

Rafael Roberto Roman

**Simulação numérica de ensaio de  
protótipo em torres de linha de  
transmissão**

Florianópolis

2019



Rafael Roberto Roman

**Simulação numérica de ensaio de protótipo em  
torres de linha de transmissão**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Santa Catarina.

Universidade Federal de Santa Catarina

Departamento de Engenharia Civil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Leandro Fleck Fadel Miguel, Dr.

Coorientador: Fábio Luis Alminhana de Oliveira, Dr.

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Roman, Rafael Roberto

Simulação numérica de ensaio de protótipo em torres de linha de transmissão / Rafael Roberto Roman ; orientador, Leandro Fleck Fadel Miguel, coorientador, Fábio Luis Alminhana de Oliveira, 2019.

201 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

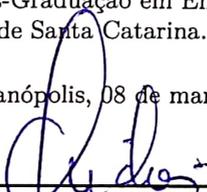
1. Engenharia Civil. 2. Análise não linear. 3. Torres de linhas de transmissão. 4. Simulação de colapso. 5. Estruturas de aço. I. Miguel, Leandro Fleck Fadel. II. Alminhana de Oliveira, Fábio Luis . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

Rafael Roberto Roman

## Simulação numérica de ensaio de protótipo em torres de linha de transmissão

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de MESTRE em Engenharia Civil e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da Universidade Federal de Santa Catarina.

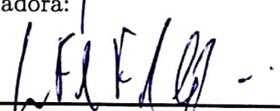
Florianópolis, 08 de março de 2019.



---

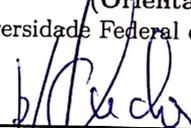
Glicério Trichês, Dr.  
Coordenador PPGEC

Comissão Examinadora:



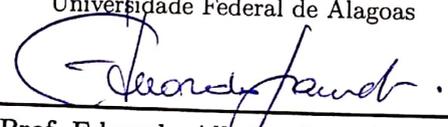
---

Prof. Leandro Fleck Fadel Miguel, Dr.  
(Orientador)  
Universidade Federal de Santa Catarina



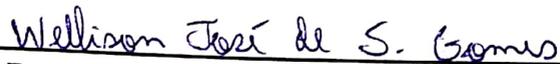
---

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques, Dr.  
(Videoconferência)  
Universidade Federal de Alagoas



---

Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



---

Prof. Wellison José de Santana Gomes, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina



# Agradecimentos

Ao meu orientador Leandro Fleck Fadel Miguel pelas orientações, pela disponibilidade integral e pelas lições pessoais e profissionais nos anos de convívio;

Ao meu coorientador Fábio Luis Alminhana de Oliveira pelas dicas, esclarecimentos e ajuda na elaboração dos métodos numéricos;

Aos professores Eduardo Alberto Fancello, Severino Pereira Cavalcanti Marques e Wellison José de Santana Gomes pela disponibilidade em tirar dúvidas e pelos comentários durante a avaliação;

Aos meus pais Dulceni e Nelso, ao meu irmão Rodrigo e à minha noiva Ana pelo carinho, suporte e apoio;

Aos meus amigos do CORE (Center for Optimization and Reliability in Engineering) Alexandre, Felipe, Gustavo, Matheus, Rafael, Victor e Vinícius pela parceria;

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa de estudos;

À Copel Geração e Transmissão S.A. pelo suporte financeiro por meio do projeto P&D 6491-0311/2013.



# Resumo

Torres de linhas de transmissão (LT) são estruturas projetadas para transportar a energia elétrica do local de geração ao local de distribuição/consumo. Uma forma de verificar se a estrutura foi dimensionada adequadamente se dá por meio da realização de ensaios de protótipo em escala real. Devido ao elevado custo de realização desses ensaios, uma alternativa é a avaliação do comportamento estrutural por meio de métodos numéricos. Neste trabalho, é apresentado um método de análise não linear de estruturas reticuladas tridimensionais usado para prever a carga e modo de colapso de torres de LT sujeitas a carregamentos estáticos. Na técnica de análise proposta, cada torre é modelada com elementos de pórtico espacial. Na formulação do elemento finito consideram-se seções transversais assimétricas de paredes finas, como perfis cantoneira. O esquema de solução consiste em uma estratégia incremental-iterativa, baseada no método de comprimento de arco. As matrizes de rigidez linear, geométrica e de redução plástica são usadas para descrever o comportamento da estrutura em um referencial Lagrangeano atualizado. Um modelo de plasticidade concentrada associado ao conceito de superfícies de escoamento e rótulas plásticas é adotado para modelar a não linearidade física. Adota-se um material com comportamento elástico perfeitamente plástico. A partir dos resultados encontrados, verificou-se que o modelo proposto pode gerar bons resultados para a estimativa da carga de colapso e modos de falha de torres de LT. No entanto, algumas imprecisões podem surgir na previsão da carga de colapso quando a falha ocorre devido à flambagem elastoplástica das barras.

**Palavras-chaves:** Análise não linear. Torres de linhas de transmissão. Simulação de colapso. Estruturas de aço.

# Abstract

Transmission line (TL) towers are structures designed to carry electrical energy from generating stations to consuming centers. Prototype tests are traditionally employed for designing verification of these structures. Due to the high cost of full-scale tests, an alternative is to evaluate their structural behavior through numerical methods. In this work, a nonlinear analysis method is presented for predicting and simulating the ultimate structural behavior of two steel lattice towers under static load conditions. In the proposed technique, each tower is modeled as an assembly of space beam-column elements. In this finite element formulation, asymmetric thin-walled open sections such as angles are considered. The solution scheme consists of an incremental-iterative predictor-corrector strategy, based on the arc-length method. Linear, geometric and plastic matrices are used to describe the structure behavior in an updated Lagrangean framework. A lumped plasticity approach coupled with the concept of yield surfaces and plastic hinges is adopted for modelling material nonlinearity. An elastic perfectly plastic material is adopted. From the results, it was verified that the proposed model can generate good results in terms of ultimate loads and failure modes of steel lattice towers. However, some inaccuracies may arise in predicting the collapse load when failure occurs due to elastoplastic buckling of the bars.

**Key-words:** Nonlinear analysis. Transmission line towers. Prototype testing. Steel structures.



# Lista de Figuras

Figura 1 – Torre de linha de transmissão em escala real pronta para o ensaio . . . . .	31
Figura 2 – Esquema simplificado de uma rede de energia	38
Figura 3 – Componentes de uma linha de transmissão .	39
Figura 4 – Exemplos de torres de LT utilizadas no Brasil	42
Figura 5 – Viga engastada . . . . .	47
Figura 6 – Caminho de equilíbrio linear (esquerda) e não linear (direita) . . . . .	49
Figura 7 – Pontos especiais e fenômenos que ocorrem no caminho de equilíbrio . . . . .	50
Figura 8 – Referencial Lagrangeano atualizado . . . . .	52
Figura 9 – Deslocamentos e forças nodais no elemento de pórtico espacial . . . . .	57
Figura 10 – Vetor de incremento de deslocamentos plásticos	66
Figura 11 – Quatro comportamentos para o elemento de pórtico . . . . .	68
Figura 12 – Eixos de coordenadas locais de seção transversal de paredes finas com um eixo de simetria	77
Figura 13 – Rotação das seções de um elemento . . . . .	83
Figura 14 – Rotação da normal das seções transversais . .	85
Figura 15 – Projeções dos eixos principais das seções extremas . . . . .	86
Figura 16 – Deslocamento de corpo rígido . . . . .	92
Figura 17 – Deslocamentos responsáveis pelas deformações e forças nodais . . . . .	93
Figura 18 – Alongamento ou encurtamento axial . . . . .	94

Figura 19 – Projeções da geometria deformada sobre os planos ${}^t x^t y$ e ${}^t x^t z$ . . . . .	95
Figura 20 – Interpretação geométrica de $\mathbf{u}^Q$ , $\mathbf{t}^Q$ , $\mathbf{u}^R$ e $\mathbf{t}^R$	100
Figura 21 – Interpretação geométrica do método de controle quadrático básico . . . . .	102
Figura 22 – Previsão esférica seguida de correção cilíndrica	104
Figura 23 – Previsão esférica seguida de correção cilíndrica	106
Figura 24 – Superfície de restrição elipsoidal . . . . .	108
Figura 25 – Correções parciais para evitar raízes complexas	114
Figura 26 – Fator $\gamma$ para a formação de uma rótula plástica	120
Figura 27 – Correção do afastamento entre o vetor de incremento de forças e a superfície de escoamento	125
Figura 28 – Fluxograma do método de análise não linear	132
Figura 29 – Projeto de torre autoportante para LT de 115 kV . . . . .	135
Figura 30 – Árvore de carregamentos da torre de 115kV .	138
Figura 31 – Deslocamento transversal do topo da torre .	139
Figura 32 – Configuração deformada da torre após o primeiro ponto limite de carga . . . . .	140
Figura 33 – Torre intacta na estação de testes . . . . .	141
Figura 34 – Deslocamento transversal do topo da torre .	143
Figura 35 – Formação das rótulas plásticas na torre de 115 kV . . . . .	144
Figura 36 – Configuração deformada da perna . . . . .	145
Figura 37 – Vistas transversal e longitudinal da torre de LT de 275kV . . . . .	146
Figura 38 – Seções e vistas da torre de LT de 275kV . . .	147
Figura 39 – Caso crítico de carregamento da torre de LT de 275kV . . . . .	150
Figura 40 – Teste em escala real da torre de 275kV . . . .	151

Figura 41 – Deslocamento transversal do topo da torre de 275kV . . . . .	152
Figura 42 – Configuração deformada da torre no momento do colapso . . . . .	153
Figura 43 – Tensão limite de compressão de barra carregada axialmente . . . . .	155
Figura 44 – Coluna engastada-livre . . . . .	181
Figura 45 – Caminho de equilíbrio - coluna engastada-livre	182
Figura 46 – Pórtico de Lee . . . . .	184
Figura 47 – Caminho de equilíbrio do pórtico de Lee . . .	185
Figura 48 – Pórtico hexagonal com apoios deslizantes . .	186
Figura 49 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo . . . . .	188
Figura 50 – Vistas superior e frontal da cúpula com 24 barras	189
Figura 51 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo . . . . .	190
Figura 52 – Cúpula com 168 barras . . . . .	191
Figura 53 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo . . . . .	192
Figura 54 – Viga engastada-livre . . . . .	194
Figura 55 – Caminho de equilíbrio da viga engastada-livre	195
Figura 56 – Pórtico bidimensional . . . . .	196
Figura 57 – Caminho de equilíbrio do pórtico bidimensional	197
Figura 58 – Grelha . . . . .	198
Figura 59 – Caminho de equilíbrio da grelha . . . . .	199
Figura 60 – Pórtico tridimensional . . . . .	200
Figura 61 – Caminho de equilíbrio do pórtico tridimensional	201



# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Grupos de perfis utilizados na torre de 115 kV 136

Tabela 2 – Grupos de perfis utilizados na torre de 275 kV 148



# Lista de Abreviações e Símbolos

$LT$	Linha de transmissão;
$\mathbf{K}_L, \mathbf{K}$	Matriz de rigidez elástica linear do elemento e da estrutura, respectivamente;
$\mathbf{K}_G$	Matriz de rigidez geométrica do elemento;
$\mathbf{K}_P$	Matriz de redução plástica do elemento;
$\mathbf{K}_T^l, \mathbf{K}_T$	Matriz de rigidez tangente do elemento e da estrutura, respectivamente;
$\mathbf{K}_O, \mathbf{K}_A$	Matriz de rigidez tangente da estrutura referente ao último ponto de equilíbrio e referente ao ponto $A$ , respectivamente;
$\mathbf{F}$	Vetor de forças aplicadas;
$\Delta\mathbf{F}$	Vetor de incremento das forças internas da estrutura no referencial global;
$\Delta\mathbf{F}^g$	Vetor de incremento das forças internas do elemento no referencial global;
$\Delta\bar{\mathbf{F}}^l$	Vetor de incremento das forças nodais no referencial local após aproximação radial;
$\mathbf{F}$	Vetor de forças nodais internas da estrutura no referencial global;

${}^t\mathbf{F}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$	Vetor de forças nodais internas, no referencial global, na última configuração de equilíbrio e na configuração atual, respectivamente;
$\mathbf{F}^l, \mathbf{F}^g$	Vetor de forças nodais do elemento no referencial local e global, respectivamente;
$\mathbf{Q}$	Vetor de forças externas;
$\mathbf{R}$	Vetor de forças residuais;
$\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B$	Vetor de forças residuais no ponto $A$ e no ponto $B$ , respectivamente;
$\Phi$	Superfície de escoamento;
$\nabla\Phi$ e $\mathbf{G}$	Vetor gradiente da superfície de escoamento;
$t_0$	Configuração inicial (indeformada);
$t$	Última configuração de equilíbrio;
$t + \Delta t$	Configuração de equilíbrio do passo de carga atual;
$O$	Ponto referente à estrutura na última configuração de equilíbrio;
$X$	Centro da superfície de restrição, deslocada por um fator $\alpha$ ;
$P$	Ponto referente à configuração da estrutura após a previsão inicial;
$A$	Ponto referente à configuração da estrutura na iteração anterior;

$B$	Ponto referente à configuração da estrutura na iteração atual;
$\dot{\lambda}$	Constante de plastificação;
$\lambda$	Parâmetro de carga acumulado;
${}^t\lambda$ e ${}^{t+\Delta t}\lambda$	Parâmetro de carga avaliados na configuração de equilíbrio $t$ e no passo de carga corrente;
$\lambda_O$	Parâmetro de carga acumulado no ponto $O$ ;
$\lambda_A$	Parâmetro de carga acumulado no ponto $A$ ;
$\lambda_B$	Parâmetro de carga acumulado no ponto $B$ ;
$\lambda^Q$	Escalar utilizado para a definição do sinal da raiz na fase de previsão;
${}^0\Delta\lambda$	Incremento inicial do parâmetro de carga a ser definido no início do processo;
$\Delta\lambda$	Incremento do parâmetro de carga;
$\Delta\lambda_P$	Incremento do parâmetro de carga na fase de previsão;
$\Delta\lambda'_P$	Incremento do parâmetro de carga na fase de previsão após o ajuste pelo fator $\gamma$ ;
$\Delta\lambda_C$	Incremento do parâmetro de carga na fase de correção;
$\blacktriangle\lambda$	Incremento do parâmetro de carga em relação ao ponto $O$ ;
$\Omega$	Escalar para escolha da raiz na fase de correção;

$\phi$	Fator que deixa o produto de fatores de carga dimensionalmente consistente;
$\bar{L}$	Comprimento de arco;
${}^0\bar{L}$	Comprimento de arco inicial;
$\bar{L}_\diamond$	Comprimento de arco na fase de correção;
$\mathbf{t}_O, \mathbf{t}_P, \mathbf{t}_X$	Vetor de deslocamentos e fator de carga referente à estrutura na configuração dos pontos $O$ , $P$ e $X$ , respectivamente;
$\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B$	Vetor de deslocamentos e fator de carga referente à estrutura na configuração dos pontos $A$ e $B$ , respectivamente;
$\diamond\mathbf{t}$	Vetor de incremento de deslocamentos e fator de carga medido em relação ao ponto $X$ ;
$\diamond\mathbf{t}_A$	Vetor de incremento de deslocamentos e fator de carga no ponto $A$ medido em relação ao ponto $X$ ;
$\diamond\mathbf{t}_B$	Vetor de incremento de deslocamentos e fator de carga no ponto $B$ medido em relação ao ponto $X$ ;
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais da estrutura;
$\mathbf{u}^R$	Vetor de deslocamentos nodais referente às forças residuais $\mathbf{R}$ ;
$\mathbf{u}^Q$	Vetor de deslocamentos nodais referente às forças externas $\mathbf{Q}$ ;

$\mathbf{u}_O$	Vetor de deslocamentos nodais referente à estrutura na última configuração de equilíbrio;
$\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B$	Vetor de deslocamentos nodais referente à estrutura na configuração do ponto $A$ e $B$ , respectivamente;
$\Delta \mathbf{u}$	Incremento de deslocamentos medido a partir da última configuração de equilíbrio;
$\blacklozenge \mathbf{u}$	Vetor de incremento de deslocamentos em relação ao ponto $X$ ;
$\Delta \bar{\mathbf{u}}$	Incremento de deslocamentos que geram deformações, medido a partir da última configuração de equilíbrio;
$\Delta u^l$	Incremento do deslocamento nodais do elemento na direção $x$ , medido a partir da última configuração de equilíbrio;
$\Delta v^l$	Incremento do deslocamento nodais do elemento na direção $y$ , medido a partir da última configuração de equilíbrio;
$\Delta \mathbf{u}_p$	Vetor de incrementos de deslocamentos plásticos;
$\Delta \mathbf{u}_e$	Vetor de incrementos de deslocamentos elásticos;
$\Delta \mathbf{u}^l, \Delta \mathbf{u}^g$	Vetor de incrementos de deslocamentos nodais do elemento no referencial local e global, respectivamente;

$\Delta \mathbf{u}^g$	Vetor de incrementos de deslocamentos nodais do elemento no referencial global;
$\mathbf{\blacktriangle} \mathbf{u}$	Incremento de deslocamentos em relação ao ponto $O$ ;
$\Delta s$	Escalar utilizado para correções parciais;
$\mathbf{N}$	Matriz de orientação do nó;
${}^t \mathbf{N}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{N}$	Matriz de orientação do nó na última configuração de equilíbrio e na configuração deformada atual, respectivamente;
$\mathbf{S}$	Matriz de orientação da seção;
$\phi$	Ângulo de rotação da normal à seção;
$\hat{\mathbf{e}}^{(1)}$ e $\hat{\mathbf{e}}^{(2)}$	Matriz de cossenos diretores no plano perpendicular ao eixo normal do elemento para os extremos 1 e 2, respectivamente;
$\bar{\mathbf{e}}$	Matriz de cossenos diretores no plano perpendicular ao eixo normal do elemento;
$\mathbf{e}$	Vetor unitário orientado na direção do maior semi-eixo do hiper-elipsoide;
${}^0 \mathbf{T}$	Matriz de transformação de coordenadas na configuração inicial;
$\mathbf{T}_1$	Matriz de transformação translacional;
${}^0 \mathbf{T}_2, {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_2$	Matriz de transformação local para global na configuração inicial e na configuração deformada atual, respectivamente;

$l, m \text{ e } n$	Cossenos diretores do elemento nas direções $x$ , $y$ e $z$ , respectivamente;
$E$	Módulo de elasticidade do material que compõe o elemento;
$G$	Módulo de elasticidade transversal do elemento;
$f_y$	Tensão de escoamento do material;
$I$	Momento de inércia da seção transversal do elemento;
$A$	Área da seção transversal do elemento;
$F_{px}$	Força axial plástica;
$L$	Comprimento do elemento na configuração de referência;
$I_d$	Número de iterações desejadas para cada incremento;
${}^tI$	Número de iterações que foram necessárias para fazer convergir o passo de carga;
$\alpha$	Parâmetro para controle do centro da superfície de restrição;
$\beta$	Parâmetro para controle da forma da superfície de restrição;
$\gamma$	Fator para formação das rótulas plásticas;
$\zeta_{tol}$	Tolerância no processo de convergência;
$\zeta$	Fator de convergência baseado em relações de força;

$t+\Delta t R$	Trabalho virtual externo na configuração atual;
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões de Cauchy;
$\tau_{ij}$	Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhof;
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações de Green-Lagrange;
$e_{ij}$	Parcela linear do tensor de deformações de Green-Lagrange;
$\eta_{ij}$	Parcela não linear do tensor de deformações de Green-Lagrange;
$\delta\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações virtuais de Green-Lagrange;
$\delta e_{ij}$	Parcela linear do tensor de deformações virtuais de Green-Lagrange;
$\delta\eta_{ij}$	Parcela não linear do tensor de deformações virtuais de Green-Lagrange;
$C_{ijrs}$	Relação constitutiva do material;
RLT	Referencial Lagrangeano Total;
RLA	Referencial Lagrangeano Atualizado.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>Lista de Tabelas</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>29</b>
1.1 Considerações gerais . . . . .	29
1.2 Revisão de literatura . . . . .	32
1.3 Objetivos . . . . .	35
1.3.1 Objetivos específicos . . . . .	35
1.4 Organização do trabalho . . . . .	35
<b>2 Torres de linha de transmissão e testes de protótipo</b> <b>37</b>	<b>37</b>
2.1 Torres de transmissão . . . . .	37
2.2 Classificação das torres metálicas treliçadas . . . . .	39
2.3 Testes de protótipo . . . . .	43
<b>3 Análise não linear de estruturas reticuladas</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1 Introdução . . . . .	45
3.1.1 Tipos de não linearidade . . . . .	46
3.1.1.1 Não linearidade geométrica . . . . .	46
3.1.1.2 Não linearidade física . . . . .	47
3.1.2 Caminho de equilíbrio . . . . .	48
3.1.2.1 Pontos especiais no caminho de equilíbrio . . . . .	48
3.2 Sistemas de referência . . . . .	50
3.3 Formulação não linear do elemento finito . . . . .	51
3.3.1 Elemento de pórtico . . . . .	55
3.3.1.1 Formulação . . . . .	56
3.3.2 Matriz de rigidez geométrica . . . . .	59
3.3.3 Matriz de redução plástica . . . . .	63

	3.3.3.1	Critério de plastificação . . . . .	64
	3.3.3.2	Regra do fluxo . . . . .	65
	3.3.3.3	Condição de consistência . . . . .	67
	3.3.3.4	Matriz de redução plástica . . . . .	67
	3.3.3.5	Superfícies de escoamento . . . . .	73
3.4		Transformação de coordenadas no RLA . . . . .	74
	3.4.1	Matrizes de transformação na configuração inicial . . . . .	75
	3.4.1.1	Matriz de transformação translacional . . . . .	75
	3.4.1.2	Matriz de transformação local para global . . . . .	76
	3.4.2	Atualização da matriz de transformação local para global . . . . .	79
	3.4.2.1	Matriz de orientação do nó . . . . .	80
	3.4.2.2	Matriz de orientação da seção . . . . .	82
	3.4.2.3	Eixos locais do elemento deformado . . . . .	83
	3.4.2.4	Sequência para a formação da matriz de transformação atualizada . . . . .	88
3.5		Cálculo das forças internas . . . . .	90
	3.5.1	Composição dos deslocamentos . . . . .	91
	3.5.2	Forças internas . . . . .	96
3.6		Método do comprimento de arco . . . . .	96
	3.6.1	Superfícies de restrição diferentes para as fases de previsão e correção . . . . .	103
	3.6.2	Superfície de restrição não centrada no último ponto de equilíbrio conhecido . . . . .	105
	3.6.3	Procedimento genérico que engloba diferentes superfícies de restrição . . . . .	108
	3.6.4	Implementação . . . . .	109

3.6.4.1	Escolha da raiz na fase de previsão	112
3.6.4.2	Escolha da raiz na fase de correção	113
3.6.4.3	Aplicar correções parciais para evitar raízes complexas . . . . .	114
3.6.5	CrITÉRIOS de convergência . . . . .	115
3.7	Etapas do método de análise não linear . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Estudos de caso . . . . .</b>	<b>133</b>
4.1	Torre de 115kV . . . . .	133
4.2	Torre de 275kV . . . . .	145
4.3	Análise dos resultados e estudos adicionais . . . . .	153
<b>5</b>	<b>Conclusões e estudos futuros . . . . .</b>	<b>159</b>
5.1	Conclusões . . . . .	159
5.2	Estudos futuros . . . . .	160
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>161</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>163</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>171</b>
	<b>APÊNDICE A Matrizes de rigidez elástica e geométrica . . . . .</b>	<b>173</b>
	<b>APÊNDICE B Exemplos utilizados para validação do método . . . . .</b>	<b>179</b>
B.1	Validação do método de análise não linear geométrica	180
B.1.1	Coluna engastada-livre . . . . .	181
B.1.2	Pórtico de Lee . . . . .	183
B.1.3	Pórtico hexagonal . . . . .	185
B.1.4	Cúpula com 24 barras . . . . .	188
B.1.5	Cúpula com 168 barras . . . . .	190

B.2	Validação do método de análise não linear física e geométrica . . . . .	192
B.2.1	Viga engastada-livre . . . . .	193
B.2.2	Pórtico bidimensional . . . . .	195
B.2.3	Grelha . . . . .	197
B.2.4	Pórtico tridimensional . . . . .	199

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

A disponibilidade de energia elétrica tem um importante papel no desenvolvimento econômico de um país. Dentre as mais diversas formas de energia disponíveis no mundo, a mais utilizada é a elétrica. Independentemente do tipo de geração (hidroelétrica, termoelétrica, nuclear, eólica, fotovoltaica, e outras), os recursos energéticos ou as instalações geradoras geralmente estão localizados a grandes distâncias dos centros consumidores. Assim, é necessário o transporte da energia do local de geração até o centro de distribuição por meio de linhas de transmissão.

Segundo Kaminski Jr (2007), uma linha de transmissão (LT) é um sistema composto por um grande número de componentes, tais como: torres (suportes), fundações, cabos, cadeias de isoladores e ferragens. Neste contexto, as torres desempenham um papel fundamental na configuração da linha e consequentemente

em todo o sistema de transmissão de energia.

A maior parte das torres construídas em uma LT são idênticas de maneira que a elaboração de um projeto de torre que atenda as restrições normativas e seja economicamente viável é imprescindível. No entanto, ao se dimensionar os componentes de uma torre, existem incertezas associadas, por exemplo, às propriedades dos materiais, às ações incidentes na estrutura, aos métodos construtivos e também aos modelos de análise estrutural.

Uma forma de verificar se a estrutura foi dimensionada adequadamente se dá por meio da realização de ensaios em escala real, como pode ser visto na Fig. 1. Podendo ser classificados como destrutivos ou não-destrutivos, esses ensaios são caracterizados pela montagem da torre de acordo com o projeto, sendo posteriormente sujeita à aplicação de cargas por meio de cabos que simulam a ação do vento e de outros carregamentos. De modo a validar a concepção do modelo, as torres devem resistir a 100% das cargas últimas de projeto.

Segundo Menezes (1988), a realização de testes de cargas em protótipos é uma exigência usual entre as concessionárias de energia elétrica. Quando isso é feito, consegue-se reduzir as incertezas do modelo e entender melhor o comportamento da estrutura. Apesar de ser uma prática comum, os ensaios de protótipo possuem um custo elevado para realização. Uma alternativa mais barata a esses ensaios de protótipo é a avaliação do comportamento estrutural por meio de métodos numéricos.

As torres, por serem estruturas altas e esbeltas, podem apresentar grandes deslocamentos mesmo com pequenas deformações. Assim, os métodos numéricos empregados na análise estrutural devem contemplar a não linearidade geométrica. Além

Figura 1 – Torre de linha de transmissão em escala real pronta para o ensaio



Fonte: <http://electromontaj.ro/en/tower-testing-station/>. Acesso em 11/01/2019.

disso, como o aço estrutural possui comportamento elastoplástico, também deve-se considerar a não linearidade física. Por fim, para que o modelo numérico seja uma alternativa aos ensaios de protótipo, também devem ser consideradas incertezas em relação às propriedades geométricas e do material, que simulem imperfei-

ções de fabricação e montagem das barras, e também do modelo estrutural adotado.

Dada a economia que pode ser gerada por meio da implementação de um método de análise que substitua ou reduza a necessidade da realização de ensaios de protótipo, o presente estudo é justificado. Como os métodos numéricos podem servir de base para otimizações, análises de sensibilidade, etc., e serem aplicados para as torres de mais de uma linha de transmissão, o potencial desses métodos é ainda maior.

## 1.2 Revisão de literatura

Nesta seção são apresentadas as descrições resumidas de alguns trabalhos relacionados ao estudo de torres de linha de transmissão com enfoque em modelagem numérica e simulação de ensaios de protótipo.

Al-Bermani & Kitipornchai (1992) desenvolveram uma técnica para simular o comportamento estrutural último de torres autoportantes de transmissão, sujeitas a carregamentos estáticos. O método incorpora efeitos da não linearidade geométrica e do material e considera as barras da torre como elementos de viga/coluna. Os resultados para o comportamento último de duas torres de transmissão foram comparados com os obtidos por meio de ensaios de protótipo.

Albermani (1997) apresenta um método de análise não linear utilizado para verificar o projeto de uma torre estaiada de transmissão. A técnica foi capaz de identificar diversos problemas na estrutura e prevenir o colapso da torre. Além disso, o método

foi usado para corrigir as falhas da estrutura original, de modo que ela pudesse ser executada.

Rao & Kalyanaraman (2001) executaram análises de simulação computacional não lineares de painéis de torres de aço treliçadas. Foram considerados nas análises tanto os efeitos da não linearidade geométrica quanto os efeitos de plasticidade. Os resultados das análises foram comparados a ensaios experimentais, sendo realizada a calibração do modelo. Com bases nessas análises, tornou-se possível a determinação dos esforços nos contraventamentos secundários, dados esses que não podem ser obtidos via análise linear.

Albermani & Kitipornchai (2003) descrevem uma técnica de simulação computacional para avaliar o comportamento último de torres de transmissão treliçadas estaiadas e autoportantes. Segundo os autores, a técnica pode prever com precisão a carga e os modos de falha das torres, e pode ser usada para substituir ou reduzir a necessidade do uso de testes de protótipo. Além disso, a técnica pode ser usada para verificar novos projetos de torre e reforçar e atualizar torres existentes.

Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) aplicaram uma técnica de previsão de colapso a uma torre de linha de transmissão de 245 kV. As não linearidades física, geométrica e de flexibilidade das ligações foram incorporadas à análise estrutural. Cinco hipóteses de carregamento foram consideradas. Posteriormente, a torre foi submetida a um ensaio que validou os resultados obtidos pela modelagem numérica. Alminhana, Mason & Albermani (2018) estudaram a mesma torre aplicando uma análise dinâmica em conjunto com as não linearidades geométrica e física.

Rao *et al.* (2010) e Rao *et al.* (2012) apresentaram e

discutiram diversos tipos de falhas prematuras de torres de linha de transmissão observados durante testes em escala real. Os diferentes tipos de falha foram analisados usando um software de elementos finitos para análise não linear geométrica e do material. As barras da torre foram modeladas com elementos de placa e viga/coluna. No trabalho, também é discutida a importância da modelagem dos membros redundantes e conexões para melhor performance no estudo da torre.

Ramalingam & Jayachandran (2016) propõem um procedimento analítico capaz de capturar não apenas as cargas de ruptura e respectivos deslocamentos de torres de linhas de transmissão, mas também os deslocamentos adicionais causados por deslizamento dos parafusos nas emendas das barras. Estes deslocamentos adicionais foram integrados em uma análise não linear física e geométrica. O método tem demonstrado ser uma alternativa viável aos ensaios de protótipo.

Alminhana, Mason & Albermani (2018) simularam a carga e modos de falha de uma torre de LT, sujeita a carregamentos estáticos, por meio de um método de análise dinâmica. O procedimento foi realizado através da aplicação de pequenos incrementos de tempo, de modo que a análise dinâmica se aproximasse de uma análise estática.

Fu & Li (2018) usaram um *software* comercial para avaliar a capacidade de uma torre de LT. No método de análise, foram consideradas as não linearidades geométrica e física e utilizados elementos de pórtico. O destaque do trabalho é a consideração de variáveis aleatórias para as propriedades do material e para as dimensões dos perfis utilizados para a simulação da falha da torre de LT.

Apesar de alguns trabalhos terem sido desenvolvidos a respeito da análise de falha em torres de LT, os métodos numéricos ainda não substituem os ensaios experimentais. Assim, a contínua investigação e estudos em torres de LT é relevante para o melhor entendimento dessas estruturas.

## 1.3 Objetivos

O objetivo global desse trabalho é implementar um método numérico capaz de avaliar o comportamento estrutural de torres de LT, principalmente em relação à carga e modos de colapso.

### 1.3.1 Objetivos específicos

- Avaliar o comportamento de torres de LT após a ocorrência de flambagem;
- Avaliar a representação do comportamento do aço como elástico perfeitamente plástico;
- Contribuir para o estudo de simulação de falha em torres de LT de modo a se obter alternativas aos ensaios de protótipo.

## 1.4 Organização do trabalho

Este trabalho é dividido em cinco capítulos e dois apêndices. O presente capítulo visa introduzir o assunto e definir os objetivos do trabalho.

O Capítulo 2 faz uma apresentação geral das torres de LT e o seu propósito no sistema elétrico. As torres são classificadas de acordo com suas características e algumas informações dos ensaios de protótipo são mencionadas.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia usada para a formulação da análise não linear. São apresentados os tipos de não linearidade e define-se o caminho de equilíbrio. São apresentados os referenciais Lagrangeanos. As equações de equilíbrio são formuladas para um elemento de pórtico espacial e o procedimento para obtenção dos esforços internos e deslocamentos é descrito.

O Capítulo 4 faz a aplicação da metodologia de análise não linear implementada em duas torres de LT.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais e conclusões do trabalho realizado, e estudos futuros.

Por fim, o Apêndice A mostra as matrizes de rigidez elástica e geométrica utilizadas no trabalho e o Apêndice B apresenta os exemplos utilizados para a validação do método de análise.

## Capítulo 2

# Torres de linha de transmissão e testes de protótipo

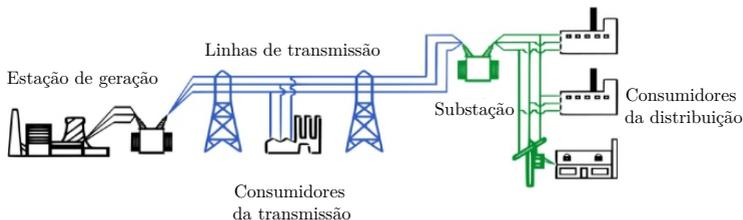
Neste capítulo é abordada, de maneira sucinta, a LT e seus componentes, as torres de LT são classificadas e os testes de protótipo são descritos.

### 2.1 Torres de transmissão

Linhas de transmissão são sistemas elétricos com a função de transportar a energia produzida em estações geradores até subestações elétricas, conforme mostrado no esquema da Fig. 2.

Os principais componentes de uma linha são mostrados na Fig. 3 e consistem em:

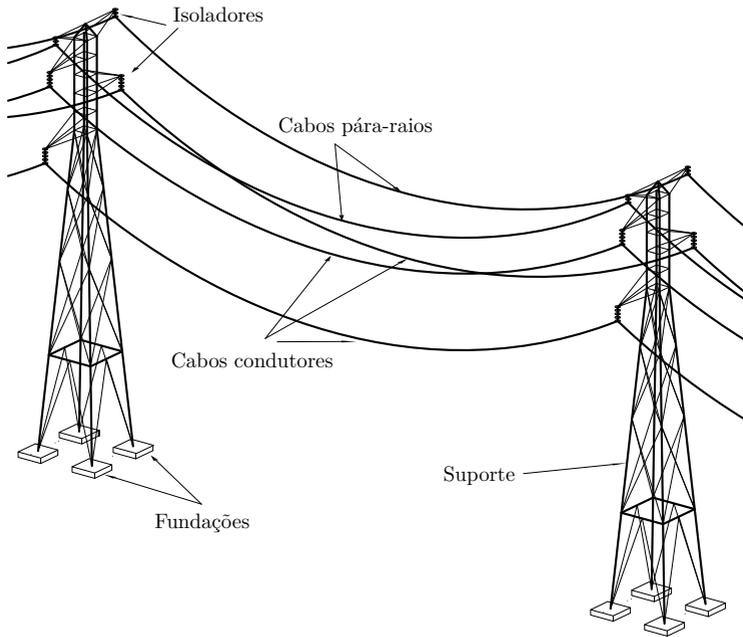
Figura 2 – Esquema simplificado de uma rede de energia



Fonte: Adaptado de Alminhana (2017)

- Cabos condutores: responsáveis por conduzir a corrente elétrica;
- Cabos pára-raios: são usados para proteger os cabos condutores de raios;
- Suportes: suspendem os cabos condutores e protetores e evitam que estes toquem em objetos que não pertencem à rede elétrica. Podem ser formados por torres metálicas treliçadas ou postes de madeira, concreto ou metal;
- Isoladores: conectam os cabos condutores e pára-raios ao suporte, isolando a corrente elétrica;
- Fundações: transferem os carregamentos do suporte ao solo. Os tipos mais usuais são as grelhas metálicas, blocos e sapatas de concreto armado, tubulões, estacas e fundações ancoradas em rocha.

Figura 3 – Componentes de uma linha de transmissão



## 2.2 Classificação das torres metálicas treliçadas

Segundo Kaminski Jr (2007), as torres metálicas podem ser classificadas da seguinte forma:

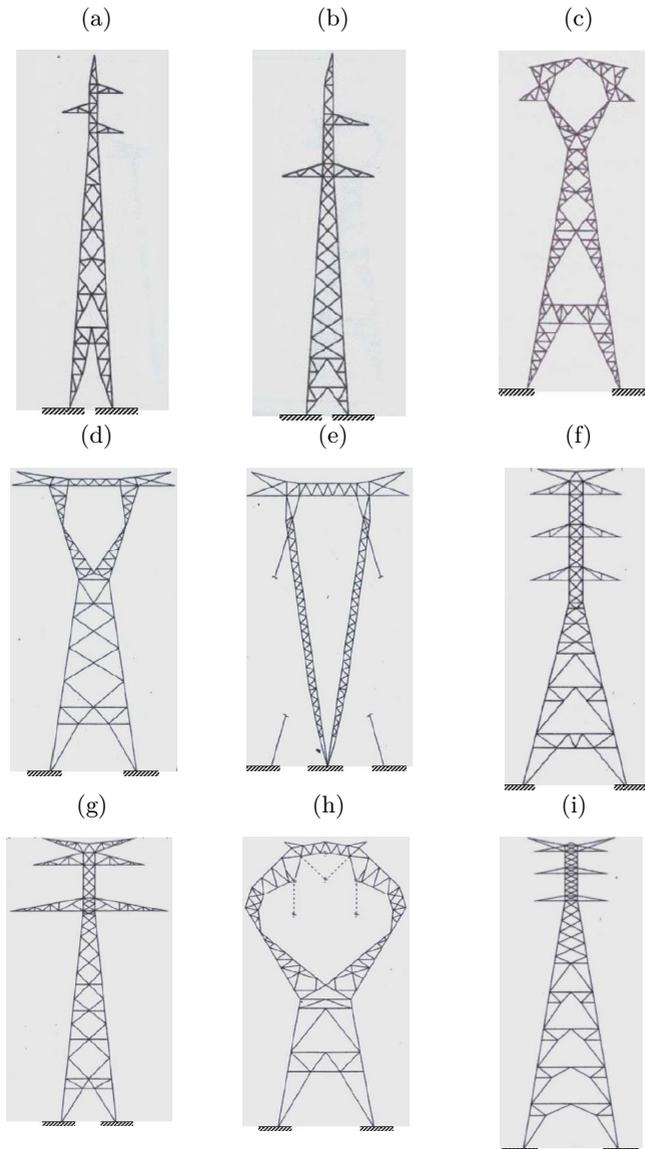
1. Quanto ao número de circuitos, podem ser de circuito simples (um circuito) ou duplo (dois circuitos);
2. Quanto à disposição dos condutores, podem ser dispostos em formato triangular (simétricos quando formam um

- triângulo equilátero ou assimétricos para outros casos), horizontais ou verticais;
3. Quanto ao modelo estrutural, podem ser torres autoportantes ou torres estaiadas;
  4. Quanto ao formato, a silhueta pode ser piramidal, tronco-piramidal, delta, cara de gato, raquete e torre em “V” (estaiada);
  5. Quanto à tensão elétrica, no Brasil as mais comuns são as torres de 69 kV, 138 kV, 230kV, 345 kV, 460 kV, 500 kV e 765 kV;
  6. Quanto à função da torre na linha, podem ser:
    - Torre de suspensão simples (ou torre tangente): são as torres mais comuns e representam cerca de 90% das torres em uma linha. São construídas em alinhamento com a linha, apresentando desvios de, no máximo, 6°;
    - Torre de suspensão para grandes vãos ou para ângulo médio (igual ou inferior a 30°): usada para mudança da direção da linha;
    - Torre de amarração ou ancoragem: utilizada para evitar o efeito cascata (ruptura em série das torre em uma TL), é colocada em intervalos de 5 a 10 km;
    - Torre de fim de linha ou terminal: torre de amarração ou ancoragem posicionada no fim da linha;
    - Torre de derivação: usada para a derivação da linha;
    - Torre de transposição ou rotação de fase: usada para assegurar a simetria elétrica de uma linha.

As principais configurações de torres metálicas de LT utilizadas no Brasil são mostradas na Fig. 4, sendo:

- Fig. 4a: torre autoportante, com formato tronco-piramidal, circuito simples e disposição triangular (simétrica) dos condutores;
- Fig. 4b: torre autoportante, com formato tronco-piramidal, circuito simples e disposição triangular (assimétrica) dos condutores;
- Fig. 4c: torre autoportante, com formato cara de gato, circuito simples e disposição triangular dos condutores;
- Fig. 4d: torre autoportante, com formato delta, circuito simples, disposição horizontal dos condutores e tensão elétrica da linha de 765 kV;
- Fig. 4e: torre estaiada, com formato em “V”, circuito simples, disposição horizontal dos condutores e tensão elétrica da linha de 765 kV;
- Fig. 4f: torre autoportante, com formato tronco-piramidal, circuito duplo, disposição vertical dos condutores e tensão elétrica da linha de 500 kV;

Figura 4 – Exemplos de torres de LT utilizadas no Brasil



Fonte: Kaminski Jr (2007)

- Fig. 4g: torre autoportante, com formato tronco-piramidal, circuito duplo, disposição triangular dos condutores e tensão elétrica da linha de 460 kV;
- Fig. 4h: torre autoportante, com formato raquete, circuito simples, disposição triangular dos condutores e tensão elétrica da linha de 500 kV;
- Fig. 4i: torre autoportante, com formato tronco-piramidal, circuito duplo, disposição vertical dos condutores e tensão elétrica da linha de 500 kV.

## 2.3 Testes de protótipo

Testes com protótipos, como ilustrado na Fig. 1, são geralmente realizados em novos projetos de torres, ao menos nas torres de suspensão, antes que a produção em série seja iniciada. Durante esses ensaios as estruturas devem resistir a 100% das cargas últimas de projeto. Dessa forma, é possível prevenir que erros de projeto sejam transferidos à produção industrial. Ademais, esses testes são capazes de providenciar importantes informações qualitativas do projeto da torre com relação ao comportamento global da estrutura antes da falha.

De acordo com Menezes (1988), os testes de protótipos podem ser divididos em testes destrutivos e não-destrutivos. Enquanto que no primeiro caso a ruptura da estrutura é atingida, no segundo o teste vai até 100% da carga de projeto, no qual

a ruptura pode ou não ser alcançada, a fim de verificar apenas se o protótipo resiste ao carregamento especificado. Segundo Kaminski Jr (2007), quando não ocorre a falha em um ensaio não-destrutivo, o projeto é considerado satisfatório, caso contrário a torre é reforçada e novamente testada.

As cargas de projeto são aplicadas nas ligações da estrutura por um sistema de cabos e polias. Esses carregamentos são simultaneamente aumentados e suas intensidades são monitoradas por células de carga, posicionadas próximas aos pontos de aplicação (KAMINSKI JR, 2007). Ao atingir um determinado valor, a carga é mantida constante durante um período de tempo. Nesse intervalo, são medidos os deslocamentos em pontos específicos da estrutura com auxílio de equipamentos ópticos.

Para a simulação numérica dos testes de protótipo, a carga de falha é definida neste trabalho como sendo a maior carga resistida pela estrutura. Quando a carga de falha é atingida, diz-se que o colapso da estrutura foi alcançado.

## Capítulo 3

# Análise não linear de estruturas reticuladas

### 3.1 Introdução

Para o dimensionamento de uma torre de transmissão de energia, geralmente se realiza uma análise linear elástica. O método é baseado nas seguintes premissas: as deformações são pequenas (infinitesimais); o material estrutural segue a lei de Hooke; as condições de contorno permanecem as mesmas durante a análise e as forças atuantes na estrutura são conservativas, i.e., mantém as suas direções durante as deformações (ALMINHANA, 2017). A equação de equilíbrio de um sistema com múltiplos graus de liberdade pode ser escrita como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{Q}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez elástica linear da estrutura,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos e  $\mathbf{Q}$  é o vetor de forças aplicadas. A Eq. 3.1 é formulada para a configuração indeformada da estrutura e pode ser resolvida em uma única etapa.

Em uma análise não linear, os efeitos dos deslocamentos e deformações de segunda ordem do sistema devem ser considerados para a formulação das equações de equilíbrio, que devem ser obtidas para a configuração deformada da estrutura (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2015). Assim, a equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

é formulada para cada mudança na configuração da estrutura, onde  $\mathbf{K}_T$  é a matriz de rigidez tangente da estrutura,  $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos incrementais, e  $\Delta \mathbf{Q}$  é o vetor do incremento de forças. A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  é formada por uma componente linear elástica e uma ou mais componentes que incluem as não linearidades geométricas e físicas e representa a rigidez da estrutura para uma dada configuração.

### 3.1.1 Tipos de não linearidade

Existem diversos tipos de não linearidade em uma estrutura. Dentre as principais, pode-se citar a não linearidade geométrica e a não linearidade física.

#### 3.1.1.1 Não linearidade geométrica

Para estruturas que sofrem grandes mudanças em sua geometria (i.e., estruturas com grandes deslocamentos), as equa-

ções de equilíbrio devem ser reformuladas em cada configuração deformada. Esse tipo de não linearidade é denominado não linearidade geométrica e tem grande efeito no estudo de colapso de estruturas.

O principal caso de não linearidade geométrica ocorre para estruturas com pequenas deformações, mas grandes deslocamentos. Pode ocorrer, por exemplo, em estruturas cujos nós que conectam os elementos sejam muito susceptíveis à mudança de posição, mas o comprimento dos elementos não varia muito com o processo de deformação. Esse tipo de não linearidade pode ser encontrado em arcos, molas, barras de treliças, pórticos, placas e cascas finas.

Como exemplo, toma-se a viga engastada submetida a uma força concentrada  $P$  em sua extremidade, apresentada em Borst *et al.* (2012) e mostrada na Fig. 5. Para essa estrutura, pode-se obter uma deformação arbitrariamente pequena caso seja aumentada a sua rigidez  $EI$  e, ao mesmo tempo, haver grandes deslocamentos ao aumentar seu comprimento  $L$ .

Figura 5 – Viga engastada



#### 3.1.1.2 Não linearidade física

A não linearidade física caracteriza-se por causar relações não lineares entre tensão e deformação e pelo fato da análise

estrutural depender do caminho ou histórico de deformação do material. Muitos materiais apresentam comportamento não lineares tais como elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência. Por exemplo, o concreto, o aço e o solo podem apresentar comportamento que pode ser representado como elastoplástico em determinados casos. Metais em alta temperatura, argila, borracha e polímeros podem ter comportamento viscoelástico. No caso do aço, material empregado em torres de LT, costuma-se considerar comportamento elástico perfeitamente plástico em análises não lineares. No entanto, essa consideração nem sempre leva a respostas adequadas.

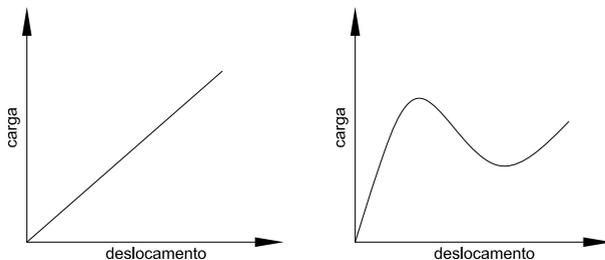
### 3.1.2 Caminho de equilíbrio

O comportamento de um sistema estrutural pode ser representado por um gráfico carga  $\times$  deslocamento. Se o gráfico for linear, o comportamento da estrutura é linear; enquanto para estruturas não lineares o gráfico resulta não linear. A curva contínua mostrada nesses gráficos é denominada caminho. Se em cada ponto que forma a curva a estrutura estiver em equilíbrio estático, a curva passa a se denominar caminho de equilíbrio, como mostrado na Fig. 6 para estruturas com comportamento linear e não linear. O estudo do caminho de equilíbrio é útil para compreender o comportamento não linear das estruturas.

#### 3.1.2.1 Pontos especiais no caminho de equilíbrio

Alguns pontos no caminho de equilíbrio são de especial interesse. Entre eles estão os chamados pontos críticos que são de dois tipos:

Figura 6 – Caminho de equilíbrio linear (esquerda) e não linear (direita)



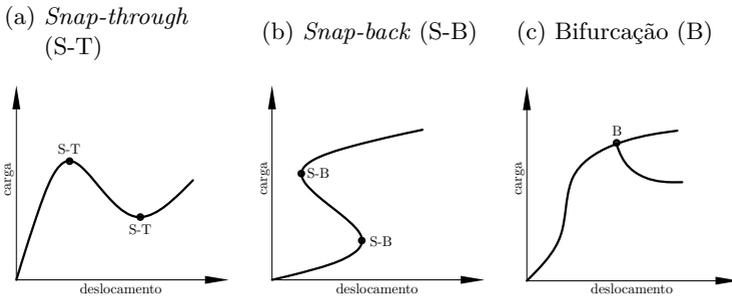
- Ponto limite de carga: é um ponto extremo (ponto de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio. Nestes pontos, a tangente à curva é horizontal. Do ponto de vista físico, ocorre um salto repentino entre dois pontos limites e esse fenômeno é conhecido como *snap-through*. Acontece diariamente em interruptores de luz e grampos de cabelo e também é comum em treliças e arcos levemente curvados;
- Ponto de bifurcação: é um ponto no qual dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam. Costuma-se associar os pontos de bifurcação com o fenômeno de flambagem.

Há também outro ponto especial no caminho de equilíbrio:

- Ponto limite de deslocamento: caracteriza-se por ser um ponto crítico cuja tangente é vertical e o fenômeno é conhecido como *snap-back*. Tem maior importância computacional pois pode afetar o desempenho de alguns métodos numéricos. Do ponto de vista físico, o sentido do deslocamento muda bruscamente.

Outro conceito importante é a tangente do caminho de equilíbrio ou tangente de rigidez. Nos pontos onde a tangente de rigidez é negativa, a estrutura é instável. Isso acontece quando os pontos críticos são ultrapassados no caminho de equilíbrio. A Fig. 7 ilustra os três tipos de pontos especiais no caminho de equilíbrio.

Figura 7 – Pontos especiais e fenômenos que ocorrem no caminho de equilíbrio



### 3.2 Sistemas de referência

A maioria das formulações para descrição do movimento de um corpo deformado são baseadas em referenciais Lagrangeanos. Nesses referenciais os deslocamentos em um sistema estrutural, decorrentes de um dado carregamento, são medidos em relação a uma configuração de referência desse sistema. Numa análise não linear incremental pode-se adotar duas formas de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano total (RLT) e referencial Lagrangeano atualizado (RLA).

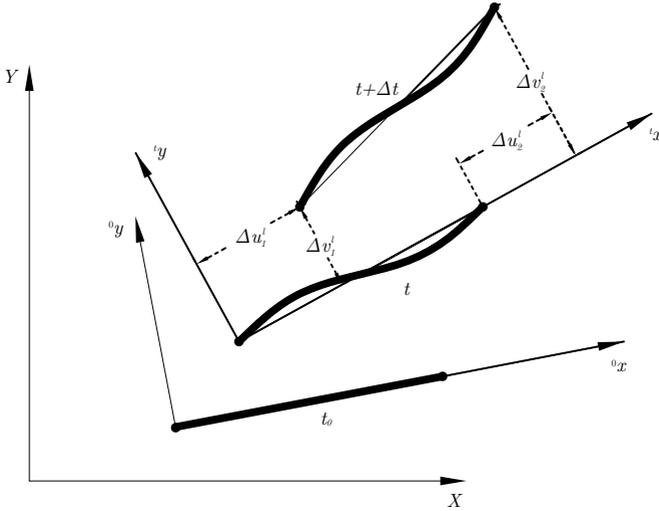
No RLA os deslocamentos são medidos em relação à

última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustrado na Fig. 8, onde  $\Delta u^l$  e  $\Delta v^l$  são os incrementos de deslocamentos nodais nas direções  $x$  e  $y$  da última configuração de equilíbrio (i.e.,  ${}^t x$  e  ${}^t y$ ). Como descrito em Silva (2009), o desenvolvimento de metodologias incrementais para análise não linear começa com a divisão do caminho de carregamento de um corpo sólido em um certo número de configurações de equilíbrio. No RLA, três configurações para o corpo podem ser estabelecidas em termos de um sistema de coordenadas cartesianas: a configuração inicial,  $t_0$ ; a última configuração deformada,  $t$ ; e a configuração deformada corrente,  $t + \Delta t$ . Admite-se que todas as variáveis de estado, tais como, tensões, deformações e deslocamentos, juntamente com a história de carregamento, são conhecidas na configuração  $t$ . A partir disso, tem-se como objetivo a formulação de um processo incremental para determinar todas essas variáveis de estado para o corpo na configuração  $t + \Delta t$ . Isso é feito considerando que o carregamento externo que atuou na configuração  $t$  tenha sofrido um pequeno acréscimo de valor. O passo que caracteriza o processo de deformação do corpo de  $t$  para  $t + \Delta t$  é comumente referido como um passo incremental. Neste trabalho, o RLA foi adotado devido à sua eficiência computacional em resolver problemas envolvendo elementos estruturais do tipo viga (BATHE; BOLOURCHI, 1979).

### 3.3 Formulação não linear do elemento finito

Com base no princípio dos trabalhos virtuais, a equação de equilíbrio de um corpo na configuração deformada  $t + \Delta t$ ,

Figura 8 – Referencial Lagrangeano atualizado



segundo McGuire, Gallagher & Ziemian (2015), pode ser escrita como

$$\int_{V_{t+\Delta t}} {}_{t+\Delta t}\sigma_{ij} {}_{t+\Delta t}\delta e_{ij} dV_{t+\Delta t} = {}^{t+\Delta t}R, \quad (3.3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $e_{ij}$  é o tensor de deformações infinitesimal,  $R$  é o trabalho virtual externo e a integração é em relação ao volume na configuração deformada. Na equação acima, o índice  $t + \Delta t$  indica que os tensores são calculados para a configuração deformada e a integração é feita em relação ao volume deformado. Por essas razões, embora a Eq. 3.3 seja uma declaração válida do princípio dos trabalhos virtuais, ela não pode ser utilizada para a determinação das tensões físicas na configuração  $t + \Delta t$  pois essa configuração ainda é desconhecida.

Como citado anteriormente, o movimento de um corpo sólido pode ser descrito por três configurações: (i) a configuração indeformada inicial,  $t_0$ ; (ii) a última configuração de equilíbrio calculada,  $t$ ; e (iii) a configuração deformada atual,  $t + \Delta t$ . No RLA, a última configuração calculada,  $t$ , é selecionada como a configuração de referência para determinar as equações de equilíbrio para o elemento na configuração atual,  $t + \Delta t$ . Assim, pode-se obter uma condição equivalente à Eq. 3.3 (BATHE, 2006). A equação de equilíbrio de um elemento na configuração  $t + \Delta t$  pode ser escrita na forma incremental como

$$\int_{V_t} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t} R, \quad (3.4)$$

onde  $\tau_{ij}$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações de Green-Lagrange. Os índices esquerdos superiores denotam a configuração na qual a quantidade ocorre e os índices esquerdos inferiores indicam a configuração na qual a quantidade é medida. Em outras palavras, o índice  $t + \Delta t$  indica que os tensores são calculados para a configuração deformada, enquanto o índice  $t$  indica que eles são referidos à última configuração de equilíbrio calculada. A Eq. 3.4 representa o equilíbrio do elemento na configuração deformada  $t + \Delta t$ , mas medido em relação à  $t$ .

As tensões podem ser decompostas em

$${}^{t+\Delta t} \tau_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}_t \tau_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + {}_t \tau_{ij}, \quad (3.5)$$

onde  ${}^t \tau_{ij}$ , o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff na configuração  $t$ , é idêntico à tensão de Cauchy,  ${}^t \sigma_{ij}$ , nessa configuração, e  ${}_t \tau_{ij}$  é o incremento da tensão de Piola-Kirchhoff entre as configurações  $t$  e  $t + \Delta t$ .

Para as deformações de Green-Lagrange e deslocamentos incrementais expressos em termos da configuração de referência, tem-se que  ${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = {}_t\varepsilon_{ij}$ . O tensor de Green-Lagrange é definido como

$${}_t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}({}_tu_{i,j} + {}_tu_{j,i} + {}_tu_{k,i} {}_tu_{k,j}). \quad (3.6)$$

Considerando  ${}_t\varepsilon_{ij} = {}_te_{ij} + {}_t\eta_{ij}$ , a Eq. 3.6 pode ser decomposta em uma parcela linear e uma parcela não linear, em que

$${}_te_{ij} = \frac{1}{2}({}_tu_{i,j} + {}_tu_{j,i}) \quad \text{e} \quad {}_t\eta_{ij} = \frac{1}{2}({}_tu_{k,i} {}_tu_{k,j}) \quad (3.7)$$

são as parcelas linear e não linear do incremento de deformações de Green-Lagrange, respectivamente. As deformações virtuais podem ser decompostas da mesma forma. Substituindo as Eqs. 3.5-3.7 na Eq. 3.4, obtém-se

$$\int_{V_t} {}_t\tau_{ij} \delta {}_t\varepsilon_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}_t\sigma_{ij} \delta {}_te_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}_t\sigma_{ij} \delta {}_t\eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t}R. \quad (3.8)$$

Bathe (2006) sugere as aproximações  ${}_t\tau_{ij} = {}_tC_{ijrs} {}_te_{rs}$  e  $\delta {}_t\varepsilon_{ij} = \delta {}_te_{ij}$ , em que  ${}_tC_{ijrs}$  é o tensor tensão-deformação incremental do material na configuração  $t$ . O resultado é a equação linearizada

$$\int_{V_t} {}_tC_{ijrs} {}_te_{rs} \delta {}_te_{ij} dV_t + \int_{V_t} {}_t\sigma_{ij} \delta {}_t\eta_{ij} dV_t = {}^{t+\Delta t}R - \int_{V_t} {}_t\sigma_{ij} \delta {}_te_{ij} dV_t \quad (3.9)$$

que é válida para qualquer elemento em que a configuração  $t$  é conhecida. A integral à esquerda da Eq. 3.9 irá gerar a matriz de rigidez linear clássica  $\mathbf{K}_L$  e o detalhamento da obtenção pode ser encontrado em diversas referências, como em McGuire, Gallagher

& Ziemian (2015). Na próxima seção será apresentado o elemento finito considerado no modelo mecânico e, em seguida, a Eq. 3.9 será derivada de modo a obter a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ , a partir da segunda integral do lado esquerdo da igualdade. As matrizes  $\mathbf{K}_L$  e  $\mathbf{K}_G$  completas são mostradas no Apêndice A. A integral à direita da igualdade, para uma dada variação dos deslocamentos, representa as forças atuantes em um elemento antes da aplicação de um incremento de carga.

### 3.3.1 Elemento de pórtico

Elementos finitos de pórtico foram adotados na análise para modelar o comportamento não linear físico e geométrico de torres de linha de transmissão. Seções assimétricas de paredes finas, como perfis cantoneira, são amplamente utilizadas como membros das torres. Elas têm resistência relativamente baixa à torção e à flexão e são conectadas excêntricamente, o que torna a sua formulação mais complexa do que elementos com seção duplamente simétrica.

Kitipornchai & Chan (1987) desenvolveram uma matriz de rigidez geométrica para seções assimétricas de paredes finas, que é usada neste trabalho para lidar com a não linearidade geométrica. O método pode ser utilizado para analisar estruturas de grande escala, como torres de transmissão, pois permite determinar a resposta da estrutura no estágio pré e pós flambagem. A matriz obtida permite a verificação de instabilidade devido à flambagem por flexão e por flexo-torção.

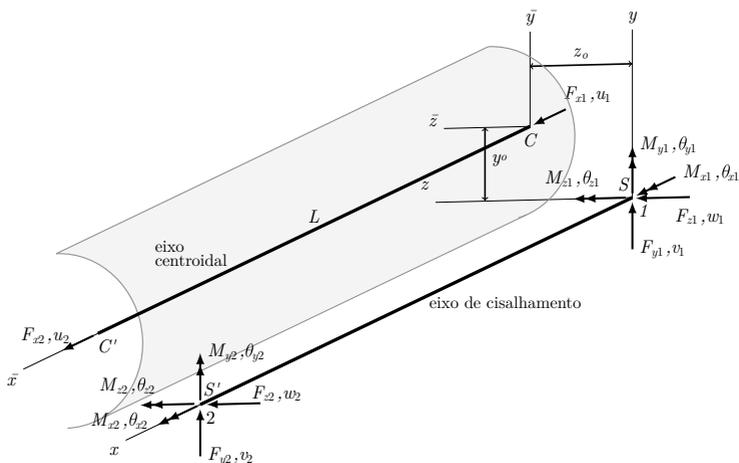
A não linearidade física dos elementos é contemplada ao adotar um modelo de plasticidade concentrada, em conjunto

com o conceito de superfície de escoamento, o que é uma maneira de incluir o comportamento inelástico de grandes conjuntos de elementos de pórtico. Assume-se que, após um ponto da seção transversal atingir a tensão de escoamento do material, a seção transversal inteira irá se comportar de maneira inelástica, onde a interação entre tensões irá resultar na plastificação da seção. A plastificação completa da seção, i.e., a formação de rótulas plásticas, irá ocorrer devido à ação combinada da força axial e momentos fletores atuantes em cada nó do elemento e implicará na redução da rigidez da estrutura, contabilizada por uma matriz de redução plástica. Após a plastificação da seção, o incremento nas forças aplicadas causará o escoamento da seção. A plastificação das seções transversais é controlada por uma superfície de escoamento que divide um espaço de forças tridimensional em zonas elásticas e plásticas. Caso haja descarregamento, as rótulas podem voltar a ter comportamento elástico.

### 3.3.1.1 Formulação

O elemento de pórtico é definido como mostra a Fig. 9. O elemento é formado por dois nós, com seis graus de liberdade para cada nó, referentes às rotações e translações. Um sistema ortogonal de coordenadas  $xyz$  é definido de modo que os eixos  $y$  e  $z$  passem através dos centros de cisalhamento  $S$  e  $S'$  da seção transversal, em cada extremidade do elemento. Um sistema paralelo de coordenadas  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  passa através dos centroides  $C$  e  $C'$  da seção transversal do elemento. Há seis possíveis ações que podem ser aplicadas em cada extremidade do elemento,  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_z$ , com seis correspondentes componentes de deslocamento,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ .

Figura 9 – Deslocamentos e forças nodais no elemento de pórtico espacial



As seguintes considerações são adotadas na formulação das relações força-deslocamento do elemento de pórtico:

- O elemento de pórtico é prismático, reto e compacto, i.e.,  $d/L \leq 0,1$ , onde  $d$  é qualquer dimensão da seção transversal do elemento e  $L$  é seu comprimento;
- A seção transversal é rígida e permanece plana após o processo de deformação;
- A seção transversal é compacta o suficiente para evitar a ocorrência de flambagem local;
- O efeito do empenhamento é negligenciável;
- As deformações são pequenas, mas os deslocamentos podem ser grandes;

- As deformações plásticas são confinadas às zonas plásticas nas extremidades do elemento;
- Antes de alcançar o limite de plastificação, o material é elástico, homogêneo e isotrópico;
- Depois do limite plástico, considera-se que o material possui comportamento elástico perfeitamente plástico sem encruamento;
- Os efeitos das forças cisalhantes não contribuem para a plastificação da seção. Assim, o escoamento é gerado apenas pela combinação da força axial e momentos fletores;
- As deformações plásticas são governadas pelo critério da normalidade, descrito na seção 3.3.3.2.

A equação de equilíbrio do problema pode ser descrita como

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \underbrace{[\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_P]}_{\mathbf{K}_T} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.10)$$

onde  ${}^t\mathbf{F}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  são os vetores de forças nodais nas configurações  $t$  e  $t+\Delta t$ , respectivamente. Eles podem ser expandidos em termos dos componentes de força correspondentes aos graus de liberdade do elemento da forma

$$\mathbf{F} = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{z1} \ M_{x1} \ M_{y1} \ M_{z1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{z2} \ M_{x2} \ M_{y2} \ M_{z2}]^T. \quad (3.11)$$

A matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$  não é derivada diretamente do princípio dos trabalhos virtuais, mas é um artifício usado para o controle das forças internas de seções plastificadas, conforme

mostrado na Seção 3.3.3. O vetor  $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor de incrementos de deslocamentos entre os passos de carga  $t$  e  $t + \Delta t$ , que é referenciado à configuração do sistema no passo de carga anterior  $t$ , e é definido por

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta v_1 \ \Delta w_1 \ \Delta \theta_{x1} \ \Delta \theta_{y1} \ \Delta \theta_{z1} \ \Delta u_2 \ \Delta v_2 \ \Delta w_2 \ \Delta \theta_{x2} \ \Delta \theta_{y2} \ \Delta \theta_{z2}]^T. \quad (3.12)$$

### 3.3.2 Matriz de rigidez geométrica

Definido o tipo de elemento finito a ser utilizado, a derivação da matriz de rigidez geométrica é feita a partir da segunda integral da Eq. 3.8 e é baseada em Kitipornchai & Chan (1987). Todas as quantidades são medidas em relação à última configuração de equilíbrio  $t$ , eliminando a necessidade dos índices da Eq. 3.9. Assim, a integral se torna

$$\int_{V_t} {}^t \sigma_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV_t = \int_V \sigma_{ij} \delta \eta_{ij} dV. \quad (3.13)$$

Para um elemento de pórtico, a Eq. 3.13 pode ser simplificada ao considerar apenas a tensão axial  $\sigma_{xx}$  e as tensões cisalhantes  $\sigma_{yx} = (\sigma_{xy})$  e  $\sigma_{zx} = (\sigma_{xz})$  no plano  $zy$ , o que resulta em

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \eta_{ij} dV = \int_V (\sigma_{xx} \delta \eta_{xx} + 2\sigma_{yx} \delta \eta_{yx} + 2\sigma_{zx} \delta \eta_{zx}) dV. \quad (3.14)$$

As tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yx}$  e  $\sigma_{zx}$  podem ser escritas em termos dos esforços internos e resultam em

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A} + \frac{M_z \bar{y}}{I_{\bar{z}}} + \frac{M_y \bar{z}}{I_{\bar{y}}}, \quad (3.15a)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{F_y}{A} \quad (3.15b)$$

e

$$\sigma_{zx} = \frac{F_z}{A}, \quad (3.15c)$$

onde  $F_x$  é a força axial ao longo do eixo centroidal,  $F_y$  e  $F_z$  são as forças cortantes nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, atuando em um par de planos paralelos aos eixos principais de inércia,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos na direção dos eixos principais de inércia,  $A$  é a área da seção transversal e  $I_{\bar{y}}$  e  $I_{\bar{z}}$  são os momentos de inércia em relação aos eixos principais. As coordenadas do centroide,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  estão relacionadas às coordenadas do centro cisalhante,  $y$  e  $z$ , de acordo com

$$\bar{y} = y - y_0 \quad (3.16a)$$

e

$$\bar{z} = z - z_0, \quad (3.16b)$$

onde  $y_0$  e  $z_0$  são as coordenadas do centroide relativas ao centro cisalhante. As deformações são expressas por

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dv_i}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw_i}{dx} \right)^2 \right], \quad (3.17a)$$

$$\eta_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{dw_i}{dy} \frac{dw_i}{dx} + \frac{dv_i}{dy} \frac{dv_i}{dx} \right) \quad (3.17b)$$

e

$$\eta_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv_i}{dz} \frac{dv_i}{dx} + \frac{dw_i}{dz} \frac{dw_i}{dx} \right), \quad (3.17c)$$

onde  $v_i$  e  $w_i$  representam os deslocamentos de um ponto arbitrário na seção transversal de acordo com as direções  $y$  e  $z$ ,

respectivamente. Substituindo as Eqs. 3.15 e 3.17 na Eq. 3.14, se obtém

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \eta_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{F_x}{A} + \frac{M_z y_0}{I_z} + \frac{M_y z_0}{I_y} \right) \delta \left[ \left( \frac{dv_i}{dx} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{dw_i}{dx} \right)^2 \right] dV + \int_V \frac{F_y}{A} \delta \left( \frac{dw_i}{dy} \frac{dw_i}{dx} + \frac{dv_i}{dy} \frac{dv_i}{dx} \right) dV \quad (3.18) \\ &\quad + \int_V \frac{F_z}{A} \delta \left( \frac{dv_i}{dz} \frac{dv_i}{dx} + \frac{dw_i}{dz} \frac{dw_i}{dx} \right) dV. \end{aligned}$$

Assumindo uma variação linear entre os nós, os momentos  $M_y$  e  $M_z$  podem ser expressos em termos de seus valores nodais, sendo

$$M_y = -M_{y1} \rho_1 + M_{y2} \rho_2 \quad (3.19a)$$

e

$$M_z = M_{z1} \rho_1 - M_{z2} \rho_2, \quad (3.19b)$$

onde

$$\rho_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.20a)$$

e

$$\rho_2 = \frac{x}{L}. \quad (3.20b)$$

Os valores de  $F_y$  e  $F_z$  podem ser encontrados por estática simples. Considerando pequenas deformações,  $v_i$  e  $w_i$  podem ser expressos em termos dos deslocamentos do centro de cisalhamento ( $v$  e  $w$ ) e do ângulo de giro  $\theta_x$  sobre o eixo do centro de cisalhamento, portanto

$$v_i = v - \theta_x z \quad (3.21a)$$

e

$$w_i = w + \theta_x y. \quad (3.21b)$$

Substituindo as Eqs. 3.16 e 3.19-3.21 na Eq. 3.18, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma_{ij} \delta \eta_{ij} dV &= \frac{1}{2} \int_0^L F_x \delta \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - 2z_0 \frac{dv}{dx} \frac{d\theta_x}{dx} \right. \\
 &\quad \left. + 2y_0 \frac{dw}{dx} \frac{d\theta_x}{dx} + I_p \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^L (-M_{y1} \rho_1 + M_{y2} \rho_2) \delta \left[ \beta_{\bar{y}} \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dv}{dx} \frac{d\theta_x}{dx} \right] dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^L (M_{z1} \rho_1 - M_{z2} \rho_2) \delta \left[ \beta_{\bar{z}} \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dw}{dx} \frac{d\theta_x}{dx} \right] dx \\
 &\quad + \int_0^L F_y \theta_x \frac{dw}{dx} dx - \int_0^L F_z \theta_x \frac{dv}{dx} dx,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde  $I_p$ , o momento polar de inércia, e as constantes  $\beta_{\bar{y}}$  e  $\beta_{\bar{z}}$  são dadas por

$$I_p = \int_A \frac{(y^2 + z^2)}{A} dA = \frac{I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}}{A} + y_0^2 + z_0^2, \tag{3.23a}$$

$$\beta_{\bar{y}} = \frac{1}{I_{\bar{y}}} \int_A (\bar{z}^3 + \bar{z}\bar{y}^2) dA + 2z_0 \tag{3.23b}$$

e

$$\beta_{\bar{z}} = \frac{1}{I_{\bar{z}}} \int_A (\bar{y}^3 + \bar{y}\bar{z}^2) dA + 2y_0. \tag{3.23c}$$

A Eq. 3.22 pode ser avaliada através da adoção de funções para os deslocamentos do elemento. Seleccionando uma função polinomial cúbica para os componentes  $v$  e  $w$  e uma variação

linear para  $u$  e  $\theta_x$ , tais funções podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} w \\ v \\ u \\ \theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

em que os coeficientes da matriz podem ser expressos em termos dos deslocamentos nodais do elemento. Substituindo esta equação na Eq. 3.22 e aplicando as variações, pode-se escrever

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \eta_{ij} dV = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \delta \mathbf{u}], \quad (3.25)$$

onde

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

é o vetor de deslocamentos nodais.

A matriz geométrica  $\mathbf{K}_G$  obtida com essa formulação é mostrada na Eq. A.4 do Apêndice A.

### 3.3.3 Matriz de redução plástica

Nesta seção, a formulação de uma matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$ , a ser incorporada na relação força-deslocamento apresentada na Eq. 3.10, é derivada, obtida de Marques (1990), Wong (2011) e Alminhana (2017). Os conceitos de análise elasto-plástica necessários para obter  $\mathbf{K}_P$  são examinados, em conjunto com suas relações matemáticas.

### 3.3.3.1 Critério de plastificação

Tresca e von Mises elaboraram os critérios mais usados para detectar o escoamento de materiais estruturais dúcteis (CHEN, 2007). O critério de Tresca diz que o escoamento irá ocorrer quando a tensão cisalhante máxima em um plano de um ponto ultrapassar a máxima tensão cisalhante obtida em um ensaio de tração uniaxial. De acordo com von Mises, um ponto começa a escoar se a energia de distorção ultrapassar a respectiva energia gerada em um corpo de prova submetido a um ensaio uniaxial de tração até o seu limite elástico.

Quando todos os pontos da seção transversal de uma barra estão sujeitos a estados de tensão que satisfazem ao critério de escoamento adotado diz-se que naquela seção existe uma rótula plástica. Como em elementos de barra não se determina diretamente as tensões, pode-se estabelecer uma relação que deve ser cumprida pelos esforços internos, atuantes numa dada seção transversal, para que nela ocorra a plastificação total (i. e., a formação de uma rótula plástica). Essa relação é referida como um critério de plastificação da seção transversal e sua representação geométrica no espaço dos esforços internos é chamada de superfície de escoamento. A superfície de escoamento  $\Phi$  divide um espaço de forças de dimensão  $n$  em regiões elásticas e plásticas. Para seções transversais formadas por materiais idealizados com comportamento elástico perfeitamente plástico sem encruamento, sujeitas a forças axiais  $F_x$  e momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$ , a condição de escoamento pode se expressa como uma função das forças

nodais do elemento, definida por

$$\Phi(F_x, M_y, M_z) = 1, \quad (3.27)$$

onde as forças cortantes são desconsideradas no critério de plastificação da seção.

Na aplicação da Eq. 3.27, três situações são possíveis

$$\Phi \begin{cases} < 1, & \text{região elástica;} \\ = 1, & \text{região plástica;} \\ > 1, & \text{inadmissível.} \end{cases} \quad (3.28)$$

De modo a ser corretamente empregada na análise elastoplástica, a superfície de escoamento deve possuir uma forma convexa e fechada. Além disso, é desejável que a superfície seja contínua e suave para definir corretamente seu vetor normal. Recomenda-se que, na verificação da ocorrência de uma região plástica em uma seção, seja adotada uma margem de tolerância, usando o que pode ser chamado de faixa de plastificação. Isso significa que são consideradas plastificadas as seções que não cumpram, a rigor, o critério de plastificação  $\Phi = 1$ . Nesse trabalho, adotou-se como plastificadas as seções com superfície de escoamento no intervalo  $0,999 \leq \Phi \leq 1,001$ .

### 3.3.3.2 Regra do fluxo

A regra do fluxo afirma que as taxas de deformações plásticas e taxas de tensões são proporcionais. Para materiais elásticos perfeitamente plásticos uma regra do fluxo, denominada regra da normalidade, é geralmente empregada. Essa relação

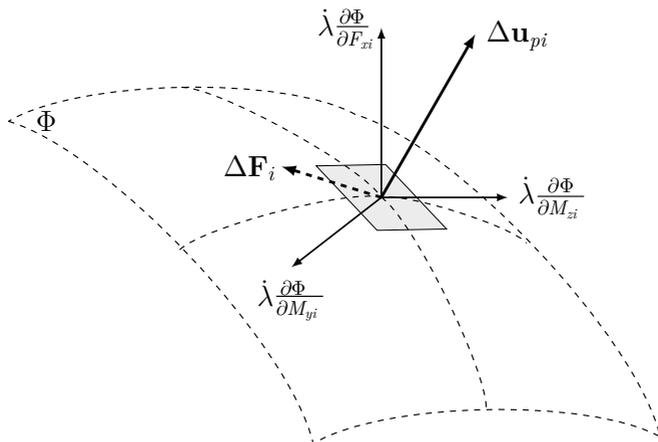
afirma que os incrementos de deslocamentos plásticos são normais à superfície de escoamento e pode ser expressa por

$$\Delta \mathbf{u}_{pi} = \dot{\lambda}_i \nabla \Phi(F_{xi}, M_{yi}, M_{zi}), \quad (3.29)$$

onde  $\Delta \mathbf{u}_{pi}$  é o componente plástico dos incrementos de deslocamentos nodais,  $\dot{\lambda}_i$  é a constante de plastificação e  $\nabla \Phi(F_{xi}, M_{yi}, M_{zi})$  é o vetor gradiente da superfície de escoamento, todos referentes à extremidade  $i$  do elemento, como mostrado na Fig. 10. O vetor gradiente é dado por

$$\nabla \Phi(F_{xi}, M_{yi}, M_{zi}) = \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial F_{xi} \\ \partial \Phi / \partial M_{yi} \\ \partial \Phi / \partial M_{zi} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Figura 10 – Vetor de incremento de deslocamentos plásticos



## 3.3.3.3 Condição de consistência

No caso de materiais com comportamento elástico perfeitamente plástico, a superfície de escoamento permanece fixa e nenhum trabalho plástico adicional pode ser gerado. Como resultado, qualquer incremento das forças nodais  $\Delta \mathbf{F}_i$  do elemento no regime plástico deve ser sempre tangente à superfície de escoamento, enquanto os incrementos de deslocamentos plásticos são sempre ortogonais (Fig. 10). Essas relações são chamadas de condição de consistência e podem ser expressas por

$$\Delta \mathbf{u}_{pi}^T \Delta \mathbf{F}_i = 0. \quad (3.31)$$

De modo a considerar ambas as extremidades do elemento, as Eqs. 3.29 e 3.31 podem ser reescritas como

$$\Delta \mathbf{u}_p = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{p1} \\ \Delta \mathbf{u}_{p2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_1 & 0 \\ 0 & \nabla \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \dot{\lambda} \quad (3.32)$$

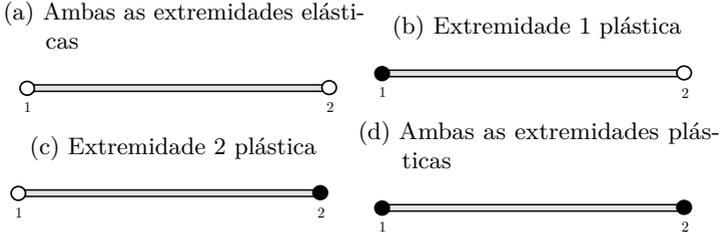
e

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{F} = 0. \quad (3.33)$$

## 3.3.3.4 Matriz de redução plástica

Conforme a Fig. 11, quatro comportamentos diferentes devem ser considerados em um elemento de pórtico: (a) ambas as extremidades possuem comportamento elástico, (b) o nó 1 plastificado e o nó 2 elástico, (c) o nó 1 elástico e o nó 2 plastificado e (d) ambos os nós estão plastificados. A matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$  deve ser determinada para cada caso.

Figura 11 – Quatro comportamentos para o elemento de pórtico



A função principal da matriz  $\mathbf{K}_P$  é confinar as forças internas nodais em um ponto na superfície de escoamento. Isso assegura que o vetor de incremento de forças, no próximo passo de carga, seja tangente à superfície de escoamento no ponto e a resultante de deslocamentos plásticos seja normal à superfície. Assumindo que em um dado passo de carga os incrementos de deslocamentos nodais  $\Delta \mathbf{u}$ , a partir do ponto de equilíbrio, permanecem no regime plástico, i.e., nenhum descarregamento elástico ocorreu, é possível tratar  $\Delta \mathbf{u}$  como a soma de uma parcela elástica  $\Delta \mathbf{u}_e$  e de uma parcela plástica  $\Delta \mathbf{u}_p$ , i.e.,

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_e + \Delta \mathbf{u}_p. \quad (3.34)$$

Um incremento nas forças nodais  $\Delta \mathbf{F}$  do elemento é causado pela componente elástica dos deslocamentos, de acordo com

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u}_e, \quad (3.35)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}_E$  é a soma das matrizes de rigidez linear e geométrica,  $\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G$ , ou seja, é a parcela elástica na

matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ . A seguir, será formulada a matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$  para os quatro casos.

- a) **Ambas as extremidades elásticas:** não há redução na rigidez do elemento devido à formação de alguma rótula plástica e a matriz de redução se torna

$$\mathbf{K}_P = \mathbf{0}, \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz nula de ordem  $12 \times 12$ .

- b) **Extremidade 1 plástica:** supõe-se que o elemento apresenta uma rótula plástica na sua extremidade 1 e os demais pontos estão no regime elástico. Se os deslocamentos das extremidades 1 e 2 do elemento sofrem incrementos representados pelos vetores  $\Delta \mathbf{u}_1$  e  $\Delta \mathbf{u}_2$ , respectivamente, os correspondentes incrementos no esforços atuantes nas citadas extremidades são dados por

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_{11} \Delta \mathbf{u}_{1e} + \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{u}_2 \quad (3.37a)$$

e

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \mathbf{K}_{21} \Delta \mathbf{u}_{1e} + \mathbf{K}_{22} \Delta \mathbf{u}_2, \quad (3.37b)$$

sendo

$$\Delta \mathbf{u}_{1e} = \Delta \mathbf{u}_1 - \Delta \mathbf{u}_{1p} \quad (3.38)$$

a parte elástica de  $\Delta \mathbf{u}_1$ , ao contrário de  $\Delta \mathbf{u}_{1p}$ , que representa a parte plástica. As matrizes  $\mathbf{K}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_{12}$ ,  $\mathbf{K}_{21}$  e  $\mathbf{K}_{22}$  são submatrizes, de ordem  $6 \times 6$ , da matriz de rigidez elástica do elemento, ou seja,

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Os índices das submatrizes representam os extremos do elemento em relação aos quais as mesmas representam a rigidez. De acordo com a condição de normalidade, dada pela Eq. 3.29,  $\Delta \mathbf{u}_{1p}$  tem a direção e o sentido do vetor gradiente  $\mathbf{G}_1$  da superfície de escoamento no ponto correspondente aos esforços atuantes no extremo 1 do elemento. Assim, tem-se que

$$\Delta \mathbf{u}_{1p} = \dot{\lambda}_1 \mathbf{G}_1, \quad (3.40)$$

sendo  $\dot{\lambda}_1$  a constante de plastificação no extremo 1 e  $\mathbf{G}_1 = \nabla \Phi_1$ . Substituindo as Eqs. 3.38 e 3.40 na Eq. 3.37, chega-se a

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_{11}(\Delta \mathbf{u}_1 - \dot{\lambda}_1 \mathbf{G}_1) + \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{u}_2 \quad (3.41a)$$

e

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \mathbf{K}_{21}(\Delta \mathbf{u}_1 - \dot{\lambda}_1 \mathbf{G}_1) + \mathbf{K}_{22} \Delta \mathbf{u}_2. \quad (3.41b)$$

A partir da condição de consistência, dada pela Eq. 3.31, pode-se escrever que

$$\mathbf{G}_1^T \Delta \mathbf{F}_1 = 0. \quad (3.42)$$

Introduzindo a Eq. 3.42 na Eq. 3.37a com todos os termos pré multiplicados por  $\mathbf{G}_1^T$ , resulta

$$\mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \lambda \mathbf{G}_1 = 0, \quad (3.43)$$

ou ainda,

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{\mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{G}_1} \left[ \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{12} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.44)$$

As Eqs. 3.41 podem ser combinadas na expressão matricial

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_1 \\ \Delta \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo de ordem  $6 \times 1$ . Agora, usando as Eqs. 3.44 e 3.45, chega-se a

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_1 \\ \Delta \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} - \\ &\frac{1}{\mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{G}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \left[ \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{12} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

ou ainda, de forma compacta,

$$\Delta \mathbf{F} = [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_P] \Delta \mathbf{u}, \quad (3.47)$$

sendo

$$\mathbf{K}_P = -\frac{1}{\mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{G}_1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \left[ \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{11} \quad \mathbf{G}_1^T \mathbf{K}_{12} \right]. \quad (3.48)$$

- c) **Extremidade 2 plástica:** caso a rótula plástica esteja localizada no nó 2, a matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$  pode

ser obtida de maneira análoga ao item b), o que resulta em

$$\mathbf{K}_P = -\frac{1}{\mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_2} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

e na contante de plastificação

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{\mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{G}_2} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{21} & \mathbf{G}_2^T \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.50)$$

- d) **Ambas as extremidades plásticas:** supõe-se que o elemento apresente rótulas plásticas nos extremos 1 e 2. Substituindo as Eqs. 3.32 e 3.34 na Eq. 3.35, chega-se a

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_E (\Delta \mathbf{u} - \mathbf{G} \dot{\lambda}). \quad (3.51)$$

Utilizando as Eqs. 3.33 e 3.51 e isolando  $\dot{\lambda}$ , chega-se à expressão

$$\dot{\lambda} = [\mathbf{G}^T \mathbf{K}_E \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u}. \quad (3.52)$$

A partir da Eq. 3.51 e usando a Eq. 3.52, as forças nodais incrementais podem ser definidas como

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u} - \mathbf{K}_E \mathbf{G} [\mathbf{G}^T \mathbf{K}_E \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u}, \quad (3.53)$$

ou, de forma compacta, como

$$\Delta \mathbf{F} = [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_P] \Delta \mathbf{u}, \quad (3.54)$$

onde a matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$  é dada por

$$\mathbf{K}_P = -\mathbf{K}_E \mathbf{G} [\mathbf{G}^T \mathbf{K}_E \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{K}_E. \quad (3.55)$$

## 3.3.3.5 Superfícies de escoamento

A superfície de escoamento e seu vetor gradiente são a base da formulação da matriz de redução plástica  $\mathbf{K}_P$ . Equações com uma única expressão para seções cantoneira foram introduzidas por Al-Bermani & Kitipornchai (1990) e Kitipornchai *et al.* (1991). Essas expressões são relativamente complexas e contemplam seções cantoneira de abas desiguais. Neste trabalho, foi utilizada uma equação mais simples para a superfície de escoamento de seções cantoneira de abas iguais, formulada por Alminhana, Mason & Albermani (2018), pois representa as seções utilizadas nas torres de transmissão analisadas no presente trabalho. A superfície de escoamento é função da força axial e momentos fletores normalizados e expressa por

$$\Phi(f_x, m_y, m_z) = \begin{cases} f_x^2 - \text{sgn}(m_y)|m_y|^{1,05} + (1 + f_x)^2 m_z^2 & \text{para } m_y \leq m_{y,lim} \\ f_x^2 + \text{sgn}(m_y)|m_y|^{1,05} + (1 - f_x)^2 m_z^2 & \text{para } m_y > m_{y,lim} \end{cases} \quad (3.56)$$

onde  $\text{sgn}$  representa o sinal da variável em questão e

$$f_x = \frac{F_x}{F_{px}}, \quad (3.57a)$$

$$m_y = \frac{M_y}{M_{py}} \quad (3.57b)$$

e

$$m_z = \frac{M_z}{M_{pz}}, \quad (3.57c)$$

onde  $F_{px}$  é a força axial de plastificação, e  $M_{py}$  e  $M_{pz}$  são os momentos de plastificação em relação aos eixos principais cen-

troidais  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , respectivamente. O valor de  $m_{y,lim}$  controla a interseção entre as duas curvas e é dado por

$$m_{y,lim} = 2\text{sgn}(f_x) \left[ \frac{|1 - f_x^2|}{1 + f_x^2} \right]^{\frac{1}{1,05}} \quad (3.58)$$

Os componentes do vetor gradiente são obtidos ao derivar a Eq. 3.56 em relação à força axial normalizada  $f_x$  e momentos fletores normalizados  $m_y$  e  $m_z$ . Como duas expressões são possíveis para  $\Phi$  na Eq. 3.56, dois conjuntos de derivadas parciais são obtidos. Se  $m_y \leq m_{y,lim}$ , então

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_x} = 2f_x + 2(1 + f_x)m_z^2, \quad (3.59a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m_y} = -1,05|m_y|^{0,05} \quad (3.59b)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m_z} = 2(1 + f_x)^2 m_z. \quad (3.59c)$$

Caso contrário,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_x} = 2f_x + 2(1 - f_x)m_z^2, \quad (3.60a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m_y} = 1,05|m_y|^{0,05} \quad (3.60b)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m_z} = 2(1 - f_x)^2 m_z. \quad (3.60c)$$

### 3.4 Transformação de coordenadas no RLA

As matrizes de rigidez do elemento são formuladas usando o sistema de referência local do elemento, relacionando deslocamentos locais com respectivas forças locais. Ao se estudar o

comportamento de um elemento genérico, surge a necessidade de fazer a correspondência de grandezas referidas em diferentes sistemas de eixos através de uma matriz de transformação de coordenadas  $\mathbf{T}$ .

A transformação de coordenadas é utilizada nas seguintes etapas:

- Formação do vetor de forças: as forças internas nos extremos dos elementos, expressas no referencial local ( $\mathbf{F}^l$ ) devem ser transformadas para o referencial global ( $\mathbf{F}^g = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^l$ );
- Formação da matriz de rigidez da estrutura: a matriz de rigidez de cada elemento ( $\mathbf{K}_T^l$ ), no referencial local, deve ser transformada para o referencial global ( $\mathbf{K}_T^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_T^l \mathbf{T}$ );
- Cálculo dos deslocamentos nos elementos: é necessário que se obtenha os deslocamentos nodais no referencial do elemento a partir dos deslocamentos calculados no referencial global ( $\Delta \mathbf{u}^l = \mathbf{T} \Delta \mathbf{u}^g$ ).

### 3.4.1 Matrizes de transformação na configuração inicial

Como seções de paredes finas são consideradas, a transformação de forças, deslocamentos e da matriz de rigidez consiste em dois passos, com base em Alminhana (2017): transformação translacional e transformação local para global.

#### 3.4.1.1 Matriz de transformação translacional

Considerando que a matriz de rigidez do elemento é formulada nos eixos do centroide e do centro de cisalhamento da

seção e a transmissão de esforços entre elementos ocorre devido a uma ligação excêntrica, uma transformação é necessária para relacionar as quantidades dos eixos  $yz$  aos eixos  $\hat{y}\hat{z}$  conforme ilustrado na Fig. 12. Essa transformação é obtida a partir do movimento de corpo rígido de acordo com

$$\hat{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & 1 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

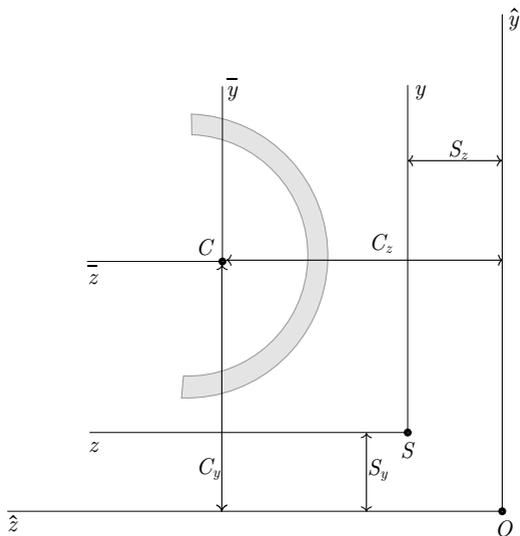
onde  $C_y$  e  $C_z$  se referem ao centroide  $C$ , enquanto  $S_y$  e  $S_z$  referem ao centro de cisalhamento  $S$ . O ponto  $O$  representa a posição em que ocorre a transferência de esforços entre elementos. A Eq. 3.61 descreve a transformação dos graus de liberdade em uma extremidade do elemento e pode ser expandida para ambas as extremidades com

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_1 & \\ & \hat{\mathbf{T}}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

#### 3.4.1.2 Matriz de transformação local para global

A transformação de coordenadas locais para globais é um dos tipos mais comuns de transformação e é usado para relacionar parâmetros do eixo local com os eixos globais e vice-versa. A matriz é composta pelos vetores unitários que definem as direções normal e principais da seção transversal do elemento. A

Figura 12 – Eixos de coordenadas locais de seção transversal de paredes finas com um eixo de simetria



orientação da seção transversal é definida através de um terceiro nó, localizado no plano  $xz$ , que será usado para obter as direções dos eixos principais da seção. O vetor que define o eixo local na direção  $x$  para o elemento indeformado,  ${}^0\mathbf{x}$ , é dado pelos cossenos diretores

$${}^0\mathbf{x} = \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

com

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad m = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad \text{e} \quad n = \frac{z_2 - z_1}{L}, \quad (3.64)$$

sendo  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ , as coordenadas dos nós nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , referidas ao sistema de referência global, e  $L$  é o comprimento

do elemento na configuração indeformada. O terceiro nó é usado para definir o vetor auxiliar

$$\mathbf{v}_{aux} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

na direção do eixo  $z$  que liga os nós 1 e 3 e pode ser transformado no vetor unitário

$$\hat{\mathbf{v}}_{aux} = \frac{\mathbf{v}_{aux}}{\|\mathbf{v}_{aux}\|}. \quad (3.66)$$

O eixo  $y$  será ortogonal ao plano  $xz$  e é gerado pelo produto vetorial normalizado

$${}^0\mathbf{y} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{aux} \times {}^0\mathbf{x}}{\|\hat{\mathbf{v}}_{aux} \times {}^0\mathbf{x}\|} \quad (3.67)$$

e o eixo  $z$  será ortogonal aos eixos locais  $x$  e  $y$ , o que gera o vetor

$${}^0\mathbf{z} = {}^0\mathbf{x} \times {}^0\mathbf{y} \quad (3.68)$$

Os vetores que definem as direções normais e principais do elemento formam a matriz

$${}^0\hat{\mathbf{T}}_2 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{x} \\ {}^0\mathbf{y} \\ {}^0\mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

A transformação completa para os doze graus de liberdade é dada por

$${}^0\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{\mathbf{T}}_2 & & & \\ & {}^0\hat{\mathbf{T}}_2 & & \\ & & {}^0\hat{\mathbf{T}}_2 & \\ & & & {}^0\hat{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

As matrizes de transformação descritas nesta seção podem ser combinadas em uma única matriz de transformação  ${}^0\mathbf{T}$

de acordo com

$${}^0\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 {}^0\mathbf{T}_2. \quad (3.71)$$

### 3.4.2 Atualização da matriz de transformação local para global

Na atualização do referencial deve-se considerar que além de transladar cada nó sofre uma rotação no espaço cujas componentes segundo os eixos globais são conhecidas após cada passo de carga. Para a definição da nova orientação dos elementos não basta atualizar as coordenadas dos pontos nodais, acrescentando os incrementos de deslocamentos. É necessário que o giro sofrido por cada nó também seja considerado, pois este modifica a orientação do plano das seções transversais. A rotação das seções porém não deve ser calculada aplicando-se três rotações de eixos, correspondentes às componentes do giro em relação aos eixos globais. Isso porque as rotações finitas, por não serem grandezas vetoriais, não possuem a propriedade comutativa e a ordem de transformação das coordenadas influiria no resultado final. Considerando que os extremos dos elementos sofrem rotações distintas, a definição dos eixos locais se complica ainda mais. O objetivo desta seção é estabelecer um método para atualizar os eixos locais do elemento, considerando de maneira bastante precisa as translações e rotações de seus nós extremos.

No referencial atualizado, a cada nó estão associadas três componentes de rotação e três de translação. As rotações nodais farão com que as seções transversais dos elementos girem, alterando as direções dos eixos  $y$  e  $z$  locais. Além disso, a translação relativa entre nós faz com que o eixo local  $x$  também mude

de direção. Surgem assim duas dificuldades:

- Definir, para cada extremo, as novas direções dos eixos  $y$  e  $z$  após as três rotações em torno dos eixos globais  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ ;
- Definir um sistema ortogonal de eixos para um elemento que sofre rotações diferenciadas nas seções extremas.

O procedimento para a atualização da matriz de transformação é descrito abaixo e baseado em Alves (1995). Para fins didáticos, o elemento será apresentado com seção retangular.

### 3.4.2.1 Matriz de orientação do nó

Para considerar as rotações nodais ao se atualizar o referencial, Oran (1973) propôs a adoção de um sistema de três eixos ortogonais rigidamente conectados a cada nó. Por conveniência, esses eixos são considerados paralelos aos eixos globais na configuração indeformada inicial. Os cossenos diretores desses eixos, dispostos segundo as linhas, formam a chamada matriz de orientação do nó. Para um nó na configuração inicial, a matriz de orientação é

$${}^0\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Ao se atualizar o referencial, a matriz de orientação do nó deve ser transformada através da chamada matriz de rotação do nó,  $\mathbf{R}_N$ . Isso, pois a mudança de geometria da estrutura faz com que o sistema de eixos que define a orientação do nó seja

rotacionado. Generalizando, a matriz de orientação no referencial  $t + \Delta t$  é obtida atualizando-se a matriz no referencial anterior  $t$  através de

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{N} = \mathbf{R}_N {}^t\mathbf{N} \quad (3.73)$$

Sendo os incrementos de rotações de um nó em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  respectivamente  $\Delta\theta_x$ ,  $\Delta\theta_y$  e  $\Delta\theta_z$ , Kassimali & Abbasnia (1991) propuseram a matriz de rotação do nó

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} \cos\rho + n_1^2(1 - \cos\rho) & n_3 \text{sen}\rho + n_1 n_2(1 - \cos\rho) & -n_2 \text{sen}\rho + n_1 n_3(1 - \cos\rho) \\ -n_3 \text{sen}\rho + n_1 n_2(1 - \cos\rho) & \cos\rho + n_2^2(1 - \cos\rho) & n_1 \text{sen}\rho + n_2 n_3(1 - \cos\rho) \\ n_2 \text{sen}\rho + n_1 n_3(1 - \cos\rho) & -n_1 \text{sen}\rho + n_2 n_3(1 - \cos\rho) & \cos\rho + n_3^2(1 - \cos\rho) \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

válida para uma rotação finita  $\rho$  em torno de um eixo com cossenos diretores  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ .

Esta matriz de rotação é ortogonal e pode ser utilizada para atualizar a matriz de orientação do nó fazendo as substituições

$$\rho = \sqrt{(\Delta\theta_x)^2 + (\Delta\theta_y)^2 + (\Delta\theta_z)^2}, \quad (3.75)$$

$$n_1 = \frac{\Delta\theta_x}{\rho}, \quad n_2 = \frac{\Delta\theta_y}{\rho} \quad \text{e} \quad n_3 = \frac{\Delta\theta_z}{\rho}. \quad (3.76)$$

Embora a Eq. 3.74 admita uma grande rotação  $\rho$ , as Eqs. 3.75 e 3.76 são válidas para pequenos incrementos de rotação  $\Delta\theta_x$ ,  $\Delta\theta_y$  e  $\Delta\theta_z$ . Esta limitação se deve ao fato da rotação  $\rho$  não poder ser decomposta vetorialmente. Fica assim estabelecido que a atualização do referencial deve se processar após pequenos incrementos de rotação.

### 3.4.2.2 Matriz de orientação da seção

Para se determinar a orientação atualizada dos eixos de um elemento é necessário inicialmente que se conheça as novas posições de suas seções transversais extremas. Este é o propósito da chamada matriz de orientação da seção, definida pelos cossenos diretores das direções normal e dos eixos principais, respectivamente, dispostos segundo as colunas. Para os nós extremos de um dos elementos, as matrizes de orientação da seção dos nós inicial e final são, respectivamente,

$$\mathbf{S}^{(1)} = {}^0\hat{\mathbf{T}}_2\mathbf{N}^{(1)} \quad (3.77a)$$

e

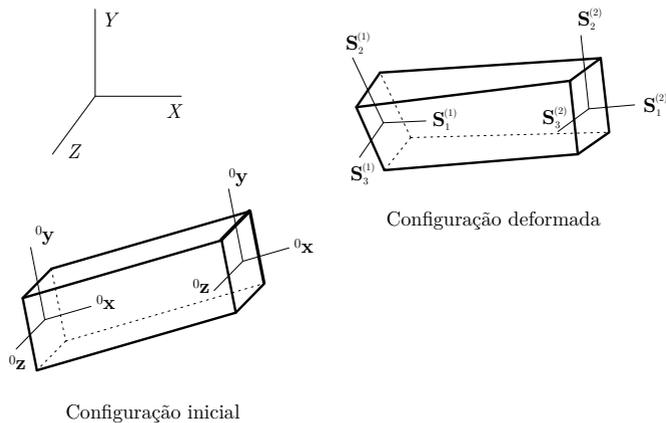
$$\mathbf{S}^{(2)} = {}^0\hat{\mathbf{T}}_2\mathbf{N}^{(2)} \quad (3.77b)$$

onde  $\mathbf{N}^{(1)}$  e  $\mathbf{N}^{(2)}$  são as matrizes de orientação dos nós inicial e final, respectivamente, e  ${}^0\hat{\mathbf{T}}_2$  é a matriz de transformação de coordenadas para o referencial do elemento na configuração inicial, definida da Eq. 3.69.

Na Fig. 13, que ilustra a rotação das seções extremas,  ${}^0\mathbf{x}$ ,  ${}^0\mathbf{y}$  e  ${}^0\mathbf{z}$  são vetores unitários nas direções normal e dos eixos principais da seção, para o elemento na configuração inicial.

Os vetores unitários  $\mathbf{S}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{S}_2^{(1)}$  e  $\mathbf{S}_3^{(1)}$  correspondem às direções normal e dos eixos principais da seção inicial (nó 1) do elemento deformado. Da mesma forma, os vetores  $\mathbf{S}_1^{(2)}$ ,  $\mathbf{S}_2^{(2)}$  e  $\mathbf{S}_3^{(2)}$  se referem à seção final (nó 2) do elemento deformado. Logo, as matrizes de orientação das seções extremas são formadas pelas

Figura 13 – Rotação das seções de um elemento



linhas

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{(1)} \\ \mathbf{S}_2^{(1)} \\ \mathbf{S}_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.78a)$$

e

$$\mathbf{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{(2)} \\ \mathbf{S}_2^{(2)} \\ \mathbf{S}_3^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.78b)$$

### 3.4.2.3 Eixos locais do elemento deformado

As matrizes  $\mathbf{S}$  representam as direções normal e principais das seções das duas extremidades do elemento. No entanto, deseja-se obter apenas um sistema de eixos atualizado que represente o elemento.

Por definição, as linhas da matriz de transformação de coordenadas são as componentes dos vetores unitários nas direções dos eixos locais. Assim, mesmo para um elemento cujas seções transversais sofreram rotações diferenciadas, o eixo longitudinal é definido exclusivamente em função das coordenadas atualizadas dos nós 1 e 2. Logo, a primeira linha da matriz de transformação atualizada no referencial  $t$  é

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} l & m & n \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Na Eq. 3.79, os cossenos diretores do eixo longitudinal do elemento são obtidos a partir das coordenadas atualizadas, correspondendo à posição do elemento deformado.

Como no caso geral os planos das seções extremas não são mais paralelos entre si, nem perpendiculares ao eixo longitudinal, o objetivo passa a ser a determinação de um par de vetores  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{y}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{z}$  que definem os eixos locais  $y$  e  $z$ , correspondentes a uma seção média.

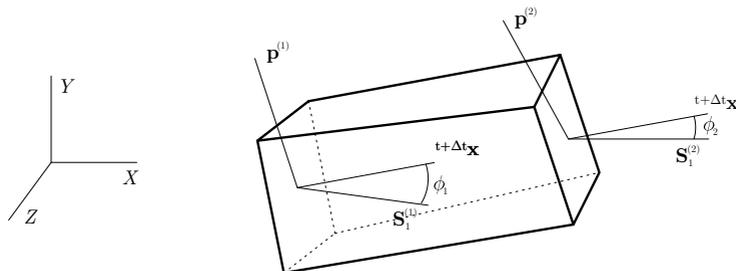
As rotações das normais às seções 1 e 2 em relação ao eixo longitudinal, denominadas  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , são determinadas através dos produtos vetoriais

$$\text{sen}\phi_1 \mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{S}_1^{(i)} \times {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} \quad (i = 1, 2), \quad (3.80)$$

onde  $\mathbf{p}^{(i)}$  é um vetor unitário, normal ao plano que contém os vetores  $\mathbf{S}_1^{(i)}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}$ . A Fig. 14 mostra o detalhe da rotação da normal das seções transversais.

Dispondo-se da rotação da seção, pode-se calcular, para cada extremo, a projeção de seus eixos principais sobre o plano

Figura 14 – Rotação da normal das seções transversais



perpendicular ao eixo longitudinal. Os cossenos diretores destas projeções correspondem às segunda e terceira colunas da seguinte matriz de orientação da seção rotacionada

$$\hat{\mathbf{e}}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{R}_N^{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (3.81)$$

sendo  $\mathbf{R}_N^{(i)}$  a matriz de rotação da Eq. 3.74 para uma rotação  $\phi_i$  na direção  $\mathbf{p}^{(i)}$ , cujos cossenos diretores são  $p_1^{(i)}$ ,  $p_2^{(i)}$  e  $p_3^{(i)}$ , todos obtidos a partir da Eq. 3.80.

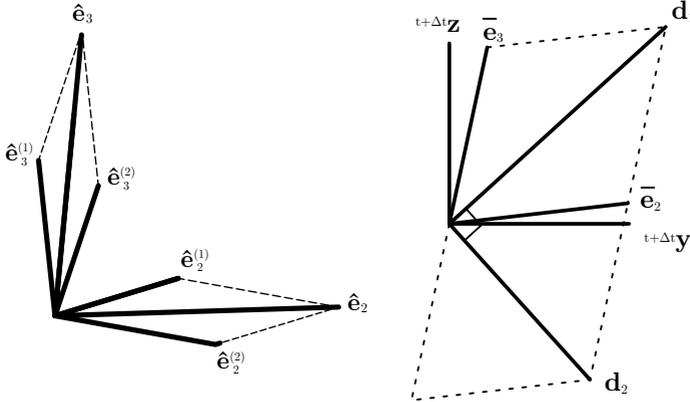
Segundo Oran (1973), as direções dos eixos principais da seção média projetada correspondem aproximadamente à segunda e terceira linhas de

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{e}}^{(1)} + \hat{\mathbf{e}}^{(2)} \right], \quad (3.82)$$

que devem ser normalizadas para formar as linhas 2 e 3 da matriz de transformação de coordenadas do elemento. Na Fig. 15a é apresentada a composição desses eixos médios. Deve-se notar, porém, que os eixos principais projetados sobre o plano perpendicular ao eixo do elemento não formam sistemas ortogonais e,

Figura 15 – Projeções dos eixos principais das seções extremas

(a) Formação dos eixos médios (b) Formação dos eixos ortogonais



por isso, a média da Eq. 3.82 é uma aproximação. Uma forma de se obter eixos realmente ortogonais a partir das projeções dos eixos principais foi proposta por Kuo, Yang & Chou (1993). Inicialmente, os eixos principais médios são normalizados, formando um sistema oblíquo,  $\bar{\mathbf{e}}_2$  e  $\bar{\mathbf{e}}_3$ , conforme ilustra a Fig. 15b. Baseando-se na propriedade das diagonais de um losango serem perpendiculares entre si e biseccionarem os ângulos internos, tais diagonais podem ser expressas por

$$\mathbf{d}_1 = \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3 \quad (3.83a)$$

e

$$\mathbf{d}_2 = \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_3. \quad (3.83b)$$

Normalizando estas diagonais, obtém-se os vetores uni-

tários ortogonais

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \frac{\mathbf{d}_i}{\sqrt{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i^T}} \quad (i=1,2). \quad (3.84)$$

Rotacionado esses vetores unitários em  $45^\circ$  no sentido anti-horário (positivo), obtém-se finalmente os vetores unitários que definem os eixos principais médios do referencial do elemento, ou seja,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{d}}_1 + \bar{\mathbf{d}}_2) \quad (3.85)$$

e

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{d}}_1 - \bar{\mathbf{d}}_2). \quad (3.86)$$

A matriz de transformação de coordenadas do referencial global para o referencial atualizado do elemento é formada por

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{T}}_2 = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{x} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{y} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{z} \end{Bmatrix}. \quad (3.87)$$

A transformação para os doze graus de liberdade é dada por

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{T}}_2 & & & \\ & {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{T}}_2 & & \\ & & {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{T}}_2 & \\ & & & {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{T}}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

A transformação completa é dada pela combinação da matriz de transformação translacional com a matriz de transfor-

mação local para global atualizada de acordo com

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_2. \quad (3.89)$$

#### 3.4.2.4 Sequência para a formação da matriz de transformação atualizada

Visando a automatização do processo em uma análise incremental-iterativa, apresenta-se a seguir os passos a serem seguidos para a formação da matriz de transformação de coordenadas de um elemento.

1. A partir da configuração atual, formar  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}$  com a Eq. 3.79;
2. Para cada extremo do elemento ( $i = 1, 2$ ), efetuar as seguintes operações:
  - Com os incrementos de rotações entre as configurações  $t$  e  $t + \Delta t$ , formar a matriz de rotação do nó  $\mathbf{R}_N^{(i)}$ ;
  - Calcular a matriz de orientação do nó de acordo com a Eq. 3.73, da seguinte forma:  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^{(i)} = \mathbf{R}_N^{(i)} {}^t\mathbf{N}^{(i)}$ , onde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^{(i)}$  é a matriz de orientação do extremo  $i$  na atual iteração e  ${}^t\mathbf{N}^{(i)}$  é a matriz de orientação do mesmo extremo no último ponto de equilíbrio calculado;
  - Calcular a matriz de orientação da seção de acordo com a Eq. 3.77:
 
$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^{(i)} = {}^0\hat{\mathbf{T}}_2 {}^{t+\Delta t}\mathbf{N}^{(i)};$$

- calcular a rotação da normal, que tem a seguinte forma explícita obtida a partir da Eq. 3.80:

$$\phi_i = \text{sen}^{-1} \sqrt{(S_{12}^{(i)}n - S_{13}^{(i)}m)^2 + (S_{13}^{(i)}l - S_{11}^{(i)}n)^2 + (S_{11}^{(i)}m - S_{12}^{(i)}l)^2} \quad (3.90)$$

onde  $S_{jk}^{(i)}$  é a componente  $jk$  da matriz de orientação da seção  $i$ ;

- Calcular as componentes do vetor unitário,  $\mathbf{p}$ , na direção da normal, com

$$p_1^{(i)} = \frac{S_{12}^{(i)}n - S_{13}^{(i)}m}{\text{sen}\phi_i}, \quad (3.91a)$$

$$p_2^{(i)} = \frac{S_{13}^{(i)}l - S_{11}^{(i)}n}{\text{sen}\phi_i} \quad (3.91b)$$

e

$$p_3^{(i)} = \frac{S_{11}^{(i)}m - S_{12}^{(i)}l}{\text{sen}\phi_i}; \quad (3.91c)$$

- Formar a matriz de rotação substituindo os valores

$$\Delta\theta_x^{(i)} = \phi_i p_1^{(i)}, \quad (3.92a)$$

$$\Delta\theta_y^{(i)} = \phi_i p_2^{(i)} \quad (3.92b)$$

e

$$\Delta\theta_z^{(i)} = \phi_i p_3^{(i)} \quad (3.92c)$$

na Eq. 3.75, correspondentes à rotação da normal.

- Com a matriz de rotação recém formada, calcular a matriz de orientação de seção rotacionada, através da Eq. 3.81;

3. Calcular os eixos médios através de

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{e}}^{(1)} + \hat{\mathbf{e}}^{(2)}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}; \quad (3.93)$$

4. Calcular os eixos principais médios normalizados com

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{\sqrt{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2^T}} \quad (3.94a)$$

e

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{\sqrt{\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^T}}; \quad (3.94b)$$

5. Calcular as diagonais dos losangos da Fig. 15a através da Eq. 3.83;
6. Normalizar as diagonais de acordo com a Eq. 3.84;
7. Calcular os eixos principais  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{y}$  e  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{z}$  no referencial local através das Eq. 3.85 e 3.86;
8. Formar a matriz de transformação de coordenadas atualizada de acordo com a Eq. 3.89.

### 3.5 Cálculo das forças internas

A equação não linear de equilíbrio que rege o problema pode ser resolvida através do método iterativo de Newton-Raphson para cada incremento de carga. O procedimento é repetido até que a equação de equilíbrio seja atendida dentro de uma tolerância pré-definida. No decorrer do processo iterativo, os deslocamentos são obtidos para uma dada configuração da estrutura. Com estes deslocamentos, pode-se calcular o incremento de forças internas,

definido como sendo o produto entre a matriz de rigidez e o vetor de deslocamentos. Para que a estrutura esteja em equilíbrio, o somatório das forças internas, dado pela soma entre as forças internas acumuladas na configuração de equilíbrio anterior e o incremento de forças internas atual, deve ser igual ao vetor de forças aplicadas. Este seria o procedimento clássico do método de Newton-Raphson. Porém, uma maneira mais eficiente para calcular o incremento de forças internas é considerar apenas os deslocamentos que geram deformações, subtraindo-se a parcela de deslocamentos de corpo rígido. Assim, é formado o vetor de forças internas  $\mathbf{F}$  que é comparado ao vetor de forças aplicadas  $\lambda \mathbf{Q}$  a fim de verificar se o equilíbrio foi satisfeito. O objetivo dessa seção é apresentar uma técnica, obtida em Alves (1995), para calcular os esforços internos de um elemento de pórtico espacial excluindo-se os deslocamentos de corpo rígido. Esses esforços internos devem formar um vetor com doze componentes para cada elemento.

### 3.5.1 Composição dos deslocamentos

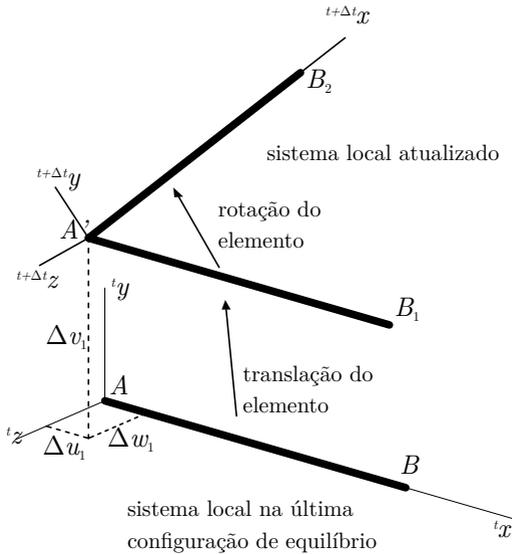
Os deslocamentos nodais podem ser decompostos em:

- Deslocamentos de corpo rígido;
- Deslocamentos que geram deformações.

Os deslocamentos de corpo rígido são apresentados na Fig. 16 onde são mostradas três configurações do elemento:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B_1}$  e  $\overline{A'B_2}$ . A partir da última configuração de equilíbrio  $\overline{AB}$ , os deslocamentos  $\Delta u_1$ ,  $\Delta v_1$  e  $\Delta w_1$  geram exclusivamente translações de corpo rígido, conduzindo o elemento à posição  $\overline{A'B_1}$ . A seguir,

o elemento sofre uma rotação correspondente à atualização do referencial do elemento, levando-o até a nova configuração  $\overline{A'B_2}$ . Nesse processo, o elemento não sofreu nenhuma deformação e o movimento é exclusivamente de corpo rígido.

Figura 16 – Deslocamento de corpo rígido



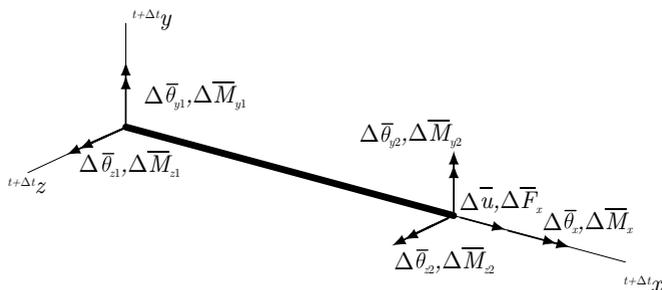
As deformações surgem após a configuração  $\overline{A'B_2}$  em virtude dos deslocamentos de:

- alongamento  $\Delta\bar{u}$ ;
- giro de torção  $\Delta\bar{\theta}_x$ ;
- rotações por flexão em torno do eixo  ${}^{t+\Delta t}y$ ,  $\Delta\bar{\theta}_{y1}$  e  $\Delta\bar{\theta}_{y2}$ ;
- rotações por flexão em torno do eixo  ${}^{t+\Delta t}z$ ,  $\Delta\bar{\theta}_{z1}$  e  $\Delta\bar{\theta}_{z2}$ .

Estes seis graus de liberdade, medidos a partir do referencial atualizado como mostra a Fig. 17, formam o seguinte vetor de deslocamentos e forças nodais:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta \bar{\theta}_{y1} & \Delta \bar{\theta}_{z1} & \Delta \bar{u} & 0 & 0 & \Delta \bar{\theta}_x & \Delta \bar{\theta}_{y2} & \Delta \bar{\theta}_{z2} \end{bmatrix}^T. \quad (3.95)$$

Figura 17 – Deslocamentos responsáveis pelas deformações e forças nodais



Os incrementos de forças nodais representadas na Fig. 17 são expressas pelo vetor

$$\Delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta \bar{M}_{y1} & \Delta \bar{M}_{z1} & \Delta \bar{F}_x & 0 & 0 & \Delta \bar{M}_x & \Delta \bar{M}_{y2} & \Delta \bar{M}_{z2} \end{bmatrix}^T. \quad (3.96)$$

O alongamento (ou encurtamento axial),  $\Delta \bar{u}$ , é obtido pela subtração do comprimento do elemento na configuração atual pelo comprimento do elemento na última configuração de equilíbrio, conforme mostrado na Fig. 18. É dado por

$$\Delta \bar{u} = \sqrt{({}^tL + \Delta u)^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} - {}^tL, \quad (3.97)$$

onde as translações relativas são

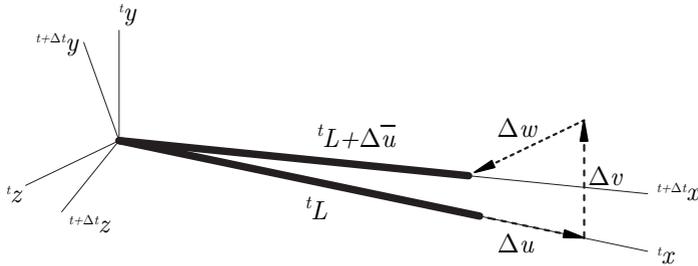
$$\Delta u = \Delta u_2 - \Delta u_1, \quad (3.98)$$

$$\Delta v = \Delta v_2 - \Delta v_1, \quad (3.99)$$

e

$$\Delta w = \Delta w_2 - \Delta w_1. \quad (3.100)$$

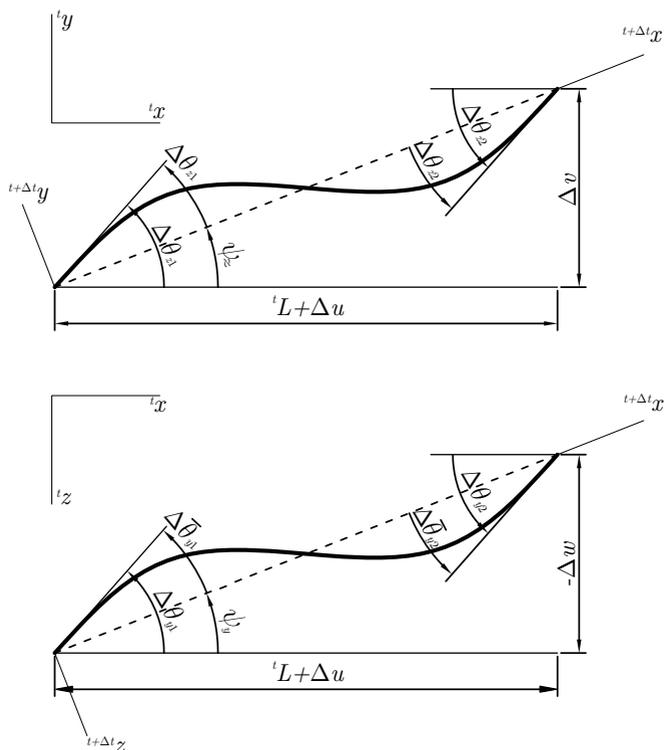
Figura 18 – Alongamento ou encurtamento axial



As relações entre as rotações nos sistemas  ${}^t x^t y^t z^t$  e  ${}^{t+\Delta t} x^{t+\Delta t} y^{t+\Delta t} z^{t+\Delta t}$  podem ser determinadas examinando-se as projeções da geometria deformada sobre os planos  ${}^t x^t y^t$  e  ${}^t x^t z^t$ , apresentados na Fig. 19.

Percebe-se que na rotação da configuração do último passo de carga (sistema  ${}^t x^t y^t z^t$ ) para a configuração atual (sistema  ${}^{t+\Delta t} x^{t+\Delta t} y^{t+\Delta t} z^{t+\Delta t}$ ), representada por  $\Delta\theta_{y1}$ ,  $\Delta\theta_{z1}$ ,  $\Delta\theta_{y2}$  e  $\Delta\theta_{z2}$ , estão contidas as rotações de corpo rígido  $\psi_y$  e  $\psi_z$ , dadas pela atualização do referencial. Essas rotações de corpo rígido devem ser descontadas de modo a obter as rotações que causam deformação por flexão  $\Delta\bar{\theta}_{y1}$ ,  $\Delta\bar{\theta}_{z1}$ ,  $\Delta\bar{\theta}_{y2}$  e  $\Delta\bar{\theta}_{z2}$ .

Figura 19 – Projeções da geometria deformada sobre os planos  ${}^t x^t y$  e  ${}^t x^t z$



Pela Fig. 19, obtém-se as relações

$$\psi_y = \tan^{-1} \left( \frac{-\Delta w}{{}^t L + \Delta u} \right), \quad (3.101)$$

$$\psi_z = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta v}{{}^t L + \Delta u} \right), \quad (3.102)$$

$$\Delta \bar{\theta}_{yi} = \Delta \theta_{yi} - \psi_y \quad (i = 1, 2), \quad (3.103)$$

e

$$\Delta\bar{\theta}_{zi} = \Delta\theta_{zi} - \psi_z \quad (i = 1, 2). \quad (3.104)$$

A rotação de torção é dada pela rotação relativa dos dois nós do elemento

$$\Delta\bar{\theta}_x = \Delta\theta_{x2} - \Delta\theta_{x1}. \quad (3.105)$$

### 3.5.2 Forças internas

Obtidos os deslocamentos que causam deformações no elemento, pode-se calcular os incrementos de forças internas no referencial local fazendo

$$\Delta\mathbf{F}^l = \mathbf{K}_T \Delta\bar{\mathbf{u}} \quad (3.106)$$

sendo posteriormente somadas às forças internas, no referencial local, acumuladas até o último ponto de equilíbrio, com

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^l = {}^t\mathbf{F}^l + \Delta\mathbf{F}^l. \quad (3.107)$$

As forças internas no referencial global são obtidas com o uso da matriz de transformação de coordenadas

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^g = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^l, \quad (3.108)$$

sendo alocadas nos seus respectivos graus de liberdade de modo a formar um vetor de  $n$  posições com as forças internas da estrutura, sendo  $n$  o número de graus de liberdade da estrutura.

## 3.6 Método do comprimento de arco

Uma metodologia eficiente para a análise não linear deve ser capaz de percorrer todos os pontos no caminho de equilíbrio

de uma estrutura, identificando os pontos críticos (pontos limites de carga, de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir. Para que o método consiga ultrapassar os pontos limites, é necessário que, além das equações de equilíbrio, se use uma equação de restrição (WEMPNER, 1971; RIKS, 1972; RIKS, 1979; RIKS, 1984). A restrição está relacionada aos incrementos de deslocamentos nodais  $\Delta \mathbf{u}$  e, possivelmente, ao fator de incrementos de carregamentos  $\Delta \lambda$ . Uma vez que essa metodologia controla a evolução da solução ao longo do caminho de equilíbrio, ela pode ser definida como um método de controle. Ao se utilizar uma equação de restrição quadrática, introduz-se o método de controle de comprimento de arco, que possui a vantagem de descrever superfícies fechadas que sempre interceptam o caminho de equilíbrio. Vários pesquisadores têm estudado o método de comprimento de arco. Nesse contexto, destacam-se os trabalhos de Wempner (1971), Riks (1979), Crisfield (1981), Ramm (1981), Park (1982), Crisfield (1983), Schweizerhof & Wriggers (1986), Forde & Stiemeier (1987), Yang & Shieh (1990), Al-Rasby (1991), Lam & Morley (1992), Carrera (1994), Feng, Perić & Owen (1996) e Ritto-Corrêa & Camotim (2008). Diversas variações do método de comprimento de arco foram definidas: (i) comprimento de arco esférico, (ii) comprimento de arco cilíndrico, (iii) comprimento de arco elipsoidal e (iv) comprimento de arco linearizado. Um método mais geral, que permite a incorporação das variações esférica, cilíndrica e elipsoidal em um único método, foi proposta por Ritto-Corrêa & Camotim (2008) e será usado neste trabalho.

Um problema de equilíbrio não linear pode ser escrito

como

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{Q} \quad (3.109)$$

onde  $\mathbf{u}$  é um vetor que contém os  $n$  deslocamentos nodais,  $\lambda$  é um parâmetro de carga,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Q}$  são as forças internas e externas, respectivamente, e  $\mathbf{R}$  é o vetor de forças residuais. O caminho de equilíbrio é uma curva no espaço de dimensão  $n + 1$  e é formado por um conjunto de pontos de equilíbrio, obtidos através de uma estratégia incremental-iterativa. Nesse contexto, o método iterativo de Newton-Raphson é baseado na expansão em série de Taylor da Eq. 3.109 em relação a um ponto  $A$ ,

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{K}_A \Delta \mathbf{u} - \Delta \lambda \mathbf{Q}_A + \dots = \mathbf{0} \quad (3.110)$$

onde  $\mathbf{R}_A$  e  $\mathbf{R}_B$  são forças residuais avaliadas nos pontos  $A$  e  $B$ ,  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B$  é o incremento de deslocamentos,  $\Delta \lambda = \lambda_B - \lambda_A$  é o parâmetro de incremento de cargas,  $\mathbf{K}_A$  é a matriz de rigidez tangente e  $\mathbf{Q}_A$  é o vetor de forças externas, ambos avaliados no ponto  $A$ . A solução da Eq. 3.110 por ser dividida em

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta s \mathbf{u}^R + \Delta \lambda \mathbf{u}^Q \quad (3.111)$$

onde  $\Delta s$  é um escalar utilizado para aplicar uma correção na parcela  $\mathbf{u}^R$  ( $0 < \Delta s \leq 1$ ) e  $\mathbf{u}^R$  e  $\mathbf{u}^Q$  são encontrados após resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \mathbf{K}_A \mathbf{u}^R = -\mathbf{R}_A \\ \mathbf{K}_A \mathbf{u}^Q = \mathbf{Q}_A. \end{cases} \quad (3.112)$$

Os valores dos deslocamentos e o parâmetro de carga devem ser atualizados de acordo com

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \lambda_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \lambda_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \lambda_A \end{bmatrix} + \Delta s \begin{bmatrix} \mathbf{u}^R \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u}^Q \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Introduzindo  $\mathbf{t}$  como uma variável de dimensão  $n + 1$  que contém os deslocamentos nodais e o fator de carga, a Eq. 3.113 pode ser escrita como

$$\mathbf{t}_B = \mathbf{t}_A + \Delta s \mathbf{t}^R + \Delta \lambda \mathbf{t}^Q. \quad (3.114)$$

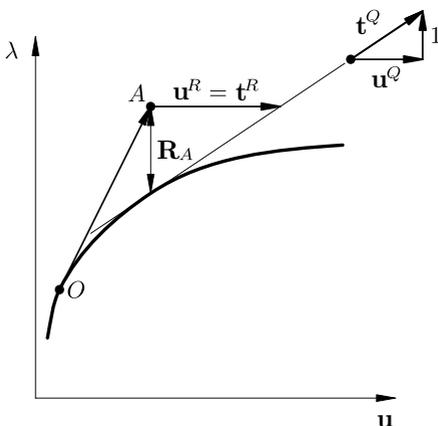
O processo empregado neste trabalho é baseado em um método incremental-iterativo. A estratégia preditora-corretora do método de Newton-Raphson consiste nas seguintes operações:

1. **Uma previsão:** a partir da última configuração de equilíbrio  $t$  conhecida, determina-se o fator de incremento de carga  $\Delta \lambda$ . A partir de  $\Delta \lambda$ , determina-se os novos valores dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_O + \Delta \lambda \mathbf{u}^Q$ . Como a solução encontrada é aproximada, os deslocamentos encontrados podem necessitar de correção, caso o sistema não esteja em equilíbrio.
2. **Uma ou mais correções:** a partir de um ponto  $A$  em desequilíbrio, faz-se a correção dos deslocamentos globais  $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \Delta s \mathbf{u}^R + \Delta \lambda \mathbf{u}^Q$  ao atualizar o parâmetro de carga como  $\lambda_B = \lambda_A + \Delta \lambda$ . Esse passo é continuado até que a convergência seja atingida, i.e.,  $\mathbf{R}_B \simeq 0$ .

A Fig. 20 mostra uma interpretação geométrica dessas variáveis, no contexto de um problema de uma dimensão. O caso

mostrado envolve a primeira correção após a previsão, o que significa que  $A = P$  ( $P$  é o ponto da previsão inicial), mas não há mudança substancial se o ponto  $A$  corresponde a qualquer outra iteração subsequente. Observa-se que (i)  $\mathbf{u}^R$  faz a mudança de  $\mathbf{u}$  para corrigir o erro linearizado, para um valor constante de  $\lambda$ , e que (ii)  $\mathbf{u}^Q$  representa a variação de  $\mathbf{u}$  com  $\lambda$ , mantendo o erro linearizado inalterado. Esses dois vetores, bem como suas extensões  $\mathbf{t}^R$  e  $\mathbf{t}^Q$ , têm um papel fundamental em todos os métodos de controle. A linha reta definida pelo ponto  $A$  e os vetores  $\mathbf{t}^R$  e  $\mathbf{t}^Q$  é a chave de todos os pontos onde as equações de equilíbrio linearizadas, computadas no ponto  $A$ , são satisfeitas; assim, ela é chamada de linha de equilíbrio linearizada.

Figura 20 – Interpretação geométrica de  $\mathbf{u}^Q$ ,  $\mathbf{t}^Q$ ,  $\mathbf{u}^R$  e  $\mathbf{t}^R$



Fonte: Adaptado de Ritto-Corrêa & Camotim (2008).

O propósito do método de controle de comprimento de arco é a definição do parâmetro de carga que deve ser considerado nas fases de previsão e correção. Nesse caso, o valor de

$\Delta\lambda$  é escolhido de modo que o próximo ponto esteja localizado na interseção da linha de equilíbrio linearizada com a superfície fechada no espaço de dimensão  $n + 1$  que contém o último ponto de equilíbrio em seu interior. Considera-se  $\mathbf{u}_O$  e  $\lambda_O$  como os deslocamentos globais e o parâmetro global de carga, respectivamente, no último ponto de equilíbrio. Considerando, por conveniência,  $\blacktriangle\mathbf{u}$  e  $\blacktriangle\lambda$  incrementos dessas variáveis no atual passo de carga a partir do último ponto de equilíbrio, em termos de vetores de dimensão  $n + 1$  pode-se escrever

$$\blacktriangle\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \blacktriangle\mathbf{u} \\ \blacktriangle\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \lambda_O \end{bmatrix} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_O. \quad (3.115)$$

Introduz-se nesse espaço o produto escalar definido por

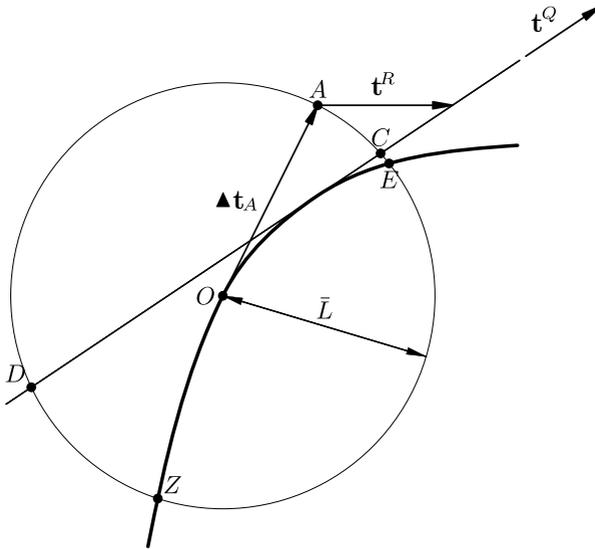
$$\mathbf{t}_A \circ \mathbf{t}_B = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_B + \psi^2 \lambda_A \lambda_B, \quad (3.116)$$

com  $\psi^2$  sendo um fator que deixa o produto dimensionalmente consistente. O comprimento de arco  $L$  é a norma de  $\blacktriangle\mathbf{t}$ , i.e.,

$$L^2 = \|\blacktriangle\mathbf{t}\|^2 = \blacktriangle\mathbf{t} \circ \blacktriangle\mathbf{t} = \blacktriangle\mathbf{u} \cdot \blacktriangle\mathbf{u} + \psi^2 \blacktriangle\lambda^2 \quad (3.117)$$

e o método básico de controle de comprimento de arco consiste em assegurar  $L^2 = \bar{L}^2$  para cada iteração, onde  $\bar{L}$  é um valor prescrito. Como mostrado na Fig. 21, sempre há dois pontos de interseção entre o caminho de equilíbrio e a superfície de restrição - uma hipersfera no espaço de dimensão  $n+1$  (ou um hipercilindro, para  $\psi = 0$ ), conforme apresentado inicialmente por Crisfield (1981) e Ramm (1981). O ponto  $Z$  é de pouco interesse pois pertence à porção do caminho de equilíbrio já determinada. Por outro lado, busca-se o próximo ponto do caminho de equilíbrio, representado pelo ponto  $E$ .

Figura 21 – Interpretação geométrica do método de controle quadrático básico



Fonte: Ritto-Corrêa & Camotim (2008)

No método inicialmente apresentado por Crisfield (1981) e Ramm (1981), considerou-se que o comprimento de arco  $L$  (i) era mantido o mesmo durante as fases de previsão e correção, (ii) a superfície de restrição era centrada no último ponto de equilíbrio e (iii) as superfícies de restrição eram mantidas as mesmas em todo o processo de análise. Algumas modificações do método original do comprimento de arco foram propostas por Ritto-Corrêa & Camotim (2008) de modo a aumentar a eficiência e robustez e foram incorporadas no método de análise não linear implementado neste trabalho.

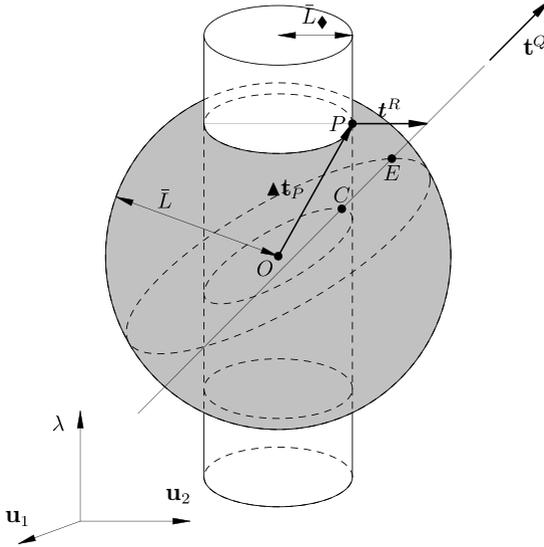
Na formulação proposta por Ritto-Corrêa & Camotim (2008), destacam-se os seguintes fatores:

- Para cada incremento de carga, a superfície de restrição para a fase de correção é definida ao final da previsão inicial;
- A superfície de restrição não é, necessariamente, centrada no último ponto de equilíbrio obtido;
- Um procedimento genérico é definido para englobar as superfícies de restrição cilíndricas, esféricas e elipsoidais.

### 3.6.1 Superfícies de restrição diferentes para as fases de previsão e correção

A primeira variação proposta por Ritto-Corrêa & Camotim (2008), em comparação ao esquema original do método, envolve a adoção de diferentes superfícies de restrição para as fases de previsão e correção. Este processo é esquematicamente mostrado na Fig. 22, para um previsor esférico e corretor cilíndrico. O plano horizontal contém os dois graus de liberdade  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  de um espaço bidimensional e o parâmetro de carga  $\lambda$  é representado no eixo vertical. A previsão inicial corresponde ao ponto  $P$  - a interseção entre a tangente do caminho de equilíbrio no ponto  $O$  (o último ponto de equilíbrio conhecido) e uma esfera centrada no mesmo ponto. Nas subseqüentes correções, as iterações são realizadas na face do cilindro definido pelo pontos  $O$  e  $P$ . Assim, a primeira correção leva ao ponto  $C$ , a interseção entre a linha de equilíbrio linearizada e o cilindro, e não ao ponto  $E$ , como iria acontecer caso a restrição esférica fosse mantida.

Figura 22 – Previsão esférica seguida de correção cilíndrica



Fonte: Adaptado de Ritto-Corrêa & Camotim (2008)

Para a previsão, a equação de restrição é

$$\blacktriangle \mathbf{t} \circ \blacktriangle \mathbf{t} = \blacktriangle \mathbf{u} \cdot \blacktriangle \mathbf{u} + \psi^2 \blacktriangle \lambda^2 = \bar{L}^2, \quad (3.118)$$

com  $\psi^2 \neq 0$ . Entretanto, para as iterações de correção subsequentes, a equação de restrição se torna

$$\blacktriangle \mathbf{t} \bullet \blacktriangle \mathbf{t} = \blacktriangle \mathbf{u} \cdot \blacktriangle \mathbf{u} = \bar{L}_\diamond^2, \quad (3.119)$$

onde a ausência de  $\psi^2$  no produto interno  $\bullet$  deve ser destacada. Ressalta-se que o produto interno ( $\circ$ ) se refere à fase de previsão, enquanto ( $\bullet$ ) diz respeito à fase de correção.

Para expressar  $\bar{L}_\diamond$  em termos de  $\bar{L}$ , observa-se que, para a previsão inicial (ver Eq. 3.139),

$$\blacktriangle \mathbf{u}_P = \Delta \lambda_P \mathbf{u}^Q \quad (3.120)$$

e

$$\blacktriangle \lambda_P = \Delta \lambda_P = \frac{\lambda^Q \bar{L}}{\|\mathbf{t}^Q\|} = \frac{\lambda^Q \bar{L}}{\sqrt{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q + \psi^2}}. \quad (3.121)$$

Assim, o raio da superfície de restrição hipercilíndrica (com  $|\lambda^Q| = 1$ ) é

$$\bar{L}_\diamond = \sqrt{\blacktriangle \mathbf{u}_P \cdot \blacktriangle \mathbf{u}_P} = \sqrt{\Delta \lambda_P^2 \mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q} = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q}{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q + \psi^2}} \bar{L}. \quad (3.122)$$

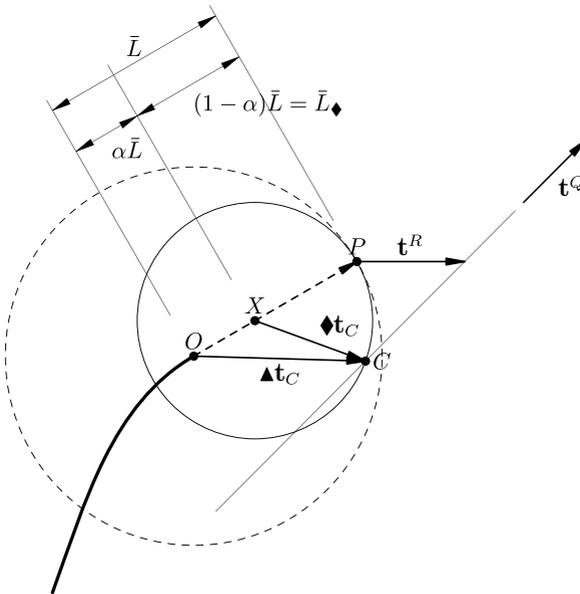
### 3.6.2 Superfície de restrição não centrada no último ponto de equilíbrio conhecido

As superfícies de restrição apresentadas na seção anterior estavam centradas no último ponto de equilíbrio determinado  $O$ , assim assegurando que o caminho de equilíbrio intercepta a superfície de restrição. Na verdade, há sempre duas interseções correspondentes ao próximo e ao anterior ponto de equilíbrio (ponto  $E$  e  $Z$  na Fig. 21).

$O$  invés de centrar a superfície de restrição no ponto  $O$ , é preferível colocá-la a frente do ponto  $O$ , como mostrado da Fig. 23. A previsão inicial  $P$  é, como sempre, localizada a uma distância  $\bar{L}$  do ponto  $O$ , mas todas as iterações de correção são realizadas em uma superfície de restrição menor, centrada no ponto  $X$  e com raio  $\bar{L}_\diamond$ . Esse ponto  $X$  permanece em uma linha reta que conecta os pontos  $O$  e  $P$  e sua localização é parametrizada por

uma constante  $\alpha$ . Nota-se que (i) o ponto  $P$  é o único ponto que satisfaz as duas diferentes condições (distância  $\bar{L}$  a partir de  $O$  e a distância  $\bar{L}_\diamond$  a partir de  $X$ ) e que (ii) o ponto  $O$  permanece dentro da nova superfície de restrição, mas não necessariamente no seu centro. Esta última propriedade assegura que o caminho de equilíbrio interceptará a nova superfície de restrição novamente.

Figura 23 – Previsão esférica seguida de correção cilíndrica



Fonte: Ritto-Corrêa & Camotim (2008)

Para implementar esse esquema, considera-se, durante as iterações de correção, distâncias relativas ao ponto  $X$  ( $\blacklozenge$ ), ao invés do ponto  $O$  ( $\blacktriangle$ ), o que significa que o incremento modificado

se torna

$$\blacklozenge \mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_X. \quad (3.123)$$

Por outro lado, nenhuma modificação é feita ao produto interno ( $\circ$ ).

Depois de obter  $\mathbf{t}_P$ , o centro da nova superfície de restrição é dado por

$$\mathbf{t}_X = (1 - \alpha)\mathbf{t}_O + \alpha\mathbf{t}_P = \mathbf{t}_O + \alpha\Delta\lambda_P\mathbf{t}^Q \quad (3.124)$$

e a equação de restrição para a fase de correção se torna

$$\blacklozenge \mathbf{t} \circ \blacklozenge \mathbf{t} = \blacklozenge \mathbf{u} \cdot \blacklozenge \mathbf{u} + \psi^2 \blacklozenge \lambda^2 = \bar{L}_\blacklozenge^2. \quad (3.125)$$

Como as igualdades

$$\blacklozenge \mathbf{t}_P = \mathbf{t}_P - \mathbf{t}_X = (1 - \alpha)(\mathbf{t}_P - \mathbf{t}_O) = (1 - \alpha)\blacktriangle \mathbf{t}_P \quad (3.126)$$

e

$$\blacklozenge \mathbf{t}_O = \mathbf{t}_O - \mathbf{t}_X = -\alpha(\mathbf{t}_P - \mathbf{t}_O) = -\alpha\blacktriangle \mathbf{t}_P \quad (3.127)$$

são válidas e o ponto  $P$  permanece na nova superfície, independentemente do valor de  $\alpha$ , obtém-se

$$\bar{L}_\blacklozenge = \sqrt{\blacklozenge \mathbf{t}_P \circ \blacklozenge \mathbf{t}_P} = (1 - \alpha)\sqrt{\blacktriangle \mathbf{t}_P \circ \blacktriangle \mathbf{t}_P} = (1 - \alpha)\bar{L}. \quad (3.128)$$

Para assegurar que o ponto  $O$  esteja localizado dentro da nova superfície, deve-se ter

$$\sqrt{\blacklozenge \mathbf{t}_O \circ \blacklozenge \mathbf{t}_O} \leq \bar{L}_\blacklozenge \rightarrow \alpha\sqrt{\blacktriangle \mathbf{t}_P \circ \blacktriangle \mathbf{t}_P} \leq \bar{L}_\blacklozenge \rightarrow \alpha\bar{L} \leq (1 - \alpha)\bar{L}, \quad (3.129)$$

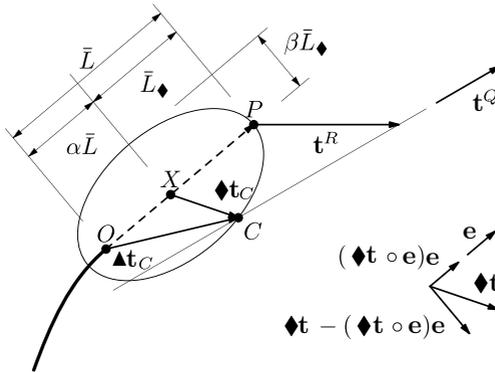
que é válido se

$$\alpha \leq \frac{1}{2}. \quad (3.130)$$

### 3.6.3 Procedimento genérico que engloba diferentes superfícies de restrição

Considera-se uma superfície de restrição hiper-elipsoidal com maior semi-eixo, de comprimento  $\bar{L}_\diamond = (1 - \alpha)\bar{L}$ , alinhado com a tangente do caminho de equilíbrio no ponto  $O$ , como mostrado na Fig. 24. Todos os outros semi-eixos (perpendiculares) possuem comprimento  $\beta\bar{L}_\diamond$ , onde  $\beta$  é um coeficiente escalar com valor menor ou igual a um.

Figura 24 – Superfície de restrição elipsoidal



Fonte: Ritto-Corrêa & Camotim (2008)

Considera-se um vetor unitário  $\mathbf{e}$  orientado na direção do maior semi-eixo do hiper-elipsoide, dado por

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{t}_P - \mathbf{t}_O}{\sqrt{(\mathbf{t}_P - \mathbf{t}_O) \bullet (\mathbf{t}_P - \mathbf{t}_O)}}. \quad (3.131)$$

Como mostrado na Fig. 24, o vetor  $\diamond \mathbf{t}$  pode ser dividido

em duas componentes: uma paralela ao maior eixo, dada por  $(\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})\mathbf{e}$ , e outra contida no hiper-plano perpendicular a  $\mathbf{e}$ , dada por  $\blacklozenge \mathbf{t} - (\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})\mathbf{e}$ . A equação de restrição que define o hiper-elipsoide se torna

$$\left( \frac{(\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})}{\bar{L}_\blacklozenge} \right)^2 + \left( \frac{\blacklozenge \mathbf{t} - (\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})}{\beta \bar{L}_\blacklozenge} \right)^2 = 1. \quad (3.132)$$

Como, por definição,  $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e} \circ \mathbf{e} = 1$ , tem-se

$$\frac{(\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})^2}{\bar{L}_\blacklozenge^2} + \frac{\blacklozenge \mathbf{t} \circ \blacklozenge \mathbf{t} - 2(\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})^2 + (\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})^2}{\beta^2 \bar{L}_\blacklozenge^2} = 1 \quad (3.133)$$

ou, simplesmente,

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} (\blacklozenge \mathbf{t} \circ \mathbf{e})^2 + \frac{1}{\beta^2} \blacklozenge \mathbf{t} \circ \blacklozenge \mathbf{t} = \bar{L}_\blacklozenge^2. \quad (3.134)$$

### 3.6.4 Implementação

O método de comprimento de arco mostrado nesta seção envolve quatro parâmetros:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\psi_P^2$  e  $\psi_C^2$ . Enquanto os dois primeiros controlam o centro e a forma da superfície de restrição, os últimos dois determinam o peso do incremento de carga  $\Delta\lambda$  nos produtos internos  $\circ$  (fase de previsão) e  $\bullet$  (fase de correção). O método de comprimento de arco base, definido por Crisfield (1981), é recuperado ao considerar  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  e  $\psi_P^2 = \psi_C^2$ . No presente trabalho foram adotados os parâmetros:  $\psi_P^2 = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$  e  $\beta = 1$  (superfície esférica),  $\psi_C^2 = 0$  (superfície cilíndrica) e  $\alpha = 0,5$  pois bons resultados foram obtidos por Ritto-Corrêa & Camotim (2008) com esses parâmetros.

Para obter a interseção entre a linha de equilíbrio linearizada e a superfície de restrição quadrática, assume-se que  $A$

e  $B$  são dois pontos sucessivos obtidos no decorrer do processo iterativo e levando em consideração a Eq. 3.114, chega-se a

$$\blacklozenge \mathbf{t}_B = \mathbf{t}_B - \mathbf{t}_O = \mathbf{t}_A + \Delta s \mathbf{t}^R + \Delta \lambda \mathbf{t}^Q - \mathbf{t}_O = \blacklozenge \mathbf{t}_A + \Delta_s \mathbf{t}^R + \Delta \lambda \mathbf{t}^Q. \quad (3.135)$$

É possível escrever as identidades

$$\blacklozenge \mathbf{t}_B \bullet \mathbf{e} = \blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e} + \Delta s \mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e} + \Delta \lambda \mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e}, \quad (3.136a)$$

$$\begin{aligned} (\blacklozenge \mathbf{t}_B \bullet \mathbf{e})^2 &= (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e})^2 + \Delta s^2 (\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e})^2 \\ &\quad + \Delta \lambda^2 (\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e})^2 + 2\Delta s (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e}) (\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e}) \\ &\quad + 2\Delta \lambda (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e}) (\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e}) + 2\Delta s \Delta \lambda (\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e}) (\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (3.136b)$$

e

$$\begin{aligned} (\blacklozenge \mathbf{t}_B \bullet \blacklozenge \mathbf{t}_B)^2 &= (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \blacklozenge \mathbf{t}_A)^2 + \Delta s^2 (\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{t}^R)^2 \\ &\quad + \Delta \lambda^2 (\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{t}^Q)^2 + 2\Delta s (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{t}^R) \\ &\quad + 2\Delta \lambda (\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{t}^Q) + 2\Delta s \Delta \lambda (\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{t}^Q) \end{aligned} \quad (3.136c)$$

e a equação de restrição 3.134, específica para o ponto  $B$ , se torna

$$a\Delta\lambda^2 + b\Delta\lambda + c = a_0\Delta\lambda^2 + (b_0 + b_1\Delta s)\Delta\lambda + (c_0 + c_1\Delta s + c_2\Delta s^2) = 0 \quad (3.137)$$

com

$$a_0 = \frac{1}{\beta^2}(\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{t}^Q) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e})^2, \quad (3.138a)$$

$$b_0 = \frac{2}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{t}^Q) + 2\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e})(\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e}), \quad (3.138b)$$

$$b_1 = \frac{2}{\beta^2}(\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{t}^Q) + 2\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e})(\mathbf{t}^Q \bullet \mathbf{e}), \quad (3.138c)$$

$$c_0 = \frac{1}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \blacklozenge \mathbf{t}_A) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e})^2 - \bar{L}_\blacklozenge^2, \quad (3.138d)$$

$$c_1 = \frac{2}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{t}^R) + 2\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\blacklozenge \mathbf{t}_A \bullet \mathbf{e})(\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e}) \quad (3.138e)$$

e

$$c_2 = \frac{1}{\beta^2}(\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{t}^R) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}(\mathbf{t}^R \bullet \mathbf{e})^2. \quad (3.138f)$$

Para a previsão inicial, considera-se que a superfície de restrição está centrada no último ponto de equilíbrio conhecido  $O$ . Tem-se que  $\blacktriangle \mathbf{u}_A = 0$ ,  $\blacktriangle \lambda_A = 0$  e  $\mathbf{u}_A = 0$ , o que significa que  $b = 0$  e a solução da Eq. 3.137 seja dada por

$$\Delta \lambda_P = \pm \frac{\bar{L}}{\sqrt{\mathbf{t}^Q \circ \mathbf{t}^Q}} = \pm \frac{\bar{L}}{\sqrt{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q + \psi_P^2}} = \lambda^Q \frac{\bar{L}}{\sqrt{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q + \psi_P^2}}, \quad (3.139)$$

onde o sinal é (i) positivo no primeiro passo de carga e (ii) escolhido com base no incremento anterior, para os demais passos de carga (ver seção 3.6.4.1).

Para subsequentes iterações, a Eq. 3.137 possui duas raízes, correspondentes aos dois pontos de interseção entre a

linha de equilíbrio linearizada e a superfície de restrição, dadas por

$$\Delta\lambda_C = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} = \begin{cases} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \end{cases} \quad (3.140)$$

que possui raízes reais se a condição

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (3.141)$$

é satisfeita. Quando essa condição não é satisfeita, a prática usual consiste em reduzir o comprimento de arco e o incremento de carga é repetido (realiza-se uma nova previsão e novas correções). No entanto, há outras opções, como mostrado na seção 3.6.4.3.

#### 3.6.4.1 Escolha da raiz na fase de previsão

Diversas maneiras foram propostas para selecionar de maneira correta a raiz da Eq. 3.139 na fase de previsão: (i) métodos baseados no sinal do determinante da matriz de rigidez tangente (BERGAN, 1980; CRISFIELD, 1981), (ii) métodos baseados no incremento de trabalho externo (BERGAN *et al.*, 1978; BATHE; DVORKIN, 1983) e (iii) e métodos baseados em parâmetros de rigidez (BERGAN *et al.*, 1978; YANG; SHIEH, 1990; KUO; YANG, 1995). No entanto, algumas dessas regras são conhecidas por não serem totalmente confiáveis (BELLINI; CHULYA, 1987; CLARKE; HANCOCK, 1990). Uma regra simples e eficiente foi proposta e devidamente justificada por Feng, Perić & Owen (1995) e Feng, Perić & Owen (1996). No final de

um incremento, o sinal da Eq. 3.139 é definido por

$$\lambda^Q = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{t}^Q \circ \mathbf{t} = \mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u} + \psi^2 \lambda \geq 0 \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.142)$$

### 3.6.4.2 Escolha da raiz na fase de correção

Na fase de correção, seleciona-se o ponto mais próximo ao obtido na última iteração. Olhando novamente para a Fig. 21, é preferível escolher o ponto  $C$ , ao invés do ponto  $D$ , uma vez que o primeiro é mais próximo do ponto  $A$ , obtido ou na fase de previsão ou na última iteração. Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado. Um procedimento bem simples a ser seguido, e que foi implementado neste trabalho, consiste em se achar o menor ângulo entre  $\mathbf{t}_B$  e  $\mathbf{t}_A$ , ou seja, a relação  $\mathbf{t}_A \circ (\mathbf{t}_A + \Delta_s \mathbf{t}^R + \Delta \lambda \mathbf{t}^Q)$  deve ser maximizada. Para esse propósito, basta maximizar os termos dependentes de  $\Delta \lambda$ , que podem ser escritos como  $\Omega \Delta \lambda$ , onde  $\Omega$  é um escalar dado por

$$\Omega = \mathbf{t}_A \circ \mathbf{t}^Q = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}^Q + \psi^2 \lambda_A$$

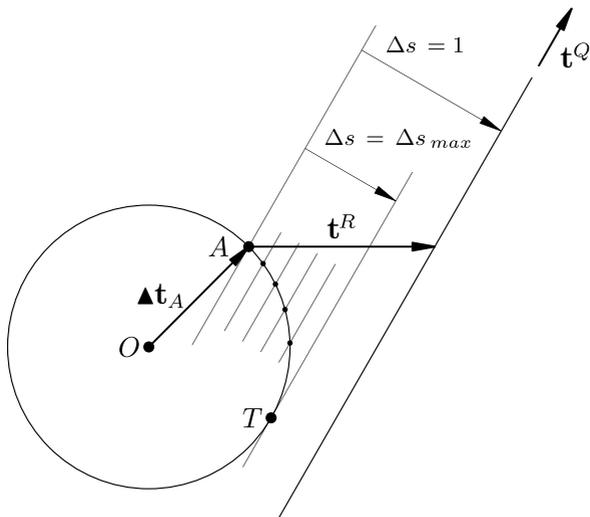
Assim, a raiz da fase de correção é selecionada de acordo com

$$\Delta \lambda_C = \begin{cases} \Delta \lambda_1 & \text{se } \Omega \Delta \lambda_1 > \Omega \Delta \lambda_2 \\ \Delta \lambda_2 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.143)$$

## 3.6.4.3 Aplicar correções parciais para evitar raízes complexas

Mesmo quando a condição da Eq. 3.141 não é satisfeita para  $\Delta s = 1$ , ainda é possível encontrar raízes reais para a Eq. 3.137 a partir da realização de correções parciais (i.e., escolher menores valores para  $\Delta s$ ). A ideia foi originalmente proposta por Zhou & Murray (1995) e é ilustrada na Fig. 25 onde o ponto A está associado com uma linha de equilíbrio linearizada que não intercepta a superfície de restrição. Ao invés de interromper o processo iterativo e reduzir o comprimento de arco pela metade (como feito na prática usual), pode-se escolher o ponto T (o ponto na superfície de restrição com o menor erro). Para encontrar o valor da correção parcial máxima, escreve-se a Eq. 3.141 como

Figura 25 – Correções parciais para evitar raízes complexas



Fonte: Ritto-Corrêa & Camotim (2008)

$$a_s \Delta s^2 + b_s \Delta s + c_s > 0, \quad (3.144)$$

com

$$a_s = b_1^2 - 4a_0c_2, \quad (3.145a)$$

$$b_s = 2b_0b_1 - 4a_0c_1 \quad (3.145b)$$

e

$$c_s = b_0^2 - 4a_0c_0. \quad (3.145c)$$

Assim, quando a Eq. 3.144 não é satisfeita para  $\Delta s = 1$ , adota-se

$$\Delta s = \Delta s_{max} = -\frac{b_s}{2a_s} + \sqrt{\left(\frac{b_s}{2a_s}\right)^2 - \frac{c_s}{a_s}} \quad (3.146)$$

que corresponde à maior raiz do polinômio definido na Eq. 3.144. Dessa forma, o processo iterativo pode eventualmente convergir, o que resulta em menor custo computacional em relação à redução do comprimento de arco e reinício do incremento. Entretanto, esse procedimento pode falhar quando o vetor  $\mathbf{t}^R$  é aproximadamente normal à superfície de restrição. Nesse caso, é preferível reduzir o comprimento de arco quando o valor de  $\Delta s_{max}$  for menor do que 0,1.

### 3.6.5 Critérios de convergência

O processo iterativo termina indicando uma nova posição de equilíbrio para o sistema estrutural em análise quando o critério de convergência for atendido. O critério é baseado em relações

de forças e é calculado ao final da fase de previsão e, caso seja necessário, a cada iteração de correção. Ele é definido como

$$\zeta = \frac{\|\mathbf{R}_B\|}{\|\lambda\mathbf{Q}\|} \leq \zeta_{tol} \quad (3.147)$$

onde  $\|\mathbf{R}_B\|$  é igual à norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas, que é calculada usando-se o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais da iteração anterior;  $\|\lambda\mathbf{Q}\|$  é a norma Euclidiana do vetor de carregamentos aplicados; e  $\zeta_{tol}$  é um fator de tolerância fornecido pelo usuário do programa como dado de entrada. Considerou-se  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$ .

### 3.7 Etapas do método de análise não linear

Apresenta-se a seguir as operações necessárias para a realização da análise não linear física e geométrica de torres de linha de transmissão. Ressalta-se que o método pode ser utilizado para a análise de qualquer estrutura reticulada, formada por elementos de treliça ou pórtico, bidimensionais ou tridimensionais. O método foi dividido nas etapas abaixo e implementado em MATLAB:

#### **Etapas 1: Leitura dos dados de entrada**

São definidos as matrizes e vetores que contém as coordenadas nodais, conectividades das barras, forças externas, graus de liberdade restringidos, características geométricas dos perfis e propriedades dos materiais que compõem a estrutura em análise.

**Etapa 2: Definição dos parâmetros do método de análise não linear**

Nessa etapa, são definidos os parâmetros de entrada do método de análise não linear, como tolerância para a convergência do processo iterativo  $\zeta_{tol}$ , número máximo de incrementos, número desejado de iterações  $I_d$ , fator do incremento inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda$ , adoção do método de Newton-Raphson clássico ou modificado, limites inferior e superior aceitáveis para a superfície de escoamento, superfícies de restrição nas fases de previsão e correção, parâmetro para controle da superfície de restrição não centrada no último ponto de equilíbrio,  $\alpha$ , parâmetro de controle do formato da superfície de restrição,  $\beta$ , comprimento de arco mínimo e máximo admissíveis, e número máximo de iterações para a convergência do processo iterativo.

É necessário que se defina o incremento de partida do comprimento de arco,  ${}^0\bar{L}$ . Como é difícil escolher o valor de  ${}^0\bar{L}$ , pode-se definir  ${}^0\Delta\lambda$  como dado de entrada e usá-lo para calcular  ${}^0\bar{L}$ .

**Etapa 3: Montagem do vetor de forças externas e do comprimento de arco inicial**

As forças externas são, inicialmente, definidas em uma matriz e posteriormente são associadas a um vetor que contém todos os graus de liberdade da estrutura. Considera-se forças conservativas, i.e., que não mudam a direção durante o processo de análise.

A partir do parâmetro inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda$  e da superfície de restrição da fase de previsão selecionados, calcula-se o

comprimento de arco inicial com

$${}^0\bar{L} = {}^0\Delta\lambda\sqrt{\mathbf{u}^Q \cdot \mathbf{u}^Q + \psi_P^2} = {}^0\Delta\lambda\sqrt{\mathbf{t}^Q \cdot \mathbf{t}^Q} \quad (3.148)$$

sendo

$$\mathbf{u}^Q = {}^0\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q} \quad (3.149)$$

onde  ${}^0\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura para a configuração inicial e  $\mathbf{Q}$  é o vetor de forças externas.

#### **Etapa 4: Montagem da matriz inicial de transformação de coordenadas**

A matriz de transformação inicial  ${}^0\mathbf{T}$  é formada a partir dos vetores unitários que definem as direções normal e principais da seção transversal de cada elemento para a sua configuração indeformada, conforme mostrado na seção 3.4.

#### **Etapa 5: Montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura**

A matriz de rigidez tangente é formada com base na configuração atualizada da estrutura a partir das matrizes de rigidez linear, geométrica e de redução plástica individuais de cada elemento, i.e.,

$$\mathbf{K}_T^l = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_P \quad (3.150)$$

sendo, em seguida, rotacionada para o sistema global de referência de acordo com

$$\mathbf{K}_T^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_T^l \mathbf{T} \quad (3.151)$$

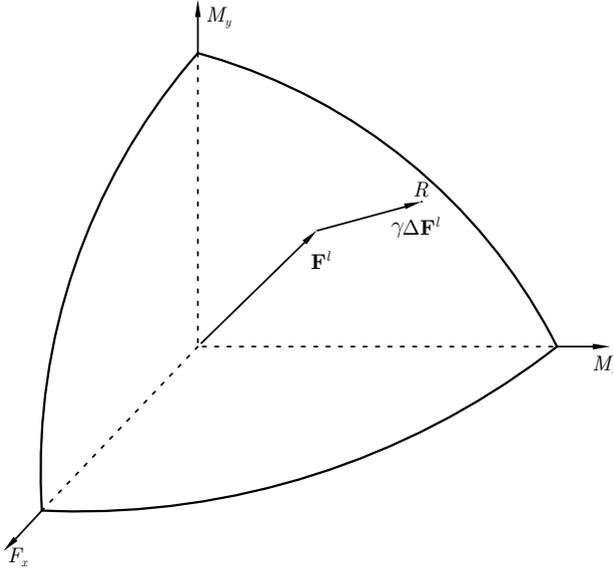
A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  da estrutura será formada após a alocação dos termos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T^g$  de cada elemento em seus respectivos graus de liberdade.

#### **Etapa 6: Cálculo do fator do incremento de carga da fase de previsão**

A determinação do fator do incremento de carga de cada passo  $\Delta\lambda_P$ , referente à fase de previsão, deve ser feita de acordo com as Eqs. 3.139 e 3.142.

#### **Etapa 7: Cálculo do menor fator de carga necessário para plastificar um nó da estrutura**

Para o modelo de análise não linear física descrito, o fator de incremento de carga na fase de previsão  $\Delta\lambda_P$  de cada passo incremental pode ser reduzido para prevenir a formação de rótulas plásticas durante o processo iterativo e evitar mudanças abruptas na rigidez da estrutura. Para calcular um fator de carga que resulte na formação de rótulas plásticas apenas no final de um incremento é necessária a comparação das forças internas totais no final de cada passo com o critério de plastificação adotado. Se nenhuma rótula plástica é formada, o esquema de solução continua. Em alguns casos, como mostrado na Fig. 26, um ou mais conjuntos de forças nodais irá ultrapassar a superfície de escoamento e implicar na formação de rótulas plásticas a uma fração  $\gamma$  do incremento de forças. No início de um passo incremental, considera-se que em uma dada seção atuam os esforços

Figura 26 – Fator  $\gamma$  para a formação de uma rótula plástica

$$\mathbf{F}^l = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & M_x & M_y & M_z \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

os quais, posteriormente, sofrem incrementos

$$\Delta \mathbf{F}^l = \begin{bmatrix} \Delta F_x & \Delta F_y & \Delta F_z & \Delta M_x & \Delta M_y & \Delta M_z \end{bmatrix}. \quad (3.153)$$

Supondo-se uma relação de proporcionalidade entre estes incrementos de esforços, é possível a determinação do fator  $\gamma$  que deve ser multiplicado por tais incrementos de modo que os esforços resultantes provoquem a plastificação da

referida seção transversal. O fator  $\gamma$  pode ser obtido através da expressão

$$\begin{aligned} \Phi(F_x + \gamma\Delta F_x, F_y + \gamma\Delta F_y, F_z + \gamma\Delta F_z, M_x + \gamma\Delta M_x, \\ M_y + \gamma\Delta M_y, M_z + \gamma\Delta M_z) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.154)$$

Neste trabalho, as raízes da Eq. 3.154 foram encontradas através do método da falsa posição (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2015). A partir de tentativas iniciais  $\gamma_l = 0$  e  $\gamma_u = 1$ , a técnica fornece uma estimativa melhorada da raiz  $\gamma_r$ , de acordo com

$$\gamma_r = \gamma_u - \frac{[\Phi(\gamma_u) - 1] (\gamma_l - \gamma_u)}{\Phi(\gamma_l) - \Phi(\gamma_u)} \quad (3.155)$$

onde, por exemplo,  $\Phi(\gamma_u) = \Phi(F_x + \gamma_u\Delta F_x, F_y + \gamma_u\Delta F_y, F_z + \gamma_u\Delta F_z, M_x + \gamma_u\Delta M_x, M_y + \gamma_u\Delta M_y, M_z + \gamma_u\Delta M_z)$ . Usando a Eq. 3.155, inicia-se um processo iterativo com  $\gamma_r$  substituindo qualquer uma das duas suposições,  $\gamma_l$  ou  $\gamma_u$ , que fornece o valor da função  $\Phi(\gamma) - 1$  com o mesmo sinal de  $\Phi(\gamma_r) - 1$ .

Para a determinação do menor fator de carga necessário para plastificar um nó da estrutura de modo que não se adote um fator de incremento de carga que ultrapasse o limite superior da superfície de escoamento, executam-se os passos descritos nas Etapas 8, 9 e 10 com  $\Delta\lambda'_P = \Delta\lambda_P$  de modo a obter os incrementos de forças internas. Em seguida, os fatores  $\gamma$  necessários para plastificar as extremidades de todos os elementos são obtidos. Entre todos os valores de  $\gamma$  encontrados, seleciona-se o menor, designado por  $\gamma_{min}$ .

Quando o valor de  $\gamma_{min}$  é menor do que a unidade, o fator de incremento de carga  $\Delta\lambda_P$  deve ser alterado de acordo com

$$\begin{cases} \Delta\lambda'_P = \gamma_{min}\Delta\lambda_P, & \text{para } \gamma_{min} < 1 \\ \Delta\lambda'_P = \Delta\lambda_P, & \text{para } \gamma_{min} > 1 \end{cases} \quad (3.156)$$

### **Etapa 8: Obtenção dos incrementos de deslocamentos na fase de previsão**

Definido o fator de incremento de carga, o ponto de previsão  $P$  é dado por

$$\mathbf{t}_P = \mathbf{t}_O + \Delta\lambda'_P \mathbf{t}^Q \quad (3.157)$$

com

$$\mathbf{t}^Q = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^Q \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.158)$$

e

$$\mathbf{u}^Q = \mathbf{K}_O^{-1} \mathbf{Q}, \quad (3.159)$$

onde  $\mathbf{K}_O^{-1}$  é a matriz de rigidez tangente calculada no último ponto de equilíbrio. Os incrementos de deslocamento são definidos por

$$\Delta\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_P - \mathbf{u}_O. \quad (3.160)$$

### **Etapa 9: Atualização das coordenadas e matriz de transformação**

Para a definição da configuração geométrica atualizada da estrutura é necessária a atualização das coordenadas cartesianas de seus nós, de acordo com

$$X_P = X_O + \Delta u, \quad (3.161a)$$

$$Y_P = Y_O + \Delta v \quad (3.161b)$$

e

$$Z_P = Z_O + \Delta w, \quad (3.161c)$$

onde  $X_P$ ,  $Y_P$  e  $Z_P$  representam as coordenadas do nó considerado, atualizadas na fase de previsão, e  $X_O$ ,  $Y_O$  e  $Z_O$  representam as coordenadas do nó considerado, no último ponto de equilíbrio, ambas em relação ao sistema de referência global, e os termos  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta w$  indicam os respectivos incrementos de deslocamentos (translações) ocorridos no nó, segundo as direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

Com os incrementos de rotações nodais obtidos, atualiza-se a matriz de transformação de coordenadas de acordo com o disposto na Seção 3.4.2.

### **Etapa 10: Cálculo das forças internas**

Após a obtenção dos deslocamentos nodais incrementais, calcula-se os correspondentes esforços internos que atuam nas extremidades dos elementos que compõem a estrutura. Para uma dada configuração, a determinação dos esforços internos que solicitam os extremos de um elemento qualquer

pode ser iniciada calculando-se o incrementos de deslocamentos de um elemento, no referencial local da última configuração de equilíbrio obtida

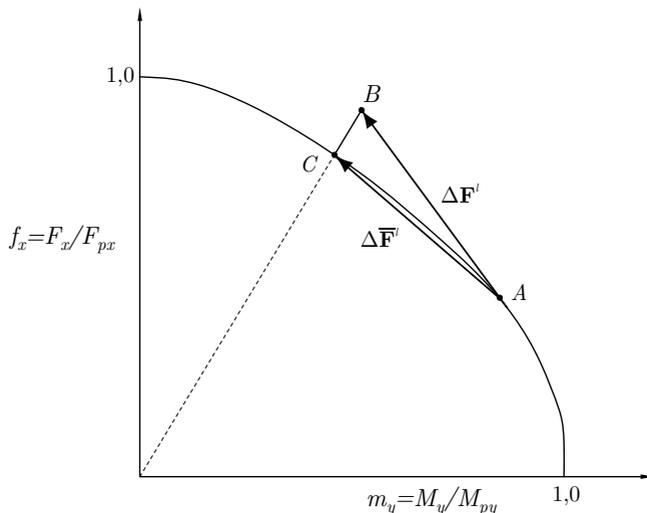
$$\Delta \mathbf{u}^l = {}^t \mathbf{T} \Delta \mathbf{u}^g. \quad (3.162)$$

Em seguida, procede-se para a separação dos deslocamentos de corpo rígido dos que provocam deformação, de acordo com o disposto na Seção 3.5.1. Os deslocamentos obtidos  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$  são usados para obter os incrementos de esforços internos no elemento, de acordo com

$$\Delta \mathbf{F}^l = \mathbf{K}_T^l \Delta \bar{\mathbf{u}}. \quad (3.163)$$

Uma situação da análise não linear física que merece atenção é que o uso de uma matriz de redução plástica fará com que o vetor de incremento de forças se mova na direção tangente à superfície de escoamento. Se a superfície é curva, essas forças acumuladas não permanecerão na superfície com o novo incremento de forças e, como resultado, podem exceder o afastamento tolerável da superfície de escoamento (as forças se movem do ponto  $A$  ao ponto  $B$  na Fig. 27). Uma maneira de fazer com que as forças sejam corrigidas de modo a se localizarem na superfície de escoamento é feita através de um processo de atração radial. O método consiste em aproximar as forças do ponto  $B$  da Fig. 27 ao ponto  $C$ , que irá resultar em um vetor de incremento de forças  $\Delta \bar{\mathbf{F}}^l$ .

Figura 27 – Correção do afastamento entre o vetor de incremento de forças e a superfície de escoamento



Os incrementos de forças deverão ser relacionados ao sistema global de referência através da transformação

$$\Delta \mathbf{F}^g = {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^T \Delta \bar{\mathbf{F}}^l \quad (3.164)$$

### Etapa 11: Cálculo das forças residuais

Calculando-se as ações nodais exercidas por todos os elementos sobre os nós da estrutura, numa dada configuração, verifica-se que, em geral, tais ações não estão em equilíbrio com as cargas externas. Resulta desse fato, portanto, o vetor de forças residuais

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \lambda \mathbf{Q} \quad (3.165)$$

onde o vetor de forças internas  $\mathbf{F}$  é construído a partir das contribuições provenientes dos vários elementos da estrutura e considerando-se os respectivos graus de liberdade. Para cada elemento, a citada contribuição é definida pela Eq. 3.164 e o vetor completo é definido por

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}^g), \quad (3.166)$$

onde  $n$  é o número de elementos da estrutura. Na montagem do vetor  $\mathbf{F}$ , os componentes de  $\mathbf{F}^g$  devem ser alocados nos respectivos graus de liberdade.

### **Etapa 12: Definição de parâmetros do método do comprimento de arco**

Primeiramente, define-se o ponto de centro da superfície de restrição  $\mathbf{t}_X$  através da Eq. 3.124 e assume-se o primeiro ponto da fase de correção como sendo o ponto de previsão

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_P. \quad (3.167)$$

Em seguida, define-se o vetor unitário  $\mathbf{e}$  a partir da Eq. 3.131 e o comprimento de arco para a fase de correção  $\bar{L}_\diamond$  através da Eq. 3.134.

### **Etapa 13: Verificação da convergência**

Ao final da fase de previsão, deve-se verificar se a configuração deformada atualizada está suficientemente próxima da configuração real de equilíbrio da estrutura para as cargas externas atualizadas. Utiliza-se o critério definido na Eq.

3.147, baseado no equilíbrio entre forças. Quando a desigualdade é atendida para o valor de  $\zeta_{tol}$  especificado, admite-se que foi atingido um ponto de equilíbrio, retorna-se à Etapa 5 e um novo passo incremental é iniciado. Caso contrário, avança-se para a Etapa 14.

#### **Etapa 14: (Opcional) Atualização da matriz de rigidez tangente da estrutura**

Caso o critério convergência do estágio de previsão não seja satisfeito, a matriz de rigidez tangente é atualizada com base na configuração atualizada da estrutura e montada da mesma forma que o mostrado na Etapa 5. Essa etapa é opcional, já que a matriz de rigidez pode ser mantida inalterada durante todo o passo incremental. Quando a matriz é atualizada a cada iteração da fase de correção, caracteriza-se o método de Newton-Raphson clássico. Caso a matriz seja mantida a mesma para todo o passo incremental, a variação do método é referida como o método de Newton-Raphson modificado. Para problemas estruturais com grande número de graus de liberdade, o método modificado é vantajoso uma vez que a inversão da matriz de rigidez para a solução da equação de equilíbrio possui custo computacional elevado. Já no caso de problemas de difícil convergência, recomenda-se o uso do método clássico.

#### **Etapa 15: Cálculo do fator de incremento de carga da fase de correção**

De forma similar à fase de previsão, no estágio de correção é determinado o fator do incremento de carga de cada iteração

$\Delta\lambda_C$  de acordo com a Eq. 3.140, com os coeficientes da equação quadrática dados pela Eq. 3.138. Deve-se atentar à escolha correta da raiz conforme mostrado na seção 3.6.4.2 e, caso sejam complexas, observar o disposto na seção 3.6.4.3.

### **Etapa 16: Obtenção dos incrementos de deslocamentos na fase de correção**

Definido o fator de incremento de carga, a nova solução, correspondente ao ponto  $B$ , é dada pela Eq. 3.114. Os incrementos de deslocamentos são definidos por

$$\Delta\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_O. \quad (3.168)$$

### **Etapa 17: Atualização das coordenadas e da matriz de transformação**

Para a definição da configuração geométrica atualizada da estrutura é necessária a atualização das coordenadas cartesianas de seus nós, de acordo com

$$X_B = X_O + \Delta u, \quad (3.169a)$$

$$Y_B = Y_O + \Delta v \quad (3.169b)$$

e

$$Z_B = Z_O + \Delta w, \quad (3.169c)$$

onde  $X_B$ ,  $Y_B$  e  $Z_B$  representam as coordenadas do nó considerado, atualizadas na fase de correção, e  $X_O$ ,  $Y_O$  e  $Z_O$  representam as coordenadas do nó considerado, no último

ponto de equilíbrio, ambas em relação ao sistema de referência global, e os termos  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta w$  indicam os respectivos incrementos de deslocamentos (translações) ocorridos no nó, segundo as direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

Com os incrementos de rotações nodais obtidos, atualiza-se a matriz de transformação de coordenadas de acordo com o disposto na Seção 3.4.2.

### **Etapa 18: Cálculo das forças internas**

As forças internas são calculadas conforme mostrado na Etapa 10.

### **Etapa 19: Cálculo das forças residuais**

As forças residuais são calculadas conforme mostrado na Etapa 11.

### **Etapa 20: Verificação da convergência**

A convergência é verificada conforme mostrado na Etapa 12. Caso o número máximo de iterações seja alcançado sem que haja a convergência, o passo de carga é repetido com comprimento de arco  $\bar{L} = 0,5\bar{L}$ .

### **Etapa 21: Verificação da formação ou desativação de rótulas plásticas**

Quando o critério de convergência é satisfeito, deve-se verificar se, para a nova configuração atualizada, ocorrem duas

possibilidades: (i) a formação de alguma nova rótula plástica nas extremidades dos elementos e o retorno elástico de alguma seção anteriormente plastificada.

A detecção da ocorrência da desativação de uma rótula plástica é feita através da verificação do sinal da constante de plastificação  $\dot{\lambda}$  correspondente à seção em questão. Quando acontece um incremento nas deformações plásticas de uma seção, a constante de plastificação associada à mesma é sempre positiva. Assim, a obtenção de um valor negativo para  $\dot{\lambda}$  em uma seção, antes plastificada, indica que a mesma volta a apresentar comportamento elástico.

Para os casos de elementos que possuem uma rótula plástica no elemento 1 e duas rótulas nos extremos 1 e 2, a verificação de desativação pode ser efetuada utilizando-se as Eqs. 3.44 e 3.52, respectivamente.

## **Etapa 22: Cálculo do novo comprimento de arco**

Um método eficiente deve realizar a seleção do incremento de carga de maneira automática, de acordo com o grau de não linearidade da estrutura. Em outras palavras, a estratégia de incremento de carga deve seguir as seguintes diretrizes: (i) aplicar grandes incrementos de carga quando a estrutura for pouco não linear e (ii) aplicar pequenos incrementos de carga quando a estrutura for muito não linear. O tamanho do incremento de carga aplicado em cada passo é baseado no comprimento de arco, que pode ser atualizado no final de cada passo com base na relação

$${}^{t+\Delta t}\bar{L} = {}^t\bar{L} \left( \frac{I_d}{I} \right)^{0,5} \quad (3.170)$$

proposta por Crisfield (1981) e Ramm (1981), onde  $I_d$  é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo para cada incremento de carga, a ser especificado no início do processo de análise não linear;  ${}^tI$  é o número de iterações que foram necessárias para a convergência do processo iterativo do incremento de carga; e  ${}^t\bar{L}$  representa o comprimento de arco no passo de carga anterior (valor conhecido). Assim, para processos iterativos que demorem a convergir no incremento de carga atual, a tendência é que o próximo incremento de carga seja menor e a convergência seja alcançada mais rapidamente. Da mesma forma, quando o processo iterativo do incremento de carga atual convergiu com um número de iterações menor do que o número de iterações desejadas,  $I_d$ , a tendência é que o próximo incremento de carga seja maior.

### **Etapa 23: Atualização de forças internas**

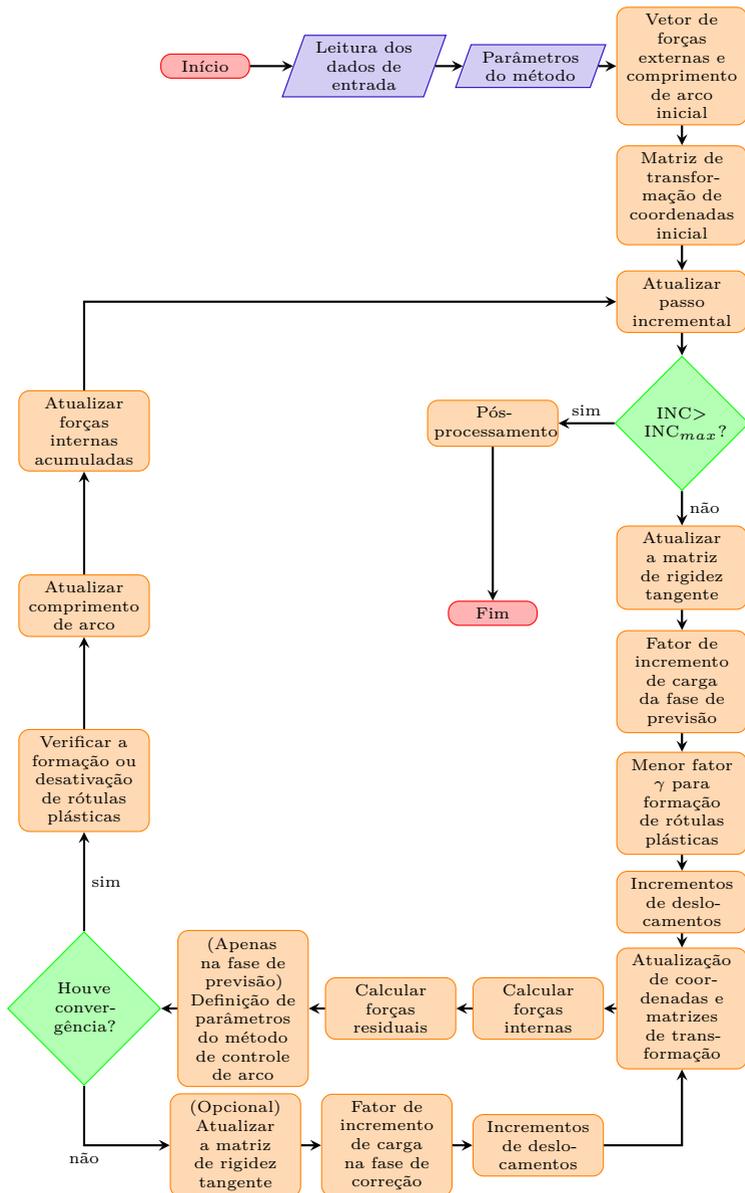
Na última etapa, é feita a atualização das forças internas de cada elemento com

$${}^{t+\Delta t}F^l = {}^tF^l + \Delta F^l. \quad (3.171)$$

Em seguida, retorna-se à Etapa 5 e dá-se início a um novo passo incremental. A análise continua até que o número máximo de passos incrementais seja atingido ou que o fator de carga acumulado seja maior do que a unidade.

A Fig. 28 representa o fluxograma do método de análise não linear descrito.

Figura 28 – Fluxograma do método de análise não linear



## Capítulo 4

# Estudos de caso

Neste capítulo, duas torres de LT são analisadas de modo a verificar a eficácia do método implementado para a simulação de ensaios de protótipo.

### 4.1 Torre de 115kV

A primeira estrutura analisada é uma torre autoportante com 39 m de altura e base quadrada de 6 m x 6 m, conforme mostrado na Fig. 29. O suporte foi dimensionado como uma estrutura de suspensão simples, ou seja, é construída em alinhamento com a LT com desvios de, no máximo, 3°. De acordo com a classificação apresentada no Cap. 2, a torre possui formato tronco-piramidal, circuito simples, disposição triangular (simétrica) dos condutores e treliçamento defasado no tronco reto. Essa estrutura faz parte de uma LT de 115 kV, com extensão de 370 km e composta por 829 torres, implantada na Bolívia. As dimensões da torre são

mostradas na Fig. 29. Para fins de representação, os requisitos elétricos de espaçamentos dos cabos pára-raios e condutores foram omitidos. As barras são constituídas por perfis cantoneira separados em grupos (e.g., M5, D11T, Q4L, etc.). Os perfis de cada grupo são mostrados na Tabela 1. A estrutura é formada por dois tipos de aço, sendo os perfis do grupo ME1, ME2 e MP constituídos de aço ASTM A572 grau 60 e os demais perfis, de aço ASTM A572 grau 50 .

Figura 29 – Projeto de torre autoportante para LT de 115 kV

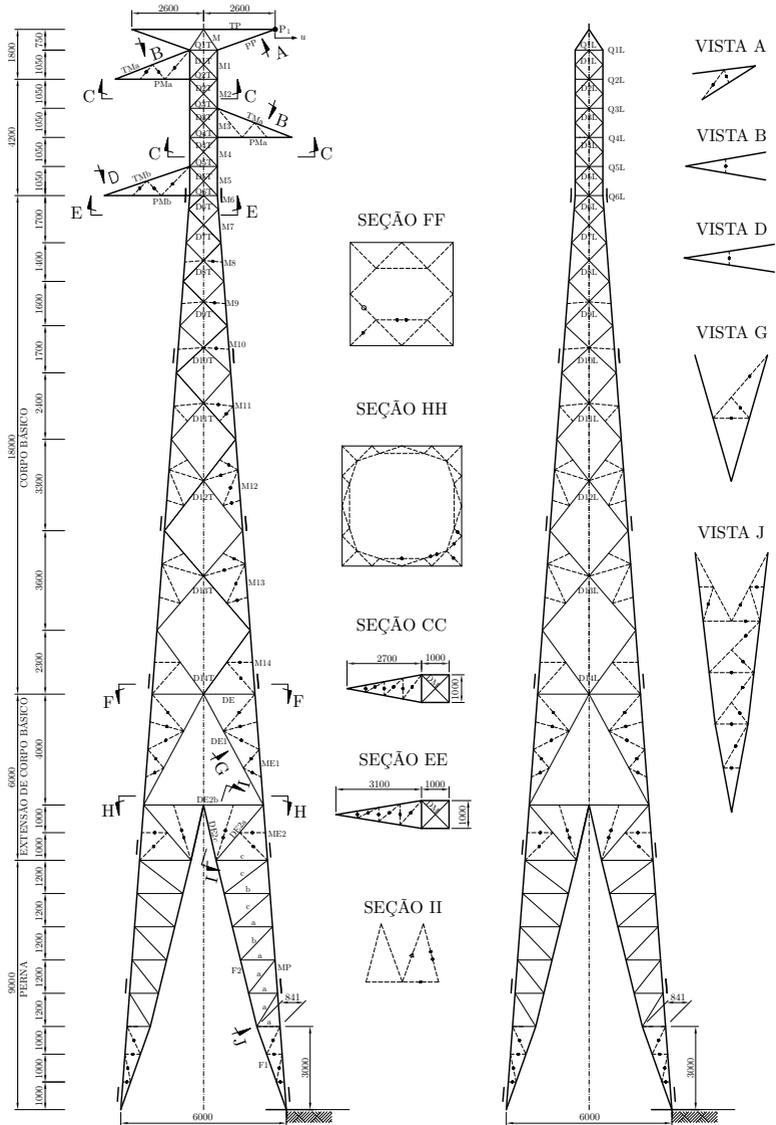


Tabela 1 – Grupos de perfis utilizados na torre de 115 kV

GRUPO	PERFIL	GRUPO	PERFIL
PP	L50X50X4,0	D4T	L40X40X3,0
TP	2L45X45X3,0	D5T	L40X40X3,0
PMa	L50X50X3,0	D6T	L40X40X3,0
TMa	L40X40X3,0	D7T	L40X40X3,0
PMb	L50X50X4,0	D8T	L45X45X3,0
TMb	L45X45X3,0	D9T	L45X45X3,0
M	L40X40X3,0	D10T	L45X45X3,0
M1	L50X50X4,0	D11T	L45X45X3,0
M2	L50X50X4,0	D12T	L45X45X3,0
M3	L50X50X4,0	D13T	L45X45X3,0
M4	L50X50X4,0	D14T	L50X50X3,0
M5	L50X50X4,0	Q1T	L40X40X3,0
M6	L60X60X5,0	Q2T	L50X50X3,0
M7	L60X60X5,0	Q3T	L40X40X3,0
M8	L60X60X5,0	Q4T	L50X50X3,0
M9	L60X60X5,0	Q5T	L40X40X3,0
M10	L60X60X5,0	Q6T	L50X50X3,0
M11	L75X75X5,0	Q1L	L40X40X3,0
M12	L75X75X5,0	Q2L	L40X40X3,0
M13	L75X75X5,0	Q3L	L40X40X3,0
M14	L75X75X5,0	Q4L	L40X40X3,0
D1L	L40X40X3,0	Q5L	L40X40X3,0
D2L	L40X40X3,0	Q6L	L40X40X3,0
D3L	L40X40X3,0	DM2	L40X40X3,0
D4L	L40X40X3,0	DE	L50X50X3,0
D5L	L40X40X3,0	DE1	L45X45X3,0
D6L	L40X40X3,0	DE2a	L45X45X3,0
D7L	L45X45X3,0	DE2b	L45X45X3,0
D8L	L45X45X3,0	DE2c	2L45X45X3,0
D9L	L45X45X3,0	ME1	L75X75X6,0
D10L	L45X45X3,0	ME2	L75X75X6,0
D11L	L50X50X3,0	MP	L75X75X6,1
D12L	L50X50X3,0	F1	L50X50X3,0
D13L	L45X45X3,0	F2	L50X50X3,0
D14L	L50X50X3,0	a	L40X40X3,0
D1T	L40X40X3,0	b	L45X45X3,0
D2T	L40X40X3,0	c	L50X50X3,0
D3T	L40X40X3,0	●	L40X40X3,0
●●	L40X40X4,0	○	L45X45X4,0

O dimensionamento da estrutura foi realizado através

da consideração de sete hipóteses de carregamento, que levam em conta a combinação das ações devidas (i) ao vento incidindo na face transversal, longitudinal ou em ambas as faces da torre, (ii) ao peso próprio da estrutura e dos cabos, (iii) aos carregamentos gerados no processo de fixação dos cabos na estrutura e (iv) à ruptura dos cabos condutores e pára-raios. Estabelece-se a face longitudinal da torre como sendo aquela alinhada à LT. De modo a validar o projeto estrutural, a torre foi submetida a um teste de carga em escala real. Verificou-se que a estrutura foi corretamente dimensionada para todas as hipóteses de carregamento, sendo crítico o caso composto pelo peso próprio da estrutura e com vento incidindo na face transversal da torre e nos cabos. A árvore de carregamentos para o caso crítico é mostrada na Fig. 30. No cálculo do peso próprio da estrutura e dos cabos, adotou-se um coeficiente de majoração igual a 1,2, referente ao peso próprio dos parafusos, chapas e materiais de galvanização. Para o cálculo das ações de vento, considera-se pressão de vento uniforme de  $1717 \text{ N/m}^2$  e coeficiente de arrasto igual a 2 de modo a manter as condições do ensaio.

O método de análise não linear implementado neste trabalho foi utilizado para simular o colapso da torre apresentada. Cada barra da estrutura foi discretizada em dois elementos finitos, o que resulta em um modelo composto de 1666 nós, 2364 elementos e um total de 9996 graus de liberdade. Essa discretização foi adotada devido à limitação da memória computacional disponível (RAM=16 Gb). Os carregamentos utilizados na análise consistem no caso crítico apresentado na Fig. 30.

O estudo foi iniciado ao considerar apenas os efeitos da não linearidade geométrica na estrutura. Durante a análise,

Figura 30 – Árvore de carregamentos da torre de 115kV

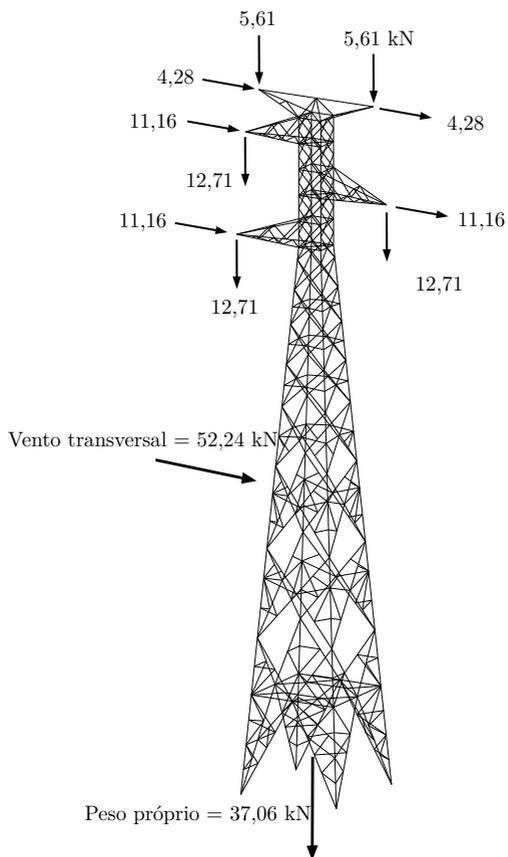
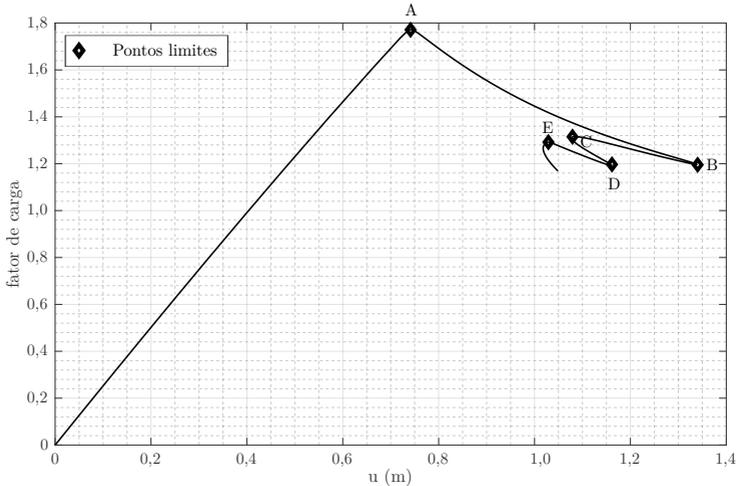


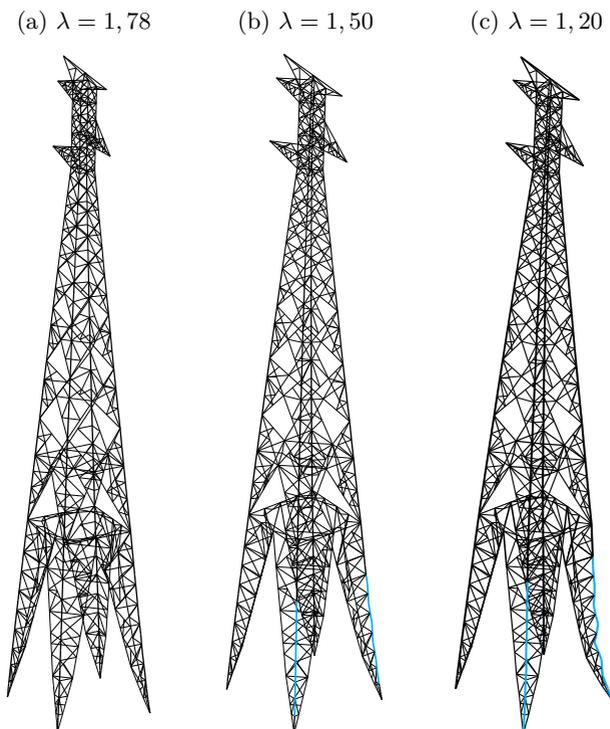
Figura 31 – Deslocamento transversal do topo da torre



foi monitorado o deslocamento transversal do ponto  $P_1$  do topo da estrutura, mostrado na Fig. 29. Nesse caso, como o limite de escoamento do material não é considerado, a estrutura irá colapsar devido à flambagem elástica de seus membros. A Fig. 31 apresenta o gráfico carga  $\times$  deslocamento da estrutura para o ponto  $P_1$ . Percebe-se que o colapso da estrutura será iniciado para um fator de carga  $\lambda = 1,78$ , que representa uma carga 1,78 vezes maior do que a carga última de projeto. No gráfico apresentado, esse fator de carga corresponde ao ponto A. Em seguida, outros pontos limites de carga e deslocamento são encontrados devido ao comportamento instável da estrutura pós-flambagem.

A configuração deformada da estrutura após o primeiro ponto limite é mostrada na Fig. 32 para três estágios da análise. Para o fator de carga  $\lambda = 1,78$  o limite elástico da estrutura é

Figura 32 – Configuração deformada da torre após o primeiro ponto limite de carga



atingido, o que dá início à flambagem dos membros comprimidos do montante da perna. Nessa fase, a estrutura está bem comportada (Fig. 32a). Após o ponto limite, percebe-se que a estrutura se desloca com a redução do fator de carga. A Fig. 32b representa a configuração deformada para um fator de carga  $\lambda = 1,50$ , onde se torna visível o início da flambagem dos membros destacados. Já para um fator de carga  $\lambda = 1,20$  a instabilidade da estrutura se torna bem evidente (Fig. 32c).

A torre montada na estação de testes é mostrada na Fig. 33. No ensaio, o colapso da estrutura foi alcançado para um fator de carga  $\lambda = 1,15$  e a falha ocorreu devido à flambagem do montante da perna. Nesse caso, provavelmente houve a ação conjunta entre a plastificação da seção e instabilidade por flambagem na região da falha.

Figura 33 – Torre intacta na estação de testes



O procedimento de análise não linear foi novamente realizado, agora considerando o efeitos de ambas não linearidades geométrica e física. O caminho de equilíbrio para o deslocamento transversal do ponto  $P_1$  (topo da torre) é mostrado na Fig. 34. Percebe-se que o colapso da estrutura foi alcançado para

um fator de carga  $\lambda = 1,51$ , que é bastante superior ao fator de colapso encontrado no ensaio de protótipo. Os pontos em destaque no gráfico representam os momentos de formação de rótulas plásticas conforme o procedimento de análise ocorre. As seções que plastificam durante a análise podem ser visualizadas na Fig. 35. A primeira rótula plástica é formada para um fator de carga  $\lambda = 1,40$  e está localizada no ponto em que houve a falha durante o ensaio. Em seguida, novas rótulas são formadas nos montantes da perna o que diminui consideravelmente a rigidez da estrutura nessa região, até que a carga máxima resistente seja atingida. Após o ponto limite de carga, algumas rótulas são formadas em tirantes próximos aos montantes plastificados devido à realocação dos esforços internos nos elementos. Percebe-se também que duas rótulas são formadas no tronco básico pois nesse ponto há a redução da bitola dos perfis dos montantes. Essas rótulas não afetam diretamente a carga de ruptura pois a diminuição de rigidez da estrutura devido à plastificação da seção possui efeitos localizados. Assim, o colapso da estrutura será dado pelo conjunto de rótulas plásticas nos montantes da perna.

Figura 34 – Deslocamento transversal do topo da torre

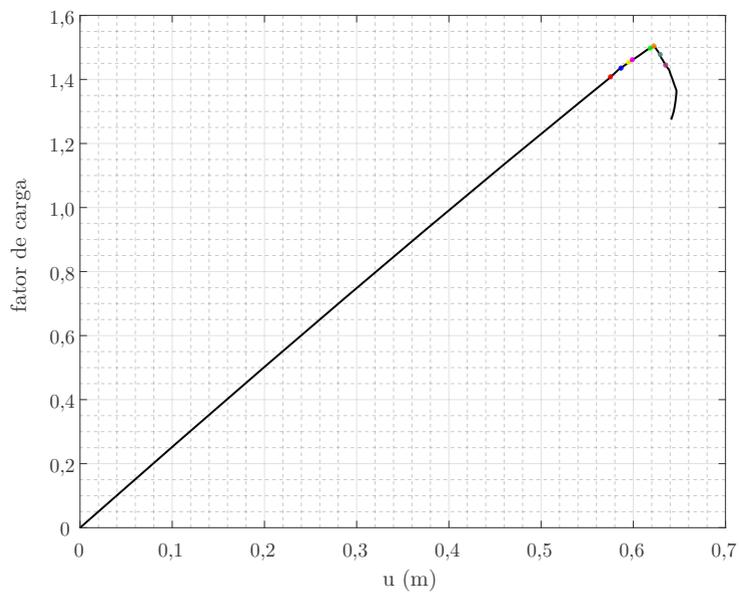
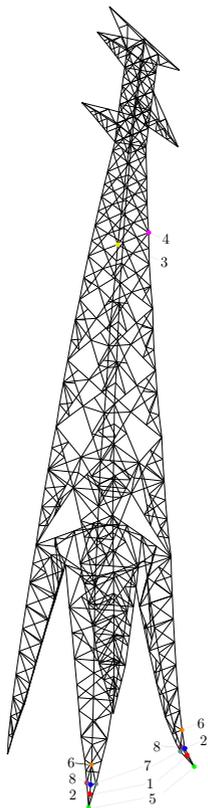


Figura 35 – Formação das rótulas plásticas na torre de 115 kV

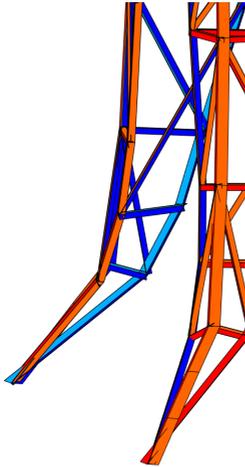


Apesar da carga de colapso obtida durante a simulação numérica ser consideravelmente diferente da encontrada durante o ensaio em escala real, o modo de falha da estrutura é similar ao obtido durante o teste de carga. Isso pode ser verificado ao observar a estrutura real após o ensaio e a configuração deformada obtida via simulação numérica, mostradas na Fig. 36. Alguns estudos adicionais são apresentados na Seção 4.3 com o objetivo

de explicar as diferenças encontradas entre o valor da carga de colapso do ensaio e da simulação.

Figura 36 – Configuração deformada da perna

(a) Via análise numérica



(b) Via ensaio de protótipo



## 4.2 Torre de 275kV

A segunda estrutura analisada é uma torre de LT autoportante treliçada, circuito duplo com formato tronco-piramidal, dimensionada para uma linha de transmissão de 275 kV. A torre possui base quadrada de 14 x 14 m e altura de 72,6 m, conforme mostrado nas Figs. 37 e 38. Todos os membros da estrutura são compostos de perfis cantoneira simples em aço com tensão de escoamento de 250 ou 345 MPa. Os perfis utilizados são mostrados na Tabela 2.

Figura 37 – Vistas transversal e longitudinal da torre de LT de 275kV

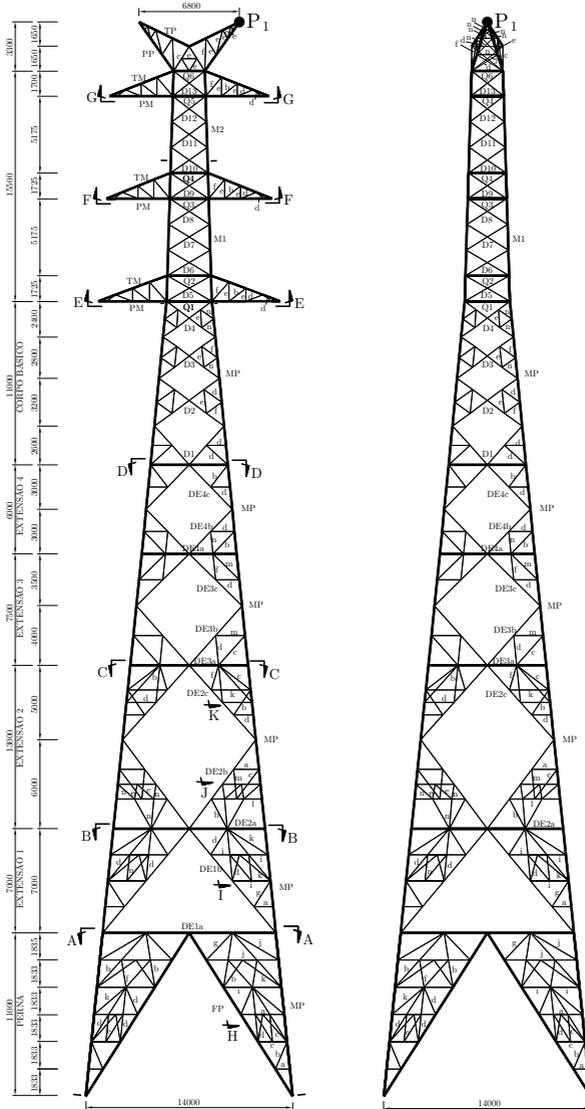
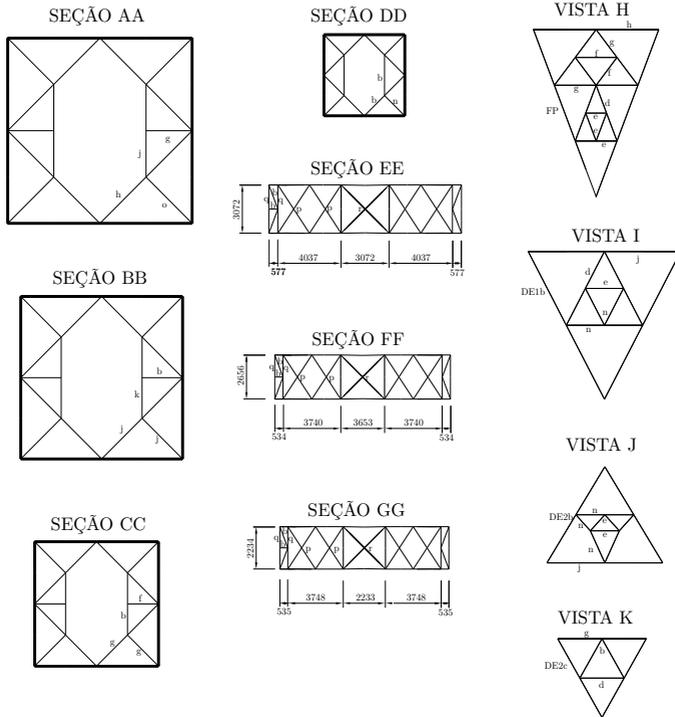


Figura 38 – Seções e vistas da torre de LT de 275kV



Essa torre de LT foi inicialmente estudada por Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) que efetuaram a análise da estrutura usando um procedimento de análise não linear com o objetivo de prever o colapso da torre. O objetivo da análise era determinar a resposta da torre, i.e., os deslocamentos nodais e forças internas nas barras para cinco condições de carregamentos estáticos. Essas hipóteses de carregamento foram obtidas a partir dos carregamentos passíveis de ocorrência durante a vida útil da estrutura como, por exemplo, carregamentos provenientes da

Tabela 2 – Grupos de perfis utilizados na torre de 275 kV

GRUPO	PERFIL	$f_y$ (MPa)	GRUPO	PERFIL	$f_y$ (MPa)
a	L70X70X7	345	b	L70X70X5	345
c	L80X80X6	250	d	L63X63X5	250
e	L45X45X5	250	f	L56X56X5	250
g	L75X75X5	345	h	L110X110X7	250
i	L80X80X8	250	j	L100X100X7	250
k	L90X90X6	345	l	L80X80X7	345
m	L75X75X6	345	n	L50X50X5	250
o	L140X140X10	250	p	L100X100X8	250
q	L125X125X12	345	r	L110X110X8	250
MP	L250X250X25	345	FP	L140X140X10	250
DE1a	L140X140X10	250	DE1b	L125X125X10	250
DE2a	L90X90X7	250	DE2b	L125X125X10	250
DE2c	L110X110X10	345	DE3a	L90X90X6	250
DE3b	L140X140X10	250	DE3c	L125X125X10	345
DE4a	L110X110X8	250	DE4b	L125X125X8	250
DE4c	L125X125X12	345	D1	L125X125X10	250
D2	L125X125X10	250	D3	L100X100X10	345
D4	L110X110X10	345	D5	L90X90X6	345
D6	L110X110X10	345	D7	L110X110X10	345
D8	L110X110X10	345	D9	L100X100X7	250
D10	L90X90X7	345	D11	L90X90X7	345
D12	L90X90X8	345	D13	L90X90X7	345
Q1	L90X90X6	345	Q2	L100X100X7	345
Q3	L90X90X6	345	Q4	L100X100X7	345
Q5	L90X90X6	345	Q6	L90X90X6	345
M1	L200X200X24	345	M2	L160X160X12	345
TP	L100X100X7	345	PP	L90X90X6	345
TM	L125X125X8	345	PM	L160X160X12	345

ruptura dos cabos e devido às ações do vento.

Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) descobriram durante o estudo que o caso crítico de carregamentos corresponde à condição onde a torre examinada é definida como um suporte terminal angular, ou seja, uma torre de ancoragem posicionada no final e com orientação não alinhada à LT. A árvore de carregamentos para esse caso é mostrada na Fig. 39. Para essa hipótese, um fator de carga máximo, i.e., a razão entre os

carregamentos aplicados na análise e os carregamentos de projeto, igual a  $\lambda = 0,96$  foi encontrado por Albermani, Kitipornchai & Chan (2009), o que indica que o colapso da torre ocorre antes da aplicação integral das cargas de projeto ( $\lambda = 1,00$ ). Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) reportaram que a falha da torre seria iniciada devido à flambagem elástica de uma barra redundante na parte inferior da torre, o que levaria à flambagem de uma diagonal principal no segundo painel a partir do solo. Barras redundantes são utilizadas com o objetivo de reduzir o comprimento de flambagem de outras barras. Assim que a flambagem dessa barra ocorre, o montante comprimido também irá flambar, o que resultará no colapso total da torre. Para os outros casos de carregamento, o torre se comportou adequadamente, com fatores de carga últimos variando de  $\lambda = 1,06$  a  $\lambda = 1,20$ . Além da simulação numérica, foi reportado por Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) que um ensaio em escala real foi realizado e o colapso da estrutura ocorreu durante a aplicação da hipótese crítica de carregamentos. A falha foi iniciada quando a força aplicada era aumentada de 95% para 100% da carga última de projeto. A estrutura montada na estação de teste é apresentada na Fig. 40a e o processo de ensaio da torre é mostrado na Fig. 40b.

Posteriormente, Alminhana, Mason & Albermani (2018) fizeram estudos na mesma estrutura para avaliar a carga e modo de colapso através de um método de análise dinâmica. Os carregamentos foram aplicados de maneira gradual de modo que os resultados se aproximassem de uma análise estática.

A técnica de análise não linear implementada no presente trabalho é usada para simular a resposta da torre para o caso

Figura 39 – Caso crítico de carregamento da torre de LT de 275kV

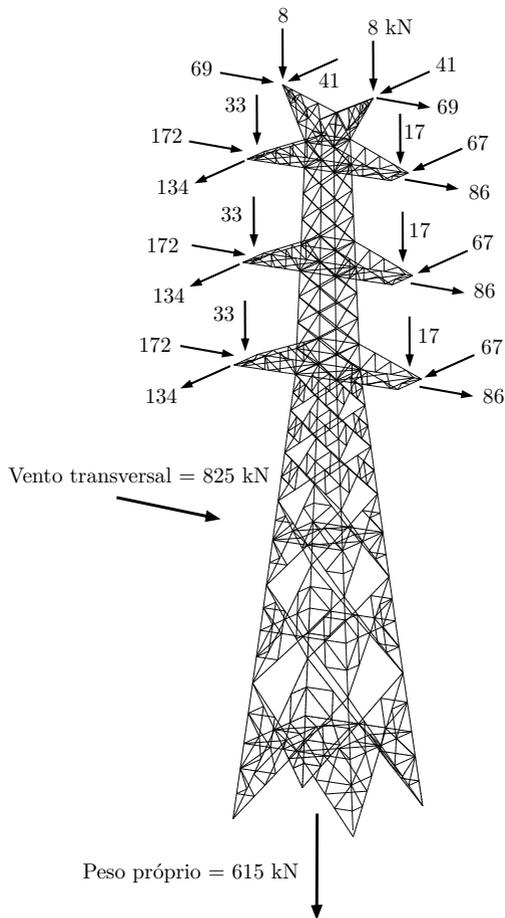


Figura 40 – Teste em escala real da torre de 275kV

- (a) Torre intacta na estação de tes- (b) Torre em processo de colapso  
tes

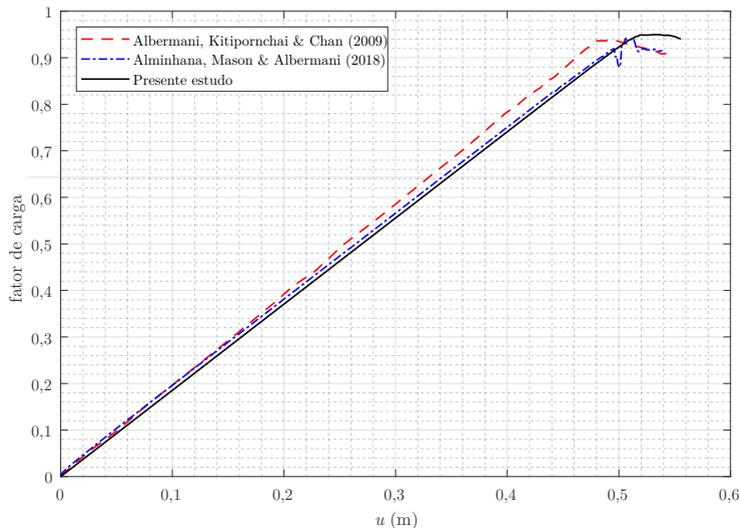


Fonte: Albermani, Kitipornchai & Chan (2009)

crítico de carregamentos. Um modelo de elementos finitos foi gerado de modo a contemplar cada membro da torre, o que resulta em um total de 5244 graus de liberdade. Cada barra da torre foi discretizada em dois elementos finitos devido a restrições de memória computacional disponível.

O deslocamento transversal na ponta do tirante do pára-raio direito, representado pelo ponto  $P_1$  na Fig. 37, foi monitorado. Os caminhos de equilíbrio obtidos por Albermani, Kitipornchai & Chan (2009), Alminhana, Mason & Albermani (2018) e com a presente formulação são mostrados na Fig. 41, com a carga definida em termos do fator de carga  $\lambda$ . Pode ser observado que houve uma boa concordância do caminho de equilíbrio obtido

Figura 41 – Deslocamento transversal do topo da torre de 275kV



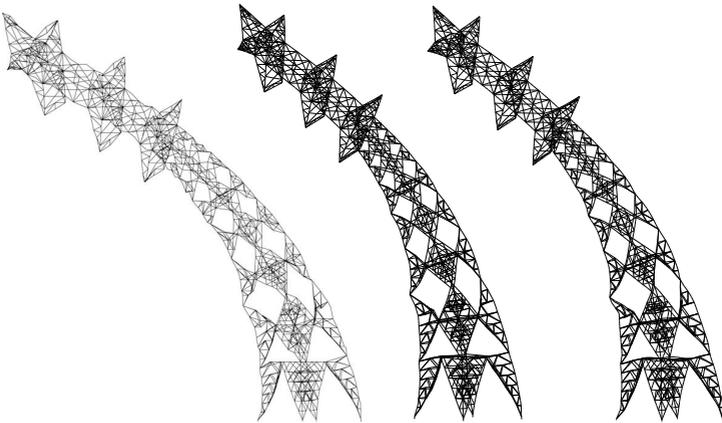
com as demais curvas encontradas na literatura. Para a presente análise, a carga de falha foi gerada para um fator de carga  $\lambda = 0,95$ , o que está em acordo com os resultados do ensaio de protótipo. Verificou-se que o colapso da estrutura foi iniciado após a formação de algumas rótulas plásticas na estrutura, o que indica que a falha ocorreu devido à flambagem inelástica. Caso a não linearidade física não fosse considerada na análise, a falha da estrutura, por flambagem elástica, ocorreria apenas para cargas 2,1 vezes maiores do que a carga de projeto, aproximadamente.

Segundo Albermani, Kitipornchai & Chan (2009), o modo de falha encontrado pelo ensaio em escala real é similar ao obtido por meio da simulação. A Fig. 42 compara as estruturas deformadas, imediatamente antes do colapso, obtidas por

Albermani, Kitipornchai & Chan (2009), Alminhana, Mason & Albermani (2018) e a presente investigação.

Figura 42 – Configuração deformada da torre no momento do colapso

- (a) Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) (b) Alminhana, Mason & Albermani (2018) (c) Este estudo - deslocamentos aumentados em vinte vezes



### 4.3 Análise dos resultados e estudos adicionais

Em diversos estudos para simulação de colapso de torres de LT, os autores consideraram o aço como tendo comportamento elástico perfeitamente plástico como, por exemplo, Al-Bermani & Kitipornchai (1992), Al-Bermani & Kitipornchai (1993), Albermani & Kitipornchai (2003), Albermani, Kitipornchai & Chan (2009) e Alminhana, Mason & Albermani (2018). No entanto, a partir de estudos desenvolvidos, verificou-se que a consideração

do aço com comportamento elástico perfeitamente plástico pode resultar na superestimação da carga de falha de torres de LT. Essa afirmação tem como base a expressão da tensão limite de compressão  $F_c$  de barras submetidas a um carregamento axial, definida pela ASCE 10-97, com

$$F_c = \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{kL/r}{C_c} \right)^2 \right] f_y, \quad \text{para} \quad kL/r \leq C_c \quad (4.1a)$$

e

$$F_c = \frac{\pi^2 E}{(kL/r)^2}, \quad \text{para} \quad kL/r > C_c \quad (4.1b)$$

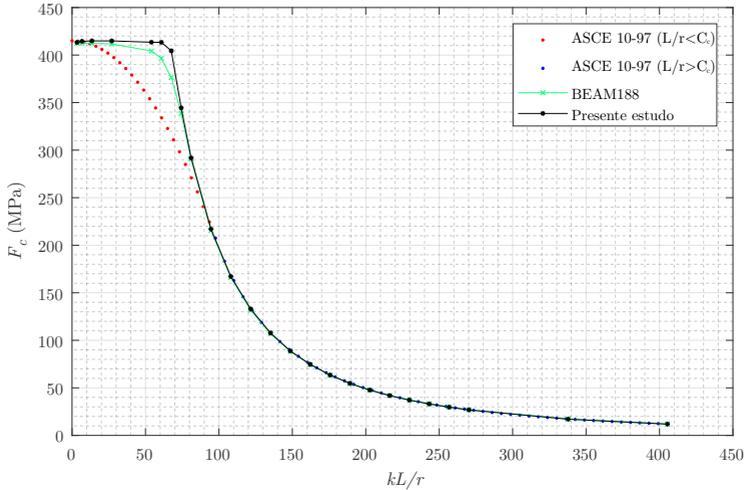
com

$$C_c = \pi \left( \frac{2E}{f_y} \right)^{0,5}, \quad (4.2)$$

onde  $f_y$  é tensão limite de escoamento do aço,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $kL/r$  é a esbeltez efetiva da barra.

A expressão da norma assume a falha da barra devido a (i) flambagem inelástica e (ii) flambagem elástica, a depender da esbeltez efetiva da barra em análise. A Fig. 43 compara a tensão crítica de flambagem, definida pela norma, com modelos mecânicos em que foi considerado um material elástico perfeitamente plástico (EPP), em função da esbeltez efetiva da barra. Foram utilizados dois modelos, um com plasticidade concentrada, derivado do metodologia apresentada, e outro com plasticidade distribuída, obtido a partir do software ANSYS Mechanical APDL com uso do elemento BEAM188. Foi utilizado um perfil L75x75x6 e aço com tensão de escoamento de 415 MPa. Percebe-se que para ambos os modelos mecânicos, a tensão limite de compressão foi bem parecida para índices de esbeltez efetiva mais altos, ou seja, quando a falha da barra ocorre por flambagem elástica. Por outro

Figura 43 – Tensão limite de compressão de barra carregada axialmente



lado, para índices de esbeltez  $kL/r < 80$ , houve grande divergência entre os resultados do modelo mecânico e a expressão da norma. Isso acontece porque a consideração de materiais com comportamento EPP não representa bem a realidade quando a falha ocorre por flambagem inelástica. Como é muito comum em torres de LT a presença de barras com esbeltez efetiva  $kL/r < 80$ , o uso de materiais EPP pode resultar em cargas de falha erradas durante simulações numéricas.

No caso da torre de 115 kV, a diferença entre a carga de colapso encontrada durante o ensaio e para a simulação numérica é explicada em parte devido à ocorrência da falha em uma barra com esbeltez efetiva  $kL/r = 67$  (ou 1,0 m de comprimento efetivo). Dessa forma, a carga de colapso obtida durante a simu-

lação é maior do que a obtida no ensaio. Para esbelteza efetiva  $kL/r = 67$ , verifica-se através do gráfico da Fig. 43 que a razão entre a tensão crítica de flambagem da norma e a obtida com a consideração de um modelo com plasticidade concentrada e aço com comportamento EPP é de aproximadamente 0,75. Assim, caso fosse utilizado um material com comportamento não linear de acordo com sua relação constitutiva, a carga de colapso da torre deveria ser encontrada para um fator em torno de  $\lambda = 1,13$ , o que é bastante próximo ao fator de carga último do ensaio.

Embora a carga de colapso encontrada pela a simulação numérica seja consistente com o ensaio para a torre de 275 kV, ressalta-se que outro fator tem grande impacto na carga de falha de uma estrutura: o valor da tensão de escoamento adotada para o material. Neste trabalho, bem como como nos demais citados nesta seção, foi utilizada a tensão característica de escoamento do aço, que é definida como a tensão que possui 95% de chance de ser superada caso seja selecionada uma amostra aleatória. Assim, são grandes as chances de que a tensão real de escoamento do aço de uma torre de LT (e.g., das estruturas analisadas) seja maior do que esse valor, o que resultaria em cargas de colapso maiores. Uma maneira mais correta de considerar o valor da tensão de escoamento do aço é a partir da avaliação da probabilidade de ocorrência dos valores, de acordo com uma função de densidade de probabilidades. Nesse caso, não bastaria realizar apenas uma simulação de colapso, mas um determinado número de vezes de modo que se possa atribuir tratamentos estatísticos. Em cada análise, o valor para a tensão de escoamento poderia ser sorteado de acordo com sua probabilidade de ocorrência.

Além da consideração da tensão característica de esco-

---

mento e da relação tensão  $\times$  deformação do material na análise, outros fatores podem influenciar na obtenção da carga de colapso do ensaio por meio de uma análise numérica. De modo a reproduzir de modo mais fidedigno as condições do ensaio, deve-se levar em conta os efeitos das tensões residuais gerados no processo de fabricação dos perfis laminados (que estão relacionados com a relação tensão  $\times$  deformação do material), as imperfeições geométricas geradas no processo de montagem da estrutura e também a flexibilidade das ligações.



## Capítulo 5

# Conclusões e estudos futuros

### 5.1 Conclusões

Este trabalho apresentou uma formulação para análise não linear geométrica e física de estruturas espaciais sujeitas a carregamentos estáticos para simulação de falha. Na técnica de análise proposta, cada estrutura é modelada com elementos de pórtico espacial. O esquema de solução consiste em uma estratégia incremental-iterativa, baseada no método de controle de comprimento de arco e no método de Newton-Raphson. As matrizes de rigidez linear, geométrica e de redução plástica foram usadas para descrever o comportamento da estrutura em um referencial Lagrangeano atualizado. Um modelo de plasticidade concentrada, associado ao conceito de superfícies de escoamento e rótulas plásticas, foi adotado para modelar a não linearidade física. Adotou-se o aço com comportamento elástico perfeitamente plástico. Para a validação da abordagem proposta, vários

problemas de literatura foram testados.

Duas torres de LT foram analisadas, sendo ambas estruturas autoportantes treliçadas com formato tronco-piramidal. A primeira é uma torre de suspensão e circuito simples com 39 m de altura utilizada em LTs de 115kV. A segunda, uma torre de LT de circuito duplo definida como um suporte terminal angular, possui 73 m de altura e costuma ser montada em LTs de 275kV.

De modo geral, em comparação com os resultados experimentais, a formulação proposta apresentou bons resultados quanto ao modo de falha de ambas as estruturas. A respeito da carga de colapso, para a torre de LT de 115kV obteve-se um fator de carga superior àquele obtido em ensaios em escala real, enquanto que para a torre de LT de 275kV foram obtidos valores próximos aos experimentais. Através de estudos adicionais, investigaram-se os motivos da divergência entre os valores da carga de colapso obtidos via simulação numérica e ensaio. Percebeu-se que a consideração do aço com comportamento elástico perfeitamente plástico, embora seja uma prática comum em análises não lineares de torres de LT, pode resultar em cargas de falha mais altas do que caso tivesse sido considerado o comportamento real, segundo a relação tensão  $\times$  deformação do material.

## 5.2 Estudos futuros

Apesar de os resultados obtidos parecerem promissores, alguns estudos podem ser realizados de modo a obter métodos mais precisos e confiáveis para a simulação de falha em torres de LT. Entre eles, pode-se citar:

- 
- Implementar modelos mecânicos com outros elementos finitos (e.g., elementos de casca) e comparar o ganho de precisão dos resultados e o esforço computacional da análise;
  - Considerar o comportamento do aço de acordo com sua relação tensão  $\times$  deformação, obtida a partir de experimentos;
  - Incluir variáveis aleatórias para quantificação de incertezas que influenciam a resposta estrutural (e.g., propriedades do material, características dos perfis, posição das barras, critérios de plastificação da seção);
  - Considerar os efeitos das ligações aparafusadas na simulação de falha da estrutura.



## Referências

AL-BERMANI, F.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear analysis of transmission towers. *Engineering Structures*, v. 14, n. 3, p. 139 – 151, 1992. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/014102969290025L>>.

AL-BERMANI, F.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear finite element analysis of latticed transmission towers. *Engineering Structures*, Elsevier BV, v. 15, n. 4, p. 259–269, jul 1993.

AL-BERMANI, F. G.; KITIPORNCHAI, S. Elasto-plastic large deformation analysis of thin-walled structures. *Engineering Structures*, Elsevier BV, v. 12, n. 1, p. 28–36, jan 1990.

AL-RASBY, S. Solution techniques in nonlinear structural analysis. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 40, n. 4, p. 985–993, jan 1991.

ALBERMANI, F. Design verification of guyed transmission tower using nonlinear analysis. *International Journal of Space Structures*, SAGE Publications, v. 12, n. 1, p. 42–50, mar 1997.

ALBERMANI, F.; KITIPORNCHAI, S. Numerical simulation of structural behaviour of transmission towers. *Thin-Walled Structures*, v. 41, n. 2, p. 167 – 177, 2003. ISSN 0263-8231. Buckling strength and Failure Mechanics of Thin walled structures. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382310200085X>>.

ALBERMANI, F.; KITIPORNCHAI, S.; CHAN, R. Failure analysis of transmission towers. *Engineering Failure Analysis*, v. 16, n. 6, p. 1922 – 1928, 2009. ISSN 1350-6307. Papers presented at the Third International Conference on Engineering Failure Analysis (Sitges, Spain, 13–16 July 2008) Part II. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630708002318>>.

ALMINHANA, F.; MASON, M.; ALBERMANI, F. A compact nonlinear dynamic analysis technique for transmission line cascades. *Engineering Structures*, v. 158, p. 164 – 174, 2018. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029617331486>>.

ALMINHANA, F. L. *Cascading Collapse of Transmission Line Structures*. Tese (Doutorado) — The University of Queensland, School of Civil Engineering, Queensland, 2017.

ALVES, R. V. *Instabilidade não linear elástica de estruturas reticuladas espaciais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 9 1995.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. *ASTM A572*: Specification for high-strength low-alloy columbium-vanadium structural steel. [S.l.], 2018.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. *ASCE 10-97: Design of Latticed Steel Transmission Structures*. Reston, Virginia, 1997.

ANSYS Mechanical APDL. *Academic Student Release 19.1*. [S.l.]: ANSYS, Inc., 2018.

ANSYS Mechanical APDL. *Advanced analysis techniques guide*. [S.l.]: ANSYS, Inc., 2019.

BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

BATHE, K.-J.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 14, n. 7, p. 961–986, 1979.

BATHE, K.-J.; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 17, n. 5-6, p. 871–879, jan 1983.

BELLINI, P.; CHULYA, A. An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 26, n. 1-2, p. 99–110, jan 1987.

BERGAN, P. Solution algorithms for nonlinear structural problems. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 12, n. 4, p. 497–509, oct 1980.

BERGAN, P. G.; HORRIGMOE, G.; BRÅKELAND, B.; SØREIDE, T. H. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 12, n. 11, p. 1677–1696, 1978.

BONET, J.; GIL, A. J.; WOOD, R. D. *Worked examples in nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9781107603615,1107603617.

BORST, R. D.; CRISFIELD, M.; REMMERS, J.; VERHOOSSEL, C. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2nd edition. ed. [S.l.]: Wiley, 2012. (Wiley series in computational mechanics). ISBN 9781118375990, 1118375998, 9781118376003, 1118376005, 9781118376010, 1118376013, 9781118375938, 1118375939.

CARRERA, E. A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 50, n. 2, p. 217–229, jan 1994.

CHEN, D.-J. H. W.-F. *Plasticity for Structural Engineers*. J ROSS PUB INC, 2007. ISBN 1932159754. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/7096257/wai\\_fah\\_chen\\_da\\_jian\\_han\\_plasticity\\_for\\_structural\\_engineers.html](https://www.ebook.de/de/product/7096257/wai_fah_chen_da_jian_han_plasticity_for_structural_engineers.html)>.

CLARKE, M. J.; HANCOCK, G. J. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 29, n. 7, p. 1365–1391, may 1990.

CRISFIELD, M. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, v. 13, n. 1, p. 55 – 62, 1981. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794981901085>>.

CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 19, n. 9, p. 1269–1289, sep 1983.

FENG, Y.; PERIĆ, D.; OWEN, D. Determination of travel directions in path-following methods. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier BV, v. 21, n. 7, p. 43–59, apr 1995.

FENG, Y.; PERIĆ, D.; OWEN, D. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 58, n. 3, p. 479–485, feb 1996.

FORDE, B. W.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, v. 27, n. 5, p. 625 – 630, 1987. ISSN 0045-7949.

FU, X.; LI, H.-N. Uncertainty analysis of the strength capacity and failure path for a transmission tower under a wind load. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier BV, v. 173, p. 147–155, feb 2018.

GALVÃO, A. S. *Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Minas - UFOP, Ouro Preto, MG, 2000.

GRIGGS, H. P. Experimental study of instability in elements of shallow space frames. *Research Report, Dept. of Civil Engng., MIT*, 1966. Disponível em: <<https://ci.nii.ac.jp/naid/10004966561/en/>>.

KAMINSKI JR, J. *Incertezas de modelo na análise de torres metálicas treliçadas de linhas de transmissão*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil., Porto Alegre, RS, 2007. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/10804>>.

KASSIMALI, A.; ABBASNIA, R. Large deformation analysis of elastic space frames. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 117, n. 7, p. 2069–2087, jul 1991.

KITIPORNCHAI, S.; CHAN, S. L. Nonlinear finite element analysis of angle and tee beam-columns. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 113, n. 4, p. 721–739, apr 1987.

KITIPORNCHAI, S.; ZHU, K.; XIANG, Y.; AL-BERMANI, F. Single-equation yield surfaces for monosymmetric and asymmetric sections. *Engineering Structures*, Elsevier BV, v. 13, n. 4, p. 366–370, oct 1991.

KOUHIA, R.; MIKKOLA, M. Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, n. 12, p. 2923 – 2941, 1989.

KUO, S.-R.; YANG, Y.-B. Tracing postbuckling paths of structures containing multi-loops. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 38, n. 23, p. 4053–4075, dec 1995.

KUO, S.-R.; YANG, Y.-B.; CHOU, J.-H. Nonlinear analysis of space frames with finite rotations. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 119, n. 1, p. 1–15, jan 1993.

LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil., Natal, 2014.

LAM, W. F.; MORLEY, C. T. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 118, n. 1, p. 169–185, jan 1992.

- LEE, S.-L.; MANUEL, F. S.; ROSSOW, E. C. Large deflections and stability of elastic frames. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 94, n. 2, p. 521–548, 1968.
- MARQUES, S. P. C. Análise não linear física e geométrica de pórticos espaciais. 1990.
- MATLAB. *version 9.2.0 (R2017a)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2017.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. *Matrix Structural Analysis: Second Edition*. [S.l.]: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. ISBN 1507585136.
- MENEZES, R. C. R. de. *Estudos de confiabilidade de linhas de transmissão submetidas à ação do vento*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil., Porto alegre, RS, 1988. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/10229>>.
- ORAN, C. Tangent stiffness in space frames. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 99, n. 6, p. 987–1001, 1973.
- PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Computers & Structures*, v. 14, n. 5, p. 393 – 402, 1981. ISSN 0045-7949.
- PARK, K. C. A family of solution algorithms for nonlinear structural analysis based on relaxation equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, v. 18, n. 9, p. 1337–1347, sep 1982.
- RAMALINGAM, R.; JAYACHANDRAN, S. A. Computational framework for mimicking prototype failure testing of transmission line towers. *Engineering Structures*, v. 123, p. 181 – 191, 2016. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029616302152>>.
- RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: WUNDERLICH, W.; STEIN, E.; BATHE, K.-J. (Ed.). *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*.

Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 63–89. ISBN 978-3-642-81589-8.

RAO, N. P.; KALYANARAMAN, V. Non-linear behaviour of lattice panel of angle towers. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 57, n. 12, p. 1337 – 1357, 2001. ISSN 0143-974X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143974X01000542>>.

RAO, N. P.; KNIGHT, G. S.; LAKSHMANAN, N.; IYER, N. R. Investigation of transmission line tower failures. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier BV, v. 17, n. 5, p. 1127–1141, jul 2010.

RAO, N. P.; KNIGHT, G. S.; MOHAN, S.; LAKSHMANAN, N. Studies on failure of transmission line towers in testing. *Engineering Structures*, v. 35, p. 55 – 70, 2012. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029611004147>>.

RIKS, E. The application of newton’s method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 39, n. 4, p. 1060, 1972.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier BV, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

RIKS, E. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier BV, v. 47, n. 3, p. 219–259, dec 1984.

RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 86, n. 11-12, p. 1353–1368, jun 2008.

ROCHA, G. *Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não-linear de estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Minas - UFOP, Ouro Preto, MG, 2000.

SCHWEIZERHOF, K.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 3, p. 261 – 279, 1986. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782586900010>>.

SILVA, A. R. D. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil, 2009.

SOUTHWELL, R. V. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. 2nd ed.. ed. Oxford, England: Oxford University Press, 1941.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier BV, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, nov 1971.

WONG, M. B. *Plastic analysis and design of steel structures*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2011.

YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. *Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*. 1. ed. Singapore: Prentice Hall PTR, 1994. ISBN 0131092243,9780131092242.

YANG, Y.-B.; SHIEH, M.-S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 28, n. 12, p. 2110–2116, dec 1990.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 55, n. 5, p. 749–759, jun 1995.

# Apêndices



## APÊNDICE A

# Matrizes de rigidez elástica e geométrica

As matrizes de rigidez 12x12 elástica e geométrica são dadas nas Equações A.3 e A.4, respectivamente. Os elementos correspondentes aos graus de liberdade  $\theta_{x1}$  e  $\theta_{x2}$  na matriz de rigidez geométrica, linhas 4 e 10, foram suprimidos para melhoria de representação. Eles podem ser obtidos assumindo  $K_{ij} = K_{ji}$  para  $i \neq j$ , pois a matriz é simétrica, enquanto elementos  $K_{4,4}$ ,  $K_{4,10}$  e  $K_{10,4}$  são dados na Eq. A.1 abaixo.

$$K_{4,4} = \frac{F_x r_0^2}{L} + \frac{\beta_z (M_{z1} - M_{z2})}{2L} - \frac{\beta_y (M_{y1} - M_{y2})}{2L} \quad (\text{A.1a})$$

$$K_{4,10} = -\frac{F_x r_0^2}{L} + \frac{\beta_z (-M_{z1} + M_{z2})}{2L} + \frac{\beta_y (M_{y1} - M_{y2})}{2L} \quad (\text{A.1b})$$

$$K_{10,10} = \frac{F_x r_0^2}{L} + \frac{\beta_z (M_{z1} - M_{z2})}{2L} + \frac{\beta_y (-M_{y1} + M_{y2})}{2L} \quad (\text{A.1c})$$

onde  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  e  $r_0$  são propriedades da seção transversal dadas por:

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \int_A (\bar{z}^3 + \bar{z}\bar{y}^2) dA + 2z_0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\beta_z = \frac{1}{I_z} \int_A (\bar{y}^3 + \bar{y}\bar{z}^2) dA + 2y_0 \quad (\text{A.2b})$$

$$r_0 = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad (\text{A.2c})$$

As notações adotadas para os elementos das matrizes  $\mathbf{K}_L$  e  $\mathbf{K}_G$  são listadas a seguir.

- $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$     Rotação em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ;
- $A$     Área da seção transversal;
- $E$     Módulo de elasticidade;
- $G$     Módulo de elasticidade transversal;
- $I_y$  e  $I_z$     Menor e maior momentos de inércia segundo os eixos principais, respectivamente;
- $J$     Constante de torção da seção;
- $L$     Comprimento do elemento;
- $M_y$  e  $M_z$     Momentos em relação aos eixos principais de inércia;
- $F_x$     Força axial;
- $u$     Deslocamento axial do elemento ao longo do eixo centroidal;

$v$  e  $w$       Deslocamentos do centro de cisalhamento do elemento nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente;

$F_y$  e  $F_z$       Forças cortantes nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente;

$y_0$  e  $z_0$       Coordenadas do centroide relativas ao centro de cisalhamento.

$$\mathbf{K}_L = \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

(A.3)

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix}
GD_L & u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\
u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_1 & 0 & \frac{6F_x}{5L} & 0 & \frac{M_{y1}-M_{y2}}{2L} - \frac{F_x z_0}{L} + \frac{F_z}{2} & 0 & \frac{F_x}{10} & 0 & -\frac{6F_x}{5L} & 0 & -\frac{M_{y1}+M_{y2}}{2L} + \frac{F_x z_0}{L} + \frac{F_z}{2} & 0 & \frac{F_x}{10} \\
w_1 & 0 & 0 & \frac{6F_x}{5L} & \frac{M_{z1}-M_{z2}}{2L} + \frac{F_x y_0}{L} - \frac{F_y}{2} & -\frac{F_x}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6F_x}{5L} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{2L} - \frac{F_x y_0}{L} - \frac{F_y}{2} & -\frac{F_x}{10} & 0 \\
\theta_{x1} & 0 & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} & 0 & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{4,11} & K_{4,12} \\
\theta_{y1} & 0 & 0 & -\frac{F_x}{10} & \frac{M_{z1}+M_{z2}-F_y L}{12} & \frac{2F_x L}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_x}{10} & -\frac{M_{z1}-M_{z2}+F_y L}{12} & -\frac{F_x L}{30} & 0 \\
\theta_{z1} & 0 & \frac{F_x}{10} & 0 & -\frac{M_{y1}+M_{y2}+F_z L}{12} & 0 & \frac{2F_x L}{15} & 0 & -\frac{F_x}{10} & 0 & \frac{M_{y1}+M_{y2}+F_z L}{12} & 0 & -\frac{F_x L}{30} \\
u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & -\frac{6F_x}{5L} & 0 & -\frac{M_{y1}+M_{y2}}{2L} + \frac{F_x z_0}{L} - \frac{F_z}{2} & 0 & -\frac{F_x}{10} & 0 & \frac{6F_x}{5L} & 0 & \frac{M_{y1}-M_{y2}}{2L} - \frac{F_x z_0}{L} - \frac{F_z}{2} & 0 & \frac{F_x}{10} \\
w_2 & 0 & 0 & -\frac{6F_x}{5L} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}}{2L} - \frac{F_x y_0}{L} + \frac{F_y}{2} & \frac{F_x}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6F_x}{5L} & \frac{M_{z1}-M_{z2}}{2L} + \frac{F_x y_0}{L} + \frac{F_y}{2} & \frac{F_x}{10} & 0 \\
\theta_{x2} & 0 & K_{10,2} & K_{10,3} & K_{10,4} & K_{10,5} & K_{10,6} & 0 & K_{10,8} & K_{10,9} & K_{10,10} & K_{10,11} & K_{10,12} \\
\theta_{y2} & 0 & 0 & -\frac{F_x}{10} & -\frac{M_{z1}+M_{z2}+F_y L}{12} & -\frac{F_x L}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_x}{10} & \frac{M_{z1}+M_{z2}-F_y L}{12} & \frac{2F_x L}{15} & 0 \\
\theta_{z2} & 0 & \frac{F_x}{10} & 0 & \frac{M_{y1}+M_{y2}+F_z L}{12} & 0 & -\frac{F_x L}{30} & 0 & -\frac{F_x}{10} & 0 & -\frac{M_{y1}-M_{y2}-F_z L}{12} & 0 & \frac{2F_x L}{15}
\end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$



## APÊNDICE B

# Exemplos utilizados para validação do método

Neste capítulo, alguns problemas encontrados na literatura são analisados de modo a validar a metodologia de análise não linear apresentada. A validação é separada em problemas com não linearidade geométrica e problemas com não linearidade geométrica e física em conjunto. Os seguintes exemplos são considerados:

- Não linearidade geométrica
  1. Coluna engastada-livre;
  2. Pórtico de Lee;
  3. Pórtico hexagonal;
  4. Cúpula com 24 barras;
  5. Cúpula com 168 barras;

- Não linearidade geométrica e física
  1. Viga engastada-livre;
  2. Pórtico bidimensional;
  3. Grelha;
  4. Pórtico tridimensional;

Embora não seja apresentada uma formulação específica para elementos de treliça, a análise de problemas desse tipo é feita desconsiderando-se os graus de liberdade referentes às rotações nodais. Além disso, o deslocamento que causa deformações é referente apenas ao alongamento ou encurtamento do elemento.

Todos os exemplos são formulados com elementos com seção transversal duplamente simétrica. Assim, a matriz de rigidez geométrica utilizada foi obtida em McGuire, Gallagher & Ziemian (2015), Eq. 9.19. As ligações excêntricas entre elementos não são consideradas e a transformação translacional não é realizada.

## B.1 Validação do método de análise não linear geométrica

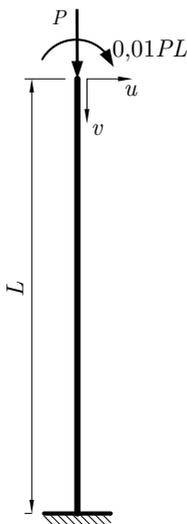
Os exemplos apresentados nesta seção possuem poucos graus de liberdade e a solução é encontrada rapidamente. Com o uso de um computador com processador AMD Ryzen 5 2600 de 3,40 GHz, cada exemplo é executado em menos de 30 segundos.

### B.1.1 Coluna engastada-livre

O primeiro exemplo trata de uma coluna engastada-livre, submetida a uma carga vertical  $P$ , aplicada axialmente em sua extremidade livre, conforme ilustrado na Fig. 44. Com o objetivo de evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação, foi introduzido um momento fletor na extremidade da coluna ( $M = 0,01PL$ ).

Este problema foi resolvido de maneira analítica por Southwell (1941), sendo desde então utilizado para avaliar vários modelos de elementos finitos e estratégias de solução não linear (KOUHIA; MIKKOLA, 1989; YANG; KUO, 1994; GALVÃO, 2000; ROCHA, 2000).

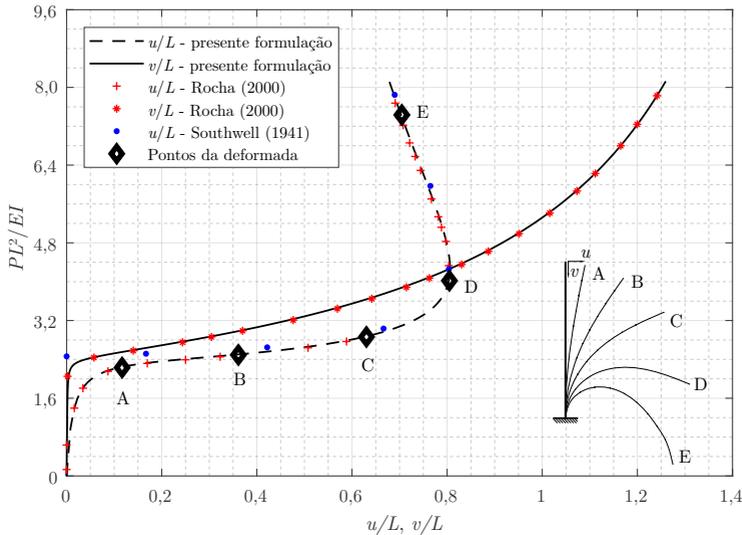
Figura 44 – Coluna engastada-livre



Para este exemplo, a capacidade do método implemen-

tado é verificada através da comparação dos resultados obtidos com os dados experimentais de Southwell (1941) e dados obtidos numericamente por Rocha (2000). O caminho de equilíbrio obtido é mostrado na Fig. 45 para os deslocamentos verticais e horizontais da extremidade livre e foi gerado usando, para o processo de análise incremental-iterativa, tolerância  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$ , número desejado de iterações  $I_d = 5$  e parâmetro inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda = 0,05$ . Percebe-se que os resultados experimentais diferem um pouco dos obtidos numericamente para os pontos iniciais do caminho de equilíbrio. No entanto, os demais pontos coincidem. O caminho encontrado pela metodologia desenvolvida coincide com o obtido por Rocha (2000). As configurações deformadas dos pontos A a E do caminho de equilíbrio são mostrados na Fig. 45.

Figura 45 – Caminho de equilíbrio - coluna engastada-livre



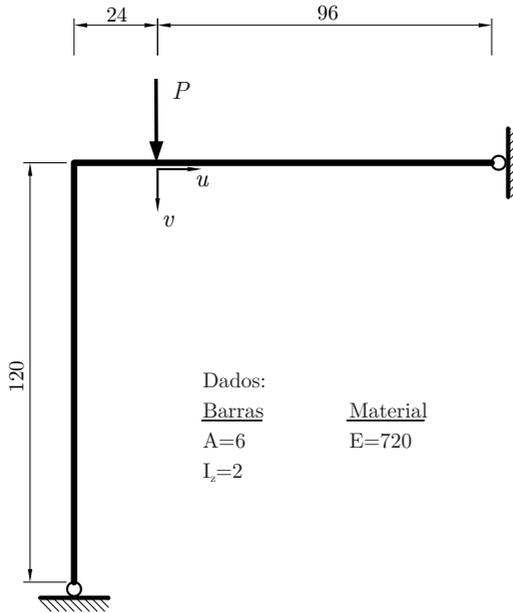
Também verificaram-se as implicações da atualização da matriz de rigidez a cada iteração, como proposto no método de Newton-Raphson clássico. Para esse caso, o processo incremental-iterativo foi realizado com 84 incrementos de carga. Já para o método de Newton-Raphson modificado, que atualiza a matriz de rigidez apenas no início de cada incremento de carga, o processo foi realizado com 94 passos. Embora a convergência do método de Newton-Raphson modificado seja realizada com um número maior de iterações, o tempo computacional envolvido é menor. Rocha (2000), após testar os métodos de Newton-Raphson clássico e modificado em uma série de problemas *benchmark*, afirma que, em geral, o método de Newton-Raphson modificado apresenta melhor desempenho.

### B.1.2 Pórtico de Lee

O pórtico de Lee (LEE; MANUEL; ROSSOW, 1968) é frequentemente usado por pesquisadores para validar suas formulações e estratégias de solução não linear (SCHWEIZERHOF; WRIGGERS, 1986; GALVÃO, 2000). Trata-se de um sistema estrutural em que problemas de instabilidade são verificados só depois de terem acontecido grandes deslocamentos. No decorrer do processo incremental, também fica evidente a presença de *snaps-back* e *snaps-through*. A estrutura é mostrada na Fig. 46 juntamente com suas propriedades geométricas e elásticas e carregamento.

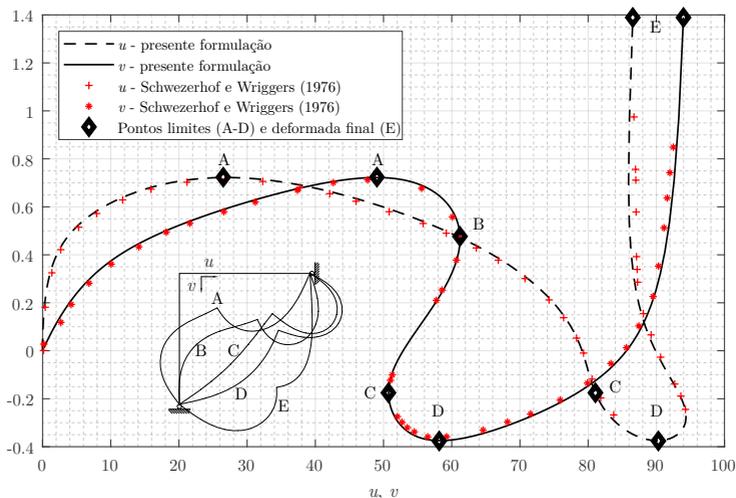
O caminho de equilíbrio é obtido discretizando-se a estrutura em 20 elementos de mesmo comprimento. Foram definidos, para o processo de análise incremental-iterativa, tolerância  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$ , número desejado de iterações  $I_d = 5$  e parâmetro

Figura 46 – Pórtico de Lee



inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda = 0,05$ . O caminho de equilíbrio é obtido após 829 incrementos de carga e é mostrado na Fig. 47 para deslocamentos verticais e horizontais do ponto de aplicação da carga. Percebe-se que os resultados encontrados foram próximos aos de Schweizerhof & Wriggers (1986). Na mesma figura, são mostrados os pontos limites de carga ou *snap-through* (pontos A e D), os pontos limites de deslocamento ou *snap-back* (pontos B e C) e o ponto da configuração final (ponto E) e com suas respectivas configurações deformadas.

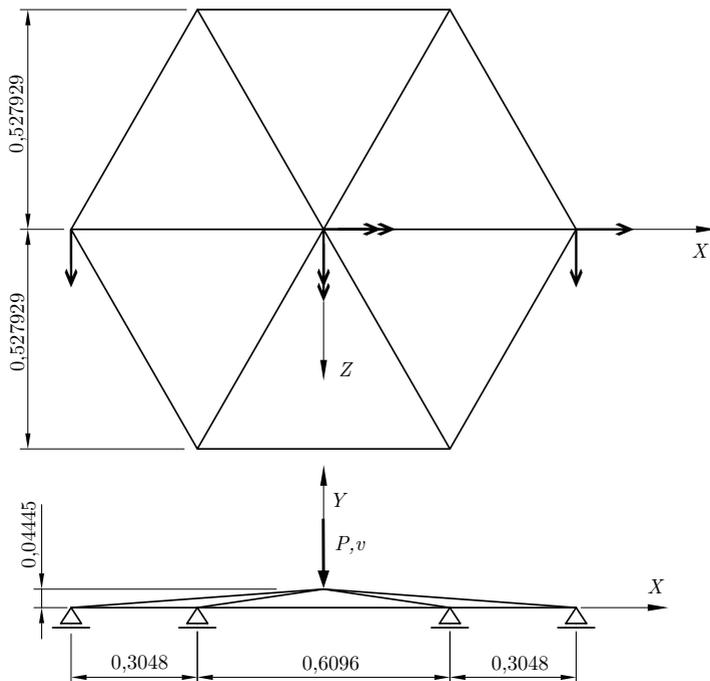
Figura 47 – Caminho de equilíbrio do pórtico de Lee



### B.1.3 Pórtico hexagonal

Este exemplo tem como objetivo validar a formulação desenvolvida para a análise não linear geométrica de pórticos espaciais. O pórtico é apresentado na Fig. 48 juntamente com suas propriedades geométricas e elásticas. As dimensões estão em metros. Ao se adotar apoios deslizantes para os nós inferiores da estrutura, são necessárias restrições adicionais de modo a evitar deslocamentos de corpo rígido. Assim, introduziu-se vínculos adicionais de translação no plano  $XZ$ , conforme indicado na mesma figura. Além disso, para se garantir deslocamentos axissimétricos, foram impostos vínculos adicionais de rotação em torno de  $X$  e  $Z$  no nó do topo, também mostrado na mesma figura.

Figura 48 – Pórtico hexagonal com apoios deslizantes



Direção dos vínculos adicionais para evitar deslocamentos de corpo rígido



Direção dos vínculos adicionais para garantir deslocamentos axissimétricos

Dados:

BarrasMaterial

$$A=3,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$E=3,0335 \text{ GPa}$$

$$I_x=8,33 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$G=1,0967 \text{ GPa}$$

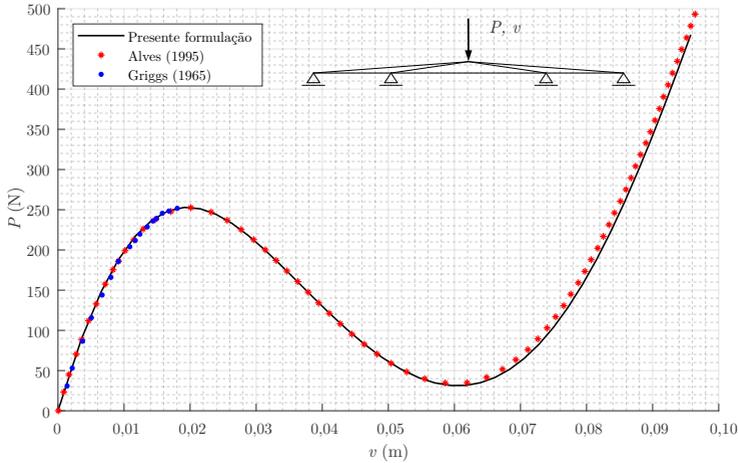
$$I_y=8,33 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J=1,41 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Esta estrutura foi escolhida por ter sido analisada previamente por diversos pesquisadores, sendo que Griggs (1966) obteve resultados a partir de um modelo experimental com material plástico. A Fig. 49 mostra o caminho de equilíbrio obtido e os compara com os resultados experimentais de Griggs (1966) e os obtidos por Alves (1995) através de uma análise numérica. Como se pode perceber, os resultados obtidos no presente trabalho são bem consistentes, sendo coincidentes com os dados experimentais de Griggs até onde foram obtidos e muito próximos aos de Alves no restante da trajetória.

Cada barra do pórtico foi discretizada em 5 elementos e o caminho de equilíbrio foi obtido após 75 incrementos de carga, sendo utilizada tolerância  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$ , número desejado de iterações para cada incremento de carga  $I_d = 3$  e parâmetro de carga inicial  ${}^0\Delta\lambda = 0,4$ .

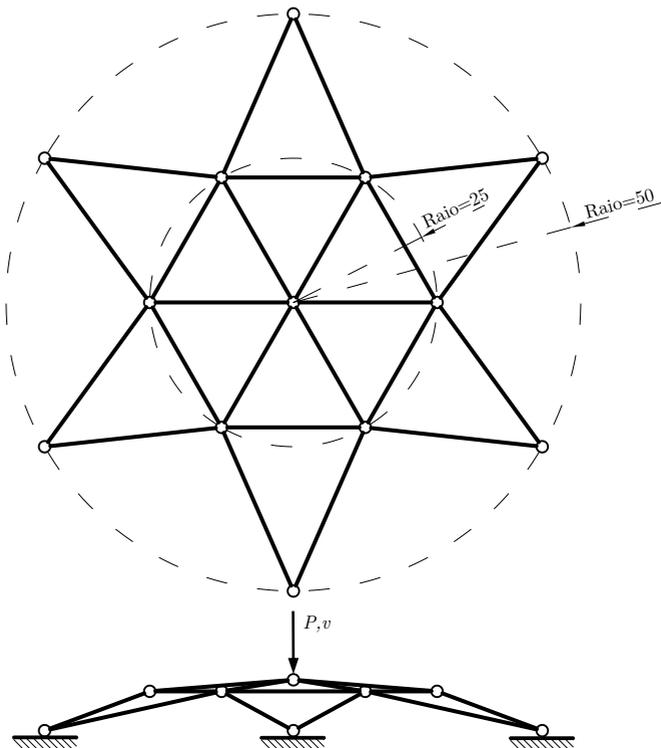
Figura 49 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo



#### B.1.4 Cúpula com 24 barras

A treliça apresentada na Fig. 50 foi analisada numericamente por Bonet, Gil & Wood (2012) e por Lacerda (2014), tendo o último utilizado uma formulação posicional do método dos elementos finitos. Na vista superior da cúpula, o círculo externo possui altura zero e o interno possui altura de 6,216. Os movimentos dos nós do nível zero estão impedidos quanto à translação. A carga é aplicada no ápice da treliça que possui altura de 8,216. A área da seção transversal de cada barra é unitária, o módulo de elasticidade é de  $8 \times 10^7$  e a relação de Poisson é de 0,5.

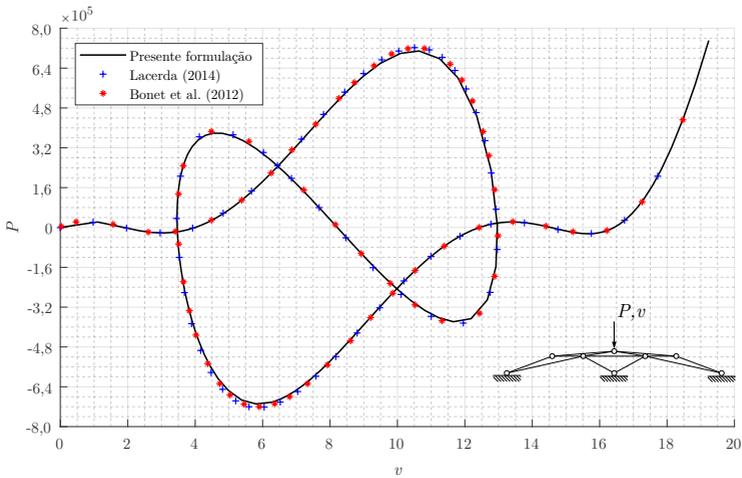
Figura 50 – Vistas superior e frontal da cúpula com 24 barras



O caminho de equilíbrio é mostrado na Fig. 51, para deslocamento vertical do nó do topo. Tanto a carga quanto o deslocamento vertical tem o sentido positivo para baixo. O caminho de equilíbrio apresenta os fenômenos de *snap-through* e *snap-back* e por isso foi usada a estratégia de comprimento de arco. O caminho foi gerado com 92 incrementos de carga, para uma tolerância  $\zeta_{tol} = 10^{-2}$ , número de iterações desejadas  $I_d = 2$  e parâmetro inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda = 0,5$ . Percebe-se que a

formulação apresentada no presente trabalho, além de gerar bons resultados para pórticos, também funciona bem para estruturas treliçadas. A trajetória obtida apresentou comportamento bem próximo ao encontrado por outros pesquisadores.

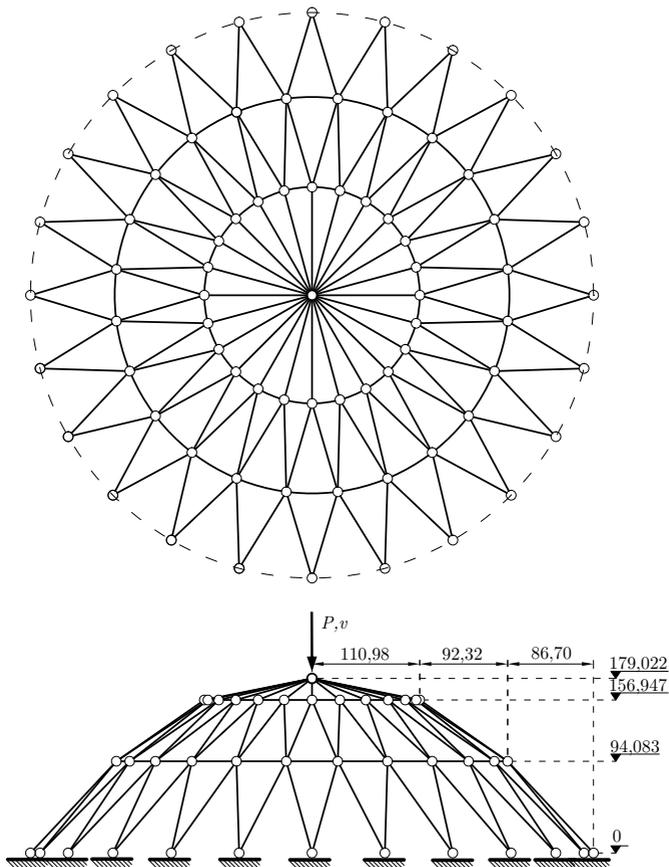
Figura 51 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo



### B.1.5 Cúpula com 168 barras

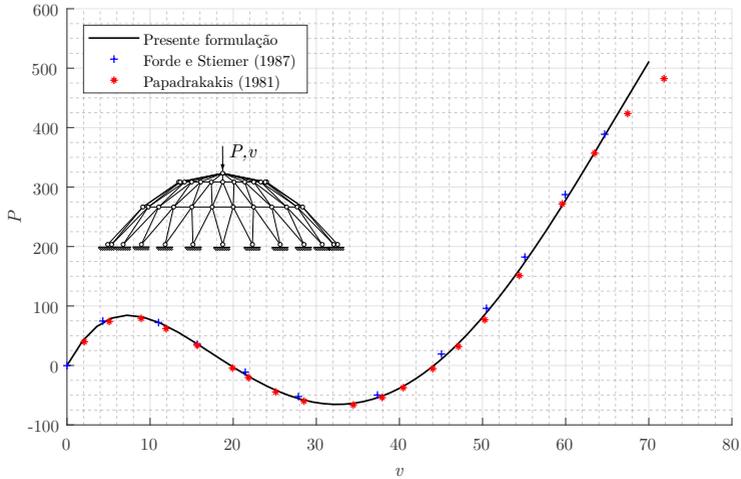
A treliça ilustrada na Fig. 52 foi previamente estudada por Papadrakakis (1981) e Forde & Stierner (1987). As barras possuem rigidez  $EA = 10^4$  e uma carga vertical é aplicada no nó no topo. Os nós inferiores estão restringidos de modo a impedir as translações.

Figura 52 – Cúpula com 168 barras



O caminho de equilíbrio foi obtido usando uma tolerância  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$ , número desejado de iterações  $I_d = 4$  e parâmetro inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda = 0,05$ . Os resultados do deslocamento vertical do nó do topo são mostrados na Fig. 53. Percebe-se que, novamente, foram obtidos resultados bem próximos aos dos outros pesquisadores.

Figura 53 – Caminho de equilíbrio - deslocamento vertical do topo



## B.2 Validação do método de análise não linear física e geométrica

Nesta seção, são analisados alguns exemplos para validação do método de análise não linear de pórticos considerando o aço com comportamento elastoplástico, conceitos de superfície de plastificação e rótulas plásticas e a possibilidade de grandes deslocamentos. Os exemplos são retirados de Marques (1990) pois o método de análise empregado pelo autor é bastante similar ao usado neste trabalho. De modo a realizar uma justa comparação

entre os resultados, adotou-se a superfície de escoamento

$$\Phi = \left( \frac{m_z}{1 - f_x^2} \right)^{1,73 + f_x^3} + \left( \frac{m_y}{1 - f_x^2} \right)^{1,73 + f_x^3}, \quad (\text{B.1})$$

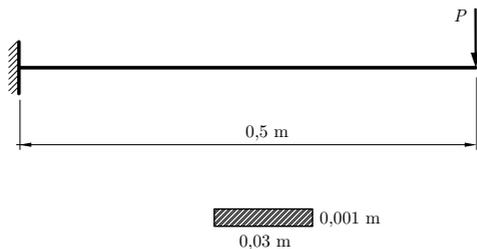
apresentada em Marques (1990) e usada para seções transversais retangulares.

Os quatro exemplos são estudados e possuem os seguintes parâmetros iniciais de entrada: fator inicial de carga  ${}^0\Delta\lambda = 0,2$ , número desejado de iterações para o processo iterativo  $I_d = 5$ , tolerância para a convergência durante a fase de correção  $\zeta_{tol} = 10^{-4}$  e foi adotado o método de Newton-Raphson clássico (i.e., é feita a atualização da matriz de rigidez tangente durante a fase de correção).

### B.2.1 Viga engastada-livre

Inicia-se a validação com uma viga em balanço, sujeita a uma carga concentrada vertical atuante em sua extremidade livre, conforme apresentado na Fig. 54. A viga foi discretizada em quatro elementos e análise foi realizada em 8 passos incrementais. O caminho de equilíbrio apresentado nesse e nos próximos exemplos foi suavizado ao reduzir o número desejado de iterações em cada incremento.

Figura 54 – Viga engastada-livre



Dados:

Barra

$$A=3,00 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$I_x=2,50 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$$

$$Z_x=7,50 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

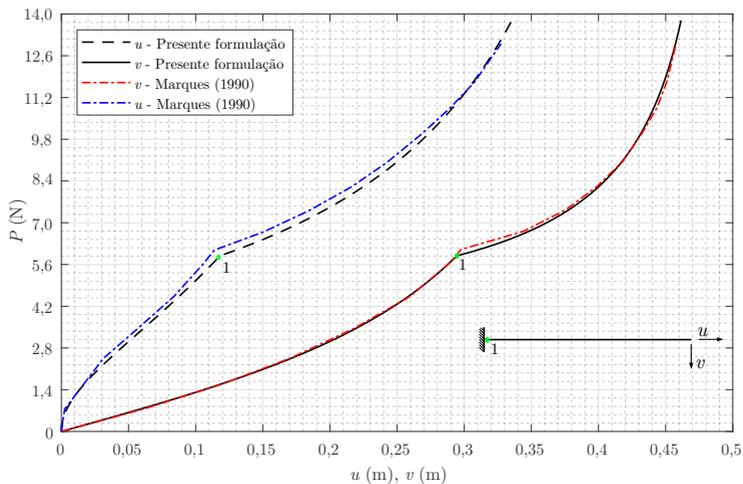
Material

$$E=210 \text{ GPa}$$

$$f_y=300 \text{ MPa}$$

O gráfico mostrado na Fig. 55 relaciona a carga aplicada  $P$  e os deslocamentos horizontal e vertical no extremo livre da viga.

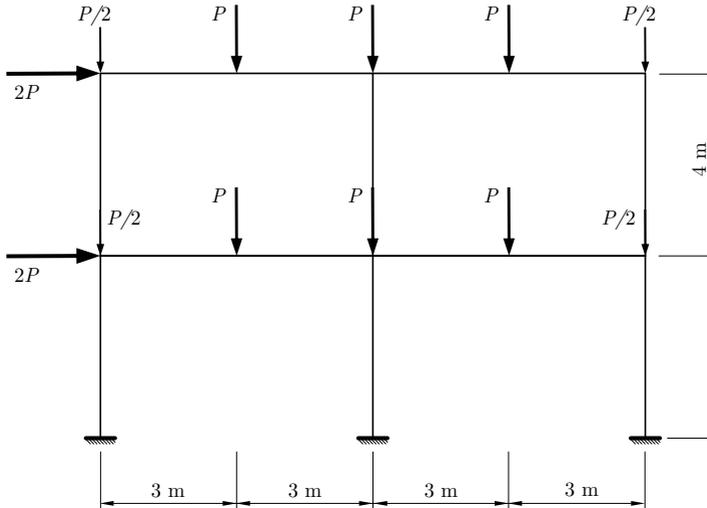
Figura 55 – Caminho de equilíbrio da viga engastada-livre



## B.2.2 Pórtico bidimensional

Este exemplo trata de um pórtico plano com dois andares, conforme ilustrado na Fig. 56. A estrutura foi discretizada em quatorze elementos, onde se tomou dois elementos em cada peça horizontal e um único elemento para cada barra vertical.

Figura 56 – Pórtico bidimensional



Dados:

ColunasVigasMaterial

$A=0,0192 \text{ m}^2$

$A=0,0118 \text{ m}^2$

$E=210 \text{ GPa}$

$I_z=0,000511 \text{ m}^4$

$I_z=0,000292 \text{ m}^4$

$f_y=250 \text{ MPa}$

$I_y=0,000511 \text{ m}^4$

$I_y=0,000292 \text{ m}^4$

$M_{pz}=732 \text{ kN.m}$

$M_{pz}=420 \text{ kN.m}$

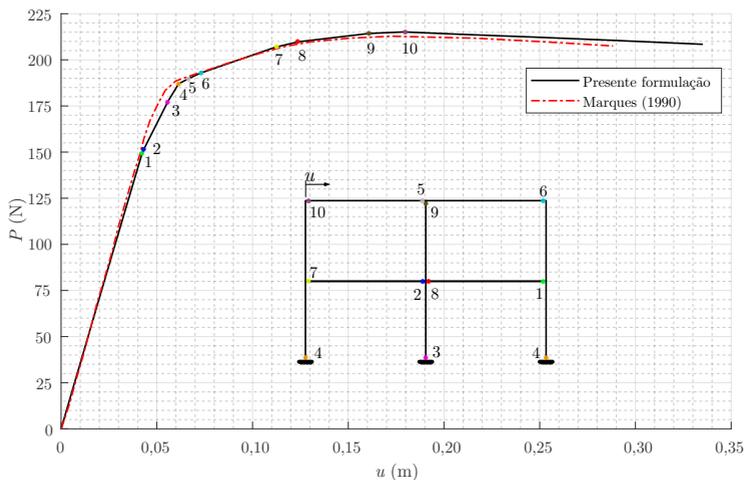
$M_{py}=732 \text{ kN.m}$

$M_{py}=420 \text{ kN.m}$

A análise foi realizada em 24 passos incrementais, com número de iterações variando de um a três. A carga crítica corresponde à  $P = 215 \text{ N}$ . A partir dessa carga ocorreu uma regressão de carregamentos acompanhada de incrementos de deslocamentos.

A Fig. 57 mostra o gráfico que relaciona o valor de  $P$  com o deslocamento horizontal do nó superior esquerdo da estrutura, assim como a sequência de formação das rótulas plásticas geradas durante a análise.

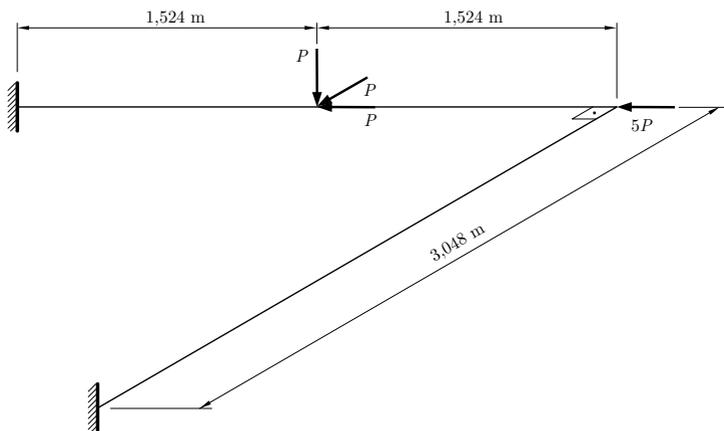
Figura 57 – Caminho de equilíbrio do pórtico bidimensional



### B.2.3 Grelha

Como um dos exemplos de estrutura espacial, analisou-se a grelha esquematizada na Fig. 58. A estrutura foi dividida em quatro elementos, dois em cada barra. Os resultados foram encontrados após 13 incrementos de carga e o caminho de equilíbrio é apresentado na Fig. 59, juntamente com a sequência de formação das rótulas plásticas.

Figura 58 – Grelha



Dados:

Barras

$$A=3,212968 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$J=3,693638 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_x=1,846403 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y=1,846403 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$M_{px}=54447,38 \text{ N.m}$$

$$M_{py}=54447,38 \text{ N.m}$$

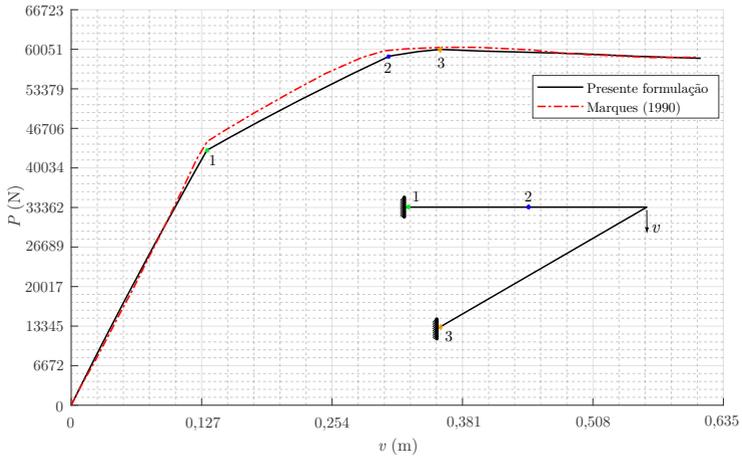
Materia

$$E=2,068423 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G=7,832430 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$f_y=2,483487 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

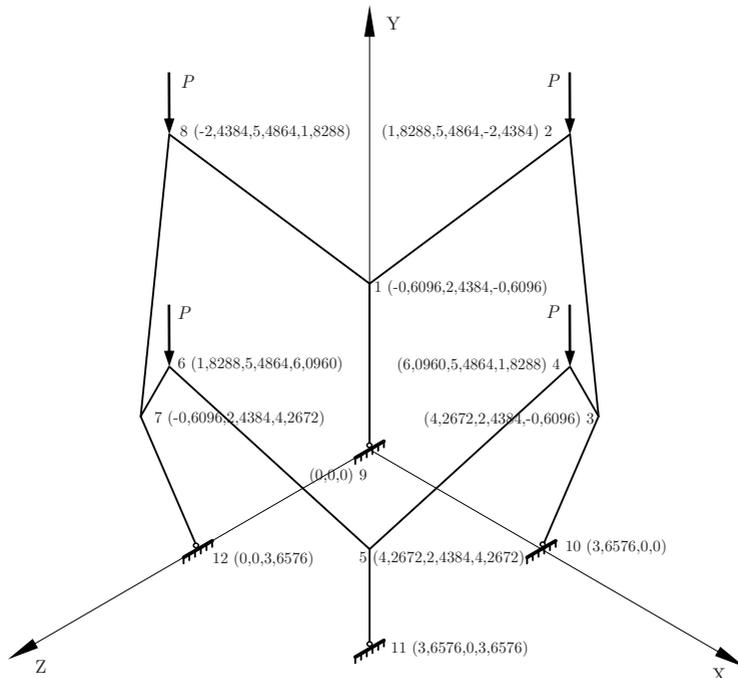
Figura 59 – Caminho de equilíbrio da grelha



### B.2.4 Pórtico tridimensional

Outro exemplo de estrutura tridimensional é o pórtico apresentado na Fig. 60. A estrutura foi discretizada em doze elemento, sendo um para cada barra e possui apoios rotulados em sua base. A análise foi realizada em 19 passos incrementais, com número desejado de iterações a cada passo de carga  $I_d = 5$ .

Figura 60 – Pórtico tridimensional



Dados:

Barras

$$A=3,212968 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$J=3,693638 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_x=1,846403 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y=1,846403 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$M_{pz}=54447,38 \text{ N.m}$$

$$M_{py}=54447,38 \text{ N.m}$$

Material

$$E=2,068423 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$G=7,832430 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$f_s=2,483487 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$$

A Fig. 61 mostra um gráfico que relaciona o valor da carga  $P$  com os deslocamentos verticais encontrados nos vértices

superiores da estrutura (por exemplo, o nó 4 da Fig. 60), além da sequência de formação das rótulas. A estrutura possui comportamento linear até a plastificação das seções nos nós 1, 3, 5 e 7. Há uma brusca redução da rigidez na estrutura até a formação da segunda série de rótulas plásticas, nos vértices superiores do pórtico, quando a estrutura passa a ser instável. O gráfico obtido novamente é muito próximo ao encontrado por Marques (1990).

Figura 61 – Caminho de equilíbrio do pórtico tridimensional

