



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Isabella Aparecida Marzola

Modelos termodinamicamente consistentes para matéria de quarks

Florianópolis
2020

Isabella Aparecida Marzola

Modelos termodinamicamente consistentes para matéria de quarks

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Física.
Orientadora: Débora Peres Menezes, Dra.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Marzola, Isabella Aparecida

Modelos termodinamicamente consistentes para matéria de
quarks / Isabella Aparecida Marzola ; orientador, Débora
Peres Menezes, 2020.

70 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Física Nuclear. 3. Modelos Efetivos. 4.
Matéria de Quarks e Matéria Estranha. 5. Estrelas
Estranhas. I. Peres Menezes, Débora. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

Isabella Aparecida Marzola

Modelos termodinamicamente consistentes para matéria de quarks

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Luiz Laercio Lopes, Dr.

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais Campus VIII

Prof. Adj. Odilon Lourenço da Silva Filho , Dr.

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.

Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Débora Peres Menezes, Dra.
Orientadora

Florianópolis, 2020.

À PCDM, em especial à Virgínia.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais por todo apoio, pelo possível e o impossível feito para que eu tivesse essa oportunidade, e aos meus queridos irmãos que sempre me motivaram a estudar e a perscrutar meus objetivos.

Agradeço à Prof.(a) Débora, minha orientadora, por ter embarcado comigo nesse desafio, por ter sido muito paciente e sempre muito solícita.

Gostaria de agradecer também meus amigos pela amizade ao longo dos anos, e também à todos os colegas e demais pessoas que passaram pela minha vida por toda ajuda e aprendizado deixado.

Agradeço enfim à CAPES pelo apoio financeiro em minha trajetória final.

*“The good thing about science
is that it is true whether
or not you believe in it.”
(Neil deGrasse Tyson)*

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é estudar a matéria de quarks em condições extremas, no caso temperatura zero e altas densidades, condições encontradas em objetos compactos tais como as estrelas estranhas. Para isso se faz uso de um modelo proposto recentemente em que a massa dos quarks depende da densidade, além de possuir o diferencial de ser um modelo consistente termodinamicamente. Inicialmente se estabelece o critério termodinâmico a ser satisfeito, seguido da obtenção das equações de estado e da massa dos quarks. Após a apresentação e discussão dos resultados numéricos, prossegue-se para uma breve comparação entre estas equações e as do modelo do MIT, por se tratar de um modelo amplamente utilizado na descrição da matéria de quarks. Algumas importantes considerações são feitas quanto à estabilidade dessa matéria. Por fim, a neutralidade de carga e o equilíbrio beta são aplicados às equações de estado que descrevem a matéria estranha para que estas sejam implementadas às equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) a fim de se obter as principais propriedades nas estrelas estranhas: suas massas máximas e respectivos raios, que são então, confrontados com resultados observacionais.

Palavras-chave: Modelos Efetivos. Matéria Estranha. Estrelas Estranhas.

ABSTRACT

The goal of the present work is to study quark matter under extreme conditions, like zero temperature and high densities, conditions found in compact objects such as strange stars. To achieve this goal, a model recently proposed is used. This model describes quark mass as being density-dependent and having the differential of being thermodynamically consistent. Initially, the thermodynamic criterion is established, and the equations of state and the quark mass are derived. After numerical results presentation and discussion, a brief comparison between the model and the MIT Bag Model is done, because it is extensively used to describe quark matter. Some important considerations are done regarding the stability of quark matter. Finally, charge neutrality and beta equilibrium are taken into account in the equations of state that describe strange matter. They are used as input to the TOV equations to achieve the main properties of strange stars: their maximum masses and respective radii, which are compared with observational values.

Keywords: Effective Models. Strange Matter. Strange Stars.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução estelar, (TORRES, James Rudnei, 2011).	16
Figura 2 – Nucleossíntese.	18
Figura 3 – Diagrama de fases da Quantum Chromodynamics - Cromodinâmica Quântica (QCD) com temperatura versus potencial químico, (ALFORD, HAN E SCHWENZER, 2019).	21
Figura 4 – Diagrama de fases da QCD com temperatura versus densidade bariônica.	22
Figura 5 – Energia de ligação por nucleon dos elementos químicos em função do número de nucleons, (MENEZES, Débora Peres, 2002).	31
Figura 6 – Janela de estabilidade da matéria estranha descrita pelo Modelo QP em termos dos parâmetros ajustáveis C e D	32
Figura 7 – Região estável da matéria estranha descrita pelo Modelo QP.	33
Figura 8 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP variando ambos os parâmetros C e D	34
Figura 9 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP fixando o parâmetro C em -0.49	35
Figura 10 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP fixando o parâmetro \sqrt{D} em 185 MeV.	36
Figura 11 – Massa dos Quarks up, down e strange para C fixo em -0.49	37
Figura 12 – Massa dos Quarks up, down e strange para D fixo em 185 MeV.	37
Figura 13 – Massa dos Quarks up, down e strange variando os parâmetros C e D	38
Figura 14 – Equações de Estado do Modelo QP variando ambos os parâmetros C e D	39
Figura 15 – Equações de Estado do Modelo QP fixando o parâmetro C em -0.49	40
Figura 16 – Equações de Estado do Modelo QP fixando o parâmetro \sqrt{D} em 185 MeV.	40
Figura 17 – Equações de Estado para o Modelo QP e o Modelo do MIT variando seus parâmetros ajustáveis.	41
Figura 18 – Ilustração da relação Massa-Raio para estrelas estranhas. O raio de Schwarzschild ($R = 2GM$) está representado pela linha pontilhada cinza, (TRADUZIDO DE AGUDELO, 2013).	44
Figura 19 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas utilizando o Modelo QP com o parâmetro C fixo em -0.49	45
Figura 20 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas utilizando o Modelo QP com o parâmetro \sqrt{D} fixo em 185 MeV.	46
Figura 21 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas com o Modelo QP para diferentes valores de C e \sqrt{D}	47

Figura A1 – Número de ocupação médio de férmions para diferentes temperaturas.	59
Figura A2 – Janela de estabilidade da matéria estranha descrita pelo modelo do MIT. Os valores dentro das bandeiras representam a massa máxima (em unidades de M_{\odot}) de uma estrela estranha cuja equação de estado tomou os valores do ponto $(B^{1/4}, m_0s)$, (TORRES, J. R.; MENEZES, D. P., 2013).	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Massas máximas (M_{max}) e seus respectivos raios (R) para estrelas estranhas no modelo QP.	47
Tabela 3.2 – Relação massa-raio das estrelas canônicas no modelo QP.	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	Color-Flavor Locking - Supercondutividade de Cor-Sabor
LHC	Large Hadron Collider - Grande Colisor de Hádrons
MIT	Massachusetts Institute of Technology - Instituto de Tecnologia de Massachusetts
QCD	Quantum Chromodynamics - Cromodinâmica Quântica
QGP	Quark-Gluon Plasma - Plasma de Quarks e Glúons
QMDD	Quark Mass Density Dependent - Massa dos Quarks Dependente da Densidade
QMDTD	Quark Mass Density and Temperature Dependent - Massa dos Quarks Dependente da Densidade e da Temperatura
QP	Equipartículas
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider - Colisor Relativístico de Íons Pesados
SQM	Strange Quark Matter - Matéria Estranha
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkoff

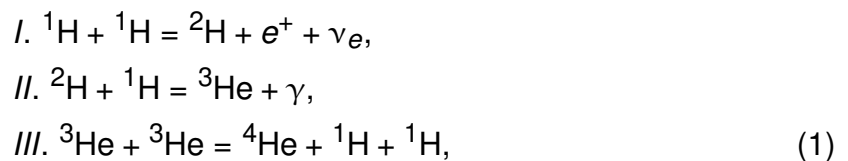
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO - EVOLUÇÃO ESTELAR	15
1.1	ESTRELAS ESTRANHAS	18
2	O MODELO DE EQUIPARTÍCULAS PARA A MATÉRIA ESTRANHA	23
2.1	MODELO DE EQUIPARTÍCULAS	23
2.1.1	Formalismo - Consistência Termodinâmica	23
2.1.2	Equações de Estado	27
2.1.3	Massa dos Quarks	29
2.2	JANELA DE ESTABILIDADE	30
2.2.1	Resultados e Discussão	33
2.2.1.1	Resultados - Consistência Termodinâmica	33
2.2.1.2	Resultados - Massa dos Quarks	36
2.2.1.3	Resultados - Equações de Estado	38
2.2.1.4	Resultados - O Modelo QP e o modelo do Massachusetts Institute of Technology - Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT)	41
3	MODELANDO ESTRELAS ESTRANHAS	42
3.1	EQUILÍBRIO BETA E NEUTRALIDADE DE CARGA	42
3.2	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO	43
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	49
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – MODELO DO MIT E EQUAÇÕES DE ESTADO PARA FÉRMIONS LIVRES	54
A.1	FORMALISMO - MODELO DO MIT	54
A.2	EQUAÇÕES DE ESTADO PARA FÉRMIONS LIVRES (ELÉTRONS)	60
	APÊNDICE B – AS EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)	61
B.1	ESPAÇO-TEMPO NÃO EUCLIDIANO	61
B.2	A EQUAÇÃO DE EINSTEIN	63
B.3	MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	64
B.4	EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)	67

1 INTRODUÇÃO - EVOLUÇÃO ESTELAR

Assim como os seres vivos, as estrelas também possuem um ciclo de vida, com início, meio e fim. O início ocorre através da pré-sequência principal. Nela, regiões de nuvens moleculares frias e densas normalmente compostas por gás hidrogênio podem sofrer um colapso gravitacional que altera a velocidade de rotação do gás. A conservação de momento angular durante esse colapso é responsável pela formação de pequenos fragmentos que se contraem, dando origem as protoestrelas. As protoestrelas giram rápido devido à energia cinética do gás, diminuindo suas densidades e permitindo que se expandam. Entretanto, essa expansão vinda do interior enfrenta a ação da força gravitacional proveniente do exterior numa busca por equilíbrio. Apesar disso a temperatura continua aumentando até o ponto em que as reações nucleares começam, em torno de 10^7 K (GLENDEENING, 2000)¹.

As reações nucleares no interior da protoestrela se iniciam a partir da ionização do gás hidrogênio em seu interior, com os elétrons se movendo à velocidades muito altas. Nesse cenário, a temperatura é tão alta que ocorre colisão e fusão de prótons, e consequentemente, a formação de hélio como mostrado a seguir:



sendo ${}^1\text{H}$ = íon de hidrogênio (ou prótons livres), ${}^2\text{H}$ = deutério, e^+ = pósitron, ν_e = neutrino do elétron, ${}^3\text{He}$ = íon de hélio, γ = fóton e ${}^4\text{He}$ = íon ou núcleo de hélio (ou ainda, partícula α). Essas reações conhecidas como cadeira próton-próton ocorrem todas ao mesmo tempo no núcleo da protoestrela, porém, o passo I deve ocorrer no mínimo duas vezes para criar dois núcleos de deutério e o passo II deve ocorrer no mínimo duas vezes para criar dois ${}^3\text{He}$, para assim resultar na formação de um único ${}^4\text{He}$ e dois ${}^1\text{H}$ (passo III). Conforme o hélio vai sendo formado, a estrela passa por uma grande expansão e entra no próximo estágio, chamado de sequência principal. A estrela permanece nesse estágio por cerca de 90% de sua vida, convertendo hidrogênio em hélio. Na Fig. (1) está representado o ciclo completo de vida das estrelas, onde existem três caminhos possíveis após a sequência principal.

¹ Protoestrelas com valores de massa até $0.8 M_{\odot}$ (massas solares) não atingem essa temperatura e terminam como anãs marrons, onde não há fusão de hidrogênio.



Figura 1 – Evolução estelar, (TORRES, James Rudnei, 2011).

O que determina qual dos caminhos a estrela seguirá é sua massa inicial enquanto protoestrela. Para valores de massa entre $0.8 M_{\odot}$ e $25 M_{\odot}$ todo o hidrogênio no núcleo é convertido em hélio, de modo que o núcleo começa a se contrair. Essa contração aumenta a energia interna da estrela e inflama uma camada de hidrogênio que queima ao redor do núcleo inerte. Enquanto isso, o núcleo continua a se contrair e a aumentar a temperatura, elevando a taxa de geração de energia no reservatório de hidrogênio. Ocorre então uma enorme expansão da estrela, junto com o aumento de sua luminosidade. A estrela se torna uma gigante vermelha. Nesse estágio, a temperatura do núcleo se torna alta o suficiente para queimar hélio em tempo menor do que ocorre com o hidrogênio. Essa queima ocorre através de reações como:



onde, ${}^8\text{Be}$ = átomo de berílio instável e ${}^{12}\text{C}$ = átomo de carbono. Além dessas, outras reações envolvendo o hélio podem ocorrer resultando em oxigênio. Após todo o hélio ser convertido em carbono (e oxigênio), o núcleo começa a se contrair e aumentar a temperatura novamente, formando uma camada de hélio logo acima do núcleo, que por sua vez é cercada por uma camada de hidrogênio. Inicia-se então a fase chamada de super gigante vermelha, que toma dois rumos distintos:

- No primeiro, o tipo-I ($0.8 M_{\odot} < M < 8 M_{\odot}$), o núcleo continua a se contrair mas não alcança temperaturas suficientes para fundir carbono em reações de nucle-

ossíntese. Em vez disso, essa contração faz com que o núcleo seja suportado apenas pela pressão de degenerescência eletrônica, não sendo possível se contrair mais. Ao mesmo tempo, a existência das duas camadas ao redor do núcleo leva à uma situação instável termicamente. Isso faz com que as camadas se expandam a cada pulso térmico, resultando numa perda de massa. Eventualmente, essas camadas são ejetadas formando uma nebulosa planetária e deixando para trás um núcleo composto praticamente de carbono e oxigênio, chamado de anã branca;

- No segundo, o tipo-II ($8 M_{\odot} < M < 25 M_{\odot}$), o núcleo em contração atinge a temperatura capaz de iniciar a conversão do carbono (e do oxigênio) em néônio. Iniciam-se as reações de nucleossíntese, onde o processo de queima do núcleo seguido por sua contração e inflamação das camadas externas se repete sucessivamente, produzindo elementos cada vez mais pesados até que o ferro (^{56}Fe) seja formado no núcleo. Ao produzir uma quantidade de Ferro suficiente, as reações de fusão são interrompidas, pois o ferro é tão fortemente ligado que não são possíveis outras reações de fusão exotérmicas a partir do ferro, ou seja, nenhuma energia pode ser extraída através da fusão para permitir que elementos mais pesados sejam formados no interior da estrela. Devido a isso a estrela colapsa sob sua própria gravidade, explodindo em uma supernova e ejetando suas camadas externas. Durante esse curto período de super compressão, temperaturas super altas ocorrem e algumas fusões endotérmicas podem ocorrer, produzindo núcleos de elementos mais pesados que o ferro. Da explosão da supernova resta então a camada mais interna, um núcleo denso onde as altas energias cinéticas dos elétrons tornam favorável o decaimento β inverso: prótons e elétrons se combinam formando nêutrons e neutrinos. A maior parte dos neutrinos escapa levando parte da energia gravitacional. O objeto resultante chama-se estrela de nêutrons. As estrelas de nêutrons são as menores e mais densas estrelas conhecidas, podendo tomar diferentes formas, tais como: estrelas de híperons, híbridas ou estranhas (GLENDENNING, 2000). As estrelas de híperons podem ocorrer caso os bárions sejam convertidos em híperons durante a explosão de supernova. Já as estrelas híbridas seriam estrelas de nêutrons cujo núcleo é constituído por matéria de quarks livres, e as estrelas estranhas seriam estrelas totalmente constituídas por matéria de quarks livres. Além disso, caso a pressão dos nêutrons não seja suficiente para suportar a gravidade, as estrelas de nêutrons poderiam se tornar ainda buracos negros;

O terceiro caminho possível para a vida da estrela após a sequência principal ocorre para valores de massa inicial entre $25 M_{\odot}$ e $100 M_{\odot}$ (tipo-III), onde as reações de nucleossíntese ocorrem da mesma forma como descrita para o tipo-II. A diferença

está no fato de que essas reações ocorrem na chamada estrela Wolf-Rayet, que ao colapsar em uma supernova se torna diretamente um buraco negro. A Fig. (2) ilustra as camadas dos elementos formados nas reações de nucleossíntese no interior das estrelas com massa inicial acima de $8 M_{\odot}$. É importante ressaltar que as camadas ejetadas em forma de gás, durante as explosões de supernovas, são responsáveis pela distribuição dos elementos químicos no universo. Isso permitiu a abundância de elementos em planetas como a Terra, onde é possível a existência de vida humana.

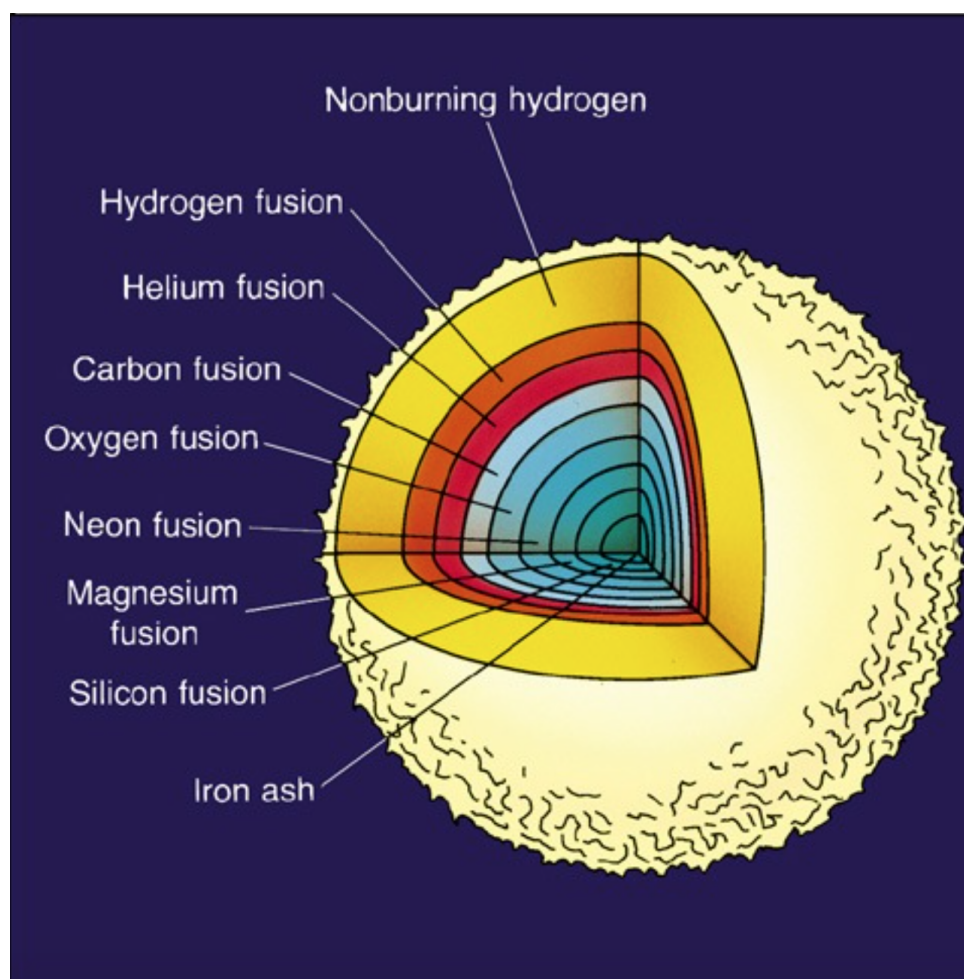


Figura 2 – Nucleossíntese.

Sabendo agora o ciclo de vida das estrelas, pode-se discutir o intuito deste trabalho: estudar as estrelas estranhas, uma das possíveis formas das estrelas de nêutrons.

1.1 ESTRELAS ESTRANHAS

As estrelas de nêutrons foram propostas como resmanescentes das explosões de supernovas, sendo sustentadas pela pressão de degenerescência dos nêutrons (BAADE; ZWICKY, 1934). Dentre muitos estudos a respeito das estrelas de nêutrons,

um deles se destacou ao sugerir que uma estrela emite energia caso esteja fortemente magnetizada (PACINI, 1967), tendo sido comprovada através da descoberta dos pulsares por Hewish e Bell (HEWISH *et al*, 1967) no mesmo ano. Os pulsares seriam então estrelas de nêutrons em rotação com elevados campos magnéticos, uma vez que, um período estável de emissão de sinais havida sido detectado e poderia ser explicado pelas características das estrelas de nêutrons (GOLD, 1968).

Além disso, a partir das equações de estado que descrevem a matéria presente nesses objetos compactos, é possível obter suas propriedades macroscópicas, como a massa e o raio, pelas equações da Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER e VOLKOFF, 1939), que são derivadas das equações de campo de Einstein para a relatividade geral. O raio da estrela é em torno de 10 Km (MENEZES *et al*, 2015), e estima-se que estrelas com massas superiores à $0.7 M_{\odot}$ não poderiam ser sustentadas por um gás de nêutrons livres devido à repulsão entre os nêutrons. Isso deixa claro que, além dos nêutrons, há outras partículas que compõem estas estrelas (WEBER, 1999), além do que, para aumentar a massa máxima, é importante a introdução da interação nuclear. E considerando que a densidade no núcleo é extremamente alta, poderiam aparecer outros estados da matéria no interior da estrela, compostos desde píons e káons à híperons e quarks livres.

Neste trabalho, os pulsares são considerados como sendo estrelas constituídas somente pelos sabores de quarks up (u), down (d) e strange (s), além dos elétrons (e), sendo chamadas então de estrelas estranhas. As estrelas estranhas devem obedecer a "hipótese da matéria estranha", proposta por Bodmer (BODMER, 1971) e (WITTEN, 1984), independentemente, onde o estado fundamental absolutamente estável da matéria é dado pelos quarks u, d, e s desconfinados e não pelos hádrons (prótons e nêutrons) que constituem a matéria ordinária.

No estudo dos possíveis estados da matéria se faz uso da teoria das interações fortes, a chamada cromodinâmica quântica, cujo diagrama de fases está representado pelas figuras (3) e (4). Em (3), as fases da matéria estão relacionadas pela temperatura e potencial químico das partículas, e em (4) pela temperatura e densidade bariônica. Como é possível relacionar o potencial químico com a densidade bariônica através do momento de Fermi, os diagramas podem ser interpretados como equivalentes. À temperaturas e densidades ordinárias a força forte confina os quarks dentro dos hádrons formando a matéria comum do nosso dia a dia. Porém, quando a temperatura atinge o ponto crítico ou quando a densidade aumenta ao ponto em que a separação entre quarks é muito pequena, os hádrons se dissolvem em quarks, dando origem à chamada matéria de quarks. Diferentes transições entre essas fases ocorrem de acordo com as condições de temperatura e densidade, como as apresentadas por estes diagramas:

- Para altas temperaturas e baixo potencial químico ocorre a transição da matéria

hadrônica para o plasma de quarks e glúons (Quark-Gluon Plasma - Plasma de Quarks e Glúons (QGP)) através de um crossover;

- Para baixas temperaturas e potenciais químicos maiores ocorre uma transição de fase de primeira ordem da matéria hadrônica para o QGP. Há então um ponto crítico na intersecção entre esse regime e o anterior;
- Para altas temperaturas e densidades (ou seja, alto potencial químico), a matéria encontrada é o QGP, sendo este estado possível de ser criado a partir da colisão de íons pesados nos aceleradores de partículas Relativistic Heavy Ion Collider - Colisor Relativístico de Íons Pesados (RHIC) e Large Hadron Collider - Grande Colisor de Hádrons (LHC);
- Para baixas temperaturas e baixo potencial químico há a matéria hadrônica (ou matéria ordinária);
- Ainda no regime de baixas temperaturas, porém com alto potencial químico, pode ocorrer uma transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks dentro das estrelas compactas (estrelas de nêutrons);
- Para potencial químico ainda mais alto, e baixa temperatura, existe a possibilidade de uma fase quarkiônica em que há restauração da simetria quiral mas ainda não ocorre o desconfinamento dos quarks;
- E aumentando mais o potencial químico nesse regime, uma matéria de quarks u , d e s pode formar pares de Cooper em uma fase supercondutora de cor (Color-Flavor Locking - Supercondutividade de Cor-Sabor (CFL), do inglês color-flavor locking) (ALFORD, 1998).

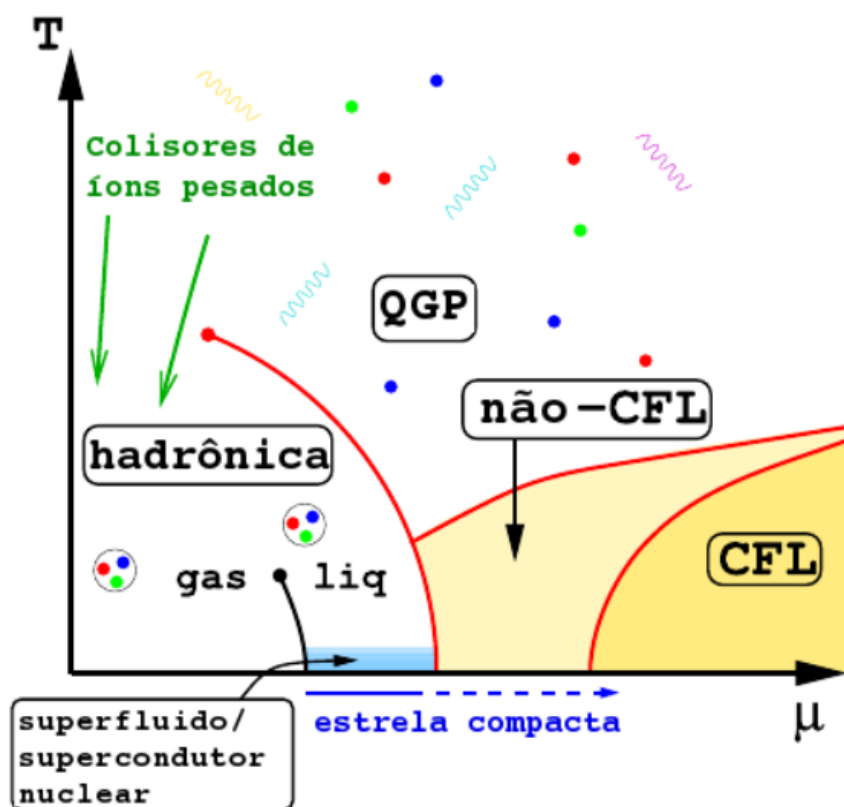


Figura 3 – Diagrama de fases da QCD com temperatura versus potencial químico, (ALFORD, HAN E SCHWENZER, 2019).

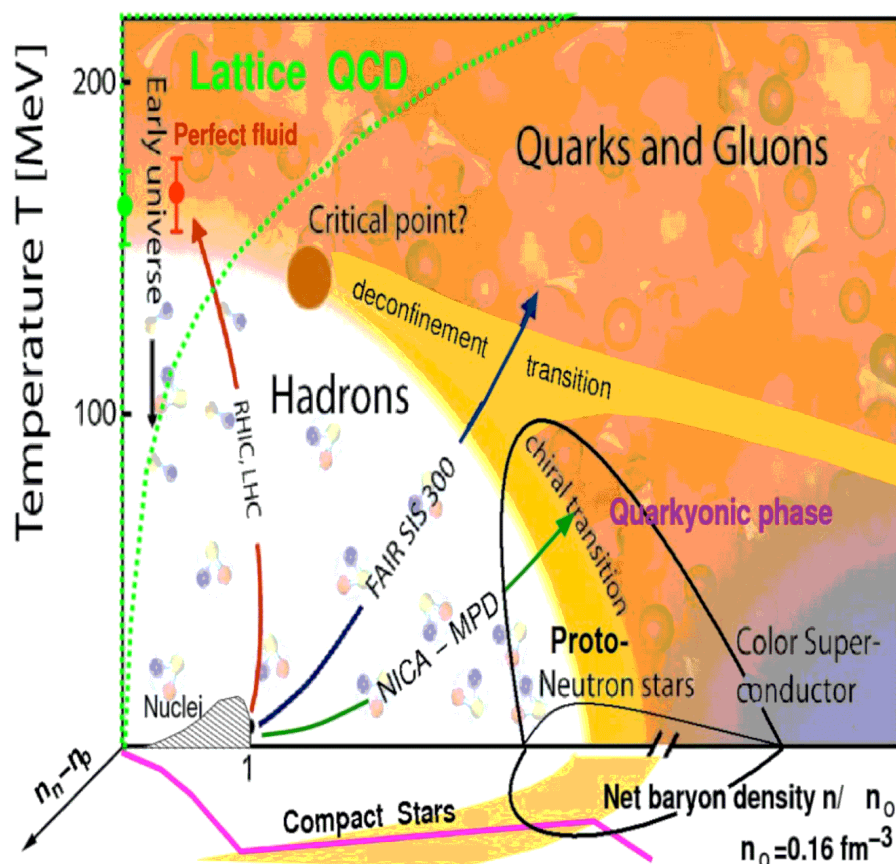


Figura 4 – Diagrama de fases da QCD com temperatura versus densidade bariônica.

Na QCD, um método numérico chamado QCD na rede é utilizado para descrever a região em que a temperatura é alta e o potencial químico é baixo (destacado em verde na Fig. (4)). Entretanto, este método não é capaz de descrever as demais regiões do diagrama. Além disso, devido à dificuldade de se resolver a QCD de forma exata para regimes não perturbativos, se faz necessário o uso de modelos fenomenológicos efetivos. Esses modelos são capazes de abordar regiões específicas do diagrama, como a região em que se encontram as estrelas compactas. Portanto, apresenta-se a seguir o modelo utilizado neste trabalho responsável por descrever a matéria estranha. E na sequência, as condições a serem satisfeitas para modelar as estrelas estranhas e os resultados numéricos obtidos.

2 O MODELO DE EQUIPARTÍCULAS PARA A MATÉRIA ESTRANHA

Bodmer e Witten, independentemente, propuseram a "hipótese da matéria estranha" como sendo o estado fundamental absolutamente estável da matéria, e que seria constituída pelos sabores de quarks up, down e strange (estranho) desconfinados. Até o momento, a matéria presente no mundo, formada pelos sabores de quarks up e down confinados nos hádrons, era considerada o estado fundamental. Porém, a partir dessa hipótese, o estado da matéria constituída de hádrons poderia não ser absolutamente estável.

Como supracitado, neste capítulo se encontra o modelo efetivo para descrever a matéria estranha. Inicialmente, o formalismo necessário para que o modelo seja termodinamicamente consistente é desenvolvido, seguido da obtenção das equações de estado e das massas dos quarks. Na sequência, discutem-se as considerações feitas para a janela de estabilidade dessa matéria. Por fim os resultados numéricos obtidos são apresentados para a consistência termodinâmica, a massa dos quarks e as equações de estado.

2.1 MODELO DE EQUIPARTÍCULAS

O modelo de Equipartículas (QP) foi proposto recentemente (XIA *et al*, 2014) com o intuito de investigar a matéria estranha partindo do pressuposto de que a massa dos quarks que a constitui seja dependente da densidade, pois sabe-se que a massa de uma partícula varia de acordo com o meio em que ela se propaga, sendo então plausível aplicar tal pressuposto. Além disso, o modelo corrige a falta de consistência termodinâmica presente até então em outros modelos do mesmo tipo, como o Quark Mass Density Dependent - Massa dos Quarks Dependente da Densidade (QMDD) (FOWLER G. N., RAHA S., WEINER R. M., 1981), o Quark Mass Density and Temperature Dependent - Massa dos Quarks Dependente da Densidade e da Temperatura (QMDDT) (ZHANG; SU, R.-K., 2002), etc.

2.1.1 Formalismo - Consistência Termodinâmica

Descreve-se a matéria estranha aqui como sendo um sistema termodinâmico constituído por dois tipos de partículas interagentes, os quarks up (u), down (d) e strange ou estranho (s), e os léptons representados pelos elétrons (e). Para que haja consistência termodinâmica nesse sistema, inicia-se o formalismo a partir da equação fundamental da termodinâmica na forma diferencial:

$$d\bar{E} = Td\bar{S} - PdV + \sum_i \mu_i d\bar{N}_i, \quad (3)$$

onde \bar{E} = energia interna, T = temperatura, \bar{S} = entropia, P = pressão, V = volume, μ_i = potencial químico da partícula i ($i = u, d, s, e$) e \bar{N} = número de partículas correspondente. Essas quantidades são responsáveis por descrever qualquer sistema termodinâmico em termos de sua energia interna. Porém, o interesse está em mensurar a energia livre de Helmholtz a partir da energia interna:

$$\bar{F} = \bar{E} - T\bar{S}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} d\bar{F} &= d\bar{E} - Td\bar{S} - \bar{S}dT \\ &= -\bar{S}dT - PdV + \sum_i \mu_i d\bar{N}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Como se trata de um sistema isotrópico com partículas distribuídas de forma homogênea, define-se as seguintes quantidades: densidade de energia $\varepsilon = \bar{E}/V$, densidade de energia livre $F = \bar{F}/V$, densidade de entropia $S = \bar{S}/V$ e a densidade do número de partículas $n_i = \bar{N}_i/V$. Da densidade de energia livre e do número de partículas se tem que:

$$\bar{F} = FV \rightarrow d\bar{F} = dFV + FdV, \quad (6)$$

$$\bar{N}_i = n_i V \rightarrow d\bar{N}_i = dn_i V + n_i dV, \quad (7)$$

que ao substituir na Eq. (5) resulta na seguinte densidade de energia livre:

$$\begin{aligned} dFV + FdV &= -\bar{S}dT - PdV + \sum_i \mu_i (dn_i V + n_i dV) \\ dF &= -SdT + \left(-P - F + \sum_i \mu_i n_i \right) \frac{dV}{V} + \sum_i \mu_i dn_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Ao escolher a densidade de energia F como a quantidade característica, a Eq. (8) indica que T , $\{n_i\}$, e V serão as variáveis de estado independentes no sistema, e uma vez conhecidas permitem o cálculo das outras quantidades termodinâmicas:

$$S = \left. \frac{dF}{dT} \right|_{\{n_k\}}, \quad (9)$$

$$\mu_i = \left. \frac{dF}{dn_i} \right|_{T, \{n_{k \neq i}\}}, \quad (10)$$

$$P = -F + \sum_i \mu_i n_i. \quad (11)$$

Como o sistema descrito é grande o suficiente, as quantidades de interesse se tornam independentes ao tamanho, ou seja, a dependência de tamanho que possuem assume um comportamento assintótico. Desse modo, o termo que seria correspondente ao volume na Eq. (8) é desconsiderado, assim:

$$dF = -SdT + \sum_i \mu_i dn_i. \quad (12)$$

Atentando-se um pouco para as eqs. (9) e (10), pode-se manipulá-las da seguinte maneira:

$$\frac{dS}{dn_i} = \frac{d}{dn_i} \left(\frac{dF}{dT} \right) \Big|_{\{n_k\}} \quad (13)$$

$$\frac{d\mu_j}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{dF}{dn_j} \right) \Big|_{T, \{n_{k \neq i}\}} \quad (14)$$

e lembrando que matematicamente as derivadas parciais mistas de segunda ordem de uma função analítica arbitrária são iguais, ou seja, $\frac{\partial^2 F}{\partial n_i \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial n_i}$, segue que:

$$\Delta_i \equiv \frac{dS}{dn_i} \Big|_{T, \{n_{k \neq i}\}} - \frac{d\mu_j}{dT} \Big|_{T, \{n_k\}} = 0, \quad (15)$$

$$\Delta_{ij} \equiv \frac{d\mu_j}{dn_j} \Big|_{T, \{n_{k \neq j}\}} - \frac{d\mu_i}{dn_i} \Big|_{T, \{n_{k \neq i}\}} = 0, \quad (16)$$

onde $i, j = u, d, s$. Tais equações são as condições de Cauchy para que o lado direito da Eq. (12) seja integrável. Retomando a densidade de energia livre na Eq. (12), observa-se que esta é uma função da temperatura e da densidade $n_b = n \equiv \sum_q n_q/3$, onde $q = u, d, s$. Assim, para uma dada temperatura T :

$$\frac{dF}{dn} = \sum_i \mu_i \frac{dn_i}{dn}. \quad (17)$$

Aplica-se então as condições nucleares de equilíbrio químico, neutralidade de carga e conservação da densidade de número bariônico dadas, respectivamente, por:

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s, \quad (18)$$

$$\frac{2}{3} n_u - \frac{1}{3} n_d - \frac{1}{3} n_s - n_e = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{3} (n_u + n_d + n_s) = n_b, \quad (20)$$

tendo então que,

$$\begin{aligned} n \frac{dF}{dn} &= n \left[\sum_q \mu_q \frac{dn_q}{dn} + \mu_e \frac{dn_e}{dn} \right] \\ &= n \left[\mu \sum_q \frac{dn_q}{dn} - \mu_e \frac{dn_u}{dn} + \mu_e \frac{dn_e}{dn} \right] \\ &= n \left[\mu \frac{d}{dn} \left(\sum_q n_q \right) - \mu_e \frac{d}{dn} (n_u - n_e) \right] \\ &= n(3\mu - \mu_e) \\ &= \mu \sum_q n_q - \mu_e n \\ &= \sum_q \mu_q n_q + \mu_e n_u - \mu_e n \\ &= \sum_i \mu_i n_i - \mu_e n_e + \mu_e n_u - \mu_e n \\ &= \sum_i \mu_i n_i + \mu_e (n_u - n_e - n) \\ &= \sum_i \mu_i n_i, \end{aligned} \quad (21)$$

onde $i = u, d, s, e$. Substituindo esse resultado na Eq. (11) têm-se que $P = -F + n \frac{dF}{dn}$ e sendo

$$\begin{aligned} n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{F}{n} \right)_T &= n^2 \left[\frac{1}{n} \frac{dF}{dn} - \frac{F}{n^2} \right] \\ &= n \frac{dF}{dn} - F, \end{aligned} \quad (22)$$

obtêm-se finalmente que:

$$P = n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{F}{n} \right)_T, \quad (23)$$

ou seja,

$$\Delta = P - n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{F}{n} \right)_T = 0. \quad (24)$$

Pode-se interpretar a Eq. (24) da seguinte forma: ao obter-se o mínimo de energia livre (ou o mínimo de energia à temperatura zero) a pressão tem de ser necessariamente zero. Isso significa que a energia livre mínima do sistema é um estado mecanicamente estável, que do ponto de vista termodinâmico é coerente. Assim sendo, fica estabelecido por este formalismo que as eqs. (15), (16) e (24) são os critérios necessários para que a matéria estranha seja termodinamicamente consistente independente do modelo que venha a ser utilizado para descrevê-la, sendo as eqs. (15) e (16) aplicáveis à matéria de quarks pura, sem a presença dos elétrons.

2.1.2 Equações de Estado

As equações de estado que descrevem um sistema termodinâmico como a matéria estranha serão obtidas a partir da densidade de energia livre. Seja então a densidade de energia livre uma função dada por:

$$F = \Omega_0(T, \{\mu_j^*\}, \{m_j\}) + \sum_j \mu_j^* n_j, \quad (25)$$

onde Ω_0 = potencial termodinâmico efetivo, T = temperatura, μ_j^* = potencial químico efetivo da partícula i (i = quarks u, d, s), m_j = massa efetiva da partícula i e n_j = densidade do número de partículas i . O potencial termodinâmico efetivo é introduzido como a quantidade responsável por permitir que haja troca de calor e/ou de partículas no sistema, sendo então uma função dependente da temperatura, dos potenciais químicos efetivos das partículas e das massas efetivas das partículas. Já os potenciais químicos μ_j^* , são considerados como efetivos para garantir a consistência termodinâmica do sistema, possuindo uma relação com os potenciais químicos reais das partículas a ser determinada em breve. E por fim, as massas das partículas também são consideradas efetivas pois elas dependerão da densidade:

$$m_j = m_{j0} + m_j, \quad (26)$$

onde m_{j0} = massa de corrente da partícula i , e m_j é a quantidade dependente da densidade. Tendo em vista que a função característica escolhida é a densidade de energia livre, as variáveis independentes de estado são: a temperatura, T , o volume V e a densidade do número de partículas, n_j . Como o potencial químico não faz parte das variáveis independentes de estado é feito uma escolha de conectá-lo à elas através da densidade do número de partículas:

$$n_j = -\frac{\partial}{\partial \mu_j^*} \Omega_0(T, \{\mu_j^*\}, \{m_j\}). \quad (27)$$

Para obter as outras quantidades termodinâmicas de interesse deriva-se a Eq. (25), assim:

$$dF = d\Omega_0 + \sum_i n_i d\mu_i^* + \sum_i \mu_i^* dn_i, \quad (28)$$

onde

$$d\Omega_0 = \frac{\partial\Omega_0}{\partial T} dT + \sum_i \frac{\partial\Omega_0}{\partial\mu_i^*} d\mu_i^* + \sum_i \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_i} dm_i, \quad (29)$$

com

$$dm_i = \frac{\partial m_i}{\partial T} dT + \sum_j \frac{\partial m_i}{\partial n_j} dn_j. \quad (30)$$

Aplicando as eqs. (27), (29) e (30) na Eq. (28), obtêm-se que:

$$dF = \left(\frac{\partial\Omega_0}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} \right) dT + \sum_i \left(\mu_i^* + \sum_j \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i} \right) dn_i. \quad (31)$$

Como o objetivo é que a densidade de energia livre do modelo esteja de acordo com a obtida na seção anterior, compara-se então as eqs. (12) e (31), resultando na densidade de entropia

$$S = -\frac{\partial\Omega_0}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T}, \quad (32)$$

e no potencial químico real

$$\mu_i = \mu_i^* + \sum_j \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \quad (33)$$

Finalmente a pressão pode ser obtida substituindo as eqs. (25) e (33) na Eq. (11):

$$\begin{aligned} P &= -\Omega_0 + \sum_i (\mu_i - \mu_i^*) n_i \\ &= -\Omega_0 + \sum_{i,j} \frac{\partial\Omega_0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i}, \end{aligned} \quad (34)$$

e a densidade de energia é obtida através da substituição das eqs. (25) e (32) em $\varepsilon = F + TS$, assim

$$\varepsilon = \Omega_0 - \sum_i \mu_i^* \frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu_i^*} - T \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial T} + \sum_i \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_i} \frac{\partial m_i}{\partial T} \right), \quad (35)$$

enquanto a densidade do potencial termodinâmico real do sistema é calculado a partir de

$$\begin{aligned} \Omega &= F - \sum_i \mu_i n_i \\ &= \Omega_0 - \sum_{i,j} \frac{\partial \Omega_0}{\partial m_j} n_i \frac{\partial m_j}{\partial n_i}. \end{aligned} \quad (36)$$

onde, Ω_0 é dado por (Peng *et al.*, 2000):

$$\Omega_0 = - \sum_i \frac{g_i T}{2\pi^2} \int_0^\infty \ln[1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + m_i^2} - \mu_i^*)}] p^2 dp, \quad (37)$$

sendo g_i = fator de degenerescência (para os quarks é dado pela degenerescência de spin e de cor, sendo igual à $2_{spin} \times 3_{cor} = 6$) e β = inverso da temperatura, pois $k_b = 1$ em unidades naturais. Para temperatura zero, o potencial termodinâmico efetivo é dado por:

$$\Omega_0 = - \sum_i \frac{g_i}{24\pi^2} \left[\mu_i^* \nu_i \left(\nu_i^2 - \frac{3}{2} m_i^2 \right) + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \frac{\mu_i^* + \nu_i}{m_i} \right], \quad (38)$$

onde $\nu_i = \sqrt{\mu_i^{*2} - m_i^2}$ é o momento de Fermi das partículas.

2.1.3 Massa dos Quarks

Para determinar as massas dos quarks, m_q , assume-se que ela possui um termo dependente da densidade:

$$m_q = m_{q0} + m_l, \quad (39)$$

onde m_{q0} = massa de corrente dos quarks q ($q = u, d, s$), e m_l é a quantidade dependente da densidade. Aplica-se uma expansão em série de Laurent em primeira ordem no momento de Fermi ν , e considera-se os termos principais em ambas as direções, assim:

$$m_l = \frac{a_{-1}}{v} + a_1 v, \quad (40)$$

com

$$v = \left(\frac{1}{N_f} \sum_q v_q^3 \right)^{1/3}, \quad (41)$$

onde v_q = momento de Fermi da partícula q e N_f = número de sabor dos quarks. A conexão entre o momento de Fermi e a densidade n_b se dá através de:

$$\begin{aligned} n_b &= \sum_q \frac{n_q}{3} \\ &= \left(\sum_q \frac{1}{3\pi^2} v_q^3 \right) \cdot \frac{N_f}{N_f} \\ &= \frac{N_f}{3\pi^2} v^3, \quad v = \left(\frac{3\pi^2}{N_f} n_b \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (42)$$

Ao aplicar o limite em que o momento de Fermi (ou a densidade) tende à zero, para baixas densidades, o primeiro termo da Eq. (40) domina, de modo a ser equivalente à $D/n_b^{1/3}$, onde D é um parâmetro ajustável. Já para altas densidades, o segundo termo domina, sendo equivalente à $Cn_b^{1/3}$, onde C é um segundo parâmetro ajustável. Sendo assim, a massa dos quarks finalmente é dada por:

$$m_q = m_{q0} + \frac{D}{n_b^{1/3}} + Cn_b^{1/3}. \quad (43)$$

2.2 JANELA DE ESTABILIDADE

Para obter as equações de estado da matéria estranha deve-se primeiramente determinar as massas dos quarks, e para fazê-lo necessita-se encontrar valores para os parâmetros ajustáveis C e D de modo a garantir que essa matéria seja estável. Seguindo o que foi apresentado sobre a hipótese de Bodmer-Witten, para que a matéria estranha seja absolutamente estável, ela deve satisfazer as seguintes condições simultaneamente:

- Sua energia mínima por bárion ($\frac{E}{A}$) deve ser inferior ao da energia por nucleon do ^{56}Fe (930 MeV) no ponto de saturação (quando a pressão é zero), por se tratar do elemento com o núcleo mais estável na natureza, Fig. (5), ou seja,

$$\left(\frac{\varepsilon}{n_B} = \frac{E}{A} \right)_{u,d,s} \leq 930 \text{ MeV}, \text{ e} \quad (44)$$

- A energia mínima por bárion da matéria com dois sabores (u, d) deve ser superior à 930 MeV (sendo assim menos estável que o núcleo do ^{56}Fe), ou seja,

$$\left(\frac{\varepsilon}{n_B} = \frac{E}{A}\right)_{u,d} > 930 \text{ MeV}. \quad (45)$$

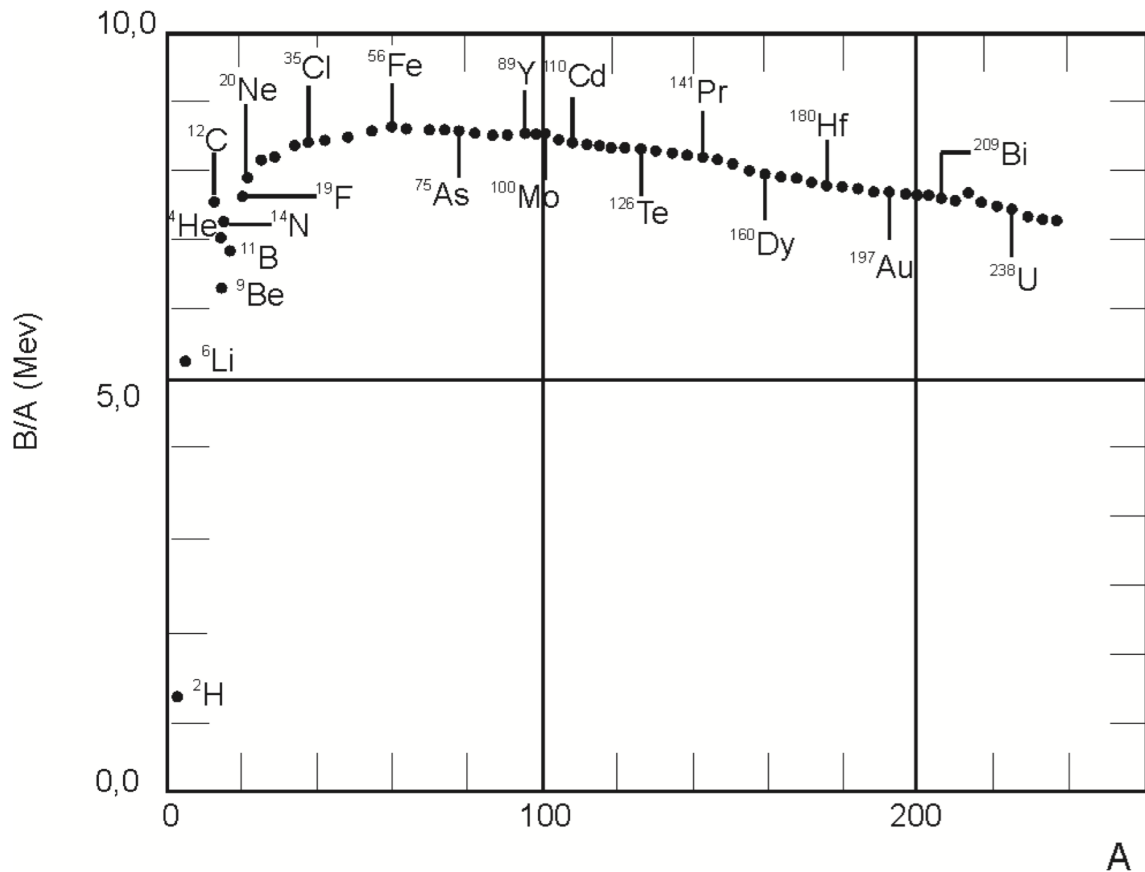


Figura 5 – Energia de ligação por nucleon dos elementos químicos em função do número de nucleons, (MENEZES, Débora Peres, 2002).

Fazendo uso de tais critérios, a janela de estabilidade é construída (Fig. 6), ou seja, se obtém diferentes regiões para os valores dos parâmetros ajustáveis C e D . Nesta janela considera-se que a matéria estranha é eletricamente neutra e está em equilíbrio químico. Os resultados apresentados a partir de agora consideram a massa de corrente dos quarks u, d, s como sendo 5 MeV, 10 MeV e 80 MeV, respectivamente (DAVIES, 2010).

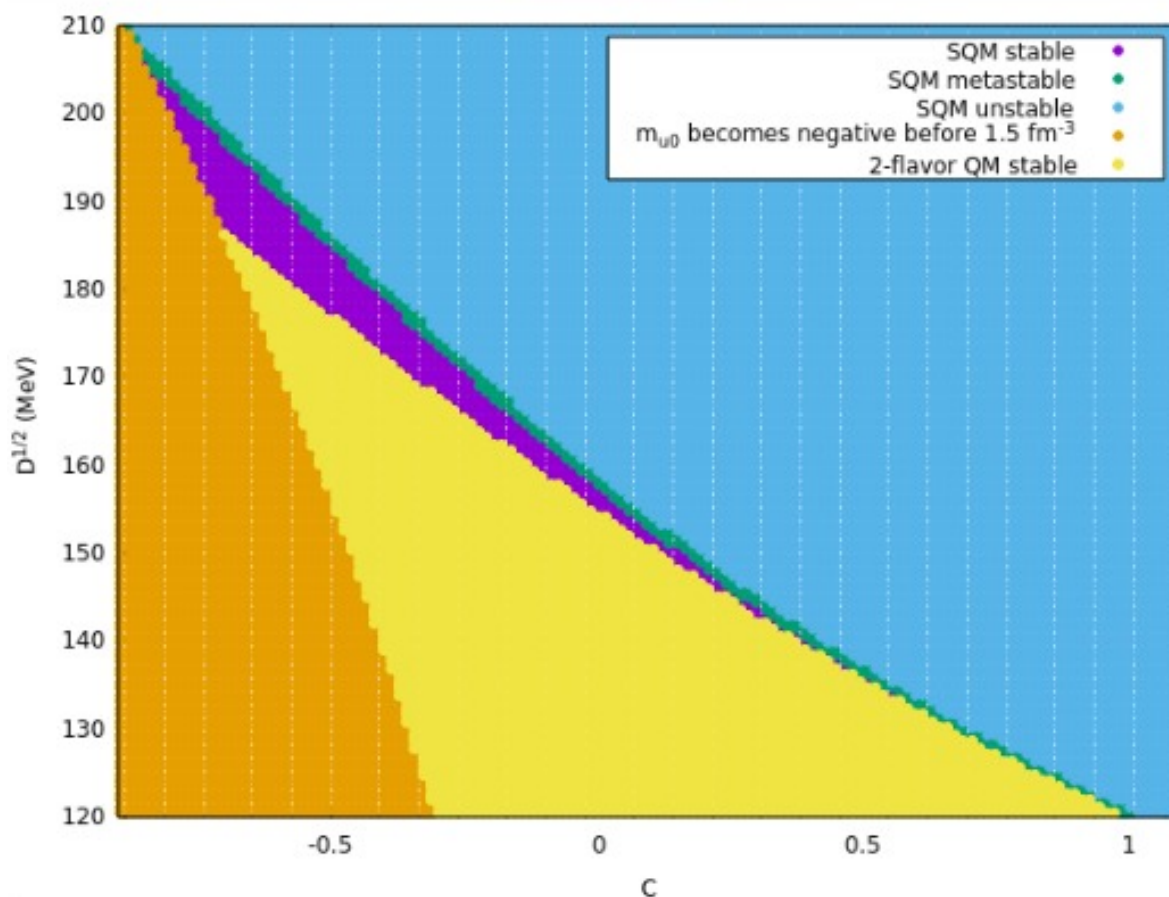


Figura 6 – Janela de estabilidade da matéria estranha descrita pelo Modelo QP em termos dos parâmetros ajustáveis C e D .

Observa-se que a região de maior interesse está representada em roxo, onde a matéria estranha (Strange Quark Matter - Matéria Estranha (SQM)) é absolutamente estável. Porém, é importante destacar as considerações feitas para as demais regiões:

- Em verde, na região metaestável, sua energia por bárion é maior do que 930 MeV, porém menor do que a massa dos nucleons (939 MeV) (PENG, 2008);
- Em azul claro, na região instável, sua energia por bárion é maior do que 939 MeV;
- Em amarelo, a energia por bárion foi calculada para a matéria de dois e três sabores, e aplicou-se os critérios de estabilidade para ambas, obtendo estabilidade apenas para a matéria de dois sabores;
- Em laranja, destaca-se a região em que a massa do quark up se torna negativa antes de densidades menores que 1.5 fm^{-3} devido à possibilidade do parâmetro C assumir valores negativos.

A região estável para a matéria estranha é dada separadamente pela Fig. (7) para melhor visualização dos possíveis valores de C e D.

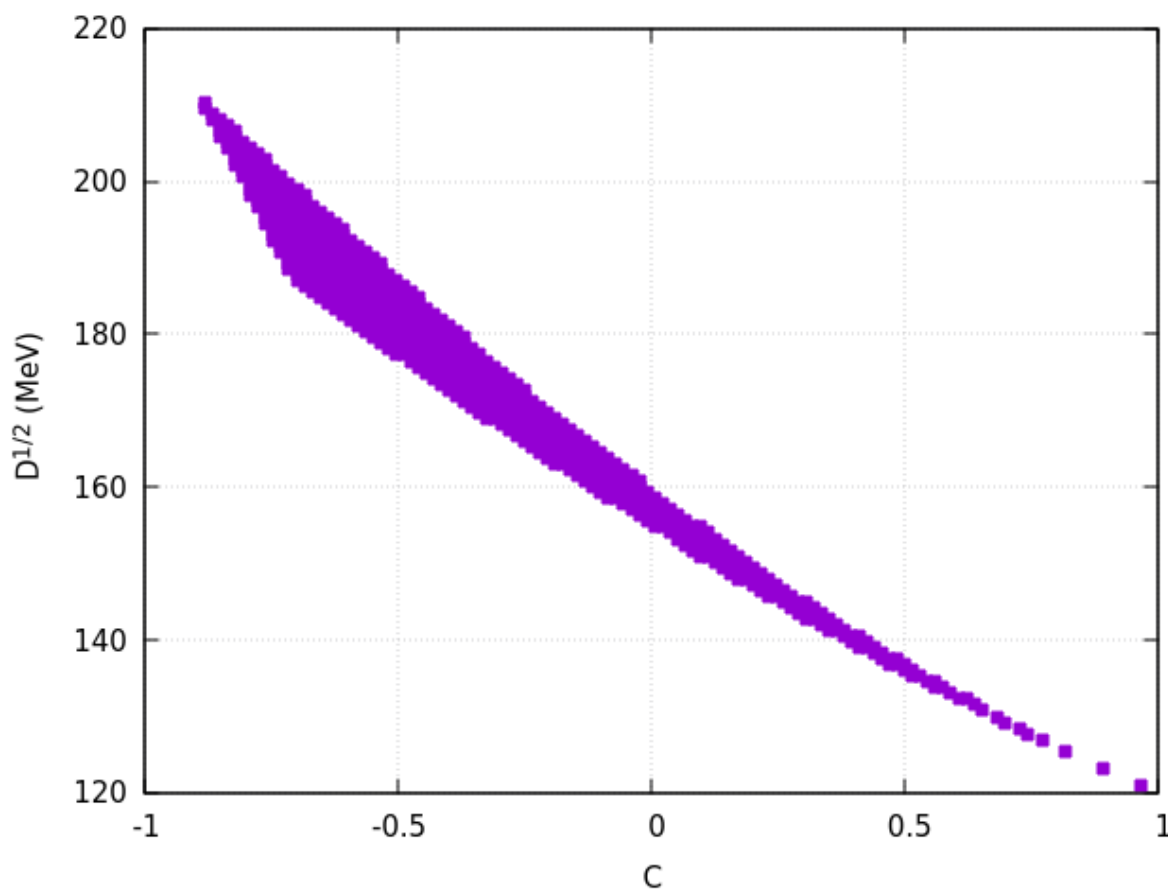


Figura 7 – Região estável da matéria estranha descrita pelo Modelo QP.

2.2.1 Resultados e Discussão

Estabelecido o formalismo necessário para descrever a matéria estranha e a partir da escolha de valores para os parâmetros C e D dentro da janela de estabilidade, um programa foi feito em uma linguagem computacional (FORTRAN) que permitisse encontrar soluções numéricas para as massas dos quarks e as equações de estado, bem como analisar a consistência termodinâmica.

2.2.1.1 Resultados - Consistência Termodinâmica

Para que o modelo seja termodinamicamente consistente, a energia mínima por bárion deve satisfazer a condição de estabilidade de ser inferior à 930 MeV, e a pressão zero deve ocorrer no ponto mínimo da densidade de energia por bárion como mostrado nas Figuras (8), (9) e (10). A reta paralela ao eixo x corresponde à 930 MeV de modo a facilitar a análise. Na Fig. (8) os resultados são apresentados variando ambos os parâmetros C e D. Apesar de os pontos de mínimo estarem destacados,

pode ser um pouco difícil de visualizá-los pois as curvas se sobrepõem, por isso as demais figuras apresentam os resultados numéricos fixando um dos dois parâmetros e variando o outro.

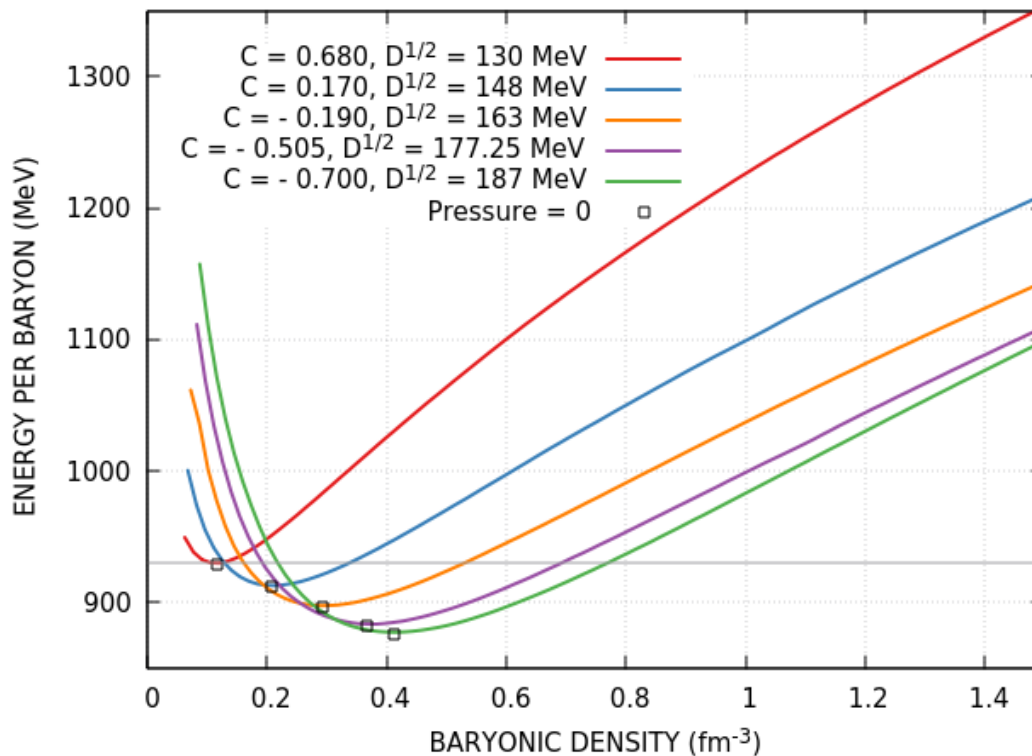


Figura 8 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP variando ambos os parâmetros C e D .

Na Fig. (9), o parâmetro C é fixado em -0.49 . Pode-se observar que o ponto de mínimo se desloca para a direita ao aumentar o valor do parâmetro D .

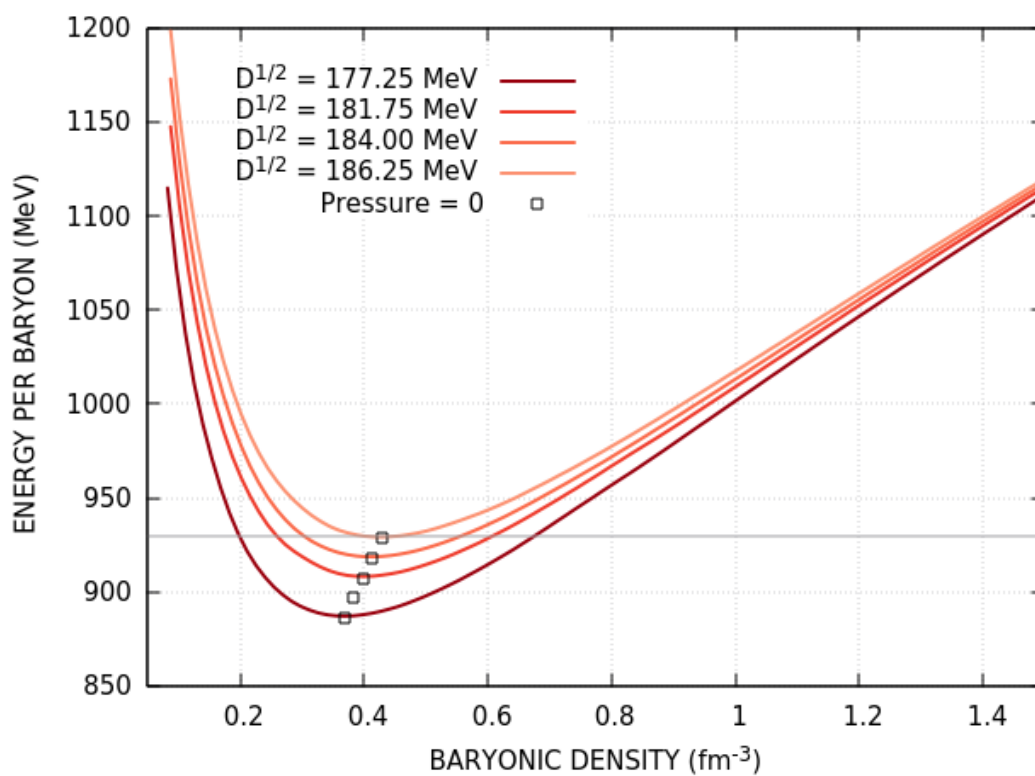


Figura 9 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP fixando o parâmetro C em - 0.49.

Já na Fig. (10), o parâmetro \sqrt{D} é fixado em 185 MeV, e diferentemente do caso anterior, o ponto de mínimo se desloca muito pouco ao aumentar ou diminuir o valor de C .

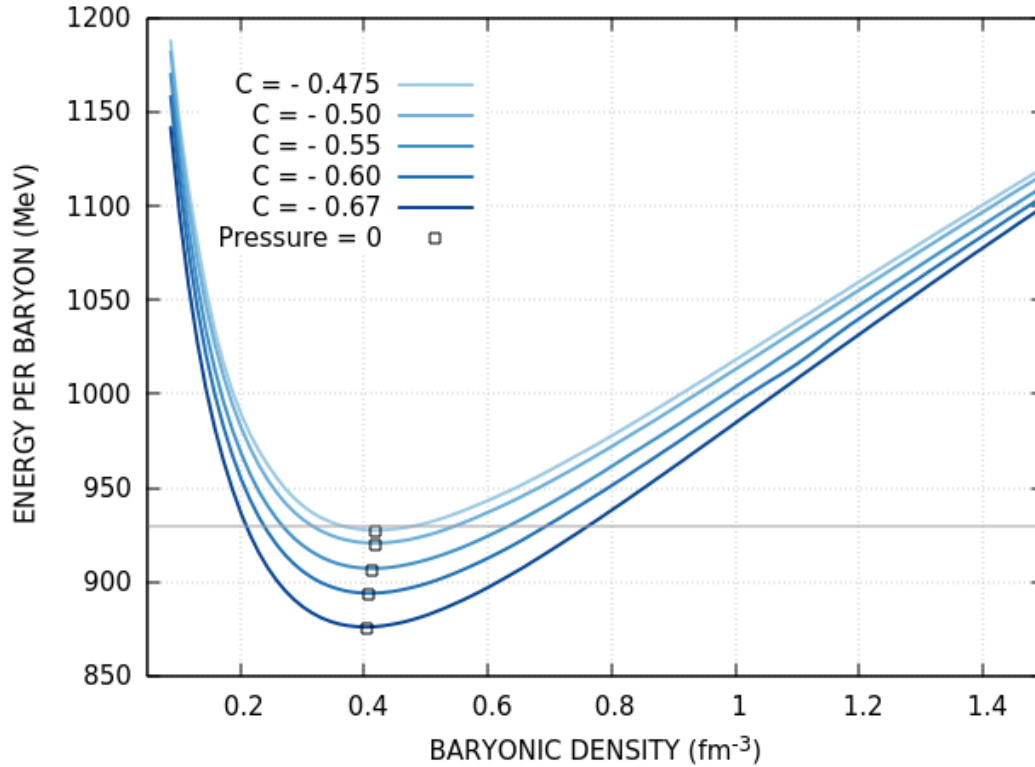


Figura 10 – Consistência Termodinâmica do Modelo QP fixando o parâmetro \sqrt{D} em 185 MeV.

2.2.1.2 Resultados - Massa dos Quarks

Devido à sua dependência na densidade, dada pela Eq. (43), a massa dos quarks diminui conforme a densidade aumenta, como pode ser observado nas Figuras (11), (12) e (13). Considerando a região estável para a matéria estranha, nas duas primeiras figuras citadas, um dos parâmetros (C e D) foi fixado enquanto alguns valores foram aplicados ao outro a fim de analisar a influência de cada um, separadamente, na massa dos quarks. Em ambos é possível observar que há pouca variação nos valores das massas dos quarks, quando um dos parâmetros está fixo.

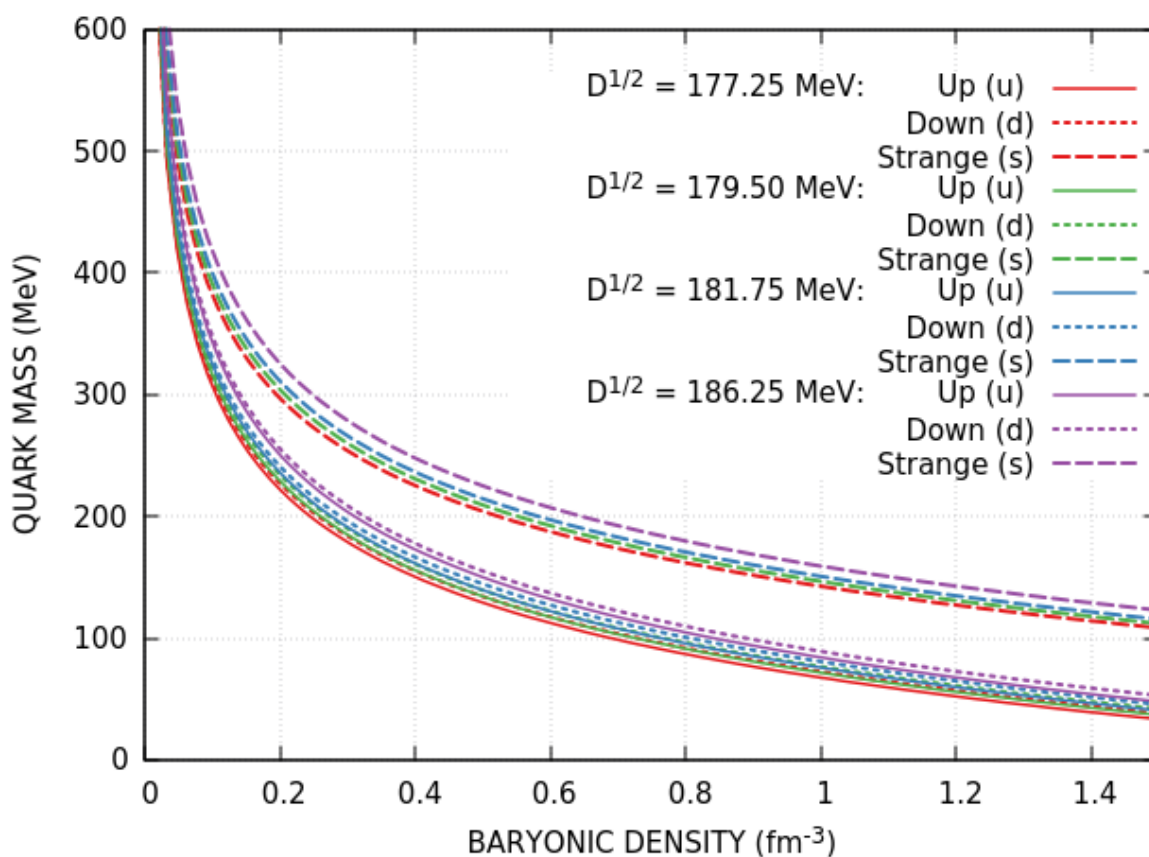


Figura 11 – Massa dos Quarks up, down e strange para C fixo em -0.49 .

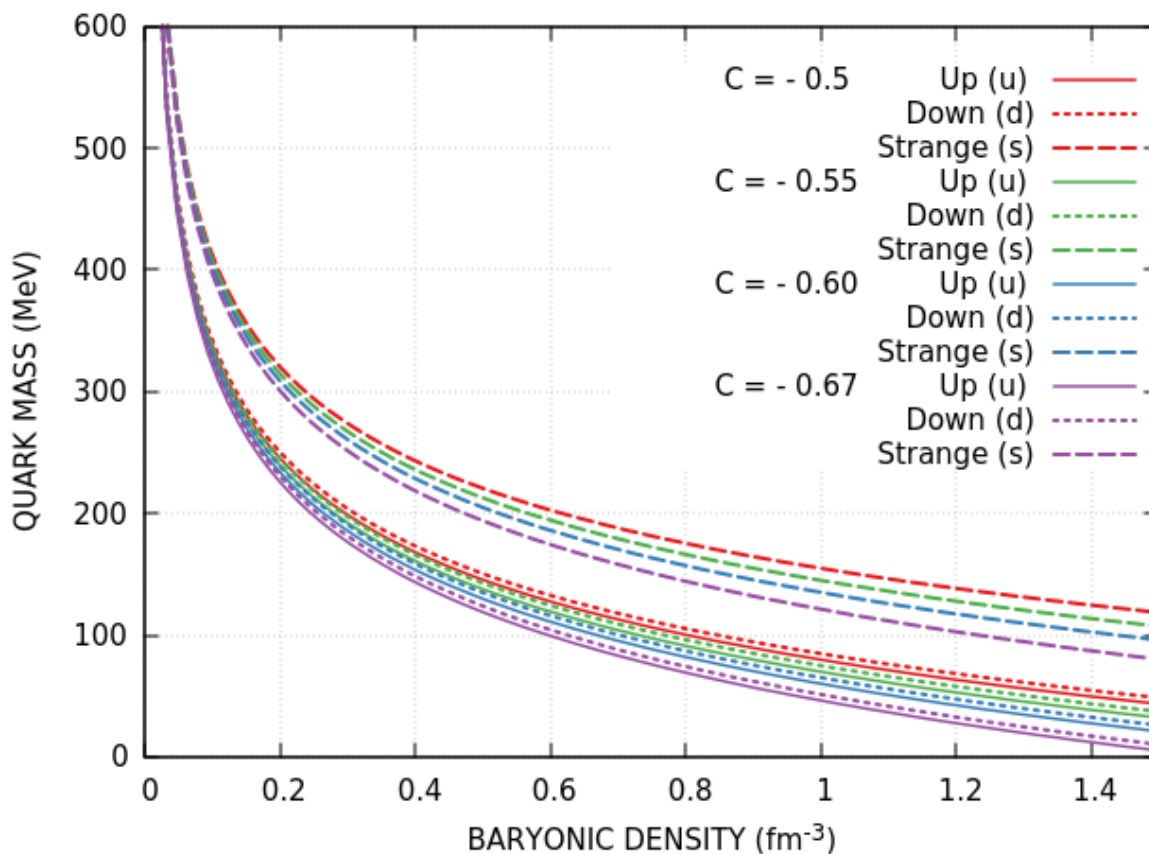


Figura 12 – Massa dos Quarks up, down e strange para D fixo em 185 MeV .

O impacto desses parâmetros na massa do quark s fica mais claro quando ambos são variados simultaneamente, Figura (13), especialmente na região de altas densidades.

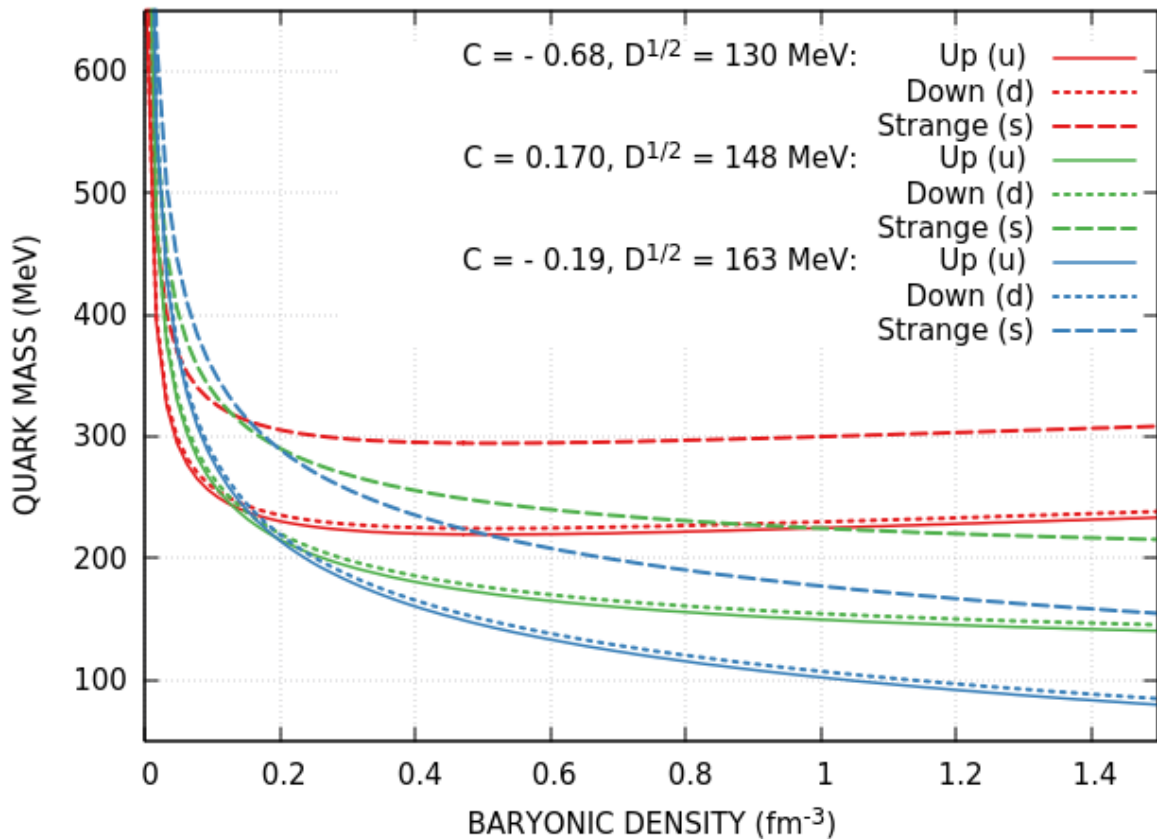


Figura 13 – Massa dos Quarks up, down e strange variando os parâmetros C e D .

2.2.1.3 Resultados - Equações de Estado

Como um dos objetivos desse trabalho é aplicar o modelo às estrelas estranhas considera-se as equações de estado derivadas na seção 2.1.2 à temperatura zero (assim como Ω_0), com seus resultados numéricos dados pelas Figuras (14), (15) e (16). Na Fig. (14) é feita uma escolha de parâmetros bastante distintos para deixar explícito sua influência sobre as equações de estado. Ao aumentar os valores de C , os de D diminuem e assim se observa uma inversão das curvas conforme a pressão e a densidade de energia aumentam. Apesar dessa figura mostrar o impacto de C e D , ainda sim é fixado um dos parâmetros enquanto o outro é variado, Figuras (15) e (16), para uma análise mais minuciosa.

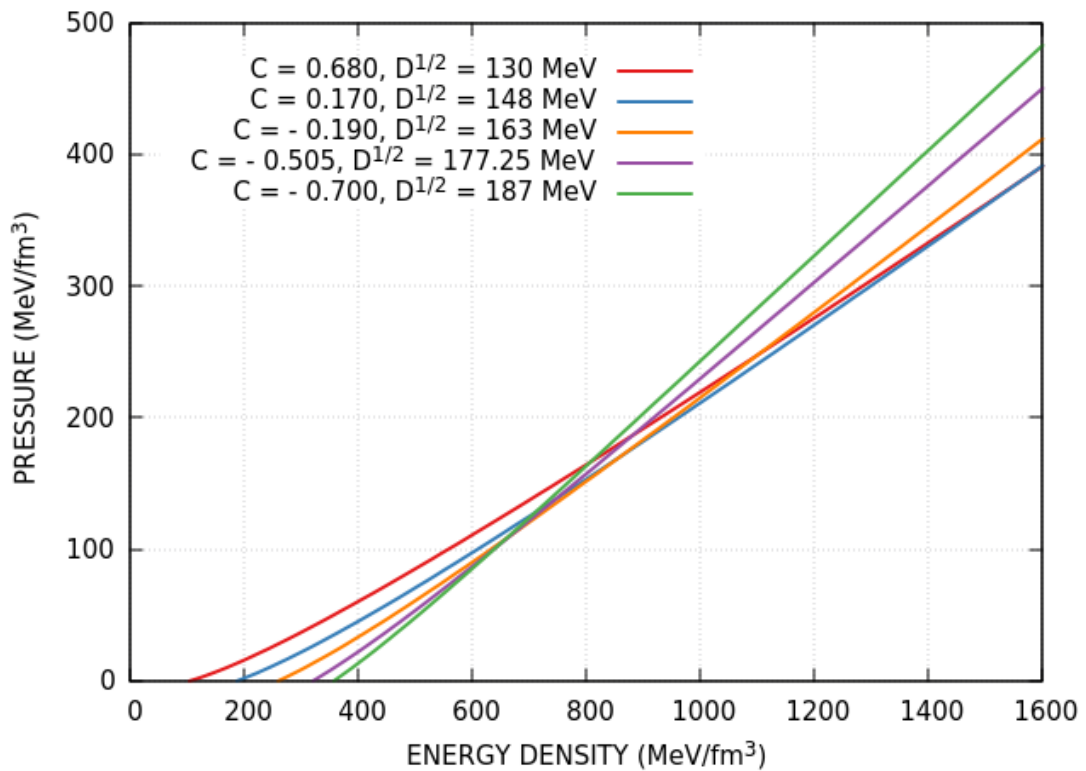


Figura 14 – Equações de Estado do Modelo QP variando ambos os parâmetros C e D .

Na Fig. (15), o parâmetro C é fixado em -0.49 e pode-se ver em detalhes que para valores decrescentes de D , a pressão suportada pela equação de estado é maior para uma dada densidade de energia, ou seja, têm-se equações de estado mais duras. O mesmo ocorre ao fazer o contrário, ao fixar \sqrt{D} em 185 MeV e diminuir os valores de C . O interessante entre os dois casos é que no segundo, ao aumentar a densidade de energia, as curvas com valores mais baixos para C se distanciam das outras, enquanto que para valores mais baixos de D isso parece não ocorrer, as curvas praticamente se mantêm paralelas.

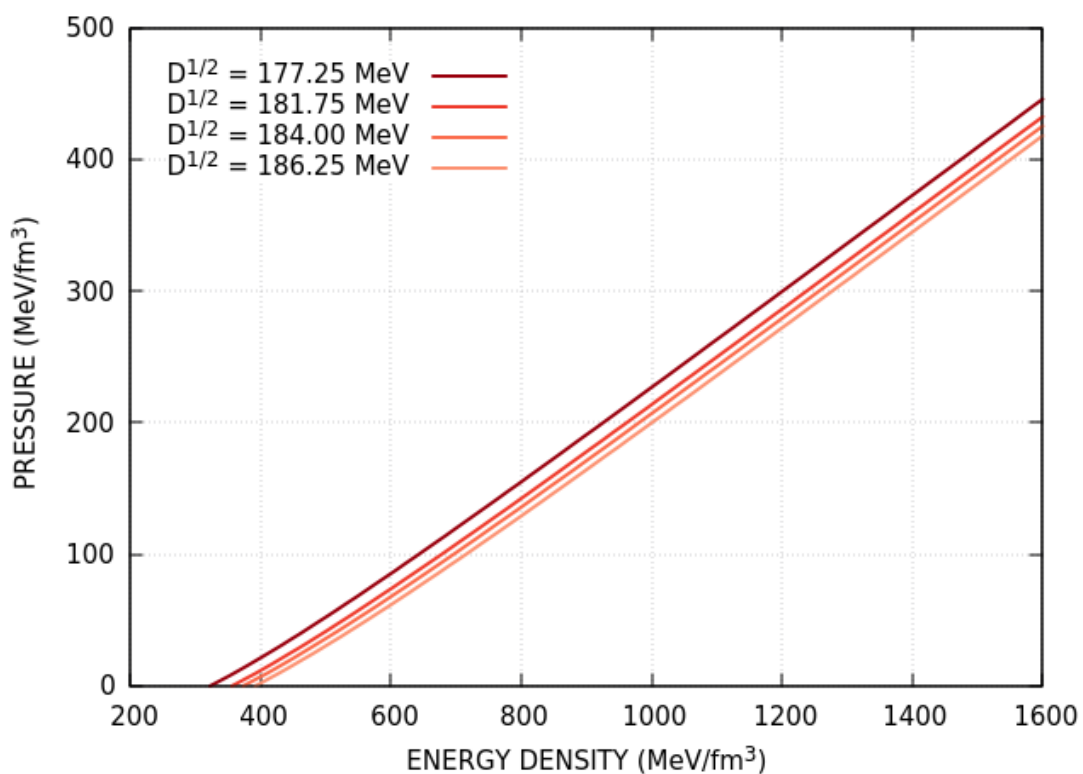


Figura 15 – Equações de Estado do Modelo QP fixando o parâmetro C em -0.49 .

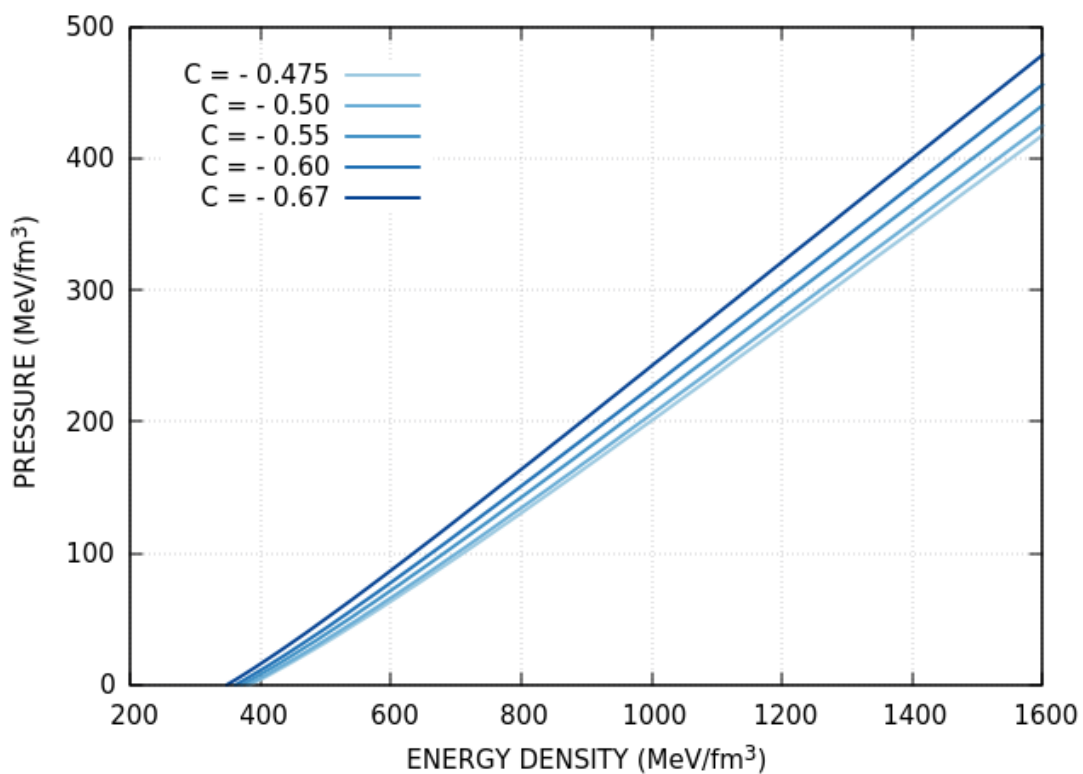


Figura 16 – Equações de Estado do Modelo QP fixando o parâmetro \sqrt{D} em 185 MeV .

2.2.1.4 Resultados - O Modelo QP e o modelo do MIT

Sabe-se que o modelo do MIT¹ (CHODOS *et al*, 1974) é amplamente utilizado para o estudo da matéria estranha tendo uma Bag como parâmetro ajustável em suas equações de estado havendo assim interesse em compará-las com as do modelo QP. Para essa análise considera-se que a massa de corrente dos quarks (m_{i0} com $i = u, d, s$) é $m_{u0} = m_{d0} = 5$ MeV e $m_{s0} = 80$ MeV.

A Figura (17) mostra os resultados numéricos dos dois modelos, onde os parâmetros de ambos foram selecionados respeitando a janela de estabilidade de cada um dos modelos. À esquerda, onde o parâmetro C do modelo QP é fixo, observa-se uma intersecção mais tardia entre as curvas dos dois modelos. E à direita, ao fixar o parâmetro D , a intersecção ocorre antes para as duas curvas mais acima, onde a curva dada pela linha contínua azul representa as EOS do modelo do MIT e a curva dada pela linha contínua vermelha representa as EOS do modelo QP. Dependendo do interesse, pode-se fazer uso de um ou de outro modelo para obter equações de estado mais duras. Porém, considerando as massas de corrente dadas, o modelo QP permite obter essas equações de estado mais duras, uma vez que os dois valores aplicados na Bag do Modelo do MIT são os pontos de máximo e mínimo de sua janela de estabilidade.

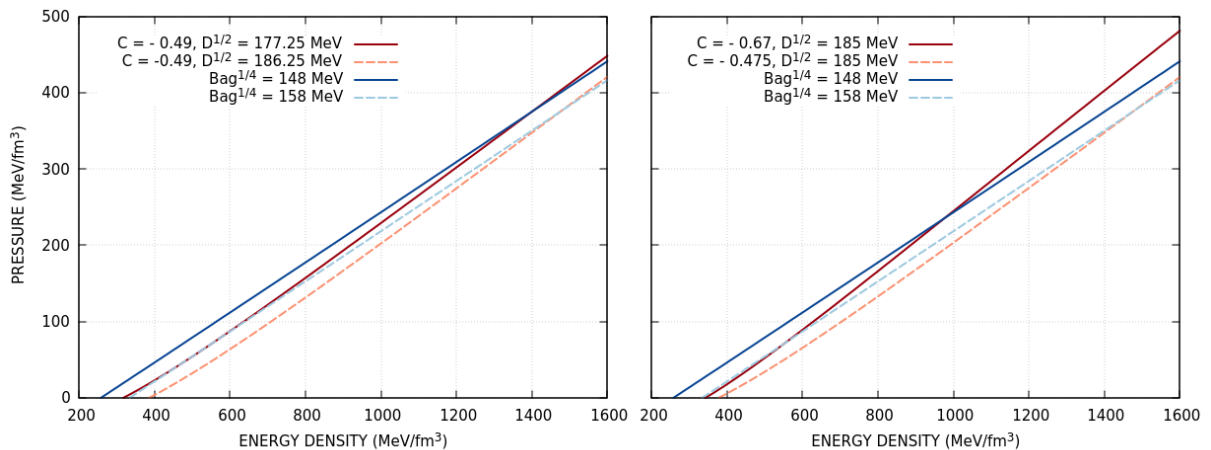


Figura 17 – Equações de Estado para o Modelo QP e o Modelo do MIT variando seus parâmetros ajustáveis.

¹ Para mais detalhes a respeito do modelo do MIT consulte o Apêndice A.

3 MODELANDO ESTRELAS ESTRANHAS

Considerando a hipótese de Bodmer-Witter, o verdadeiro estado fundamental da matéria seria a matéria estranha, de modo que o interior de um pulsar deve ser composto pelos quarks u , d , s , mais os léptons (elétrons), para garantir que a estrela seja neutra e quimicamente equilibrada, sendo assim uma estrela estranha. Caso essas estrelas existam elas se diferenciam das outras pelo fato de estarem auto-ligadas pela interação forte, e não pela gravidade como as estrelas de nêutrons.

Neste capítulo, apresentam-se as condições necessárias para modelar as estrelas estranhas, assim como a inclusão dos elétrons no sistema através de suas equações de estado. Além disso, derivam-se as equações que descrevem a estrutura física das estrelas de nêutrons, e das estrelas estranhas, a partir da relatividade geral de Einstein. Na sequência estão os resultados numéricos obtidos para tais equações.

3.1 EQUILÍBRIO BETA E NEUTRALIDADE DE CARGA

As estrelas estranhas são consideradas sistemas termodinâmicos em equilíbrio constituídos pelos quarks up (u), down (d) e strange (s), mais os elétrons (e). Devido à presença dos elétrons podem ocorrer interações fracas como:



sendo $\bar{\nu}_e$ = antineutrino do elétron. Enquanto colapsa, a estrela gira e esfria. Isso ocorre devido ao processo Urca: ela vai perdendo energia devido à emissão de neutrinos. Portanto, aqui se considera o estudo de estrelas à temperatura zero. Com a emissão dos neutrinos, os potenciais químicos do sistema devem satisfazer as seguintes condições de equilíbrio β :

$$\mu_u + \mu_e = \mu_d = \mu_s, \quad (47)$$

onde μ_u , μ_d , μ_s são os potenciais químicos dos quarks u , d e s , respectivamente, e μ_e é o potencial químico dos elétrons. Sabe-se que para o modelo utilizado os potenciais químicos são reescritos em função dos potenciais químicos efetivos, Eq. (33), devido à dependência da densidade presente na massa dos quarks. Pela Eq. (33) é possível ver que os potenciais químicos reais e efetivos se diferem por uma quantidade em comum, de modo que as condições de equilíbrio β podem ser reescritas para os potenciais químicos efetivos como sendo:

$$\mu_u^* + \mu_e = \mu_d^* = \mu_s^*, \quad (48)$$

onde μ_u^* , μ_d^* , μ_s^* são os potenciais químicos efetivos dos quarks u, d e s, respectivamente. Note que o potencial químico do elétron permanece o mesmo, já que não depende da densidade. Além dessas condições, o sistema deve satisfazer ainda a condição de neutralidade de carga, uma vez que estas estrelas são neutras, assim:

$$\frac{2}{3}n_u - \frac{1}{3}n_d - \frac{1}{3}n_s - n_e = 0, \quad (49)$$

sendo n_u , n_d e n_s as densidades dos quarks u, d e s, respectivamente, e n_e a densidade dos elétrons.

3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Tendo as condições de equilíbrio β e neutralidade de carga satisfeitas, pode-se modelar as estrelas. Para isso as equações de estado dos quarks, dadas pelas equações (34) e (35), são calculadas numericamente e somadas juntamente com as equações de estado dos elétrons¹ para servir de ingrediente nas equações da TOV², que resultam em uma relação entre a massa e o raio das estrelas. Lembrando que as massas das estrelas de nêutrons detectadas até hoje variam entre 1 e 3 massas solares, e possuem raio da ordem de 10 Km (MENEZES *et al*, 2015).

A Fig. (18) ilustra como são os resultados para as estrelas estranhas. No eixo x está o raio das estrelas em quilômetros (Km), e no eixo y suas massas, dadas em unidades de Massa Solar (M_\odot). A curva em azul representa uma família de estrelas, onde cada ponto da curva é uma estrela. Desse modo, o ponto mais alto da curva no eixo y é a estrela com a maior massa (massa máxima) obtida por essa solução. No caso do eixo x, o maior valor possível encontrado refere-se ao raio máximo.

¹ Para mais detalhes a respeito das equações de estado dos elétrons consulte o Apêndice A.

² As equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff são obtidas no Apêndice B.

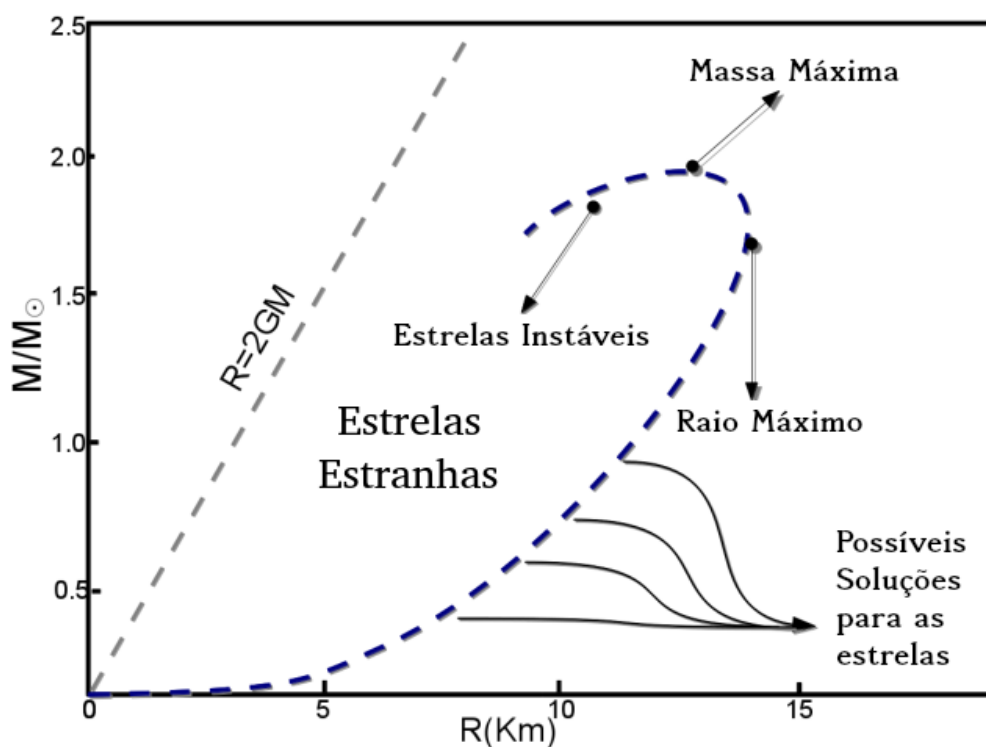


Figura 18 – Ilustração da relação Massa-Raio para estrelas estranhas. O raio de Schwarzschild ($R = 2GM$) está representado pela linha pontilhada cinza, (TRADUZIDO DE AGUDELO, 2013).

Como discutido previamente, os parâmetros C e D afetam fortemente as equações de estado do modelo e por isso também influenciam os resultados obtidos para as estrelas estranhas. Isso pode ser observado nas figuras (19), (20), e (21). Ao fixar o parâmetro C em -0.49 , a Fig. (19) mostra que conforme o parâmetro \sqrt{D} diminui, valores mais altos são obtidos para as massas e os raios das estrelas.

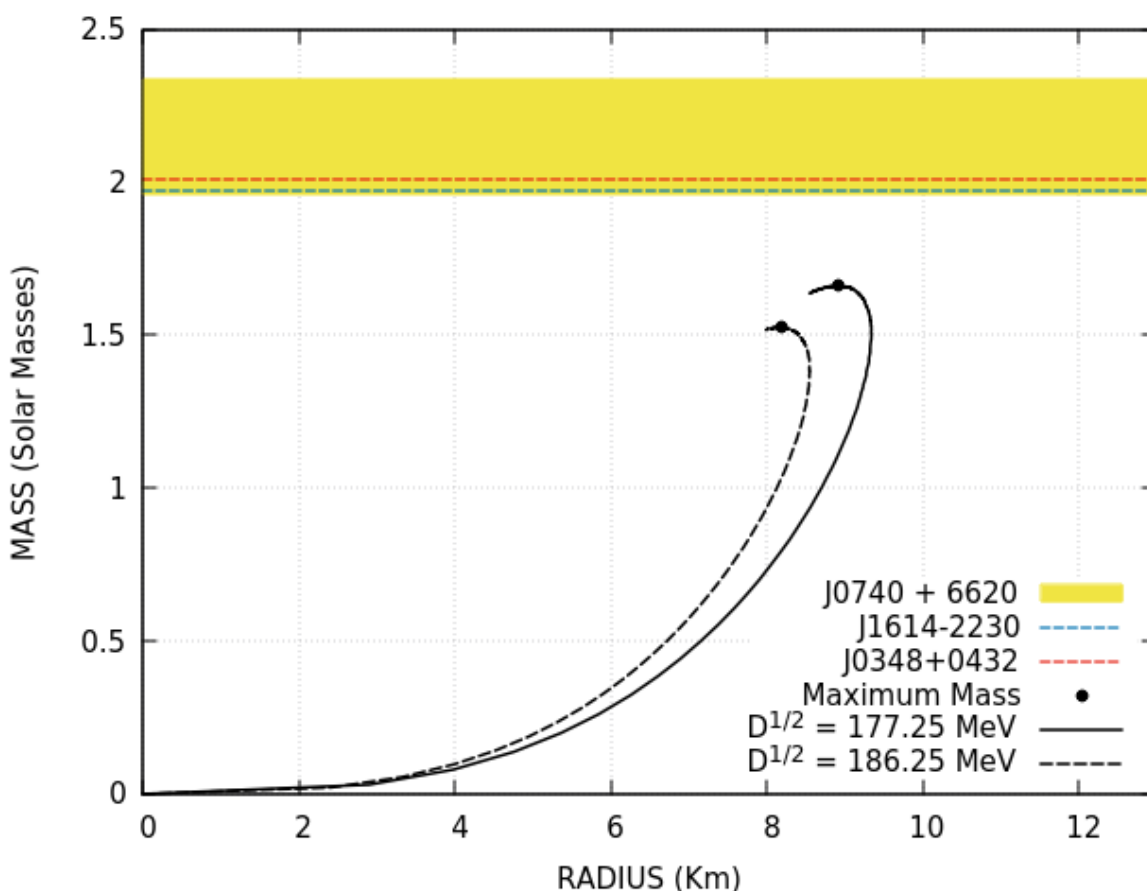


Figura 19 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas utilizando o Modelo QP com o parâmetro C fixo em -0.49 .

Fixando o parâmetro \sqrt{D} em 185 MeV e variando C , a Fig. (20) mostra o mesmo tipo de comportamento, ao diminuir o parâmetro livre, nesse caso C , se obtém massas e raios mais altos para as estrelas estranhas. Como visto no capítulo anterior, esse comportamento do parâmetro livre é responsável por fornecer equações de estado capazes de suportar uma pressão maior para uma dada densidade de energia.

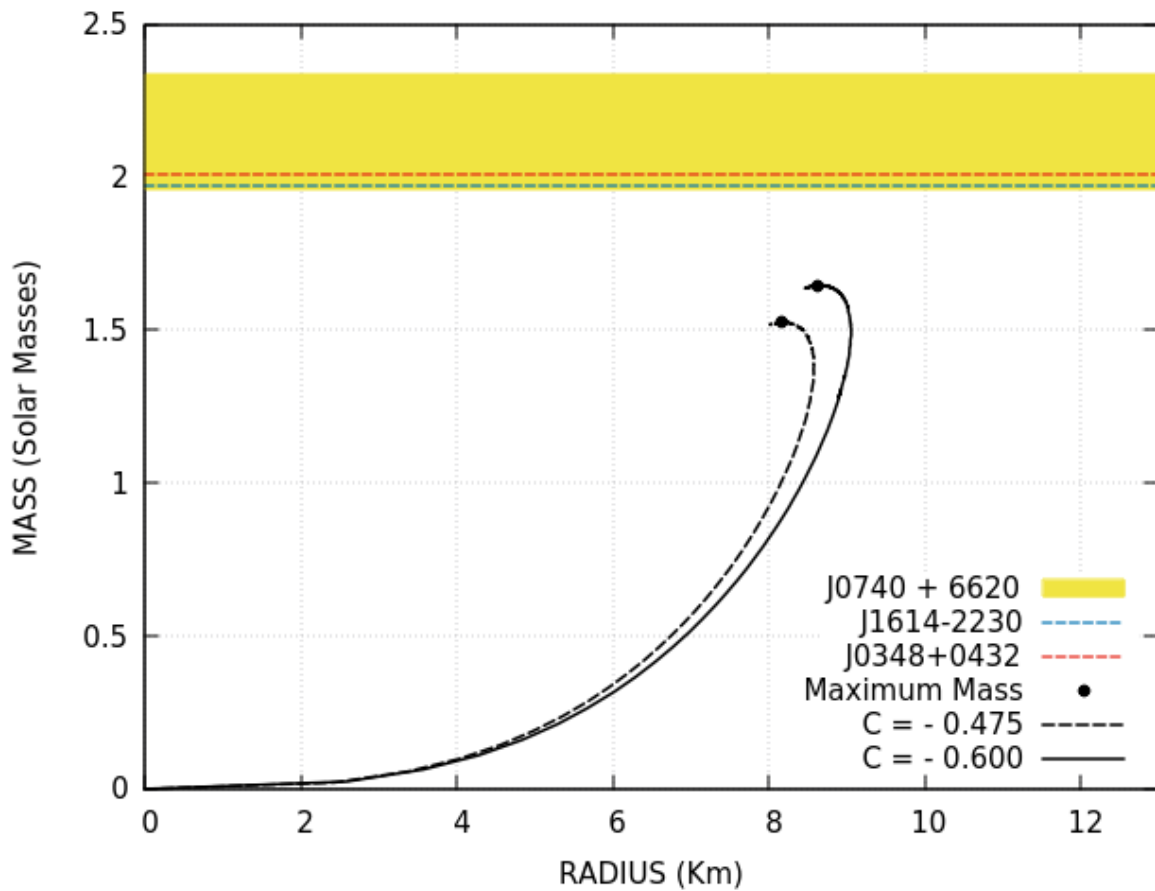


Figura 20 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas utilizando o Modelo QP com o parâmetro \sqrt{D} fixo em 185 MeV.

Nos resultados apresentados não se obtiveram massas máximas próximas ou acima de $2 M_{\odot}$. Entretanto, essas análises foram essenciais para se estabelecer um critério de seleção mais rigoroso para os parâmetros C e \sqrt{D} . É importante que o modelo seja capaz de obter massas em torno e/ou acima de $2 M_{\odot}$ devido às recentes detecções das estrelas de nêutrons $J0740 + 6620$ (CROMARTIE *et al*, 2020), $J0348 + 0432$ (ANTONIADIS *et al*, 2013) e $J1614 - 2230$ (DEMOREST *et al*, 2010), sendo $2.14^{+0.20}_{-0.18} M_{\odot}$, $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ e $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$, suas respectivas massas. Da janela de estabilidade conhecida, foram escolhidos alguns pontos para os parâmetros C e \sqrt{D} capazes de obter massas máximas nessa região. O comportamento das curvas para estes valores é observado na Fig. (21).

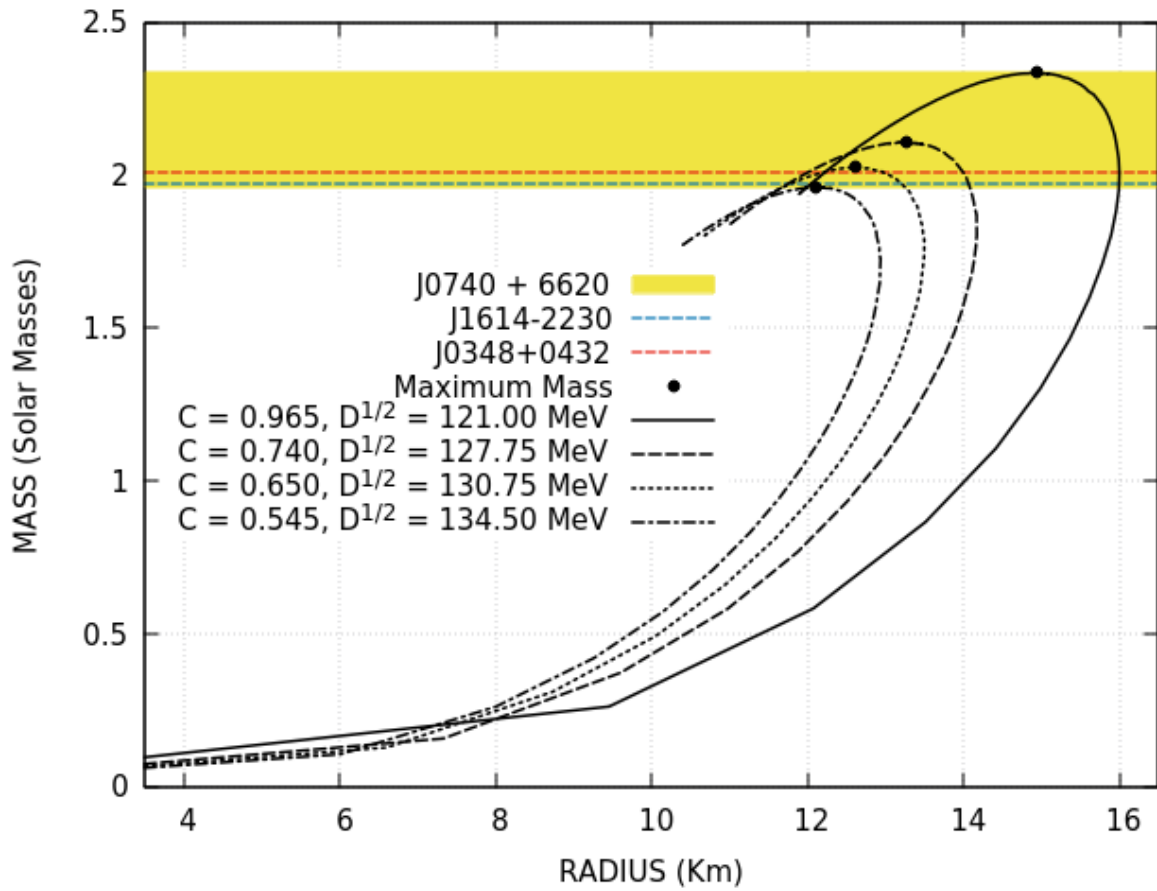


Figura 21 – Relação Massa-Raio para estrelas estranhas com o Modelo QP para diferentes valores de C e \sqrt{D} .

A Tab. (3.1) exibe os valores das massas máximas e de seus respectivos raios, onde observa-se que o modelo é capaz de obter massas máximas próximas às detectadas.

C	\sqrt{D} (MeV)	M_{max} (M_{\odot})	R (Km)
0.545	134.50	1.96	12.11
0.650	130.75	2.03	12.62
0.740	127.75	2.11	13.26
0.965	121.00	2.33	14.93

Tabela 3.1 – Massas máximas (M_{max}) e seus respectivos raios (R) para estrelas estranhas no modelo QP.

As equações de estado do modelo também devem satisfazer o vínculo com relação ao raio das estrelas canônicas ($M = 1.4M_{\odot}$). Alguns estudos dizem que esse raio deve estar entre 10 e 14 Km (HEBERLER *et al*, 2010; LATTIMER e STEINER, 2014; MALIK *et al*, 2018 e ABOTT *et al*, 2018). Já a detecção da onda gravitacional GW170817 (RADICE *et al*, 2018) permitiu que se estabelecesse o vínculo de que o

raio das estrelas canônicas não pode exceder 11.9 Km (CAPANO *et al*, 2020). A massa e o raio das estrelas canônicas das curvas da Fig. (21) encontram-se na Tab. (3.2). Pode-se constatar que para os parâmetros C e D escolhidos, os resultados obtidos não satisfazem esse vínculo observacional caso ele seja comprovado estar correto.

C	\sqrt{D} (MeV)	M_{can} (M_{\odot})	R_{can} (Km)
0.545	134.50	1.405	12.69
0.650	130.75	1.410	13.18
0.740	127.75	1.404	13.74
0.965	121.00	1.401	15.18

Tabela 3.2 – Relação massa-raio das estrelas canônicas no modelo QP.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O principal objetivo deste trabalho foi utilizar um modelo efetivo (QP) para descrever estrelas estranhas. Este modelo propõe que a massa dos quarks dependa da densidade bariônica, tendo dois parâmetros ajustáveis (C e D), e se destaca de outros modelos do mesmo tipo pelo diferencial de ser consistente termodinamicamente. Portanto, o primeiro passo no desenvolvimento do trabalho foi estabelecer o critério termodinâmico o qual o modelo deve satisfazer: à pressão zero deve se encontrar o mínimo de energia livre (ou o mínimo de energia à temperatura zero). Pelos resultados apresentados, isso foi comprovado de duas maneiras: em uma delas, um dos parâmetros ajustáveis foi fixado enquanto o outro foi mantido livre, e vice-versa; e a outra consistiu em variar ambos os parâmetros. Na sequência, as equações de estado e a massa dos quarks foram obtidas de acordo com o modelo, tendo seus resultados numéricos trabalhados da mesma forma que a consistência termodinâmica. O objetivo de apresentar os dados dessa forma foi deixar clara a forte influência que os parâmetros ajustáveis têm sobre o modelo.

A partir das equações de estado e dos parâmetros ajustáveis, uma janela de estabilidade foi criada impondo condições à energia mínima por bárion do sistema para que ele seja estável de acordo com a hipótese de Bodmer-Witten para a matéria estranha, sendo essa um sistema constituído pelos quarks up (u), down (d), strange ou estranho (s), e os elétrons (e). Lembrando que as equações de estado para os elétrons também foram obtidas para serem incorporadas à descrição do sistema.

Um dos pontos relevantes no estudo desse modelo foi compará-lo com o modelo do MIT, por se tratar de um modelo que também visa estudar a matéria de quarks. No caso do modelo do MIT, os quarks estão confinados em uma região finita do espaço, chamada de sacola (Bag), para explicar a massa dos hádrons. Na comparação feita foi possível ver que o modelo QP é capaz de obter equações de estado mais duras que o modelo do MIT para uma dada densidade de energia, considerando a mesma massa de corrente dos quarks em ambos os modelos. A importância em se obter equações de estado mais duras é que elas permitem obter massas máximas mais altas para as estrelas.

Fazendo então uso das equações de estado do sistema nas equações da TOV, se obteve a relação entre a massa e o raio das estrelas estranhas. As curvas resultantes foram apresentadas inicialmente fixando um dos parâmetros e variando o outro, o que permitiu que uma escolha mais apropriada dos parâmetros fosse feita. Pôde-se então observar a grande influência que esses parâmetros possuem nas massas máximas obtidas. Além disso, ficou claro que o modelo também foi capaz de obter massas máximas acima de $2 M_{\odot}$, podendo ser utilizado para descrever vários pulsares já observados no espaço.

Para estrelas canônicas, cuja massa gira em torno de $1.4 M_{\odot}$ e o raio varia entre 10 e 14 Km, foi constatado que o modelo satisfaz tais restrições, com exceção do último valor possível dentro da janela de estabilidade. E ao confrontar o modelo com o vínculo mais recentemente estabelecido pela detecção da onda gravitacional GW170817, em que fica estabelecido que o raio máximo das estrelas canônicas não pode extrapolar 11.9 Km, pôde-se ver que este não o satisfaz. O modelo não seria capaz então de descrever estrelas canônicas, uma vez claro, que esse vínculo seja comprovado correto.

Futuramente, há a possibilidade de se estender o modelo para incluir a temperatura e observar os efeitos causados, além de permitir o estudo da transição de fases entre hádrons e quarks pela curva que a delimita.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. **Phys. Rev. Lett.**, v. 121, 161101 2018.
- ADAMS, J. et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark–gluon plasma. **Nuclear Physics A**, v. 757, p. 102–183, 1-2 2005.
- AGUDELO, David Felipe Tamayo. **Matéria de quarks à temperatura finita**. 2013. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina.
- ALFORD, M. G. et al. QCD at Finite Baryon Density: Nucleon Droplets and Color Superconductivity. **Phys. Lett. B**, v. 422, 247 1998.
- ALFORD, M. G. et al. Signatures for quark matter from multi-messenger observations. **J. of Phys. G: Nuc. and Part. Phys. D**, v. 46, 114001 2019.
- ANTONIADIS, J. et al. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. **Science**, v. 340, 6131 2013.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. **Phys. Rev.**, v. 46, p. 76–77, 1934.
- BACKES, B. C. et al. Density dependent quark mass model revisited: Thermodynamic consistency, stability windows and stellar properties. **arXiv preprint arXiv:007.04494v1**, 2020.
- BENVENUTO, O. G.; LUGONES, G. Strange matter equation of state in the quark mass-density-dependent model. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 1989–1993, 4 1995.
- BODMER, A. R. Collapsed Nuclei. **Phys. Rev. D**, v. 4, p. 1601–1606, 6 1971.
- CAPANO, Collin D. et al. Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory. **Nature Astronomy**, v. 4, p. 625–632, 6 2020.
- CHAKRABARTY, S. Equation of state of strange quark matter and strange star. **Phys. Rev. D**, v. 43, p. 627–630, 2 1991.
- CHODOS, A. et al. New extended model of hadrons. **Phys. Rev. D**, v. 9, p. 3471–3495, 12 1974.
- CROMARTIE, H. T. et al. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. **Nature Astronomy**, v. 4, p. 72–76, 1 2020.
- DAVIES, C. T. H. et al. Precise charm to strange mass ratio and light quark masses from full lattice QCD. **Phys. Rev. Letters**, v. 104, 132003 2010.
- DEMOREST, P. B. et al. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay.

Nature, v. 467, p. 1081–1083, 7319 2010.

DEXHEIMER, V.; TORRES, J. R.; MENEZES, D. P. Stability windows for proto-quark stars. **Eur. Phys. J. C**, v. 73, 2569 2013.

FOWLER, G. N.; RAHA, S.; WEINER, R. M. Confinement and phase transitions. **Phys. C - Particles and Fields**, v. 9, p. 271-273, 2 1981.

GLENDENNING, Norman K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity**. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2000.

GOLD, T. Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources. **Nature**, v. 218, p. 731–732, 5143 1968.

GONÇALVES V. P. E LAZZARI, L. Uma introdução às estrelas estranhas. **arXiv preprint arXiv: 2006.02976**, 2020.

GREINER, Walter; NEISE, Ludwig; STÖCKER, Horst. **Thermodynamics and statistical mechanics**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 1995.

HEBELER, K.; LATTIMER, J. M.; PETHICK, C. J.; SCHWENK, A. Constraints on Neutron Star Radii Based on Chiral Effective Field Theory Interactions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 105, 161102 2010.

HEWISH, A. et al. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. **Nature**, v. 217, p. 709–713, 5130 1968.

LATTIMER JAMES M. AND STEINER, Andrew W. Constraints on the symmetry energy using the mass-radius relation of neutron stars. **The European Physical Journal A**, v. 50, p. 40, 2 2014.

MALIK, Tuhin et al. GW170817: Constraining the nuclear matter equation of state from the neutron star tidal deformability. **Phys. Rev. C**, v. 98, 035804 2018.

MENEZES, D. P. et al. Non-extensive thermodynamics and neutron star properties. **Eur. Phys. J. A**, v. 51, p. 155, 12 2015.

MENEZES, D. P.; PROVIDÊNCIA, C.; MELROSE, D. B. Quark stars within relativistic models. **J. Phys. G: Nuclear and Particle Physics**, v. 32, 8 2006.

MENEZES, Débora Peres. **Introdução à Física Nuclear e de Partículas Elementares**. [S.l.]: Editora da UFSC, 2002.

MEYER, H. B. QCD at non-zero temperature from the lattice. **arXiv preprint arXiv: 1512.06634**, 2015.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 374–381, 4 1939.

- PACINI, F. Energy Emission from a Neutron Star. **Nature**, v. 216, p. 567–568, 51151967.
- PENG, G. X. et al. Deconfinement phase transition in hybrid neutron stars from the Brueckner theory with three-body forces and a quark model with chiral mass scaling. **Phys. Rev. C**, v. 77, 065807 2008.
- PENG, G. X. et al. Thermodynamics, strange quark matter, and strange stars. **Phys. Rev. C**, v. 62, 025801 2000.
- RADICE, D.; PEREGO, A.; ZAPPA, F.; BERNUZZI, S. GW170817: Joint Constraint on the Neutron Star Equation of State from Multimessenger Observations. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 852, 2 2018.
- TOLMAN, R. C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. **Phys. Rev.**, v. 55, p. 364–373, 4 1939.
- TORRES, J. R.; MENEZES, D. P. Quark matter equation of state and stellar properties. **Europhysics Letters**, v. 101, 4 2013.
- TORRES, James Rudnei. **Equação de estado para matéria de quarks e propriedades estelares**. 2011. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina.
- WALECKA, John Dirk. **Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics**. [S.l.]: Oxford, 2004.
- WANG, P. Strange matter in a self-consistent quark mass-density-dependent model. **Phys. Rev. C**, v. 61, 015204 2000.
- WEBER, Fridolin. **Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics**. [S.l.]: CRC Press, 1999.
- WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, v. 30, p. 272–285, 2 1984.
- XIA, C. et al. Thermodynamic consistency, quark mass scaling, and properties of strange matter. **Phys. Rev. D**, v. 89, 105027 2014.
- YAGI K., Hatsuda T. e Miake Y. **Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology)**. [S.l.]: Cambridge, University Press, 2005.
- YIN, S.; SU, Ru. Consistent thermodynamic treatment for a quark-mass density-dependent model. **Phys. Rev. C**, v. 77, 055204 2008.
- ZHANG, Yun; SU, Ru-Keng. Quark mass density and temperature-dependent model for bulk strange quark matter. **Phys. Rev. C**, v. 65, 035202 2002.

APÊNDICE A – MODELO DO MIT E EQUAÇÕES DE ESTADO PARA FÉRMIONS LIVRES

Desde sua publicação em meados da década de 70 por pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), o modelo do MIT (CHODOS et al., 1974) se tornou fonte de inúmeras pesquisas a respeito da matéria de quarks por propor que essas partículas estivessem confinadas em uma região finita do espaço, chamada de sacola (Bag), com o intuito de justificar a massa dos hádrons. A sacola representa o confinamento dos campos gerados pela interação dos quarks, e está relacionada à uma constante de energia por unidade de volume chamada B.

Além disso, quando se descreve a matéria estranha fazendo uso desse ou de outros modelos, inclui-se os elétrons no sistema. Portanto, neste apêndice se encontra o formalismo utilizado para a determinação das equações de estado do modelo do MIT, assim como as equações de estado para férmions livres (elétrons) à temperatura zero.

A.1 FORMALISMO - MODELO DO MIT

Os cálculos são feitos inicialmente considerando apenas um sabor de quark. Dado então que os quarks são consideradas partículas de Fermi livres, a densidade Lagrangiana que os descreve é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (\text{A1})$$

onde ψ = campo fermiônico da partícula, γ^μ = matrizes de Dirac¹ e m = massa da partícula. A função de Heaviside é adicionada à essa equação a fim de representar a propriedade de que para condições não extremas os quarks estão confinados dentro dos bárions, assim:

$$\mathcal{L} = [\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi] \Theta(R - r), \quad (\text{A2})$$

com

¹ Matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Theta(R-r) = \begin{cases} 1, & r < R \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (\text{A3})$$

onde R = raio da sacola, $r < R$ = região contendo os quarks e $r > R$ = região livre de quarks em que não há campo fermiônico. Já a função delta de Dirac é adicionada para definir a superfície da sacola em que $r = R$, assim:

$$\mathcal{L} = [\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi] \Theta(R-r) - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\delta(R-r)\Psi, \quad (\text{A4})$$

com

$$\delta(R-r) = \begin{cases} \infty, & r = R \\ 0, & r \neq R, \end{cases} \quad (\text{A5})$$

Por fim, a constante da sacola é adicionada. Assim, a densidade lagrangiana para o modelo do MIT é dada por:

$$\mathcal{L} = [\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - B] \Theta(R-r) - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\delta(R-r)\Psi. \quad (\text{A6})$$

Para encontrar as equações de estado do modelo à temperatura zero, primeiramente calcula-se essas equações à temperatura finita. Para isso, faz-se uso do tensor de energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \partial_\nu\phi_i, \quad (\text{A7})$$

onde, ϕ_i = campos das partículas e $g_{\mu\nu}$ = tensor da métrica de Minkowski². O tensor de energia-momento para um sistema uniforme em equilíbrio é dado por:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (\text{A8})$$

onde ε = densidade de energia, P = pressão e u_μ = quadrivelocidade do fluido. Estando esse fluido em perfeito equilíbrio hidrostático, tem-se que $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, $u_0^2 = 1$ e $|\mathbf{u}|^2 = 0$, obtendo assim a densidade de energia:

² A métrica usada é de assinatura negativa:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \langle T_{00} \rangle &= (\varepsilon + P)u_0^2 - Pg_{00} \\
 &= \varepsilon + P - P \\
 &= \varepsilon, \quad \varepsilon = \langle T_{00} \rangle.
 \end{aligned} \tag{A9}$$

Do mesmo modo se obtém a pressão:

$$\begin{aligned}
 \langle T_{ii} \rangle &= (\varepsilon + P)|\mathbf{u}|^2 - Pg_{ii} \\
 &= 3P, \quad P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle.
 \end{aligned} \tag{A10}$$

Para resolver as equações (A9) e (A10), aplica-se a densidade lagrangiana, eq. (A1), ao tensor de energia momento, eq. (A7), resultando em

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi. \tag{A11}$$

Na sequência, calculam-se as componentes temporais e espaciais desse tensor a partir da relação para as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0. \tag{A12}$$

Aplica-se então o lagrangiano de Dirac, obtendo a equação de Dirac, $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$, que pode ser reescrita separando suas componentes temporais e espaciais:

$$(i\gamma_0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi = 0. \tag{A13}$$

Multiplica-se então $\bar{\psi}$ pela esquerda e faz-se uso das seguintes definições: $\gamma^0 = \beta$, $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, $\partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})$, $\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$ e $\gamma_\mu = (\gamma_0, -\vec{\gamma})$, obtendo assim

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi &= -i\bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{\nabla}\psi + \bar{\psi}m\psi \\
 &= -i\psi^\dagger\gamma^0\vec{\gamma}\vec{\nabla}\psi + \psi^\dagger\gamma^0m\psi \\
 &= -i\psi^\dagger\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi + \psi^\dagger\beta m\psi.
 \end{aligned} \tag{A14}$$

A partir desse resultado, calcula-se a densidade de energia:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \langle T_{00} \rangle \\
 &= \langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi \rangle \\
 &= \langle -i\psi^\dagger\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi + \psi^\dagger\beta m\psi \rangle \\
 &= \langle \psi^\dagger\vec{\alpha}\vec{p}\psi + \psi^\dagger\beta m\psi \rangle \\
 &= \langle \psi|\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m|\psi \rangle
 \end{aligned} \tag{A15}$$

onde \vec{p} = operador momento linear, sendo definido como $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$ ao utilizar o sistema de unidade naturais ($\hbar = c = 1$).

Da solução da equação de Dirac, obtém-se que

$$\begin{aligned} (E - \vec{\alpha}\vec{p} - \beta m)\psi &= 0 \\ (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\psi &= E\psi \\ (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)^2\psi &= E^2\psi, \quad E(\vec{p}) = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

pois $\vec{\alpha}^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ e $E(\mathbf{p})$ = relação de energia-momento. A partir dessa relação, encontra-se a expressão para a densidade de energia:

$$\varepsilon = \gamma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} (f_+ + f_-), \quad (\text{A17})$$

onde γ = degenerescência de spin, f_+ e f_- = funções de distribuição de partículas e antipartículas dadas por:

$$f_{\pm} = \frac{1}{1 + e^{\beta[E(\mathbf{p}) \mp \mu]}}, \quad (\text{A18})$$

em que $\beta = \frac{1}{T}$ em unidades naturais (senão seria $\beta = \frac{1}{k_b T}$ com k_b = constante de Boltzman), T = temperatura e μ = potencial químico do férmion.

Para o modelo do MIT a expressão para a densidade de energia se torna:

$$\varepsilon = B + 3X2 \sum_q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_q^2} (f_{q+} + f_{q-}), \quad (\text{A19})$$

uma vez que, inclui-se o número de cores dos quarks (3) e sua degenerescência de spins (2) (assim $\gamma = 3X2$), o somatório sobre os sabores dos quarks e a constante da Bag dada por B. As funções de distribuição se tornam:

$$f_{q\pm} = \frac{1}{1 + e^{\beta[E_q \mp \mu_q]}}, \quad (\text{A20})$$

onde f_{q+} = função de distribuição dos quarks, f_{q-} = função de distribuição dos anti-quarks e $E_q = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_q^2}$. Para o cálculo da pressão, têm-se que

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \langle -i\bar{\psi}\vec{\gamma}\vec{\nabla}\psi \rangle \\ &= \frac{1}{3} \langle \psi^\dagger \vec{\alpha}\vec{p}\psi \rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle \psi \left| \frac{\vec{p}^2}{E(\vec{p})} \right| \psi \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

ao fazer o uso de que $\vec{\alpha}\vec{p} = \vec{p}\frac{\partial E(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{E(\vec{p})}$, resultando na seguinte expressão para a pressão:

$$P = \gamma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} (f_+ + f_-). \quad (\text{A22})$$

Novamente inclui-se o número de cores dos quarks (3) e sua degenerescência de spin (2), o somatório sobre os sabores dos quarks e a constante B para obter a pressão descrita pelo modelo do MIT:

$$P = -B + \frac{3 \times 2}{3} \sum_q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_q^2}} (f_{q+} + f_{q-}), \quad (\text{A23})$$

e lembrando que a densidade bariônica, ρ_b , é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_b &= \langle \psi | \psi \rangle \\ &= \gamma \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (f_+ + f_-) \\ &= 3 \times 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (f_{q+} + f_{q-}), \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

onde as funções $f_{q\pm}$ são as mesmas dadas para a densidade de energia.

À temperatura nula, deve-se analisar as funções de distribuição presentes nas expressões das equações de estado e da densidade bariônica pois é onde está a dependência na temperatura. Quando a temperatura tende à zero, têm-se que

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_+ = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{[E_q - \mu_q]/T}} = \Theta(E_q - \mu_q), \quad (\text{A25})$$

onde $\Theta(E_q - \mu_q)$ = função de Heaviside, e

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_- = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{[E_q + \mu_q]/T}} = 0. \quad (\text{A26})$$

O comportamento desse limite é dado pela Figura (A1). Para temperatura zero, observa-se que a energia de Fermi, $E_F = \mu$, é a energia do último nível ocupado da distribuição. Além disso, todos os níveis até o nível de Fermi ($E_F = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$) estão ocupados (estado degenerado).

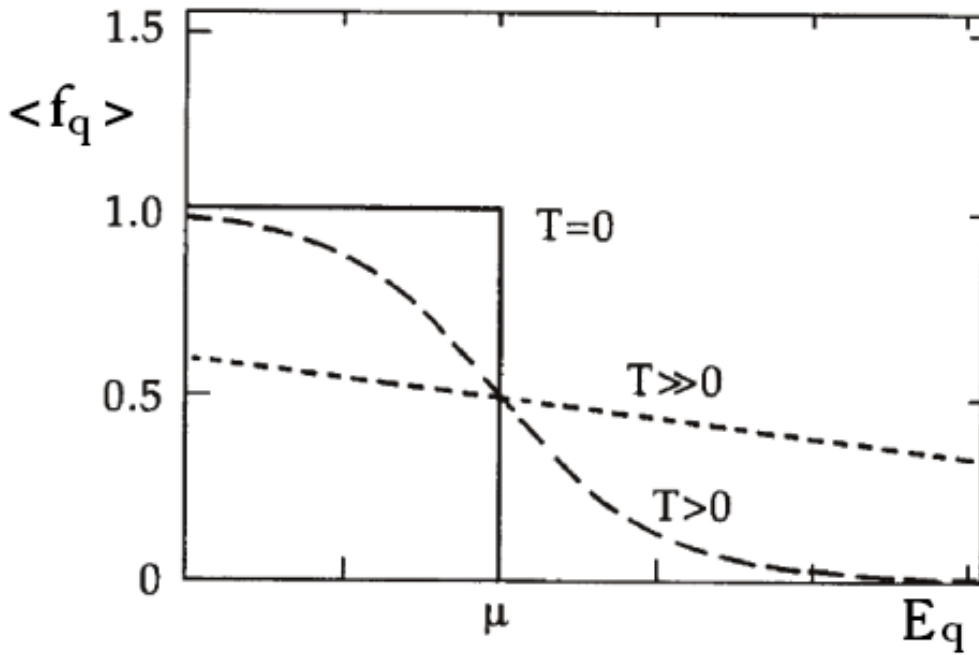


Figura A1 – Número de ocupação médio de férmions para diferentes temperaturas.

Reescrevendo a função de Heaviside em termos dos momentos, $\Theta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_F)$, onde \mathbf{p}_F é o momento referente ao nível de Fermi, pode-se finalmente obter a densidade bariônica:

$$\begin{aligned} \rho_b &= \frac{3}{\pi^2} \int_0^{\mathbf{p}_{Fq}} d\mathbf{p} p^2 \\ &= \frac{\mathbf{p}_{Fq}^3}{\pi^2}, \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

a densidade de energia,

$$\varepsilon = \frac{3}{\pi^2} \sum_q \int_0^{\mathbf{p}_{Fq}} d\mathbf{p} p^2 \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_q^2} + B, \quad (\text{A28})$$

e a pressão,

$$P = \frac{1}{\pi^2} \sum_q \int_0^{\mathbf{p}_{Fq}} d\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_q^2}} - B. \quad (\text{A29})$$

Essas expressões foram então utilizadas em um programa escrito em FORTRAN para obter suas soluções numéricas levando em consideração a janela de estabilidade para a massa do quark s e a constante B , representada na Figura (A2³). Os critérios de estabilidade dessa janela seguem a hipótese de Bodmer-Witten.

³ Na figura, as massas máximas contidas nas bandeiras estão em unidades de massa solar, $M_\odot = 1.4766 \text{ Km} = 1.989 \times 10^{33} \text{ g} = 1.116 \times 10^{60} \text{ MeV}$

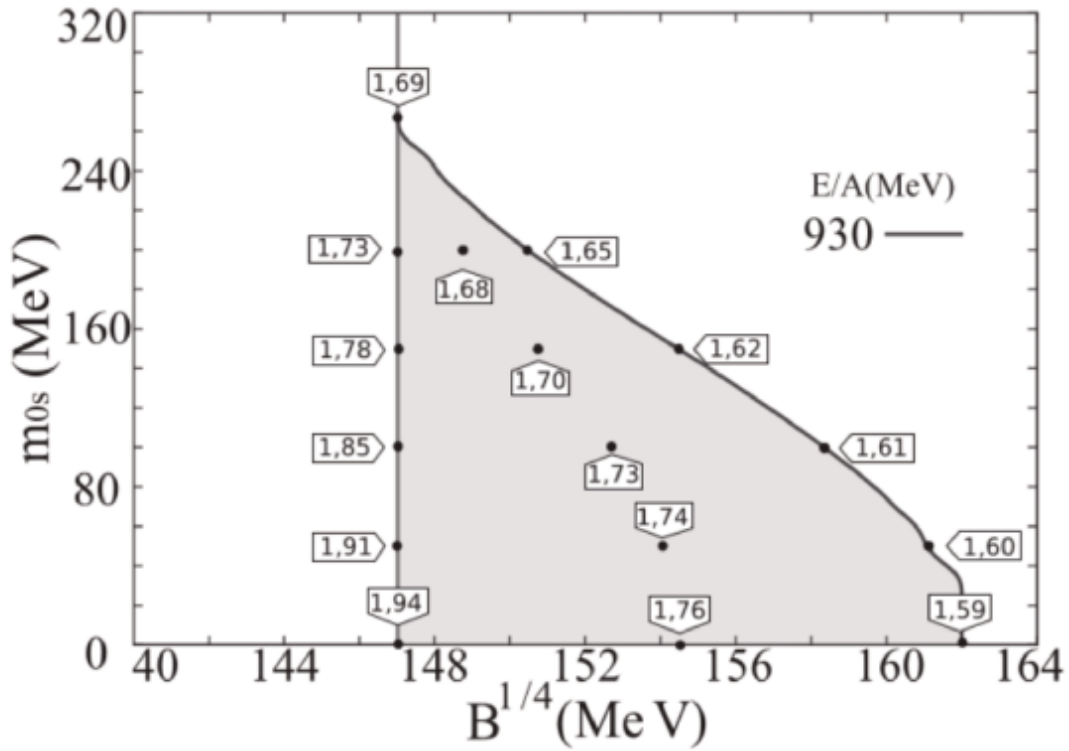


Figura A2 – Janela de estabilidade da matéria estranha descrita pelo modelo do MIT. Os valores dentro das bandeiras representam a massa máxima (em unidades de M_{\odot}) de uma estrela estranha cuja equação de estado tomou os valores do ponto $(B^{1/4}, m_{0s})$, (TORRES, J. R.; MENEZES, D. P., 2013).

A.2 EQUAÇÕES DE ESTADO PARA FÉRMIONS LIVRES (ELÉTRONS)

As equações de estado para os elétrons são obtidas exatamente da mesma forma que a feita para o modelo do MIT. As únicas diferenças são: a degenerescência, γ , para os elétrons é dada apenas por sua degenerescência de spin (2); e não existe uma constante B em suas equações de estado, ou seja, $B = 0$. Sendo assim, a densidade de energia e pressão à temperatura zero para os elétrons são dadas, respectivamente, por:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi^2} \int dp \mathbf{p}^2 \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}, \quad (\text{A30})$$

$$P = \frac{1}{3\pi^2} \int dp \frac{\mathbf{p}^4}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_e^2}}, \quad (\text{A31})$$

onde \mathbf{p} = momento e m_e = massa do elétron (0.511 MeV). Essas equações são resolvidas numericamente integrando de 0 até o momento de Fermi do elétron, $\nu_e = \sqrt{\mu_e - m_e}$, sendo μ_e = potencial químico do elétron.

APÊNDICE B – AS EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)

As equações de Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV) (TOLMAN R.C., 1939; OPPENHEIMER J.R. e VOLKOFF G. M., 1939) são responsáveis por delimitar a estrutura de objetos compactos, tais como as estrelas estranhas. Esses objetos possuem simetria esférica e material isotrópico, além de estarem em equilíbrio gravitacional, respeitando a relatividade geral. Neste apêndice encontra-se o formalismo necessário para obter essas equações.

B.1 ESPAÇO-TEMPO NÃO EUCLIDIANO

O formalismo se inicia a partir da introdução do espaço-tempo não Euclidiano, cujas coordenadas curvilíneas são dadas por $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, com distância ds , escritas em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$. Assim:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B1})$$

Ao escolher o sistema de coordenadas, calcula-se o tensor métrico associado. No espaço de Minkowski utilizado no Apêndice A, por exemplo, o tensor métrico é dado por $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Um vetor contravariante $A^\mu(x) = A'^\nu(x')$ é responsável por realizar uma transformação geral de coordenadas $x^\mu = x'^\mu(x')$ da seguinte forma:

$$A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu(x'), \quad (\text{B2})$$

de modo que os vetores covariantes e os tensores são definidos por abaixar os índices com ajuda do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Ou seja,

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu(x), \quad (\text{B3})$$

onde $g_{\mu\nu}$ pode ser diagonalizado, ao menos localmente. Se o resultado for um autovalor positivo e três negativos, significa que o espaço-tempo é um espaço de Riemann cuja relação $\det [g_{\mu\nu}(x)] \equiv g(x) < 0$ é satisfeita. Define-se então a seguinte derivada covariante:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda A_\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \right) A_\nu, \\ \nabla_\lambda A^\mu &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \right) A^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

onde ∇_λ e $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ são os mesmos operadores se agirem no escalar $A_\mu A^\mu$, e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ = símbolo de Christofel. Também define-se as seguintes propriedades:

$$\nabla_\lambda(A_\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A_\mu)B_\nu + A_\mu(\nabla_\lambda B_\nu), \quad e \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (B5)$$

A forma explícita do símbolo de Christofel pode ser derivada a partir da última equação de forma que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right), \quad (B6)$$

e se o espaço-tempo for plano todas as suas componentes são zero. É importante destacar que as derivadas covariantes não comutam, ou seja,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha A^\beta, \quad (B7)$$

onde $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ = tensor de curvatura de Riemann-Christofel. Para calcular $\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\alpha) - \nabla_\nu(\nabla_\mu A^\alpha)$, o tensor de curvatura é:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\nu\beta}^\alpha}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\lambda, \quad (B8)$$

em que se $R_{\beta\mu\nu}^\alpha = 0$, o espaço-tempo é plano. A partir da identidade de Jacobi dada por:

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]] + [\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] = 0. \quad (B9)$$

calcula-se que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0, \quad (B10)$$

e da definição do tensor de curvatura, $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, segue algumas propriedades simétricas:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (B11)$$

Já o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e o escalar de curvatura, R , são simplesmente definidos como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha}^\alpha = R_{\mu\nu}, \quad e \quad R = R_{\mu}^\mu. \quad (B12)$$

B.2 A EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Das considerações feitas para o espaço-tempo não Euclidiano, as equações de Einstein são calculadas a partir da identidade de Bianchi dada por:

$$\nabla_{\lambda} R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \nabla_{\mu} R^{\alpha}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_{\nu} R^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} = 0, \quad (\text{B13})$$

que ao ser multiplicada por $g^{\mu\nu}$, e aplicando $\sigma \leftrightarrow \alpha$, se torna:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} + g^{\mu\nu} \nabla_{\rho} R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} + g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha} &= 0, \\ \nabla_{\alpha} (g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\nu\rho}) + \nabla_{\rho} (g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}) + \nabla_{\nu} (g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

Tomando os termos em parênteses, considera-se as propriedades da Eq. (B5), de modo que para o primeiro termo se obtém $g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = R^{\alpha}_{\rho}$, para o segundo, $g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = -R$ e para o terceiro, $g^{\mu\nu} R^{\alpha}_{\mu\rho\alpha} = R^{\nu}_{\rho}$. Substituindo esses resultados na equação (B14), calcula-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\rho} - \nabla_{\rho} R + \nabla_{\nu} R^{\nu}_{\rho} \\ &= 2\nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\rho} - \nabla_{\rho} R. \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

Multiplicando agora por $g^{\nu\rho}$ e notando que $g^{\mu\rho} \nabla_{\alpha} R^{\alpha}_{\rho} = \nabla_{\nu} R^{\mu\nu}$, e que $g^{\nu\rho} \nabla_{\rho} R = g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} R$, substitui-se esse resultado na equação anterior obtendo que

$$\begin{aligned} 2\nabla_{\nu} R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} R &= 0, \\ \nabla_{\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

A expressão entre parênteses é o tensor geométrico de Einstein, ou seja,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \quad (\text{B17})$$

podendo ser reescrito em termos de $G_{\mu\nu}$, de modo que

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (\text{B18})$$

onde G = constante gravitacional, $T^{\mu\nu}$ = tensor de energia-momento da matéria, radiação e vácuo. Essas duas equações descrevem como cada ponto no espaço-tempo é curvado pela matéria, sendo então a identidade da força gravitacional (YAGI K., 2005).

B.3 MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Para encontrar uma solução estática para a equação de Einstein em uma região isotrópica do espaço-tempo, considera-se que as componentes do tensor $g_{\mu\nu}$ são independentes do tempo, ou seja, $(x^0 \equiv t)$ e $g^{0m} = 0$. Escrevendo a forma mais geral possível para a métrica em coordenadas esféricas, onde $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$, se tem que:

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{B19})$$

Substituindo r pela função $W(r) = 1$ sem perder a simetria esférica, pode-se reescrever a métrica como sendo:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B20})$$

que ao comparar com $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ resulta no seguinte tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\nu(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B21})$$

De acordo com o tensor de Riemann-Christoffel, Eq. (B8), pode-se escrever o tensor de Ricci como sendo

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta, \quad (\text{B22})$$

e fazendo uso da Eq. (B6), calcula-se os termos não nulos. Eles são dados então por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{d\nu}{dr} e^{2(\nu-\lambda)}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{d\nu}{dr}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{d\lambda}{dr}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta, \\ \Gamma_{33}^1 &= r\sin^2\theta e^{-2\lambda}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \end{aligned} \quad (\text{B23})$$

que ao serem substituídos no tensor de Ricci resultam em

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \left(-\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) e^{2(\nu-\lambda)}, \\
 R_{11} &= \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{d\lambda}{dr}, \\
 R_{22} &= \left(1 + r \frac{d\nu}{dr} - r \frac{d\lambda}{dr} \right) e^{-2\lambda} - 1, \\
 R_{33} &= R_{22} \sin^2\theta.
 \end{aligned} \tag{B24}$$

Para a região de vácuo fora da estrela, a equação de Einstein é dada por

$$\begin{aligned}
 G^{\mu\nu} = 0 &\Leftrightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0, \\
 R^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R,
 \end{aligned} \tag{B25}$$

que ao ser multiplicada por $g_{\alpha\mu}$ se torna

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\mu} R^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} R \\
 R_{\alpha}^{\nu} &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\nu} R.
 \end{aligned} \tag{B26}$$

Ao contrair $\alpha = \nu$, se obtém que $R = 0$. Isto significa que $G^{\mu\nu} = 0$, implicando em $R = 0$ e $R^{\mu\nu} = 0$. Para o tensor de Ricci nulo, em que $R_{00} = 0$ e $R_{11} = 0$, encontra-se que

$$\begin{aligned}
 -\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} &= 0, \\
 \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 + \frac{2\lambda'}{r} &= 0,
 \end{aligned} \tag{B27}$$

onde os apóstrofos denotam as derivadas de primeira e segunda ordem em relação à coordenada r . Adicionado R_{00} e R_{11} , se obtém

$$\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} = 0. \tag{B28}$$

Para r muito grande, ou $r \gg 1$, a presença da estrela não afeta o espaço, sendo este então plano, de modo que ν e λ tendem à zero. Sendo assim, $\lambda + \nu = 0$, ou seja, $\lambda = -\nu$. Substituindo esse resultado em R_{22} , rearrajando os termos e integrando se obtém que:

$$\begin{aligned}
 \left(1 + 2r \frac{d\nu(r)}{dr}\right) e^{2\nu(r)} &= 1 \\
 \frac{d}{dr} \left(r e^{2\nu(r)} \right) &= 1 \\
 d \left(r e^{2\nu(r)} \right) &= dr, \\
 r e^{2\nu} &= r + 2m, \\
 e^{2\nu} &= \frac{r + 2m}{r}, \tag{B29}
 \end{aligned}$$

onde m é uma constante de integração com unidades de comprimento. Agora os componentes do tensor $g^{\mu\nu}$ são reescritos como:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &\equiv e^{2\nu} = \frac{r + 2m}{r}, \\
 g_{00} &= 1 + \frac{2m}{r}, \tag{B30}
 \end{aligned}$$

Esse resultado deve estar de acordo com a aproximação relativística Newtoniana para valores grandes de r . Ao comparar com o potencial gravitacional Newtoniano $(\nabla\varphi = -\frac{Gm}{r})$, se obtém que

$$g_{00} = 1 = \frac{2\varphi}{r}. \tag{B31}$$

Fazendo o mesmo procedimento para g_{11} , calcula-se

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= -\frac{1}{e^{2\nu}}, \\
 g_{11} &= -\left(1 + \frac{2\varphi}{r}\right)^{-1}, \tag{B32}
 \end{aligned}$$

que ao substituir ambos em ds^2 resulta em

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{B33}$$

A constante m é a massa geométrica do corpo central, de modo que $m = GM$. Reescrevendo então ds^2 , a métrica se torna:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (r > R), \tag{B34}$$

onde R = raio da estrela. O tensor métrico é reescrito então como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B35})$$

B.4 EQUAÇÕES DE TOLMAN - OPPENHEIMER - VOLKOFF (TOV)

Para encontrar as equações da TOV, considera-se a métrica de Schwarzschild dada por:

$$ds^2 = e^{V(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B36})$$

juntamente com o tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, parametrizado na forma de um fluido perfeito, $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu}$, onde u^μ é a quadri-velocidade do fluido com a condição de normalização $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$. Para o caso em que um observador se move com a mesma velocidade local do fluido, onde o caminho médio livre e os tempos são curtos, a isotropia perfeita pode ser mantida, permitindo escrever o tensor energia-momento como uma matriz diagonal no referencial de repouso do fluido. Assim:

$$\bar{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (\text{B37})$$

onde ε = densidade de energia local, P = pressão local e a linha acima de $T^{\mu\nu}$ representa o referencial de repouso. Lembrando que $T^{ij}df_j = Pdf_i$ é a i -ésima componente da força agindo no elemento de superfície df , onde $T^{ij} = P\delta^{ij}$, e assumindo que a densidade de energia e a pressão podem ser relacionadas através de $P = P(\varepsilon)$, pode-se calcular as equações para uma estrela estática. Isso se faz combinando as equações (B22) e (B24), de modo que o tensor de Ricci é reescrito como:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\ &= e^{-2\lambda} \left\{ -2 \frac{d^2\nu}{dr^2} + 2 \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} - 2 \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{4}{r} \frac{d\nu}{dr} \right\} + \frac{2}{r^2}, \end{aligned} \quad (\text{B38})$$

e utilizando o tensor misto $G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}R$, as componentes do tensor de Einstein se tornam:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(1 - 2r \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{d}{dr} \left[r(1 - e^{-2\lambda}) \right], \\ G_1^1 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(1 + 2r \frac{d\nu}{dr} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ G_2^2 &= e^{-2\lambda} \left(\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right), \\ G_3^3 &= G_2^2, \end{aligned} \quad (\text{B39})$$

lembrando que λ é uma função de r . Pela estrela ser estática, a tri-velocidade do fluido é zero, ou seja, $u^{\mu} = 0$ para $\mu \neq 0$ e $u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$. Desse modo, as componentes não nulas do tensor energia-momento são:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_{\mu}^{\mu} = -P \quad (\mu \neq 0). \quad (\text{B40})$$

Portanto, a componente (00) da equação de Einstein se torna:

$$\begin{aligned} r^2 G_0^0 &= -\frac{d}{dr} \left[r(1 - e^{-2\lambda}) \right] \\ &= -8\pi r^2 G T_0^0 \\ &= kr^2 \varepsilon(r), \end{aligned} \quad (\text{B41})$$

sendo então integrada:

$$e^{-2\lambda} = 1 + \frac{k}{r} \int_0^r dr \varepsilon(r) r^2, \quad (\text{B42})$$

onde $k = -8\pi G$. Essa é a constante de proporcionalidade na equação de Einstein. A borda da estrela é definida pela pressão zero, e fora de sua superfície a solução encontrada na Eq. (B34) deve ser válida de modo que $M(r)$ esteja relacionada à massa gravitacional, ou seja $M \equiv M(R)$, onde R é o raio da estrela. Aplicando a constante $k = -8\pi G$ na Eq. (B39), calcula-se

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(1 - 2r \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi G \varepsilon(r), \\ G_1^1 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(1 + 2r \frac{d\nu}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G P(r), \\ G_2^2 &= e^{-2\lambda} \left(\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \right) = 8\pi G P(r), \\ G_3^3 &= G_2^2 = 8\pi G P(r), \end{aligned} \quad (\text{B43})$$

indicando que há uma relação entre a massa $M(r)$ e a coordenada radial r , assim como a métrica, $g_{11} \propto \lambda(r)$. Fazendo uso da Eq. (B32) na componente G_0^0 da equação acima e simplificando se obtém que

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\epsilon(r)r^2, \quad \text{ou} \quad M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \epsilon(r), \quad (\text{B44})$$

tomando $G = 1$ (unidades naturais). Reescrevendo os termos G_0^0 e G_1^1 de modo que:

$$-2r \frac{d\lambda}{dr} = (1 - 8\pi r^2 \epsilon) e^{2\lambda} - 1, \quad (\text{B45})$$

$$2r \frac{d\nu}{dr} = (1 + 8\pi r^2 P) e^{2\lambda} - 1. \quad (\text{B46})$$

e fazendo algumas manipulações algébricas na última equação, se obtém

$$2r \frac{d\nu}{dr} + 2r^2 \frac{d^2\nu}{dr^2} = \left[2r \frac{d\lambda}{dr} (1 + 8\pi r^2 P) + \left(16\pi r^2 P + 8\pi r^3 \frac{dP}{dr} \right) \right] e^{2\lambda}, \quad (\text{B47})$$

e aplicando a Eq. (B44) resulta que

$$2r^2 \frac{d^2\nu}{dr^2} = 1 + \left(16\pi r^2 P + 8\pi r^3 \frac{dP}{dr} \right) e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P)(1 - 8\pi r^2 \epsilon) e^{4\lambda}. \quad (\text{B48})$$

Tomando agora o quadrado da Eq. (B46) se obtém

$$2r^2 \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 + 8\pi r^2 P)^2 e^{4\lambda} - (1 + 8\pi r^2 P) e^{2\lambda} + \frac{1}{2}. \quad (\text{B49})$$

Note que as equações (B45), (B46), (B48) e (B49) relacionam $\frac{d\nu}{dr}$, $\frac{d\nu}{dr}$, $\frac{d^2\nu}{dr^2}$ e $\left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2$ com as componentes do tensor energia-momento P , $\frac{dP}{dr}$ e ϵ , e a componente do tensor métrico $g_{11} = e^{2\lambda}$. Substituindo esses resultados em G_2^2 na Eq. (B43) e fazendo mais algumas manipulações algébricas é possível obter finalmente que

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{[P(r) + \epsilon(r)] [M(r) + 4\pi r^3 P(r)]}{r[r - 2M(r)]}. \quad (\text{B50})$$

As equações da TOV são dadas pela equação à esquerda em (B44) e por (B50)¹. Junto à equação de estado $P = P(\epsilon)$ é possível obter as soluções numéricas que descrevem a estrela. As condições iniciais para essas equações são $M(0) = 0$ e

¹ A constante G está em unidades naturais, ou seja, $G = 1$

$\varepsilon(0) = \varepsilon_{cent}$, onde ε_{cent} = densidade de energia central da estrela. O raio da estrela é definido pela condição $P(r = R) = 0$. A massa total da estrela é obtida pela forma integral apresentada na Eq. (B44) em $r = R$, e para o limite Newtoniano encontra-se que

$$-\left(\frac{dP(r)}{dr}\right) = \frac{\varepsilon(r)M(r)}{r^2}. \quad (\text{B51})$$