

Werley da Costa Cordeiro

**CLASSE DE MODELOS NELSON-SIEGEL COM PARÂMETROS  
VARIANDO NO TEMPO: AJUSTE E PREVISÃO DA ESTRUTURA A  
TERMO DA TAXA DE JUROS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia para obtenção do grau de Mestre. Universidade Federal de Santa Catarina. Orientador: Prof. Dr. André Alves Portela Santos

Florianópolis, SC  
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cordeiro, Werley da Costa

Classe de modelos Nelson-Siegel com parâmetros variando no tempo : ajuste e previsão da estrutura a termo da taxa de juros / Werley da Costa Cordeiro ; orientador, André Alves Portela Santos, 2019. 102 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Econometria aplicada. 3. Previsão da curva de juros. 4. Modelo de Svensson. 5. Parâmetros variando no tempo. I. Santos, André Alves Portela . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

Werley da Costa Cordeiro<sup>1</sup>

**CLASSE DE MODELOS NELSON-SIEGEL COM PARÂMETROS  
VARIANDO NO TEMPO: AJUSTE E PREVISÃO DA ESTRUTURA A  
TERMO DA TAXA DE JUROS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para obtenção do Título de "Mestre", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Economia.

Florianópolis, 13 de Março de 2019

---

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Banca examinadora:**

---

<sup>1</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

---

Prof. Dr. André Alves Portela Santos  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura  
Primeiro membro  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira  
Segundo membro  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini  
Membro externo - videoconferência  
Universidade de São Paulo - Ribeirão Preto

## AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Deus pela sabedoria, pela misericórdia, pela graça e principalmente pelo amor demonstrado por intermédio de Jesus, o Cristo.

Aos meus pais Weliton e Ana Margarete pelo amor e pela oportunidade de ter acesso à riqueza eterna: educação. Minha gratidão estende-se ao meu irmão Weverton pelos conselhos e ensinamentos, e à minha irmã Liz Marina.

À minha noiva Maria Izabel pelo amor, pela paciência, pelas palavras de encorajamento e pela preciosa dedicação ao longo da nossa jornada.

Ao meu orientador André Portela pelos direcionamentos acerca da presente pesquisa, pelas ideias desenvolvidas e pelos incentivos no tocante à vida acadêmica.

Por fim, aos meus colegas e amigos Cássio, Tiago, Frederico e Aishameriane pelo conhecimento compartilhado.



## RESUMO

A presente pesquisa compara o ajuste e previsão da curva de juros por meio dos modelos dinâmicos de Svensson (1994) e de Nelson e Siegel (1987) com parâmetros variando no tempo. Para tal exercício, utilizou-se a representação em espaços de estados dos modelos para estimação baseada no filtro de Kalman para os modelos lineares, e no filtro de Kalman estendido para os modelos não-lineares. A introdução do parâmetro de decaimento e da volatilidade variando no tempo às extensões do modelo de Svensson são as principais contribuições desse estudo para a literatura. Os resultados, tanto para ajuste dentro da amostra quanto para previsão fora da amostra, são melhores que os modelos base de comparação, isto é, os modelos sem a introdução de parâmetros variando no tempo. Em especial, os modelos com o componente de volatilidade têm melhor performance que os demais. A hipótese de melhora na acurácia preditiva, portanto, confirma-se com a introdução de parâmetros que aumentam a flexibilidade dos modelos, principalmente para as extensões do modelo de Svensson.

**Palavras-chave:** Modelo de Svensson e modelo Nelson-Siegel dinâmico. Parâmetro de decaimento variando no tempo. Volatilidade variando no tempo. Curva de juros. Filtro de Kalman estendido.





## ABSTRACT

In this research, I compare the fit and forecast of the yield curve through the dynamic Svensson (1994) model and dynamic Nelson e Siegel (1987) model with time-varying parameters. For this exercise, I used the state space form of the models for estimation based on the Kalman filter for the linear models, and the extended Kalman filter for the nonlinear models. The introduction of the time-varying loading parameter and time-varying volatility to the extensions of the dynamic Svensson model are the main contributions of this study to the literature. The results, both for in-sample fitting and out-of-sample forecasting, are better than the base comparison models, i.e., the models without the introduction of time-varying parameters. In particular, the models with the volatility component perform better than the others. The hypothesis of improvement in predictive accuracy, therefore, is confirmed by the introduction of parameters that enhance the flexibility of the models, mainly for the extensions of the Svensson model.

**Key-words:** Dynamic Svensson model and dynamic Nelson-Siegel model. Time-varying loading parameter. Time-varying volatility. Yield curve. Extended Kalman filter.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fatores de carregamento do modelo Nelson-Siegel . . . .	23
Figura 2 – Fatores de carregamento do modelo de Svensson . . . . .	24
Figura 3 – Curvas de juros do Tesouro dos EUA (1972 - 2000) . . . .	36
Figura 4 – Nível, inclinação e curvaturas do modelo DNSS . . . . .	39
Figura 5 – Fatores de decaimento filtrados dos modelos DNSS . . . .	42
Figura 6 – Curva de juros observada e ajustada para diferentes períodos do modelo DNSS e extensões . . . . .	46
Figura 7 – Volatilidade variando no tempo: DNSS-GARCH-TVL1 . . .	51
Figura 8 – Curvas de juros do Tesouro dos EUA (2017 - 2018) . . . .	58
Figura 9 – Fatores de decaimento filtrados dos modelos DNS . . . . .	81
Figura 10 – Volatilidade do modelo DNS-GARCH-TVL . . . . .	82
Figura 11 – Curva de juros observada e ajustada para diferentes períodos do modelo DNS e extensões . . . . .	83



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estatísticas descritivas das taxas de juros dos EUA (1972 - 2000) . . . . .	36
Tabela 2 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-base . . . . .	38
Tabela 3 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-TVL1 . . . . .	41
Tabela 4 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-TVL2 . . . . .	43
Tabela 5 – Média e desvio-padrão dos erros filtrados dos modelos DNS, DNSS e extensões . . . . .	45
Tabela 6 – Log-verossimilhança e AIC dos modelos . . . . .	47
Tabela 7 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH . . . . .	48
Tabela 8 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH-TVL1 . . . . .	49
Tabela 9 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH-TVL2 . . . . .	50
Tabela 10 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 . . . . .	55
Tabela 11 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 (continuação) . . . . .	56
Tabela 12 – Estatísticas descritivas das taxas de juros dos EUA (2017 - 2018) . . . . .	58
Tabela 13 – Raiz do erro quadrático médio correspondente ao período 2018:09 - 2018:12 . . . . .	60
Tabela 14 – Parâmetros estimados do modelo DNS-base . . . . .	77
Tabela 15 – Parâmetros estimados do modelo DNS-GARCH . . . . .	78
Tabela 16 – Parâmetros estimados do modelo DNS-TVL . . . . .	79
Tabela 17 – Parâmetros estimados do modelo DNS-TVL . . . . .	80
Tabela 18 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 . . . . .	88
Tabela 19 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 (continuação) . . . . .	89
Tabela 20 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1996:04 - 1998:11 . . . . .	90
Tabela 21 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1996:04 - 1998:11 . . . . .	91
Tabela 22 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 . . . . .	96
Tabela 23 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 (continuação) . . . . .	97
Tabela 24 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 . . . . .	98

Tabela 25 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 (continuação) . . . . .	99
Tabela 26 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1996:04 - 1998:11 . . . . .	100
Tabela 27 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1996:04 - 1998:11 (continuação) . . . . .	101
Tabela 28 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 2018:09 - 2018:12 . . . . .	102

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1	FUNÇÃO DESCONTO, TAXA A TERMO E TAXA DE JUROS . . . . .	21
2.2	MODELO DE NELSON-SIEGEL . . . . .	22
2.3	MODELO DE SVENSSON . . . . .	23
2.4	A DINÂMICA DOS FATORES LATENTES . . . . .	25
2.5	ESTIMAÇÃO BASEADA NO FILTRO DE KALMAN . . . . .	26
2.6	VOLATILIDADE VARIANDO NO TEMPO . . . . .	28
2.7	FATORES DE DECAIMENTO VARIANDO NO TEMPO . . . . .	30
2.8	ESTIMAÇÃO BASEADA NO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO . . . . .	31
<b>3</b>	<b>ANÁLISE EMPÍRICA</b> . . . . .	<b>35</b>
3.1	DADOS . . . . .	35
3.2	ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA . . . . .	37
3.3	ANÁLISE FORA DA AMOSTRA . . . . .	52
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A – Estimador de menor erro quadrático médio (EMEQM)</b> . . . . .	<b>69</b>
	<b>APÊNDICE B – Parâmetros dos modelos DNS e extensões</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE C – REQM para os subperíodos entre 1993 a 2000</b> . . . . .	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE D – Resultados do teste Diebold-Mariano</b> . . . . .	<b>95</b>





## 1 INTRODUÇÃO

O uso de previsões de indicadores econômicos e financeiros, tais como taxa de juros, expectativa de inflação e retorno de ativos têm guiado a tomada de decisões de governos na condução de política monetária e investidores na alocação de ativos na economia. Neste sentido, a taxa de juros surge como um fator importante na condução da política monetária, na definição de preços e nos rendimentos de ativos. Modelar o comportamento e prever as tendências da taxa de juros têm sido objeto de estudo para captar informações que não são diretamente observáveis no mercado, como é o caso da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) ou curva de juros. A estrutura a termo da taxa de juros reflete as expectativas dos agentes do mercado sobre mudanças futuras nas taxas de juros, e avaliações da condução da política monetária ao apresentar a relação das taxas negociadas no mercado de títulos públicos, por exemplo, em diferentes maturidades ou vencimentos.

Pesquisas como a de Fama (1984), Fama e Bliss (1987) e Fama (1990), por exemplo, investigaram o poder preditivo das taxas de juros futuras de curto prazo e retorno esperado de títulos do Tesouro dos Estados Unidos. No campo de política monetária e crescimento do produto, Mishkin (1990), Harvey (1991), Estrella e Mishkin (1997) e Ang et al. (2006) mostraram que a curva de juros pode ser usada tanto para prever inflação, quanto para ajudar a explicar a variação e crescimento do nível de atividade econômica. No que diz respeito ao método de estimação da curva de juros, os principais modelos desenvolvidos podem ser classificados como modelos sem arbitragem, por exemplo, Heath et al. (1992) e Hull e White (1990), no qual o ajuste da estrutura a termo em um determinado período de tempo são consistentes, garantindo que as possibilidades de arbitragem não ocorra; modelos de equilíbrio, por exemplo Vasicek (1977), Cox et al. (1985), Duffie e Kan (1996) e Dai e Singleton (2002), em que se baseiam na hipótese de um equilíbrio econômico em um determinado mercado de taxas de juros, isto é assumem que os títulos com maturidades semelhantes devem ter retornos semelhantes; por fim, os modelos estatísticos ou paramétricos, por exemplo, Litterman e Scheinkman (1991), McCulloch (1971) e Shea (1984), que consistem em modelos de componentes principais, modelos de fatores ou variáveis latentes, e modelos de interpolação para representações estatísticas da estrutura a termo das taxas de juros.

Pesquisadores, notadamente Nelson e Siegel (1987)(doravante NS) e Svensson (1994)(NSS), desenvolveram modelos de interpolação paramétrica com três e quatro parâmetros, respectivamente, associados a termos exponenciais de decaimento para o ajuste da curva de juros. Os modelos NS e NSS,

por sua vez, passaram a ser modelos referenciais na estimação da curva de juros, sendo utilizados pela comunidade de bancos centrais e financeira em todo o mundo, ver ECB (2018) e BIS (2005).

A reinterpretção de Diebold e Li (2006) (DNS) do modelo NS, entretanto, explorou o desempenho do modelo com os três parâmetros variando no tempo como ferramenta de previsão da curva de juros, de tal forma que esses parâmetros foram interpretados como nível, inclinação e curvatura da curva de juros. Posteriormente, Diebold et al. (2006) agregaram variáveis macroeconômicas ao modelo DNS, considerando os parâmetros como fatores latentes na representação em espaços de estados. Desta forma, por meio de estimação em duas etapas e estimação em uma etapa utilizando o filtro de Kalman, os autores analisaram a relação das variáveis macroeconômicas com o comportamento da curva de juros futura. Após essas contribuições, diversos estudos continuaram a fornecer evidências de que o modelo DNS e o modelo de Svensson dinâmico (doravante DNSS) também poderiam ser uma ferramenta para ajustar e prever a curva de juros em diferentes arcabouços, ver Diebold et al. (2008), Yu e Salyards (2009), Pooter et al. (2010), Caldeira (2011), Christensen et al. (2011), Caldeira et al. (2016).

Pooter (2007), em um amplo estudo, comparou o ajuste dentro da amostra e o desempenho fora de amostra de uma série de especificações para os modelos DNS e DNSS. Os resultados dentro da amostra mostraram que modelos que incorporam múltiplos parâmetros de decaimento e fatores adicionais de inclinação ou curvatura melhoram o ajuste da forma funcional de três fatores original de NS. O modelo de quatro fatores, isto é, com nível, curvatura e duas inclinações, teve desempenho semelhante ao do modelo NSS, que tem duas curvaturas. Além de melhor ajuste dentro da amostra em relação ao modelo de três fatores, o autor também observou melhor desempenho fora da amostra com o modelo NSS. As estimções foram realizadas em uma e duas etapas. Mais especificamente, ao utilizar a estimação em uma etapa com o filtro de Kalman, foram produzidas previsões que superaram as estimções em duas etapas na maior parte das maturidades e horizontes. De modo geral, o modelo de Svensson com estimação em uma etapa obteve resultados superiores às demais especificações.

Em outra linha, Koopman et al. (2010) teve duas contribuições para a literatura da classe de modelos Nelson-Siegel, quais sejam, introduziram o fator de decaimento ( $\lambda$ ) e a volatilidade variando no tempo. Na primeira contribuição, o parâmetro de decaimento no modelo DNS foi considerado como um quarto fator latente, tornando-se um processo estocástico variando no tempo. Dessa forma, os fatores nível, inclinação e curvatura, juntamente com o fator de decaimento foram modelados em conjunto por meio de um vetor autorregressivo. Nesse arcabouço, a equação de observação tornou-se não-

linear no fator de decaimento, portanto, o modelo DNS foi calculado usando o método do filtro de Kalman estendido. Na segunda contribuição, os autores modificaram o modelo DNS ao introduzir matrizes de variância que variam no tempo por meio de um componente de volatilidade comum, modelado por um processo GARCH para os resíduos na equação de observação, em consonância com Bollerslev (1986) e Harvey et al. (1992).

De outra forma, extensões bayesianas foram desenvolvidas para capturar volatilidade estocástica e parâmetro de decaimento variando no tempo. Hautsch e Ou (2008), por exemplo, por meio de inferência Bayesiana utilizando o método da cadeia de Markov de Monte Carlo (MCMC), introduzem um modelo dinâmico de fator para a curva de juros do tipo NS, no qual os próprios fatores revelam volatilidade estocástica, isto é, o processo de volatilidade estocástica baseado em modelos conhecidos como modelos de volatilidade estocástica log-normal. Identificaram um papel importante da volatilidade da curvatura para previsões de longo prazo de variáveis macroeconômicas. Laurini et al. (2009) mostram que existe evidência que não somente os fatores latentes evoluem no tempo no modelo DNS, mas outros fatores como os parâmetros de decaimento e volatilidade devem ser tratados como fatores latentes adicionais, permitindo procedimentos de ajuste e previsão mais precisos para a estrutura a termo de taxas de juros. Além disso, mais pesquisas tais como, Caldeira et al. (2010), Laurini e Hotta (2010) e Hautsch e Yang (2012) mostram como resultado que a inclusão da volatilidade estocástica melhora o poder explicativo do modelo.

Diante dos avanços nos estudos de Pooter (2007) e Koopman et al. (2010), o presente estudo tem por objetivo inicial modelar a estrutura a termo da taxa de juros por meio dos modelos DNS e extensões com a introdução de parâmetros variando no tempo, quais sejam, parâmetro de decaimento e volatilidade, conforme o estudo de Koopman et al. (2010), utilizando o conjunto de dados de Fama e Bliss (1987) entre os períodos de janeiro de 1972 a Dezembro de 2000. A primeira contribuição para a literatura situa-se em analisar o desempenho dos modelos DNS fora da amostra com a inclusão do parâmetro de decaimento e da volatilidade variando no tempo utilizando os filtros de Kalman e Kalman estendido com estimação em uma etapa. A segunda e principal contribuição está na avaliação dos modelos DNSS e extensões na estimação dentro da amostra e análise da acurácia preditiva da curva de juros fora da amostra. A principal hipótese é que os modelos com a inclusão do parâmetro de decaimento e da volatilidade variando no tempo usando os filtros de Kalman e Kalman estendido melhoram o ajuste e previsão, principalmente para os modelos de Svensson e extensões. No total, foram desenvolvidos oito extensões além dos modelos referenciais, em detalhes, temos os seguintes: dois modelos base (DNS-base e DNSS-base); dois modelos com volatilidade

variando no tempo (DNS-GARCH e DNSS-GARCH); três modelos com parâmetro de decaimento variando no tempo (DNS-TVL, DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2); e três modelos com parâmetros de decaimento e volatilidade variando no tempo (DNS-GARCH-TVL, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2). As extensões são por vezes denominados como modelos concorrentes.

Especificamente, para a introdução da volatilidade variando no tempo para os resíduos na equação de observação, os modelos DNS e DNSS foram modificados na equação de estado para incorporar a especificação GARCH com um único fator, na decomposição do vetor de resíduos. O parâmetro de decaimento no modelo DNS, que em diversos estudos foi mantido fixo, nesse estudo foi flexibilizado de modo que pudesse variar no tempo. Em especial, nos modelos DNSS, há dois parâmetros de decaimento, logo, nas extensões dos modelos, apenas um dos dois parâmetros variou no tempo enquanto que o outro foi estimado, evitando assim problemas de identificação ao permitir que os dois parâmetros de decaimento variassem no tempo. Os erros de estimação das extensões dos modelos foram reportados e discutidos, em conjunto com os valores de testes sobre as verossimilhanças e critérios de informação de Akaike. Posteriormente, foram analisados as previsões fora da amostra por meio da raiz do erro quadrático médio (REQM), sendo que o modelo DNS foi utilizado como base de comparação, e as demais extensões como modelos concorrentes. Portanto, o presente estudo está segmentado nesse capítulo introdutório, no capítulo seguinte são apresentados os modelos utilizados e os métodos de estimação, no terceiro capítulo são apresentados os resultados dentro da amostra e fora da amostra; e, por fim, no capítulo quatro, conclusões e sugestões de pesquisas complementares são apresentadas.

## 2 MÉTODO

Nesse capítulo, são abordados conceitos fundamentais relativos ao estudo da dinâmica das curvas de juros, ou seja, conceitos e definições acerca da estimação da curva de juros, bem como as relações entre a função desconto, taxa a termo e taxa de juros. Além disso, são apresentados os modelos empregados no ajuste e previsão da curva de juros e os métodos de estimação.

### 2.1 FUNÇÃO DESCONTO, TAXA A TERMO E TAXA DE JUROS

Títulos públicos possuem diversos vencimentos. As maturidades desses títulos variam ao longo do tempo, ou seja, um título com maturidade  $\tau$  no período  $t$  é um título com maturidade  $\tau-1$  no período  $t+1$ . Além disso, várias maturidades não são observadas nos títulos disponíveis em qualquer tempo  $t$ . Portanto, por meio de alguns modelos, podemos transformar maturidades variáveis em maturidades constantes.

Nessa seção, três conceitos importantes são relacionados: a função desconto, a taxa a termo<sup>1</sup> e a taxa de juros. Seja  $P_t(\tau)$ , o preço de um título zero cupom, isto é, sem pagamento de cupom, com valor presente menor que \$1 recebível  $\tau$ -períodos a frente. Se  $y_t(\tau)$  é a taxa juros continuamente composta, então por definição, o preço de um título para uma determinada maturidade  $\tau$  no tempo  $t$  segue da seguinte forma:

$$P_t(\tau) = e^{-\tau y_t(\tau)}. \quad (2.1)$$

A função desconto e a curva de juros são relacionadas ao calcular o logaritmo natural e ao derivar (2.1) com relação a  $\tau$ , portanto, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \ln P_t(\tau) &= -\tau y_t(\tau), \\ \frac{P_t'(\tau)}{P_t(\tau)} &= -y_t'(\tau), \end{aligned}$$

desta forma, a função desconto e a taxa a termo estão relacionadas fundamentalmente. A taxa a termo é definida como segue:

$$f_t(\tau) = -\frac{P_t'(\tau)}{P_t(\tau)}. \quad (2.2)$$

<sup>1</sup> A taxa a termo pode ser interpretada como a taxa de retorno marginal necessária para manter um título por um período curto de tempo

As equações (2.1) e (2.2) implicam em uma relação entre a função desconto e a taxa a termo:

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du. \quad (2.3)$$

A equação (2.3), portanto, é a relação entre os juros até a maturidade  $\tau$  no tempo e a taxa a termo, isto é, a taxa média de decaimento da taxa a termo para o intervalo entre 0 e  $\tau$ . Na prática, essas curvas não são observadas, entretanto podem ser estimadas mediante os preços dos títulos. Esse resultado é utilizado na seção seguinte, no qual são apresentados os modelos NS e NSS.

## 2.2 MODELO DE NELSON-SIEGEL

Nelson e Siegel (1987) inovaram ao desenvolver um modelo parcimonioso de três fatores para títulos zero cupom. O modelo de fatores para a curva de juros consegue representar as formas geralmente associadas a curva de juros, isto é, monotônica, curvada e em formato de S. Esses autores assumiram que a forma funcional para a taxa instantânea de juros é a solução de uma equação diferencial de segunda ordem cujas raízes são descritas da seguinte forma:

$$f(\tau_i) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda_1 \tau_i} + \beta_3 \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_i}, \quad (2.4)$$

no qual  $f(\tau_i)$  é a taxa instantânea de juros para as  $\tau$  maturidades, e  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  e  $\lambda_1$  são parâmetros a serem estimados. Ao integrar a equação (2.4) com respeito a  $\tau$  de 0 a  $\tau$  e dividindo o resultado por  $\tau$ , é obtido a curva da taxa à vista composta continuamente na equação (2.5). Diebold e Li (2006) modificaram o modelo NS ao incorporar fatores que variam no tempo da seguinte forma<sup>2</sup>:

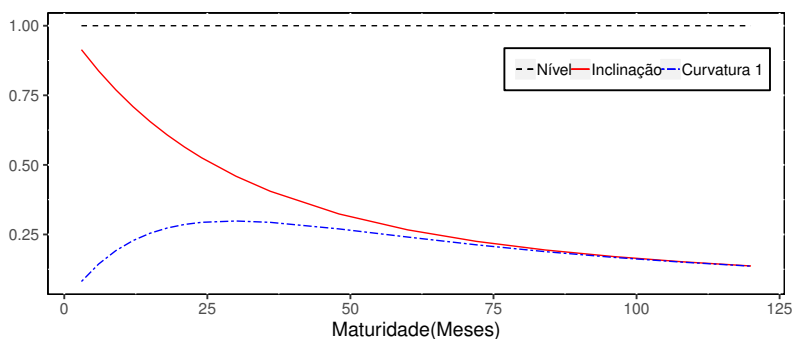
$$y_{i,t}(\tau_i) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau_i}}{\lambda_1 \tau_i} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau_i}}{\lambda_1 \tau_i} - e^{-\lambda_1 \tau_i} \right), \quad (2.5)$$

no qual  $y_t$  denota os juros no tempo  $t$  e  $\tau_i$  a maturidade do título para  $\{t\}_{i=1}^T$  e  $\{i\}_{i=1}^N$ , respectivamente. O parâmetro  $\lambda_1$  determina a taxa de decaimento exponencial, ou seja, pequenos valores de  $\lambda_1$  resulta em lento decaimento e pode ajustar melhor a curva para maturidades mais longas; por outro lado, valores grandes de  $\lambda_1$  produz rápido decaimento e pode ajustar melhor a curva para maturidades mais curtas.

<sup>2</sup> A equação (2.5) corresponde à equação (2) no artigo de Nelson e Siegel (1987). Conforme Diebold et al. (2006), são adotadas as notações  $\tau$  para maturidade em vez de  $m$ , e o fator de decaimento  $\lambda_1$  igual a  $\frac{1}{\tau}$ .

A formulação de Diebold e Li (2006) para o modelo de NS considera os três fatores como nível, inclinação e curvatura da curva de juros e, portanto, agrega interpretação econômica ao modelo. Os fatores de carregamento sobre os parâmetros  $\beta_{j,t}$ , para  $j = 1,2,3$ , são interpretados como contribuições do longo, curto e médio prazo, respectivamente, uma vez que quando a maturidade de um título tende ao infinito ( $\tau \rightarrow \infty$ ), os últimos dois fatores convergem para zero, entretanto o segundo começa em 1 e converge de modo rápido e monotônico; o último, por sua vez, é uma função côncava que cresce e depois converge de maneira monotônica para zero como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Fatores de carregamento do modelo Nelson-Siegel



Elaborado pelo autor. O modelo DNS tem três fatores latentes e um parâmetro de decaimento ( $\lambda_1 = 0.0609$ ).

No modelo de Diebold e Li (2006),  $\lambda_1$  é mantido fixo enquanto que os parâmetros  $\beta_{1,t}$ ,  $\beta_{2,t}$ ,  $\beta_{3,t}$  são estimados por mínimos quadrados ordinários para cada período de tempo. As estimativas *cross-section* podem ser obtidas sempre que houver taxas de juros suficientes para diferentes maturidades no tempo. Em Diebold et al. (2006), por outro lado,  $\lambda_1$  é estimado. Na seção seguinte, o modelo de Svensson é apresentado.

### 2.3 MODELO DE SVENSSON

Svensson (1994) propôs uma extensão do modelo original de Nelson-Siegel ao adicionar um quarto fator de carregamento, que corresponde a segunda curvatura, e um segundo parâmetro de decaimento ( $\lambda_2$ ) para melhorar

o ajuste do modelo. A forma funcional para a taxa instantânea de juros segue:

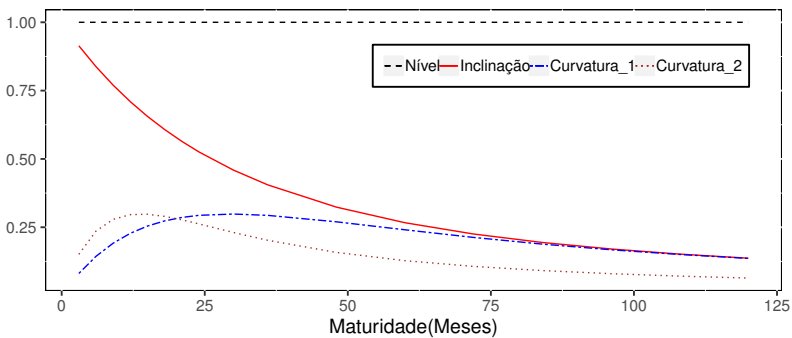
$$f(\tau_i) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda_1 \tau_i} + \beta_3 \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_i} + \beta_4 \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_i}, \quad (2.6)$$

no qual  $f(\tau_i)$  é a taxa instantânea de juros para as  $\tau$  maturidades,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1$  e  $\lambda_2$  são parâmetros a serem estimados. Note que o modelo de NSS torna-se o modelo de NS quando  $\beta_4$  é igual a zero. Ao integrar a equação (2.6) com respeito a  $\tau$  de 0 a  $\tau$  e o resultado dividido por  $\tau$ , tem-se a taxa à vista composta continuamente na seguinte equação, conforme interpretação de Diebold e Li (2006):

$$y_t(\tau_i) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau_i}}{\lambda_1 \tau_i} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau_i}}{\lambda_1 \tau_i} - e^{-\lambda_1 \tau_i} \right) + \beta_{4,t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_2 \tau_i}}{\lambda_2 \tau_i} - e^{-\lambda_2 \tau_i} \right). \quad (2.7)$$

A segunda curvatura é governada por  $\beta_4$  e por  $\lambda_2$ . Semelhante ao fator de carregamento vinculado ao parâmetro  $\beta_{3,t}$ , uma vez que a maturidade de um título tende ao infinito ( $\tau \rightarrow \infty$ ), o fator de  $\beta_4$  converge para zero. O modelo, portanto, possui quatro fatores de carregamento e dois fatores de decaimento, conforme ilustrados na Figura 2,  $\beta_{1,t}$  corresponde ao nível,  $\beta_{2,t}$  à inclinação,  $\beta_{3,t}$  à curvatura 2 e  $\beta_{4,t}$  à curvatura 1.

Figura 2 – Fatores de carregamento do modelo de Svensson



Elaborado pelo autor. O modelo DNSS tem quatro fatores latentes e dois parâmetros de decaimento ( $\lambda_1 = 0.0609$  e  $\lambda_2 = 0.13$ ).

Os modelos DNS e DNSS são, nesse estudo, os modelos base, uma vez que são referenciais para as demais extensões em termos de resultados para



ajuste e previsão. Na seção seguinte, os modelos são apresentados de forma geral por meio da representação em espaços de estado.

## 2.4 A DINÂMICA DOS FATORES LATENTES

Diebold et al. (2006) avançaram ao propor que o arcabouço do modelo NS pode ser representado como um modelo em espaço de estado ao tratar o vetor  $\beta_t = \beta_{j,t}$ , para  $j = 1, \dots, 4$ , como um vetor latente, isto é, não observável. Logo, pode-se escrever a equação de medida do modelo da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} y_t(\tau_1) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,2} & \dots & x_{1,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N,2} & \dots & x_{N,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \vdots \\ \beta_{j,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

no qual:

$$x_{i,2} = \frac{1 - z_{1,i}}{\lambda_1 \tau_i}, \quad x_{i,3} = \frac{1 - z_{1,i}}{\lambda_1 \tau_i} - z_{1,i}, \quad x_{i,4} = \frac{1 - z_{2,i}}{\lambda_2 \tau_i} - z_{2,i},$$

$$z_{1,i} = \exp(-\lambda_1 \tau_i), \quad z_{2,i} = \exp(-\lambda_2 \tau_i).$$

A equação de observação em (2.8) relaciona os juros observados das  $i = 1, \dots, N$  maturidades com os fatores latentes  $\beta_{j,t}$ , no qual assumem o modelo DNS para  $j = 1, 2, 3$  e o modelo DNSS para  $j = 1, 2, 3, 4$ .

O vetor autorregressivo de ordem 1, VAR(1), dos fatores que governam a dinâmica da equação de estado, é definido da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,t+1} \\ \vdots \\ \beta_{j,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{j,1} & \dots & \phi_{j,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t} - \mu_1 \\ \vdots \\ \beta_{j,t} - \mu_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \vdots \\ \eta_{j,t} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

em notação matricial, as equações (2.8) e (2.9) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_t = \Lambda(\lambda)\beta_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.10)$$

$$\beta_{t+1} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\beta_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.11)$$

no qual  $\mathbf{y}_t$  é um vetor  $N \times 1$ ,  $\Lambda(\lambda)$  é uma matrix  $N \times j$  dos fatores de carregamento,  $\boldsymbol{\Phi}$  é a matriz de parâmetros  $j \times j$  do VAR(1),  $\beta_t$  e  $\boldsymbol{\mu}$  são vetores  $j \times 1$ .

Assume-se que  $\boldsymbol{\eta}_t$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  são ortogonais entre si, distribuídos como segue:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{j \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon & \mathbf{0}_{N \times j} \\ \mathbf{0}_{j \times N} & \boldsymbol{\Sigma}_\eta \end{pmatrix} \right].$$

A matriz de variância dos erros de observação  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$  é diagonal. Essa suposição implica que os desvios das taxas de juros para diferentes maturidades não são correlacionados, o que facilita a estimativa do modelo reduzindo o número de parâmetros. Por outro lado, a suposição de que a matriz de variância dos erros de estado  $\boldsymbol{\Sigma}_\eta$  é irrestrita permite que os choques nos três fatores sejam correlacionados. Desta forma, temos, portanto, a representação do modelo DNS e DNSS na forma de espaços de estado.

Visto que o modelo foi configurado na forma de espaço de estados, vários algoritmos podem ser aplicados. Nesse estudo, utilizou-se o filtro de Kalman para os modelos lineares e o filtro de Kalman estendido para os modelos não-lineares. Esse algoritmo é um procedimento recursivo para calcular o estimador ótimo do vetor de estado no tempo  $t$ , com base na informação disponível no tempo  $t$ , e fazer previsões para o vetor de estado em  $t+1$  baseado em  $t$ . Na seção seguinte, o procedimento descrito acima é apresentado para a estimação dos modelos.

## 2.5 ESTIMAÇÃO BASEADA NO FILTRO DE KALMAN

O modelo das equações (2.10) e (2.11) é linear e gaussiano. A estimação portanto é baseada no filtro de Kalman. Esse algoritmo é um procedimento recursivo que utiliza as informações dos dados no tempo  $t$  para construir estimativas dos estados no tempo  $t + 1$ . O método de estimação proposto combina o filtro com a estimativa de máxima verossimilhança (MV).

O procedimento para calcular os valores dos estados latentes e os parâmetros desconhecidos é recursivo, isto é, o processo é iniciado ao fazer uma suposição inicial sobre os parâmetros desconhecidos  $\boldsymbol{\theta}_1$  para executar o algoritmo. Calcula-se o vetor de erro de previsão,  $\mathbf{v}_t$ , e a matriz de erro de previsão,  $\mathbf{F}_t$ , nas equações (2.12) e (2.13), respectivamente, para analisar a log-verossimilhança na equação (2.18). A atualização do vetor de estado  $\mathbf{b}_{t|t}$  e da matriz de variância  $\mathbf{B}_{t|t}$ , nas equações (2.14) e (2.15), é feita na etapa de filtragem em  $t$  dado o conjunto de informação até  $t$ . Portanto, considere o modelo definido em (2.10) e (2.11), e defina  $\mathbf{b}_{t|s}$  como o estimador de menor erro quadrático médio (MMSLE) de  $\boldsymbol{\beta}_t$  dado  $y_t, \dots, y_s$  para  $s = t-1, t$ ,

conforme derivação no apêndice A, na recursão a seguir:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \Lambda(\lambda)\mathbf{b}_{t|t-1}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_t = \Lambda(\lambda)\mathbf{B}_{t|t-1}\Lambda(\lambda)' + \Sigma_\varepsilon, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{b}_{t|t} = \mathbf{b}_{t|t-1} + \mathbf{B}_{t|t-1}\Lambda(\lambda)'\mathbf{F}_t^{-1}\mathbf{v}_t, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}_{t|t} = \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{B}_{t|t-1}\Lambda(\lambda)'\mathbf{F}_t^{-1}\Lambda(\lambda)\mathbf{B}_{t|t-1}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{b}_{t+1|t} = \boldsymbol{\mu} + \Phi(\mathbf{b}_{t|t} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B}_{t+1|t} = \Phi\mathbf{B}_{t|t}\Phi' + \Sigma_\eta, \quad (2.17)$$

no qual os parâmetros na matriz de coeficientes do VAR,  $\Phi$ , as matrizes de variâncias  $\Sigma_\varepsilon$  e  $\Sigma_\eta$ , o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  e o parâmetro  $\lambda$  são tratados como coeficientes desconhecidos e agrupados no vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ , conforme mencionado anteriormente. A previsão de  $\mathbf{b}_{t+1|t}$  e  $\mathbf{B}_{t+1|t}$ , isto é, um passo a frente, é calculado na etapa de previsão do filtro nas equações (2.16) e (2.17). Os resultados do vetor de erro de previsão,  $\mathbf{v}_t$ , e da matriz de erro de previsão,  $\mathbf{F}_t$ , são novamente utilizadas como entrada na função de log-verossimilhança, de modo que a estimativa possa ser conduzida para obter novas estimativas dos parâmetros desconhecidos  $\boldsymbol{\theta}_2$ . Essas etapas são então iteradas até que os valores dos parâmetros  $\boldsymbol{\theta}_{MV}$  sejam encontrados para os quais a função de log-verossimilhança é maximizada.

A estimação de  $\boldsymbol{\theta}$  é baseada na maximização numérica da função log-verossimilhança via decomposição do erro de previsão (ver Harvey (1989)). Portanto, a log-verossimilhança segue a seguinte forma:

$$\log L(Y_n) = -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |\mathbf{F}_t| + \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t), \quad (2.18)$$

no qual  $\mathbf{v}_t$  e  $\mathbf{F}_t$  são calculados recursivamente pelo filtro de Kalman (2.12) - (2.17) para um determinado conjunto de  $\boldsymbol{\theta}$ , de tal modo que  $\log L(Y_n)$  é computado por meio do resultado do filtro. A minimização do negativo do logaritmo da função de verossimilhança foi obtido pelo método quasi-Newton BFGS. Os cálculos necessários para implementação foram feitos por meio da linguagem R mantido pelo R Core Team (2018), e pelo pacote de otimização `lbfgsb3` mantido por Nash et al. (2015).

Nesse estudo, os parâmetros iniciais foram calculados na estimação em duas etapas consoante Diebold e Li (2006), quais sejam,  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\Sigma_\varepsilon$  matriz diagonal,  $\Sigma_\eta$  matriz triangular superior e  $\Phi$ . Conforme Koopman et al. (2010) e Christensen et al. (2010),  $\mathbf{b}_{1|0}$  e  $\Sigma_\beta$  do modelo podem ser calculados da seguinte forma, de acordo com a distribuição de  $\beta_{j,1}$ , dado por:

$$\beta_1 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_\beta), \quad (2.19)$$

no qual a matriz de covariância incondicional do vetor de estado,  $\Sigma_\beta$ , pode ser iniciada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Sigma_\beta - \Phi \Sigma_\beta \Phi' &= \Sigma_\eta, \\ \text{vec}(\Sigma_\beta) - \text{vec}(\Phi \Sigma_\beta \Phi') &= \text{vec}(\Sigma_\eta), \\ \mathbf{I}_{j^2} \text{vec}(\Sigma_\beta) - (\Phi \otimes \Phi) \text{vec}(\Sigma_\beta) &= \text{vec}(\Sigma_\eta), \\ [\mathbf{I}_{j^2} - (\Phi \otimes \Phi)] \text{vec}(\Sigma_\beta) &= \text{vec}(\Sigma_\eta), \\ \text{vec}(\Sigma_\beta) &= [\mathbf{I}_{j^2} - (\Phi \otimes \Phi)]^{-1} \text{vec}(\Sigma_\eta),\end{aligned}\quad (2.20)$$

logo, sob a hipótese de um processo estacionário, o valor inicial do vetor de estado é igual à média incondicional,  $\beta_1 = \mu$ , e o valor inicial da matriz de covariância incondicional  $\Sigma_\beta$  é igual a (2.20).

Nessa configuração linear, os modelos DNS, DNSS, DNS-GARCH e DNSS-GARCH são estimados. Na seção a seguir, é explicado o algoritmo usado nos modelos com volatilidade variando no tempo.

## 2.6 VOLATILIDADE VARIANDO NO TEMPO

Nos modelos DNS e DNSS, assumimos que a volatilidade é constante, o que pode ser uma suposição flexibilizada, uma vez que as taxas de juros estão relacionadas a negociações nos mercados financeiros, por isso, mudanças de volatilidade nesses mercados podem ocorrer ao longo do tempo; de modo geral, heterocedasticidade é um problema constante em economia, principalmente em finanças. O filtro de Kalman, por sua vez, não consegue resolver esse problema, isto é, o filtro funciona sob a hipótese que a matriz de variância e covariância é constante, ou pelo menos, conhecida. Assumindo a estrutura GARCH, a matriz é desconhecida, em outras palavras, está variando ao longo do tempo.

A contribuição nessa seção e nas seguintes situa-se, portanto, em modificar o filtro de Kalman e filtro de Kalman estendido para incorporar a abordagem GARCH, de modo que a estimação dos parâmetros e da volatilidade sejam executados em uma única etapa. A classe de modelos DNS e DNSS passam a ter, portanto, um componente de volatilidade comum que é modelado por um processo GARCH univariado conforme Harvey et al. (1992) e Koopman et al. (2010). O vetor de erro, na equação (2.10), é decomposto da seguinte forma:

$$\epsilon_t = \Gamma_\epsilon \epsilon_t^* + \epsilon_t^+, \quad (2.21)$$

no qual  $\Gamma_\epsilon$  e  $\epsilon_t^+$  são definidos como um vetor de pesos e um vetor de erro de dimensões  $N \times 1$ , respectivamente, e  $\epsilon_t^*$  um fator de erro escalar. Os componentes

de erro são independentes entre si da seguinte forma:

$$\varepsilon_t^* \sim \mathcal{N}(0, h_t), \quad \varepsilon_t^+ \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon^+), \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.22)$$

no qual  $\Sigma_\varepsilon^+$  é uma matriz diagonal e  $h_t$  é a variância especificada como um processo GARCH, conforme Bollerslev (1986). Neste caso, temos o seguinte:

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_t^{*2} + \gamma_2 h_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.23)$$

sendo que os parâmetros estimados têm as restrições  $\gamma_0 > 0$ ,  $0 < \gamma_1 < 0$ ,  $0 < \gamma_2 < 0$ ,  $h_1 = \gamma_0(1 - \gamma_1 - \gamma_2)^{-1}$  e  $(\gamma_1 + \gamma_2) < 1$ . O vetor de pesos  $\Gamma_\varepsilon$  pode ser normalizado para evitar problemas de identificação, tal que  $\Gamma_\varepsilon' \Gamma_\varepsilon = 1$ , porém essa restrição pode substituída por meio do  $\gamma_0$  fixo em  $1 \times 10^{-4}$ . Essa última restrição, portanto, é utilizada na estimação. A matriz de variância de  $\varepsilon_t$  em (2.23) varia no tempo da seguinte forma:

$$\Sigma_\varepsilon(h_t) = h_t \Gamma_\varepsilon \Gamma_\varepsilon' + \Sigma_\varepsilon^+, \quad (2.24)$$

no qual depende de um único fator descrito pelo processo GARCH em (2.23). Os parâmetros desconhecidos na especificação GARCH,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \Gamma_\varepsilon')'$ , são agrupados no vetor de parâmetros  $\theta$ .

Nessa especificação, a equação de estado em (2.11) tem mais um componente não observável, isto é,  $\varepsilon_t^*$  passa a ser calculado como um estado latente. A representação em espaço de estados da equação de observação (2.10) e da equação de estado (2.11) têm algumas modificações que seguem da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda(\lambda) & \Gamma_\varepsilon \end{bmatrix}}_{\Lambda^*(\lambda)} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_t \\ \varepsilon_t^* \end{bmatrix}}_{\beta_t^*} + \varepsilon_t^+, \quad \varepsilon_t^+ \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_\varepsilon^+), \quad (2.25)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{bmatrix}}_{\beta_{t+1}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} (I_j - \Phi_j) \mu \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mu^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_j & \mathbf{0}_{j \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times j} & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_t \\ \varepsilon_t^* \end{bmatrix}}_{\beta_t^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{bmatrix}}_{\eta_t^*}, \quad (2.26)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta_t \\ \varepsilon_{t+1}^* \end{bmatrix}}_{\eta_t^*} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_\eta & \mathbf{0}_{j \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times j} & h_{t+1} \end{bmatrix}}_{\Sigma_\eta^*}\right), \quad (2.27)$$

para  $t = 1, \dots, T$  e  $j = 1, 2, 3$  para o modelo DNS-GARCH e  $j = 1, 2, 3, 4$  para o modelo DNSS-GARCH. Visto que  $h_{t+1}$  em (2.23) está em função de seus valores passados e valores não observados de  $\varepsilon_t^*$ , não é possível calcular

os valores necessários para  $\hat{h}_{t+1}$  no tempo  $t$ . Harvey et al. (1992) propõem substituir o quadrado do termo de erro em (2.23) por sua esperança. Portanto,  $h_{t+1}$  pode ser substituído por sua estimativa baseado nas observações  $y_1, \dots, y_t$  da seguinte forma:

$$\hat{h}_{t+1|t} = \gamma_0 + \gamma_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t^{*2} | Y_t] + \gamma_2 \hat{h}_{t|t-1}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.28)$$

no qual a esperança pode ser calculada pelas recursões do filtro de Kalman por meio do vetor de estado aumentado com a perturbação  $\varepsilon_t^*$  filtrada no último elemento do vetor  $\mathbf{b}_{t|t}$ , na equação (2.32). A esperança segue da seguinte forma:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^{*2} | Y_t] = \hat{\varepsilon}_{t|t}^{*2} + B_{t|t}^\varepsilon, \quad (2.29)$$

no qual  $\hat{\varepsilon}_{t|t}$  é a estimativa filtrada de  $\varepsilon_t$ , e  $B_{t|t}^\varepsilon$  é a variância de  $\varepsilon_t$ , que são computados para todos os estados durante as recursões do filtro de Kalman, dada as observações até o período  $t$ . Por razão da substituição de  $\hat{h}_{t|t-1}$  em  $h_{t+1}$  na equação (2.27), que no filtro é inserido no elemento  $(j, j)$  da matriz  $\Sigma_\eta^*$  na equação (2.33), as estimativas do filtro e da verossimilhança são sub-ótimas, uma vez que a hipótese gaussiana é flexibilizada (ver Harvey et al. (1992)). A recursão segue da seguinte forma com as modificações necessárias para adicionar a volatilidade variando no tempo:

$$\mathbf{v}_t^* = \mathbf{y}_t - \Lambda^*(\lambda) \mathbf{b}_{t|t-1}^*, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F}_t^* = \Lambda^*(\lambda) \mathbf{B}_{t|t-1}^* \Lambda^*(\lambda)' + \Sigma_\varepsilon^+, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{b}_{t|t}^* = \mathbf{b}_{t|t-1}^* + \mathbf{B}_{t|t-1}^* \Lambda^*(\lambda)' \mathbf{F}_t^{*-1} \mathbf{v}_t^*, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{B}_{t|t}^* = \mathbf{B}_{t|t-1}^* - \mathbf{B}_{t|t-1}^* \Lambda^*(\lambda)' \mathbf{F}_t^{*-1} \Lambda^*(\lambda) \mathbf{B}_{t|t-1}^*, \quad (2.33)$$

$$\hat{h}_{t+1|t} = \gamma_0 + \gamma_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t^{*2} | Y_t] + \gamma_2 \hat{h}_{t|t-1}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{b}_{t+1|t}^* = \boldsymbol{\mu}^* + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathbf{b}_{t|t}^* - \boldsymbol{\mu}^*), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}_{t+1|t}^* = \boldsymbol{\Phi}^* \mathbf{B}_{t|t}^* \boldsymbol{\Phi}^{*'} + \Sigma_\eta^*, \quad (2.36)$$

Portanto, os modelos DNS-GARCH e DNSS-GARCH são estimados nessa configuração. Nas seções seguintes, é introduzido a forma dos modelos e o método de estimação não-linear para o fator de decaimento ( $\lambda_t$ ) variando no tempo nos modelos DNS-TVL, DNSS-TVL1, DNSS-TVL2, DNS-GARCH-TVL, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2.

## 2.7 FATORES DE DECAIMENTO VARIANDO NO TEMPO

Nos modelos anteriores,  $\lambda$  é um parâmetro estimado no vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ . Entretanto, conforme Koopman et al. (2010), há evidências que  $\lambda$

assume valores diferentes em diferentes curvas. Portanto, assume-se que  $\lambda_t$  é um estado latente variando no tempo. O modelo, portanto, deixa de ser linear e passa a ser não-linear. A equação de observação não-linear com o fator de decaimento variando no tempo assume a seguinte forma na equação (2.8):

$$x_{i,2} = \frac{1 - z_{1,i}}{\exp(\lambda_{1,t})\tau_i}, \quad x_{i,3} = \frac{1 - z_{1,i}}{\exp(\lambda_{1,t})\tau_i} - z_{1,i}, \quad x_{i,4} = \frac{1 - z_{2,i}}{\exp(\lambda_{2,t})\tau_i} - z_{2,i},$$

$$z_{1,i} = \exp(-\exp(\lambda_{1,t})\tau_i), \quad z_{2,i} = \exp(-\exp(\lambda_{2,t})\tau_i).$$

A equação (2.10) assume a seguinte forma:

$$\mathbf{y}_t = \Lambda(\exp(\lambda_{p,t}))\boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.37)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t+1} = \boldsymbol{\mu}^D + \boldsymbol{\Phi}^D(\boldsymbol{\alpha}_t - \boldsymbol{\mu}^D) + \boldsymbol{\eta}_t^D, \quad (2.38)$$

no qual o novo vetor de estado,  $\boldsymbol{\alpha}_t$ , passa a ter mais um fator além do nível, inclinação e curvaturas, isto é,  $\boldsymbol{\alpha}_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \log(\lambda_{1,t}))'$  para os modelos DNS-TVL, e  $\boldsymbol{\alpha}_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}, \log(\lambda_{p,t}))'$  com  $p = 1$  ou  $2$ , para os modelos DNSS-TVL1 ou DNSS-TVL2, visto que somente um dos dois  $\lambda_{p,t}$  varia no tempo para evitar problemas de identificação. Os vetores  $\boldsymbol{\mu}^D$  e  $\boldsymbol{\eta}_t^D$ , e a matriz  $\boldsymbol{\Phi}$  assumem dimensões apropriadas conforme o modelo, ou seja,  $j \times 1$ ,  $j \times 1$  e matriz  $j \times j$ , respectivamente, para  $j = 1, 2, 3, 4$  para o modelo DNS-TVL, e  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  para os modelos DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2. Na seção seguinte, é apresentado o método de estimação do modelo não-linear baseado no filtro de Kalman estendido.

## 2.8 ESTIMAÇÃO BASEADA NO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

Com a introdução de um parâmetro de decaimento variando no tempo, o sistema de espaço de estados torna-se não-linear, isto é, a presença do componente  $\lambda_t$ , variante no tempo, transforma a equação de observação em uma função não-linear desse fator latente. Essa não-linearidade dificulta a utilização do método convencional de estimação usando modelos em espaço de estados e a função máxima verossimilhança obtida pela decomposição de erros de previsão. Nessa configuração, o filtro de Kalman não é adequado, pois é construído para estimação linear. Pode-se prosseguir com a extensão do filtro de Kalman, que flexibiliza a suposição de linearidade.

O filtro de Kalman estendido (EKF), proposto por Anderson e Moore (1979), é uma versão não-linear do filtro de Kalman. O EKF, por sua vez, aproxima o sistema não-linear ao utilizar expansões de Taylor de primeira ordem para linearizar localmente o modelo em torno da estimativa mais atual de estado. Portanto, a equação de observação em (2.37) é linearizada para ser

estimado pelo filtro de Kalman estendido. Sendo assim, a equação (2.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.39)$$

no qual,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t) &= \boldsymbol{\Lambda}(\exp(\lambda_{p,t}))(\beta_{1,t}, \dots, \beta_{j,t}), \\ &= \Lambda_1(\exp(\lambda_{p,t}))\beta_{1,t}, \dots, \Lambda_j(\exp(\lambda_{p,t}))\beta_{j,t}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

e  $\Lambda_j(\exp(\lambda_{p,t}))$  é a  $j$ -ésima coluna de  $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\lambda}_t)$ . Ao calcular a derivada em (2.40) com relação aos estados em  $t-1$ , temos o seguinte gradiente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}}_t &= \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_t} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{t|t-1}} = \\ &= \left[ \left. \frac{\partial \mathbf{Z}_t}{\partial \alpha_{1,t}} \right|_{\alpha_{1,t}=\alpha_{1,t|t-1}} \quad \dots \quad \left. \frac{\partial \mathbf{Z}_t}{\partial \alpha_{j,t}} \right|_{\alpha_{j,t}=\alpha_{j,t|t-1}} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{Z}_t}{\partial \log(\lambda_{p,t})} \right|_{\log(\lambda_{p,t})=\log(\lambda_{p,t|t-1})} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Logo, as primeiras  $k$  colunas de (2.41) seguem da diferenciação com relação à  $\alpha_{j,t-1}$ , para  $k = 1, 2, 3$  referente ao modelo DNS-TVL, e  $k = 1, 2, 3, 4$ , ao modelo DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2. Para a  $j$ -ésima coluna, é necessário usar a regra da cadeia da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{p,t}} &= \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \log(\lambda_{p,t})} \cdot \frac{\partial \log(\lambda_{1,t})}{\partial \lambda_{p,t}}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \log(\lambda_{p,t})} \cdot \frac{1}{\lambda_{p,t}}, \\ \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \log(\lambda_{p,t})} &= \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{p,t}} \cdot \lambda_{p,t}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ao aplicar a regra da cadeia em (2.42), para  $p = 1$ , tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{1,t}} &= \frac{\alpha_{2,t} \cdot \exp(-\tau_i \lambda_{1,t})(\tau_i \lambda_{1,t} - \exp(\tau_i \lambda_{1,t}) + 1)}{\tau_i \lambda_{1,t}^2} + \\ &= \frac{\alpha_{3,t} \cdot \exp(-\tau_i \lambda_{1,t})(\tau_i^2 \lambda_{1,t}^2) + \tau_i \lambda_{1,t} - \exp(\tau_i \lambda_{1,t}) + 1}{\tau_i \lambda_{1,t}^2}, \end{aligned}$$

e para  $p = 2$ , tem-se o seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{2,t}} = \frac{\alpha_{4,t} \cdot \exp(-\tau_i \lambda_{2,t})(\tau_i^2 \lambda_{2,t}^2) + \tau_i \lambda_{2,t} - \exp(\tau_i \lambda_{2,t}) + 1}{\tau_i \lambda_{2,t}^2}.$$



Portanto, o fator de decaimento  $\lambda_p$ , com  $p = 1$  ou  $2$ , está em função do modelo a ser estimado; em outras palavras,  $p = 1$  para os modelos DNS-TVL e DNS-GARCH-TVL, DNSS-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL1, e  $p = 2$  para os modelos DNSS-TVL2 e DNSS-GARCH-TVL2. De modo geral, a solução para (2.41) segue da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{Z}}_t = \left[ \iota_{N \times 1} \quad \mathbf{\Lambda}_2(\exp(\lambda_{p,t})) \quad \dots \quad \mathbf{\Lambda}_j(\exp(\lambda_{p,t})) \quad \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{p,t}} \cdot \lambda_{p,t} \right], \quad (2.43)$$

no qual  $\iota_{N \times 1}$  é uma coluna de 1.

Com o fator de decaimento e volatilidade variando no tempo, as equações de observação e de estado em (2.25) e (2.26) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{Z}_t(\boldsymbol{\alpha}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_t^+, & (2.44) \\ &= \mathbf{\Lambda}(\exp(\lambda_{p,t}))(\beta_{1,t}, \dots, \beta_{j,t})' + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_t^* + \boldsymbol{\varepsilon}_t^+, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^+ &\sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^+), \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{t+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_j - \Phi_j)\boldsymbol{\mu} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j & \mathbf{0}_{j \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times j} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^* \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_\eta & \mathbf{0}_{j \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times j} & h_{t+1} \end{bmatrix}\right), \quad (2.46)$$

no qual  $\boldsymbol{\alpha}_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t})$  e  $\beta_{4,t} = \log(\lambda_{1,t})$  para o modelo DNS-GARCH-TVL;  $\boldsymbol{\alpha}_t = (\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}, \beta_{5,t})$  e  $\beta_{5,t} = \log(\lambda_{1,t})$  para o modelo DNSS-GARCH-TVL1 e  $\lambda_{2,t}$  para o modelo DNSS-GARCH-TVL2. Por fim, equação (2.44) segue da seguinte maneira com relação a diferenciação que entra no filtro de Kalman estendido:

$$\dot{\mathbf{Z}}_t = \left[ \iota_{N \times 1} \quad \mathbf{\Lambda}_2(\exp(\lambda_{p,t})) \quad \dots \quad \mathbf{\Lambda}_j(\exp(\lambda_{p,t})) \quad \frac{\partial \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_t)}{\partial \lambda_{p,t}} \cdot \lambda_{p,t} \quad \boldsymbol{\Gamma} \right]. \quad (2.47)$$

Após a linearização da equação de observação com relação aos estados em  $t-1$  nas equações (2.43) para os modelos sem volatilidade variando no tempo, e (2.47) com volatilidade variando no tempo, a recursão em (2.12) a (2.17)

pode ser reescrita da forma seguinte:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t(\mathbf{a}_{t|t-1}), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{F}_t = \dot{\mathbf{Z}}_t \mathbf{A}_{t|t-1} \dot{\mathbf{Z}}_t' + \Sigma_\varepsilon^+, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{a}_{t|t} = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{A}_{t|t-1} \dot{\mathbf{Z}}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{A}_{t|t} = \mathbf{A}_{t|t-1} - \mathbf{A}_{t|t-1} \dot{\mathbf{Z}}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \dot{\mathbf{Z}}_t \mathbf{A}_{t|t-1}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{a}_{t+1|t} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{a}_{t|t} - \boldsymbol{\mu}), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{A}_{t+1|t} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}_{t|t} \boldsymbol{\Phi}' + \Sigma_\eta, \quad (2.53)$$

no qual  $\mathbf{v}_t$ , na equação (2.48), é o vetor de erro de previsão;  $\mathbf{F}_t$ , na equação (2.49), é a matriz de variância dos erros de previsão;  $\mathbf{a}_{t|t}$ , na equação (2.50), é o vetor de estado filtrado;  $\mathbf{A}_{t|t}$ , na equação (2.51), é a matriz de variância dos estados;  $\mathbf{a}_{t+1|t}$ , na equação (2.52), é a previsão do vetor de estado um passo a frente; e  $\mathbf{A}_{t+1|t}$ , na equação (2.53), é a previsão da matriz de variância dos estados um passo a frente.

O algoritmo de (2.48) a (2.53), portanto, é conhecido como filtro de Kalman estendido. Dessa forma, tem-se o método de estimação necessário para calcular os modelos apresentados, quais sejam, DNS, DNS-GARCH, DNSS e DNSS-GARCH para a parte de estimação linear, e DNS-TVL, DNS-GARCH-TVL, DNSS-TVL1, DNSS-TVL2, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 para a parte de estimação não-linear. No capítulo seguinte, são apresentados os resultados das estimações dentro da amostra e previsões fora da amostra para os modelos DNS, DNSS e extensões. Resultados com informações complementares, tais como parâmetros estimados por Koopman et al. (2010) e Diebold et al. (2006), estão no Apêndice B.

### 3 ANÁLISE EMPÍRICA

A Análise empírica dos modelos apresentados no capítulo anterior segue nas seções seguintes da seguinte forma: apresentação dos dados, análise dentro da amostra e análise fora da amostra. Na análise dentro da amostra, para a base de dados com observações mensais entre Janeiro de 1970 a Dezembro de 2000, os dez modelos são discutidos de acordo com os resultados dos parâmetros estimados e comparados entre os modelos DNS-base para as extensões desse modelo, e da mesma forma para o modelo DNSS-base e extensões. Para os modelos DNS-base e extensões, as principais tabelas com parâmetros são apresentados no Apêndice B. Na análise fora da amostra, dois conjuntos de dados são utilizados, quais sejam: novamente os dados com observações mensais entre Janeiro de 1970 a Dezembro de 2000, e a base de dados com observações diárias entre Janeiro de 2017 a Dezembro de 2018<sup>1</sup>. Na seção a seguir, é apresentado o primeiro conjunto de dados e a respectiva discussão dentro da amostra.

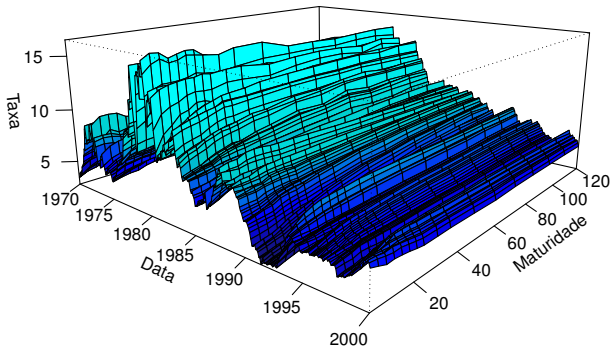
#### 3.1 DADOS

O primeiro conjunto de dados abrange o período de Janeiro de 1970 a Dezembro de 2000, para maturidades de 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses dos títulos dos EUA. O período de amostragem abrange, portanto, 348 observações mensais. A pesquisa dentro da amostra utiliza o método Fama e Bliss (1987) para construção da base de dados. Tal escolha baseia-se em dados amplamente utilizados vários pesquisadores, notadamente Koopman et al. (2010), Diebold e Li (2006) e Diebold et al. (2006). A forma da curva de juros é particularmente analisada, uma vez que fornece indicações da mudança futura da taxa de juros e da atividade econômica. A Figura 3 mostra a estrutura a termo da taxa de juros em uma superfície tridimensional em função da maturidade ao longo do tempo. O gráfico revela alguns fatos estilizados comuns para a curva de juros como a dinâmica dos níveis e inclinações.

Na Tabela 1, o conjunto de dados é apresentado em algumas estatísticas descritivas para cada maturidade, tais como média, desvio-padrão, assimetria e curtose. Pode-se confirmar alguns fatos estilizados conhecidos das taxas de juros como, por exemplo, as autocorrelações são próximos de 1 e aumentam

<sup>1</sup> Base de dados obtida por meio do pacote `Quandl` mantido por Raymond McTaggart et al. (2018).

Figura 3 – Curvas de juros do Tesouro dos EUA (1972 - 2000)



Elaborado pelo autor. A amostra contém 348 observações mensais entre o período de Janeiro de 1972 a Dezembro de 2000 com maturidades  $\tau = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108$  e 120 meses.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas das taxas de juros dos EUA (1972 - 2000)

Maturidade	Média	Dp	Assim	Curt	Mín	Máx	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(2)$	$\hat{\rho}(30)$
3	6.850	2.698	1.217	4.462	2.732	16.020	0.970	0.699	0.318
6	7.079	2.705	1.156	4.211	2.891	16.481	0.972	0.718	0.355
9	7.201	2.682	1.116	4.085	2.984	16.394	0.972	0.725	0.377
12	7.301	2.606	1.067	3.909	3.107	15.822	0.970	0.729	0.394
15	7.408	2.551	1.049	3.841	3.288	16.043	0.972	0.736	0.414
18	7.481	2.535	1.064	3.851	3.482	16.229	0.973	0.743	0.430
21	7.544	2.523	1.075	3.839	3.638	16.177	0.974	0.747	0.441
24	7.557	2.477	1.055	3.734	3.777	15.650	0.974	0.745	0.450
30	7.646	2.400	1.027	3.585	4.043	15.397	0.974	0.754	0.469
36	7.723	2.377	1.065	3.665	4.204	15.765	0.977	0.760	0.479
48	7.861	2.319	1.057	3.577	4.308	15.821	0.977	0.765	0.498
60	7.932	2.285	1.020	3.391	4.347	15.005	0.980	0.778	0.514
72	8.046	2.262	1.007	3.320	4.384	14.979	0.980	0.785	0.524
84	8.079	2.218	1.021	3.392	4.352	14.975	0.980	0.768	0.526
96	8.141	2.204	0.981	3.238	4.433	14.936	0.981	0.792	0.535
108	8.176	2.211	0.992	3.312	4.429	15.018	0.981	0.794	0.540
120 (Nível)	8.143	2.167	0.994	3.406	4.443	14.925	0.981	0.771	0.531
Inclinação	1.292	1.463	-0.564	3.064	-3.505	4.060	0.929	0.410	-0.099
Curvatura	0.121	0.721	0.102	4.212	-1.837	3.169	0.787	0.259	0.076

Elaborado pelo autor. Os juros para as 17 maturidades foram construídos usando o método Fama e Bliss (1987). Para cada maturidade é apresentado a média, desvio-padrão, assimetria, curtose, mínimo, máximo e autocorrelações  $\hat{\rho}(1)$ ,  $\hat{\rho}(12)$ ,  $\hat{\rho}(30)$ . Além disso, são apresentados dados aproximados para o nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo. Os dados aproximados são definidas da seguinte forma: para nível, os juros de maior de maturidade (120 meses); para inclinação, a diferença entre os juros de 120 meses e os juros de 3 meses; e para curvatura, duas vezes os juros de 24 meses menos a soma dos juros de 3 meses e de 120 meses.

com a maturidade, isto é, independentemente da maturidade, são processos persistentes. Além disso, a volatilidade diminui através das maturidades, percebe-se assimetria e excesso de curtose, o que sugere não normalidade para a amostra apresentada.

A utilização da base de dados de Fama e Bliss (1987), amplamente estudada, favorece a comparação entre os resultados obtidos e os resultados já observados na literatura. Os resultados dos parâmetros estimados para os modelos DNS, DNS-TVL, DNS-GARCH e DNS-GARCH-TVL são apresentados no Apêndice B, uma vez que as seguintes seções discutem os resultados dos modelos da classe Svensson em torno da inclusão dos fatores de decaimento e volatilidade variando no tempo.

### 3.2 ANÁLISE DENTRO DA AMOSTRA

O primeiro modelo a ser estimado possui quatro fatores latentes filtrados e dois parâmetros de decaimento estimados (DNSS-base), com 49 parâmetros. Diferentemente dos modelos DNS-base, o modelo DNSS-base melhora a flexibilidade das curvas e dos ajustes. A precisão extra é obtida com o custo de adicionar mais fatores e parâmetros, por exemplo,  $\beta_{4,t}$ ,  $\lambda_2$  e parâmetros na matriz do VAR, que devem ser filtrado e estimado nessa configuração. Na Tabela 2, são apresentados os resultados da estimação dos parâmetros dentro da amostra. Em detalhes, é apresentado a matriz de coeficientes da equação de estado no Painel (A), que governa a dinâmica dos fatores filtrados em relação aos seus valores passados. Os elementos da diagonal na matriz de coeficientes são próximos de 1, todos com alto nível de significância. Dessa forma, a alta persistência observada na Tabela 1 é também verificado pelos resultados da estimação no modelo de DNSS-base. Com relação a média incondicional, somente a do Nível ( $\mu_{\beta_1}$ ) é significativa.

No Painel (B) da Tabela 2, é apresentado a matriz de variâncias e covariâncias dos fatores filtrados. As maiores variâncias são relacionadas aos fatores de Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ ) e Curvatura 2 ( $\beta_{2,t}$ ), além disso, as covariâncias entre as curvaturas mostram-se significativas, só que de forma negativa. Os parâmetros de decaimento  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  foram estimados com valores 0.1044 (0.00705) e 0.0494 (0.00368), respectivamente, com os desvios-padrão entre parênteses. Esses valores correspondem a curvaturas atingindo seu máximo nas maturidades de 18 e 36 meses. Lembrando que o parâmetro  $\lambda_p$  determina a taxa de decaimento exponencial, ou seja, pequenos valores de  $\lambda_p$  resulta em lento decaimento e pode ajustar melhor a curva para maturidades mais longas; por outro lado, valores grandes de  $\lambda_p$  produz rápido decaimento e pode ajustar melhor a curva para maturidades mais curtas.

Os erros filtrados, definidos como a diferença entre a curva de juros

Tabela 2 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-base

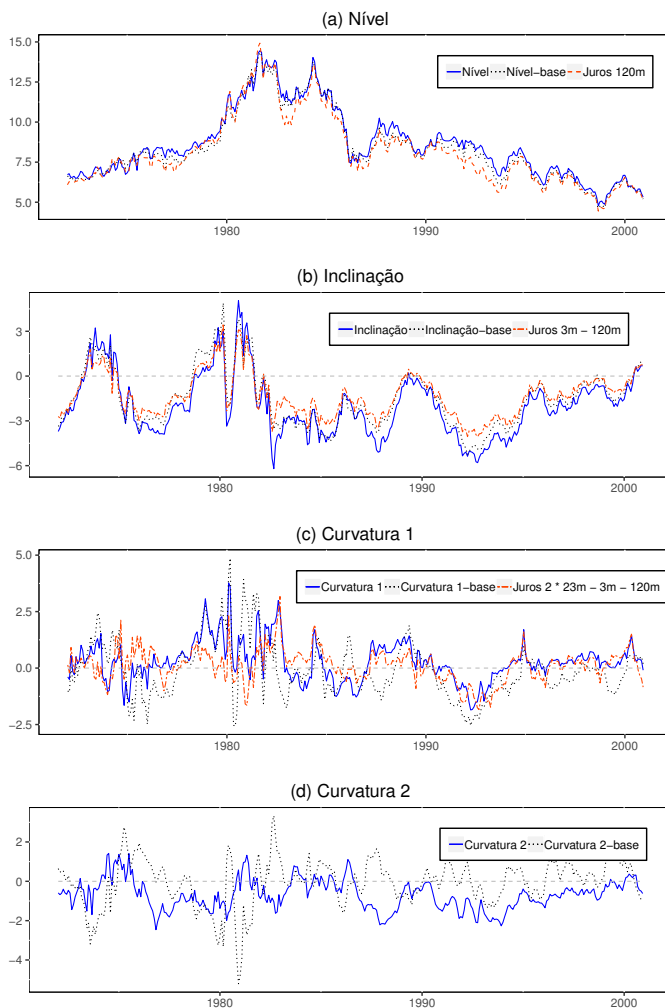
DNSS-base					
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional					
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	1.00160**	0.0326**	-0.0275*	-0.00941	7.94**
	0.00754	0.0120	0.0111	0.0115	0.906
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.038	0.927**	0.0806**	0.0279	-0.663
	0.0233	0.0269	0.0225	0.0261	0.781
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	0.0367	0.0646	0.789**	-0.0282	0.405
	0.0347	0.0502	0.0417	0.0524	0.757
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	-0.0105	0.0235	0.0377	0.913**	-0.30
	0.0361	0.0285	0.0339	0.0497	0.372
Painel (B): Matriz de variância					
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.114**	-0.0515	0.144	-0.102	
	0.0193	0.0517	0.123	0.110	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.518**	-0.325	0.288**	
		0.0301	0.119	0.086	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.645**	-0.686**	
			0.103	0.183	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				0.830**	
				0.0561	

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes no modelo DNSS-base. O painel (A) apresenta as estimativas da matriz dos coeficientes autorregressivos,  $\Phi$ , e do vetor  $\mu$ . O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância  $\Sigma_{\eta}$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

observada e a estimativa filtrada obtida do filtro de Kalman, para o modelo DNSS-base, reportados na Tabela 5, estão entre os menores, em especial para as maturidades de 6 meses e 108 meses, conforme sugere os valores de  $\lambda_p$  para os ajustes de curto e longo prazo, e em consonância com a feita observação anteriormente. No modelo DNS-base, por outro lado, o parâmetro de decaimento ( $\lambda_1$ ) foi estimado em 0.0773 (0.0021), em linha com o mesmo parâmetro estimado em Diebold et al. (2006) e Koopman et al. (2010) (ver Tabela 14 no Apêndice B).

Na Figura 4 são reportados os fatores filtrados de nível, inclinação e curvaturas 1 e 2 dos modelos DNSS-base e do modelo DNSS-GARCH-TVL1, além das variáveis empíricas aproximadas para esses fatores, exceto para a segunda curvatura. Em detalhe, os Paineis (a), (b), (c) e (d) apresentam as estimativas para os níveis, inclinações, curvaturas 1 e curvaturas 2 juntamente com os dados empíricos.

Figura 4 – Nível, inclinação e curvaturas do modelo DNSS



Elaborado pelo autor. A figura apresenta o nível, inclinação, curvatura 1 e curvatura 2 do modelo base DNSS-base e do modelo com a volatilidade e o primeiro fator de decaimento variando no tempo (DNSS-GARCH-TVL1) nos Painéis (a), (b), (c) e (d), juntamente com os dados empíricos para nível, inclinação e curvatura 1. Para o nível, a série aproximada é a maturidade de 120 meses; para a inclinação, é a diferença entre as maturidades de 3 e 120 meses; e para a curvatura, é o dobro dos juros da maturidade de 24 meses menos as maturidades de 3 e 120 meses. Os fatores com linha contínua referem-se ao modelo DNSS-GARCH-TVL1.

Para o nível, a série aproximada é a maturidade de 120 meses; para a inclinação, é a diferença entre as maturidades de 3 e 120 meses; e para a curvatura, é o dobro dos juros da maturidade de 24 meses menos as maturidades de 3 e 120 meses. A dinâmica do fator de nível ( $\beta_{1,t}$ ) seguiu em crescimento na amostra entre 1972 e alcançou seu pico na primeira metade da década de 1980. A diferença entre o modelo DNSS-base e o modelo DNSS-GARCH-TVL1 está visível ao longo da amostra, o que sugere ajustes dentro da amostra semelhantes, porém o modelo base é mais parcimonioso. Em termos de erros filtrados, de modo geral, o modelo DNSS-base teve 8 menores médias de erros através das maturidades em comparação com o modelo DNS-GARCH-TVL1 (ver Tabela 5). A inclinação ( $\beta_{2,t}$ ), no Painel (b), por sua vez, seguiu abaixo de zero na maior parte da amostra. Semelhantemente aos níveis, a diferença entre as inclinações dos dois modelos seguem em torno de zero. No Painel (c), as inclinações tiveram mais diferenças entre os modelos e a variável aproximada para a inclinação, e seus resultados estão centrados em torno de zero. O diferencial no modelo de Svensson é o fator para a segunda curvatura. No Painel (d), é apresentado a Curvatura 2, que assim como na curvatura 1, tem maior amplitude na série do modelo DNSS-base que o modelo DNSS-GARCH-TVL1 e média abaixo de zero, conforme valores reportados na matriz de variâncias na Tabela 2 e na Tabela 8. Pelos valores da log-verossimilhança, na Tabela 6, o modelo DNSS-base alcança 3678.9. Esse valor é usado como base de comparação de desempenho para os demais modelos, além do critério de informação de Akaike (AIC) e do teste de razão da verossimilhança (Estatística LR) para melhora nos modelos. Em seguida, são discutidos os resultados com relação aos modelos com o primeiro fator de decaimento variando no tempo ( $\lambda_{1,t}$ ) e com o segundo fator de decaimento variando no tempo ( $\lambda_{2,t}$ ).

A segunda e terceira extensões do modelo DNSS referem-se aos modelos de fatores de decaimento variando no tempo, isto é DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2. No modelo DNS, Diebold e Li (2006) sugerem fixar  $\lambda_t$  em 0.0609 para todo  $t$ , em vez de tratá-lo como um parâmetro desconhecido. De outra forma, Diebold et al. (2006) passam a tratar como um parâmetro a ser estimado, cujo valor após a estimação é 0.077, resultado semelhante ao encontrado por Koopman et al. (2010), 0.0778. O presente estudo estimou o parâmetro  $\lambda$  em 0.0773 para o modelo DNS.

Pofter (2007) da mesma forma fixou e estimou os valores de  $\lambda$  para diferentes amostras e modelos, especialmente o modelo de Svensson e Svensson ajustado, porém para um conjunto de dados ligeiramente menor que os autores anteriores. Entretanto, Koopman et al. (2010) sugere que há diferentes valores para  $\lambda$ , portanto, passa a tratá-lo como uma fator variando no tempo. Nesse sentido, a amostra em questão foi subdividida em três períodos com intervalos de



116 observações, isto é, 1972 a 1981, 1981 a 1990 e 1990 a 2000 para verificar se houve diferentes valores nos parâmetros de decaimento. Os parâmetros foram, portanto, reestimados no modelo DNSS-base para cada subperíodo, de modo que os valores para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  com os desvios-padrão foram os seguintes: 0.1704 (0.005) e 0.0518 (0.001); 0.0576 (0.0225) e 0.118 (0.004), 0.0757 (0.001897) e 0.0757 (0.001896), respectivamente. Os resultados sugerem, por conseguinte, que o fator de decaimento varia ao longo da amostra. Sendo assim, o logaritmo do parâmetro de decaimento foi inserido no vetor de estado para ser filtrado juntamente com os fatores de nível, inclinação, curvatura 1 e 2 (ver seção 2.8 para mais detalhes sobre a estimação).

No primeiro modelo (DNSS-TVL1), o fator de decaimento  $\lambda_{1,t}$  foi filtrado e o parâmetro  $\lambda_2$  foi estimado. No Painel (A) da Tabela 3, são apresentados os parâmetros estimados para a matriz de coeficientes do vetor autorregressivos,  $\Phi$ , do modelo DNSS-TVL1.

Tabela 3 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-TVL1

DNSS-TVL1						
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional						
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\lambda_{1,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	1.00**	0.0328	-0.0291	-0.0172	0.00410	8.81**
	0.0209	0.0205	0.00871	0.0117	0.0533	1.64
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0452	0.892**	0.115**	0.0806**	0.0128	-1.03**
	0.0538	0.0196	0.0459	0.0172	0.0828	0.234
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	0.0157	0.0618*	0.809**	-0.0369	-0.00251	0.678
	0.0181	0.0246	0.0139	0.0298	0.0952	0.6
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	0.0365	-0.0317	0.0192	0.970**	-0.000811	0.452
	0.0382	0.021	0.0358	0.0257	0.0568	0.293
Decaimento 1 ( $\lambda_{1,t}$ )	-0.0146**	-0.00936	-0.00338	-0.0179**	0.934**	-2.28**
	0.00214	0.00624	0.00486	0.0067	0.0317	0.272
Painel (B): Matriz de variância						
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	$\lambda_{1,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.107**	-0.0471	0.108**	-0.0617**	-0.0122	
	0.0116	0.0425	0.0893	0.0152	0.112	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.331**	-0.124**	0.148**	0.0185	
		0.004	0.0695	0.061	0.0641	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.06**	-0.242**	-0.058**	
			0.0746	0.0591	0.0162	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				0.498**	0.00748	
				0.0456	0.0634	
Decaimento 1 ( $\lambda_{1,t}$ )					0.0621**	
					0.0124	

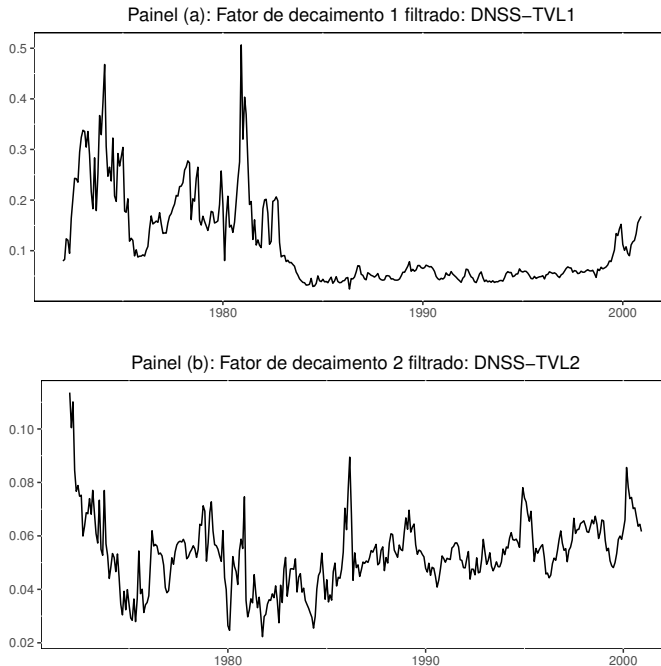
Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento ( $\lambda_{1,t}$ ) variando no tempo, sendo que atua na inclinação e curvatura 1 do modelo. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância

*boldsymbolSigma*. Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

Os componentes da diagonal da matriz de coeficientes, assim como no modelo base, são próximos de 1, exceto o primeiro elemento que é 1, o que sugere a persistência do fator nível ao longo do tempo. O coeficiente do fator de decaimento também é estatisticamente significativo. Isso é refletido

em menor erro filtrado na Tabela 5 para o modelo DNSS-TVL1 comparado com o modelo base, todavia a log-verossimilhança (3654.6) é ligeiramente menor, conforme o Painei (B) na Tabela 6, em comparação com o modelo base de comparação (3678.9). O parâmetro  $\lambda_2$ , sendo que atua na Curvatura 2, foi estimado em 0.0922 e desvio-padrão de 0.00268. A dinâmica dos fatores de decaimento  $\lambda_{1,t}$  e  $\lambda_{2,t}$  nos modelos DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2, respectivamente, são mostrados na Figura 5.

Figura 5 – Fatores de decaimento filtrados dos modelos DNSS



Elaborado pelo autor. A figura mostra os fatores de decaimento filtrados  $\lambda_{1,t}$  e  $\lambda_{2,t}$  variando no tempo. No Painei (a), o fator filtrado  $\lambda_{1,t}$  influencia a inclinação e a curvatura 1 no modelo DNSS-TVL1, enquanto que o parâmetro desconhecido  $\lambda_2$  foi estimado em 0.0922 (0.00268). No Painei (b), o fator  $\lambda_{2,t}$  influencia somente a curvatura 2, enquanto que o parâmetro  $\lambda_1$  foi estimado em 0.103 (0.00467)

A evolução do fator de decaimento 1 no modelo DNSS-TVL1 tem menor variância que o mesmo fator no modelo DNS-TVL, isto é, 0.0621 contra 0.144. Entretanto, isso pode ser atribuído ao fato de que o modelo DNSS-TVL1 tem um parâmetro de decaimento e uma curvatura a mais, o que

pode ajustar melhor o modelo.

A segunda especificação para fator de decaimento variando no tempo é estimada (DNSS-TVL2). Nesse caso, o parâmetro de decaimento  $\lambda_1$ , que é estimado, atua sobre a inclinação e sobre a primeira curvatura, e o fator de decaimento  $\lambda_{2,t}$ , que é filtrado, atua somente sobre a segunda curvatura. Em termos de erros filtrados, o modelo DNSS-base teve menor erro médio absoluto em 10 maturidades e o modelo DNSS-TVL2 em 7 maturidades. Isso sugere que o desempenho deste modelo nessa amostra não foi superior ao modelo DNSS-base quando comparado todas as maturidades, e o modelo DNSS-TVL2 teve média dos erros, em termos absolutos, maior que o modelo referência, isto é, 0.63 contra 0.62 do modelo base. No Painel (b) da Figura 5, a dinâmica do fator  $\lambda_{2,t}$  tem menor variância que o modelo com o fator  $\lambda_{1,t}$ , uma vez que atua somente na segunda curvatura, enquanto que  $\lambda_{1,t}$  atua na inclinação e curvatura. O parâmetro  $\lambda_1$ , por sua vez, teve valor estimado em 0.103 e desvio-padrão 0.00467.

Tabela 4 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-TVL2

DNSS-TVL2						
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional						
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\lambda_{2,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.988**	0.0352**	-0.017**	0.0033	0.0401	8.95**
	\$ 0.00798	0.00636	0.000876	0.0107	0.0559	0.725
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.00604	0.936**	0.0601**	0.0234	0.0786	-0.745*
	0.00527	0.0170	0.0109	0.0248	0.117	0.338
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	-0.0543**	-0.000418	0.891**	0.0170	-0.150**	0.320
	0.00823	0.0178	0.0337	0.0486	0.0421	0.735
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	0.0455	0.0754**	-0.0326*	0.876**	-0.129	0.414
	0.0287	0.0178	0.0132	0.033	0.111	0.303
Decaimento 2 ( $\lambda_{2,t}$ )	-0.0109**	-0.0183**	0.00705	-0.000342	0.791**	-3.02**
	0.00591	0.00435	0.00526	0.00662	0.0464	0.068
Painel (B): Matriz de variância						
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	$\lambda_{2,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.140**	-0.0657	0.182**	-0.186**	-0.0307*	
	0.0208	0.0459	0.0898	0.0994	0.0121	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.484**	-0.261**	0.297**	0.037**	
		0.0302	0.0539	0.0585	0.0129	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.30**	-0.691**	0.0375**	
			0.095	0.123	0.00436	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				1.07**	0.0406**	
				0.0524	0.0172	
Decaimento 2 ( $\lambda_{2,t}$ )					0.0335**	
					0.0129	

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento variando no tempo, sendo que atua na curvatura 1 e curvatura 2 do modelo. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância  $\Sigma_{\eta}$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

A Tabela 4 apresenta os parâmetros estimados para o modelo DNSS-TVL2. Nesse modelo, o fator de decaimento 1 ( $\lambda_1$ ), que atua na inclinação e curvatura 1, é estimado e o fator de decaimento 2 é filtrado. Os coeficientes

estimados tanto na matriz do VAR quanto na matriz de variâncias para  $\lambda_{2,t}$  são estatisticamente significativos, sendo que na matriz do VAR, os coeficientes de nível e curvatura são próximos de 1. Diferentemente do  $\lambda_{1,t}$  que no modelo DNSS-TVL1 tem comportamento semelhante ao  $\lambda_{1,t}$  no modelo DNS-TVL (ver Figura 9 no Anexo B), o fator  $\lambda_{2,t}$  tem intervalo de variação entre 0.02 e 0.1, enquanto que o  $\lambda_{1,t}$  tem intervalo de variação entre 0 e 0.5.

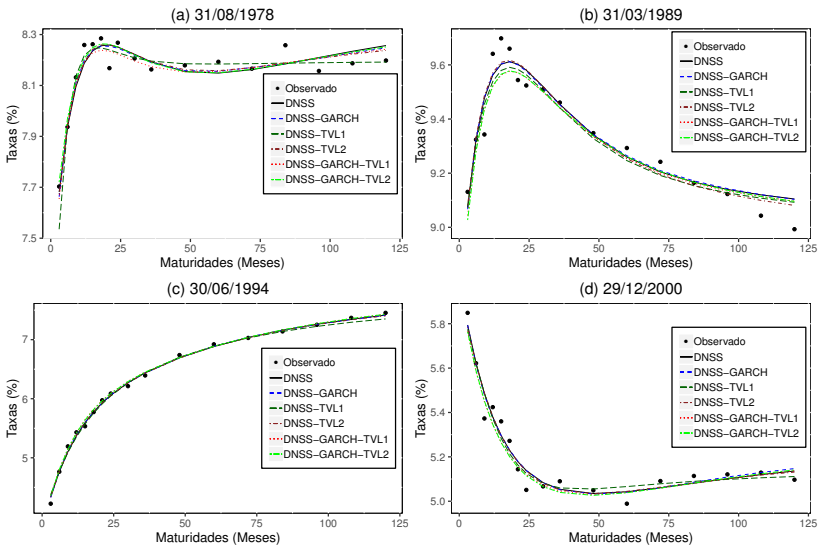
Por outro lado, a média do fator  $\lambda_{2,t}$  é maior no modelo DNSS-TVL2 do que no modelo DNSS-TVL1, isto é, -3.02 contra -2.28, respectivamente. Em termos da média dos erros filtrados, definidos como a média das diferenças entre a curvas de juros observadas e as estimativas filtradas, o modelo DNSS-TVL2 teve desempenho melhor, em valor absoluto, que os modelos DNS-base e DNSS-base nas maturidades de 3, 15, 18, 21, 48 e 60 meses (ver Tabela 5). Entretanto, o desempenho para a maturidade de 3 meses não foi menor que o modelo DNSS-TVL1. De certa forma, tanto o modelo DNSS-TVL1 e quanto o modelo DNSS-TVL2 possuem a mesma quantidade de parâmetros, portanto, os resultados sugerem melhor de desempenho para o modelo cujo parâmetro de decaimento atua somente na inclinação, ou seja, DNSS-TVL2. Esse modelo segue o padrão dos demais, qual seja, o ajuste para maturidades intermediárias é melhor que para maturidades de curto e longo prazo. O ajuste dos modelos é mostrado na Figura 6 para datas selecionadas ao longo da amostra.

Tabela 5 – Média e desvio-padrão dos erros filtrados dos modelos DNS, DNSS e extensões

Painel (A): Nelson-Siegel									Painel (B): Svensson											
Maturidade	DNS-base		DNS-TVL		DNS-GARCH		DNS-GARCH-TVL		DNSS-base		DNSS-TVL1		DNSS-TVL2		DNSS-GARCH		DNSS-GARCH-TVL1		DNSS-GARCH-TVL2	
	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp	Méd	Dp
3	-12.49	22.30	-3.00	14.91	-7.62	21.87	-9.30	26.94	-6.14	21.39	-1.10	14.64	-5.86	21.08	-3.07	13.96	-3.79	22.22	-4.67	23.44
6	-1.24	4.78	1.71	8.00	0.00	0.00	-2.87	18.05	0.00	0.00	0.62	5.81	-0.21	1.60	0.69	2.88	0.35	7.51	0.19	7.39
9	0.53	8.14	0.69	11.59	-0.10	9.73	-2.74	17.39	-0.94	9.22	-1.43	9.76	-1.38	8.82	-1.34	7.15	-1.47	6.20	-1.45	4.30
12	1.32	9.93	0.31	12.88	-0.60	10.59	-2.40	16.06	-1.33	9.94	-1.79	10.78	-1.84	9.69	-1.79	8.85	-2.15	10.19	-2.19	9.36
15	3.71	8.75	2.32	10.62	0.33	5.92	0.01	10.25	0.86	7.06	0.72	9.15	0.36	7.62	0.75	6.96	0.05	10.44	-0.12	10.46
18	3.57	7.23	2.18	9.59	0.80	4.20	0.09	9.16	1.13	5.48	1.26	8.94	0.70	6.24	1.11	5.36	0.46	9.13	0.15	8.90
21	3.20	6.42	1.99	8.63	1.53	6.13	0.00	10.86	1.50	6.02	1.76	8.82	1.13	6.36	1.59	5.71	0.99	8.82	0.59	8.68
24	-1.42	6.32	-2.40	9.91	-0.83	7.34	-4.38	13.47	-2.25	7.19	-2.01	8.26	-2.55	7.13	-2.28	7.21	-2.59	7.81	-3.05	7.78
30	-2.67	5.98	-3.16	9.80	-1.49	6.39	-5.21	12.48	-1.78	6.25	-1.86	8.12	-1.95	6.44	-1.76	6.39	-1.89	8.04	-2.34	7.57
36	-3.26	6.62	-3.37	9.27	-1.27	5.77	-5.55	12.67	-1.03	5.65	-1.60	7.94	-1.13	5.66	-0.98	5.80	-1.03	6.66	-1.40	6.15
48	-1.86	9.67	-1.61	11.34	0.92	7.70	-4.08	15.38	1.48	7.55	0.14	10.51	1.47	7.71	1.39	7.69	1.47	8.10	1.33	7.56
60	-3.29	7.96	-3.08	9.27	-0.93	5.84	-5.77	13.57	-0.46	5.71	-1.99	8.76	-0.40	6.02	-0.69	5.63	-0.56	6.39	-0.56	5.57
72	1.96	9.01	1.94	9.67	2.50	9.06	-0.93	13.03	3.36	8.81	2.13	9.18	3.54	9.03	2.91	8.58	3.18	8.99	3.21	8.78
84	0.69	10.15	0.36	11.01	0.22	11.02	-2.66	14.21	0.29	10.81	-0.36	10.73	0.63	11.11	0.20	10.64	0.05	10.65	0.05	10.68
96	3.48	9.11	2.83	10.42	1.83	8.78	-0.30	10.77	1.24	8.57	1.26	9.47	1.76	8.76	1.25	8.26	0.97	8.89	0.91	8.71
108	4.19	13.49	3.24	13.19	-0.41	7.86	0.00	7.52	0.21	9.58	0.93	12.36	0.92	9.33	0.21	10.21	-0.08	9.75	-0.20	8.85
120	-1.30	16.33	-2.53	17.03	-3.95	15.06	-5.84	17.06	-6.85	14.58	-5.47	15.71	-5.96	15.09	-6.93	14.43	-7.17	14.73	-7.36	14.48
Média	-0.28	9.54	-0.09	11.01	-0.53	8.43	-3.05	14.05	-0.62	8.46	-0.51	9.94	-0.63	8.69	-0.51	7.98	-0.77	9.68	-0.99	9.39
Mediana	0.53	8.75	0.36	10.42	-0.10	7.70	-2.74	13.47	0.00	7.55	-0.36	9.18	-0.21	7.71	0.20	7.21	-0.08	8.89	-0.20	8.71
# Menor			11	2	15	11	7	1			6	2	7	4	8	11	9	2	9	6

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta a média dos erros filtrados por maturidade, em pontos base, dos modelos de fatores latentes de Nelson-Siegel, no Painel (A), e de Svensson no Painel (B). Os erros filtrados são definidos como a diferença entre a curva de juros observada e a estimativa filtrada obtida do filtro de Kalman e filtro de Kalman estendido. O modelo base corresponde aos modelos com parâmetros de decaimento ( $\lambda$ ) e volatilidade constantes (DNS-base e DNSS-base). Os modelos somente com  $\lambda_t$  variando no tempo correspondem aos modelos DNS-TVL, DNSS-TVL1 e DNS-TVL2. Os modelos com  $h_t$  e  $\lambda_t$  variando no tempo correspondem aos modelos DNS-GARCH-TVL, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2. E DNS-GARCH e DNSS-GARCH os modelos somente com volatilidade variando no tempo corresponde Para cada maturidade é apresentado a média e desvio padrão (Dp.) dos erros, além de um resumo com três estatísticas para cada modelo: a média, a mediana e o número de vezes para os quais o valor absoluto da média é menor (# Menor), comparado com o modelo de referência, isto é, DNS-base e DNSS-base. De modo geral, o modelo DNS-GARCH teve os menores erros filtrados médio (#15) quando comparado com o modelo DNS-base através das 17 maturidades. No Painel (B), os modelos DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 tiveram as menores média dos erros filtrados (#9) contra o modelo DNSS-base.

Figura 6 – Curva de juros observada e ajustada para diferentes períodos do modelo DNSS e extensões



Elaborado pelo autor. A figura mostra os ajustes das curvas de juros dos modelos DNSS, DNSS-GARCH, DNSS-TVL1, DNSS-TVL2, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 para datas selecionadas. Resultados para os modelos DNS e extensões estão no Apêndice B, Figura 11.

A Tabela 6 avalia o desempenho dos modelos considerando a log-verossimilhança, o Critério de Informação de Akaike (AIC) e o teste de razão de verossimilhança (LR) para verificar melhora nas extensões. Os modelos DNS-TVL, DNS-GARCH e DNS-GARCH-TVL são comparados com o modelo DNS-base no Painel (A), e os modelos DNSS-GARCH, DNSS-TVL1, DNSS-TVL2, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 são comparados com o modelo DNSS-base no Painel (B). Como o modelo padrão está aninhado nas extensões, pode-se usar o teste padrão de razão de verossimilhança. Os p-valores associados aos testes LR são menores que 0.0001 em quase todos com exceção do modelo DNSS-TVL1, isto é, permitir um parâmetro de decaimento variando no tempo não resulta em uma melhora significativa do ajuste na amostra. O Ganho na log-verossimilhança para os modelos DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2 não são tão expressivos com relação ao modelo DNSS-base quanto ao ganho do modelo DNS-TVL com relação ao modelo DNS-base. Esse resultado sugere que os modelos da extensão de Svensson com parâmetros de decaimento variando no tempo não melhoram o ajuste no *trade-off* ajuste na amostra contra número de parâmetros. Nova-

Tabela 6 – Log-verossimilhança e AIC dos modelos

	Log-verossimilhança	Parâmetros	AIC	LR-statistic
Painel (A): Nelson-Siegel				
DNS	3183.8	36	-6296.4	-
DNS-TVL	3455.2	47	-6816.5	542.8**
DNS-GARCH	3660.3	55	-7210.6	953.0**
DNS-GARCH-TVL	3785.4	66	-7438.8	1203.2**
Painel (B): Svensson				
DNSS	3678.9	49	-7259.9	-
DNSS-GARCH	3731.9	68	-7326.0	106.0**
DNSS-TVL1	3654.6	63	-7183.2	-48.6
DNSS-TVL2	3713.8	63	-7301.7	69.8**
DNS-GARCH-TVL1	3891.1	82	-7618.3	424.4**
DNS-GARCH-TVL2	3891.4	82	-7618.9	425.0**

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta os valores da log-verossimilhança, o Critério de Informação de Akaike (AIC), o número de parâmetros para os diferentes modelos e o teste LR. O modelo DNS-base, no Painel (A), e DNSS-base, no Painel (B), correspondem aos modelos de fatores latentes de Nelson-Siegel e de Svensson com parâmetro de decaimento ( $\lambda$ ) e volatilidade constantes. Os modelos DNS-TVL, DNSS-TVL1 e DNSS-TLV2 correspondem aos modelos com  $\lambda_t$  variando no tempo. Os modelos DNS-GARCH e DNSS-GARCH correspondem aos modelos com um componente GARCH comum para a volatilidade variando no tempo. Os modelos DNS-TVL-GARCH, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 correspondem aos modelos com um fator de decaimento e o componente comum GARCH para a volatilidade variando no tempo. Dois asteriscos (\*\*) denotam significância de 1% ou menos. Sob a hipótese nula das extensões não apresentam melhora,  $LR=2[\text{Log}L(\text{modelo base})-\text{Log}L(\text{extensão})] \sim \chi^2(3)$ .

mente, o Painel (A) da Tabela 6 mostra que os ganhos na log-verossimilhanças foram maiores nas extensões dos modelos Nelson-Siegel. Apesar dos ganhos em termos de erros filtrados, os modelos de Svensson têm mais parâmetros estimados. Para modelos com aproximadamente os mesmos números de parâmetros, DNS-GARCH-TVL (66), DNSS-TVL1 (63), DNSS-TVL2 (63) e DNSS-GARCH (68); e DNS-TVL (47) e DNSS (49), os modelos da extensão Nelson-siegel são preferíveis por ter menos parâmetros estimados e interpretação econômica dos juros no longo, curto e médio prazo nos fatores relativos ao nível, inclinação e curvatura. Portanto, nota-se que os maiores ganhos em termos de log-verossimilhança, critério de AIC e razão de log-verossimilhança foram nas extensões do modelo Nelson-siegel.

Adiante, são reportados, na tabela 7, os parâmetros relativos ao modelo com volatilidade variando no tempo. O modelo de Svensson com volatilidade variando no tempo (DNSS-GARCH), assim como na extensão análoga no modelo Nelson-siegel (DNS-GARCH; ver Figura 11), têm os melhores ajustes através das maturidades, uma vez que a inclusão de um componente de choque comum na equação de observação sugere que, para a amostra selecionada, principalmente no período pré e pós-crise do petróleo, ofereceu mais flexibilidade

ao modelo.

Tabela 7 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH

DNSS-GARCH					
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional					
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.990**	0.0532**	-0.0340**	-0.0266**	8.93**
	0.00432	0.0129	0.0120	0.00693	2.92
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0318**	0.887**	0.108**	0.0582**	-0.848
	0.00728	0.0214	0.0216	0.00969	0.513
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	0.0196	0.0663	0.801**	-0.0279	0.425
	0.0181	0.0366	0.0415	0.0368	0.377
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	0.0169	-0.0204	0.0530	0.982**	0.527
	0.0169	0.0327	0.0340	0.0212	1.0068
Painel (B): Matriz de variância					
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.111**	-0.0561	0.107**	-0.0581	
	0.0188	0.0489	0.0995	0.0937	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.331**	-0.141**	0.151**	
		0.0220	0.0824	0.0633	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.05**	-0.228*	
			0.0607	0.108	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				0.488**	
				0.0495	
Painel (C): Parâmetros do GARCH					
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$		
	0.0001	0.613**	0.366**		
	(fixo)	0.0770	0.0514		

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes e as estimativas dos parâmetros GARCH. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento constante. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância  $\Sigma_\gamma$ . O Painel (C) apresenta as estimativas dos parâmetros GARCH,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

O modelo DNSS-GARCH é relativamente melhor, em termos de média dos erros filtrados, comparado com o modelo DNSS-base e o modelo DNS, entretanto o modelo DNSS-GARCH é mais parametrizado que esses dois últimos. A evolução da série  $h_t$  ao longo do tempo é semelhante ao componente GARCH do modelo DNSS-GARCH-TVL1 no Painel (a) da Figura 7.

Koopman et al. (2010) sugere que a publicação do artigo de Nelson e Siegel (1987), após meados da década de 80, diminuiu a volatilidade nas taxas dos títulos dos EUA. De fato, o período anterior tem mais picos e maior amplitude no componente GARCH. A diferença entre o modelo DNSS-GARCH-TVL e o modelo DNSS-GARCH-TVL1 com relação a volatilidade filtrada é na amplitude dos picos. Nos dois modelos o intervalo dos valores deste componente de variação é praticamente o mesmo (0 a 0.025), porém na extensão de Svensson os maiores picos aconteceram antes de 1980, e na extensão de Nelson-siegel aconteceram durante a década de 80 (ver Painel (a),



Figura 10 no Apêndice B). O modelo DNS-GARCH tem os melhores ajustes nas maturidades de 3, 84 e 108 meses, assim como o modelo DNS-GARCH. Enquanto que os parâmetros do componente GARCH são estatisticamente significativos, 0.613(0.07) e 0.366(0.05), porém são ligeiramente diferentes do estimado no artigo do Koopman et al. (2010), 0.471 e 0.506, respectivamente para os parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . O parâmetro  $\gamma_0$  também é fixado em 0.0001 para todos os modelos em estudo. De modo geral, o modelo DNS-GARCH tem as menores médias dos erros filtrados (15 de 17).

Tabela 8 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH-TVL1

DNSS-GARCH-TVL1						
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional						
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\lambda_{1,t}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.990**	0.035*	-0.022	-0.004	0.006	7.58**
	0.0132	0.0156	0.0123	0.0272	0.144	1.02
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.039*	0.944**	0.074	-0.008	0.003	-1.86*
	0.0170	0.0506	0.0464	0.0283	0.124	0.793
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	0.0142	0.036	0.816**	-0.021	-0.005	0.142
	0.0816	0.0351	0.0564	0.0872	0.318	1.07
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	0.007	0.048	0.021	0.867**	-0.007	-1.77
	0.061	0.0655	0.0432	0.116	0.158	1.00
Decaimento 1 ( $\lambda_{1,t}$ )	-0.004*	0.001	-0.002	0.006	0.849**	-2.20**
	0.00232	0.0168	0.00686	0.00815	0.123	0.201
Painel (B): Matriz de variância						
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	$\lambda_{1,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.113**	-0.0492	0.128**	-0.0867	-0.0000451	
	0.0212	0.048	0.082	0.194	0.0517	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.477**	-0.135	0.221	-0.0000707	
		0.0371	0.423	0.217	0.0145	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.18**	-0.349	-0.000170	
			0.287	0.28	0.0444	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				0.642*	-0.0000634	
				0.247	0.0319	
Decaimento 1 ( $\lambda_{1,t}$ )					0.0224	
					0.0352	
Painel (C): Parâmetros do GARCH						
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$			
	0.0001	0.659**	0.307**			
	(fixo)	0.0797	0.0867			

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes e as estimativas dos parâmetros GARCH. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento variando no tempo sobre a inclinação e curvatura 1  $\Sigma_{\eta}$ . O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância. O Painel (C) apresenta as estimativas dos parâmetros do GARCH,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

Como o modelo com volatilidade e fator de decaimento variando no tempo têm resultados satisfatórios nos exercícios anteriores, as duas últimas extensões, portanto, foram adicionados ao presente estudo. Sendo assim, a volatilidade e os parâmetros de decaimento são filtrados de modo que mais flexibilidade é adicionado às últimas extensões do modelo de Svensson, isto é, os modelos DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2. Os parâmetros estimados dos modelos são apresentados na Tabela 8 e Tabela 9, respectiva-

mente.

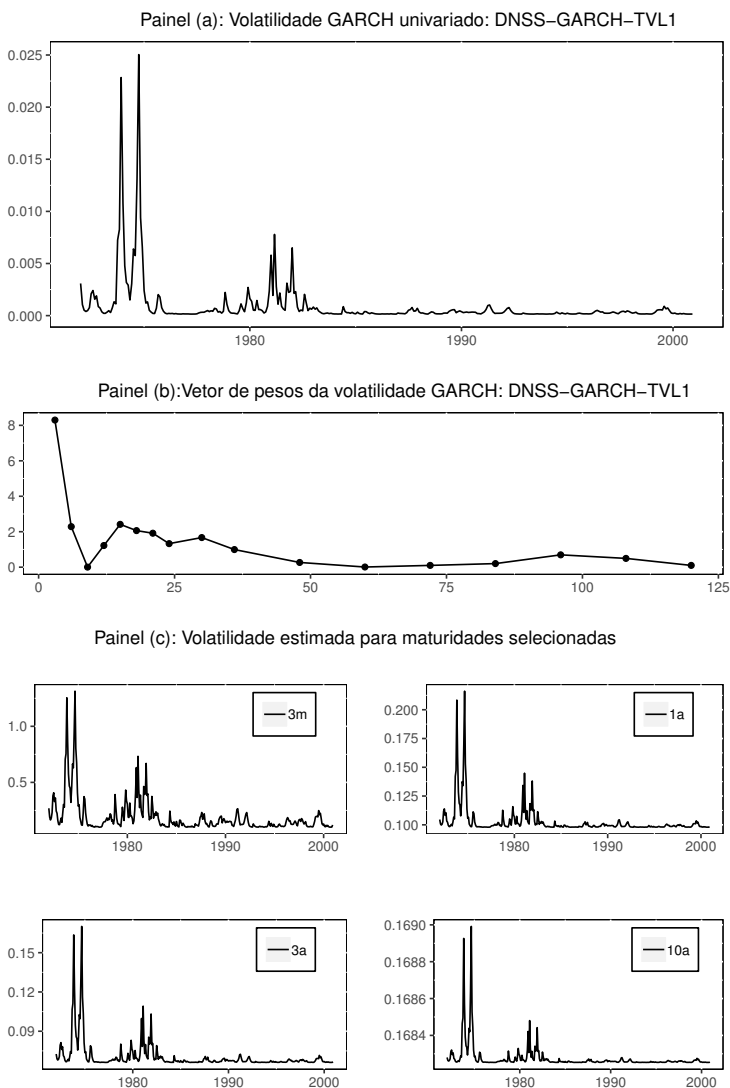
Tabela 9 – Parâmetros estimados do modelo DNSS-GARCH-TVL2

DNSS-GARCH-TVL2						
Painel (A): Matriz de coeficientes do VAR e vetor da média incondicional						
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\beta_{4,t-1}$	$\lambda_{2,t}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.99**	0.0353**	-0.0228**	-0.004	0.005	7.58*
	0.00793	0.0038	0.0098	0.00798	0.0645	0.361
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0394*	0.944**	0.0747**	-0.00831	-0.00913	-1.86**
	0.0173	0.0299	0.0152	0.0251	0.0202	0.656
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )	0.0142	0.0366	0.816**	-0.0215	-0.00271	0.141**
	0.0328	0.0340	0.044	0.0446	0.0618	0.45
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )	0.0075	0.0488	0.0218	0.867**	0.00216	-1.77**
	0.0223	0.0542	0.0269	0.0362	0.0868	0.418
Decaimento 2 ( $\lambda_{2,t}$ )	-0.00011	-0.00181	-0.00111	-0.00301	0.839**	-3.03**
	0.0021	0.00362	0.00748	0.013	0.0292	0.126
Painel (B): Matriz de variância						
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\beta_{4,t}$	$\lambda_{2,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.113**	-0.0492	0.128	-0.0868	-0.0000398	
	0.0324	0.0297	0.0684	0.0967	0.041	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.477**	-0.135**	0.221**	-0.0000625	
		0.0305	0.0743	0.061	0.0113	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			1.18**	-0.349**	0.00009	
			0.0538	0.0636	0.0359	
Curvatura 2 ( $\beta_{4,t}$ )				0.642**	0.0000530	
				0.0429	0.0261	
Decaimento 2 ( $\lambda_{2,t}$ )					0.00999	
					0.0238	
Painel (C): Parâmetros do GARCH						
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$			
	0.0001	0.659**	0.307**			
	(fixo)	0.0362	0.0724			

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes e as estimativas dos parâmetros GARCH. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento variando no tempo sobre a curvatura 1 e curvatura 2. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância  $\Sigma_{\eta}$ . O Painel (C) apresenta as estimativas dos parâmetros do GARCH,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

O destaque em ambas as tabelas estão nos Painéis (B), que são as covariâncias de  $\lambda_{1,t}$  e  $\lambda_{2,t}$  próximas de zero. Essas duas últimas modificações no modelo DNSS-base, quais sejam, a inclusão da volatilidade  $h_t$  e os parâmetros de decaimento  $\lambda_{1,t}$  e  $\lambda_{2,t}$  têm a inclusão de 33 parâmetros a mais que o modelo DNSS-base. O modelo de Svensson com o  $\lambda_1$  estimado e  $\lambda_{2,t}$  variando no tempo, DNSS-GARCH-TVL2, não foi tão expressivo na amostra no que se refere ao critério AIC (-7618.9) e teste da razão de verossimilhança (425.0), mas obteve os menores erros filtrados tanto quanto o modelo DNSS-GARCH-TVL1, que teve melhor AIC e LR quando comparado ao modelo base. A Figura 7 apresenta as estimativas filtradas da volatilidade comum para o modelo DNS-GARCH-TVL1.

Figura 7 – Volatilidade variando no tempo: DNSS-GARCH-TVL1



Elaborado pelo autor. No Painel (a), é mostrado a evolução da volatilidade  $h_t$  do componente de choque comum  $\varepsilon_t^*$  com um parâmetro de decaimento  $(\lambda_{1,t})$  variando no tempo (DNSS-GARCH-TVL1). No Painel (b), é mostrado os pesos, para cada maturidade, do processo GARCH univariado no modelo DNS-GARCH-TVL1. O Painel (c) mostra a volatilidade estimada para maturidades selecionadas. Os painéis acima são semelhantes aos painéis apresentados na Figura 2, p.338, em Koopman et al. (2010). Para o modelo DNS-GARCH-TVL, a Figura 10 é apresentado no Apêndice B.

Resultados semelhantes foram encontrados para o modelo DNS-GARCH-TVL, ver Figura 10. No Painel (a) da Figura 7, é mostrado a evolução da volatilidade  $h_t$  do componente de choque comum  $\varepsilon_t^*$  com um parâmetro de decaimento  $(\lambda_{1,t})$  variando no tempo. No Painel (b), é mostrado os pesos, para cada maturidade, do processo GARCH univariado no modelo DNS-GARCH-TVL1. O Painel (c) mostra a volatilidade estimada para maturidades selecionadas. O maior peso é para a maturidade de maior volatilidade (3 meses) e os menores pesos para maturidades com menor volatilidade, como é o caso do título com maturidade de 10 anos. Assim como em Koopman et al. (2010), de todos os modelos analisados, o de melhor performance nos critérios analisados, é o modelo com adicional de um componente comum de erro ao vetor de estado para calcular a volatilidade, isto é, mostrou-se melhor no ajuste dentro da amostra. Consoante Koopman et al. (2010), no Painel (a) da Figura 7, pode-se notar que a volatilidade comum é particularmente alta nos primeiros anos da década de 1980, enquanto que a partir do final dos anos 1980 a volatilidade é baixa e bastante constante ao longo do tempo. Como mencionado anteriormente, isso pode sugerir que após a publicação do artigo de Nelson e Siegel (1987) o método tornou-se o padrão entre os praticantes do mercado ao estimar as taxas de por maturidade, o que pode ter causado um efeito amortecedor sobre a volatilidade. No entanto, ainda segundo Koopman et al. (2010), a baixa volatilidade em um período prolongado após meados da década de 1980 pode ser atribuída também a desaceleração da taxa de inflação nos EUA. Na seção seguinte, são apresentados os resultados fora da amostra dos modelos desenvolvidos.

### 3.3 ANÁLISE FORA DA AMOSTRA

A primeira base de dados para previsão fora da amostra foi dividida em sub-amostras, cujo período de 1972:1-1993:09, com 261 observações mensais, foi utilizado para estimação dos parâmetros e o período de 1993:10-2000:12, com 88 observações, para previsão. O período de previsão, portanto, representa 25% do total da base de dados. Para calcular as previsões, foi construído uma janela móvel com 261 observações, de modo que, mês a mês, uma linha de dados foi adicionada ao final da amostra e uma linha de dados no início da amostra foi excluída para que os parâmetros fossem reestimados. Dessa forma, por meio da etapa de previsão do filtro de Kalman (e Kalman estendido), os estados previstos um passo a frente foram utilizados para construir as previsões das curvas de juros para  $h$  horizontes.

Para previsões  $h$ -meses à frente, os seguintes passos seguem após a filtragem dos estados, da matriz de variâncias e da estimação dos parâmetros  $\mu$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  e  $\Sigma_\eta$  ao longo da amostra. Temos, portanto, conforme Durbin e

Koopman (2012) o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{t+1} &= \mathbf{\Lambda}(\lambda)\mathbb{E}(\boldsymbol{\beta}_{t+1}|Y_t), \\ \bar{\mathbf{y}}_{t+1} &= \mathbf{\Lambda}(\lambda)\bar{\mathbf{b}}_{t+1},\end{aligned}\quad (3.1)$$

no qual  $\bar{\mathbf{b}}_{t+1}$  é o vetor de estado e  $\bar{\mathbf{B}}_{t+1}$  a matriz de variâncias dos estados calculados pelo filtro de Kalman em (2.16) e (2.17). Para as demais previsões, o filtro pode ser reescrito, para  $h = 2, \dots, H$ , da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{b}}_{t+h} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\bar{\mathbf{b}}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}), \quad (3.2)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{t+h} = \boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{B}}_{t+1}\hat{\boldsymbol{\Phi}}' + \boldsymbol{\Sigma}_\eta, \quad (3.3)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{t+h} = \mathbf{\Lambda}(\lambda)\bar{\mathbf{b}}_{t+h}, \quad (3.4)$$

no qual o vetor de estado e a matriz de variâncias dos estados da estimação anterior são utilizados para calcular as previsões no passo  $h+1$ .

Com o parâmetro de decaimento variando no tempo, a diferença para previsões situa-se na matriz de carregamento que multiplica o vetor de estado, isto é,  $\mathbf{Z}_t(\mathbf{a}_t|t-1)$  no lugar de  $\mathbf{\Lambda}(\lambda)$  em (3.1) e (3.4).

Para avaliar a acurácia dos modelos DNS, DNSS e suas extensões, foi utilizado a raiz do erro quadrático médio (REQM) nos horizontes de previsão  $h=1, \dots, 12$  meses para o primeiro conjunto de dados. O REQM é calculado da seguinte forma:

$$R(h, \tau) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_t [\hat{y}_{t+h|t}(\tau) - y_{t+h}(\tau)]^2}, \quad (3.5)$$

no qual  $n$  é o número de previsões definidos anteriormente em 88.

Para testar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base, foi aplicado o teste de Diebold e Mariano (1995) (DM). Apesar dos modelos concorrentes serem aninhados, o teste é válido ao usar uma janela móvel ao longo do tempo, conforme Giacomini e White (2006). Seja, portanto,  $\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t,b}(\boldsymbol{\tau})$  e  $\hat{\mathbf{y}}_{t+h|t,c}(\boldsymbol{\tau})$ , para  $c = 1, \dots, 9$ , as previsões para  $\mathbf{y}_{t+h}(\boldsymbol{\tau})$  dos modelos concorrentes e do modelo base, respectivamente,  $h$ -passos à frente.

Os erros de previsão do modelo base,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+h,b} = \mathbf{y}_{t+h}(\boldsymbol{\tau}) - \hat{\mathbf{y}}_{t+h|t,b}(\boldsymbol{\tau})$ , e do modelo concorrente,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+h,c} = \mathbf{y}_{t+h}(\boldsymbol{\tau}) - \hat{\mathbf{y}}_{t+h|t,c}(\boldsymbol{\tau})$ , foram calculados em uma função diferencial de perda:

$$d(h, \tau) = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h|t,b}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h|t,c}^2, \quad (3.6)$$

qual seja, a do erro quadrático médio. Os modelos foram avaliados conforme o proposto pelo teste DM da seguinte forma:

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{\hat{\delta}}{n}}} \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 1), \quad (3.7)$$

no qual  $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$  e  $\hat{\delta}$  é a estimativa da matriz de covariância de longo prazo de  $d_i$ , conforme Newey e West (1987), para controlar a correlação serial nos erros de previsão. De outra forma, para  $h = 1$ ,  $\hat{\delta} = \text{var}(p_i) = \gamma_0$ , e para  $h \geq 2$ ,  $\hat{\delta} = \gamma_0 + 2\sum_{n=1}^h \gamma_n$ , no qual  $\gamma_n = \text{cov}(d_t, d_{t-n})$ . Para testar se o modelo concorrente supera o modelo base, foi definido a hipótese nula  $H_0: \mathbb{E}(d_t) = 0$ , isto é, poder preditivo iguais. Valores negativo para a estatística DM sugere melhor acurácia do modelo base. A probabilidade de rejeitar a hipótese nula é maior quando os valores absolutos para o teste DM são maiores. Valores absolutos maiores que 1,96 indicam rejeição da hipótese nula com 95% de confiança.

Os resultados para as previsões fora da amostra para o conjunto de dados estudados estão na Tabela 10. A tabela apresenta a raiz do erro quadrático médio (REQM) para o modelo DNS-base. Nos demais modelos, há a comparação entre o REQM dos nove modelos concorrentes contra o modelo DNS-base, isto é, o quanto o modelo concorrente ficou acima ou abaixo do REQM do modelo DNS-base. Os resultados em cor significam que, para uma determinada maturidade, o modelo concorrente teve um menor REQM que o modelo DNS-base, caso contrário, o modelo DNS-base teve o menor REQM. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos, conforme o teste Diebold-Mariano reportados nas Tabelas 22 e 23 no Apêndice D.

O período em análise finda com a ascensão e, posteriormente, queda da taxa de juros dos EUA a partir de 2001; concomitantemente, eclodiu a crise das empresas de internet, chamadas "ponto com": uma forte alta das ações de empresas de tecnologia e queda em meados do primeiro semestre de 2000. Neste período, houve uma inversão da estrutura a termo da taxa de juros (ver painel (d), Figura 6), e a taxa de juros do FED (*Federal Reserve System*) permaneceu em torno de 6,5%. Dentro desse contexto, pode-se inferir que os modelos preditivos não obtiveram resultados expressivos em termos comparativos com relação ao modelo DNS-base. Isto é, o modelo DNS-base despontou com o menor REQM dentre os nove modelos concorrentes. Vale ressaltar, entretanto, que os modelos com componente GARCH, especialmente os modelos DNS-GARCH, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 obtiveram resultados melhores que o modelo base. Para o horizonte de previsão de 1 mês, o modelo DNSS obteve o menor REQM (0.891, comparado com o DNS-base) e resultado estatisticamente significativo.

Tabela 10 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 2000:12

Painel (A): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	18.51	19.30	21.97	23.60	25.08	26.07	27.20	27.92	28.30	28.35	28.81	29.24	27.38	27.66	26.44	26.65	26.27
DNS-TVL	1.070	1.228	1.253	1.214	1.180	1.199	1.212	1.242	1.226	1.225	1.196	1.214	1.187	1.151	1.114	1.112	1.152
DNS-GARCH	1.679	1.368	1.178	1.048	0.989	0.994	0.998	1.002	0.994	0.990	0.997	1.001	1.023	1.018	1.003	1.001	1.018
DNS-GARCH-TVL	1.232	1.315	1.292	1.224	1.161	1.182	1.199	1.238	1.234	1.242	1.224	1.256	1.232	1.183	1.137	1.136	1.188
DNSS	<b>0.991</b>	1.007	1.041	1.014	0.988	1.000	1.008	1.017	1.012	1.008	1.006	0.998	1.010	1.006	0.991	0.988	1.021
DNSS-TVL1	1.004	1.082	1.093	1.072	1.051	1.054	1.060	1.073	1.059	1.056	1.047	1.043	1.052	1.054	1.024	1.014	1.037
DNSS-TVL2	1.017	1.142	1.139	1.065	1.024	1.039	1.045	1.053	1.037	1.026	1.016	1.006	1.008	1.004	0.991	1.001	1.050
DNSS-GARCH	<b>0.911</b>	1.014	1.037	1.026	1.002	1.011	1.016	1.021	1.018	1.013	1.012	0.996	1.012	1.015	1.001	0.996	1.019
DNSS-GARCH-TVL1	1.005	0.989	<b>0.938</b>	0.983	1.027	1.024	1.018	1.001	1.009	1.010	1.024	0.978	1.013	1.025	1.020	0.994	0.983
DNSS-GARCH-TVL2	1.004	1.015	0.984	1.020	1.041	1.037	1.030	1.012	1.015	1.008	1.012	0.973	0.996	1.002	0.994	<b>0.972</b>	<b>0.961</b>

Painel (B): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	35.10	40.71	45.78	47.92	50.04	52.04	53.88	55.55	55.59	55.82	55.32	55.86	52.60	52.24	49.28	49.09	48.49
DNS-TVL	1.120	1.188	1.204	1.207	1.192	1.200	1.205	1.218	1.222	1.227	1.219	1.228	1.215	1.187	1.175	1.167	1.191
DNS-GARCH	1.192	1.089	1.044	1.013	1.001	0.998	0.996	0.993	0.990	0.987	0.990	0.993	1.007	1.016	1.017	1.021	1.026
DNS-GARCH-TVL	1.156	1.195	1.192	1.193	1.175	1.185	1.191	1.206	1.220	1.232	1.240	1.260	1.256	1.232	1.220	1.216	1.245
DNSS	<b>0.947</b>	1.020	0.926	1.027	1.012	1.015	1.016	1.021	1.017	1.015	1.011	1.019	1.023	1.024	1.025	1.032	1.057
DNSS-TVL1	1.166	1.174	1.161	1.149	1.126	1.121	1.117	1.118	1.110	1.102	1.088	1.084	1.080	1.075	1.066	1.065	1.081
DNSS-TVL2	1.235	1.229	1.199	1.144	1.103	1.099	1.092	1.092	1.076	1.066	1.052	1.053	1.049	1.050	1.052	1.064	1.096
DNSS-GARCH	1.022	1.068	1.074	1.058	1.046	1.045	1.042	1.041	1.036	1.030	1.023	1.021	1.029	1.031	1.034	1.039	1.057
DNSS-GARCH-TVL1	0.922	0.929	<b>0.926</b>	0.958	0.993	0.991	0.989	0.981	0.987	0.989	0.996	0.981	0.997	1.008	1.014	1.005	0.993
DNSS-GARCH-TVL2	0.947	0.986	0.988	1.011	1.030	1.026	1.021	1.010	1.010	1.005	1.003	0.985	0.994	0.999	1.002	0.991	0.978

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1993:10 - 2000:12 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de um e três meses. Os resultados por horizonte de previsão estão no Painel (A) e (B), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados na Tabela 22 no Apêndice D.

Tabela 11 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 (continuação)

Painel (C): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	55.57	61.53	66.19	68.65	70.22	72.48	74.55	76.51	76.65	76.99	76.52	77.75	74.02	73.07	69.98	69.78	69.38
DNS-TVL	1.006	1.072	1.101	1.116	1.117	1.124	1.132	1.143	1.155	1.165	1.168	1.174	1.168	1.152	1.144	1.140	1.153
DNS-GARCH	1.071	1.038	1.024	1.013	1.011	1.009	1.007	1.004	1.002	1.001	1.003	1.005	1.014	1.020	1.022	1.023	1.024
DNS-GARCH-TVL	1.006	1.053	1.074	1.085	1.087	1.098	1.108	1.123	1.142	1.160	1.178	1.198	1.201	1.191	1.188	1.189	1.212
DNSS	0.994	1.044	1.059	1.050	1.039	1.042	1.043	1.047	1.045	1.045	1.045	1.052	1.055	1.058	1.061	1.069	1.088
DNSS-TVL1	1.233	1.225	1.217	1.197	1.171	1.163	1.154	1.152	1.140	1.129	1.107	1.101	1.094	1.088	1.083	1.086	1.106
DNSS-TVL2	1.364	1.332	1.304	1.243	1.194	1.180	1.167	1.162	1.140	1.128	1.109	1.103	1.096	1.095	1.099	1.111	1.136
DNSS-GARCH	1.109	1.115	1.116	1.097	1.083	1.078	1.073	1.071	1.061	1.056	1.048	1.047	1.050	1.054	1.057	1.063	1.078
DNSS-GARCH-TVL1	0.879	0.913	0.919	0.963	0.990	0.991	0.992	0.983	0.987	0.988	0.995	0.984	0.994	1.006	1.012	1.008	0.996
DNSS-GARCH-TVL2	0.900	0.955	0.969	1.002	1.026	1.024	1.021	1.010	1.008	1.002	1.000	0.981	0.986	0.990	0.991	0.982	0.965

Painel (D): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	85.05	88.06	90.60	89.90	89.87	91.56	93.44	95.45	95.47	95.77	95.13	97.53	93.72	92.31	90.05	90.17	92.57
DNS-TVL	0.898	0.949	0.979	1.003	1.022	1.033	1.044	1.057	1.074	1.087	1.101	1.109	1.113	1.109	1.106	1.106	1.110
DNS-GARCH	0.998	0.992	0.988	0.989	0.993	0.991	0.989	0.985	0.983	0.981	0.981	0.979	0.984	0.988	0.990	0.990	0.988
DNS-GARCH-TVL	0.878	0.932	0.960	0.986	1.006	1.019	1.034	1.048	1.070	1.089	1.115	1.131	1.140	1.142	1.145	1.148	1.155
DNSS	1.047	1.094	1.121	1.133	1.134	1.142	1.146	1.151	1.153	1.153	1.150	1.146	1.146	1.145	1.145	1.147	1.152
DNSS-TVL1	1.281	1.298	1.310	1.305	1.297	1.292	1.284	1.280	1.265	1.252	1.228	1.214	1.211	1.207	1.207	1.211	1.219
DNSS-TVL2	1.505	1.490	1.476	1.435	1.391	1.371	1.350	1.336	1.309	1.286	1.252	1.227	1.219	1.213	1.219	1.227	1.238
DNSS-GARCH	1.170	1.168	1.167	1.155	1.141	1.135	1.127	1.122	1.112	1.102	1.091	1.085	1.086	1.089	1.092	1.097	1.105
DNSS-GARCH-TVL1	0.932	0.990	1.008	1.059	1.095	1.094	1.089	1.074	1.072	1.063	1.051	1.025	1.025	1.025	1.025	1.020	1.003
DNSS-GARCH-TVL2	0.901	0.961	0.982	1.020	1.047	1.043	1.034	1.018	1.011	1.000	0.984	0.957	0.956	0.958	0.958	0.953	0.937

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1993:10 - 2000:12 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de seis e doze meses. Os resultados por horizonte de previsão estão no Painel C e D, respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados na Tabela 23 no Apêndice D



No horizonte de previsão de 3 meses, o modelo DNSS-GARCH-TVL1 tem 14 maturidades com menor REQM contra o modelo DNS-base, todavia apenas a taxa com maturidade de 9 meses é significativa conforme o teste DM. Para  $h = 6$ , o desempenho do modelo DNSS-GARCH-TVL1 permanece relativamente semelhante ao horizonte de previsão de 3 meses, contudo não há resultado significativo na comparação com o modelo base, isto é, o modelo concorrente não obtém resultados estatisticamente diferentes que o modelo DNS-base. Por outro lado, dentro de um horizonte de previsão de 12 meses, o modelo DNS-GARCH tem menor REQM em todas as maturidades, porém sem resultados estatisticamente significativos. Nesse último horizonte, portanto, apenas os modelos DNS-TVL, DNS-GARCH-TVL e o modelo DNSS-GARCH-TVL2 têm resultados significativos.

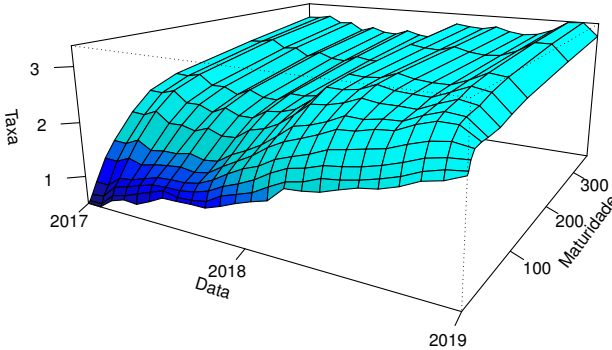
De modo geral, pode-se interpretar que a acurácia preditiva dos modelos concorrentes não são melhores, em termos de REQM, na maior parte das maturidades; pode-se atribuir ao fato da mudança na dinâmica da curva de juros, isto é, inversão da curva de juros no período pré- crise de 2000. Diante disso, previsões fora da amostra para subperíodos são calculados, de modo que as previsões sejam feitas em outro contexto macroeconômico. Os menores resultados de REQM, portanto, comparado com o modelo base, são observados no período no qual a taxa de juros dos EUA estava em elevação, entre 1993:10 - 1995:05, período que não houve crise nos meses seguintes (os resultados de REQM para o subperíodo estão na Tabela 18 e Tabela 19 no Apêndice C). Nesses casos, os resultados mais significativos foram para horizontes de previsão de 6 e 12 meses, principalmente para os modelos com componente GARCH, corroborando os resultados previamente encontrados dentro da amostra na pesquisa de Koopman et al. (2010) e por este estudo.

A segunda base de dados abrange o período de Janeiro de 2017 a Dezembro de 2018, para maturidades de 1, 3, 6, 12, 24, 36, 60, 84, 120, 360 meses, contém 499 observações diárias. Para a previsão fora da amostra, essa base foi dividida também em sub-amostras, cujo período de 2017:01-2018:08, com 412 observações, foi utilizado para estimação dos parâmetros e o período de 2018:09-2018:12, com 88 observações, para previsão. O período de previsão, portanto, representa 17% do total da base de dados. Para calcular as previsões, na mesma linha da base de dados anterior, foi construído uma janela móvel com 412 observações, de modo que, dia a dia, uma linha de dados foi adicionada ao final da amostra e uma linha de dados no início da amostra foi excluída para que os parâmetros fossem reestimados.

Algumas estatísticas descritivas são apresentadas para essa base de dados na Tabela 12. O indicador aproximado para o nível da curva de juros são os juros de maior de maturidade (120 meses); para inclinação, a diferença entre os juros de 120 meses e os juros de 3 meses; e para curvatura, duas vezes

os juros de 24 meses menos a soma dos juros de 3 meses e de 120 meses. A Figura 8 mostra a estrutura a termo da taxa de juros em uma superfície tridimensional para os juros em função da maturidade ao longo do tempo.

Figura 8 – Curvas de juros do Tesouro dos EUA (2017 - 2018)



Elaborado pelo autor. A amostra contém 499 observações diárias entre o período de 03 de Janeiro de 2017 a 31 de Dezembro de 2018 com maturidades  $\tau = 1, 3, 6, 12, 24, 36, 60, 84, 120, 240, 360$  meses.

Tabela 12 – Estatísticas descritivas das taxas de juros dos EUA (2017 - 2018)

Maturidade	Média	Dp	Assim	Curt	Mín	Máx	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(2)$	$\hat{\rho}(30)$
1	1.346	0.565	0.188	1.783	0.390	2.440	0.992	0.920	0.806
3	1.459	0.578	0.084	1.749	0.500	2.450	0.993	0.928	0.811
6	1.606	0.599	0.037	1.664	0.590	2.580	0.994	0.931	0.819
12	1.765	0.624	0.045	1.538	0.790	2.740	0.995	0.943	0.843
24	1.962	0.608	0.117	1.386	1.120	2.980	0.996	0.957	0.872
36	2.100	0.561	0.125	1.346	1.350	3.050	0.996	0.959	0.878
60	2.328	0.447	0.086	1.372	1.630	3.090	0.996	0.954	0.870
84	2.504	0.374	0.101	1.465	1.880	3.180	0.994	0.944	0.847
120	2.619	0.320	0.147	1.598	2.050	3.240	0.993	0.931	0.816
240	2.834	0.225	0.326	2.169	2.400	3.370	0.987	0.877	0.686
360 (Nível)	3.002	0.168	0.360	2.687	2.660	3.460	0.979	0.820	0.541
Inclinação	1.656	0.486	0.209	2.270	0.580	2.690	0.986	0.876	0.723
Curvatura	0.661	0.271	-0.429	2.887	-0.280	1.210	0.963	0.736	0.451

Elaborado pelo autor. Para as 11 maturidades é apresentado a média, desvio-padrão, assimetria, curtose, mínimo, máximo e autocorrelações  $\hat{\rho}(1)$ ,  $\hat{\rho}(12)$ ,  $\hat{\rho}(30)$ . Além disso, são apresentados dados aproximados para o nível, inclinação e curvatura da estrutura a termo. Os dados aproximados são definidas da seguinte forma: para nível, os juros de maior de maturidade (120 meses); para inclinação, a diferença entre os juros de 120 meses e os juros de 3 meses; e para curvatura, duas vezes os juros de 24 meses menos a soma dos juros de 3 meses e de 120 meses.

Diferentemente da amostra anterior, algumas taxas através das maturidades estiveram próximo de zero, principalmente para as maturidades de 1 mês, 3, 6 e 12 meses, reflexo das políticas adotadas pelo FED pós-crise de 2008, contudo com sistemática elevação da taxa de juros a partir de 2016.

A frequência dessa base de dados permite capturar com mais detalhe a dinâmica das taxas pelos modelos preditivos. Nota-se, na Tabela 13, que o REQM é menor na maior parte dos modelos através dos horizontes e maturidades. Nessa frequência de informação, os modelos concorrentes, ao que tudo indica, obtêm resultados significativos em maior quantidade que os da base de dados anterior. Os resultados de REQM sugerem que os modelos concorrentes, principalmente àqueles com a adição de um componente GARCH e inclusão do parâmetro de decaimento variando no tempo, são superiores ao modelo DNS-base. Para as maturidade de 36 e 240 meses, entretanto, a melhora na acurácia preditiva não é unânime entre os modelos concorrentes, em outras palavras, não têm REQM menor que o modelo base.

Por outro lado, os modelos concorrentes alcançam desempenho melhor nas maturidades de 6, 12 e 24 meses, principalmente nos horizontes de 1 dia, 1 semana e 1 mês. A partir do horizonte de previsão de 1 mês, alguns modelos concorrentes, principalmente os modelos com componente GARCH têm REQM superior ao modelo DNS-base, por exemplo. Para o modelo DNSS-GARCH-TVL2, em um horizonte de previsão e maturidade de 1 mês, o REQM foi aproximadamente sete vezes maior que o modelo base. Entretanto, o mesmo modelo no horizonte de 1 dia e maturidade de 24 meses alcançou metade do REQM do modelo base, fato que também acontece em outros modelos preditivos. Essa instabilidade pode ser atribuída ao excesso de parâmetros, ao problema de máximos locais, às aproximações de primeira ordem das equações não-lineares, e ao fato que os filtros e a verossimilhança são sub-ótimos, o que pode resultar elevados erros de estimação e previsão (ver Julier e Uhlmann (1997) e Wan e Merwe (2000)).

De modo geral, os resultados dos modelos concorrentes foram estatisticamente significativos e com menor REQM nas 11 maturidades previstas. A inovação de incluir um componente GARCH e o fator de decaimento variando no tempo ao modelo DNS-base para análise da acurácia preditiva torna-se relevante tendo em vista os resultados. Sob outra perspectiva, a inclusão dessas extensões ao modelo com duas curvaturas, como é o caso do modelo de Svensson, resultam em significativa melhora no poder preditivo.

Tabela 13 – Raiz do erro quadrático médio correspondente ao período 2018:09 - 2018:12

Painel (A): h = 1 dia											
Modelo	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	6.114	1.571	6.493	9.815	6.600	3.173	7.556	6.160	5.491	3.271	6.385
DNS-TVL	<b>0.753</b>	<b>0.979</b>	<b>0.701</b>	<b>0.615</b>	<b>0.638</b>	1.005	<b>0.668</b>	<b>0.591</b>	<b>0.619</b>	1.279	1.257
DNS-GARCH	2.077	4.481	<b>0.483</b>	<b>0.677</b>	<b>0.801</b>	1.186	1.140	1.194	1.271	1.260	<b>0.763</b>
DNS-GARCH-TVL	<b>0.909</b>	1.598	<b>0.644</b>	<b>0.583</b>	<b>0.626</b>	1.068	<b>0.693</b>	<b>0.609</b>	<b>0.663</b>	1.375	1.281
DNSS	<b>0.695</b>	1.006	<b>0.270</b>	<b>0.199</b>	<b>0.527</b>	1.162	<b>0.581</b>	<b>0.641</b>	<b>0.679</b>	1.000	<b>0.859</b>
DNSS-TVL1	<b>0.787</b>	<b>0.949</b>	<b>0.279</b>	<b>0.193</b>	<b>0.614</b>	1.348	<b>0.500</b>	<b>0.628</b>	<b>0.647</b>	1.013	<b>0.862</b>
DNSS-TVL2	<b>0.660</b>	<b>0.988</b>	<b>0.297</b>	<b>0.224</b>	<b>0.449</b>	1.051	<b>0.570</b>	<b>0.638</b>	<b>0.671</b>	1.014	<b>0.821</b>
DNSS-GARCH	<b>0.683</b>	<b>1.099</b>	<b>0.281</b>	<b>0.189</b>	<b>0.538</b>	1.180	<b>0.568</b>	<b>0.636</b>	<b>0.667</b>	<b>0.989</b>	<b>0.856</b>
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.770</b>	<b>0.979</b>	<b>0.274</b>	<b>0.193</b>	<b>0.543</b>	1.212	<b>0.485</b>	<b>0.603</b>	<b>0.622</b>	<b>0.989</b>	<b>0.844</b>
DNSS-GARCH-TVL2	<b>0.628</b>	<b>1.153</b>	<b>0.390</b>	<b>0.250</b>	<b>0.518</b>	1.070	<b>0.564</b>	<b>0.640</b>	<b>0.677</b>	1.036	<b>0.806</b>

Painel (B): h = 1 semana											
Modelo	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	5.855	2.034	6.414	9.920	7.338	5.201	9.199	8.165	7.562	5.864	7.442
DNS-TVL	<b>0.782</b>	1.010	<b>0.656</b>	<b>0.588</b>	<b>0.661</b>	<b>0.956</b>	<b>0.780</b>	<b>0.742</b>	<b>0.776</b>	1.018	1.103
DNS-GARCH	2.140	3.650	<b>0.461</b>	<b>0.668</b>	<b>0.842</b>	1.127	1.131	1.148	1.178	1.106	<b>0.861</b>
DNS-GARCH-TVL	<b>0.969</b>	<b>1.589</b>	<b>0.651</b>	<b>0.589</b>	<b>0.700</b>	1.034	<b>0.794</b>	<b>0.784</b>	<b>0.844</b>	1.180	1.244
DNSS	<b>0.798</b>	<b>0.992</b>	<b>0.352</b>	<b>0.290</b>	<b>0.673</b>	1.131	<b>0.758</b>	<b>0.832</b>	<b>0.882</b>	1.111	<b>0.999</b>
DNSS-TVL1	0.950	<b>0.969</b>	<b>0.345</b>	<b>0.327</b>	0.951	1.519	<b>0.786</b>	0.905	0.874	1.061	0.981
DNSS-TVL2	0.996	1.866	<b>0.824</b>	<b>0.496</b>	<b>0.708</b>	1.299	0.959	0.968	0.977	1.077	<b>0.908</b>
DNSS-GARCH	0.886	1.486	<b>0.461</b>	<b>0.298</b>	<b>0.688</b>	1.124	<b>0.699</b>	<b>0.775</b>	<b>0.797</b>	1.001	<b>0.939</b>
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.892</b>	<b>0.947</b>	<b>0.367</b>	<b>0.283</b>	<b>0.798</b>	1.289	<b>0.675</b>	<b>0.807</b>	<b>0.782</b>	<b>0.987</b>	<b>0.929</b>
DNSS-GARCH-TVL2	1.069	2.764	1.204	<b>0.775</b>	<b>0.876</b>	1.165	<b>0.879</b>	<b>0.903</b>	0.946	1.083	<b>0.875</b>

Painel (A): h = 1 mês											
Modelo	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	6.537	4.271	7.824	11.30	10.41	8.972	12.43	11.77	11.49	11.68	13.06
DNS-TVL	<b>0.925</b>	1.038	<b>0.641</b>	<b>0.602</b>	<b>0.777</b>	<b>0.992</b>	<b>0.895</b>	<b>0.895</b>	<b>0.947</b>	1.064	1.093
DNS-GARCH	2.043	2.026	<b>0.613</b>	<b>0.718</b>	0.989	1.281	1.264	1.270	1.260	1.163	1.068
DNS-GARCH-TVL	1.265	1.556	<b>0.841</b>	<b>0.756</b>	0.975	1.175	0.953	0.978	1.041	1.206	1.259
DNSS	1.292	1.280	<b>0.585</b>	<b>0.457</b>	<b>0.821</b>	1.151	1.029	1.168	1.291	1.447	1.405
DNSS-TVL1	1.227	1.155	<b>0.627</b>	<b>0.585</b>	1.384	1.861	1.217	1.230	1.093	1.014	0.983
DNSS-TVL2	2.464	4.046	2.452	1.393	<b>0.880</b>	1.559	1.617	1.460	1.280	0.942	<b>0.821</b>
DNSS-GARCH	1.148	1.201	<b>0.620</b>	<b>0.451</b>	<b>0.862</b>	1.165	0.881	0.954	<b>0.948</b>	0.986	<b>0.970</b>
DNSS-GARCH-TVL1	1.154	1.121	<b>0.586</b>	<b>0.497</b>	1.332	1.853	1.237	1.304	1.160	1.063	1.014
DNSS-GARCH-TVL2	3.258	5.717	3.594	2.151	1.166	1.368	1.581	1.488	1.353	1.058	<b>0.897</b>

Painel (B): h = 3 meses											
Modelo	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	7.369	8.840	13.74	16.27	14.08	12.65	15.70	14.60	12.77	12.74	16.32
DNS-TVL	1.317	<b>0.995</b>	<b>0.726</b>	<b>0.737</b>	1.046	1.326	1.211	1.164	1.217	1.292	1.214
DNS-GARCH	2.049	1.316	0.856	0.898	1.117	1.372	1.346	1.290	1.261	1.093	1.036
DNS-GARCH-TVL	2.075	1.801	1.246	1.182	1.496	1.744	1.454	1.461	1.624	1.798	1.617
DNSS	4.519	2.710	1.187	<b>0.687</b>	1.200	1.924	2.347	3.093	4.128	4.938	4.118
DNSS-TVL1	2.680	1.729	1.090	1.141	2.125	2.700	2.095	2.142	2.150	1.777	1.373
DNSS-TVL2	6.057	5.419	3.566	2.266	1.782	3.320	3.724	3.722	3.479	1.878	1.033
DNSS-GARCH	2.428	1.381	<b>0.691</b>	<b>0.506</b>	0.882	1.066	0.823	0.938	1.084	1.223	1.120
DNSS-GARCH-TVL1	2.716	1.575	<b>0.892</b>	<b>0.977</b>	2.136	2.755	2.058	2.072	2.022	1.675	1.345
DNSS-GARCH-TVL2	7.375	6.690	4.517	3.162	1.994	2.652	3.070	3.063	2.850	1.611	1.030

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, correspondente ao período de 2017:01 - 2018:12 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de 1 dia, 1 semana, 1 mês e 3 meses. Os resultados por horizonte de previsão estão no Painel (A), (B), (C) e (D), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados no Apêndice B, Tabela 28

## 4 CONCLUSÃO

A pesquisa examina o ajuste e previsão dos modelos DNS, DNSS e extensões dentro e fora da amostra em ambientes lineares e não-lineares por meio do filtro de Kalman (KF) e Kalman estendido (EKF), respectivamente. As extensões incorporam a volatilidade ( $h_t$ ) e o parâmetro de decaimento ( $\lambda_{p,t}$ ) variando no tempo, com  $p = 1$  ou  $2$ ; especificamente, DNS-GARCH e DNSS-GARCH para os modelos somente com volatilidade variando no tempo; DNS-TVL, DNSS-TVL1 e DNSS-TVL2 para os modelos somente com o parâmetro de decaimento variando no tempo; e os modelos DNS-GARCH-TVL, DNSS-GARCH-TVL1 e DNSS-GARCH-TVL2 com  $h_t$  e  $\lambda_{p,t}$  variando no tempo. O modelos DNS e DNSS são considerados modelos base e os demais modelos são considerados concorrentes na parte de previsão. Koopman et al. (2010) estudou o ajuste dos modelos DNS com  $h_t$  e  $\lambda_{p,t}$  variando no tempo dentro da amostra para a base de dados utilizada em Diebold e Li (2006), com observações mensais entre 1972 e 2000. O presente estudo utiliza a mesma base de dados para ajuste dentro da amostra dos modelos DNS, DNSS e extensões, e previsão fora da amostra dos mesmos modelos, porém com duas base de dados, sendo que a última com observações diárias entre Janeiro de 2017 e Dezembro de 2018.

O ajuste e previsão com o modelo DNS-GARCH tem melhor desempenho em termos de menores erros filtrados médios dentro da amostra comparado com o modelo DNS-base, em consonância com os resultados observados por Koopman et al. (2010), e menor REQM fora da amostra com resultados estatisticamente significativos, ou seja, são modelos com melhor acurácia conforme teste Diebold e Mariano (1995). As extensões dos modelos DNSS também têm melhor ajuste dentro da amostra comparado com o modelo DNSS, sendo que o destaque foi o modelo DNSS-GARCH-TVL1 com menores erros filtrados médios. Na parte de previsão, para horizontes de 1 mês, 3, 6 e 12 meses, especialmente para o primeiro conjunto de dados, os modelos concorrentes não têm resultados superiores ao modelo base na amostra total. Para subperíodos, os modelos concorrentes têm resultados com menor REQM que o modelo DNS-base e estatisticamente significativos, principalmente em contexto macroeconômico estável. Para o segundo conjunto de dados, especificamente, observações diárias entre 2017 e 2018 de títulos dos EUA com horizontes de previsão de 1 dia, 1 semana, 1 mês e 3 meses, os modelos concorrentes também são superiores ao modelo base na maior parte das maturidades e horizontes de previsão, exceto para as maturidades de 36 e 260 meses nos horizontes de 1 dia, 1 semana. Para os horizontes de 1 mês e 3 meses, os modelos concorrentes

são mais instáveis. À vista disso, os modelos concorrentes têm resultados satisfatórios, apesar da não parcimoniosidade. Levando isso em consideração, e pela facilidade na estimação, os modelos DNS e o modelo DNSS continuam sendo um dos modelos com resultados competitivos para ajuste e previsão da estrutura a termo da taxa de juros; entretanto, deve-se levar em consideração a heterocedasticidade é um problema constante em economia, principalmente em finanças.

Pesquisas adicionais como a inclusão de séries macroeconômicas, tal qual feito por Diebold et al. (2006), por exemplo, pode ser implementado nesse contexto de parâmetros variando no tempo, uma vez que há na literatura resultados de melhora no poder preditivo com a inclusão de dados macroeconômicos. Além disso, outros modelos para captar a dinâmica da volatilidade, tal como o GJR-GARCH de Glosten et al. (1993), pode ser adicionado aos modelos DNS e DNSS para investigar se melhoram o ajuste e a previsão. A configuração da equação de estado, assim como em Pooter (2007), pode ser alterada com matriz de parâmetros diagonal autorregressivo ou passeio aleatório com diagonal igual a 1, diminuindo o número de parâmetros na estimação. Além disso, outras especificações para o modelos de Svensson, como o modelo ajustado, no qual o segundo fator de decaimento é multiplicado por dois, ou o modelo de Svensson com duas inclinações podem ser implementados.

Na parte da estimação, o ajuste e, por conseguinte, a previsão podem ter resultados mais robustos com o emprego do filtro de Kalman iterado, no qual a linearização é melhorada pelas sucessivas iterações na aproximação de Taylor. Além disso, a implementação de outro filtro de Kalman para modelos não-lineares, tal como o *Unscented Kalman filter* (UKF) (ver Julier e Uhlmann (1997)), pode ser utilizado, uma vez que um dos problemas do EKF é a aproximação de primeira ordem e o cálculo dos gradientes. Por fim, a metodologia estudada pode ser utilizada para estimação e previsão com dados da economia brasileira, tal como as taxas de depósitos interfinanceiros (DI).

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, B. D.; MOORE, J. O. and moore, jb (1979). optimal filtering. *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, 1979.
- ANG, A.; PIAZZESI, M.; WEI, M. What does the yield curve tell us about gdp growth? *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 131, n. 1-2, p. 359–403, 2006.
- BIS. *Zero-coupon yield curves: Technical documentation*. [S.l.: s.n.], 2005.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- CALDEIRA, J. Estrutura a termo da taxa de juros no brasil: Observada e ajustada. *Análise Econômica*, v. 29, n. 55, p. 95–122, 2011.
- CALDEIRA, J. F.; LAURINI, M. P.; PORTUGAL, M. S. Bayesian inference applied to dynamic nelson-siegel model with stochastic volatility. *Brazilian Review of Econometrics*, v. 30, n. 1, p. 123–161, 2010.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. Bond portfolio optimization using dynamic factor models. *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, v. 37, p. 128–158, 2016.
- CHRISTENSEN, B. J.; WEL, M. van der et al. An asset pricing approach to testing general term structure models including heath-jarrow-morton specifications and affine subclasses. *Department of Economics and Business Economics, Aarhus University*, 2010.
- CHRISTENSEN, J. H.; DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. The affine arbitrage-free class of nelson-siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 164, n. 1, p. 4–20, 2011.
- COX, J. C.; JR, J. E. I.; ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. In: . [S.l.: s.n.], 1985. v. 53, p. 385–408.
- DAI, Q.; SINGLETON, K. J. Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure. *Journal of financial Economics*, Elsevier, v. 63, n. 3, p. 415–441, 2002.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006.

- DIEBOLD, F. X.; LI, C.; YUE, V. Z. Global yield curve dynamics and interactions: a dynamic nelson–siegel approach. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 146, n. 2, p. 351–363, 2008.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & economic statistics*, Taylor & Francis, v. 13, n. 3, p. 253–263, 1995.
- DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D.; ARUOBA, S. B. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 131, n. 1-2, p. 309–338, 2006.
- DUFFIE, D.; KAN, R. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 6, n. 4, p. 379–406, 1996.
- DURBIN, J.; KOOPMAN, S. J. *Time series analysis by state space methods*. [S.l.]: Oxford University Press, 2012. v. 38.
- ECB. *Yield curve modelling and a conceptual framework for estimating yield curves: evidence from the European Central Bank's yield curves*. [S.l.], 2018.
- ESTRELLA, A.; MISHKIN, F. S. The predictive power of the term structure of interest rates in europe and the united states: Implications for the european central bank. *European economic review*, Elsevier, v. 41, n. 7, p. 1375–1401, 1997.
- FAMA, E. F. The information in the term structure. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 13, n. 4, p. 509–528, 1984.
- FAMA, E. F. Term-structure forecasts of interest rates, inflation and real returns. *Journal of Monetary Economics*, North-Holland, v. 25, n. 1, p. 59–76, 1990.
- FAMA, E. F.; BLISS, R. R. The information in long-maturity forward rates. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 680–692, 1987.
- GIACOMINI, R.; WHITE, H. Tests of conditional predictive ability. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 74, n. 6, p. 1545–1578, 2006.
- GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993.
- HARVEY, A. C. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman filter*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1989.



- HARVEY, A. C.; RUIZ, E.; SENTANA, E. Unobserved component time series models with arch disturbances. Elsevier, 1992.
- HARVEY, C. R. *The term structure and world economic growth*. [S.l.]: Center for Research in Security Prices, Graduate School of Business . . . , 1991.
- HAUTSCH, N.; OU, Y. *Yield curve factors, term structure volatility, and bond risk premia*. [S.l.], 2008.
- HAUTSCH, N.; YANG, F. Bayesian inference in a stochastic volatility nelson–siegel model. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 56, n. 11, p. 3774–3792, 2012.
- HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 77–105, 1992.
- HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.
- JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI*. [S.l.], 1997. v. 3068, p. 182–194.
- KOOPMAN, S. J.; MALLEE, M. I.; WEL, M. Van der. Analyzing the term structure of interest rates using the dynamic nelson–siegel model with time-varying parameters. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 28, n. 3, p. 329–343, 2010.
- LAURINI, M. P.; HOTTA, L. K. Bayesian extensions to diebold-li term structure model. *International Review of Financial Analysis*, Elsevier, v. 19, n. 5, p. 342–350, 2010.
- LAURINI, M. P.; HOTTA, L. K. et al. Modelos de fatores latentes generalizados para curvas de juros em múltiplos mercados. In: *IX Encontro Brasileiro de Finanças*. [S.l.: s.n.], 2009.
- LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. *Journal of fixed income*, v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991.
- MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, JSTOR, v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971.
- MISHKIN, F. S. What does the term structure tell us about future inflation? *Journal of monetary economics*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 77–95, 1990.

NASH, J. C. et al. *lbfgsb3: Limited Memory BFGS Minimizer with Bounds on Parameters*. [S.l.], 2015. R package version 2015-2.13. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=lbfgsb3>>.

NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *q Journal of Business*, v. 60, n. 4, p. 473–489, 1987.

NEWKEY, W. K.; WEST, K. D. Hypothesis testing with efficient method of moments estimation. *International Economic Review*, JSTOR, p. 777–787, 1987.

POOTER, M. D. Examining the nelson-siegel class of term structure models: In-sample fit versus out-of-sample forecasting performance. 2007.

POOTER, M. D.; RAVAZZOLO, F.; DIJK, D. J. V. Term structure forecasting using macro factors and forecast combination. 2010.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2018. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

Raymond McTaggart; Gergely Daroczi; Clement Leung. *Quandl: API Wrapper for Quandl.com*. [S.l.], 2018. R package version 2.9.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=Quandl>>.

SHEA, G. S. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge University Press, v. 19, n. 3, p. 253–269, 1984.

SVENSSON, L. E. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. [S.l.], 1994.

VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.

WAN, E. A.; MERWE, R. V. D. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: IEEE. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*. [S.l.], 2000. p. 153–158.

YU, W.-C.; SALYARDS, D. M. Parsimonious modeling and forecasting of corporate yield curve. *Journal of Forecasting*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 73–88, 2009.

## **APÊNDICE A – Estimador de menor erro quadrático médio (EMEQM)**



As derivações a seguir seguem do fato de que o filtro de Kalman é um estimador de menor erro quadrático médio (EMEQM) em um ambiente gaussiano. Além disso, seguem dois lemas que sustentam a utilização do filtro de Kalman com a hipótese de estar em ambiente não-gaussiano, ou seja, é considerado a estimação de  $x$  - um conjunto de dados não-observável, dado  $y$  - um conjunto de dados observável - quando a suposição de normalidade é quebrada. Portanto, temos um estimador linear não-viesado de mínima variância no Lema 2. Segue, primeiramente, a derivação da matriz de variância dos estados definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{t|t} &= \text{cov}\{\boldsymbol{\beta}_t - \mathbf{b}_{t|t}\}, \\ &= \text{cov}\{\boldsymbol{\beta}_t - [\mathbf{b}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t]\},\end{aligned}$$

no qual  $\mathbf{K}_t = \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{F}_t^{-1}$  e  $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b}_{t|t-1}$  procedentes das equações (2.12) e (2.14), respectivamente. Portanto, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{t|t} &= \text{cov}\{\boldsymbol{\beta}_t - [\mathbf{b}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b}_{t|t-1})]\}, \\ &= \text{cov}\{\boldsymbol{\beta}_t - [\mathbf{b}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\beta}_t + \varepsilon_t - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b}_{t|t-1})]\}, \\ &= \text{cov}\{(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{\beta}_t - \mathbf{b}_{t|t-1}) - \mathbf{K}_t \varepsilon_t\}, \\ &= \text{cov}\{(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{\beta}_t - \mathbf{b}_{t|t-1})\} + \text{cov}\{\mathbf{K}_t \varepsilon_t\}, \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda}) \text{cov}\{\boldsymbol{\beta}_t - \mathbf{b}_{t|t-1}\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda})' + \mathbf{K}_t \text{cov}\{\varepsilon_t\} \mathbf{K}_t', \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{B}_{t|t-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda})' + \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{K}_t'.\end{aligned}\quad (1)$$

O filtro de Kalman é um estimador de menor erro quadrático médio (EMEQM). De outra forma, busca-se minimizar a expressão  $\mathbb{E}[(\boldsymbol{\beta}_t - \mathbf{b}_{t|t})^2]$ . Isso equivale a minimizar o traço da matriz de covariância da estimativa atualizada na equação (1):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{t|t} &= \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{K}_t' + \mathbf{K}_t (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon) \mathbf{K}_t', \\ &= \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{K}_t' + \mathbf{K}_t \mathbf{F}_t \mathbf{K}_t'.\end{aligned}\quad (2)$$

O traço é minimizado quando a derivada da matriz em relação à matriz do ganho de Kalman ( $\mathbf{K}_t$ ) é zero. Portanto, temos o seguinte após calcular o  $\text{tr}(\mathbf{B}_{t|t})$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{B}_{t|t})}{\partial \mathbf{K}_t} &= -2(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_{t|t-1})' + 2\mathbf{K}_t \mathbf{F}_t = 0, \\ \mathbf{K}_t \mathbf{F}_t &= \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}', \\ \mathbf{K}_t &= \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{F}_t^{-1}.\end{aligned}\quad (3)$$

A matriz do ganho de Kalman derivado na equação (3), que é conhecido como o ganho ótimo de Kalman, é o que gera as estimativas de MMSLE quando

usado. No presente estudo, o ganho de Kalman foi implicitamente calculado através das equações (2.12) a (2.17).

A partir da equação do ganho de Kalman, pode-se derivar a equação em (2.15):

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t &= \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{F}_t^{-1}, \\ \mathbf{K}_t \mathbf{F}_t \mathbf{K}_t' &= \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}',\end{aligned}\tag{4}$$

ao substituir (4) em (2), tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{t|t} &= \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{K}_t' + \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda}' \mathbf{K}_t', \\ &= \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{B}_{t|t-1}, \\ &= \mathbf{B}_{t|t-1} - \mathbf{B}_{t|t-1} \boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\lambda})' \mathbf{F}_t^{-1} \boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{B}_{t|t-1},\end{aligned}$$

que é igual a equação (2.15).

Os resultados a seguir são úteis na derivação do filtro de Kalman para melhor entendimento na estimação e previsão da curva de juros nos modelos DNS, DNSS e extensões. A derivação segue conforme Harvey (1989) e Durbin e Koopman (2012), porém de forma mais detalhada. Suponha que  $x$  e  $y$  são vetores aleatórios normalmente distribuídos em conjunto com os seguintes momentos:

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix},\tag{5}$$

no qual  $\Sigma_{yy}$  é, por hipótese, uma matriz não singular.

**Lema 1:** *A distribuição condicional de  $x$  dado  $y$  é uma distribuição normal multivariada com os respectivos vetor de média e matriz de variância:*

$$\mathbb{E}(x|y) = \mu_x + \Sigma_{xx} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y),\tag{6}$$

$$\mathbb{V}(x|y) = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{xy}'.\tag{7}$$

**Prova:** Seja a variável  $z$  da seguinte forma:  $z = x - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y)$ . Uma vez que a transformação de  $(x, y)$  para  $(y, z)$  é linear e  $(x, y)$  é normalmente distribuído, a distribuição de  $y$  e  $z$  é normal. Temos, portanto, o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z) &= \mathbb{E}[x - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y - \mu_y)], \\ &= \mathbb{E}(x) - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \mathbb{E}(y - \mu_y), \\ &= \mu_x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(z) &= \mathbb{E}[(z - \mu_x)(z - \mu_x)'], \\
&= \mathbb{E}[zz' - z\mu'_x - \mu_x z' + \mu_x \mu'_x], \\
&= \mathbb{E}[zz' - 2z\mu'_x + \mu_x \mu'_x], \\
&= \mathbb{E}[zz'] - 2\mathbb{E}[z\mu'_x] + \mathbb{E}[\mu_x \mu'_x], \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[zz']}_{(1)} - \underbrace{2z\mu'_x + \mu_x \mu'_x}_{(2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{(1)} : \mathbb{E}[zz'] &= \mathbb{E}\{[x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)][x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)]'\}, \\
&= \mathbb{E}\{xx' - x\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)' - \Sigma_{xy}\Sigma_{xy}^{-1}(y - \mu_y)x' \\
&\quad + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)'\}, \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[xx']}_{(1.a)} - \underbrace{\{\mathbb{E}[x\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)'] + \mathbb{E}[\Sigma_{xy}\Sigma_{xy}^{-1}(y - \mu_y)x']\}}_{(1.b)}, \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}[\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)']}_{(1.c)}.
\end{aligned}$$

**(1.b) :**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[x\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)'] + \mathbb{E}[\Sigma_{xy}\Sigma_{xy}^{-1}(y - \mu_y)x'] = \\
&= \mathbb{E}\{2\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}[(y - \mu_y)x']'\}, \\
&= 2\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\mathbb{E}[(y - \mu_y)x']', \\
&= 2\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\mathbb{E}[(y - \mu_y)(x - \mu_x)']', \\
&= \underbrace{2\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}}_{(1.b.1)}.
\end{aligned}$$

**(1.c) :**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'(y - \mu_y)'] = \\
&= \Sigma_{xy}\Sigma'_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(\Sigma_{yy}^{-1})'\mathbb{E}[(y - \mu_y)(y - \mu_y)'], \\
&= \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}(\Sigma_{yy}^{-1})'\Sigma_{yy}, \\
&= \underbrace{\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}}_{(1.c.1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{(1)} : \mathbb{E}[zz'] &= \mathbf{(1.a)} - \mathbf{(1.b.1)} + \mathbf{(1.c.1)}, \\
&= \mathbb{E}[xx'] - 2\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy} + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}, \\
&= \mathbb{E}[xx'] - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(z) &= \mathbf{(1)} + \mathbf{(2)}, \\
&= \mathbb{E}[xx'] - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy} + 2z\mu'_x + \mu_x\mu'_x, \\
&= \mathbb{E}[xx'] + 2z\mu'_x + \mu_x\mu'_x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy},
\end{aligned}$$

portanto:

$$\text{Var}(z) = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(y, z) &= \mathbb{E}[y(z - \mu_x)'], \\
&= \mathbb{E}[y(x - \mu_x)' - y(y - \mu_y)'\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}], \\
&= \mathbb{E}[(y - \mu_y)(x - \mu_x)'] - \mathbb{E}[(y - \mu_y)(y - \mu_y)']\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}, \\
&= \Sigma_{xy} - \Sigma_{yy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{xy},
\end{aligned}$$

logo:

$$\text{Cov}(y, z) = \Sigma_{xy} - \Sigma_{xy} = 0. \quad (9)$$

Se dois vetores são normais e não correlacionados então são independentes; pode-se inferir de (9) que  $z$  é distribuído independentemente de  $y$ . Visto que a distribuição de  $z$  não depende de  $y$ , sua distribuição condicional a  $y$  é a mesma que a sua distribuição incondicional, isto é, é normal com vetor de média  $\mu_x$  e matriz de variância igual a equação (8) que é o mesmo em (6). Uma vez que  $z = x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)$ , segue que a distribuição condicional de  $x$  dado  $y$  é normal com vetor de média (5) e matriz de variância (6)  $\square$

Pode-se considerar a estimação de  $x$  quando é desconhecido e  $y$  é quando conhecido como, por exemplo, um vetor de estado e um vetor de observação, respectivamente. Sob as hipóteses do Lema 1, a esperança condicional  $\hat{x} = \mathbb{E}(x|y)$  é tomado como estimador de  $x$ , isto é, assumindo a seguinte forma:

$$\hat{x} = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y). \quad (10)$$



Logo,  $\hat{x}$  é condicionalmente e incondicionalmente não-viesado:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{x} - x|y) &= \hat{x} - \mathbb{E}(x|y) = 0, \\ \mathbb{E}(\hat{x} - x) &= 0,\end{aligned}$$

e o erro incondicional da matriz de variância de  $\hat{x}$ :

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{x} - x) &= \text{Var}[\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y) - (x - \mu_x)], \\ &= \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma'_{xy}.\end{aligned}\tag{11}$$

Considere agora que a estimação de  $x$  dado  $y$  quando a hipótese de que  $(x,y)$  é normalmente distribuído é quebrada, porém mantendo as hipóteses do Lema 1. Suponha que exista  $\bar{x} = \beta + \gamma y$  tal que o seguinte resultado seja observado:

$$\mathbb{E}(\bar{x} - x) = 0,$$

isto é,  $\bar{x}$  é um estimador linear não-viesado (LUE) de  $x$  dado  $y$ . Suponha também que exista um  $x^*$  tal que:

$$\text{Var}(\bar{x} - x) - \text{Var}(x^* - x),$$

seja não-negativo definido para todo estimador linear não-viesado  $\bar{x}$ . Dizemos então que  $x^*$  é um estimador linear não-viesado de mínima variância (MVLUE). Um MVLUE para o caso não normal é dado pelo lema a seguir.

**Lema 2:** *Se  $(x,y)$  é normalmente distribuído ou não, o estimador  $\hat{x}$  definido por (10) é um MVLUE de  $x$  dado  $y$  e o erro da matriz de variância é dado por (11).*

**Prova:** Visto que  $\bar{x}$  é LUE, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{x} - x) &= \mathbb{E}(\beta + \gamma y - x), \\ &= \beta + \gamma\mu_y - \mu_x, \\ \beta &= \gamma\mu_y - \mu_x,\end{aligned}$$

portanto:

$$\bar{x} = \mu_x + \gamma(y - \mu_y).\tag{12}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(\bar{x} - x) &= \\
&= \mathbb{V}ar[\mu_x + \gamma(y - \mu_y) - x], \\
&= \mathbb{V}ar[\gamma(y - \mu_y) - (x - \mu_x)], \\
&= \mathbb{E}\{\gamma(y - \mu_y) - (x - \mu_x)[\gamma(y - \mu_y) - (x - \mu_x)]'\}, \\
&= \mathbb{E}\{\gamma(y - \mu_y)(y - \mu_y)' \gamma' - \gamma(y - \mu_y)(x - \mu_x)' , \\
&\quad - (x - \mu_x)(y - \mu_y)' \gamma' + (x - \mu_x)(x - \mu_x)'\}, \\
&= \gamma \underbrace{\mathbb{E}[(y - \mu_y)(y - \mu_y)']}_{\Sigma_{yy}} \gamma' - \gamma \underbrace{\mathbb{E}[(y - \mu_y)(x - \mu_x)']}_{\Sigma'_{xy}} \\
&\quad - \underbrace{\mathbb{E}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)']}_{\Sigma_{xy}} \gamma' + \underbrace{\mathbb{E}[(x - \mu_x)(x - \mu_x)']}_{\Sigma_{xx}}, \\
&= \gamma \Sigma_{yy} \gamma' - \gamma \Sigma'_{xy} - \Sigma_{xy} \gamma' + \Sigma_{xx}, \\
&= \gamma \Sigma_{yy} \gamma' - \gamma \Sigma'_{xy} - \Sigma_{xy} \gamma' + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy} + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy}, \\
&= \gamma \Sigma_{yy} \gamma' - \gamma \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yy} \Sigma'_{xy} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yy} \gamma', \\
&\quad + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy} + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy}, \\
&= [\gamma \gamma' - \gamma \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \gamma', \\
&\quad + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy}] \Sigma_{yy} + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy}, \\
&= \mathbb{E}\{[(\gamma - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1})][(\gamma - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}) \gamma \gamma']'\} + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy},
\end{aligned}$$

portanto:

$$\mathbb{V}ar(\bar{x} - x) = \mathbb{V}ar[(\gamma - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1})y] + \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma'_{xy}. \quad (13)$$

Seja  $\hat{x}$  o valor de  $\bar{x}$  obtido por  $\gamma = \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}$  em (12). Então  $\hat{x} = \mu_x + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)$  e de (5), segue o seguinte:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \mu_x + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y), \\
\mathbb{V}ar(\hat{x} - x) &= \mathbb{V}ar[\Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y)], \\
\mathbb{V}ar(\hat{x} - x) &= \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{xy},
\end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (13) da seguinte forma:

$$\mathbb{V}ar(\bar{x} - x) = \mathbb{V}ar[(\gamma - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1})y] + \mathbb{V}ar(\hat{x} - x) \quad (14)$$

que vale para todos os estimadores lineares não-viesados ( $\bar{x}$ ). Visto que  $\mathbb{V}ar[(\gamma - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1})y]$  é não-negativa definida, o Lema 2 está provado.  $\square$

## **APÊNDICE B – Parâmetros dos modelos DNS e extensões**



Os resultados a seguir reportam os parâmetros dos modelos DNS-base e extensões. Os parâmetros mostrados nas Tabelas e Figuras são semelhantes aos resultados encontrados em Diebold et al. (2006) e Koopman et al. (2010).

Tabela 14 – Parâmetros estimados do modelo DNS-base

DNS-base				
Painel (A): Matriz de coeficientes e constante				
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.995**	0.0299**	-0.0208	8.35**
	0.00875	0.00899	0.0108	1.48
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0253	0.937**	0.0366	-1.44
	0.0143	0.0178	0.0213	0.475
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )	0.0301	0.0225	0.838**	-0.106
	0.0281	0.0267	0.0319	0.453
Painel (B): Matriz de variância				
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.0970**	-0.0204	0.0744	
	0.0137	0.0365	0.0618	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.382**	0.0171	
		0.0245	0.0568	
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )			0.818**	
			0.0482	

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes do modelo DNS-base. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e para a matriz dos coeficientes autorregressivos,  $\Phi$ . o Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância. Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

Tabela 15 – Parâmetros estimados do modelo DNS-GARCH

DNS-GARCH				
Painel (A): Matriz de coeficientes e constante				
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.991**	0.0188	-0.00571	8.26**
	0.00797	0.01	0.0112	1.11
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0170	0.947**	0.00552	-1.40**
	0.0148	0.0194	0.0198	0.53
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )	0.0219	-0.0313	0.876**	-0.0226
	0.0219	0.0279	0.0287	0.46
Painel (B): Matriz de variância				
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.0919**	-0.000271	-0.0137	
	0.0225	0.0466	0.128	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.390**	-0.0371	
		0.0295	0.0670	
Curvatura 1 ( $\beta_{3,t}$ )			0.633**	
			0.0541	
Painel (C): Parâmetros do GARCH				
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	
	0.0001	0.502**	0.481**	
	(fixo)	0.103	0.103	

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes e as estimativas dos parâmetros GARCH do modelo DNS-GARCH. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento constante. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância. O Painel (C) apresenta as estimativas dos parâmetros GARCH,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

Tabela 16 – Parâmetros estimados do modelo DNS-TVL

DNS-TVL					
Painel (A): Matriz de coeficientes e constante					
	$\beta_{1,t-1}$	$\beta_{2,t-1}$	$\beta_{3,t-1}$	$\lambda_{1,t}$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	1.00219**	0.0624**	-0.0183**	-0.0132	7.66**
	0.00737	0.00270	0.000664	0.0459	0.348
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0366**	0.894**	0.0398**	0.0641	-1.68**
	0.0065	0.0222	0.00291	0.0277	0.303
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )	0.0360**	0.163**	0.863**	0.180	0.569
	0.0102	0.055	0.0335	0.130	0.606
Decaimento ( $\lambda_t$ )	-0.00119	0.0293	-0.00656	0.639**	-2.30**
	0.00649	0.02	0.0159	0.0360	0.0516
Painel (B): Matriz de variância					
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\lambda_t$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.112**	-0.0175	0.0749	-0.00799	
	0.0138	0.0386	0.0809	0.0394	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.324**	0.0986	0.0248	
		0.0286	0.074	0.0317	
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )			0.997**	-0.157**	
			0.0735	0.0389	
Decaimento ( $\lambda_t$ )				0.144**	
				0.0258	

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes do modelo DNS-TVL. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento variando no tempo. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância. Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

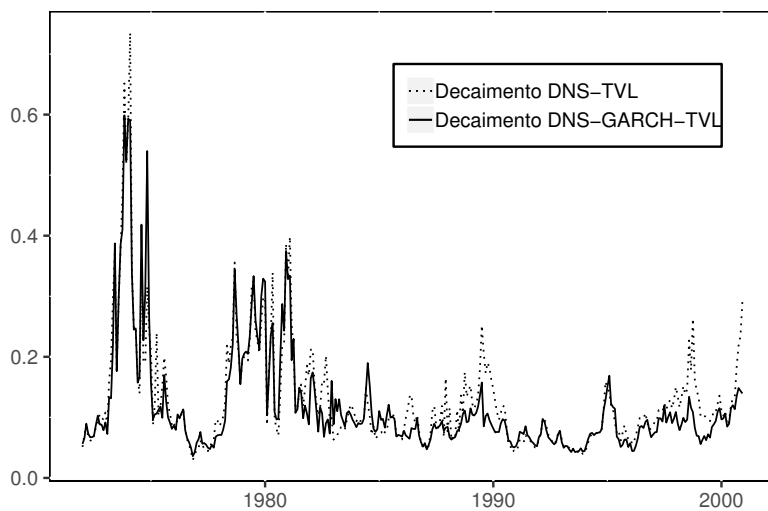
Tabela 17 – Parâmetros estimados do modelo DNS-TVL

DNS-GARCH-TVL					
Painel (A): Matriz de coeficientes e constante					
	$\hat{\beta}_{1,t-1}$	$\hat{\beta}_{2,t-1}$	$\hat{\beta}_{3,t-1}$	$\lambda_t$	Constante $\mu$
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.996**	0.0578**	-0.0308*	0.0306	8.14**
	0.0088	0.0158	0.0135	0.0513	1.40
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )	-0.0101	0.935**	0.011	-0.0314	-1.78**
	0.0118	0.0261	0.0216	0.0719	0.364
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )	-0.0217	0.202**	0.66**	0.89**	0.31
	0.0335	0.0553	0.0427	0.144	0.354
Decaimento ( $\lambda_t$ )	0.0144	-0.0433**	0.0689**	0.561**	-2.41**
	0.00977	0.0143	0.012	0.042	0.0919
Painel (B): Matriz de variância					
	$\beta_{1,t}$	$\beta_{2,t}$	$\beta_{3,t}$	$\lambda_{1,t}$	
Nível ( $\beta_{1,t}$ )	0.0999**	-0.044	0.11	-0.00866	
	0.0145	0.0355	0.123	0.0476	
Inclinação ( $\beta_{2,t}$ )		0.242**	0.0584	0.0581	
		0.0296	0.0998	0.0338	
Curvatura ( $\beta_{3,t}$ )			1.529**	-0.255**	
			0.0853	0.0314	
Decaimento ( $\lambda_t$ )				0.150**	
				0.0239	
Painel (C): Parâmetros do GARCH					
	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$		
	0.0001	0.513**	0.463**		
	(fixo)	0.115	0.113		

Elaborado pelo autor. A tabela apresenta as estimativas do modelo vetorial autorregressivo (VAR) para os fatores latentes e as estimativas dos parâmetros GARCH do modelo DNS-TVL-GARCH. O painel (A) apresenta as estimativas para o vetor constante  $\mu$  e a matriz do coeficiente autorregressivo  $\Phi$  com o fator de decaimento variando no tempo. O Painel (B) apresenta as estimativas da matriz de covariância. O Painel (C) apresenta as estimativas dos parâmetros do GARCH,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Um asterisco (\*) denota significância ao nível de 5% ou menos e dois asteriscos (\*\*) denotam significância ao nível de 1% ou menos. O desvio-padrão é apresentado abaixo da estimativa.

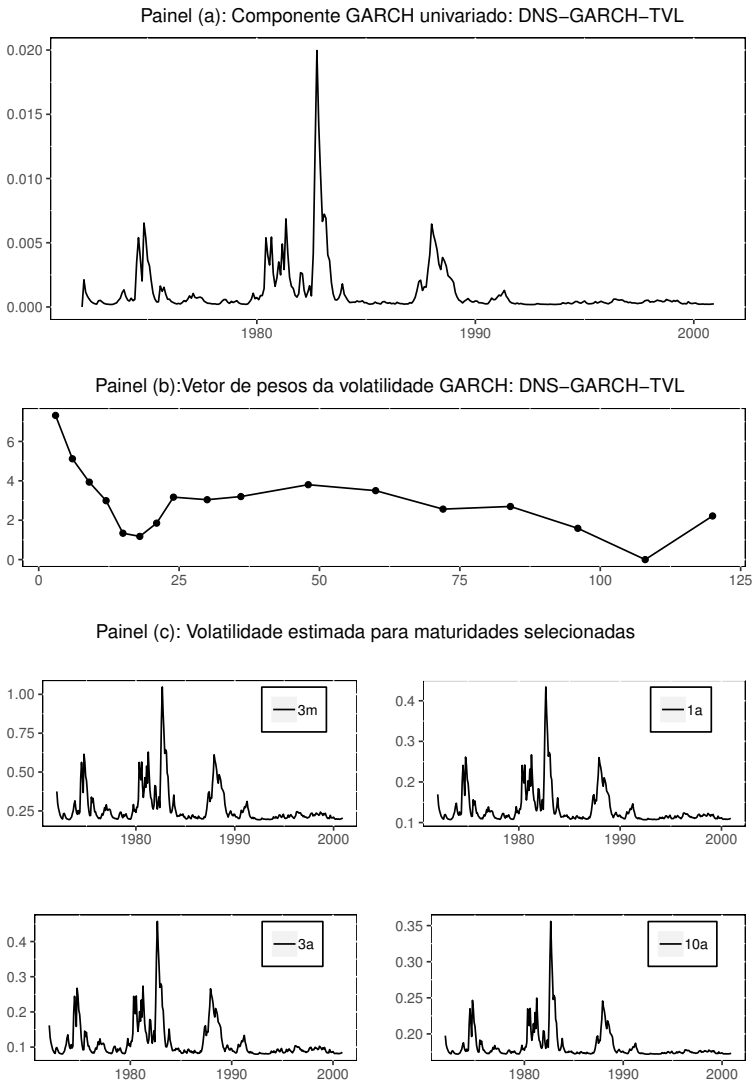


Figura 9 – Fatores de decaimento filtrados dos modelos DNS



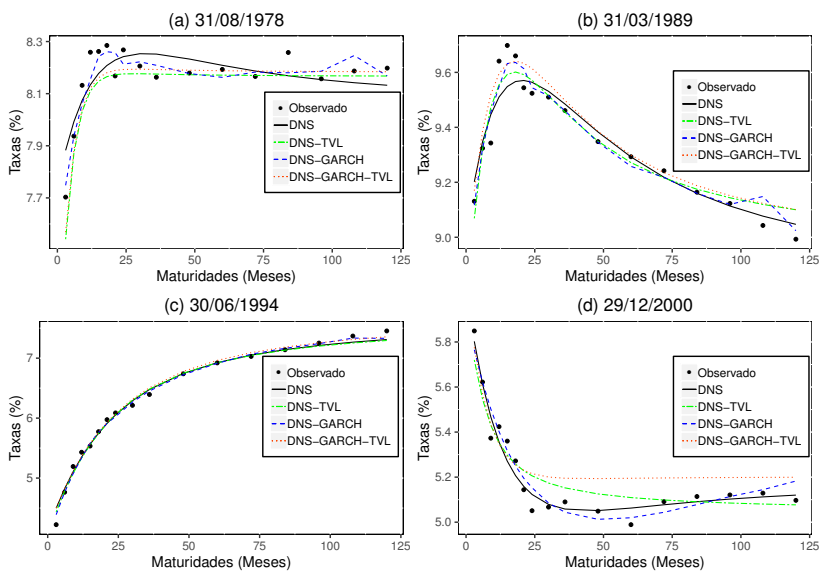
Elaborado pelo autor. A figura mostra as séries filtradas dos fatores de decaimento do modelo DNS-TVL (linha pontilhada), e do modelo com um componente GARCH comum para a volatilidade, DNS-TVL-GARCH (linha sólida).

Figura 10 – Volatilidade do modelo DNS-GARCH-TVL



Elaborado pelo autor. No Painel (a), é mostrado um componente GARCH univariado para a volatilidade variando no tempo e com um parâmetro de decaimento ( $\lambda_{1,t}$ ) variando no tempo (DNS -TVL-GARCH). No Painel (b), é mostrado os pesos, para cada maturidade, do processo GARCH univariado no modelo DNS-TVL-GARCH. O Painel (c) mostra a volatilidade estimada para maturidades selecionadas. Os painéis acima são semelhantes aos Painéis apresentados na Figura 2, p.338, por Koopman et al. (2010)

Figura 11 – Curva de juros observada e ajustada para diferentes períodos do modelo DNS e extensões



Elaborado pelo autor. A figura mostra as diferenças no ajuste das curvas de juros dos modelos DNS, DNS-GARCH, DNS-TVL1 e DNS-GARCH-TVL para datas selecionadas. Resultados para os modelos DNSS e extensões estão na Figura 6.



**APÊNDICE C – REQM para os subperíodos entre 1993 a 2000**



Resultados complementares aos apresentados na seção sobre as previsões fora da amostra. A raiz do erro quadrático médio (REQM) para os subperíodos de 1993:10 a 1995:05, e 1996:10 a 1998:11 são reportados nas Tabelas 18 e 19, 20 e 21, respectivamente.

Tabela 18 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 1995:05

Painel (A): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	21.87	21.37	25.64	28.02	27.78	28.82	31.25	31.16	33.16	33.33	34.45	33.50	30.13	30.99	30.21	31.51	30.54
DNS-TVL	0.887	1.038	1.055	1.039	1.018	1.011	1.005	0.999	0.991	0.983	0.990	0.997	1.033	1.039	1.034	1.036	1.020
DNS-GARCH	0.955	0.942	0.944	0.965	0.968	0.966	0.966	0.954	0.940	0.925	0.923	<b>0.882</b>	0.922	<b>0.927</b>	<b>0.933</b>	0.926	0.903
DNS-GARCH-TVL	0.881	0.992	1.004	0.990	0.973	0.959	0.956	0.953	0.957	0.954	0.953	0.954	0.983	0.976	0.960	0.955	0.936
DNSS	0.867	0.988	0.988	0.985	0.987	0.987	0.990	0.983	0.985	0.977	0.983	0.944	0.971	0.971	0.958	0.933	0.911
DNSS-TVL1	0.986	1.047	1.045	1.031	1.012	1.002	1.009	1.028	1.026	1.030	1.027	1.023	1.019	1.002	0.950	0.917	0.870
DNSS-TVL2	0.892	1.015	0.977	0.974	1.002	1.008	0.999	0.977	0.979	0.970	0.972	0.935	0.957	<b>0.956</b>	0.946	0.928	0.886
DNSS-GARCH	<b>0.801</b>	0.946	0.955	0.965	0.969	0.976	0.979	0.979	0.983	0.979	0.985	0.955	0.980	0.981	0.965	0.944	0.921
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.765</b>	0.904	<b>0.875</b>	<b>0.887</b>	0.934	0.957	0.957	0.936	0.954	0.958	0.985	0.935	0.976	0.974	0.976	<b>0.932</b>	<b>0.904</b>
DNSS-GARCH-TVL2	0.890	1.042	0.985	0.985	1.014	1.022	1.015	0.997	1.000	0.992	0.993	0.953	0.968	<b>0.966</b>	<b>0.956</b>	<b>0.932</b>	<b>0.890</b>

Painel (B): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	37.44	44.25	53.17	57.35	57.60	60.33	64.23	66.46	68.28	69.15	69.10	68.43	62.56	61.74	58.85	59.60	59.56
DNS-TVL	1.043	1.063	1.045	1.029	1.014	1.004	0.994	0.992	0.989	0.989	0.994	1.007	1.023	1.023	1.023	1.021	1.020
DNS-GARCH	<b>0.916</b>	<b>0.953</b>	0.966	0.970	0.968	0.963	0.960	0.953	0.943	0.935	0.928	0.927	<b>0.937</b>	<b>0.952</b>	<b>0.959</b>	0.961	0.963
DNS-GARCH-TVL	0.936	0.982	0.976	0.964	0.948	0.940	0.935	0.933	0.936	0.938	0.940	0.951	0.960	0.957	0.950	0.947	0.943
DNSS	<b>0.874</b>	<b>0.941</b>	<b>0.949</b>	<b>0.949</b>	<b>0.949</b>	<b>0.947</b>	<b>0.946</b>	<b>0.944</b>	0.942	0.938	0.934	0.934	0.942	<b>0.953</b>	<b>0.958</b>	0.957	0.960
DNSS-TVL1	1.214	1.156	1.115	1.103	1.099	1.088	1.081	1.081	1.083	1.076	1.059	1.045	1.032	1.010	0.980	0.954	0.932
DNSS-TVL2	0.819	0.892	<b>0.896</b>	<b>0.903</b>	0.916	0.925	0.926	0.926	0.930	0.931	0.935	0.938	0.946	<b>0.955</b>	<b>0.957</b>	<b>0.953</b>	0.951
DNSS-GARCH	0.875	0.947	0.955	0.958	0.961	0.960	0.961	0.960	0.961	0.957	0.954	0.955	0.964	<b>0.974</b>	0.977	0.977	0.978
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.684</b>	<b>0.783</b>	<b>0.810</b>	<b>0.828</b>	<b>0.856</b>	<b>0.875</b>	0.885	0.890	0.900	0.908	0.922	0.924	0.935	0.949	0.960	0.956	0.952
DNSS-GARCH-TVL2	0.852	0.963	0.957	0.958	0.969	0.975	0.973	0.968	0.964	0.962	0.965	0.959	0.961	0.966	0.967	<b>0.961</b>	<b>0.954</b>

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1992:10 - 1995:05 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de um e três meses. Os resultados por horizonte de previsão estão no Painel (A) e (B), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados no Apêndice B, Tabela 24.



Tabela 19 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 (continuação)

Painel (C): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	57.77	70.21	80.71	87.63	88.75	93.11	96.79	99.06	101.32	101.83	101.41	99.75	94.44	92.13	90.46	92.09	90.09
DNS-TVL	1.154	1.106	1.068	1.045	1.030	1.015	1.006	1.003	1.002	1.003	1.002	1.007	1.011	1.005	0.998	0.990	0.988
DNS-GARCH	<b>0.959</b>	0.977	0.982	0.981	0.979	0.977	0.976	0.972	0.966	0.961	0.958	0.958	<b>0.959</b>	<b>0.964</b>	<b>0.965</b>	<b>0.966</b>	0.964
DNS-GARCH-TVL	0.972	0.960	0.934	0.915	<b>0.899</b>	<b>0.890</b>	<b>0.887</b>	<b>0.889</b>	<b>0.894</b>	<b>0.899</b>	<b>0.904</b>	<b>0.914</b>	0.918	0.915	0.912	<b>0.911</b>	0.912
DNSS	<b>0.879</b>	<b>0.907</b>	<b>0.912</b>	<b>0.911</b>	<b>0.907</b>	<b>0.909</b>	<b>0.911</b>	<b>0.910</b>	<b>0.909</b>	<b>0.909</b>	<b>0.914</b>	<b>0.915</b>	<b>0.918</b>	<b>0.924</b>	<b>0.927</b>	<b>0.929</b>	<b>0.926</b>
DNSS-TVL1	1.193	1.089	1.052	1.035	1.030	1.021	1.018	1.020	1.021	1.017	1.000	0.985	0.965	0.940	0.913	0.893	<b>0.872</b>
DNSS-TVL2	<b>0.813</b>	0.840	<b>0.858</b>	<b>0.871</b>	<b>0.875</b>	<b>0.888</b>	<b>0.898</b>	<b>0.902</b>	<b>0.910</b>	<b>0.918</b>	0.931	<b>0.935</b>	<b>0.937</b>	<b>0.942</b>	<b>0.942</b>	<b>0.943</b>	<b>0.939</b>
DNSS-GARCH	0.922	0.936	<b>0.939</b>	<b>0.938</b>	<b>0.936</b>	<b>0.936</b>	<b>0.939</b>	<b>0.938</b>	<b>0.939</b>	<b>0.941</b>	<b>0.945</b>	<b>0.947</b>	<b>0.951</b>	<b>0.956</b>	<b>0.956</b>	0.955	0.951
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.746</b>	<b>0.824</b>	<b>0.847</b>	<b>0.867</b>	0.883	0.901	0.915	0.919	0.930	0.940	0.962	0.965	0.973	0.987	0.995	0.997	0.993
DNSS-GARCH-TVL2	0.921	0.993	0.993	0.994	0.998	1.004	1.007	1.005	1.002	1.003	1.007	1.000	0.996	0.997	0.995	0.991	0.984

Painel (D): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	86.55	100.0	110.6	117.3	120.5	122.5	124.0	124.3	125.1	124.0	119.6	115.8	111.2	107.7	107.4	106.5	106.0
DNS-TVL	1.143	1.061	1.006	0.969	0.948	<b>0.932</b>	<b>0.923</b>	<b>0.918</b>	<b>0.918</b>	<b>0.918</b>	<b>0.914</b>	<b>0.917</b>	<b>0.917</b>	<b>0.908</b>	<b>0.898</b>	<b>0.888</b>	<b>0.887</b>
DNS-GARCH	1.042	1.043	1.040	1.039	1.039	1.040	1.041	1.042	1.041	1.042	1.042	1.038	1.032	1.026	1.018	1.009	1.001
DNS-GARCH-TVL	1.046	0.980	<b>0.932</b>	<b>0.900</b>	<b>0.877</b>	<b>0.863</b>	<b>0.856</b>	<b>0.852</b>	<b>0.854</b>	<b>0.857</b>	<b>0.859</b>	<b>0.867</b>	<b>0.870</b>	<b>0.868</b>	<b>0.869</b>	<b>0.869</b>	<b>0.874</b>
DNSS	<b>0.929</b>	<b>0.928</b>	<b>0.929</b>	<b>0.931</b>	<b>0.932</b>	<b>0.936</b>	<b>0.941</b>	<b>0.945</b>	<b>0.954</b>	0.958	0.961	0.957	<b>0.949</b>	<b>0.942</b>	<b>0.930</b>	<b>0.921</b>	<b>0.912</b>
DNSS-TVL1	1.092	0.999	0.964	0.943	0.931	0.923	0.922	0.921	<b>0.923</b>	<b>0.923</b>	<b>0.910</b>	<b>0.903</b>	<b>0.892</b>	<b>0.875</b>	<b>0.852</b>	<b>0.840</b>	<b>0.831</b>
DNSS-TVL2	0.965	0.939	<b>0.940</b>	<b>0.945</b>	<b>0.950</b>	<b>0.959</b>	0.968	0.975	0.988	0.994	1.005	1.007	1.006	1.006	1.002	1.001	0.997
DNSS-GARCH	0.930	<b>0.916</b>	<b>0.913</b>	<b>0.914</b>	<b>0.915</b>	<b>0.918</b>	<b>0.922</b>	<b>0.926</b>	<b>0.936</b>	<b>0.940</b>	<b>0.944</b>	<b>0.944</b>	<b>0.940</b>	<b>0.934</b>	<b>0.924</b>	<b>0.915</b>	<b>0.908</b>
DNSS-GARCH-TVL1	1.108	1.162	1.175	1.186	1.192	1.204	1.213	1.217	1.220	1.221	1.229	1.220	1.210	1.209	1.200	1.197	1.185
DNSS-GARCH-TVL2	1.217	1.229	1.215	1.207	1.202	1.204	1.202	1.200	1.193	1.187	1.184	1.171	1.160	1.156	1.150	1.147	1.138

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1992:10 - 1995:05 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de seis e doze meses. Os resultados por horizonte de previsão estão nos Painéis (C) e (D), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados no Apêndice B, Tabela 25.

Tabela 20 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1996:04 - 1998:11

Painel (A): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	8.796	9.671	11.90	12.82	16.28	17.49	18.22	18.97	20.58	21.62	22.68	23.73	22.69	22.60	23.01	23.45	23.10
DNS-TVL	1.175	1.360	1.381	1.223	1.012	1.056	1.101	1.164	1.148	1.160	1.137	1.166	1.102	1.027	0.991	0.990	1.051
DNS-GARCH	3.211	2.638	1.849	1.308	1.019	1.027	1.039	1.060	1.060	1.066	1.082	1.123	1.118	1.067	1.032	1.027	1.091
DNS-GARCH-TVL	1.864	2.050	1.833	1.579	1.209	1.255	1.316	1.393	1.381	1.395	1.378	1.419	1.344	1.219	1.144	1.132	1.226
DNSS	1.100	1.079	1.203	1.089	0.955	0.996	1.020	1.049	1.042	1.043	1.039	1.052	1.050	1.024	0.999	1.004	1.085
DNSS-TVL1	1.121	1.198	1.231	1.119	1.014	1.032	1.049	1.061	1.048	1.047	1.039	1.010	1.020	1.031	1.017	1.005	1.051
DNSS-TVL2	1.298	1.530	1.507	1.281	1.062	1.090	1.103	1.126	1.087	1.075	1.051	1.060	1.049	1.019	0.992	1.013	1.137
DNSS-GARCH	1.335	1.162	1.211	1.143	1.005	1.025	1.042	1.054	1.043	1.037	1.030	1.014	1.019	1.010	0.987	0.988	1.049
DNSS-GARCH-TVL1	1.503	1.049	1.039	1.205	1.239	1.211	1.197	1.160	1.150	1.130	1.116	1.026	1.066	1.100	1.086	1.056	1.034
DNSS-GARCH-TVL2	1.918	1.087	1.039	1.229	1.220	1.175	1.157	1.118	1.104	1.083	1.066	0.988	1.014	1.032	1.011	0.982	0.992

Painel (B): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	15.54	19.01	22.14	21.91	22.56	24.75	26.77	28.89	30.68	32.37	33.06	35.51	34.53	32.39	32.69	33.05	34.44
DNS-TVL	1.298	1.434	1.481	1.555	1.446	1.453	1.465	1.475	1.474	1.476	1.463	1.445	1.397	1.359	1.308	1.287	1.307
DNS-GARCH	2.134	1.674	1.369	1.216	1.116	1.086	1.072	1.062	1.052	1.045	1.050	1.062	1.078	1.078	1.076	1.081	1.095
DNS-GARCH-TVL	1.668	1.730	1.699	1.762	1.639	1.650	1.663	1.671	1.685	1.698	1.711	1.697	1.664	1.629	1.562	1.536	1.547
DNSS	0.970	1.261	1.326	1.318	1.229	1.228	1.223	1.223	1.198	1.189	1.174	1.190	1.189	1.187	1.179	1.195	1.242
DNSS-TVL1	1.575	1.578	1.505	1.474	1.329	1.288	1.262	1.239	1.194	1.168	1.134	1.117	1.116	1.132	1.137	1.146	1.180
DNSS-TVL2	2.127	2.048	1.911	1.846	1.646	1.574	1.513	1.465	1.386	1.341	1.283	1.272	1.256	1.258	1.250	1.277	1.344
DNSS-GARCH	1.396	1.497	1.456	1.430	1.328	1.290	1.257	1.225	1.183	1.155	1.121	1.117	1.122	1.124	1.126	1.143	1.177
DNSS-GARCH-TVL1	0.999	0.919	1.006	1.151	1.303	1.247	1.206	1.150	1.131	1.095	1.070	0.981	1.009	1.054	1.061	1.044	1.001
DNSS-GARCH-TVL2	1.319	0.918	0.962	1.175	1.273	1.202	1.157	1.097	1.080	1.044	1.019	0.938	0.966	0.998	1.004	0.987	0.962

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1996:04 - 1998:11 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de um e três meses. Os resultados por horizonte de previsão estão nos Painéis (A) e (B), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados no Apêndice B, Tabela 26.

Tabela 21 – Raiz do erro quadrático médio (REQM) correspondente ao período 1996:04 - 1998:11

Painel (A): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	33.46	31.54	31.39	29.60	24.62	26.98	29.92	33.26	35.83	38.27	40.65	45.93	44.32	42.02	42.29	42.65	47.19
DNS-TVL	<b>0.868</b>	1.063	1.230	1.387	1.524	1.579	1.595	1.584	1.609	1.617	1.608	1.556	1.547	1.549	1.513	1.497	1.457
DNS-GARCH	1.333	1.250	1.164	1.105	1.084	1.044	1.014	0.991	0.973	0.959	0.965	0.967	0.989	1.002	1.016	1.030	1.035
DNS-GARCH-TVL	1.045	1.225	1.355	1.483	1.648	1.704	1.711	1.695	1.736	1.760	1.776	1.728	1.734	1.752	1.712	1.696	1.644
DNSS	1.088	1.358	1.511	1.606	1.749	1.713	1.650	1.585	1.529	1.486	1.434	1.390	1.395	1.415	1.411	1.422	1.407
DNSS-TVL1	1.625	1.787	1.825	1.873	1.953	1.840	1.725	1.617	1.510	1.432	1.341	1.292	1.291	1.314	1.322	1.344	1.348
DNSS-TVL2	2.068	2.295	2.349	2.412	2.601	2.418	2.22	2.057	1.894	1.782	1.646	1.551	1.543	1.570	1.565	1.584	1.569
DNSS-GARCH	1.479	1.608	1.648	1.684	1.765	1.660	1.551	1.461	1.366	1.304	1.240	1.203	1.210	1.237	1.244	1.264	1.267
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.465</b>	<b>0.506</b>	<b>0.609</b>	<b>0.798</b>	1.015	0.968	0.930	0.882	0.865	<b>0.825</b>	<b>0.811</b>	<b>0.753</b>	<b>0.780</b>	<b>0.807</b>	<b>0.829</b>	<b>0.827</b>	<b>0.824</b>
DNSS-GARCH-TVL2	<b>0.700</b>	<b>0.539</b>	<b>0.569</b>	<b>0.784</b>	1.035	0.962	0.908	0.851	<b>0.832</b>	<b>0.782</b>	<b>0.757</b>	<b>0.696</b>	<b>0.726</b>	<b>0.745</b>	<b>0.768</b>	<b>0.769</b>	<b>0.775</b>

Painel (B): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	81.64	78.71	78.97	73.04	72.31	75.86	80.11	85.86	86.85	89.44	92.62	99.05	96.09	97.89	95.16	97.02	102.98
DNS-TVL	<b>0.666</b>	<b>0.771</b>	<b>0.877</b>	<b>0.952</b>	1.030	1.084	1.122	1.148	1.200	1.231	1.263	1.264	1.278	1.272	1.279	1.271	1.255
DNS-GARCH	0.984	<b>0.950</b>	<b>0.922</b>	<b>0.885</b>	<b>0.871</b>	<b>0.859</b>	<b>0.851</b>	<b>0.850</b>	<b>0.833</b>	<b>0.829</b>	<b>0.833</b>	<b>0.851</b>	<b>0.862</b>	<b>0.883</b>	<b>0.896</b>	<b>0.914</b>	<b>0.932</b>
DNS-GARCH-TVL	<b>0.687</b>	<b>0.794</b>	<b>0.895</b>	0.972	1.040	1.091	1.133	1.161	1.222	1.263	1.310	1.322	1.346	1.344	1.358	1.350	1.333
DNSS	1.072	1.204	1.285	1.367	1.396	1.401	1.391	1.369	1.369	1.356	1.331	1.305	1.307	1.296	1.304	1.298	1.285
DNSS-TVL1	1.430	1.516	1.553	1.618	1.622	1.594	1.556	1.508	1.483	1.447	1.396	1.354	1.355	1.346	1.360	1.359	1.348
DNSS-TVL2	1.867	1.981	2.003	2.092	2.066	1.993	1.912	1.821	1.766	1.702	1.616	1.546	1.542	1.517	1.532	1.519	1.495
DNSS-GARCH	1.347	1.407	1.424	1.459	1.452	1.413	1.370	1.324	1.291	1.258	1.216	1.192	1.197	1.196	1.209	1.213	1.210
DNSS-GARCH-TVL1	<b>0.503</b>	<b>0.518</b>	<b>0.558</b>	<b>0.549</b>	<b>0.620</b>	<b>0.626</b>	<b>0.635</b>	<b>0.650</b>	<b>0.642</b>	<b>0.643</b>	<b>0.661</b>	<b>0.679</b>	<b>0.698</b>	<b>0.733</b>	<b>0.745</b>	<b>0.770</b>	<b>0.792</b>
DNSS-GARCH-TVL2	<b>0.584</b>	<b>0.594</b>	<b>0.622</b>	<b>0.621</b>	<b>0.694</b>	<b>0.688</b>	<b>0.686</b>	<b>0.688</b>	<b>0.670</b>	<b>0.662</b>	<b>0.665</b>	<b>0.661</b>	<b>0.669</b>	<b>0.699</b>	<b>0.701</b>	<b>0.720</b>	<b>0.733</b>

A tabela mostra a raiz do erro quadrático médio das previsões (REQM), em pontos base, para o período de 1996:04 - 1998:11 usando nove extensões contra o modelo DNS base em um horizonte de previsão de seis e doze meses. Os resultados por horizonte de previsão estão nos Painéis (C) e (D), respectivamente. As células com sombras indicam a classificação do modelo por maturidade, isto é, a sombra indica se um determinado modelo teve menor REQM com relação ao modelo DNS. Valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos. Os resultados do teste Diebold-Mariano são reportados no Apêndice B, Tabela 27.



## **APÊNDICE D – Resultados do teste Diebold-Mariano**



Resultados complementares aos apresentados na seção sobre as previsões fora da amostra. A seguir são apresentados os resultados do teste DM para os períodos de 1993:10 a 2000:12, 1993:10 a 1995:05, 1996:04 a 1998:11, e 2018:09 a 2018:12.

Tabela 22 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 2000:12

Painel (B): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-1.300	-3.766	-4.391	-3.719	-3.008	-3.205	-3.416	-3.698	-3.656	-3.646	-3.412	-3.983	-3.372	-2.819	-2.135	-2.107	-2.882
DNS-GARCH	-3.787	-3.203	-2.430	-0.896	0.271	0.188	0.072	-0.089	0.230	0.350	0.088	-0.046	-0.804	-0.685	-0.133	-0.0447	-0.482
DNS-GARCH-TVL	-3.051	-4.525	-4.804	-3.870	-2.735	-3.041	-3.341	-3.835	-3.868	-3.962	-3.680	-4.250	-3.649	-2.859	-2.053	-2.029	-2.773
DNSS	<b>2.681</b>	-0.439	-2.156	-0.604	0.478	-0.027	-0.508	-1.188	-0.822	-0.448	-0.247	0.059	-0.614	-0.449	0.411	0.352	-0.539
DNSS-TVL1	-0.170	-1.916	-1.846	-1.362	-1.079	-1.236	-1.568	-2.162	-2.304	-2.709	-2.730	-2.667	-2.596	-2.221	-0.740	-0.339	-0.722
DNSS-TVL2	-0.359	-3.285	-3.405	-1.750	-0.666	-1.151	-1.455	-1.901	-1.433	-1.054	-0.649	-0.339	-0.497	-0.262	0.325	-0.051	-1.171
DNSS-GARCH	<b>1.775</b>	-0.609	-1.638	-1.038	-0.089	-0.586	-1.000	-1.527	-1.301	-0.730	-0.548	0.191	-0.955	-1.526	-0.099	0.116	-0.513
DNSS-GARCH-TVL1	-0.0619	0.219	<b>2.011</b>	0.536	-0.894	-0.793	-0.597	-0.035	-0.273	-0.278	-0.599	0.625	-0.449	-1.163	-1.083	0.269	0.619
DNSS-GARCH-TVL2	-0.057	-0.308	0.534	-0.827	-1.851	-1.713	-1.363	-0.525	-0.523	-0.276	-0.379	0.979	0.161	-0.186	0.451	<b>1.669</b>	<b>1.676</b>

Painel (A): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-2.896	-3.834	-3.726	-3.496	-3.016	-2.935	-2.872	-2.899	-2.864	-2.856	-2.793	-2.946	-2.820	-2.548	-2.395	-2.366	-2.669
DNS-GARCH	-2.320	-1.652	-1.236	-0.479	-0.070	0.064	0.169	0.356	0.468	0.531	0.366	0.254	-0.337	-0.784	-0.851	-0.881	-0.948
DNS-GARCH-TVL	-2.513	-3.150	-3.086	-2.979	-2.587	-2.594	-2.589	-2.663	-2.688	-2.720	-2.702	-2.843	-2.744	-2.517	-2.373	-2.358	-2.595
DNSS	2.266	-1.049	-1.440	-0.961	-0.443	-0.549	-0.615	-0.829	-0.681	-0.574	-0.406	-0.695	-0.897	-0.959	-0.876	-0.959	-1.414
DNSS-TVL1	-2.395	-2.063	-1.913	-1.754	-1.613	-1.651	-1.766	-1.946	-2.098	-2.256	-2.393	-2.471	-2.237	-1.936	-1.479	-1.271	-1.402
DNSS-TVL2	-2.228	-2.483	-2.421	-2.094	-1.601	-1.663	-1.645	-1.722	-1.603	-1.508	-1.314	-1.461	-1.387	-1.365	-1.316	-1.491	-1.904
DNSS-GARCH	-0.450	-1.682	-1.957	-1.659	-1.431	-1.501	-1.550	-1.671	-1.612	-1.387	-1.054	-1.093	-1.564	-1.723	-1.473	-1.296	-1.496
DNSS-GARCH-TVL1	0.763	1.134	1.602	0.899	0.150	0.206	0.265	0.439	0.286	0.229	0.079	0.395	0.0623	-0.214	-0.413	-0.195	0.276
DNSS-GARCH-TVL2	0.631	0.231	0.267	-0.282	-0.786	-0.706	-0.547	-0.259	-0.239	-0.136	-0.091	0.377	0.159	0.0197	-0.109	0.505	1.429

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1993:10 - 2000:12 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de um e três meses nos Painéis (A) e (B), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 10. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.



Tabela 23 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 2000:12 (continuação)

Painel (C): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-0.198	-2.675	-3.242	-3.256	-2.914	-2.880	-2.881	-2.986	-3.066	-3.153	-3.169	-3.260	-3.171	-2.981	-2.852	-2.833	-3.013
DNS-GARCH	-2.538	-1.943	-1.660	-1.050	-1.008	-0.863	-0.688	-0.390	-0.182	-0.100	-0.237	-0.387	-0.964	-1.484	-1.568	-1.562	-1.473
DNS-GARCH-TVL	-0.258	-2.424	-2.444	-2.208	-1.985	-2.008	-2.071	-2.244	-2.425	-2.615	-2.787	-3.027	-3.035	-2.956	-2.886	-2.913	-3.133
DNSS	0.324	-1.890	-2.084	-1.648	-1.253	-1.336	-1.382	-1.516	-1.417	-1.410	-1.445	-1.702	-1.835	-1.961	-1.985	-2.112	-2.401
DNSS-TVL1	-3.793	-3.178	-2.956	-2.651	-2.372	-2.362	-2.377	-2.490	-2.518	-2.560	-2.483	-2.527	-2.306	-2.096	-1.820	-1.787	-1.992
DNSS-TVL2	-2.926	-2.958	-2.957	-2.733	-2.477	-2.481	-2.469	-2.513	-2.426	-2.420	-2.301	-2.315	-2.204	-2.188	-2.189	-2.358	-2.636
DNSS-GARCH	-1.881	-2.308	-2.479	-2.185	-1.996	-1.999	-2.009	-2.089	-1.984	-1.968	-1.862	-1.999	-2.124	-2.273	-2.219	-2.221	-2.422
DNSS-GARCH-TVL1	1.308	1.275	1.575	0.791	0.214	0.215	0.198	0.416	0.301	0.279	0.093	0.375	0.138	-0.190	-0.382	-0.312	0.150
DNSS-GARCH-TVL2	1.502	0.827	0.654	-0.054	-0.608	-0.569	-0.512	-0.255	-0.202	-0.070	-0.003	0.506	0.401	0.328	0.342	0.784	<b>1.765</b>

Painel (C): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	<b>2.205</b>	1.505	0.811	-0.159	-1.157	-1.856	-2.422	-2.975	-3.440	-3.642	-3.645	-3.724	-3.636	-3.411	-3.207	-3.103	-3.206
DNS-GARCH	0.117	0.428	0.717	0.565	0.339	0.451	0.589	0.822	0.905	0.974	0.997	1.161	0.913	0.690	0.623	0.683	0.850
DNS-GARCH-TVL	<b>3.094</b>	<b>2.353</b>	1.529	0.508	-0.229	-0.683	-1.171	-1.635	-2.188	-2.605	-3.023	-3.329	-3.362	-3.312	-3.269	-3.295	-3.466
DNSS	-2.001	-3.263	-3.745	-3.661	-3.625	-3.769	-3.878	-4.023	-4.074	-4.082	-4.130	-4.203	-4.212	-4.274	-4.280	-4.330	-4.455
DNSS-TVL1	-6.246	-6.207	-6.349	-6.246	-6.238	-6.232	-6.241	-6.306	-6.350	-6.329	-6.115	-5.957	-5.777	-5.619	-5.389	-5.213	-5.223
DNSS-TVL2	-4.013	-4.074	-4.105	-4.107	-4.029	-4.044	-4.069	-4.111	-4.105	-4.0696	-3.955	-3.840	-3.728	-3.618	-3.608	-3.639	-3.714
DNSS-GARCH	-2.207	-2.483	-2.710	-2.737	-2.682	-2.766	-2.809	-2.913	-2.965	-2.952	-3.028	-3.165	-3.311	-3.458	-3.560	-3.689	-3.970
DNSS-GARCH-TVL1	1.016	0.158	-0.169	-1.264	-2.103	-2.130	-2.044	-1.748	-1.744	-1.549	-1.307	-0.691	-0.720	-0.763	-0.767	-0.614	-0.107
DNSS-GARCH-TVL2	<b>1.960</b>	0.857	0.425	-0.517	-1.303	-1.231	-1.0145	-0.558	-0.369	-0.0129	0.507	1.442	1.504	1.524	1.490	<b>1.657</b>	<b>2.221</b>

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1993:10 - 2000:12 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de seis e doze meses nos Painéis (C) e (D), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 11. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.

Tabela 24 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 1995:05

Painel (A): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	1.137	-0.568	-1.264	-1.224	-0.627	-0.433	-0.259	0.019	0.382	0.631	0.316	0.073	-0.839	-0.806	-0.542	-0.507	-0.258
DNS-GARCH	0.397	0.723	1.112	0.930	1.038	1.292	1.360	1.576	1.451	1.369	1.161	<b>1.995</b>	1.574	<b>2.159</b>	<b>1.804</b>	1.334	1.346
DNS-GARCH-TVL	1.631	0.214	-0.152	0.290	0.693	1.075	1.224	1.264	1.153	1.150	1.077	1.047	0.283	0.340	0.486	0.506	0.683
DNSS	1.490	0.278	0.581	0.635	0.535	0.561	0.472	0.712	0.378	0.400	0.240	0.921	0.586	1.573	1.388	1.131	1.050
DNSS-TVL1	0.257	-0.703	-0.568	-0.380	-0.151	-0.027	-0.152	-0.537	-0.802	-1.298	-1.442	-1.407	-0.833	-0.068	0.869	1.084	1.435
DNSS-TVL2	0.849	-0.152	0.352	0.465	-0.041	-0.146	0.010	0.439	0.364	0.472	0.428	1.33	1.176	<b>2.184</b>	1.610	1.348	1.627
DNSS-GARCH	<b>2.016</b>	1.061	1.472	1.097	0.979	0.898	0.886	0.958	0.520	0.463	0.250	0.897	0.508	1.460	1.060	0.892	0.893
DNSS-GARCH-TVL1	<b>1.972</b>	1.056	<b>1.847</b>	<b>1.784</b>	0.909	0.559	0.567	0.856	0.550	0.449	0.153	0.785	0.296	0.493	0.562	<b>1.771</b>	<b>2.052</b>
DNSS-GARCH-TVL2	0.654	-0.336	0.204	0.259	-0.252	-0.384	-0.268	0.035	-0.004	0.112	0.098	0.861	0.754	<b>1.739</b>	<b>2.042</b>	<b>1.796</b>	<b>2.121</b>

Painel (B): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-0.473	-1.055	-0.944	-0.602	-0.282	-0.077	0.106	0.159	0.210	0.210	0.114	-0.140	-0.343	-0.316	-0.277	-0.246	-0.240
DNS-GARCH	<b>1.796</b>	<b>1.771</b>	1.642	1.636	1.617	1.596	1.516	1.442	1.339	1.347	1.371	1.513	<b>1.688</b>	<b>2.008</b>	<b>1.875</b>	1.138	0.771
DNS-GARCH-TVL	0.768	0.502	0.727	0.791	0.896	0.970	1.007	1.047	0.978	0.950	0.920	0.761	0.532	0.535	0.547	0.558	0.616
DNSS	<b>1.830</b>	<b>2.054</b>	<b>2.462</b>	<b>2.476</b>	<b>2.516</b>	<b>2.395</b>	<b>2.150</b>	<b>1.794</b>	1.315	1.128	1.004	1.115	1.239	<b>1.835</b>	<b>2.140</b>	1.088	0.663
DNSS-TVL1	-2.271	-1.375	-1.010	-0.929	-0.899	-0.856	-0.873	-0.968	-1.190	-1.309	-1.340	-1.177	-0.731	-0.196	0.294	0.560	0.757
DNSS-TVL2	1.527	1.482	<b>1.905</b>	<b>1.820</b>	1.606	1.414	1.377	1.299	1.157	1.100	1.074	1.230	1.392	<b>1.817</b>	<b>2.456</b>	<b>1.885</b>	1.426
DNSS-GARCH	1.413	1.044	1.195	1.218	1.240	1.337	1.483	1.513	1.268	1.139	1.028	1.144	1.337	<b>1.741</b>	0.719	0.427	0.293
DNSS-GARCH-TVL1	<b>2.135</b>	<b>2.255</b>	<b>2.483</b>	<b>2.323</b>	<b>2.031</b>	<b>1.769</b>	1.612	1.449	1.178	1.002	0.776	0.784	0.685	0.639	0.586	0.793	1.090
DNSS-GARCH-TVL2	0.734	0.249	0.394	0.426	0.322	0.273	0.301	0.362	0.398	0.423	0.419	0.569	0.634	0.754	1.087	<b>1.918</b>	<b>2.312</b>

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1993:10 - 1995:05 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de um e três meses nos Painéis (A) e (B), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 18. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.

Tabela 25 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1993:10 - 1995:05 (continuação)

Painel (C): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-2.424	-1.927	-1.299	-0.872	-0.551	-0.286	-0.117	-0.067	-0.049	-0.068	-0.045	-0.141	-0.214	-0.102	0.023	0.167	0.209
DNS-GARCH	<b>1.687</b>	1.379	1.302	1.403	1.383	1.348	1.214	1.255	1.280	1.306	1.343	1.548	<b>1.881</b>	<b>2.306</b>	<b>2.566</b>	<b>2.003</b>	1.534
DNS-GARCH-TVL	0.780	1.249	1.495	1.565	<b>1.658</b>	<b>1.710</b>	<b>1.755</b>	<b>1.770</b>	<b>1.769</b>	<b>1.754</b>	<b>1.768</b>	<b>1.692</b>	1.585	1.603	1.617	<b>1.666</b>	1.598
DNSS	<b>2.712</b>	<b>3.213</b>	<b>3.268</b>	<b>3.253</b>	<b>3.280</b>	<b>3.202</b>	<b>2.996</b>	<b>2.762</b>	<b>2.404</b>	<b>2.141</b>	<b>1.918</b>	<b>2.074</b>	<b>2.518</b>	<b>3.150</b>	<b>3.021</b>	<b>2.262</b>	<b>1.770</b>
DNSS-TVL1	-1.614	-0.723	-0.446	-0.303	-0.270	-0.202	-0.186	-0.224	-0.264	-0.244	-0.009	0.270	0.628	1.011	1.330	1.539	<b>1.656</b>
DNSS-TVL2	<b>2.650</b>	<b>3.019</b>	<b>3.059</b>	<b>2.971</b>	<b>2.822</b>	<b>2.639</b>	<b>2.392</b>	<b>2.217</b>	<b>2.008</b>	<b>1.831</b>	1.635	<b>1.728</b>	<b>1.951</b>	<b>2.288</b>	<b>2.758</b>	<b>3.158</b>	<b>3.247</b>
DNSS-GARCH	1.227	1.635	<b>1.943</b>	<b>2.111</b>	<b>2.253</b>	<b>2.376</b>	<b>2.437</b>	<b>2.469</b>	<b>2.382</b>	<b>2.173</b>	<b>1.945</b>	<b>2.091</b>	<b>2.515</b>	<b>2.494</b>	<b>1.732</b>	1.273	1.054
DNSS-GARCH-TVL1	<b>1.764</b>	<b>1.954</b>	<b>2.069</b>	<b>1.956</b>	<b>1.702</b>	1.478	1.213	1.106	0.903	0.730	0.448	0.418	0.349	0.185	0.071	0.041	0.148
DNSS-GARCH-TVL2	0.554	0.063	0.067	0.067	0.017	-0.052	-0.095	-0.062	-0.028	-0.038	-0.102	-0.014	0.051	0.053	0.100	0.246	0.525

Painel (D): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-3.005	-1.625	-0.187	0.867	1.416	<b>1.876</b>	<b>2.123</b>	<b>2.298</b>	<b>2.415</b>	<b>2.508</b>	<b>2.792</b>	<b>2.867</b>	<b>2.892</b>	<b>3.083</b>	<b>3.316</b>	<b>3.558</b>	<b>3.625</b>
DNS-GARCH	-1.502	-1.874	-2.105	-2.302	-2.430	-2.577	-2.720	-2.852	-3.010	-3.092	-3.187	-3.053	-2.651	-2.152	-1.433	-0.773	-0.133
DNS-GARCH-TVL	-1.775	0.827	<b>2.064</b>	<b>2.493</b>	<b>2.681</b>	<b>2.810</b>	<b>2.894</b>	<b>2.976</b>	<b>3.001</b>	<b>3.093</b>	<b>3.072</b>	<b>3.047</b>	<b>3.093</b>	<b>3.126</b>	<b>3.152</b>	<b>3.110</b>	
DNSS	<b>2.988</b>	<b>3.306</b>	<b>3.338</b>	<b>3.320</b>	<b>3.262</b>	<b>3.045</b>	<b>2.714</b>	<b>2.424</b>	<b>1.955</b>	1.648	1.417	1.580	<b>1.960</b>	<b>2.344</b>	<b>2.997</b>	<b>3.326</b>	<b>3.497</b>
DNSS-TVL1	-1.256	0.011	0.610	0.981	1.204	1.439	1.530	1.596	<b>1.650</b>	<b>1.729</b>	<b>2.040</b>	<b>2.122</b>	<b>2.196</b>	<b>2.334</b>	<b>2.601</b>	<b>2.686</b>	<b>2.718</b>
DNSS-TVL2	0.590	1.426	<b>1.711</b>	<b>1.866</b>	<b>1.891</b>	<b>1.699</b>	1.391	1.154	0.594	0.264	-0.279	-0.433	-0.380	-0.423	-0.199	-0.141	0.268
DNSS-GARCH	1.419	<b>2.178</b>	<b>2.561</b>	<b>2.792</b>	<b>2.874</b>	<b>2.948</b>	<b>2.954</b>	<b>2.892</b>	<b>2.688</b>	<b>2.575</b>	<b>2.468</b>	<b>2.568</b>	<b>2.812</b>	<b>3.143</b>	<b>3.542</b>	<b>3.797</b>	<b>3.890</b>
DNSS-GARCH-TVL1	-1.803	-2.786	-3.150	-3.300	-3.386	-3.533	-3.566	-3.625	-3.720	-3.692	-3.755	-3.755	-3.751	-3.802	-3.817	-3.848	-3.780
DNSS-GARCH-TVL2	-2.801	-3.359	-3.580	-3.642	-3.671	-3.795	-3.817	-3.848	-3.885	-3.837	-3.901	-3.896	-3.887	-3.940	-3.973	-4.049	-4.033

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1993:05 - 1995:05 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de seis e doze meses nos Painéis (C) e (D), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 19. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.

Tabela 26 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1996:04 - 1998:11

Painel (A): h = 1																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-1.668	-2.927	-2.832	-1.511	-0.102	-0.441	-0.797	-1.341	-1.255	-1.452	-1.327	-1.826	-1.102	-0.300	0.096	0.110	-0.654
DNS-GARCH	-5.216	-5.554	-4.029	-1.744	-0.191	-0.384	-0.726	-1.370	-1.776	-1.960	-1.929	-2.377	-1.911	-0.973	-0.444	-0.354	-1.124
DNS-GARCH-TVL	-3.281	-4.683	-4.049	-2.495	-1.097	-1.401	-1.738	-2.212	-2.226	-2.438	-2.437	-2.940	-2.333	-1.488	-1.003	-0.970	-1.706
DNSS	-0.839	-1.961	-2.562	-0.812	0.508	0.0462	-0.302	-0.843	-1.041	-1.379	-1.490	-1.925	-1.293	-0.458	0.014	-0.063	-0.974
DNSS-TVL1	-1.553	-2.644	-3.043	-1.484	-0.235	-0.579	-1.026	-1.458	-1.147	-1.050	-0.746	-0.251	-0.545	-0.970	-0.467	-0.113	-0.755
DNSS-TVL2	-2.471	-4.305	-3.609	-1.654	-0.499	-0.766	-0.950	-1.298	-1.159	-1.269	-1.149	-1.478	-0.917	-0.267	0.078	-0.122	-1.116
DNSS-GARCH	-2.006	-1.977	-2.641	-1.406	-0.085	-0.458	-0.936	-1.567	-1.683	-1.322	-0.877	-0.596	-1.022	-0.356	0.285	0.199	-0.676
DNSS-GARCH-TVL1	-2.404	-0.305	-0.363	-1.992	-2.923	-2.515	-2.192	-1.637	-1.439	-1.191	-1.077	-0.283	-0.841	-1.667	-2.224	-2.668	-2.082
DNSS-GARCH-TVL2	-3.382	-0.406	-0.285	-2.037	-2.676	-2.119	-1.823	-1.291	-1.086	-0.838	-0.695	0.149	-0.238	-0.839	-0.570	0.788	0.218

Painel (B): h = 3																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	-2.552	-2.833	-2.770	-2.451	-2.309	-2.296	-2.227	-2.180	-2.160	-2.181	-2.166	-2.205	-2.109	-1.898	-1.730	-1.753	-1.901
DNS-GARCH	-2.920	-2.837	-2.576	-2.217	-1.931	-2.071	-2.211	-2.218	-1.927	-1.756	-1.913	-2.115	-2.178	-1.864	-1.608	-1.536	-1.717
DNS-GARCH-TVL	-2.368	-2.612	-2.595	-2.423	-2.208	-2.279	-2.289	-2.308	-2.334	-2.390	-2.400	-2.473	-2.381	-2.238	-2.100	-2.118	-2.265
DNSS	0.993	-2.912	-2.613	-2.169	-1.595	-1.706	-1.759	-1.861	-1.865	-1.949	-1.962	-2.137	-2.024	-1.754	-1.581	-1.645	-1.919
DNSS-TVL1	-2.450	-2.653	-2.620	-2.472	-2.421	-2.456	-2.411	-2.348	-2.332	-2.316	-2.191	-1.971	-1.965	-1.946	-1.791	-1.726	-1.787
DNSS-TVL2	-2.992	-2.940	-2.765	-2.601	-2.267	-2.257	-2.211	-2.166	-2.102	-2.122	-2.048	-2.136	-2.004	-1.797	-1.648	-1.729	-1.998
DNSS-GARCH	-1.265	-1.888	-2.022	-1.860	-1.661	-1.705	-1.731	-1.767	-1.758	-1.803	-1.681	-1.812	-1.779	-1.687	-1.518	-1.539	-1.812
DNSS-GARCH-TVL1	0.006	0.562	-0.048	-0.829	-1.492	-1.339	-1.155	-0.866	-0.765	-0.567	-0.432	0.131	-0.076	-0.431	-0.563	-0.498	-0.021
DNSS-GARCH-TVL2	-1.298	0.371	0.181	-0.897	-1.301	-1.092	-0.901	-0.583	-0.491	-0.281	-0.122	0.460	0.280	0.012	-0.045	0.191	0.719

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1996:04 - 1998:11 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de um e três meses nos Painéis A e B, respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 20. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.

Tabela 27 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 1996:04 - 1998:11 (continuação)

Painel (A): h = 6																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	<b>2.745</b>	-1.246	-2.812	-3.036	-3.065	-3.218	-3.234	-3.203	-3.216	-3.235	-3.260	-3.245	-3.212	-3.158	-3.108	-3.152	-3.144
DNS-GARCH	-3.956	-4.032	-3.734	-2.890	-1.712	-0.947	-0.336	0.198	0.589	0.888	0.805	0.854	0.296	-0.083	-0.517	-1.004	-1.391
DNS-GARCH-TVL	-1.032	-2.857	-3.308	-3.454	-3.409	-3.522	-3.542	-3.536	-3.509	-3.492	-3.489	-3.465	-3.431	-3.357	-3.310	-3.343	-3.307
DNSS	-3.140	-3.769	-3.862	-3.813	-3.852	-3.794	-3.714	-3.658	-3.536	-3.473	-3.436	-3.410	-3.396	-3.320	-3.306	-3.378	-3.334
DNSS-TVL1	-3.228	-3.328	-3.350	-3.238	-3.195	-3.165	-3.089	-3.003	-2.885	-2.818	-2.725	-2.720	-2.706	-2.730	-2.742	-2.856	-2.936
DNSS-TVL2	-3.056	-3.159	-3.186	-3.199	-3.168	-3.189	-3.177	-3.135	-3.090	-3.053	-3.017	-3.007	-2.994	-2.984	-2.983	-3.055	-3.075
DNSS-GARCH	-1.412	-1.913	-2.199	-2.278	-2.310	-2.374	-2.436	-2.460	-2.431	-2.388	-2.345	-2.454	-2.537	-2.666	-2.791	-2.929	-3.023
DNSS-GARCH-TVL1	<b>3.694</b>	<b>3.714</b>	<b>4.100</b>	<b>2.059</b>	-0.160	0.318	0.651	1.191	1.293	<b>1.748</b>	<b>2.026</b>	<b>2.702</b>	<b>2.487</b>	<b>2.273</b>	<b>2.257</b>	<b>2.524</b>	<b>2.731</b>
DNSS-GARCH-TVL2	<b>2.420</b>	<b>3.293</b>	<b>3.915</b>	<b>2.156</b>	-0.305	0.362	0.933	1.612	<b>1.660</b>	<b>2.071</b>	<b>2.341</b>	<b>2.928</b>	<b>2.770</b>	<b>2.572</b>	<b>2.609</b>	<b>2.847</b>	<b>2.923</b>

Painel (B): h = 12																	
Modelo	Maturidade																
	3	6	9	12	15	18	21	24	30	36	48	60	72	84	96	108	120
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
DNS-TVL	<b>4.206</b>	<b>4.180</b>	<b>3.760</b>	<b>2.059</b>	-1.295	-2.640	-3.102	-3.324	-3.617	-3.740	-3.830	-3.992	-4.068	-4.033	-4.094	-4.130	-4.219
DNS-GARCH	1.216	<b>2.903</b>	<b>3.557</b>	<b>3.802</b>	<b>3.792</b>	<b>3.899</b>	<b>3.931</b>	<b>3.920</b>	<b>4.028</b>	<b>4.037</b>	<b>4.056</b>	<b>4.209</b>	<b>4.265</b>	<b>4.199</b>	<b>4.300</b>	<b>4.301</b>	<b>4.319</b>
DNS-GARCH-TVL	<b>4.004</b>	<b>3.760</b>	<b>2.843</b>	0.854	-1.319	-2.506	-3.020	-3.264	-3.532	-3.652	-3.727	-3.818	-3.879	-3.825	-3.862	-3.883	-3.956
DNSS	-3.605	-4.427	-4.392	-4.384	-4.283	-4.304	-4.305	-4.299	-4.352	-4.367	-4.368	-4.408	-4.432	-4.355	-4.379	-4.377	-4.424
DNSS-TVL1	-4.204	-4.307	-4.297	-4.354	-4.220	-4.201	-4.181	-4.152	-4.167	-4.164	-4.114	-4.161	-4.179	-4.110	-4.133	-4.143	-4.215
DNSS-TVL2	-3.973	-4.042	-4.052	-4.118	-4.035	-4.058	-4.071	-4.076	-4.142	-4.158	-4.146	-4.206	-4.226	-4.168	-4.186	-4.190	-4.237
DNSS-GARCH	-1.315	-1.599	-1.792	-1.936	-2.004	-2.110	-2.194	-2.264	-2.377	-2.437	-2.602	-2.793	-3.017	-3.196	-3.395	-3.533	-3.667
DNSS-GARCH-TVL1	<b>4.130</b>	<b>4.101</b>	<b>3.937</b>	<b>3.742</b>	<b>3.473</b>	<b>3.587</b>	<b>3.626</b>	<b>3.648</b>	<b>3.783</b>	<b>3.863</b>	<b>3.960</b>	<b>4.196</b>	<b>4.296</b>	<b>4.269</b>	<b>4.363</b>	<b>4.447</b>	<b>4.590</b>
DNSS-GARCH-TVL2	<b>4.267</b>	<b>4.346</b>	<b>4.203</b>	<b>3.983</b>	<b>3.581</b>	<b>3.776</b>	<b>3.843</b>	<b>3.879</b>	<b>4.025</b>	<b>4.131</b>	<b>4.223</b>	<b>4.444</b>	<b>4.476</b>	<b>4.426</b>	<b>4.475</b>	<b>4.486</b>	<b>4.537</b>

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 1996:04 - 1998:11 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de seis e doze meses nos Painéis (C) e (D), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 20. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.

Tabela 28 – Teste Diebold-Mariano correspondente ao período 2018:09 - 2018:12

Painel (A): h = 1 dia												Painel (C): h = 1 mês																					
Modelo	Maturidade											1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360												1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.566	-0.460	<b>4.257</b>	<b>5.770</b>	<b>3.637</b>	0.164	<b>2.840</b>	<b>2.609</b>	1.488	-2.494	-3.765
DNS-TVL	<b>9.536</b>	0.904	<b>17.71</b>	<b>19.75</b>	<b>11.85</b>	-0.283	<b>12.35</b>	<b>8.614</b>	<b>7.569</b>	-3.646	-6.392	-6.611	-5.205	<b>4.418</b>	<b>5.498</b>	0.187	-3.491	-4.626	-4.439	-4.269	-2.845	-1.338	-3.540	-4.096	<b>1.877</b>	<b>3.262</b>	0.253	-1.762	0.932	0.387	-0.726	-2.879	-3.383
DNS-GARCH	-12.53	-11.36	<b>16.22</b>	<b>17.34</b>	<b>11.71</b>	-3.422	-7.711	-8.015	-9.483	-4.529	<b>9.838</b>	-1.001	-1.029	<b>4.676</b>	<b>5.999</b>	<b>4.033</b>	-2.948	-0.305	-0.838	-0.960	-0.998	-0.885	-1.953	-2.262	4.189	4.985	-2.871	-4.093	-2.106	-2.572	-1.552	-0.471	0.554
DNS-GARCH-TVL	<b>2.447</b>	-4.694	<b>17.49</b>	<b>23.96</b>	<b>12.47</b>	-2.107	<b>10.82</b>	<b>8.174</b>	<b>6.546</b>	-4.040	-5.564	-6.129	-6.151	-5.256	-2.817	1.585	-4.253	-5.399	-4.895	-3.864	1.118	<b>3.207</b>	-1.035	-1.389	<b>4.403</b>	<b>6.306</b>	<b>3.402</b>	-1.749	1.454	0.570	0.894	0.793	<b>1.760</b>
DNSS	<b>3.579</b>	-0.182	<b>16.59</b>	<b>19.84</b>	<b>9.709</b>	-3.755	<b>11.24</b>	<b>6.690</b>	<b>7.877</b>	-0.270	<b>9.867</b>	-1.269	-2.154	<b>4.689</b>	<b>5.882</b>	-3.351	-5.061	-2.355	-2.956	-1.909	-1.693	-0.540	-2.69	-2.154	<b>4.689</b>	<b>5.882</b>	-3.351	-5.061	-2.355	-2.956	-1.909	-1.693	-0.540
DNSS-TVL1	<b>2.403</b>	1.335	<b>15.96</b>	<b>19.81</b>	<b>9.675</b>	-4.973	<b>9.291</b>	<b>5.400</b>	<b>6.633</b>	-1.062	<b>10.24</b>	-6.055	-6.006	-5.920	-5.308	-2.027	-2.965	-5.680	-5.321	-4.443	-0.985	<b>2.050</b>	-1.953	-2.262	4.189	4.985	-2.871	-4.093	-2.106	-2.572	-1.552	-0.471	0.554
DNSS-TVL2	<b>4.123</b>	0.173	<b>16.27</b>	<b>19.40</b>	<b>10.04</b>	-1.044	<b>10.36</b>	<b>5.949</b>	<b>7.133</b>	-0.572	<b>8.870</b>	-1.035	-1.389	<b>4.403</b>	<b>6.306</b>	<b>3.402</b>	-1.749	1.454	0.570	0.894	0.793	<b>1.760</b>	-1.035	-1.389	<b>4.403</b>	<b>6.306</b>	<b>3.402</b>	-1.749	1.454	0.570	0.894	0.793	<b>1.760</b>
DNSS-GARCH	<b>3.750</b>	-0.967	<b>16.57</b>	<b>20.04</b>	<b>9.863</b>	-3.602	<b>11.00</b>	<b>6.511</b>	<b>7.707</b>	1.215	<b>9.930</b>	-1.269	-2.154	<b>4.689</b>	<b>5.882</b>	-3.351	-5.061	-2.355	-2.956	-1.909	-1.693	-0.540	-1.269	-2.154	<b>4.689</b>	<b>5.882</b>	-3.351	-5.061	-2.355	-2.956	-1.909	-1.693	-0.540
DNSS-GARCH-TVL1	<b>2.567</b>	0.675	<b>15.81</b>	<b>19.88</b>	<b>10.20</b>	-3.698	<b>9.429</b>	<b>5.766</b>	<b>6.773</b>	1.077	<b>10.57</b>	-6.055	-6.006	-5.920	-5.308	-2.027	-2.965	-5.680	-5.321	-4.443	-0.985	<b>2.050</b>	-1.269	-2.154	<b>4.689</b>	<b>5.882</b>	-3.351	-5.061	-2.355	-2.956	-1.909	-1.693	-0.540
DNSS-GARCH-TVL2	<b>4.431</b>	-1.744	<b>15.84</b>	<b>22.39</b>	<b>9.967</b>	-2.526	<b>10.80</b>	<b>6.035</b>	<b>7.152</b>	-1.530	<b>10.08</b>	-6.055	-6.006	-5.920	-5.308	-2.027	-2.965	-5.680	-5.321	-4.443	-0.985	<b>2.050</b>	-6.055	-6.006	-5.920	-5.308	-2.027	-2.965	-5.680	-5.321	-4.443	-0.985	<b>2.050</b>

Painel (B): h = 1 semana												Painel (D): h = 3 meses																					
Modelo	Maturidade											1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360	Maturidade										
	1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360												1	3	6	12	24	36	60	84	120	240	360
DNS	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-1.808	0.032	<b>3.344</b>	<b>3.704</b>	-0.651	-3.886	-3.728	-3.370	-4.360	-5.229	-4.538
DNS-TVL	<b>4.596</b>	-0.214	<b>5.416</b>	<b>5.730</b>	<b>4.394</b>	1.403	<b>4.806</b>	<b>3.995</b>	<b>3.410</b>	-0.310	-2.411	-5.775	-2.090	1.252	0.825	-0.750	-2.287	-3.052	-2.511	-2.144	-0.884	-0.402	-3.058	-2.535	-1.494	-1.428	-2.995	-3.529	-2.970	-3.046	-3.699	-4.462	-4.341
DNS-GARCH	-5.612	-5.903	<b>5.793</b>	<b>5.954</b>	<b>4.530</b>	-3.208	-4.649	-4.503	-4.708	-2.189	<b>3.022</b>	-1.179	-1.022	-0.356	1.449	-0.421	-0.878	-0.912	-0.955	-0.986	-0.999	-0.990	-1.179	-1.022	-0.356	1.449	-0.421	-0.878	-0.912	-0.955	-0.986	-0.999	-0.990
DNS-GARCH-TVL	0.579	-4.056	<b>5.858</b>	<b>5.973</b>	<b>4.033</b>	-0.725	<b>4.161</b>	<b>3.356</b>	<b>2.393</b>	-2.063	-3.019	-9.504	-4.994	-0.805	-1.629	-6.521	-6.762	-5.751	-5.254	-4.643	-4.414	-4.059	-9.504	-4.994	-0.805	-1.629	-6.521	-6.762	-5.751	-5.254	-4.643	-4.414	-4.059
DNSS	<b>1.907</b>	0.223	<b>5.785</b>	<b>5.995</b>	<b>4.359</b>	-2.962	<b>3.972</b>	<b>2.331</b>	<b>1.807</b>	-1.0169	0.003	-9.647	-9.886	-9.347	-7.442	-4.034	-5.596	-6.831	-6.443	-5.780	-3.422	-3.319	-9.647	-9.886	-9.347	-7.442	-4.034	-5.596	-6.831	-6.443	-5.780	-3.422	-3.319
DNSS-TVL1	0.454	0.561	<b>5.756</b>	<b>5.953</b>	0.753	-3.562	<b>2.094</b>	0.902	1.566	-2.0352	0.713	-8.136	-5.759	<b>6.560</b>	<b>7.821</b>	1.640	-0.486	1.378	0.454	-0.623	-2.674	-2.434	-8.136	-5.759	<b>6.560</b>	<b>7.821</b>	1.640	-0.486	1.378	0.454	-0.623	-2.674	-2.434
DNSS-TVL2	0.026	-4.167	<b>2.119</b>	<b>5.240</b>	<b>3.096</b>	-2.639	0.791	0.550	0.449	-1.431	<b>1.725</b>	-9.135	-5.522	<b>1.781</b>	0.361	-7.267	-7.565	-6.003	-5.852	-5.710	-6.002	-5.209	-9.135	-5.522	<b>1.781</b>	0.361	-7.267	-7.565	-6.003	-5.852	-5.710	-6.002	-5.209
DNSS-GARCH	0.864	-0.982	<b>4.689</b>	<b>5.957</b>	<b>4.770</b>	-1.697	<b>3.860</b>	<b>2.610</b>	<b>3.009</b>	-0.062	<b>2.454</b>	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357
DNSS-GARCH-TVL1	1.064	1.299	<b>5.655</b>	<b>6.013</b>	<b>3.319</b>	-2.649	<b>2.951</b>	<b>1.668</b>	<b>2.286</b>	0.468	<b>2.563</b>	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357
DNSS-GARCH-TVL2	-0.597	-4.120	-2.010	<b>3.607</b>	<b>2.339</b>	-2.149	<b>2.687</b>	<b>1.879</b>	1.110	-1.268	<b>2.359</b>	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357	-10.34	-10.51	-10.89	-10.84	-2.621	-3.863	-7.126	-7.094	-6.486	-3.670	-0.357

A tabela mostra o resultado do teste Diebold-Mariano para verificar se as previsões fora da amostra são estatisticamente diferentes entre os modelos concorrentes e o modelo DNS-base para o período de 2018:09 - 2018:12 (observações mensais). São apresentados nove extensões contra o modelo DNS em um horizonte de previsão de 1 dia, 1 semana, 1 mês e 3 meses nos Painéis (A), (B), (C) e (D), respectivamente. Os resultados são referentes à Tabela 13. As células com valores em negrito denotam significância ao nível de 10% ou menos.