



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Ben Hur Eidt

**Sistemas Ramificados e Equivalência Unitária de  
Representações da Álgebra de Grafo**

Florianópolis

2020

Ben Hur Eidt

## **Sistemas Ramificados e Equivalência Unitária de Representações da Álgebra de Grafo**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Orientador: Prof. Dr. Danilo Royer.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Eidt, Ben Hur

Sistemas Ramificados e Equivalência Unitária de  
Representações da Álgebra de Grafo / Ben Hur Eidt ;  
orientador, Danilo Royer, 2020.

74 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebra de  
operadores. 3. C\*-álgebra de grafo. 4. Sistemas  
ramificados. 5. Equivalência Unitária. I. Royer, Danilo.  
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

BEN HUR EIDT

**Sistemas Ramificados e Equivalência Unitária de  
Representações da Álgebra de Grafo**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof<sup>a</sup>. Dra. Christina Brech  
Universidade de São Paulo.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves  
Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina.

Certificamos que essa é a versão **original e final do trabalho** de conclusão que foi julgada adequada para a obtenção do título de mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

---

Prof. Dr. Daniel Gonçalves  
Coordenador do Programa

---

Prof. Dr. Danilo Royer  
Orientador

Florianópolis, 2020.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a pessoa mais importante da minha vida, minha mãe Olga que, mesmo estando do outro lado do estado, estava presente nessa jornada. Obrigado por sempre me motivar a buscar estudo, sempre me proporcionar um amparo para tal e, acima de tudo, obrigado por ser meu exemplo. Essa dissertação também é sua!

À minha namorada, Fernanda, obrigado por todo o apoio nesses anos (nos quais estava sempre presente), pelo carinho com que me trata e pela alegria que transmite. O dia-a-dia é muito melhor com você ao meu lado!

À todos meus amigos de Itapiranga, em especial, ao Haimon, Luiz A, Luiz H, Nathana, Renan, William, Yuri cuja convivência ainda se preserva, desde o jardim. Sou muito grato pelas conversas, brincadeiras e por tudo que já fizemos juntos. Ao Haimon, novamente, e ao Bernardo agradeço pela convivência diária em Florianópolis. À Kelly, que desde o ensino fundamental mantém um laço de amizade sensacional comigo, obrigado pelas conversas e por todos os tererês.

À todos os colegas do mestrado e doutorado, em especial aos frequentadores da sala 205, pela convivência, por tornar o ambiente de pesquisa e estudo mais sóbrio, e pela fantástica experiência de discutir matemática com vocês. Certamente, nossos diálogos, dúvidas e esforços nos fizeram crescer como pessoas, estudantes e pesquisadores.

Aos meus companheiros de jornada acadêmica: ao Carlos, por conviver comigo durante 6 anos, por todos os conselhos, por todo o companheirismo e acima de tudo pela humanidade que demonstra! Ao Gabriel, por ser meu fiel companheiro para jogar uma bola, por ser uma excelente companhia para conversar sobre tudo e pela imensa humildade que tem! Ao Mateus, por estar sempre presente, pelos inúmeros almoços em que me fez companhia e pela sinceridade com que se porta! Estendo esse agradecimento a todos os amigos e colegas que conheci durante esses anos em Florianópolis! Obrigado pela companhia!

À todos os professores, que durante esses dois anos de mestrado, transmitiram parte de seu conhecimento, seja em matérias ou em conversas fora de sala. Em especial, ao Matheus, pelo espetacular curso de Medida e Integração!

À professora Dra. Christina e aos professores Dr. Daniel e Dr. Gilles por terem aceito o convite para comporem a banca. Obrigado por terem dedicado tempo lendo esse trabalho!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo Royer, pela paciência, pela clareza na hora das explicações, por confiar no meu trabalho e por todos os conselhos dados, acadêmicos ou não. Em particular, obrigado por ensinar o valor de um bom final de semana de descanso (de preferência com algumas cervejas, não é mesmo?).

Ao CNPq, pelo imprescindível suporte financeiro durante esses 2 anos.

*Ao meu pai João (in memoriam) e à minha mãe Olga.*

# Resumo

Nesse trabalho estudaremos representações da  $C^*$ -álgebra de grafo; num primeiro instante introduziremos a noção de  $E$ -sistema ramificado e veremos como tal estrutura induz uma representação da álgebra de grafo  $C^*(E)$ . Posteriormente daremos condições suficientes sobre um grafo  $E$  para que exista um  $E$ -sistema ramificado e veremos algumas consequências desse resultado. Em seguida, dado um grafo  $E$  e uma representação qualquer de  $C^*(E)$ , encontraremos condições para que tal representação seja unitariamente equivalente a uma representação induzida por um  $E$ -sistema ramificado. Finalizaremos encontrando uma classe de grafos para os quais sempre valem as condições citadas acima; o que significa que dada uma representação qualquer,  $\varphi$  de tais grafos, é possível encontrar uma representação  $\pi$ , induzida por um sistema ramificado, de modo que  $\varphi$  e  $\pi$  sejam unitariamente equivalentes.

**Palavras-chave:**  $C^*$ -álgebra de grafo, teoria de representações,  $E$ -sistemas ramificados, equivalência unitária.

# Abstract

In this work we study representations of the graph  $C^*$ -algebra. In a first moment we introduce the notion of a  $E$ -branching system and show how this structure induces a representation of the graph algebra  $C^*(E)$ . Moreover, we show sufficient conditions over the graph  $E$  so that there exists an  $E$ -branching system and show some consequences. After, given a graph  $E$  and a arbitrary representation of  $C^*(E)$ , we find technical conditions so that the representation is unitary equivalent to a representation arising from a  $E$ -branching system. Finally, we show a class of graphs for which the technical conditions are always true. This means that given a representation  $\varphi$  of one of these graphs  $C^*$ -algebras it is possible to find a representation  $\pi$ , arising from a branching system, such that  $\varphi$  and  $\pi$  are unitarily equivalent.

**Key-words:** Graph  $C^*$ -algebra, representation theory,  $E$ -branching systems, unitary equivalence.



# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>SISTEMAS RAMIFICADOS</b>	<b>12</b>
1.1	Representações através de sistemas ramificados	12
1.2	Existência de sistemas ramificados	21
1.3	Algumas consequências	28
<b>2</b>	<b>EQUIVALÊNCIA UNITÁRIA</b>	<b>34</b>
2.1	A condição (BPB)	34
2.2	Adjacência, conexidade e níveis	46
2.3	Representações de grafos $P$ -simples	54
2.4	Exemplos e contra-exemplos	62
<b>3</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>TÓPICOS DE MEDIDA E INTEGRAÇÃO</b>	<b>70</b>
A.1	Mudança de Variável e Radon-Nikodym	70
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>74</b>

# Introdução

Nesse trabalho, a palavra grafo significará sempre um grafo dirigido, ou seja, uma quádrupla  $(E^0, E^1, r, s) =: E$  onde  $E^0$  é um conjunto cujos elementos são chamados de vértices,  $E^1$  é um conjunto cujos elementos são chamados de arestas e  $r : E^1 \rightarrow E^0$ ,  $s : E^1 \rightarrow E^0$  são funções chamadas, respectivamente, de range e source.

A primeira definição da álgebra de grafo,  $C^*(E)$ , surgiu no artigo (KUMJIAN et al., 1997) e foi precedida por trabalhos como (KUMJIAN; PASK; RAEBURN, 1998). Nesses trabalhos, havia a suposição de que o grafo em questão seja enumerável, ou seja,  $E^0$  e  $E^1$  são enumeráveis. Além disso, não era permitida a existência de poços (ou seja, vértices que não emitem arestas) e para provar vários teoremas considerava-se que o grafo possua linhas finitas, ou seja, que  $s^{-1}(v)$  é finito para cada  $v \in E^0$ .

Seguindo (RAEBURN, 2005), a  $C^*$ -álgebra do grafo  $E$ , denotada por  $C^*(E)$ , é a  $C^*$ -álgebra universal gerada pelo conjunto de geradores  $G = \{P_v\}_{v \in E^0} \cup \{S_e\}_{e \in E^1}$  satisfazendo as relações:  $\{P_v\}_{v \in E^0}$  é uma família de projeções mutuamente ortogonais,  $\{S_e\}_{e \in E^1}$  é uma família de isometrias parciais com imagens mutuamente ortogonais, e

$$(CK1) \quad S_e^* S_e = P_{r(e)} \quad \forall e \in E^1.$$

$$(CK2) \quad P_{s(e)} S_e S_e^* = S_e S_e^* \quad \forall e \in E^1.$$

$$(CK3) \quad P_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} S_e S_e^* \quad \text{sempre que } v \in E^0 \text{ for tal que } 0 < \#s^{-1}(v) < \infty.$$

Uma representação de uma  $C^*$ -álgebra  $A$  é um par  $(B, \varphi)$  onde  $B$  é uma  $C^*$ -álgebra e  $\varphi : A \rightarrow B$  é um  $*$ -homomorfismo. No geral, encontrar representações de  $C^*$ -álgebras é uma tarefa complicada, um resultado clássico nesse sentido é o Teorema de Gelfand-Naimark, que pode ser encontrado, por exemplo, em (MURPHY, 2014).

Essa dissertação está baseada em dois artigos publicados em 2011 e 2012, a saber: (GONÇALVES; ROYER, 2012) e (GONÇALVES; ROYER, 2011); neles foi definida uma estrutura chamada de  $E$ -sistema ramificado, tal definição tem como parte de sua motivação o trabalho realizado em (KAWAMURA, 2005). Os autores mostraram que a partir de um  $E$ -sistema ramificado é possível obter uma representação da álgebra de grafo  $C^*(E)$  e provaram que várias representações da álgebra de grafo são unitariamente equivalentes a tais representações. Apresentaremos aqui os conceitos e ideias que surgiram em tais artigos e generalizaremos alguns resultados presentes nos mesmos. Na dissertação (MOREIRA, 2019) alguns resultados já foram generalizados no contexto algébrico; nesse trabalho abordaremos, além do contexto algébrico, o contexto analítico e a partir de ambos obteremos os resultados desejados.

A parte central do trabalho está dividida em dois capítulos, sendo que o primeiro possui três seções e o segundo quatro seções. Além disso, temos um apêndice contendo alguns resultados de teoria da medida que serão auxiliares em nossas demonstrações .

Quanto ao primeiro capítulo, na primeira seção apresentaremos a definição de um  $E$ -sistema ramificado e mostraremos como a existência de tal estrutura nos permite construir uma representação da álgebra de grafo  $C^*(E)$ ; na segunda seção nos preocuparemos com a existência de  $E$ -sistemas ramificados e apresentaremos condições suficientes que os mesmos existam; a terceira e última seção apresenta várias consequências das seções anteriores.

Quanto ao segundo capítulo, em sua primeira seção apresentaremos uma condição suficiente para que qualquer representação de uma álgebra de grafo seja unitariamente equivalente a uma representação induzida por um  $E$ -sistema ramificado. A segunda seção introduzirá novos conceitos e linguagens imprescindíveis para o que segue, a terceira seção mostrará uma classe de grafos para os quais sempre valem as condições que garantem a equivalência unitária e portanto faz uma conexão direta com a primeira seção do segundo capítulo. Na quarta e última seção, apresentaremos uma série de exemplos e contra-exemplos relacionados a teoria desenvolvida.

As referências (BIAZOTTO, 2012) e (FOWLER; LACA; RAEBURN, 2000) contém importantes resultados sobre a  $C^*$ -álgebra de grafo, alguns deles serão explicitamente mencionados nesse trabalho; já as referências (RUDIN, 1987), (FERNANDEZ, 1976), (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012), (KREYSZIG, 1978), (MURPHY, 2014) e (RAEBURN, 2005) estão relacionadas a teoria da medida, análise funcional,  $C^*$ -álgebras e teoria inicial de álgebras de grafo, assuntos os quais são pré-requisitos sugeridos para a leitura.

# 1 Sistemas ramificados

## 1.1 Representações através de sistemas ramificados

Nessa seção falaremos sobre  $E$ -sistemas ramificados, onde  $E$  é um grafo; mais especificamente, veremos como tais estruturas nos permitem construir uma representação da álgebra  $C^*(E)$ . Começaremos definindo a noção de um  $E$ -sistema ramificado e dando alguns exemplos. Posteriormente, demonstraremos alguns resultados preliminares que irão auxiliar na construção da futura representação e por fim mostraremos como tal representação é obtida, resultado esse que certamente é o principal dessa seção.

No decorrer desse capítulo, dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e dados  $A, B \in \mathcal{M}$ ; a notação  $A \stackrel{\mu-a.e.}{\subseteq} B$  significa que  $\mu(A - B) = 0$ ; a notação  $A \stackrel{\mu-a.e.}{=} B$  significa que  $\mu(A - B) = 0 = \mu(B - A)$ . Além disso, dadas duas funções mensuráveis  $f, g : A \rightarrow X$  a notação  $f \stackrel{\mu-a.e.}{=} g$  significa que  $\mu(\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ .

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo,  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $\{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}$  famílias de subconjuntos mensuráveis de  $X$  tais que:*

1.  $R_e \cap R_f \stackrel{\mu-a.e.}{=} \emptyset, \forall e, f \in E^1$  tais que  $e \neq f$ .
2.  $D_v \cap D_w \stackrel{\mu-a.e.}{=} \emptyset, \forall v, w \in E^0$  tais que  $v \neq w$ .
3.  $R_e \stackrel{\mu-a.e.}{\subseteq} D_{s(e)}, \forall e \in E^1$ .
4.  $D_v \stackrel{\mu-a.e.}{=} \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e, \forall v \in E^0$  tal que  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$ .
5. Para cada  $e \in E^1$  existem funções  $f_e : D_{r(e)} \rightarrow R_e, f_e^{-1} : R_e \rightarrow D_{r(e)}$ , ambas mensuráveis e tais que  $f_e(D_{r(e)}) \stackrel{\mu-a.e.}{=} R_e, f_e^{-1} \circ f_e \stackrel{\mu-a.e.}{=} Id_{D_{r(e)}}$  e  $f_e \circ f_e^{-1} \stackrel{\mu-a.e.}{=} Id_{R_e}$ .
6. Para cada  $e \in E^1$  existem derivadas de Radon-Nikodym  $\frac{d\mu \circ f_e}{d\mu}$  e  $\frac{d\mu \circ f_e^{-1}}{d\mu}$ , denotadas respectivamente por  $\Phi_{f_e}$  e  $\Phi_{f_e^{-1}}$ . Além disso,

$$(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 1 = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}} \quad \mu - a.e.$$

O espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , com as famílias  $\{R_e\}_{e \in E^1}, \{D_v\}_{v \in E^0}$  e as funções  $f_e, f_e^{-1}, \Phi_{f_e}, \Phi_{f_e^{-1}}$ , satisfazendo os 6 itens acima, é conhecido como um  **$E$ -sistema ramificado**.

**Observação 1.1.2.** *Em  $D_{r(e)}$  e  $R_e$  estamos considerando as  $\sigma$ -álgebras induzidas  $\mathcal{M}_{D_{r(e)}}$  e  $\mathcal{M}_{R_e}$ , respectivamente (veja o primeiro parágrafo do Apêndice para a definição das mesmas). Como o domínio da função  $f_e$  é o conjunto  $D_{r(e)}$ , o domínio de  $\Phi_{f_e}$  é também*

$D_{r(e)}$ . Apesar disso, iremos considerar também  $\Phi_{f_e}$  como uma função definida em  $X$ , definindo seu valor como 0 para todo  $x \in X \setminus D_{r(e)}$ . Tal função continua sendo mensurável (Proposição A.1.1). O mesmo vale para  $\Phi_{f_e^{-1}}$ .

**Observação 1.1.3.** Em geral, a derivada de Radon-Nikodym, caso exista, não é única. Note que para a definição de um sistema ramificado estamos pedindo que existam derivadas de Radon-Nikodym de  $\mu \circ f_e$  e de  $\mu \circ f_e^{-1}$  (ambas com respeito a  $\mu$ ) tais que  $(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 1 = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}$   $\mu - a.e.$  Não nos interessam as demais derivadas, apenas aquelas escolhida na definição. A igualdade mencionada a pouco garante que  $\Phi_{f_e} > 0$  e  $\Phi_{f_e^{-1}} > 0$   $\mu - a.e.$

**Exemplo 1.1.4.** Considere o grafo  $E$  a seguir.



Seja  $X$  um conjunto não vazio e considere o espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  onde  $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$  e  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(X) = \infty$ . Defina  $R_e = X$  e  $D_v = X$ , com tais escolhas nota-se rapidamente que os quatro primeiros itens da definição acima são satisfeitos. Defina  $f_e : D_{r(e)} = X \rightarrow R_e = X$  por  $f_e(x) = x$  e  $f_e^{-1}$  como sua inversa, que é a própria  $f_e$ ; é claro que o quinto item é satisfeito dessa maneira pois  $f_e^{-1}(X) = X$  e  $f_e^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . Para a sexta condição, note que a função  $\Phi_{f_e} : X \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\Phi_{f_e}(x) = 1$  para todo  $x \in X$  é uma derivada de Radon-Nikodym de  $\mu \circ f_e$  e também de  $\mu \circ f_e^{-1} = \mu \circ f_e$  (ambas com respeito a  $\mu$ ). Como  $\Phi_{f_e^{-1}}(x) = 1 = \Phi_{f_e}(x)$  temos  $(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 1 = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}$   $\mu - a.e.$  Assim, a sexta condição é satisfeita. Concluímos então que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  com as escolhas de famílias e funções feitas acima é um  $E$ -sistema ramificado.

Note que no exemplo acima a derivada de Radon-Nikodym não é única. Com efeito, a função  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $F(x) = 3$  também é uma derivada de Radon-Nikodym de  $\mu \circ f_e$  e  $\mu \circ f_e^{-1}$  com respeito a  $\mu$ . Se tivéssemos escolhido  $\Phi_{f_e} = F = \Phi_{f_e^{-1}}$  teríamos  $(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 9$  e assim não teríamos um  $E$ -sistema ramificado.

De maneira geral, provar na força bruta que a igualdade

$$(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 1 = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}} \quad \mu - a.e$$

ocorre é complicado, grande parte dessa complicação vem do fato de que dificilmente somos capazes de explicitar alguma derivada de Radon-Nikodym. Felizmente, algumas hipóteses adicionais sobre o espaço de medida simplificam nossas verificações.

**Lema 1.1.5.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida. Suponha que as condições de 1 a 5 da Definição 1.1.1 sejam satisfeitas e que existam  $\Phi_{f_e}$  e  $\Phi_{f_e}^{-1}$ . Se para cada  $e \in E^1$  vale que  $\mu : D_{r(e)} \rightarrow [0, \infty]$  e  $\mu : R_e \rightarrow [0, \infty]$  são semi-finitas<sup>1</sup> então  $(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} = 1 = (\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}}$   $\mu - a.e.$  Em particular, nessas condições temos um  $E$ -sistema ramificado.*

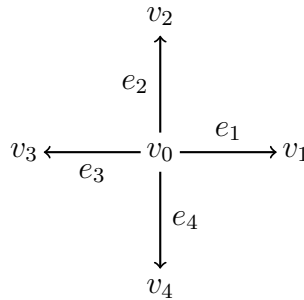
*Demonstração.* Se  $E \in \mathcal{M}_{D_{r(e)}}$  então:

$$\begin{aligned} \int_E (\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} \, d\mu &= \int_{D_{r(e)}} \chi_E \cdot (\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} \, d\mu = \\ &\stackrel{A.1.12}{=} \int_{D_{r(e)}} \chi_E \cdot (\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \, d(\mu \circ f_e) \stackrel{A.1.9}{=} \int_{R_e} (\chi_E \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}} \, d\mu = \\ &\stackrel{A.1.12}{=} \int_{R_e} (\chi_E \circ f_e^{-1}) \, d(\mu \circ f_e^{-1}) \stackrel{A.1.9}{=} \int_{D_{r(e)}} \chi_E \, d\mu = \int_E 1 \, d\mu. \end{aligned}$$

Pelo Teorema A.1.6 temos  $(\Phi_{f_e^{-1}} \circ f_e) \cdot \Phi_{f_e} \stackrel{\mu - a.e.}{=} 1$ . Um argumento análogo demonstra que  $(\Phi_{f_e} \circ f_e^{-1}) \cdot \Phi_{f_e^{-1}} = 1$   $\mu - a.e.$   $\square$

O lema acima nos fornece a verificação de parte do sexto item da Definição 1.1.1 desde que a medida com a qual trabalhamos seja semi-finita. Tal lema encurtará muitos argumentos futuros.

**Exemplo 1.1.6.** *Considere o grafo  $E$  a seguir.*



Vamos construir um  $E$ -sistema ramificado. Considere  $X = (0, 8)$ ,  $\mathcal{M}$  como sendo a  $\sigma$ -álgebra dos Borelianos e  $m$  a medida de Lebesgue. Defina  $D_{v_0} = (4, 8)$ . Além disso, para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  defina  $D_{v_i} = (i - 1, i)$  e  $R_{e_i} = (i + 3, i + 4)$ .

Claramente as condições 1 e 2 da definição 1.1.1 são satisfeitas. Também, para toda aresta  $e_i$ , temos que  $s(e_i) = v_0$ . Portanto, as continências  $(4, 5) \subseteq (4, 8)$ ,  $(5, 6) \subseteq (4, 8)$ ,  $(6, 7) \subseteq (4, 8)$ ,  $(7, 8) \subseteq (4, 8)$  garantem que a terceira condição da mesma definição é

<sup>1</sup> Veja a Definição A.1.2.

satisfeita. Agora, o único vértice,  $v$ , do grafo acima que satisfaz  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  é  $v = v_0$  e nesse caso  $s^{-1}(v_0) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Sendo assim, a igualdade

$$\bigcup_{e \in s^{-1}(v_0)} R_e = (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, 7) \cup (7, 8) \stackrel{m^{-a.e}}{=} (4, 8) = D_{v_0}$$

mostra que a quarta condição é satisfeita.

Dada uma aresta  $e_i$ , defina  $f_{e_i} : D_{r(e_i)} \rightarrow R_{e_i}$  como sendo o homeomorfismo linear crescente entre tais intervalos<sup>2</sup>. Desse modo, escolhendo  $f_{e_i}^{-1}$  como sendo a inversa de  $f_{e_i}$  e lembrando que toda função contínua é Borel-mensurável, o quinto item é satisfeito.

Note que  $f_{e_i}$  é uma translação (e assim  $f_{e_i}^{-1}$  também é). Pela invariância por translação da medida de Lebesgue, segue que  $m(f_{e_i}(A)) = m(A)$  para todo  $A \in \mathcal{M}_{D_{r(e_i)}}$ . Em particular, se  $m(A) = 0$  então  $m(f_{e_i}(A)) = 0$  o que mostra que  $m \circ f_{e_i} \ll m$ . Como  $m$  e  $m \circ f_{e_i}$  são  $\sigma$ -finitas segue do Teorema de Radon-Nikodym (Teorema A.1.12) que existe a derivada de Radon-Nikodym,  $\frac{d(m \circ f_{e_i})}{dm} = \Phi_{f_{e_i}}$ . Analogamente, existe também  $\frac{d(m \circ f_{e_i}^{-1})}{dm} = \Phi_{f_{e_i}^{-1}}$ . Como toda medida  $\sigma$ -finita é semi-finita (veja A.1.4) segue do Lema 1.1.5 que a sexta condição é satisfeita e portanto temos um  $E$ -sistema ramificado.

**Exemplo 1.1.7.** Considere o grafo  $E$  a seguir

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_4} \dots$$

Considere o espaço de medida  $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$  onde  $\mathcal{M}$  é a  $\sigma$ -álgebra dos Borelianos e  $m$  é a medida de Lebesgue. Defina para cada  $i = 0, 1, 2, \dots$  os conjuntos  $D_{v_i} = [i, i + 1]$  e para cada  $i \in \mathbb{N}$  os conjuntos  $R_{e_i} = [i - 1, i]$  (note que todos esses conjuntos são mensuráveis). É claro que as condições 1 e 2 da Definição 1.1.1 são satisfeitas, além disso, as igualdades

$$R_{e_i} = [i - 1, i] = D_{v_{i-1}} = D_{s(e_i)} \text{ e } D_{v_i} = [i, i + 1] = R_{e_{i+1}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_i)} R_e$$

verificam as condições 3 e 4. Defina  $f_{e_i} : D_{r(e_i)} \rightarrow R_{e_i}$  dada por  $f_{e_i}(x) = x - 1$ , se  $f_{e_i}^{-1}$  denota sua inversa então segue que o quinto item é satisfeito (ambas as funções são contínuas, logo, mensuráveis). Como  $f_{e_i}$  é uma translação e  $m$  é  $\sigma$ -finita podemos repetir o argumento feito no exemplo anterior para concluir que o sexto e último item é satisfeito. Nesse exemplo, bem como no exemplo anterior, notamos que  $\Phi_{f_e} = 1 = \Phi_{f_e^{-1}}$ .

Dado um grafo  $E$ , suponha que exista um  $E$ -sistema ramificado o qual denotaremos por  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . A partir de agora até o final da seção, a menos que se diga o contrário,  $E$  e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  estão fixados. A construção que iniciaremos tem como objetivo a demonstração da existência de uma representação da  $C^*$ -álgebra  $C^*(E)$ . Para cada  $e \in E^1$  definimos

<sup>2</sup> ou seja, o homeomorfismo  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  dado por  $f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$ .

$\pi(e)$  como o operador que associa a cada  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  a função  $\pi(e)(\phi)$  que é dada por:

$$(\pi(e)(\phi))(x) = \begin{cases} \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(x) \cdot (\phi \circ f_e^{-1})(x) & \text{se } x \in R_e. \\ 0 & \text{se } x \notin R_e. \end{cases}$$

Note que  $f_e^{-1}$  está definida apenas em  $R_e$ , apesar disso, com intuito de simplificar a notação, iremos realizar um pequeno abuso e escrever

$$\pi(e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}).$$

**Proposição 1.1.8.** *Se  $e \in E^1$  então  $\pi(e) \in B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$ .*

*Demonstração. Afirmação 1:* Para todo  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos  $\pi(e)(\phi) \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ .

Dado  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos:

$$\begin{aligned} \int_X |\pi(e)(\phi)|^2 d\mu &= \int_{R_e} \Phi_{f_e^{-1}} \cdot |\phi \circ f_e^{-1}|^2 d\mu \\ &\stackrel{A.1.12}{=} \int_{R_e} |\phi \circ f_e^{-1}|^2 d(\mu \circ f_e^{-1}) \\ &\stackrel{A.1.9}{=} \int_{D_{r(e)}} |\phi \circ f_e^{-1}|^2 \circ f_e d\mu \\ &= \int_{D_{r(e)}} |\phi|^2 d\mu \leq \|\phi\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

*Afirmação 2:* Dado  $e \in E^1$ ,  $\pi(e)$  é um operador linear e limitado.

A conta feita na afirmação acima garante que  $\|\pi(e)(\phi)\|^2 \leq \|\phi\|^2$  o que significa que o operador  $\pi(e)$  é limitado. Além disso, dados  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos:

$$\begin{aligned} \pi(e)(\lambda\phi + \psi) &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot ((\lambda\phi + \psi) \circ f_e^{-1}) \\ &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\lambda\phi \circ f_e^{-1} + \psi \circ f_e^{-1}) \\ &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\lambda\phi \circ f_e^{-1}) + \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\psi \circ f_e^{-1}) \\ &= \lambda\pi(e)(\phi) + \pi(e)(\psi). \end{aligned}$$

o que mostra a linearidade de  $\pi(e)$  e completa a demonstração.  $\square$

**Proposição 1.1.9.** *Se  $e \in E^1$  então  $\pi(e)^*(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e) \quad \forall \phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ , onde usamos o mesmo abuso de notação feito para  $\pi(e)(\phi)$ .*

*Demonstração.* Defina  $F_e : L^2(X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  dado por

$$F_e(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e).$$



Imitando o argumento usado na proposição anterior verifica-se que  $F_e$  é de fato linear e  $F_e(\phi) \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  para qualquer  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Vamos mostrar que  $F_e = \pi(e)^*$ . Suponha, num primeiro momento, que  $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \pi(e)(\phi), \psi \rangle &= \int \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \cdot \bar{\psi} \, d\mu \\
&= \int_{R_e} \Phi_{f_e^{-1}} \cdot \underbrace{\Phi_{f_e^{-1}}^{-\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})}_{\in L^+} \cdot \bar{\psi} \, d\mu \\
&\stackrel{A.1.12}{=} \int_{R_e} \underbrace{\Phi_{f_e^{-1}}^{-\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})}_{\in L^+} \cdot \bar{\psi} \, d(\mu \circ f_e^{-1}) \\
&\stackrel{A.1.9}{=} \int_{D_r(e)} (\Phi_{f_e^{-1}}^{-\frac{1}{2}} \circ f_e) \cdot (\bar{\psi} \circ f_e) \cdot \phi \, d\mu \\
&= \int \chi_{D_r(e)} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\bar{\psi} \circ f_e) \cdot \phi \, d\mu = \langle \phi, F_e(\psi) \rangle.
\end{aligned}$$

Suponha agora que  $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  são funções reais; escrevendo-as como a diferença entre suas partes positivas e negativas (as quais estão em  $L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ ) temos:  $\phi = \phi^+ - \phi^-$  e  $\psi = \psi^+ - \psi^-$ , de modo que:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(e)(\phi), \psi \rangle &= \langle \pi(e)(\phi^+) - \pi(e)(\phi^-), \psi^+ - \psi^- \rangle \\
&= \langle \pi(e)(\phi^+), \psi^+ \rangle - \langle \pi(e)(\phi^+), \psi^- \rangle - \langle \pi(e)(\phi^-), \psi^+ \rangle + \langle \pi(e)(\phi^-), \psi^- \rangle \\
&= \langle \phi^+, F_e(\psi^+) \rangle - \langle \phi^+, F_e(\psi^-) \rangle - \langle \phi^-, F_e(\psi^+) \rangle + \langle \phi^-, F_e(\psi^-) \rangle \\
&= \langle \phi^+, F_e(\psi^+ - \psi^-) \rangle - \langle \phi^-, F_e(\psi^+ - \psi^-) \rangle = \langle \phi, F_e(\psi) \rangle.
\end{aligned}$$

Por fim, o resultado estende-se para funções  $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  quaisquer expressando-as como soma de suas partes real e imaginária e repetindo o argumento feito acima com propriedades do produto interno. Segue que  $F_e = \pi(e)^*$  como queríamos.  $\square$

Faremos agora um processo análogo para cada  $v \in E^0$ . Dado  $v \in E^0$  considere o operador  $\pi(v)$  definido em  $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  e dado por  $\pi(v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi$  ( $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ ).

**Proposição 1.1.10.** *Se  $v \in E^0$  então  $\forall \phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos  $\pi(v)(\phi) \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $\pi(v) = \pi(v)^*$ .*

*Demonstração.* Dado  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos:

$$\int |\pi(v) \cdot \phi|^2 \, d\mu = \int \chi_{D_v}^2 \cdot |\phi|^2 \, d\mu = \int_{D_v} |\phi|^2 \, d\mu \leq \|\phi\|^2$$

mostrando que  $\pi(v)(\phi) \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Além disso,

$$\pi(v)(\lambda\phi + \psi) = \chi_{D_v} \cdot (\lambda\phi + \psi) = \lambda\chi_{D_v} \cdot \phi + \chi_{D_v} \cdot \psi = \lambda\pi(v)(\phi) + \pi(v)(\psi)$$

mostrando que  $\pi(v)$  é linear; assim  $\pi(v) \in B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$ . Se  $\phi, \psi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos

$$\langle \pi(v)(\phi), \psi \rangle = \langle \chi_{D_v} \cdot \phi, \psi \rangle = \int \chi_{D_v} \cdot \phi \cdot \bar{\psi} \, d\mu = \int \phi \cdot \chi_{D_v} \cdot \bar{\psi} \, d\mu = \langle \phi, \pi(v)(\psi) \rangle.$$

Portanto  $\pi(v) = \pi(v)^*$ .  $\square$

Finalmente, vamos construir a representação que mencionamos no início do capítulo.

**Teorema 1.1.11.** *Existe um  $*$ -homorfismo,  $\Pi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$  tal que:*

$$\Pi(S_e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \quad e \quad \Pi(P_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi$$

para todos  $e \in E^1$ ,  $v \in E^0$  e para qualquer  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ .

*Demonstração.* Nosso objetivo será criar uma representação do conjunto de geradores de  $C^*(E)$  para posteriormente usar a propriedade universal da álgebra de grafo<sup>3</sup> e obter uma representação de  $C^*(E)$ . Se  $G$  é o conjunto de geradores de  $C^*(E)$  temos  $G = \{s_e\}_{e \in E^1} \cup \{p_v\}_{v \in E^0}$ ; defina  $\rho : G \rightarrow B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$  dado por:

$$\rho(s_e) = \pi(e) \text{ e } \rho(p_v) = \pi(v)$$

Note que  $\rho$  está bem definida devido as Proposições 1.1.8 e 1.1.10. Vamos verificar que  $\rho$  satisfaz as relações que definem  $C^*(E)$ , dado  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  temos:

- $\rho(p_v)^2(\phi) = \pi(v)^2(\phi) = \pi(v)(\chi_{D_v} \cdot \phi) = \chi_{D_v}^2 \cdot \phi = \chi_{D_v} \cdot \phi = \rho(p_v)(\phi)$ .
- $\rho(p_v)^*(\phi) = \pi(v)(\phi) \stackrel{1.1.10}{=} \pi(v)^*(\phi) = \rho(p_v)(\phi)$ .
- Se  $v \neq w$  então  $\rho(p_v)\rho(p_w)(\phi) = \rho(p_v)(\chi_{D_w} \cdot \phi) = \chi_{D_v \cap D_w} \cdot \phi \stackrel{1.1.1}{=} 0$ .

Isso mostra que  $\{\rho(p_v)\}_{v \in E^0}$  é uma família de **projeções mutuamente ortogonais**.

Além disso, note que se  $\phi \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$  então:

$$\begin{aligned} \rho(s_e)^* \rho(s_e)(\phi) &= \pi(e)^* \pi(e)(\phi) = \pi(e)^*(\chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \\ &= \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot ((\chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1})) \circ f_e) \\ &= \chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\chi_{R_e} \circ f_e) \cdot (\Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \circ f_e) \cdot \phi \\ &= \chi_{D_{r(e)}} \cdot \chi_{f_e^{-1}(R_e)} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \circ f_e) \cdot \phi \\ &= \chi_{D_{r(e)}} \cdot \phi. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Veja (BLAZOTTO, 2012, pg. 147), Teorema B.1.15.

De maneira similar temos:

$$\begin{aligned}
 \rho(s_e)\rho(s_e)^*(\phi) &= \pi(e)\pi(e)^*(\phi) = \pi(e)(\chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e)) \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot ((\chi_{D_{r(e)}} \cdot \Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e)) \circ f_e^{-1}) \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\chi_{D_{r(e)}} \circ f_e^{-1}) \cdot (\Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \circ f_e^{-1}) \cdot \phi \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \chi_{f_e(D_{r(e)})} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\Phi_{f_e}^{\frac{1}{2}} \circ f_e^{-1}) \cdot \phi \\
 &\stackrel{1.1.5}{=} \chi_{R_e} \cdot \phi.
 \end{aligned}$$

Usando o que foi feito acima concluímos que:

$$\begin{aligned}
 \rho(s_e)\rho(s_e)^*\rho(s_e)(\phi) &= \rho(s_e)\rho(s_e)^*(\pi(e)(\phi)) \\
 &= \chi_{R_e} \cdot \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \\
 &= \pi(e)(\phi) = \rho(s_e)(\phi)
 \end{aligned}$$

e se  $e \neq f$  temos

$$\rho(s_e)\rho(s_e)^*\rho(s_f)\rho(s_f)^*(\phi) = \rho(s_e)\rho(s_e)(\chi_{R_f} \cdot \phi) = \chi_{R_e \cap R_f} \cdot \phi \stackrel{1.1.1}{=} 0$$

mostrando que a família  $\{s_e\}_{e \in E^1}$  é uma família de **isometrias com imagens mutuamente ortogonais**. Além disso, pelas igualdades acima obtidas concluímos que:

$$\rho(s_e)^*\rho(s_e)(\phi) = \chi_{D_{r(e)}} \cdot \phi = \pi(r(e)) \cdot \phi = \rho(p_{r(e)})(\phi). \quad \text{(CK1)}$$

$$\begin{aligned}
 \rho(p_{s(e)})\rho(s_e)\rho(s_e)^*(\phi) &= \pi(s(e))\pi(e)\pi(e)^*(\phi) \\
 &= \pi(s(e))(\chi_{R_e} \cdot \phi) \\
 &= \chi_{D_{s(e)}} \cdot \chi_{R_e} \cdot \phi \\
 &= \chi_{D_{s(e)} \cap R_e} \cdot \phi \\
 &\stackrel{1.1.1}{=} \chi_{R_e} \cdot \phi = \rho(s_e)\rho(s_e)^*(\phi). \quad \text{(CK2)}
 \end{aligned}$$

Resta-nos a verificação de **(CK3)**. Para tanto, se  $v \in E^0$  é tal que  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  precisamos mostrar que  $\sum_{e \in s^{-1}(v)} \rho(s_e)\rho(s_e)^* = \rho(p_v)$ , ou seja,  $\sum_{e \in s^{-1}(v)} \pi(e)\pi(e)^* = \pi(v)$ .

Pelo item 4 da Definição 1.1.1 temos  $D_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$  e pelo item 2 da mesma definição

temos  $R_e \cap R_f \stackrel{\mu^{-a,e}}{=} \emptyset$  desde que  $e \neq f$ ; desse modo

$$\chi_{D_v} = \chi_{\bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e} = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \chi_{R_e}.$$

Juntando a igualdade acima com algumas identidades ja vistas no decorrer da demonstração temos:

$$\sum_{e \in s^{-1}(v)} \pi(e)\pi(e)^*(\phi) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \chi_{R_e} \cdot \phi = \chi_{D_v} \cdot \phi = \pi(v)(\phi). \quad \text{(CK3)}$$

Pela propriedade universal de  $C^*(E)$  existe um  $*$ -homomorfismo,  $\Pi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$  tal que  $\Pi(S_e) = \rho(s_e) = \pi(e)$  e  $\Pi(p_v) = \rho(p_v) = \pi(v)$ . Portanto:

$$\Pi(S_e)(\phi) = \pi(e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \quad \text{e} \quad \Pi(P_v)(\phi) = \pi(v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi. \quad \square$$

**Observação 1.1.12.** *A partir de agora, denotaremos a representação  $\Pi$  obtida no teorema acima por  $\pi$ . Diremos também que  $\pi$  é uma representação de  $E$  induzida por um  $E$ -sistema ramificado; note que tal representação depende de um sistema ramificado pré-fixado.*

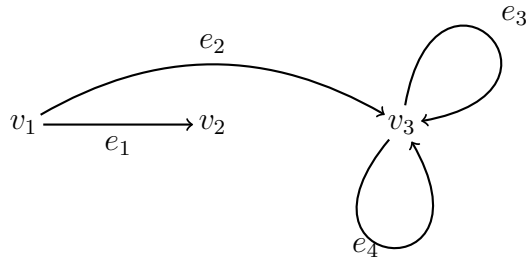
Em alguns casos, podemos entender muito bem como  $\pi$  se comporta. Considere o Exemplo 1.1.7, pelo Teorema 1.1.11 sabemos que:

$$\pi(S_{e_i})(\phi) = \chi_{R_{e_i}} \cdot \Phi_{f_{e_i}^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi \circ f_{e_i}^{-1}) = \chi_{R_{e_i}} \cdot (\phi \circ f_{e_i}^{-1}) \quad \text{e} \quad \pi(P_{v_i})(\phi) = \chi_{D_{v_i}} \cdot \phi$$

de modo que, dado  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\pi(S_{e_i})(\phi)(x) = \chi_{[i-1, i]}(x) \cdot \phi(x+1) \quad \text{e} \quad \pi(P_{v_i})(\phi)(x) = \chi_{[i, i+1]}(x) \cdot \phi(x+1).$$

**Exemplo 1.1.13.** *Considere o grafo a seguir.*



Além disso, considere espaço de medida  $(X, \mathcal{M}, m)$  onde  $X = [-1, 4]$ ,  $\mathcal{M}$  denota a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos e  $m$  é a medida de Lebesgue. Defina para cada  $i = 1, 2, 3, 4$  os conjuntos  $R_{e_i} := [i-1, i]$ ; defina também  $D_{v_1} = [0, 2]$ ,  $D_{v_2} = [-1, 0]$ ,  $D_{v_3} = [2, 4]$ . Além disso, defina:

$$f_{e_1} : D_{r(e_1)} \rightarrow R_{e_1} \text{ dado por } f_{e_1}(x) = x + 1.$$

$$\begin{aligned} f_{e_2} : D_{r(e_2)} &\rightarrow R_{e_2} \text{ dado por } f_{e_2}(x) = \frac{x}{2}. \\ f_{e_3} : D_{r(e_3)} &\rightarrow R_{e_3} \text{ dado por } f_{e_3}(x) = \frac{x}{2} + 1. \\ f_{e_4} : D_{r(e_4)} &\rightarrow R_{e_4} \text{ dado por } f_{e_4}(x) = \frac{x}{2} + 2. \end{aligned}$$

Os itens de 1 a 5 da definição de sistema ramificado são imediatos. Para o sexto item, note que  $f_{e_i}$  é a composição de uma translação com um escalonamento, logo se  $m(A) = 0$  então  $m \circ f_{e_i}(A) = m(f_{e_i}(A)) = 0$ . Isso mostra que  $\mu \circ f_{e_i} \ll \mu$ . Analogamente,  $\mu \circ f_{e_i}^{-1} \ll \mu$ ; assim existem as derivadas  $\frac{\mu \circ f_{e_i}}{\mu}$  e  $\frac{\mu \circ f_{e_i}^{-1}}{\mu}$ ; além disso como  $\mu$  é  $\sigma$ -finita (em particular, semi-finita) pelo Lema 1.1.5 temos um  $E$ -sistema ramificado. Nesse caso, pelo teorema anterior sabemos que dado  $\phi \in L^2([-1, 4])$  temos

$$\pi(P_{v_i})(\phi) = \chi_{D_{v_i}} \cdot \phi \text{ para cada } i = 1, 2, 3, 4$$

e

$$\pi(S_{e_1})(\phi) = \chi_{[0,1]} \cdot (\phi \circ f_{e_1}^{-1}) \text{ e } \pi(S_{e_i})(\phi) = \sqrt{2} \chi_{[i-1,i]} \cdot (\phi \circ f_{e_i}^{-1}) \text{ para cada } i = 2, 3, 4.$$

## 1.2 Existência de sistemas ramificados

Na seção anterior vimos como  $E$ -sistemas ramificados induzem uma representação da  $C^*$ -álgebra  $C^*(E)$ . Uma questão que não abordamos foi: será que para todo grafo  $E$  existe um  $E$ -sistema ramificado? Ou, será que existem condições suficientes sobre o grafo para que exista um sistema ramificado? Essas são as perguntas que dão origem a presente seção.

Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo. No artigo (GONÇALVES; ROYER, 2012) foi provado que se  $E^0$  e  $E^1$  são conjuntos enumeráveis então existe um  $E$ -sistema ramificado. Na dissertação (MOREIRA, 2019), foi provado que se  $s^{-1}(v)$  é enumerável para todo  $v \in E^0$  então existe um sistema ramificado  $E$ -algébrico<sup>4</sup>. Adiante, generalizaremos os resultados recém mencionados; especificamente, provaremos que sob essa mesma condição, i.e, se  $s^{-1}(v)$  é enumerável para todo  $v \in E^0$ , então existe um  $E$ -sistema ramificado.

Com isso em mente, começaremos criando um espaço de medida adequado. Considere  $(0, 1]$  com a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos e  $\Lambda$  um conjunto não vazio. Dado  $A \subseteq (0, 1] \times \Lambda$ , defina, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , o conjunto  $A^{(\lambda)} := \{t \in (0, 1] \mid (t, \lambda) \in A\}$ . Com isso, defina a coleção:

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq (0, 1] \times \Lambda \mid A^{(\lambda)} \text{ é Borel-mensurável } \forall \lambda \in \Lambda\}$$

e defina também a função:

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty] \text{ dada por } \mu(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(A^{(\lambda)})$$

<sup>4</sup> Veja o artigo (MOREIRA, 2019) para a definição.

onde  $m$  é medida de de Lebesgue.

**Lema 1.2.1.** *A tripla  $((0, 1] \times \Lambda, \mathcal{M}, \mu)$  definida acima é um espaço de medida.*

*Demonstração. Afirmação 1:*  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

Note que  $\emptyset^{(\lambda)} = \{t \in (0, 1] \mid (t, \lambda) \in \emptyset\} = \emptyset$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ . Logo  $\emptyset \in \mathcal{M}$  e, em particular,  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Se  $A \in \mathcal{M}$  então  $A^{(\lambda)}$  é Borel-mensurável para todo  $\lambda \in \Lambda$ , assim  $(A^{(\lambda)})^c$  é Borel-mensurável, como  $(A^{(\lambda)})^c = \{t \in (0, 1] \mid (t, \lambda) \in A\}^c = \{t \in (0, 1] \mid (t, \lambda) \in A^c\} = (A^c)^{(\lambda)}$  segue que  $A^c \in \mathcal{M}$ .

Seja  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e para cada  $\lambda \in \Lambda$  temos  $A_n^{(\lambda)}$  Borel-mensurável, logo  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)}$  é Borel-mensurável. Agora, vamos mostrar que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)} =$

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{(\lambda)} :$$

“ $\subseteq$ ” Seja  $t \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)}$ , assim  $t \in A_{n_0}^{(\lambda)}$  para certo  $n_0 \in \mathbb{N}$  e como  $A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  temos

$$t \in A_{n_0}^{(\lambda)} \subseteq \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{(\lambda)}$$

“ $\supseteq$ ” Seja  $t \in \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{(\lambda)}$ , daí  $(t, \lambda) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  e portanto  $(t, \lambda) \in A_{n_0}$  para certo  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Assim, } t \in A_{n_0}^{(\lambda)} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)}.$$

Concluimos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .

*Afirmação 2:*  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  é uma medida.

Sejam  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$  disjuntos e  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , vamos considerar dois casos:

*Caso 1:* Suponha que  $m(A^{(\lambda)}) > 0$  para uma quantidade não enumerável de elementos  $\lambda \in \Lambda$ . Desse modo,

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \mu(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(A^{(\lambda)}) = \infty.$$

Por outro lado, afirmamos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  com a propriedade de que existe uma quantidade não enumerável de elementos,  $\lambda \in \Lambda$ , tais que  $m(A_{n_0}^{(\lambda)}) > 0$ . De fato, se não fosse assim, então  $\forall n \in \mathbb{N}$ , existe no máximo uma quantidade enumerável de índices  $\lambda \in \Lambda$  tais que  $m(A_n^{(\lambda)}) > 0$  e portanto existe no máximo uma quantidade enumerável de índices  $\lambda \in \Lambda$  tais que  $m \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)} \right) > 0$ . Como  $A^{(\lambda)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)}$  temos  $m(A^{(\lambda)}) > 0$  apenas para uma quantidade enumerável de elementos  $\lambda \in \Lambda$ , o que contradiz a hipótese que estamos assumindo no *Caso 1*. Desse modo, temos

$$\mu(A_{n_0}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(A_{n_0}^{(\lambda)}) = \infty$$

e como  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \mu(A_{n_0}) = \infty$  segue que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right).$$

*Caso 2:* Suponha que  $m(A^{(\lambda)}) > 0$  para no máximo uma quantidade enumerável de elementos  $\lambda \in \Lambda$ . Assim a soma  $\sum_{\lambda \in \Lambda} m(A^{(\lambda)})$  é uma série, portanto:

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} m \left( \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{(\lambda)} \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(\lambda)} \right) = \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n^{(\lambda)}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in \Lambda} m(A_n^{(\lambda)}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Nas igualdades acima, usamos, além de definições e igualdades já comentadas, a reordenação da séries de termos positivos e o fato de que  $A_n \cap A_m = \emptyset$  implica  $A_n^{(\lambda)} \cap A_m^{(\lambda)} = \emptyset$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Isso finaliza a nossa demonstração.  $\square$

**Exemplo 1.2.2.** *Seja  $E$  um grafo. Defina  $\Lambda = E^0 \cup E^1$  e considere o espaço de medida  $((0, 1] \times \Lambda, \mathcal{M}, \mu)$  definido acima. Sejam  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^1$  e  $v \in E^0$ . Note que:*

- $A = (0, 1] \times \{e_1\} \in \mathcal{M}$  e  $\mu(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m(A^{(\lambda)}) = m(A^{(e_1)}) = m(0, 1] = 1$ .
- Se  $I$  é um intervalo contido em  $(0, 1]$ , então  $B = I \times \{v\} \in \mathcal{M}$  e  $C = I \times \{e_1, e_2, e_3, \dots\} \in \mathcal{M}$ . Além disso,  $\mu(B) = m(I)$  e, se  $I$  tem medida de Lebesgue positiva, então  $\mu(C) = \infty$ .

Vamos demonstrar agora o principal teorema desse seção, para deixar nosso texto mais limpo, começamos com a seguinte definição:

**Definição 1.2.3.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo. Se  $s^{-1}(v)$  é enumerável para cada  $v \in E^0$  dizemos que  $E$  é linha-enumerável.*

**Teorema 1.2.4.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo linha-enumerável. Assim, existe um  $E$ -sistema ramificado.*

*Demonstração.* Considere o espaço de medida  $((0, 1] \times \Lambda, \mathcal{M}, \mu)$  onde  $\Lambda = E^0 \cup E^1$ , conforme definição dada acima. Para facilitar os argumentos que virão adiante, faremos uma afirmação preliminar.

*Afirmção 1:* Se  $I \subseteq (0, 1]$  é Borel-mensurável e  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$  então  $I \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \in \mathcal{M}$ . Escreva  $A = I \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} \subset (0, 1] \times \Lambda$ . Note que:

$$A^{(\lambda)} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \lambda \neq \lambda_i \ \forall i \in \mathbb{N}. \\ I & \text{se } \lambda = \lambda_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Em todo caso,  $A^{(\lambda)}$  é Borel-mensurável para todo  $\lambda \in \Lambda$ , logo  $A \in \mathcal{M}$ , o que finaliza a demonstração dessa afirmação.  $\square$

Para cada  $e \in E^1$  defina  $R_e = (0, 1] \times \{e\}$ . Defina também  $W = \{v \in E^0 \mid v \text{ é um poço }^5\}$ . Para cada  $v \in W$  defina  $D_v = (0, 1] \times \{v\}$  e para cada  $v \in E^0 - W$  defina

$$D_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} (0, 1] \times \{e\} = (0, 1] \times s^{-1}(v).$$

Segue da *Afirmção 1* que  $R_e \in \mathcal{M}$  para todo  $e \in E^1$  e  $D_v \in \mathcal{M}$  para todo  $v \in W$ . Além disso, é fácil ver que  $v \in E^0 - W$ . Vamos verificar agora as quatro primeiras condições da definição 1.1.1.

1. Dados  $e, d \in E^1$  com  $d \neq e$  temos

$$R_d \cap R_e = ((0, 1] \times \{d\}) \cap ((0, 1] \times \{e\}) = (0, 1] \times (\{e\} \cap \{d\}) = \emptyset.$$

2. Dados  $v, u \in E^0$  temos três situações para analisar:

Suponha que  $u, v \in W$ , assim

$$D_v \cap D_u = ((0, 1] \times \{v\}) \cap ((0, 1] \times \{u\}) = (0, 1] \times (\{v\} \cap \{u\}) = \emptyset.$$

Suponha que  $v \in W$  e  $u \notin W$ . Nesse caso,

$$D_v \cap D_u = ((0, 1] \times \{v\}) \cap ((0, 1] \times s^{-1}(u)) = (0, 1] \times (\{v\} \cap s^{-1}(u)) = \emptyset.$$

Suponha que  $v \notin W$  e  $u \notin W$ . Assim

$$D_v \cap D_u = ((0, 1] \times s^{-1}(v)) \cap ((0, 1] \times s^{-1}(u)) = (0, 1] \times (s^{-1}(v) \cap s^{-1}(u)) = \emptyset.$$

3. Dado  $e \in E^1$ , como  $s(e)$  não é um poço,  $s(e) \notin W$  e portanto  $R_e \subseteq \bigcup_{d \in s^{-1}(s(e))} R_d = D_{s(e)}$ .

4. Seja  $v \in E^0$  tal que  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$ . Em particular,  $v$  não é um poço, logo  $D_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$ .

Para verificar as condições 5 e 6 da definição de sistema ramificado precisamos criar as funções  $f_d$  para cada  $d \in E^1$ . Iremos dividir essa tarefa em casos, mas antes disso, faremos mais uma afirmação auxiliar.

*Afirmção 2: Se  $I$  é um intervalo,  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$  e  $A \in \mathcal{M}$  então*

$$A \cap (I \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ((A^{(\lambda_i)} \cap I) \times \{\lambda_i\}).$$

<sup>5</sup> ou seja,  $s^{-1}(v) = \emptyset$ .



- ( $\subseteq$ ) Tome  $x \in A \cap (I \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\})$ , daí  $x = (t, \lambda_j)$  com  $t \in I$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Como  $(t, \lambda_j) \in A$  temos  $t \in A^{(\lambda_j)}$ , assim  $t \in A^{(\lambda_j)} \cap I$ . Portanto  $x = (t, \lambda_j) \in (A^{(\lambda_j)} \cap I) \times \{\lambda_j\} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A^{(\lambda_i)} \cap I) \times \{\lambda_i\}$ .
- ( $\supseteq$ ) Considere  $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ((A^{(\lambda_i)} \cap I) \times \{\lambda_i\})$ . Daí  $x \in A^{(\lambda_j)} \cap I \times \{\lambda_j\}$  para certo  $j \in \mathbb{N}$ , logo  $x = (t, \lambda_j)$  com  $t \in A^{(\lambda_j)} \cap I$ , em particular,  $(t, \lambda_j) \in A$  e portanto  $(t, \lambda_j) \in A \cap (I \times \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\})$ .  $\square$

As funções  $f_d$  serão criadas de acordo com a forma do conjunto  $D_{r(d)}$  que deve ser o domínio de tais funções. Fixe  $d \in E^1$ .

- *Caso 1:*  $r(d) \in W$ . Nesse caso temos  $D_{r(d)} = (0, 1] \times \{r(d)\}$  e  $R_d = (0, 1] \times \{d\}$ . Defina:

$$f_d : (0, 1] \times \{r(d)\} \rightarrow (0, 1] \times \{d\}$$

$$(t, r(d)) \mapsto (t, d)$$

Claramente  $f_d$  é uma bijeção, daí se  $f_d^{-1}$  é sua inversa temos  $f_d \circ f_d^{-1} = Id_{R_d}$ ,  $f_d^{-1} \circ f_d = Id_{D_{r(d)}}$  e  $f(D_{r(d)}) = R_d$ . Vamos provar que  $f_d$  é mensurável:

Seja  $B \in \mathcal{M}_{R_d}$ , daí  $B = A \cap R_d = A \cap ((0, 1] \times \{d\})$  para certo  $A \in \mathcal{M}$ . Pela *Afirmiação 2* segue que  $B = A^{(d)} \times \{d\}$ . Assim

$$f_d^{-1}(B) = f_d^{-1}(A^{(d)} \times \{d\}) = A^{(d)} \times \{r(d)\}$$

que é um elemento de  $\mathcal{M}$  pela *Afirmiação 1*. Como  $f_d^{-1}(B) \subseteq D_{r(d)}$  temos  $f_d^{-1}(B) \in \mathcal{M}_{D_{r(d)}}$  provando que  $f_d$  é mensurável. Um argumento análogo garante que  $f_d^{-1}$  é mensurável.

Assim a quinta condição está satisfeita. Com o intuito de verificar a sexta condição vamos provar que as medidas

$$\mu : \mathcal{M}_{D_{r(d)}} \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad \mu \circ f_d : \mathcal{M}_{D_{r(d)}} \rightarrow [0, \infty]$$

são  $\sigma$ -finitas e  $\mu \circ f_d \ll \mu$ .

Note que  $\mu(D_{r(d)}) = \mu((0, 1] \times \{r(d)\}) = m(0, 1] = 1 < \infty$  e  $\mu \circ f_d(D_{r(d)}) = \mu(R_d) = \mu((0, 1] \times \{d\}) = m(0, 1] = 1 < \infty$  o que mostra que ambas as medidas são finitas, em particular,  $\sigma$ -finitas. Além disso, seja  $B \in \mathcal{M}_{D_{r(d)}}$  tal que  $\mu(B) = 0$ . Daí  $B = A \cap (0, 1] \times \{r(d)\}$  para certo  $A \in \mathcal{M}$ . Pela *Afirmiação 2* temos  $B = A^{(r(d))} \times \{r(d)\}$  e assim  $0 = \mu(B) = m(A^{(r(d))})$ . Portanto

$$\mu \circ f_d(B) = \mu \circ f_d(A^{(r(d))} \times \{r(d)\}) = \mu(A^{(r(d))} \times \{d\}) = m(A^{(r(d))}) = 0$$

o que prova que  $\mu \circ f_d \ll \mu$ . Pelo teorema de Radon-Nikodym (Teorema A.1.12) existe a derivada  $\frac{d\mu \circ f_d}{d\mu} =: \Phi_{f_d}$ . Um raciocínio análogo garante que existe  $\Phi_{f_d^{-1}}$  e assim, pelo Lema 1.1.5 a sexta condição está satisfeita.

- *Caso 2:*  $0 < \#s^{-1}(r(d)) < \infty$ .

Escreva  $s^{-1}(r(d)) = \{e_1, \dots, e_N\}$  para certo  $N \in \mathbb{N}$ . Note que  $(0, 1] = \bigcup_{j=1}^N I_j$  onde para cada  $j = 1, \dots, N$  temos  $I_j = (\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ . Fixe  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Defina  $\varphi_j : (0, 1] \rightarrow I_j$  como um homeomorfismo tal que  $\varphi_j|_{(0,1)} : (0, 1) \rightarrow (\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N})$  seja um difeomorfismo (por exemplo o homeomorfismo linear crescente entre tais intervalos); com isso, defina também

$$f_{d,j} : (0, 1] \times \{e_j\} \rightarrow I_j \times \{d\}$$

$$(t, e_j) \mapsto (\varphi_j(t), d)$$

Note que  $f_{d,j}$  é bijetora com inversa dada por  $f_{d,j}^{-1}(t, d) = (\varphi_j^{-1}(t), e_j)$  para todo  $t \in I_j$ . Além disso, vamos quer  $f_{d,j}$  é mensurável:

Seja  $B \in \mathcal{M}_{I_j \times \{d\}}$ , daí existem  $A \in \mathcal{M}$  tal que  $B = A \cap (I_j \times \{d\}) \stackrel{Af_2}{=} (A^{(d)} \cap I_j) \times \{d\}$ . Assim,

$$f_{d,j}^{-1}(B) = \{(t, e_j) \mid f_{d,j}(t, e_j) \in B\} = \{(t, e_j) \mid (\varphi_j(t), d) \in A^{(d)} \cap I_j \times \{d\}\} =$$

$$= \{(t, e_j) \mid \varphi_j(t) \in A^{(d)} \cap I_j\} = \{(t, e_j) \mid t \in \varphi_j^{-1}(A^{(d)} \cap I_j)\} = \varphi_j^{-1}(A^{(d)} \cap I_j) \times \{e_j\}.$$

Como  $\varphi_j$  é contínua (e portanto mensurável) e  $A^{(d)} \cap I_j$  é Borel-mensurável segue que  $\varphi_j^{-1}(A^{(d)} \cap I_j)$  é Borel-Mensurável. Pela *Afirmção 1* segue que  $f_{d,j}^{-1}(B) \in \mathcal{M}$  e como  $f_{d,j}^{-1}(B) \subseteq (0, 1] \times \{e_j\}$  temos  $f_{d,j}^{-1}(B) \in \mathcal{M}_{(0,1] \times \{e_j\}}$  mostrando que  $f_{d,j}$  é mensurável. Um argumento análogo mostra que  $f_{d,j}^{-1}$  é também mensurável.

Finalmente, defina

$$f_d : (0, 1] \times \{e_1, \dots, e_N\} \rightarrow (0, 1] \times \{d\}$$

$$(t, e_j) \mapsto f_{d,j}(t, e_j)$$

para cada  $j = 1, \dots, N$ . Note que  $f_d$  é bijetora: Se  $t \in (0, 1]$  então  $t \in I_j$  para um único  $j = 1, \dots, N$  e temos  $f_d^{-1}(t, d) = f_{d,j}^{-1}(t, d)$ . Além disso; como  $(0, 1] \times \{e_1, \dots, e_N\} = (0, 1] \times \{e_1\} \cup \dots \cup (0, 1] \times \{e_n\}$  e  $(f_d)|_{(0,1] \times \{e_j\}} = f_{d,j}$  para todo  $j = 1, \dots, N$  segue da Proposição A.1.1 que  $f_d$  é mensurável. O mesmo argumento garante que  $f_d^{-1}$  é mensurável. Isso prova a quinta condição para esse caso.

Para verificar a sexta condição vamos provar que as medidas

$$\mu : \mathcal{M}_{D_{r(d)}} \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad \mu \circ f_d : \mathcal{M}_{D_{r(d)}} \rightarrow [0, \infty]$$

são  $\sigma$ -finitas e  $\mu \circ f_d \ll \mu$ .

Note que  $D_{r(d)} = \bigcup_{i=1}^N ((0, 1] \times \{e_i\})$  e  $\mu((0, 1] \times \{e_i\}) = 1$  para cada  $i = 1, \dots, N$ . Além disso,  $\mu \circ f_d(D_{r(d)}) = \mu((0, 1] \times \{d\}) = 1$  o que garante que ambas as medidas

são  $\sigma$ -finitas. Considere agora  $B \in \mathcal{M}_{D_r(d)}$ , daí existe  $A \in \mathcal{M}$  tal que  $B = A \cap D_r(d)$ . Pela *Afirmção 2* temos:

$$B = A \cap D_r(d) = (A^{(e_1)} \times \{e_1\}) \cup \dots \cup (A^{(e_N)} \times \{e_N\}).$$

Logo, se  $\mu(B) = 0$  então  $\sum_{i=1}^N m(A^{(e_i)}) = 0$ , ou seja,  $m(A^{(e_i)}) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, N$ . Além disso,

$$f_d(B) = \bigcup_{i=1}^N f_d(A^{(e_i)} \times \{e_i\}) = \bigcup_{i=1}^N f_{d,i}(A^{(e_i)} \times \{e_i\}).$$

Vamos mostrar que para cada  $i = 1, \dots, N$  temos  $\mu(f_{d,i}(A^{(e_i)} \times \{e_i\})) = 0$ . Para tanto, fixado  $i$  veja que:

$$f_{d,i}(A^{(e_i)} \times \{e_i\}) = \{f_{d,i}(t, e_i) \mid t \in A^{(e_i)}\} = \{(\varphi_i(t), d) \mid t \in A^{(e_i)}\}$$

logo

$$\begin{aligned} \mu(f_{d,i}(A^{(e_i)} \times \{e_i\})) &= m(\varphi_i(A^{(e_i)})) = m(\varphi_i(A^{(e_i)} \cap (0, 1) \cup A^{(e_i)} \cap \{1\})) = \\ &= m(\varphi_i(A^{(e_i)} \cap (0, 1))) + m(\varphi_i(A^{(e_i)} \cap \{1\})). \end{aligned}$$

Agora,  $A^{(e_i)} \cap (0, 1) \subseteq A^{(e_i)}$  possui medida nula. Como  $\varphi_i$  é um difeomorfismo, segue de (RUDIN, 1987, pg. 153) que  $m(\varphi_i(A^{(e_i)} \cap (0, 1))) = 0$ . É claro também que  $m(\varphi_i(A^{(e_i)} \cap \{1\})) = 0$  pois tal conjunto possui no máximo um ponto. Portanto  $\mu(f_{d,i}(A^{(e_i)} \times \{e_i\})) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, N$  o que implica que  $\mu(f_d(B)) = 0$  provando que  $\mu \circ f_d \ll \mu$ . Pelo teorema de Radon-Nikodym existe a derivada  $\frac{d\mu \circ f_d}{d\mu} =: \Phi_{f_d}$ . Um raciocínio análogo garante que existe  $\Phi_{f_d^{-1}}$ . O Lema 1.1.5 finaliza o *Caso 2*.

- **Caso 3:**  $\#s^{-1}(r(d)) = \infty$ .

Por hipótese  $s^{-1}(r(d))$  é enumerável, assim podemos escrever  $s^{-1}(r(d)) = \{e_1, e_2, \dots\}$ .

Escreva  $(0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j$  onde  $I_j = \left(\frac{1}{j-1}, \frac{1}{j}\right]$ . Fixado  $j \in \mathbb{N}$  defina  $\varphi_j : (0, 1] \rightarrow I_j$

como um homeomorfismo tal que  $\varphi_{j|(0,1)} : (0, 1) \rightarrow \left(\frac{1}{j-1}, \frac{1}{j}\right)$  seja um difeomorfismo (por exemplo o homeomorfismo linear crescente). Defina também:

$$f_{d,j} : (0, 1] \times \{e_j\} \rightarrow I_j \times \{d\}$$

$$(t, e_j) \mapsto (\varphi_j(t), d)$$

e

$$f_d : D_r(d) = (0, 1] \times \{e_1, e_2, e_3, \dots\} \rightarrow (0, 1] \times \{d\}$$

$$(t, e_j) \mapsto (\varphi_j(t), d).$$

Os mesmos argumentos que foram feitos no *Caso 2* garantem que as condições 5 e 6 da definição 1.1.1 são satisfeitas nesse caso.

Portanto,  $((0, 1] \times \Lambda, \mathcal{M}, \mu)$  com as famílias e funções acima definidas é um  $E$ -sistema ramificado.  $\square$

**Observação 1.2.5.** *a) Note que apesar do enunciado do teorema acima garantir que existe um  $E$ -sistema ramificado, a sua demonstração na verdade nos mostra como construir vários  $E$ -sistemas ramificados: dependendo da escolha das funções  $\varphi_j$ , desde que as mesmas satisfaçam o que é pedido na demonstração, obtemos diferentes sistemas ramificados.*

*b) Grafos que possuem linhas finitas, i.e, grafos tais que  $s^{-1}(v)$  é finito para cada  $v \in E^0$  e grafos cujo conjunto de arestas é enumerável são casos particulares de grafos que satisfazem  $s^{-1}(v)$  enumerável para cada  $v \in E^0$ . Portanto, para tais grafos é garantida a existência de um sistema ramificado.*

*c) Não é conhecido, até o momento, nenhum resultado que garante a existência de sistemas ramificados para grafos  $E$  que não são linha-enumeráveis.*

### 1.3 Algumas consequências

Os Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 nos fornecem uma representação  $\pi$  de  $C^*(E)$  quando o grafo  $E$  é linha-enumerável. Além disso, sabemos como  $\pi$  se comporta nos geradores de  $C^*(E)$ . Esse fato nos permite demonstrar alguns resultados interessantes. Por exemplo, sabemos que a álgebra  $C^*(E)$  é uma  $C^*$ -álgebra universal, em geral, álgebras universais são abstratas e pouco sabemos sobre seus elementos, em particular, uma das etapas de sua construção consiste num quociente, que a priori pode “zerar” uma grande quantidade de elementos. Provaremos abaixo que sob as devidas condições podemos garantir que muitos elementos de tal álgebra são não nulos.

**Corolário 1.3.1.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável. Então  $P_v \neq 0$  para todo  $v \in E^0$  e  $S_e \neq 0$  para todo  $e \in E^1$ .*

*Demonstração.* Pela construção feita no Teorema 1.2.4, sabemos que  $\mu(D_v) \geq 1 > 0$  para todo  $v \in E^0$ . Fixado  $v \in E^0$  o operador  $\pi(P_v)$  obtido através dos Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 dado por  $\pi(P_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi$  é não nulo, com efeito, para  $\phi = \chi_{D_v}$  temos  $\pi(P_v)(\phi) = \chi_{D_v}^2 = \chi_{D_v}$  e como  $\mu(D_v) > 0$  temos  $\chi_{D_v} \neq 0$ . Assim,  $\pi(P_v) \neq 0$  como desejávamos. Consequentemente, como  $\pi$  é homomorfismo,  $P_v \neq 0$ .

Agora, para cada  $e \in E^1$  sabemos que  $S_e^* S_e = P_{r(e)}$  e pelo que provamos no parágrafo anterior  $P_{r(e)} \neq 0$  donde segue que  $S_e \neq 0$ .  $\square$

**Corolário 1.3.2.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são caminhos tais que  $r(\alpha) = r(\beta)$  então  $S_\alpha S_\beta^* \neq 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $S_\alpha S_\beta^* = 0$ , desse modo temos:

$$0 = S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^* S_\beta = P_{r(\alpha)} P_{r(\beta)} = P_{r(\alpha)}$$

o que contradiz o corolário anterior. Portanto  $S_\alpha S_\beta^* \neq 0$ .  $\square$

A recíproca do teorema acima é válida para qualquer grafo, com efeito: se  $r(\alpha) \neq r(\beta)$  então

$$S_\alpha S_\beta^* = S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^* S_\beta = P_{r(\alpha)} P_{r(\beta)} = 0.$$

Agora, falaremos um pouco sobre representações fiéis; mais especificamente mostraremos que sob algumas hipóteses a representação  $\pi$  induzida pelos Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 é fiel. Uma hipótese suficiente para isso aconteça é que  $C^*(E)$  seja simples.

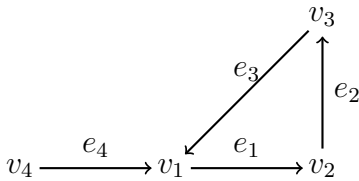
**Corolário 1.3.3.** *Se  $E$  é um grafo linha-enumerável e  $C^*(E)$  é simples então a representação  $\pi$  obtida via Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 é fiel.*

*Demonstração.* Como  $\ker(\pi)$  é um ideal e  $C^*(E)$  é simples temos  $\ker(\pi) = \{0\}$  ou  $\ker(\pi) = C^*(E)$ . Na demonstração do Corolário 1.3.1 vimos que o operador  $\pi(v)$  é não nulo para cada  $v \in E^0$ , logo  $\pi$  é não nulo e portanto  $\ker(\pi) = \{0\}$  provando que  $\pi$  é injetora.  $\square$

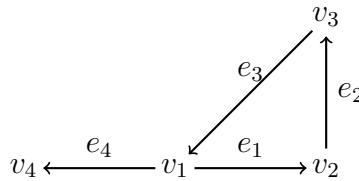
**Definição 1.3.4.** *Seja  $E$  um grafo. Um caminho  $\lambda = e_1 \dots e_n$  em  $E$  é dito ser um caminho fechado se  $r(\lambda) = s(\lambda)$ , ou seja,  $r(e_n) = s(e_1)$ .*

**Definição 1.3.5.** *Dizemos que um grafo  $E$  satisfaz a condição (L) se todo caminho fechado (do grafo  $E$ ) possui uma saída, i.e, se  $\lambda = e_1 \dots e_n$  é um caminho fechado existe  $f \in E^1$  tal que  $s(f) = s(e_i)$  para algum  $i = 1, \dots, n$  e  $f \neq e_i$ .*

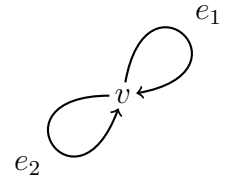
**Exemplo 1.3.6.** *Considere os grafos:*



Grafo 1



Grafo 2



Grafo 3

Note que o grafo 1 não satisfaz a condição (L) pois  $e_1 e_2 e_3$  é um caminho fechado sem saída. Os grafos 2 e 3 satisfazem a condição (L).

**Teorema 1.3.7.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável e suponha que  $E$  satisfaz a condição (L). Assim, toda representação  $\pi$  dada pelos Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 é fiel.*

*Demonstração.* No Corolário 1.3.1 vimos que  $\pi(P_v) \neq 0$  e  $P_v \neq 0$  para todo  $v \in E^0$ . Denote por  $P$  a família de todas as projeções  $P_v$  para  $v \in E^0$  e  $S$  a família de todas as isometrias parciais  $S_e$  para  $e \in E^1$ . Como  $\pi$  é um \*-homomorfismo e  $(P, S)$  é uma  $E$ -família de Cuntz-Krieger em  $C^*(E)$  segue que  $(\pi(P), \pi(S))$  é uma  $E$ -família de Cuntz-Krieger em  $B(L^2(X, \mathcal{M}, \mu))$ .

Pelo teorema da unicidade de Cuntz-Krieger (veja [(FOWLER; LACA; RAEBURN, 2000), Teorema 2]) existe um \*-isomorfismo, que denotaremos por  $\psi$ , entre  $C^*(P, S) = C^*(E)$  e  $C^*(\pi(P), \pi(S))$  tal que para todo  $v \in E^0$  vale que  $\psi(P_v) = \pi(P_v)$  e  $\psi(S_e) = \pi(S_e)$  para todo  $e \in E^1$ . Como  $\psi$  e  $\pi$  são \*-homomorfismos contínuos que coincidem nos geradores da álgebra universal  $C^*(E)$  segue que  $\psi = \pi$ . Em particular, segue que  $\pi$  é injetora.  $\square$

Como último resultado desse seção vamos provar que a recíproca do teorema acima, num sentido que deixaremos preciso em breve, é verdadeira. Para tanto, vamos provar primeiro alguns resultados auxiliares.

**Lema 1.3.8.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um  $E$ -sistema ramificado obtido pelo Teorema 1.2.4. Se  $e_1 \dots e_n$  é um caminho em  $E$  com  $n \geq 2$  então  $\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2} \dots \circ f_{e_n} \ll \mu \circ f_{e_n}$  e*

$$\Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}} = \Phi_{f_{e_n}} \cdot (\Phi_{f_{e_{n-1}}} \circ f_{e_n}) \dots (\Phi_{f_{e_1}} \circ f_{e_2} \circ \dots \circ f_{e_n}).$$

Analogamente,  $\mu \circ f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_2}^{-1} \circ f_{e_1}^{-1} \ll \mu \circ f_{e_1}^{-1}$  e

$$\Phi_{f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}} = \Phi_{f_{e_1}^{-1}} \cdot (\Phi_{f_{e_2}^{-1}} \circ f_{e_1}) \dots (\Phi_{f_{e_n}^{-1}} \circ f_{e_{n-1}} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}).$$

*Demonstração.* Faremos apenas o caso que inclui as funções  $f_{e_i}$ , o caso relacionado as funções  $f_{e_i}^{-1}$  é feito imitando o argumento a seguir. Suponha que  $n = 2$ . Se  $\mu \circ f_{e_2}(A) = 0$  para algum  $A \in M_{D_{r(e_2)}}$ , temos  $\mu(f_{e_2}(A)) = 0$ . Como  $\mu \circ f_{e_1} \ll \mu$  temos  $\mu \circ f_{e_1}(f_{e_2}(A)) = 0$ , ou seja,  $\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}(A) = 0$  mostrando que  $\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2} \ll \mu \circ f_{e_2}$ . Em particular como  $\mu \circ f_{e_2} \ll \mu$  segue que  $\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2} \ll \mu$  e como as medidas são  $\sigma$ -finitas (isso segue da demonstração do Teorema 1.2.4) existe a derivada de Radon-Nikodym  $\frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu}$ ; além disso pela regra da cadeia segue que:

$$\Phi_{f_{e_1} \circ f_{e_2}} := \frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu} = \frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu \circ f_{e_2}} \cdot \frac{d\mu \circ f_{e_2}}{d\mu} = \frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu \circ f_{e_2}} \cdot \Phi_{f_{e_2}}.$$

Para finalizar o caso em que  $n = 2$  é suficiente mostrar que  $\frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu \circ f_{e_2}} = \Phi_{f_{e_1} \circ f_{e_2}}$ . Façamos isso. Dado  $A \in M_{D_{r(e_2)}}$  é verdade que

$$\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}(A) = \mu \circ f_{e_1}(f_{e_2}(A)) = \int_{f_{e_2}(A)} \Phi_{f_{e_1}} d\mu =$$

$$= \int \chi_{f_{e_2}(A)} \Phi_{f_{e_1}} d\mu \stackrel{A.1.9}{=} \int (\chi_{f_{e_2}(A)} \circ f_{e_2}) \cdot (\Phi_{f_{e_1}} \circ f_{e_2}) d(\mu \circ f_{e_2}) = \int_A (\Phi_{f_{e_1}} \circ f_{e_2}) d(\mu \circ f_{e_2}).$$

Portanto,  $\frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ f_{e_2}}{d\mu \circ f_{e_2}} = \Phi_{f_{e_1}} \circ f_{e_2}$ . Prosseguindo indutivamente, a hipótese de indução nos garante que  $\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}} \ll \mu \circ f_{e_{n-1}}$  e

$$\Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}} = \Phi_{f_{e_{n-1}}} \cdot (\Phi_{f_{e_{n-2}}} \circ f_{e_{n-1}}) \dots (\Phi_{f_{e_1}} \circ f_{e_2} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}).$$

Como  $\mu \circ f_{e_{n-1}} \ll \mu$ , temos  $\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}} \ll \mu$ , logo se  $\mu(f_{e_n}(A)) = 0$  (para  $A \in M_{D_{r(e_n)}}$ ) então  $\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}(f_{e_n}(A)) = 0$  provando que  $\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}} \circ f_{e_n} \ll \mu \circ f_{e_n}$ . Além disso, usando a regra da cadeia novamente concluímos que

$$\Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}} = \frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}}{\mu \circ f_{e_n}} \cdot \frac{\mu \circ f_{e_n}}{d\mu} = \frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}}{\mu \circ f_{e_n}} \cdot \Phi_{f_{e_n}}$$

Assim, devido a hipótese de indução, só resta-nos demonstrar que  $\frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}}{\mu \circ f_{e_n}} = (\Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}}) \circ f_{e_n}$ . Dado  $A \in M_{D_{r(e_n)}}$  temos

$$\begin{aligned} \mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}(A) &= \mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}(f_{e_n}(A)) = \int_{f_{e_n}(A)} \Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}} d\mu = \\ &= \int \chi_{f_{e_n}(A)} \Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}} d\mu = \int \chi_A \cdot \Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}} \circ f_{e_n} d(\mu \circ f_{e_n}) = \int_A \Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}} \circ f_{e_n} d(\mu \circ f_{e_n}) \end{aligned}$$

provando que  $\frac{d\mu \circ f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_n}}{\mu \circ f_{e_n}} = (\Phi_{f_{e_1} \circ \dots \circ f_{e_{n-1}}}) \circ f_{e_n}$  e finalizando a demonstração.  $\square$

**Proposição 1.3.9.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável. Se  $\alpha = e_1 \dots e_n$  é um caminho sem saída então:*

- Existe uma representação  $\psi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(X))$ , onde  $X$  é um  $E$ -sistema ramificado, tal que  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) \neq \psi(P_{s(e_1)})$ .*
- Existe uma representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(Y))$ , onde  $Y$  é um  $E$ -sistema ramificado, tal que  $\varphi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) = \varphi(P_{s(e_1)})$ .*

*Demonstração.* a) Considere a construção feita no Teorema 1.2.4; temos  $R_{e_i} = (0, 1] \times \{e_i\}$  e como  $e_1 \dots e_n$  é um caminho fechado sem saída vale que

$$\begin{aligned} D_{r(e_1)} &= (0, 1] \times s^{-1}(r(e_1)) = (0, 1] \times \{e_2\} \\ D_{r(e_2)} &= (0, 1] \times s^{-1}(r(e_2)) = (0, 1] \times \{e_3\} \\ &\vdots \\ D_{r(e_{n-1})} &= (0, 1] \times s^{-1}(r(e_{n-1})) = (0, 1] \times \{e_n\} \end{aligned}$$

$$D_{r(e_n)} = (0, 1] \times s^{-1}(r(e_n)) = (0, 1] \times \{e_1\}.$$

Escolha, para  $i = 1$ ,  $f_{e_1} : D_{r(e_1)} \rightarrow R_{e_1}$  dada por  $f_{e_1}(t, e_2) = (\sqrt{t}, e_1)$  e para  $i = n$ ,  $f_{e_n} : D_{r(e_n)} \rightarrow R_{e_n}$  dada por  $f_{e_n}(t, e_1) = (\sqrt{t}, e_n)$ . Para todo  $i = 2, \dots, n-1$  escolha  $f_{e_i} : D_{r(e_i)} \rightarrow R_{e_i}$  dada por  $f_{e_i}(t, e_{i+1}) = (t, e_i)$ . Note que as funções  $f_{e_i}$  satisfazem as condições exigidas na demonstração do Teorema 1.2.4.

Com a escolha das funções do parágrafo anterior, obtemos a partir do Teorema 1.2.4 um  $E$ -sistema ramificado que denotaremos por  $X$ . Pelo Teorema 1.1.11 existe uma representação  $\psi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(X))$ ; vamos calcular  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi)$  para  $\phi \in L^2(X)$  usando o teorema recém citado:

$$\psi(S_{e_n})(\phi) = \chi_{R_{e_n}} \cdot \Phi_{f_{e_n}^{-1}}(\phi \circ f_{e_n}^{-1}).$$

Aplicando  $\psi(S_{e_{n-1}})$ :

$$\begin{aligned} \psi(S_{e_{n-1}})\psi(S_{e_n})(\phi) &= \psi(S_{e_{n-1}}) \left( \chi_{R_{e_n}} \cdot \Phi_{f_{e_n}^{-1}}(\phi \circ f_{e_n}^{-1}) \right) = \\ &= \chi_{R_{e_{n-1}}} \cdot \Phi_{f_{e_{n-1}}^{-1}} \cdot \left( (\chi_{R_{e_n}} \cdot \Phi_{f_{e_n}^{-1}}(\phi \circ f_{e_n}^{-1})) \circ f_{e_{n-1}}^{-1} \right) = \\ &= \chi_{R_{e_{n-1}}} \cdot \Phi_{f_{e_{n-1}}^{-1}} \cdot (\Phi_{f_{e_n}^{-1}} \circ f_{e_{n-1}}^{-1})(\phi \circ f_{e_n}^{-1} \circ f_{e_{n-1}}^{-1}). \end{aligned}$$

Após sucessivas aplicações, concluiremos que:

$$\begin{aligned} \psi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi) &= \\ &= \chi_{R_{e_1}} \cdot \Phi_{f_{e_1}^{-1}}(\Phi_{f_{e_2}^{-1}} \circ f_{e_1}^{-1})(\Phi_{f_{e_3}^{-1}} \circ f_{e_2}^{-1} \circ f_{e_1}^{-1}) \dots (\Phi_{f_{e_{n-1}}^{-1}} \dots \circ f_{e_2}^{-1} \circ f_{e_1}^{-1})(\phi \circ f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.3.8 segue que

$$\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi) = \chi_{R_{e_1}} \cdot (\Phi_{f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}})(\phi \circ f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}).$$

Considere  $\phi = \chi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}}$  e note que

$$\phi \circ f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1} \left( \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \times \{e_1\} \right) = \phi \left( \left( \frac{1}{44}, \frac{1}{24} \right) \times \{e_1\} \right) = 0.$$

Segue que  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi)((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}) = 0$ . Por outro lado como

$$\psi(P_{s(e_1)})(\phi) = \chi_{D_{s(e_1)}} \cdot \phi = \chi_{(0,1] \times \{e_1\}} \cdot \chi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}} = \chi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}}$$

temos  $\psi(P_{s(e_1)})(\phi)((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}) = \chi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}}((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}) = 1$ . Portanto, como  $\mu((\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \times \{e_1\}) > 0$  segue que  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi) \neq \psi(P_{s(e_1)})(\phi)$  e consequentemente  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) \neq \psi(P_{s(e_1)})$ .

b) Considere nesse caso,  $f_{e_1} = (t, e_2) = (\sqrt{t}, e_1)$ ,  $f_{e_n}(t, e_1) = (t^2, e_n)$  e  $f_{e_i}(t, e_{i+1}) = (t, e_i)$  para todo  $1 < i < n$ . Pelo Teoremas 1.2.4 e 1.1.11 temos um sistema ramificado  $Y$  e uma representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(Y))$ . Além disso, para todo  $\phi \in L^2(Y)$  temos



$$\begin{aligned}\varphi(S_{e_1} \dots S_{e_n})(\phi) &= \chi_{R_{e_1}} \cdot (\Phi_{f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}}) \cdot (\phi \circ f_{e_n}^{-1} \circ \dots \circ f_{e_1}^{-1}) = \\ &= \chi_{R_{e_1}} \cdot \phi = \chi_{D_{r(e_n)}} \cdot \phi = \chi_{D_{s(e_1)}} \cdot \phi = \varphi(P_{s(e_1)})(\phi)\end{aligned}$$

mostrando que  $\varphi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) = \varphi(P_{s(e_1)})$ .  $\square$

**Corolário 1.3.10.** *Seja  $E$  um grafo linha-enumerável. Assim,  $E$  satisfaz a condição (L) se, e somente se, toda representação  $\phi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(Y))$  induzida pelos Teoremas 1.1.11 e 1.2.4 é fiel.*

*Demonstração.* Supondo que  $E$  satisfaz a condição (L), o resultado desejado é exatamente o Corolário 1.3.7. Para a recíproca, vamos provar que se  $E$  não satisfaz a condição (L) então existe uma representação, não fiel,  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(Y))$  onde  $Y$  é um  $E$ -sistema ramificado. Para tanto, seja  $e_1 \dots e_n$  um caminho fechado sem saída em  $E$ , pela Proposição 1.3.9 existe uma representação  $\psi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(X))$ , onde  $X$  é um  $E$ -sistema ramificado, tal que  $\psi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) \neq \psi(P_{s(e_1)})$ , em particular temos  $S_{e_1} \dots S_{e_n} \neq P_{s(e_1)}$ . Pela mesma proposição, existe uma representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(Y))$ , onde  $Y$  é um  $E$ -sistema ramificado, tal que  $\varphi(S_{e_1} \dots S_{e_n}) = \varphi(P_{s(e_1)})$ , ou seja,  $\varphi$  não é fiel.  $\square$

## 2 Equivalência Unitária

### 2.1 A condição (BPB)

Essa seção relacionará representações de  $C^*(E)$  com representações, dessa mesma álgebra, porém que são induzidas por  $E$ -sistemas ramificados. O ponto crucial para demonstrarmos essa relação dá origem ao título da seção e é conhecido como condição (BPB). Começaremos mostrando algumas propriedades de representações quaisquer de  $C^*(E)$ , em seguida, após definirmos a condição (BPB), daremos exemplos de representações que satisfazem e que não satisfazem tal condição, a seção será finalizada com um teorema que garante que se uma representação satisfaz (BPB) então tal representação é unitariamente equivalente a outra representação, que por sua vez, é induzida por um  $E$ -sistema ramificado.

Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Notemos que:

- Se  $x, y \in C^*(E)$  são projeções então  $\varphi(x), \varphi(y) \in B(H)$  também o são. Além disso, se  $x$  e  $y$  forem mutuamente ortogonais, o mesmo vale para  $\varphi(x)$  e  $\varphi(y)$ .
- Se  $x \in C^*(E)$  é uma isometria parcial então  $\varphi(x) \in B(H)$  também é uma isometria parcial.

Os fatos acima decorrem diretamente de  $\varphi$  ser um  $*$ -homomorfismo. Em particular, das relações que definem  $C^*(E)$  segue que a família  $\{\varphi(P_v)\}_{v \in E^0}$  é uma família de projeções mutuamente ortogonais; o mesmo vale para a família  $\{\varphi(S_e)\varphi(S_e)^*\}_{e \in E^1}$ . Dado  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  definimos:

$$H_v = \varphi(P_v)(H) \quad \text{e} \quad H_e = \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*(H).$$

Como  $\varphi(P_v)$  e  $\varphi(S_e)\varphi(S_e)^*$  são projeções segue que  $H_v$  e  $H_e$  são subespaços fechados de  $H$ : com efeito, tome  $h \in \overline{H_v}$  daí existe  $\varphi(P_v)(h_n) \in H_v$  tal que  $\varphi(P_v)(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ . Aplicando  $\varphi(P_v)$  temos  $\varphi(P_v)\varphi(P_v)(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(P_v)h$  e como  $\varphi(P_v)\varphi(P_v)(h_n) = \varphi(P_v)(h_n)$  segue que  $h = \varphi(P_v)(h)$  mostrando que  $h \in H_v$ , portanto  $H_v = \overline{H_v}$ . Analogamente mostra-se que  $H_e$  é fechado.

Dada uma família  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  de subespaços mutuamente ortogonais de um espaço de Hilbert  $H$ , definimos  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  como o fecho do conjunto de todas as combinações lineares

(finitas) de elementos de  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ , ou seja,  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \overline{\text{span} \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)}$ . Note que  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  é um subespaço fechado de  $H$ .

**Proposição 2.1.1.** *Dados  $v, w \in E^0$  e  $e, f \in E^1$  vale que:*

1. Se  $v \neq w$  então  $H_v \cap H_w = \{0_H\}$ .
2. Se  $e \neq f$  então  $H_e \cap H_f = \{0_H\}$ .
3. A restrição do operador  $\varphi(S_e)$  dada por  $\varphi(S_e) : H_{r(e)} \rightarrow H_e$  é um operador sobrejetor, isométrico e unitário.
4. Se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  então  $H_v = \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} H_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  então  $H_v = \left( \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} H_e \right) \oplus V_v$  onde  $V_v$  é um espaço de Hilbert.
5.  $H = \left( \bigoplus_{v \in E^0} H_v \right) \oplus V$  onde  $V$  é um espaço de Hilbert.

*Demonstração.* Se  $v \neq w$  então  $P_v$  e  $P_w$  são projeções mutuamente ortogonais (em  $C^*(E)$ ), logo  $\varphi(P_v)$  e  $\varphi(P_w)$  são projeções mutuamente ortogonais (em  $B(H)$ ). Portanto suas imagens,  $H_v$  e  $H_w$ , são ortogonais o que implica que  $H_v \cap H_w = \{0_H\}$  e prova 1. O mesmo argumento prova o item 2. Vamos provar agora o item 3.

Note que se  $h \in H_{r(e)}$  então  $h = \varphi(P_{r(e)})(h_0)$  para certo  $h_0 \in H$ ; como  $\varphi(P_{r(e)})$  é projeção temos  $\varphi(P_{r(e)})(h) = \varphi(P_{r(e)})\varphi(P_{r(e)})(h_0) = \varphi(P_{r(e)})(h_0) = h$ . Logo

$$\varphi(S_e)(h) = \varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)})(h) = \varphi(S_e)\varphi(S_e^*S_e)(h) = \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*(\varphi(S_e)(h)) \in H_e$$

o que mostra que  $\varphi(S_e)(H_{r(e)}) \subseteq H_e$ . Além disso, dado  $h \in H_e$  temos  $h = \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*(h)$ ; considere  $x = \varphi(P_{r(e)})\varphi(S_e)^*(h) \in H_{r(e)}$  e note que:

$$\varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)})\varphi(S_e)^*(h) = \varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)}S_e^*)(h) = \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*(h) = h.$$

Assim  $\varphi(S_e)$  é sobrejetor. Para provarmos que este mesmo operador é uma isometria, note que  $\varphi(S_e)$  é uma isometria parcial, logo  $\varphi(S_e)$  restrito a  $(\text{Ker } \varphi(S_e))^\perp$  é uma isometria. Pois bem, afirmamos que  $H_{r(e)} \subseteq (\text{Ker } \varphi(S_e))^\perp$ : com efeito, dados  $h = \varphi(P_{r(e)})(h) \in H_{r(e)}$  e  $x \in \text{Ker } (\varphi(S_e))$  temos:

$$\langle h, x \rangle = \langle \varphi(P_{r(e)})(h), x \rangle = \langle \varphi(S_e)^*\varphi(S_e)(h), x \rangle = \langle \varphi(S_e)(h), \varphi(S_e)(x) \rangle = 0.$$

Segue então que  $\varphi(S_e) : H_{r(e)} \rightarrow H_e$  é uma isometria. Para finalizar o terceiro item só nos resta ver que esse operador é unitário, com esse intuito, observe que como  $\varphi(S_e) : H_{r(e)} \rightarrow H_e$  é sobrejetor e isométrico (em particular injetor), existe o operador inverso  $\varphi(S_e)^{-1} : H_e \rightarrow H_{r(e)}$ ; além disso  $\forall h \in H_{r(e)}$  temos  $\varphi(S_e)\varphi(S_e)^*\varphi(S_e)(h) = \varphi(S_e)(h)$ , aplicando  $\varphi(S_e)^{-1}$  de ambos os lados concluímos que  $\varphi(S_e)^*\varphi(S_e)(h) = h$  para todo  $h \in H_{r(e)}$  donde segue que  $\varphi(S_e)^* = \varphi(S_e)^{-1}$  e portanto  $\varphi(S_e)$  é um operador unitário.

Quanto ao item 4, suponha que  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$ , assim,  $P_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} S_e S_e^*$  e como  $\varphi$  é um \*-homomorfismo temos

$$\varphi(P_v) = \varphi \left( \sum_{e \in s^{-1}(v)} S_e S_e^* \right) = \sum_{e \in s^{-1}(v)} \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*.$$

Logo,

$$H_v = \varphi(P_v)(H) = \left( \sum_{e \in s^{-1}(v)} \varphi(S_e)\varphi(S_e)^* \right) (H) \stackrel{(A)}{=} \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} \varphi(S_e)\varphi(S_e)^*(H) = \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} H_e$$

onde (A) se deve ao fato das projeções  $\varphi(S_e)\varphi(S_e)^*$  serem mutuamente ortogonais. Suponha agora que  $\#s^{-1}(v) = \infty$ . Note que se  $e \in s^{-1}(v)$  então  $H_e \subseteq H_{s(e)} = H_v$  pois  $P_{s(e)}S_eS_e^* = S_eS_e^*$ . Portanto, como  $H_v$  é fechado,  $\bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} H_e \subseteq H_v$ . Escolhendo

$V_v = \left( \bigoplus_{e \in s^{-1}(v)} H_e \right)^\perp$  (em relação ao espaço e Hilbert  $H_v$ ) segue a igualdade desejada. Por

fim, o item 5 segue escolhendo  $V = \left( \bigoplus_{v \in E^0} H_v \right)^\perp$  (em relação ao espaço de Hilbert  $H$ ).

□

Seguem algumas observações interessantes relacionadas a proposição acima:

**Observação 2.1.2.** *Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Pela Proposição 2.1.1 sabemos que  $H = \left( \bigoplus_{v \in E^0} H_v \right) \oplus V$ . Fixe  $y \in V$ . Sejam  $\mu$  e  $\nu$  dois caminhos no grafo  $E$  tais que  $r(\mu) = r(\nu)$  e considere  $a := S_\mu S_\nu^*$ . Note que*

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)(y)\|^2 &= \langle \varphi(a)(y), \varphi(a)(y) \rangle = \langle y, \varphi(a^*a)(y) \rangle = \\ &= \langle y, \varphi(S_\nu S_\mu^* S_\mu S_\nu^*)(y) \rangle = \langle y, \varphi(S_{s(\nu)})\varphi(S_\nu S_\mu^* S_\mu S_\nu^*)(y) \rangle = 0 \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que  $y \in V$  e assim  $y \in H_{s(\nu)}^\perp$ . Pelo Corolário 1.4.18 de (BIAZOTTO, 2012, pg. 24), pela linearidade e pela continuidade do produto interno temos que  $\|\varphi(x)(y)\|^2 = 0$  para todo  $x \in C^*(E)$ ; assim,  $\varphi(x)(y) = 0$ . Como  $y$  foi fixado arbitrariamente concluímos que  $\varphi(x)|_V = 0$ .

Em especial, quando  $H$  tem dimensão infinita e é separável sabemos que existe um conjunto ortonormal total em  $H$  que é enumerável (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012, pg. 123). Como todos conjuntos ortonormais totais de  $H$  possuem a mesma cardinalidade (KREYSZIG, 1978, pg. 168) então todo conjunto ortonormal total de  $H$  é enumerável.

**Observação 2.1.3.** *Suponha que  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  seja uma representação de  $C^*(E)$  com  $H$  separável. Note que  $\varphi(P_v) \neq 0_{B(H)}$  para, no máximo, uma quantidade enumerável de elementos  $v \in E^0$ ; com efeito, se não fosse assim teríamos  $\varphi(P_v) \neq 0_{B(H)}$  para uma quantidade não-enumerável de elementos  $v \in E^0$ , desse modo a coleção  $\{\varphi(P_v)(H)\}_{v \in I}$  (onde  $I \subset E^0$  é não-enumerável) é uma família de subespaços não nulos e ortogonais de  $H$ . Assim, escolhendo para cada  $v \in I$ ,  $B_v$  um conjunto ortonormal total em  $H_v$  temos que  $\bigcup_{v \in I} B_v$  é um conjunto ortonormal total não-enumerável em  $\bigoplus_{v \in I} H_v \subseteq H$  (esse fato*

decorre do lema que vem a seguir). Como  $H$  é separável,  $\bigoplus_{v \in I} H_v$  também o é, logo todo conjunto ortonormal total de  $\bigoplus_{v \in I} H_v$  deveria ser enumerável. Chegamos a um absurdo.

A observação acima nos diz que a cardinalidade de  $H$  deve ser maior ou igual a cardinalidade de  $E^0$ , caso contrário, a representação deve anular parte dos elementos de  $E^0$ .

Os itens da Proposição 2.1.1 mostram como escrever  $H$  em função dos subespaços  $H_v$  e  $H_e$ . Estamos interessados também em produzir conjuntos ortonormais totais em  $H$  a partir de conjuntos ortonormais totais em  $H_e$  e  $H_v$ . Para tanto, começamos com o seguinte lema:

**Lema 2.1.4.** *Seja  $X$  um espaço de Hilbert e  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$  uma família de subespaços tais que  $A_\lambda \perp A_\mu$  sempre  $\lambda \neq \mu$  e  $\lambda, \mu \in \Lambda$ . Suponha que para cada  $\lambda \in \Lambda$  exista um conjunto ortonormal total,  $B_\lambda$  de  $A_\lambda$ . Assim, se  $H := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  então  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  é um conjunto ortonormal total em  $H$ .*

*Demonstração.* É claro que se  $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  então  $\|x\| = 1$ . Além disso, se  $x, y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  temos duas opções: se existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tal que  $x, y \in B_{\lambda_0}$  então, como  $B_{\lambda_0}$  é ortonormal, segue que  $\langle x, y \rangle = 0$ ; caso contrário,  $x \in B_{\lambda_0}$  e  $y \in B_{\lambda_1}$  para certos  $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$  tais que  $\lambda_0 \neq \lambda_1$ , como  $A_{\lambda_0} \perp A_{\lambda_1}$  temos  $\langle x, y \rangle = 0$ . Resta verificar que  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  é total em  $H$ , ou

seja, que  $\overline{\text{span} \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)} = H$ .

Para tanto, tome  $h \in H$  e fixe  $\epsilon > 0$ . Queremos encontrar  $b \in \text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  tal que  $\|h - b\| < \epsilon$ . Como  $H = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  existe  $a = a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} \in \text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  (onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lambda_i \in \Lambda$  para cada  $i = 1, \dots, n$ ) tal que  $\|h - a\| < \frac{\epsilon}{2}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$   $B_{\lambda_i}$  é um conjunto ortonormal total de  $A_{\lambda_i}$  por hipótese, logo existe  $b_{\lambda_i} \in \text{span} B_{\lambda_i}$  tal que  $\|a_{\lambda_i} - b_{\lambda_i}\| < \frac{\epsilon}{2n}$ . Defina  $b = b_{\lambda_1} + \dots + b_{\lambda_n}$ , note que  $b \in \text{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$  e além disso,

$$\begin{aligned} \|h - b\| &\leq \|h - a\| + \|a - b\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \|a_{\lambda_1} - b_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} - b_{\lambda_n}\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|a_{\lambda_1} - b_{\lambda_1}\| + \dots + \|a_{\lambda_n} - b_{\lambda_n}\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + n \frac{\epsilon}{2n} = \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que  $\overline{\text{span} \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right)} \subseteq H$ . A outra inclusão é imediata.  $\square$

**Proposição 2.1.5.** *Sejam  $H_1, H_2$  espaços de Hilbert e  $T : H_1 \rightarrow H_2$  uma isometria (linear) sobrejetora. Assim,  $T$  preserva conjuntos ortonormais totais, i.e., se  $D \subseteq H_1$  é um conjunto ortonormal total em  $H_1$  então  $T(D)$  é um conjunto ortonormal total em  $H_2$ .*

*Demonstração.* Lembramos que toda isometria entre espaços de Hilbert preserva produtos internos; o que é uma consequência da identidade de polarização. Além disso, sendo  $T$  uma isometria,  $T$  é injetora e portanto inversível pois é sobrejetora por hipótese. Dados  $y_1, y_2 \in T(D)$  existem  $x_1, x_2 \in D$  tais que  $T(x_1) = y_1$  e  $T(x_2) = y_2$ .

- Se  $y_1 \neq y_2$  então  $T^{-1}(y_1) \neq T^{-1}(y_2)$  pois  $T^{-1}$  é injetora, daí  $x_1 \neq x_2$ . Assim,

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle T(x_1), T(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

onde a última igualdade é verdadeira pois  $D$  é ortonormal.

- Se  $y_1 = y_2$ , ou seja se  $T(x_1) = T(x_2)$  então  $x_1 = x_2$  pois  $T$  é injetora. Assim

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \langle T(x_2), T(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = 1.$$

onde a última igualdade segue novamente de  $D$  ser ortonormal.

Segue que  $T(D)$  é um conjunto ortonormal. Resta-nos verificar que  $T(D)$  é total; dado  $y \in H_2$  como  $T$  é sobrejetora existe  $x \in H_1$  tal que  $T(x) = y$ , como  $D$  é total em  $H_1$  existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{span } D$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Pela continuidade de  $T$  temos  $T(x_n) \rightarrow T(x) = y$ , logo  $y$  é o limite de uma sequência de elementos de  $T(\text{span } D) = \text{span } T(D)$  mostrando que  $y \in \overline{\text{span } T(D)}$  e portanto  $T(D)$  é total em  $H_2$ .  $\square$

**Definição 2.1.6.** *Seja  $E$  um grafo e  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Dizemos que  $\varphi$  satisfaz a condição (BPB) se  $\forall v \in E^0$  e  $\forall e \in E^1$  existem conjuntos ortonormais totais  $B_v$  de  $H_v$  e  $B_e$  de  $H_e$  tais que:*

- Se  $e \in s^{-1}(v)$  então  $B_e \subseteq B_v$ .
- Se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  então  $B_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$ .
- $\varphi(S_e)(B_{r(e)}) = B_e$  para todo  $e \in E^1$ .

Observe que como  $\varphi(S_e) : H_{r(e)} \rightarrow H_e$  e  $\varphi(S_e)^{-1} = \varphi(S_e)^* : H_e \rightarrow H_{r(e)}$  são isometrias lineares sobrejetoras, pela Proposição 2.1.5  $\varphi(S_e)(B_{r(e)})$  é um conjunto ortonormal total em  $H_e$  e  $\varphi(S_e)^*(B_e)$  é um conjunto ortonormal total em  $H_{r(e)}$ . Note que a terceira condição da definição acima é mais específica, estamos pedindo que o conjunto  $\varphi(S_e)(B_{r(e)})$  seja exatamente  $B_e$ , ou equivalentemente, que  $B_{r(e)} = \varphi(S_e)^*(B_e)$ .

**Exemplo 2.1.7.** *Considere o grafo a seguir.*



Vamos construir uma representação que não satisfaz a condição (BPB). Considere o operador  $U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  dado por  $U(z, w) = (iz, iw)$ . Note que  $U \in B(\mathbb{C}^2)$  e  $U^{-1}(z, w) = \left(\frac{z}{i}, \frac{w}{i}\right)$ . Além disso, para todos  $(z, w), (u, v) \in \mathbb{C}^2$  vale que

$$\langle U(z, w), (u, v) \rangle = \langle (iz, iw), (u, v) \rangle = iz\bar{u} + iw\bar{v}$$

e

$$\langle (z, w), U^{-1}(u, v) \rangle = \langle (z, w), \left(\frac{u}{i}, \frac{v}{i}\right) \rangle = z\frac{\bar{u}}{-i} + w\frac{\bar{v}}{-i} = iz\bar{u} + iw\bar{v}.$$

Portanto  $U^{-1} = U^*$  mostrando que  $U$  é unitário. Defina  $\bar{\varphi} : \{s_e, p_v\} \rightarrow B(\mathbb{C}^2)$  por  $\bar{\varphi}(s_e) = U$  e  $\bar{\varphi}(p_v) = Id$ . Nota-se rapidamente que  $\bar{\varphi}$  é uma representação, do conjunto de geradores de  $C^*(E)$ , que satisfaz as relações que definem  $C^*(E)$ . Pela propriedade universal de  $C^*(E)$  existe um único  $*$ -homomorfismo, ou seja, uma única representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(\mathbb{C}^2)$  tal que  $\varphi(S_e) = \bar{\varphi}(s_e) = U$  e  $\varphi(P_v) = \bar{\varphi}(p_v) = Id$ .

Note que  $H_{r(e)} = H_v = Id(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2$  e  $H_e = UU^*(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2$ . Suponha que  $\varphi$  satisfaça a condição (BPB), assim existem conjuntos ortonormais totais  $B_e \subseteq H_e$  e  $B_v \subseteq H_v$  tais que  $B_v = B_e$  e  $\varphi(S_e)(B_{r(e)}) = \varphi(S_e)(B_v) = B_e$ . Por outro lado, como  $B_e$  é um conjunto ortonormal total de  $\mathbb{C}^2$  temos  $B_e = \{(z_1, z_2), (w_1, w_2)\}$ . Portanto,

$$\varphi(S_e)(B_{r(e)}) = U(B_e) = \{(iz_1, iz_2), (iw_1, iw_2)\} \neq B_e.$$

o que é um absurdo.

**Exemplo 2.1.8.** Considere o grafo  $E$  dado por

$$\dots \xrightarrow{e_{-1}} v_{-1} \xrightarrow{e_0} v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots$$

Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação de  $C^*(E)$ . Vamos mostrar que  $\varphi$  satisfaz (BPB). Escolha um conjunto ortonormal total  $B_{v_0} \subseteq H_{v_0}$  e defina recursivamente:

$$B_{e_0} := \varphi(S_{e_0})(B_{v_0}), \quad B_{v_{-1}} := B_{e_0}, \quad B_{e_{-1}} := \varphi(S_{e_{-1}})(B_{v_{-1}}), \quad B_{v_{-2}} := B_{e_{-1}}, \quad \dots \text{ para } n \leq 0.$$

$$B_{e_1} := B_{v_0}, \quad B_{v_1} := \varphi(S_{e_1})^*(B_{e_1}), \quad B_{e_2} := B_{v_1}, \quad B_{v_2} := \varphi(S_{e_2})^*(B_{e_2}), \quad \dots \text{ para } n > 0.$$

Com tais escolhas temos  $B_{e_n} = \varphi(S_{e_n})(B_{v_n})$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Pela Proposição 2.1.5  $B_{e_n}$  é um conjunto ortonormal total em  $H_{e_n}$  e consequentemente  $B_{v_n}$  é um conjunto ortonormal total em  $H_{v_n}$ . Note que  $B_{v_n} = B_{e_{n+1}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_n)} B_e$ . Além disso:

$$\varphi(S_{e_n})(B_{r(e_n)}) = \varphi(S_{e_n})(B_{v_n}) = B_{e_n}.$$

provando que a representação  $\varphi$  satisfaz (BPB).

**Exemplo 2.1.9.** Considere o grafo  $E$  composto por um vértice  $v$  e  $k$  loops baseados em  $v$ ;



Defina para cada  $i = 1, \dots, k$  o operador  $U_i : l^2 \rightarrow l^2$  dado por

$$U_i((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, \dots, 0, \overbrace{x_1}^i, 0, \dots, 0, \overbrace{x_2}^{i+k}, 0, \dots, 0, \overbrace{x_3}^{i+2k}, \dots)$$

É claro que  $U_i \in B(l^2)$ . Defina  $\bar{\varphi} : \{p_v, s_{e_1}, \dots, s_{e_k}\} \rightarrow B(l^2)$  por  $\bar{\varphi}(p_v) = Id$  e  $\bar{\varphi}(s_{e_i}) = U_i$ ; Para cada  $i = 1, \dots, k$  temos

$$U_i^*((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (y_i, y_{i+k}, y_{i+2k}, \dots).$$

Note que cada  $U_i$  é uma isometria (parcial) e suas imagens (para  $i \neq j$ ) são mutuamente ortogonais. Além disso,

$$\begin{aligned} U_i^*U_i(x) &= U_i^*((0, \dots, 0, \overbrace{x_1}^i, 0, \dots, 0, \overbrace{x_2}^{i+k}, \dots)) \\ &= (x_1, x_2, \dots) = Id(x). \end{aligned}$$

Também,  $Id = U_iU_i^* = U_iU_i^*$  e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k U_iU_i^*(y) &= \sum_{i=1}^k U_i((y_i, y_{i+k}, y_{i+2k}, \dots)) \\ &= \sum_{i=1}^k (0, \dots, 0, \overbrace{y_i}^i, 0, \dots, 0, \overbrace{y_{i+k}}^{i+k}, \dots) \\ &= (y_1, y_2, \dots) = Id(y). \end{aligned}$$

Portanto  $\bar{\varphi}$  é uma representação, do conjunto de geradores de  $C^*(E)$ , que satisfaz as relações que definem  $C^*(E)$ . Pela propriedade universal de  $C^*(E)$  existe um  $*$ -homomorfismo  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(l^2)$  tal que  $\varphi(s_{e_i}) = U_i$  e  $\varphi(p_v) = Id$ . Vamos mostrar que tal representação satisfaz (BPB). Vimos acima que

$$U_iU_i^*(y) = (0, \dots, 0, \overbrace{y_i}^i, 0, \dots, 0, \overbrace{y_{i+k}}^{i+k}, \dots)$$

de modo que se  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a base canônica de  $l^2$  então

$$H_{e_i} = U_iU_i^*(l^2) = \overline{\text{span}\{\delta_i, \delta_{i+k}, \delta_{i+2k} \dots\}}.$$



Escolha, para cada  $i = 1, \dots, k$ ,  $B_{e_i} = \{\delta_i, \delta_{i+k}, \delta_{i+2k}, \dots\} \subseteq H_{e_i} = U_i U_i^*(l^2)$  que é um conjunto ortonormal total de  $H_{e_i}$ ; além disso, defina:

$$B_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e = \bigcup_{i=1}^k B_{e_i} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots\} = (\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Como  $H_{r(e_i)} = H_v$  para todo  $i = 1, \dots, k$  temos  $\varphi(S_{e_i})(B_v) = \varphi(S_{e_i})((\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}) = B_{e_i}$  pois  $\varphi(S_{e_i})(\delta_1) = \delta_i$ ,  $\varphi(S_{e_i})(\delta_2) = \delta_{i+k}$ ,  $\varphi(S_{e_i})(\delta_3) = \delta_{i+2k}$  e assim consecutivamente. Isso mostra que  $\varphi$  satisfaz (BPB).

O fato de uma representação  $\varphi$  de  $C^*(E)$  satisfazer a condição (BPB) é suficiente para que tal representação seja “igual” (no sentido da próxima definição) a uma representação induzida por um sistema ramificado. Esse será o nosso próximo teorema.

**Definição 2.1.10.** *Seja  $A$  uma  $C^*$ -álgebra,  $\varphi : A \rightarrow B(H_1)$  e  $\pi : A \rightarrow B(H_2)$  representações de  $A$ . Dizemos que  $\varphi$  e  $\pi$  são unitariamente equivalentes se existe um operador unitário  $U : H_1 \rightarrow H_2$  tal que  $\varphi(a) = U^* \pi(a) U$  para todo  $a \in A$ , i.e, tal que o diagrama abaixo comuta para todo  $a \in A$ .*

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\varphi(a)} & H_1 \\ U \downarrow & & \uparrow U^* \\ H_2 & \xrightarrow{\pi(a)} & H_2 \end{array}$$

O teorema abaixo foi demonstrado em (GONÇALVES; ROYER, 2011) com a hipótese de  $H$  ser separável. Nesse trabalho, faremos uma pequena generalização de tal resultado, retirando tal hipótese.

**Teorema 2.1.11.** *Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação de  $C^*(E)$  que satisfaz a condição (BPB). Assim,  $\varphi$  é unitariamente equivalente a uma representação  $\pi : C^*(E) \rightarrow B(l^2(\Lambda))$  onde  $\pi$  é induzida por um  $E$ -sistema ramificado.*

*Demonstração.* A demonstração desse teorema possui duas grandes partes. A primeira consiste em criar, adequadamente, um sistema ramificado e uma representação induzida por tal sistema; a segunda, em provar a equivalência unitária de tal representação e  $\varphi$ .

Pensando na primeira, pela Proposição 2.1.1  $H = \left( \bigoplus_{v \in E^0} H_v \right) \oplus V$ ; defina  $B' = \bigcup_{v \in E^0} B_v$ ;  $B'$  é um conjunto ortonormal total em  $\bigoplus_{v \in E^0} H_v$  pelo Lema 2.1.4. Escolha também  $D$  conjunto ortonormal total em  $V$ . Por fim, defina  $B = B' \cup D$  e note que  $B$  é um conjunto ortonormal total em  $H$  pelo mesmo lema. Observe que  $B_v \subseteq B$  e  $B_e \subseteq B$  para todo  $v \in E^0$  e para todo  $e \in E^1$ .

Escreva  $B = \{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  e considere o espaço de medida  $(\Lambda, P(\Lambda), \eta)$  onde  $P(\Lambda)$  denota o conjunto das partes de  $\Lambda$  e  $\eta$  é a medida de contagem. Defina para cada  $e \in E^1$  e para cada  $v \in E^0$  os conjuntos

$$R_e = \{\lambda \in \Lambda \mid b_\lambda \in B_e\} \quad D_v = \{\lambda \in \Lambda \mid b_\lambda \in B_v\}.$$

Note que  $R_e$  e  $D_v$  são conjuntos mensuráveis para todo  $e \in E^1$  e  $v \in E^0$ , respectivamente. Além disso:

- Se  $e \neq f$  então  $H_e \cap H_f = \{0_H\}$  pela Proposição 2.1.1. Como  $B_e \subseteq H_e$  e  $B_f \subseteq H_f$  são ortonormais,  $0_H \notin B_e$  e  $0_H \notin B_f$  donde segue que  $B_e \cap B_f = \emptyset$  e consequentemente  $R_e \cap R_f = \emptyset$ .
- Se  $v \neq w$  então  $H_v \cap H_w = \{0_H\}$  pela Proposição 2.1.1. Como  $B_v \subseteq H_v$  e  $B_w \subseteq H_w$  são ortonormais,  $0_H \notin B_v$  e  $0_H \notin B_w$  donde segue que  $B_v \cap B_w = \emptyset$  e consequentemente  $D_v \cap D_w = \emptyset$ .
- Dado  $e \in E^1$ , tome  $\lambda \in R_e$ , daí  $b_\lambda \in B_e$ . Como  $e \in s^{-1}(s(e))$  e  $\varphi$  satisfaz (BPB) temos  $B_e \subseteq \bigcup_{f \in s^{-1}(s(e))} B_f \subseteq B_{s(e)}$ . Portanto,  $b_\lambda \in B_{s(e)}$ , logo  $\lambda \in D_{s(e)}$  mostrando que  $R_e \subseteq D_{s(e)}$ .
- Dado  $v \in E^0$  tal que  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$ , a condição (BPB) nos dá  $B_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$ , assim  $D_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e$ , com efeito:

$$\lambda \in D_v \Leftrightarrow b_\lambda \in B_v \Leftrightarrow b_\lambda \in B_{e'} \text{ para algum } e' \in s^{-1}(v) \Leftrightarrow \lambda \in \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} R_e.$$

Fixado  $e \in E^1$  vamos definir a função  $f_e : D_{r(e)} \rightarrow R_e$  da seguinte forma: dado  $\lambda_0 \in D_{r(e)}$  temos  $b_{\lambda_0} \in B_{r(e)}$  e pela condição (BPB)  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) \in B_e$ . Portanto,  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = b_{\mu_0}$  para algum  $\mu_0 \in \Lambda$ . Defina  $f_e(\lambda_0) = \mu_0$ .

Se  $\mu_0 \in R_e$  então  $b_{\mu_0} \in B_e$  e por (BPB) existe  $\lambda_0 \in D_{r(e)}$  tal que  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = b_{\mu_0}$ , logo  $f_e(\lambda_0) = \mu_0$  mostrando que  $f_e$  é sobrejetora. Além disso, se  $\mu_1 =: f_e(\lambda_1) = f_e(\lambda_0) := \mu_0$  temos  $b_{\mu_1} = b_{\mu_0}$ , assim  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_1}) = b_{\mu_1} = b_{\mu_0} = \varphi(S_e)(b_{\lambda_0})$  e pela injetividade de  $\varphi(S_e)$  (Proposição 2.1.1) temos  $b_{\lambda_1} = b_{\lambda_0}$ . Portanto,  $\lambda_1 = \lambda_0$  o que mostra que  $f_e$  é também injetiva. Além disso, como  $\mathcal{M}_{D_{r(e)}} = P(D_{r(e)})$  e  $\mathcal{M}_{R_e} = P(R_e)$  as funções  $f_e$  e  $f_e^{-1}$  são mensuráveis.

Como  $\eta$  é a medida de contagem temos  $\Phi_{f_e}(n) = 1$  para todo  $n \in D_{r(e)}$  e  $\Phi_{f_e^{-1}}(n) = 1$  para todo  $n \in R_e$ : basta ver que  $\forall A \in \mathcal{M}_{D_{r(e)}}$  temos  $\eta \circ f_e(A) = \eta(A)$  e  $\forall A \in \mathcal{M}_{R_e}$  temos  $\eta \circ f_e^{-1}(A) = \eta(A)$  visto que  $f_e$  é bijeção.

Pelo Exemplo A.1.3  $\eta : P(\Lambda) \rightarrow [0, \infty]$  é semi-finita. Pelo Teorema 1.1.5  $(\Lambda, P(\Lambda), \eta)$  é um  $E$ -sistema ramificado. Pelo Teorema 1.1.11 existe uma representação  $\pi : C^*(E) \rightarrow B(L^2(\Lambda, P(\Lambda), \eta)) = B(l^2(\Lambda))$  tal que:

$$\pi(S_e)(\phi) = \chi_{R_e} \cdot \Phi_{f_e^{-1}}^{\frac{1}{2}}(\phi \circ f_e^{-1}) = \chi_{R_e} \cdot (\phi \circ f_e^{-1}) \quad \text{e} \quad \pi(P_v)(\phi) = \chi_{D_v} \cdot \phi$$

Vamos nos concentrar agora na segunda parte do teorema, que como comentado anteriormente tem como objetivo provar a equivalência unitária das representações  $\pi$  e  $\varphi$ . Com esse intuito, defina  $U : \text{span}\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow l^2(\Lambda)$  dado por

$$U(\alpha_1 b_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n b_{\lambda_n}) = \alpha_1 \chi_{\{\lambda_1\}} + \dots + \alpha_n \chi_{\{\lambda_n\}}.$$

O operador  $U$  é claramente linear; para vermos que o mesmo é limitado, notamos que dado  $x = \alpha_1 b_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n b_{\lambda_n}$  temos  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$  pois  $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  é um conjunto ortonormal. Como  $\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$  também é um conjunto ortonormal (em  $l^2(\Lambda)$ ) temos

$$\|Ux\|^2 = \|\alpha_1 \chi_{\{\lambda_1\}} + \dots + \alpha_n \chi_{\{\lambda_n\}}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \|x\|^2$$

o que mostra que  $U$  é limitado. Como  $l^2(\Lambda)$  é Hilbert, podemos estender o operador  $U$  para um operador  $U' : H = \overline{\text{span}\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}} \rightarrow l^2(\Lambda)$ . Escreveremos  $U' = U$  por abuso de notação e para tentar manter nosso texto o mais limpo possível.

Pelo teorema A.1.10 sabemos que o conjunto das funções simples,  $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$  com  $\eta(E_j) < \infty$ , é denso em  $L^2(\Lambda, P(\Lambda), \eta)$ . Observe todo conjunto  $A$  em  $P(\Lambda)$  que satisfaz  $\eta(A) < \infty$  é finito, logo  $A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  e assim  $\chi_A = \chi_{\{\lambda_1\}} + \dots + \chi_{\{\lambda_n\}}$ . Portanto toda função simples da forma acima pertence ao conjunto  $\text{span}\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$  o que mostra que tal conjunto é denso em  $L^2(\Lambda, P(\Lambda), \eta) = l^2(\Lambda)$ . Com o mesmo argumento usado para a construção de  $U$  podemos construir  $T : \text{span}\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow H$  dado por

$$T(\alpha_1 \chi_{\{\lambda_1\}} + \dots + \alpha_n \chi_{\{\lambda_n\}}) = \alpha_1 b_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n b_{\lambda_n}$$

e estendê-lo para um operador  $T : \overline{\text{span}\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda}} = l^2(\Lambda) \rightarrow H$ . Note que  $T = U^{-1}$ .

**Afirmção 1:** O operador  $U : H \rightarrow l^2(\Lambda)$  construído acima é unitário.

Note que dados  $h' = \alpha_1 b_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n b_{\lambda_n} \in \text{span}\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  e  $f' = \beta_1 \chi_{\{\mu_1\}} + \dots + \beta_m \chi_{\{\mu_m\}} \in \text{span}\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$  temos

$$\begin{aligned} \langle U(h'), f' \rangle &= \langle \alpha_1 \chi_{\{\lambda_1\}} + \dots + \alpha_n \chi_{\{\lambda_n\}}, \beta_1 \chi_{\{\mu_1\}} + \dots + \beta_m \chi_{\{\mu_m\}} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_j \langle \chi_{\{\lambda_i\}}, \chi_{\{\mu_j\}} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_j \delta_{\lambda_i \mu_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \bar{\beta}_j \langle b_{\lambda_i}, b_{\mu_j} \rangle = \\ &= \langle \alpha_1 b_{\lambda_1} + \dots + \alpha_n b_{\lambda_n}, \beta_1 b_{\mu_1} + \dots + \beta_m b_{\mu_m} \rangle = \langle h', U^{-1}(f') \rangle. \end{aligned}$$

Dados  $h \in H$  e  $f \in l^2(\Lambda)$  existem seqüências  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{span}\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{span}\{\chi_{\{\lambda\}}\}_{\lambda \in \Lambda}$  tais que  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$  e  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ . Portanto,

$$\langle U(h), f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U(h_n), f_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n, U^{-1}(f_n) \rangle = \langle h, U^{-1}(f) \rangle$$

mostrando que  $U^{-1} = U^*$ , ou seja,  $U$  é um operador unitário.

**Afirmção 2:**  $U^* \pi(S_e) U = \varphi(S_e)$  para todo  $e \in E^1$ .

Fixe  $e \in E^1$ . Dado  $b_{\lambda_0} \in B$  note que  $\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = \pi(S_e)(\chi_{\{\lambda_0\}}) = \chi_{R_e}(\chi_{\{\lambda_0\}} \circ f_e^{-1})$ , ou seja,

$$\pi(S_e)U(b_{\lambda_0})(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu \in R_e \text{ e } \mu = f_e(\lambda_0). \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consideramos 2 casos.

*Caso 1:*  $b_{\lambda_0} \notin B_{r(e)}$ . Nesse caso,  $\lambda_0 \notin D_{r(e)}$ . Se existisse  $\mu \in \Lambda$  tal que  $\mu \in R_e$  e  $\mu = f_e(\lambda_0)$  então  $f_e^{-1}(\mu) = \lambda_0 \in D_{r(e)}$ , absurdo. Logo  $\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = 0$  e  $U^*\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = 0$ . Além disso, notamos que  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = 0$ ; com efeito, como  $b_{\lambda_0} \notin B_{r(e)}$ ,  $b_{\lambda_0} \in B_v$  para algum  $v \neq r(e)$  ou  $b_{\lambda_0} \in D$ . Na primeira situação  $b_{\lambda_0} \in H_v$ , logo  $b_{\lambda_0} = \varphi(P_v)(b_{\lambda_0})$ , portanto:

$$\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = \varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)})\varphi(P_v)(b_{\lambda_0}) = \varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)}P_v)(b_{\lambda_0}) = 0.$$

Na segunda situação  $b_{\lambda_0} \in D \subseteq \left( \bigoplus_{v \in E^0} H_v \right)^\perp \subseteq H_{r(e)}^\perp = \text{Ker } \varphi(P_{r(e)})$  donde segue que  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = \varphi(S_e)\varphi(P_{r(e)})(b_{\lambda_0}) = 0$ . De toda maneira, temos:

$$U^*\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = 0 = \varphi(S_e)(b_{\lambda_0})$$

*Caso 2:*  $b_{\lambda_0} \in B_{r(e)}$ . Nesse caso a condição (BPB) garante que  $\varphi(S_e)(b_{\lambda_0}) = b_{\mu_0}$  para certo  $b_{\mu_0} \in B_e$ . Isso significa que  $f_e(\lambda_0) = \mu_0$ . Assim,

$$\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu \in R_e \text{ e } \mu = f_e(\lambda_0). \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \mu_0. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} = \chi_{\{\mu_0\}}.$$

Portanto,

$$U^*\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = U^*(\chi_{\{\mu_0\}}) = b_{\mu_0} = \varphi(S_e)(b_{\lambda_0}).$$

Provamos então que  $U^*\pi(S_e)U(b_{\lambda_0}) = \varphi(S_e)(b_{\lambda_0})$  para todo  $b_{\lambda_0} \in B$ . A linearidade e a continuidade dos operadores  $U^*, U, \pi(S_e)$  e  $\varphi(S_e)$  aliada a densidade de  $\text{span}\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  em  $H$  garante que o resultado vale para todo  $h \in H$  e assim  $U^*\pi(S_e)U = \varphi(S_e)$ .

**Afirmção 3:**  $U^*\pi(P_v)U = \varphi(P_v)$  para todo  $v \in E^0$ .

Fixe  $v \in E^0$ . Dado  $b_{\lambda_0} \in B$  temos  $\pi(P_v)U(b_{\lambda_0}) = \chi_{D_v}\chi_{\{\lambda_0\}}$ . Assim,

$$U^*\pi(P_v)U(b_{\lambda_0}) = U^*(\chi_{D_v}\chi_{\{\lambda_0\}}) = U^*(\chi_{D_v \cap \{\lambda_0\}}) = b_{\lambda_0} \cdot \chi_{B_v}(U^*(\chi_{\{\lambda_0\}})).$$

Além disso, note que  $\varphi(P_v)(b_{\lambda_0}) = b_{\lambda_0} \cdot \chi_{B_v}(b_{\lambda_0})$ . Portanto,

$$U^*\pi(P_v)U(b_{\lambda_0}) = b_{\lambda_0} \cdot \chi_{B_v}(U^*(\chi_{\{\lambda_0\}})) = b_{\lambda_0} \cdot \chi_{B_v}(b_{\lambda_0}) = \varphi(P_v)(b_{\lambda_0}).$$

O mesmo argumento usado na **Afirmção 2** (linearidade, continuidade e densidade) garante que  $U^*\pi(P_v)U = \varphi(P_v)$ .

**Afirmção 4:**  $\pi$  e  $\varphi$  são unitariamente equivalentes.

Pelas afirmações 2 e 3, sabemos que  $U^*\pi(S_e)U = \varphi(S_e)$  e  $U^*\pi(P_v)U = \varphi(P_v)$  para todos  $e \in E^1$  e  $v \in E^0$ . Portanto, se  $G = \{S_e\}_{e \in E^1} \cup \{P_v\}_{v \in E^0}$  mostramos que  $\forall g \in G$  vale que  $U^*\pi(g)U = \varphi(g)$ . Consequentemente temos

$$U^*\pi(S_e^*)U = (U^*\pi(S_e)U)^* = \varphi(S_e)^* = \varphi(S_e^*)$$

e

$$U^*\pi(P_v^*)U = (U^*\pi(P_v)U)^* = \varphi(P_v)^* = \varphi(P_v^*).$$

Além disso, se  $r = g_1 \dots g_n \in F_G$ , ou seja, se  $r$  é uma palavra finita constituída de elementos do alfabeto  $G \cup G^*$  temos

$$\begin{aligned} U^*\pi(r)U &= U^*\pi(g_1) \dots \pi(g_n)U \\ &= U^*\pi(g_1)U U^*\pi(g_2)U \dots U U^*\pi(g_n)U \\ &= \varphi(g_1) \dots \varphi(g_n) \\ &= \varphi(r). \end{aligned}$$

Prosseguindo, se  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \in B_{F_G}$ , ou seja, se  $x$  é uma combinação linear (formal) de palavras finitas então:

$$\begin{aligned} U^*\pi(x)U &= U^* \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(r_i) \right) U \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (U^*\pi(r_i)U) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(r_i) \\ &= \varphi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Finalmente, se  $x \in C^*(E)$  então existe uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \frac{B_{F_G}}{N}^1$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , logo  $\pi(x_n) \rightarrow \pi(x)$  e assim  $U^*\pi(x_n)U \rightarrow U^*\pi(x)U$ . Por outro lado,  $U^*\pi(x_n)U = \varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$  e portanto  $U^*\pi(x)U = \varphi(x)$  para todo  $x \in C^*(E)$  finalizando a demonstração.  $\square$

No caso em que  $H$  é separável, temos o seguinte caso particular do Teorema 2.1.11.

**Corolário 2.1.12.** *Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação de  $C^*(E)$  que satisfaz a condição (BPB) e suponha que  $H$  é separável. Então  $\varphi$  é unitariamente equivalente a uma representação  $\pi : C^*(E) \rightarrow B(l^2(\mathbb{N}))$  onde  $\pi$  é induzida por um  $E$ -sistema ramificado.*

*Demonstração.* Decorre do fato de todo conjunto ortonormal total de  $H$  ser enumerável.

$\square$

<sup>1</sup> onde  $\frac{B_{F_G}}{N}$  denota o conjunto cujo complemento é  $C^*(E)$ .

## 2.2 Adjacência, conexidade e níveis

Nessa seção abordaremos alguns conceitos que estão relacionados a grafos não-orientados, traduzindo-os para grafos orientados. Começaremos estudando as relações de adjacência entre vértices e arestas, em seguida introduziremos a noção de conexidade e por fim falaremos sobre o importante conceito de nível de um vértice e de uma aresta. Todos esses conceitos são peças fundamentais para as próximas seções de modo que essa seção estabelece várias notações e linguagens necessárias para o decorrer do trabalho.

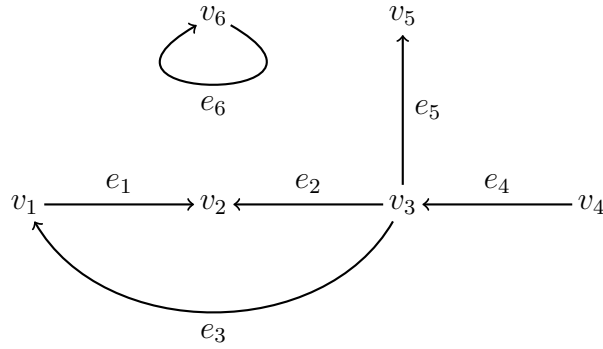
**Definição 2.2.1.** *Seja  $E$  um grafo.*

1. Dado  $f \in E^1$  e  $v \in E^0$  dizemos que  $f$  e  $v$  são **adjacentes** se  $r(f) = v$  ou  $s(f) = v$ .
2. Dois vértices,  $u, v \in E^0$  tais que  $u \neq v$ , são ditos **adjacentes** se existe uma aresta  $f \in E^1$  tal que  $f$  é adjacente a  $u$  e  $f$  é adjacente a  $v$ .
3. Duas arestas,  $f, g \in E^1$  tais que  $f \neq g$ , são ditas **adjacentes** se existe um vértice  $v \in E^0$  tal que  $v$  é adjacente a  $f$  e  $v$  é adjacente a  $g$ .
4. Um **caminho não orientado** entre  $u, v \in E^0$  é um par  $(u_0u_1 \dots u_n, e_1e_2 \dots e_n)$  (com  $n \geq 1$ ); onde  $u_i \in E^0$  para todo  $i = 0, \dots, n$ ,  $e_i \in E^1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ; tal que:
  - a)  $u_0 = u$  e  $u_n = v$ .
  - b)  $e_i \neq e_j$  sempre que  $i \neq j$ .
  - c) Para cada  $i = 1, \dots, n$  vale que  $r(e_i) = u_{i-1}$  e  $s(e_i) = u_i$  ou  $r(e_i) = u_i$  e  $s(e_i) = u_{i-1}$ .
5. Um **ciclo** é um caminho não orientado  $(u_0u_1 \dots u_n, e_1e_2 \dots e_n)$  tal que  $u_0 = u_n$ .

Diremos que dois caminhos  $(u_0u_1 \dots u_n, e_1e_2 \dots e_n)$  e  $(v_0v_1 \dots v_p, d_1d_2 \dots d_p)$  são iguais se  $n = p$ ,  $u_i = v_i$  ( $\forall i = 0, \dots, n$ ) e  $e_i = d_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ).

**Observação 2.2.2.** *Note que a noção de caminho não orientado é diferente da noção de um caminho no grafo  $E$ ; é verdade que todo caminho é um caminho não orientado porém a recíproca não é verdadeira. **A partir de agora, a menos que digamos o contrário, a palavra caminho designará sempre um caminho não orientado.***

**Exemplo 2.2.3.** *Considere o grafo  $E$  a seguir.*



São válidas, por exemplo as seguintes afirmações:  $v_3$  é adjacente a  $e_5$ ,  $v_1$  é adjacente a  $v_2$ ,  $e_4$  é adjacente a  $e_5$ ,  $(v_2v_3v_5, e_2e_5)$  é um caminho que não é um ciclo e  $(v_1v_2v_3v_1, e_1e_2e_3)$  é um ciclo.

No exemplo acima é verdade também que  $(v_6v_6, e_6)$  é um ciclo. Em geral, dado  $E$  um grafo e  $e$  um loop em  $E$  é verdade que  $(s(e)r(e), e)$  é um ciclo, ou seja, todo grafo que possui um loop possui um ciclo. Estamos interessados em identificar de quantas maneiras podemos “andar pelas arestas dos grafos” para ir de um vértice a outro, se é que isso é possível. Para formalizar essa ideia apresentamos a seguinte definição.

**Definição 2.2.4.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo. Dizemos que  $E$  é  $P$ -simples se:*

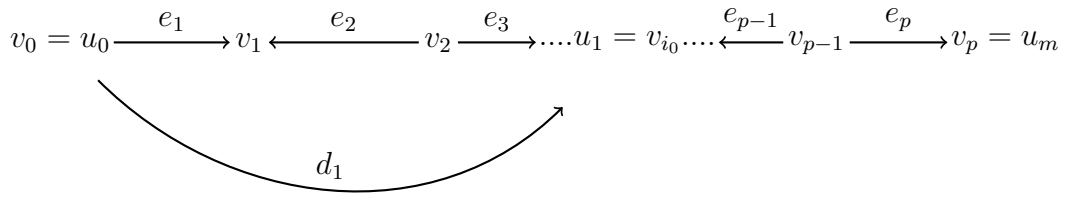
- Para todos  $u, v \in r(E^1) \cup s(E^1)$  tais que  $u \neq v$  existe no máximo um caminho entre  $u$  e  $v$ .
- $E$  não possui loops.

**Teorema 2.2.5.** *Um grafo  $E$  é  $P$ -simples se, e somente se,  $E$  não possui ciclos.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha, por absurdo, que  $E$  possui um ciclo; digamos que seja  $(u_0u_1 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$ . Se  $p = 1$  temos  $(u_0u_1, e_1)$  com  $u_0 = u_1$ ; pela definição de caminho temos, em todo caso,  $r(e_1) = u_0 = u_1 = s(e_1)$ . Portanto temos um loop o que contradiz o fato de  $E$  ser  $P$ -simples. Suponha então  $p \geq 2$ . Considere  $(u_0u_1, e_1)$  e  $(u_0u_{p-1} \dots u_1, e_p e_{p-1} \dots e_2)$ ; note que ambos os pares são caminhos (distintos) entre  $u_0$  e  $u_1$ . Isso contradiz novamente o fato de  $E$  ser  $P$ -simples. Segue que  $E$  não possui ciclos.

( $\Leftarrow$ ) É claro que  $E$  não possui loops visto que  $E$  não possui ciclos. Desse modo, considere  $v, u \in r(E^1) \cup s(E^1)$  e  $(v_0 \dots v_p, e_1 \dots e_p)$  e  $(u_0 \dots u_m, d_1 \dots d_m)$  caminhos entre  $v$  e  $u$ . Vamos provar que tais caminhos são iguais. Observe que  $v_i \neq v_j$  para todos  $i, j = 0, \dots, p$  tais que  $i \neq j$ , pois, caso contrário, temos um ciclo; analogamente,  $u_i \neq u_j$  sempre que  $i \neq j$  e  $i, j = 0, \dots, m$ .

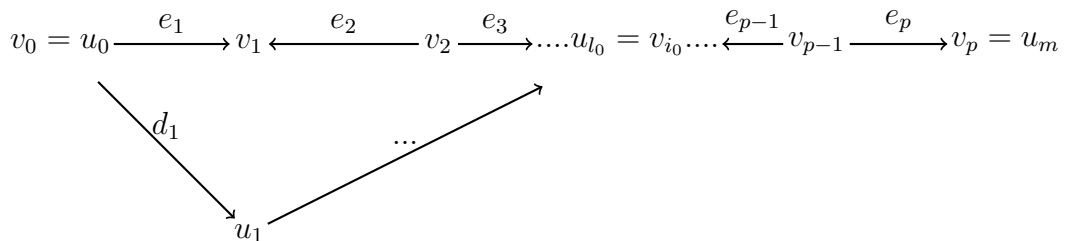
Se  $u_1 \neq v_1$  e  $u_1 = v_{i_0}$  para algum  $i_0 = 2, \dots, p$  então  $(v_0 \dots v_{i_0}v_0, e_1 \dots e_{i_0}d_1)$  é um ciclo; o que é uma contradição.



Se  $u_1 \neq v_1$  e  $u_1 \neq v_i$  para todo  $i = 2, \dots, p$  considere  $l_0 = \min\{l \mid 1 \leq l \leq m \text{ e } u_l \in V^1 := \{v_1, \dots, v_p\}\}$ . Digamos que  $u_{l_0} = v_{i_0}$ . Assim,

$$(u_0 u_1 \dots u_{l_0} v_{i_0-1} \dots v_1 v_0, d_1 \dots d_{l_0} e_{i_0} e_{i_0-1} \dots e_1)$$

é um ciclo.

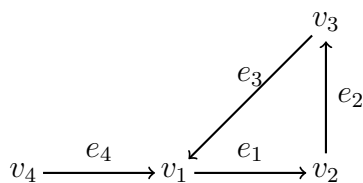


Logo,  $u_1 = v_1$ . Se  $d_1 \neq e_1$ , temos o ciclo  $(u_0 u_1 u_0, e_1 d_1)$ . Logo  $d_1 = e_1$ .

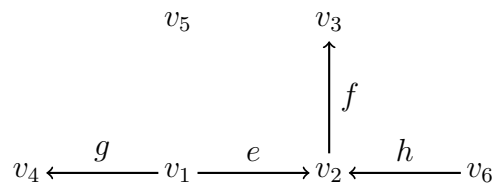
$$v_0 = u_0 \xrightarrow[e_1]{d_1} v_1 = u_1 \xleftarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xleftarrow{e_{p-1}} v_{p-1} \xrightarrow{e_p} v_p$$

Após repetidas aplicações do argumento acima, concluímos que  $u_k = v_k$  e  $e_k = d_k$  para todo  $k \leq \min\{m, p\}$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $\min\{m, p\} = m$ , logo  $m \leq p$ . Se  $m < p$  então  $(v_m v_{m+1} \dots v_p, e_{m+1} \dots e_p)$  é um ciclo. Portanto  $m = p$ , porém, dessa maneira, os caminhos  $(v_0 \dots v_p, e_1 \dots e_p)$  e  $(u_0 \dots u_m, d_1 \dots d_m)$  são iguais, assim  $E$  é  $P$ -simples.  $\square$

**Exemplo 2.2.6.** Considere os grafos a seguir; note que o Grafo (A) não é  $P$ -simples pois possui um ciclo. O Grafo (B) é  $P$ -simples pois não possui ciclos.



Grafo (A)



Grafo (B)

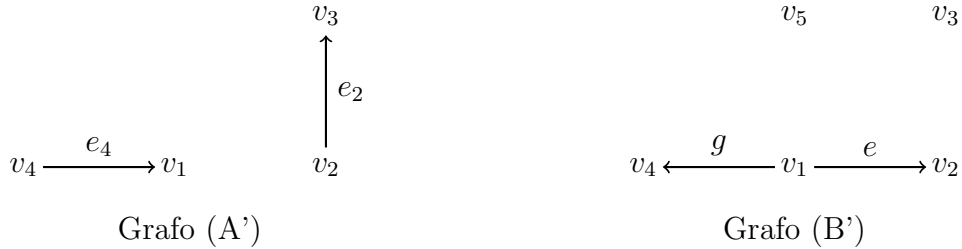


**Definição 2.2.7.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo e  $V \subseteq E^0$ . Dizemos que  $V$  é **conexo em  $E$**  se  $\forall u, v \in V$  existe um caminho no grafo  $E$  ligando  $u$  e  $v$ . Quando o grafo  $E$  estiver claro, diremos apenas que  $V$  é conexo. Se  $V = E^0$  for conexo em  $E$  diremos simplesmente que  $E$  é conexo.*

Considerando o Grafo (A) acima, note que todo subconjunto  $V \subseteq E^0$  é conexo, em particular o Grafo (A) é conexo. Para o Grafo (B),  $\{v_1, v_2, v_3\}$  é conexo, porém  $\{v_3, v_4, v_6, v_5\}$  não é conexo.

**Definição 2.2.8.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo. Um subgrafo de  $E$  é uma quádrupla  $(D^0, D^1, r|_{D^1}, s|_{D^1})$  onde  $D^1 \subseteq E^1$  e  $r(D^1) \cup s(D^1) \subseteq D^0$ .*

**Exemplo 2.2.9.** *O Grafo (A') é um subgrafo do Grafo (A) e o Grafo (B') é um subgrafo do Grafo (B) do Exemplo 2.2.6.*



Intuitivamente, para obtermos um subgrafo de um grafo  $E$ , selecionamos as arestas desejadas para compor o subgrafo e posteriormente selecionamos, obrigatoriamente, todos os vértices que são adjacentes a tais arestas, podendo ainda selecionar outros quaisquer vértices.

Não é verdade em geral que todo subgrafo de um grafo conexo é conexo, basta considerar o Grafo (A') do exemplo acima. Apesar disso, podemos separar um grafo em “partes conexas”; formalmente falando, dados  $u, v \in Z := r(E^1) \cup s(E^1)$  diremos que  $u \sim v$  se  $u = v$  ou existe um caminho entre  $u$  e  $v$ .

**Proposição 2.2.10.**  *$\sim$  é uma relação de equivalência em  $Z = r(E^1) \cup s(E^1)$ .*

*Demonstração.* Da definição da relação,  $\sim$  é reflexiva. Se  $u \sim v$  existe um caminho  $(u_0 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$  entre  $u$  e  $v$ , de modo que  $(u_p \dots u_0, e_p \dots e_1)$  é um caminho entre  $v$  e  $u$ , logo  $v \sim u$ . Para checarmos a transitividade, consideramos  $u, v, w \in Z$  tais que  $u \sim v$  e  $v \sim w$ . Se  $u = v$ ,  $u = w$  ou  $v = w$  temos  $u \sim w$ . Assim, supomos que  $u \neq v$ ,  $u \neq w$  e  $v \neq w$ . Sejam  $(u_0 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$  e  $(w_0 \dots w_m, d_1 \dots d_m)$  caminhos entre  $u$  e  $v$ , e,  $v$  e  $w$ , respectivamente. Seja  $k_0 = \max\{0 \leq k \leq m \mid w_k \in U := \{u_0, \dots, u_p\}\}$ . Assim, suponha que  $w_{k_0} = u_l$  para certo  $0 \leq l \leq p$ ; note que  $(u_0 \dots u_l w_{k_0+1} \dots w_m, e_1 \dots e_l d_{k_0+1} \dots d_m)$  é um caminho entre  $u$  e  $w$ .  $\square$

Para cada  $v \in r(E^1) \cup s(E^1)$ , seja  $Z_v$  a classe de equivalência de  $v$ . Note que:

$$Z_v = \{v\} \cup \{u \in r(E^1) \cup s(E^1) \mid \text{existe caminho entre } u \text{ e } v\}.$$

Seja  $\Delta = \{v_i\}_{i \in I} \subseteq r(E^1) \cup s(E^1)$  um conjunto que contém exatamente um representante de cada classe de equivalência. Desse modo temos a seguinte proposição:

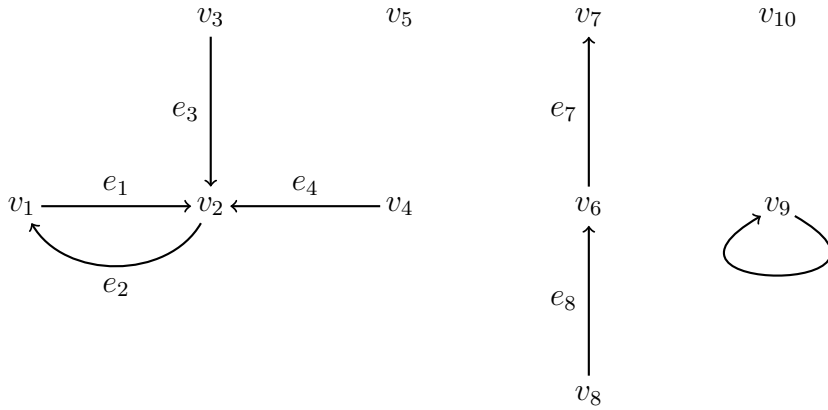
**Proposição 2.2.11.** *Com a notação acima,  $r(E^1) \cup s(E^1) = \bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i}$ .*

*Demonstração.* É claro que  $\bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i} \subseteq r(E^1) \cup s(E^1)$ . Por outro lado, seja  $v \in r(E^1) \cup s(E^1)$ , considere  $v_{i_0}$  o representante da classe de equivalência de  $v$ . Assim,  $v = v_{i_0}$  ou existe um caminho entre  $v$  e  $v_{i_0}$ ; em todo caso,  $v \in Z_{v_{i_0}}$  e assim  $v \in \bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i}$ .  $\square$

Considere  $R := E^0 - (r(E^1) \cup s(E^1))$ ; diremos que  $R$  é o conjunto dos **vértices isolados** (note que os vértices que estão em  $R$  não recebem nem emitem arestas). Pela proposição acima segue que

$$E^0 = \left( \bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i} \right) \cup R.$$

**Exemplo 2.2.12.** *Considere o grafo a seguir.*



Note que  $r(E^1) \cup s(E^1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$  e  $R = \{v_5, v_{10}\}$ . Além disso, temos exatamente três classes de equivalência com respeito a relação definida anteriormente, a saber:

$$Z_{v_1} = Z_{v_2} = Z_{v_3} = Z_{v_4}, \quad Z_{v_6} = Z_{v_7} = Z_{v_8} \quad \text{e} \quad Z_{v_9}.$$

Desse modo podemos escrever  $E^0 = \left( \bigcup_{i=3,6,9} Z_{v_i} \right) \cup R$

Fixado um vértice  $v$  no exemplo acima, observe que  $(Z_v, s^{-1}(Z_v), r|_{s^{-1}(Z_v)}, s|_{s^{-1}(Z_v)})$  é um subgrafo de  $E$ . Esse fato não é uma peculiaridade de tal exemplo. Dado  $v \in r(E^1) \cup s(E^1)$  onde  $E$  é um grafo (que possui ao menos um vértice não isolado) considere  $e \in s^{-1}(Z_v)$ , assim ou  $s(e) = v$  ou existe um caminho entre  $s(e)$  e  $v$ ; no primeiro caso  $(s(e)r(e), e)$  é um caminho entre  $v$  e  $r(e)$ , logo  $e \in r^{-1}(Z_v)$ . No segundo caso, como

$(s(e)r(e), e)$  é um caminho entre  $s(e)$  e  $r(e)$  então, por transitividade, existe um caminho entre  $r(e)$  e  $v$ , donde segue que  $e \in r^{-1}(Z_v)$ . Portanto  $s^{-1}(Z_v) \subseteq r^{-1}(Z_v)$ . Analogamente  $r^{-1}(Z_v) \subseteq s^{-1}(Z_v)$  e assim  $s^{-1}(Z_v) = r^{-1}(Z_v)$ .

Como as restrições:

$$s|_{s^{-1}(Z_v)} : s^{-1}(Z_v) \rightarrow Z_v \quad \text{e} \quad r|_{r^{-1}(Z_v)} : r^{-1}(Z_v) \rightarrow Z_v$$

estão bem definidas o argumento do parágrafo anterior garante que

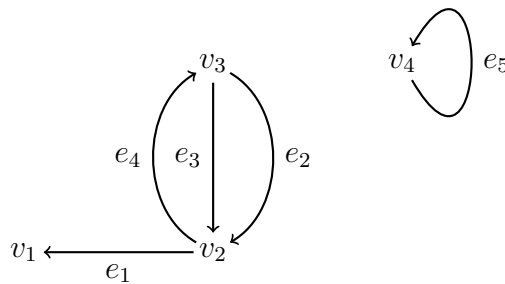
$$(Z_v, s^{-1}(Z_v), r|_{s^{-1}(Z_v)}, s|_{s^{-1}(Z_v)}) = (Z_v, r^{-1}(Z_v), r|_{r^{-1}(Z_v)}, s|_{r^{-1}(Z_v)})$$

é um subgrafo de  $E$ .

Apelando para uma interpretação geométrica, o que fizemos até agora foi “particionar” um grafo como uma união de subgrafos disjuntos nos quais podemos “caminhar” de um vértice qualquer para outro. O próximo passo consiste em identificar alguns vértices especiais do grafo onde tais “caminhadas” são interrompidas.

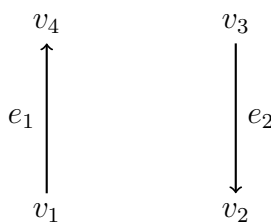
**Definição 2.2.13.** Dizemos que  $v \in E^0$  é um **vértice extremo** de  $E$  se  $\#s^{-1}(v) \cup r^{-1}(v) = 1$  e, se além disso,  $v$  não for base de algum loop. Se  $v \in E^0$  é um vértice extremo, a única aresta  $e \in E^1$  adjacente a  $v$  é chamada de **aresta extrema**.

**Exemplo 2.2.14.** Considere o grafo a seguir.



Note que em tal grafo  $v_1$  é o único vértice extremo e  $e_1$  é a única aresta extrema. Os vértices  $v_2$  e  $v_3$  não são vértices extremos pois  $\#s^{-1}(v_2) \cup r^{-1}(v_2) = 3 = \#s^{-1}(v_3) \cup r^{-1}(v_3)$ . O vértice  $v_4$  não é um vértice extremo pois é base de um loop.

Por outro lado, no grafo dado por



todos os vértices são extremos e todas as arestas são extremas.

Ainda, considerando o grafo representado por

$$\dots \xrightarrow{e_{-1}} v_{-1} \xrightarrow{e_0} v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots$$

vemos que tal grafo não possui nenhum vértice extremo.

As noções de vértice extremo e de aresta extrema nos permitem definir a noção de **nível** de um vértice e de uma aresta. Tal noção é definida a partir da construção a seguir. Fixe um grafo  $E$ .

**Etapa 1:** Suponha que  $E$  possui ao menos um vértice extremo. Seja  $X_1$  o conjunto de todos os vértices extremos de  $E$  e  $Y_1$  o conjunto de todas as arestas extremas de  $E$ . Os elementos de  $X_1$  são chamados de vértices de **nível 1 de  $E$**  e os elementos de  $Y_1$  são chamados de arestas de **nível 1 de  $E$** . Defina  $\mathcal{E}_1$  como sendo o grafo  $(E^0 - X_1, E^1 - Y_1, r_1, s_1)$  onde  $r_1, s_1$  denotam as restrições de  $r$  e  $s$  ao conjunto  $E^1 - Y_1$ . Note que  $\mathcal{E}_1$  é um subgrafo de  $E$ .

**Etapa 2:** Suponha que  $\mathcal{E}_1$  possui ao menos um vértice extremo. Seja  $X_2$  o conjunto de todos os vértices extremos de  $\mathcal{E}_1$  e  $Y_2$  o conjunto de todas as arestas extremas de  $\mathcal{E}_1$ . Os elementos de  $X_2$  são chamados de vértices de **nível 2 de  $E$**  e os elementos de  $Y_2$  são chamados de arestas de **nível 2 de  $E$** . Defina  $\mathcal{E}_2$  como sendo o grafo  $(E^0 - X_1 \cup X_2, E^1 - Y_1 \cup Y_2, r_2, s_2)$  onde  $r_2, s_2$  denotam as restrições de  $r$  e  $s$  ao conjunto  $E^1 - Y_1 \cup Y_2$ . Note que  $\mathcal{E}_2$  é um subgrafo de  $\mathcal{E}_1$ .

Mais geralmente, para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos:

**Etapa  $n$ :** Suponha que  $\mathcal{E}_{n-1}$  possui ao menos um vértice extremo. Seja  $X_n$  o conjunto de todos os vértices extremos de  $\mathcal{E}_{n-1}$  e  $Y_n$  o conjunto de todas as arestas extremas de  $\mathcal{E}_{n-1}$ . Os elementos de  $X_n$  são chamados de vértices de **nível  $n$  de  $E$**  e os elementos de  $Y_n$  são chamados de arestas de **nível  $n$  de  $E$** . Defina  $\mathcal{E}_n$  como sendo o grafo  $(E^0 - X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n, E^1 - Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n, r_n, s_n)$  onde  $r_n, s_n$  denotam as restrições de  $r$  e  $s$  ao conjunto  $E^1 - Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n$ . Note que  $\mathcal{E}_n$  é um subgrafo de  $\mathcal{E}_{n-1}$ .

Pela construção acima segue que os vértices de nível 2 de  $E$  são exatamente os vértices extremos do grafo  $\mathcal{E}_1$ , mais geralmente, os vértices de nível  $n$  de  $E$  são exatamente os vértices extremos do grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ . O mesmo raciocínio vale para as arestas. No início de cada etapa estamos supondo a existência de vértices extremos em nosso grafo. Como vimos no exemplo acima, nem sempre isso ocorre. Mais geralmente, temos três situações possíveis:

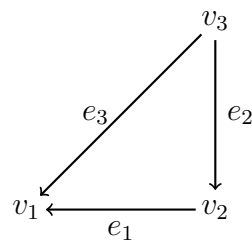
1. O grafo  $E$  não possui vértices extremos, assim não podemos começar nossa construção.
2. O grafo  $E$  possui, no mínimo, um vértice extremo e existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{E}_m$  não possui vértice extremo. Dessa maneira, nossa construção para na etapa  $m$ ; ficando

definidos os grafos  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m$ . Nesse caso note que o grafo  $E$  possui vértices e arestas de nível máximo igual a  $m$ .

3.  $E$  possui (no mínimo) um vértice extremo e  $\mathcal{E}_m$  possui vértices extremos para cada  $m \in \mathbb{N}$ ; assim o grafo  $E$  possui vértices e arestas de nível  $m$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

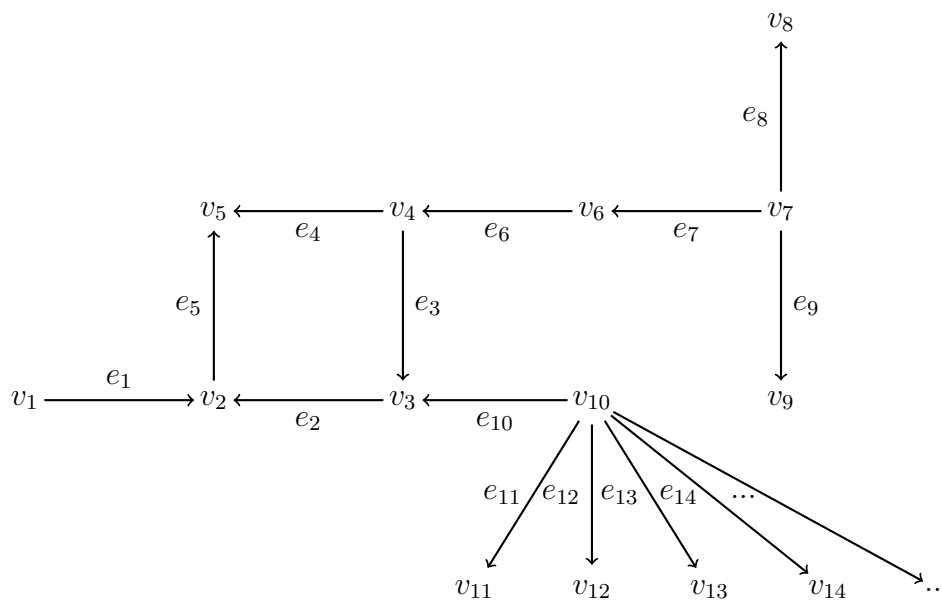
Abaixo seguem exemplos de cada uma das três possibilidades mencionadas acima.

**Exemplo 2.2.15.** Note que o grafo representado por:

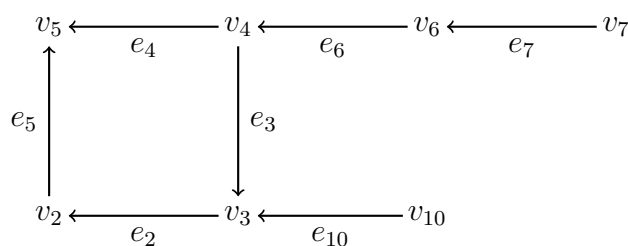


não possui nenhum vértice extremo, portanto não podemos aplicar a nossa construção a tal grafo.

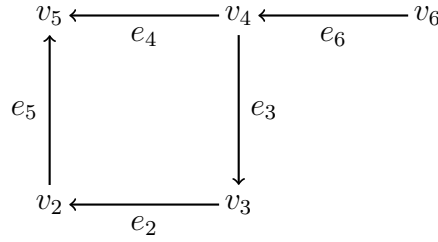
**Exemplo 2.2.16.** Considere o grafo dado por:



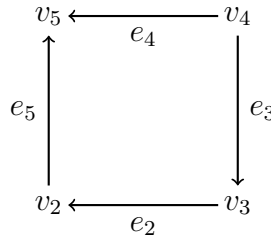
Note que o conjunto de vértices extremos de  $E$  é dado por  $\{v_1, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots\}$ . O grafo  $\mathcal{E}_1$  é dado por:



O conjunto de vértices extremos de  $\mathcal{E}_1$  é  $\{v_7, v_{10}\}$ . Assim, o grafo  $\mathcal{E}_2$  é dado por:

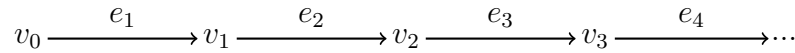


Por fim, o grafo  $\mathcal{E}_3$  é:

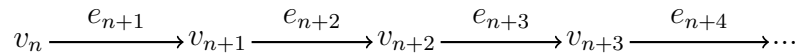


Note que tal grafo não possui vértices extremos, portanto não podemos construir o grafo  $\mathcal{E}_4$ . Nesse caso, o grafo  $E$  possui vértices e arestas de nível máximo igual a 3.

**Exemplo 2.2.17.** Considere o grafo dado por:



Note que nesse caso, o grafo não possui vértices de nível máximo. Assim, estão definidos os grafos  $\mathcal{E}_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . É fácil ver que  $\mathcal{E}_n$  é representado por:



**Observação 2.2.18.** Se  $(u_0 \dots u_n, e_1 \dots e_n)$  é um ciclo (num grafo  $E$ ) então  $\#s^{-1}(u_i) \cup r^{-1}(u_i) \geq 2$  para cada  $i = 0, \dots, n$ . Isso significa que  $u_i$  não é um vértice extremo de  $E$ . Além disso, se  $v \in R := E^0 - (r(E^1) \cup s(E^1))$  então  $\#s^{-1}(v) \cup r^{-1}(v) = 0$ , ou seja, vértices isolados também não são vértices extremos.

Já vimos anteriormente que subgrafos de grafos conexos não necessariamente são conexos; entretanto, nosso processo de obtenção dos subgrafos  $\mathcal{E}_n$  preserva tal propriedade como veremos na próxima seção.

### 2.3 Representações de grafos $P$ -simples

O objetivo dessa seção é demonstrar um resultado que apresenta uma classe de grafos para os quais toda representação dos mesmos satisfaz a condição (BPB). Enunciaremos, primeiramente, alguns resultados preliminares sobre grafos conexos e  $P$ -simples e em seguida, demonstraremos, sob as devidas hipóteses, o resultado desejado.

**Proposição 2.3.1.** *Seja  $E$  um grafo e suponha que esteja definido o grafo  $\mathcal{E}_i$ , onde  $i \in \mathbb{N}$ . Se  $Z := r(E^1) \cup s(E^1)$  for conexo em  $E$  então  $Z - X_1 \cup \dots \cup X_i$  é conexo em  $\mathcal{E}_i$ .*

*Demonstração.* Vamos supor num primeiro instante que  $i = 1$ . Iremos provar que  $Z - X_1$  é conexo em  $\mathcal{E}_1$ . Sejam  $u, v \in Z - X_1$ . Como  $Z$  é conexo em  $E$  existe um caminho (em  $E$ ) entre  $u$  e  $v$ , digamos que seja  $(u_0 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$ . Note que  $\#s^{-1}(u_i) \cup r^{-1}(u_i) \geq 2$  para  $i = 2, \dots, p-1$ , logo  $u_i$  não é um vértice extremo de  $E$ ; portanto  $u_i \in Z - X_1$  para todo  $i = 1, \dots, p$ . Além disso, se  $e_i \notin E^1 - Y_1$  então  $e_i \in Y_1$ , logo  $e_i$  é uma aresta extrema de  $E$ ; desse modo  $s(e_i)$  ou  $r(e_i)$  são vértices extremos de  $E$ , o que é um absurdo. Segue que  $e_i \in E^1 - Y_1$  e  $(u_0 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$  é um caminho em  $\mathcal{E}_1$  ligando  $u$  e  $v$ , mostrando o desejado.

Considere que  $\mathcal{E}_2$  está definido, assim, está definido também  $\mathcal{E}_1$  e  $Z - X_1$  é conexo em  $\mathcal{E}_1$  pelo exposto anteriormente. Precisamos provar que  $Z - X_1 \cup X_2$  é conexo em  $\mathcal{E}_2$ , para tanto, podemos repetir o argumento anterior trocando  $E$  por  $\mathcal{E}_1$ . Para provar a afirmação para um natural  $i$  qualquer, aplicamos o mesmo procedimento, trocando  $E$  por  $\mathcal{E}_{i-1}$  e usando os passos anteriores.  $\square$

**Lema 2.3.2.** *Se  $v \in X_n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  então existe no máximo um vértice  $w$  de  $E$ , adjacente a  $v$  com nível maior ou igual a  $n$ .*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que existam  $u, w$  vértices de  $E$  com nível maior ou igual a  $n$  tais que  $u$  é adjacente a  $v$  e  $w$  é adjacente a  $v$ . Sejam  $e, f$  arestas tais que  $e$  é adjacente a  $u$  e  $v$ ;  $f$  é adjacente a  $w$  e  $v$ . Como os níveis de  $u$  e  $w$  são maiores ou iguais a  $n$  então  $u, w$  são vértices do grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ , bem como  $v$ .

$$w \xleftarrow{f} v \xrightarrow{e} u$$

Como consequência  $e$  é uma aresta do grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$  pois se não fosse,  $e \in Y_1 \cup \dots \cup Y_{n-1}$  e assim  $s(e)$  ou  $r(e)$  seria um vértice de nível menor ou igual a  $n-1$ , o que é um absurdo. Analogamente  $f$  é também uma aresta do grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ . Concluimos então que  $e$  e  $f$  são duas arestas adjacentes a  $v$  no grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ , o que contradiz o fato de  $v$  ser vértice extremo de tal grafo, ou seja, contradiz o fato de  $v$  ser vértice de nível  $n$  de  $E$ .  $\square$

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $E$  um grafo.*

1. *Se  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$ , para certo  $m \in \mathbb{N}$ , e  $Z$  é conexo então:*

- a) *Dado  $v \in X_n$  com  $n < m$  existe exatamente um vértice  $w$  com nível maior do que  $n$  tal que  $w$  é adjacente a  $v$ .*
- b) *O conjunto  $X_m$  possui exatamente dois vértices e existe exatamente uma aresta adjacente simultaneamente aos dois vértices.*

2. *Se  $Z = \left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right) \dot{\cup} \{\bar{v}\}$ , para certo  $m \in \mathbb{N}$ , e  $Z$  é conexo então:*

- a) Se  $v \in X_n$  e  $n < m$  então  $v$  é adjacente a  $\bar{v}$  ou existe exatamente um vértice  $w$  com nível maior do que  $n$  tal que  $w$  é adjacente a  $v$ .
- b) Para cada  $v \in X_m$  existe exatamente uma aresta adjacente (simultaneamente) a  $v$  e  $\bar{v}$ .

*Demonstração.* 1. a) Devido ao Lema 2.3.2 precisamos nos preocupar apenas com a existência de tal vértice visto que a unicidade segue diretamente de tal lema. Tome  $v \in X_n$  e  $u \in X_m$ . Como  $Z - X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$  é conexo em  $\mathcal{E}_{n-1}$  (Proposição 2.3.1) existe um caminho (no grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ ) entre  $v$  e  $u$ , digamos que seja  $(v_0 \dots v_p, e_1 \dots e_p)$ . Em particular, para todo  $i = 0, \dots, p$  o nível de  $v_i$  é maior ou igual a  $n$  pois  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$  e  $v_i \in Z - X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$ . Se  $p = 1$  então  $w = u$  é o vértice desejado. Se  $p \geq 2$  é claro que  $v_1$  é adjacente a  $v_0 = v$ , além disso, como  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  e  $v_0$  e tais vértices tem nível maior ou igual a  $n$  então  $v_1$  deve possuir nível maior do que  $n$ , pois, caso contrário, teríamos uma contradição com o Lema 2.3.2. Desse modo, escolhendo  $w = v_1$ , a existência está demonstrada.

1. b) Suponha que  $u, v, w$  sejam três elementos distintos de  $X_m$ . Como  $Z - X_1 \cup \dots \cup X_{m-1}$  é conexo em  $\mathcal{E}_{m-1}$ , existe um caminho  $(u_0 \dots u_p, e_1 \dots e_p)$  ligando  $u$  e  $v$ . Em particular, o nível de  $u_i$  é igual a  $m$  para todo  $i = 0, \dots, p$  pois  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$  e  $u_i \in Z - X_1 \cup \dots \cup X_{m-1}$ . Se  $p > 1$  então  $u_1$ , que possui nível  $m$ , é adjacente a dois vértices de nível  $m$ , contrariando o Lema 2.3.2. Segue que  $p = 1$  e assim  $u$  é adjacente a  $v$ . Analogamente  $u$  é adjacente a  $w$ . Concluimos assim que  $u$  é adjacente a  $v$  e a  $w$ , contrariando novamente o Lema 2.3.2. Segue que  $X_m$  possui um ou dois elementos.

Seja  $u \in X_m$ , assim  $u$  é vértice extremo do grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$ . Seja  $e$  a única aresta de tal grafo que é adjacente a  $u$ , sem perda de generalidade, suponha que  $r(e) = u$ . Considere  $v = s(e)$ . É claro que  $v \neq u$  pois caso contrário teríamos um ciclo (o que contradiz o fato de que  $u \in X_m$ ). Segue que  $X_m$  possui dois elementos e existe uma aresta entre os mesmos. Se existisse mais uma aresta do grafo  $E$ , digamos  $f$ , entre  $u$  e  $v$  então  $(uvu, ef)$  seria um ciclo, o que contradiz, novamente, a pertinência  $u \in X_m$ ; está garantida portanto a unicidade de tal aresta.

2. a) Tome  $v \in X_n$  (com  $n < m$ ) e  $u \in X_m$ . Como  $Z - X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$  é conexo em  $\mathcal{E}_{n-1}$  existe um caminho (no grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ ) entre  $v$  e  $u$ , digamos que seja  $(v_0 \dots v_p, e_1 \dots e_p)$ . Se  $p = 1$  então  $w = u$  é o vértice desejado. Suponha que  $p \geq 2$ . Se  $v_1 = \bar{v}$  concluímos nossa demonstração. Suponha então que  $v_1 \neq \bar{v}$ , assim  $v_1 \in \bigcup_{i=n}^m X_i$ . Como  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  e  $v_0$  no grafo  $\mathcal{E}_{n-1}$ ,  $v_1$  não é um vértice extremo de tal grafo, ou seja, o nível de  $v_1$  não é  $n$  e portanto é maior que do  $n$ . Escolhendo  $w = v_1$  a existência está demonstrada. A unicidade segue do Lema 2.3.2.



2. b) Seja  $v \in X_m$ . Como  $Z - X_1 \cup \dots \cup X_{m-1}$  é conexo em  $\mathcal{E}_{m-1}$  existe um caminho (no grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$ ) entre  $\bar{v}$  e  $v$ , digamos que seja  $(v_0 \dots v_p, e_1 \dots e_p)$ . Se  $p = 1$ ,  $f = e_1$  é a aresta desejada. Suponha que  $p \geq 2$ , note que  $v_1 = v$ , com efeito, se não fosse assim, teríamos  $v_1 \in X_m$ , o que é impossível pois  $v_1$  é adjacente a duas arestas no grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$ , a saber,  $e_1$  e  $e_2$ . Desse modo, fica claro que  $p \leq 1$  pois caso contrário  $v \in X_m$ . Quanto a unicidade, se existissem  $e, f$  arestas distintas e adjacentes, simultaneamente, a  $v$  e  $\bar{v}$  temos o ciclo  $(v\bar{v}v, ef)$ , contrariando o fato de que  $v \in X_m$ .  $\square$

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $E$  um grafo  $P$ -simples, suponha que  $Z := r(E^1) \cup s(E^1)$  seja conexo e que exista  $n \in \mathbb{N}$  tal que o grafo  $\mathcal{E}_n$  está definido e possui finitos vértices. Desse modo,  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$  ou  $Z = \left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right) \dot{\cup} \{\bar{v}\}$ , para certo  $m \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Seja  $n_0$  o menor natural tal que  $\mathcal{E}_{n_0}$  possui finitos vértices. Em particular,  $\mathcal{E}_k$  possui finitos vértices para todo  $k \geq n_0$ . Seja  $m$  o maior natural para o qual  $\mathcal{E}_m$  está definido, tal natural existe pois  $\mathcal{E}_{n_0}$  é finito. Suponha que  $Z := r(E^1) \cup s(E^1) \neq \bigcup_{i=1}^m X_i$ , como  $\bigcup_{i=1}^m X_i \subseteq Z$  existe  $\bar{v} \in Z - \bigcup_{i=1}^m X_i$ , logo  $\bar{v}$  é um vértice do grafo  $\mathcal{E}_m$ . Por hipótese, podemos supor que  $\mathcal{E}_m$  possui  $N$  vértices, onde  $N \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção 1:**  $\bar{v}$  é um vértice isolado do grafo  $\mathcal{E}_m$ .

Por absurdo, suponha que isso não aconteça. Daí existe uma aresta  $e_1$  no grafo  $\mathcal{E}_m$  tal que  $e_1$  é adjacente a  $\bar{v}$ , sem perda de generalidade, suponha que  $r(e_1) = \bar{v}$ . Note que  $s(e_1) \neq \bar{v}$  pois caso contrário teríamos um ciclo. Seja  $v_0 = s(e_1)$ . Como  $\mathcal{E}_m$  é um subgrafo,  $v_0$  é um vértice do grafo  $\mathcal{E}_m$ .

Como  $\bar{v}$  não é vértice extremo de  $X_m$  temos  $\#s^{-1}(\bar{v}) \cup r^{-1}(\bar{v}) \geq 2$ . Seja  $e_2$  outra aresta adjacente a  $\bar{v}$  no grafo  $\mathcal{E}_m$ , sem perda de generalidade, digamos que  $s(e_2) = \bar{v}$  e  $r(e_2) = v_2$ . Visto que  $E$  é  $P$ -simples devemos ter  $v_2 \neq v_0$ ,  $v_2 \neq \bar{v}$ , pois caso contrário obteríamos ciclos.

Como  $v_2$  é um vértice de  $X_m$  (pois  $e_2$  é aresta de tal grafo e  $X_m$  é subgrafo) e  $e_2$  é adjacente a  $v_2$  no grafo  $\mathcal{E}_m$ , devemos ter  $\#s^{-1}(v_2) \cup r^{-1}(v_2) \geq 2$ . Seja  $e_3$  outra aresta adjacente a  $v_2$  e suponha que  $s(e_3) = v_2$ . Note que  $r(e_3) \neq v_0$ ,  $r(e_3) \neq \bar{v}$  e  $r(e_3) \neq v_2$  pois caso contrário teríamos um ciclo. Suponha então, que  $r(e_3) = v_3$ . Prosseguindo indutivamente obtemos  $e_{N-1}$  tal que  $r(e_N) = v_N$  e  $s(e_N) = v_{N-1}$ . Portanto,  $v_0, v_1, \dots, v_N$  são vértices (distintos) do grafo  $\mathcal{E}_m$ , o que é um absurdo visto que  $\mathcal{E}_m$  possui apenas  $N$  vértices.

$$v_0 \xrightarrow{e_1} \bar{v} \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \dots$$

Isso finaliza a afirmação. Para completar a demonstração, suponha que  $Z - \bigcup_{i=1}^m X_i$  possui dois vértices, digamos  $v$  e  $\bar{v}$ . Pela **Afirmção 1** ambos são vértices isolados de  $\mathcal{E}_m$

o que contraria o fato de  $Z = X_1 \cup \dots \cup X_m$  ser conexo no grafo  $\mathcal{E}_m$ . Segue que  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$  possui apenas um elemento, digamos que seja  $\bar{v}$ . Portanto  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i \cup \{\bar{v}\}$ .  $\square$

Estamos prontos para demonstrar como todos os conceitos desse capítulo estão ligados com a equivalência unitária de representações da álgebra de grafo. Para facilitar os argumentos que virão a seguir, introduziremos alguns termos: suponha que  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$ , dado  $v \in X_n$  ( $n < m$ ) existe um único vértice  $w$  de nível maior do que  $n$  tal que  $v$  é adjacente a  $w$  (Teorema 2.3.3). Seja  $e$  a (única) aresta que é simultaneamente adjacente a  $v$  e a  $w$ ; se  $r(e) = v$  dizemos que  $v$  é **vértice final** de  $X_n$  e se  $s(e) = v$  dizemos que  $v$  é **vértice inicial** de  $X_n$ . Se  $n = m$  sabemos pelo teorema recém citado que  $X_m$  possui exatamente dois elementos e que existe uma única aresta  $e$  entre tais elementos,  $r(e)$  é dito ser **vértice final** de  $X_m$  e  $s(e)$  é dito ser **vértice inicial** de  $X_m$ .

Se  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i \cup \{\bar{v}\}$ , pelo Teorema 2.3.3, dado  $v \in X_n$  com  $n < m$  existe um único vértice  $w$  de nível maior do que  $n$  tal que  $v$  é adjacente a  $w$  ou  $v$  é adjacente a  $\bar{v}$ . Seja  $e$  a única aresta tal que  $e$  é adjacente a  $v$  e a  $w$  ou  $e$  é adjacente a  $v$  e  $\bar{v}$ . Se  $e$  é adjacente a  $v$  e  $w$  usaremos a mesma nomenclatura definida no parágrafo anterior. Se  $e$  é adjacente a  $v$  e  $\bar{v}$  diremos que  $v$  é **vértice final** de  $X_n$  caso  $r(e) = v$  e diremos que  $v$  é **vértice inicial** de  $X_n$  caso  $s(e) = v$ . Se  $n = m$  e  $v \in X_m$ , pelo Teorema 2.3.3 existe uma única aresta  $e$  adjacente simultaneamente a  $v$  e a  $\bar{v}$ ; se  $r(e) = v$  dizemos que  $v$  é **vértice final** de  $X_m$  e se  $s(e) = v$  dizemos que  $v$  é **vértice inicial** de  $X_m$ .

Dado  $n = 1, \dots, m$  definimos  $X_n^{VF}$  como o conjunto de vértices finais de  $X_n$  e  $X_n^{VI}$  como o conjunto de vértices iniciais de  $X_n$ . Note que  $X_n = X_n^{VF} \cup X_n^{VI}$ .

**Teorema 2.3.5.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo  $P$ -simples, suponha que  $Z := r(E^1) \cup s(E^1)$  seja conexo e que exista  $n \in \mathbb{N}$  tal que o grafo  $\mathcal{E}_n$  está definido e possui finitos vértices. Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Assim,  $\forall v \in E^0$  e  $\forall e \in E^1$  existem conjuntos ortonormais totais  $B_v$  e  $B_e$  de  $H_v$  e  $H_e$ , respectivamente, tais que:*

1. Se  $e \in s^{-1}(v)$  então  $B_e \subseteq B_v$  e se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  então  $B_v = \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$ .
2. Se  $e \in r^{-1}(v)$  então  $\varphi(S_e)(B_v) = B_e$ .

*Demonstração.* A demonstração desse teorema consiste em dois processos indutivos no nível dos vértices; pelo Teorema 2.3.4 temos  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$  ou  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i \cup \{\bar{v}\}$ . Suponha que  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$ .

**Passo 1.** Para cada  $v \in X_1^{VF}$  escolhamos um conjunto ortonormal total  $B_v \subseteq H_v$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  definimos  $B_e := \pi(S_e)(B_v)$ , para os demais vértices e arestas escolhamos conjuntos ortonormais totais  $B_v \subseteq H_v$  e  $B_e \subseteq H_e$ . Desse modo, as condições 1

e 2 do enunciado são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF}$  e para todo  $e \in E^1$  tal que  $r(e) \in X_1^{VF}$ , note que 1 é satisfeita por vacuidade.

**Passo 2.** Seja  $v \in X_2^{VF}$ . Se  $s^{-1}(v) = \emptyset$  definimos  $\overline{B}_v := B_v$ , se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\overline{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\overline{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $B_e \subseteq \overline{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\overline{B}_e := \pi(S_e)(\overline{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\overline{B}_v := B_v$  e  $\overline{B}_e := B_e$ .

**Afirmção 2:** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_2^{VF}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF}$ .

É claro que  $r(e) \notin X_1^{VF}$ . Por absurdo, suponha que  $s(e) \in X_2^{VF}$ , daí  $s(e)$  é um vértice do grafo  $\mathcal{E}_1$ , assim como  $r(e)$ ; desse modo  $e$  é uma aresta de tal grafo. Como  $s(e) \in X_2^{VF}$  existe um vértice  $w$  de nível maior do que 2 e uma aresta  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_1$  tal que  $r(f) = s(e)$ . Evidentemente,  $e \neq f$ . Assim  $s(e)$  é adjacente a  $e$  e  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_1$  o que contradiz o fato de  $s(e)$  ser vértice extremo de tal grafo. Assim,  $s(e) \notin X_2^{VF}$ .

A afirmação acima garante que o **Passo 2** não modifica as escolhas feitas anteriormente. Desse modo, após o **Passo 2** obtemos conjuntos ortonormais totais  $\overline{B}_v$  ( $v \in E^0$ ) e  $\overline{B}_e$  ( $e \in E^1$ ) tais que 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup X_2^{VF}$ .

**Passo 3.** Seja  $v \in X_3^{VF}$ . Se  $s^{-1}(v) = \emptyset$  definimos  $\tilde{B}_v := \overline{B}_v$ , se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\tilde{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} \overline{B}_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\tilde{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $\overline{B}_e \subseteq \tilde{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\tilde{B}_e := \pi(S_e)(\tilde{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\tilde{B}_v := \overline{B}_v$  e  $\tilde{B}_e := \overline{B}_e$ .

**Afirmção 3:** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_3^{VF}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup X_2^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup X_3^{VF}$ .

É claro que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup X_2^{VF}$ . Por absurdo, suponha que  $s(e) \in X_2^{VF} \cup X_3^{VF}$ . Se  $s(e) \in X_2^{VF}$ ,  $s(e)$  é um vértice do grafo  $\mathcal{E}_1$ , assim como  $r(e)$ ; desse modo  $e$  é uma aresta de tal grafo. Como  $s(e) \in X_2^{VF}$  existe uma aresta  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_1$  tal que  $r(f) = s(e)$ . Evidentemente,  $e \neq f$ . Assim  $s(e)$  é adjacente a  $e$  e  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_1$  o que contradiz o fato de  $s(e)$  ser vértice extremo de tal grafo. Logo,  $s(e) \notin X_2^{VF}$ . Se  $s(e) \in X_3^{VF}$  repetimos o argumento acima trocando  $\mathcal{E}_1$  por  $\mathcal{E}_2$  (note que  $r(e)$  é uma aresta do grafo  $\mathcal{E}_2$ ).

A afirmação acima garante que após o **Passo 3** obtemos conjuntos ortonormais totais  $\tilde{B}_v$  ( $v \in E^0$ ) e  $\tilde{B}_e$  ( $e \in E^1$ ) tais que 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup X_2^{VF} \cup X_3^{VF}$ . Prossequimos indutivamente até o passo  $m - 1$ , desse modo obtemos conjuntos  $B_v$  e  $B_e$  tais que as condições 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$ .

**Passo  $m$ .** Seja  $v \in X_m^{VF}$ . Se  $s^{-1}(v) = \emptyset$  definimos  $\overline{B}_v := B_v$ , se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\overline{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\overline{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $B_e \subseteq \overline{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\overline{B}_e := \pi(S_e)(\overline{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\overline{B}_v := B_v$  e  $\overline{B}_e := B_e$ .

**Afirmção  $m$ :** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_m^{VF}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$ .

É claro que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$ . Suponha, por absurdo que  $s(e) \in X_i^{VF}$  para algum  $i = 2, \dots, m$ . Se  $2 \leq i \leq m - 1$  basta repetir o raciocínio das afirmações anteriores.

Se  $i = m$  então  $s(e) \in X_m^{VF}$  assim como  $r(e)$ , logo  $r(e)$ ,  $s(e)$  são vértices (distintos) de  $\mathcal{E}_{m-1}$  e  $e$  é uma aresta de tal grafo. Como  $s(e)$  é um vértice final de  $X_m$  existe uma aresta  $f$  nesse grafo tal que  $r(f) = s(e)$ , evidentemente  $f \neq e$ . Como  $X_m$  possui apenas dois elementos,  $s(f) = s(e)$  ou  $s(f) = r(e)$ , nos dois casos temos um ciclo, contrariando o fato de  $E$  ser  $P$ -simples. A afirmação está demonstrada.

Após o passo  $m$  obteremos conjuntos  $\overline{B}_v$  e  $\overline{B}_e$  tais que 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$ .

**Passo  $m + 1$ .** Seja  $v \in X_m^{VI}$ . Se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\tilde{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} \overline{B}_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\tilde{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $\overline{B}_e \subseteq \tilde{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\tilde{B}_e = \pi(S_e)(\tilde{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\tilde{B}_v := \overline{B}_v$  e  $\tilde{B}_e := \overline{B}_e$ .

**Afirmção  $m + 1$ :** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_m^{VI}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF} \cup X_m^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ .

Prosseguindo como nas demais afirmações, é claro que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF} \cup X_m^{VF}$ . Se, por absurdo,  $s(e) \in X_2^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$  basta proceder como anteriormente para chegarmos em uma contradição. Resta verificar então que  $s(e) \notin X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ ; suponha que  $s(e) \in X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ . Daí  $s(e)$  é um vértice de  $\mathcal{E}_{m-1}$ , assim como  $r(e)$ , logo  $e$  é uma aresta de tal grafo. Como  $v \in X_m^{VI}$  existe uma aresta  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$  tal que  $s(f) = r(e)$ . Assim, visto que  $X_m$  possui apenas 2 vértices segue que  $r(f) = r(e)$  ou  $r(f) = s(e)$ , ambos os casos nos levam a um absurdo pois existiria um ciclo no grafo.

Após o passo  $m + 1$  obteremos conjuntos  $\tilde{B}_v$  e  $\tilde{B}_e$  tais que 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ .

O processo continua indutivamente até o passo  $2m$ , como todo vértice do grafo  $E$  possui algum nível o teorema está finalizado no caso em que  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i$ . Suponha agora

que  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i \cup \{\bar{v}\}$ . Os passos  $1, 2, \dots, m-1$  são idênticos. O passo  $m$  agora é o seguinte:

**Passo  $m$ .** Seja  $v \in X_m^{VF}$ . Se  $s^{-1}(v) = \emptyset$  definimos  $\overline{B}_v := B_v$ , se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\overline{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} B_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\overline{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $B_e \subseteq \overline{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\overline{B}_e = \pi(S_e)(\overline{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\overline{B}_v := B_v$  e  $\overline{B}_e := B_e$ .

**Afirmção  $m$ :** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_m^{VF}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$ .

É claro que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$ . Suponha, por absurdo que  $s(e) \in X_i^{VF}$  para algum  $i = 2, \dots, m$ . Se  $2 \leq i \leq m-1$  basta repetir o raciocínio das afirmações anteriores. Se  $i = m$  então  $s(e) \in X_m^{VF}$  assim como  $r(e)$ , logo  $r(e)$ ,  $s(e)$  são vértices (distintos) de  $\mathcal{E}_{m-1}$ . Pelo Teorema 2.3.3 existe uma única aresta,  $f$ , entre  $r(e)$  e  $\bar{v}$  e uma única aresta,  $g$  entre  $s(e)$  e  $\bar{v}$ , desse modo  $(r(e)\bar{v}s(e)r(e), fge)$  é um ciclo, absurdo pois  $r(e) \in X_m$ .

**Passo extra.** O objetivo desse passo é tratar do único vértice do grafo que não possui

nível, ou seja,  $\bar{v}$ . O argumento é similar aos anteriores. Se  $s^{-1}(\bar{v}) = \emptyset$  defina  $\widetilde{B}_{\bar{v}} := \overline{B}_{\bar{v}}$ ; se  $0 < \#s^{-1}(\bar{v}) < \infty$  defina  $\widetilde{B}_{\bar{v}} := \bigcup_{e \in s^{-1}(\bar{v})} \overline{B}_e$  e se  $\#s^{-1}(\bar{v}) = \infty$  escolha  $\widetilde{B}_{\bar{v}}$  tal que  $\overline{B}_e \subseteq \widetilde{B}_{\bar{v}}$

sempre que  $e \in s^{-1}(\bar{v})$ . Para cada  $e \in r^{-1}(\bar{v})$  defina  $\widetilde{B}_e := \varphi(S_e)(\widetilde{B}_{\bar{v}})$  e para os demais vértices e arestas defina  $\widetilde{B}_v := \overline{B}_v$  e  $\widetilde{B}_e := \overline{B}_e$ .

**Afirmação extra:** Dado  $e \in r^{-1}(\bar{v})$  temos  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$ .

É claro que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF}$  e se tivermos  $s(e) \in X_2^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$  basta repetir o argumento feito nas afirmações anteriores visto que  $\bar{v} \in \mathcal{E}_i$  para todo  $i = 1, \dots, m-1$ . Se  $s(e) \in X_m^{VF}$  então existe uma aresta  $f$  no grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$  tal que  $r(f) = s(e)$  e  $s(f) = \bar{v}$ , o que nos mostra que  $(\bar{v}s(e)s(f), ef)$  é um ciclo, absurdo.

**Passo  $m+1$ , no caso  $Z = \bigcup_{i=1}^m X_i \cup \{\bar{v}\}$ .** Seja  $v \in X_m^{VI}$ . Se  $0 < \#s^{-1}(v) < \infty$  definimos  $\widetilde{B}_v := \bigcup_{e \in s^{-1}(v)} \widetilde{B}_e$  e se  $\#s^{-1}(v) = \infty$  escolhemos  $\widetilde{B}_v$  um conjunto ortonormal total de  $H_v$  tal que  $\widetilde{B}_e \subseteq \widetilde{B}_v$  para todo  $e \in s^{-1}(v)$ . Para cada  $e \in r^{-1}(v)$  defina  $\widetilde{B}_e = \pi(S_e)(\widetilde{B}_v)$ . Para os demais vértices e arestas defina  $\widetilde{B}_v := \overline{B}_v$  e  $\widetilde{B}_e := \overline{B}_e$ .

**Afirmação  $m+1$ :** Se  $e \in r^{-1}(v)$  e  $v \in X_m^{VI}$  então  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF} \cup X_m^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ .

Prosseguindo como nas demais afirmações, vemos que  $r(e) \notin X_1^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF} \cup X_m^{VF}$  e  $s(e) \notin X_2^{VF} \cup \dots \cup X_{m-1}^{VF}$ . Resta verificar então que  $s(e) \notin X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ ; suponha que  $s(e) \in X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ . Daí  $s(e)$  é um vértice de  $\mathcal{E}_{m-1}$ , assim como  $r(e)$  e  $s(e)$  são adjacentes a  $\bar{v}$  no grafo  $\mathcal{E}_{m-1}$  criamos um ciclo, absurdo. A afirmação está provada.

Após o passo  $m+1$  obteremos conjuntos  $\widetilde{B}_v$  e  $\widetilde{B}_e$  tais que 1 e 2 são satisfeitas para todo  $v \in X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup X_m^{VI}$ , para  $\bar{v}$  para todo  $e \in E^1$  tal que  $r(e) \in X_1^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup X_m^{VI} \cup \{\bar{v}\}$  ou  $s(e) \in X_2^{VF} \cup \dots \cup X_m^{VF} \cup \{\bar{v}\} \cup X_m^{VI}$ .

O processo continua indutivamente até o passo  $2m$  (sem contar o passo extra) e como todos os vértices e arestas são atingidos em algum passo o teorema está concluído.  $\square$

**Corolário 2.3.6.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo  $P$ -simples, suponha que  $Z := r(E^1) \cup s(E^1)$  seja conexo, não-vazio e que exista  $n \in \mathbb{N}$  tal que o grafo  $\mathcal{E}_n$  está definido e possui finitos vértices. Assim, toda representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  é unitariamente equivalente a uma representação induzida por um  $E$ -sistema ramificado.*

*Demonstração.* Segue diretamente dos Teoremas 2.3.5 e 2.1.11.  $\square$

Dado um grafo  $E = (E^0, E^1, r, s)$ , vimos na seção anterior que  $E$  pode ser escrito como a “união” de subgrafos, cada um dos quais é conexo. Mais especificamente podemos escrever  $E^0 = \left( \bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i} \right) \cup R$  e considerar os subgrafos  $E^{v_i} = (Z_{v_i}, s^{-1}(Z_{v_i}), r|_{s^{-1}(Z_{v_i})}, s|_{s^{-1}(Z_{v_i})})$ . Com essa notação, podemos enunciar o seguinte corolário.

**Corolário 2.3.7.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo  $P$ -simples, escreva*

$$E^0 = \left( \bigcup_{v_i \in \Delta} Z_{v_i} \right) \bigcup R.$$

*Suponha que para cada  $i \in I$  exista  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que o grafo  $\mathcal{E}_{n_i}^{v_i}$  está definido e possui finitos vértices. Assim, toda representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  de  $C^*(E)$  é unitariamente equivalente a uma representação induzida por um  $E$ -sistema ramificado.*

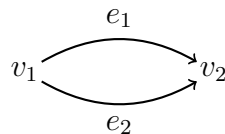
*Demonstração.* Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação de  $E$ . Fixe  $v_i \in \Delta$ , defina  $A^{v_i}$  como a  $*$ -subálgebra de  $C^*(E)$  gerada por  $\{P_v\}_{v \in Z_{v_i}} \cup \{S_e\}_{e \in s^{-1}(Z_{v_i})}$ . Além disso, denote por  $G_{v_i}$  o conjunto de geradores de  $C^*(E^{v_i})$  e defina  $\rho : G_{v_i} \rightarrow A^{v_i}$  dada por  $\rho(\tilde{s}_e) = S_e$  e  $\rho(\tilde{p}_v) = P_v$ ; é fácil ver que  $\rho$  satisfaz as relações que definem  $C^*(E^{v_i})$ , logo, pela propriedade universal existe um  $*$ -homomorfismo  $\psi_i : C^*(E^{v_i}) \rightarrow A^{v_i}$  tal que  $\psi_i(\tilde{S}_e) = S_e$  e  $\psi_i(\tilde{P}_v) = P_v$ . Além disso, note que  $\psi_i$  é um  $*$ -isomorfismo entre tais  $C^*$ -álgebras, assim  $A_{v_i}$  é isometricamente  $*$ -isomorfa a  $C^*(E^{v_i})$ .

Aplicando a demonstração do Teorema 2.3.5 para a representação  $\varphi \circ \psi_i : C^*(E^{v_i}) \rightarrow B(H)$  obtemos conjuntos ortonormais totais  $B_e, B_v$  de  $H_e$  e  $H_v$ , respectivamente, para todos os vértices e arestas do grafo  $E^{v_i}$ . Para concluir que  $\varphi$  satisfaz (BPB), observamos que dado  $v \in E^0$  existe um único  $i_1 \in \Delta$  tal que  $v$  é um vértice do grafo  $E^{v_{i_1}}$ , analogamente, dado  $e \in E^1$  existe exatamente um índice  $i_2 \in \Delta$  tal que  $e$  é uma aresta do grafo  $E^{v_{i_2}}$ ; se, além disso,  $e \in s^{-1}(v)$  existe um único grafo  $E^{v_j}$  que contém tal vértice e tal aresta. Desse modo, para cada  $v \in E^0$  e para cada  $e \in E^1$  estão definidos os conjuntos  $B_e$  e  $B_v$ . Como  $\psi_j(\tilde{S}_e) = S_e$  e  $\varphi \circ \psi_j$  satisfaz (BPB) segue que  $\varphi$  satisfaz (BPB), como queríamos.  $\square$

## 2.4 Exemplos e contra-exemplos

Essa seção tem como objetivo apresentar exemplos e contra-exemplos relacionados a teoria apresentada anteriormente. Não é verdade que se toda representação de um grafo  $E$  satisfaz (BPB) então tal grafo satisfaz as hipóteses do Teorema 2.3.5. Com efeito, o Exemplo 2.1.8 confirma tal afirmação. Além disso, existem grafos que não são  $P$ -simples, apesar disso, toda representação dos mesmos satisfaz (BPB). Veja o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.4.1.** *Considere o grafo  $E$  representado por:*



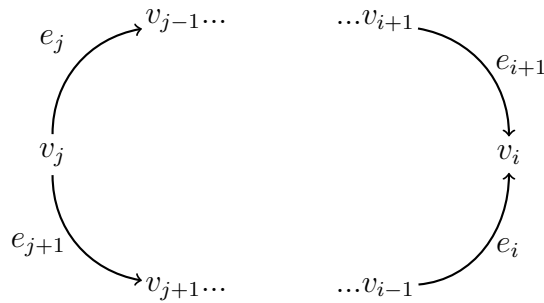
*e seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Escolha  $B_{v_2} \subseteq H_{v_2}$  um conjunto ortonormal total qualquer e defina  $B_{e_1} = \varphi(S_{e_1})(B_{v_2})$ ,  $B_{e_2} = \varphi(S_{e_2})(B_{v_2})$  e  $B_{v_1} = B_{e_1} \cup B_{e_2}$ . Note que, com tais escolhas,  $\varphi$  satisfaz (BPB).*

O grafo do exemplo acima é na verdade um caso particular de uma série de grafos, que não satisfazem as hipóteses do Teorema 2.3.5, apesar disso, qualquer representação dos mesmos satisfaz (BPB). Mais especificamente, temos a seguinte proposição.

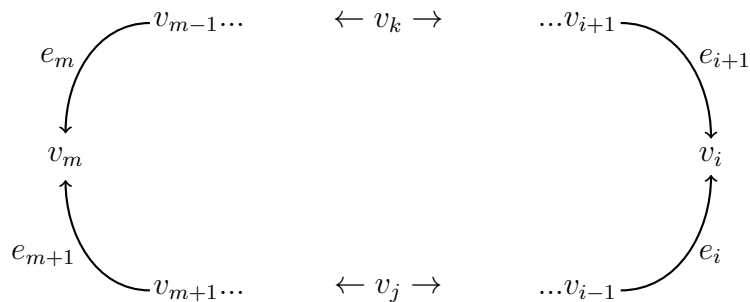
**Proposição 2.4.2.** *Seja  $E = (E^0, E^1, r, s)$  um grafo tal que  $E^0 = \{v_0, \dots, v_{p-1}\}$  e  $E^1 = \{e_1, \dots, e_p\}$  para algum  $p \geq 2$ . Suponha que  $(v_0 \dots v_{p-1} v_0, e_1 \dots e_p)$  é um ciclo e que  $A := \{v \in E^0 \mid \#r^{-1}(v) = 2\}$  seja não-vazio. Assim, toda representação de  $C^*(E)$  satisfaz (BPB) e conseqüentemente é unitariamente equivalente a uma representação induzida por um  $E$ -sistema ramificado.*

*Demonstração.* Seja  $B := \{v \in E^0 \mid s^{-1}(v) = 2\}$ . Afirmamos que  $\#A = \#B$ .

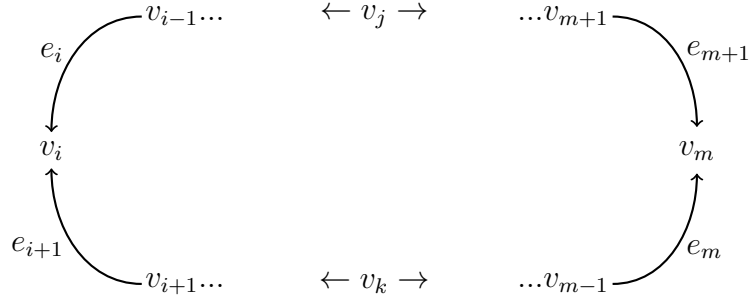
Suponha que  $\#A = 1$  e considere  $v_i \in A$ . Como cada vértice do grafo é adjacente a exatamente duas arestas temos  $\#s^{-1}(v_i) = 0$ . Considere  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$ , como  $r(e_i) = v_i = r(e_{i+1})$  segue que  $s(e_i) = v_{i-1}$  e  $s(e_{i+1}) = v_{i+1}$ . Se  $s(e_{i-1}) = v_{i-1}$  ou  $s(e_{i+2}) = v_{i+2}$  segue que  $B$  é não vazio, caso contrário temos  $r(e_{i-1}) = v_{i-1}$  e  $r(e_{i+2}) = v_{i+2}$ ; nesse caso consideramos os vértices  $v_{i-2}$  e  $v_{i+2}$  e repetimos o argumento. Após um número finito de etapas encontraremos  $v_j \in E$  tal que  $\#s^{-1}(v_j) = 2$ , ou seja,  $B$  é não-vazio. Abaixo temos uma intuição geométrica do caso extremo.



Se tivermos  $\#B > 1$ , consideramos  $v_k, v_j \in B$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $k > j$ . Como  $v_k, v_j \in B$ , existem  $v_i \in A$  com  $j < i < k$  e  $v_m \in A$  com  $m > k$  ou  $m < j$ , logo  $v_i \neq v_m$  e assim  $\#A \geq 2$ , o que contraria a suposição de que  $\#A = 1$ . Abaixo, novamente temos uma intuição geométrica do ocorrido.

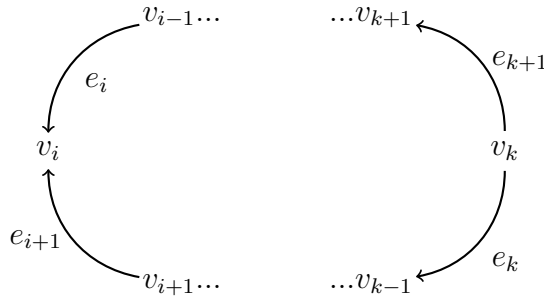


Portanto, a afirmação está provada no caso  $\#A = 1$ . Suponha que  $\#A = 2$ . Sejam  $v_i, v_m \in A$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $i > m$ . Note que existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $m < j < i$  e  $v_j \in B$ ; existe também  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $i < k$  ou  $k < m$  e  $v_k \in B$ . Assim,  $\#B \geq 2$ .



Se  $\#B > 2$  então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $v_n \in B$  e  $v_n \neq v_l, v_k$ , conseqüentemente existe  $v_p \in A$  com  $v_p \neq v_i, v_m$ , logo  $\#A \geq 3$ , absurdo. Portanto  $\#B = 2$ . Prosseguindo indutivamente finalizamos a demonstração da afirmação.

Pelo que foi feito acima, os elementos de  $A$  e  $B$  aparecem de forma intercalada no ciclo  $(v_0 \dots v_{p-1} v_p, e_1 \dots e_p)$ . Seja  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(H)$  uma representação. Vamos prosseguir de maneira indutiva novamente. Num primeiro momento, suponha que  $\#A = 1$ , logo  $\#B = 1$ . Digamos que  $A = \{v_i\}$  e  $B = \{v_k\}$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $i > k$ .



Escolha  $B_{v_i} \subseteq H_{v_i}$  um conjunto ortonormal total qualquer. Defina  $B_{e_i} = \varphi(S_{e_i})(B_{v_i})$  e  $B_{e_{i+1}} = \varphi(S_{e_{i+1}})(B_{v_i})$ . Posteriormente defina:

$$B_{v_{i-1}} := B_{e_i} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_{i-1})} B_e, \quad B_{e_{i-1}} := \varphi(S_{e_{i-1}})(B_{v_{i-1}}), \quad B_{v_{i-2}} := B_{e_{i-1}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_{i-2})} B_e$$

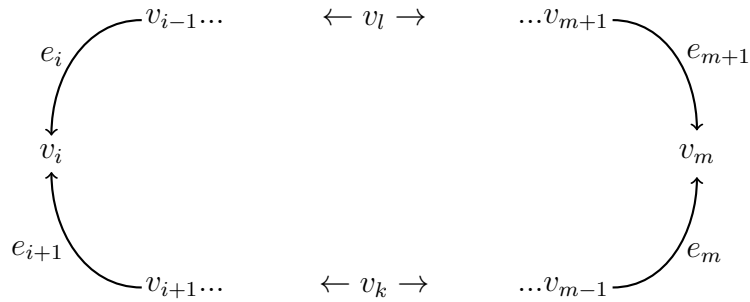
até definir  $B_{e_{k+1}} := \varphi(S_{e_{k+1}})(B_{v_{k+1}})$ . De maneira análoga defina

$$B_{v_{i+1}} := B_{e_{i+1}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_{i+1})} B_e, \quad B_{e_{i+2}} := \varphi(S_{e_{i+2}})(B_{v_{i+1}}), \quad B_{v_{i+2}} := B_{e_{i+2}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_{i+2})} B_e$$



até definir  $B_{e_k} := \varphi(S_{e_k})(B_{v_{k-1}})$ . Por fim, defina  $B_{v_k} = B_{e_k} \cup B_{e_{k+1}} = \bigcup_{e \in s^{-1}(v_k)} B_e$ .

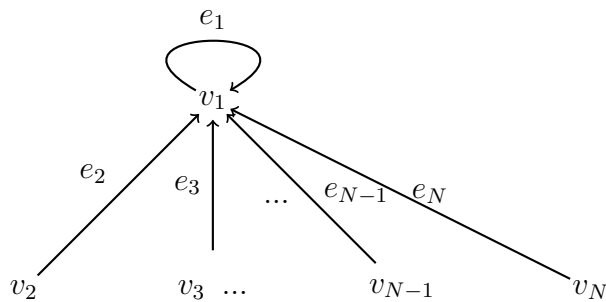
Com as escolhas feitas acima,  $\varphi$  satisfaz (BPB). Suponha que  $\#A = 2$ , logo  $\#B = 2$  e os elementos de  $A$  e  $B$  aparecem de forma intercalada no grafo. Suponha que  $A = \{v_i, v_m\}$  e  $B = \{v_k, v_l\}$ . Sem perda de generalidade suponha que  $m < l < i < k$ . Nesse caso o grafo pode ser representado da seguinte forma:



Para provar que  $\varphi$  satisfaz (BPB) basta imitar o argumento do caso em que  $\#A = 1$ : escolhemos primeiramente conjuntos ortonormais totais  $B_{v_i} \subseteq H_{v_i}$  e  $B_{v_m} \subseteq H_{v_m}$  e posteriormente definimos adequadamente os conjuntos ortonormais totais para todos os vértices, deixando para o final os vértices  $v_l$  e  $v_k$ . O caso geral é análogo.  $\square$

Por outro lado, mostraremos agora uma classe de grafos que admitem pelo menos uma representação que não satisfaz (BPB). A presença de loops e caminhos fechados (no sentido orientado) impede que (BPB) seja satisfeita em algumas situações.

**Exemplo 2.4.3.** Considere o grafo dado por:



Defina para cada  $j = 1, \dots, N$  os operadores

$$\overline{S}_{e_j} : l^2 \rightarrow l^2 \quad e \quad \overline{P}_{v_j} : l^2 \rightarrow l^2$$

dados por

$$\overline{S}_{e_j}(x_1, x_2, \dots) = ix_1 \cdot \delta_j \quad e \quad \overline{P}_{v_j}(x_1, x_2, \dots) = x_j \delta_j$$

onde  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é a base canônica de  $l^2$ . Note que  $\{\overline{P}_{v_j}\}_{j=1, \dots, N}$  é uma família de projeções mutuamente ortogonais e  $\{\overline{S}_{e_j}\}_{j=1, \dots, N}$  é uma família de isometrias parciais com imagens

mutuamente ortogonais. Além disso, notamos que o operador adjunto  $\overline{S}_{e_j}^* : l^2 \rightarrow l^2$  é dado por:

$$\overline{S}_{e_j}^*(y_1, y_2, \dots) = (-iy_j, 0, 0, \dots).$$

Vamos verificar que as condições de Cuntz-Krieger são satisfeitas.

(CK1) Dado  $j = 1, \dots, N$  e  $x = (x_1, x_2, \dots)$  temos

$$\overline{S}_{e_j}^* \overline{S}_{e_j}(x) = \overline{S}_{e_j}^*(ix_1 \cdot \delta_j) = ((-i)ix_1, 0, 0, \dots) = (x_1, 0, 0, \dots) = \overline{P}_{v_1}(x) = \overline{P}_{r(e_j)}(x).$$

(CK2) Dado  $j = 1, \dots, N$  e  $y = (y_1, y_2, \dots)$  temos

$$\overline{S}_{e_j} \overline{S}_{e_j}^*(y) = \overline{S}_{e_j}(-iy_j, 0, 0, \dots) = i(-i)y_j \cdot \delta_j = y_j \cdot \delta_j = \overline{P}_{v_j}(y)$$

assim,

$$\overline{P}_{s(e_j)} \overline{S}_{e_j} \overline{S}_{e_j}^*(y) = \overline{P}_{v_j} \overline{P}_{v_j}(y) = \overline{P}_{v_j}(y)$$

mostrando que  $\overline{P}_{s(e_j)} \overline{S}_{e_j} \overline{S}_{e_j}^* = \overline{S}_{e_j} \overline{S}_{e_j}^*$ .

(CK3) Dado  $v_j \in E^0$  note que  $s^{-1}(v_j) = e_j$ ; desse modo

$$\sum_{e \in s^{-1}(v_j)} \overline{S}_e \overline{S}_e^* = \overline{S}_{e_j} \overline{S}_{e_j}^* = \overline{P}_{v_j}.$$

Pela propriedade universal da álgebra  $C^*(E)$  existe uma representação  $\varphi : C^*(E) \rightarrow B(l^2)$  tal que

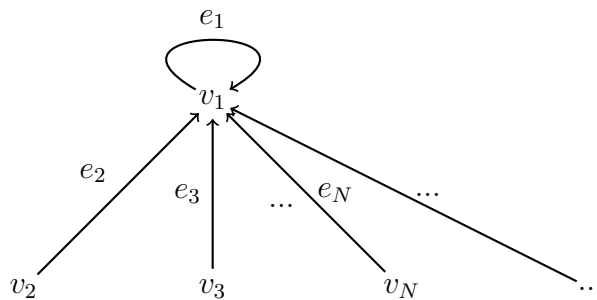
$$\varphi(S_{e_j}) = \overline{S}_{e_j} \text{ e } \varphi(P_{v_j}) = \overline{P}_{v_j}.$$

Afirmamos que  $\varphi$  não satisfaz a condição (BPB). Se  $\varphi$  satisfizesse (BPB), existiria um conjunto ortonormal total  $B_{e_1} \subseteq H_{e_1} = \varphi(S_{e_1})\varphi(S_{e_1})^*(l^2) = \text{span}\{\delta_1\}$ . Daí  $B_{e_1} = \{x\}$  onde  $x = (x_1, 0, 0, \dots)$  e  $\|x\|_{l^2} = 1$ . Além disso,  $B_{v_1} := \bigcup_{e \in s^{-1}(v_1)} B_e$ , assim  $B_{v_1} = B_{e_1}$ . Note que

$$\varphi(S_{e_1})(B_{r(e_1)}) = \varphi(S_{e_1})(B_{v_1}) = \varphi(S_{e_1})(B_{e_1}) \neq B_{e_1}$$

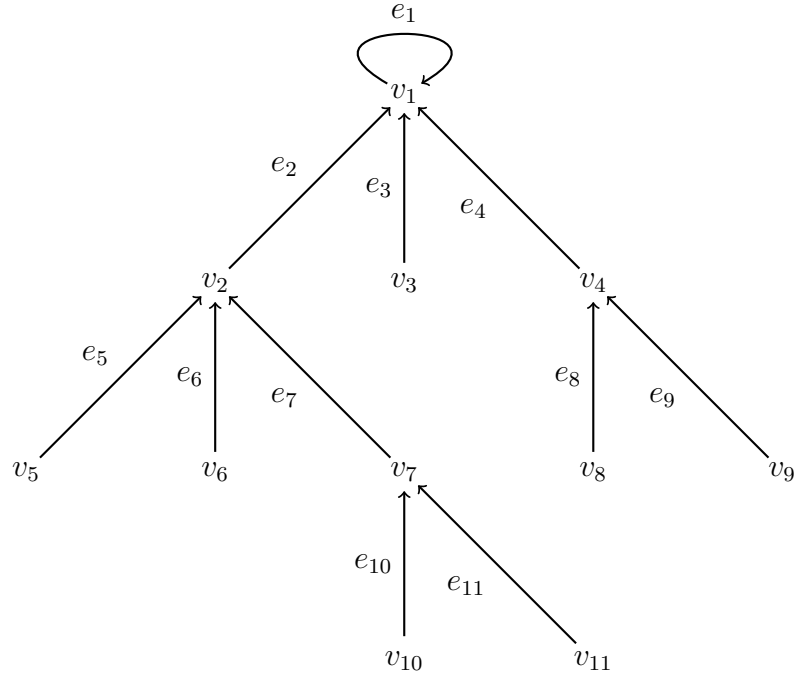
onde usamos o fato de que  $ix_1 = x_1$  admite como única solução complexa  $x_1 = 0$  o que não pode acontecer pois  $\|x\|_{l^2} \neq 0$ . Logo  $\varphi$  não satisfaz (BPB).

De maneira análoga é possível obter uma representação, que não satisfaz a condição (BPB), do seguinte grafo com infinitos vértices:



Na verdade, os grafos acima são um caso particular de uma classe de grafos para os quais sempre existe uma representação que não satisfaz (BPB). O exemplo abaixo contempla mais um grafo pertencente a essa classe. De modo não formal, os grafos pertencentes a essa classe são compostos por vértices e arestas distribuídos em forma de árvore, com uma única orientação e com um loop no “final da árvore”.

**Exemplo 2.4.4.** *Considere o grafo dado por:*



Defina para cada  $j = 1, \dots, 11$  os operadores  $\overline{P}_{v_j} : l^2 \rightarrow l^2$  e  $\overline{S}_{e_j} : l^2 \rightarrow l^2$  dados por

$$\begin{aligned} \overline{P}_{v_j}(x) &= x_j \cdot \delta_j \quad \text{para todo } j = 1, \dots, 11. \\ \overline{S}_{e_j}(x) &= ix_1 \cdot \delta_j \quad \text{para todo } j = 1, 2, 3, 4. \\ \overline{S}_{e_j}(x) &= ix_2 \cdot \delta_j \quad \text{para todo } j = 5, 6, 7. \\ \overline{S}_{e_j}(x) &= ix_4 \cdot \delta_j \quad \text{para todo } j = 8, 9. \\ \overline{S}_{e_j}(x) &= ix_7 \cdot \delta_j \quad \text{para todo } j = 10, 11. \end{aligned}$$

onde  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Raciocinando como no exemplo anterior obteremos uma representação  $\varphi$  de  $C^*(E)$  que não satisfaz (BPB).

É interessante notar que se no grafo acima, não houvesse o loop baseado em  $v_1$  tal grafo seria  $P$ -simples, com  $Z$  finito e conexo. Portanto, toda representação de tal grafo iria satisfazer (BPB).

### 3 Conclusão

Nesse trabalho mostramos, num primeiro instante, como obter representações de grafos via sistemas ramificados e em seguida obtivemos uma família de grafos para os quais sempre existe um sistema ramificado; o resultado provado nesse texto generaliza o Teorema 3.1 do artigo (GONÇALVES; ROYER, 2012) e o Teorema 2.6 da dissertação (MOREIRA, 2019). Além disso, as consequências da existência dessas representações foram vistas na terceira seção do primeiro capítulo.

Em seguida, buscamos obter relações entre representações quaisquer de  $C^*(E)$  com representações induzidas por  $E$ -sistemas ramificados. Nessa direção, o ponto crucial foi a condição (BPB). Além disso, como supomos  $H$  um espaço de Hilbert qualquer (não necessariamente separável), o Teorema 2.1.11 generaliza o Teorema 2.1 de (GONÇALVES; ROYER, 2011). Obtemos também uma classe de grafos para os quais toda representação satisfaz (BPB) (Teorema 2.3.5) e portanto para estudar representações de tais grafos podemos estudar as representações induzidas por sistemas ramificados e posteriormente usar a equivalência unitária para transferir informações.

Na última seção, encontramos uma classe de grafos para os quais toda representação satisfaz (BPB), porém, tais grafos não se encaixam nas hipóteses do Teorema 2.3.5. Ainda, obtemos outra família de grafos para os quais ao menos uma representação não satisfaz (BPB). Ao que parece, a presença de loops é a responsável por isso; inclusive, essa é uma questão que fica em aberto: é verdade que todo grafo que possui um loop admite uma representação que não satisfaz (BPB)?

# Apêndice

# A Tópicos de Medida e Integração

## A.1 Mudança de Variável e Radon-Nikodym

Dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $E \in \mathcal{A}$  considere a família de todos os conjuntos da forma  $E \cap J$  onde  $J \in \mathcal{A}$ . Essa família é uma  $\sigma$ -álgebra (contida em  $\mathcal{P}(E)$ ) e será denotada por  $\mathcal{A}_E$ .

**Proposição A.1.1.** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(X', \mathcal{A}', \nu)$  espaços de medida,  $f : X \rightarrow X'$  uma função. Suponha que  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  onde  $E_n \in \mathcal{A}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $f$  é  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -mensurável se, e somente se,  $f|_{E_n}$  é  $(\mathcal{A}_{E_n}, \mathcal{A}')$ -mensurável para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Suponha  $f$  mensurável e seja  $D \in \mathcal{A}'$ . Note que para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos que  $f|_{E_n}^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap E_n \in \mathcal{A}_{E_n}$ , portanto  $f|_{E_n}$  é mensurável.

Reciprocamente, se  $D \in \mathcal{A}'$  então  $f|_{E_n}^{-1}(D) \in \mathcal{A}_{E_n} \subseteq \mathcal{A}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f^{-1}(D) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(D) \cap E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f|_{E_n}^{-1}(D)$  segue que  $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$  como queríamos.  $\square$

**Definição A.1.2.** *Seja  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  um espaço de medida. Dizemos que  $\nu$  é uma medida semi-finita se para todo  $E \in \mathcal{N}$  tal que  $\nu(E) = \infty$  existe  $F \in \mathcal{N}$  com  $F \subseteq E$  e  $0 < \nu(F) < \infty$ .*

**Exemplo A.1.3.** *A medida de contagem é semi-finita.*

Seja  $\eta : P(X) \rightarrow [0, \infty]$  a medida de contagem, onde  $X$  é não vazio. Se  $F \in P(X)$  é tal que  $\eta(F) = \infty$  então  $F$  possui infinitos elementos, considere  $x_0 \in F$ . Note que  $\{x_0\} \in P(X)$ ,  $\{x_0\} \subseteq F$  e  $\eta(\{x_0\}) = 1$ . Portanto  $\eta$  é semi-finita.

**Exemplo A.1.4.** *Toda medida sigma-finita é semi-finita.*

Seja  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  uma medida sigma-finita, onde  $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ . Assim, podemos escrever  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$  com  $\mu(X_i) < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Seja  $F \in \mathcal{M}$  tal que  $\mu(F) = \infty$  e note que  $F = X \cap F = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \cap F$ ; desse modo

$$\mu(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cap F).$$

Como  $\mu(F) = \infty$  existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mu(X_{i_0} \cap F) > 0$ , como  $X_{i_0} \cap F \subset F$  e  $\mu(X_{i_0} \cap F) < \mu(X_{i_0}) < \infty$  concluímos que  $\mu$  é semi-finita.

**Teorema A.1.5.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida,  $h \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Assim,  $\int_E h \, d\mu = 0$  para todo  $E \in \mathcal{M}$  se, e somente se,  $h \stackrel{\mu-a.e.}{=} 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina  $E_n = \{x \in X \mid h(x) \geq \frac{1}{n}\}$ . Note que  $\{x \in X \mid h(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Usando a hipótese temos

$$0 = \int_{E_n} h \, d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n)$$

o que nos permite concluir que  $\mu(E_n) = 0$ . Como  $\mu(\{x \in X \mid h(x) \neq 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$  temos  $\mu(\{x \in X \mid h(x) \neq 0\}) = 0$ , ou seja,  $h \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Considere, num primeiro instante, que  $f$  é uma função simples em  $L^+$  e seja  $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$  sua representação padrão, em particular, os conjuntos  $E_j$  são dois a dois disjuntos. Note que dado  $E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap E).$$

Como  $f \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} 0$ , se  $c_j \neq 0$  devemos ter  $\mu(E_j) = 0$  e assim  $\mu(E_j \cap E) = 0$ , donde segue que  $\int_E f \, d\mu = 0$ . Se  $h \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$  é tal que  $h \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} 0$  então

$$\int_E h \, d\mu = \sup \left\{ \int_E f \, d\mu \mid f \in L^+, f \text{ é simples e } 0 \leq f \leq h \right\} = 0$$

mostrando o desejado.  $\square$

**Teorema A.1.6.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida,  $f, g \in L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Suponha, além disso, que  $\mu$  é semi-finita. Assim, se*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$$

para todo  $E \in \mathcal{M}$  então  $f \stackrel{\mu\text{-a.e.}}{=} g$ .

*Demonstração.* Por absurdo, suponhamos que  $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) > 0$ . Como  $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \cup \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$  então ao menos um desses conjuntos tem medida positiva. Sem perda de generalidade, iremos assumir que  $\mu(\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}) > 0$  e o outro caso será análogo. Note que

$$\{x \in X \mid f(x) > g(x)\} = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$$

onde para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\} \cap \{x \in X \mid f(x) < n\} \cap \{x \in X \mid g(x) < n\}$$

e

$$B_n = \{x \in X \mid f(x) = \infty\} \cap \{x \in X \mid g(x) < n\}.$$

Assim, visto que  $\mu(\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}) > 0$  temos duas opções:

- $\mu(A_N) > 0$  para certo  $N \in \mathbb{N}$ . Como  $\mu$  é semi-finita, existe  $E \subseteq A_N$  tal que  $0 < \mu(E) < \infty$ , além disso, como  $f$  e  $g$  são limitadas em  $E$  pois  $f(x) < N$  e  $g(x) < N$  então  $f$  e  $g$  são integráveis sobre  $E$ , logo  $\int_E (f - g) d\mu = \int_E f d\mu - \int_E g d\mu$ .

Note que para todo  $x \in E$  temos  $f(x) > g(x)$ , logo  $f - g$  é uma função mensurável, positiva e  $f - g > 0$  em  $E$  (que tem medida positiva). Pelo Teorema A.1.5 temos que  $\int_E (f - g) d\mu \neq 0$ , ou seja,  $\int_E f d\mu \neq \int_E g d\mu$  contradizendo nossa hipótese.

- $\mu(B_N) > 0$  para certo  $N \in \mathbb{N}$ . Como  $\mu$  é semi-finita, existe  $E \subseteq B_N$  tal que  $0 < \mu(E) < \infty$ , assim, observe que:

$$\int_E g d\mu < \int_E N d\mu = \int_E \chi_E d\mu = N\mu(E) < \infty$$

por outro lado

$$\int_E f d\mu \geq \int_E n d\mu = n\mu(E)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  visto que  $f(x) = \infty$  para todo  $x \in B_N$ , logo  $\int_E f d\mu = \infty$  o que contradiz a hipótese novamente e finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $(X', \mathcal{A}')$  um espaço mensurável e  $f : X \rightarrow X'$  uma função mensurável.

**Definição A.1.7.** A função  $\mu \circ f^{-1} : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\mu \circ f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E))$  para todo  $E \in \mathcal{A}'$  é chamada de medida imagem de  $\mu$  por  $f$ , ou simplesmente de medida imagem.

**Proposição A.1.8.** A função  $\mu \circ f^{-1} : \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty]$  é uma medida.

*Demonstração.* Segue do fato de  $\mu$  ser medida e de propriedades da imagem inversa.

**Teorema A.1.9.** (Mudança de Variáveis) Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida,  $(X', \mathcal{A}')$  um espaço mensurável,  $f : X \rightarrow X'$  uma função mensurável e  $\mu \circ f^{-1}$  a medida-imagem. Assim,

a) Seja  $g : X' \rightarrow [0, \infty]$  uma função mensurável. Então

$$\int_{X'} g d(\mu \circ f^{-1}) = \int_X (g \circ f) d\mu$$



b) Seja  $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$  uma função mensurável. Então  $g$  é  $\mu \circ f^{-1}$ -integrável se, e somente se,  $g \circ f$  é  $\mu$ -integrável e nesse caso vale a igualdade do item a) para  $g$ .

*Demonstração.* Veja (FERNANDEZ, 1976, pg. 108).

**Teorema A.1.10.** *Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida e  $1 \leq p < \infty$ . Então o conjunto das funções simples,  $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$ , com  $\mu(E_j) < \infty$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , é denso em  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ .*

*Demonstração.* Veja (FOLLAND, 2013, pg. 183).

**Definição A.1.11.** *Considere os espaços de medida  $(X, \mathcal{M}, \nu)$  e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Diremos que uma função  $f \in L^+(X, \mathcal{M})$  é uma **derivada de Radon-Nikodym** de  $\nu$  com respeito a  $\mu$  se for verdade que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Em geral, dadas duas medidas não é garantida a existência de uma função  $f$  satisfazendo a condição acima. Caso exista tal função, uma hipótese suficiente para sua unicidade ( $\mu - a.e$ ) é que  $\mu$  seja semi-finita, o que é uma consequência direta do Teorema A.1.6. Refinando as medidas envolvidas conseguimos garantir a existência da função  $f$ , resultado esse que é conhecido como Teorema de Radon-Nikodym:

**Teorema A.1.12.** *(Radon-Nikodym) Sejam  $(X, \mathcal{M}, \nu)$  e  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaços de medida.*

- *Suponha que ambas as medidas sejam  $\sigma$ -finitas e que  $\nu \ll \mu$ . Assim, existe uma função  $f \in L^+(X, \mathcal{M})$  tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

*Além disso  $f$  é única  $\mu - a.e$  e escrevemos  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ .*

- *Se  $g$  é uma função quase integrável (com respeito a  $\nu$ ) então*

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu.$$

*Demonstração.* Veja (FERNANDEZ, 1976, pg. 136) e (FERNANDEZ, 1976, pg. 145).

# Referências

- BLAZOTTO, S. C.  $C^*$ -álgebras de grafos com linhas finitas. Florianópolis, SC, 2012. 11, 18, 36
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de análise funcional*. [S.l.]: SBM, 2012. 11, 36
- FERNANDEZ, P. J. *Medida e integração*. [S.l.]: IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. v. 2. 11, 73
- FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. 73
- FOWLER, N.; LACA, M.; RAEBURN, I. The  $C^*$ -algebras of infinite graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 128, n. 8, p. 2319–2327, 2000. 11, 30
- GONÇALVES, D.; ROYER, D. Unitary equivalence of representations of graph algebras and branching systems. *Functional Analysis and Its Applications*, Springer, v. 45, n. 2, p. 117–127, 2011. 10, 41, 68
- GONÇALVES, D.; ROYER, D. Graph  $C^*$ -algebras, branching systems and the Perron–Frobenius operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 391, n. 2, p. 457–465, 2012. 10, 21, 68
- KAWAMURA, K. The perron-frobenius operators, invariant measures and representations of the cuntz-krieger algebras. *Journal of mathematical physics*, AIP, v. 46, n. 8, p. 083514, 2005. 10
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: wiley New York, 1978. v. 1. 11, 36
- KUMJIAN, A.; PASK, D.; RAEBURN, I. Cuntz–krieger algebras of directed graphs. *pacific journal of mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 184, n. 1, p. 161–174, 1998. 10
- KUMJIAN, A. et al. Graphs, groupoids, and cuntz–krieger algebras. *Journal of Functional Analysis*, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 505–541, 1997. 10
- MOREIRA, P. S. Representação de Álgebras de caminhos de leavitt. 2019. 10, 21, 68
- MURPHY, G. J.  *$C^*$ -algebras and operator theory*. [S.l.]: Academic press, 2014. 10, 11
- RAEBURN, I. *Graph algebras*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2005. 10, 11
- RUDIN, W. *Real and complex analysis*. [S.l.]: Tata McGraw-hill education, 1987. 11, 27