré-aditiva $\mathcal{C}$, existe produto de X e Y se, e somente se, existe soma direta de X e Y, em que X e Y são objetos em $\mathcal{C}$. Tal resultado pode ser encontrado em ([12], Theorem 2, p. 190) ou ([17], Proposição 3.10). Em particular, numa categoria aditiva sempre existe produto de dois objetos quaisquer.

Definição 1.3.14. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas e (P, p_X, p_Y) um produto de X e Y, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se preservar produto se $(F(P), F(p_X), F(p_Y))$ é também um produto de $F(X)$ e $F(Y)$.*

Proposição 1.3.15. ([17], Proposição 3.19) *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor e $X, Y \in \mathcal{C}$. Então F é aditivo se, e somente se, F preserva produto.*

A proposição acima está enunciada de forma mais completa (envolvendo também soma direta e coproduto) em [17]. Entretanto, para o nosso trabalho basta considerarmos apenas o produto.

Capítulo 2

Adjunção

Neste capítulo, definimos adjunção entre duas categorias e provamos um resultado (Teorema 2.2) que usamos para mostrar o teorema principal deste trabalho. Os funtores apresentados aqui são composições dos funtores dados nos exemplos 1.2.6 e 1.2.8. Este capítulo é embasado em [2], [8], [15] e [17]. Para o desenvolvimento deste capítulo vamos considerar categorias pré-aditivas.

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Uma adjunção de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, G, ϕ), em que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ são funtores e*

$$\{\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))\}_{X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}}$$

é uma família de isomorfismos.

Na definição acima, estamos usando os funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

e

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$$

tais que, para qualquer par $(f, g) \in (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, U), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, V)) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, V))$, temos

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}))(f, g) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g),$$

em que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g) : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V) \\ & \alpha & \mapsto & g \circ \alpha \circ F(f) \end{array}$$

e

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G))(f,g) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g)),$$

em que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g)) : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,G(V)) \\ & \beta & \mapsto & G(g) \circ \beta \circ f. \end{array}$$

Assim,

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) \tag{2.1}$$

é um isomorfismo natural e sua naturalidade é expressa pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f),g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g))"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U),V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,G(V)). \end{tikzcd}$$

Na tripla (F, G, ϕ) o funtor F é chamado *adjunto à esquerda* de G e o funtor G é chamado *adjunto à direita* de F.

O próximo resultado encontra-se em [2], [15] e [17], sendo que neste último está provado com detalhes. Porém, o mesmo é importante para este trabalho e portanto, apresentamos a prova aqui.

Teorema 2.2. *Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. As seguintes afirmações são aquivalentes:*

(i) *(F, G, ϕ) é uma adjunção;*

(ii) *existem transformações naturais $\mu : F \circ G \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$ e $\gamma : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ tais que, para quaisquer $Y \in \mathcal{D}$ e $X \in \mathcal{C}$, valem as seguintes igualdades*

$$id_{G(Y)} = G(\mu_Y) \circ \gamma_{G(Y)} \tag{2.2}$$

$$id_{F(X)} = \mu_{F(X)} \circ F(\gamma_X); \tag{2.3}$$

(iii) *existe uma transformação natural $\gamma : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ com a propriedade que, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ e qualquer morfismo*

$f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ existe um único morfismo $g : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(g)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, dashed, "g"] \\ Y, \end{tikzcd}$$

ou seja, $f = G(g) \circ \gamma_X$;

(iv) *existe uma transformação natural $\mu : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$ com a propriedade que, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ e qualquer morfismo $g : F(X) \to Y$ em $\mathcal{D}$ existe um único morfismo $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "F(f)"] \\ Y & F(G(Y)) \arrow[l, "\mu_Y"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "f"] \\ G(Y), \end{tikzcd}$$

ou seja, $g = \mu_Y \circ F(f)$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$, definimos

$$\mu_Y = \phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right) \tag{2.4}$$

$$\gamma_X = \phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right), \tag{2.5}$$

em que

$$\phi^{-1}_{G(Y),Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(Y)), Y)$$

e

$$\phi_{X,F(X)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))),$$

isto é,

$$\mu_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(Y)), Y) \quad \text{e} \quad \gamma_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))).$$

Seja $g : F(X) \to Y$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Então, pela naturalidade de ϕ, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X)) & \xrightarrow{\phi_{X,F(X)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(F(X))) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X),g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X,G(g))} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) & \xrightarrow[\phi_{X,Y}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)).
\end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X,G(g))\circ\phi_{X,F(X)}\right)\left(id_{F(X)}\right) = & \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X,G(g))\left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right)\\
&= G(g)\circ\left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right)\circ id_X\\
&= G(g)\circ\left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right)\\
&\overset{(2.5)}{=} G(g)\circ\gamma_X.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{X,Y}\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X),g)\right)\left(id_{F(X)}\right) = & \\
&= \phi_{X,Y}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X),g)\left(id_{F(X)}\right)\right)\\
&= \phi_{X,Y}\left(g\circ id_{F(X)}\circ F(id_X)\right)\\
&= \phi_{X,Y}(g).
\end{aligned}$$

Portanto, $G(g)\circ\gamma_X = \phi_{X,Y}(g)$. Fazendo $X = G(Y)$ e $g = \mu_Y$, temos

$$G(\mu_Y)\circ\gamma_{G(Y)} = \phi_{G(Y),Y}(\mu_Y) \overset{(2.4)}{=} id_{G(Y)}.$$

Para provarmos a igualdade (2.3), consideremos $h : X \to G(Y)$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Segue, da naturalidade de ϕ, a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y),G(Y)) & \xrightarrow{\phi^{-1}_{G(Y),Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(Y)),Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h,G(id_Y))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(h),id_Y)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) & \xrightarrow[\phi^{-1}_{X,Y}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y).
\end{array}$$

Por um lado, temos

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(h), id_Y) \circ \phi^{-1}_{G(Y),Y}\right)\left(id_{G(Y)}\right) &= \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(h), id_Y)\left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right) \\
&= id_Y \circ \left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right) \circ F(h) \\
&\overset{(2.4)}{=} \mu_Y \circ F(h)
\end{aligned}
$$

e, por outro lado, segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\phi^{-1}_{X,Y} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, G(id_Y))\right)\left(id_{G(Y)}\right) &= \\
&= \phi^{-1}_{X,Y}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h, G(id_Y))\left(id_{G(Y)}\right)\right) \\
&= \phi^{-1}_{X,Y}\left(G(id_Y) \circ id_{G(Y)} \circ h\right) \\
&= \phi^{-1}_{X,Y}(h).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mu_Y \circ F(h) = \phi^{-1}_{X,Y}(h)$. Fazendo $Y = F(X)$ e $h = \gamma_X$, temos

$$\mu_{F(X)} \circ F(\gamma_X) = \phi^{-1}_{X,F(X)}(\gamma_X) \overset{(2.5)}{=} id_{F(X)}.$$

Provemos que γ e μ são transformações naturais. Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Vejamos a comutatividade do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\
Y \arrow[r, "\gamma_Y"'] & (G \circ F)(Y).
\end{tikzcd}
$$

Para isto, usamos a naturalidade de ϕ, ou seja, que os diagramas abaixo comutam

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\phi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X), F(f))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(F(X))) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X, G(F(f)))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \arrow[r, "\phi_{X,F(Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(F(Y)))
\end{tikzcd}
\tag{2.6}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(Y)) \arrow[r, "\phi_{Y,F(Y)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f),F(id_Y))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,G(F(Y))) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(F(id_Y)))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \arrow[r, "\phi_{X,F(Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(F(Y))).
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

De (2.6) temos

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X, G(F(f))) \circ \phi_{X,F(X)}\right)\left(id_{F(X)}\right) &= \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_X, G(F(f)))\left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&= (G\circ F)(f) \circ \left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) \circ id_X \\
&= (G\circ F)(f) \circ \left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{X,F(Y)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X), F(f))\right)\left(id_{F(X)}\right) &= \\
&= \phi_{X,F(Y)}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_X), F(f))\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&= \phi_{X,F(Y)}(F(f) \circ id_{F(X)} \circ F(id_X)) \\
&= \phi_{X,F(Y)}\left(F(f)\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(G\circ F)(f) \circ \left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) = \phi_{X,F(Y)}\left(F(f)\right). \tag{2.8}$$

Analogamente, obtemos de (2.7) que

$$\left(\phi_{Y,F(Y)}\left(id_{F(Y)}\right)\right) \circ f = \phi_{X,F(Y)}\left(F(f)\right). \tag{2.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(G\circ F)(f) \circ \gamma_X &\overset{(2.5)}{=} (G\circ F)(f) \circ \left(\phi_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&\overset{(2.8)}{=} \phi_{X,F(Y)}\left(F(f)\right) \\
&\overset{(2.9)}{=} \left(\phi_{Y,F(Y)}\left(id_{F(Y)}\right)\right) \circ f \\
&\overset{(2.5)}{=} \gamma_Y \circ f.
\end{aligned}$$

A prova de que μ é uma transformação natural é análoga à anterior, todavia decidimos escrevê-la também. Seja $h : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{D}$. Verifiquemos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
(F\circ G)(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "(F\circ G)(h)"'] & X \arrow[d, "h"] \\
(F\circ G)(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Para tal utilizamos a naturalidade de ϕ^{-1} que comuta os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y),G(Y)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{G(Y),Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(h),G(id_Y))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(Y)),Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(h)),id_Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X),G(Y)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{G(X),Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(X)),Y)
\end{tikzcd} \tag{2.10}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X),G(X)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{G(X),X}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(id_X),G(h))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(X)),X) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(id_X)),h)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(X),G(Y)) \arrow[r, "\phi^{-1}_{G(X),Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(X)),Y).
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

De (2.10) temos

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(h)),id_Y)\circ\phi^{-1}_{G(Y),Y}\right)\left(id_{G(Y)}\right) = \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}((F\circ G)(h),id_Y)\left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right) \\
&= id_Y\circ\left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right)\circ(F\circ G)(h) \\
&= \left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right)\circ(F\circ G)(h)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left(\phi^{-1}_{G(X),Y}\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(h),G(id_Y))\right)\left(id_{G(Y)}\right) = \\
&\qquad = \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(h),G(id_Y))\left(id_{G(Y)}\right)\right) \\
&\qquad = \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(G(id_Y)\circ id_{G(Y)}\circ G(h)\right) \\
&\qquad = \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(G(h)\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right) \circ (F \circ G)(h) = \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(G(h)\right). \tag{2.12}$$

Analogamente, obtemos de (2.11) que

$$h \circ \left(\phi^{-1}_{G(X),X}\left(id_{G(X)}\right)\right) = \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(G(h)\right). \tag{2.13}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\mu_Y \circ (F \circ G)(h) &\overset{(2.4)}{=} \left(\phi^{-1}_{G(Y),Y}\left(id_{G(Y)}\right)\right) \circ (F \circ G)(h) \\
&\overset{(2.12)}{=} \phi^{-1}_{G(X),Y}\left(G(h)\right) \\
&\overset{(2.13)}{=} h \circ \left(\phi^{-1}_{G(X),X}\left(id_{G(X)}\right)\right) \\
&\overset{(2.4)}{=} h \circ \mu_X.
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. Definimos as seguintes aplicações

$$\begin{array}{rccc}
\phi_{X,Y}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \\
& \alpha & \mapsto & G(\alpha) \circ \gamma_X
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc}
\psi_{X,Y}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \\
& \beta & \mapsto & \mu_Y \circ F(\beta)
\end{array}$$

Mostremos que ϕ dada em (2.1) é uma transformação natural. Sejam os morfismos $f: U \to X$ em $\mathcal{C}$ e $g: Y \to V$ em $\mathcal{D}$. Mostremos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f),g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U),V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,G(V)).
\end{tikzcd}$$

comuta, para qualquer $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g)) \circ \phi_{X,Y}\right)(\alpha) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g))\left(\phi_{X,Y}(\alpha)\right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g))(G(\alpha) \circ \gamma_X)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= G(g) \circ G(\alpha) \circ \gamma_X \circ f \\
&= G(g \circ \alpha) \circ \gamma_X \circ f \\
&\overset{(*)}{=} G(g \circ \alpha) \circ G(F(f)) \circ \gamma_U \\
&= G(g \circ \alpha \circ F(f)) \circ \gamma_U \\
&= \phi_{U,V}(g \circ \alpha \circ F(f)) \\
&= \phi_{U,V}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g)(\alpha)\right) \\
&= \left(\phi_{U,V} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g)\right)(\alpha),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade $(*)$ segue da naturalidade de γ, isto é, da comutatividade do diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\gamma_U"] \arrow[d, "f"'] & (G \circ F)(U) \arrow[d, "(G\circ F)(f)"] \\
X \arrow[r, "\gamma_X"'] & (G \circ F)(X).
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, mostremos que

$$
\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \circ (Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}})
$$

é uma transformação natural, ou seja, que o diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \arrow[r, "\psi_{U,V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V).
\end{tikzcd}
$$

comuta, para todo $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g) \circ \psi_{X,Y}\right)(\beta) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g)\left(\psi_{X,Y}(\beta)\right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g)\left(\mu_Y \circ F(\beta)\right) \\
&= g \circ \mu_Y \circ F(\beta) \circ F(f) \\
&= g \circ \mu_Y \circ F(\beta \circ f) \\
&\overset{(*)}{=} \mu_V \circ F(G(g)) \circ F(\beta \circ f) \\
&= \mu_V \circ F(G(g) \circ \beta \circ f) \\
&= \psi_{U,V}(G(g) \circ \beta \circ f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_{U,V}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g))(\beta)\right) \\
&= \left(\psi_{U,V} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g))\right)(\beta),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade $(*)$ segue da naturalidade de μ, isto é, o diagrama a seguir comuta

$$
\begin{tikzcd}
(F \circ G)(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "(F\circ G)(g)"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
(F \circ G)(V) \arrow[r, "\mu_V"'] & V.
\end{tikzcd}
$$

Finalmente, mostremos que $\psi = \phi^{-1}$, ou seja, para cada par de objetos $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$ valem as igualdades $\psi_{X,Y} \circ \phi_{X,Y} = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)}$ e $\phi_{X,Y} \circ \psi_{X,Y} = id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))}$. Seja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$. Então

$$
\begin{aligned}
\left(\psi_{X,Y} \circ \phi_{X,Y}\right)(g) &= \psi_{X,Y}\left(G(g) \circ \gamma_X\right) \\
&= \mu_Y \circ F(G(g) \circ \gamma_X) \\
&= \mu_Y \circ F(G(g)) \circ F(\gamma_X) \\
&\overset{(*)}{=} g \circ \mu_{F(X)} \circ F(\gamma_X) \\
&\overset{(2.3)}{=} g \circ id_{F(X)} \\
&= g \\
&= id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)}(g),
\end{aligned}
$$

em que na igualdade $(*)$ utilizamos a naturalidade de μ e o diagrama abaixo comuta

$$
\begin{tikzcd}
(F \circ G)(F(X)) \arrow[r, "\mu_{F(X)}"] \arrow[d, "(F\circ G)(g)"'] & F(X) \arrow[d, "g"] \\
(F \circ G)(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & Y.
\end{tikzcd}
$$

Por outro lado, dado $h : X \to G(Y)$ um morfismo em $\mathcal{C}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\phi_{X,Y} \circ \psi_{X,Y}\right)(h) &= \phi_{X,Y}\left(\mu_Y \circ F(h)\right) \\
&= G\left(\mu_Y \circ F(h)\right) \circ \gamma_X \\
&= G(\mu_Y) \circ G(F(h)) \circ \gamma_X \\
&\overset{(*)}{=} G(\mu_Y) \circ \gamma_{G(Y)} \circ h
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\overset{(2.2)}{=} id_{G(Y)} \circ h \\ &= h \\ &= id_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))}(h), \end{aligned}$$

em que na igualdade $(*)$ usamos a naturalidade de γ, isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\gamma_X"] \arrow[d, "h"'] & (G \circ F)(X) \arrow[d, "(G\circ F)(h)"] \\ G(Y) \arrow[r, "\gamma_{G(Y)}"'] & (G \circ F)(G(Y)). \end{tikzcd}$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sejam $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. Pela equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii), existe uma transformação natural $\gamma : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ tal que $\phi_{X,Y}(h) = G(h) \circ \gamma_X$, para qualquer morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$.

Como $\phi_{X,Y}$ é um isomorfismo, existe um único morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ tal que $\phi_{X,Y}(g) = f$. Portanto,

$$f = \phi_{X,Y}(g) = G(g) \circ \gamma_X.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi_{X,Y} : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ & \alpha & \mapsto & G(\alpha) \circ \gamma_X \end{array}$$

em que $\gamma : Id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ é a transformação natural dada em (iii).

Mostremos que $\phi_{X,Y}$ é um isomorfismo. De fato, para todo $f : X \to G(Y)$ morfismo em $\mathcal{C}$ existe, por hipótese, um único morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ tal que $f = G(g) \circ \gamma_X = \phi_{X,Y}(g)$. Logo, $\phi_{X,Y}$ é sobrejetora.

A injetividade segue da unicidade dada em (iii) e portanto, $\phi_{X,Y}$ é um isomorfismo. Os mesmos cálculos feitos em (ii) $\Rightarrow$ (i) mostram a naturalidade de $\phi_{X,Y}$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Sejam $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$. Pela equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii), existe uma transformação natural $\mu : F \circ G \to Id_{\mathcal{D}}$ tal que $\psi_{X,Y}(h) = \mu_Y \circ F(h)$, para todo morfismo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$.

Como $\psi_{X,Y}$ é um isomorfismo, existe um único morfismo $f : X \to G(Y)$ em $\mathcal{C}$ tal que $\psi_{X,Y}(f) = g$. Portanto,

$$g = \psi_{X,Y}(f) = \mu_Y \circ F(f).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sejam $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. Consideremos

$$\begin{array}{rccc} \psi_{X,Y}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \\ & \beta & \mapsto & \mu_Y \circ F(\beta), \end{array}$$

em que μ é a transformação natural dada em (iv).

Mostremos que $\psi_{X,Y}$ é um isomorfismo. De fato, dado um morfismo em $\mathcal{D}$, $g : F(X) \rightarrow Y$ existe, por hipótese, um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ tal que $g = \mu_Y \circ F(f) = \psi_{X,Y}(f)$. Logo, $\psi_{X,Y}$ é sobrejetora. A injetividade segue da unicidade. Os mesmos cálculos feitos em (ii) $\Rightarrow$ (i) mostram a naturalidade de $\psi_{X,Y}$. ■

As transformações naturais γ e μ são chamadas *unidade* e *counidade* da adjunção, respectivamente. A seguir, damos um exemplo de adjunção.

Exemplo 2.3. Considerando os funtores $U : Grp \rightarrow Ab$ e $J : Ab \rightarrow Grp$ (funtor esquecimento) do Exemplo 1.2.15, provemos que J é adjunto à direita de U. Para tal, mostremos o item (iii) do teorema acima. Chamamos $\mathcal{C} = Grp$, $\mathcal{D} = Ab$, $F = U$ e $G = J$.

De fato, sejam $\mathcal{G} \in Grp$, $H \in Ab$ e $f : \mathcal{G} \rightarrow J(H) = H$ um morfismo em Grp. Definimos $g : U(\mathcal{G}) \rightarrow H$ por

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{G}/[\mathcal{G}, \mathcal{G}] & \rightarrow & H \\ & x[\mathcal{G}, \mathcal{G}] & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Vejamos que g está bem definida. Dados $x, y \in \mathcal{G}$ tais que $x[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = y[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$. Então $x^{-1}y \in [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$. Daí,

$$x^{-1}y = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}, \text{ em que } a_i, b_i \in \mathcal{G}, \text{ para } i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x^{-1}y) &= f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(a_i) f(b_i) f(a_i)^{-1} f(b_i)^{-1} \\ &\overset{(*)}{=} e_H, \end{aligned}$$

$(*)$ segue, pois H é abeliano. Logo, $f(x) = f(y)$.

Finalmente, veriquemos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "P_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}] = J(U(\mathcal{G})) \arrow[d, "J(g)=g"] \\ & J(H) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}] = U(\mathcal{G}) \arrow[d, dashed, "g"] \\ H. \end{tikzcd}$$

De fato, seja $x \in \mathcal{G}$. Então

$$\begin{aligned} (J(g) \circ P_{\mathcal{G}})(x) &= g(P_{\mathcal{G}}(x)) \\ &= g(x[\mathcal{G},\mathcal{G}]) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Além disso, se $g' : \mathcal{G}/[\mathcal{G},\mathcal{G}] \to H$ é um outro morfismo tal que $f = J(g') \circ P_{\mathcal{G}} = g' \circ P_{\mathcal{G}}$, então

$$g \circ P_{\mathcal{G}} = g' \circ P_{\mathcal{G}}$$

e como $P_{\mathcal{G}}$ é sobrejetor, temos que $g = g'$. Portanto, pelo Teorema 2.2, J é adjunto à direita de U.

Para o próximo exemplo, o qual pode ser encontrado em ([1], Lemma 3.1), consideremos G um grupo e lembremos que um anel R diz-se G-graduado se existe uma família de subanéis $\{R_g\}_{g\in G}$ tal que $R = \dot{\bigcup}_{g\in G} R_g$ tais que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Seja R um anel G-graduado. Um R-módulo graduado é um R-módulo M juntamente com uma família de submódulos $\{M_g\}_{g\in G}$ tal que $M = \dot{\bigcup}_{g\in G} M_g$ tais que $M_g M_h \subseteq M_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$.

Exemplo 2.4. Sejam GrR a categoria dos R-módulos (à esquerda) graduados e ${}_R\mathcal{M}$ a categoria dos R-módulos à esquerda. Consideremos o funtor esquecimento $F : GrR \to {}_R\mathcal{M}$ e o funtor $J : {}_R\mathcal{M} \to GrR$ definido por $J(M) = \dot{\bigcup}_{g\in G} X_g$ em que, para cada $g \in G$, $X_g = M$. A estrutura graduada de X é dada por $r_h \cdot x_g = (r_h x_g) \in X_{hg}$, para quaisquer $r_h \in R_h$ e $x_g \in X_g$. Assim, o par (F, J) é uma adjunção.

Teorema 2.5. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias aditivas, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores tais que (F, G, ϕ) seja uma adjunção de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Então F e G são funtores aditivos.*

Demonstração. Mostremos que G é aditivo. Para tal, usamos a Proposição 1.3.15, mostrando que G preserva produto. Seja (P, p_X, p_Y)

um produto de X e Y, em que $X, Y \in \mathcal{D}$. Precisamos mostrar que $(G(P), G(p_X), G(p_Y))$ é um produto de $G(X)$ e $G(Y)$.

Seja $\big(W, q_{G(X)}, q_{G(Y)}\big)$ uma tripla tal que $q_{G(X)} : W \to G(X)$ e $q_{G(Y)} : W \to G(Y)$ são morfismos em $\mathcal{C}$. Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & G(X) \\
W \arrow[urr, bend left, "q_{G(X)}"] \arrow[drr, bend right, "q_{G(Y)}"'] \arrow[r, dashed, "\gamma"] & G(P) \arrow[ur, "G(p_X)"'] \arrow[dr, "G(p_Y)"] & \\
 & & G(Y).
\end{tikzcd} \tag{2.14}$$

Mostremos que existe um único $\gamma : W \to P$ tal que o diagrama acima comute. Por hipótese, (F, G, ϕ) é uma adjunção. Logo, existem os seguintes isomorfismos

$$\phi_{W,X} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(X))$$

e

$$\phi_{W,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(Y)).$$

Assim, existem únicos morfismos $\alpha_X : F(W) \to X$ e $\alpha_Y : F(W) \to Y$ tais que

$$\phi_{W,X}(\alpha_X) = q_{G(X)} \quad \text{e} \quad \phi_{W,Y}(\alpha_Y) = q_{G(Y)}. \tag{2.15}$$

Como (P, p_X, p_Y) é um produto, existe um único morfismo $\theta : F(W) \to P$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
F(W) \arrow[urr, bend left, "\alpha_X"] \arrow[drr, bend right, "\alpha_Y"'] \arrow[r, dashed, "\theta"] & P \arrow[ur, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
 & & Y,
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$p_X \circ \theta = \alpha_X \quad \text{e} \quad p_Y \circ \theta = \alpha_Y. \tag{2.16}$$

Consideremos agora o seguinte isomorfismo

$$\phi_{W,P} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(P)).$$

Como $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), P)$ então $\phi_{W,P}(\theta) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(P))$ e chamamos

$$\phi_{W,P}(\theta) = \gamma. \tag{2.17}$$

Como ϕ é uma transformação natural, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), P) \arrow[r, "\phi_{W,P}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(P)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), X) \arrow[r, "\phi_{W,X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(X)).
\end{tikzcd}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\phi_{W,X} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)\right)(\theta) &= \phi_{W,X}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)(\theta)) \\
&= \phi_{W,X}\left(p_X \circ \theta\right) \\
&\overset{(2.16)}{=} \phi_{W,X}(\alpha_X) \\
&\overset{(2.15)}{=} q_{G(X)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X)) \circ \phi_{W,P}\right)(\theta) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))(\phi_{W,P}(\theta)) \\
&\overset{(2.17)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))(\gamma) \\
&= G(p_X) \circ \gamma.
\end{aligned}$$

Logo, $G(p_X) \circ \gamma = q_{G(X)}$. De maneira análoga, $G(p_Y) \circ \gamma = q_{G(Y)}$. Portanto, o diagrama (2.14) comuta.

Finalmente, mostremos a unicidade de γ. Suponhamos que exista $\gamma' : W \to G(P)$ tal que

$$G(p_X) \circ \gamma' = q_{G(X)} \quad \text{e} \quad G(p_Y) \circ \gamma' = q_{G(Y)}. \tag{2.18}$$

Como $\phi_{W,P}$ é um isomorfismo, existe um único morfismo $\theta' : F(W) \to P$ tal que

$$\phi_{W,P}(\theta') = \gamma'. \tag{2.19}$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(P)) \arrow[rr, "\phi^{-1}_{W,P}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), P) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, G(X)) \arrow[rr, "\phi^{-1}_{W,X}"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(W), X).
\end{tikzcd}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X) \circ \phi^{-1}_{W,P}\right)(\gamma') &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)\left(\phi^{-1}_{W,P}(\gamma')\right) \\
&\overset{(2.19)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(id_W), p_X)(\theta') \\
&= p_X \circ \theta'
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\phi^{-1}_{W,X} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))\right)(\gamma') &= \phi^{-1}_{W,X}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(id_W, G(p_X))(\gamma')\right) \\
&= \phi^{-1}_{W,X}(G(p_X) \circ \gamma') \\
&\overset{(2.18)}{=} \phi^{-1}_{W,X}(q_{G(X)}) \\
&\overset{(2.15)}{=} \alpha_X.
\end{aligned}
$$

Logo, $p_X \circ \theta' = \alpha_X$. Analogamente, obtemos que $p_Y \circ \theta' = \alpha_Y$. Pela unicidade de θ, segue que $\theta = \theta'$. Assim,

$$\gamma = \phi_{W,P}(\theta) = \phi_{W,P}(\theta') = \gamma'$$

e portanto, G é aditivo. Similarmente, provamos que F é aditivo. ∎

O próximo resultado nos diz que o funtor adjunto à esquerda de um determinado funtor, quando existe, é único a menos de equivalência. Este resultado é importante para nos garantir no último capítulo que o funtor L_Y lá estudado é único, a menos de equivalência.

Teorema 2.6. *Sejam $F, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Se (F, G, ϕ) e (H, G, ψ) são adjunções então $F \sim H$.*

Demonstração. Por hipótese, ϕ e ψ são isomorfismos naturais, ou seja, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$, seguem os isomorfismos

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, G(Y))$$

e

$$\psi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, G(Y)).$$

Assim, podemos definir o isomorfismo

$$\alpha_{X,Y} = \psi_{X,Y}^{-1} \circ \phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), Y).$$

Verifiquemos que

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (H \times Id_{\mathcal{D}})$$

é uma transformação natural, em que os funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (F \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$$

e

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \circ (H \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set.$$

Claramente, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f),g)"] \arrow[rr, bend left, "\alpha_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\psi_{X,Y}^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,G(g))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(f),g)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V) \arrow[r, "\phi_{U,V}"'] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{U,V}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \arrow[r, "\psi_{U,V}^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(U), V),
\end{tikzcd}$$

para quaisquer morfismos $f : U \to X$ e $g : Y \to V$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(f), g) \circ \alpha_{X,Y} &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(f), g) \circ \psi_{X,Y}^{-1} \circ \phi_{X,Y} \\
&= \psi_{U,V}^{-1} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g)) \circ \phi_{X,Y} \\
&= \psi_{U,V}^{-1} \circ \phi_{U,V} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g) \\
&= \alpha_{U,V} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g).
\end{aligned}$$

Logo, α é uma transformação natural. Como $\alpha_{X,Y}$ é um isomorfismo, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$, segue que α é um isomorfismo natural.

Consideramos

$$\lambda_X = \alpha_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right) : H(X) \to F(X) \tag{2.20}$$

morfismo em $\mathcal{D}$. Provemos que λ é um isomorfismo natural. Para isto, basta verificarmos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
H(X) \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "H(g)"'] & F(X) \arrow[d, "F(g)"] \\
H(U) \arrow[r, "\lambda_U"'] & F(U),
\end{tikzcd} \tag{2.21}$$

comuta, para qualquer morfismo $g : X \to U$ em $\mathcal{C}$. De fato, pela naturalidade de α, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\alpha_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, F(g)\right)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), F(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, F(g)\right)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(U)) \arrow[r, "\alpha_{X,F(U)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), F(U)).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, F(g)\right) \circ \alpha_{X,F(X)}\right)\left(id_{F(X)}\right) = \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, F(g)\right)\left(\alpha_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&\overset{(2.20)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, F(g)\right)(\lambda_X) \\
&= F(g) \circ \lambda_X
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\alpha_{X,F(U)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, F(g)\right)\right)\left(id_{F(X)}\right) = \\
&= \alpha_{X,F(U)}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, F(g)\right)\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&= \alpha_{X,F(U)}\left(F(g)\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$F(g) \circ \lambda_X = \alpha_{X,F(U)}\left(F(g)\right). \tag{2.22}$$

Analogamente, o próximo diagrama também comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), F(U)) \arrow[r, "\alpha_{U,F(U)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(g), id_{F(U)}\right)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(U), F(U)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(H(g), id_{F(U)}\right)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(U)) \arrow[r, "\alpha_{X,F(U)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), F(U)).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(H(g), id_{F(U)}\right) \circ \alpha_{U,F(U)}\right)\left(id_{F(U)}\right) = &\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(H(g), id_{F(U)}\right)\left(\alpha_{U,F(U)}\left(id_{F(U)}\right)\right)\\ &\overset{(2.20)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(H(g), id_{F(U)}\right)(\lambda_U)\\ &= \lambda_U \circ H(g)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\alpha_{X,F(U)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(g), id_{F(U)}\right)\right)\left(id_{F(U)}\right) = &\\ &= \alpha_{X,F(U)}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(g), id_{F(U)}\right)\left(id_{F(U)}\right)\right)\\ &= \alpha_{X,F(U)}\left(F(g)\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_U \circ H(g) = \alpha_{X,F(U)}\left(F(g)\right). \tag{2.23}$$

Portanto,

$$F(g) \circ \lambda_X \overset{(2.22)}{=} \alpha_{X,F(U)}\left(F(g)\right) \overset{(2.23)}{=} \lambda_U \circ H(g).$$

Logo, o diagrama (2.21) comuta. Finalmente, consideremos

$$\sigma_X = \alpha^{-1}_{X,H(X)}\left(id_{H(X)}\right) : F(X) \to H(X) \tag{2.24}$$

morfismo em $\mathcal{D}$. Mostremos que $\sigma_X = \lambda_X^{-1}$. Da naturalidade de α, segue a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\alpha_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \sigma_X\right)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), F(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \sigma_X\right)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), H(X)) \arrow[r, "\alpha_{X,H(X)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), H(X)).
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \sigma_X\right) \circ \alpha_{X,F(X)}\right)\left(id_{F(X)}\right) = &\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \sigma_X\right)\left(\alpha_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right)\\ &\overset{(2.20)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \sigma_X\right)(\lambda_X)\\ &= \sigma_X \circ \lambda_X\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha_{X,H(X)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \sigma_X\right)\right)\left(id_{F(X)}\right) = & \\
&= \alpha_{X,H(X)}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \sigma_X\right)\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&= \alpha_{X,H(X)}\left(\sigma_X\right) \\
&= \alpha_{X,H(X)}\left(\alpha^{-1}_{X,H(X)}\left(id_{H(X)}\right)\right) \\
&= id_{H(X)}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\sigma_X \circ \lambda_X = id_{H(X)}$.

Da naturalidade de α^{-1}, segue a comutatividade do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), H(X)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{X,H(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \lambda_X\right)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), H(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \lambda_X\right)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H(X), F(X)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{X,F(X)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)).
\end{tikzcd}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \lambda_X\right) \circ \alpha^{-1}_{X,H(X)}\right)\left(id_{H(X)}\right) = & \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \lambda_X\right)\left(\alpha^{-1}_{X,H(X)}\left(id_{H(X)}\right)\right) \\
&\overset{(2.24)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{F(X)}, \lambda_X\right)\left(\sigma_X\right) \\
&= \lambda_X \circ \sigma_X
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha^{-1}_{X,F(X)} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \lambda_X\right)\right)\left(id_{H(X)}\right) = & \\
&= \alpha^{-1}_{X,F(X)}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(id_{H(X)}, \lambda_X\right)\left(id_{H(X)}\right)\right) \\
&= \alpha^{-1}_{X,F(X)}\left(\lambda_X\right) \\
&= \alpha^{-1}_{X,F(X)}\left(\alpha_{X,F(X)}\left(id_{F(X)}\right)\right) \\
&= id_{F(X)}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\lambda_X \circ \sigma_X = id_{F(X)}$. Portanto, $F \sim H$. ■

Capítulo 3

Equivariantização de categorias $\Bbbk$-lineares

Neste capítulo, temos por objetivo definir uma nova categoria que surge a partir da ação de um grupo G em uma categoria $\mathcal{C}$. Tal categoria é chamada equivariantização de $\mathcal{C}$ por G e é definida por $\mathcal{C}^G$, como veremos a seguir.

Dada uma categoria $\Bbbk$-linear $\mathcal{C}$ (lembremos que uma categoria $\Bbbk$-linear é abeliana), vamos estudar como é a ação de G nesta categoria. Alguns resultados não serão provados aqui, pois estão feitos com detalhes em [17]. Todavia, precisamos entender essas equivariantizações pois, no Capítulo 4, os funtores serão exatamente entre essas categorias equivariantizadas por G.

As principais referências utilizadas neste capítulo são [7], [15], [16] e [17]. Para o desenvolvimento do mesmo denotamos por 1 o elemento neutro de G e consideramos $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear.

Como motivação para as equivariantizações, lembremos um resultado de ([8], Corollary 9.7.3.) que afirma que toda categoria $\Bbbk$-linear finita [1] é equivalente a uma categoria de A-módulos de dimensão finita sobre $\Bbbk$.

Esse resultado origina uma relação entre representação de álgebras (finito dimensionais) e a construção de uma equivariantização, citaremos o exemplo que reflete esse fato mais a frente.

Definição 3.1. *Sejam G um grupo e $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear. Uma*

[1] Não nos convêm lembrar tal conceito aqui, pois o mesmo envolve novas definições que não são simples e que também não serão usadas em nenhum outro local neste trabalho.

ação de G em $\mathcal{C}$ é uma coleção de funtores $\Bbbk$-lineares $\{F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\}_{g\in G}$ munida de isomorfismos naturais

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh} \qquad e \qquad \gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \to F_1$$

tais que, para quaisquer $f, g, h \in G$ e $X \in \mathcal{C}$, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
(F_g \circ F_h)(F_f(X)) = F_g((F_h \circ F_f)(X)) \arrow[r, "F_g((\gamma_{h,f})_X)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_{F_f(X)}"'] & (F_g \circ F_{hf})(X) \arrow[d, "(\gamma_{g,hf})_X"] \\
(F_{gh} \circ F_f)(X) \arrow[r, "(\gamma_{gh,f})_X"'] & F_{ghf}(X)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
F_g(X) \arrow[r, "(\gamma_0)_{F_g(X)}"] \arrow[d, "F_g((\gamma_0)_X)"'] & (F_1 \circ F_g)(X) = F_1(F_g(X)) \arrow[d, "(\gamma_{1,g})_X"] \\
F_g(F_1(X)) = (F_g \circ F_1)(X) \arrow[r, "(\gamma_{g,1})_X"'] & F_g(X),
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$(\gamma_{gh,f})_X \circ (\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X \circ F_g((\gamma_{h,f})_X) \tag{3.1}$$

e

$$(\gamma_{g,1})_X \circ F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X \circ (\gamma_0)_{F_g(X)}. \tag{3.2}$$

Instintivamente, o primeiro diagrama nos diz que essa ação é "associativa nos funtores" e o segundo diagrama nos diz que F_1 é como uma espécie de "unidade".

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Para cada $g \in G$, o funtor $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração. Consideremos os funtores $F_g, F_{g^{-1}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Verifiquemos que $F_g \circ F_{g^{-1}} \sim Id_{\mathcal{C}}$, para cada $g \in G$. Por hipótese, existem isomorfismos naturais

$$\gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to F_{gg^{-1}} = F_1 \qquad \text{e} \qquad \gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \to F_1.$$

Definimos a seguinte composição

$$\mu = (\gamma_0)^{-1} \circ \gamma_{g,g^{-1}} : F_g \circ F_{g^{-1}} \to Id_{\mathcal{C}}$$

que é um isomorfismo natural, pois para todo $X \in \mathcal{C}$, $\mu_X = (\gamma_0)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_X$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$. A naturalidade de μ é dada pela comutatividade do diagrama abaixo (ambos diagramas menores comutam), para qualquer $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\left(F_g \circ F_{g^{-1}}\right)(X) \arrow[r, "\left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_X"] \arrow[d, "\left(F_g \circ F_{g^{-1}}\right)(f)"'] & F_1(X) \arrow[r, "(\gamma_0)_X^{-1}"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\left(F_g \circ F_{g^{-1}}\right)(Y) \arrow[r, "\left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_Y"'] & F_1(Y) \arrow[r, "(\gamma_0)_Y^{-1}"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(f \circ (\gamma_0)_X^{-1}\right) \circ \left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_X &= (\gamma_0)_Y^{-1} \circ \left(F_1(f) \circ \left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_X\right) \\
&= (\gamma_0)_Y^{-1} \circ \left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_Y \circ \left(F_g \circ F_{g^{-1}}\right)(f).
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $F_{g^{-1}} \circ F_g \sim Id_{\mathcal{C}}$. ■

Definição 3.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Um objeto $X \in \mathcal{C}$ diz-se G-equivariante ou simplesmente equivariante, se existe uma família*

$$s = \{s_g : F_g(X) \to X\}_{g \in G}$$

de isomorfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd}
\left(F_g \circ F_h\right)(X) \arrow[r, "F_g(s_h)"] \arrow[d, "(\gamma_{g,h})_X"'] & F_g(X) \arrow[d, "s_g"] \\
F_{gh}(X) \arrow[r, "s_{gh}"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(\gamma_0)_X"] \arrow[dr, "id_X"'] & F_1(X) \arrow[d, "s_1"] \\
& X,
\end{tikzcd}$$

ou seja, para quaisquer $g, h \in G$, valem as igualdades

$$\begin{aligned}
s_g \circ F_g\left(s_h\right) &= s_{gh} \circ \left(\gamma_{g,h}\right)_X \qquad (3.3)\\
s_1 \circ (\gamma_0)_X &= Id_X.
\end{aligned}$$

Observação 3.4. Vamos supor, como em ([3], p. 3), que $F_1 = Id_{\mathcal{C}}$ e que $\gamma_{1,g}$, $\gamma_{g,1}$ e γ_0 sejam transformações naturais identidade entre os funtores adequados. Sendo assim, temos que $s_1 = id_X$, para todo objeto equivariante (X, s).

Claramente, para todo $g \in G$, $ID = \gamma_{1,g} = \gamma_{g,1} : F_g \to F_g$ e portanto, $(\gamma_{1,g})_X = (\gamma_{g,1})_X$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Assim, fazendo $h = g^{-1}$ e $f = g$ em (3.1), segue que

$$(\gamma_{1,g})_X \circ (\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(X)} = (\gamma_{g,1})_X \circ F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X),$$

ou seja,

$$\left(\gamma_{g,g^{-1}}\right)_{F_g(X)} = F_g\left(\left(\gamma_{g^{-1},g}\right)_X\right). \tag{3.4}$$

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. A categoria $\mathcal{C}^G$, chamada equivariantização de $\mathcal{C}$ por G, é a categoria*

(i) *cujos objetos são os pares (X, s), em que X é um objeto equivariante de $\mathcal{C}$ e s a família de isomorfismos associada,*

(ii) *dados $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$, um morfismo $f : (X, s) \to (Y, r)$ em $\mathcal{C}^G$ (ou um morfismo equivariante) é um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} F_g(X) \arrow[r, "F_g(f)"] \arrow[d, "s_g"'] & F_g(Y) \arrow[d, "r_g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

ou seja, para todo $g \in G$

$$f \circ s_g = r_g \circ F_g(f). \tag{3.5}$$

Seja A uma $\Bbbk$-álgebra finito dimensional. É conhecida uma ação de G em ${}_A\mathfrak{m}$ (categoria do A-módulos à esquerda finito dimensionais sobre $\Bbbk$). Essa ação está desenvolvida com detalhes em ([17], Exemplo 4.3, p. 73), mas pode ser encontrada também em ([15], Exemplo 2.10.3). Mediante tal ação é possível construir $({}_A\mathfrak{m})^G$, equivariantização de ${}_A\mathfrak{m}$ por G. Em ([15], Afirmación 2.10.1, p. 39) prova-se que $({}_A\mathfrak{m})^G$ e ${}_{A\otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m}$ (categoria dos $A \otimes_\Bbbk \Bbbk G$-módulos à esquerda finito dimensionais sobre $\Bbbk$) são isomorfas. Enunciamos tal resultado abaixo sem prova, o mesmo é provado com detalhes em [17].

Proposição 3.6. ([17], Teorema 4.6) *As categorias $({}_A\mathfrak{m})^G$ e ${}_{A\otimes_\Bbbk \Bbbk G}\mathfrak{m}$ são isomorfas.*

A próxima proposição pode ser encontrada em [15] e [17], neste último a prova é feita com detalhes e por isso omitimos a mesma. A utilidade dela é garantir que a equivariantização $\mathcal{C}^G$ preserva a $\Bbbk$-linearidade da categoria $\mathcal{C}$.

Proposição 3.7. ([17], Teorema 4.7) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria $\Bbbk$-linear tal que G age em $\mathcal{C}$. Então a categoria $\mathcal{C}^G$ é $\Bbbk$-linear.*

Capítulo 4

A adjunção (L_Y, F_Y)

O objetivo principal deste capítulo é apresentarmos um exemplo não trivial de adjunção. Tal exemplo apresentado em ([3], Lemma 2.8 e Proposition 2.9) é uma adjunção de funtores entre categorias equivariantizadas. Como comentado na Observação 3.4, estamos considerando $F_1 = Id_{\mathcal{C}}$ e $\gamma_{1,g}$, $\gamma_{g,1}$, γ_0 transformações naturais identidade entre os funtores adequados.

Neste capítulo, G é um grupo finito, $\mathcal{C}$ é uma categoria $\Bbbk$-linear tal que G age em $\mathcal{C}$ e Y é um objeto simples em $\mathcal{C}$.

4.1 Preliminares

O objetivo desta seção é fixarmos notações e provarmos alguns resultados úteis para que possamos apresentar e desenvolver o exemplo de adjunção mencionado no início do capítulo.

Consideremos o subconjunto G_Y de G dado por

$$G_Y = \{g \in G : F_g(Y) \cong Y\}.$$

Proposição 4.1.1. *As seguintes afirmações são válidas.*

(i) *G_Y é um subgrupo de G.*

(ii) *Para todo $g \in G$, $F_g(Y)$ é um objeto simples.*

Demonstração. (i) Observemos que $F_1(Y) = Y$. Logo, $1 \in G_Y$. Para quaisquer $g, h \in G_Y$, existem isomorfismos

$$\alpha : F_g(Y) \to Y \quad \text{e} \quad \beta : F_h(Y) \to Y.$$

Assim, a composição

$$Y \xrightarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_Y^{-1}} F_{g^{-1}}(F_g(Y)) \xrightarrow{F_{g^{-1}}(\alpha)} F_{g^{-1}}(Y) \xrightarrow{F_{g^{-1}}(\beta^{-1})} F_{g^{-1}}(F_h(Y)) \xrightarrow{(\gamma_{g^{-1},h})_Y} F_{g^{-1}h}(Y)$$

é um isomorfismo. Logo, $g^{-1}h \in G_Y$. Portanto, G_Y é um subgrupo.

(ii) De fato, pelo Lema 3.2, temos que $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é uma equivalência de categorias e $F_g \circ F_{g^{-1}} \sim Id_{\mathcal{C}} \sim F_{g^{-1}} \circ F_g$. Seja X um subobjeto de $F_g(Y)$, isto é, existe um monomorfismo $\iota : X \to F_g(Y)$. Pela Proposição 1.2.18, $F_{g^{-1}}(\iota) : F_{g^{-1}}(X) \to F_{g^{-1}}(F_g(Y))$ é um monomorfismo e como $F_{g^{-1}} \circ F_g(Y) \xrightarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_Y} Y$ é um isomorfismo, segue que

$$(\gamma_{g^{-1},g})_Y \circ F_{g^{-1}}(\iota) : F_{g^{-1}}(X) \to Y$$

é um monomorfismo e portanto, $F_{g^{-1}}(X)$ é um subobjeto de Y.

Por hipótese, Y é simples e assim, $F_{g^{-1}}(X) \cong 0$ ou $F_{g^{-1}}(X) \cong Y$. Logo,

$$X \cong F_g \circ F_{g^{-1}}(X) = F_g(F_{g^{-1}}(X)) \cong F_g(0) \overset{1}{=} 0$$

ou

$$X \cong F_g \circ F_{g^{-1}}(X) \cong F_g(Y).$$

Logo, $F_g(Y)$ é simples. ■

O subgrupo G_Y de G descrito acima é chamado *subgrupo estável* de G. Suponhamos $[G : G_Y] = n$ e assim, fixamos n representantes (distintos) das n classes laterais à esquerda de G_Y em G, a saber,

$$R = \{g_1 = 1, g_2, \cdots, g_n\}$$

e escrevemos

$$G = \dot{\bigcup_{t \in R}} tG_Y. \tag{4.1}$$

Para o que segue, lembramos que a classe de isomorfismo de qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$ é denotada por $[X]$. Esta notação nos diz que se W é um objeto em $\mathcal{C}$ tal que $W \cong X$ então $[W] = [X]$ e reciprocamente.

A proposição acima nos diz que a ordem de G_Y "mede" a quantidade de objetos simples da forma $F_g(Y)$ isomorfos a Y, ou seja, simples da forma $F_g(Y)$ tais que $[F_g(Y)] = [Y]$.

Chamamos $\{F_g(Y) : g \in G\}$ o conjunto dos G-conjugados simples de Y.

[1] Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ uma equivalência e Z um objeto zero em $\mathcal{C}$. Então $F(Z)$ é um objeto zero em $\mathcal{D}$, veja ([15], Ejercicio 2.7.5).

Proposição 4.1.2. *O objeto* Y *possui exatamente* n G*-conjugados simples não isomorfos entre si, em que* $n = [G : G_Y]$.

Demonstração. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & R & \longrightarrow & \{[F_g(Y)] : g \in G\} \\ & g_i & \longmapsto & [F_{g_i}(Y)] \,. \end{array}$$

Mostremos que ϕ é uma bijeção. Seja $f \in G$. Então $f = g_i h$, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e algum $h \in G_Y$. Assim, existe um isomorfismo

$$\alpha : F_h(Y) \to Y,$$

e a composição

$$F_f(Y) = F_{g_i h}(Y) \xrightarrow{\left(\gamma_{g_i,h}\right)_Y^{-1}} F_{g_i}(F_h(Y)) \xrightarrow{F_{g_i}(\alpha)} F_{g_i}(Y)$$

é um isomorfismo. Logo, $[F_f(Y)] = [F_{g_i}(Y)] = \phi(g_i)$ e ϕ é sobrejetora.

Sejam $g_i, g_j \in R$ tais que $[F_{g_i}(Y)] = [F_{g_j}(Y)]$. Então existe um isomorfismo

$$\beta : F_{g_j}(Y) \to F_{g_i}(Y)$$

e a composição

$$Y \xrightarrow{\left(\gamma_{g_j^{-1}, g_j}\right)_Y^{-1}} F_{g_j^{-1}}(F_{g_j}(Y)) \xrightarrow{F_{g_j^{-1}}(\beta)} F_{g_j^{-1}}(F_{g_i}(Y)) \xrightarrow{\left(\gamma_{g_j^{-1}, g_i}\right)_Y} F_{g_j^{-1} g_i}(Y)$$

é um isomorfismo. Logo, $g_j^{-1} g_i \in G_Y$ e assim, $g_j G_Y = g_i G_Y$. Como R possui exatamente n representantes, segue que $i = j$. Portanto, ϕ é injetora.

Disso, concluímos que há exatamente n classes de isomorfismo de G-conjugados simples de Y não isomorfos entre si, a saber, $\{[F_{g_i}(Y)]\}_{i=1}^{n}$. ■

A proposição anterior se aplica caso fôssemos estudar um pouco mais sobre a relação entre os simples de $\mathcal{C}$ e os de $\mathcal{C}^G$. Considerando $\mathcal{C}$ nas hipóteses de ([3], p. 1), se (X, s) é um simples em $\mathcal{C}^G$, em que (X, s) é o objeto dado na Definição 3.5, e Y é um somando direto simples de X em $\mathcal{C}$, então $X \cong m \oplus_{i=1}^{n} F_{g_i}(Y)$, em que $m = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, ou seja, X fica caracterizado como uma soma direta dos G-conjugados simples não isomorfos de Y.

O seguinte lema é fundamental para a próxima seção.

Lema 4.1.3. ([3], Lemma 2.8 e Proposition 2.9) *As seguintes afirmações são válidas.*

(i) *Para todo $g \in G$, existem únicos $\nu(g) \in R$ e $\mu(g) \in G_Y$ tais que $g = \nu(g)\mu(g)$.*

(ii) *Para quaisquer $a, b \in G$ e $j \in R$ temos*

$$\nu(abj) = \nu(a\nu(bj)) \quad e \quad \mu(abj) = \mu(a\nu(bj))\mu(bj). \tag{4.2}$$

(iii) *Se $\nu(gj) = \nu(gl)$, para $g \in G$ e $j, l \in R$ então $j = l$.*

Demonstração. (i) Seja $g \in G$. Então existe um único $\nu(g) \in R$ tal que $g \in \nu(g)G_Y$, isto segue da igualdade (4.1). Portanto, $g = \nu(g)\mu(g)$, para algum $\mu(g) \in G_Y$.

Mostremos que $\mu(g)$ é único. Suponhamos $\mu'(g) \in G_Y$ tal que $\nu(g)\mu'(g) = g = \nu(g)\mu(g)$ e como G é grupo, segue que $\mu'(g) = \mu(g)$.

(ii) Por (i), temos que $abj = a\nu(bj)\mu(bj)$, pois $bj \in G$ e como $a\nu(bj) \in G$, segue que $a\nu(bj) = \nu(a\nu(bj))\mu(a\nu(bj))$. Logo,

$$abj = \nu(a\nu(bj))\mu(a\nu(bj))\mu(bj).$$

Por outro lado, $abj = \nu(abj)\mu(abj)$. Assim, pela unicidade dada em (i), seguem as igualdades

$$\nu(abj) = \nu(a\nu(bj)) \quad \text{e} \quad \mu(abj) = \mu(a\nu(bj))\mu(bj).$$

(iii) Temos que $gj = \nu(gj)\mu(gj) = \nu(gl)\mu(gj)$ e como $gl = \nu(gl)\mu(gl)$, segue que $gj = gl\mu(gl)^{-1}\mu(gj)$, ou seja, $j = l\mu(gl)^{-1}\mu(gj)$. Logo, $l^{-1}j = \mu(gl)^{-1}\mu(gj) \in G_Y$ e isso implica que j e l representam a mesma classe e como ambos pertencem a R, segue que $j = l$. ∎

4.2 Os funtores L_Y e F_Y

Lembremos da Proposição 3.7 que $\mathcal{C}^G$ e $\mathcal{C}^{G_Y}$ são $\mathbb{k}$-lineares, pois estamos considerando que $\mathcal{C}$ seja $\mathbb{k}$-linear.

Seja $(X, s) \in \mathcal{C}^G$. Então $s = \{s_g : F_g(X) \to X\}_{g \in G}$. Assim, é possível considerarmos o objeto X juntamente com a família de isomorfismos s, esquecendo os ${s_g}'$s com $g \in G \setminus G_Y$. Portanto, fica definido um funtor esquecimento

$$F_Y : \mathcal{C}^G \longrightarrow \mathcal{C}^{G_Y}$$

e obviamente, F_Y é $\Bbbk$-linear.

Para determinarmos seu adjunto à esquerda, sejam $(X, s) \in \mathcal{C}^{G_Y}$ e os morfismos canônicos da soma direta, inclusões e projeções, ou seja,

$$\iota_j^X : F_j(X) \longrightarrow \bigoplus_{t \in R} F_t(X) \quad \text{e} \quad \pi_j^X : \bigoplus_{t \in R} F_t(X) \longrightarrow F_j(X),$$

para todo $j \in R = \{g_1 = 1, g_2, \cdots, g_n\}$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} L_Y : & \mathcal{C}^{G_Y} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{G} \\ & (X, s) & \longmapsto & \left(\bigoplus_{t \in R} F_t(X), r \right) \end{array},$$

em que $r_g : F_g(\oplus_{t \in R} F_t(X)) \to \oplus_{t \in R} F_t(X)$ é definido por

$$r_g = \sum_{j \in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right), \tag{4.3}$$

para todo $g \in G$. Apresentamos o diagrama da composição acima

$$F_g\left(\bigoplus_{t \in R} F_t(X)\right) \xrightarrow{F_g\left(\pi_j^X\right)} F_g\left(F_j(X)\right) \xrightarrow{(\gamma_{g,j})_X} F_{gj}(X) = F_{\nu(gj)\mu(gj)}(X)$$

$$\xrightarrow{\left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1}} F_{\nu(gj)}(F_{\mu(gj)}(X)) \xrightarrow{F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right)} F_{\nu(gj)}(X)$$

$$\xrightarrow{\iota^X_{\nu(gj)}} \bigoplus_{t \in R} F_t(X).$$

Observemos que $gj = \nu(gj)\mu(gj)$ com $\nu(gj) \in R$ e $\mu(gj) \in G_Y$. Isso justifica a composição $\left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X$, bem como a existência de $s_{\mu(gj)}$ e $\iota^X_{\nu(gj)}$ em (4.3).

Seja $f : (X, s) \to (Z, v)$ um morfismo em $\mathcal{C}^{G_Y}$. Definimos

$$L_Y(f) = \sum_{j \in R} \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X, \tag{4.4}$$

cujo diagrama da composição é o seguinte

$$\bigoplus_{t \in R} F_t(X) \xrightarrow{\pi_j^X} F_j(X) \xrightarrow{F_j(f)} F_j(Z) \xrightarrow{\iota_j^Z} \bigoplus_{t \in R} F_t(Z).$$

A seguir apresentamos o principal resultado deste trabalho, o mesmo encontra-se em ([3], Lemma 2.8 e Proposition 2.9).

Teorema 4.2.1. *O funtor L_Y é adjunto à esquerda do funtor F_Y.*

Demonstração. A prova está organizada como descrito abaixo.

(i) L_Y está bem definido, ou seja, $L_Y(X,s)$ é um objeto em $\mathcal{C}^G$.

(ii) L_Y é um funtor $\Bbbk$-linear.

(iii) L_Y é adjunto à esquerda de F_Y.

(i) Mostremos que r_g, dado por (4.3), é um isomorfismo, para todo $g \in G$. Seja $l \in R$ então $gl = \nu(gl)\mu(gl)$. Definimos

$$r_g^{-1} = \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ (\gamma_{g,l})_X^{-1} \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}^{-1}\right) \circ \pi_{\nu(gl)}^X,$$

Veja a composição abaixo

$$\bigoplus_{t\in R} F_t(X) \xrightarrow{\pi_{\nu(gl)}^X} F_{\nu(gl)}(X) \xrightarrow{F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}^{-1}\right)} F_{\nu(gl)}\left(F_{\mu(gl)}(X)\right)$$

$$\xrightarrow{\left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X} F_{\nu(gl)\mu(gl)}(X) = F_{gl}(X) \xrightarrow{(\gamma_{g,l})_X^{-1}} F_g\left(F_l(X)\right)$$

$$\xrightarrow{F_g\left(\iota_l^X\right)} F_g\left(\bigoplus_{t\in R} F_t(X)\right).$$

Verifiquemos que $r_g \circ r_g^{-1} = id_{\oplus_{t\in R}F_t(X)}$ e que $r_g^{-1} \circ r_g = id_{F_g(\oplus_{t\in R}F_t(X))}$. De fato,

$$\begin{aligned}
&r_g \circ r_g^{-1} = \\
&= \left(\sum_{j\in R} \iota_{\nu(gj)}^X \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right)\right) \circ \\
&\quad \left(\sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ (\gamma_{g,l})_X^{-1} \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}^{-1}\right) \circ \pi_{\nu(gl)}^X\right) \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} \iota_{\nu(gj)}^X \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \circ \\
&\quad F_g\left(\iota_l^X\right) \circ (\gamma_{g,l})_X^{-1} \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}^{-1}\right) \circ \pi_{\nu(gl)}^X
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi^X_j \circ \iota^X_l\right) \circ$$

$$(\gamma_{g,l})^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s^{-1}_{\mu(gl)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gl)}$$

$$\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi^X_j \circ \iota^X_j\right) \circ$$

$$(\gamma_{g,j})^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X \circ F_{\nu(gj)}\left(s^{-1}_{\mu(gj)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ (\gamma_{g,j})_X \circ (\gamma_{g,j})^{-1}_X \circ$$

$$\left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X \circ F_{\nu(gj)}\left(s^{-1}_{\mu(gj)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X \circ$$

$$F_{\nu(gj)}\left(s^{-1}_{\mu(gj)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ F_{\nu(gj)}\left(s^{-1}_{\mu(gj)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)} \circ s^{-1}_{\mu(gj)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ \pi^X_{\nu(gj)}$$

$$\overset{(1.5)}{=} id_{\oplus_{t\in R} F_t(X)}.$$

Agora, os cálculos para a segunda igualdade,

$$r_g^{-1} \circ r_g =$$

$$= \left(\sum_{l\in R} F_g\left(\iota^X_l\right) \circ (\gamma_{g,l})^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s^{-1}_{\mu(gl)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gl)}\right) \circ$$

$$\left(\sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right)\right)$$

$$= \sum_{l\in R}\sum_{j\in R} F_g\left(\iota^X_l\right) \circ (\gamma_{g,l})^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s^{-1}_{\mu(gl)}\right) \circ \pi^X_{\nu(gl)} \circ$$

$$\iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{l\in R} F_g\left(\iota^X_l\right) \circ (\gamma_{g,l})^{-1}_X \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s^{-1}_{\mu(gl)}\right) \circ$$

$$
\begin{aligned}
& F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X \circ F_g\left(\pi_l^X\right) \\
&= \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ F_{\nu(gl)}\left(s_{\mu(gl)}^{-1} \circ s_{\mu(gl)}\right) \circ \\
& \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X \circ F_g\left(\pi_l^X\right) \\
&= \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X \circ \left(\gamma_{\nu(gl),\mu(gl)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X \circ \\
& F_g\left(\pi_l^X\right) \\
&= \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,l}\right)_X \circ F_g\left(\pi_l^X\right) \\
&= \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X\right) \circ F_g\left(\pi_l^X\right) \\
&= \sum_{l\in R} F_g\left(\iota_l^X \circ \pi_l^X\right) \\
&= F_g\left(\sum_{l\in R} \iota_l^X \circ \pi_l^X\right) \\
&= F_g\left(id_{\oplus_{t\in R} F_t(X)}\right) \\
&= id_{F_g(\oplus_{t\in R} F_t(X))},
\end{aligned}
$$

em que na igualdade $(*)$, usamos o Lema 4.1.3 (iii). Portanto, r_g é um isomorfismo.

Sejam $a, b \in G$. Mostremos que a igualdade (3.3) é satisfeita. Como (X, s) é G_Y-equivariante, vale a igualdade (3.3) para tal objeto, vamos usar este fato nesta etapa da prova.

$$
\begin{aligned}
& r_a \circ F_a\left(r_b\right) = \\
&\quad = \sum_{l\in R}\sum_{j\in R} \iota_{\nu(al)}^X \circ F_{\nu(al)}\left(s_{\mu(al)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(al),\mu(al)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{a,l}\right)_X \circ F_a\left(\pi_l^X\right) \circ \\
&\quad F_a\left(\iota_{\nu(bj)}^X \circ F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{b,j}\right)_X \circ F_b\left(\pi_j^X\right)\right) \\
&\quad = \sum_{l\in R}\sum_{j\in R} \iota_{\nu(al)}^X \circ F_{\nu(al)}\left(s_{\mu(al)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(al),\mu(al)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{a,l}\right)_X \circ \\
&\quad F_a\left(\pi_l^X \circ \iota_{\nu(bj)}^X\right) \circ F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ F_a\left(\left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ \\
&\quad F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right) \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} \iota_{\nu(a\nu(bj))}^X \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X^{-1} \circ
\end{aligned}
$$

$$\left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_X \circ F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ F_a\left(\left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ$$
$$F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X^{-1} \circ$$
$$\left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_X \circ F_a\left(\pi^X_{\nu(bj)} \circ \iota^X_{\nu(bj)}\right) \circ F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ$$
$$F_a\left(\left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X^{-1} \circ$$
$$\left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_X \circ F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ F_a\left(\left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ$$
$$F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X^{-1} \circ$$
$$F_{a\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right) \circ \left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_{F_{\mu(bj)}(X)} \circ F_a\left(\left(\gamma_{\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ$$
$$F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$\overset{(3.1)^*}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X^{-1} \circ$$
$$F_{a\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right) \circ \left(\gamma_{a\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ$$
$$F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$\overset{(2)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ$$
$$\left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)^{-1}_{F_{\mu(bj)}(X)} \circ \left(\gamma_{a\nu(bj),\mu(bj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ$$
$$F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$\overset{(3.1)^{**}}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))}\right) \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right) \circ$$
$$F_{\nu(a\nu(bj))}\left(\left(\gamma_{\mu(a\nu(bj)),\mu(bj)}\right)_X^{-1}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))\mu(bj)}\right)_X^{-1} \circ$$
$$\left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)$$
$$= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))} \circ F_{\mu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(bj)}\right) \circ\right.$$

$$
\begin{aligned}
& \left(\gamma_{\mu(a\nu(bj)),\mu(bj)}\right)^{-1}_X\Big) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))\mu(bj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ \\
& F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi^X_j\right)\right) \\
\overset{(3.3)}{=} & \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(a\nu(bj))} \circ F_{\nu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(a\nu(bj))\mu(bj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))\mu(bj)}\right)^{-1}_X \circ \\
& \left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi^X_j\right)\right) \\
\overset{(4.2)}{=} & \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(abj)} \circ F_{\nu(abj)}\left(s_{\mu(abj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(abj),\mu(abj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{a,bj}\right)_X \circ \\
& F_a\left(\left(\gamma_{b,j}\right)_X\right) \circ F_a\left(F_b\left(\pi^X_j\right)\right) \\
\overset{(3.1)}{=} & \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(abj)} \circ F_{\nu(abj)}\left(s_{\mu(abj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(abj),\mu(abj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{ab,j}\right)_X \circ \\
& \left(\gamma_{a,b}\right)_{F_j(X)} \circ F_a\left(F_b\left(\pi^X_j\right)\right) \\
\overset{(3)}{=} & \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(abj)} \circ F_{\nu(abj)}\left(s_{\mu(abj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(abj),\mu(abj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{ab,j}\right)_X \circ \\
& F_{ab}\left(\pi^X_j\right) \circ \left(\gamma_{a,b}\right)_{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \\
\overset{(4.3)}{=} & r_{ab} \circ \left(\gamma_{a,b}\right)_{\oplus_{t\in R}F_t(X)},
\end{aligned}
$$

em que as igualdades (1), (2) e (3) seguem, respectivamente, da comutatividade dos seguintes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(F_{\mu(bj)}(X)\right)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_{F_{\mu(bj)}(X)}"] \arrow[d, "F_a\left(F_{\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right)"'] & F_{a\nu(bj)}\left(F_{\mu(bj)}(X)\right) \arrow[d, "F_{a\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)"] \\
F_a\left(F_{\nu(bj)}(X)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{a,\nu(bj)}\right)_X"'] & F_{a\nu(bj)}(X),
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F_{\nu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(bj)}(X)\right)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_{F_{\mu(bj)}(X)}"] \arrow[d, "F_{\nu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(a\nu(bj))}\left(s_{\mu(bj)}\right)\right)"] & F_{a\nu(bj)}\left(F_{\mu(bj)}(X)\right) \arrow[d, "F_{a\nu(bj)}\left(s_{\mu(bj)}\right)"] \\
F_{\nu(a\nu(bj))}\left(F_{\mu(a\nu(bj))}(X)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{\nu(a\nu(bj)),\mu(a\nu(bj))}\right)_X"'] & F_{a\nu(bj)}(X)
\end{tikzcd}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
F_a\left(F_b\left(\oplus_{t\in R}F_t(X)\right)\right) \arrow[r, "(\gamma_{a,b})_{\oplus_{t\in R}F_t(X)}"] \arrow[d, "F_a\left(F_b\left(\pi_j^X\right)\right)"'] & F_{ab}\left(\oplus_{t\in R}F_t(X)\right) \arrow[d, "F_{ab}\left(\pi_j^X\right)"] \\
F_a\left(F_b\left(F_j(X)\right)\right) \arrow[r, "(\gamma_{a,b})_{F_j(X)}"'] & F_{ab}\left(F_j(X)\right).
\end{tikzcd}$$

A igualdade $(3.1)^*$ segue de (3.1) e de $bj = \nu(bj)\mu(bj)$ e $(3.1)^{**}$ segue de (3.1) e de $a\nu(bj) = \nu(a\nu(bj))\mu(a\nu(bj))$. Logo,

$$r_a \circ F_a\left(r_b\right) = r_{ab} \circ \left(\gamma_{a,b}\right)_{\oplus_{t\in R}F_t(X)}.$$

Sejam $g \in G$ e $f : (X, s) \to (Z, v)$ um morfismo em $\mathcal{C}^{G_Y}$. Por definição $L_Y(X, s) = (\oplus_{t\in R}F_t(X), r)$ e $L_Y(Z, v) = (\oplus_{t\in R}F_t(Z), z)$. Mostremos a igualdade (3.5) para $L_Y(f)$, isto é, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_g\left(L_Y(X,s)\right) = F_g\left(\oplus_{t\in R}F_t(X), r\right) \arrow[r, "F_g(L_Y(f))"] \arrow[d, "r_g"'] & F_g\left(L_Y(Z,v)\right) = F_g\left(\oplus_{t\in R}F_t(Z), z\right) \arrow[d, "z_g"] \\
L_Y(X,s) = \left(\oplus_{t\in R}F_t(X), r\right) \arrow[r, "L_Y(f)"'] & L_Y(Z,v) = \left(\oplus_{t\in R}F_t(Z), z\right).
\end{tikzcd}$$

Lembremos que f em $\mathcal{C}^{G_Y}$ satisfaz (3.5), vamos usar este fato na prova. Temos

$$\begin{aligned}
& z_g \circ F_g\left(L_Y(f)\right) = \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_Z \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_Z \circ F_g\left(\pi^Z_j\right) \circ \\
&\quad F_g\left(\iota^Z_l \circ F_l(f) \circ \pi^X_l\right) \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_Z \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_Z \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^Z_j \circ \iota^Z_l\right) \circ F_g\left(F_l(f)\right) \circ F_g\left(\pi^X_l\right) \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_Z \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_Z \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^Z_j \circ \iota^Z_j\right) \circ F_g\left(F_j(f)\right) \circ F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_Z \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_Z \circ F_g\left(F_j(f)\right) \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^X_j\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_Z \circ F_{gj}(f) \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&\overset{(5)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)}\right) \circ F_{\nu(gj)}\left(F_{\mu(gj)}(f)\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \\
&\quad \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&= \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(v_{\mu(gj)} \circ F_{\mu(gj)}(f)\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&\overset{(3.5)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(f \circ s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&= \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}(f) \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ \\
&\quad F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^Z_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}(f) \circ \pi^X_{\nu(gj)} \circ \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \\
&\quad \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{l\in R}\sum_{j\in R} \iota^Z_l \circ F_l(f) \circ \pi^X_l \circ \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \\
&\quad \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi^X_j\right) \\
&= L_Y(f) \circ r_g,
\end{aligned}
$$

em que as igualdades (4) e (5) seguem, respectivamente, da naturalidade de $\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}$ e $\gamma_{g,j}$, ou seja, da comutatividade dos diagramas abaixo

$$
\begin{tikzcd}
F_g\left(F_j(X)\right) \arrow[r, "(\gamma_{g,j})_X"] \arrow[d, "F_g(F_j(f))"'] & F_{gj}(X) \arrow[d, "F_{gj}(f)"] \\
F_g\left(F_j(Z)\right) \arrow[r, "(\gamma_{g,j})_Z"'] & F_{gj}(Z)
\end{tikzcd}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
F_{\nu(gj)}\left(F_{\mu(gj)}(X)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X"] \arrow[d, "F_{\nu(gj)}\left(F_{\mu(gj)}(f)\right)"'] & F_{\nu(gj)\mu(gj)}(X) = F_{gj}(X) \arrow[d, "F_{\nu(gj)\mu(gj)}(f)=F_{gj}(f)"] \\
F_{\nu(gj)}\left(F_{\mu(gj)}(Z)\right) \arrow[r, "\left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_Z"'] & F_{\nu(gj)\mu(gj)}(Z) = F_{gj}(Z).
\end{tikzcd}$$

Portanto, $z_g \circ F_g\left(L_Y(f)\right) = L_Y(f) \circ r_g$.

(ii) Mostremos que L_Y é um funtor $\Bbbk$-linear.

De fato, sejam $f : (X, s) \to (Z, v)$ e $g : (Z, v) \to (W, u)$ morfismos em $\mathcal{C}^{G_Y}$. Então

$$\begin{aligned}
L_Y(g) \circ L_Y(f) &= \sum_{j\in R} \iota_j^W \circ F_j(g) \circ \pi_j^Z \circ \sum_{l\in R} \iota_l^Z \circ F_l(f) \circ \pi_l^X \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} \iota_j^W \circ F_j(g) \circ \pi_j^Z \circ \iota_l^Z \circ F_l(f) \circ \pi_l^X \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} \iota_j^W \circ F_j(g) \circ \pi_j^Z \circ \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota_j^W \circ F_j(g) \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{j\in R} \iota_j^W \circ F_j(g \circ f) \circ \pi_j^X \\
&= L_Y(g \circ f)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L_Y\left(id_{(X,s)}\right) &= \sum_{j\in R} \iota_j^X \circ F_j\left(id_X\right) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{j\in R} \iota_j^X \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1.5)}{=} id_{\oplus_{t\in R} F_t(X)} \\
&= id_{L_Y(X,s)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, verifiquemos que L_Y é $\Bbbk$-linear. De fato, sejam $f, h : (X, s) \to (Z, v)$ morfismos em $\mathcal{C}^{G_Y}$ e $\alpha \in \Bbbk$. Então

$$
\begin{aligned}
L_Y(\alpha f + h) &= \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ F_j(\alpha f + h) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ (F_j(\alpha f) + F_j(h)) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ (\alpha F_j(f) + F_j(h)) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ \alpha F_j(f) \circ \pi_j^X + \iota_j^Z \circ F_j(h) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ \alpha F_j(f) \circ \pi_j^X + \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ F_j(h) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(3)}{=} \alpha \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X + \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ F_j(h) \circ \pi_j^X \\
&= \alpha L_Y(f) + L_Y(h).
\end{aligned}
$$

A igualdade (1) ocorre, pois os funtores F_j's são $\Bbbk$-lineares. Já as igualdades (2) e (3) seguem do fato de que as categorias são $\Bbbk$-lineares.

(iii) Finalmente, mostremos que o o funtor L_Y é adjunto à esquerda do funtor F_Y.

Para isto, usaremos a equivalência (ii) dada pelo Teorema 2.2, ou seja, mostraremos que existem transformações naturais φ e ψ e que as igualdades (2.2) e (2.3) sejam satisfeitas. Definimos

$$\varphi : Id_{\mathcal{C}^{G_Y}} \to F_Y \circ L_Y$$

por

$$\varphi_{(X,s)} = \iota_1^X : (X, s) \to F_Y\left(L_Y(X, s)\right) = \left(\bigoplus_{t\in R} F_t(X), r\right).$$

Mostremos que $\varphi_{(X,s)}$ é um morfismo em $\mathcal{C}^{G_Y}$, ou seja, que a igualdade (3.5) é satisfeita. De fato, para todo $g \in G_Y$, temos que $g = 1g = \nu(g)\mu(g)$. Assim, pela unicidade dada no Lema 4.1.3 (i),

$$\nu(g) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mu(g) = g. \tag{4.5}$$

O diagrama de (3.5) nesse caso é

$$\begin{tikzcd}
F_g(X,s) \arrow[r, "F_g(\varphi_{(X,s)})=F_g(\iota_1^X)"] \arrow[d, "s_g"'] & F_g\left(\oplus_{t\in R} F_t(X), r\right) \arrow[d, "r_g"] \\
(X,s) \arrow[r, "\varphi_{(X,s)}=\iota_1^X"'] & \left(\oplus_{t\in R} F_t(X), r\right)
\end{tikzcd}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
r_g \circ F_g\left(\varphi_{(X,s)}\right) &= r_g \circ F_g\left(\iota_1^X\right) \\
&= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{gj}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \circ F_g\left(\iota_1^X\right) \\
&= \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(s_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{gj}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X \circ \iota_1^X\right) \\
&\overset{(1.6)}{=} \iota^X_{\nu(g)} \circ F_{\nu(g)}\left(s_{\mu(g)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(g),\mu(g)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,1}\right)_X \circ F_g\left(\pi_1^X \circ \iota_1^X\right) \\
&\overset{(1.4)}{=} \iota^X_{\nu(g)} \circ F_{\nu(g)}\left(s_{\mu(g)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(g),\mu(g)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,1}\right)_X \\
&\overset{(4.5)}{=} \iota^X_1 \circ F_1\left(s_g\right) \circ \left(\gamma_{1,g}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{g,1}\right)_X \\
&= \iota_1^X \circ F_1\left(s_g\right) \\
&= \iota_1^X \circ s_g.
\end{aligned}$$

Agora verifiquemos que φ é uma transformação natural, ou seja, para todo morfismo $f : (X,s) \to (Z,v)$ em $\mathcal{C}^{G_Y}$, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
(X,s) \arrow[r, "\varphi_{(X,s)}"] \arrow[d, "f"'] & \left(F_Y \circ L_Y\right)(X,s) \arrow[d, "(F_Y\circ L_Y)(f)"] \\
(Z,v) \arrow[r, "\varphi_{(Z,v)}"'] & \left(F_Y \circ L_Y\right)(Z,v).
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\left(F_Y \circ L_Y\right)(f)\right) \circ \varphi_{(X,s)} = F_Y\left(L_Y(f)\right) \circ \varphi_{(X,s)} &= L_Y(f) \circ \varphi_{(X,s)} \\
&= \sum_{l\in R} \iota_l^Z \circ F_l(f) \circ \pi_l^X \circ \iota_1^X \\
&\overset{(1.6)}{=} \iota_1^Z \circ F_1(f) \circ \pi_1^X \circ \iota_1^X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.4)}{=} \iota_1^Z \circ F_1(f) \\
&= \iota_1^Z \circ f \\
&= \varphi_{(Z,v)} \circ f.
\end{aligned}
$$

O próximo passo é definirmos

$$\psi : L_Y \circ F_Y \to Id_{\mathcal{C}^G}$$

por

$$\psi_{(X,k)} = \sum_{j \in R} k_j \circ \pi_j^X : (L_Y \circ F_Y)(X,k) = \left(\bigoplus_{t \in R} F_t(X), u \right) \to (X,k).$$

Mostremos que $\psi_{(X,k)}$ é um morfismo em $\mathcal{C}^G$ e que portanto satisfaz a igualdade (3.5), ou seja, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F_g\left(\oplus_{t\in R} F_t(X), u\right) \arrow[r, "F_g\left(\psi_{(X,k)}\right)"] \arrow[d, "u_g"'] & F_g(X,k) \arrow[d, "k_g"] \\
\left(\oplus_{t\in R} F_t(X), u\right) \arrow[r, "\psi_{(X,k)}"'] & (X,k)
\end{tikzcd}
$$

comuta, para todo $g \in G$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&\psi_{(X,k)} \circ u_g = \\
&= \sum_{l \in R} k_l \circ \pi_l^X \circ \sum_{j \in R} \iota_{\nu(gj)}^X \circ F_{\nu(gj)}\left(k_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ \\
&\quad F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&= \sum_{l \in R} \sum_{j \in R} k_l \circ \pi_l^X \circ \iota_{\nu(gj)}^X \circ F_{\nu(gj)}\left(k_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ \\
&\quad F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j \in R} k_{\nu(gj)} \circ \pi_{\nu(gj)}^X \circ \iota_{\nu(gj)}^X \circ F_{\nu(gj)}\left(k_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \\
&\quad \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j \in R} k_{\nu(gj)} \circ F_{\nu(gj)}\left(k_{\mu(gj)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(gj),\mu(gj)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&\overset{(3.3)}{=} \sum_{j \in R} k_{\nu(gj)\mu(gj)} \circ \left(\gamma_{g,j}\right)_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \qquad \qquad ((X,k) \text{ é } G\text{-equivariante})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in R} k_{gj} \circ (\gamma_{g,j})_X \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&\overset{(3.3)}{=} \sum_{j\in R} k_g \circ F_g(k_j) \circ F_g\left(\pi_j^X\right) \\
&= \sum_{j\in R} k_g \circ F_g\left(k_j \circ \pi_j^X\right) \\
&= k_g \circ F_g\left(\sum_{j\in R} k_j \circ \pi_j^X\right) \\
&= k_g \circ F_g\left(\psi_{(X,k)}\right).
\end{aligned}
$$

Mostremos que ψ é uma transformação natural, ou seja, para todo morfismo $f : (X,k) \to (Z,w)$ em $\mathcal{C}^G$, o diagrama abaixo comuta

$$
\begin{tikzcd}
(L_Y \circ F_Y)(X,k) \arrow[r, "\psi_{(X,k)}"] \arrow[d, "(L_Y\circ F_Y)(f)"'] & (X,k) \arrow[d, "f"] \\
(L_Y \circ F_Y)(Z,w) \arrow[r, "\psi_{(Z,w)}"'] & (Z,w).
\end{tikzcd}
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\psi_{(Z,w)} \circ ((L_Y \circ F_Y)(f)) &= \sum_{l\in R} w_l \circ \pi_l^Z \circ (L_Y(F_Y(f))) \\
&= \sum_{l\in R} w_l \circ \pi_l^Z \circ L_Y(f) \\
&= \sum_{l\in R} w_l \circ \pi_l^Z \circ \sum_{j\in R} \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{l\in R}\sum_{j\in R} w_l \circ \pi_l^Z \circ \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} w_j \circ \pi_j^Z \circ \iota_j^Z \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} w_j \circ F_j(f) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(3.5)}{=} \sum_{j\in R} f \circ k_j \circ \pi_j^X \\
&= f \circ \sum_{j\in R} k_j \circ \pi_j^X = f \circ \psi_{(X,k)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, verifiquemos que as igualdades (2.2) e (2.3), isto é, vejamos que as igualdades

$$F_Y\left(\psi_{(X,k)}\right) \circ \varphi_{F_Y(X,k)} = id_{F_Y(X,k)}$$

e

$$\psi_{L_Y(X,s)} \circ L_Y\left(\varphi_{(X,s)}\right) = id_{L_Y(X,s)}$$

são satisfeitas. De fato, para todo $(X,k) \in \mathcal{C}^G$, temos

$$\begin{aligned}
F_Y\left(\psi_{(X,k)}\right) \circ \varphi_{F_Y(X,k)} &= F_Y\left(\sum_{j\in R} k_j \circ \pi_j^X\right) \circ \iota_1^X \\
&= \sum_{j\in R} k_j \circ \pi_j^X \circ \iota_1^X \\
&\overset{(1.6)}{=} k_1 \circ \pi_1^X \circ \iota_1^X \\
&= k_1 = id_{(X,k)} \qquad\qquad \text{(veja Observação 3.4)} \\
&= id_{F_Y(X,k)}.
\end{aligned}$$

Seja $(X,s) \in \mathcal{C}^{G_Y}$. Então $L_Y(X,s) = (\oplus_{t\in R} F_t(X), r)$ e $\varphi_{(X,s)} = \iota_1^X$. Temos

$$\begin{aligned}
&\psi_{L_Y(X,s)} \circ L_Y\left(\varphi_{(X,s)}\right) = \\
&= \sum_{j\in R} r_j \circ \pi_j^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ \sum_{l\in R} \iota_l^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ F_l\left(\iota_1^X\right) \circ \pi_l^X \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{l\in R} r_j \circ \pi_j^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ \iota_l^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ F_l\left(\iota_1^X\right) \circ \pi_l^X \\
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} r_j \circ \pi_j^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ \iota_j^{\oplus_{t\in R}F_t(X)} \circ F_j\left(\iota_1^X\right) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} r_j \circ F_j\left(\iota_1^X\right) \circ \pi_j^X \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum_{j\in R}\left(\sum_{i\in R} \iota_{\nu(ji)}^X \circ F_{\nu(ji)}\left(s_{\mu(ji)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(ji),\mu(ji)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{j,i}\right)_X \circ F_j\left(\pi_i^X\right)\right) \circ \\
&\quad F_j\left(\iota_1^X\right) \circ \pi_j^X \\
&= \sum_{j\in R}\sum_{i\in R} \iota_{\nu(ji)}^X \circ F_{\nu(ji)}\left(s_{\mu(ji)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(ji),\mu(ji)}\right)_X^{-1} \circ \left(\gamma_{j,i}\right)_X \circ \\
&\quad F_j\left(\pi_i^X \circ \iota_1^X\right) \circ \pi_j^X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(1.6)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(j)} \circ F_{\nu(j)}\left(s_{\mu(j)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(j),\mu(j)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{j,1}\right)_X \circ F_j\left(\pi^X_1 \circ \iota^X_1\right) \circ \pi^X_j \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_{\nu(j)} \circ F_{\nu(j)}\left(s_{\mu(j)}\right) \circ \left(\gamma_{\nu(j),\mu(j)}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{j,1}\right)_X \circ \pi^X_j \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{j\in R} \iota^X_j \circ F_j\left(s_1\right) \circ \left(\gamma_{j,1}\right)^{-1}_X \circ \left(\gamma_{j,1}\right)_X \circ \pi^X_j \qquad\qquad (s_1 = id_X) \\
&= \sum_{j\in R} \iota^X_j \circ \pi^X_j \\
&\overset{(1.5)}{=} id_{\oplus_{t\in R} F_t(X)} \\
&= id_{L_Y(X,s)},
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (6) segue do fato de que, para todo $j \in R$, $j = j1 = \nu(j)\mu(j)$ e, assim $\nu(j) = j$ e $\mu(j) = 1$.

Portanto, pelo Teorema 2.2, segue que o funtor L_Y é adjunto à esquerda do funtor F_Y. ■

Segundo o Teorema 2.6, funtores adjuntos à esquerda ou à direita (quando existem) são únicos, a menos de equivalência. Assim, se (L_Y, F_Y, ϕ) e $\left(L^{R'}_Y, F_Y, \phi'\right)$ são adjunções, em que R' é outro conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de G_Y em G, então L_Y e $L^{R'}_Y$ são equivalentes, ou seja, o funtor L_Y que estudamos no teorema acima não depende do conjunto de representantes considerado.

Referências Bibliográficas

[1] AQUINO, R. M.; GREEN, E. L.; MARCOS, E. N. **Rings defined by extenions**. Communications in Algebra. 40:7. 2557-2569. 2012.

[2] AWODEY, S. **Category Theory**. Oxford, 256p. (2006).

[3] BURCIU, S.; NATALE, S. **Fusion Rules of Equivariantizations of Fusion Categories**. Journal of Mathematical Physics, v. 54, n. 1, p. 013511. 2013.

[4] DRINFELD, V. et al. **On Braided Fusion Categories I**. Selecta Mathematica v.16, n.1, p. 1-119. 2010.

[5] EILENBERG, S.; MACLANE, S. **General Theory of Natural Equivalences**. American Mathematical Society, Vol. 58, No. 2, pp. 231-294 (1945).

[6] EILENBERG, S.; MACLANE, S. **Natural Isomorphisms in Group Theory**. Proc. Nat. Aca. Sci., pp. 537-543.

[7] ETINGOF, P. et al. **Tensor Categories**. American Mathematical Society. 2015.

[8] ETINGOF, P. et al. **Introduction to Representation Theory**. American Mathematical Society, (2011).

[9] GROTHENDIECK, A. **Sur Quelques Points D'algêbre Homologique**. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 9.2, pp. 119-183. (1957).

[10] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. Springer-Verlag. 2000.

[11] KAN, D. **Adjoint Functors**. American Mathematical Society. Vol. 87, No. 2, pp. 294-329, (1958).

[12] MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer, (1971).

[13] MACLANE, S. **Concepts and Categories in Perspective**. Duren P, A century of mathematics in America Part 3: ps. 353-365, (1988).

[14] MACLANE, S. **Duality for Groups**. Americam Mathematical Society, Vol. 56, No. 6, pp. 485-516, (1950).

[15] MOMBELLI, J. M. **Una Introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**. Notas de aula. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/ mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>. Acesso em 10 de novembro de 2018.

[16] PINTER, S. **Sobre equivariantização de categorias módulo e seus objetos simples**. 2017. 148p. Tese (Doutorado). UFSC.

[17] ULIANA, L. **Equivariantização de categorias k-lineares**. 2015. 117p. Dissertação (Mestrado). UFSC.