

Frederico Nascimento Dutra

**PERSISTÊNCIA DO HIATO DA INFLAÇÃO NO BRASIL:  
UMA ANÁLISE PARA O PERÍODO DE METAS DE  
INFLAÇÃO**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós Graduação em Economia para  
a obtenção do Grau de Mestre em Eco-  
nomia.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Valle  
Moura

Florianópolis

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dutra, Frederico Nascimento  
Persistência do Hiato da Inflação no Brasil : Uma  
análise para o período de metas de inflação /  
Frederico Nascimento Dutra ; orientador, Guilherme  
Valle Moura, 2019.  
83 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de  
Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Persistência do Hiato da  
Inflação. 3. Política Monetária. 4. TVP-VAR. 5. DSGE.  
I. Moura, Guilherme Valle. II. Universidade Federal  
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Economia. III. Título.

Frederico Nascimento Dutra

**PERSISTÊNCIA DO HIATO DA INFLAÇÃO NO  
BRASIL: UMA ANÁLISE PARA O PERÍODO DE METAS  
DE INFLAÇÃO**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Economia”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Economia.

Florianópolis, 26 de março 2019.

---

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura  
Orientador  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. João Frois Caldeira  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Roberto Meurer  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Sidney Martins Caetano (videoconferência)  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Aldemarina e Osmar, e ao meu irmão, Felipe, por todo o apoio que sempre me deram para que eu conseguisse percorrer essa jornada.

Ao meu orientador, Guilherme Valle Moura, pela sua paciência, dedicação e empenho na orientação deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Economia (PPGECO), por todo o aprendizado e ajuda durante o Mestrado.

Aos meus colegas de Mestrado, pelos conhecimentos compartilhados e momentos de alegria vividos nestes dois anos.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido ao longo do Mestrado.



*“An economist is an expert who will know tomorrow why the things he predicted yesterday didn't happen today.”*

Laurence J. Peter



## RESUMO

Este trabalho utiliza um modelo TVP-VAR para analisar as mudanças ocorridas na dinâmica inflacionária brasileira entre as gestões de Henrique Meirelles e Alexandre Tombini à frente do Banco Central. As evidências apontadas por este modelo indicaram um aumento da persistência do hiato da inflação no período de Tombini, em comparação com o de Meirelles. Houve indícios, também, de aumento da tendência e da volatilidade da inflação na gestão de Tombini. Para investigar as causas relacionadas a estas mudanças na dinâmica inflacionária, estimou-se um mesmo modelo DSGE para cada uma das gestões. As análises derivadas deste modelo se mostraram em linha com as do TVP-VAR, tal que apresentaram, também, aumento da persistência do hiato, bem como da volatilidade e da tendência da inflação. A partir de uma análise contrafactual conduzida com o modelo DSGE, verificou-se que a política monetária do período de Tombini foi o fator preponderante para explicar o aumento da volatilidade da inflação. Em relação à persistência do hiato da inflação, tanto a política monetária quanto as condições macroeconômicas contribuíram para o aumento desta estatística, porém, não houve indícios claros a respeito de qual fator foi o mais relevante.

**Palavras-chave:** Persistência do Hiato da Inflação, Política Monetária, Meirelles, Tombini, TVP-VAR, DSGE.



## ABSTRACT

This dissertation uses a TVP-VAR model to analyze the changes in inflation dynamics between the chairmanships of Meirelles and Tombini ahead of Central Bank. The evidence pointed out by this model indicated an increase in the inflation-gap persistence in the period of Tombini, in comparison with the one of Meirelles. There was also evidence of an increase in the trend and volatility of inflation in Tombini's management. In order to investigate the causes related to these changes in inflation dynamics, we estimated the same DSGE model for each of the managements. The analyzes derived from this model were in line with those of TVP-VAR, which also showed an increase in the inflation-gap persistence, as well as the volatility and trend inflation. From a counterfactual analysis conducted with the DSGE model, it was verified that the monetary policy of the Tombini period was the preponderant factor to explain the increase of inflation volatility. Regarding the persistence of the inflation-gap persistence, both monetary policy and macroeconomic conditions contributed to the increase of this statistic, however, there were no clear indications as to which factor was the most relevant.

**Keywords:** Inflation-Gap Persistence, Monetary Policy, Meirelles, Tombini, TVP-VAR, DSGE.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Inflação efetiva e meta de inflação no período jan/2003 a jun/2016. ....	20
Figura 2	Séries temporais utilizadas na estimação do TVP-VAR, no período de jul/1999 a jun/2016. ....	36
Figura 3	Inflação efetiva e tendência da inflação no período de abr/2003 a jun/2016. ....	39
Figura 4	Inflação acumulada de 12 meses e tendência anualizada da inflação no período de abr/2003 a jun/2016. ....	40
Figura 5	Volatilidade da inflação no período de abr/2003 a jun/2016. ....	41
Figura 6	Estatísticas de $R_{j,t}^2$ no período de abr/2003 a jun/2016. ....	43
Figura 7	Distribuição conjunta das estatísticas de $R_{j,t}^2$ para os pares 2003-2010 e 2010-2016. ....	44
Figura 8	Distribuição conjunta das estatísticas de $R_{j,t}^2$ para o par 2007-2013. ....	46
Figura 9	Séries temporais utilizadas na estimação do DSGE, no período de jan/2003 a jun/2016. ....	63
Figura 10	Meta de inflação do Banco Central subjacente ao modelo DSGE. ....	66
Figura 11	Persistência do hiato da inflação subjacente ao modelo DSGE. ....	69
Figura 12	Persistência do hiato da inflação resultante do exercício contrafactual. ....	72



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Seleção da mistura de normais para aproximar $\log \chi^2(1)$ .	33
Tabela 2	Probabilidade de mudança do $R_{j,t}^2$ para os pares 2003-2010 e 2010-2016. ....	45
Tabela 3	Probabilidade de mudança do $R_{j,t}^2$ para o par 2007-2013.	47
Tabela 4	Distribuições a priori dos parâmetros do modelo DSGE	64
Tabela 5	Distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo DSGE	67
Tabela 6	Mudança percentual da volatilidade e da previsibilidade do hiato inflação subjacentes ao modelo DSGE. ....	68
Tabela 7	Volatilidade e persistência do hiato da inflação resultantes do experimento (a). ....	70
Tabela 8	Volatilidade e persistência do hiato da inflação resultantes do experimento (b). ....	71
Tabela 9	Análise contrafactual baseada no modelo DSGE. ....	73



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	19
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	23
<b>3</b>	<b>DINÂMICA INFLACIONÁRIA</b> .....	25
3.1	MODELO TVP-VAR .....	25
3.2	ESTIMAÇÃO DO MODELO .....	27
3.3	DISTRIBUIÇÕES A PRIORI .....	37
3.4	RESULTADOS .....	37
3.4.1	Tendência da Inflação .....	38
3.4.2	Volatilidade da Inflação .....	40
3.4.3	Persistência do Hiato da Inflação .....	41
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	49
4.1	MODELO DSGE .....	49
4.1.1	Família Representativa .....	50
4.1.2	Risco Internacional e Preços Relativos .....	52
4.1.3	Firmas .....	53
4.1.3.1	<i>Firmas Domésticas</i> .....	53
4.1.3.2	<i>Firmas Importadoras</i> .....	55
4.1.4	Política Monetária .....	57
4.1.5	Termos de Troca, Taxa de Câmbio Real e Equilíbrio de Mercado .....	57
4.2	APROXIMAÇÃO LOG-LINEAR DO MODELO .....	58
4.3	ESTIMAÇÃO DO MODELO .....	60
4.4	DISTRIBUIÇÕES A PRIORI .....	63
4.5	RESULTADOS .....	65
4.5.1	Modelo Estimado .....	65
4.5.2	Propriedades da Inflação .....	68
4.5.3	Análise Contrafactual .....	69
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	75
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	77
	<b>APÊNDICE A – Algoritmo de Carter e Kohn (1994)</b>	83



## 1 INTRODUÇÃO

O trabalho seminal de Beveridge e Nelson (1981) tem servido como base para diversas análises relacionadas à dinâmica inflacionária<sup>1</sup>, tal que se assume que a inflação,  $\pi_t$ , pode ser decomposta em duas partes: a tendência da inflação,  $\tau_t$ , que evolui como um passeio aleatório sem *drift*; e o hiato da inflação,  $h_t = \pi_t - \tau_t$ , que reflete diferenças temporárias entre o valor efetivo da inflação e sua tendência. Segundo Cogley e Sbordone (2008), em modelos de equilíbrio geral, a tendência da inflação é determinada pela meta de longo prazo da autoridade monetária, tal que variações na tendência da inflação podem ser associadas a mudanças na meta de inflação do Banco Central. Do mesmo modo, Ireland (2007) argumenta que movimentos transitórios da taxa de inflação efetiva podem ocorrer devido a choques de diversos tipos (por exemplo, choques de custo, variações na taxa de câmbio, mudanças climáticas, etc), porém, movimentos grandes e persistentes da inflação só ocorrem se houver intervenção da política monetária na economia. Já Ascari e Sbordone (2014) enfatizam que as variações na tendência da inflação resultam do fato da autoridade monetária perseguir metas implícitas de inflação, bem como em decorrência de mudanças graduais na meta do Banco Central devido à implementação de processos deflacionários (ou inflacionários).

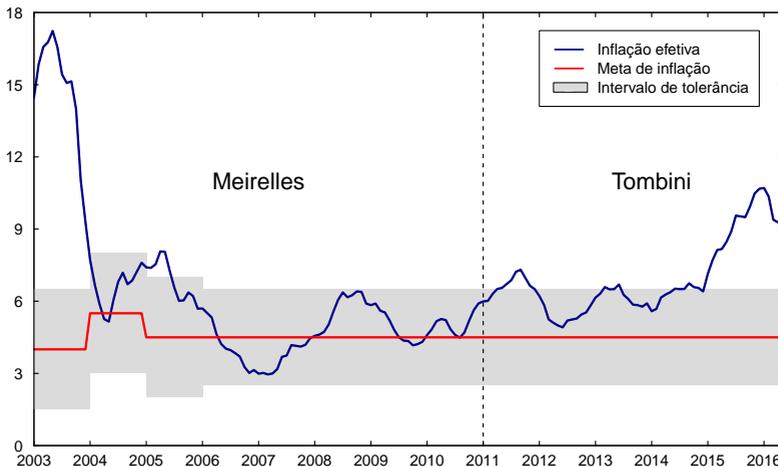
Segundo Cogley, Primiceri e Sargent (2010), em muitos trabalhos relacionados ao tema de política monetária ótima se assume que o Banco Central procura minimizar uma função de perda que inclui - dentre outras variáveis - o hiato da inflação, implicando numa política ótima na qual a inflação tende a voltar à meta de longo prazo do Banco Central. Desta forma, pode-se definir a persistência do hiato da inflação como o tempo que demora para os efeitos de um choque na inflação se dissiparem, possibilitando que se faça uma análise a respeito da velocidade e da eficácia com a qual o Banco Central traz a inflação de volta à meta desejada. Ascari e Sbordone (2014) argumentam que o grau de persistência do hiato da inflação é um fator importante na determinação da condução da política monetária, uma vez que a informação a respeito do tempo que irá demorar para a inflação atingir um novo equilíbrio, após um choque, pode ajudar a autoridade monetária a ajustar seus instrumentos de política econômica a fim de atingir seus objetivos.

---

<sup>1</sup>Ver, por exemplo, Cogley e Sbordone (2008), Cogley, Primiceri e Sargent (2010) e Cogley, Matthes e Sbordone (2015).

No Brasil, desde a adoção do Sistema de Metas de Inflação (SMI) como diretriz de política monetária, em junho de 1999, o Conselho Monetário Nacional (CMN) é o órgão responsável por definir – e anunciar publicamente – uma meta explícita para a inflação<sup>2</sup>. O Banco Central do Brasil (BACEN), então, fica responsável por conduzir a política monetária, a fim de atingir os objetivos delineados pelo CMN. Nos primeiros anos de vigência do SMI, com Armínio Fraga como presidente do BACEN, houve contínuas mudanças na meta fixada pelo CMN, o que não impediu que a inflação ficasse fora do intervalo de tolerância da meta em 2001 e 2002. O período posterior, entretanto, foi caracterizado por uma maior estabilidade da inflação.

Figura 1: Inflação efetiva e meta de inflação no período jan/2003 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria a partir de dados do BACEN.

Notas: Inflação efetiva calculada a partir da taxa acumulada de 12 meses do IPCA.

O sucessor de Armínio Fraga foi Henrique Meirelles, que permaneceu no cargo de presidente do BACEN de janeiro de 2003 a dezembro

<sup>2</sup>A Resolução Nº 2.615, de 30 de junho de 1999, do BACEN, definiu o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), como o índice de preços relacionado às metas para a inflação, sendo que a meta se refere à inflação acumulada no ano.

de 2010. Apesar de a inflação ter ficado acima do teto da meta em seu primeiro ano de mandato, ela apresentou um rápido declínio no decorrer de 2003, como apresentado na figura 1. Após esse processo inicial de desinflação, houve uma estabilidade da inflação até o término de sua gestão, com a meta sendo cumprida em todos os anos, de 2004 a 2010.

Em janeiro de 2011, Alexandre Tombini sucedeu a Henrique Meirelles à frente do BACEN, assumindo o cargo de presidente da instituição. Durante a sua gestão, a inflação apresentou um comportamento bem distinto daquele observado no período de Meirelles. A inflação acumulada de 12 meses esteve acima do centro da meta durante todo o mandato de Tombini. Esta trajetória crescente da inflação culminou, em 2015, no descumprimento da meta. Naquele ano, a inflação ficou em 10,7%, bem acima dos 6,5%, fixado como limite superior do intervalo de tolerância. O mandato de Tombini acabou em junho de 2016, quando foi substituído por Ilan Goldfajn.

Com o objetivo de analisar se as mudanças ocorridas na inflação brasileira, entre as gestões de Meirelles (2003-2010) e de Tombini (2011-2016), também implicaram em mudanças nas propriedades latentes da inflação, estima-se um modelo de vetores autorregressivos com parâmetros variantes no tempo e com volatilidade estocástica (TVP-VAR). O TVP-VAR é estimado com métodos Bayesianos, sendo utilizado para fazer inferências a respeito de três características da dinâmica inflacionária: tendência, volatilidade e persistência do hiato da inflação.

Após a análise com o TVP-VAR, estima-se um modelo *Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE) Novo Keynesiano, com o objetivo de explorar as causas estruturais dessas mudanças nas propriedades latentes da inflação, com ênfase na persistência do hiato. Desta forma, a partir de exercícios contrafactuais entre as duas gestões, pretende-se inferir se estas variações na dinâmica inflacionária foram causadas por fatores relacionados à condução da política monetária de cada período ou se elas estão associadas a fatores alheios à política seguida pelo BACEN – por exemplo, alterações na persistência e/ou variância dos choques externos.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2 é apresentada a revisão da literatura. O capítulo 3 descreve a especificação e estimação do modelo TVP-VAR, bem como os resultados das estimativas para a tendência, volatilidade e persistência do hiato da inflação, obtidos a partir dessa abordagem. No capítulo 4 é apresentada a estrutura e a forma de estimação do modelo DSGE, assim como as estimativas dos parâmetros estruturais, das pro-

priedades da inflação e dos resultados de exercícios contrafactuais entre as gestões de Meirelles e de Tombini. No capítulo 5 são apresentadas as conclusões da dissertação.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Mudanças na política monetária afetam, também, os fundamentos que determinam a dinâmica inflacionária, por isso é importante distinguir se a persistência na inflação efetiva resulta de movimentos na tendência – associada à meta de longo prazo do Banco Central – ou no hiato da inflação (ASCARI; SBORDONE, 2014). Isto posto, Cogley e Sbordone (2008) enfatizam que é importante modelar a evolução da tendência da inflação em estudos sobre dinâmica inflacionária, de modo a possibilitar que se faça inferência sobre o quanto da persistência na inflação efetiva pode ser atribuída à persistência no hiato da inflação e o quanto pode ser atribuída à persistência na tendência.

Diversas formas de estimar a persistência da inflação efetiva foram apresentadas na literatura. A persistência incondicional está relacionada a análises univariadas, ou seja, quando apenas a série de inflação é utilizada na estimação do modelo. Já a persistência condicional é quando a estimativa é condicionada a outras variáveis. Cecchetti e Debelle (2006) e Pivetta e Reis (2007) estimam a persistência da inflação efetiva a partir de modelos autorregressivos univariados, utilizando diversas métricas de análise: a maior raiz autorregressiva, a soma dos coeficientes autorregressivos e a meia-vida implicada pelo modelo. Porém, segundo Ascari e Sbordone (2014), é importante analisar a dinâmica inflacionária em um contexto multivariado, de modo a relacionar as mudanças nas propriedades da inflação com a evolução da política monetária.

Em Cogley e Sbordone (2008), os autores estimaram uma versão da Curva de Phillips Novo Keynesiana (CPNK) em termos de uma aproximação log-linear em torno de uma tendência da inflação variante no tempo para os Estados Unidos. Eles concluíram que a persistência na inflação efetiva decorre, principalmente, de mudanças na tendência da inflação – atribuídas a alterações na política monetária – não havendo necessidade, portanto, de incluir termos de indexação *backward-looking* para explicar a dinâmica inflacionária. No caso, o modelo puramente *forward-looking* proposto pelos autores consegue gerar persistência na inflação efetiva, dado que as variações na tendência alteram os pesos relativos dos custos marginais presentes e futuros na CPNK. Conforme a tendência da inflação aumenta, os pesos nos termos *forward-looking* aumentam, enquanto que os pesos no custo marginal presente diminuem.

Em Chan, Clark e Koop (2018), os autores desenvolveram um modelo para analisar a relação entre a inflação efetiva e as expectativas de inflação, com o intuito de avaliar se as expectativas de longo prazo

derivadas de pesquisas com profissionais poderiam ajudar a obter estimativas mais precisas para a tendência da inflação dos Estados Unidos. Em suma, os resultados indicaram que a inclusão dessas expectativas no modelo de fato ajudaram a melhorar as estimativas da tendência da inflação, tal que o modelo apresentou um bom ajuste aos dados. Chan, Clark e Koop (2018) observaram, também, um viés histórico entre a tendência da inflação estimada e as expectativas retiradas das pesquisas, uma vez que a tendência se mostrou relativamente estável e abaixo das expectativas. Por fim, os autores mostraram que as previsões do modelo desenvolvido por eles são mais consistentes com o objetivo de longo prazo do *Federal Reserve System* (FED) para a inflação do que as derivadas de um modelo com especificação similar ao de Stock e Watson (2007).

Em relação às estimativas da persistência do hiato da inflação, elas são obtidas, usualmente, a partir de modelos TVP-VAR, tais como em Cogley e Sargent (2005), Cogley, Primiceri e Sargent (2010), Cogley, Matthes e Sbordone (2015) e Petrova (2018). Em estudos deste tipo, utilizam-se diversas formas para o cálculo do grau de persistência: variância do erro de previsão, análise das maiores raízes do polinômio característico do modelo, espectro normalizado da inflação, dentre outros.

Há uma lacuna na literatura brasileira em relação aos trabalhos voltados à mensuração da persistência do hiato da inflação, sendo que dos poucos estudos que procuram estimar a persistência, nenhum deles foca no hiato, e sim na inflação efetiva. Nestes trabalhos, tais como os de Machado e Portugal (2014), Roache (2014) e Gaglianone, Guillén e Figueiredo (2015), as evidências apontam, em geral, para um declínio da persistência no período de vigência do SMI, sendo que este padrão desaparece quando séries para expectativas são incluídas na análise. Isto posto, há uma grande limitação na interpretação dos resultados destes estudos, uma vez que não se consegue distinguir se a persistência da inflação decorre de choques exógenos ou se são resultantes de mudanças na política econômica da autoridade monetária (alterações na meta de longo prazo do Banco Central para a inflação).

### 3 DINÂMICA INFLACIONÁRIA

Apresenta-se, neste capítulo, a especificação e forma de estimação do modelo TVP-VAR utilizado neste trabalho. As estimativas da tendência, volatilidade e persistência do hiato da inflação, obtidas através deste modelo, são apresentadas na seção 3.4.

#### 3.1 MODELO TVP-VAR

O TVP-VAR é um modelo multivariado que permite analisar a evolução da dinâmica conjunta de séries temporais, sendo que tanto os coeficientes autorregressivos quanto a matriz de covariância podem variar no tempo. As mudanças nos coeficientes possibilitam analisar a ocorrência de possíveis relações não-lineares entre as séries, assim como variações na estrutura de defasagem do modelo ao longo do tempo. Já a volatilidade estocástica multivariada, estimada a partir da matriz de covariância, viabiliza explorar efeitos heterocedásticos dos choques, bem como não-linearidades nas relações contemporâneas entre as variáveis. Desta forma, o modelo permite fazer uma distinção se as variações, no tempo, decorrem de mudanças nos mecanismos de propagação (coeficientes autorregressivos) ou na magnitude dos choques (volatilidade estocástica).

Com base em Primiceri (2005), o modelo TVP-VAR pode ser representado na forma de espaço de estados, sendo que, para  $t = 1, \dots, T$ , se assume que a equação de medida segue um processo autorregressivo de ordem finita:

$$y_t = B_{0,t}C_t + B_{1,t}y_{t-1} + \dots + B_{p,t}y_{t-p} + u_t, \quad u_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega_t), \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{N}(\cdot)$  denota uma distribuição normal;  $y_t$  é um vetor  $n \times 1$  de variáveis endógenas observadas;  $B_{0,t}$  é uma matriz  $n \times c$  de coeficientes variantes no tempo que multiplicam a matriz  $C_t$ , de dimensão  $c \times 1$ , que contém  $c$  variáveis determinísticas;  $B_{i,t}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , são matrizes  $n \times n$  de coeficientes variantes no tempo que multiplicam os valores defasados de  $y_t$ ; e  $u_t$  são choques heterocedásticos não observáveis, com matriz de covariância  $\Omega_t$ . Considerando a fatoração triangular de  $\Omega_t$ , com

$u_t = A_t^{-1} \Sigma_t \varepsilon_t$ , onde  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, I_n)^1$  são os choques estruturais, tem-se:

$$\Omega_t = A_t^{-1} \Sigma_t \Sigma_t' (A_t^{-1})', \quad (3.2)$$

onde  $\Sigma_t$  é uma matriz contendo os desvios-padrão dos choques estruturais em  $t$  em sua diagonal principal, tal que  $\Sigma_t = \text{diag}(\sigma_{j,t})$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ ; e  $A_t$  é uma matriz triangular inferior contendo os coeficientes de relações contemporâneas:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21,t} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1,t} & \cdots & \alpha_{nn-1,t} & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando (3.2), a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$y_t = X_t' B_t + A_t^{-1} \Sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

onde  $X_t' := I_n \otimes [C_t', y_{t-1}', \dots, y_{t-p}']^2$  e

$B_t := [\text{vec}(B_{0,t})', \text{vec}(B_{1,t})', \dots, \text{vec}(B_{p,t})']'$  são matrizes com dimensões  $n \times k$  e  $k \times 1$ , respectivamente, com  $k = c \cdot n + pn^2$ . Empilhando os elementos de  $A_t$  diferentes de 0 e de 1 pelas linhas, tal que  $\mathcal{A}_{i,t} := [\alpha_{i+1,1,t}, \alpha_{i+1,2,t}, \dots, \alpha_{i+1,it}]'$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , define-se o sistema de equações de transição de estados do TVP-VAR como:

$$B_t = B_{t-1} + \eta_t^B, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{A}_{i,t} = \mathcal{A}_{i,t-1} + \eta_{i,t}^A, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.5)$$

$$\log(\sigma_{j,t}) = \log(\sigma_{j,t-1}) + \eta_{j,t}^\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Assumindo que os choques do modelo têm distribuição normal multivariada, define-se sua matriz de covariância como:

$$V = \text{Var} \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t^B \\ \eta_t^A \\ \eta_t^\sigma \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Q}_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{Q}_\sigma \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde  $\eta_t^\sigma := [\eta_{1,t}^\sigma, \eta_{2,t}^\sigma, \dots, \eta_{n,t}^\sigma]'$ ;  $\eta_t^A := [\eta_{1,t}^A, (\eta_{2,t}^A)', \dots, (\eta_{n-1,t}^A)']'$ ; e

<sup>1</sup> $I_n$  denota uma matriz identidade de ordem  $n$ .

<sup>2</sup> $\otimes$  denota o produto Kronecker.

$\mathcal{Q}_A$  é uma matriz bloco-diagonal, tal que  $\mathcal{Q}_A = \text{diag}(\mathcal{Q}_{1,A}, \mathcal{Q}_{2,A}, \dots, \mathcal{Q}_{n-1,A})$ , com  $\mathcal{Q}_{i,A} = \text{var}(\eta_{i,t}^A)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , sendo que  $\mathcal{Q}_B$ ,  $\mathcal{Q}_A$  e  $\mathcal{Q}_\sigma$  são matrizes positiva definidas<sup>3</sup>.

A escolha por modelar  $B_t$  e  $\mathcal{A}_t$  como passeios aleatórios, e os termos  $\sigma_{j,t}$  como passeios aleatórios geométricos, é usual na literatura<sup>4</sup>, permitindo que sejam captadas tanto mudanças temporárias quanto mudanças permanentes nos parâmetros (NAKAJIMA, 2011). Isto posto, segundo Canova e Forero (2015), a estrutura definida em (3.4)-(3.6) permite analisar variações no tempo de diversas formas: (i) na estrutura de defasagem (ver 3.4); (ii) nas relações contemporâneas (ver 3.5); e (iii) nas variâncias estruturais (ver 3.6).

### 3.2 ESTIMAÇÃO DO MODELO

Os modelos TVP-VAR com volatilidade estocástica podem ser representados como modelos de espaço de estados não-lineares e diversos métodos foram desenvolvidos para estimá-los (NAKAJIMA, 2011). Moura e Noriller (2019) propuseram estimar um modelo dessa classe via máxima verossimilhança, especificando uma estrutura de volatilidade estocástica multivariada para a matriz  $\Omega_t$ , modelada como um processo Wishart. Já Primiceri (2005) e Cogley, Primiceri e Sargent (2010) utilizaram algoritmos de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) para estimar o TVP-VAR, definindo processos univariados para as volatilidades estocásticas do modelo (assim como em 3.6).

Ao levar em consideração a restrição de estabilidade<sup>5</sup>, para cada período do tempo, o problema de estimação do TVP-VAR é análogo ao de estimar um modelo de espaço de estados sujeito a restrições de desigualdade. Para lidar com esta questão, dois métodos foram propostos na literatura. O primeiro deles, utilizado em Cogley e Sargent

---

<sup>3</sup>A especificação de  $V$  como uma matriz bloco-diagonal pode ser justificada por dois motivos, segundo Primiceri (2005): (i) como o modelo já tem um grande número de parâmetros, a adição de mais parâmetros fora da diagonal principal poderia gerar estimativas pouco plausíveis; (ii) uma estrutura genérica de correlação, entre as diversas fontes de incerteza, dificultaria a interpretação a respeito dos choques estruturais.

<sup>4</sup>Ver, por exemplo, Primiceri (2005), Cogley, Primiceri e Sargent (2010), Koop e Potter (2011) e Petrova (2018).

<sup>5</sup>De forma análoga a um modelo VAR linear, o TVP-VAR será um processo estável se todas as raízes do polinômio  $\psi(\zeta) = \det(I_n - \sum_{i=1}^p \zeta^i B_{i,t})$  estiverem fora do círculo unitário complexo, para  $t = 1, 2, \dots, T$ . A restrição de estabilidade do TVP-VAR é uma condição necessária para que seja possível calcular as estatísticas da inflação derivadas deste modelo, definidas na seção 3.4.

(2005), consiste em utilizar um algoritmo padrão – de Carter e Kohn (1994), por exemplo – para amostrar  $B^T := \{B_t\}_{t=1}^T$  de um TVP-VAR sem restrições. Se pelo menos um  $B_t$  violar a condição de estabilidade, então todo o vetor amostrado é descartado; se todos os  $B_t$  atenderem à restrição, então  $B^T$  é aceito<sup>6</sup>. Uma possível complicação na aplicação deste método ocorre se a taxa de rejeição de  $B^T$  for alta. Desta forma, o tempo para amostrar apenas  $B^T$  que satisfazem a restrição pode ser tão alto que é praticamente impossível estimar o TVP-VAR em um tempo razoável (Koop; POTTER, 2011).

O segundo método, proposto por Koop e Potter (2011), se baseia na utilização de um algoritmo *Metropolis Hastings* (MH) *single-move* para amostrar  $B^T$ . Segundo Koop e Potter (2011), este método apresenta duas vantagens em relação ao primeiro: (i) ao amostrar um  $B_t$  a cada vez, aceitando-o com certa probabilidade se a restrição for satisfeita, o algoritmo se torna menos propenso a ficar “trancado”, ou seja, rejeitar sucessivamente os parâmetros amostrados em decorrência de eles não atenderem à restrição; (ii) utiliza a forma correta para a probabilidade de aceitação do MH, ao invés da aproximação utilizada em Cogley e Sargent (2005). Deste modo, utiliza-se neste trabalho o algoritmo MCMC proposto por Koop e Potter (2011) para simular a densidade conjunta a posteriori dos parâmetros do TVP-VAR, possibilitando que se proceda com uma inferência Bayesiana em relação ao modelo.

Considerando os vetores  $\mathcal{A}_t := [\mathcal{A}_{1,t}, (\mathcal{A}_{2,t})', \dots, (\mathcal{A}_{n-1,t})']'$  e  $\sigma_t := [\sigma_{1,t}, \sigma_{2,t}, \dots, \sigma_{n,t}]'$ , e as seqüências de vetores  $A^T := \{\mathcal{A}_t\}_{t=1}^T$  e  $\Sigma^T := \{\sigma_t\}_{t=1}^T$ , então o conjunto de todos os parâmetros do TVP-VAR pode ser denotado como:  $\psi := \{B^T, A^T, \Sigma^T, \mathcal{Q}_B, \mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_\sigma\}$ . Com  $p(\cdot)$  denotando, genericamente, uma função densidade de probabilidade, considera-se  $p(\psi)$  uma determinada densidade a priori para os parâmetros desconhecidos. Seja  $y^T := \{y_t\}_{t=1}^T$  o conjunto de dados, então define-se a função de verossimilhança como  $L(y^T|\psi)$ . Deste modo, a densidade a posteriori dos parâmetros,  $p(\psi|y^T)$ , pode ser obtida via o

<sup>6</sup>Uma estratégia de estimação alternativa consistiria, para um dado período  $t$ , amostrar  $B_t$  até que a condição de estabilidade fosse satisfeita. Porém, segundo Koop e Potter (2011), este procedimento não iria gerar uma amostra válida para ser utilizada na simulação da distribuição a posteriori dos parâmetros do TVP-VAR. Um algoritmo padrão envolve amostrar  $B_t$  de uma distribuição  $\mathcal{N}(\mu_B, V_B)$ , sendo que a derivação da fórmula para calcular  $\mu_B$  e  $V_B$  se baseia no fato do erro na equação de transição de estados ter uma distribuição normal. Entretanto, com a imposição da restrição de estabilidade, o erro na equação de transição de estados não segue mais uma distribuição normal, de modo que as derivações do algoritmo utilizado na amostragem de  $B_t$  não são mais válidas, ou seja, não é possível simplesmente amostrar  $B_t$  de uma distribuição normal truncada no espaço paramétrico que satisfaz a restrição de desigualdade.

Teorema de Bayes:

$$p(\psi|y^T) = \frac{L(y^T|\psi)p(\psi)}{\int L(y^T|\psi)p(\psi)d\psi} \propto L(y^T|\psi)p(\psi).$$

O algoritmo MCMC consiste em amostrar, recursivamente, da densidade a posteriori condicional de dimensões menores, ao invés de amostrar da densidade a posteriori de alta dimensão, relativa a todo o espaço paramétrico. Ou seja, o problema original de estimação é dividido em blocos menores, sendo que cada um deles é relacionado a determinado grupo de parâmetros.

Com base em Koop e Potter (2011) e Primiceri (2005), define-se a estrutura do algoritmo MCMC utilizado para simular a densidade a posteriori dos parâmetros do TVP-VAR da seguinte forma:

1. **Inicializar  $B^T$ ,  $A^T$ ,  $\Sigma^T$  e  $V$ .**

2. **Amostrar  $B^T$  de  $p(B^T | y^T, A^T, \Sigma^T, V)$ :** Denotando a densidade condicional de  $B_t$  em relação aos outros parâmetros, sem impor restrições de estabilidade, como  $p_U(B_t | y^T, B_{-t}, A^T, \Sigma^T, V)$ , onde  $B_{-t} := [B'_1, \dots, B'_{t-1}, B'_{t+1}, \dots, B'_T]'$ , tem-se:

$$\begin{aligned} p_U(B_t | y^T, B_{-t}, A^T, \Sigma^T, V) &\propto \\ &\exp\left[-\frac{1}{2}(B_{t-1} - B_t)' Q_B (B_{t-1} - B_t)\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}(B_{t+1} - B_t)' Q_B (B_{t+1} - B_t)\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2}(y_t - X'_t B_t)' \Omega_t (y_t - X'_t B_t)\right], \end{aligned}$$

para  $t = 1, 2, \dots, T-1$ . Portanto,  $B_t$  tem uma densidade condicional Normal dada por:

$$B_t | y^T, B_{-t}, A^T, \Sigma^T, V \sim \mathcal{N}(\mu_t, \mathcal{H}_t),$$

onde:

$$\mu_t = \begin{cases} \frac{B_{t-1} + B_{t+1}}{2} + G_t \left[ y_t - X'_t \left( \frac{B_{t-1} + B_{t+1}}{2} \right) \right], & t < T \\ B_{t-1} + G_t (y_t - X'_t B_{t-1}), & t = T \end{cases}$$

$$G_t = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \mathcal{Q}_B X_t (X_t' \mathcal{Q}_B X_t + \Omega_t)^{-1} \right], & t < T \\ \mathcal{Q}_B X_t (X_t' \mathcal{Q}_B X_t + \Omega_t)^{-1}, & t = T \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_t = \begin{cases} \frac{1}{2} (I_k - G_t X_t') \mathcal{Q}_B, & t < T \\ (I_k - G_t X_t') \mathcal{Q}_B, & t = T. \end{cases}$$

Já a densidade condicional de  $B_t$  com a restrição de estabilidade, denotada como  $p_R(\cdot)$ , é dada por:

$$p_R(B_t | y^T, B_{-t}, A^T, \Sigma^T, V) \propto \frac{\mathcal{I}(\rho(\Phi_{1,t}^*) < 1)}{\lambda(B_t, \mathcal{Q}_B)} \times p_U(B_t | y^T, B_{-t}, A^T, \Sigma^T, V),$$

onde  $\Phi_{1,t}^*$ <sup>7</sup> é a matriz autorregressiva da forma compacta de  $B_t$ ;  $\mathcal{I}(\cdot)$  é uma função indicadora que assume 1 se a condição entre parênteses – raio espectral,  $\rho(\cdot)$ , da matriz  $\Phi_{1,t}^*$  menor do que 1, implicando em estabilidade do TVP-VAR em  $t$  – for satisfeita; e  $\lambda(B_t, \mathcal{Q}_B)$  é a constante de integração. Isto posto, define-se o algoritmo MH de Koop e Potter (2011), para  $t = 1, 2, \dots, T - 1$ , como:

- (a) Amostrar um vetor candidato  $B_t^* \sim \mathcal{N}(\mu_t, \mathcal{H}_t)$ .
- (b) Calcular  $\mathcal{I}(\rho(\Phi_{1,t}^*) < 1)$ .
- (c) A taxa de aceitação de  $B_t^*$ ,  $\varpi_{B,t}$ , para a  $i$ -ésima iteração do MCMC, é dada por:

$$\begin{aligned} \varpi_{B,t} &= \min \left\{ \frac{\frac{\mathcal{I}(\rho(\Phi_{1,t}^*) < 1)}{\lambda(B_t^*, \mathcal{Q}_B^{(i-1)})}}{\frac{1}{\lambda(B_t^{(i-1)}, \mathcal{Q}_B^{(i-1)})}}, 1 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\mathcal{I}(\rho(\Phi_{1,t}^*) < 1) \lambda(B_t^{(i-1)}, \mathcal{Q}_B^{(i-1)})}{\lambda(B_t^*, \mathcal{Q}_B^{(i-1)})}, 1 \right\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A constante de integração,  $\lambda(\cdot)$ , é calculada a partir da

---

<sup>7</sup>Definida de forma análoga a 3.14.

proporção de amostragens que satisfazem a restrição de desigualdade, tal que seu cômputo é feito da seguinte forma:

- i. Amostrar  $B_t^{*,l} \sim \mathcal{N}\left(B_t^*, \mathcal{Q}_B^{(i-1)}\right)$  e  $B_t^{(i-1),l} \sim \mathcal{N}\left(B_t^{(i-1)}, \mathcal{Q}_B^{(i-1)}\right)$ , para  $l = 1, 2, \dots, L^8$ .
- ii. Considerando  $\bar{B}_t^{*,l}$  e  $\bar{B}_t^{(i-1),l}$  como as matrizes autorregressivas das formas compactas de  $B_t^{*,l}$  e  $B_t^{(i-1),l}$ , respectivamente, calcular  $\lambda_l^* = \mathcal{I}\left(\rho\left(\bar{B}_t^{*,l}\right) < 1\right)$  e  $\lambda_l^{(i-1)} = \mathcal{I}\left(\rho\left(\bar{B}_t^{(i-1),l}\right) < 1\right)$ .
- iii. Para  $t = 1, 2, \dots, T - 1$ , calcular as constantes de integração  $\lambda\left(B_t^*, \mathcal{Q}_B^{(i-1)}\right) = L^{-1}\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l^*\right)$  e  $\lambda\left(B_t^{(i-1),1}, \mathcal{Q}_B^{(i-1)}\right) = L^{-1}\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l^{(i-1)}\right)$ .
- iv. Com os valores calculados no passo anterior, computar a probabilidade de aceitação  $\varpi_{B,t}$ , definida em 3.8. Para  $t = T$ , a probabilidade de aceitação é  $\varpi_{B,t} = \mathcal{I}\left(\rho\left(\bar{B}_t^{*,l}\right) < 1\right)$ .

(d) Amostrar  $v \sim U(0, 1)$ , onde  $U(\cdot)$  denota uma distribuição uniforme.

(e) Se  $\varpi_{B,t} > v$ , então definir  $B_t^{(i)} = B_t^*$ ; caso contrário, definir  $B_t^{(i)} = B_t^{(i-1)}$ .

3. **Amostrar  $A^T$  de  $p\left(A^T \mid y^T, B^T, \Sigma^T, V\right)$ :** O TVP-VAR, definido em 3.3, pode ser reescrito como:

$$A_t(y_t - X_t' B_t) = A_t \hat{y}_t = \Sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.9)$$

de modo que, tomando  $B^T$  como dado, então  $\hat{y}_t$  é observável. Considerando que  $A_t$  é uma matriz triangular inferior, com 1's na diagonal principal, reescreve-se 3.9 como:

$$\hat{y}_t = D_t \mathcal{A}_t + \Sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

---

<sup>8</sup>Assim como em Canova e Forero (2015), utiliza-se  $L = 25$ .

onde  $D_t$  é uma matriz  $n \times \frac{n(n-1)}{2}$  com a seguinte estrutura:

$$D_t = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathcal{Y}_{1,t} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathcal{Y}_{2,t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{Y}_{n-1,t} \end{bmatrix},$$

onde  $\mathcal{Y}_{i,t} := [-\hat{y}_{1,t}, -\hat{y}_{2,t}, \dots, -\hat{y}_{i,t}]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , com  $\hat{y}_{i,t}$  denotando o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{y}_t$ . Como se assume que  $\mathcal{Q}_A$  é bloco-diagonal, então o algoritmo de Carter e Kohn (1994) – ver apêndice A – pode ser utilizado para amostrar  $A^T$ , aplicando-o recursivamente a cada  $\mathcal{A}_{i,t}$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,t|t+1} &= \mathbb{E}[\mathcal{A}_{i,t} \mid \mathcal{A}_{i,t+1}, y^T, B^T, \Sigma^T, V], \\ \Lambda_{i,t|t+1} &= Var[\mathcal{A}_{i,t} \mid \mathcal{A}_{i,t+1}, y^T, B^T, \Sigma^T, V]. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{A}_{i,t}$  é amostrado recursivamente de  $p(\mathcal{A}_{i,t} \mid \mathcal{A}_{i,t+1}, y^T, B^T, \Sigma^T, V)$ , cuja distribuição é  $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{i,t|t+1}, \Lambda_{i,t|t+1})$ .

4. **Amostrar  $\Sigma^T$  de  $p(\Sigma^T \mid y^T, A^T, B^T, s^T, V)$ :** Reescrevendo 3.9 como:

$$A_t(y_t - X_t' B_t) = y_t^* = \Sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.11)$$

com  $B^T$  e  $A^T$  dados, então  $y_t^*$  é observável. Como 3.11 forma um sistema não linear de equações de medida, eleva-se ao quadrado e aplica-se o logaritmo a cada um de seus elementos, resultando em um aproximação linear para o sistema:

$$y_t^{**} = 2h_t + \eta_t^y \quad (3.12)$$

$$h_t = h_{t-1} + \eta_t^h, \quad (3.13)$$

onde  $y_{i,t}^{**} = \log \left[ (y_{i,t}^*)^2 + \bar{c} \right]$ ;  $\bar{c} = 0,001$  é uma constante utilizada pelo fato de  $(y_{i,t}^*)^2$  poder assumir um valor muito pequeno;  $\eta_{i,t}^y = \log(\varepsilon_{i,t}^2)$ ; e  $h_{i,t} = \log(\sigma_{i,t})$ . O sistema definido em (3.12)-(3.13) tem uma representação em espaço de estados linear, mas não Gaussiana, uma vez que os choques na equação de medida têm uma distribuição  $\log \chi^2(1)$  (PRIMICERI, 2005). Todavia, é possível utilizar uma mistura de distribuições normais para obter

uma aproximação da distribuição  $\log \chi^2(1)$ , a fim de transformar o sistema não Gaussiano para um Gaussiano, com o método descrito em Kim, Shephard e Chib (1998). A tabela 1 reporta as probabilidades  $q_j$ , médias  $m_j - 1, 2704$  e variâncias  $v_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 7$ , da mistura das 7 distribuições normais selecionadas.

A matriz  $s^T = [s_1, s_2, \dots, s_T]'$  contém as variáveis indicadoras que selecionam, a cada período do tempo, qual membro da mistura de normais será usada para cada elemento de  $\eta_t^y$ . Portanto, condicional a  $B^T, A^T, V$  e  $s^T$ , o sistema (3.12)-(3.13) pode ser representado a partir de uma aproximação linear Gaussiana de um modelo na forma de espaço de estados. Assim como na etapa anterior, o algoritmo de Carter e Kohn (1994) é utilizado para amostrar os parâmetros, tal que:

$$\begin{aligned} h_{t|t+1} &= \mathbb{E} [h_t \mid h_{t+1}, y^T, A^T, B^T, V, s^T], \\ H_{t|t+1} &= \text{Var} [h_t \mid h_{t+1}, y^T, A^T, B^T, V, s^T]. \end{aligned}$$

De forma recursiva,  $h_t$  é amostrado de  $p(h_t \mid h_{t+1}, y^T, A^T, B^T, V, s^T)$ , cuja distribuição é  $\mathcal{N}(h_{t|t+1}, H_{t|t+1})$ .

Tabela 1: Seleção da mistura de normais para aproximar  $\log \chi^2(1)$ .

$\omega$	$q_j = \Pr(\omega = j)$	$m_j$	$v_j^2$
1	0,00730	-10,12999	5,79596
2	0,10556	-3,97281	2,61369
3	0,00002	-8,56686	5,17950
4	0,04395	2,77786	0,16735
5	0,34001	0,61942	0,64009
6	0,24566	1,79518	0,34023
7	0,25750	-1,08819	1,26261

**Fonte:** Kim, Shephard e Chib (1998).

5. **Amostrar  $s^T$  de  $p(s^T \mid y^T, A^T, \Sigma^T, \mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_\sigma)$ :** A matriz  $s^T$  é amostrada condicional a  $y^{**T}$  e  $h^T$ , amostrando independentemente cada  $s_{i,t}$  da distribuição discreta definida em Kim, Shephard

e Chib (1998), de forma que:

$$\Pr(s_{i,t} = j \mid y_{i,t}^{**}, h_{i,t}) \propto q_j f_N(y_{i,t}^{**} \mid 2h_{i,t} + m_j - 1, 2704, v_j^2),$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$

6. **Amostrar  $\mathcal{Q}_B$  de  $p(\mathcal{Q}_B \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T)$ :** Se assume que  $\mathcal{Q}_B \sim \mathcal{IW}(\underline{\nu}_B, \underline{Q})$ , onde  $\mathcal{IW}(\cdot)$  denota uma distribuição Wishart inversa. A densidade a posteriori irrestrita é dada por  $\mathcal{Q}_B \sim \mathcal{IW}(\bar{\nu}_B, \bar{Q})$ , onde  $\bar{\nu}_B = \underline{\nu}_B + T$  e  $\bar{Q} = \underline{Q} + \sum_{t=1}^T (B_t^{(i)} - B_{t-1}^{(i)}) (B_t^{(i)} - B_{t-1}^{(i)})'$ . O algoritmo MH de Koop e Potter (2011) para amostrar  $\mathcal{Q}_B$  é definido como:

- (a) Amostrar uma matriz candidata  $\mathcal{Q}_B^* \sim \mathcal{IW}(\bar{\nu}_B, \bar{Q})$ .
- (b) Para  $t = 1, 2, \dots, T$ , calcular as constantes de integração  $\lambda(B_t^{(i)}, \mathcal{Q}^*)$  e  $\lambda(B_t^{(i)}, \mathcal{Q}^{(i-1)})$ , tal como definidas na etapa para amostrar  $B^T$ .
- (c) Calcular a probabilidade de aceitação,  $\varpi_{\mathcal{Q}}$ , com os valores obtidos no passo anterior:

$$\varpi_{\mathcal{Q}} = \min \left\{ \prod_{t=1}^T \frac{\lambda(B_t^{(i)}, \mathcal{Q}^{(i-1)})}{\lambda(B_t^{(i)}, \mathcal{Q}^*)}, 1 \right\}.$$

- (d) Amostrar  $v \sim U(0, 1)$ .
  - (e) Se  $\varpi_{\mathcal{Q}} > v$ , então definir  $\mathcal{Q}_B^{(i)} = \mathcal{Q}_B^*$ ; caso contrário,  $\mathcal{Q}_B^{(i)} = \mathcal{Q}_B^{(i-1)}$ .
7. **Amostrar  $\mathcal{Q}_\sigma$  e  $\mathcal{Q}_A$  de  $p(\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{Q}_A \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T) = p(\mathcal{Q}_\sigma \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T) \cdot p(\mathcal{Q}_{1,\mathcal{A}} \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T) \cdot p(\mathcal{Q}_{2,\mathcal{A}} \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T) \cdot p(\mathcal{Q}_{3,\mathcal{A}} \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T) \cdot \dots \cdot p(\mathcal{Q}_{n-1,\mathcal{A}} \mid \mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T, \Sigma^T)$ :** As matrizes  $\mathcal{Q}_\sigma, \mathcal{Q}_{1,\mathcal{A}}, \mathcal{Q}_{2,\mathcal{A}}, \dots, \mathcal{Q}_{n-1,\mathcal{A}}$ , que formam os blocos diagonais de  $V$ , são independentes umas das outras. Condicional a  $\mathbf{y}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T$  e  $\Sigma^T$ , cada uma delas pode ser amostrada de uma distribuição Wishart inversa, uma vez que este é o núcleo das suas distribuições condicionais a posteriori.

Foram amostradas 50.000 realizações dos parâmetros do TVP-VAR, obtidas a partir da distribuição a posteriori simulada com o

MCMC, sendo que as 25.000 primeiras foram descartadas, a fim de garantir a convergência da cadeia de Markov. O modelo foi estimado com duas defasagens, tal como em Primiceri (2005) e Cogley, Primiceri e Sargent (2010).

Muitos estudos que analisam a dinâmica inflacionária dos Estados Unidos utilizam um modelo TVP-VAR com três variáveis<sup>9</sup>: PIB (ou taxa de desemprego), índice de preços ao consumidor (ou deflator do PIB) e taxa de juros. No caso do Brasil, os estudos de Modenesi, Luporini e Pimentel (2017), Marodin e Portugal (2018) e Lima, Martinez e Cerqueira (2018) apresentaram evidências de que a taxa de câmbio pode ter um papel relevante na dinâmica inflacionária. Em vista disso, a série da taxa de câmbio também é considerada na estimação do TVP-VAR, com o intuito de levar em consideração a influência do setor externo na evolução das propriedades latentes da inflação.

A base de dados utilizada para estimar o TVP-VAR é constituída de quatro séries temporais, em frequência mensal, sendo que o período amostral se estende de jul/1999 a jun/2016, representando um total de 204 observações para cada série:

- **Inflação:** variação mensal do IPCA, calculada pelo IBGE.
- **Taxa de juros:** taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (SELIC) para títulos federais, fixada pelo Comitê de Política Monetária (COPOM), disponível em frequência diária. Os dados são convertidos em frequência mensal ao se calcular a média correspondente da série em cada mês. Após isto, transforma-se as taxas anualizadas nas taxas mensalizadas correspondentes.
- **PIB:** composta de duas séries. De jul/1999 a jan/2003 utiliza-se a série da taxa de crescimento do PIB mensal produzida pelo BACEN, deflacionada pelo IPCA. Esta série não é calculada a partir de informações primárias, e sim via interpolação dos valores trimestrais do PIB oficial já divulgados ou dos projetados. De fev/2003 a jun/2016 é utilizada a série da taxa de crescimento do IBC-Br, que é o indicador mensal da atividade econômica nacional produzido pelo BACEN. A série do PIB mensal é utilizada apenas na definição das distribuições a priori dos parâmetros (ver seção 3.3), sendo que o IBC-Br é que de fato é utilizado na estimação do TVP-VAR.

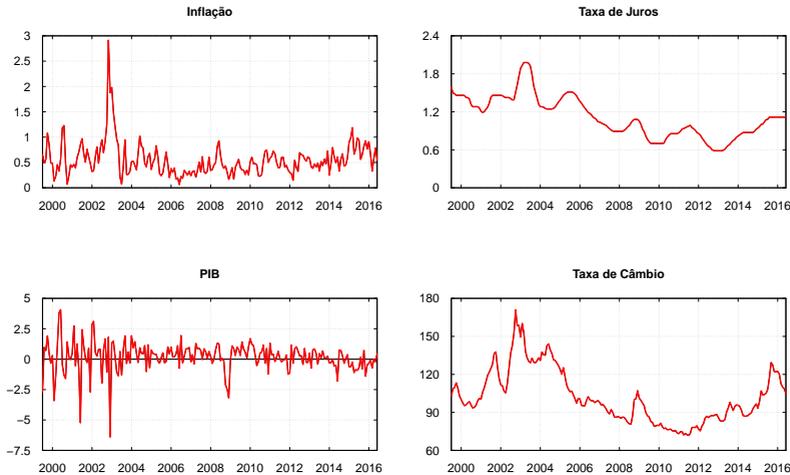
---

<sup>9</sup>Ver, por exemplo, Primiceri (2005), Cogley e Sargent (2005) e Cogley, Primiceri e Sargent (2010)

- **Taxa de câmbio:** índice de taxa de câmbio real efetiva, produzida pelo BACEN. Calculada a partir de diversos índices de taxa de câmbio real, ponderando as variações das moedas e preços em cada país incluído na cesta de países pela participação individual de cada país no comércio bilateral dentro da cesta de referência.

Com exceção da taxa de juros, todas as séries foram ajustadas sazonalmente<sup>10</sup>, sendo obtidas através do Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS) do Banco Central<sup>11</sup>. Os códigos no SGS, da inflação, taxa de juros, PIB mensal, IBC-Br e taxa de câmbio são, respectivamente: 433, 432, 4380, 24364 e 11752. O gráfico 2 apresenta as quatro séries temporais utilizadas na estimação do TVP-VAR, após a aplicação de todas as transformações:

Figura 2: Séries temporais utilizadas na estimação do TVP-VAR, no período de jul/1999 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria a partir de dados do BACEN.

<sup>10</sup>O ajuste sazonal foi realizado com o método X-13ARIMA-SEATS, disponível em <https://www.census.gov/srd/www/x13as/>.

<sup>11</sup>Disponível em <https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries>.

### 3.3 DISTRIBUIÇÕES A PRIORI

Com base em Primiceri (2005), resume-se as distribuições a priori com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}
 B_0 &\sim \mathcal{N}(\hat{B}_{MQO}, 4 \cdot \text{Var}(\hat{B}_{MQO})), \\
 A_0 &\sim \mathcal{N}(\hat{A}_{MQO}, 4 \cdot \text{Var}(\hat{A}_{MQO})), \\
 \log \sigma_0 &\sim \mathcal{N}(\log \hat{\sigma}_{MQO}, I_n), \\
 Q_B &\sim \mathcal{IW}(k_B^2 \cdot 43 \cdot \text{Var}(\hat{B}_{MQO}), 43), \\
 Q_{1,\alpha} &\sim \mathcal{IW}(k_Q^2 \cdot 2 \cdot \text{Var}(\hat{A}_{1,MQO}), 2), \\
 Q_{2,\alpha} &\sim \mathcal{IW}(k_Q^2 \cdot 3 \cdot \text{Var}(\hat{A}_{2,MQO}), 3), \\
 Q_{3,\alpha} &\sim \mathcal{IW}(k_Q^2 \cdot 4 \cdot \text{Var}(\hat{A}_{3,MQO}), 4), \\
 Q_\sigma &\sim \mathcal{IW}(k_\sigma^2 \cdot 4 \cdot I_n, 4).
 \end{aligned}$$

Foram utilizados dados de anos anteriores à gestão de Meirelles (43 observações, de jul/1999 a jan/2003) para calibrar as distribuições a priori<sup>12</sup>. Desta forma, utilizam-se as estimativas de mínimos quadrados ordinários (MQO) de um VAR linear com dados deste período inicial para a definição dos hiperparâmetros das distribuições a priori. Os graus de liberdade para  $Q_B$  foram definidos para 43, dado que este é o tamanho da amostra inicial utilizada para a obtenção das estimativas de MQO. As demais escolhas seguem Primiceri (2005), com  $k_B = 0,01$ ,  $k_Q = 0,1$  e  $k_\sigma = 0,01$ , de modo a se obter distribuições a priori difusas e não informativas, com o intuito de que a posteriori seja dominada pelos dados.

### 3.4 RESULTADOS

Analisa-se, nesta seção, os resultados obtidos a partir do TVP-VAR estimado. Com o objetivo de explorar a evolução das propriedades latentes da inflação, apresentam-se mensurações para a tendência, volatilidade e persistência do hiato da inflação. Utiliza-se a forma compacta do TVP-VAR para calcular estas estimativas, uma vez que este é um modo mais conveniente de extrair análises do modelo. Isto posto, a

---

<sup>12</sup>A fim de utilizar apenas a série do IBC-Br, e não a do PIB mensal, para a estimativa do modelo, exclui-se o mês de janeiro de 2003 da parte de estimação, servindo apenas para a etapa de definição das distribuições a priori.

equação 3.3 pode ser reescrita como:

$$z_t = \Phi_{0,t} + \Phi_{1,t}z_{t-1} + \vartheta_t, \quad \vartheta_t \sim \mathcal{N}(0, \Psi_t), \quad (3.14)$$

onde:

$$z_t := \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \\ (n \cdot p \times 1) \end{bmatrix}; \quad \Phi_{0,t} := \begin{bmatrix} B_{0,t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (n \cdot p \times 1) \end{bmatrix};$$

$$\Phi_{1,t} := \begin{bmatrix} B_{1,t} & B_{2,t} & \dots & B_{p-1,t} & B_{p,t} \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \\ & & & & (n \cdot p \times n \cdot p) \end{bmatrix}; \quad \vartheta_t := \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (n \cdot p \times 1) \end{bmatrix}.$$

Assumindo que o TVP-VAR seja estável, tal que  $\rho(\Phi_{1,t}) < 1$ , para  $t = 1, 2, \dots, T$ , então o TVP-VAR pode ser aproximado<sup>13</sup>, a cada período do tempo, por um processo VMA( $\infty$ )<sup>14</sup>:

$$z_t = (I_{n \cdot p} - \Phi_{1,t})^{-1} \Phi_{0,t} + \sum_{h=0}^{\infty} (\Phi_{1,t})^h \vartheta_{t-h}. \quad (3.15)$$

### 3.4.1 Tendência da Inflação

Assim como em Cogley, Primiceri e Sargent (2010), define-se a tendência da inflação como o valor esperado da inflação no longo prazo, após os choques de curto prazo terem se dissipados. A tendência da inflação, portanto, pode ser interpretada como sendo a meta de longo prazo do Banco Central, uma vez que reflete apenas os componentes persistentes da inflação, associados à política monetária. Desta forma, ela é calculada a partir da aproximação da média incondicional de  $z_t$ ,

<sup>13</sup>Assim como em Cogley, Primiceri e Sargent (2010) e Petrova, Matthes e Liu (2018), se assume, também, que os parâmetros se manterão em seus valores correntes para o cômputo das previsões das séries.

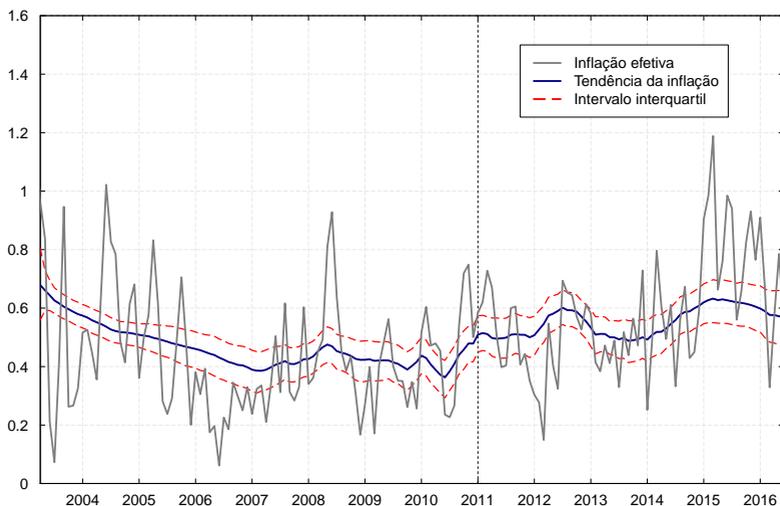
<sup>14</sup>Sigla para Vetor de Médias Móveis.

dada por:

$$\bar{z}_t = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t[z_{t+j}] \approx (I_{n,p} - \Phi_{1,t})^{-1} \Phi_{0,t}. \quad (3.16)$$

A figura 3 apresenta a evolução da mediana e do intervalo interquartil de credibilidade da tendência da inflação, calculados a partir da distribuição a posteriori dos parâmetros, bem como a inflação efetiva mensal. A figura 4 também apresenta a tendência, porém, transformando as taxas mensais para taxas anuais e comparando-a com a inflação efetiva acumulada de 12 meses. Em linhas gerais, percebe-se que a mediana da tendência da inflação apresentou um declínio durante a gestão de Meirelles. A tendência anualizada caiu de 8,5%, em abril de 2003, para 4,7%, em março de 2007. Depois, se manteve estável, flutuando em torno de 5% até o final de 2010.

Figura 3: Inflação efetiva e tendência da inflação no período de abr/2003 a jun/2016.



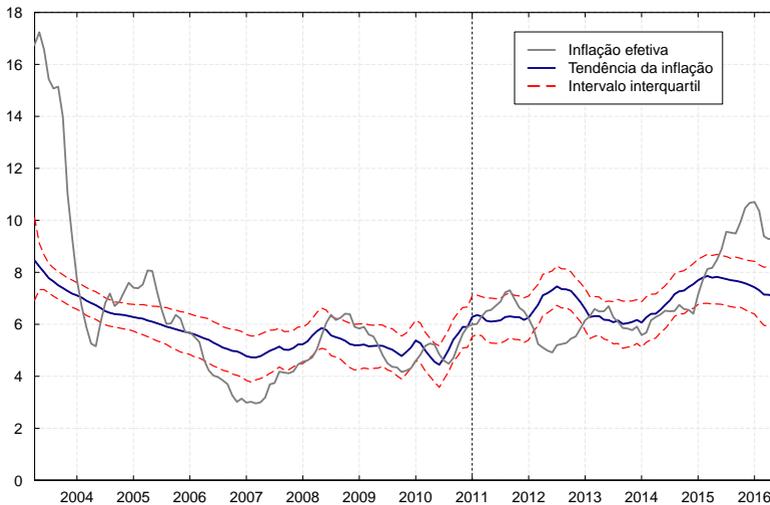
Fonte: Elaboração própria.

Notas: Inflação efetiva calculada a partir da variação mensal do IPCA. A linha pontilhada vertical preta indica o início da gestão de Tombini.

Na gestão de Tombini, por outro lado, a tendência apresentou um aumento, passando de 6,3%, em janeiro de 2011, para 7,5%, em

julho de 2012. Após cair para 6,0%, em setembro de 2013, houve um novo aumento, com a tendência anualizada chegando a 7,9% março de 2015. Os resultados apontam, portanto, para uma possível mudança no comportamento da autoridade monetária, indicando que o BACEN passara a ter uma meta de inflação mais alta, em comparação com a meta da gestão de Meirelles.

Figura 4: Inflação acumulada de 12 meses e tendência anualizada da inflação no período de abr/2003 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria.

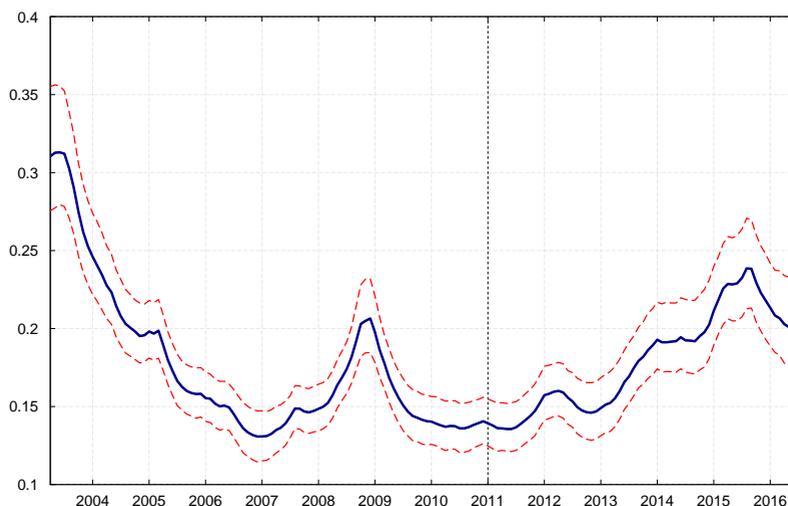
Notas: Inflação efetiva calculada a partir da taxa acumulada de 12 meses do IPCA. A linha pontilhada vertical preta indica o início da gestão de Tombini.

### 3.4.2 Volatilidade da Inflação

A figura 5 apresenta a evolução da mediana e do intervalo interquartil de credibilidade da volatilidade da inflação, calculada em termos do desvio padrão dos choques da inflação. Os resultados apontam para um declínio da volatilidade no período de Meirelles, porém, com um aumento durante o período da crise de 2008-09. A mediana da volatilidade

caiu de 0,31, em abril de 2003, para 0,13, em dezembro de 2006, ou seja, uma queda de 58% neste período. No final da gestão de Meirelles a volatilidade estava em 0,14. Durante o mandato de Tombini, aconteceu o oposto, tal que a volatilidade apresentou uma trajetória crescente. De janeiro de 2011 a agosto de 2015 a volatilidade passou de 0,14 para 0,24, resultando em um aumento de 71%.

Figura 5: Volatilidade da inflação no período de abr/2003 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria.

Notas: A linha azul representa a mediana do desvio padrão dos choques da inflação. As linhas vermelhas representam os 25º e 75º percentis, calculados a partir da distribuição a posteriori dos parâmetros. A linha pontilhada vertical preta indica o início da gestão de Tombini.

### 3.4.3 Persistência do Hiato da Inflação

Segundo Ascari e Sbordone (2014), a previsibilidade da inflação é afetada tanto por mudanças na volatilidade quanto por mudanças na persistência. Já Stock e Watson (2007), ao analisarem a previsibilidade da inflação dos Estados Unidos, concluíram que, por um lado, ela ficou mais previsível, já que a variância dos choques diminuiu, mas

por outro lado, ela ficou menos previsível, já que a inflação futura se tornou menos correlacionada com a inflação passada e outras variáveis. Isto posto, com base em Cogley, Primiceri e Sargent (2010), calcula-se a persistência do hiato da inflação em termos de sua previsibilidade, utilizando uma medida que considera tanto a volatilidade quanto a estrutura de defasagem do modelo.

Definindo o hiato das variáveis como  $\widehat{z}_t = z_t - \bar{z}_t$ , tem-se  $\Phi_{1,t}^j \widehat{z}_t$  como sendo a previsão  $j$  passos à frente de  $\widehat{z}_t$ . A variância do erro de previsão, portanto, pode ser aproximada como:

$$var_t(\widehat{z}_{t+j}) \approx \sum_{h=0}^{j-1} (\Phi_{1,t})^h \Psi_t \left[ (\Phi_{1,t})^h \right]'. \quad (3.17)$$

Ao se tomar o limite da variância condicional à medida que o horizonte de previsão  $j$  aumenta, calcula-se a variância incondicional aproximada de  $\widehat{z}_t$  como:

$$var(\widehat{z}_t) \approx \sum_{h=0}^{\infty} (\Phi_{1,t})^h \Psi_t \left[ (\Phi_{1,t})^h \right]'. \quad (3.18)$$

Para se mensurar a persistência no período  $t$ , calcula-se a fração da variação total do hiato da inflação,  $j$  períodos à frente de  $t$ , que se deve somente aos choques passados. Esta definição é equivalente a um menos a proporção da variação total devida somente aos choques futuros. Além disto, como o erro de previsão é determinado por choques futuros, torna-se possível definir a medida de persistência do hiato em termos da razão entre a variância do erro de previsão condicional (equação 3.17) e a variância do erro de previsão incondicional (equação 3.18):

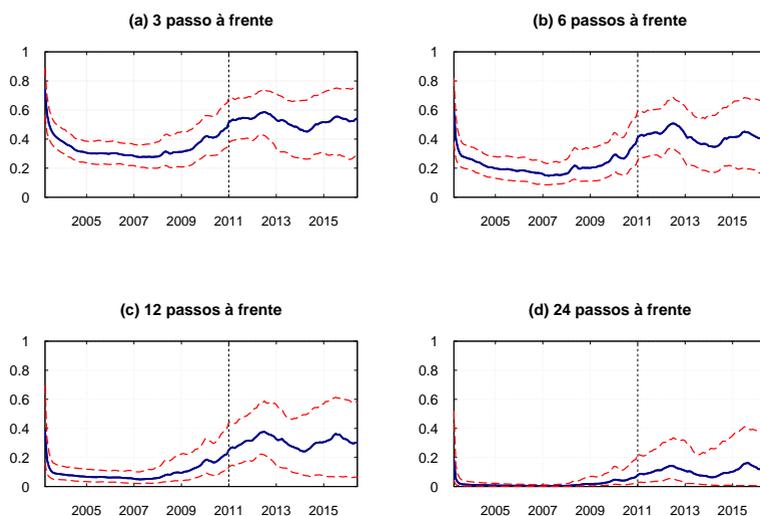
$$\begin{aligned} R_{j,t}^2 &= 1 - \frac{var_t(e_\pi \widehat{z}_{t+j})}{var(e_\pi \widehat{z}_t)} \\ &\approx 1 - \frac{e_\pi \left\{ \sum_{h=0}^{j-1} (\Phi_{1,t})^h \Psi_t \left[ (\Phi_{1,t})^h \right]'\right\} e_\pi'}{e_\pi \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\Phi_{1,t})^h \Psi_t \left[ (\Phi_{1,t})^h \right]'\right\} e_\pi'}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $e_\pi$  é um vetor de seleção para a variável de inflação. Sendo o  $R_{j,t}^2$  análoga à estatística de  $R^2$  para previsões<sup>15</sup>  $j$  períodos à frente, tem-se

<sup>15</sup>Como enfatizado por Cogley, Primiceri e Sargent (2010), a estatística de  $R_{j,t}^2$  fornece, na verdade, “pseudo-previsões”, em vista do fato de não envolver problemas relacionados a previsões em tempo real no seu cômputo. Como o objetivo deste trabalho é o de fazer uma análise retrospectiva da dinâmica inflacionária, e não um

que  $0 \leq R_{j,t}^2 \leq 1$ , com  $\lim_{j \rightarrow \infty} R_{j,t}^2 = 0$ , para  $t = 1, 2, \dots, T$ . Portanto, a velocidade de convergência de  $R_{j,t}^2$  reflete o grau de persistência do hiato. Desta forma, valores altos do  $R_{j,t}^2$  – próximos a 1 – implicam que os choques passados demoram a se dissipar, fazendo com que o hiato da inflação seja mais persistente e, logo, mais previsível também. A figura 6 mostra a evolução da mediana e do intervalo interquartil das estatísticas de  $R_{j,t}^2$ , para  $j = 3, 6, 12$  e 24 meses à frente.

Figura 6: Estatísticas de  $R_{j,t}^2$  no período de abr/2003 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria.

Notas: A linha azul representa a mediana da estatística de  $R_{j,t}^2$ . As linhas vermelhas representam os 25<sup>o</sup> e 75<sup>o</sup> percentis, calculados a partir da distribuição a posteriori dos parâmetros. A linha pontilhada vertical preta indica o início da gestão de Tombini.

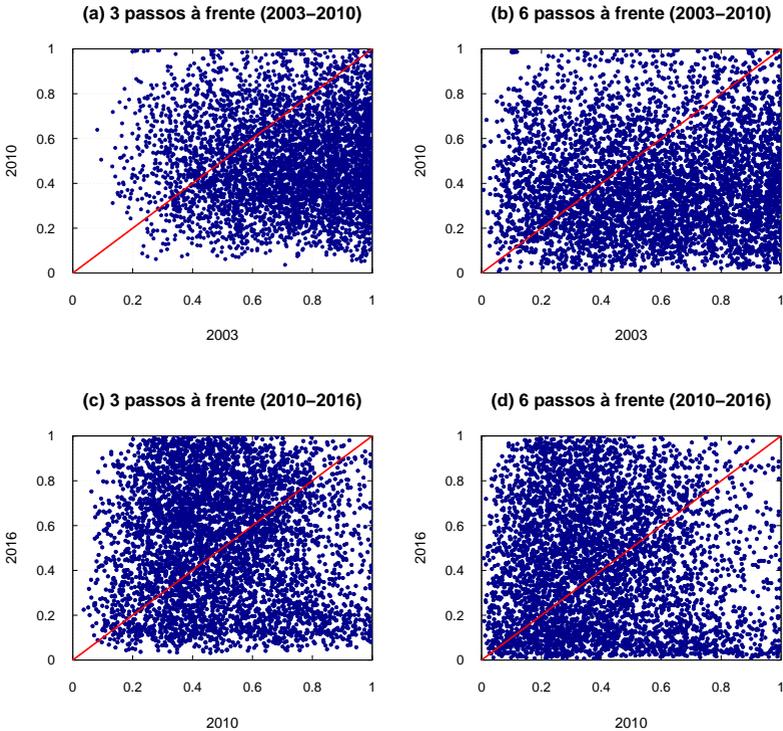
Observa-se, primeiramente, que para os quatro horizontes considerados a evolução do  $R_{j,t}^2$  apresenta um formato similar. Apesar da persistência ser alta no começo de 2003 ela decresce rapidamente, retomando uma trajetória crescente a partir de meados de 2008. Durante o

---

exercício de previsão da inflação, utiliza-se toda a amostra para o cálculo de cada um dos parâmetros (as estimativas são suavizadas, e não filtradas).

período de Tombini, há uma queda do  $R_{j,t}^2$  após 2013, seguida de um novo aumento. As evidências, portanto, apontam para um aumento da persistência do hiato da inflação, dado que ela ficou num patamar mais alto na gestão de Tombini do que na de Meirelles.

Figura 7: Distribuição conjunta das estatísticas de  $R_{j,t}^2$  para os pares 2003-2010 e 2010-2016.



Fonte: Elaboração própria.

Notas: Cada ponto, em cada painel, representa uma amostragem da distribuição conjunta a posteriori referente aos anos nos eixos da abscissa e da ordenada. A linha vermelha forma um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo da abscissa.

Seguindo Cogley, Primiceri e Sargent (2010), com o objetivo de inferir a respeito da significância estatística da aparente mudança na persistência do hiato da inflação, procede-se a uma análise da distribuição conjunta a posteriori de  $(R_{j,t}^2, R_{j\tau}^2)$ , para os pares das estatísticas

nos períodos  $(t, \tau)$ . Dos muitos pares possíveis de serem analisados, escolhem-se dois deles: abr/2003 - dez/2010 e dez/2010 - jun/2016, fixando  $j = 3$  e 6. Desta forma, compara-se a distribuição conjunta das estatísticas de  $R_{j,t}^2$  do início e do final de cada um dos mandatos. A partir do pares  $(R_{3,2003}^2, R_{3,2010}^2)$  e  $(R_{6,2003}^2, R_{6,2010}^2)$ , verifica-se se houve mudanças da persistência do hiato durante o mandato de Meirelles. A fim de comparar a significância estatística entre os dois mandatos, analisam-se o pares  $(R_{3,2010}^2, R_{3,2016}^2)$  e  $(R_{6,2010}^2, R_{6,2016}^2)$ , ou seja, os finais dos dois mandatos.

A figura 7 apresenta a distribuição conjunta dos pares considerados. Os pontos perto da linha vermelha ( $45^\circ$ ) representam pares para os quais houve pouca ou nenhuma mudança entre os anos considerados em cada painel. Desta forma, definindo genericamente o ano da abscissa do gráfico como  $x$  e o da ordenada como  $y$ , ocorre uma queda na previsibilidade ( $R_{3,y}^2 < R_{3,x}^2$ ) se o ponto amostrado da distribuição conjunta estiver abaixo da linha vermelha. De modo análogo, diz-se que há aumento da previsibilidade ( $R_{3,y}^2 > R_{3,x}^2$ ) se o ponto estiver acima desta linha.

Nos painéis (a) e (b), da figura 7, ao se analisar o início e o final do mandato de Meirelles, observa-se que há uma aparente concentração maior abaixo da linha de  $45^\circ$ , ou seja, possível diminuição da previsibilidade de 2003 para 2010. Nos painéis (c) (d), que comparam os anos finais dos períodos de Meirelles e de Tombini, não se verificam grandes indícios de mudanças, havendo uma aparente concentração maior acima da linha de  $45^\circ$ , ou seja, possível aumento da previsibilidade em 2016, comparado com 2010.

Tabela 2: Probabilidade de mudança do  $R_{j,t}^2$  para os pares 2003-2010 e 2010-2016.

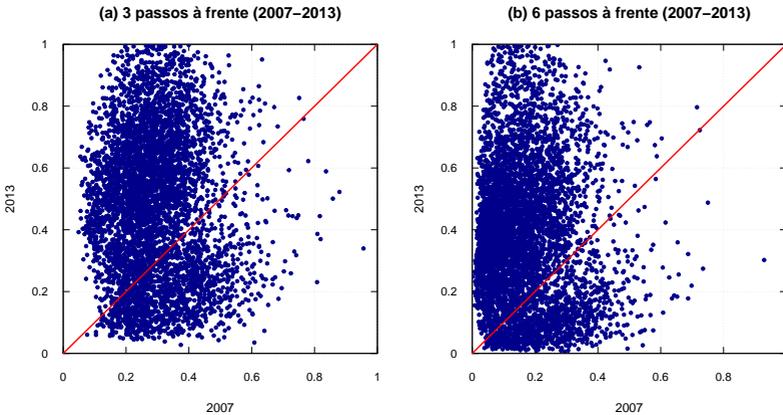
Pares	3 passos	6 passos	12 passos	24 passos
	à frente	à frente	à frente	à frente
2003-2010	23,2	29,8	35,4	35,5
2010-2016	54,7	54,4	56,4	55,1

Fonte: Elaboração própria.

Uma outra forma de analisar se houve mudanças na previsibilidade do hiato é através do cálculo da proporção das amostragens de cada  $R_{j,t}^2$  a posteriori que estão acima da linha de  $45^\circ$  da figura 7.

Analisa-se, deste modo, a probabilidade de ter havido um aumento de  $R_{j,t}^2$  entre 2003 e 2010 e entre 2010 e 2016. A tabela 2 reporta estas probabilidades, para  $j = 3, 6, 12$  e 24 meses.

Figura 8: Distribuição conjunta das estatísticas de  $R_{j,t}^2$  para o par 2007-2013.



Fonte: Elaboração própria.

Notas: Cada ponto, em cada painel, representa uma amostragem da distribuição conjunta a posteriori referente aos anos nos eixos da abcissa e da ordenada. A linha vermelha forma um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo da abcissa.

Analisando a primeira linha da tabela 2, observa-se que a probabilidade da previsibilidade do hiato da inflação ter aumentado, de 2003 a 2010, está perto de 23% para  $j = 3$ , sendo que não passa de 36% para qualquer horizonte analisado. Tal como exibido no gráfico 7, as evidências apontam para uma queda do  $R_{j,t}^2$  durante o período de Meirelles. Na segunda linha, nota-se que a probabilidade do  $R_{j,t}^2$  ter aumentado do período de Meirelles para o de Tombini chega a um máximo de 56% para  $j = 12$ , ficando próxima a 55% para os outros horizontes. Há, portanto, fortes indícios de queda da persistência durante o mandato de Meirelles. Entretanto, o mesmo não pode ser dito para o período de Tombini, dado o baixo valor das probabilidades (perto de 50%).

Como o  $R_{j,t}^2$  é calculado a partir de estimativas suavizadas dos parâmetros, ou seja, considerando todo o conjunto de informações da amostra, os valores de  $R_{j,2010}^2$  podem estar sofrendo bastante influência

do período de Tombini. Portanto, analise-se também os pares no meio de cada uma das gestões (fev/2007 e set/2013), a fim de mitigar este possível problema. O intuito é avaliar se as probabilidades de mudança entre as duas gestões também serão baixas nesta nova análise. Definindo o par  $(R_{2,2007}^2, R_{9,2013}^2)$ , procede-se à mesma análise realizada anteriormente. O gráfico 8 apresenta a distribuição conjunta deste par e a tabela 3 as probabilidades de mudança. Percebe-se que há uma visível concentração dos pontos acima da linha de 45º, indicando um aumento da persistência, de 2007 a 2013. Isto pode ser confirmado ao analisar as probabilidades de mudança, tal que elas apresentam valores acima de 70% para todos os horizontes considerados.

Tabela 3: Probabilidade de mudança do  $R_{j,t}^2$  para o par 2007-2013.

Par	3 passos à frente	6 passos à frente	12 passos à frente	24 passos à frente
2007-2013	72,6	76,7	77,8	78,4

Fonte: Elaboração própria.

As evidências empíricas apresentadas neste capítulo, derivadas do modelo TVP-VAR, apresentaram mudanças nas propriedades latentes da inflação brasileira entre as gestões de Meirelles e de Tombini. Em suma, tanta a tendência quanto a volatilidade e a persistência do hiato da inflação exibiram um aumento entre os dois períodos. A tendência da inflação, mensurada a partir da aproximação da média incondicional da inflação a cada período do tempo, ficou em um patamar próximo a 5,0% na segunda metade da gestão de Meirelles, sendo que no período de Tombini ela chegou a 7,9%. Já a volatilidade da inflação, calculada a partir do desvio padrão dos choques da inflação, apresentou um declínio de 58% de 2003 a 2006, fechando o período de Meirelles em 0,13. No período de Tombini, entretanto, a volatilidade passou de 0,14 para 0,24, resultando em um aumento de 71%. A persistência do hiato da inflação, mensurada em termos de sua previsibilidade, apresentou um aumento entre as duas gestões, para todos os horizontes considerados, sendo que este aumento se mostrou significativo, segundo a análise da distribuição conjunta dos pares das estatísticas de  $R_{j,t}^2$  entre as duas gestões.



## 4 ANÁLISE ESTRUTURAL

Os resultados obtidos no capítulo anterior indicaram que houve uma possível mudança na dinâmica inflacionária brasileira, sendo que tanto a tendência quanto a volatilidade e a persistência do hiato da inflação apresentaram evidências de aumento, do período de Meirelles para o de Tombini. Entretanto, não foi possível realizar inferências a respeito das causas destas mudanças a partir dos resultados obtidos com o TVP-VAR. Em decorrência disto, estima-se um mesmo modelo DSGE Novo Keynesiano a partir de uma partição da amostra – uma sub-amostra para o período de Meirelles e outra para o de Tombini – com o objetivo de analisar quais os fundamentos econômicos que podem explicar estas alterações nas propriedades da inflação indicadas pelo modelo TVP-VAR. Através do DSGE pretende-se, portanto, apresentar uma explicação estrutural para as evidências de aumento da tendência e da volatilidade, bem como investigar possíveis alterações da persistência do hiato da inflação entre os mandatos de Meirelles e de Tombini. Apresenta-se, neste capítulo, a estrutura do DSGE, bem como a forma de estimação do modelo e as distribuições a priori escolhidas para os parâmetros estruturais. Os resultados derivados deste modelo são apresentados na seção 4.5.

### 4.1 MODELO DSGE

O modelo é baseado principalmente em Kam, Lees e Liu (2009), mas também inclui características de Ireland (2007), Cogley, Primiceri e Sargent (2010) e Bhattacharai, Lee e Park (2016). O objetivo é definir uma estrutura de pequena economia aberta para o DSGE. O modelo incorpora rigidez nominal de preços, bem como indexação das inflações doméstica e importada aos seus valores passados e à inflação no estado estacionário. Inclui-se, também, uma meta de inflação variante no tempo na especificação da Regra de Taylor da autoridade monetária, bem como choques de custos domésticos e externos.

### 4.1.1 Família Representativa

A família representativa do modelo maximiza a seguinte função de utilidade intertemporal:

$$\max \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{(C_t - H_t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{L_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \right\}, \quad (4.1)$$

onde  $\beta \in (0, 1)$  é o fator de desconto intertemporal;  $C_t$  é a cesta de bens de consumo;  $H_t = hC_{t-1}$  é o consumo passado, tal que  $h \in (0, 1)$  é o grau de persistência dos hábitos externos de consumo;  $\sigma$  é o inverso da elasticidade de substituição intertemporal;  $L_t$  é a oferta de trabalho; e  $\varphi$  é o inverso da elasticidade Frisch de oferta de trabalho. O consumo agregado  $C_t$  é definido como uma função de elasticidade de substituição constante:

$$C_t = \left[ (1 - \alpha)^{\frac{1}{\eta}} (C_{H,t})^{\frac{\eta-1}{\eta}} + \alpha^{\frac{1}{\eta}} (C_{F,t})^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha \in [0, 1]$  é o grau de abertura econômica e  $\eta > 0$  é a elasticidade de substituição entre os bens domésticos e importados. Os termos  $C_{H,t}$  e  $C_{F,t}$  são agregados Dixit-Stiglitz dos bens domésticos e estrangeiros, respectivamente, definidos como:

$$C_{H,t} = \left[ \int_0^1 C_{H,t}(i)^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta}} di \right]^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}; \quad C_{F,t} = \left[ \int_0^1 C_{F,t}(i)^{\frac{\vartheta-1}{\vartheta}} di \right]^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}. \quad (4.3)$$

onde  $\vartheta > 0$  é a elasticidade de substituição entre os bens de cada categoria (domésticos e importados). A alocação ótima dos gastos da família representativa entre os diferentes tipos de bens resulta nas funções de demanda:

$$C_{H,t}(i) = \left( \frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t}} \right)^{-\vartheta} C_{H,t}; \quad C_{F,t}(i) = \left( \frac{P_{F,t}(i)}{P_{F,t}} \right)^{-\vartheta} C_{F,t}, \quad (4.4)$$

para todo  $i \in [0, 1]$ , sendo que os níveis de preços agregado são definidos como:

$$P_{H,t} = \left[ \int_0^1 P_{H,t}(i)^{1-\vartheta} di \right]^{\frac{1}{1-\vartheta}}; \quad P_{F,t} = \left[ \int_0^1 P_{F,t}(i)^{1-\vartheta} di \right]^{\frac{1}{1-\vartheta}}. \quad (4.5)$$

A demanda ótima de consumo de bens domésticos e estrangeiros pode ser escrita como:

$$C_{H,t} = (1 - \alpha) \left( \frac{P_{H,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t; \quad C_{F,t} = \alpha \left( \frac{P_{F,t}}{P_t} \right)^{-\eta} C_t, \quad (4.6)$$

onde  $P_t$  é o índice de preços ao consumidor doméstico:

$$P_t = \left[ (1 - \alpha) (P_{H,t})^{1-\eta} + \alpha (P_{F,t})^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}. \quad (4.7)$$

O consumo total da família representativa é dado por  $P_{H,t}C_{H,t} + P_{F,t}C_{F,t} = P_t C_t$ . Desta forma, pode-se definir a seqüência de restrições orçamentárias aos quais a família representativa está sujeita como:

$$P_t C_t + \mathbb{E}_t [Q_{t,t+1} B_{t+1}] \leq B_t + W_t L_t + T_t, \quad (4.8)$$

onde  $B_{t+1}$  é o juros pago em  $t + 1$  pelo portfólio alocado ao final do período  $t$ ;  $Q_{t,t+1}$  é o fator de desconto estocástico, sendo inversamente proporcional à taxa de juros bruta de um título sem risco de maturidade de um período, tal que  $\mathbb{E}_t [Q_{t,t+1}] = R_t^{-1}$ .  $W_t$  é o salário ganho pelo trabalho ofertado  $L_t$ ; e  $T_t$  são as transferências governamentais e impostos do tipo *lump-sum*.

A condição intratemporal que relaciona oferta de trabalho e salários reais deve satisfazer:

$$(C_t - H_t)^\sigma L_t^\varphi = \frac{W_t}{P_t}. \quad (4.9)$$

A condição intertemporal ótima para o problema de maximização da família representativa é dada por:

$$\beta \left( \frac{C_{t+1} - H_{t+1}}{C_t - H_t} \right)^{-\sigma} \left( \frac{P_t}{P_{t+1}} \right) = Q_{t,t+1} \quad (4.10)$$

e, tomando-se as expectativas condicionais, tem-se a equação de Euler:

$$\beta R_t \mathbb{E}_t \left[ \left( \frac{C_{t+1} - H_{t+1}}{C_t - H_t} \right)^{-\sigma} \left( \frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right] = 1. \quad (4.11)$$

### 4.1.2 Risco Internacional e Preços Relativos

O resto do mundo, denotado pelos parâmetros e variáveis com asterisco, está sujeito a problemas similares aos da economia aberta. Tanto a condição ótima intratemporal, definida por 4.9, quanto a intertemporal, dada por 4.10, também valem para o resto do mundo. Portanto, assumindo preferências globais idênticas e mercados internacionais completos, obtém-se o compartilhamento de riscos perfeito:

$$\begin{aligned} Q_{t,t+1} &= \beta \left( \frac{C_{t+1} - H_{t+1}}{C_t - H_t} \right)^{-\sigma} \left( \frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \\ &= \beta \left( \frac{C_{t+1}^* - H_{t+1}^*}{C_t^* - H_t^*} \right)^{-\sigma} \left( \frac{P_t^*}{P_{t+1}^*} \right) \left( \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_{t+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\mathcal{E}_t$  é a taxa câmbio nominal. Já a taxa de câmbio real é dada por:

$$Q_t = \mathcal{E}_t \frac{P_t^*}{P_t}. \quad (4.13)$$

Considerando a ausência de choques de preferência para o resto do mundo, bem como assumindo países idênticos, tem-se:

$$C_t - hC_{t-1} = \varpi^* (C_t^* - hC_{t-1}^*) Q_t^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad (4.14)$$

onde  $\varpi^* = 1$  implica em simetria entre os países e participação nula de ativos estrangeiros líquidos.

Denotando  $\hat{c}_t := \ln(C_t/\bar{C})$ ,  $\hat{y}_t^* := \ln(Y_t^*/\bar{Y}^*) = \ln(C_t^*/\bar{C}^*)$  e  $\hat{q}_t := \ln(Q_t^*/\bar{Q}^*)$  como os desvios, em termos percentuais, do consumo doméstico, produto internacional e taxa de câmbio real de seus respectivos estados estacionários – variáveis com a barra em cima – então a aproximação log-linear de 4.14 resulta em:

$$\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1} = \hat{y}_t^* - h\hat{y}_{t-1}^* + \frac{1-h}{\sigma} \hat{q}_t. \quad (4.15)$$

A suposição de mercados completos, portanto, implica que o consumo global será perfeitamente correlacionado na ausência desvios taxa de câmbio real em relação ao seu estado estacionário.

A condição da paridade descoberta da taxa de juros pode ser

derivada de 4.12, tal que:

$$R_t - R_t^* \left( \frac{\mathcal{E}_{t+1}}{\mathcal{E}_t} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Fazendo a aproximação log-linear de 4.16, e tomando as expectativas em  $t$ , tem-se a condição de paridade da taxa de juros nominal:

$$\mathbb{E}_t [\hat{e}_{t+1}] - \hat{e}_t = \hat{r}_t - \hat{r}_t^*, \quad (4.17)$$

onde  $\hat{e}_t := \ln(\mathcal{E}_t/\bar{\mathcal{E}})$ ,  $\hat{r}_t := \ln(R_t/\bar{R})$  e  $\hat{r}_t^* := \ln(R_t^*/\bar{R}^*)$  são os desvios de cada uma das variáveis em relação ao seu respectivo estado estacionário. Os termos de troca,  $S_t$ , são definidos como a razão entre os índices de preços estrangeiro e doméstico, sendo que sua forma log-linear é dada por:

$$s_t = p_{F,t} - p_{H,t}. \quad (4.18)$$

### 4.1.3 Firmas

Há um *continuum* de firmas domésticas produtoras, indexadas por  $i \in [0, 1]$ , em concorrência monopolística, produzindo bens substitutos entre si, mas com algum grau de diferenciação, e firmas importadoras, indexadas por  $j \in [0, 1]$ , que adicionam *mark-up* para os bens importados aos preços do resto do mundo.

#### 4.1.3.1 Firmas Domésticas

As firmas domésticas utilizam uma função de produção linear,  $Y_{H,t} = \varepsilon_{a,t} L_t(i)$ , onde  $\varepsilon_{a,t}$  é um choque exógeno doméstico tecnológico. Tal como em Calvo (1983), há uma probabilidade de  $1 - \theta_H$  das firmas, a cada período do tempo, conseguirem reajustar seus preços para o preço desejado. Em relação à fração restante das firmas,  $\theta_H \in (0, 1)$ , seguindo Bhattarai, Lee e Park (2016), se assume que as elas indexam parte de seus preços à inflação passada doméstica e parte à inflação do estado estacionário:

$$P_{H,t}(i) = P_{H,t-1}(i) \left( \frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t-2}} \right)^{\delta_H} \bar{\Pi}^{1-\delta_H}, \quad (4.19)$$

onde  $\delta_H \in [0, 1]$  é o grau de indexação e  $\bar{\Pi}$  é a taxa bruta de inflação agregada no estado estacionário<sup>1</sup>. Como não há assimetria de informação entre as firmas, ou seja, ou todas elas recebem um mesmo sinal para reajustar seus preços ou não recebem nenhum sinal, todas elas escolherão a mesma estratégia para os preços. Portanto, a dinâmica de evolução dos preços domésticos é dada por:

$$P_{H,t} = \left\{ (1 - \theta_H) \left( P_{H,t}^\dagger \right)^{1-\vartheta} + \theta_H \left[ P_{H,t-1} \left( \frac{P_{H,t-1}}{P_{H,t-2}} \right)^{\delta_H} \bar{\Pi}^{1-\delta_H} \right]^{1-\vartheta} \right\}^{\frac{1}{1-\vartheta}}, \quad (4.20)$$

onde  $P_{H,t}^\dagger$  é o preço ótimo desejado pelas firmas domésticas produtoras.

Para uma dada firma  $i$ , que reajustou de forma ótima seus preços em  $t$  para  $P_{H,t}(i)$ , e supondo que em  $t + s$ ,  $s \geq 0$ , o preço  $P_{H,t}$  ainda esteja em vigência, então a demanda pela produção desta firma será:

$$Y_{H,t+s}(i) = \left[ \frac{P_{H,t}(i)}{P_{H,t+s}} X_{t,s}^H \right]^{-\vartheta} (C_{H,t+s} + C_{H,t+s}^*), \quad (4.21)$$

onde:

$$X_{t,s}^H = \begin{cases} \left( \frac{P_{H,t+s-1}}{P_{H,t-1}} \right)^{\delta_H} \bar{\Pi}^{(1-\delta_H)s}, & s \geq 1 \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

As firmas que ajustam seus preços procuram escolher o preço ótimo  $P_{H,t}^\dagger$  que maximiza a esperança do valor presente de seus lucros futuros que serão gerados enquanto o preço se mantiver fixo, tal que a firma candidata  $i$  resolve o seguinte problema:

$$\max_{\{P_{H,t}^\dagger(i)\}} \mathbb{E}_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} Q_{t,t+s} \theta_H^s Y_{H,t+s}(i) \left[ P_{H,t}^\dagger(i) X_{t,s}^H - \dots \right. \right. \quad (4.22) \\ \left. \left. \dots - P_{H,t+s} MC_{H,t+s} \exp(\varepsilon_{H,t+s}) \right] \right\},$$

respeitando a restrição de demanda em 4.21 e a restrição tecnológica dada pelo custo marginal real:

$$MC_{H,t+s} = \frac{W_{t+s}}{\varepsilon_{a,t+s} P_{H,t+s}}. \quad (4.23)$$

<sup>1</sup>Segundo Junicke (2017), se assume que os preços dos bens importados crescem à mesma taxa dos bens produzidos pelas firmas domésticas no estado estacionário, tal que  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_H = \bar{\Pi}_F$ .

O termo  $\varepsilon_{H,t+s} \sim i.i.d. (0, \sigma_H)$  representa um choque no custo marginal real, podendo ser interpretado como um choque de custos para as firmas domésticas. A condição de primeira ordem do problema em 4.22 é dada por:

$$\mathbb{E}_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} Q_{t,t+s} \theta_H^s Y_{H,t+s}(i) \left[ P_{H,t}^\dagger X_{t,s}^H - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta - 1} \right) P_{H,t+s}(i) MC_{H,t+s} \exp(\varepsilon_{H,t+s}) \right] \right\} = 0. \quad (4.24)$$

Os desvios em relação ao estado estacionário, em termos percentuais, do produto doméstico e do custo marginal real são definidos como  $\hat{y}_t := \ln(Y_t/\bar{Y})$  e  $\hat{m}c_{H,t} := \ln(MC_{H,t}/\bar{MC})$ , respectivamente. A taxa de inflação doméstica é definida como  $\pi_{H,t} := \ln(P_{H,t}/P_{H,t-1})$ . Isto posto, a aproximação log-linear da decisão ótima de preço das firmas, definida em 4.24, resulta na Curva de Phillips para a inflação doméstica:

$$\hat{\pi}_{H,t} = \delta_H \hat{\pi}_{H,t-1} + \beta (\mathbb{E}_t [\hat{\pi}_{H,t+1}] + \hat{\pi}_{H,t}) + \lambda_H (\hat{m}c_{H,t} + \varepsilon_{H,t}), \quad (4.25)$$

onde  $\hat{\pi}_{H,t} := \pi_{H,t} - \bar{\pi}$  é o desvio da inflação doméstica em relação ao seu estado estacionário, tal que  $\bar{\pi} = \ln(\bar{\Pi})$ , e:

$$\lambda_H = (1 - \beta\theta_H)(1 - \theta_H)\theta_H^{-1}, \\ \hat{m}c_{H,t} = \varphi \hat{y}_t - (1 + \varphi)\varepsilon_{a,t} + \alpha s_t + \frac{\sigma}{1-h} (\hat{y}_t^* - h\hat{y}_{t-1}^*) + \hat{q}_t.$$

#### 4.1.3.2 Firms Importadoras

As firmas importadoras do modelo importam bens a preços mundiais competitivos. Entretanto, elas enfrentam uma estrutura de concorrência monopolística ao revenderem esses bens no país doméstico. Isto implica em uma diferença entre o preço dos bens importados em moeda nacional e o preço doméstico dos produtos importados. Portanto, essa diferença em relação à lei do preço único, em termos log-lineares, pode ser expressa como:

$$\psi_{F,t} = \hat{c}_t + p_t^* - p_{F,t}. \quad (4.26)$$

A dinâmica de preços importados é similar a dos preços domésticos, tal que:

$$P_{F,t} = \left\{ (1 - \theta_F) \left( P_{F,t}^\dagger \right)^{1-\vartheta} + \theta_F \left[ P_{F,t-1} \left( \frac{P_{F,t-1}}{P_{F,t-2}} \right)^{\delta_F} \bar{\Pi}^{1-\delta_F} \right]^{1-\vartheta} \right\}^{\frac{1}{1-\vartheta}}. \quad (4.27)$$

A restrição de demanda enfrentada pela firma importadora  $j$  em  $t + s$ ,  $s \geq 0$ , é dada por:

$$Y_{F,t+s}(i) = \left[ \frac{P_{F,t}(i)}{P_{F,t+s}} X_{t,s}^F \right]^{-\vartheta} (C_{F,t+s} + C_{F,t+s}^*), \quad (4.28)$$

onde:

$$X_{t,s}^F = \begin{cases} \left( \frac{P_{F,t+s-1}}{P_{F,t-1}} \right)^{\delta_F} \bar{\Pi}^{(1-\delta_F)s}, & s \geq 1 \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

O problema de maximização das firmas importadoras é análoga ao das firmas domésticas, uma vez que a firma candidata  $j$  resolve o problema:

$$\max_{\{P_{F,t}^\dagger(j)\}} \mathbb{E}_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} Q_{t,t+s} \theta_F^s Y_{F,t+s}(j) \left[ P_{F,t}^\dagger(j) X_{t,s}^F - \dots \right. \right. \quad (4.29) \\ \left. \left. \dots - \mathcal{E}_{t+s} P_{F,t+s} \exp(\varepsilon_{F,t+s}) \right] \right\},$$

sujeita a restrição de demanda definida em 4.28. Assim como no problema das firmas domésticas, define-se  $\varepsilon_{F,t} \sim i.i.d. (0, \sigma_F)$  como um choque nos custos marginais das firmas importadoras, de forma a afetar os preços mundiais do bem  $j$ . A condição de primeira ordem de 4.29 resulta em:

$$\mathbb{E}_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} Q_{t,t+s} \theta_F^s Y_{F,t+s}(j) \left[ P_{F,t}^\dagger X_{t,s}^F - \dots \right. \right. \quad (4.30) \\ \left. \left. \dots - \left( \frac{\vartheta}{\vartheta - 1} \right) \mathcal{E}_{t+s} P_{F,t+s}(j) \exp(\varepsilon_{F,t+s}) \right] \right\} = 0.$$

Com a taxa de inflação importada sendo definida como  $\pi_{F,t} := \ln(P_{F,t}/P_{F,t-1})$ , então a aproximação log-linear de 4.30 pode ser ex-

pressa como:

$$\hat{\pi}_{F,t} = \delta_F \hat{\pi}_{F,t-1} + \beta (\mathbb{E}_t [\hat{\pi}_{F,t+1}] + \hat{\pi}_{F,t}) + \lambda_F (\psi_{F,t} + \varepsilon_{F,t}), \quad (4.31)$$

onde  $\hat{\pi}_{F,t} := \pi_{F,t} - \bar{\pi}$  é o desvio da inflação importada em relação ao seu estado estacionário e  $\lambda_F = (1 - \beta\theta_F)(1 - \theta_F)\theta_F^{-1}$ .

#### 4.1.4 Política Monetária

Com base em Cogley, Primiceri e Sargent (2010), se assume que a autoridade monetária define a taxa de juros nominal de curto prazo seguindo uma Regra de Taylor:

$$\frac{R_t}{\bar{R}} = \left( \frac{R_{t-1}}{\bar{R}} \right)^{\rho_r} \left[ \left( \frac{\Pi_t}{\bar{\Pi}} \right)^{\phi_\pi} \left( \frac{Y_t}{\bar{Y}} \right)^{\phi_y} \right]^{(1-\rho_r)} \exp(\varepsilon_{r,t}), \quad (4.32)$$

onde  $\Pi_t = 1 + \pi_t$  é a taxa de inflação bruta e  $\Pi_t^\dagger = 1 + \pi_t^\dagger$  é a meta da taxa de inflação bruta. A aproximação log-linear de 4.32 resulta em:

$$\hat{r}_t = \rho_r \hat{r}_{t-1} + (1 - \rho_r) \left[ \phi_\pi (\pi_t - \pi_t^\dagger) + \phi_y \hat{y}_t \right] + \varepsilon_{r,t}. \quad (4.33)$$

A autoridade monetária suaviza a trajetória da taxa de juros respondendo a dois hiatos: desvios da taxa de inflação ( $\pi_t$ ) de sua meta de inflação variante no tempo ( $\pi_t^\dagger$ ) e a diferença entre o produto efetivo e seu respectivo nível no estado estacionário. Assim como em Ireland (2007) e Cogley, Primiceri e Sargent (2010), se assume que a meta de inflação segue um processo exógeno AR(1) com drift:

$$\pi_t^\dagger = (1 - \rho_\dagger) \bar{\pi} + \rho_\dagger \pi_{t-1}^\dagger + \varepsilon_{\dagger,t}. \quad (4.34)$$

#### 4.1.5 Termos de Troca, Taxa de Câmbio Real e Equilíbrio de Mercado

Para expressar a relação entre termos de troca, taxa de câmbio real e o hiato da lei do preço único, primeiramente, deriva-se a aproximação log-linear em torno do estado estacionário da taxa de câmbio real, definida em 4.13:

$$\hat{q}_t = \hat{e}_t + p_t^* - p_t. \quad (4.35)$$

Utilizando 4.26, então 4.35 pode ser reescrita como:

$$\hat{q}_t = \psi_{F,t} + p_{F,t} - p_t. \quad (4.36)$$

Juntando a aproximação log-linear de 4.7 e 4.18 com 4.36, resulta em:

$$\hat{q}_t \approx \psi_{F,t} - (1 - \alpha)(p_{F,t} - p_{H,t}) = \psi_{F,t} - (1 - \alpha)s_t. \quad (4.37)$$

As condições de equilíbrio de mercado implicam em  $\hat{y}_t^* = \hat{c}_t^*$ ,  $\forall t$ , para o resto do mundo. Já o produto doméstico é igual ao total da demanda doméstica e demanda estrangeira pelos bens produzidos pelas firmas domésticas que, em termos log-lineares, é expresso como:

$$\hat{y}_t = \hat{c}_{H,t} + \hat{c}_{H,t}^*. \quad (4.38)$$

Considerando as formas log-lineares das demandas doméstica e estrangeira, tem-se:

$$\hat{c}_{H,t} = (1 - \alpha)(\alpha\eta s_t + \hat{c}_t), \quad (4.39)$$

$$\hat{c}_{H,t}^* = \alpha[\eta(s_t + \psi_{F,t}) + \hat{y}_t^*]. \quad (4.40)$$

Juntando 4.39 e 4.40, 4.38 pode ser reescrita como:

$$\hat{y}_t = (2 - \alpha)\alpha\eta s_t + (1 - \alpha)\hat{c}_t + \alpha\eta\psi_{F,t} + \alpha\hat{y}_t^*. \quad (4.41)$$

## 4.2 APROXIMAÇÃO LOG-LINEAR DO MODELO

Apresenta-se, nesta seção, a aproximação log-linear do modelo DSGE. A equação de consumo de Euler é obtida ao pela aproximação log-linear de 4.11:

$$\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1} = \mathbb{E}_t[\hat{c}_{t+1} - h\hat{c}_t] - \frac{1-h}{\sigma}(\hat{r}_t - \mathbb{E}_t[\hat{\pi}_{t+1}]). \quad (4.42)$$

A inflação doméstica é dada por 4.25:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{H,t} &= \beta\mathbb{E}_t[\hat{\pi}_{H,t+1} - \delta_H\hat{\pi}_{H,t}] + \delta_H\hat{\pi}_{H,t-1} \\ &+ \lambda_H \left[ \varphi\hat{y}_t - (1 + \varphi)\varepsilon_{a,t} + \alpha s_t + \frac{\sigma}{1-h}(\hat{c}_t - h\hat{c}_{t-1}) \right] + \lambda_H\varepsilon_{H,t}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

A inflação importada pode ser escrita juntando 4.31 e 4.37:

$$\hat{\pi}_{F,t} = \beta \mathbb{E}_t(\hat{\pi}_{F,t+1} - \delta_F \hat{\pi}_{F,t}) + \delta_F \hat{\pi}_{F,t-1} + \lambda_F [\hat{q}_t - (1 - \alpha) s_t] + \lambda_F \varepsilon_{F,t}. \quad (4.44)$$

Tomando esperança em  $t$  da primeira diferença de 4.35, um passo à frente, e juntando com 4.17, resulta na condição de paridade da taxa de juros real:

$$\mathbb{E}_t(\hat{q}_{t+1} - \hat{q}_t) = (\hat{r}_t - \mathbb{E}_t[\hat{\pi}_{t+1}]) - (\hat{r}_t^* - \mathbb{E}_t[\hat{\pi}_{t+1}^*]) + \varepsilon_{q,t}, \quad (4.45)$$

onde  $\varepsilon_{q,t} \sim i.i.d.(0, \sigma_q)$  é um choque na paridade da taxa de juros real, refletindo os desvios da paridade resultantes de choques de prêmio de risco. A primeira diferença de 4.18 é igual a:

$$\hat{s}_t - \hat{s}_{t-1} = \hat{\pi}_{F,t} - \hat{\pi}_{H,t} + \varepsilon_{s,t}, \quad (4.46)$$

onde  $\varepsilon_{s,t}$  é um choque nos termos de troca. Combinando o equilíbrio de mercado para o produto em 4.41 com a lei do preço único 4.26, tem-se:

$$\hat{y}_t = (1 - \alpha) \hat{c}_t + \alpha \eta \hat{q}_t + \alpha \eta s_t + \alpha \hat{y}_t^*. \quad (4.47)$$

A taxa de inflação agregada é obtida ao tomar a primeira diferença da aproximação log-linear de 4.7:

$$\pi_t = (1 - \alpha) \pi_{H,t} + \alpha \pi_{F,t}. \quad (4.48)$$

Se assume que os processos estocásticos exógenos dos choques nos termos de troca, tecnológicos e da paridade da taxa de juros real seguem um processo AR(1):

$$\varepsilon_{j,t} = \rho_j \varepsilon_{j,t-1} + \nu_{j,t} \sim i.i.d.(0, \sigma_j), \quad (4.49)$$

para  $j = s, a, q$  e  $\rho_j \in (0, 1)$ . Seguindo Kam, Lees e Liu (2009), se assume que os processos exógenos —  $\hat{\pi}^*$ ,  $\hat{y}^*$  e  $\hat{r}^*$  — também seguem processos AR(1) não correlacionados:

$$\hat{\pi}_t^* = a_1 \hat{\pi}_{t-1}^* + \nu_{\pi^*,t}, \quad \nu_{\pi^*,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\pi^*}) \quad (4.50)$$

$$\hat{y}_t^* = b_2 \hat{y}_{t-1}^* + \nu_{y^*,t}, \quad \nu_{y^*,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{y^*}) \quad (4.51)$$

$$\hat{r}_t^* = c_3 \hat{r}_{t-1}^* + \nu_{r^*,t}, \quad \nu_{r^*,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{r^*}). \quad (4.52)$$

O sistema de equações (4.42)-(4.52), mais as equações de política monetária 4.33 e 4.34, definem a aproximação log-linear do modelo DSGE.

### 4.3 ESTIMAÇÃO DO MODELO

Estima-se o modelo DSGE através da abordagem Bayesiana, tal que, desta forma, permite-se incorporar informações a priori para a estimação dos parâmetros, além daquelas contidas no vetor de séries observadas (AN; SCHORFHEIDE, 2007). Os parâmetros a serem estimados são os da Regra de Taylor da política monetária,  $\{\phi_\pi, \phi_y, \rho_r, \sigma_r, \sigma_\dagger, \bar{\pi}\}$ , os processos exógenos,  $\{a_1, b_2, c_3, \rho_a, \rho_q, \rho_s, \sigma_H, \sigma_F, \sigma_a, \sigma_q, \sigma_s, \sigma_{\pi^*}, \sigma_{y^*}, \sigma_{r^*}\}$  e os do setor privado doméstico,  $\{h, \sigma, \eta, \delta_H, \delta_F, \theta_H, \theta_F\}$ . O algoritmo *Random Walking Metropolis Hastings* (RW-MH) é utilizado para simular a distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo DSGE, a partir de uma sequência de realizações amostradas das distribuições condicionais totais.

Dado que o DSGE forma uma sistema linear de expectativas racionais, e seja  $\Theta$  o conjunto de todos os parâmetros do DSGE, então, para cada vetor  $\Theta$  candidato, o modelo tem uma solução<sup>2</sup> na forma de um processo VAR(1):

$$\xi_t = A(\Theta)\xi_{t-1} + B(\Theta)v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, \Upsilon), \quad (4.53)$$

onde  $v_t$  é o vetor de choques exógenos,  $\xi_t := [x'_t, y'_t]'$ ,  $y_t$  é o vetor de variáveis endógenas e  $x_t$  é o vetor de variáveis de estado. As matrizes  $A(\Theta)$  e  $B(\Theta)$  são funções dos parâmetros estruturais  $\Theta$ . Algumas variáveis de  $\xi_t$  podem ser mapeadas para um vetor de variáveis observáveis,  $y_t^o$ , a partir da matriz  $G$ , tal que:

$$y_t^o = G\xi_t. \quad (4.54)$$

Com base em An e Schorfheide (2007), o algoritmo RW-MH é definido da seguinte forma:

1. Utilizar uma rotina de otimização numérica para encontrar a moda do produto entre a função de verossimilhança e a função de distribuição a priori, denotando esta moda por  $\tilde{\Theta}$ .
2. Calcular o inverso da matriz Hessiana avaliada em  $\tilde{\Theta}$ , denotando-o por  $\tilde{\Sigma}$ .
3. Amostrar  $\Theta^{(0)}$  de uma distribuição  $\mathcal{N}(\tilde{\Theta}, c^2\tilde{\Sigma})$ <sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Ver, por exemplo, o método de Sims (2002) para a solução de modelos lineares de expectativas racionais.

<sup>3</sup>Assim como em Roberts et al. (1997), define-se  $c = 0,4472$ , de modo a garantir uma taxa de aceitação de aproximadamente 25% em 4.55.

4. Para  $i = 1, 2, \dots, N$ , amostrar um vetor candidato de parâmetros  $\Theta^\dagger$  da distribuição proposta,  $\mathcal{N}(\Theta^{(s-1)}, c^2 \tilde{\Sigma})$ . A probabilidade de  $\Theta^\dagger$  ser aceito como o novo vetor  $\Theta^{(s)}$  é de  $\min \{1, r(\Theta^{(s-1)}, \Theta^\dagger | y)\}$ , onde:

$$r(\Theta^{(s-1)}, \Theta^\dagger | y) = \frac{L(\Theta^\dagger | y) p(\Theta^\dagger)}{L(\Theta^{(s-1)} | y) p(\Theta^{(s-1)})}. \quad (4.55)$$

Caso contrário, ou seja, se  $\Theta^\dagger$  for rejeitado, então define-se  $\Theta^{(s)} = \Theta^{(s-1)}$ .

5. Utilizar a sequência de realizações  $\{\Theta^{(i)}\}_{i=b}^N$  para aproximar a distribuição a posteriori dos parâmetros, onde  $b$  é o *burn-in*, ou seja, o número de realizações descartadas a fim de garantir a convergência da cadeia de Markov.

A base de dados utilizada para estimar os parâmetros do DSGE contém sete séries temporais, em frequência mensal. A amostra se estende de jan/2003 a jun/2016, com um total de 162 observações:

- PIB ( $Y_t^{obs}$ ): assim como na análise com o TVP-VAR, utiliza-se o IBC-Br como proxy para o PIB.
- Inflação Agregada ( $\pi_t^{obs}$ ): mesma série utilizada para o TVP-VAR, ou seja, a variação mensal do IPCA.
- Inflação Importada ( $\pi_{F,t}^{obs}$ ): seguindo BACEN (2017), utiliza-se variação percentual, subtraída da média, de um indicador de preços de *commodities* como proxy para a inflação importada, em virtude de sua relevância sobre a dinâmica inflacionária doméstica. No caso, é utilizado o índice de preços de *commodities* produzido pelo Fundo Monetário Internacional (FMI)<sup>4</sup>.
- Taxa de juros ( $R_t^{obs}$ ): mesma série utilizada para o TVP-VAR, ou seja, a taxa SELIC.
- PIB Internacional ( $(Y_t^*)^{obs}$ ): utiliza-se o índice de produção industrial dos Estados Unidos como proxy para o PIB Internacional.
- Inflação Internacional ( $(\pi_t^*)^{obs}$ ): utiliza-se o índice de preços ao consumidor dos Estados Unidos como proxy para o inflação internacional.

---

<sup>4</sup>Disponível em <https://www.imf.org/external/np/res/commod/index.aspx>.

- Taxa de Juros Internacional  $\left((R_t^*)^{obs}\right)$ : utiliza-se a taxa de juros de curto prazo dos Estados Unidos como proxy para a taxa de juros internacional.

As séries  $(Y_t^*)^{obs}$ ,  $(\pi_t^*)^{obs}$  e  $(R_t^*)^{obs}$  são obtidas através do *Federal Reserve Economic Data* (FRED)<sup>5</sup>, sob os códigos, respectivamente: *INDPRO*, *CPIAUCSL* e *TB3MS*.

Com o intuito de comparar a dinâmica inflacionária da gestão de Meirelles com a de Tombini, estima-se o modelo a partir de uma partição da amostra. Para Meirelles, utiliza-se os dados no período de jan/2003 a dez/2010 (96 observações). Já para Tombini, a amostra abrange o intervalo de jan/2011 a jun/2016 (66 observações). Para cada uma das sub-amostras, foram amostradas 1.000.000 realizações dos parâmetros do DSGE, obtidas da cadeia de Markov gerada pelo algoritmo RW-MH. As 500.000 primeiras realizações foram descartadas, de modo a garantir a convergência da cadeia. As equações de medida são:

$$\ln(Y_t^{obs}) - \ln(Y_t^{HP}) = \hat{y}_t, \quad (4.56)$$

$$\pi_t^{obs} = \pi_t, \quad (4.57)$$

$$\pi_{F,t}^{obs} = \hat{\pi}_{F,t}, \quad (4.58)$$

$$r_t^{obs} = \hat{r}_t + \bar{\pi} + \rho, \quad (4.59)$$

$$\ln\left((Y_t^*)^{obs}\right) - \ln\left((Y_t^*)^{HP}\right) = \hat{y}_t^*, \quad (4.60)$$

$$\ln\left((\pi_t^*)^{obs}\right) - \ln\left((\pi_t^*)^{HP}\right) = \hat{\pi}_t^*, \quad (4.61)$$

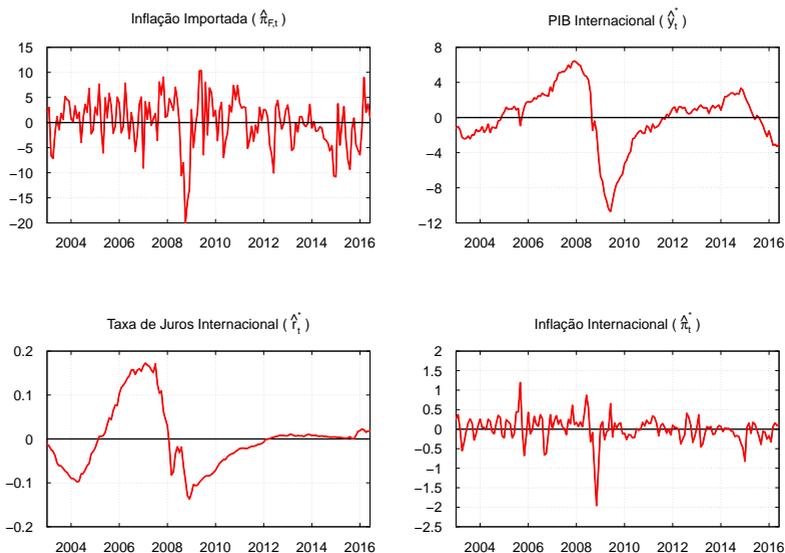
$$\ln\left((R_t^*)^{obs}\right) - \ln\left((R_t^*)^{HP}\right) = \hat{r}_t^*. \quad (4.62)$$

onde  $\rho := (\beta^{-1} - 1)$ . O símbolo *HP* indica a tendência da respectiva série, obtida via o filtro HP (HODRICK; PRESCOTT, 1997)<sup>6</sup>. A figura 9 apresenta as quatro séries utilizadas na estimação do DSGE que não foram utilizadas na estimação do TVP-VAR, após a aplicação de todas as transformações (definidas nas equações de medida):

<sup>5</sup>Disponível em <https://fred.stlouisfed.org/>.

<sup>6</sup>Seguindo Ravn e Uhlig (2002), utilizou-se  $\lambda = 129.000$ , uma vez que os dados estão em frequência mensal.

Figura 9: Séries temporais utilizadas na estimação do DSGE, no período de jan/2003 a jun/2016.



Fonte: Elaboração própria.

#### 4.4 DISTRIBUIÇÕES A PRIORI

O modelo possui 31 parâmetros, dos quais 4 são calibrados e 27 são estimados. A tabela 4 descreve as distribuições a priori de todos os parâmetros. Elas estão em linha com a literatura nacional, sendo baseadas, principalmente, em Castro et al. (2015) e Linardi (2016). Os momentos das distribuições a priori foram ajustados para a frequência mensal, dado que está é a frequência dos dados utilizados na estimação do modelo<sup>7</sup>.

O fator de desconto intertemporal ( $\beta$ ) é calibrado para 0,996 e o inverso da elasticidade Frisch de oferta de trabalho ( $\varphi$ ) para 1, assim como em Castro et al. (2015). Utiliza-se como *proxy* para o grau de

<sup>7</sup>Esses ajustes são necessários pois grande parte da literatura utiliza dados em frequência trimestral para estimar modelos DSGE. Ver Pfeifer (2014) para maiores detalhes sobre como proceder com este ajuste.

abertura econômica ( $\alpha$ ) a média observada da corrente de comércio – participação da soma das exportações e das importações no produto – de 2003 a 2016 nas contas nacionais do IBGE. Com o intuito de capturar os movimentos de baixa frequência da meta de inflação – observados a partir da tendência da inflação estimada pelo TVP-VAR – calibra-se a persistência da meta de inflação ( $\rho_{\pi}$ ) para um valor próximo à unidade (0,95), assim como em Cogley, Primiceri e Sargent (2010). Por conseguinte, adiciona-se alta persistência à meta de inflação sem que se incorra no problema de o modelo não ter um estado estacionário não estocástico (caso em que  $\rho_{\pi} = 1$ ).

Tabela 4: Distribuições a priori dos parâmetros do modelo DSGE

Parâmetro	Descrição	Priori		
		Distribuição	Média	Desvio padrão
$\beta$	Fator de desconto intertemporal	Calibrado	0,996	–
$\alpha$	Grau de abertura econômica	Calibrado	0,2575	–
$\rho_{\pi}$	Pers. da meta de inflação	Calibrado	0,95	–
$\varphi$	Inverso da elast. Frisch de oferta de trabalho	Calibrado	1,0	–
$h$	Persistência dos hábitos externos de consumo	Beta	0,7	0,1
$\sigma$	Inverso da elast. de subst. intertemporal	Normal	1,3	0,05
$\eta$	Elast. de subst. entre bens domést. e import.	Gama	0,65	0,2
$\delta_H$	Grau de indexação da inflação doméstica	Beta	0,8	0,2
$\delta_F$	Grau de indexação da inflação importada	Beta	0,9	0,2
$\theta_H$	Parâmetro de Calvo dos preços domésticos	Beta	0,95	0,15
$\theta_F$	Parâmetro de Calvo dos preços importados	Beta	0,95	0,15
$a_1$	Coef. AR(1) da inflação externa	Beta	0,8	0,35
$b_2$	Coef. AR(1) do produto externo	Beta	0,8	0,35
$c_3$	Coef. AR(1) da taxa de juros externa	Beta	0,8	0,35
$100\bar{\pi}$	Estado estacionário da taxa de inflação	Normal	0,55	0,1
$\rho_a$	Pers. do choque tecnológico	Beta	0,8	0,25
$\rho_q$	Pers. do choque da taxa de câmbio	Beta	0,8	0,25
$\rho_s$	Pers. do choque nos termos de troca	Beta	0,8	0,25
$\rho_r$	Regra de Taylor - suavização	Beta	0,85	0,35
$\phi_{\pi}$	Regra de Taylor - inflação	Normal	1,75	0,15
$\phi_y$	Regra de Taylor - produto	Gama	0,25	0,2
$100\sigma_{\pi}$	Desv. pad. do choque da meta da inflação	Gama Inversa	0,02	0,01
$100\sigma_r$	Desv. pad. do choque da taxa de juros	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_H$	Desv. pad. do choque de custos domésticos	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_F$	Desv. pad. do choque de custos externos	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_a$	Desv. pad. do choque tecnológico	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_q$	Desv. pad. do choque da taxa de câmbio	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_s$	Desv. pad. do choque nos termos de troca	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_{\pi^*}$	Desv. pad. do choque na inflação externa	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_{y^*}$	Desv. pad. do choque no produto externo	Gama Inversa	0,3	$\infty$
$100\sigma_{r^*}$	Desv. pad. do choque na taxa de juros externa	Gama Inversa	0,3	$\infty$

**Fonte:** Elaboração própria.

A média da a priori do estado estacionário da taxa de inflação ( $\bar{\pi}$ ) é definida como 0,55, implicando em uma taxa anual de 6,8%, situando-se entre as médias observadas em cada um dos mandatos. O desvio padrão da a priori de  $\bar{\pi}$  é relativamente disperso, tal que as médias observadas nos períodos de Meirelles e de Tombini estão compreendidas

dentro do intervalo de um desvio padrão, para mais e para menos, em relação à média. O desvio padrão do choques da meta de inflação ( $\sigma_{\dagger}$ ) é baseado em Bhattarai, Lee e Park (2016). Os momentos da distribuição a priori dos parâmetros da Regra de Taylor de suavização ( $\rho_r$ ), resposta à inflação ( $\phi_{\pi}$ ), resposta ao produto ( $\phi_y$ ) e do desvio padrão dos choques de taxa de juros ( $\sigma_r$ ) são baseados em Moura (2015). Os momentos das distribuições a priori de  $h$ ,  $\sigma$ ,  $\rho_a$ ,  $\sigma_H$ ,  $\sigma_F$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_q$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{\pi^*}$ ,  $\sigma_{y^*}$  e  $\sigma_{r^*}$  são baseados em Castro et al. (2015) e os de  $\eta$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_F$ ,  $\theta_H$ ,  $\theta_F$ ,  $a_1$ ,  $b_2$ ,  $c_3$ ,  $\rho_q$  e  $\rho_s$  são baseados em Linardi (2016).

## 4.5 RESULTADOS

Apresenta-se, nesta seção, os resultados derivados do DSGE estimado para cada um dos períodos. Primeiramente, são apresentados os resultados das estimativas dos parâmetros estruturais do modelo. Após isso, analisa-se as propriedades da inflação calculadas a partir do DSGE, a fim de verificar se elas estão em linha com os resultados obtidos com o TVP-VAR. Por último, procede-se a um exercício contrafactual, com o intuito de inferir a respeito do quanto das alterações na dinâmica inflacionária pode ser atribuído à política monetária e o quanto pode ser atribuído às condições macroeconômicas específicas de cada período.

### 4.5.1 Modelo Estimado

A figura 10 apresenta a evolução da meta de inflação ( $\pi_t^{\dagger}$ ) implicada pelo modelo DSGE<sup>8</sup>. A meta de inflação subjacente ao DSGE apresenta movimentos semelhantes à tendência da inflação estimada a partir do TVP-VAR, mas com uma variância aparentemente menor. A meta cai de 6,4%, em abril de 2003, para 4,9%, em junho de 2005. Após isso, ela apresenta um aumento gradual até o fim do mandato de Meirelles, atingindo 6,0% em dezembro de 2010. Percebe-se que a meta ficou abaixo de 6,0% durante quase toda a gestão de Meirelles, em linha com os resultados derivados do TVP-VAR para o componente permanente da inflação.

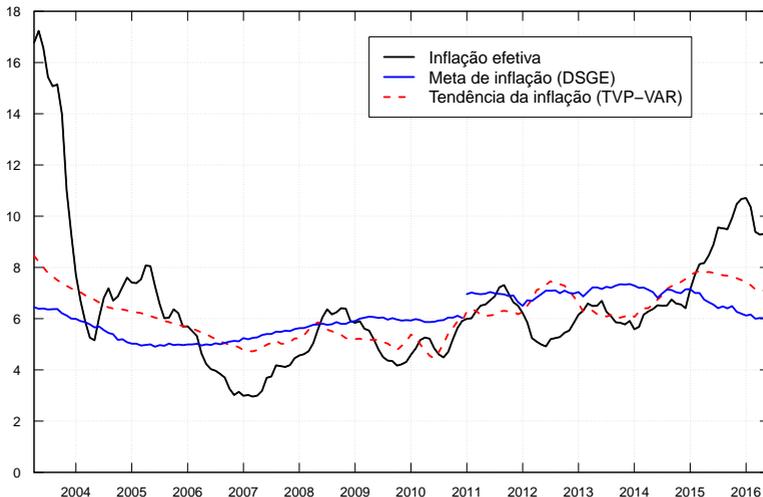
No período de Tombini, a meta passa de 7,0%, em janeiro de 2011, para 7,4% em dezembro de 2013. Depois, apresenta uma trajetória

---

<sup>8</sup>A meta de inflação é calculada a partir da aplicação do suavizador de Kalman (ver, no apêndice A, a etapa *Backward Sampling*) no DSGE avaliado nas médias a posteriori dos parâmetros.

decrecente, até atingir 6,0% em junho de 2016. A meta ficou acima de 6,0% durante toda a gestão de Tombini, assim como a tendência da inflação estimada pelo TVP-VAR.

Figura 10: Meta de inflação do Banco Central subjacente ao modelo DSGE.



Fonte: Elaboração própria.

Notas: Inflação efetiva calculada a partir da taxa acumulada de 12 meses do IPCA.

A tabela 5 apresenta as estimativas dos parâmetros estruturais, para cada uma das gestões. Analisando a mediana a posteriori dos parâmetros de política monetária, pode-se notar que houve uma diminuição do parâmetro da Regra de Taylor relativo à inflação ( $\phi_\pi$ ), de 1,98 na gestão de Meirelles para 1,78 na de Tombini. O parâmetro de suavização da taxa de juros ( $\rho_r$ ) também apresentou uma queda, passando de 0,94 para 0,85. O estado estacionário da inflação ( $\bar{\pi}$ ) aumentou, passando de 0,50 para 0,52, assim como o parâmetro da Regra de Taylor relativo ao produto ( $\phi_y$ ), que aumentou de 0,02 para 0,16. A volatilidade da política monetária também apresentou um aumento, uma vez que tanto o desvio padrão dos choques da meta de inflação ( $\sigma_\pi$ ) quanto dos choques da taxa de juros ( $\sigma_r$ ) se mostraram maiores na

gestão de Tombini.

Tabela 5: Distribuição a posteriori dos parâmetros do modelo DSGE

Parâmetro	Meirelles			Tombini		
	Mediana	5º percentil	95º percentil	Mediana	5º percentil	95º percentil
$h$	0,1430	0,1027	0,1833	0,6004	0,5855	0,6140
$\sigma$	1,2724	1,1986	1,3535	1,3245	1,3206	1,3267
$\eta$	0,3171	0,2175	0,3881	0,3996	0,3835	0,4195
$\delta_H$	0,6560	0,5128	1,0000	0,5225	0,5103	0,5426
$\delta_F$	0,5981	0,4412	1,0000	0,5973	0,5835	0,6028
$\theta_H$	0,0926	0,0394	0,1473	0,8557	0,8531	0,8586
$\theta_F$	0,1606	0,0694	0,2276	0,5929	0,5805	0,6016
$a_1$	0,4015	0,3032	0,4797	0,0006	0,0000	0,0092
$b_2$	0,9992	0,9959	1,0000	0,9977	0,9923	1,0000
$c_3$	0,9683	0,9360	1,0000	0,9562	0,9428	0,9742
$100\bar{\pi}$	0,4974	0,3857	0,6184	0,5227	0,5180	0,5296
$\rho_a$	0,9970	0,9908	1,0000	0,9980	0,9942	1,0000
$\rho_q$	0,9620	0,9246	0,9824	0,9575	0,9423	0,9684
$\rho_s$	0,7392	0,5842	0,8546	0,8168	0,8155	0,8186
$\rho_r$	0,9375	0,9267	0,9494	0,8516	0,8438	0,8587
$\phi_\pi$	1,9790	1,8566	2,2420	1,7788	1,7681	1,7910
$\phi_y$	0,0183	0,0016	0,0312	0,1638	0,1551	0,1716
$100\sigma_\pi$	0,0207	0,0097	0,0339	0,0369	0,0366	0,0373
$100\sigma_r$	0,0455	0,0391	0,0511	0,2752	0,2672	0,2801
$100\sigma_H$	0,3984	0,2302	0,5597	0,1650	0,0731	0,2800
$100\sigma_F$	3,2694	2,9979	3,6046	5,4175	5,0122	5,9236
$100\sigma_a$	1,4631	1,2882	1,6456	6,8008	6,5758	7,0269
$100\sigma_q$	0,0790	0,0570	0,1062	0,1434	0,1069	0,1825
$100\sigma_s$	3,8850	3,4480	4,2970	7,0575	6,8811	7,2042
$100\sigma_{\pi^*}$	0,3369	0,3025	0,3765	0,2209	0,1870	0,2475
$100\sigma_{y^*}$	0,8152	0,7655	0,9215	0,4519	0,4085	0,4869
$100\sigma_{r^*}$	0,0360	0,0353	0,0371	0,0363	0,0353	0,0385

Fonte: Elaboração própria.

A respeito dos parâmetros não relacionados à política econômica, destaca-se o aumento da persistência dos hábitos externos de consumo ( $h$ ), da rigidez nominal dos preços domésticos ( $\theta_H$ ) e dos importados ( $\theta_F$ ), do desvio padrão dos choques de custos externos ( $\sigma_F$ ) e do desvio padrão dos choques nos termos de troca ( $\sigma_s$ ). Outros parâmetros apresentaram uma queda da gestão de Meirelles para a de Tombini, como o grau de indexação da inflação doméstica ( $\delta_H$ ), a persistência da inflação externa ( $a_1$ ), o desvio padrão dos choques de custos domésticos ( $\sigma_F$ ) e o desvio padrão da inflação ( $\pi^*$ ) e do produto ( $y^*$ ) externos. Há indícios, portanto, de mudanças possivelmente relevantes tanto na

política monetária quanto nas condições macroeconômicas entre as duas gestões.

#### 4.5.2 Propriedades da Inflação

Com base em 4.53, e assim como na análise com o TVP-VAR (ver 3.19), pode-se calcular a persistência do hiato da inflação subjacente ao modelo DSGE como:

$$R_j^2 = 1 - \frac{e_{\pi_h} \left( \sum_{i=0}^{j-1} [A(\Theta)]^i B(\Theta) \Upsilon [B(\Theta)]' \left\{ [A(\Theta)]^i \right\}' \right) e'_{\pi_h}}{e_{\pi_h} \left( \sum_{i=0}^{\infty} [A(\Theta)]^i B(\Theta) \Upsilon [B(\Theta)]' \left\{ [A(\Theta)]^i \right\}' \right) e'_{\pi_h}}, \quad (4.63)$$

onde  $e_{\pi_h}$  é um vetor que seleciona o hiato da inflação. Aqui, o hiato da inflação é definido como a diferença entre a inflação agregada e a meta de inflação da autoridade monetária,  $\pi_t - \pi_t^\dagger$ . A figura 11 apresenta a estatística de  $R_j^2$  do modelo DSGE estimado para cada um dos períodos.

A tabela 6 apresenta as mudanças percentuais para a volatilidade – calculada em termos do desvio padrão (multiplicado por 100) da inflação – e para a persistência do hiato da inflação entre as duas gestões. A partir da mediana a posteriori dos parâmetros, calcula-se o quanto que a volatilidade da inflação e as estatísticas de  $R_j^2$  – para os horizontes de 3, 6 e 12 meses à frente – aumentaram do período de Meirelles para o de Tombini.

Tabela 6: Mudança percentual da volatilidade e da previsibilidade do hiato inflação subjacentes ao modelo DSGE.

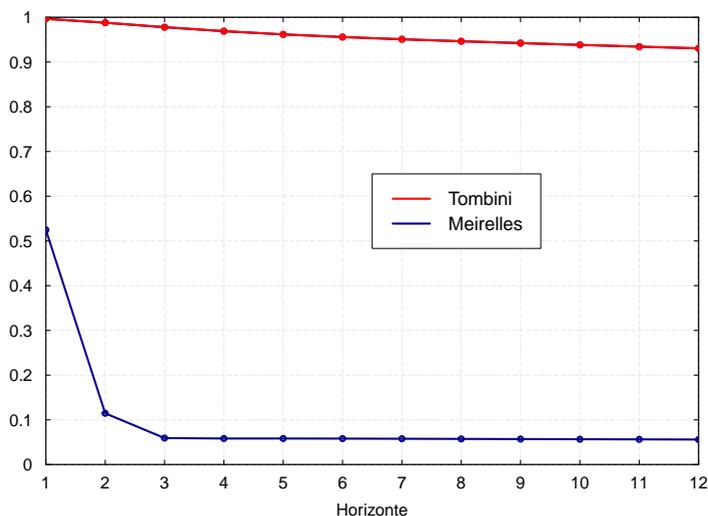
	Volatilidade	$R_3^2$	$R_6^2$	$R_{12}^2$
Meirelles	1,152	0,059	0,058	0,056
Tombini	11,602	0,978	0,956	0,931
Mudança percentual	907%	1.550%	1.545%	1.561%

Fonte: Elaboração própria.

Os resultados obtidos a partir do DSGE corroboram com a análise realizada com o TVP-VAR, uma vez que se observa um aumento tanto da volatilidade – de 907% – quanto da persistência do hiato da inflação

– em torno de 1550% – do período de Meirelles para o de Tombini.

Figura 11: Persistência do hiato da inflação subjacente ao modelo DSGE.



Fonte: Elaboração própria.

### 4.5.3 Análise Contrafactual

Dado que o DSGE conseguiu replicar, de modo geral, as evidências estatísticas derivadas do TVP-VAR – aumento das propriedades da inflação entre as duas gestões – procede-se a uma análise contrafactual, de forma similar ao exercício feito em Cogley, Primiceri e Sargent (2010). O intuito desta análise é realizar uma decomposição da variação das estatísticas da inflação, ou seja, deseja-se inferir o quanto da mudança percentual da volatilidade e da persistência da inflação entre os dois períodos pode ser atribuído à política monetária e o quanto pode ser atribuído às condições macroeconômicas de cada período.

Executam-se dois experimentos, a fim de que se possa responder as seguintes perguntas:

- (a) “Se as condições macroeconômicas enfrentadas por Tombini tivessem sido as mesmas do período de Meirelles, a volatilidade e a previsibilidade do hiato da inflação teriam sido as mesmas?”
- (b) “Se Meirelles estivesse no lugar de Tombini, de 2011 a 2016, a volatilidade e a previsibilidade do hiato da inflação teriam sido as mesmas?”

Para responder à pergunta (a), combinam-se os parâmetros<sup>9</sup> da política monetária – dados pela Regra de Taylor ( $[\phi_\pi, \phi_y, \rho_r, \sigma_r, \sigma_\dagger, \bar{\pi}]$ ) – do período de Tombini, com os parâmetros relativos às condições macroeconômicas (todos os parâmetros do modelo menos os de política monetária, representando o setor privado doméstico e o setor externo) do período de Meirelles. Deste modo, analisa-se a influência da autoridade monetária na determinação do processo inflacionário. De forma análoga, no experimento (b), combinam-se os parâmetros das condições macroeconômicas do período de Tombini com os parâmetros da Regra de Taylor de Meirelles. Neste cenário, analisa-se a contribuição de fatores alheios à política monetária para a dinâmica inflacionária. As tabelas 7 e 8 reportam os resultados dos dois experimentos, em comparação com as estatísticas da inflação geradas pelo modelo estimado para o período de Meirelles. A figura 12 apresenta a persistência do hiato da inflação resultante destes dois experimentos.

Tabela 7: Volatilidade e persistência do hiato da inflação resultantes do experimento (a).

Coefficientes	Volatilidade	$R_3^2$	$R_6^2$	$R_{12}^2$
Período de Meirelles	1,152	0,059	0,058	0,056
Experimento (a)	2,834	0,889	0,874	0,845
Mudança percentual	146%	1.399%	1.404%	1.408%

Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que, no experimento (a), tanto a volatilidade quanto a persistência do hiato da inflação foram maiores do que as estatísticas geradas pelo modelo do período de Meirelles. No caso da volatilidade, a mudança percentual foi de 146%, enquanto que para a persistência a

<sup>9</sup>Utiliza-se a mediana a posteriori dos parâmetros para obter a solução do DSGE para cada um dos experimentos.

mudança ficou em torno de 1.400% para os três horizontes considerados. Portanto, ao substituir os coeficientes da política monetária de Meirelles pelos de Tombini, mantidas constantes as condições macroeconômicas, verifica-se que há um aumento da volatilidade e da previsibilidade do hiato da inflação, indicando que a política monetária do período de Tombini contribuiu para o aumento das propriedades da inflação.

Tabela 8: Volatilidade e persistência do hiato da inflação resultantes do experimento (b).

Coeficientes	Volatilidade	$R_3^2$	$R_6^2$	$R_{12}^2$
Período de Meirelles	1,152	0,059	0,058	0,056
Experimento (b)	1,463	0,881	0,772	0,756
Mudança percentual	27%	1.387%	1.229%	1.250%

Fonte: Elaboração própria.

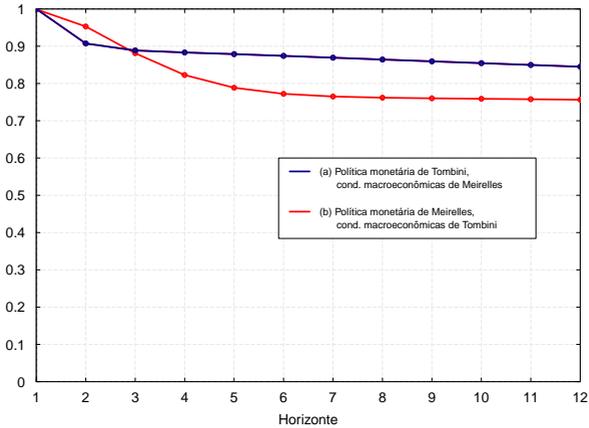
No experimento (b), também houve um aumento das estatísticas da inflação. A volatilidade apresentou uma mudança percentual de 27%. A persistência do hiato da inflação três passos à frente,  $R_3^2$ , foi 1.387% maior em comparação com o período de Meirelles. O cenário foi semelhante para  $R_6^2$  e  $R_{12}^2$ , uma vez que a mudança percentual girou em torno de 1.240% para estas duas estatísticas. Isto posto, ao substituir os coeficientes relativos às condições macroeconômicas de Meirelles pelos de Tombini, mantida constante a política monetária de Meirelles, verifica-se que há um aumento da volatilidade e da previsibilidade do hiato da inflação – assim como no experimento (a) – indicando que as condições macroeconômicas enfrentadas por Tombini também contribuíram para o aumento das estatísticas da inflação.

Para proceder com o exercício de decomposição da variação das propriedades da inflação, apresenta-se na tabela 9 a análise contrafactual baseada nos experimentos anteriores. Os valores apresentados representam a proporção da mudança hipotética contrafactual (mudanças percentuais das tabelas 7 e 8) sobre a mudança total entre os dois períodos (soma das mudanças percentuais contrafactuais<sup>10</sup>):

<sup>10</sup>A mudança percentual total que de fato ocorreu, subjacente ao modelo DSGE, foi a da tabela 6. Entretanto, em decorrência do modelo ser não linear nos parâmetros, tem-se que o resultado final dos dois números não somará, necessariamente, 100%, uma vez que a mudança total não é a soma dos efeitos das alterações nos parâmetros de política monetária e das condições macroeconômicas. Deste modo, para facilitar

$$100 \times \frac{\text{Mudança contrafactual}}{\text{Mudança total}}.$$

Figura 12: Persistência do hiato da inflação resultante do exercício contrafactual.



Fonte: Elaboração própria.

Na mudança contrafactual, calcula-se a alteração, em termos percentuais, da estatística de interesse – volatilidade da inflação e  $R_j^2$  – resultante dos experimentos (a) e (b) em relação ao valor correspondente para o período de Meirelles. Como todas as mudanças percentuais contrafactuais foram na mesma direção da mudança percentual total da tabela 6, tem-se que tanto a política monetária quanto as condições macroeconômicas contribuíram para o aumento das propriedades da inflação. Os valores da tabela 9, portanto, apresentam uma decomposição da variação das estatísticas da inflação, de modo que se possa inferir acerca da magnitude da influência da política monetária e das condições macroeconômicas na determinação do processo inflacionário.

---

a interpretação dos resultados, utiliza-se a soma das mudanças contrafactuais como base para o cálculo da mudança total.

Tabela 9: Análise contrafactual baseada no modelo DSGE.

	Volatilidade	Persistência		
		$R_3^2$	$R_6^2$	$R_{12}^2$
- Contribuição da política monetária	84%	50%	53%	53%
- Contribuição das condições macroeconômicas	16%	50%	47%	47%

Fonte: Elaboração própria.

A política monetária parece ser o fator de maior relevância na determinação da volatilidade da inflação, uma vez que a forma como foi conduzida a política monetária, no mandato de Tombini, responde por 84% do aumento desta estatística. Os parâmetros relacionados às condições macroeconômicas, entretanto, respondem por apenas 16% do aumento da volatilidade. Analisando-se a persistência do hiato da inflação, não há uma distinção clara a respeito de qual fator foi o mais importante para explicar o aumento desta estatística entre as duas gestões. Para os três horizontes considerados, as estatísticas de  $R_j^2$  ficam em torno de 50%, ou seja, a política monetária do mandato de Tombini responde por metade do aumento da previsibilidade do hiato, assim como as condições macroeconômicas.



## 5 CONCLUSÃO

Com o objetivo de analisar se houve mudanças nas propriedades latentes da inflação brasileira, entre os mandatos de Henrique Meirelles e Alexandre Tombini à frente do Banco Central, estimou-se um modelo TVP-VAR, com métodos Bayesianos. O modelo estimado foi utilizado para fazer inferências a respeito de três características da dinâmica inflacionária: tendência, volatilidade e persistência do hiato da inflação. Os resultados obtidos pelo TVP-VAR apresentaram evidências de aumento da persistência do hiato da inflação – mensurada em termos de sua previsibilidade – no período de Tombini, em comparação com o de Meirelles. Houve indícios, também, de aumento da tendência e da volatilidade da inflação no período de Tombini à frente do Banco Central.

Para investigar os fatores econômicos subjacentes a estas evidências de alterações da dinâmica inflacionária, com foco na persistência do hiato da inflação, estimou-se um mesmo modelo DSGE Novo Keynesiano para cada um dos períodos. A análise realizada a partir deste modelo mostrou evidências de significativas mudanças nas propriedades da inflação, em linha com os resultados obtidos com o TVP-VAR. Com base em um exercício contrafactual, estimou-se o quão relevante foi a condução da política monetária e as condições macroeconômicas como fatores explicativos para o aumento da volatilidade e da persistência do hiato da inflação do período de Meirelles para o de Tombini.

A análise contrafactual baseada no DSGE indicou que a política monetária do período de Tombini foi o fator preponderante para explicar o aumento da volatilidade da inflação. Em relação à persistência do hiato da inflação, tanto a política monetária quanto as condições macroeconômicas contribuíram para o aumento desta estatística, porém, não houve indícios claros a respeito de qual fator foi o mais relevante. Em suma, a política monetária do mandato de Tombini é responsável por cerca de 50% do aumento da persistência do hiato da inflação entre as duas gestões, enquanto que as condições macroeconômicas (de 2011 a 2016) respondem pelos outros 50% de aumento.



## REFERÊNCIAS

- AN, S.; SCHORFHEIDE, F. Bayesian analysis of dsge models. **Econometric reviews**, Taylor & Francis, v. 26, n. 2-4, p. 113–172, 2007.
- ASCARI, G.; SBORDONE, A. M. The macroeconomics of trend inflation. **Journal of Economic Literature**, American Economic Association, v. 52, n. 3, p. 679–739, 2014.
- BACEN. **Relatório de inflação**. [S.l.], jun. 2017.
- BEVERIDGE, S.; NELSON, C. R. A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the business cycle. **Journal of Monetary economics**, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 151–174, 1981.
- BHATTARAI, S.; LEE, J. W.; PARK, W. Y. Policy regimes, policy shifts, and us business cycles. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, v. 98, n. 5, p. 968–983, 2016.
- CALVO, G. A. Staggered prices in a utility-maximizing framework. **Journal of monetary Economics**, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 383–398, 1983.
- CANOVA, F.; FORERO, F. J. P. Estimating overidentified, nonrecursive, time-varying coefficients structural vector autoregressions. **Quantitative Economics**, v. 6, n. 2, p. 359–384, 2015.
- CARTER, C. K.; KOHN, R. On gibbs sampling for state space models. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 81, n. 3, p. 541–553, 1994.
- CASTRO, M. R. D. et al. Samba: Stochastic analytical model with a bayesian approach. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 35, n. 2, p. 103–170, 2015.
- CECCHETTI, S. G.; DEBELLE, G. Has the inflation process changed? **Economic Policy**, Oxford University Press, v. 21, n. 46, p. 312–352, 2006.
- CHAN, J. C. C.; CLARK, T. E.; KOOP, G. A New Model of Inflation, Trend Inflation, and Long-Run Inflation Expectations. **Journal of Money, Credit and banking**, Wiley Online Library, v. 50, p. 5–53, 2018.

COGLEY, T.; MATTHES, C.; SBORDONE, A. M. Optimized taylor rules for disinflation when agents are learning. **Journal of Monetary Economics**, v. 72, p. 131–147, 2015.

COGLEY, T.; PRIMICERI, G. E.; SARGENT, T. J. Inflation-gap persistence in the us. **American Economic Journal: Macroeconomics**, v. 2(1), p. 43–69, 2010.

COGLEY, T.; SARGENT, T. J. Drifts and volatilities: monetary policies and outcomes in the post wwii us. **Review of Economic dynamics**, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 262–302, 2005.

COGLEY, T.; SBORDONE, A. M. Trend inflation, indexation, and inflation persistence in the new keynesian phillips curve. **American Economic Review**, v. 98, n. 5, p. 2101–2126, Dez. 2008.

FUHRER, J. C. Inflation persistence. In: **Handbook of monetary economics**. [S.l.]: Elsevier, 2010. v. 3, p. 423–486.

GAGLIANONE, W.; GUILLÉN, O.; FIGUEIREDO, F. Local unit root and inflationary inertia in brazil. **documento de trabajo del Banco Central de Brasil**, n. 406, 2015.

HODRICK, R. J.; PRESCOTT, E. C. Postwar us business cycles: an empirical investigation. **Journal of Money, credit, and Banking**, JSTOR, p. 1–16, 1997.

IRELAND, P. N. Changes in the federal reserve’s inflation target: Causes and consequences. **Journal of Money, Credit and Banking**, v. 39, n. 8, p. 1851–1882, 2007.

JUNICKE, M. Trend inflation and monetary policy in eastern europe. **Macroeconomic Dynamics**, Cambridge University Press, p. 1–15, 2017.

KAM, T.; LEES, K.; LIU, P. Uncovering the hit list for small inflation targeters: A bayesian structural analysis. **Journal of Money, Credit and Banking**, Wiley Online Library, v. 41, n. 4, p. 583–618, 2009.

KIM, S.; SHEPHARD, N.; CHIB, S. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with arch models. **The review of economic studies**, Wiley-Blackwell, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998.

KOOP, G.; POTTER, S. M. Time varying vars with inequality restrictions. **Journal of Economic Dynamics and Control**, Elsevier, v. 35, n. 7, p. 1126–1138, 2011.

- LIMA, E. C. R.; MARTINEZ, T. S.; CERQUEIRA, V. S. Monetary policy and exchange rate: effects on disaggregated prices in a favor model for brazil. **Brazilian Review of Econometrics**, v. 38, n. 1, p. 129–174, 2018.
- LINARDI, F. de M. **Assessing the Fit of a Small Open-Economy DSGE Model for the Brazilian Economy**. [S.l.], 2016.
- MACHADO, V. d. G.; PORTUGAL, M. S. Measuring inflation persistence in brazil using a multivariate model. **Revista Brasileira de Economia**, v. 68, n. 2, p. 225–241, 2014.
- MARODIN, F. A.; PORTUGAL, M. S. **Exchange Rate Pass-Through in Brazil: a Markov switching estimation for the inflation targeting period (2000-2015)**. [S.l.], 2018.
- MODENESI, A. de M.; LUPORINI, V.; PIMENTEL, D. Asymmetric exchange rate pass-through: Evidence, inflation dynamics and policy implications for brazil (1999–2016). In: **The Brazilian Economy since the Great Financial Crisis of 2007/2008**. [S.l.]: Springer, 2017. p. 69–99.
- MOURA, G. V. Multiplicadores fiscais e investimento em infraestrutura. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 69, n. 1, p. 75–104, 2015.
- MOURA, G. V.; NORILLER, M. R. Maximum likelihood estimation of a tvp-var. **Economics Letters**, Elsevier, v. 174, p. 78–83, 2019.
- NAKAJIMA, J. Time-varying parameter var model with stochastic volatility: An overview of methodology and empirical applications. 2011.
- PETROVA, K. A quasi-bayesian nonparametric approach to time varying parameter var models. **Journal of Econometrics**, Elsevier, Mai 2018.
- PETROVA, K.; MATTHES, C.; LIU, L. Monetary policy across space and time. Working Paper, 2018.
- PFEIFER, J. A guide to specifying observation equations for the estimation of dsge models. **Research series**, p. 1–150, 2014.
- PIVETTA, F.; REIS, R. The persistence of inflation in the united states. **Journal of Economic dynamics and control**, Elsevier, v. 31, n. 4, p. 1326–1358, 2007.

PRIMICERI, G. E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, v. 72, n. 3, p. 821–852, 2005.

RAVN, M. O.; UHLIG, H. On adjusting the hodrick-prescott filter for the frequency of observations. **Review of economics and statistics**, MIT Press, v. 84, n. 2, p. 371–376, 2002.

ROACHE, S. K. Inflation persistence in brazil-a cross country comparison. International Monetary Fund, n. 14-55, 2014.

ROBERTS, G. O. et al. Weak convergence and optimal scaling of random walk metropolis algorithms. **The annals of applied probability**, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 1, p. 110–120, 1997.

SIMS, C. A. Solving linear rational expectations models. **Computational economics**, Springer, v. 20, n. 1, p. 1–20, 2002.

STOCK, J. H.; WATSON, M. W. Why has us inflation become harder to forecast? **Journal of Money, Credit and banking**, Wiley Online Library, v. 39, p. 3–33, 2007.

## APÊNDICE A - Algoritmo de Carter e Kohn (1994)



Considere o seguinte modelo de espaço de estados:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\theta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{F} \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \boldsymbol{\nu}_t \quad (\text{A.2})$$

onde A.1 é a equação de medida e A.2 é a equação de transição de estados. A matriz de covariância do modelo é dado por:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{\nu}_t \end{bmatrix} \sim i.i.d. \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{R}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \right).$$

Considerando  $\mathbf{Y}^s := \{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^s$ ,  $\mathbf{Z}^s := \{\mathbf{Z}_t\}_{t=1}^s$  e  $\mathcal{R}^s := \{\mathcal{R}_t\}_{t=1}^s$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{t|s} &= \mathbb{E} [\boldsymbol{\theta}_t \mid \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}^s, \mathcal{R}^s, \mathcal{Q}], \\ \mathbf{V}_{t|s} &= \mathbf{Var} [\boldsymbol{\theta}_t \mid \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}^s, \mathcal{R}^s, \mathcal{Q}]. \end{aligned}$$

O algoritmo de Carter e Kohn (1994) ocorre em duas etapas:

1. **Forward Filtering:** Dados os valores iniciais  $\boldsymbol{\theta}_{0|0}$  e  $\mathbf{V}_{0|0}$ , o filtro de Kalman pode ser utilizado para computar as estimativas filtradas dos estados, para  $t = 1, 2, \dots, T$ , tal que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{t|t-1} &= \mathbf{F} \boldsymbol{\theta}_{t-1|t-1}, \\ \mathbf{V}_{t|t-1} &= \mathbf{F} \mathbf{V}_{t-1|t-1} \mathbf{F}' + \mathcal{Q}, \\ \mathbf{K}_t &= \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' (\mathbf{Z}_t \mathbf{V}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' + \mathcal{R}_t)^{-1}, \\ \boldsymbol{\theta}_{t|t} &= \boldsymbol{\theta}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\theta}_{t|t-1}), \\ \mathbf{V}_{t|t} &= \mathbf{V}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t \mathbf{V}_{t|t-1}. \end{aligned}$$

2. **Backward Sampling:** As estimativas na última iteração do filtro,  $\boldsymbol{\theta}_{T|T}$  e  $\mathbf{V}_{T|T}$ , podem ser utilizadas para amostrar  $\boldsymbol{\theta}_T$ , uma vez que definem a média e a variância de sua distribuição. Estes resultados são utilizados para obter estimativas suavizadas de  $\boldsymbol{\theta}_t$ , dado que as recursões para trás permitem amostrar  $\boldsymbol{\theta}_t \mid \boldsymbol{\theta}_{t+1}, \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}^s, \mathcal{R}^s, \mathcal{Q} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}_{t|t+1}, \mathbf{V}_{t|t+1})$ , onde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{t|t+1} &= \boldsymbol{\theta}_{t|t} + \mathbf{V}_{t|t} \mathbf{F}' \mathbf{V}_{t+1|t}^{-1} (\boldsymbol{\theta}_{t+1} - \mathbf{F} \boldsymbol{\theta}_{t|t}), \\ \mathbf{V}_{t|t+1} &= \mathbf{V}_{t|t} - \mathbf{V}_{t|t} \mathbf{F}' \mathbf{V}_{t+1|t}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{V}_{t|t}, \end{aligned}$$

para  $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ .