



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fernando Miguel Hahne

**Dinâmica de oscillons, ondas de choque e kinks em modelo com
potencial não-analítico**

Florianópolis (SC)

2020

Fernando Miguel Hahne

**Dinâmica de oscillons, ondas de choque e kinks em modelo com potencial
não-analítico**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do título de mestre em física.
Orientador: Pawel Klimas

Florianópolis (SC)

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Hahne, Fernando Miguel

Dinâmica de oscillons, ondas de choque e kinks em modelo
com potencial não-analítico / Fernando Miguel Hahne ;
orientador, Pawel Klimas, 2020.

78 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Física. 3. Teoria de campos. 4. Potenciais
não-analíticos. I. Klimas, Pawel. II. Universidade Federal
de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

Fernando Miguel Hahne

Dinâmica de oscillons, ondas de choque e kinks em modelo com potencial não-analítico

O presente trabalho em nível de foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Tiago José Nunes Da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Paulo Eduardo Gonçalves de Assis, Dr.
Universidade Federal de Goiás (UFG)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Pawel Klimas
Orientador

Florianópolis (SC), 2020.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho não seria possível sem a ajuda de várias pessoas e instituições, que merecem os devidos agradecimentos.

Muito obrigado ao CNPq, pelo auxílio financeira durante a realização deste trabalho. Muito obrigado aos professores do Departamento de Física, em especial ao Prof. Paweł Klimas, pela orientação. Deixo um obrigado também a João Saldanha Streibel, pelas valiosas discussões e contribuições.

Deixo um agradecimento especial aos meus amigos, minha família e minha namorada Giovana, pelo apoio e companhia.

RESUMO

Neste trabalho estudamos soluções dinâmicas de um modelo com potencial não-analítico. Deduzimos este modelo a partir do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme e analisamos propriedades gerais de suas soluções. Obtemos soluções analíticas de oscillons, analisamos suas propriedades gerais e revisamos resultados recentes sobre espalhamentos de oscillons. Estudamos também soluções analíticas para ondas de choque e apresentamos soluções de quase-ondas de choque para explicar o decaimento das ondas de choque observadas em processos de espalhamento. Complementamos esse estudo com simulações numéricas. Por fim, nos concentramos em soluções de kink e anti-kink e analisamos numericamente seus processos de espalhamento.

Palavras-chave: Potenciais não-analíticos, oscillons, ondas de choque, kinks.

ABSTRACT

In this work we study dynamical solutions of a model with non-analytical potential. We obtain this model from the first BPS submodel of the Skyrme model and study some general properties of its solutions. We find analytical oscillon solutions, analyze its general properties, and review some recent results about oscillon scattering. We also study analytical shockwave solutions and present a quasi-shockwave solutions to explain the decay of shockwaves in scattering processes. This study is complemented with numerical simulations. Finally, we focus on kink and anti-kink solution and study numerically its scattering process.

Keywords: Non-analytic potentials, oscillons, shockwaves, kinks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Potencial $V(\bar{\eta})$. As barreiras infinitas garantem que o campo $\bar{\eta}$ fique limitado entre 0 e 2.	29
Figura 2 – Transformação de <i>folding</i>	30
Figura 3 – Extensão periódica do potencial. Note que o potencial se aproxima dos mínimos com a forma de V, que não é diferenciável nos vácuos.	30
Figura 4 – Regiões 1, 2 e 3.	34
Figura 5 – Regiões da solução $\varphi(t, x)$	37
Figura 6 – Funções $\tau(t)$ e $\sigma(t)$	39
Figura 7 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; v)$ apresentadas como um mapa de cor em função da posição x e do tempo t para diferentes valores de v	40
Figura 8 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; A, B)$ apresentadas como um mapa de cor em função da posição x e do tempo t para diferentes valores de a e v_0	43
Figura 9 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; A, B)$ com v_0 negativo.	44
Figura 10 – Oscillons com borda em movimento uniforme segundo referencial do laboratório.	46
Figura 11 – Oscillons com borda em movimento uniformemente acelerado segundo referencial do laboratório. Em todos os casos, $v_0 = 0$	47
Figura 12 – Espalhamento de dois oscillons com velocidade $V = 0,95$ em relação ao referencial do laboratório.	48
Figura 13 – Onda de choque exata para $a_0 = 1$	51
Figura 14 – Função delta triangular $\delta_\varepsilon(x)$ para diferentes valores de ε	55
Figura 15 – Soluções numéricas para ondas de choque aproximadas com diferentes valores de ε e $a = 1$	57
Figura 16 – Regiões do suporte de $\phi(t, x)$	58
Figura 17 – Regiões do suporte de $\phi(t, x)$ após o surgimento do primeiro zero.	60
Figura 18 – Razão entre a energia carregada pelas regiões externas $E_\Sigma = E_{C_1} + E_{L_1} + E_{R_1} + E_{L_2} + E_{R_2} + E_{L_3} + E_{R_3}$ e a energia total $E_{\max} = a^2/(3\varepsilon)$ em função do tempo em unidades de ε	63
Figura 19 – Soluções de kink e anti-kink como função da posição.	67
Figura 20 – Condições iniciais de um espalhamento kink–anti-kink. Para esse exemplo $V = 0,5$	68
Figura 21 – Resultados numéricos do espalhamento para $V = 0,00$	69
Figura 22 – Resultados numéricos para espalhamentos de velocidades pequenas.	70
Figura 23 – Resultados numéricos para espalhamentos com velocidades $V \in \{0,41, 0,42, 0,43\}$. A velocidade $V = 0,42$ é a menor velocidade para a qual temos como produto do espalhamento um par kink–anti-kink.	71

- Figura 24 – Resultados numéricos para espalhamentos com velocidades grandes. . . 72
- Figura 25 – Velocidade V_f e posição a do kink da direita resultante do espalhamento com velocidade inicial V . Os pontos correspondem aos dados obtidos do ajuste sobre os resultados numéricos e a linha sólida ao caso esperado de um espalhamento com interação mínima e sem emissão de radiação. 73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores numéricos dos primeiros a_k , b_k e t_k para $a_0 = 1$ 50

SUMÁRIO

	Introdução	17
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
1.1	Modelo de Skyrme e seus submodelos	21
1.1.1	Primeiro submodelo BPS	24
1.1.2	Modelo reduzido	27
1.1.2.1	Transformação de <i>foldings</i>	28
1.2	Modelo de signum–Gordon	30
1.2.1	Soluções da equação de signum–Gordon	31
2	OSCILLON GENERALIZADO	33
2.1	Exemplos	38
2.1.1	Borda em movimento linear	39
2.1.2	Borda em movimento acelerado	40
2.2	Propriedades gerais	42
2.2.1	Energia e momento	42
2.3	Oscillons em movimento	45
2.4	Espalhamento de oscillons	45
3	ONDAS DE CHOQUE	49
3.1	Energia das regiões internas	51
3.2	Quase-ondas de choque	54
3.2.1	Energia das regiões externas	61
4	ESPALHAMENTO DE KINKS	65
4.1	Resultados numéricos	67
	Conclusões	75
	REFERÊNCIAS	77

INTRODUÇÃO

Modelos efetivos são de interesse em várias áreas da física onde o modelo completo é desconhecido ou muito complexo. A complexidade de teorias quânticas, como por exemplo a teoria de Yang–Mills, levam inevitavelmente a necessidade de uma descrição simplificada efetiva (clássica). Em vários casos os modelos efetivos clássicos não são derivados diretamente de teorias fundamentais, mas postulados de maneira a satisfazer critérios como a existência de solitons topológicos, entre outras.

Solitons topológicos são configurações de campo que minimizam a energia em uma teoria não-linear. Essas configurações são caracterizadas por um número inteiro, chamado de carga topológica, que geralmente é o grau topológico ou um *winding number* do campo (MANTON; SUTCLIFFE, 2004). É comum identificarmos solitons topológicos com o número de partículas menos o número de anti-partículas em uma teoria.

Em particular, o modelo de Skyrme (SKYRME, 1961; SKYRME, 1962) é um modelo efetivo amplamente estudado para descrever a matéria nuclear. Este modelo possui soluções topológicas (skyrmions) cujas cargas topológicas são identificadas com o número bariônico. O modelo de Skyrme foi amplamente estudado na literatura (MARLEAU, 1991; MARLEAU, 1992; NETO, 1994; JACKSON; JACKSON; GOLDBERGER; BROWN; CASTILLEJO, 1985; FLORATOS; PIETTE, 2001). Também foi considerada (ADAM; SÁNCHEZ-GUILLÉN; WERESZCZYŃSKI, 2010) uma versão modificada deste modelo na qual foi introduzido um termo de ordem superior em potências de derivadas, permitindo reproduzir melhor a curva de ligação nuclear. As soluções do modelo modificado saturam o limite de Bogomolnyi (limite BPS) enquanto soluções não triviais do modelo original (com termos da segunda e quarta ordem) não o saturam. Recentemente foi descoberto que o modelo de Skyrme pode ser decomposto em dois submodelos BPS acoplados – nenhum deles existe de maneira independente de outro. (ADAM; SANCHEZ-GUILLEN; WERESZCZYNSKI, 2017).

Nosso interesse principal é o estudo de teorias de campo com potenciais não-diferenciáveis em seus mínimos. Estamos analisando o modelo de Skyrme porque a decomposição dele em sub-modelos BPS leva a surgimento de tais teorias de campo. Para certas configurações, o primeiro sub-modelo BPS pode ser reduzido a uma teoria para um campo escalar cujos valores possíveis são restritos a um intervalo finito. Os procedimentos matemáticos necessários para lidar com essa restrição são equivalentes a estudar um modelo cujo campo não possui tal restrição, mas onde o potencial é não-diferenciável em torno dos seus mínimos. (KLIMAS; STREIBEL; WERESZCZYNSKI; ZAKRZEWSKI, 2018)

Os potenciais não-diferenciáveis (também chamados de não analíticos) já foram estudados na literatura em outros contextos (ARODŽ, 2002). Por potencial não-diferenciável, nos referimos a um potencial cujas derivadas laterais possuem valores diferentes (e não nulos) quando se aproximam do mínimo, assumindo uma forma de V . Ou seja, a

derivada primeira no mínimo não existe. Esse comportamento do potencial torna impossível eliminar termos não lineares das equações de campo, mesmo no limite de pequenas perturbações. Isto torna os potenciais não-diferenciáveis particularmente interessantes pois eles se diferenciam de modo marcante do paradigma do oscilador harmônico – as excitações do campo com amplitudes pequenas são fundamentalmente não-lineares. Além disso, os potenciais não-diferenciáveis permitem ainda a existência de soluções compactas (*compactons*), cujo campo não é constante apenas dentro de uma região compacta, sem alterar o caráter quadrático dos termos cinéticos.

Modelos com potenciais não-diferenciáveis e suas soluções constituem o foco principal desse trabalho. Portanto, começamos a dissertação com uma revisão da literatura (capítulo 1), que demonstra como o primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme nos leva ao estudo de um potencial não-diferenciável. Prestamos particular atenção ao limite de pequenas amplitudes do campo, que constitui o chamado modelo de signum–Gordon, regido pela equação de mesmo nome. A equação de signum–Gordon possui entre as suas soluções *oscillons* e ondas de choque, que se provam de especial interesse para o estudo deste modelo.

Os *oscillons* se caracterizam por serem soluções periódicas e de suporte compacto. Seu estudo é relevante porque resultados numéricos de processos de espalhamento apontam que os *oscillons* dominam o espectro de radiação no modelo de signum–Gordon. No capítulo 2 construímos a solução de *oscillon* mais geral conhecida neste modelo e discutimos suas propriedades. Além disso comentamos alguns resultados recentes sobre espalhamento de *oscillons*.

Os processos de espalhamento incluem como produto estruturas similares a ondas de choque (que chamamos de quase-ondas de choque), que eventualmente decaem em uma cascata de *oscillons*. Ondas de choque são soluções já conhecidas do modelo de signum–Gordon, mas na sua forma exata elas tem vida infinita. Procurando entender o processo por trás do decaimento das quase-ondas de choque, estudamos a evolução temporal das energia interna das ondas de choque exatas. Também apresentamos um *ansatz* para as condições iniciais das quase-ondas de choque e estudamos sua evolução temporal analiticamente (para tempos pequenos) e numericamente (para tempos maiores).

No capítulo 4 voltamos a estudar configurações com amplitudes arbitrárias. Mostramos que o primeiro submodelo BPS possui soluções de *kinks* e *anti-kinks*. Estudamos a dinâmica dessas soluções através das simulações numéricas de processos de espalhamento *kink–anti-kink*. Discutimos casos especialmente interessantes e analisamos a dependência dos parâmetros do par *kink–anti-kink* resultante com os parâmetros iniciais.

Concluimos (página 75) revisando os principais resultados obtidos e definindo algumas perspectivas para trabalhos futuros.

Nesta dissertação foram revisados resultados da literatura e apresentados resultados originais. Os principais desenvolvimentos originais deste trabalho foram:

- Construção das soluções de oscillons com diferentes bordas a partir do formalismo de oscillons generalizados. Os oscillons com a borda em movimento uniforme já eram conhecidos na literatura (ARODŹ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2008; ARODŹ; ŚWIERCZYŃSKI, 2011), mas foram aqui apresentados (juntamente com um oscillon com a borda acelerada) seguindo o formalismo de oscillons generalizados (ŚWIERCZYŃSKI, 2016).
- Cálculo da evolução temporal da energia das regiões internas das ondas de choque. Através das soluções de ondas de choque já conhecidas, conseguimos obter o comportamento da energia das regiões internas, lançando luz ao processo de decaimento das quase-ondas de choque.
- Construção da solução analítica para os primeiros instantes da quase-onda de choque. Através dessa solução analítica calculamos a evolução temporal da energia e comparamos com as ondas de choque exata.
- Simulações numéricas para o espalhamento kink–anti-kink. Exploramos numericamente os processos de espalhamento para várias velocidades e comentamos os resultados.

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vamos começar analisando o modelo de Skyrme em $3 + 1$ dimensões. Veremos que adotando uma parametrização apropriada o modelo de Skyrme pode ser dividido em dois submodelos BPS (ADAM; SANCHEZ-GUILLEN; WERESZCZYNSKI, 2017), apesar do modelo de Skyrme completo não ser BPS. Além disso veremos que o primeiro submodelo pode ser reduzido a um modelo em $1 + 1$ dimensões (ADAM; FOSTER; KRUSCH; WERESZCZYNSKI, 2018). Uma consequência dessa redução é a presença de uma limitação nos valores possíveis do campo. O procedimento para lidar com essa limitação leva à introdução de potenciais não diferenciáveis no seu mínimo, cujas soluções serão exploradas nos próximos capítulos.

1.1 MODELO DE SKYRME E SEUS SUBMODELOS

O modelo de Skyrme (SKYRME, 1961; SKYRME, 1962) é uma teoria efetiva para a matéria nuclear cujas soluções topológicas podem ser identificadas com bárions. O campo do modelo de Skyrme é uma matriz U pertencente ao grupo $SU(2)$. A sua densidade lagrangiana é construída através da corrente

$$L_\mu \equiv U^\dagger \partial_\mu U$$

e é escrita como a soma

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2} \text{Tr}(L_\mu L^\mu)}_{\mathcal{L}_2} + \underbrace{\frac{1}{16} \text{Tr}([L_\mu, L_\nu]^2)}_{\mathcal{L}_4}$$

na qual identificamos uma parte quadrática \mathcal{L}_2 e uma parte quártica \mathcal{L}_4 . O modelo de Skyrme possui um invariante topológico

$$B = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{Tr}(L_i L_j L_k)$$

que é conservado sob deformações contínuas do campo, inclusive evolução temporal. Esse invariante topológico é identificado com o número bariônico.

Usualmente o campo U é parametrizado na forma

$$U = \sigma \mathbb{1} + i\pi^i \tau^i \tag{1.1}$$

na qual $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2 , π^i é um tripleto de campos piônicos, σ é um campo adicional determinado pelo vínculo $\sigma^2 + \pi^i \pi^i = 1$ de modo que $U \in SU(2)$ e τ^i são as matrizes de Pauli. O termo \mathcal{L}_2 corresponde à parte cinética de uma teoria escalar. Caso o modelo fosse definido apenas pelo termo \mathcal{L}_2 a configuração energeticamente mais favorável teria energia zero. Para permitir a existência de configurações não triviais é introduzido o termo \mathcal{L}_4 .

No entanto a parametrização (1.1) não é única. Podemos adotar a parametrização alternativa

$$U = \exp(i\xi n^i \tau^i) = \cos \xi \mathbb{1} + i \sin \xi n^i \tau^i$$

na qual ξ é um campo escalar real que pode variar no intervalo $[0, \pi]$ e n^i são componentes de um vetor unitário ($n^i n^i = 1$).

Uma vez adotada essa parametrização, é de interesse reescrever a densidade lagrangiana em termos dos campos ξ e n^i . Começamos notando que a corrente L_μ pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} L_\mu &= U^\dagger \partial_\mu U \\ &= [\cos \xi \mathbb{1} - i \sin \xi (n^i \tau^i)] [-\xi_\mu \sin \xi \mathbb{1} + i \xi_\mu \cos \xi (n^i \tau^i) + i \sin \xi (\partial_\mu n^i \tau^i)] \\ &= i \xi_\mu n^i \tau^i + i \sin \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i) \tau^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j (\partial_\mu n^k) \tau^i \\ &\equiv (L_\mu)^i \tau^i \end{aligned}$$

na qual adotamos as notações

$$\begin{aligned} \xi_\mu &\equiv \partial_\mu \xi, \\ (L_\mu)^i &\equiv i \xi_\mu n^i + i \sin \xi \cos \xi \partial_\mu n^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j \partial_\mu n^k. \end{aligned}$$

As duas partes da densidade lagrangiana podem ser então reescritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(L_\mu L^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} (L_\mu)^i (L^\mu)^j \text{Tr}(\tau^i \tau^j) \\ &= -(L_\mu)^i (L^\mu)^i, \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{16} \text{Tr}([L_\mu, L_\nu][L^\mu, L^\nu]) \\ &= \frac{1}{16} (L_\mu)^i (L_\nu)^j (L^\mu)^m (L^\nu)^n \text{Tr}([\tau^i, \tau^j][\tau^m, \tau^n]) \\ &= -\frac{1}{2} [(L_\mu)^i (L^\mu)^i (L_\nu)^j (L^\nu)^j - (L_\mu)^i (L_\nu)^i (L^\mu)^j (L^\nu)^j]. \end{aligned}$$

Essas expressões possuem contrações do tipo $(L_\mu)^i (L_\nu)^i$. Podemos calcular esses termos observando que $(L_\mu)^i$ obedece as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (L_\mu)^i n^i &= i \xi_\mu, \\ (L_\mu)^i \partial_\nu n^i &= i \sin \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i) (\partial_\nu n^i) + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} (\partial_\mu n^i) (\partial_\nu n^j) n^k, \\ \epsilon^{ijk} (L_\mu)^i n^j (\partial_\nu n^k) &= -i \epsilon^{ijk} (\partial_\mu n^i) (\partial_\nu n^j) n^k \sin \xi \cos \xi + i \sin^2 \xi (\partial_\mu n^i) (\partial_\nu n^i). \end{aligned}$$

nas quais usamos $n^i n^i = 1$, $n^i (\partial_\mu n^i) = 0$ e $\epsilon^{ijk} \epsilon^{imn} = \delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km}$. Usamos esses

resultados para calcular a contração

$$\begin{aligned}
(L_\mu)^i (L_\nu)^i &= (L_\mu)^i (i\xi_\nu n^i + i \sin \xi \cos \xi \partial_\nu n^i + i \sin^2 \xi \epsilon^{ijk} n^j \partial_\nu n^k) \\
&= -\xi_\mu \xi_\nu - \sin^2 \xi \cos^2 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) - \epsilon^{ijk} \sin^3 \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^j) n^k + \\
&\quad + \epsilon^{ijk} \sin^3 \xi \cos \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^j) n^k - \sin^4 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) \\
&= -\xi_\mu \xi_\nu - (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) \sin^2 \xi.
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na densidade lagrangiana obtemos

$$\mathcal{L}_2 = \xi^\mu \xi_\mu + \sin^2 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial^\mu n^i), \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{2} [(\xi_\mu \xi^\mu)(\xi_\nu \xi^\nu) + \sin^4 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial^\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i) + 2 \sin^2 \xi (\xi_\mu \xi^\mu)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i) + \\
&\quad - (\xi_\mu \xi^\mu)(\xi_\nu \xi^\nu) - \sin^4 \xi (\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\mu n^j)(\partial^\nu n^j) - 2 \sin^2 \xi (\xi_\mu \partial^\mu n^i)(\xi_\nu \partial^\nu n^i)] \\
&= \sin^2 \xi [(\xi_\mu \partial^\mu n^i)(\xi_\nu \partial^\nu n^i) - (\xi_\mu \xi^\mu)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin^4 \xi [(\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\mu n^j)(\partial^\nu n^j) - (\partial_\mu n^i)(\partial^\mu n^i)(\partial_\nu n^i)(\partial^\nu n^i)] \quad (1.3)
\end{aligned}$$

Até o momento utilizamos explicitamente todas as componentes n^i , que não são independentes, tendo o vínculo $n^i n^i = 1$. Uma maneira de tornar o número de graus de liberdade explícito é reescrever n^i em termos de um campo complexo u e seu conjugado \bar{u} através da projeção estereográfica

$$(n^i) = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + \bar{u}, -i(u - \bar{u}), 1 - |u|^2).$$

Para eliminarmos n^i da densidade lagrangiana precisamos obter sua derivada

$$\partial_\mu n^i = u_\mu \frac{\partial n^i}{\partial u} + \bar{u}_\mu \frac{\partial n^i}{\partial \bar{u}}$$

na qual adotamos a notação $u_\mu \equiv \partial_\mu u$ e $\bar{u}_\mu \equiv \partial_\mu \bar{u}$. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n^i}{\partial u} &= -\frac{\bar{u}}{1 + |u|^2} n^i + \frac{1}{1 + |u|^2} a^i \\
\frac{\partial n^i}{\partial \bar{u}} &= -\frac{u}{1 + |u|^2} n^i + \frac{1}{1 + |u|^2} \bar{a}^i
\end{aligned}$$

com $(a^i) = (1, -i, -\bar{u})$. Usando estas expressões obtemos a fórmula

$$\partial_\mu n^i = \frac{1}{1 + |u|^2} [-(\bar{u}u_\mu + u\bar{u}_\mu)n^i + a^i u_\mu + \bar{a}^i \bar{u}_\mu].$$

As derivadas $\partial_\mu n^i$ aparecem na densidade lagrangiana através de expressões do tipo

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu n^i)(\partial_\nu n^i) &= \frac{2(\bar{u}_\mu u_\nu + \bar{u}_\nu u_\mu)}{1 + |u|^2} \\
(\xi_\mu \partial_\mu n^i)(\xi_\nu \partial_\nu n^i) &= \frac{4\xi^\mu u_\mu \xi^\nu \bar{u}_\nu}{1 + |u|^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões nas equações (1.2) e (1.3) obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \underbrace{\frac{4 \sin^2 \xi u^\mu \bar{u}_\mu}{(1 + |u|^2)^2}}_{\mathcal{L}_2^{(1)}} + \underbrace{\xi_\mu \xi^\mu}_{\mathcal{L}_2^{(2)}}, \\ \mathcal{L}_4 &= \underbrace{\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(\xi_\mu u^\mu)(\xi_\nu \bar{u}^\nu) - (\xi_\mu \xi^\mu)(u_\nu \bar{u}^\nu)]}_{\mathcal{L}_4^{(1)}} + \underbrace{\frac{4 \sin^4 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_\mu u^\mu)(\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu) - (u_\mu \bar{u}^\mu)^2]}_{\mathcal{L}_4^{(2)}}.\end{aligned}$$

Os termos $\mathcal{L}_2^{(1)}$ e $\mathcal{L}_4^{(1)}$ podem ser combinados na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u^\mu \bar{u}_\mu + (\xi_\mu u^\mu)(\xi_\nu \bar{u}^\nu) - (\xi_\mu \xi^\mu)(u_\nu \bar{u}^\nu)] \quad (1.4)$$

assim como os termos $\mathcal{L}_2^{(2)}$ e $\mathcal{L}_4^{(2)}$ na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(2)} = \xi_\mu \xi^\mu + \frac{4 \sin^4 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [(u_\mu u^\mu)(\bar{u}_\nu \bar{u}^\nu) - (u_\mu \bar{u}^\mu)^2].$$

Cada uma dessas novas densidades lagrangianas, quando consideradas no setor estático, formam um submodelo BPS do modelo de Skyrme. Note que os dois submodelos não podem ser desacoplados. Ou seja, não existe nenhuma configuração dos campos tal que $\mathcal{L}^{(1)}$ seja zero sem que $\mathcal{L}^{(2)}$ também seja zero e vice-versa. No entanto, existem motivações para estudar cada submodelo de modo independente. Por exemplo, o primeiro submodelo tem como soluções mapas racionais, que encontram aplicações no modelo de Skyrme completo. Desta forma, é esperado que os submodelos BPS possuam propriedades que possam ser úteis no estudo do modelo completo. Neste trabalho vamos estudar propriedades do primeiro submodelo.

1.1.1 Primeiro submodelo BPS

Vamos considerar o primeiro submodelo, definido pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}^{(1)}$, no caso estático. Nesse caso, as derivadas temporais da lagrangiana se tornam nulas e a densidade hamiltoniana se torna $\mathcal{H}^{(1)} = -\mathcal{L}^{(1)}$. Usando a expressão (1.4) obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} &= -\frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u^i \bar{u}_i + (\xi_i u^i)(\xi_j \bar{u}^j) - (\xi_i \xi^i)(u_j \bar{u}^j)] \\ &= \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u_i \bar{u}_i - (\xi_i u_i)(\xi_j \bar{u}_j) + (\xi_i \xi_i)(u_j \bar{u}_j)].\end{aligned}$$

Essa expressão pode ser reescrita observando que

$$\begin{aligned}(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) &= u_i \bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} u_i \xi_m \bar{u}_n \pm i\epsilon^{ijk} \bar{u}_i \xi_j u_k + \epsilon^{ijk} \epsilon^{imn} \xi_j \xi_m u_k \bar{u}_n \\ &= u_i \bar{u}_i \pm 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k + (\xi_i \xi_i)(u_j \bar{u}_j) - (\xi_i u_i)(\xi_j \bar{u}_j) \quad (1.5)\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \left[(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) \mp 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k \right].$$

Integrando, obtemos a energia da configuração estática

$$E^{(1)} = \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} \left[(u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n) \mp 2i\epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k \right].$$

É possível mostrar (ADAM; FOSTER; KRUSCH; WERESZCZYNSKI, 2018) que em termos dos campos ξ e u , o número bariônico pode ser escrito como

$$B = -\frac{i}{\pi^2} \int d^3x \frac{\sin^2 \xi \epsilon^{ijk} \xi_i u_j \bar{u}_k}{(1 + |u|^2)^2},$$

de modo que

$$E^{(1)} = 8\pi^2 |B| + \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} (u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k)(\bar{u}_i \mp i\epsilon^{imn} \xi_m \bar{u}_n).$$

Essa expressão implica na desigualdade $E^{(1)} \geq 8\pi^2 |B|$. É de interesse saber em que casos essa desigualdade será saturada. Isso acontece quando forem válidas as equações de Bogomolnyi

$$u_i \pm i\epsilon^{ijk} \xi_j u_k = 0, \quad (1.6)$$

$$\bar{u}_i \mp i\epsilon^{ijk} \xi_j \bar{u}_k = 0. \quad (1.7)$$

Essas são equações de primeira ordem para os campos e são consistentes com as equações de Euler–Lagrange, que são equações de segunda ordem.

Podemos ainda contrair as equações (1.6) e (1.7) com ξ_i para obter os vínculos

$$u_i \xi_i = 0, \quad (1.8)$$

$$\bar{u}_i \xi_i = 0. \quad (1.9)$$

Contraindo com u_i obtemos os vínculos

$$u_i u_i = 0, \quad (1.10)$$

$$\bar{u}_i \bar{u}_i = 0. \quad (1.11)$$

Os vínculos (1.8) e (1.9) podem ser satisfeitos identicamente tomando ξ e u como funções de conjuntos de variáveis diferentes

$$\xi = \xi(r),$$

$$u = u(\theta, \phi).$$

Já os vínculos (1.10) e (1.11) podem ser satisfeitos adotando mais uma vez a projeção estereográfica $z = \tan(\theta/2)e^{i\phi}$, mas desta vez no espaço das coordenadas. Escrevendo o campo u como uma função de z e \bar{z} podemos obter as fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} u_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} u_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (e^{i\phi} u_z + e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial z}{\partial \phi} u_z + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \phi} u_{\bar{z}} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) (e^{i\phi} u_z - e^{-i\phi} u_{\bar{z}})\end{aligned}$$

nas quais adotamos a notação $u_z \equiv \partial_z u$ e $u_{\bar{z}} \equiv \partial_{\bar{z}} u$. Usando essas expressões obtemos que

$$u_i u_i = \frac{1}{r^2} (\partial_\theta u)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi u)^2 = \frac{1}{r^2} \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) u_z u_{\bar{z}}.$$

Desta forma, os vínculos (1.10) e (1.11) serão satisfeitos identicamente se $u = u(z)$ ou $u = u(\bar{z})$.

Vamos agora calcular a energia para uma configuração de campos satisfazendo esse conjunto de vínculos. Através da densidade hamiltoniana (1.5) obtemos que

$$\begin{aligned}E^{(1)} &= \int d^3x \mathcal{H}^{(1)} \\ &= \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} [u_i \bar{u}_i - \cancel{(\xi_i u_i)} \cancel{(\xi_j u_j)} + (\xi_j \xi_j) (u_i \bar{u}_i)] \\ &= \int d^3x \frac{4 \sin^2 \xi}{(1 + |u|^2)^2} u_i \bar{u}_i (1 + \xi_r^2).\end{aligned}$$

Em termos das coordenadas z e \bar{z} podemos escrever

$$\begin{aligned}u_i \bar{u}_i &= \frac{1}{r^2} (\partial_\theta u) (\partial_\theta \bar{u}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi u) (\partial_\phi \bar{u}) \\ &= \frac{1}{4r^2} \sec^4\left(\frac{\theta}{4}\right) (e^{i\phi} u_z + e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) (e^{i\phi} \bar{u}_z + e^{-i\phi} \bar{u}_{\bar{z}}) \\ &\quad - \frac{1}{4r^2} \sec^4\left(\frac{\theta}{4}\right) (e^{i\phi} u_z - e^{-i\phi} u_{\bar{z}}) (e^{i\phi} \bar{u}_z - e^{-i\phi} \bar{u}_{\bar{z}}) \\ &= \frac{(1 + |z|^2)^2}{2r^2} (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z)\end{aligned}$$

de modo que a energia se torna

$$E^{(1)} = 2 \underbrace{\int dr \sin^2 \xi (1 + \xi_r^2)}_{E_\xi^{(1)}} \underbrace{\int d\Omega \frac{(1 + |z|^2)^2}{(1 + |u|^2)^2} (u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z)}_{E_u^{(1)}}.$$

Note que a parte $E_\xi^{(1)}$ da energia obedece a relação

$$E_\xi^{(1)} = \int dr \sin^2 \xi [(1 \pm \xi_r)^2 \mp 2\xi_r] \geq 2 \left| \int dr \sin^2 \xi \xi_r \right|.$$

Para que o campo possua configurações topologicamente não triviais exigimos as condições de contorno

$$\begin{aligned}\xi(0) &= \pi, \\ \xi(\infty) &= 0.\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que

$$E_\xi^{(1)} \geq 2 \left| \int_0^\pi d\xi \sin^2 \xi \right| = \pi.$$

A desigualdade será saturada para configurações que satisfazem a equação de Bogomolnyi

$$\sin \xi (\xi_r \pm 1) = 0$$

cuja solução é o *compacton*

$$\xi(r) = \begin{cases} \pi - r & \text{se } 0 \leq r \leq \pi, \\ 0 & \text{se } r > \pi. \end{cases}$$

O termo $E_u^{(1)}$ corresponde com a energia do modelo CP^1 (sigma não-linear) em \mathbb{S}^2 . Suas soluções de energia finita são dadas por funções racionais holomorfas $u(z)$ e anti-holomorfas $u(\bar{z})$. Essas soluções saturam o limite de Bogomolnyi $E_u^{(1)} \geq 4\pi|N|$, na qual N é o *winding number* da função racional. Mais detalhes podem ser encontrados na referência (MANTON; SUTCLIFFE, 2004).

1.1.2 Modelo reduzido

Uma propriedade notável do primeiro submodelo BPS do modelo de Skyrme é que as considerações da seção anterior podem ser generalizadas para o caso dinâmico. Começamos essa generalização pelos vínculos (1.8) e (1.9) de modo que

$$\xi_\mu u^\mu = \xi_\mu \bar{u}^\mu = 0. \quad (1.12)$$

Novamente, essa condição pode ser satisfeita se tomarmos os campos ξ e u como funções de conjuntos de variáveis diferentes na forma

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(t, r), \\ u &= u(\theta, \phi).\end{aligned}$$

A condição (1.12) nos permite simplificar a densidade lagrangiana do primeiro submodelo como

$$\mathcal{L}^{(1)} = 4 \underbrace{\frac{u^\mu \bar{u}_\mu}{(1 + |u|^2)^2}}_{\mathcal{L}_{CP^1}} \underbrace{\sin^2 \xi (1 - \xi_\nu \xi^\nu)}_{\mathcal{L}_\xi}$$

onde foi possível fatorar a lagrangiana como o produto de dois termos que dependem de campos diferentes. Note ainda que a parte angular pode ser escrita como o produto

$$\mathcal{L}_{CP^1} = -4 \frac{u_i \bar{u}_i}{(1 + |u|^2)^2} = -2 \frac{(1 + |z|^2)^2}{r^2} \frac{u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z}{(1 + |u|^2)^2} \equiv \frac{1}{r^2} \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$$

no qual $\tilde{\mathcal{L}}_{CP^1}$ não depende da variável r .

Considerando essa decomposição, a ação deste modelo reduzido pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}^{(1)} = \int d\Omega \tilde{\mathcal{L}}_{CP^1} \int dt \int dr \mathcal{L}_\xi.$$

com $d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\phi$. Note que conseguimos separar completamente a parte angular da parte radial da teoria, de modo que a parte radial é equivalente à uma teoria em 1 + 1 dimensões. Se tomarmos o campo u tal que as equações (1.10) e (1.11) sejam satisfeitas, a ação se torna

$$S = -8\pi|B| \int dt \int_0^\infty dr \sin^2 \xi (1 - \xi_\mu \xi^\mu). \quad (1.13)$$

Note ainda que $\xi_\mu \xi^\mu = \xi_t^2 - \xi_r^2$, e portanto a ação (1.13) leva a equação de movimento que tem a forma da equação para um campo em 1 + 1 dimensões.

Vamos agora fazer uma mudança de variáveis no *target space* que envolve o campo dependente da coordenada radial. Vamos substituir o campo ξ por um novo campo $\bar{\eta}$ definido como

$$\bar{\eta} = 1 - \cos \xi \quad (1.14)$$

em termos dos quais a ação pode ser escrita como

$$S = 16\pi|B| \int dt \int_0^\infty dr \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\eta}) (\partial^\mu \bar{\eta}) - \underbrace{\bar{\eta} + \frac{1}{2} \bar{\eta}^2}_{-V(\bar{\eta})} \right).$$

Pela definição (1.14), o campo $\bar{\eta}$ deve estar limitado entre 0 e 2. A restrição para o campo $\bar{\eta}$ ao intervalo $[0, 2]$ pode ser implementada explicitamente adicionando paredes infinitas ao potencial $V(\bar{\eta})$ na forma

$$V(\bar{\eta}) = \begin{cases} \infty & \text{se } \bar{\eta} < 0, \\ \bar{\eta} - \frac{1}{2} \bar{\eta}^2 & \text{se } 0 \leq \bar{\eta} \leq 2, \\ \infty & \text{se } \bar{\eta} > 2. \end{cases}$$

1.1.2.1 Transformação de *folding*

As barreiras infinitas no potencial $V(\bar{\eta})$ são convenientes para garantir que o campo pertença ao intervalo $0 \leq \bar{\eta} \leq 2$, mas geram várias outras complicações matemáticas.

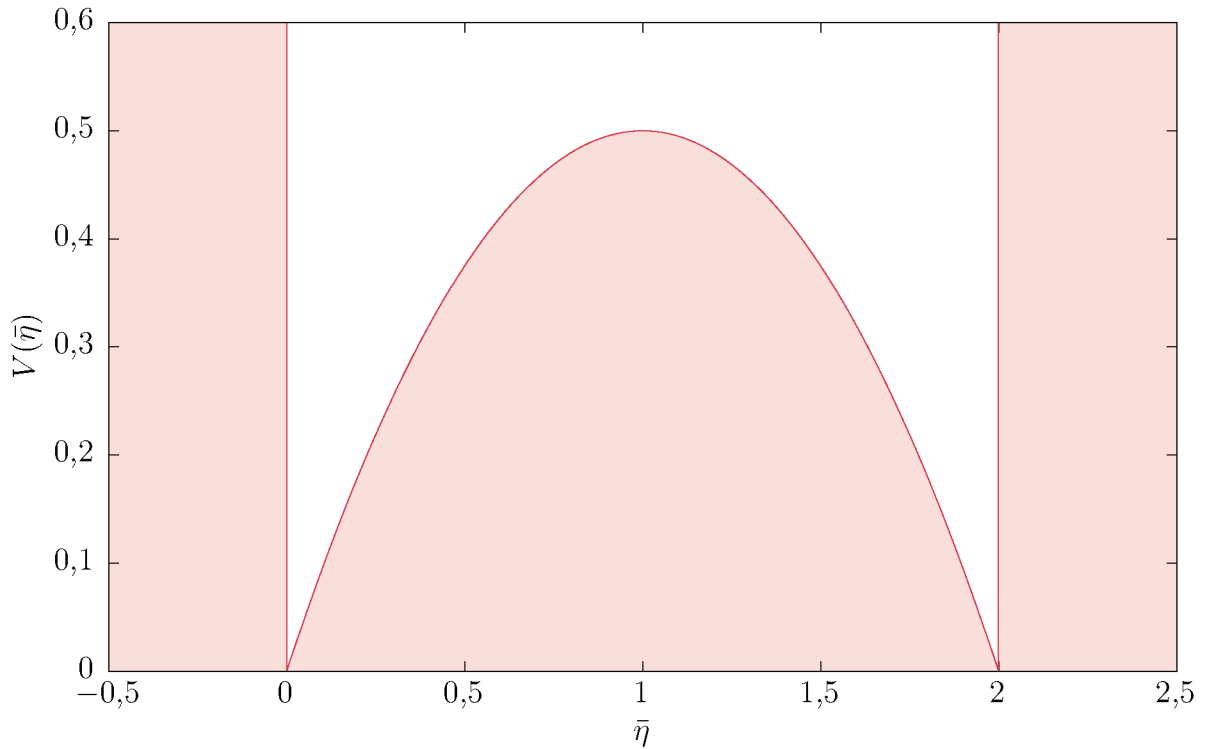


Figura 1 – Potencial $V(\bar{\eta})$. As barreiras infinitas garantem que o campo $\bar{\eta}$ fique limitado entre 0 e 2.

Podemos nos livrar das barreiras identificando o campo $\bar{\eta} \in [0,2]$ como o resultado de uma transformação de *folding* de um campo η que pode assumir qualquer valor real.

Esse novo campo real η , dito *unfolded*, é relacionado com $\bar{\eta}$ pela transformação

$$\bar{\eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta - 4n| H_n(\eta)$$

na qual H_n é uma função degrau dupla, que vale um dentro do intervalo $(4n - 2, 4n + 2)$ e é nula fora dele. Em termos das funções degrau de Heaviside $\theta(z)$, $H_n(z)$ é dado como

$$H_n(\eta) \equiv \theta(\eta - 4n + 2) - \theta(\eta - 4n - 2).$$

Para trabalharmos com o campo *unfolded* η , tomamos seu potencial como uma extensão periódica do potencial de $\bar{\eta}$, de modo que

$$V(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|\eta - 4n| - \frac{1}{2}(\eta - 4n)^2 \right) H_n(\eta).$$

Desta forma, as barreiras infinitas são efetivamente removidas.

Note que a teoria está restrita para a linha semi-infinita $r \in \mathbb{R}^+$. No entanto, podemos estender a variável espacial para cobrir toda a reta real e lidar com um campo definido para posições $x \in \mathbb{R}$. Desde que as configurações do campo estejam localizadas longe da posição $r = 0$, essa extensão não leva a perda de generalidade.

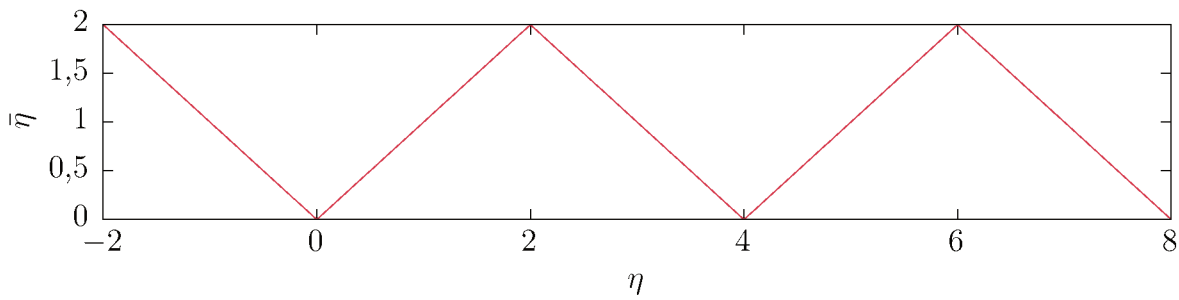


Figura 2 – Transformação de *folding*.

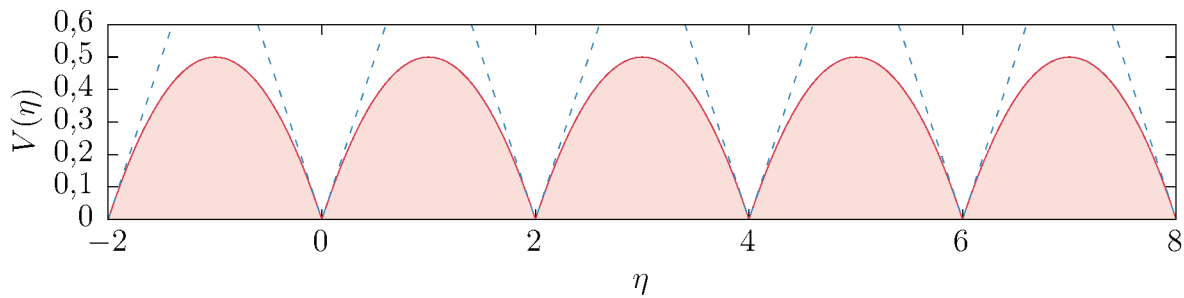


Figura 3 – Extensão periódica do potencial. Note que o potencial se aproxima dos mínimos com a forma de V, que não é diferenciável nos vácuos.

O campo *unfolded* $\eta(t, x)$ possui a equação de movimento

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + V'(\eta) = 0$$

na qual a derivada do potencial é

$$V'(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{sgn}(\eta - 4n) - (\eta - 4n)] H_n(\eta).$$

Note que as derivadas do potencial não são contínuas, uma consequência de $V(\eta)$ se aproximar dos seus mínimos com uma forma de V. Em particular, elas são diferentes de zero. Esse comportamento é fundamentalmente diferente da ampla maioria dos modelos, que seguem o paradigma do oscilador harmônico – com potenciais aproximando o mínimo de forma parabólica.

1.2 MODELO DE SIGNUM–GORDON

Nos restringindo a situações nas quais o campo possui valores apenas na região $-2 \leq \eta \leq 2$, o campo *folded* pode ser expresso como $\bar{\eta} = |\eta|$ e a lagrangiana do modelo reduzido toma a forma simplificada

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 - |\eta| + \frac{1}{2}\eta^2$$

A equação de movimento, nesse caso, pode ser escrita na forma

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta - \eta + \operatorname{sgn} \eta = 0.$$

Essa versão simplificada do modelo possui propriedades interessantes, como a existência de kinks, que será explorada no capítulo 4.

No entanto, possível obter um modelo ainda mais simples na aproximação $\eta \ll 1$. Nesses caso, é possível desprezar o termo proporcional a η^2 na lagrangiana de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 - |\eta|. \quad (1.15)$$

e a equação de movimento se torna

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + \operatorname{sgn} \eta = 0. \quad (1.16)$$

O modelo definido pela lagrangiana (1.15) é chamado de modelo de signum–Gordon e a equação (1.16) é dita a equação de signum–Gordon. No restante do trabalho vamos escrever o campo como ϕ ou φ quando nos referirmos especificamente ao modelo de signum–Gordon. Esse modelo constitui o exemplo mais simples de teoria com potencial não-diferenciável. Ele também possui propriedades interessantes, como a existência de soluções não-topológicas de longa vida, chamadas oscillons (capítulo 2) e a existência de ondas de choque (capítulo 3).

1.2.1 Soluções da equação de signum–Gordon

Devido à sua forma simples e similaridade com a equação de onda, a equação de signum–Gordon permite a construção de soluções de modo simples, desde que nos consideremos separadamente regiões nas quais o sinal do campo φ é constante ($\operatorname{sgn} \varphi = \pm 1$). Nessas regiões, a equação de signum–Gordon é reduzida à equação de onda não homogênea

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi \pm 1 = 0.$$

Essa equação pode ser facilmente resolvida em coordenadas cones de luz, $y_{\pm} = x \pm t$, nas quais a equação de signum–Gordon se torna

$$-4 \partial_+ \partial_- \varphi \pm 1 = 0.$$

A equação é identicamente satisfeita se o campo φ for da forma

$$\varphi(y_+, y_-) = F(y_+) + G(y_-) \pm \frac{y_+ y_-}{4}. \quad (1.17)$$

As funções $F(y_+)$ e $G(y_-)$ são determinadas pelas condições de contorno. Podemos ainda reescrever essa solução em coordenadas cartesianas:

$$\varphi(t, x) = F(x + t) + G(x - t) \pm \frac{x^2 - t^2}{4}.$$

Note que a expressão (1.17) para a solução não é única. Enquanto as funções $F(y_+)$ e $G(y_-)$ não forem fixadas pelas condições de contorno, é possível reescrever a solução em uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned}\varphi(y_+, y_-) &= F(y_+) + G(y_-) \pm \frac{(y_+ + y_-)^2}{8}, \\ \varphi(y_+, y_-) &= F(y_+) + G(y_-) \mp \frac{(y_+ - y_-)^2}{8}\end{aligned}$$

Note que estas expressões diferem de (1.17) apenas por termos proporcionais à $(y_+)^2$ e $(y_-)^2$ que podem ser absorvidos na definição de $F(y_+)$ e $G(y_-)$. Note ainda que podemos escrever essas expressões em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\varphi(t, x) &= F(x + t) + G(x - t) \pm \frac{x^2}{2}, \\ \varphi(t, x) &= F(x + t) + G(x - t) \mp \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

2 OSCILLON GENERALIZADO

Nesse capítulo vamos construir soluções analíticas do modelo de signum–Gordon, com caráter oscilatório no tempo e com suporte compacto, chamadas de oscillons.

O estudo de oscillons é relevante porque resultados numéricos de espalhamento de oscillons no modelo de signum–Gordon mostram que os oscillons dominam o espectro de radiação deste modelo. Não esperamos que nos processos de espalhamento apareçam oscillons exatos (como os que serão construídos a seguir), mas as estruturas resultantes (que chamamos de quase-oscillons) se assemelham muito aos oscillon exatos.

Os oscillons de período T são tais que o campo passa metade do seu período com sinal negativo e a outra metade com sinal positivo, sendo identicamente zero para tempos iguais a múltiplos inteiros de $T/2$.

A solução para tempos arbitrários $\phi(t,x)$ pode ser construída a partir da restrição da solução $\varphi(t,x)$ para o intervalo $0 \leq t \leq T/2$. O oscillon possui suporte compacto, ou seja, exceto por uma região contida entre duas curvas γ_L e γ_R – as bordas esquerda e direita do oscillon – o campo é nulo. Assumimos nessa construção, que as equações de movimento $x = x_{R,L}(t)$ das bordas são conhecidas, com $x_L(0) = 0$ e $x_R(0) = T$. Como o oscillon tem zeros para tempos múltiplos de $T/2$ tomamos a condição inicial

$$\varphi(0, x) = \varphi\left(\frac{T}{2}, x\right) = 0, .$$

Já o fato que o oscillon está contido entre γ_R e γ_L nos leva a impor a condição

$$\partial_t \varphi(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq T \\ 0 & \text{se } x > T \end{cases} \quad (2.1)$$

na qual $f(x)$ é uma função contínua tal que $f(0) = f(T) = 0$. Por convenção adotamos que $f(x) \leq 0$ no intervalo $0 \leq x \leq T$. Como uma consequência, a solução $\varphi(t,x)$ é negativa para $0 \leq t \leq T/2$. A forma específica de $f(x)$ não é conhecida inicialmente. Ela será determinada de modo que o campo fique contido entre as duas bordas, e será, portanto, dependente da forma das bordas.

As soluções de oscillon para o modelo de signum–Gordon foram inicialmente descobertas para o caso particular do oscillon cujas bordas γ_L e γ_R se encontram paradas (ARODŹ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2008). Posteriormente, foi encontrada uma generalização para o caso da borda em movimento uniforme (ARODŹ; ŚWIERCZYŃSKI, 2011). Por fim, a solução foi generalizada para bordas *time-like* arbitrárias (ŚWIERCZYŃSKI, 2016). Essa última generalização, por englobar os casos anteriores será a apresentada aqui.

Como a informação das condições de contorno nas bordas viaja com a velocidade da luz, é conveniente separar o suporte de $\phi(t,x)$ em três regiões:

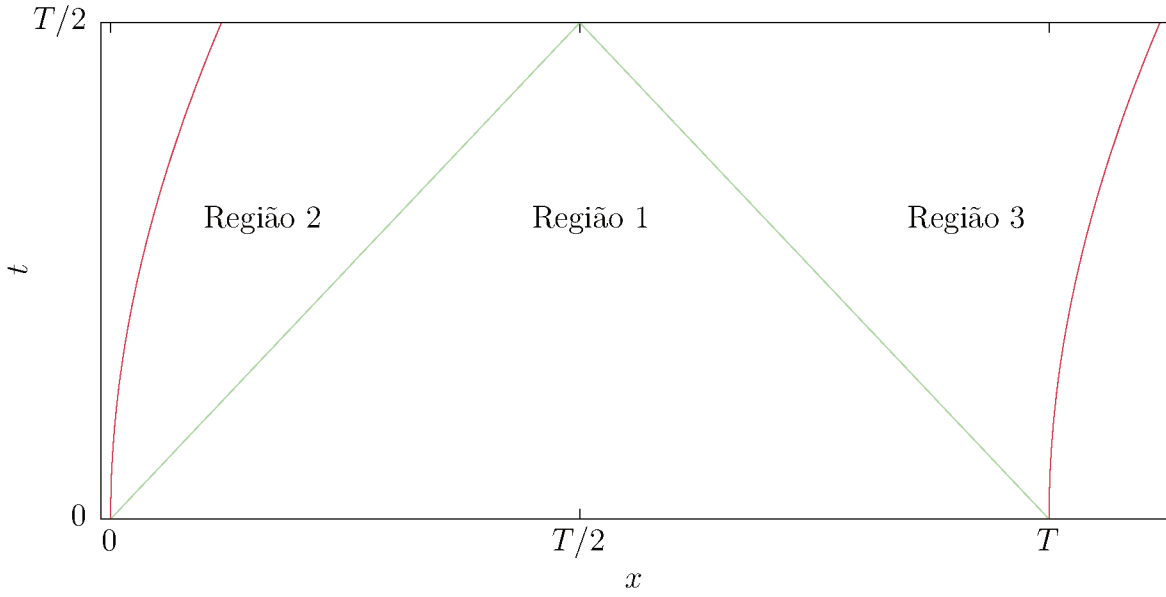


Figura 4 – Regiões 1, 2 e 3.

- **Região 1:** $x_L(t) \leq x \leq t$. Como o sinal do campo $\varphi_1(t, x)$ é negativo, a equação de signum–Gordon é identicamente satisfeita pela expressão

$$\varphi_1(t, x) = F_1(x + t) + G_1(x - t) + \frac{t^2}{2}.$$

A forma das funções F_1 e G_1 é definida pelas condições de contorno

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, x) &= F_1(x) + G_1(x) = 0, \\ \partial_t \varphi_1(0, x) &= F_1'(x) - G_1'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Da primeira condição obtemos que $F_1(x) = -G_1(x)$. Usando esse resultado na segunda condição obtemos a expressão

$$F(x) \equiv F_1(x) = F_1(0) + \frac{1}{2} \int_0^x ds f(s).$$

A solução para a região toma a forma

$$\varphi_1(t, x) = F(x + t) - F(x - t) + \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} ds f(s) + \frac{t^2}{2}.$$

- **Região 2:** $x_L(t) \leq x \leq t$. De modo similar à região 1, consideramos

$$\varphi_2(t, x) = F_2(t + x) + G_2(x - t) + \frac{t^2}{2}$$

com as funções F_2 e G_2 definidas pelas condições de contorno

$$\varphi_2\left(\frac{T}{2}, x\right) = F_2\left(x + \frac{T}{2}\right) + G_2\left(x - \frac{T}{2}\right) + \frac{T^2}{8} = 0 \quad (2.2)$$

e de continuidade em $x = t$

$$\varphi_2(t, t) = \varphi_1(t, t). \quad (2.3)$$

Fazendo a substituição $x \rightarrow x + T/2$ na equação (2.2) obtemos que

$$G_2(x) = -F_2(x + T) - \frac{T^2}{8}. \quad (2.4)$$

Enquanto isso, a condição (2.3) nos fornece

$$F_2(2t) + G_2(0) + \frac{t^2}{2} = F(2t) - F(0) + \frac{t^2}{2}. \quad (2.5)$$

Combinando os resultados (2.4) e (2.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F(x) - F(0) + F_2(T) + \frac{T^2}{8}, \\ G_2(x) &= -F(x + T) + F(0) - F_2(T) - \frac{T^2}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução nessa região toma a forma

$$\varphi_2(t, x) = F(x + t) - F(x - t + T) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8} = \frac{1}{2} \int_{x-t+T}^{x+t} ds f(s) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8}.$$

- **Região 3:** $T - t \leq x \leq x_R(t)$. Procuramos uma solução na forma

$$\varphi_3(t, x) = F_3(x + t) + G_3(x - t) + \frac{t^2}{2}$$

no qual a forma das funções F_3 e G_3 é definida pelas condições de contorno

$$\varphi_3\left(\frac{T}{2}, x\right) = F_3\left(x + \frac{T}{2}\right) + G_3\left(x - \frac{T}{2}\right) + \frac{T^2}{8} = 0 \quad (2.6)$$

e continuidade em $x = T - t$

$$\varphi_3(t, T - t) = \varphi_2(t, T - t). \quad (2.7)$$

Fazendo a substituição $x \rightarrow x - T/2$ na equação (2.6) obtemos que

$$F_3(x) = -G_3(x - T) - \frac{T^2}{8}. \quad (2.8)$$

Enquanto isso a condição (2.7) nos fornece

$$\begin{aligned} \varphi\left(t, \frac{T}{2} - t\right) &= F\left(\frac{T}{2}\right) - F\left(-2t + \frac{T}{2}\right) + \frac{t^2}{2} \\ &= F_3\left(\frac{T}{2}\right) + G_3\left(-2t + \frac{T}{2}\right) + \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Combinando os resultados (2.8) e (2.9) podemos escrever

$$\begin{aligned} F_3(x) &= F(x - T) - F\left(\frac{T}{2}\right) - G_3\left(-\frac{T}{2}\right) - \frac{T^2}{4}, \\ G_3(x) &= -F(x) + F\left(\frac{T}{2}\right) + G_3\left(-\frac{T}{2}\right) + \frac{T^2}{8}. \end{aligned}$$

Portanto a solução nessa região toma a forma

$$\varphi_3(t, x) = F(x + t - T) - F(x - t) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t-T} ds f(s) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8}.$$

Resumindo os três casos, podemos escrever a solução $\varphi(t,x)$ como

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} F(x+t) - F(x-t+T) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8} & \text{se } x_L(t) \leq x \leq t, \\ F(x+t) - F(x-t) + \frac{t^2}{2} & \text{se } t \leq x \leq T-t, \\ F(x+t-T) - F(x-t) + \frac{t^2}{2} - \frac{T^2}{8} & \text{se } T-t \leq x \leq x_R(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Vamos agora determinar a forma da função $f(x)$. Podemos fazer isso exigindo que a solução não só toque o zero nas bordas, mas o faça suavemente. Escrevemos essa condição em coordenadas cone de luz $y_{\pm} = x \pm t$ nas quais a suavidade implica que

$$\partial_+ \varphi \Big|_{\gamma_R, \gamma_L} = \partial_- \varphi \Big|_{\gamma_R, \gamma_L} = 0. \quad (2.11)$$

Nessas coordenadas, a solução na região 2 (que contém a borda esquerda) assume a forma

$$\varphi_2(y_+, y_-) = F(y_+) - F(y_- + T) + \frac{1}{8}(y_+ - y_-)^2 - \frac{T^2}{8}.$$

Derivando essa expressão, as condições (2.11) implicam nas equações

$$f(y_+) \Big|_{\gamma_L} = -\frac{1}{2}(y_+ - y_-) \Big|_{\gamma_L}, \quad (2.12)$$

$$f(y_- + T) \Big|_{\gamma_L} = -\frac{1}{2}(y_+ - y_-) \Big|_{\gamma_L}. \quad (2.13)$$

Note que para pontos da borda esquerda γ_L vale

$$\begin{aligned} 0 \leq y_+ \leq \frac{T}{2} + \Delta, \\ \frac{T}{2} + \Delta \leq y_- + T \leq T \end{aligned}$$

com $\Delta \equiv x_L(T/2)$. Portanto, as relações (2.12) e (2.13) cobrem, conjuntamente, todo o domínio de $f(x)$.

Para garantir a consistência da solução, devemos verificar como a borda direita γ_R se relaciona com $f(x)$. Em coordenadas cone de luz, a solução na região 3 (que contém a borda direita) assume a forma

$$\varphi_3(y_+, y_-) = F(y_+ - T) - F(y_-) + \frac{1}{8}(y_+ - y_-)^2 - \frac{T^2}{8}$$

de modo que as condições (2.11) implicam nas equações

$$f(y_+ - T) \Big|_{\gamma_R} = -\frac{1}{2}(y_+ - y_-) \Big|_{\gamma_R}, \quad (2.14)$$

$$f(y_-) \Big|_{\gamma_R} = -\frac{1}{2}(y_+ - y_-) \Big|_{\gamma_R}. \quad (2.15)$$

Comparando o conjunto de equações (2.12) e (2.13) com (2.14) e (2.15), observamos que a borda direita γ_R trata-se de uma translação em T da borda esquerda γ_L . Ou seja, se os

pontos (y_+, y_-) satisfazem (2.12) e (2.13), então $(y_+ + T, y_- + T)$ satisfazem as equações (2.14) e (2.15). Portanto, não temos a liberdade de escolher γ_L e γ_R de modo totalmente arbitrário. Uma vez fixada a borda esquerda, a borda direita passa a estar determinada também.

Usando o formalismo desenvolvido acima, é possível construir uma solução de oscillon válida no intervalo $0 \leq t \leq T/2$ desde que possamos reescrever a equação de movimento da borda esquerda na forma $y_- = g(y_+)$, $y_+ = g^{-1}(y_-)$. Em termos da função g , as condições (2.12) e (2.13) podem ser reescritas como

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}[x - g(x)] & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} + \Delta, \\ -\frac{1}{2}[g^{-1}(x - T) - x + T] & \text{se } \frac{T}{2} + \Delta \leq x \leq T. \end{cases}$$

Como a expressão de $f(x)$ é dada em duas partes, a solução $\varphi(t, x)$ terá expressões diferentes em regiões delimitadas pelas retas $x \pm t = T/2 + \Delta$, assim como pelas retas $x = t$ e $x = T - t$. Cada uma dessas regiões está representada na figura 5. Em cada região,

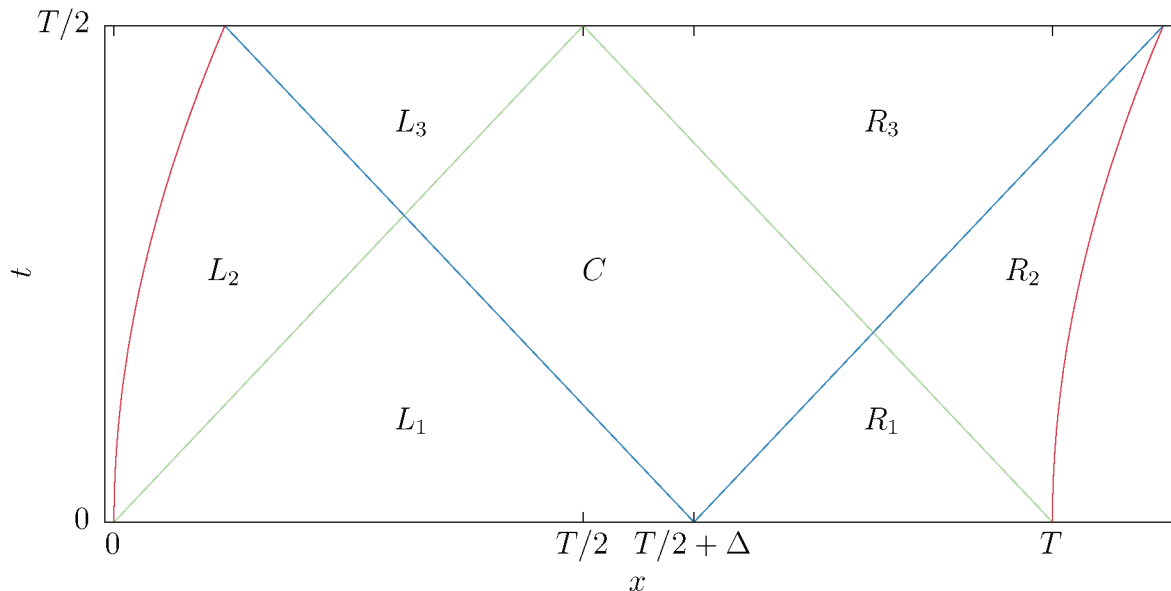


Figura 5 – Regiões da solução $\varphi(t, x)$.

a solução da equação de signum-Gordon é dada por uma expressão diferente $\varphi_k(t, x)$ ($k \in \{C, L_1, L_2, L_3, R_1, R_2, R_3\}$) válida apenas naquela região. Por isso é conveniente

introduzir as funções degrau

$$\begin{aligned}\Pi_C(t, x) &= \theta\left(x + t - \frac{T}{2} - \Delta\right)\theta(x - t)\theta\left(-x + t + \frac{T}{2} + \Delta\right)\theta(-x - t + T), \\ \Pi_{L_1}(t, x) &= \theta(x - t)\theta\left(-x - t + \frac{T}{2} + \Delta\right), \\ \Pi_{L_2}(t, x) &= \theta(x - x_L(t))\theta(-x + t)\theta\left(-x - t + \frac{T}{2} + \Delta\right), \\ \Pi_{L_3}(t, x) &= \theta(-x + t)\theta\left(x + t - \frac{T}{2} - \Delta\right), \\ \Pi_{R_1}(t, x) &= \theta(T - x - t)\theta\left(x - t - \frac{T}{2} - \Delta\right), \\ \Pi_{R_2}(t, x) &= \theta(-x + x_L(t) + T)\theta(x + t - T)\theta\left(x - t - \frac{T}{2} - \Delta\right), \\ \Pi_{R_3}(t, x) &= \theta(x + t - T)\theta\left(-x + t + \frac{T}{2} + \Delta\right).\end{aligned}$$

Cada função degrau vale um na sua respectiva região e se anula fora dela. Em termos das funções degrau $\Pi_k(t, x)$ e das soluções parciais $\varphi_k(t, x)$ podemos escrever a solução

$$\varphi(t, x) = \sum_k \Pi_k(t, x)\varphi_k(t, x)$$

válida para $0 \leq t \leq T/2$.

Podemos usar solução restrita obtida até o momento para construir a solução mais geral $\phi(t, x)$ notando que o *ansatz*

$$\phi(t, x)\Big|_{T/2 \leq t \leq T} = -\varphi(T - t, x)$$

satisfaz tanto a equação de signum–Gordon quanto as condições de continuidade e suavidade em $t = T/2$. Uma consequência desse *ansatz* é que o oscillon reverte seu movimento e retorna para sua posição original durante a segunda metade do seu período. Para $t = T$, as condições de contorno do segundo período serão as mesmas do que para $t = 0$. Desta forma, o oscillon será de fato oscilatório no tempo. Estendemos a solução para todos os tempos introduzindo as funções periódicas

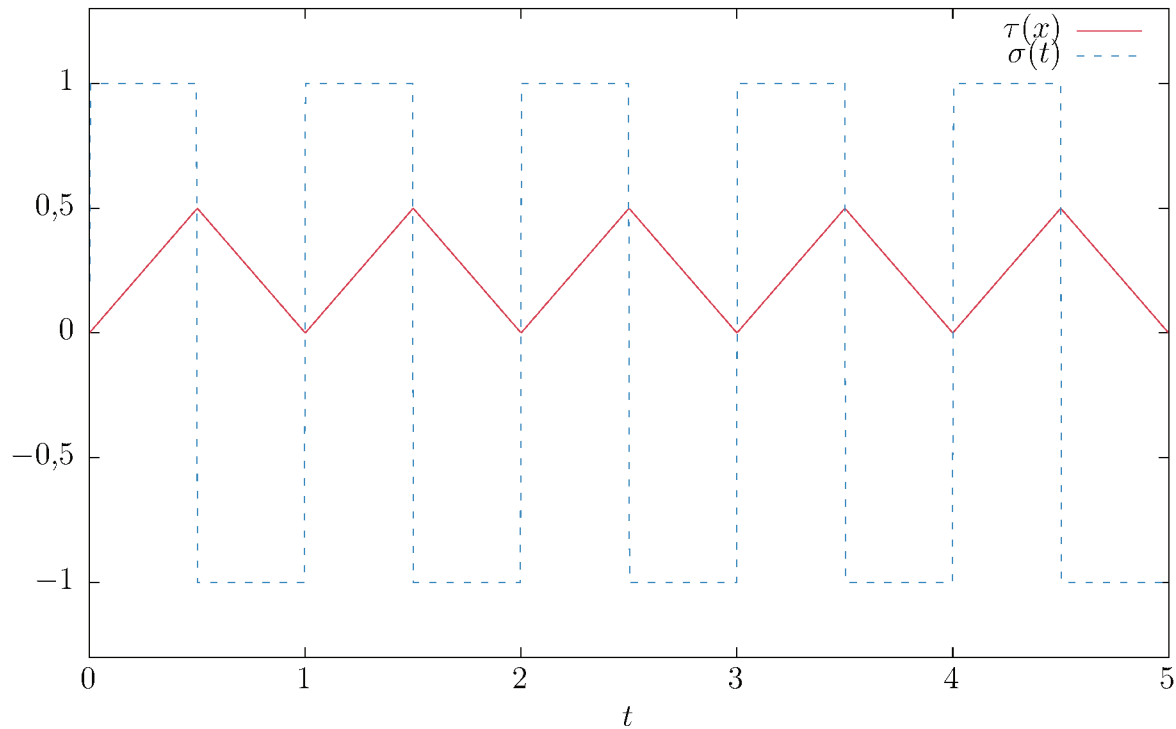
$$\begin{aligned}\tau(t) &= \frac{T}{\pi} \arcsin \left| \sin \left(\frac{\pi t}{T} \right) \right|, \\ \sigma(t) &= \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right),\end{aligned}$$

representadas na figura 6. Para tempos arbitrários o campo é expresso na forma

$$\phi(t, x) = \sigma(t) \varphi(\tau(t), x) = \sum_k \sigma(t) \Pi_k(t, x) \varphi_k(\tau(t), x).$$

2.1 EXEMPLOS

Nessa seção, vamos usar as expressões deduzidas anteriormente para construir dois exemplos de oscillons, cujas bordas possuem movimento uniforme e uniformemente acelerado.

Figura 6 – Funções $\tau(t)$ e $\sigma(t)$.

2.1.1 Borda em movimento linear

O exemplo mais simples é o oscillon com borda em movimento uniforme. Nesse caso a borda esquerda tem equação de movimento

$$x_L(t) = vt$$

de modo que $\Delta = x_L(T/2) = vT/2$ e

$$g(x) = -\frac{1-v}{1+v}x,$$

$$g^{-1}(x) = -\frac{1+v}{1-v}x.$$

Portanto, a função $f(x)$ toma a forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+v}x & \text{se } 0 \leq x \leq (1+v)\frac{T}{2}, \\ -\frac{1}{1-v}(T-x) & \text{se } (1+v)\frac{T}{2} \leq x \leq T. \end{cases}$$

Integrando essas expressões podemos obter

$$F(x) = \begin{cases} F(0) - \frac{1}{1+v}\frac{x^2}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq (1+v)\frac{T}{2}, \\ F(0) - \frac{T^2}{8} + \frac{1}{1-v}\frac{(T-x)^2}{4} & \text{se } (1+v)\frac{T}{2} \leq x \leq T. \end{cases}$$

Agora, podemos substituir a função $F(x)$ na fórmula (2.10) e o campo em cada uma das regiões da figura 5 como uma função do parâmetro v . Fazendo os cálculos, podemos

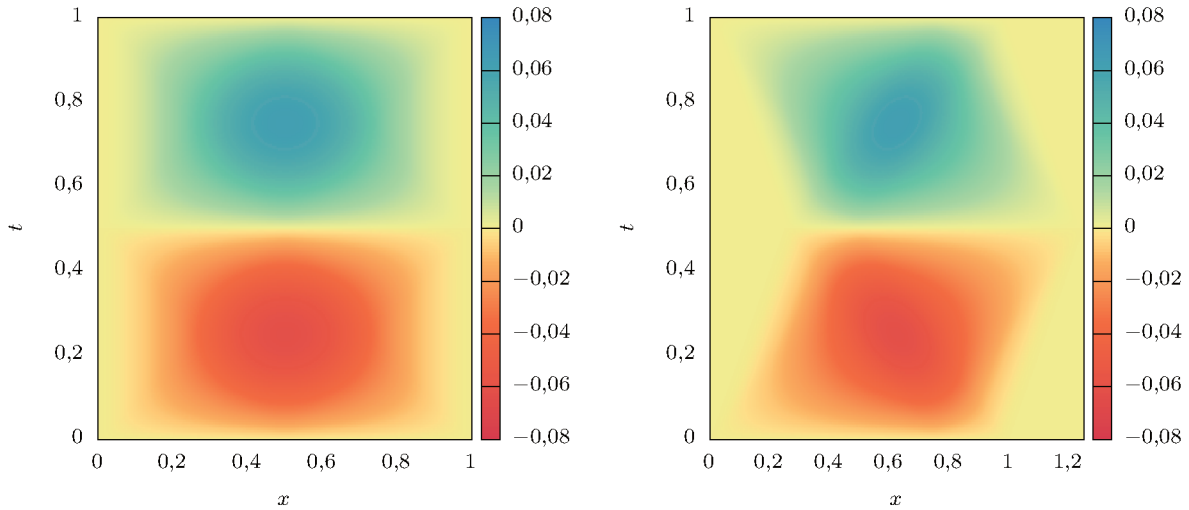
(a) Oscillon para $v = 0,0$.(b) Oscillon para $v = 0,5$.

Figura 7 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; v)$ apresentadas como um mapa de cor em função da posição x e do tempo t para diferentes valores de v .

identificar que apenas quatro soluções parciais são fundamentalmente diferentes

$$\varphi_C(t, x; v) = \frac{((1+v)T - 2x)^2 - 4((1+v)T - 2vx)t + 4(2 - v^2)t^2}{8(1 - v^2)},$$

$$\varphi_{L_1}(t, x; v) = \frac{t^2}{2} - \frac{xt}{1+v},$$

$$\varphi_{L_2}(t, x; v) = -\frac{(x - vt)^2}{2(1 - v^2)},$$

$$\varphi_{L_3}(t, x; v) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{T}{2} \right) \left(t + \frac{T}{2} + \frac{2x - T}{1 - v} \right).$$

As soluções φ_{R_i} podem ser obtidas a partir das soluções φ_{L_i} através das transformações

$$v \rightarrow -v,$$

$$x \rightarrow T - x$$

de modo que

$$\varphi_{R_i}(t, x; v) = \varphi_{L_i}(t, T - x; -v).$$

Podemos identificar ainda, que a região central C é invariante sobre essa transformação. Gráficos de mapa de cor dessas soluções estão apresentadas na figura 7.

2.1.2 Borda em movimento acelerado

Vamos considerar agora um oscillon cuja borda realiza um movimento uniformemente acelerado no referencial de repouso instantâneo da borda. A equação de movimento da borda esquerda é

$$x_L(t) = \frac{1}{a} \left[\sqrt{1 + (at + \gamma_0 v_0)^2} - \gamma_0 \right]$$

na qual a é a aceleração no referencial da borda, v_0 é a velocidade da borda para $t = 0$ e $\gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}$.

Para este caso, é mais simples utilizarmos as expressões (2.12) e (2.13) do que isolar $g(x)$ explicitamente. Note que para pontos da borda esquerda

$$y_{\pm} = \frac{1}{a} \left[\sqrt{1 + (at + \gamma_0 v_0)^2} - \gamma_0 \right] \pm t$$

de modo que

$$\frac{1}{2}(y_+ - y_-) = t.$$

Portanto, é possível escrever

$$y_{\pm} = \frac{1}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2}(y_+ - y_-) + \gamma_0 v_0 \right)^2} - \gamma_0 \right] \pm \frac{1}{2}(y_+ - y_-).$$

Dessas equações é possível isolar o lado direito das equações (2.12) e (2.13) como funções de y_+ e y_- . Fazendo isso obtemos

$$-\frac{1}{2}(y_+ - y_-) = -\frac{y_+}{2} \left[1 + \frac{\gamma_0(1 - v_0)}{ay_+ + \gamma_0(1 + v_0)} \right] = \frac{y_-}{2} \left[1 + \frac{\gamma_0(1 + v_0)}{ay_- + \gamma_0(1 - v_0)} \right].$$

Portanto, a função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} \left(1 + \frac{B}{x+A} \right) & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} + \Delta, \\ \frac{x-T}{2} \left(1 + \frac{A}{x-T+B} \right) & \text{se } \frac{T}{2} + \Delta \leq x \leq T \end{cases}$$

na qual introduzimos a notação

$$A \equiv \frac{\gamma_0(1 + v_0)}{a}, \\ B \equiv \frac{\gamma_0(1 - v_0)}{a}.$$

Agora que sabemos $f(x)$, podemos obter $F(x)$ através de uma integração e obter

$$F(x) = \begin{cases} F(0) - \frac{x^2}{8} - \frac{B}{4}x + \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{x+A}{A} \right| & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} + \Delta, \\ F(0) - \frac{T^2}{8} + \frac{1}{8}(T-x)^2 - \frac{A}{4}(T-x) - \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{B+x-T}{B} \right| & \text{se } \frac{T}{2} + \Delta \leq x \leq T. \end{cases}$$

Usando estas expressões, é possível escrever a solução para as regiões C , L_1 , L_2 e L_3 como função dos parâmetros A e B :

$$\begin{aligned} \varphi_C(t, x; A, B) &= -\frac{AB}{4} + \frac{1}{4}(x+t+B-T)(x-t+A) + t \left(t - \frac{T}{2} \right) \\ &\quad - \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{1}{AB}(x+t+B-T)(x-t+A) \right|, \\ \varphi_{L_1}(t, x; A, B) &= \frac{t}{2}(t-x-B) + \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{x+t+A}{x-t+A} \right|, \\ \varphi_{L_2}(t, x; A, B) &= \frac{AB}{4} - \frac{1}{4}(x+t+A)(x-t+B) \\ &\quad + \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{1}{AB}(x+t+A)(x-t+B) \right|, \\ \varphi_{L_3}(t, x; A, B) &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{T}{2} \right) (x+t+A) - \frac{AB}{4} \ln \left| \frac{x+t+B-T}{x-t+B} \right| \end{aligned}$$

onde $AB = a^{-2}$. É possível escrever as soluções parciais $\varphi_{R_i}(t, x)$ em termos de $\varphi_{L_i}(t, x)$ através das transformações

$$\begin{aligned}x &\rightarrow T - x, \\v_0 &\rightarrow -v_0, \\a &\rightarrow -a.\end{aligned}$$

Note que as duas últimas transformações são equivalentes a

$$\begin{aligned}A &\rightarrow -B, \\B &\rightarrow -A.\end{aligned}$$

de modo que

$$\varphi_{R_i}(t, x; A, B) = \varphi_{L_i}(t, T - x; -B, -A).$$

Gráficos de mapa de cor dessas soluções estão apresentadas nas figuras 8 e 9.

2.2 PROPRIEDADES GERAIS

2.2.1 Energia e momento

A energia no modelo de signum–Gordon é dada pela integral

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi(t, x))^2 + |\phi(t, x)| \right].$$

Devido a conservação de energia, podemos calcular a energia dos oscillons em qualquer instante de tempo. Em particular, vamos calcular no instante $t = 0$. Para esse tempo, a energia se simplifica como

$$E = \frac{1}{2} \int_0^T dx (\partial_t \varphi(0, x))^2.$$

Substituindo a condição inicial (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \int_0^T dx (f(x))^2 \\&= \frac{1}{8} \int_0^{T/2+\Delta} dx (x - g(x))^2 + \frac{1}{8} \int_{T/2+\Delta}^T dx (g^{-1}(x - T) - x + T)^2.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = g^{-1}(x - T)$ na segunda integral podemos reescrever essa expressão na forma

$$E = \frac{1}{8} \int_0^{T/2+\Delta} dx [x - g(x)]^2 + \frac{1}{8} \int_{g^{-1}(-T/2+\Delta)}^{g^{-1}(0)} du \frac{dg(u)}{du} [u - g(u)]^2.$$

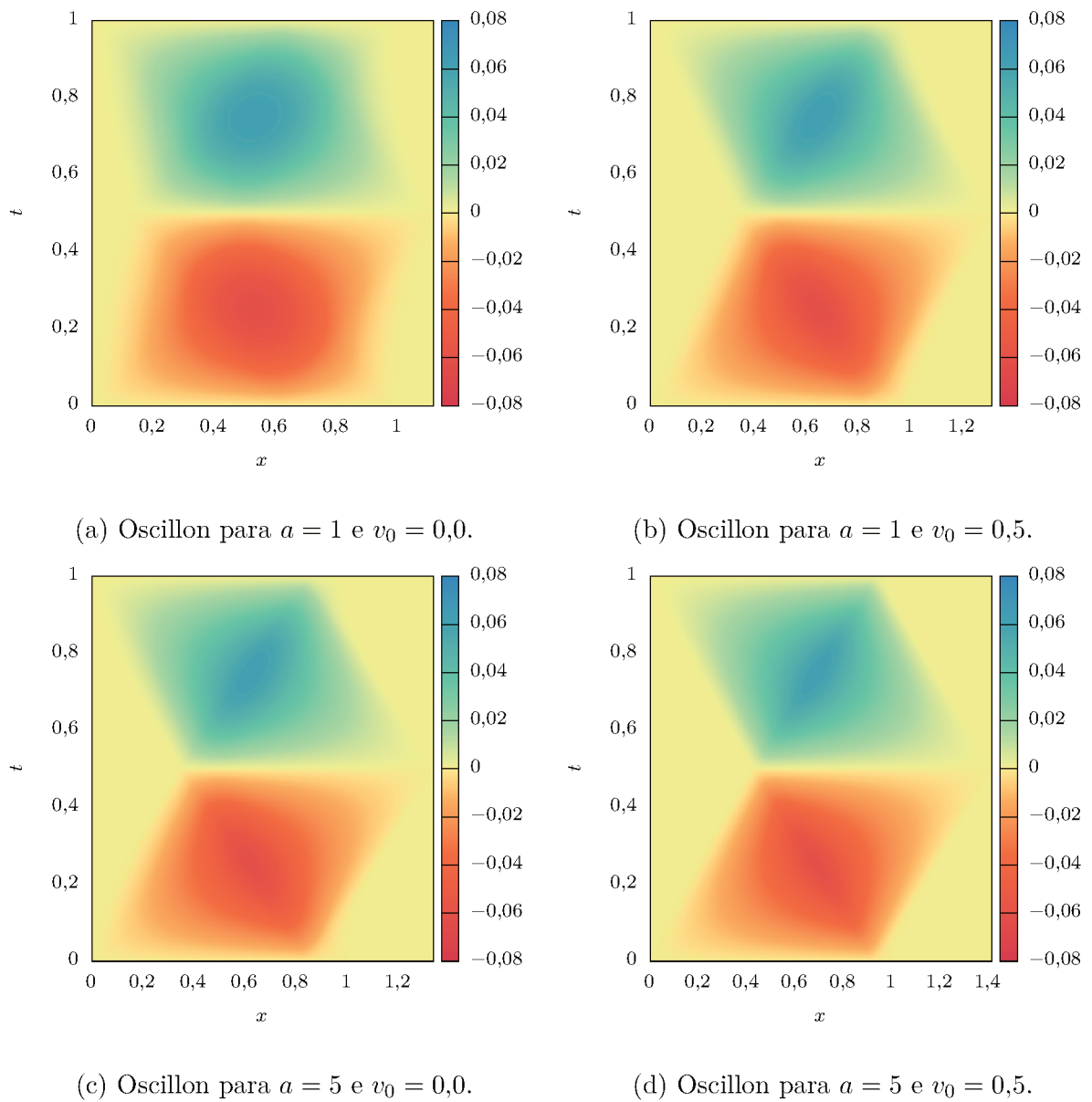


Figura 8 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; A, B)$ apresentadas como um mapa de cor em função da posição x e do tempo t para diferentes valores de a e v_0 .

Como a função $g(x)$ é definida pelas equações de movimento da borda esquerda, para pontos (t, x) dessa borda, vale que $x + t = g^{-1}(x - t)$. Em particular, para os pontos $(0, 0)$ e $(T/2, \Delta)$ vale

$$g^{-1}(0) = 0,$$

$$g^{-1}\left(-\frac{T}{2} + \Delta\right) = \frac{T}{2} + \Delta.$$

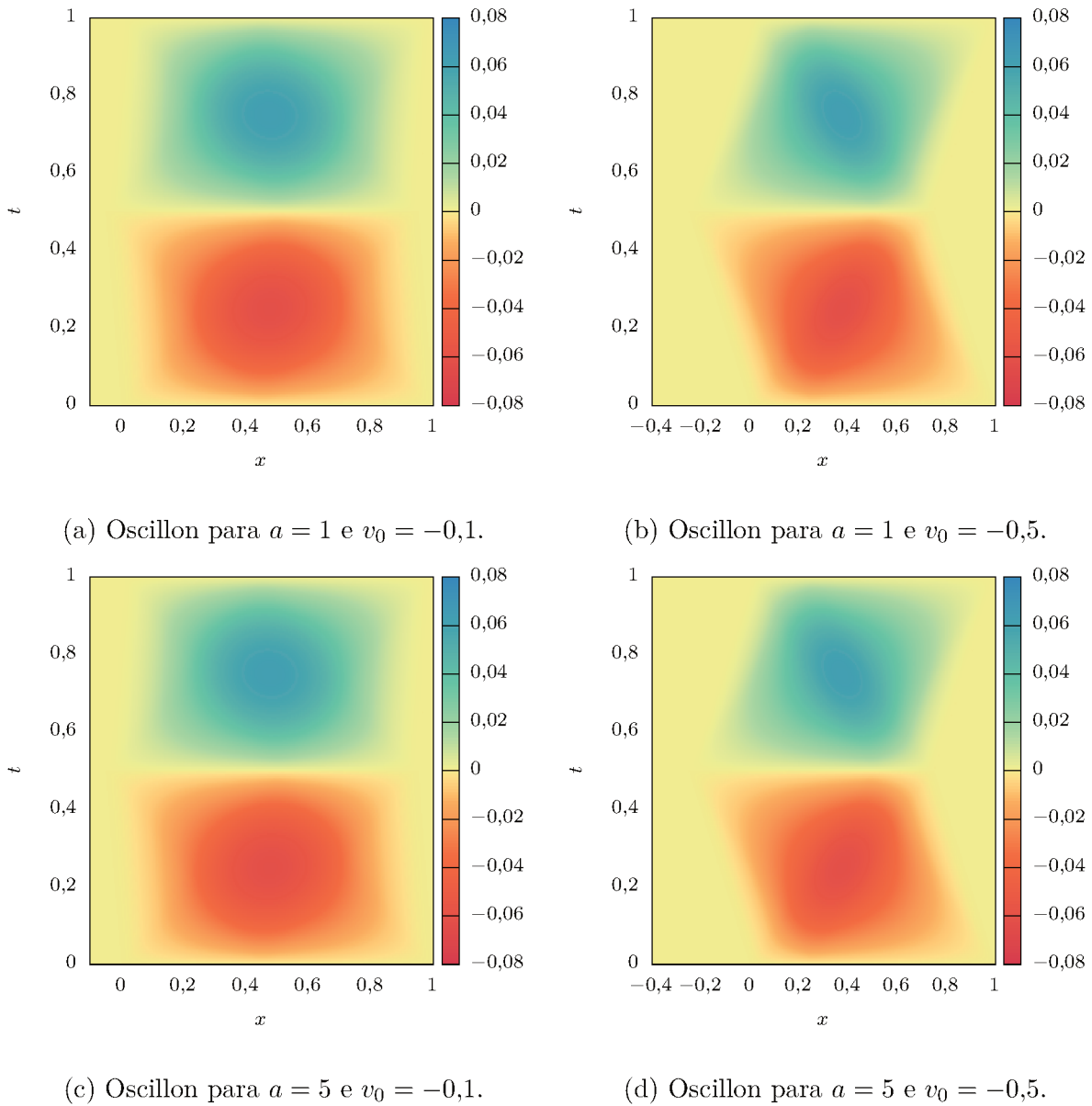


Figura 9 – Soluções analíticas para o campo $\phi(t, x; A, B)$ com v_0 negativo.

Usando essas informações nos limites da segunda integral, podemos calcular a energia

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{8} \int_0^{T/2+\Delta} dx (x - g(x))^2 + \frac{1}{8} \int_{T/2+\Delta}^0 du \frac{dg(u)}{du} (u - g(u))^2 \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{T/2+\Delta} dx \left(1 - \frac{dg(x)}{dx}\right) (x - g(x))^2 \\
 &= \frac{1}{24} [x - g(x)]^3 \Big|_0^{T/2+\Delta} \\
 &= \frac{T^3}{24}.
 \end{aligned}$$

Note que todos os oscillons de mesmo período do modelo de signum–Gordon possuem a mesma energia, dada pela expressão acima, independente da trajetória das bordas.

Similarmente, o momento linear para os oscillons é dado por

$$p = \int dx (\partial_t \phi(t, x)) (\partial_x \phi(t, x))$$

e pode ser calculado em qualquer momento, pois o momento linear é conservado. Calculando, para $t = 0$ temos que $p = 0$ para todos os tipos de oscillon, independente do movimento da borda. Isso significa que a evolução temporal garante que a forma do oscillon compense o movimento das bordas, de modo que o momento total do campo seja nulo. Ou seja, mesmo o suporte do oscillon se movimentando, seu centro de momento se mantém parado.

2.3 OSCILLONS EM MOVIMENTO

Apesar do momento linear dos oscillons construídos ser nulo, podemos obter soluções de oscillons cujos centros de momento se movam uniformemente em relação ao referencial do laboratório. Fazemos isso através de uma transformação de Lorentz.

No referencial do centro de momento S' , os oscillons se encontram em repouso. Portanto, são válidas as soluções obtidas acima, expressas nesse referencial como $\phi(t', x')$. No referencial do laboratório S , os oscillons são descritos por uma solução $\psi(t, x)$. Como o campo do modelo de signum–Gordon é um escalar, as soluções nos dois referenciais são relacionadas pela transformação de Lorentz

$$\psi(t, x) = \phi(t', x').$$

Portanto, para um oscillon se movendo com velocidade V em relação ao referencial do laboratório

$$\psi(t, x) = \phi(\gamma(t - Vx), \gamma(x - Vt))$$

com $\gamma = (1 - V^2)^{-1/2}$. Gráficos dos oscillons dos exemplos anteriores em movimento com relação ao referencial do laboratório são apresentados nas figuras 10 e 11.

2.4 ESPALHAMENTO DE OSCILLONS

Como mencionado no início do capítulo, o estudo dos oscillons é relevante no modelo de signum–Gordon porque os oscillons dominam o espectro de radiação deste modelo. Essa dominância pode ser vista no estudo de processos de espalhamento de oscillons.

Em estudos sistemáticos de vários processos de espalhamento de oscillons (HAHNE; KLIMAS; STREIBEL; ZAKRZEWSKI, 2020) foram observados vários tipos de estruturas, muito similares aos oscillons generalizados fazem parte do espectro da radiação. Não podemos esperar que estas estruturas correspondam exatamente aos oscillons generalizados, mas são estruturas muito similares, as quais chamamos de quase-oscillons. Os quase-oscillons resultantes do espalhamento também se encontram e se espalham, produzindo

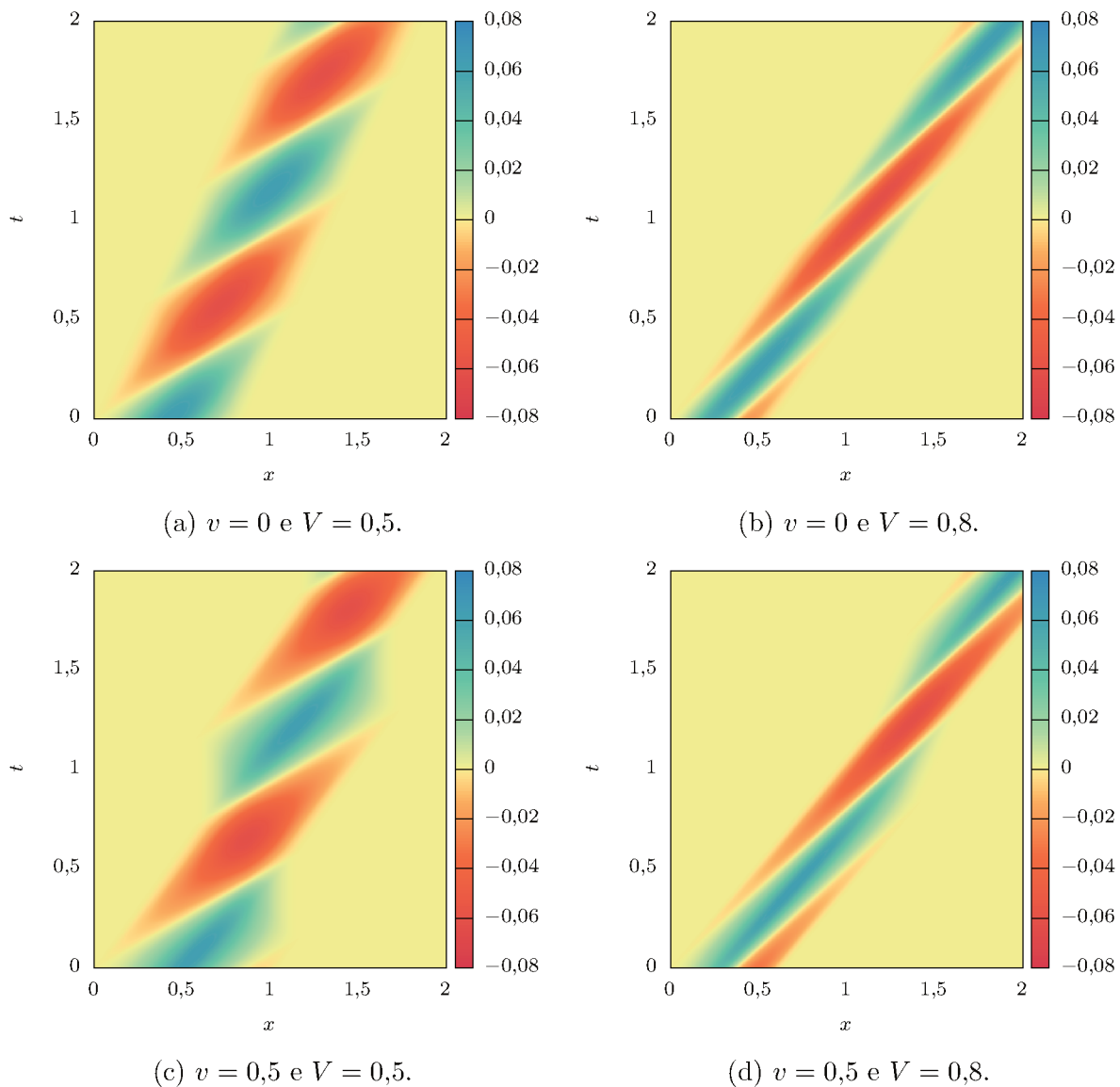


Figura 10 – Oscillons com borda em movimento uniforme segundo referencial do laboratório.

mais oscillons menores. Isso é possível porque existem soluções de oscillons de todos os tamanhos e gera um processo similar a um fractal.

Além disso, outros tipos de soluções do modelo de signum–Gordon foram observadas em processos de espalhamento, como as soluções de ondas de choque. Por exemplo, na figura 12 temos um resultado do espalhamento de dois oscillons com velocidade $V = 0,95$. Como produto deste espalhamento são gerados dois oscillons principais, que prosseguem na trajetória dos oscillons originais. Entre eles, há uma região na forma de um losango, na qual aparecem uma estrutura cujos zeros se situam em hipérbolas. Essa estrutura é muito similar a uma onda de choque, que é uma solução já conhecida do modelo de signum–Gordon (ARODŹ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2006). No entanto, as ondas de choque conhecidas tem vida infinita, enquanto o as ondas de choque resultantes de espalhamento (que iremos chamar de quase-ondas de choque) decaem em radiação, constituída primariamente de

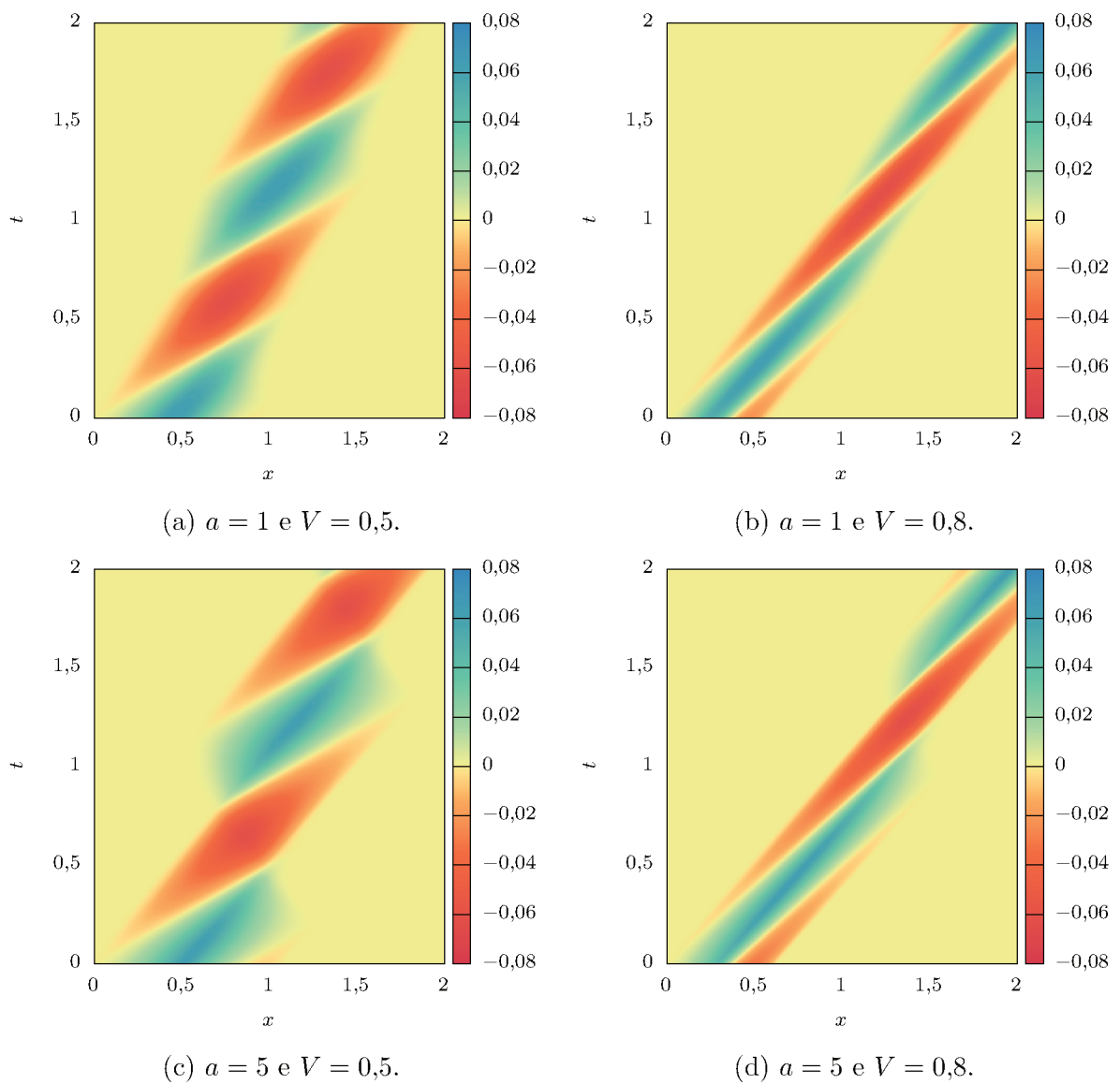


Figura 11 – Oscillons com borda em movimento uniformemente acelerado segundo referencial do laboratório. Em todos os casos, $v_0 = 0$.

oscillons.

No próximo capítulo, vamos estudar mais a fundo as soluções de ondas de choque e tentar entender as razões por trás dos decaimentos das quase-ondas de choque.

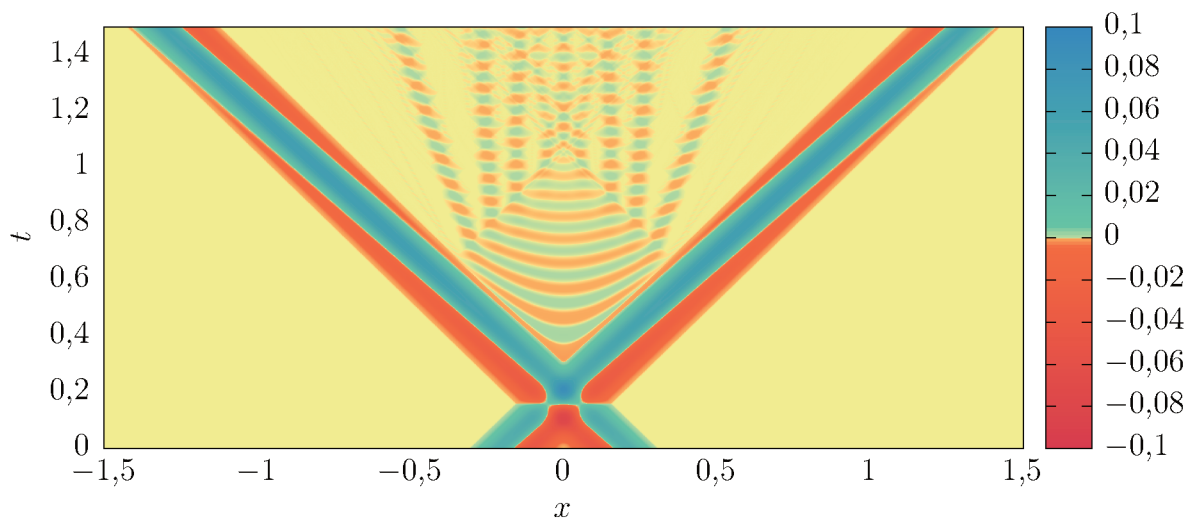


Figura 12 – Espalhamento de dois oscillons com velocidade $V = 0,95$ em relação ao referencial do laboratório.

3 ONDAS DE CHOQUE

Neste capítulo vamos estudar as soluções de onda de choque do modelo de signum–Gordon. Essas soluções possuem frentes de onda que se propagam com a velocidade da luz, e uma parte interna constituída de soluções parciais com zeros em hipérbolas. Essas ondas de choque são análogas às estruturas resultantes de certos espalhamentos de oscillons. No entanto, as ondas de choque analíticas tem vida infinita, nunca decaindo, ao contrário do produto dos espalhamentos. Iremos analisar a diferença entre as ondas de choque exatas e as quase-ondas de choque resultantes de espalhamento.

As ondas de choque analíticas podem ser obtidas como uma solução do modelo de signum–Gordon na qual o campo depende do tempo e da posição apenas através da variável

$$z \equiv \frac{1}{4}(x^2 - t^2).$$

Ou seja, $\phi(t, x) = \phi(z)$. Em termos da variável z , as derivadas do campo tomam a forma

$$\begin{aligned}\partial_t \phi(t, x) &= -\frac{t}{2} \phi'(z), \\ \partial_x \phi(t, x) &= \frac{x}{2} \phi'(z).\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação de signum–Gordon, obtemos a seguinte equação para o campo $\phi(z)$

$$z\phi''(z) + \phi'(z) = \text{sgn}(\phi(z)). \quad (3.1)$$

Além disso, assumimos o seguinte ansatz

$$\phi(z) = \theta(-z)W(z)$$

na qual $\theta(-z)$ é a função degrau de Heaviside. Com o campo escrito nessa forma,0 garantimos que as frentes de onda (descontinuidades do campo) se propaguem sobre o cone de luz $x = \pm t$ ($z = 0$), com o campo se anulando fora deste cone.

Em termos da função $W(z)$, as derivadas do campo podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= \theta(-z)W'(z) - \delta(z)W(z), \\ \phi''(z) &= \theta(-z)W''(z) - 2\delta(z)W'(z) - W(z)\delta'(z)\end{aligned}$$

de modo que vale a expressão

$$z\phi''(z) = z\theta(-z)W''(z) + \delta(z)W(z).$$

na qual usamos as propriedades da função delta de Dirac que $f(z)\delta(z) = f(0)\delta(z)$ e $f(z)\delta'(z) = -f'(z)\delta(z)$. Substituindo essas derivadas na equação (3.1) obtemos a seguinte equação diferencial

$$zW''(z) + W'(z) = \text{sgn}(W(z)).$$

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
a_k	1,00	3,51	6,92	11,03	15,73	20,96	26,76
b_k	0,00	2,00	5,02	8,82	13,24	18,22	23,70
t_k	2,00	3,75	5,26	6,64	7,93	9,16	10,33

Tabela 1 – Valores numéricos dos primeiros a_k , b_k e t_k para $a_0 = 1$.

Essa equação pode ser resolvida analiticamente para cada região no qual $W(z)$ tem sinal definido $(-1)^k$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Vamos denotar esses pedaços da solução por $W_k(z)$, cada um dos quais obedecendo a equação

$$zW''(z) + W'(z) = (-1)^k.$$

Além disso, impomos que a função $W(z)$ é contínua e suave de modo que

$$W_k(-a_k) = W_{k+1}(-a_k) = 0, \quad (3.2)$$

$$W'_k(-a_k) = W'_{k+1}(-a_k). \quad (3.3)$$

para os pontos $z = -a_k$. Note que para a região interna da onda de choque $z < 0$, portanto $a_k > 0$. Como a equação (3.1) é separável podemos usar a condição (3.2) para deduzir que

$$W_k(z) = (-1)^k \left(z + a_k + b_k \ln \frac{|z|}{a_k} \right).$$

Além disso, a segunda igualdade da condição (3.2) implica que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{b_k}{a_k} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad (3.4)$$

e a condição (3.3) implica que

$$\frac{b_{k+1}}{a_k} = 2 - \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.5)$$

Note que precisamos ainda exigir que $b_0 = 0$ para que $W_k(z)$ não tenha uma singularidade logarítmica em $z = 0$. Com essa condição fixa, podemos obter os demais parâmetros como resultado das relações de recorrência (3.4) e (3.5), em termos do primeiro zero a_0 , que deve ser tratado como um parâmetro livre. Essas relações de recorrência precisam ser resolvidas numericamente. A tabela 1 contém os valores numéricos dos primeiros a_k e b_k no caso $a_0 = 1$, assim como os tempos t_k para qual cada solução parcial $W_k(z)$ se divide.

Para $z = 0$ o campo vale $W(0) = W_0(0) = a_0$, de modo que a onda de choque é descontínua na sua frente. Essa descontinuidade faz com que o gradiente do campo se torne infinito nesse ponto causando uma divergência na energia total

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi(t, x))^2 + |\phi(t, x)| \right].$$

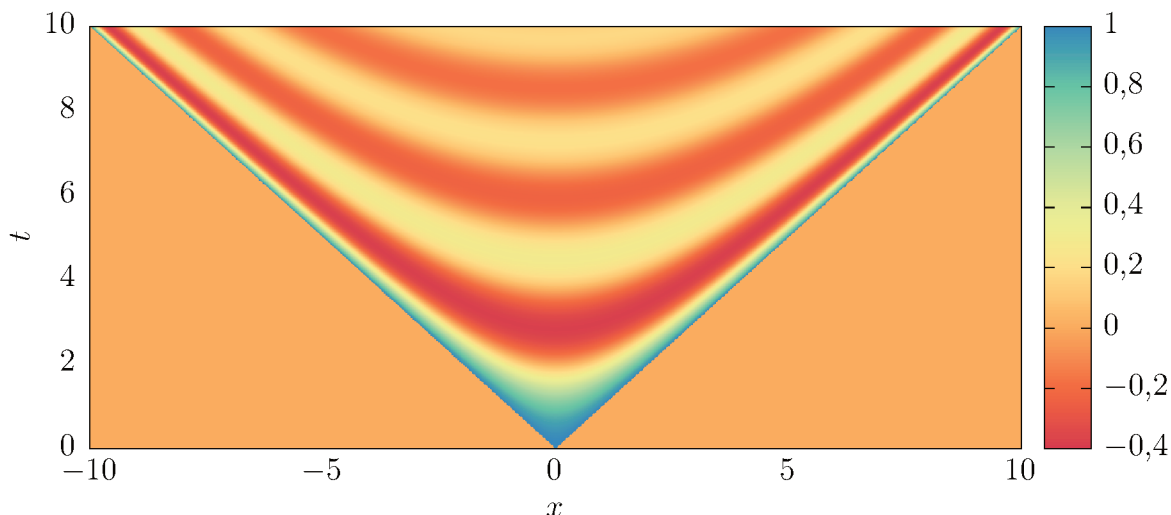


Figura 13 – Onda de choque exata para $a_0 = 1$.

Nossa hipótese é de que as frentes de onda servem como um reservatório de energia, transferindo energia para as regiões internas da onda de choque e sustentando sua expansão. Caso a energia da frente de onda fosse finita a expansão da onda não poderia ser sustentada indefinidamente, causando um decaimento da solução em radiação – analogamente ao que vemos no espalhamento de oscillons na seção 2.4.

Para sustentar essa hipótese vamos primeiro analisar a evolução temporal da energia das partes internas da onda de choque. Caso as frentes de onda de fato ajam como um reservatório de energia, é esperado que a energia das partes interna cresça com o tempo. Depois, iremos construir uma solução de quase-onda de choque, na qual as frentes de onda foram suavizadas. Nesse caso, a divergência é evitada e poderemos ver também a evolução temporal da energia da frente de onda.

3.1 ENERGIA DAS REGIÕES INTERNAS

A região interna da onda de choque é composta da sobreposição de soluções parciais $\phi_k(t, x) = W_k(z)$ cujos suportes $-a_k \leq z \leq -a_{k-1}$ não se intersectam. Cada solução parcial $W_k(z)$ possui zeros sobre as hipérbolas

$$\frac{1}{4}(x^2 - t^2) = -a_k$$

de modo que para tempos $t_k = 2\sqrt{a_k}$ a solução $\phi_k(t, x)$ se separa em duas partes disjuntas. Entre elas surge uma nova solução parcial $\phi_{k+1}(t, x)$. Portanto cada pedaço da solução existe em um suporte que varia com o tempo. Para $k \geq 1$, o suporte tem a forma

$$\text{supp}(\phi_k) = \begin{cases} |x| \leq c_{k-1}(t) & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ c_k(t) \leq |x| \leq c_{k-1}(t) & \text{se } t_k \leq t \end{cases}$$

na qual $c_k(t) = \sqrt{t^2 - 4a_k}$. Já para $k = 0$ temos

$$\text{supp}(\phi_0) = \begin{cases} |x| \leq t & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ c_0(t) \leq |x| \leq t & \text{se } t_0 \leq t. \end{cases}$$

Conhecendo o suporte de cada parte da solução, podemos calcular sua energia como função do tempo

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \int_{\text{supp}(\phi_k)} dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi_k(t, x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_k(t, x))^2 + |\phi_k(t, x)| \right] \\ &= K_k(t) + U_k(t) \end{aligned}$$

a qual separamos em duas partes: a energia cinética e de gradiente $K_k(t)$ e a energia potencial $U_k(t)$. Em termos de $W(z)$, essas energias podem ser escritas como

$$\begin{aligned} K_k(t) &= \int_{\text{supp}(\phi_k)} dx \frac{x^2 + t^2}{8} \left[W'_k \left(\frac{x^2 - t^2}{4} \right) \right]^2, \\ U_k(t) &= \int_{\text{supp}(\phi_k)} dx \left| W_k \left(\frac{x^2 - t^2}{4} \right) \right|. \end{aligned}$$

Ambas as integrais acima podem ser calculadas analiticamente. No entanto, precisamos calcular separadamente os casos $k = 0$ e $k \geq 1$, porque o suporte de ϕ_k é diferente em cada um desses casos.

- **Caso $k = 0$.** Considerando que $W'_0(z) = 1$ obtemos que a energia cinética e de gradiente é

$$K_0(t) = 2 \int_{\text{supp} \phi_0} dx \frac{x^2 + t^2}{8} = \frac{1}{4} \left[t^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_{x_{\min}(t)}^{x_{\max}(t)}$$

na qual o fator de 2 é proveniente da paridade da solução. Os limites de integração são definidos pelo suporte de ϕ_0 , variam no tempo de acordo com

$$(x_{\min}, x_{\max}) = \begin{cases} (0, t) & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ (c_0(t), t) & \text{se } t_0 < t. \end{cases}$$

Substituindo os limites de integração, obtemos que $K_0(t)$ vale

$$K_0(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{3} & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}(t^2 - a_0)c_0(t) & \text{se } t_0 < t. \end{cases}$$

Podemos calcular a energia potencial de modo similar, sendo $U_0(t)$ dada pela integral

$$U_0(t) = 2 \int_{x_{\min}(t)}^{x_{\max}(t)} dx \left(\frac{x^2 - t^2}{4} + a_0 \right)$$

que se torna

$$U_0(t) = \begin{cases} 2a_0t - \frac{t^3}{3} & \text{se } 0 \leq t \leq t_0, \\ 2a_0t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}(t^2 - 4a_0)^{3/2} & \text{se } t_0 < t. \end{cases}$$

após realizarmos a integral e substituirmos os limites de integração.

- **Caso** $k \geq 1$. As energias cinéticas e de gradiente $K_k(t)$ são dadas pela integral

$$K_k(t) = 2 \int_{x_{\min}(t)}^{x_{\max}(t)} dx \frac{x^2 + t^2}{8} \left(1 + \frac{4b_k}{x^2 - t^2} \right)^2$$

nas quais os limites de integração são

$$(x_{\min}, x_{\max}) = \begin{cases} (0, c_{k-1}(t)) & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ (c_k(t), c_{k-1}(t)) & \text{se } t_k < t. \end{cases}$$

Substituindo os limites de integração, podemos expressar $K_k(t)$ como a soma

$$K_k(t) = \begin{cases} K_k^{(-)}(t) = P_k(t) & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ K_k^{(+)}(t) = P_k(t) + Q_k(t) & \text{se } t_k < t. \end{cases}$$

na qual definimos as funções $P_k(t)$ e $Q_k(t)$ como

$$P_k(t) = \left[\frac{b_k^2}{a_{k-1}} + 2b_k - \frac{a_{k-1}}{3} + \frac{t^2}{3} \right] c_{k-1}(t) - 4b_k t \operatorname{ArcTanh} \left(\frac{c_{k-1}(t)}{t} \right),$$

$$Q_k(t) = - \left[\frac{b_k^2}{a_{k-1}} + 2b_k - \frac{a_k}{3} + \frac{t^2}{3} \right] c_k(t) - 4b_k t \operatorname{ArcTanh} \left(\frac{c_k(t)}{t} \right).$$

Aplicando o mesmo procedimento para a energia potencial podemos expressar $U_k(t)$ como a soma

$$U_k(t) = \begin{cases} U_k^{(-)}(t) = R_k(t) & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ U_k^{(+)}(t) = R_k(t) + S_k(t) & \text{se } t_k < t. \end{cases}$$

na qual definimos as funções $R_k(t)$ e $S_k(t)$ como

$$R_k(t) = \left[\frac{4a_k}{3} - 4b_k - \frac{t^2}{3} \right] c_{k-1}(t) + 4b_k t \operatorname{ArcTanh} \left(\frac{c_{k-1}(t)}{t} \right),$$

$$S_k(t) = - \left[\frac{4a_{k-1}}{3} - 4b_k - \frac{t^2}{3} \right] c_k(t) - 4b_k t \operatorname{ArcTanh} \left(\frac{c_k(t)}{t} \right).$$

Somando a energia cinética, de gradiente e potencial obtemos que a energia total $E_k(t)$ de cada solução parcial vale

$$E_k(t) = \begin{cases} E_k^{(-)}(t) = X_k(t) & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ E_k^{(+)}(t) = X_k(t) + Y_k(t) & \text{se } t_k < t \end{cases}$$

na qual

$$\begin{aligned} X_k(t) &= P_k(t) + R_k(t) = \left[\frac{b_k^2}{a_{k-1}} - 2b_k + a_{k-1} \right] c_{k-1}(t), \\ Y_k(t) &= Q_k(t) + S_k(t) = - \left[\frac{b_k^2}{a_k} - 2b_k + a_k \right] c_k(t). \end{aligned}$$

Essas expressões valem também para $k = 0$ se definirmos

$$\begin{aligned} X_0(t) &= 2a_0t, \\ Y_0(t) &= -a_0c_0(t). \end{aligned}$$

Para um tempo t pertencente ao intervalo $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, a energia total da região interna da onda de choque é

$$E(t) = \sum_{i=0}^k E_i(t) = \sum_{i=0}^{k-1} E_i^{(+)}(t) + E_k^{(-)}(t).$$

Como $E_i^{(+)}(t) = X_i(t) + Y_i(t)$ e $E_k^{(-)}(t) = X_k(t)$, podemos expressar a energia como

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} [X_i(t) + Y_i(t)] + X_k(t) \\ &= X_0(t) + \sum_{i=1}^k [X_i(t) + Y_{i-1}(t)]. \end{aligned}$$

Note que essa expressão pode ser simplificada usando que

$$\begin{aligned} X_1(t) + Y_0(t) &= \left[\frac{b_1^2}{a_0} - 2b_1 \right] c_0(t) = 0, \\ X_i(t) + Y_{i-1}(t) &= \left[\frac{b_i^2 - b_{i-1}^2}{a_{i-1}} - 2b_{i-1} - 2b_i \right] c_{i-1}(t) = 0 \text{ para } i \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, a energia total da região interna é dada simplesmente por

$$E(t) = 2a_0t. \quad (3.6)$$

Deste modo concluímos que a energia da onda dentro do cone de luz cresce linearmente com o tempo e a taxa de crescimento é proporcional à descontinuidade da onda na superfície do cone de luz $z = 0$. Esse crescimento da energia é permitido, pois as frentes de onda possuem energia infinita que pode ser transferida para as regiões internas.

3.2 QUASE-ONDAS DE CHOQUE

As ondas de choque possuem uma divergência na energia total decorrente de uma descontinuidade na frente de onda. Essa divergência tem origem nas condições iniciais da solução, porque para $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} \phi(0, x) &= 0, \\ \partial_t \phi(0, x) &\propto \delta(x) \end{aligned}$$

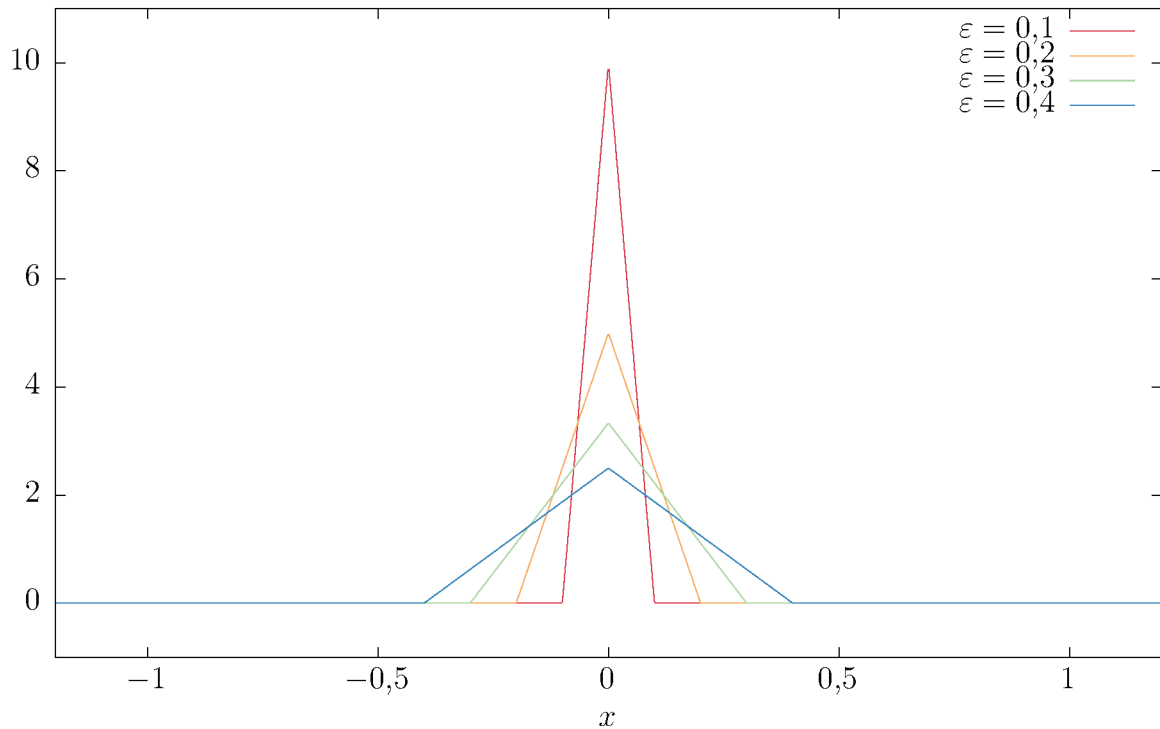


Figura 14 – Função delta triangular $\delta_\varepsilon(x)$ para diferentes valores de ε .

devido a presença função degrau no anstaz da solução. Substituindo essas condições na energia

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi(t, x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi(t, x))^2 + |\phi(t, x)| \right]$$

temos que integrar uma expressão proporcional ao quadrado de uma delta de Dirac. A integral de $(\delta(x))^2$ não é bem comportada na teoria das distribuições, causando uma divergência. Podemos contornar esse problema com o uso de uma função delta $\delta_\varepsilon(x)$ que possua como limite – no sentido fraco – a delta de Dirac quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ou seja

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\varepsilon(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

para toda função teste $f(x)$. Existem várias possibilidades de função delta. Em particular, vamos estudar o caso da função $\delta_\varepsilon(x)$ na forma triangular, cuja expressão é

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon+x}{\varepsilon^2} & \text{se } -\varepsilon \leq x \leq 0, \\ \frac{\varepsilon-x}{\varepsilon^2} & \text{se } 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Outras escolhas possíveis seriam uma função delta de forma retangular ou então na forma de uma distribuição normal. Escolhemos a função triangular por ser fácil de integrar (ao contrário da distribuição normal) e contínua (ao contrário da função retangular).

Vamos então estudar as soluções do modelo de signum–Gordon com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned}\phi(0, x) &= 0, \\ \partial_t \phi(0, x) &= a\delta_\varepsilon(x)\end{aligned}$$

com a sendo uma constante positiva. As estruturas resultantes dessas condições iniciais serão chamadas de quase-ondas de choque. A energia total de uma quase-onda de choque é finita e conservada no tempo, sendo dada por

$$E = \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\delta_\varepsilon(x))^2 = \frac{a^2}{3\varepsilon}.$$

Note que essa expressão inclui a energia das frentes de onda, ao contrário de (3.6). No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a energia total diverge, da mesma forma que a energia total das ondas de choque exatas.

As condições iniciais das quase-ondas de choque podem ser integradas numericamente no tempo. A integração numérica pode ser realizada discretizando a variável x em um *grid* de separação 10^{-3} , de modo que tratamos o campo e sua derivada temporal como variáveis distintas para cada posição do espaço. As derivadas espaciais foram tratadas através do método das diferenças finitas. No tempo, integramos o campo e sua derivada temporal a partir da equação de signum–Gordon pelo método de Runge–Kutta de quarta ordem, com passos de tempo de tamanho 10^{-4} .

Na figura 15 os resultados numéricos para o campo $\phi(t, x)$ foram representados como um mapa de cores para $a = 1$ e diferentes valores de ε . Também representamos a densidade de energia do sistema. Para valores de ε pequenos os resultados numéricos são muito similares a ondas de choque exatas. Por exemplo, para $\varepsilon = 0,1$ o campo não decai durante todo o período simulado e a densidade de energia se concentra nas frentes de onda. No mapa de cores da densidade de energia, vemos que as frentes de onda perdem intensidade, indicando que a energia está sendo transferida para as regiões internas. Conforme aumentamos os valor de ε , podemos ver a onda de choque decaindo em radiação. Para $\varepsilon = 0,3$, por exemplo, a onda de choque se quebra em quase-oscillons para $t \approx 4$. Esse também é o tempo no qual a densidade energia na frente de onda se torna comparável com a da região interna. Aumentando ε suficientemente, por exemplo para $\varepsilon = 0,5$, a configuração do campo não se assemelha mais a uma onda de choque, exceto nos instantes iniciais da evolução temporal. Quando para $a = \varepsilon^2$, a quase-onda de choque tem as mesmas condições iniciais que um oscillon com bordas paradas e período $T = 2\varepsilon$. Como situações desse tipo já são demasiadamente distante do nosso objeto de estudo, vamos nos restringir a valores de ε tais que $\varepsilon^2 \ll a$.

A nossa escolha de $\delta_\varepsilon(x)$ permite a construção de uma solução analítica para os primeiros instantes da evolução temporal. Essa solução analítica toma o valor de vácuo

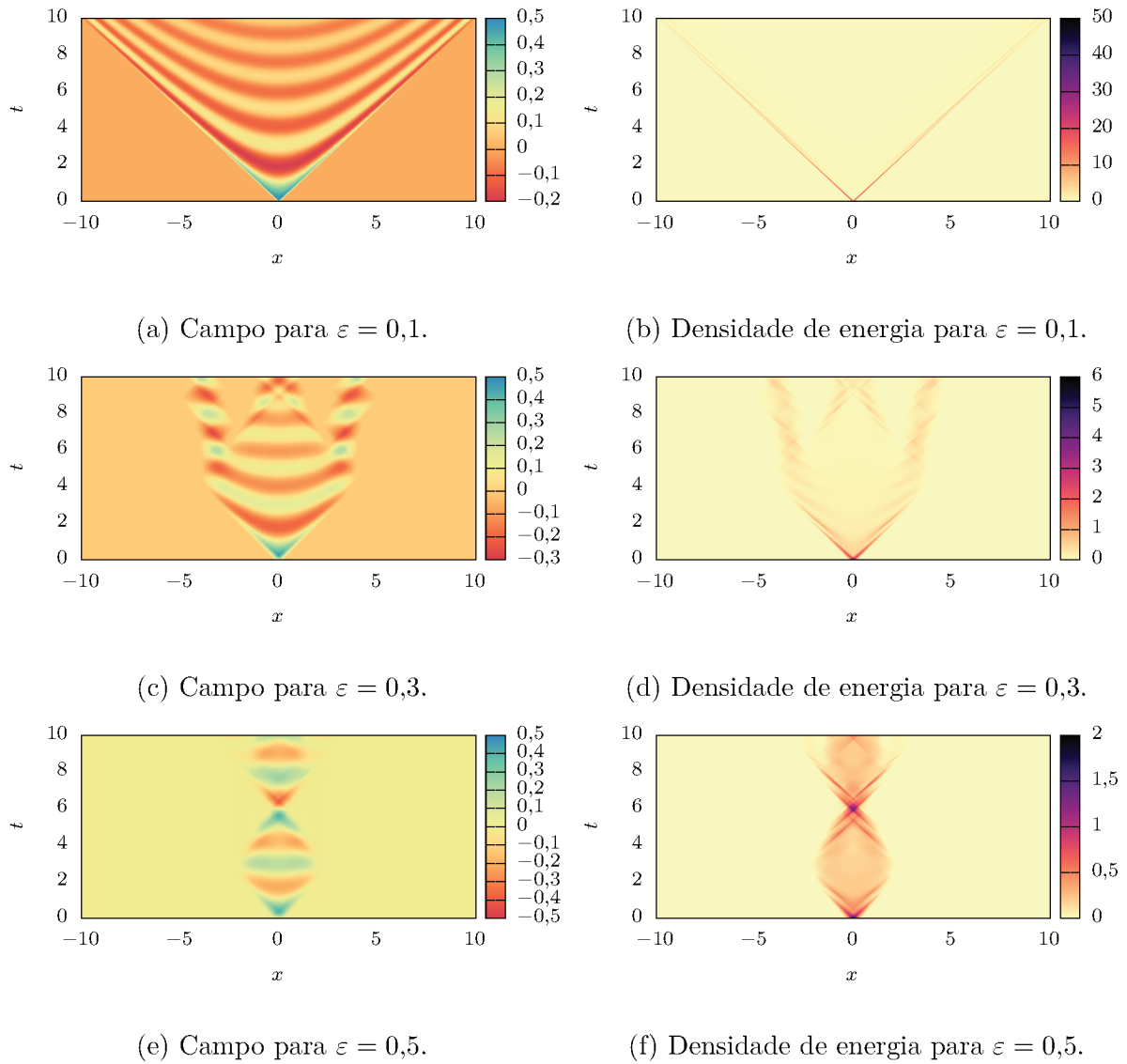


Figura 15 – Soluções numéricas para ondas de choque aproximadas com diferentes valores de ε e $a = 1$.

$\phi(t, x) = 0$ fora de um certo suporte compacto e dentro desse suporte toma a forma

$$\phi(t, x) = F(x + t) + G(x - t) \pm \frac{t^2}{2}. \quad (3.7)$$

Nos instantes iniciais da evolução temporal, a onda de choque é positiva, portanto usamos a forma com o sinal negativo.

Para $t = 0$, o suporte da solução está restrito à região $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Esse suporte pode se expandir ou se contrair, dependendo da inclinação de $a\delta_\varepsilon(x)$ (ARODŹ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2007). Vamos supor que o suporte expande com velocidade $-v$ de modo que para cada instante de tempo, o campo está contido na região

$$-\varepsilon + vt \leq x \leq \varepsilon - vt.$$

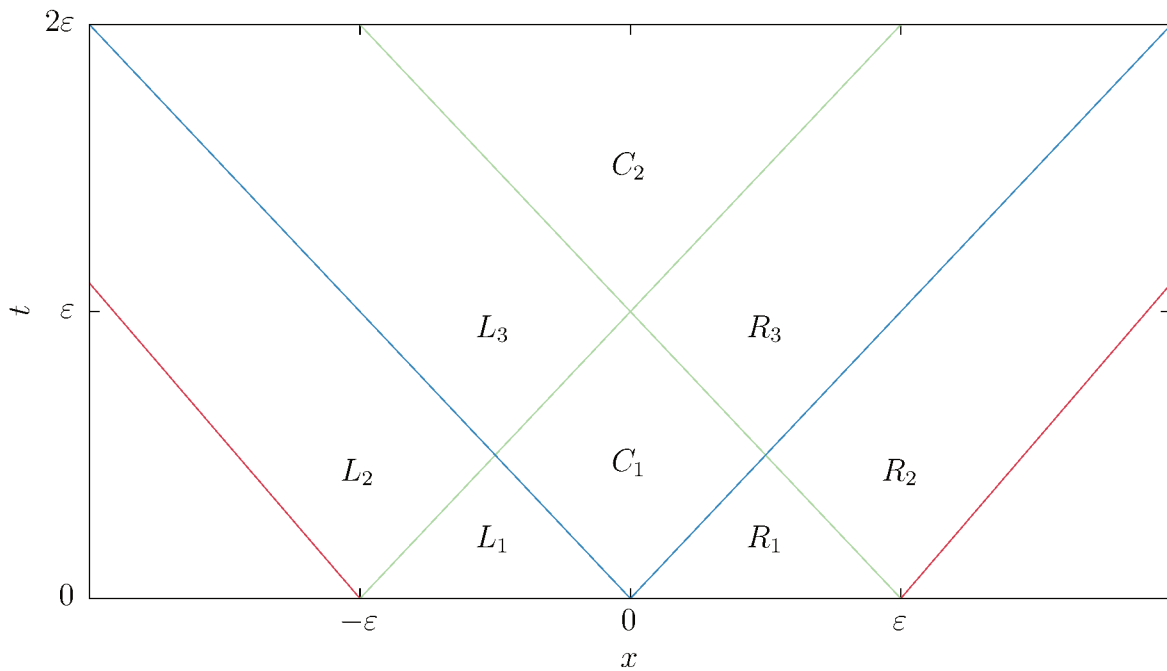


Figura 16 – Regiões do suporte de $\phi(t, x)$.

Para uma onda de choque exata ($\varepsilon = 0$) devemos ter $v = -1$.

Como a condição inicial muda de expressão nos pontos $x = \pm\varepsilon$ e $x = 0$, consideramos separadamente cada uma das regiões da figura 16. A simetria das condições iniciais nos permite resolver a equação de signum–Gordon apenas para as regiões a esquerda da origem. As soluções a direita podem ser obtidas pela transformação

$$\phi_{R_i}(t, x) = \phi_{L_i}(t, -x).$$

Além disso, as soluções $\phi_{C_k}(t, x)$ devem ser invariantes por essa transformação.

Obtemos a solução $\phi_{L_1}(t, x)$ impondo as condições iniciais

$$\begin{aligned}\phi_{L_1}(0, x) &= 0 \\ \partial_t \phi_{L_1}(0, x) &= a\delta_\varepsilon(t, x)\end{aligned}$$

a expressão (3.7). Resolvendo as equações resultantes obtemos que $\phi_{L_1}(t, x)$ vale

$$\phi_{L_1}(t, x) = \frac{a}{\varepsilon^2}(x + \varepsilon)t - \frac{t^2}{2}.$$

Para obtermos a solução em L_2 notamos que $\phi_{L_2}(t, x)$ realiza uma interpolação entre a solução de vácuo $\phi(t, x) = 0$ e a solução parcial $\phi_{L_1}(t, x)$. Para que essa solução toque suavemente o vácuo, ela deve ter a forma quadrática

$$\phi_{L_2}(t, x) = A(x + \varepsilon - vt)^2.$$

Podemos fixar as constantes A e v exigindo que $\phi_{L_2}(t, x)$ satisfaça a equação de signum–Gordon e coincida com $\phi_{L_1}(t, x)$ em $x = -\varepsilon + t$:

$$\phi_{L_1}(t, -\varepsilon + t) = \phi_{L_2}(t, -\varepsilon + t).$$

Resolvendo essas duas condições obtemos que

$$\phi_{L_2}(t, x) = \frac{(x + \varepsilon - vt)^2}{2(1 - v^2)}, \quad v = -1 + \frac{\varepsilon^2}{a}.$$

Note que a região L_2 deixa de existir no instante no tempo $t_c = a/\varepsilon$ para o qual as linhas $x = -\varepsilon + vt$ e $x = -t$ se intersectam. Note também que $t_c \rightarrow \infty$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A solução $\phi_{C_1}(t, x)$ também pode ser obtida usando a expressão (3.7) exigindo a continuidade da solução em $x = \pm t$

$$\begin{aligned} \phi_{C_1}(t, -t) &= \phi_{L_1}(t, -t), \\ \phi_{C_1}(t, t) &= \phi_{R_1}(t, t) = \phi_{L_1}(t, -t). \end{aligned}$$

Resolvendo essas relações para as funções $F(x)$ e $G(x)$ obtemos que $\phi_{C_1}(t, x)$ vale

$$\phi_{C_1}(t, x) = \frac{1}{1+v} \left(\varepsilon t - \frac{x^2 + t^2}{2} \right) - \frac{t^2}{2}.$$

Similarmente, a solução $\phi_{L_3}(t, x)$ pode ser obtida pelas condições de continuidade em $x = -t$ e $x = -\varepsilon + t$

$$\begin{aligned} \phi_{L_3}(t, -t) &= \phi_{L_2}(t, -t), \\ \phi_{L_3}(t, -\varepsilon + t) &= \phi_{C_1}(t, -\varepsilon + t) \end{aligned}$$

e vale

$$\begin{aligned} \phi_{L_3}(t, x) &= \frac{1}{1+v} \left[\frac{\varepsilon}{2}(x+t) - \frac{1}{4}(x+t)^2 \right] + \frac{(x-t)^2}{8} - \frac{t^2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2(1-v^2)} \left[\varepsilon + (1+v) \frac{x-t}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Vale lembrar que essa solução não é válida para tempos arbitrários, pois para $t = t_c$, a região L_2 desaparece, mudando a forma das condições de continuidade. Além disso, toda vez que o cone de luz do evento $(t_c, \pm t_c)$ se intersecta com as linhas que dividem as regiões internas, o suporte das soluções parciais será dividido em novos pedaços. Em cada um desses pedaços a solução poderá assumir novas expressões. Esse processo pode desencadear ou contribuir para o decaimento das regiões internas. De fato, nas simulações numéricas, o decaimento da região interna acontece pouco tempo depois do tempo crítico t_c .

Observe que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ todas as soluções parciais acima deixam de existir e se reduzem a uma descontinuidade na frente de onda. Portanto, essas soluções não tem análogos entre as soluções obtidas para ondas de choque exatas.

Por outro lado, a solução $\phi_{C_2}(t, x)$ é análoga à solução $\phi_0(t, x)$ da onda de choque exata. Podemos ver isso obtendo a sua forma explícita. Note que sobre as retas $x = \pm\varepsilon \mp t$ valem as condições de continuidade

$$\begin{aligned} \phi_{C_2}(t, \varepsilon - t) &= \phi_{L_3}(t, \varepsilon - t), \\ \phi_{C_2}(t, -\varepsilon + t) &= \phi_{R_3}(t, -\varepsilon + t) = \phi_{L_3}(t, \varepsilon - t). \end{aligned}$$

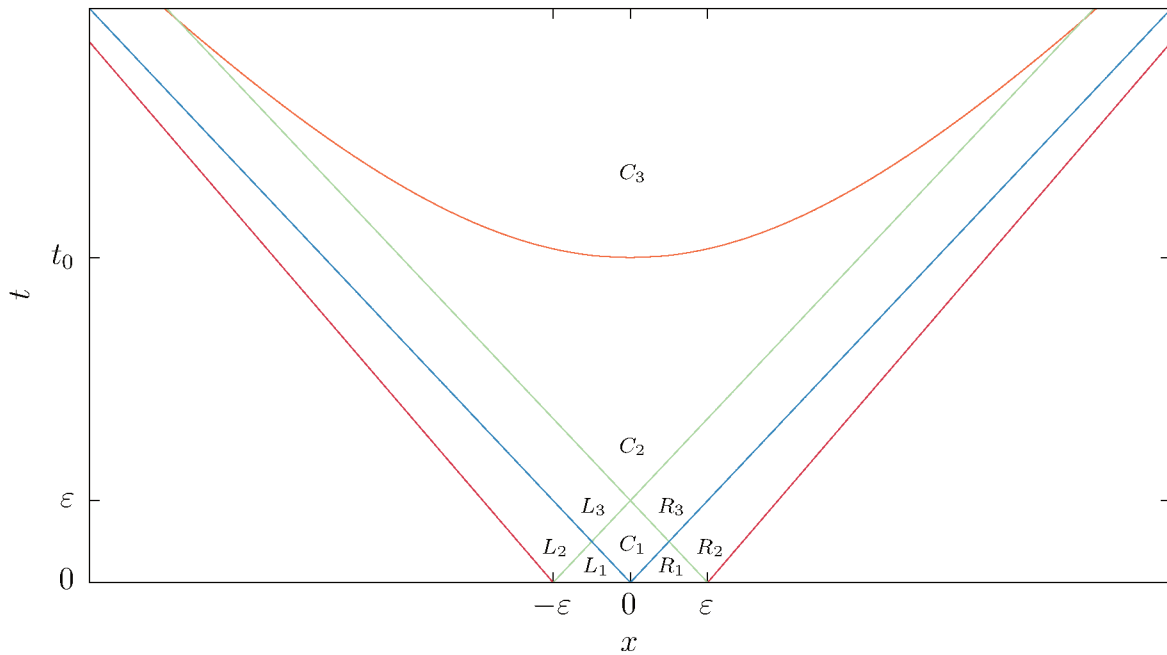


Figura 17 – Regiões do suporte de $\phi(t, x)$ após o surgimento do primeiro zero.

Usando a expressão (3.7) podemos resolver essas condições e obter a solução

$$\phi_{C_2}(t, x) = \frac{x^2 - b(t)}{2(1 - v)}, \quad b(t) = -vt^2 + 2\epsilon t - 2a.$$

Quando $\epsilon = 0$ ($v = -1$), essa solução reproduz identicamente $\phi_0(t, x)$, com $a_0 = a/2$. Além disso, a solução $\phi_{C_2}(t, x)$ possui zeros sobre a curva $x^{(1)}(t) = \pm\sqrt{b(t)}$. Quando $\epsilon = 0$, essas curva se torna a hipérbole $x = \pm\sqrt{t^2 - 2a}$.

A curva $x^{(1)}(t)$ delimita o fim da região C_2 e o início da região C_3 , como indicado na figura 17. O suporte de $\phi_{C_2}(t, x)$ irá se dividir em dois pedaços no tempo

$$t_0 = -\frac{\epsilon}{v} \left(\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} - 1 \right).$$

Nesse instante irá aparecer a solução $\phi_{C_3}(t, x)$, que será negativa e portanto pode ser obtida pela expressão

$$\phi_{C_3}(t, x) = F(x + t) + G(x - t) + \frac{t^2}{2}$$

juntamente com as condições de continuidade e suavidade em $x = x^{(1)}(t)$

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{b(t)} + t\right) + G\left(\sqrt{b(t)} - t\right) + \frac{t^2}{2} &= 0 \\ F'\left(\sqrt{b(t)} + t\right) + G'\left(\sqrt{b(t)} - t\right) &= \frac{\sqrt{b(t)}}{1 - v}. \end{aligned}$$

Resolvendo as equações acima obtemos que $\phi_{C_3}(t, x)$ vale

$$\begin{aligned} \phi_{C_3}(t, x) = & \frac{1}{1+v} [H(x+t) + H(t-x) - 2H(t_0)] \\ & + \frac{t^2 - t_0^2}{2} + \alpha^{(-)}(t^2 + x^2 - t_0^2) - 2\varepsilon\alpha^{(+)}(t - t_0) \end{aligned}$$

com os coeficientes α^\pm definidos como

$$\alpha^\pm = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-v} \pm \frac{2}{1+v} \right).$$

A função $H(z)$ é definida pela integral

$$H(z) \equiv \int dz c(z)$$

com $c(z) = -vz^2 + 2\varepsilon z - \varepsilon^2$ de modo que

$$H(z) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{\varepsilon}{v} \right) \sqrt{c(z)} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 \frac{1-v}{(-v)^{\frac{3}{2}}} \ln \left[2a \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{-v}} + z\sqrt{-v} + \sqrt{c(z)} \right) \right] \right).$$

A função $H(z)$ não deve ser confundida com as funções degrau $H_n(z)$ definidas no capítulo 1. Essa solução possui um zero que surge para um tempo $t = t_1$ tal que $\phi_{C_3}(t_1, 0) = 0$. Devido a complexidade da expressão de $\phi_{C_3}(t, x)$, não podemos obter analiticamente t_1 . A validade da nossa solução é limitada pela curva $x^{(2)}(t)$ na qual $\phi_{C_3}(t, x)$ possui zeros diferentes daqueles sobre a curva $x^{(1)}(t)$.

Note ainda que existe um tempo tal que $x^{(1)}(t)$ se intersecta com as retas $x = \pm\varepsilon \mp t$. Nesse instante, a solução $\phi_{C_2}(t, x)$ deixa de existir. Esse comportamento é diferente de onda de choque exata, na qual $\phi_0(t, x)$ nunca desaparece, mesmo com seu suporte encolhendo. Esse desaparecimento de $\phi_{C_2}(t, x)$ muda as condições de contorno para $\phi_{C_3}(t, x)$, provavelmente contribuindo com o despedaçamento da solução, de modo similar ao que acontece quando $\phi_{L_2}(t, x)$ desaparece.

3.2.1 Energia das regiões externas

Sabendo as expressões para as soluções parciais, podemos usar a expressão para a densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\partial_t \phi(t, x) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\partial_x \phi(t, x) \right)^2 + |\phi(t, x)|$$

do modelo de signum–Gordon para calcular a densidade de energia carregada por cada parte da solução

$$\begin{aligned}
u_{C_1}(t,x) &= \frac{(2+v)t^2 - 2\varepsilon t - vx^2 + \varepsilon^2}{2(1+v)^2} \\
u_{C_2}(t,x) &= \frac{vt^2 - 2t\varepsilon + (2-v)x^2}{2(1-v)^2} + \frac{(3-v)\varepsilon^2}{2(1-v)^2(v+1)} \\
u_{L_1}(t,x) &= \frac{t^2 + (x+\varepsilon)^2}{2(1+v)^2} \\
u_{L_2}(t,x) &= \frac{(x+\varepsilon - vt)^2}{(1-v^2)^2} \\
u_{L_3}(t,x) &= \frac{1}{2(1-v^2)^2} \left[-v(1-v^2)(t^2 - x^2) + (1+v^2)(t^2 + x^2) \right. \\
&\quad \left. - 2t((1+v^2)\varepsilon + 2vx) + 2(1 + (2-v)v)x\varepsilon + 2\varepsilon^2 \right]
\end{aligned}$$

Não escrevemos $u_{C_3}(t,x)$ porque sua expressão é muito complicada.

Integrando essas expressões obtemos a energia total carregada por cada uma das soluções parciais, como função do tempo. Em particular, calculamos

$$\begin{aligned}
E_{C_1}(t) &= \begin{cases} \frac{t(2t^2(v+3) - 6t\varepsilon + 3\varepsilon^2)}{3(v+1)^2} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{(\varepsilon-t)(2t^2(v+3) + 2t(v-3)\varepsilon - (v-3)\varepsilon^2)}{3(v+1)^2} & \text{se } \frac{\varepsilon}{2} < t \leq \varepsilon \end{cases} \\
E_{L_1}(t) = E_{R_1}(t) &= \frac{-8t^3 + 6t^2\varepsilon - 3t\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{6(v+1)^2} \\
E_{L_2}(t) = E_{R_2}(t) &= \begin{cases} -\frac{t^3(v-1)}{3(v+1)^2} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{((1+v)t - \varepsilon)^3}{3(v^2-1)^2} & \text{se } t > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \\
E_{L_3}(t) = E_{R_3}(t) &= \begin{cases} \frac{(2t-\varepsilon)(2t^2[v(v(v+2)-1)+2] + t[v(v(v-7)+5)-7]\varepsilon - [v(v(v-4)+5)-4]\varepsilon^2)}{6(v^2-1)^2} & \text{se } \frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \varepsilon \\ \frac{\varepsilon(6t^2(v+1)^2 + 3t[v(v-2)-5](v+1)\varepsilon - [v(v(v+2)-7)-10]\varepsilon^2)}{6(v^2-1)^2} & \text{se } t > \varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Escolhemos essas regiões para calcular as energias porque elas não tem análogos na onda de choque exata. Quanto menor o valor de ε , mais estreitas essas regiões se tornam, até que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ elas desaparecem por completo, deixando o campo com uma descontinuidade.

Fazendo o gráfico (figura 18) da energia total carregada por essas regiões externas, vemos que para $t > \varepsilon$, a energia cai de modo aproximadamente linear, devido ao surgimento das soluções internas ϕ_{C_2} e ϕ_{C_3} . Podemos supor que, quando a energia das regiões externas se torna suficientemente pequeno, ela não pode mais sustentar a expansão da quase-onda de choque, desencadeando seu decaimento em radiação.

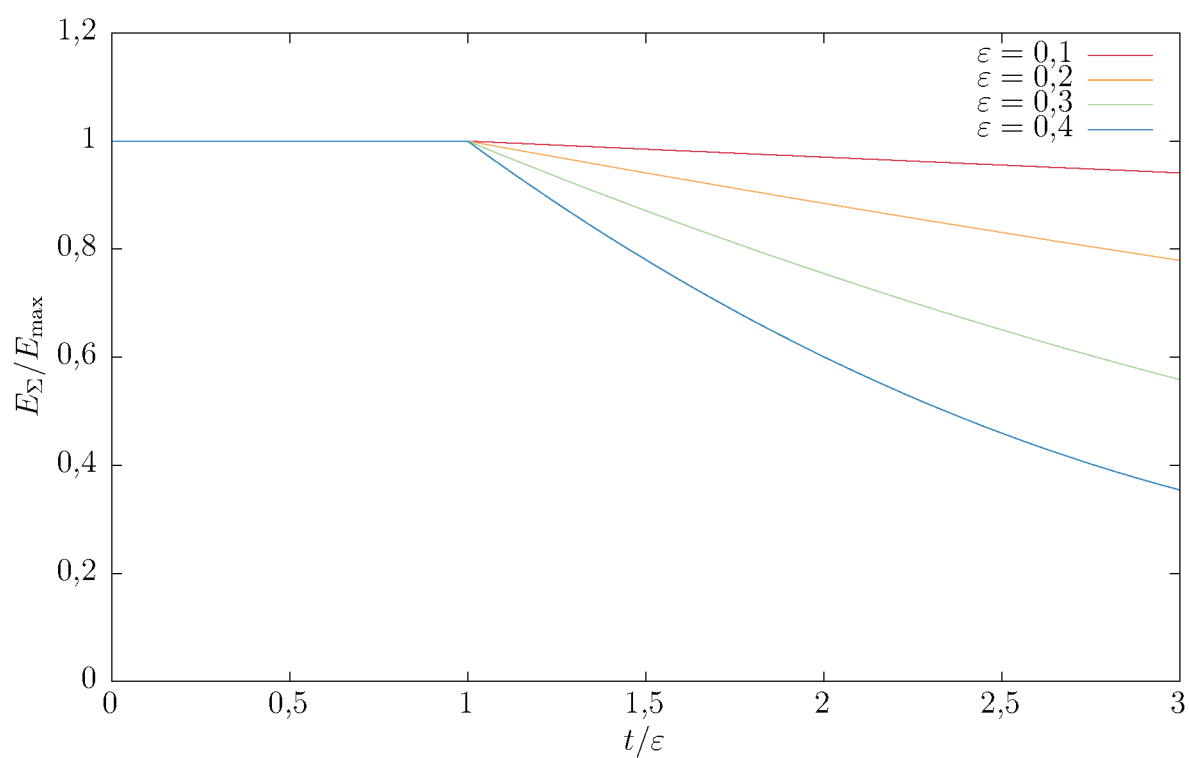


Figura 18 – Razão entre a energia carregada pelas regiões externas $E_\Sigma = E_{C_1} + E_{L_1} + E_{R_1} + E_{L_2} + E_{R_2} + E_{L_3} + E_{R_3}$ e a energia total $E_{\max} = a^2/(3\varepsilon)$ em função do tempo em unidades de ε .

4 ESPALHAMENTO DE KINKS

Nesse capítulo voltamos a estudar a equação original do campo *unfolded* $\eta(t,x)$, sem nos restringirmos a pequenas amplitudes. Nesse caso, a equação de campo é dada por

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + V'(\eta) = 0$$

com o potencial e sua derivada valendo

$$V(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|\eta - 4n| - \frac{1}{2}(\eta - 4n)^2 \right) H_n(\eta),$$

$$V'(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{sgn}(\eta - 4n) - (\eta - 4n)] H_n(\eta),$$

$$H_n(\eta) = \theta(\eta - 4n + 2) - \theta(\eta - 4n - 2).$$

Esse modelo possui vários vácuos, para o campo valendo múltiplos inteiros de dois. A existência de múltiplos vácuos discretos é uma condição necessária para a presença de soluções topológicas. Nesse capítulo vamos estudar soluções topológicas que conectam dois vácuos do modelo de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta(x) = \eta_{\pm}.$$

Essas soluções são chamadas de kinks e anti-kinks. Caso $\eta_+ = \eta_-$, o campo pode ser transformado em uma solução de vácuo constante através de uma transformação contínua. No entanto, caso $\eta_+ \neq \eta_-$ não há nenhuma transformação contínua que mantenha a energia finita e transforme o campo em uma configuração de vácuo. Isso acontece porque, durante tal transformação, o campo assumiria valores diferentes do vácuo no infinito, causando uma divergência da energia total. Por esse motivo, os kinks são soluções estáveis.

Podemos obter soluções de kinks procurando por soluções que minimizem a energia e conectem os dois vácuos η_{\pm} . Note que a energia do campo η é dada pela integral

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \right]$$

Para campos dependentes da posição, a energia será minimizada para configurações estáticas. Além disso, podemos restringir a dependência da posição observando que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \eta \pm \sqrt{V(\eta)} \right)^2 = \frac{1}{2}(\partial_x \eta)^2 + V(\eta) \pm (\partial_x \eta) \sqrt{2V(\eta)} \geq 0,$$

o que implica na desigualdade

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2V(\eta)} \eta' \right| = \left| \int_{\eta_-}^{\eta_+} d\eta \sqrt{2V(\eta)} \right|.$$

Para que a desigualdade seja saturada, o campo deve obedecer uma das equações de Bogomolny

$$\eta' = \pm \sqrt{2V(\eta)}$$

cujas soluções com o sinal positivo são kinks e as com sinal negativo anti-kinks. Note que essa equação é consistente com a equação do campo para o caso estático.

Vamos considerar configurações de campo com amplitudes menores que o segundo vácuo $|\eta| \leq 2$. Nesse caso, precisamos considerar apenas o termo $n = 0$ do potencial e a equação de campo se reduz a

$$\eta''(x) + \eta(x) = \text{sgn}(\eta(x)). \quad (4.1)$$

Nos restringindo a região em que $\text{sgn}(\eta(x))$ é uma constante e vale ± 1 obtemos que o campo é da forma

$$\eta(x) = A \cos(x - a) \pm 1$$

com A e a constantes. Como a equação (4.1) é simétrica sob a transformação $\eta \rightarrow -\eta$ podemos nos restringir ao caso em que o campo é positivo (sinal +). A constante A pode ser fixada através da equação de Bogomolny

$$\eta' = \pm \sqrt{2V(\eta)}$$

que implica na condição

$$-A \sin(x - a) = \pm \sqrt{1 - A^2 \cos^2(x - a)}$$

e será satisfeita identicamente para $A = \mp 1$.

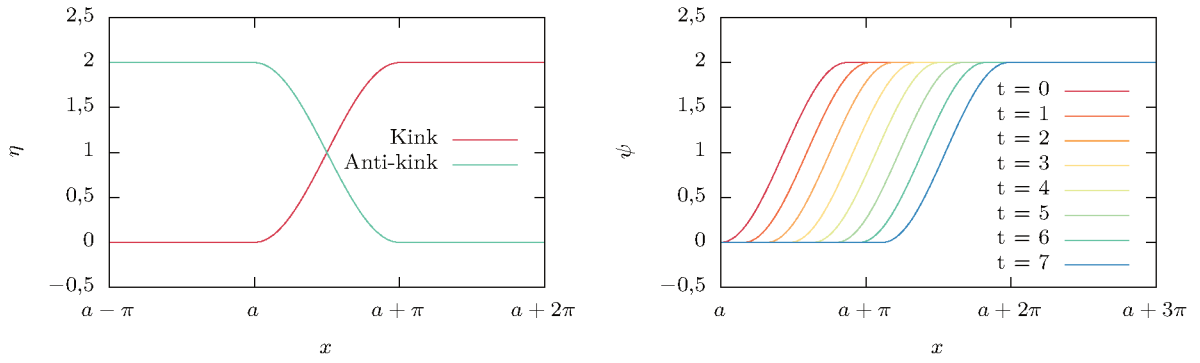
Note que essa solução obtida é válida na região em que o sinal de η é positivo $x \in [a, a + \pi]$. A solução completa de kink ou anti-kink é obtida quando o campo possui valores de vácuo fora dessa região. Portanto, as soluções de kink e anti-kink são dadas respectivamente por

$$\eta_{\text{kink}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 - \cos(x - a) & \text{se } a \leq x \leq a + \pi, \\ 2 & \text{se } a + \pi < x \end{cases}$$

$$\eta_{\text{anti-kink}}(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < a \\ 1 + \cos(x - a) & \text{se } a \leq x \leq a + \pi \\ 0 & \text{se } a + \pi < x \end{cases}$$

com a parametrizando a borda esquerda do kink ou anti-kink. Em geral podemos tomar $a = 0$ e escrever o campo de um kink ou anti-kink deslocado como $\eta_{\text{kink/anti-kink}}(x - a)$. Além disso, note que as $-\eta_{\text{kink}}(x)$ e $-\eta_{\text{anti-kink}}(x)$ também são soluções (de anti-kink e kink, respectivamente) conectando os vácuos $\eta = 0$ e $\eta = -2$.

Essas soluções correspondem a configurações estáticas. No entanto, podemos obter configurações de kinks e de anti-kinks em movimento através de uma transformação de



(a) Kink e anti-kink estáticos.

(b) Kink em movimento ($V = 0,5$).

Figura 19 – Soluções de kink e anti-kink como função da posição.

Lorentz, de modo similar ao que fizemos com os oscillons do modelo de signum–Gordon. O campo para o kink ou anti-kink em movimento com velocidade V é dado por

$$\psi_{\text{kink/anti-kink}}(t, x; V) = \eta_{\text{kink/anti-kink}}(\gamma(x - Vt)).$$

no qual $\gamma = (1 - V^2)^{-1/2}$.

4.1 RESULTADOS NUMÉRICOS

Estudamos a dinâmica dos kinks no nosso modelo através de processos de espalhamento. Consideramos situações nas quais kink e um anti-kink colidem com mesma velocidade V no referencial do laboratório. No instante inicial do espalhamento ($t = 0$), o kink e o anti-kink tem seus suporte se tocando apenas no ponto $x = 0$. Essa condição define as condições iniciais a serem integradas numericamente como

$$\eta(t, 0) = \begin{cases} \psi_{\text{kink}}(0, x + \pi/\gamma; V) & \text{se } -\pi/\gamma \leq x \leq 0, \\ \psi_{\text{anti-kink}}(0, x; -V) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/\gamma, \\ 0 & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

$$\partial_t \eta(t, 0) = \begin{cases} \partial_t \psi_{\text{kink}}(0, x + \pi/\gamma; V) & \text{se } -\pi/\gamma \leq x \leq 0, \\ \partial_t \psi_{\text{anti-kink}}(0, x; -V) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/\gamma, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Nessa configuração, o kink se move da esquerda para a direita com velocidade de módulo V e, em $t = 0$, está contido na região $x \in [-\pi/\gamma, 0]$. O anti-kink se move da esquerda para a direita com velocidade de mesmo módulo V e, em $t = 0$, está contido na região $x \in [0, \pi/\gamma]$ em $t = 0$. Note que o suporte dos kinks tem tamanho π/γ devido a contração de Lorentz.

Realizamos as simulações para velocidades no intervalo $V \in [0, 0,99]$ em intervalos de 0,01. Os procedimentos numéricos foram os mesmos dos adotados para as quase-ondas de choque, exceto que usamos a equação de movimento para o modelo reduzido neste caso.

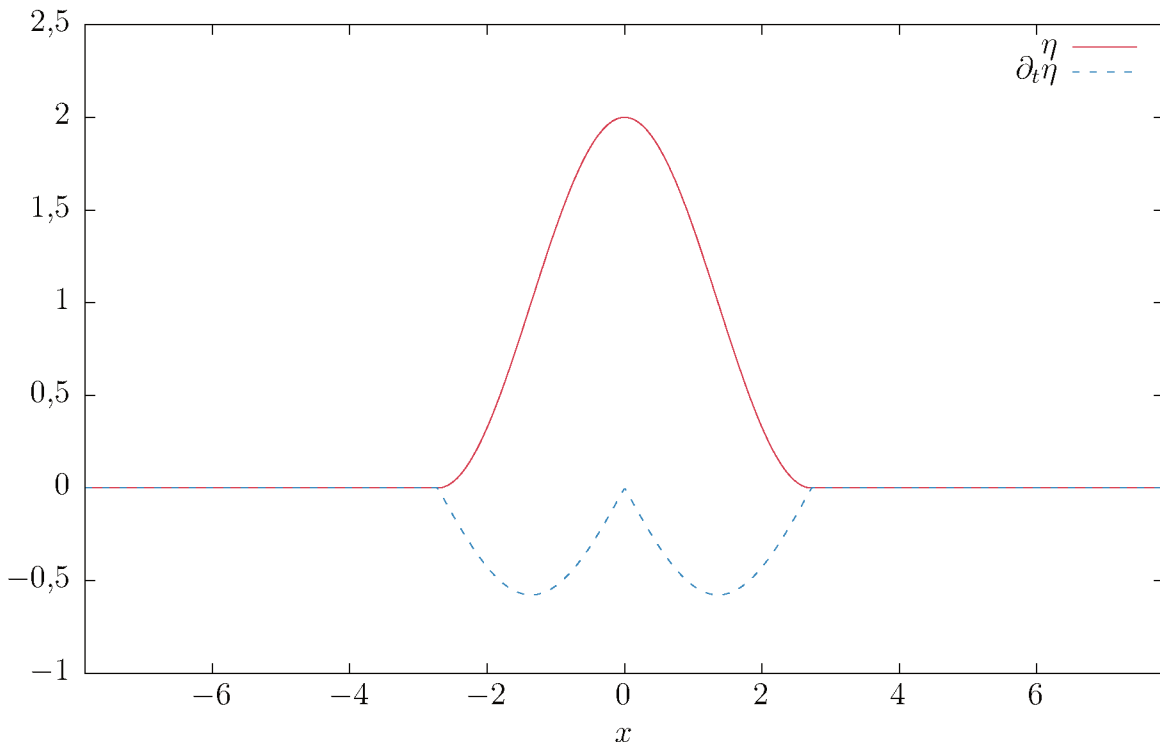


Figura 20 – Condições iniciais de um espalhamento kink–anti-kink. Para esse exemplo $V = 0,5$.

O caso para $V = 0$ nos permite averiguar o correto funcionamento das simulações. Teoricamente, neste caso, a configuração de kink e anti-kink deveria se manter inalterada para tempo arbitrariamente longos. No entanto, a acumulação dos erros da integração numérica pode eventualmente fazer com que a configuração se desfaça em radiação. Portanto, nos restringimos a tempos nos quais a configuração $V = 0$ se mantém inalterada. Na figura 21 vemos os resultados numéricos para o campo e a densidade de energia para este caso. Para tempos $t \lesssim 20$ o par kink e anti-kink se manteve sem grandes alterações usando passos de tempo de 10^{-4} e um *grid* com separação de 10^{-3} . Conseguimos realizar simulações válidas para tempos ainda maiores reduzindo o passo de tempo e o tamanho do *grid*, no entanto essa resolução é suficiente para o escopo deste trabalho. Desta forma, coletamos os resultados para os outros casos nessa faixa de tempo.

Para velocidades pequenas $V \lesssim 0,4$ (figura 22), o par kink–anti-kink se aniquila e o produto do espalhamento é uma estrutura quase-periódica que oscila entre os vácuos $\eta = \pm 2$. No entanto, essa estrutura não é exatamente periódica. Em alguns casos, como $V = 0,3$, há inclusive emissão de radiação em jatos pelas laterais (figura 22d).

Os gráficos da densidade de energia mostram que nos primeiros instantes após o espalhamento, um par kink–anti-kink começam a se formar, no entanto conectando os vácuos $\eta = 0$ e $\eta = -2$. No entanto esse novo par não consegue sustentar sua evolução, colapsando na estrutura periódica.

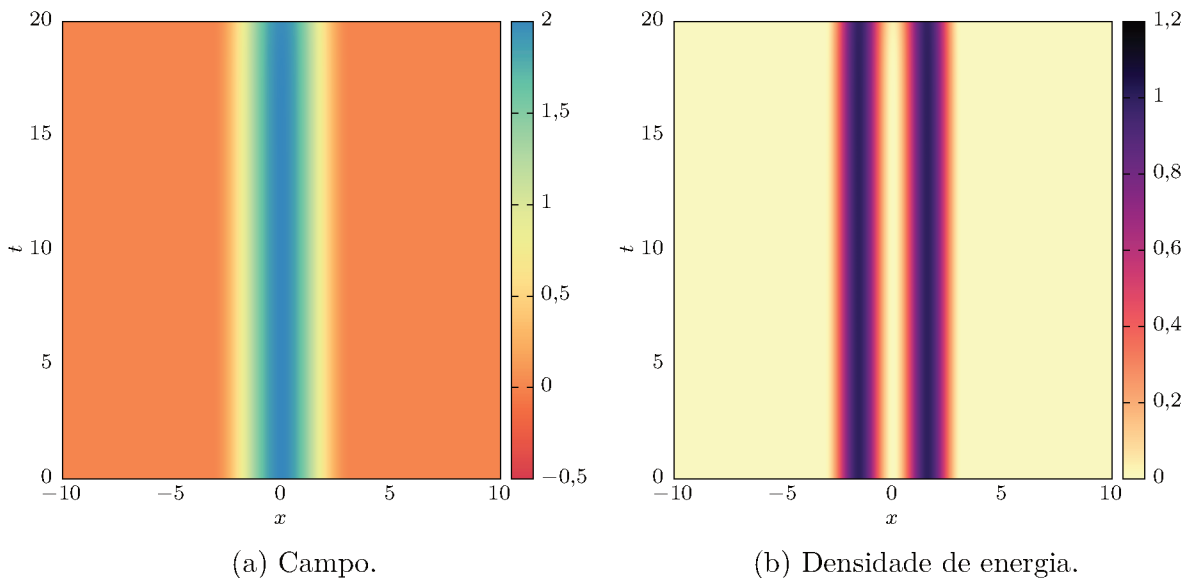


Figura 21 – Resultados numéricos do espalhamento para $V = 0,00$.

Para velocidades em torno de $V = 0,41$, um novo par de kink–anti-kink consegue se sustentar por alguns instantes (figura 23b). Esse par possui várias perturbações e além disso, o kink e o anti-kink não se afastam após se formarem. Eles se aproximam e se aniquilam novamente.

Quando aumentamos a velocidade para $V = 0,42$, o kink e anti-kink resultantes possuem velocidade o suficiente para não colidirem novamente (figura 23d). O par resultante também é perturbado e emite seu excesso de energia na forma de radiação em jatos nas regiões externas e internas.

Para velocidades $V \geq 0,42$, sempre observamos a criação de um par kink–anti-kink como produto do espalhamento. Conforme aumentamos a velocidade, o par resultante se torna cada vez mais similar a um par exato, e a quantidade de radiação emitida é menor (figura 24).

Para as velocidades mais altas, a quantidade de radiação emitida pelo processo é pequena o suficiente para ser possível ajustar a curva correspondente a um par kink–anti-kink exato sobre os dados numéricos. Esse ajuste foi feito usando o software gnuplot e tomando como parâmetros livres a velocidade V_f do kink e a posição a na qual começa o suporte do kink da direita no tempo $t = 10$.

Caso o espalhamento ocorresse com interação mínima e sem emissão de radiação, seria esperado que o par resultante tivesse a mesma velocidade do inicial ($V_f = V$) e seguisse a mesma trajetória ($a = -\pi/\gamma + 10V$).

De fato, os dados obtidos do ajuste (figura 25) indicam que, para velocidades altas, o espalhamento ocorre quase sem interação e emissão de radiação. O par kink–anti-kink resultante carrega quase toda a energia do par original.

Note que, a princípio o número de pares kink–anti-kink resultantes não é limitado a apenas um. Isso acontece porque a configuração inicial possui energia $2\gamma E_{\text{kink}}$, na qual

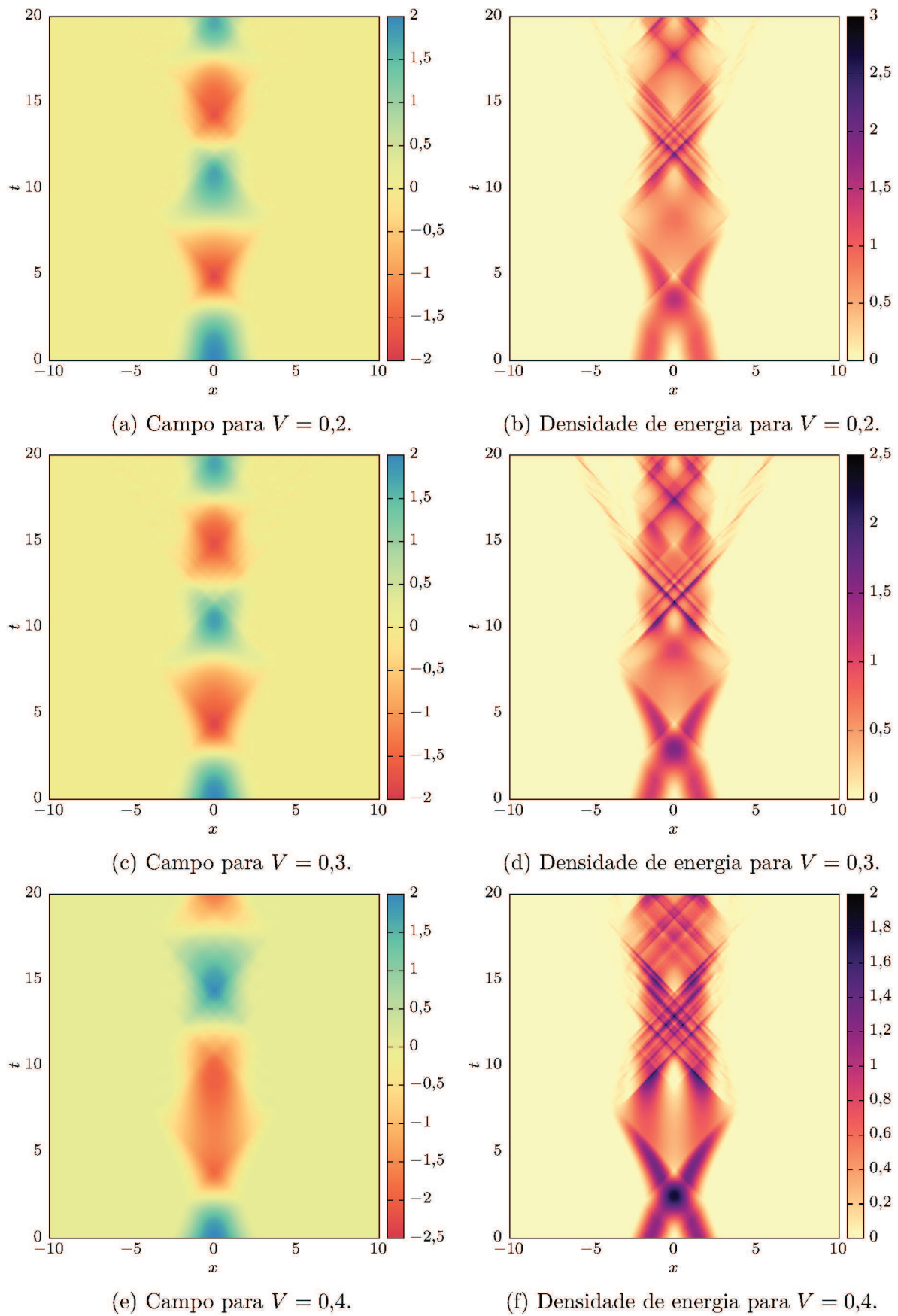


Figura 22 – Resultados numéricos para espalhamentos de velocidades pequenas.

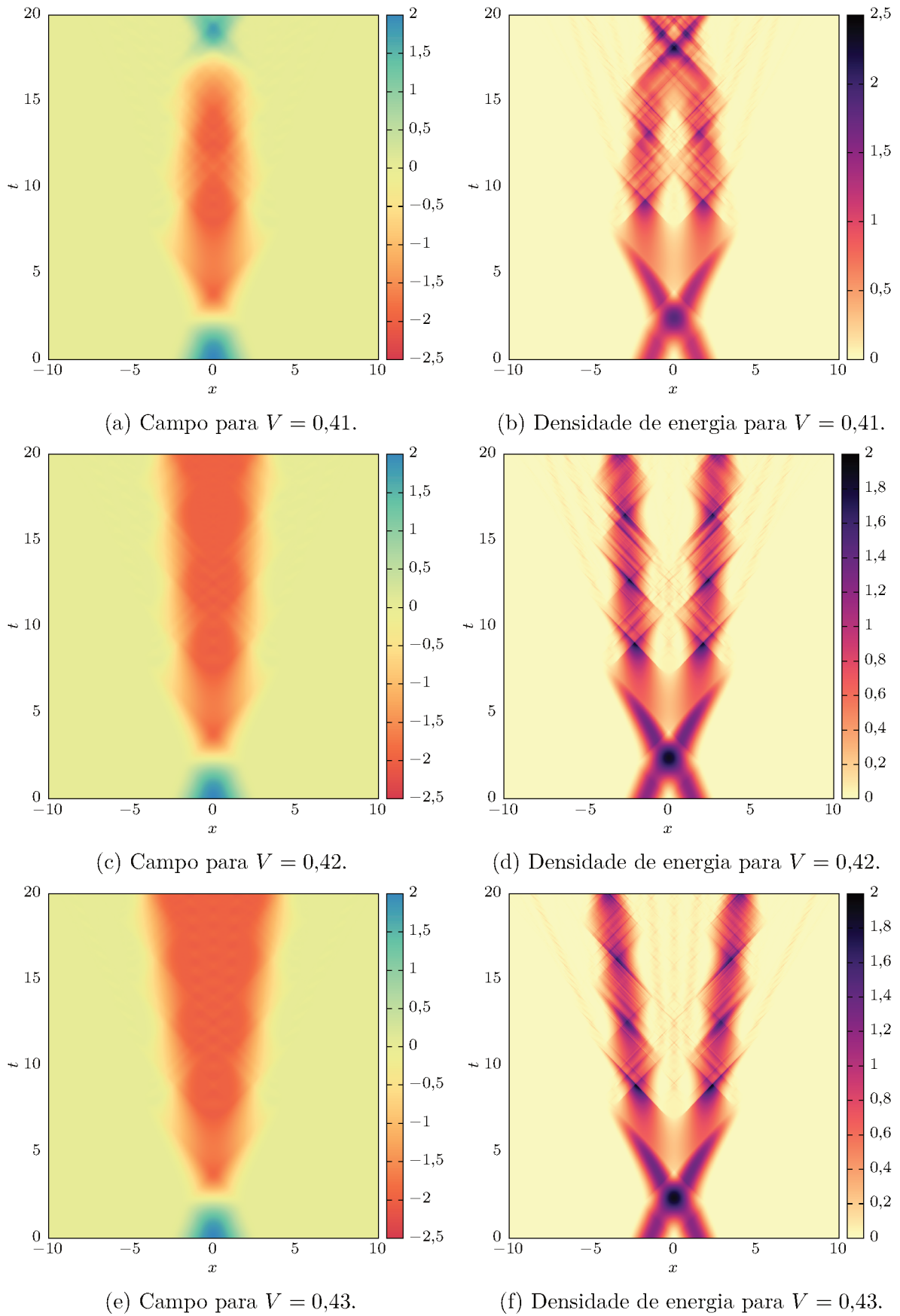


Figura 23 – Resultados numéricos para espalhamentos com velocidades $V \in \{0,41, 0,42, 0,43\}$. A velocidade $V = 0,42$ é a menor velocidade para a qual temos como produto do espalhamento um par kink–anti-kink.

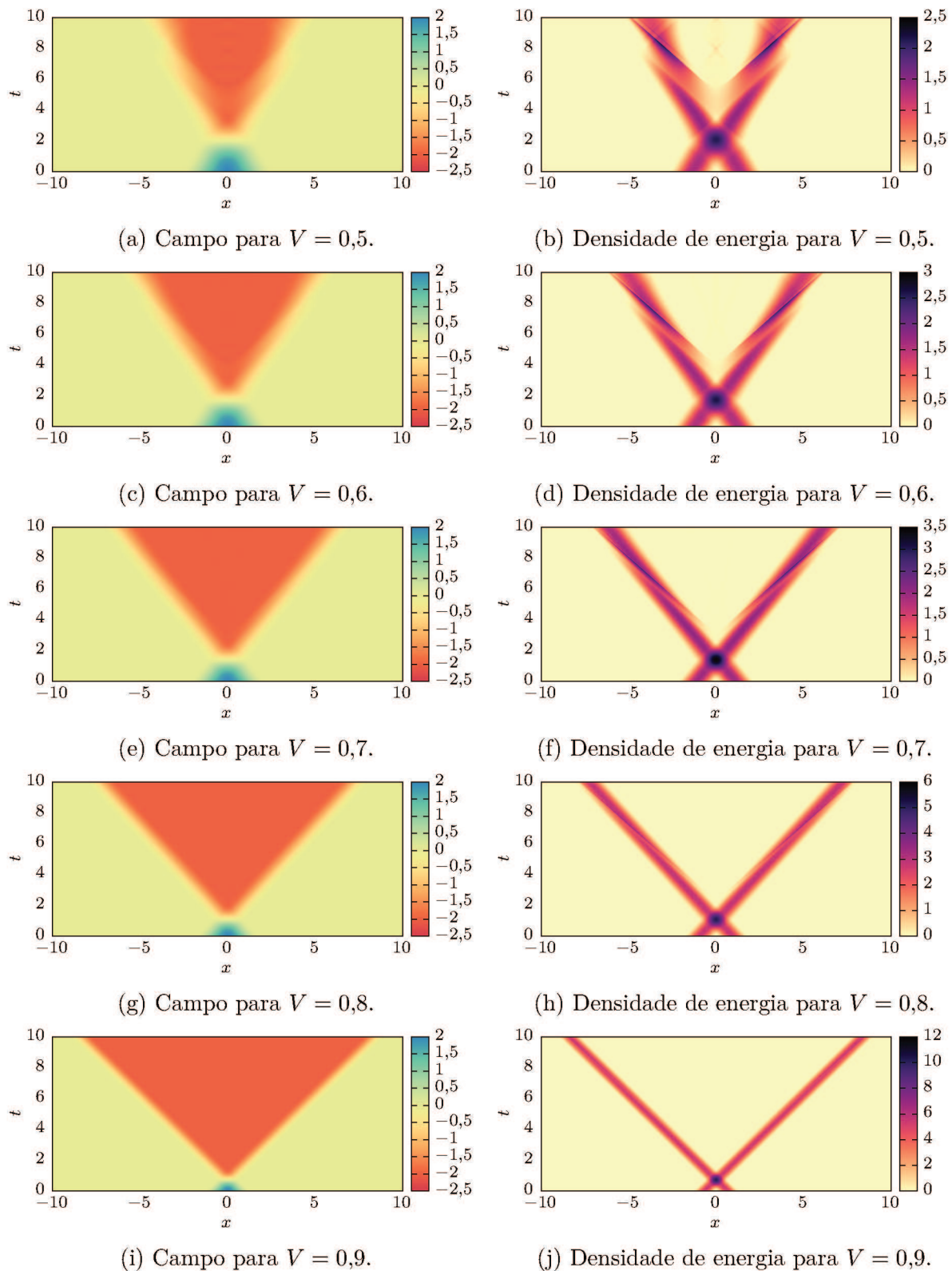


Figura 24 – Resultados numéricos para espalhamentos com velocidades grandes.

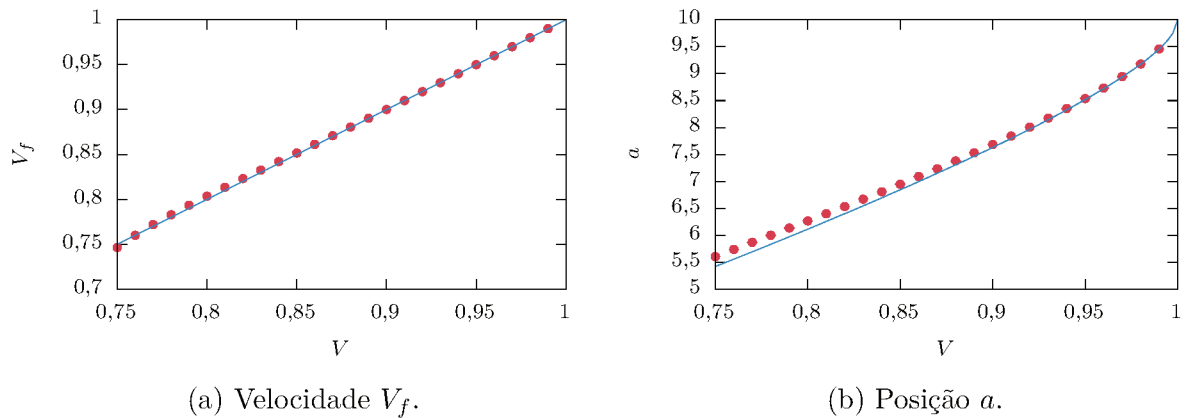


Figura 25 – Velocidade V_f e posição a do kink da direita resultante do espalhamento com velocidade inicial V . Os pontos correspondem aos dados obtidos do ajuste sobre os resultados numéricos e a linha sólida ao caso esperado de um espalhamento com interação mínima e sem emissão de radiação.

E_{kink} é a energia de um único kink ou anti-kink. Portanto, para casos nos quais a energia é maior que $4E_{\text{kink}}$, a configuração inicial possui energia o suficiente para permitir a formação de um novo par kink–anti-kink. Essa energia mínima corresponde a $V = \sqrt{3}/4 \approx 0,43$. Porém, isso não ocorre, e para todas as velocidades, o produto do espalhamento inclui apenas um par.

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos soluções dinâmicas de um modelo com potencial não-diferenciável em seus mínimos. Na maior parte nos restringimos a configurações do campo próximas ao primeiro mínimo, correspondentes ao modelo de signum-Gordon. Dentro deste limite, estudamos dois tipos de soluções: oscillons e ondas de choque. As soluções deste tipo são importantes porque aparecem frequentemente como ingredientes de radiação, sempre presente em modelos não integráveis. Elas também são universais no sentido que aparecem para vários modelos com potenciais não-diferenciáveis distintos, mas com o mesmo limite do potencial no regime de campos fracos (pequenas amplitudes em relação ao valor de vácuo). A universalidade dos oscillons torna-as ainda mais interessantes do ponto de vista físico. Observamos numericamente que os campos escalares podem emitir excesso de energia diretamente na forma de oscillons, ou via onda de choque que em seguida decai em uma sequência de oscillons.

Os oscillons do modelo de signum-Gordon já foram estudados por aproximadamente uma década. A forma mais geral conhecida hoje são oscillons descobertos por Z. Swierczynski. Eles englobam todos os outros classes de oscillons como seus casos particulares. Por outro lado, não se sabe se existem oscillons ainda mais gerais. Tal conhecimento seria extremamente útil ao analisar a radiação produzida em processos dinâmicos como espalhamento de kinks, relaxação de kink esticado, colisão de oscillons etc. Em particular, um par de oscillons menos gerais ao colidir pode ser convertido em oscillons com bordas curvas (HAHNE; KLIMAS; STREIBEL; ZAKRZEWSKI, 2020). Para obter a forma explícita de oscillons deste tipo precisamos construir um oscillon generalizado e realizar um boost de Lorentz. Neste trabalho conseguimos construir soluções analíticas de oscillons mais gerais do que as conhecidas anteriormente. Em particular, aplicamos o formalismo desenvolvido para obter o oscillon com a borda acelerada, que não havia sido apresentada anteriormente. Além disso, mostramos que, apesar do movimento das bordas, o momento linear total do oscillon é nulo. Ou seja, seu centro de momento não é alterado, apesar do movimento de seu suporte. Também mostramos que os oscillons possuem uma degenerescência na sua energia. Todos os oscillons do mesmo tamanho apresentam a mesma energia total, independente do movimento da borda. Essa degenerescência pode apontar para a existência de alguma simetria ainda desconhecida do modelo de signum-Gordon. Em particular, é desconhecida a simetria que esta por trás desta degenerescência. Suspeitamos que pode se uma simetria sobre difeomorfismos, no entanto o problema ainda não foi resolvido. Entender de modo mais profundo essa degenerescência permanece um problema em aberto e é uma possível ramificação deste trabalho.

Os resultados de estudos numéricos do espalhamento de oscillons motivou um estudo mais detalhado das soluções ondas de choque. Conseguimos analisar a dependência temporal da energia das regiões internas de uma onda de choque e mostrar que esta cresce

linearmente. Esse comportamento sugere que as frentes de onda agem como reservatórios de energia, sustentando o crescimento da onda. Para entender melhor esse processo, bem como o decaimento das quase-ondas de choque, apresentamos um *ansatz* para as quase-ondas de choque, no qual a delta de Dirac das condições iniciais foi substituída por uma função suave. Conseguimos, através de simulações numéricas reproduzir o comportamento das quase-ondas de choque provenientes de espalhamento, e através de cálculos analíticos, entender a dinâmica dos momentos iniciais da quase-onda de choque. Além disso, analisamos a dependência temporal da energia das regiões externas da quase-onda de choque. Observamos que essa energia é decrescente e conseguimos associar o decaimento da quase-onda de choque com o esgotamento da energia contida nas frentes de onda.

Por fim, retornamos ao modelo mais completo, com múltiplos vácuos. Mostramos que esse modelo possui soluções topológicas chamadas kinks e anti-kinks. Através de simulações numéricas de espalhamento, estudamos a dinâmica dessas soluções. Os resultados numéricos apresentaram um comportamento surpreendentemente simples. Para velocidades suficientemente altas o resultado do espalhamento é um novo par kink–anti-kink, com quantidades decrescentes de radiação conforme aumentamos a velocidade inicial. Além disso, os resultados variaram de modo contínuo com a velocidade. Não observamos nenhuma janela de velocidades com alterações drásticas ou caóticas nos resultados. Em particular, não observamos criação de novos pares mesmo quando a energia da configuração inicial era suficiente para isso acontecer.

Os resultados de espalhamento de kinks apresentados neste trabalho precisam ser entendidos melhor. Uma perspectiva futura inclui buscar respostas analíticas para a ausência de novos pares kink–anti-kink ou outros produtos mais complexos para o espalhamento. Em particular, gostaríamos de estudar espalhamento kink–oscillon. Sabe-se que os kinks esticados emitem excesso de energia na forma de oscillons. Seria interessante estudar como um kink BPS atingido por oscillon em movimento uniforme comporta-se depois de um tempo longo (excitações de modos vibracionais etc). A interação entre kinks e oscillons pode ser útil para o entendimento da existência de estados meta-estáveis de kink–antikink. Também seria interessante saber se comportamentos presentes em outros modelos (como a pressão negativa de radiação dos modelos ϕ^4 e ϕ^6) estão presentes nesse modelo.

De modo geral, este trabalho se restringiu a um modelo com potencial não-diferenciável em $1 + 1$ dimensões. No futuro seria interessante estudar essa classe de modelos em $2 + 1$ e $3 + 1$ dimensões ou modelos mais gerais com vários campos escalares, por exemplo modelos modificados CP^N .

REFERÊNCIAS

- ADAM, C.; FOSTER, D.; KRUSCH, S.; WERESZCZYNSKI, A. BPS sectors of the skyrme model and their non-BPS extensions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 3, fev. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 25.
- ADAM, C.; SÁNCHEZ-GUILLÉN, J.; WERESZCZYŃSKI, A. A skyrme-type proposal for baryonic matter. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 691, n. 2, p. 105–110, jul. 2010. Citado na página 17.
- ADAM, C.; SANCHEZ-GUILLEN, J.; WERESZCZYNSKI, A. BPS submodels of the skyrme model. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 769, p. 362–367, jun. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- ARODŹ, H. Topological compactons. *Acta Phys. Polon.*, B33, p. 1241–1252, 2002. Citado na página 17.
- ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Scaling, self-similar solutions and shock waves for v-shaped field potentials. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 73, p. 046609, abr. 2006. Citado na página 46.
- ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Signum-gordon wave equation and its self-similar solutions. 2007. Citado na página 57.
- ARODŹ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Compact oscillons in the signum-gordon model. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 4, fev. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.
- ARODŹ, H.; ŚWIERCZYŃSKI, Z. Swaying oscillons in the signum-gordon model. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 6, set. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.
- FLORATOS, I.; PIETTE, B. Multi-skyrmion solutions for the sixth order skyrme model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 64, p. 045009, Jul 2001. Citado na página 17.
- HAHNE, F. M.; KLIMAS, P.; STREIBEL, J. S.; ZAKRZEWSKI, W. J. Scattering of compact oscillons. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2020, n. 1, jan. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 75.
- JACKSON, A.; JACKSON, A.; GOLDHABER, A.; BROWN, G.; CASTILLEJO, L. A modified skyrmion. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 154, n. 2-3, p. 101–106, abr. 1985. Citado na página 17.

KLIMAS, P.; STREIBEL, J. S.; WERESZCZYNSKI, A.; ZAKRZEWSKI, W. J. Oscillons in a perturbed signum-gordon model. *Journal of High Energy Physics*, Springer Nature, v. 2018, n. 4, abr. 2018. Citado na página 17.

MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.

MARLEAU, L. Modifying the skyrme model: Pion mass and higher derivatives. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 43, p. 885–890, Feb 1991. Citado na página 17.

MARLEAU, L. All-orders skyrmions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 45, p. 1776–1781, Mar 1992. Citado na página 17.

NETO, J. A. A note on the skyrme model with higher derivative terms. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 20, n. 9, p. 1527–1530, sep 1994. Citado na página 17.

SKYRME, T. A unified field theory of mesons and baryons. *Nuclear Physics*, Elsevier BV, v. 31, p. 556–569, mar. 1962. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

ŚWIERCZYŃSKI, Z. On the oscillons in the signum-gordon model. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Informa UK Limited, v. 24, n. 1, p. 20–28, dez. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 33.