Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Um Estudo das Equações de Navier-Stokes com Condições de Fronteira de Tipo Navier

Ever Elías Vásquez Álvarez
Orientador: Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto

Florianópolis
Março de 2019

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Um Estudo das Equações de Navier-Stokes com Condições de Fronteira de Tipo Navier

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Ever Elías Vásquez Álvarez
Florianópolis
Março de 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Álvarez, Ever Elías Vásquez
Um Estudo das Equações de Navier-Stokes com Condições de Fronteira de Tipo Navier / Ever Elías Vásquez Álvarez ; orientador, Paulo Mendes de Carvalho Neto, 2019.
94 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equações de Navier - Stokes. 3. Domínios Limitados. 4. Limite Invíscido. I. Mendes de Carvalho Neto, Paulo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Um Estudo das Equações de Navier-Stokes com Condições de Fronteira de Tipo Navier

por

Ever Elías Vásquez Álvarez[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)
(Videoconferência)

Prof. Dr. Jauber Cavalcante de Oliveira
(Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC)

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC-BNU)
(Videoconferência)

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
(Coordenador da Pós-Graduação - UFSC)

Florianópolis, 25 de Março de 2019.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Dedico este trabalho aos meus familiares, em especial a Álvaro Vásquez Fabregas (In Memorian).

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus por suas infinitas abençoes e me permitir chegar até aqui.

Agradeço ao meu avó, meu filho, meus pais, meu irmão e em geral, agradeço a toda minha família, sou o que sou por causa do amor e cuidado de vocês.

Agradeço à Victoria Baumann pela dose diária de amor, carinho e compreensão.

Ao meus colegas e amigos na matemática, Rafaela, Guilherme, Julio, Luis, Elemar e Bruna que lutaram comigo até o final do mestrado com quem compartilhei minhas alegrias e superei minhas lutas. Também agradecer aos meus amigos colombianos que sempre me fizeram sentir em família e a todos os amigos Brasileros que fiz durante todo este tempo no Brasil em especial à Pâmela Andreza Padilha, Daniele Caroline Pscheidt e João Paulo da Silva. Muito obrigado por todo.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte de minha formação durante o mestrado, estou muito grato a eles por compartilhar seus conhecimentos e conselhos que foram uma base importante para a dissertação e também para minha vida. Em especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto por toda a atenção e paciência concedidas a mim na confecção deste trabalho e também no direcionamento da minha vida acadêmica.

Para finalizar, agradeço a todos os funcionários administrativos do Departamento de Matemática e também ao CAPES pelo suporte financeiro.

"Se tu podes crer, tudo é possível ao que crê."
Marcos 9:23

Resumo

Neste trabalho estudamos uma série de resultados relacionados as equações bidimensionais de Navier - Stokes para fluidos incompressíveis em domínios limitados, sujeitos a condição de fronteira de tipo Navier de fricção.

O estudo clássico deste problema foi tratado em domínios simplesmente conexos, porém neste manuscrito, seguindo as ideias introduzidas por Kelliher em [9], estamos assumindo que o domínio em questão possa ser dado como uma união finita de conjuntos conexos com fronteira suficientemente regular.

Neste novo contexto, introduzimos alguns espaços importantes para o estudo, fazemos diversas deduções de identidades na fronteira (fato importante já que agora, diferentemente do caso no-slip, temos termos de fronteira para estimar), deduzimos a noção de solução fraca, provamos a existência e unicidade da solução fraca e argumentamos sobre alguns resultados de regularidade.

Por fim estudamos o limite invíscido, isto é, para cada coeficiente de viscosidade $\mu > 0$, consideramos a solução fraca u_μ das equações de Navier - Stokes, e provamos que u_μ converge para a solução fraca das equações de Euler (para fluidos incompressíveis), quando $\mu \longrightarrow 0^+$.

Palavras-chave: domínios limitados; equações de Navier - Stokes; limite invíscido.

Abstract

In this work we study some results related to the two-dimensional Navier - Stokes equations for viscous incompressible fluids in a bounded domain subject to Navier friction-type boundary conditions.

The classical study of this problem was done in simply connected domains but in this manuscript, following the ideas introduced by Kelliher in [9], we are assuming that the domain is given as a finite union of connected sets with sufficiently regular boundaries.

Shortly, in this text we introduce some new function spaces, prove several identities at the boundary, deduce the notion of weak solution and prove the existence and uniqueness of such solution. We also prove some results concerning the regularity of the solution.

Finally we study the vanishing viscosity limit, that is, for each value $\mu > 0$ we consider the weak solution u_μ of the Navier - Stokes equations with viscosity μ and prove that u_μ converges to the weak solution of the Euler equations (for incompressible functions), when $\mu \longrightarrow 0^+$.

Key words: bounded domain; Navier - Stokes equations; vanishing viscosity limit.

Sumário

Introdução

Desde o inicio dos tempos, o mundo que nos rodeia possui inúmeros fenômenos que escapam ao controle do ser humano. Alguns exemplos clássicos de tais fenômenos seriam: a propagação de um incêndio, a trajetória que a água faz em uma inundação, as turbulências aéreas ou marinhas que causam desconforto e por vezes desastres, a habilidade de prever a precipitação de chuvas ou mesmo se será insuportavelmente quente no próximo final de semana; todos estes, fenômenos da natureza aparentemente diferentes.

Se nos perguntarmos sobre a física de tais fenômenos, descobriremos que eles tem algo em comum: são originados por ***fluidos***. Os fluidos, do ponto de vista físico - químico, são conjuntos de partículas unidas por forças fracas que permitem por meio de uma força externa a variação das posições de suas moléculas. Este é o caso de líquidos, gases e plasmas.

Em 1822 o engenheiro e físico francês ***Claude - Louis Navier*** (1785 - 1836), deduziu um sistema de equações que descrevia aproximadamente o comportamento de alguns fluidos. Vinte Anos mais tarde, o matemático e físico irlandês ***Sir George Gabriel Stokes*** (1819 - 1903), partindo de um modelo diferente, completou a descrição dessas equações, que então passou a receber o nome de ***Equações de Navier - Stokes*** em homenagem a ambos.

De forma breve podemos dizer que a formulação clássica das equações de Navier - Stokes, para um fluido homogêneo incompressível *(a densidade permanece aproximadamente constante durante todo o fluxo)*, são descritas pelo seguinte conjunto de equações:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f \qquad \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
\text{div} u &= 0 \qquad \text{em} \quad \Omega\times(0,T),\\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega.\\
u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

com Ω um subconjunto aberto, limitado e simplesmente conexo de $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular e $T > 0$ um valor real fixo. Na equação acima $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ representa uma força externa, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ a velocidade inicial do fluido, $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a velocidade do fluido, $p : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ a pressão do fluido e μ o coeficiente positivo de viscosidade.

A primeira equação apresentada acima diz respeito ao equilíbrio das forças, com o termo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u,$$

descrevendo a aceleração total de uma partícula no fluido e o termo

$$-\mu\Delta u,$$

o atrito entre as partículas do fluido. A identidade

$$\text{div} u = 0, \quad \text{em } \Omega,$$

significa que o fluido é homogêneo e incompressível enquanto que a equação

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em } \Omega,$$

representa a condição (velocidade) inicial do problema. Por fim apresentamos a condição de fronteira no-slip

$$u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

que traduz o fato do fluido estar parado quando está sob a fronteira. Estas equações já foram estudadas profundamente na literatura matemática (veja por exemplo [14, 19]).

Embora na descrição geral feita acima tenhamos que $n \in \mathbb{N}$, nos problemas físicos reais sempre estamos interessados nos casos em que $n = 2$ ou 3; de fato $n = 3$ seria o mais adequado para descrever problemas mais adaptados a nossa realidade dimensional, porém existe uma complexidade técnica com relação a regularidade e unicidade de solução que, ainda hoje, é um dos célebres problemas em aberto do milênio (veja mais detalhes em [3]). Contudo, como em muitos problemas aplicados 3D podemos assumir que os fluidos são bidimensionais (isto é, quando o fluxo de velocidade é paralelo a um plano), o estudo do caso $n = 2$ é muito relevante; além é claro de possuir mais respostas, já que conseguimos provar existência e unicidade de solução.

No estudo que desenvolvemos neste manuscrito consideramos fluidos bidimensionais, entretanto fazemos duas alterações fundamentais com relação aos estudos clássicos (as ideias principais apresentadas aqui foram retiradas do artigo [9]):

I. Substituímos a condição de fronteira no-slip pela condição de fronteira de tipo Navier de friccção, isto é, assumimos que a velocidade de "deslizamento" tangencial, em vez de ser zero, é proporcional a tensão tangencial, com um fator de proporcionalidade $a \in L^\infty(\partial\Omega)$ e que a componente normal da velocidade é nula.

   Podemos expressar a condição de fronteira de tipo Navier para um campo vetorial suficientemente regular u como:

$$u \cdot \nu = 0 \quad \text{e} \quad 2\mu(\nu \cdot D(u)) \cdot \tau + au \cdot \tau = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T);$$

II. Ao invés de considerarmos um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é dado pela união finita de conjuntos conexos com fronteiras suficientemente regulares.

Mediante as condições I. e II., em um primeiro momento provamos a boa colocação do problema, isto é, a existência e unicidade de solução das equações de Navier - Stokes com a condição de fronteira de tipo Navier de Fricção, além de estudarmos o ganho de regularidade da solução quando melhoramos a regularidade da fronteira do domínio, da condição inicial e da função f.

Em um segundo momento, ao observarmos que com coeficientes de viscosidade nulo, as equações de Navier - Stokes descrevem as equações de Euler, consideramos a solução u_μ para o problema das equações de

Navier - Stokes com viscosidade $\mu > 0$, e nos perguntamos: a solução u_μ converge para a solução das equações de Euler quando a viscosidade $\mu \longrightarrow 0^+$? Terminamos nosso estudo comprovando que, sob certas circunstâncias adequadas, obtemos uma resposta positiva para essa pergunta.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: o Capítulo 1 trata dos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do restante dos resultados apresentados aqui; introduzimos diversas definições e teoremas que são clássicos e fundamentais. No Capítulo 2 desenvolvemos a parte mais densa do trabalho, em que apresentamos propriedades sobre a decomposição de Hodge, discutimos sobre a vorticidade na fronteira, formulamos a noção de solução fraca para o problema e demonstramos a existência e unicidade de solução fraca para este problema. Terminamos este capítulo discutindo a questão de maior regularidade para esta solução. Por fim, no Capítulo 3 discutimos o limite inviscido que diz respeito a comparação do limite da solução fraca das equações de Navier - Stokes (quando fazemos a viscosidade $\mu \to 0^+$) com a solução fraca das equações de Euler.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste primeiro capítulo introduzimos as notações, conceitos e resultados técnicos acerca dos espaços funcionais que necessitamos para abordar a teoria das equações de Navier-Stokes.

Começamos discutindo as noções mais simples sobre espaços vetoriais e transformações lineares.

Definição 1.1.
Sejam X e Y espaços vetoriais. Diremos que a função $T : X \to Y$ é uma transformação linear, se para quaisquer $u, v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ valerem as igualdades

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad \text{e} \qquad T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Definição 1.2.
Sejam X e Y espaços vetoriais. Uma transformação linear $T : X \to Y$ é chamada de transformação linear limitada, quando existir $M > 0$ tal que

$$\|Tv\|_Y \leq M\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

Denotamos o espaço de todas as transformações lineares limitadas de X em Y por $\mathcal{L}(X,Y)$. Se Y é um espaço de Banach então quando consideramos $\mathcal{L}(X,Y)$ com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{v \in X, \|v\|_X = 1} \|Tv\|_Y,$$

ele se torna um espaço de Banach.

Observação 1.3.
Alguns fatos a se ressaltar, com respeito as noções introduzidas acima, são:

I. Quando $Y = \mathbb{K}$, com $\mathbb{K}$ sendo o corpo dos escalares do espaço vetorial X, denotamos o espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ apenas por X'. Chamamos os elementos de X' de funcionais lineares.

II. Toda transformação linear limitada é contínua e toda transformação linear contínua é limitada.

Os seguintes resultados podem ser encontrados em diversos textos clássicos que tratam da teoria da análise funcional (veja por exemplo [2, pág. 70-73]) e por isso não apresentamos as demonstrações.

Definição 1.4.
Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em X converge fraco para $u \in X$, e denotamos por $u_m \rightharpoonup u$, se

$$\langle f, u_k\rangle_{X,X'} \to \langle f, u\rangle_{X,X'},$$

para cada $f \in X'$. O símbolo $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,X'}$ introduzido acima representa a avaliação de um funcional linear de X' em um elemento do espaço vetorial X.

Definição 1.5.
Sejam X um espaço de Banach e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X'$. Dizemos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fraco estrela para $f \in X'$ se

$$\langle f_k, x\rangle_{X,X'} \to \langle f, x\rangle_{X,X'},$$

para cada $x \in X$. Denotamos essa convergência por $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Embora em espaços vetoriais de dimensão infinita não tenhamos um resultado de compacidade tão bom quanto em dimensão finita, temos alguns teoremas bastante relevantes.

Definição 1.6.
Considere X um espaço de Banach e a aplicação canônica $i : X \to X''$ definida por $i(x) = \hat{x}$, onde $\hat{x}(x') = x'(x)$, $\forall x' \in X'$. Diremos que X é reflexivo se i for sobrejetora.

Teorema 1.7 (Compacidade fraca).
Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset X$ é limitada, então existe uma subsequência $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in X$ tais que

$$u_{m_j} \rightharpoonup u.$$

Em outras palavras, sequências limitadas em um espaço de Banach reflexivo são fracamente compactas. Em particular, uma sequência limitada em um espaço de Hilbert contém uma subsequência que converge fraco.

Teorema 1.8 (Banach - Alaoglu).
A bola unitária fechada

$$B = \{f \in X' : \|f\|_{X'} \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca estrela.

A partir deste ponto assumimos, a menos que seja indicado o contrário, que Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira denotada por $\partial\Omega$.

Abaixo introduzimos uma notação adequada para derivadas parciais.

Definição 1.9.
Um multi-índice é uma $n-$tupla da forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos. Neste caso usamos a notação $D^\alpha u(x)$ para representar

$$\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_n^{\alpha_n}u(x),$$

para cada $x \in \Omega$. Ainda usamos denotar que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

No que segue introduzimos alguns espaços de funções que são de fundamental importância para nosso estudo.

Definição 1.10.
Denotaremos por $\mathcal{C}(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas, e se $m \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{C}^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : D^\alpha u \in \mathcal{C}(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\}$. Dado que para cada $m \in \mathbb{N}$, as funções do espaço $\mathcal{C}^m(\Omega)$ não necessariamente são limitadas, definimos o espaço $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ como o conjunto de todas as funções $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ tal que $D^\alpha u$ são limitas e uniformemente contínuas em Ω, para todo $|\alpha| \leq m$. Se munirmos o espaço $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} = \max_{0\leq\alpha\leq m}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|,$$

ele será um espaço de Banach.

Definição 1.11.
O espaço $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ é composto pelas funções $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que u possui infinitas derivadas em $\mathcal{C}(\Omega)$. Analogamente definimos $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Definição 1.12.
Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $0 < \epsilon \leq 1$, definimos o espaço das funções Hölder continuas $\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})$, como o subespaço de $\mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega})$ que consiste das funções u tal que para todo $|\alpha| \leq m$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ com

$$|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| \leq c\,|x-y|^{\epsilon}, \qquad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Se munirmos o espaço $\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})$ da norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})} = |u|_{\mathcal{C}^{m}(\overline{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})},$$

ele será um espaço de Banach, com a semi-norma $[\cdot]_{\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})}$ sendo dada por,

$$[u]_{\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \neq y} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\epsilon}}, \qquad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Observação 1.13.
O espaço $\mathcal{C}^{m,1}(\overline{\Omega})$ é chamado de espaço das funções Lipschitz.

A seguir abordamos superficialmente uma noção que trata da regularidade da fronteira de conjuntos abertos e limitados do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.14.
Seja $m \in \mathbb{N}$. Diremos que $\partial\Omega$ é localmente de classe $\mathcal{C}^m$ se para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 cuja interseção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^m$. Da mesma forma diremos que $\partial\Omega$ é localmente de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ se for de classe $\mathcal{C}^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definição 1.15.
Diremos que $\partial\Omega$ é localmente de classe $\mathcal{C}^{m,\epsilon}$ se para todo ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 cuja interseção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^{m,\epsilon}$.

Observação 1.16.
No caso $\mathcal{C}^{m,1}$ diremos que $\partial\Omega$ é Lipschitz.

Observação 1.17.
O termo "$\partial\Omega$ é localmente de classe $\mathcal{C}^m$" é muitas vezes substituido apenas por "Ω é de classe $\mathcal{C}^m$" em algumas bibliografias clássicas. Neste texto usaremos a versão mais curta desta definição para facilitar a leitura.

Observação 1.18.
Do mesmo jeito como na observação anterior, o termo "$\partial\Omega$ é localmente de classe $\mathcal{C}^{m,\epsilon}$" é muitas vezes substituído apenas por "Ω é de classe $\mathcal{C}^{m,\epsilon}$".

Agora vamos apresentar um subespaço particular das funções infinitamente diferenciáveis o qual possui propriedades importantes na teoria dos espaços de Sobolev.

Definição 1.19.
Seja $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte de ϕ é definido como o fecho em $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ do conjunto no qual ϕ não se anula, ou seja,

$$\operatorname{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se ainda, $\operatorname{supp}\phi$ for compacto, dizemos que ϕ possui suporte compacto.

Definição 1.20.
O conjunto das funções de Ω em $\mathbb{R}^n$ que são infinitamente continuamente diferenciáveis e que possuem suporte compacto, com o suporte contido em Ω, são chamadas de funções teste. Denotamos o conjunto das funções teste por $\mathscr{D}(\Omega)$. Podemos considerar uma topologia neste espaço vetorial através das propriedades de convergência de sequências em $\mathscr{D}(\Omega)$. Mais especificamente, diremos que $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ converge para $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ quando satisfizer:

I. Existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{supp}\phi_m \subset K;$$

II. Para cada multi-índice α, a sequência $\partial^\alpha\phi_m$ converge uniformemente para $\partial^\alpha\phi$ em K.

Com essa topologia, $\mathscr{D}(\Omega)$ se torna um espaço vetorial topológico completo e localmente convexo.

Usando as ideias introduzidas acima, abordamos agora algumas noções fundamentais da teoria.

Definição 1.21.
Definimos o espaço das distribuições em Ω como sendo o dual do espaço $\mathscr{D}(\Omega)$ e o denotamos por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Em $\mathscr{D}'(\Omega)$ usamos a topologia da convergência pontual sobre o espaço $\mathscr{D}(\Omega)$. Assim, as propriedades vetoriais e de convergência deste espaço são dadas por

I. $\langle S+T,\phi\rangle = \langle S,\phi\rangle + \langle T,\phi\rangle, \quad \forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$,

II. $\langle cT,\phi\rangle = c\langle T,\phi\rangle, \quad \forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$,

III. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$, se para cada $\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ tivermos que $\langle T_n,\phi\rangle \to \langle T,\phi\rangle$ em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.22.
Nem toda distribuição é oriunda de uma função localmente integrável. A contrapor, podemos considerar a distribuição delta de Dirac centrada em x_0, denotada por δ_{x_0} e definida por $\langle\delta_{x_0},\phi\rangle = \phi(x_0), \forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega)$. Para mais detalhes veja [11, pág. 7].

Definição 1.23.
Seja $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Definimos sua derivada distribucional por

$$\langle D^\alpha T,\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\phi\rangle.$$

Observação 1.24.
Toda distribuição possui infinitas derivadas distribucionais e todas elas são distribuições.

Agora introduzimos os espaços das funções Lebesgue integráveis, os quais desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da teoria que apresentamos neste texto.

Definição 1.25.
Se Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $p\in[1,\infty]$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ tais que u é mensurável e ainda

$$\begin{cases} |u(x)|^p \text{ é integrável em } \Omega, \text{ se } 1\le p<\infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|<\infty, \text{ se } p=\infty. \end{cases}$$

Tal espaço é de Banach quando consideramos as respectivas normas

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u_i(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u_i(x)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Observação 1.26.
O espaço $L^2(\Omega)$ é de Hilbert com produto interno e norma denotados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (u, v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u(x) v(x) \, dx, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Definição 1.27.
Se n é um número natural e $p \in [1, \infty]$, então $\{L^p(\Omega)\}^n$ representa o espaço de todas as funções $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $u_i \in L^p(\Omega)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Tal espaço é de Banach quando consideramos as respectivas normas

$$\|u\|_{\{L^p(\Omega)\}^n} = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_i(x)|^p \, dx \right)^{2/p} \right]^{1/2}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u_i(x)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Observação 1.28.
Como anteriormente o espaço $\{L^2(\Omega)\}^n$ é de Hilbert com produto interno e norma denotados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (u, v)_{\{L^2(\Omega)\}^n} &= \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x) v_i(x) \, dx, \\ \|u\|_{\{L^2(\Omega)\}^n} &= \left[\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_i(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Observação 1.29.
O espaço $\{L^p_{loc}(\Omega)\}^n$ é composto por todas as funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que pertencem a $\{L^p(K)\}^n$, para todo $K \subset \Omega$ compacto.

A seguir apresentamos uma coleção de desigualdades elementares, porém fundamentais. Estas desigualdades são continuamente empregadas em todo o texto. As respectivas demonstrações podem ser encontradas em [6, pág. 622-625] e por isso são omitidas neste texto.

Teorema 1.30.
Sejam ϵ, p e q números reais com $\epsilon > 0$, $1 < p, q < \infty$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Nas condições acima, valem:

I. Desigualdade de Cauchy.

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad (a\ ,\ b \in \mathbb{R}).$$

II. Desigualdade de Cauchy com ϵ.

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}, \qquad (a\ ,\ b > 0).$$

III. Desigualdade de Young.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad (a\ ,\ b > 0).$$

IV. Desigualdade de Young com ϵ.

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad \textit{para} \quad C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}, \quad (a\ ,\ b > 0).$$

A seguir introduzimos dois resultados muito importantes para os nossos objetivos nesta dissertação.

Teorema 1.31 (Desigualdade de Hölder generalizada).
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e p_k, com $k = 1, \ldots, m$, são números reais tais que

$1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$ e

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

então vale a desigualdade: Se $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, para $k = 1, \ldots, m$. Então,

$$\int_\Omega |u_1 \ldots u_m| \; dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Teorema 1.32 (**Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial**). *Assuma que η seja uma função continua não negativa em $[0,T]$ com $\eta' \in L^1(0,T)$, que satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

para $\phi(t)$ e $\psi(t)$ funções integráveis e não negativas em $[0,T]$.

I. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\Big],$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

II. Em particular, se

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t), \quad \text{quase sempre em} \quad [0,T] \quad \text{e} \quad \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \quad \text{em } [0,T].$$

Neste ponto nos dedicamos a introduzir os espaços de Sobolev que são recorrentemente utilizados no estudo das equações de Navier-Stokes.

Definição 1.33.
Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Diremos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-derivada fraca de u, isto é, $D^\alpha u(x) = v(x)$, quase sempre em Ω, se valer que

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\phi(x)\, dx,$$

para toda função $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Definição 1.34.
Dado m um número natural, definimos $H^m(\Omega)$ como o conjunto das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que u possui todas as derivadas fracas até ordem m e cada uma de suas derivadas fracas está em $L^2(\Omega)$. Se munirmos $H^m(\Omega)$ do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \Big(D^\alpha u, D^\alpha v \Big)_{L^2(\Omega)},$$

e da respectiva norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \Big\| D^\alpha u \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2},$$

ele será um espaço de Hilbert.

Definição 1.35.
Dados n, m números naturais, definimos $\{H^m(\Omega)\}^n$ como o conjunto das funções $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \{L^2(\Omega)\}^n$ tais que $u_i \in H^m(\Omega)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Se munirmos $\{H^m(\Omega)\}^n$ do produto interno

$$(u, v)_{\{H^m(\Omega)\}^n} = \sum_{i=i}^{n} (u_i, v_i)_{H^m(\Omega)},$$

e da respectiva norma

$$\|u\|_{\{H^m(\Omega)\}^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{H^m(\Omega)} \right)^{1/2},$$

ele será um espaço de Hilbert.

Definição 1.36.
O espaço $H_0^m(\Omega)$ é dado como sendo o fecho de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Observação 1.37.

I. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, então $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ for limitado, então $H_0^m(\Omega)$ é um subespaço próprio de $H^m(\Omega)$. Este espaço está relacionado com o Teorema do Traço que será introduzido mais a frente no texto.

II. Caso $s \in (0, \infty)$, podemos também definir o espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$. Não utilizamos estes espaços nesta dissertação, não houve aprofundamento nos outros assuntos. Sugerimos para maiores detalhes [6][pág. 282-283].

No que segue, apresentamos uma série de resultados clássicos porém de fundamental importância para este manuscrito.

Teorema 1.38 (Desigualdade Poincaré-Wirtinger).
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Então, existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$ que satisfazer

$$\int_\Omega u(x)\, dx = 0.$$

Demonstração.
Veja [15, pág. 127-129]. ■

Definição 1.39.
Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita:

I. Ser contínua se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H, \qquad \forall u, v \in H;$$

II. Ser H-elíptica se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|_H^2, \qquad \forall v \in H.$$

Os espaços de Bochner são uma generalização do conceito de espaços L^p para funções cujo o contradomínio está em um espaço de Banach que não é necessariamente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.40.
Dado um espaço de Banach X, $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$, representamos por $L^p(0, T; X)$ o espaço das funções vetoriais $u : [0, T] \longrightarrow X$ tais que a função u é mensurável (no sentido de Bochner) e $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$. Este

espaço é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \ dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = \infty$, representaremos por $L^\infty(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $u : [0,T] \longrightarrow X$ tais que é mensurável (no sentido de Bochner) e $\|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$. Este espaço é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Definição 1.41.
Definimos o espaço $\mathcal{C}([0,T];X)$ como sendo o conjunto formado por todas as funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ contínuas. Este espaço é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T];X)} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.42.
Se $1 < p < \infty$ e X for reflexivo, demonstra-se que o espaço $L^p(0,T;X)$ também é reflexivo. De maneira explicita, obtém-se que o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ é o espaço $L^q(0,T;X')$, onde $(1/p) + (1/q) = 1$.

Abaixo introduzimos uma série de resultados clássicos que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Teorema 1.43.
Seja X um espaço de Banach com espaço dual X' e sejam u e g duas funções em $L^1(0,T;X)$. Então as seguintes condições são equivalentes:

I. A função u é igual (q.s.) a primitiva de g, isto é,

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s) \ ds, \quad \xi \in X \quad q. \ s. \ \ t \in [0,T].$$

II. Para cada função teste $\phi \in \mathscr{D}((0,T))$,

$$\int_0^T u(t)\phi'(t) \ dt = -\int_0^T g(t)\phi(t) \ dt.$$

III. Para cada $\eta \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u, \eta\rangle = \langle g, \eta\rangle,$$

no sentido das distribuições escalares em $(0,T)$.

Se $I - III$ são satisfeitas u, em particular é igual a uma função continua de $[0,T]$ em X.

Demonstração.
Veja [19, pág. 250 - 252]. ∎

Teorema 1.44.
Seja X, Y, X' espaços de Hilbert com $X \subset Y \subset X'$ com X' sendo o espaço dual de X. Se uma função $u \in L^2(0,T;X)$ com $u' \in L^2(0,T;X')$, então $u \in \mathcal{C}([0,T];Y)$ e vale que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_Y^2 = 2\langle u', u\rangle_{X,X'}.$$

Demonstração.
Veja [19, pág. 260 - 261]. ∎

Observação 1.45.
O Teorema 1.43 aplicado ao Teorema 1.44 garante que $\|u\|_Y^2$ é igual (q.s.) a uma função contínua de $[0,T]$ em Y que possui derivada (q.s.) integrável.

Sejam X, Y e W espaços de Banach com $X \subset Y \subset W$. Suponha que $X \hookrightarrow Y$ seja compacta com X e W reflexivos. Considere

$$\Psi = \big\{u : u \in L^{p_0}(0,T;X),\ u' \in L^{p_1}(0,T;W)\big\},$$

com $0 < T < \infty$ e $0 < p_0$, $p_1 < \infty$. O espaço Ψ munido da norma

$$\|u\|_\Psi = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;X)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;W)},$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.46 (Aubin - Lions).
Sobre as hipóteses consideradas acima, a imersão $\Psi \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;Y)$ é compacta.

Demonstração.
Veja [14, pág. 57 - 60]. ∎

Teorema 1.47.
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *de classe* $\mathcal{C}^2$*. Então:*

I. *Existe* $\tilde{\epsilon} > 0$ *um raio admissível para* $\partial\Omega$*, isto é, para cada* $p, q \in \partial\Omega$ *temos que* $B_{p,\tilde{\epsilon}} \cap B_{q,\tilde{\epsilon}} = \Phi$.

II. *A reunião das bolas normais de* $\partial\Omega$*, isto é* $\mathbb{V}_{\tilde{\epsilon}}(\partial\Omega) = \bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} B_{x_0,\tilde{\epsilon}}$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^2$ *e é chamado de vizinhança tubular de* $\partial\Omega$ *com raio* $\tilde{\epsilon}$.

III. *A projeção* $\pi : \mathbb{V}_{\tilde{\epsilon}} \longrightarrow \partial\Omega$*, que associa a cada ponto* $q \in \mathbb{V}_{\tilde{\epsilon}}(\partial\Omega)$ *o único elemento de* $\partial\Omega$ *que está no segmento normal que contém* q*, é de classe* $\mathcal{C}^1$.

Demonstração.
Veja [13, pág. 106 - 110]. ■

Teorema 1.48 (Operador Traço).
Considere que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *possui* $\partial\Omega$ *Lipschitz e que* $m \geq 1$*. Defina*

$$\begin{cases} q = \frac{2(n-1)}{n-2m}, & se \;\; 2m < n, \\ \\ q \in [1, \infty), & se \;\; 2m \geq n. \end{cases}$$

Então existe uma única transformação linear limitada γ_0 *de* $H^m(\Omega)$ *em* $L^q(\partial\Omega)$*, tal que para todo* $u \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ *temos que* $\gamma_0(u) = u \mid_{\partial\Omega}$*. Além disso, para* $m = 1$ *temos a desigualdade*

$$\|\gamma(u)\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\lambda}\|u\|_{H^m(\Omega)}^{\lambda},$$

com $C = C(n, q, \Omega)$ *e* $\lambda = n(q-2)/2(q-1)$.

Demonstração.
Veja [7, pág. 43]. ■

Teorema 1.49.
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Então o operador* $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ *é um isomorfismo. Além disso, para todo* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *vale que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração.
Veja [20, pág. 242 - 243]. ■

Teorema 1.50 (Imersões de Sobolev).
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ Lipschitz.

I. *Caso $2 \geq n$ a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é continua e compacta para $1 \leq q < \infty$ e caso $2 < n$, a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é continua e compacta para todo $1 \leq q < q'$, com $q' = 2n/(n-2)$.*

II. *Sejam p, q, r e s em $\mathbb{R}$ com $1 \leq q,\ p < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, então:*

   a. *Caso $k+1 > s - \frac{n}{2} > k$ e $\alpha = s - \frac{n}{2} - k$, a imersão*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

   é continua.

   b. *Caso $s > r \geq 0$, a imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^r(\Omega)$ é continua e compacta.*

Demonstração.
Veja [8, pág. 26 - 28] e [19, pág. 160]. ■

Quando nos referimos as equações de Navier-Stokes, é necessário introduzir um espaço clássico para lidarmos com o operador traço normal. Mais especificamente, seja $E(\Omega)$ o seguinte espaço auxiliar:

$$E(\Omega) = \{u \in \{L^2(\Omega)\}^2 \ : \ \mathrm{div} u \in L^2(\Omega)\}.$$

Este é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$(u, v)_{E(\Omega)} = (u, v)_{\{L^2(\Omega)\}^2} + (\mathrm{div} u, \mathrm{div} v)_{L^2(\Omega)},$$

e com a respectiva norma associada

$$\|u\|_{E(\Omega)} = \{(u, u)_{E(\Omega)}\}^{1/2}.$$

Teorema 1.51 (Fórmula de Stokes).
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Então existe um operador linear, contínuo e sobrejetor $\gamma_\nu : E(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tal que

$$\gamma_\nu u = u \cdot \nu|_{\partial\Omega}, \qquad \forall u \in \mathscr{D}(\overline{\Omega}).$$

A identidade

$$(u, \nabla w)_{\{L^2(\Omega)\}^2} + (div\, u, w)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 w\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega)},$$

generaliza a fórmula de Stokes, para todo $u \in E(\Omega)$ *e* $w \in H^1(\Omega)$.

Demonstração.
Veja [19, pág. 9 - 12]. ■

Terminamos este capítulo introduzindo alguns últimos resultados importantes.

Teorema 1.52 (Korn).
Seja Ω *um subconjunto aberto e conexo de* $\mathbb{R}^2$ *com fronteira* $\partial\Omega$ *Lipschitz. Então existe uma constante* $K = K(\Omega) > 0$ *tal que para todo campo vetorial* $u \in \{H^1(\Omega)\}^2$ *temos*

$$\|u\|^2_{\{H^1(\Omega)\}^2} \;\leq\; K \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left\{ |u_i(x)|^2 + \left| \frac{1}{2}\left[\partial_j u_i(x) + \partial_i u_j(x)\right] \right|^2 \right\} dx.$$

Demonstração.
Veja [12, pág. 106 - 109]. ■

Lema 1.53 (Lema de Osgood).
Seja L *uma função mensurável não-negativa e* γ *uma função localmente integrável e não-negativa, cada uma definida no domínio* $[t_0, t_1]$. *Seja* $\mu : [0, \infty) \longmapsto [0, \infty)$ *uma função continua não decrescente satisfazendo* $\mu(0) = 0$. *Seja* $a \geq 0$, *e assuma que para todo* $t \in [t_0, t_1]$,

$$L(t) \leq a + \int_{t_0}^{t_1} \gamma(s)\mu(L(s))\; ds.$$

Se $a > 0$, *então*

$$\int_a^{L(t)} \frac{ds}{\mu(s)} = \int_a^1 \frac{ds}{\mu(s)} - \int_{L(t)}^1 \frac{ds}{\mu(s)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \gamma(s)\; ds.$$

Se $a = 0$ *e* $\int_0^1 (ds/\mu(s)) = \infty$, *então* $L \equiv 0$.

Demonstração.
Veja [4, pág. 92]. ■

O Lema de Osgood é equivalente a um Teorema de Bihari [1], embora com uma suposição apenas de continuidade de μ em vez de mensurabilidade.

Capítulo 2

As Equações de Navier-Stokes

As Equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações em derivadas parciais que descrevem o movimento de um fluido. O problema clássico de Navier-Stokes é tratado em Ω, um subconjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipchitz de $\mathbb{R}^2$ e tem como objetivo encontrar uma função vetorial u que descreve a velocidade do fluido e uma função escalar p que descreve a pressão do fluido. Mais especificamente, buscamos funções suficientemente regulares $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $p : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ para algum $T > 0$ fixo, que satisfazem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
\mathrm{div} u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

Acima $u_0(x)$ é uma função vetorial tal que $\mathrm{div}\, u_0 = 0$, $f(x,t)$ é uma função que representa a força externa e μ é o coeficiente positivo de viscosidade.

O problema clássico das equações de Navier-Stokes já foi estudado profundamente na literatura matemática, isto é, quando consideramos como complementação final as equações acima a condição de fronteira $u = 0$ (veja como referências [14, 19]).

Neste trabalho estudaremos outro tipo de condição de fronteira: a condição de fronteira de *tipo Navier de fricção* ou apenas de *tipo Navier*, para encurtar o termo. Esta noção foi introduzida por Navier em [18] e derivada por Maxwell em [17] a partir da teoria cinética de gases, no qual assume-se que a velocidade de "deslizamento" tangencial, em vez de ser zero, é proporcional a tensão tangencial, com um fator de proporcionalidade $a \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Podemos expressar a condição de tipo Navier para um campo vetorial suficientemente regular u como:

$$u \cdot \nu = 0 \quad \text{e} \quad 2\mu(\nu \cdot D(u)) \cdot \tau + au \cdot \tau = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T).$$

Acima ν é o vetor unitário normal que aponta para fora, τ é o vetor unitário tangente, e o par ordenado $\{\nu, \tau\}$ fornece a orientação padrão para $\mathbb{R}^2$ e ainda $D(u)$ representa o tensor de taxa de deformação, que é definido como,

$$D(u) = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T].$$

Vale salientar que do fato de u ser um campo, a aplicação $t \mapsto \nabla u(t)$ (ou apenas ∇u, como é usado no texto) representa a função matricial

$$\nabla u(t) := \begin{bmatrix} \partial_1 u_1(t) & \partial_2 u_1(t) \\ \partial_1 u_2(t) & \partial_2 u_2(t) \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, vamos tomar $\alpha = a/\mu$ e escrever estas condições de fronteira na forma

$$u \cdot \nu = 0 \quad \text{e} \quad 2(\nu \cdot D(u)) \cdot \tau + \alpha u \cdot \tau = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.1}$$

Observação 2.1.
Observamos ainda que $(\nu \cdot D(u))$ ou $(\nu \cdot \nabla u)$ representa somente uma notação que simboliza o produto de uma matriz por um vetor.

Observação 2.2.
Seguindo as ideias introduzidas por James Kelliher em [9], a razão de preferir (2.1) para as condições de fronteira de tipo Navier, é que no limite invíscido, manteremos α fixo à medida que $\mu \longrightarrow 0^+$, e com isso mostraremos que a solução para as equações de Navier - Stokes com condições de fronteira de tipo Navier converge para uma solução para as equações de Euler.

Juntando todos os fatos discutidos acima e considerando Ω um subconjunto aberto, limitado e com um número finito de componentes conexas de $\mathbb{R}^2$, cada uma de classe $\mathcal{C}^2$, obtemos o seguinte conjunto de equações[1]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T), && (2.2)\\
\mathrm{div} u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T), && (2.3)\\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, && (2.4)\\
u\cdot\nu &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,T), && (2.5)\\
2(\nu\cdot D(u))\cdot\tau + \alpha u\cdot\tau &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\times(0,T). && (2.6)
\end{aligned}$$

Neste capítulo vamos estudar a existência, unicidade e regularidade de solução (fraca) para o problema (2.2) - (2.6).

Com este objetivo em mente, introduzimos agora alguns espaços especiais desta teoria que são usados recorrentemente no texto.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \{u\in\{\mathscr{D}(\Omega)\}^2 : \ \mathrm{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\};\\
H &= \{u\in\{L^2(\Omega)\}^2 : \ \mathrm{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \ \text{ e } \ u\cdot\nu = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\};\\
V &= \{u\in\{H^1(\Omega)\}^2 : \ \mathrm{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \ \text{ e } \ u\cdot\nu = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\};\\
\mathcal{W} &= \{u\in V\cap\{H^2(\Omega)\}^2 : 2(\nu\cdot D(u))\cdot\tau + \alpha u\cdot\tau = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\}.
\end{aligned}$$

Observação 2.3.
O conjunto H definido acima pode também ser interpretado como sendo o fecho de $\mathscr{V}$ em $\{L^2(\Omega)\}^2$; veja [19, pág. 13 - 16] ou ainda [5] para detalhes da prova.

Observação 2.4.
Inicialmente observe que se $u\in V$ e tomarmos $v_1(x) = (x_1, 0)$, então pelo Teorema 1.51

$$(u,\nabla v_1)_{\{L^2(\Omega)\}^2} + (\mathrm{div}\, u, v_1)_{L^2(\Omega)} = \langle\gamma_\nu u, \gamma_0 v_1\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega),H^{-1/2}(\partial\Omega)},$$

e como $\mathrm{div} u = 0$ e $u\cdot\nu = 0$, concluímos que

$$\int_\Omega u_1(x)dx = 0.$$

[1] Embora o problema clássico seja tratado em domínios com fronteira Lipschitz, com esta nova condição de contorno, necessitamos de uma regularidade maior para discutir o comportamento da vorticidade na fronteira. Veja a Seção 2.2 para entender a necessidade desta regularidade.

Escolhendo agora $v_2(x) = (0, x_2)$, concluímos que

$$\int_\Omega u_2(x)dx = 0.$$

Os fatos apresentados acima implicam que $\int_\Omega u(x)dx = 0$ e portanto do Teorema 1.38, segue que a norma $\|\cdot\|_{\{\mathrm{H}^1(\Omega)\}^2}$ em V é equivalente a norma

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{2} \|\partial_i u\|^2_{\{L^2(\Omega)\}^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual é proveniente do produto interno

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{2} (\partial_i u, \partial_i v)_{\{L^2(\Omega)\}^2}.$$

Observação 2.5.
Consideramos o espaço $\mathcal{W}$ com o produto interno e norma induzidos de $\{H^2(\Omega)\}^2$, o espaço H com o produto interno e norma de $\{L^2(\Omega)\}^2$; estes dois últimos serão respectivamente simbolizados por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$.

Terminamos essa parte inicial apresentando um teorema muito importante da teoria.

Teorema 2.6 (**Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg**).
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado de classe $\mathcal{C}^1$. Se $1 \leq q \leq p < \infty$. Então

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}\|u\|^a_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega),$$

com $a = 1 - \frac{q}{p}$.

Demonstração.
Ver [2, pág. 313 - 314]. ■

Observação 2.7.
Um caso especial da desigualdade da interpolação de Gagliardo-Nirenberg é a desigualdade de Ladyzhenskaya; mais especificamente quando fazemos as escolhas $p = 4$, $q = 2$ e $a = \frac{1}{2}$ e utilizamos o Teorema 1.38, obtemos

$$\|u\|_{\{L^4(\Omega)\}^2} \leq C(\Omega)|u|^{\frac{1}{2}}|\nabla u|^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer função $u \in V$.

Observação 2.8.
Aplicando os Teoremas 1.38, 1.48 e 2.6, obtemos a desigualdade

$$\|u\|_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2} \leq C(\Omega)|u|^{\frac{1}{2}}|\nabla u|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

para qualquer função $u \in V$.

2.1 Decomposição Hodge de H

Alguns dos resultados originais a respeito das equações de Navier - Stokes com condição de fronteiro de tipo Navier, foram discutidos por [5] e [16]. Estes autores assumiam em seus trabalhos que Ω era um domínio simplesmente conexo. Porém, no nosso caso temos que Ω é um aberto e limitado de $\mathbb{R}^2$ possuindo uma quantidade finita de componentes conexas. Esta nova versão do problema foi apresentada por Kelliher em [9], e é nela que baseamos a discussão que segue.

Em resumo, nosso objetivo é apresentar brevemente a decomposição do espaço H em dois subespaços $H = H_0 \oplus H_c$, de modo que

$$\begin{aligned} H_0 &= \left\{ u \in H : \int_{\partial\Gamma} u \cdot \nu \, dS = 0 \right\}, \\ H_c &= \{u \in H : \omega(u) = 0\}, \end{aligned}$$

com $\omega(u) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$.

Observação 2.9.

I. Para evitar confusões ao longo do texto, salientamos que para campos $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ temos que $\omega(u) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ (leia-se aqui o rotacional do campo u). Por outro lado, caso $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ seja uma função real, então $\omega(\psi) = (-\partial_2\psi, \partial_1\psi)$ (leia-se o campo rotacional da função ψ).

II. Durante a demonstração da identidade $H = H_0 \oplus H_c$, precisamos estudar um problema elíptico, do qual obtemos uma base de H_c que também está em V. Disso concluímos que $H_c \subset V$.

Como as demonstrações envolvendo as identidades apresentadas acima e vários dos resultados desta seção necessitam de diversas ferramentas da teoria de homologia e da teoria de variedades, que fogem do escopo desta dissertação, omitiremos suas demonstrações. Nos referimos ao artigo de Kelliher [9] como uma referência mais sólida para as demonstrações e conclusões feitas no restante desta seção.

Proposição 2.10.
Se $u \in H_0$, então existe $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = \omega(\phi)$.

Demonstração.
Veja [9, pág. 215]. ■

Consideremos agora os seguintes resultados com respeito aos espaços H, V, $\mathcal{W}$:

Teorema 2.11.
V, H e V' são espaços de Hilbert, se consideramos V munido da topologia induzida por $\{H^1(\Omega)\}^2$ e H munido da topologia induzida por $\{L^2(\Omega)\}^2$ com V e H reflexivos, então $V \subset H \subset V'$ com $V \hookrightarrow H$ imersão continua e compacta.

Demonstração.
H é um subconjunto fechado do espaço completo $\{L^2(\Omega)\}^2$ e V é um subconjunto fechado do espaço completo $\{H^1(\Omega)\}^2$, logo temos que H e V são completos e reflexivos, em suas respectivas topologias. Assim V' também é um espaço de Hilbert reflexivo, e usando a identificação padrão vale que, $V \subset H \equiv H' \subset V'$ e portanto $V \subset H \subset V'$.
Como o Teorema 1.50 garante que $\{H^1(\Omega)\}^2 \hookrightarrow \{L^2(\Omega)\}^2$ é imersão contínua e compacta então segue que a imersão $V \hookrightarrow H$ é contínua e compacta. ■

Lema 2.12.
Para qualquer $p \in [2, +\infty)$ e para qualquer $u \in H_0$, com $\omega(u)$ em $L^p(\Omega)$, vale a desigualdade

$$\|\nabla u\|_{\{L^p(\Omega)\}^4} \leq C(\Omega)p\|\omega(u)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração.
Seja $u \in H$ com $\omega(u) \in L^p(\Omega)$. Então, pela Proposição 2.10, existe uma função $\psi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = \omega(\psi)$. Aplicando o Teorema 1.49 obtemos que

$$\|\nabla u\|_{\{L^p(\Omega)\}^4} \leq \|\psi\|_{H^p(\Omega)} \leq C(\Omega)p\|\Delta\psi\|_{L^p(\Omega)} = C(\Omega)p\|\omega(u)\|_{L^p(\Omega)},$$

o que conclui a prova. ■

Observação 2.13.
Para Ω simplesmente conexo, $H = H_0$, e o Lema 2.12 aplica-se a todo H. Para um melhor análise (veja por exemplo [19, Apendice I pág. 458]).

Assumindo que a fronteira $\partial\Omega$ tem uma regularidade adicional, temos o seguinte resultado em H.

Corolário 2.14.
Suponha que Ω é de classe $\mathcal{C}^{2,\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$. Então para qualquer $p \in [2, \infty)$ e qualquer $u \in H$, com $\omega(u) \in L^p(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_{\{L^p(\Omega)\}^4} \leq C(\Omega) p \|\omega(u)\|_{L^p(\Omega)} + C'(\Omega)|u|,$$

as constantes $C(\Omega)$ e $C'(\Omega)$ sendo independentes de p.

Demonstração.
Veja [9, pág. 215-216]. ■

Com o objetivo de criar ferramentas para que possamos provar a existência e unicidade de solução fraca (essa noção é introduzida na seção 2.3.1) para o problema (2.2) - (2.6), abaixo enunciamos um teorema que garante a existência de uma base conveniente para os espaços funcionais ligados as equações de Navier - Stokes com condições de fronteira de tipo Navier.

Teorema 2.15.
Supor que $\partial\Omega$ é classe $\mathcal{C}^2$, e $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$. Então existe uma base

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots\},$$

para V, que se estende em $\mathcal{W}$ a qual também é uma base ortonormal para H.

Demonstração.
Veja para mais detalhes [9][pág. 229-231]. ■

2.2 Vorticidade na fronteira

Nesta seção apresentaremos resultados que serão de grande importância na formulação da solução fraca para as equações de Navier - Stokes com condições de fronteira de tipo Navier. Tendo em conta estas condições, o fluxo do fluido na fronteira $\partial\Omega$ permanece em movimento. Por este motivo, vamos estudar a relação do rotacional com respeito a estas condições.

Dado que, Ω é de classe $\mathcal{C}^2$, e se parametrizarmos cada componente de $\partial\Omega$, então pelo comprimento de arco segue-se da definição clássica que

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} := \frac{d\nu}{ds} = \kappa\tau,$$

com κ sendo a curvatura de $\partial\Omega$.

Lema 2.16.
Suponha que $v \in \{H^2(\Omega)\}^2 \cap V$ com $v \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Então

$$(\nu \cdot D(v)) \cdot \tau - \frac{1}{2}\omega(v) + \kappa v \cdot \tau = 0 \quad em \quad \partial\Omega,$$

com $\omega(v) = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ e κ é a curvatura de $\partial\Omega$ dada na forma padrão por $\frac{d\tau}{ds} = -\kappa\nu$, com s sendo o comprimento de arco.

Demonstração.
Seja $v \in \{H^2(\Omega)\}^2$ com $v \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^2$, então pelo Teorema 1.47 existe uma vizinhança tubular $\mathbb{V}$ onde podemos definir as funções $\tilde{\nu} = \nu \circ \pi$ e $\tilde{\tau} = \tau \circ \pi$ com $\tilde{\nu}$, $\tilde{\tau} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{V})$. Logo em $\mathbb{V}$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}(v \cdot \tilde{\nu}) &= \Big(\partial_1(v \cdot \tilde{\nu}), \partial_2(v \cdot \tilde{\nu})\Big) \cdot \tilde{\tau} \\
&= \Big(\partial_1(v_1\tilde{\nu_1} + v_2\tilde{\nu_2}), \partial_2(v_1\tilde{\nu_1} + v_2\tilde{\nu_2})\Big) \cdot (\tilde{\tau_1}, \tilde{\tau_2}) \\
&= \Big((\partial_1 v_1)\tilde{\nu_1} + v_1(\partial_1\tilde{\nu_1}) + (\partial_1 v_2)\tilde{\nu_2} + v_2(\partial_1\tilde{\nu_2})\Big)\tilde{\tau_1} \\
&\quad + \Big((\partial_2 v_1)\tilde{\nu_1} + v_1(\partial_2\tilde{\nu_1}) + (\partial_2 v_2)\tilde{\nu_2} + v_2(\partial_2\tilde{\nu_2})\Big)\tilde{\tau_2},
\end{aligned}$$

assim, segue de $\mathbb{V}$ que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}(v \cdot \tilde{\nu}) &= D(v)\tilde{\nu} \cdot \tilde{\tau} - \frac{1}{2}\omega(v)(\tilde{\nu_2}\tilde{\tau_1} - \tilde{\nu_1}\tilde{\tau_2}) \\
&\quad + \Big(\tilde{\tau_1}v_1(\partial_1\tilde{\nu_1}) + \tilde{\tau_1}v_2(\partial_1\tilde{\nu_2}) + \tilde{\tau_2}v_1(\partial_2\tilde{\nu_1}) + \tilde{\tau_2}v_2(\partial_2\tilde{\nu_2})\Big).
\end{aligned}$$

Se restringimos a igualdade acima a $\partial\Omega \subset \mathbb{V}$ obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}}(v \cdot \tilde{\nu}) = \frac{d}{ds}(v \cdot \tilde{\nu}),$$

assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(v\cdot\tilde{\nu}) &= D(v)\nu\cdot\tau-\frac{1}{2}\omega(v)\\ &\quad+\Big(\underbrace{\tilde{\tau_1}v_1(\partial_1\tilde{\nu_1})+\tilde{\tau_1}v_2(\partial_1\tilde{\nu_2})+\tilde{\tau_2}v_1(\partial_2\tilde{\nu_1})+\tilde{\tau_2}v_2(\partial_2\tilde{\nu_2})}_{(\bigstar)}\Big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dado que $\{\nu,\tau\}$ define uma base em $\partial\Omega$, podemos escrever

$$v=(v\cdot\nu)\nu+(v\cdot\tau)\tau.$$

Porém, como $v\cdot\nu=0$, temos que $v=(v\cdot\tau)\tau$ e assim,

$$\begin{aligned}(v_1,v_2)&=((v_1,v_2)\cdot(\tau_1,\tau_2))(\tau_1,\tau_2)\\ &=(\tau_1(v_1\tau_1+v_2\tau_2),\tau_2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)),\end{aligned}$$

e portanto temos,

$$v_1=\tau_1^2v_1+\tau_1\tau_2v_2 \quad \text{e} \quad v_2=\tau_2^2v_2+\tau_1\tau_2v_1.$$

Assim, podemos reescrever $(\bigstar)$ em $\partial\Omega$ na forma

$$\begin{aligned}(\bigstar) &= \tau_1^2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)(\partial_1\tilde{\nu_1})+\tau_1\tau_2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)(\partial_1\tilde{\nu_2})\\ &\quad+\tau_1\tau_2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)(\partial_2\tilde{\nu_1})+\tau_2^2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)(\partial_2\tilde{\nu_2})\\ &= \Big(\tau_1(\partial_1\tilde{\nu_1})+\tau_2(\partial_2\tilde{\nu_1}),\tau_1(\partial_1\tilde{\nu_2})+\tau_2(\partial_2\tilde{\nu_2})\Big)\cdot\\ &\quad\cdot\Big(\tau_1(v_1\tau_1+v_2\tau_2),\tau_2(v_1\tau_1+v_2\tau_2)\Big)\\ &= \nabla\tilde{\nu}\tau\cdot\tau(v\cdot\tau)\end{aligned}$$

logo,

$$\tilde{\tau_1}v_1(\partial_1\tilde{\nu_1})+\tilde{\tau_1}v_2(\partial_1\tilde{\nu_2})+\tilde{\tau_2}v_1(\partial_2\tilde{\nu_1})+\tilde{\tau_2}v_2(\partial_2\tilde{\nu_2}) = \nabla\tilde{\nu}\tau\cdot\tau(v\cdot\tau). \tag{2.9}$$

Substituindo a igualdade de (2.9) em (2.8) e tendo em conta que $v\cdot\nu=0$ em $\partial\Omega$, obtemos

$$0=\frac{d}{ds}(v\cdot\tilde{\nu})=D(v)\nu\cdot\tau-\frac{1}{2}\omega(v)+\nabla\tilde{\nu}\tau\cdot\tau(v\cdot\tau) \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Por hipótese temos,

$$\frac{d\tau}{ds} = -\kappa\nu,$$

e portanto $(d\nu/ds)\cdot\tau = \kappa$. Note que $\frac{d\nu}{ds} = \nabla\tilde{\nu}\tau$, e assim deduzimos que $\nabla\tilde{\nu}\tau\cdot\tau(v\cdot\tau) = \left(\frac{d\nu}{ds}\right)\cdot\tau(v\cdot\tau)$, o que resulta

$$0 \;=\; (\nu\cdot D(v))\cdot\tau - \frac{1}{2}\omega(v) + \kappa v\cdot\tau \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

para todo $v \in \{v \in \{H^2(\Omega)\}^2 : v\cdot\nu = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega\}$. ■

Lema 2.17.
Se $u, v \in \{H^2(\Omega)\}^2$ com $u\cdot\nu = v\cdot\nu = 0$ em $\partial\Omega$, então

$$(v\cdot\nabla u)\cdot\nu = -\kappa u\cdot v, \tag{2.10}$$

$$(\nu\cdot\nabla v)\cdot\tau = \omega(v) + (\tau\cdot\nabla v)\cdot\nu = \omega(v) - \kappa v\cdot\tau. \tag{2.11}$$

Demonstração.
Seja $u, v \in \{H^2(\Omega)\}^2$. Como $u\cdot\nu = v\cdot\nu = 0$ em $\partial\Omega$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \frac{\partial}{\partial\tau}(u\cdot\nu) \;&=\; \left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\cdot\nu + u\cdot\left(\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right) \\ &=\; (\tau\cdot\nabla u)\cdot\nu + \kappa u\cdot\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\tau\cdot\nabla u)\cdot\nu = -\kappa u\cdot\tau, \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Logo, da equação de acima e usando o fato de v ser paralelo a τ, obtemos

$$(v\cdot\nabla u)\cdot\nu = -\kappa u\cdot v, \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

O qual termina a prova da equação (2.10).

Para mostrar as igualdades de (2.11), vamos dividir a prova em duas partes.
Primeiramente provaremos que

$$\omega(v) + (\tau\cdot\nabla v)\cdot\nu = \omega(v) - \kappa v\cdot\tau.$$

Procedendo da mesma forma como foi feito na prova da igualdade (2.10), temos que,

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \frac{\partial}{\partial \tau}(v\cdot\nu) \;&=\; \left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)\cdot\nu + v\cdot\left(\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\right) \\ &=\; (\tau\cdot\nabla v)\cdot\nu + \kappa v\cdot\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$(\tau\cdot\nabla v)\cdot\nu = -\kappa v\cdot\tau, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{2.12}$$

Logo, somando $\omega(v)$ em ambos lados da equação acima obtemos nosso primeiro resultado.

Na segunda parte mostraremos que

$$(\nu\cdot\nabla v)\cdot\tau = \omega(v) - \kappa v\cdot\tau.$$

Do Lema 2.16 temos que,

$$2(\nu\cdot D(v))\cdot\tau = \omega(v) - 2\kappa v\cdot\tau \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 2(\nu\cdot D(v))\cdot\tau &= 2\left(\nu\cdot\frac{1}{2}[\nabla v + (\nabla v)^T]\right)\cdot\tau \\ &= [(\nu\cdot\nabla v) + \nu\cdot(\nabla v)^T]\cdot\tau \\ &= (\nu\cdot\nabla v)\cdot\tau + (\nu\cdot(\nabla v)^T)\cdot\tau. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\nu\cdot\nabla v)\cdot\tau + (\nu\cdot(\nabla v)^T)\cdot\tau = \omega(v) - 2\kappa v\cdot\tau. \tag{2.13}$$

Afirmação 2.18.
Se $v \in \{H^2(\Omega)\}^2$, então

$$(\nu\cdot(\nabla v)^T)\cdot\tau = (\tau\cdot\nabla v)\cdot\nu.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (\nu\cdot(\nabla v)^T)\cdot\tau \;&=\; \left\{\begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_1 v_2 \\ \partial_2 v_1 & \partial_2 v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\ &=\; \begin{bmatrix} \nu_1\partial_1 v_1 + \nu_2\partial_1 v_2 \\ \nu_1\partial_2 v_1 + \nu_2\partial_2 v_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \nu_i \tau_j \partial_j v_i$$

$$= \begin{bmatrix} \tau_1 \partial_1 v_1 + \tau_2 \partial_2 v_1 \\ \tau_1 \partial_1 v_2 + \tau_2 \partial_2 v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\tau \cdot \nabla v) \cdot \nu.$$

Portanto,

$$(\nu \cdot (\nabla v)^T) \cdot \tau = (\tau \cdot \nabla v) \cdot \nu.$$

■

Logo da igualdade (2.12), segue que $(\nu \cdot (\nabla v)^T) \cdot \tau = -\kappa v \cdot \tau$. Assim, de (2.13) obtemos,

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot \tau - \kappa v \cdot \tau = \omega(v) - 2\kappa v \cdot \tau.$$

Portanto,

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot \tau = \omega(v) - \kappa v \cdot \tau.$$

A prova está terminada. ■

Corolário 2.19.
Um vetor $v \in V \cap \{H^2(\Omega)\}^2$ satisfaz a condição de fronteira de tipo Navier (isto é, $v \in \mathcal{W}$) se, e somente se,

$$\omega(v) = (2\kappa - \alpha) v \cdot \tau \quad e \quad v \cdot \nu = 0 \quad em \quad \partial\Omega. \tag{2.14}$$

também para todo $v \in \mathcal{W}$ e $u \in V$,

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot u = (\kappa - \alpha) v \cdot u \quad em \quad \partial\Omega \tag{2.15}$$

Demonstração.
$[\Rightarrow]$
Seja $v \in V \cap \{H^2(\Omega)\}^2$. então do Lema 2.16 temos que,

$$2(\nu \cdot D(v)) \cdot \tau + 2\kappa(v \cdot \tau) = \omega(v). \tag{2.16}$$

Se v satisfaz as condições de fronteira de tipo Navier, então substituindo $2(\nu \cdot D(v)) \cdot \tau = -\alpha v \cdot \tau$ na equação (2.16) temos que,

$$2\kappa(v \cdot \tau) - \alpha(v \cdot \tau) = \omega(v) \quad \Longrightarrow \quad (2\kappa - \alpha)(v \cdot \tau) = \omega(v) \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega.$$

$[\Leftarrow]$
Suponha agora que

$$\omega(v) = (2\kappa - \alpha) v \cdot \tau \quad \text{e} \quad v \cdot \nu = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Substituindo $\omega(v)$ de (2.14) em (2.16) temos que

$$2(\nu \cdot D(v)) \cdot \tau + 2\kappa(v \cdot \tau) = (2\kappa - \alpha) v \cdot \tau,$$

de onde se segue,

$$2(\nu \cdot D(v)) \cdot \tau + \alpha v \cdot \tau = 0.$$

Por outra parte se $v \in \mathcal{W}$ então de (2.11) segue que

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot \tau = \omega(v) - \kappa v \cdot \tau = (2\kappa - \alpha) v \cdot \tau - \kappa v \cdot \tau = (\kappa - \alpha) v \cdot \tau,$$

então,

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot \tau = (\kappa - \alpha) v \cdot \tau.$$

Dado que u é paralelo a τ em $\partial\Omega$ obtemos,

$$(\nu \cdot \nabla v) \cdot u = (\kappa - \alpha) v \cdot u.$$

$\blacksquare$

2.3 Existência, unicidade e regularidade

Nesta seção daremos a formulação variacional da solução fraca para as equações de Navier - Stokes com condições de fronteira de tipo Navier, também os teoremas e lemas necessários para provar a existência, unicidade e regularidade da solução fraca para as equações de Navier - Stokes, com condição de fronteira de tipo Navier, assumindo apenas que a velocidade inicial está em H.

Antes de discutir o problema principal, introduzimos alguns resultados relativos a parte não linear das equações de Navier - Stokes.

Lema 2.20.
Considere $b : V \times V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ *dado por*

$$b(u,v,w) = \int_\Omega (u \cdot \nabla v) w \; dx = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \, (\partial_i v_j) \, w_j \; dx.$$

Neste caso b *é um operador trilinear, contínuo e cumpre que:*

I. $b(u,v,v) = 0, \qquad \forall u, v \in V,$

II. $b(u,v,w) = -b(u,w,v), \qquad \forall u, v, w \in V.$

Demonstração.
Sejam $u, v, w \in V$. Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| &= \left| \int_\Omega (u \cdot \nabla v) w \; dx \right| \leq \int_\Omega |(u \cdot \nabla v) w| \; dx \\ &\leq c \|u\|_{\{L^4(\Omega)\}^2} \|v\| \|w\|_{\{L^4(\Omega)\}^2}. \end{aligned}$$

Como sabemos que o Teorema das Imersões de Sobolev garante a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, existe uma constante c tal que,

$$|b(u,v,w)| \leq c \|u\| \|v\| \|w\|,$$

isto é, o operador b é limitado e portanto contínuo. É imediato verificar que b é trilinear. Agora note que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i (\partial_i v_j) v_j \; dx &= \int_\Omega u_i \partial_i \frac{(v_j)^2}{2} \; dx \\ &= -\int_\Omega \partial_i u_i \frac{(v_j)^2}{2} \; dx + \int_{\partial\Omega} u_i \frac{(v_j)^2}{2} \nu_i \; dS. \end{aligned}$$

Assim, por definição temos,

$$\begin{aligned} b(u,v,v) &= \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i \, (\partial_i v_j) v_j \; dx \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \mathrm{div} u (v_j)^2 \; dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu)(v_j)^2 \; dS. \end{aligned}$$

Como $u \in V$ segue que $b(u,v,v) = 0$ encerrando a prova de I. Para provar $II.$, note que,

$$0 = b(u, v-w, v-w) = b(u,v,v) - b(u,v,w) - b(u,w,v) + b(u,w,w),$$

pela parte $I.$, temos que $b(u,v,v) = b(u,w,w) = 0$, assim

$$0 = -b(u,v,w) - b(u,w,v),$$

portanto,

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v).$$

■

No que segue continuamos a explorar propriedades do operador trilinear definido acima.

Lema 2.21.
Para todo $u, v, w \in V$ temos que

$$|b(u,v,w)| \;\leq\; c|u|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{\{L^2(\Omega)\}^4} \|\nabla v\|_{\{L^2(\Omega)\}^4} |w|^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|^{\frac{1}{2}}_{\{L^2(\Omega)\}^4}.$$

Demonstração.
Pelo Teorema 1.31 e pela Observação 2.7, se verifica que

$$\begin{aligned} |b(u,v,w)| \;&\leq\; c\|u\|_{\{L^4(\Omega)\}^2} \|\nabla v\|_{\{L^2(\Omega)\}^4} \|w\|_{\{L^4(\Omega)\}^2} \\ &\leq\; |u|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{\{L^2(\Omega)\}^4} \|\nabla v\|_{\{L^2(\Omega)\}^4} |w|^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|^{\frac{1}{2}}_{\{L^2(\Omega)\}^4}. \end{aligned}$$

■

2.3.1 Formulação de uma solução fraca

Daremos três formulações de uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes com condição de fronteira de tipo Navier. Elas são equivalentes.

Em primeiro lugar, observe que para todo $u \in \mathcal{W}$ e $v \in V$, o Corolário 2.19 garante que

$$\int_{\Omega} \Delta u(t) \cdot v \; dx \; = \sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\partial\Omega} (\nabla u_i(t) \cdot \nu) v_i \; dS \right) - \sum_{i=1}^{2} \left(\int_{\Omega} \nabla u_i(t) \cdot \nabla v_i \; dx \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla u(t)) \cdot v \; dS - \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \; dx \\
&= \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot v \; dS - \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \; dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\int_{\Omega} \Delta u(t) \cdot v \; dx = \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot v \; dS - \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \; dx. \tag{2.17}
$$

Isto motiva a nossa primeira formulação de uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes.

Definição 2.22.
Dada a viscosidade $\mu > 0$ e velocidade inicial $u_0 \in H$, uma função u em $L^2(0, T; V)$ é dita ser uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes (sem força externa), se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \cdot v \; dx &+ \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla u(t)) \cdot v \; dx \\
&+ \mu \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \; dx - \mu \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot v \; dS = 0,
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

para todo $v \in V$. Com condição inicial

$$
u(0) = u_0. \tag{2.19}
$$

Vamos agora provar uma relação interessante que ocorre neste problema, a qual nos permitirá encontrar uma outra formulação variacional para a solução introduzida pela Definição 2.22.

Teorema 2.23.
Dados $u, v \in V$, vale a seguinte identidade:

$$
2 \int_{\Omega} D(u(t)) \cdot D(v) dx = \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \kappa u(t) \cdot v \; dS. \tag{2.20}
$$

Demonstração.
Para estabelecer esta identidade, assumamos inicialmente que u, v sejam

funções em $V \cap \{H^2(\Omega)\}^2$. Então, observe que

$$\begin{aligned} D(u) \cdot D(v) &= \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \cdot \frac{1}{2}[\nabla v + (\nabla v)^T] \\ &= \frac{1}{4}[\nabla u \cdot \nabla v + \nabla u \cdot (\nabla v)^T + (\nabla u)^T \cdot \nabla v \\ &\quad + (\nabla u)^T \cdot (\nabla v)^T]. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= tr((\nabla u)^T \nabla v) \\ &= \partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \partial_1 u_2 \partial_1 v_2 + \partial_2 u_1 \partial_2 v_1 + \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 \\ &= tr(\nabla u (\nabla v)^T) \\ &= (\nabla u)^T \cdot (\nabla v)^T. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla u(t) \cdot \nabla v = (\nabla u(t))^T \cdot (\nabla v)^T. \tag{2.21}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot (\nabla v)^T &= tr((\nabla u)^T (\nabla v)^T) \\ &= \partial_1 u_1 \partial_1 v_1 + \partial_1 u_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 u_1 \partial_1 v_2 + \partial_2 u_2 \partial_2 v_2 \\ &= tr(\nabla u \nabla v) \\ &= (\nabla u)^T \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Então,

$$\nabla u(t) \cdot (\nabla v)^T = (\nabla u(t))^T \cdot \nabla v. \tag{2.22}$$

Assim, de (2.21) e (2.22) segue,

$$2D(u(t)) \cdot D(v) = \nabla u(t) \cdot \nabla v + \nabla u(t) \cdot (\nabla v)^T.$$

Agora, integrando a equação acima sobre Ω, obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega D(u(t)) \cdot D(v) dx &= \int_\Omega [\nabla u(t) \cdot \nabla v + \nabla u(t) \cdot (\nabla v)^T] dx \\ &= \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx + \underbrace{\int_\Omega \nabla u(t) \cdot (\nabla v)^T dx}_{\text{(Int1)}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Além disso, dado que u tem divergente nulo, note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(v \cdot \nabla u) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_j \left[(\partial_i u_j) v_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} (\partial_{ji} u_j) v_i + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_i u_j \partial_j v_i \\
&= (\partial_{11} u_1) v_1 + (\partial_{21} u_2) v_1 + (\partial_{12} u_1) v_2 + (\partial_{22} u_2) v_2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_i u_j \partial_j v_i \\
&= \left[\partial_1 \left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2\right)\right] v_1 + \left[\partial_2 \left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2\right)\right] v_2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_i u_j \partial_j v_i \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_i u_j \partial_j v_i \qquad\qquad (\operatorname{div} u = 0) \\
&= \nabla u \cdot (\nabla v)^T .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div}(v \cdot \nabla u) = \nabla u \cdot (\nabla v)^T . \tag{2.24}$$

Assim, resolvendo (Int.1), tendo em conta as equações (2.10) e (2.24), e ainda aplicando o Teorema de Green, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u(t) \cdot (\nabla v)^T \, dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(v \cdot \nabla u(t)) \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} (v \cdot \nabla u(t)) \cdot \nu \, dS = -\int_{\partial\Omega} \kappa u(t) \cdot v \, dS.
\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade acima na equação (2.23), obtemos a identidade (2.20).

Finalmente, usando a densidade de $V \cap \{H^2(\Omega)\}^2$ em V e a continuidade do operador traço dado pelo Teorema 1.48, conseguimos que os resultados sejam validos para todos os elementos de V. ■

Do teorema acima, temos uma segunda formulação de uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes, a qual é similar à do Teorema

2.3 de [5, pág. 1628].

Definição 2.24.
Dada a viscosidade $\mu > 0$ e velocidade inicial $u_0 \in H$, uma função u em $L^2(0, T; V)$ é dita ser uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes (sem força externa), se

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\cdot v\, dx + \int_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t))\cdot v\, dx \\ + 2\mu\int_\Omega D(u(t))\cdot D(v)dx + \mu\int_{\partial\Omega}\alpha u(t)\cdot v\, dS = 0,$$

para todo $v \in V$. Com condição inicial

$$u(0) = u_0.$$

Embora tenhamos duas formulações variacionais fracas para o problema, vamos nos focar neste momento em reformular (2.18) e (2.19) de uma forma distribucional. Para isso, definimos primeiramente o operadore A dado por,

$$\langle Au, v\rangle_{V,V'} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u\cdot v\, dS,$$

para todo $u, v \in V$.

Aplicando a desigualdade da Observação 2.8, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz[2] temos que,

$$\begin{aligned} |\langle Au, v\rangle_{V,V'}| &= \left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u\cdot v\, dS\right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u\cdot\nabla v|\ dx + \int_{\partial\Omega}|(\kappa-\alpha)u\cdot v|\ dS \\ &\leq \|u\|\|v\| \ + \ C\|u\|_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2}\|v\|_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2} \\ &\leq C\|u\|\|v\|. \end{aligned}$$

[2]A desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, também conhecida como desigualdade de Schwarz, desigualdade de Cauchy ou desigualdade de Cauchy-Schwarz, é uma desigualdade frequentemente encontrada na literatura matemática (veja Por exemplo [2, pág. 131]).

Logo,
$$|\langle Au, v\rangle_{V,V'}| \ \le \ C\|u\|\|v\|.$$
Assim, $A : L^2(0,T;V) \longrightarrow L^2(0,T;V')$.
Agora para $u,\ v \in V$, definimos o operador bilinear $B : V \times V \longrightarrow V'$ definido por
$$\langle B(u,v), w\rangle_{V,V'} = b(u,v,w) \qquad \forall w \in V,$$
e ainda denotamos por
$$Bu = B(u,u) \in V' \qquad \forall u \in V.$$

Lema 2.25.
Assuma que a dimensão do espaço é $n \le 4$ e que $u \in L^2(0,T;V)$ então Bu dado por
$$\langle Bu(t), v\rangle_{V,V'} \ = \ b(u(t),u(t),v) \quad \forall v \in V \quad q.s. \ \ em \ \ t \in [0,T],$$
pertence a $L^1(0,T;V')$.

Demonstração.
Note que,
$$|\langle Bu(t), v\rangle_{V,V'}| = |b(u(t),u(t),v)| \le C\|u(t)\|^2\|v\| \qquad \forall t \in [0,T].$$
Integrando de 0 até T em ambos lados da desigualdade acima obtemos,
$$\int_0^T |\langle Bu(t), v\rangle_{V,V'}| \ dt \ \le \ C\|u(t)\|^2_{L^2(0,T;V)}\|v\|_{L^2(0,T;V)}.$$
Tomando o supremo em ambos os lados com relação aos $v \in V$ que satisfazem $\|v\| \le 1$, e como $u \in L^2(0T;V)$ segue que $\|u(t)\|_{L^2(0,T;V)} < \infty$, logo $Bu \in L^1(0,T;V')$.
Portanto $B : L^2(0,T;V) \longrightarrow L^1(0,T;V')$. ■

Com isso, se u é uma solução fraca das equações de Navier - Stokes (como na definição 2.22), concluímos que $-\mu Au - Bu \in L^1(0,T;V')$ e, usando o item III. do Teorema 1.43 temos que
$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle = \langle -\mu Au - Bu, v\rangle_{V,V'},$$

para todo $v \in V$. Logo obtemos que $u' \in L^1(0,T;V')$ pois $u' = -\mu Au - Bu$. Do Teorema 1.44 segue que $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$. Isto nos permite dar sentido na condição inicial $u(0) = u_0$ e também nos auxilia a introduzir a seguinte formulação de solução distribucional.

Definição 2.26.
Dada a viscosidade $\mu > 0$ e a velocidade inicial u_0 em H, $u \in L^2(0,T;V)$ é uma solução fraca para as equações de Navier - Stokes (sem força externa), se

$$\begin{cases} u' \in L^1(0,T;V'), \\ u' + \mu Au + Bu = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Antes de enunciar o Teorema de existência de soluções fracas para as equações Navier - Stokes daremos um ultimo resultado que será de grande importância para sua demonstração

Lema 2.27.
Se $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, então $Bu \in L^2(0,T;V')$ e além disso

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;V')} \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Demonstração.
Do Lema 2.21, temos que

$$|b(u,u,v)| \leq C |u| \|u\| \|v\|, \qquad \forall u, v \in V,$$

assim,

$$\|Bu\|_{V'} \leq C |u| \|u\| \qquad \forall u \in V \tag{2.26}$$

Agora, se $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, então $Bu(t) \in V'$ q.s. para t em $[0,T]$, logo elevando ao quadrado em ambos os lados de (2.26) e integrando de 0 até T temos que,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|Bu(t)\|_{V'}^2 \, dt \ &\leq \ C \int_0^T |u(t)|^2 \|u(t)\|^2 \, dt \\ &\leq \ C \|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \|u\|_{L^2(0,T;V)}^2, \end{aligned}$$

assim obtemos,

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;V')} \leq C \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Portanto, $Bu \in L^2(0,T;V')$ ■

Por fim abordamos o teorema de existência de soluções fracas para Navier - Stokes.

Teorema 2.28 (Existência).
Suponha que $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^2$ e $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$. Seja $u_0 \in H$ e seja $T > 0$. Então existe uma solução fraca u para as equações de Navier - Stokes com condição de fronteira de Navier que satisfaz as equações (2.18) - (2.19). *Podemos também concluir que u satisfaz* (2.25). *Além disso, $u \in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$, e satisfaz a desigualdade de energia*

$$|u(t)| \leq e^{C(\alpha)\mu t}|u_0|, \tag{2.27}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração.
Este Teorema é demonstrado através de uma adaptação da prova de existência do Teorema com condição de fronteira clássico apresentado em [14]. Vamos dividir sua demonstração em alguns passos principais.

▷ **Passo 1** Construção da solução aproximada através do método de Faedo - Galerkin.

Pelo Corolário 2.15, existe uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots\} \subset \mathcal{W}$ para o espaço V que ainda é uma base ortonormal para o espaço H. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$, tentamos encontrar uma solução aproximada u_m de (2.18) - (2.19), que tenha as seguintes características:

$$u_m(t) \in V_m = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}, \qquad u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)v_j, \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_m(t)\cdot v_r dx + \int_\Omega (u_m(t)\cdot\nabla u_m(t))\cdot v_r dx + \mu\int_\Omega \nabla u_m(t)\cdot\nabla v_r dx\\ - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u_m(t)\cdot v_r\, dS = 0, \qquad r = 1,\ldots,m.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Acima as funções g_{jm}, para $1 \leq j \leq m$, são funções escalares.

Considere agora a seguinte projeção ortogonal em H sobre o espaço V_m:

$$\begin{aligned} P_m : H &\longmapsto V_m \\ u &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} (u, v_j) v_j. \end{aligned}$$

Neste caso, definimos

$$u_m(0) = P_m(u_0) = \sum_{j=1}^{m} (u_0, v_j) v_j = u_{0m}. \tag{2.30}$$

Com isso (2.29) e (2.30) formam um sistema de equações diferenciais não lineares com condições iniciais, exatamente como abaixo

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) \int_\Omega v_j v_r \; dx + \sum_{j,i=1}^{m} g_{jm}(t) g_{im}(t) \int_\Omega (v_j \cdot \nabla v_i) \cdot v_r \; dx \\ + \mu \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) \int_\Omega \nabla v_j \cdot \nabla v_r \; dx - \mu \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) v_r \cdot v_r \; dS = 0, \\ g_{rm}(0) = (u_0, v_r), \\ r = 1, \ldots, m. \end{gathered}$$

Observamos que a equação acima descreve um sistema de EDO's dado por,

$$X'(t) + A\tilde{X}(t) + \mu B X(t) - \mu C X(t) = 0, \tag{2.31}$$

e com condição inicial

$$X(0) = \begin{pmatrix} (u_0, v_1) \\ \vdots \\ (u_0, v_m) \end{pmatrix}.$$

Acima $X(t)$ é o vetor com entradas $g_{jm}(t)$, $X'(t)$ o vetor com entradas $g'_{jm}(t)$, $\tilde{X}(t)$ tendo como entradas os produtos entre $g_{jm}(t)$ e $g_{im}(t)$. Também A, B e C são matrizes dependendo dos v_r.

Assim, podemos escrever o sistema de equações diferenciais (2.31) na seguinte forma

$$\begin{cases} X'(t) = f(X,t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

com $f(X,t) = \mu(C-B)X(t) - A\tilde{X}(t)$.

Aplicando o Teorema de Picard e o Teorema da continuação da solução, obtemos a existência e unicidade de solução maximal $X(t)$ em $\mathcal{C}^1([0,T_m];V_m)$, para algum intervalo de tempo $[0,T_m] \subset [0,T]$.

Portanto, de (2.28) deduzimos que

$$u_m \in \mathcal{C}^1([0,T_m];\mathcal{W}), \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$\triangleright$ **Passo 2** Estimativas a Priori.

Neste passo vamos fazer estimativas a priori para u_m e u_m'. Note que multiplicando a equação (2.29) por $g_{jm}(t)$ e somando as demais equações de $j = 1, \ldots, m$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_m'(t)u_m(t)\ dx + \int_\Omega (u_m(t)\cdot\nabla u_m(t))\cdot u_m(t)\ dx \\ &+\ \mu\int_\Omega \nabla u_m(t)\cdot\nabla u_m(t)\ dx - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u_m(t)\cdot u_m(t)\ dS = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Pelo Lema 2.20 se cumpre que,

$$\int_\Omega (u_m(t)\cdot\nabla u_m(t))\cdot u_m(t)\ dx = b(u_m,u_m,u_m) = 0,$$

e dado que $u_m \in \mathcal{C}^1([0,t_m);\mathcal{W})$ temos que,

$$2\int_\Omega u_m'(t)u_m(t)\ dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^2\ dx.$$

Assim, (2.32) fica na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^2\ dx + \mu\int_\Omega \nabla u_m(t)\cdot\nabla u_m(t)\ dx& \\ - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u_m(t)\cdot u_m(t)\ dS = 0.& \end{aligned} \tag{2.33}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (\kappa-\alpha)u_m(t)\cdot u_m(t)\ dS &= \int_{\partial\Omega} (\kappa-\alpha)\left|u_m(t)\right|^2\ dS \\
&\leq C_0 \int_{\partial\Omega} \left|u_m(t)\right|^2\ dS \\
&= C_0\|u_m(t)\|^2_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2},
\end{aligned}$$

com $C_0 = \sup_{\partial\Omega}|\kappa-\alpha|$. Logo (2.33) fica na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \mu\int_\Omega \left|\nabla u_m(t)\right|^2\ dx \leq C_0\mu\|u_m(t)\|^2_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2}. \tag{2.34}$$

Podemos majorar a equação (2.34), usando a desigualdade da observação 2.8, isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \mu\|u_m(t)\|^2 \leq\ \mu C(\Omega)|u_m(t)|\ \|u_m(t)\|,$$

que através da desigualdade de Young se reduz em

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \frac{\mu}{2}\|u_m(t)\|^2 \leq\ \mu\tilde{C}|u_m(t)|^2, \tag{2.35}$$

com $\tilde{C}$ sendo uma constante que depende apenas de Ω. Considerando $t\in(0,T_m)$ e integrando a equação (2.35) de 0 até t, obtemos

$$|u_m(t)|^2 + \mu\int_0^t \|u_m(s)\|^2\ ds\ \leq\ |u_m(0)|^2 + \mu\tilde{C}\int_0^t |u_m(s)|^2\ ds. \tag{2.36}$$

De (2.36) segue que,

$$|u_m(t)|^2\ \leq\ |u_0|^2 + \mu\tilde{C}\int_0^t |u_m(s)|^2\ ds,$$

e portanto aplicando o Lema de Gronwall obtemos

$$|u_m(t)|^2\ \leq\ e^{\mu\tilde{C}t}|u_0|^2.$$

Se tomarmos s arbitrário, com $0<s<t<T_m$, conseguímos da mesma

forma a relação

$$|u_m(s)|^2 \;\leq\; e^{\mu\tilde{C}t}|u_0|^2. \tag{2.37}$$

Consequentemente, ao tomar o supremo com relação a $s \in [0,t]$ em ambos lados da equação (2.37) temos,

$$\|u_m\|^2_{L^\infty(0,t;H)} \;\leq\; e^{\mu\tilde{C}T}|u_0|^2. \tag{2.38}$$

Da teoria de EDO's, se $T_m < T$ então $\lim_{s\to T_m}|g_{jm}(s)| = \infty$, para todo $j \in \{1,\ldots,m\}$, e portanto

$$\lim_{t\to T_m}\|u_m\|^2_{L^\infty(0,t;H)} = \infty.$$

Mas como por (2.38) $\|u_m\|^2_{L^\infty(0,t;H)} < \infty$, para todos os $t \in [0,T_m]$, temos também que $\lim_{t\to T_m}\|u_m\|^2_{L^\infty(0,t;H)} < \infty$ o que nos garante que $T_m = T$ e que

$$\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \;\leq\; e^{\mu\tilde{C}T}|u_0|^2. \tag{2.39}$$

Já sabemos que $u_m(t)$ está definido em $[0,T]$, assim podemos considerar $t = T$ em (2.36) para obter

$$\mu\int_0^T \|u_m(t)\|^2\, dt \;\leq\; \frac{1}{2}|u_0|^2 + C\mu T\|u_m\|^2_{L^\infty(0,T;H)}.$$

Logo aplicando (2.39) temos que,

$$\mu\int_0^T \|u_m(t)\|^2\, dt \;\leq\; \frac{1}{2}|u_0|^2 + C\mu T e^{\mu\tilde{C}T}|u_0|^2.$$

O que resulta,

$$\sqrt{\mu}\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \;\leq\; \tilde{K}(\Omega,T,\mu)|u_0|. \tag{2.40}$$

Como $L^2(0,T;V)$ é um espaço de Banach reflexivo, e como a desigualdade (2.40) garante que a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;V)$, o Teorema 1.7 garante que existe $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função $u \in L^2(0,T;V)$ tal que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u, \text{ quando } k \longrightarrow \infty,$$

em $L^2(0,T;V)$. Por (2.39) notemos que $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está contido num subconjunto limitado de $L^\infty(0,T;H)$ e portanto o Teorema 1.8 garante que existe $(u_{m_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $\tilde{u} \in L^\infty(0,T;H)$ tal que

$$u_{m_{k_l}} \overset{\star}{\rightharpoonup} \tilde{u}, \text{ quando } l \longrightarrow \infty,$$

em $L^\infty(0,T;H)$.

Afirmação 2.29.
$u = \tilde{u}$ q.s. em Ω.

Demonstração.
Basta observar que se $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, vale que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (u-\tilde{u})\phi\, dx\right| &= \left|\int_\Omega (u-u_{m_{k_l}}+u_{m_{k_l}}-\tilde{u})\phi\, dx\right| \\ &\leq \left|\int_\Omega (u-u_{m_{k_l}})\phi\, dx\right| + \left|\int_\Omega (u_{m_{k_l}}-\tilde{u})\phi\, dx\right|. \end{aligned}$$

Assim, quando $l \longrightarrow \infty$ temos que,

$$\left|\int_\Omega (u-\tilde{u})\phi\, dx\right| = 0, \qquad\qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

o que conclui a afirmação feita anteriormente. ∎

Para simplificar a notação, vamos considerar que existe uma subsequência $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que,

$$\begin{cases} u_{m_k} \rightharpoonup u, & \text{(convergência fraca) em } L^2(0,T;V), \\ \\ u_{m_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} u, & \text{(convergência fraca estrela) em } L^\infty(0,T;H). \end{cases}$$

▷ **Passo 3** Passagem ao Limite.

De (2.25) da definição 2.26 temos que $u' = -\mu Au - Bu$. Então por definição temos que $Au \in L^2(0,T;V')$ logo $-\mu Au \in L^2(0,T;V')$ e aplicando o Lema 2.27 segue que $u' \in L^2(0,T,V')$. Assim, pelo Teorema de Aubin-Lions,

$$\mathcal{H} = \{u \ : u \in L^2(0,T;V), u' = du/dt \in L^2(0,T;V')\} \hookrightarrow L^2(0,T;H)\}$$

é imersão compacta e como $(u_{m_{k_l}}(t))_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$, existirá uma subsequência $(u_l(t))_{l\in\mathbb{N}} \subset (u_{m_{k_l}}(t))_{l\in\mathbb{N}}$ que converge forte em $L^2(0,T;H)$. Note que para essa nova subsequência, quando $l \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\begin{cases} u_l \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V); \\ u_l \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H); \\ u_l \to u \text{ em } L^2(0,T;H); \end{cases} \tag{2.41}$$

Para finalizar a prova de existência da solução fraca para as equações definidas em (2.22) e (2.26), precisaremos agora das propriedades da convergência fraca e fraca estrela de $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Consideremos uma função $\xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ tal que $\xi(T) = 0$. Multiplicando a equação (2.29) por $\xi(t)$ e integrando com relação a t, temos que,

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^T \int_\Omega u_l'(t) v_r \xi(t)\, dx\ dt}_{(In_1)} + \int_0^T \int_\Omega (u_l(t)\cdot\nabla u_l(t))\cdot \xi(t) v_r\ dxdt \\ &+ \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla u_l(t)\cdot\nabla\xi(t) v_r\ dxdt \\ &- \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa-\alpha) u_l(t)\cdot\xi(t) v_r\ dSdt = 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Integrando por partes a primeira integral (In_1) da equação (2.42), com relação a t, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega u_l'(t) v_r \xi(t)\, dx\ dt = -\int_0^T \int_\Omega u_l(t) v_r \xi'(t)\, dx\ dt - \int_\Omega u_l(0) v_r \xi(0)\, dx,$$

e assim, a equação (2.42) fica na forma

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_\Omega u_l(t) v_r \xi'(t)\, dx\ dt + \int_0^T \int_\Omega (u_l(t)\cdot\nabla u_l(t))\cdot\xi(t) v_r\ dxdt \\ &+\ \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla u_l(t)\cdot\nabla\xi(t) v_r\ dxdt \\ &- \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa-\alpha) u_l(t)\cdot\xi(t) v_r\ dSdt\ =\ \int_\Omega u_l(0) v_r \xi(0)\, dx. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Pelas definições de convergência fraca, convergência fraca estrela e pelo Teorema do traço, pelas constatações feitas em (2.41) e dado que $v_r \in \mathcal{W}$ e $\xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$, para $r \in \mathbb{N}$, observamos que,

I.
$$-\int_0^T (u_l(t), \xi'(t)v_r)\ dt \underset{l \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} -\int_0^T (u(t), \xi'(t)v_r)\ dt;$$

II.
$$\mu \int_0^T ((u_l(t), \xi(t)v_r))dt \underset{l \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mu \int_0^T ((u(t), \xi(t)v_r))dt;$$

III.
$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha)u_l(t) \cdot \xi(t)v_r dS dt$$
$$\underset{l \to \infty}{\to} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha)u(t) \cdot \xi(t)v_r dS dt;$$

IV.
$$(u_l(0), v_r)\xi(0) \underset{l \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} (u_0, v_r)\xi(0).$$

Somente falta mostrar a convergência da parte da equação dada pelo operador trilinear b. Para isso note que o Teorema das Imersões de Sobolev garante que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e assim segue que $v_r \in L^\infty(\Omega)$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T b(u_l(t), u_l(t), \xi(t)v_r)\ dt - \int_0^T b(u(t), u(t), \xi(t)v_r)\ dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T \left[b(u_l(t), u_l(t), \xi(t)v_r) - b(u_l(t), u(t), \xi(t)v_r) \right] dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^T \left[b(u_l(t), u(t), \xi(t)v_r) - b(u(t), u(t), \xi(t)v_r) \right] dt \right|,
\end{aligned}$$

e assim, segue que,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T b(u_l(t), u_l(t), \xi(t)v_r)\ dt - \int_0^T b(u(t), u(t), \xi(t)v_r)\ dt \right| \\
&\qquad \leq c_1 \|u_l\|_{L^\infty(0,T;H)} \|\xi(t)v_r\|_{L^2(0,T;H)} \|u_l - u\|_{L^2(0,T;H)}
\end{aligned}$$

$$+ \ c_2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \|\xi(t) v_r\|_{L^2(0,T;H)} \|u_l - u\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Como $u \in L^\infty(0,T;H)$, $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H)$ e converge fortemente em $L^2(0,T;H)$, temos

$$\int_0^T \int_\Omega (u_l(t) \cdot \nabla u_l(t)) \cdot \xi(t) v_r \, dxdt \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t)) \cdot \xi(t) v_r \, dxdt.$$

Assim fazendo $l \longmapsto \infty$ em (2.43) temos que para todo $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_\Omega u(t) v_r \xi'(t)\, dx \ dt + \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t)) \cdot \xi(t) v_r \, dxdt \\ &+ \ \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla \xi(t) v_r \, dxdt \\ &- \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot \xi(t) v_r \, dSdt \ = \ \int_\Omega u_0 v_r \xi(0)\, dx. \end{aligned}$$

Como os $\{v_1, \ldots, v_r, \ldots\}$ forma uma base para V, concluímos que para todo $v \in V$, obtemos

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_\Omega u(t) v \xi'(t)\, dx \ dt + \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t)) \cdot \xi(t) v \, dxdt \\ &+ \ \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla \xi(t) v \, dxdt \\ &- \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot \xi(t) v \, dSdt \ = \ \int_\Omega u_0 v \xi(0)\, dx. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Se em particular $\xi \in \mathscr{D}(0,T)$ então $\xi(0) = 0$ e portanto concluímos que as definições 2.22 e 2.26 são válidas no sentido das distribuições.

Por outro lado, se multiplicarmos a equação da definição 2.22 por uma função $\xi \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ com $\xi(T) = 0$, $\xi(0) \neq 0$ e integrando com respeito a variável t obtemos,

$$\underbrace{\int_0^T \int_\Omega u'(t) v \, dx \, \xi(t) \ dt}_{(In_1)} + \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla u(t)) \cdot \xi(t) v \, dxdt$$

$$+\mu\int_0^T\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla\xi(t)v\ dxdt-\mu\int_0^T\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot\xi(t)v\ dSdt=0.$$

Aplicando integração por partes a integral (In_1) temos que,

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_\Omega u'(t)v\,dx\,\xi(t)\ dt+\int_0^T\int_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t))\cdot\xi(t)v\ dxdt\\&+\mu\int_0^T\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla\xi(t)v\ dxdt\ -\mu\int_0^T\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot\xi(t)v\ dSdt\\&=\int_\Omega u(0)v\xi(0)\,dx.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Comparando as equações (2.44) e (2.45) se logra deduzir a condição inicial $u(0)=u_0$.

Portanto finalizamos a prova da Existência da solução fraca para a equação de Navier - Stokes com as condições de fronteira de tipo Navier.

$\triangleright$ **Passo 4:** Desigualdade da Energia.

Suponha agora que $u\in L^2(0,T;V)\cap\mathcal{C}([0,T];H)$ e $u'\in L^2(0,T;V')$ é uma solução para as equações de Navier - Stokes com condições de fronteira de tipo Navier. Então pelo Lema 2.20 temos

$$\int_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t))\cdot u(t)\ dx=b(u,u,u)=0,$$

dado que $u\in\mathcal{C}^1([0,T];H)$ temos que,

$$2\int_\Omega u'(t)u(t)\ dx=\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^2\ dx,$$

e assim, tomando $v=u(t)$ na formulação fraca dada na Definição 2.22, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u(t)|^2\ dx+\mu\int_{\Omega}\nabla u(t)\cdot\nabla u(t)\ dx\\ -\mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot u(t)\ dS=0.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot u(t)\ dS &= \int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)\,|u(t)|^2\ dS\\ &\leq C_0\int_{\partial\Omega}|u(t)|^2\ dS\\ &= C_0\|u(t)\|^2_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2},\end{aligned}$$

com $C_0=\underset{\partial\Omega}{sup}|\kappa-\alpha|$. Logo, o lado direito de (2.46) se majora por

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\mu\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2\ dx\ \leq\ C_0\mu\|u(t)\|^2_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2}.\tag{2.47}$$

Podemos majorar a equação (2.47), usando a desigualdade da observação 2.8 e a desigualdade de Cauchy, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\mu\|u(t)\|^2\leq\ C\mu|u(t)|\|u(t)\|\leq\ \frac{C^2\mu}{2}|u(t)|^2+\frac{\mu}{2}\|u\|^2,$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\mu\|u(t)\|^2\leq\ C^2\mu|u(t)|^2,\tag{2.48}$$

com C denotando varias constantes positivas que dependem somente de Ω.

Considere $0<t<T$ e integrando a equação (2.48) de 0 até t, temos

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2+\mu\int_0^t\|u(s)\|^2\ ds\ \leq\ \frac{1}{2}|u(0)|^2+C^2\mu\int_0^t|u(s)|^2\ ds.\tag{2.49}$$

Então da equação (2.49), aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$|u(t)|\ \leq\ e^{C^2\mu t}|u_0|,$$

para todo $t\in[0,T]$. ■

Teorema 2.30 (Unicidade).
Com as hipóteses do Teorema da Existência, concluímos que a solução das equações (2.18)-(2.19) *da definição (2.7) é única.*

Demonstração.
Suponha que u_1 e u_2 são duas soluções diferentes de (2.18), e seja $u = u_1 - u_2$ é claro que u pertence aos mesmos espaços que u_1 e u_2 e além disso, u satisfaz

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\cdot v\ dx + \int_\Omega (u_1(t)\cdot\nabla u_1(t))\cdot v\ dx - \int_\Omega (u_2(t)\cdot\nabla u_2(t))\cdot v\ dx$$
$$+\mu\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla v\ dx - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot v\ dS = 0 \quad \forall v\in V.$$

Como para todo $t\in[0,T]$, $u(t)\in V$, escolhendo $v = u(t)$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega u'(t)\cdot u(t)\ dx &+ \int_\Omega (u_1(t)\cdot\nabla u_1(t))\cdot u(t)\ dx\\ - &\int_\Omega (u_2(t)\cdot\nabla u_2(t))\cdot u(t)\ dx + \mu\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\ dx\\ - &\ \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)\,|u(t)|^2\ dS = 0.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.44, pela Observação 2.8 e pela desigualdade de Cauchy (essa justificativa já foi usada várias vezes anteriormente), aplicados na equação acima, deduzimos a desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{\mu}{2}\|u(t)\|^2 \leq C\mu|u(t)|^2 + \ & b(u_2(t),u_2(t),u(t))\\ & - b(u_1(t),u_1(t),u(t))\end{aligned}$$

que através do Lema 2.20, se reescreve como

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \mu\|u(t)\|^2 \leq 2C\mu|u(t)|^2 - b(u(t),u_2(t),u(t)). \tag{2.50}$$

Pelo Lema 2.21 obtemos,

$$|b(u(t),u_2(t),u(t))| \leq C|u(t)|\|\nabla u(t)\|_{\{L^2(\Omega)\}^4}\|\nabla u_2(t)\|_{\{L^2(\Omega)\}^4}.$$

Substituindo a desigualdade acima na equação (2.50), obtemos

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \mu\|u(t)\|^2 \leq 2C\mu|u(t)|^2 + C|u(t)|\|u(t)\|\|u_2(t)\|,$$

que através da desigualdade de Cauchy com ϵ se reescreve como

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \mu\|u(t)\|^2 \leq 2C\mu|u(t)|^2 + \frac{C^2}{4(\mu/2)}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2 + \frac{\mu}{2}\|u(t)\|^2,$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{\mu}{2}\|u(t)\|^2 \leq \underbrace{\left(2C\mu + \frac{C^2}{2\mu}\|u_2(t)\|^2\right)}_{\Gamma(t)}|u(t)|^2.$$

Como $u(t) \in L^2(0,T;V)$, $u'(t) \in L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;V')$, a observação 1.45 garante que $|u(t)|^2$ é absolutamente continua. Além disso temos que, $u_2(t) \in L^2(0,T;V)$, a função $\Gamma(t)$ é integrável e

$$u(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0,$$

portanto a desigualdade de Gronwall garante que

$$\|u(t)\|^2_{\{L^2(\Omega)\}^2} \leq 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

o que implica que $u_1 = u_2$. ■

Se assumimos mais regularidade na velocidade inicial, essa regularidade será mantida para todo o tempo. Isto será de grande importância para estabelecer o limite invíscido ligado a essas equações, o qual abordaremos no próximo capítulo.

Porém, para um estudo completo deste resultado seria necessário um estudo das equações de vorticidade associadas as equações de Navier - Stokes, além de resultados e estimativas relacionados ao operador de Fokker - Planck $\frac{\partial}{\partial t} - \mu\Delta + u \cdot \nabla$ que não foi nosso objetivo com esta dissertação. Sendo assim, apenas enunciamos os seguintes resultados e tomamos como referência para suas demonstrações [9][pág. 219-221].

Teorema 2.31 (**Regularidade**).
Assuma que $\partial\Omega$ *é* $\mathcal{C}^{2,1/2+\epsilon}$ *e que* $\alpha \in H^{1/2+\epsilon}(\partial\Omega) + \mathcal{C}^{1/2+\epsilon}(\partial\Omega)$ *para algum* $\epsilon > 0$. *Seja* $u_0 \in \mathcal{W}$ *com vorticidade inicial* ω_0, *e seja* u *a única solução para as equações* (2.18) - (2.19) *da Definição 2.22 ou a equação* (2.25) *da Definição 2.26, com vorticidade correspondente* ω. *Seja* $T > 0$. *Então,*

$$u' \in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H).$$

Se além disso, ω_0 *está em* $L^\infty(\Omega)$, *então*

$$u \in \mathcal{C}([0,T];H^2(\Omega)) \ , \ \omega \in \mathcal{C}([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times [0,T]).$$

Vale salientar que o resultado abaixo foi construído a partir de uma pequena modificação, feita por Kelliher, da Proposição 1 de [16].

Teorema 2.32.
Assuma que $\partial\Omega$ *e* α *satisfaçam as mesmas hipóteses que o Teorema 2.31. Seja* $q \in (2,\infty]$, *e assuma* $u_0 \in V$ *com condição inicial de vorticidade* $\omega_0 \in L^p(\Omega)$ *para algum* $p \in [q,\infty]$. *Seja* $T > 0$. *Então existe uma única solução para as equações* (2.18) - (2.19) *da definição 2.22 ou a equação* (2.25) *da definição 2.26 com vorticidade correspondente* ω, *e para todo* $p \in [q,\infty]$,

$$\|\omega(t)\|_{L^p(\Omega)} \ \leq \ \|\omega_0\|_{L^p(\Omega)} + C_0 \quad q.s. \ \ em \quad [0,T]. \tag{2.51}$$

A constante C_0 *que é independente* p, *é dada por,*

$$C_0 = C(T,\alpha,\kappa,q)e^{C(\alpha)\mu T} max\{|\Omega|^{\frac{1}{2}}, 1\}(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega_0\|_{L^q(\Omega)}).$$

Além disso $u \in L^\infty(0,T;\mathcal{C}(\overline{\Omega})) \cap L^\infty(0,T;V)$, *a norma de* u *neste espaço é limitado sobre qualquer intervalo de viscosidade* μ *e ainda*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C(T,\alpha,\kappa)e^{C(\alpha)\nu T}. \tag{2.52}$$

Capítulo 3

O Limite Invíscido

Neste capítulo final vamos considerar a solução única das equações de Euler e estudaremos sua relação com o limite de quando fazemos a viscosidade tender a zero na solução única das equações Navier - Stokes que estudamos no capítulo anterior.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. As equações de Euler que descrevem o comportamento dos fluidos incompressíveis são dadas por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p = f \qquad \text{em} \qquad \Omega \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$\text{div } u = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega \times (0,T), \tag{3.2}$$

$$u \cdot \nu = 0 \qquad \text{em} \qquad \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.3}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \qquad \text{em} \qquad \Omega, \tag{3.4}$$

com u descrevendo a velocidade do fluido, u_0 uma função vetorial de valores iniciais para o problema tal que div $u_0 = 0$, p descreve a pressão e f é uma força externa dada.

Uniremos a taxa de convergência em $L^\infty(0,T;H)$ das soluções para as equações de Navier - Stokes a solução única para as equações de Euler para a classe de vorticidades de Yudovich. Para descrever a vorticidade de Yudovich, precisamos introduzir algumas noções novas.

Definição 3.1.
Seja $\theta : [p_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$, para algum $p_0 > 1$. Dizemos que θ é admissível se

ao definirmos a função $\beta_M : (0,\infty) \longmapsto [0,\infty)$, para algum $M > 0$, por

$$\beta_M(x) := x \inf \Big\{ (M^\epsilon x^{-\epsilon}/\epsilon)\theta(1/\epsilon) \ : \ \epsilon \in (0, 1/p_0] \Big\}, \tag{3.5}$$

tivermos que,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\beta_M(x)} = \infty. \tag{3.6}$$

A Definição 3.1 pode ser mal interpretada; de fato, se (3.6) não dependesse da escolha de $M > 0$, então a definição estaria bem posta e poderíamos escrever apenas $\beta(t)$ para denotá-la. Para assegurar esse fato, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2. *Dados $\theta : [p_0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$, para algum $p_0 > 1$, e os valores $M_1, M_2 > 0$, com as respectivas funções β_{M_1}, β_{M_2} dadas como na Definição 3.1. Então, se*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\beta_{M_1}(x)} = \infty,$$

concluímos também que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\beta_{M_2}(x)} = \infty.$$

Demonstração. Vamos dividir esta demonstração em dois casos.

$\triangleright$ **Passo 1:** Assuma que $M_1 > M_2$.

Em primeiro lugar, observe que para qualquer valor $M > 0$ temos a identidade $\beta_M(x) = M\beta_1(x/M)$ e portanto

$$\int_0^1 \frac{dx}{\beta_{M_2}(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{M_2\beta_1(x/M_2)} =^1 \int_0^{\frac{M_1}{M_2}} \frac{dy}{M_1\beta_1(y/M_1)}$$
$$> \int_0^1 \frac{dy}{M_1\beta_1(y/M_1)} = \int_0^1 \frac{dy}{\beta_{M_1}(y)} = \infty.$$

$\triangleright$ **Passo 2:** Assuma que $M_1 < M_2$.

[1] Aqui fazemos a mudança de variável $x = (M_2/M_1)y$.

Como $\beta_M(x)$ é uma função crescente em $x \in (0, \infty)$, para qualquer que seja $M > 0$, temos que

$$\frac{x}{M_1} > \frac{x}{M_2} \Longrightarrow M_1 M_2 \beta_1 \left(\frac{x}{M_1} \right) > M_1 M_2 \beta_1 \left(\frac{x}{M_2} \right)$$
$$\Longrightarrow M_2 \beta_{M_1}(x) > M_1 \beta_{M_2}(x).$$

Porém, a desigualdade obtida acima nos garante que

$$\frac{M_1}{M_2 \beta_{M_1}(x)} < \frac{1}{\beta_{M_2}(x)},$$

e portanto

$$\infty = \frac{M_1}{M_2} \int_0^1 \frac{dx}{\beta_{M_1}(x)} < \int_0^1 \frac{dx}{\beta_{M_2}(x)},$$

como queríamos. ■

Yudovich prova em [21] que para um dominio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se as normas L^p da vorticidade inicial são limitadas por uma função admissivel, isto é se $\|\omega_0\|_{L^p} \leq \theta(p)$, para alguma função admissível θ, então existe no máximo uma solução para as equações de Euler. Por causa disso, chamamos a classe de todas essas vorticidades de **vorticidade de Yudovich**.

Definição 3.3.
Dizemos que um campo vetorial v tem vorticidade de Yudovich se

$$p \longrightarrow \|\omega(v)\|_{L^p(\Omega)}$$

é uma função admissível.

Como observado por Yudovich em [21], alguns exemplos de funções admissíveis seriam $\theta_m(x) = \log^m(x)$, com $\log^m$ significando a composição m vezes do logaritmo caso $m > 0$ e a função constante 1, caso $m = 0$.

Agora introduzimos formalmente uma definição de solução fraca variacional para as equações de Euler descritas em (3.1)-(3.4).

Definição 3.4.
Dada uma velocidade inicial u_0 em V, $\bar{u} \in L^2(0, T; V)$ é um solução fraca

para as equações de Euler se,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \bar{u}(t)\cdot v\ dx + \int_{\Omega} (\bar{u}(t)\cdot\nabla\bar{u}(t))\cdot v\ dx = 0,$$

para todo $v \in V$. Com condição inicial

$$\bar{u}(0) = u_0.$$

Observação 3.5.
Embora não façamos nenhuma conta neste momento, a dedução da formulação fraca para as equações de Euler para um fluido incompressível segue os mesmos passos da formulação fraca feita para as equações de Navier - Stokes na Seção 2.3.1 e por isso não a deduzimos aqui.

Finalmente provamos nosso último resultado que discute o limite inviscido da solução das equações de Navier - Stokes para a solução das equações de Euler quando fazemos a vorticidade $\mu \to 0^+$.

Teorema 3.6.
Fixe $T > 0$ e assuma que a fronteira $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^{2,1/2+\epsilon}$, que a função $\alpha \in H^{1/2+\epsilon}(\partial\Omega) + \mathcal{C}^{1/2+\epsilon}(\partial\Omega)$, para algum $\epsilon > 0$, e que $u_0 \in V$. Suponha ainda que $\omega_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo p em $[2,\infty)$, com $\|\omega_0\|_{L^p} \leq \theta(p)$, para alguma função admissível θ. Seja u a única solução fraca das equações (2.18) - (2.19) da definição2.22 ou a equação (2.25) da definição 2.26, para $\mu > 0$, a qual é garantida existir pelo Teorema 2.32 e seja $\bar{u}$ a única solução fraca para as equações de Euler para as quais $\omega(\bar{u})$ e $\bar{u}'$ estão em $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega))$ para todo $p \in [2,\infty)$, $\bar{u}$ e u ambos tendo velocidade inicial u_0. Então,

$$u(t) \longrightarrow \bar{u} \quad em \quad L^\infty(0,T;\{L^2(\Omega)\}^2 \cup \{L^2(\partial\Omega)\}^2) \quad quando \quad \mu \to 0^+.$$

Além disso, existe uma constante $R = C(T,\alpha,\kappa)$ de tal forma que se definimos a função $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ como sendo a função que satisfaz implicitamente a igualdade

$$\int_{R\mu}^{f(\mu)} \frac{dr}{\beta(r)} = CT,$$

onde β é definido como em (3.5)*, então*

$$\begin{aligned} \|u-\bar{u}\|_{L^\infty(0,T;H)} &\leq f(\mu)^{1/2} \quad e \\ \|u-\bar{u}\|_{L^\infty(0,T;\{L^2(\partial\Omega)\}^2)} &\leq C'(T,\alpha,\kappa)f(\mu)^{1/4}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

para todo $\mu \in (0,1]$.

Demonstração.
Se considerarmos $v \in L^2(0,T;V)$, então $v(t) \in V$ $q.s.$ em $[0,T]$, e portanto podemos estender a identidade (2.18) a qualquer $v \in L^2(0,T;V)$ na forma

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial u(t)}{\partial t} \cdot v(t)\ dx &+ \int_\Omega (u(t)\cdot\nabla u(t))\cdot v(t)\ dx \\ &+ \mu \int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla v(t)\ dx - \mu\int_{\partial\Omega} (\kappa-\alpha)u(t)\cdot v(t)\ dS = 0; \end{aligned} \tag{3.8}$$

Do mesmo jeito podemos estender a identidade da Definição 3.4 a qualquer $v \in L^2(0,T;V)$ na forma

$$\int_\Omega \frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t}\cdot v(t)\ dx + \int_\Omega (\bar{u}(t)\cdot\nabla\bar{u}(t))\cdot v(t)\ dx = 0. \tag{3.9}$$

Seja $w(t) = u(t) - \bar{u}(t)$, tomando $v(t) = w(t)$ em (3.8) e (3.9), e subtraindo essas novas equações, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial w(t)}{\partial t}\cdot w(t)\ dx \ &+ \ \int_\Omega \Big[\big(u(t)\cdot\nabla u(t)\big)\cdot w(t) - \big(\bar{u}(t)\cdot\nabla\bar{u}(t)\big)\cdot w(t)\Big]\ dx \\ &+ \ \mu\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla w(t)\ dx - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot w(t)\ dS = 0, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial w(t)}{\partial t}\cdot w(t)\ dx \ &+ \ \int_\Omega \Big[\big(u(t)\cdot\nabla u(t)\big)\cdot w(t) - \big(u(t)\cdot\nabla\bar{u}(t)\big)\cdot w(t)\Big]\ dx \\ &+ \ \int_\Omega \Big[\big(u(t)\cdot\nabla\bar{u}(t)\big)\cdot w(t) - \big(\bar{u}(t)\cdot\nabla\bar{u}(t)\big)\cdot w(t)\Big]\ dx \\ &+ \ \mu\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla w(t)\ dx - \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot w(t)\ dS = 0. \end{aligned}$$

que pela linearidade do operador $b : V \times V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ definido na Seção

2.3, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega w(t)\cdot\frac{\partial w(t)}{\partial t}\,dx+\int_\Omega \big(u(t)\cdot\nabla w(t)\big)\cdot w(t)\,dx\\ +\int_\Omega \big(w(t)\cdot\nabla\bar{u}(t)\big)\cdot w(t)\,dx \;&=\; \mu\int_{\partial\Omega}(\kappa-\alpha)u(t)\cdot w(t)\,dS \qquad (3.10)\\ -\,\mu\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla w(t)\,dx,\end{aligned}$$

$q.s.$ para todo $t\in[0,T]$.

Agora, como $\frac{\partial u(t)}{\partial t}$ e $\frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t}$ estão em $L^2(0,T;V')$, aplicando o Teorema 1.44 temos que

$$\int_\Omega w(t)\cdot\frac{\partial w(t)}{\partial t}\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w(t)|^2\,dx. \qquad (3.11)$$

Veja ainda que

$$\begin{aligned}\big(u(t)\cdot\nabla w(t)\big)\cdot w(t) \;&=\; \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} w_i(t)u_j(t)\partial_j w_i(t)\\ &=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} u_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{2} w_i^2(t)\\ &=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} u_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\,|w(t)|^2\\ &=\; \frac{1}{2}u(t)\cdot\nabla\,|w(t)|^2,\end{aligned}$$

assim,

$$\int_\Omega \big(u(t)\cdot\nabla w(t)\big)\cdot w(t)\,dx=\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)\cdot\nabla\,|w(t)|^2\,dx.$$

Mas então, pelo Teorema 1.51 obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)\cdot\nabla\,|w(t)|^2\,dx \;&=\; \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(u(t)\cdot\nu)\,|w(t)|^2\,dS\\ &\quad-\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div }u(t))\,|w(t)|^2\,dx=0\end{aligned}$$

pois, $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$ e div $u = 0$ em Ω.

Assim,

$$\int_\Omega \big(u(t) \cdot \nabla w(t)\big) \cdot w(t)\ dx = 0. \tag{3.12}$$

As identidades (3.11) e (3.12) nos permitem interpretar (3.10) como

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w(t)|^2\,dx + \int_\Omega \big(w(t) \cdot \nabla \bar{u}(t)\big) \cdot w(t)\ dx \\ &\quad = \ \mu \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot w(t)\ dS - \mu \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla w(t)\ dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$q.s.$ para todo $t \in [0, T]$.

Por fim, integrando (3.13) ao longo do tempo ficamos com

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|w(s)\|^2_{\{L^2(\Omega)\}^2}\,ds \ + \ \int_0^t\int_\Omega \big(w(t) \cdot \nabla \bar{u}(t)\big) \cdot w(t)\ dxds \\ &= \mu \int_0^t\int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(s) \cdot w(s)\ dSds - \mu \int_0^t\int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla w(s)\ dxds, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$q.s.$ para todo $t \in [0, T]$.

Como ainda, aplicando a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz temos que,

$$\begin{aligned} |w(t) \cdot (w(t) \cdot \nabla \bar{u}(t))| \ &\leq\ |w(t)|\,|w(t) \cdot \nabla \bar{u}(t)| \\ &\leq\ |w(t)|\,|w(t)|\,|\nabla \bar{u}(t)| \\ &\leq\ |w(t)|^2\,|\nabla \bar{u}(t)|, \end{aligned}$$

obtemos,

$$\int_\Omega \big|\big(w(t) \cdot \nabla \bar{u}(t)\big) \cdot w(t)\big|\ dx \ \leq\ \int_\Omega |w(t)|^2\,|\nabla \bar{u}(t)|\ dx. \tag{3.15}$$

Logo, aplicando (3.15) a equação (3.14), deduzimos a desigualdade

$$\|w(t)\|_{\{L^2(\Omega)\}^2} \ \leq\ K + 2\int_0^t\int_\Omega |w(s)|^2\,|\nabla \bar{u}(s)|\ dxds, \tag{3.16}$$

com

$$
\begin{aligned}
K &= 2\mu \int_0^t \left[\int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(s) \cdot w(s) \; dS - \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla w(s) \; dx \right] ds \\
&\leq 2\mu \int_0^t \left[\int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(s) \cdot w(s) \; dS + \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla \bar{u}(s) \; dx \right] ds.
\end{aligned}
$$

Pela Observação (2.8) e ao aplicarmos (2.52) e o seu equivalente para as soluções das equações de Euler (onde a constante não aumenta com o tempo), temos

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} (\kappa - \alpha) u(t) \cdot w(t) \; dS \right| \; &\leq \; \|\kappa - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u(t)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w(t)\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \; C \|u(t)\| \|w(t)\| \\
&\leq \; C(T, \alpha, \kappa) e^{C(\alpha)\mu T},
\end{aligned}
$$

e que

$$
\int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla w(t) \; dx \; \leq \; \|u(t)\| \; \|w(t)\| \leq C(T, \alpha, \kappa) e^{C(\alpha)\mu T}.
$$

Assim,

$$
K \; \leq \; C(T, \alpha, \kappa) e^{C(\alpha)\mu T} \mu \leq R\mu,
$$

para todo $\mu \in (0, 1]$ e para alguma constante R. Em outras palavras, podemos reinterpretamos (3.16) como

$$
\|w(t)\|_{\{L^2(\Omega)\}^2} \; \leq \; R\mu + 2 \int_0^t \int_\Omega |w(s)|^2 \, |\nabla \bar{u}(s)| \; dxds. \tag{3.17}
$$

Ainda falta limitar a integral a direita na desigualdade acima. Para isso, observe que o Teorema 2.32 garante que $\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leq C$, para todo valor $\mu \in (0, 1]$. Da mesma forma que justificamos mais acima, podemos verificar que a solução da equação de Euler também satisfaz $\|\bar{u}(t)\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leq \bar{C}$ e portanto

$$
\|w(t)\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} \leq M < \infty. \tag{3.18}
$$

Além disso, como existe uma função admissível θ para a vorticidade, da hipótese, então pelo Corolário 2.14 temos que,

$$\begin{aligned} 2\|\nabla \bar{u}(t)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C_0 p\|\omega_0\|_{L^p(\Omega)} + C_1|u_0| \\ &\leq Cp(\theta(p) + 1/p), \end{aligned}$$

assim, para todo $p \geq 2$ obtemos,

$$2\|\nabla \bar{u}(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq Cp(\theta(p) + 1/p). \tag{3.19}$$

Observação 3.7.
Este tipo de estimativa é clássica das equações de Eüler, quando estudadas em $L^p(\Omega)$, porém não dedicaremos mais tempo para discutí-las. Para mais detalhes, veja por exemplo o artigo de Yudovich [22].

Afirmação 3.8.
Como θ é admissível, a aplicação $p \longrightarrow C[\theta(p) + 1/p]$ também o é, com função associada $\bar{\beta}$.

Demonstração.
Veja o artigo de Yudovich [22]. ■

A partir deste ponto procedemos como em [10]. Seja $s \in [0, T]$, e defina

$$A = |w(s,x)|^2, \qquad B = |\nabla \bar{u}(s,x)|, \qquad L(s) = \|w(s)\|^2_{\{L^(\Omega)\}^2}.$$

Observação 3.9.
Aqui A e B tratam apenas da norma dos campos $w(s,x)$ e $\nabla \bar{u}(s,x)$ em $\mathbb{R}^n$ enquanto que $L(s)$ é a função obtida pela integração em $\{L^2(\Omega)\}^2$ da função $w(s,x)$.

Então,

$$\int_\Omega |w(s,x)|^2 |\nabla \bar{u}(s,x)|\, dx \;=\; \int_\Omega AB\, dx = \int_\Omega A^\epsilon A^{1-\epsilon} B\, dx$$

que através das estimativas (3.18) e (3.19) nos dá

$$\begin{aligned} \int_\Omega |w(s,x)|^2 |\nabla \bar{u}(s,x)|\, dx \;&\leq\; M^\epsilon \int_\Omega A^{1-\epsilon} B\, dx \\ &\leq\; M^\epsilon \|A^{1-\epsilon}\|_{L^{1/(1-\epsilon)}} \|B\|_{L^{1/\epsilon}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M^\epsilon \|A\|_{L^1}^{1-\epsilon} \|B\|_{L^{1/\epsilon}} \\
&= M^\epsilon L(s)^{1-\epsilon} \|\nabla \bar{u}(s)\|_{L^{1/\epsilon}} \\
&\leq CM^\epsilon L(s)^{1-\epsilon} \frac{1}{\epsilon}(\theta(1/\epsilon)+\epsilon).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\int_\Omega |w(s,x)|^2 |\nabla \bar{u}(s,x)| \, dx \leq CM^\epsilon L(s)^{1-\epsilon} \frac{1}{\epsilon}(\theta(1/\epsilon)+\epsilon).
$$

Dado que isso é verdade para todo $\epsilon \in [1/p_0, \infty)$, segue que,

$$
2\int_\Omega |w(s,x)|^2 |\nabla \bar{u}(s,x)| \, dx \leq C\bar{\beta}(L(s)) \leq C\beta(L(s)). \tag{3.20}
$$

Assim, de (3.17) e (3.20) temos que

$$
L(t) \leq R\mu + C\int_0^t \beta(L(r)) \, dr.
$$

Se $R=0$, o Lema 1.53 imediatamente da que $L \equiv 0$. Se $R>0$, então novamente pelo Lema 1.53 segue que,

$$
\int_{R\mu}^{L(t)} \frac{ds}{C\beta(s)} = \int_{R\mu}^{1} \frac{ds}{C\beta(s)} - \int_{L(t)}^{1} \frac{ds}{C\beta(s)} \leq \int_0^t ds = t.
$$

isto é,

$$
\int_{R\mu}^{L(t)} \frac{ds}{C\beta(s)} = \int_{R\mu}^{1} \frac{ds}{C\beta(s)} - \int_{L(t)}^{1} \frac{ds}{C\beta(s)} \leq t \tag{3.21}
$$

Daqui resulta que para todo $t \in (0,T]$,

$$
\int_{R\mu}^{1} \frac{ds}{\beta(s)} \leq CT + \int_{L(t)}^{1} \frac{ds}{\beta(s)}. \tag{3.22}
$$

Como θ é admissível (com função associada β) e tomando a viscosidade $\mu \longrightarrow 0^+$, o lado esquerdo de (3.22) se torna infinito devido a equação (3.6); Portanto, o mesmo ocorre com o lado direito. Mas isso implica que $L(t) \longrightarrow 0$ quando $\mu \longrightarrow 0^+$ e que a convergência é uniforme sobre $[0,T]$.

Por outro lado, de (3.21) Segue também que,

$$\int_{R\mu}^{L(t)} \frac{ds}{\beta(s)} \leq Ct, \tag{3.23}$$

e, como μ tende para zero, $L(t) \longrightarrow 0$ uniformemente ao longo de qualquer intervalo de tempo finito porque β é positivo. A taxa de convergência dada em $L^\infty(0,T;\{L^2(\Omega)\}^2)$ em (3.7) pode ser derivada de (3.23) justamente como em [10].
Por (2.7) e ao aplicarmos (2.52) segue que,

$$\begin{aligned} \|u-\bar{u}\|_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2} &= \|w\|_{\{L^2(\partial\Omega)\}^2} \leq C\,|\nabla w|^{\frac{1}{2}}\,|w|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(T,\alpha,\kappa)e^{C(\alpha)\mu T}L(t)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

do qual segue a taxa de convergência para

$$L^\infty(0,T;\{L^2(\Omega)\}^2) \ \text{ e } \ L^\infty(0,T;\{L^2(\partial\Omega)\}^2),$$

em (3.7). ■

A taxa de convergência em $L^\infty(0,T;\{L^2(\Omega)\}^2)$ estabelecida no Teorema 3.6 é a mesma que foi estabelecida para o plano inteiro $\mathbb{R}^2$ dado em [10], exceto pela presença da constante C e do valor da constante R, que agora aumenta com o tempo (linearmente quando α é não-negativo).

A conclusão é que $\|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ deve ser limitado por valores suficientemente pequenos de μ para que a aproximação na prova do Teorema 3.6 seja válida. Assim, usando esse aproximação, não podemos melhorar significativamente a hipóteses de que α permanecer fixado com $\mu \longrightarrow 0^+$ no limite invíscido.

Capítulo 4

Anotações Finais

Neste capítulo final fazemos alguns comentários sobre os assuntos abordados nesta dissertação e também aproveitamos para evidenciar alguns dos principais resultados (os quais são bastante complexos) que estudamos no decorrer do preparo deste manuscrito.

- As equações de Navier - Stokes são uma ferramenta muito importante no estudo da dinâmica dos fluidos. Elas são constituídas por um conjunto de equações diferenciais não lineares que descrevem o movimento de um fluido.

- O problema clássico das equações de Navier - Stokes, sobre um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
\mathrm{div} u &= 0 && \text{em} \quad \Omega \times (0,T),\\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{em} \quad \Omega,\\
u &= 0 && \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T).
\end{aligned}$$

  Este problema já foi amplamento estudado na literatura matemática e ainda hoje possui diversas questões em aberto; uma das questões mais interessantes relativas a este problema consiste em saber se soluções fracas em $\mathbb{R}^3$ tem certa regularidade. Este é um dos célebres problemas do milênio do Instituto Clay (veja [3] para mais detalhes acerca deste tópico).

- Nosso objetivo principal foi o de estudar as equações de Navier - Stokes, porém com outro tipo de condição de fronteira.

  Em termos mais técnicos, podemos dizer que esta "nova" condição de fronteira assume que a velocidade de deslizamento tangencial é proporcional a tensão tangencial, com um fator de proporcionalidade do estresse viscoso $\alpha \in L^{\infty}(\partial\Omega)$. Além, é claro, de assumir que não existe a possibilidade do fluido deixar o meio em que se encontra, ou seja, que a componente normal da velocidade do fluido é nula.

  Esta condição foi introduzida por Navier em [18] e hoje em dia é chamada de condição de fronteira de tipo Navier de fricção ou apenas de tipo Navier.

  Vale enfatizar que este estudo foi feito sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, limitado, possuindo uma quantidade finita de componentes conexas e com fronteira suficientemente regular (em nosso caso, Ω de classe $\mathcal{C}^2$ seria suficiente). As ideias discutidas aqui foram baseadas no artigo [9] e em alguns outros artigos que se encontram referenciados mais abaixo.

- Em poucas palavras, dedicamos esta dissertação no entendimento da existência, unicidade e regularidade de solução fraca para as equações de Navier - Stokes com condição de fronteira de tipo Navier. Um dos estudos mais clássicos sobre este assunto foi feito em [5]. Posteriormente outros resultados interessantes foram agregados a literatura através dos artigos [9, 10, 16]

  Com o objetivo de aprofundar nosso conhecimento, abordamos inicialmente um artigo bastante significativo sobre esse tema, o qual foi feito por Kelliher em 2006. Entretanto, nos deparamos com diversos argumentos complexos que fugiam dos objetivos originais e do escopo da dissertação. Sendo assim, por se tratar de um primeiro contato com essa teoria, optamos por nos focar no estudo mais clássico, abordando apenas resultados que não nos afastassem demasiadamente do objetivo principal.

- Por último estudamos o limite invíscido, isto é, a relação que tem a solução das equações de Navier - Stokes, quando a viscosidade $\mu \longrightarrow 0^+$, com respeito das equações de Euler.

Para evitar um outro estudo, relativamente distinto do que tínhamos realizado até esse momento, decidimos adotar como certos os resultados relacionados às equações de Euler, para que dessa forma o Capítulo 3 pudesse ser concluído sem contra tempos adicionais.

- Terminamos os nossos comentários salientando que algumas das demonstrações apresentadas aqui não estão claras, ou mesmo feitas, nos artigos que as discutem. É por isso que, ao invés de assumi-las como verdades, optamos por clarificar as contas a fim de que esta dissertação sirva de referência sobre o assunto que aborda. Dentre tais resultados, citamos como os mais relevantes: a Proposição 3.2, os Lemas 2.16 e 2.17, o Corolário 2.19 e os Teoremas 2.23, 2.28 e 3.6.

Referências Bibliográficas

[1] Bihari I., A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 7 (1956), pp. 81 - 94.

[2] Brezis H., Funtional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science, 2010.

[3] Clay Mathematics Institute: http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations.

[4] Chemin J-Y., Perfect Incompressible Fluids, Oxford University Press, 1998.

[5] Clopeau T., Mikelic A., and Robert R., On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions, Nonlinearity, 11 (1998), pp. 1625 - 1636.

[6] Evans L. C., Partial Differential Equations, AMS Rhode Island Publishing, Providence, 2002.

[7] Galdi G. P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Springer - Verlag, New York, Vol. I, 1994.

[8] Grisvard P., Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, London: Pitman, 1985.

[9] Kelliher J. P., Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions for a bounded domain in the plane, SIAM J. Math. Anal. Vol. 38, No. 1 (2006), pp. 210 - 232.

[10] Kelliher J. P., The inviscid limit for two-dimensional incompressible fluids with unbounded vorticity, Math. Res. Lett., 11 (2004), pp. 519-528.

[11] Kesavan S., Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley, New York 1998.

[12] Kikuchi, N., Orden, J. T., Contac problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, Studies in applied Mathematics, Siam, Philadelphia, 1988.

[13] Lima E. L., Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[14] Lions J-L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[15] Lions J-L., Dautray R., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Functional and Variational Methods Vol. 2, 2000.

[16] Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J., and Planas G., On the inviscid limit for two-dimensional incompressible flow with Navier friction condition, SIAM J. Math. Anal., 36 (2005), pp. 1130-1141.

[17] Maxwell J. C., On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature, Phil. Trans. Royal Society, 1879, pp. 704-712.

[18] Navier C. M. L. H., Sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps élastiques, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France, 6 (1827), p. 369.

[19] Temam R., Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, AMS Chelsea publishing, Providence, 2001.

[20] Trudinger, N.S., Gilbarg, D., Elliptic Partial Differential Equationsof Second Order, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[21] Yudovich V. I., Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid, Math. Res. Lett., 2 (1995), pp. 27-38.

[22] Yudovich V. I., Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid, Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz., 3 (1963), pp. 1032-1066 (in Russian).