



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL-PROFMAT**

Leandro Corrêa

A RELAÇÃO ENTRE ROTAÇÕES, QUATÉRNIOS E ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Florianópolis

2020

Leandro Corrêa

A RELAÇÃO ENTRE ROTAÇÕES, QUATÉRNIOS E ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Celso Melchhiades Doria

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Corrêa, Leandro

A relação entre rotações, quatérnios e álgebras de Clifford / Leandro Corrêa ; orientador, Celso Melchiades Doria, 2020.

109 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Rotações. 3. Movimentos Rígidos. 4. Quatérnios. 5. Álgebras de Clifford. I. Doria, Celso Melchiades. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Leandro Corrêa

A RELAÇÃO ENTRE ROTAÇÕES, QUATÉRNIOS E ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins
UFSC

Prof^a. Dr^a. Silvia Martini de Holanda
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Orientador

Florianópolis, 16 de março de 2020.

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Aos meus pais.

A todos os meus professores, desde os do Ensino Fundamental aos do Mestrado, em especial os de Matemática, que de certa forma contribuíram ao longo da minha vida escolar e acadêmica para meu crescimento acadêmico e profissional. Deixo aqui meu agradecimento especial às professoras Selma e Silvia, que, sem dúvida, foram as que mais marcaram a minha vida escolar e acadêmica, respectivamente.

Ao professor Celso, pela parceria e paciência.

A todos os meus amigos, colegas de escola, de faculdade, de PET, de trabalho, de docência, enfim... de todas as partes, pela amizade e apoio nas horas mais difíceis. Não vou citar nomes aqui, com receio de me esquecer de alguém.

A todos, muito obrigado!

“Quem já deu aula pra sexto ano é capaz de fazer qualquer coisa no planeta Terra.”

(Leandro Karnal)

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos a estrutura algébrica dos quatérnios e de que maneira eles podem ser utilizados para codificar movimentos rígidos no espaço tridimensional, em especial, as rotações. Apresentaremos, também, os quatérnios e outros conjuntos relevantes como casos particulares das álgebras geométricas de Clifford e de que maneira uma certa classe de grupos dessas álgebras pode ser usada para representar os movimentos rígidos no espaço.

Palavras-chave: rotações, movimentos rígidos, quatérnios, álgebras de Clifford

ABSTRACT

In this work we will present the algebraic structure of quaternions and how they can be used to encode rigid movements in three-dimensional space, in particular, rotations. We will also present quaternions and other relevant sets as particular cases of Clifford's geometric algebras and how a certain class of groups of these algebras can be used to represent rigid movements in space.

Keywords: rotations, rigid movements, quaternions, Clifford algebras

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	William Rowan Hamilton	1
Figura 2	William Kingdon Clifford	3
Figura 3	Rotação do vetor \vec{u} em torno da origem	19
Figura 4	Coordenadas de \vec{u} e \vec{v}	20
Figura 5	Representação de $z = a + bi$ no Plano de Argand-Gauss	23
Figura 6	Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Ox	27
Figura 7	Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Oy	28
Figura 8	Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Oz	29
Figura 9	Rotação em torno de um vetor \vec{r} arbitrário	30
Figura 10	Coordenadas de \vec{r}	31
Figura 11	Multiplicação entre i , j e k	38
Figura 12	Vetor \vec{z} referente ao complexo z	79
Figura 13	79
Figura 14	79
Figura 15	Argumento de z	81
Figura 16	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tábua de multiplicações entre i, j e k	38
Tabela 2	Tábua de multiplicações entre os geradores de $Cl_2(0, 2, 0)$	68

SUMÁRIO

Introdução	1
1 PRÉ-REQUISITOS	7
1.1 NÚMEROS COMPLEXOS	7
1.2 NÚMEROS DUAIS	9
1.3 MATRIZES ORTOGONAIS E UNITÁRIAS	10
1.4 ISOMETRIAS	13
1.5 ÁLGBRAS	16
2 ROTAÇÕES	19
2.1 ROTAÇÕES NO PLANO	19
2.2 NÚMEROS COMPLEXOS E ROTAÇÕES	22
2.3 ROTAÇÕES NO ESPAÇO	26
2.4 MOVIMENTOS RÍGIDOS NO ESPAÇO	34
3 O CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS	37
3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES	37
3.2 NOTAÇÃO VETORIAL DE UM QUATÉRNIO	44
3.3 QUATÉRNIOS E NÚMEROS COMPLEXOS	46
3.4 QUATÉRNIOS PUROS	49
3.5 QUATÉRNIOS E ROTAÇÕES NO ESPAÇO	51
3.6 QUATÉRNIOS DUAIS	57
3.7 QUATÉRNIOS DUAIS E MOVIMENTOS RÍGIDOS	59
4 ÁLGBRAS DE CLIFFORD	63
4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES	63
4.2 EXEMPLOS DE ÁLGBRAS DE CLIFFORD	66
4.3 GRUPO SPIN E MOVIMENTOS RÍGIDOS	71
5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA	77
5.1 INTRODUÇÃO	77
5.2 OBJETIVOS	77
5.2.1 Gerais	77
5.2.2 Específicos	77
5.3 LINHAS DE AÇÃO	78
5.3.1 Metodologia	78
5.3.2 Conteúdo	78
5.4 RECURSOS	82

Considerações Finais	83
REFERÊNCIAS	85
Índice Remissivo	87

INTRODUÇÃO

A Matemática é dividida em vários tópicos. Muitos deles eram, até tempos atrás, completamente dissociados: não havia nenhuma relação aparente entre eles. Com o passar do tempo, importantes correlações entre tópicos matemáticos que eram, até então, dissociados foram sendo construídas, proporcionando uma série de avanços na pesquisa matemática. Como exemplo, podemos citar a grande integração entre a Álgebra e a Geometria que foi promovida graças à criação da Geometria Analítica pelo matemático francês René Descartes.

Outra notória correlação entre a Álgebra e a Geometria foi a interpretação geométrica dos números complexos. No início do século XIX, estes eram vistos, apenas, como artifícios para a resolução de certas equações algébricas, como, por exemplo $x^2 + 1 = 0$. Nesse ponto é que fez-se necessário definir uma unidade imaginária i de modo que $i^2 = -1$. Somente mais tarde é que os números complexos passaram a ser vistos como pontos do plano, com a criação do plano de Argand-Gauss pelos matemáticos Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss. Com isso, foi possível estabelecer uma relação entre multiplicação de números complexos e rotações no plano.

Diante da codificação de rotações no plano por meio de multiplicação de números complexos, o questionamento que surgiu foi se seria possível fazer o mesmo com rotações no espaço. Quem acabou por ir atrás de uma solução para este problema foi o matemático irlandês William Rowan Hamilton.



Figura 1: William Rowan Hamilton

Inicialmente, Hamilton tentou codificar as rotações no espaço por meio dos números **hipercomplexos**, que nada mais eram do que números com duas unidades imaginárias. Ou seja, números da forma

$$q = q_0 + q_1i + q_2j,$$

com q_0 , q_1 e q_2 reais e i e j tais que $i^2 = j^2 = -1$. No entanto, ele não obteve sucesso nessa tentativa, uma vez que não era possível obter fechamento numa álgebra formada por hipercomplexos: não era possível garantir que multiplicações de hipercomplexos iriam resultar em um número que também era hipercomplexo.

As tentativas de Hamilton de buscar uma codificação para rotações no espaço se estenderam por anos. Somente por volta de 1843 é que ele conseguiu achar uma solução para o que estava procurando. Curiosamente, a relação fundamental que o permitiria conseguir o que estava tentando há mais de 15 anos veio à sua mente no momento em que ele atravessava uma das pontes que cruzam o Royal Canal, em Dublin, na Irlanda. Temendo esquecer a tal relação, ele acabou por entalhá-la na própria ponte com um canivete:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (1)$$

Ou seja, seria necessário um número com três unidades imaginárias para obter uma álgebra fechada e poder descrever as rotações no espaço por meio de elementos da mesma. Estava criada a álgebra dos **quatérnios**, denotada por \mathbb{H} em homenagem a Hamilton. Os quatérnios serão números da forma

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k,$$

com q_0 , q_1 , q_2 e q_3 reais. Da relação fundamental (1), podemos ver que \mathbb{H} formará uma álgebra não comutativa. E, como espaço vetorial real, podemos ver que \mathbb{H} possui dimensão 4.

As primeiras publicações de Hamilton sobre os quatérnios foram *On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions* (HAMILTON, 1844a) e *On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra* (HAMILTON, 1844b) em 1844, e *On a theory of quaternions* (HAMILTON, 1845), em 1845.

A invenção dos quatérnios trouxe grandes avanços para a Matemática. Além de introduzir a possibilidade de estudo de espaços com dimensão maior do que 3, a não comutatividade do produto influenciou o estudo de álgebras não comutativas. Ainda no século XIX, o matemático inglês William Kingdon Clifford trouxe grandes contribuições para esta área.

No artigo *Preliminary sketch of biquaternions* (CLIFFORD, 1873), Clifford intro-



Figura 2: William Kingdon Clifford

duz, pela primeira vez, uma classe de álgebras geométricas (álgebras cujas operações têm o efeito de espelhar, rotacionar, transladar e mapear os objetos geométricos que são modelados para novas posições) que levavam o seu nome. Tais álgebras permaneceriam como meras abstrações matemáticas por várias décadas, até que fossem descobertas várias aplicações das mesmas na Física.

Além disso, em (HAMILTON, 1844b) é abordado, pela primeira vez, o conceito de **biquatérnio**. Este termo foi usado para designar uma quantidade da forma $q + ri$, em que q e r eram quatérnios com coeficientes reais. Mais tarde, Clifford reemprega este termo para designar uma combinação algébrica de dois quatérnios através de um operador ω , que é comutativo com outros operadores e o seu quadrado é um escalar. Dessa maneira, os biquatérnios foram reescritos na forma $q + r\omega$, em que $q, r \in \mathbb{H}$.

Na primeira parte de (CLIFFORD, 1873), Clifford define o quadrado do operador ω como sendo igual a zero. Entretanto, em outros trabalhos (e até mesmo numa outra parte do trabalho citado anteriormente), Clifford define o quadrado de ω como sendo igual a 1 ou a -1 , dependendo do contexto no qual o biquatérnio estava inserido. No artigo *On the three types of complex number and planar transformations* (ROONEY, 1978), são apresentados três tipos diferentes de números complexos, cuja diferença está no comportamento do operador ω , que recebe denominações diferentes dependendo de seu quadrado:

- Número complexo: $a + bi$ ($i^2 = -1$)
- Número dual: $f + g\epsilon$ ($\epsilon^2 = 0$)
- Número duplo: $m + nd$ ($d^2 = 1$)

Na lista acima, os escalares são número reais. Quando consideramos os escalares como sendo quatérnios, temos os seguintes conjuntos:

- Número hipercomplexo: $q_0 + q_1 l$ ($l^2 = -1$)
- Quatérnio dual: $q_0 + q_1 \epsilon$ ($\epsilon^2 = 0$)
- Quatérnio duplo: $q_0 + q_1 d$ ($d^2 = 1$)

A presente dissertação, que será submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), tem por objetivo explorar de que maneira os movimentos rígidos no plano e no espaço, em especial as rotações, podem ser codificados por meio de estruturas algébricas como a dos números complexos e a dos quatérnios. Além disso, apresentaremos os principais conceitos relacionados às álgebras geométricas de Clifford e veremos que elas também poderão ser utilizadas na codificação dos movimentos rígidos. E, para finalizar, como ilustração do conteúdo estudado sobre números complexos e rotações, apresentaremos uma sequência didática direcionada para alunos do 3^o ano do Ensino Médio.

O conteúdo desta dissertação está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentaremos uma breve revisão dos pré-requisitos que o leitor necessita ter para o entendimento do conteúdo abordado. Dentre eles, podemos citar o corpo dos números complexos e isometrias. Além disso, apresentaremos os principais grupos que serão explorados nesta dissertação como, por exemplo $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ e $SU(n)$.

No segundo capítulo apresentaremos a ideia básica de rotação no plano e no espaço. Descreveremos as matrizes de rotação envolvidas, como elas são obtidas e a relação com rotações e o grupo $SO(n)$. Além disso, falaremos da relação entre números complexos e rotações no plano e apresentaremos o grupo $SE(3)$, dos movimentos rígidos no espaço.

No terceiro capítulo falaremos da estrutura algébrica dos quatérnios de Hamilton e suas principais propriedades. Apresentaremos uma importante aplicação que atuará nos quatérnios e que será fundamental para mostrar como eles podem ser utilizados para descrever uma rotação no espaço. Além disso, apresentaremos os quatérnios duais e sua relação com os movimentos rígidos no espaço.

No quarto capítulo apresentaremos os conceitos básicos que definem as álgebras geométricas de Clifford. Mostraremos, também, como importantes estruturas vistas nos capítulos anteriores podem ser vistas como exemplos particulares de álgebras de Clifford e como importantes grupos contidos nas mesmas podem ser usados para descrever os movimentos rígidos no espaço.

No quinto e último capítulo apresentaremos um plano de aula, direcionado ao 3º ano do Ensino Médio, baseado em um dos conteúdos abordados neste trabalho. O conteúdo escolhido se baseia no uso de multiplicação de números complexos para descrever rotações no plano.

1 PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para o entendimento do conteúdo abordado nesta dissertação.

Além dos conteúdos que serão abordados neste capítulo, também serão considerados pré-requisitos, claro, conhecimentos básicos em Álgebra, Álgebra Linear e Geometria.

1.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Definição 1.1.1. *Os números complexos são números da forma*

$$z = a + bi,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. O conjunto formado pelos números complexos é denotado pela letra \mathbb{C} .

Em \mathbb{C} , podemos definir as operações soma (+) e produto (\cdot):

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(a + bi, c + di) \longmapsto (a + c) + (b + d)i$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(a + bi, c + di) \longmapsto (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Com as operações acima, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo. De fato, \mathbb{C} possui as seguintes propriedades:

- (1) **Associatividade da soma:** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- (2) **Comutatividade da soma:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- (3) **Existência do elemento neutro da soma:** existe $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = 0 + z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (4) **Existência do elemento oposto:** para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ existe $-z = -a - bi \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = -z + z = 0$;
- (5) **Associatividade do produto:** $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- (6) **Comutatividade do produto:** $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

(7) **Existência do elemento neutro do produto:** existe $1 = 1+0i \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$;

(8) **Existência do elemento inverso:** para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}^*$ existe $z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \in \mathbb{C}$ tal que

$$z \cdot z^{-1} = \frac{(a + bi)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad (1.1)$$

e $z^{-1} \cdot z = 1$ (análogo a (1.1));

(9) **Distributividade do produto em relação à soma:** para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

- $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (distributividade à direita);
- $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (distributividade à esquerda).

A seguir, temos duas importantes definições a respeito dos números complexos.

Definição 1.1.2. *Seja $z = a + bi$ um número complexo. O **conjugado** de z é o número*

$$\bar{z} = a - bi.$$

Definição 1.1.3. *Seja $z = a + bi$ um número complexo. O **módulo** de z é dado por*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

De (1.1), podemos notar que, se $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

A seguir, definiremos um importante subconjunto de \mathbb{C} que será utilizado posteriormente para o estudo das rotações no plano.

Definição 1.1.4. *O subconjunto dos complexos de módulo unitário é definido por*

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Observe que, se $z \in U(1)$, então

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{1} = \bar{z}.$$

1.2 NÚMEROS DUAIS

Definição 1.2.1. *Os números duais são números da forma*

$$d = d_0 + d_1\epsilon,$$

em que $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ e ϵ é tal que $\epsilon^2 = 0$. O conjunto formado pelos números duais é denotado pela letra \mathbb{D} .

Em \mathbb{D} , podemos definir as operações soma (+) e produto (\cdot):

$$\begin{aligned} + & : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ & (c_0 + c_1\epsilon, d_0 + d_1\epsilon) \longmapsto (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)\epsilon \\ \cdot & : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ & (c_0 + c_1\epsilon, d_0 + d_1\epsilon) \longmapsto c_0d_0 + (c_0d_1 + c_1d_0)\epsilon \end{aligned}$$

Com as operações acima, $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ é um anel com unidade e divisores de zero. De fato, dados $c = c_1\epsilon$ e $d = d_1\epsilon$ (com $c_1, d_1 \neq 0$), por exemplo, segue que $c \cdot d = 0$ e $c, d \neq 0$.

Definição 1.2.2. *Seja $d = d_0 + d_1\epsilon$ um número dual. O conjugado de d é o número*

$$\bar{d} = d_0 - d_1\epsilon.$$

Com isto, temos que

$$d\bar{d} = (d_0 + d_1\epsilon)(d_0 - d_1\epsilon) = d_0^2. \quad (1.2)$$

De (1.2), temos que, se $d_0 \neq 0$,

$$\frac{d\bar{d}}{d_0^2} = 1 \quad (1.3)$$

e, de (1.3), temos a expressão para o inverso do número dual d :

$$d^{-1} = \frac{\bar{d}}{d_0^2}.$$

Proposição 1.2.3. *A função*

$$\begin{aligned} \varsigma & : \mathbb{D} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ & d_0 + d_1\epsilon \longmapsto \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de anéis.

Demonstração. Sejam $c = c_0 + c_1\epsilon$ e $d = d_0 + d_1\epsilon$ dois números duais. Então:

$$\begin{aligned}\zeta(c + d) &= \begin{pmatrix} c_0 + d_0 & 0 \\ c_1 + d_1 & c_0 + d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} \\ &= \zeta(c) + \zeta(d).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\zeta(c \cdot d) = \begin{pmatrix} c_0d_0 & 0 \\ c_0d_1 + c_1d_0 & c_0d_0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Mas

$$\begin{aligned}\zeta(c) \cdot \zeta(d) &= \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0d_0 & 0 \\ c_0d_1 + c_1d_0 & c_0d_0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (1.5)$$

De (1.4) e (1.5) segue que $\zeta(c \cdot d) = \zeta(c) \cdot \zeta(d)$, o que conclui a prova de que ζ é um homomorfismo de anéis. Por fim, mostremos que ζ é bijetora:

$$\begin{aligned}\zeta(c) = \zeta(d) &\implies \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ d_1 & d_0 \end{pmatrix} \\ &\implies c_0 = d_0 \text{ e } c_1 = d_1 \\ &\implies c_0 + c_1\epsilon = d_0 + d_1\epsilon \\ &\implies c = d.\end{aligned}$$

Além disso, dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, é claro que existe o número dual $b = x + y\epsilon$ tal que $\zeta(b) = A$. Logo, ζ é um isomorfismo de anéis. \square

1.3 MATRIZES ORTOGONAIS E UNITÁRIAS

Considere um espaço vetorial V sobre \mathbb{R} , munido com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, com a norma induzida sendo

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Sabemos que todo espaço vetorial V admite uma base E .

Definição 1.3.1. *Seja V um espaço vetorial com as características acima e $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para V .*

(1) E é uma **base ortogonal** se e_i e e_j são ortogonais, ou seja,

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

(2) E é uma **base ortonormal** se, além de ser ortogonal, $\|e_i\| = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Se $T : V \rightarrow V$ é uma transformação linear e V possui dimensão finita (digamos, n), sabemos que existe uma matriz $A_{n \times n}$ tal que $T(v) = A \cdot v$, para todo $v \in V$. Sendo $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para V , denotaremos $A = [T]_E$ a matriz da transformação T na base E .

As transformações lineares inversíveis constituem um importante grupo com a operação de composição.

Definição 1.3.2. *Definimos como $\text{GL}(V)$ o conjunto das transformações lineares inversíveis em V .*

$$\text{GL}(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ é inversível}\}$$

Para que uma transformação linear seja inversível, é necessário e suficiente que a sua matriz também seja inversível, independente da base tomada. E, para que uma matriz seja inversível, é necessário e suficiente que o seu determinante seja não nulo. Sendo assim, podemos definir o seguinte conjunto, que será bastante abordado nesta dissertação:

Definição 1.3.3. *Seja $V = \mathbb{R}^n$. Definimos como $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais e determinante não nulo.*

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

Com a operação de multiplicação, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ é um grupo.

Dentre as matrizes inversíveis, uma importante classe que se destaca é a das matrizes ortogonais.

Definição 1.3.4. *Uma matriz $A_{n \times n}$ é dita **ortogonal** se*

$$A^T = A^{-1}.$$

Exemplo 1.3.5. *A matriz identidade*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

é ortogonal. De fato, $(I_n)^T = I_n = (I_n)^{-1}$.

Exemplo 1.3.6. *A matriz*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

é ortogonal. De fato,

$$R_\theta R_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$R_\theta^T R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Logo, $R_\theta^T = R_\theta^{-1}$.

Proposição 1.3.7. *Se A é ortogonal e, portanto, inversível, então A^{-1} também é ortogonal.*

Demonstração. Temos que

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1}, \quad (1.6)$$

o que mostra que A^{-1} é ortogonal. \square

As matrizes ortogonais constituem um importante subgrupo de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ que também será bastante abordado nesta dissertação.

Definição 1.3.8. *Definimos como $O(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais.*

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ é ortogonal}\}$$

A seguir, um importante resultado que diz respeito ao determinante de uma matriz ortogonal.

Proposição 1.3.9. *Se A é ortogonal, então $\det(A) = \pm 1$.*

Demonstração. Seja A uma matriz $n \times n$ ortogonal. Como $AA^T = I_n$, segue que

$$\det(AA^T) = \det A \det A^T = \det I_n.$$

Como $\det A = \det A^T$ e $\det I_n = 1$, ficamos com

$$(\det A)^2 = 1 \iff \det A = \pm 1.$$

□

A proposição anterior nos diz que, se uma matriz A é ortogonal, ou $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$. As matrizes que se enquadram na primeira opção fazem parte de um importante conjunto, que será um subgrupo de $O(n)$. Tal conjunto é definido a seguir.

Definição 1.3.10. *Definimos como $SO(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais de determinante unitário.*

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \quad (1.7)$$

Considere, agora, uma matriz $A \in M_n(\mathbf{C})$. Denotaremos por A^* a sua transposta conjugada.

Definição 1.3.11. *Uma matriz A $n \times n$ é dita **unitária** se $A^* = A^{-1}$.*

Da mesma forma que fizemos com as matrizes ortogonais, podemos definir o conjunto das matrizes unitárias.

Definição 1.3.12. *Definimos como $U(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ unitárias.*

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A \text{ é unitária}\}$$

Com a operação de multiplicação, $U(n)$ é um grupo. Note que, quando $n = 1$, temos o grupo $U(1)$, que corresponde exatamente ao dos complexos unitários.

Ademais, podemos definir um importante subgrupo de $U(n)$, que também será utilizado mais adiante.

Definição 1.3.13. *Definimos como $SU(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ unitárias de determinante unitário.*

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

1.4 ISOMETRIAS

Considere o espaço vetorial \mathbf{R}^n munido com o produto interno usual e com a norma induzida pelo mesmo.

Definição 1.4.1. Uma aplicação $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **isometria** se, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h(u) - h(v)\| = \|u - v\|.$$

A proposição a seguir nos diz como uma isometria se comporta com relação ao produto interno.

Proposição 1.4.2. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) h é uma isometria e $h(0) = 0$.

(ii) h preserva o produto interno, ou seja, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle h(u), h(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii): Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria tal que $h(0) = 0$. Então, $\|h(u)\| = \|h(u) - h(0)\| = \|u - 0\| = \|u\|$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$\|h(u) - h(v)\|^2 = \|h(u)\|^2 - 2\langle h(u), h(v) \rangle + \|h(v)\|^2 \quad (1.8)$$

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad (1.9)$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$. Como as expressões (1.8) e (1.9) são iguais, segue que

$$\langle h(u), h(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

(ii) \Rightarrow (i): Temos que, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|h(u) - h(v)\|^2 &= \|h(u)\|^2 - 2\langle h(u), h(v) \rangle + \|h(v)\|^2 \\ &= \langle h(u), h(u) \rangle - 2\langle h(u), h(v) \rangle + \langle h(v), h(v) \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u - v\|^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Além disso, segue de (1.10) que $\|h(u) - h(0)\| = \|u - 0\| = \|u\| = \|h(u)\|$. Logo, h é uma isometria e $h(0) = 0$. \square

Proposição 1.4.3. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação sobrejetora. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) h é uma isometria e $h(0) = 0$.

(ii) h é uma transformação linear, e a matriz A tal que $h(u) = A \cdot u$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, é ortogonal.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii): Segue da Proposição 1.4.2 que h preserva o produto interno. Então, podemos escrever

$$\langle h(u+v), h(w) \rangle = \langle u+v, w \rangle \quad (1.11)$$

para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle h(u) + h(v), h(w) \rangle &= \langle h(u), h(w) \rangle + \langle h(v), h(w) \rangle \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ &= \langle u+v, w \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

De (1.11) e (1.12), temos que

$$\langle h(u+v), h(w) \rangle = \langle h(u) + h(v), h(w) \rangle,$$

para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Logo,

$$h(u+v) = h(u) + h(v).$$

Agora, dado $k \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\langle h(k \cdot u), h(w) \rangle = \langle k \cdot u, w \rangle = k \cdot \langle u, w \rangle. \quad (1.13)$$

Mas

$$\langle k \cdot h(u), h(w) \rangle = k \cdot \langle u, w \rangle. \quad (1.14)$$

De (1.13) e (1.14), segue que

$$h(k \cdot u) = k \cdot h(u).$$

Portanto, h é linear. Ao fixarmos uma base ortonormal, existe uma matriz $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$,

$$h(u) = A \cdot u.$$

Temos que, para todos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle h(u), h(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle. \quad (1.15)$$

Por outro lado,

$$\langle Au, Av \rangle = A \langle u, Av \rangle = AA^t \langle u, v \rangle. \quad (1.16)$$

De (1.15) e (1.16), segue que $AA^t = I$. Analogamente mostra-se que $A^t A = I$. Logo, A é ortogonal.

□

Teorema 1.4.4. *Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma isometria. Então, existe um vetor $u_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $A \in O(n)$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^n$,*

$$h(u) = A \cdot u + u_0. \quad (1.17)$$

Além disso, se h preservar a orientação, então $R \in SO(n)$.

Demonstração. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(u) = h(u) - h(0)$. Segue que:

- (i) $f(0) = 0$,
- (ii) f é uma isometria, pois,

$$\|f(u) - f(v)\| = \|h(u) - h(v)\| = \|u - v\|$$

Pela Proposição 1.4.2, temos que f é uma transformação linear. Seja A a matriz representando f na base canônica. Então,

$$f(u) = A \cdot u = h(u) - h(0) \Rightarrow h(u) = A \cdot u + h(0).$$

Tomando $u_0 = h(0)$, chegaremos à expressão (1.17), o que conclui a demonstração. □

1.5 ÁLGEBRAS

Nesta seção falaremos de uma importante estrutura algébrica que será utilizada nesta dissertação, que é a álgebra. Para se obter uma álgebra, é necessário um espaço vetorial (sobre um corpo K , que aqui consideraremos como sendo \mathbb{R} ou \mathbb{C}) munido de uma forma bilinear satisfazendo algumas propriedades.

Definição 1.5.1. *Seja V um espaço vetorial sobre K . Uma **forma bilinear sobre V** é uma função $\mathfrak{b} : V \times V \rightarrow K$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) $\mathfrak{b}(\alpha v_1 + v_2, w) = \alpha \mathfrak{b}(v_1, w) + \mathfrak{b}(v_2, w)$, para todos $v_1, v_2, w \in V$ e $\alpha \in K$.
- b) $\mathfrak{b}(v, \alpha w_1 + w_2) = \alpha \mathfrak{b}(v, w_1) + \mathfrak{b}(v, w_2)$, para todos $w_1, w_2, v \in V$ e $\alpha \in K$.

Se, além das propriedades acima, \mathfrak{b} satisfizer

- c) $\mathfrak{b}(v, w) = \mathfrak{b}(w, v)$, para todos $v, w \in V$.

*dizemos que \mathfrak{b} é uma **forma bilinear simétrica**.*

Toda forma bilinear possui uma importante aplicação associada à mesma, que é a forma quadrática.

Definição 1.5.2. Seja \mathfrak{b} uma forma bilinear simétrica. A **forma quadrática** associada a \mathfrak{b} é a função $\mathfrak{q} : V \rightarrow K$ dada por

$$\mathfrak{q}(v) = \mathfrak{b}(v, v)$$

para todo $v \in V$.

Proposição 1.5.3. Seja \mathfrak{b} uma forma bilinear simétrica e \mathfrak{q} a forma quadrática associada a \mathfrak{b} . Então

$$\mathfrak{b}(u, v) = \frac{1}{4}[\mathfrak{q}(u + v) - \mathfrak{q}(u - v)].$$

para todos $u, v \in V$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}[\mathfrak{q}(u + v) - \mathfrak{q}(u - v)] &= \frac{1}{4}[\mathfrak{b}(u + v, u + v) - \mathfrak{b}(u - v, u - v)] \\ &= \frac{1}{4}[\mathfrak{b}(u, u + v) + \mathfrak{b}(v, u + v) - \mathfrak{b}(u, u - v) + \mathfrak{b}(v, u - v)] \\ &= \frac{1}{4}[\mathfrak{b}(u, u) + \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u + v) - \mathfrak{b}(u, u) + \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u - v)] \\ &= \frac{1}{4}[\mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u) + \mathfrak{b}(v, v) + \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u) - \mathfrak{b}(v, v)] \\ &= \frac{1}{4}[\mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u) + \mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u)] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4\mathfrak{b}(u, v) \\ &= \mathfrak{b}(u, v). \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.5.4. Um exemplo clássico de forma bilinear em \mathbb{R}^n é o produto interno:

$$\mathfrak{b}(u, v) = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

A forma quadrática associada ao produto interno é o quadrado da norma induzida pelo mesmo:

$$\mathfrak{q}(u) = \|u\|^2.$$

Passemos para a definição de álgebra:

Definição 1.5.5. Seja A um conjunto não vazio, K um corpo e $\mathfrak{b} : A \times A \rightarrow A$ uma aplicação bilinear. Dizemos que a tripla $(A, +, \mathfrak{b})$ é uma **Álgebra** sobre K se:

- (1) $(A, +)$ é um espaço vetorial sobre K ;
- (2) Para todos $a, b, c \in A$ temos $\mathfrak{b}(a, \mathfrak{b}(c, d)) = \mathfrak{b}(\mathfrak{b}(a, b), c)$.

Se a forma bilinear \mathfrak{b} for simétrica, dizemos que A é uma **álgebra comutativa**.

Se existir $1 \in A$ tal que $\mathfrak{b}(1, a) = \mathfrak{b}(a, 1) = a$ para todo $a \in A$, A é dita uma **álgebra unital**.

Se todo elemento $a \in A$, tal que $a \neq 0$, possuir um elemento inversível, ou seja, $a^{-1} \in A$ tal que $\mathfrak{b}(a^{-1}, a) = \mathfrak{b}(a, a^{-1}) = 1$, A é dita uma **álgebra de divisão**.

2 ROTAÇÕES

Neste capítulo mostraremos os conceitos básicos e os aspectos geométricos que geram a ideia de rotação no plano e no espaço. Apresentaremos as matrizes relacionadas às rotações e a relação que há entre os números complexos e as rotações no plano. Além disso, faremos uma breve abordagem sobre o conjunto dos movimentos rígidos no espaço, no qual a rotação se insere.

Por convenção, usaremos ângulos positivos para indicar rotações no sentido anti-horário e negativos para indicar rotações no sentido horário.

2.1 ROTAÇÕES NO PLANO

Uma rotação no plano pode ser unicamente determinada por um número real, que é o ângulo de rotação.

Seja $\vec{u} = (x, y)$ um vetor em \mathbb{R}^2 . Vamos criar uma função

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa, a cada vetor \vec{u} , um novo vetor $\vec{v} = (x_1, y_1)$ que corresponde ao vetor \vec{u} rotacionado de um ângulo θ radianos em torno da origem, como mostra a Figura 3. Vamos definir também

$$\mathcal{R}_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

o conjunto das rotações no plano.

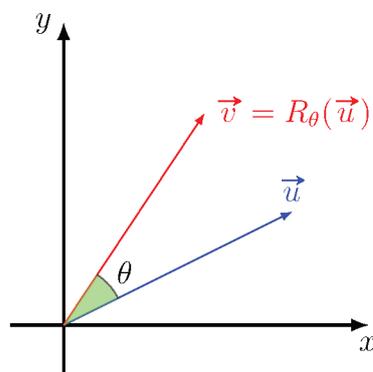


Figura 3: Rotação do vetor \vec{u} em torno da origem

Para determinar a lei de formação da função R_θ , vamos estabelecer algumas relações trigonométricas nos triângulos retângulos formados pelos vetores \vec{u} e \vec{v} e pelas projeções de suas coordenadas nos eixos, conforme mostra a Exemplo 4. Seja α o ângulo formado

por \vec{u} e o eixo x e r o módulo de \vec{u} (e de \vec{v}).

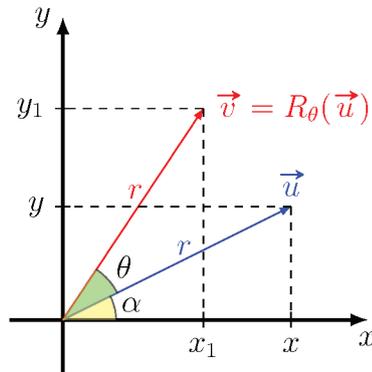


Figura 4: Coordenadas de \vec{u} e \vec{v}

Observando a Figura 4, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta + \alpha) \\ y_1 = r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) \end{cases} \quad (2.2)$$

Usando a fórmula da soma de arcos, (2.2) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \cos \alpha - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\ y_1 = r \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + r \cos \theta \operatorname{sen} \alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

Substituindo (2.1) em (2.3), obtemos

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y_1 = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta. \end{cases} \quad (2.4)$$

De (2.4), podemos concluir que

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta).$$

É fácil ver que R_θ é uma transformação linear. Logo, podemos escrever a matriz

dessa transformação na base canônica do plano:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Pelo Exemplo 1.3.6, R_θ é ortogonal. Além disso,

$$\det(R_\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1.$$

Concluimos que $R_\theta \in \operatorname{SO}(2)$ para qualquer ângulo $\theta \in \mathbb{R}$, ou seja $\mathcal{R}_2 \subseteq \operatorname{SO}(2)$.

Agora, vamos mostrar que \mathcal{R}_2 é um subgrupo de $\operatorname{SO}(2)$. Para isso, precisaremos dos resultados a seguir.

Proposição 2.1.1. *Sejam $R_\theta, R_\alpha \in \mathcal{R}_2$. Então*

$$R_\theta \circ R_\alpha = R_\alpha \circ R_\theta = R_{\theta+\alpha}.$$

Demonstração. Calculando $R_\theta \circ R_\alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} R_\theta \circ R_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \cos \theta \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + \cos \theta \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) & -\operatorname{sen}(\theta + \alpha) \\ \operatorname{sen}(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\alpha}. \end{aligned}$$

O cálculo de $R_\alpha \circ R_\theta$ é feito de maneira análoga. □

Pela Proposição 2.1.1, podemos escrever

$$R_\theta \circ R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0.$$

Mas,

$$R_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Analogamente, $R_{-\theta} \circ R_\theta = I$. Portanto, $R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$.

Então, para quaisquer ângulos θ e α , temos que

$$R_\theta \circ R_\alpha^{-1} = R_{\theta-\alpha} \in \mathcal{R}_2,$$

o que nos garante que \mathcal{R}_2 é um subgrupo do grupo $\text{SO}(2)$.

Na verdade, o grupo das rotações no plano é mais do que apenas um subgrupo de $\text{SO}(2)$. A seguir, mostraremos que os dois grupos são iguais.

Teorema 2.1.2. $\text{SO}(2) = \mathcal{R}_2$.

Demonstração. Vimos, anteriormente, que $\mathcal{R}_2 \subseteq \text{SO}(2)$. Falta mostrar apenas que $\text{SO}(2) \subseteq \mathcal{R}_2$. Para isso, considere uma matriz $A \in \text{SO}(2)$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Então $A^T = A^{-1}$, ou seja,

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

o que nos dá $a = d$ e $b = -c$. Logo, podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Como $A \in \text{SO}(2)$, A possui determinante igual a 1. Logo,

$$\det(A) = a^2 + b^2 = 1. \quad (2.6)$$

De (2.6), existe um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos \theta$ e $b = \sin \theta$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta,$$

o que implica $A \in \mathcal{R}_2$ e, consequentemente, $\text{SO}(2) \subseteq \mathcal{R}_2$. Com isso, fica demonstrado que $\text{SO}(2) = \mathcal{R}_2$. \square

A partir de agora, portanto, podemos citar o grupo $\text{SO}(2)$ sempre que quisermos nos referir ao conjunto das rotações no plano.

2.2 NÚMEROS COMPLEXOS E ROTAÇÕES

Nesta seção veremos como é possível descrever as rotações no plano através dos números complexos.

Considere o número complexo

$$z = a + bi. \quad (2.7)$$

Da Álgebra, sabemos que há um isomorfismo de anéis entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 . Ou seja, (2.7) ser visto como um vetor $\vec{z} = (a, b)$ no plano \mathbb{R}^2 , como mostra a Figura 5. Neste plano (chamado de *plano de Argand-Gauss* ou *plano complexo*), o eixo x é chamado de **eixo real** (*Re*) e o eixo y é chamado de **eixo imaginário** (*Im*). O ângulo θ formado pelo vetor \vec{z} e o eixo real é chamado de **argumento** de z .

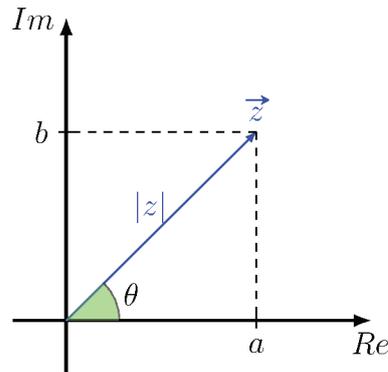


Figura 5: Representação de $z = a + bi$ no Plano de Argand-Gauss

Utilizando relações trigonométricas na Figura 5, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$a = |z| \cos \theta \quad (2.8)$$

$$b = |z| \sin \theta \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7), obtemos:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.10)$$

A expressão (2.10) é denominada **forma trigonométrica** de z .

Proposição 2.2.1. *Sejam $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ números complexos. Então*

$$z \cdot w = |zw|[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)].$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= [|z|(\cos \theta + i \sin \theta)][|w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)] \\ &= |z||w|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= |zw|(\cos \theta \cos \alpha + i \cos \theta \sin \alpha + i \sin \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ &= |zw|[(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)] \\ &= |zw|[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.2. *Seja $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$ um número complexo. Então*

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)].$$

Demonstração. Seja $w = \frac{1}{|z|}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$. Então:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= [|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \left\{ \frac{1}{|z|}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] \right\} \\ &= \frac{|z|}{|z|}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] \\ &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \\ &= \cos^2 \theta - i \operatorname{sen} \theta \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que $w \cdot z = 1$. Logo, $w = z^{-1}$. □

Um número complexo também pode ser visto como uma transformação linear no plano. Para isso, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbf{C} &\longrightarrow M_2(\mathbf{R}) \\ a + bi &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Proposição 2.2.3. *φ é um homomorfismo de álgebras injetor entre \mathbf{C} e $M_2(\mathbf{R})$.*

Demonstração. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos. Então:

$$\begin{aligned} \varphi(z + w) &= \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \varphi(z) + \varphi(w). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\varphi(z \cdot w) = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Mas

$$\begin{aligned}\varphi(z) \cdot \varphi(w) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) segue que $\varphi(z \cdot w) = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$, o que conclui a prova de que φ é um homomorfismo de álgebras. Por fim, mostremos que φ é injetora:

$$\begin{aligned}\varphi(z) = \varphi(w) &\implies \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &\implies a = c \text{ e } b = d \\ &\implies a + bi = c + di \\ &\implies z = w.\end{aligned}$$

Portanto, φ é um homomorfismo injetor entre \mathbb{C} e $M_2(\mathbb{R})$. □

Graças à Proposição 2.2.3, podemos ver um número complexo como uma matriz 2×2 , que é uma transformação linear no plano.

Já temos condições de descrever as rotações por meio de números complexos. Tomando $z = a + bi$ e $w = c + di$, sabemos que

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.\tag{2.14}$$

Agora, vamos ver z como a transformação linear dada por φ , isto é, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, e w como o vetor coluna $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Então

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}.\tag{2.15}$$

Ou seja, (2.15) mostra a expressão (2.14) vista como um vetor no plano.

A seguir, vamos restringir a função φ ao conjunto $U(1)$ dos complexos unitários, visto na definição 1.1.4. Se $z \in U(1)$, então $z = \cos \theta + i \sen \theta$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi : \quad U(1) &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \cos \theta + i \sen \theta &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sen \theta \\ \sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Podemos notar que (2.16) corresponde a matriz de rotação R_θ da expressão (2.5). Então o conjunto imagem de φ restrita a $U(1)$ é o subgrupo $SO(2)$, que corresponde às rotações no plano conforme demonstrado no teorema 2.1.2. Isso quer dizer que multiplicar um número complexo w por um número de módulo unitário z significa, do ponto de vista geométrico, rotacionar o vetor correspondente a w de um ângulo θ , que é o argumento de z . Para finalizar a seção, mostraremos que $U(1)$ e $SO(2)$ são isomorfos.

Proposição 2.2.4. $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow SO(2)$ induz um isomorfismo entre $U(1)$ e $SO(2)$.

Demonstração. Vimos, pela Proposição 2.2.3, que φ é um homomorfismo injetor entre \mathbb{C} e $M_2(\mathbb{R})$. Então φ restrita a $U(1)$ também será um homomorfismo injetor, agora entre $U(1)$ e o contradomínio, que é $SO(2)$. Basta provar, portanto, que φ é sobrejetora. De fato, dado $R_\alpha \in SO(2)$, existe $x = \cos \alpha + i \sin \alpha \in U(1)$ tal que $\varphi(x) = R_\alpha$. Logo, φ é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo entre $U(1)$ e $SO(2)$. \square

2.3 ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Na seção 2.1 vimos que, para rotacionar um vetor no plano, multiplicamos esse vetor por uma matriz de rotação. A mesma coisa pode ser feita para rotações no espaço, como veremos nesta seção.

Considere $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, em que $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. E é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Seja $\vec{u} = (x, y, z)$ um vetor em \mathbb{R}^3 . Da mesma forma que fizemos na seção 2.1, vamos criar uma função $R_{\theta, \vec{r}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que associa, a cada vetor \vec{u} , um novo vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ que corresponde ao vetor \vec{u} rotacionado de um ângulo θ radianos em um plano π , perpendicular a um vetor \vec{r} , o qual chamaremos de eixo de rotação.

Definiremos o conjunto das rotações no espaço da seguinte maneira:

$$\mathcal{R}_3 = \{R_{\theta, \vec{r}} \mid \theta \in \mathbb{R}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Proposição 2.3.1. $R_{\theta, \vec{r}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear.

Demonstração. A rotação $R_{\theta, \vec{r}}$ fixa um vetor \vec{r} em \mathbb{R}^3 e um plano $\pi \perp \vec{r}$. Tome $\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ e dois vetores \vec{r}_2 e \vec{r}_3 unitários e ortogonais, de modo que $\{\vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ sejam uma base para o plano π . Com isso, temos que $\beta = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Considere, portanto, o sistema (x', y', z') em relação a β . Dado $\vec{u} = (x', y', z')$, vamos calcular as

coordenadas de $\vec{v} = (x'_1, y'_1, z'_1) = R_{\theta, \vec{r}}(\vec{u})$ em função de x' , y' e z' :

$$\begin{cases} x'_1 = x' \\ y'_1 = y' \cos \theta - z' \operatorname{sen} \theta \\ z'_1 = y' \operatorname{sen} \theta + z' \cos \theta. \end{cases} \quad (2.17)$$

De (2.17), chegamos à conclusão de que $R_{\theta, \vec{r}}$ é uma transformação linear. Ademais, a matriz da transformação na base β é dada por

$$[R_{\theta, \vec{r}}]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 2.3.2. Considere a rotação do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ em torno do eixo Ox por um ângulo de θ , como mostra a Figura 6.

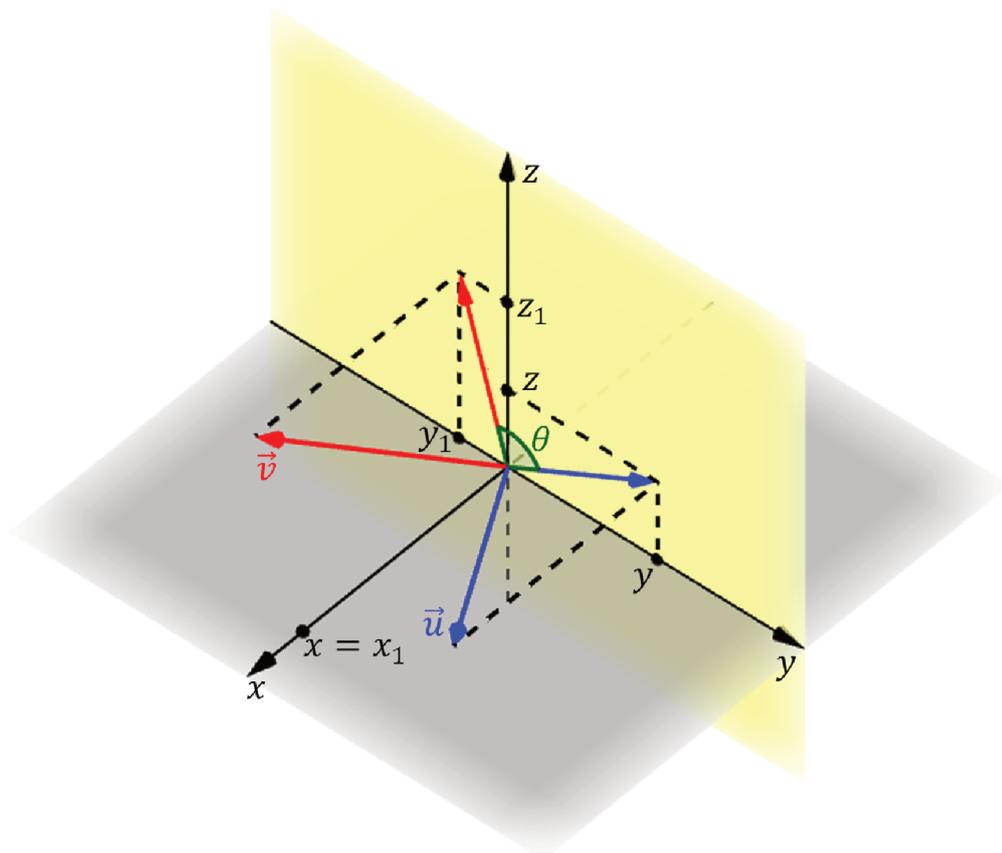


Figura 6: Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Ox

Vamos calcular as coordenadas do vetor $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ em função de x , y e z :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta \\ z_1 = y \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta. \end{cases}$$

$$R_{\theta,x}(x, y, z) = (x, y \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta, y \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta).$$

Portanto, a matriz de rotação em torno do eixo Ox na base canônica do \mathbb{R}^3 é dada por

$$[R_{\theta,x}]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Exemplo 2.3.3. Agora, vamos rotacionar o vetor \vec{u} em torno do eixo Oy , como mostra a Figura 7.

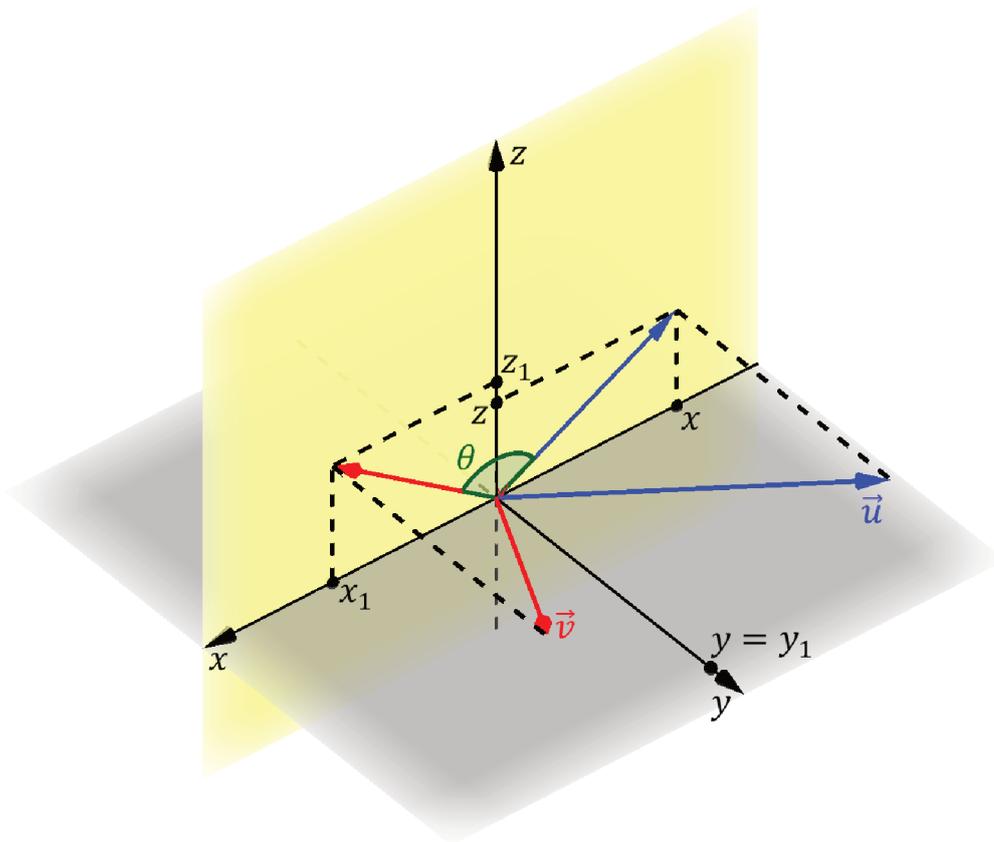


Figura 7: Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Oy

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - z \operatorname{sen} \theta \\ y_1 = y \\ z_1 = x \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta \end{cases}$$

$$R_{\theta,y}(x, y, z) = (x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta, y, -x \operatorname{sen} \theta + z \cos \theta).$$

Temos, então, a matriz de rotação em torno do eixo Oy :

$$[R_{\theta,y}]_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Exemplo 2.3.4. Finalmente, vamos rotacionar o vetor \vec{u} em torno do eixo Oz , como mostra a Figura 8.

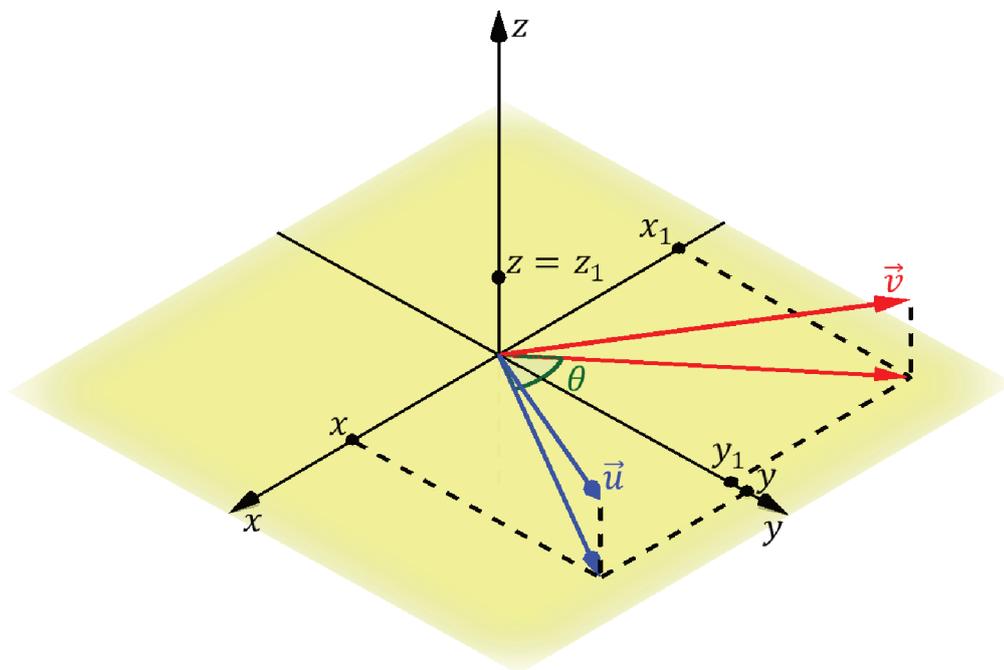


Figura 8: Rotação do vetor \vec{u} em torno do eixo Oz

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \\ y_1 = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta \\ z_1 = z \end{cases}$$

$$R_{\theta,z}(x, y, z) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta, z).$$

Temos, então, a matriz de rotação em torno do eixo Oz :

$$[R_{\theta,z}]_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

É fácil ver que as matrizes (2.18), (2.19) e (2.20) são ortogonais e de determinante igual a 1. Logo, elas pertencem ao grupo $SO(3)$.

Agora, vamos rotacionar o vetor \vec{u} arbitrariamente pelo espaço, em torno de um eixo \vec{r} por um ângulo θ . A Figura 9 ilustra a situação descrita acima.

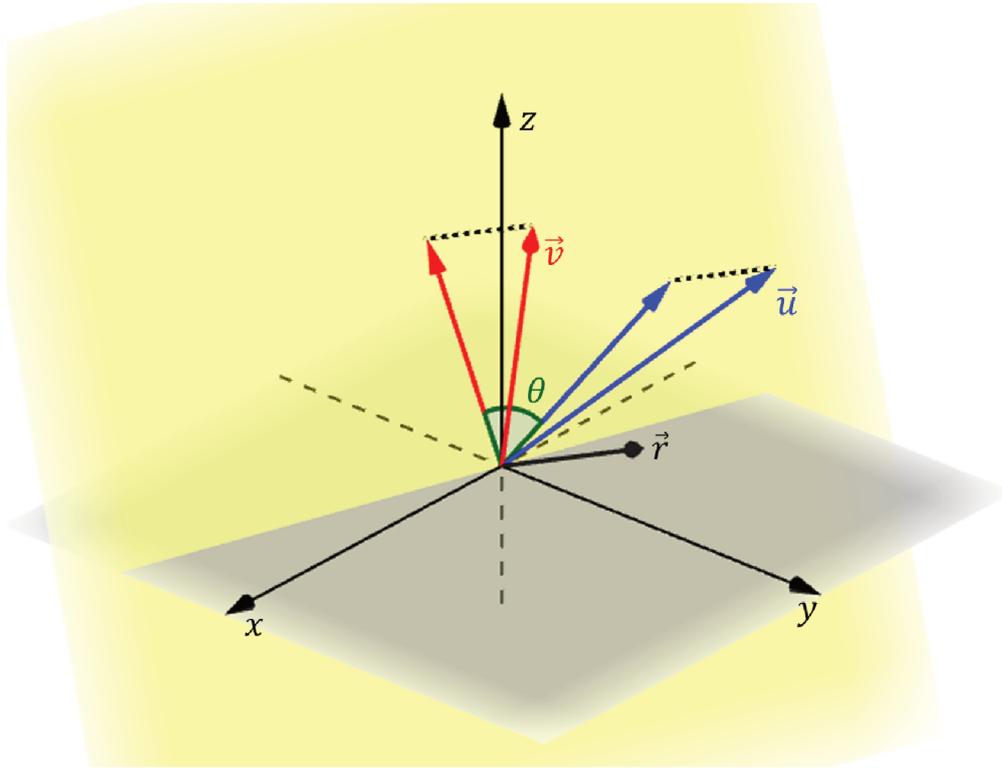
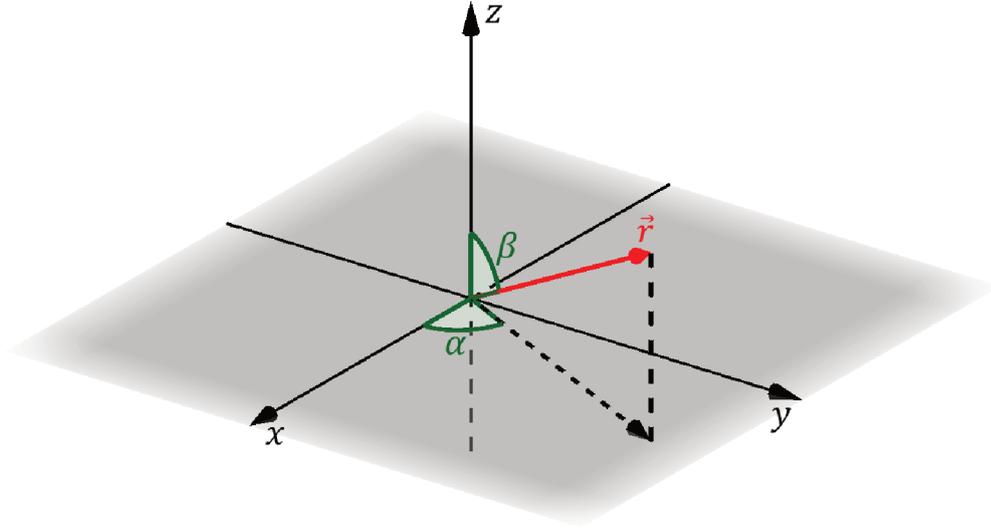


Figura 9: Rotação em torno de um vetor \vec{r} arbitrário

Podemos rotacionar um vetor qualquer em torno do eixo \vec{r} com um ângulo θ efetuando-se os seguintes passos:

- 1º) Rotacionar o eixo \vec{r} para fazê-lo coincidir com o eixo Oz ;
- 2º) Rotacionar ao redor do eixo Oz pelo ângulo θ ;
- 3º) Colocar o eixo \vec{r} de volta à sua posição original, desfazendo as rotações feitas no primeiro passo.

Vamos descrever, com mais detalhes, as rotações feitas com \vec{r} para fazê-lo coincidir com o eixo Oz . Sem perda de generalidade, podemos supor $|\vec{r}| = 1$. Vamos expressar \vec{r} no que chamamos de coordenadas esféricas. Para isso, seja α o ângulo formado entre o eixo Ox positivo e a projeção de \vec{r} no plano xy e β o ângulo formado entre \vec{r} e o eixo Oz positivo. A Figura 10 ilustra esta situação.

Figura 10: Coordenadas de \vec{r}

O vetor unitário \vec{r} , em coordenadas esféricas, é expresso da seguinte forma:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \text{sen } \beta \text{sen } \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Proposição 2.3.5. $\vec{r} = R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_3)$.

Demonstração. Sabemos que $R_{\beta,y} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$. Então, $R_{\beta,y}(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix}$.

Portanto,

$$R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \text{sen } \beta \text{sen } \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}.$$

□

Com isto, podemos descrever a rotação $R_{\theta,\vec{r}}$ como a composição das seguintes transformações:

$$R_{\theta,\vec{r}} = R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y} \circ R_{\theta,z} \circ R_{-\beta,y} \circ R_{-\alpha,z}. \quad (2.22)$$

Acabamos de decompor uma rotação arbitrária no espaço em cinco rotações em torno dos eixos. Como tais rotações são elementos de $\text{SO}(3)$ e este é um grupo, qualquer composição destas rotações também será um elemento de $\text{SO}(3)$, o que implica $R_{\theta,\vec{r}} \in \text{SO}(3)$. Concluimos, portanto, que toda rotação no espaço é um elemento de $\text{SO}(3)$, ou seja, $\mathcal{R}_3 \subset \text{SO}(3)$.

Para finalizar esta seção, mostraremos que o conjunto das rotações \mathcal{R}_3 é exatamente igual ao conjunto $\text{SO}(3)$, concluindo, portanto, que \mathcal{R}_3 é um grupo. Mas antes, demonstraremos três resultados que serão importantes para a prova que vem na sequência.

Lema 2.3.6. *Seja $A \in \text{O}(n)$. Então seus autovalores reais são 1 ou -1 .*

Demonstração. Seja λ um autovalor de A e $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ um autovetor de A associado a λ . Por um lado, temos

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2. \quad (2.23)$$

Por outro lado, como $A \in \text{O}(n)$,

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2. \quad (2.24)$$

De (2.23) e (2.24), segue que

$$\lambda^2 \|v\|^2 = \|v\|^2. \quad (2.25)$$

De (2.25) e $v \neq 0$, temos que $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$, o que conclui a demonstração. \square

Lema 2.3.7. *Seja $A \in \text{SO}(3)$. Então um de seus autovalores é igual a 1.*

Demonstração. Sejam λ_1 , λ_2 e λ_3 os autovalores de A . Então, eles são raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, que é do terceiro grau. Portanto, ou este polinômio possui apenas uma raiz real ou as três raízes são reais. No primeiro caso, poderíamos supor λ_1 real (sendo igual a 1 ou a -1 , pelo lema 2.3.6) e $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. Dessa maneira, teríamos

$$1 = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \overline{\lambda_2} = \lambda_1 |\lambda_2|^2.$$

Como $|\lambda_2|^2 > 0$, λ_1 não pode ser -1 , o que nos leva a $\lambda_1 = 1$. No segundo caso, pelo lema 2.3.6, cada autovalor é igual a 1 ou a -1 . Como $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, seria impossível que os três autovalores fossem iguais a -1 , o que obriga a ter, pelo menos, um autovalor igual a 1. \square

Lema 2.3.8. *Se $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$.*

Demonstração. Por hipótese,

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd & 0 \\ ac + bd & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Portanto, $\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = I_2$. Mas

$$\tilde{A}\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\tilde{A}^t\tilde{A} = I_2$. Ademais,

$$\det A = ad - bc = \det \tilde{A}.$$

Como $\det A = 1$, por hipótese, segue que $\det \tilde{A} = 1$. Portanto, $\tilde{A} \in \text{SO}(2)$. \square

Passemos, portanto, para o teorema:

Teorema 2.3.9. $\text{SO}(3) = \mathcal{R}_3$.

Demonstração. Falta mostrar, apenas, que $\text{SO}(3) \subset \mathcal{R}_3$. Para isso, seja $A \in \text{SO}(3)$. Pelo lema 2.3.7, seja \vec{v} um autovetor de A associado ao autovalor 1 tal que $\|\vec{v}\| = 1$. Podemos expressar o vetor \vec{v} em coordenadas esféricas, assim:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \text{sen } \beta \text{sen } \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix},$$

em que α e β são os ângulos obtidos na situação análoga à da Figura 10. Pela Proposição 2.3.5, $\vec{v} = R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_3)$. Considere $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, formado pelos seguintes vetores:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \beta \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &= R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\text{sen } \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_3 &= \vec{v} = R_{\alpha,z} \circ R_{\beta,y}(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \cos \alpha \\ \text{sen } \beta \text{sen } \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\vec{v}_i\| = 1$, para todo $i = 1, 2, 3$, e que $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Portanto, V é uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 . Além disso, note que

$$\langle A\vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \langle A\vec{v}_1, A\vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = 0$$

$$\langle A\vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \langle A\vec{v}_2, A\vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 0$$

Portanto, a matriz A , na base V pode ser escrita na forma

$$[A]_V = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Pelo lema 2.3.8, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}(2)$. Logo, A é uma matriz de rotação de um ângulo γ e (2.26) pode ser reescrito como

$$[A]_V = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{\gamma, z}.$$

Seja $R = R_{\alpha, z} \circ R_{\beta, y}$. R é a matriz de mudança da base canônica E para a base V . Vamos escrever a matriz A na base canônica:

$$[A]_E = R[A]_V R^{-1} = R_{\alpha, z} \circ R_{\beta, y} \circ R_{\gamma, z} \circ R_{-\beta, y} \circ R_{-\alpha, z} = R_{\gamma, \vec{v}}. \quad (2.27)$$

De (2.27), segue que a matriz A descreve uma rotação de um ângulo γ em torno do vetor \vec{v} em \mathbb{R}^3 . Com isso, concluímos que $A \in \mathcal{R}_3$ e que, portanto, o conjunto $\text{SO}(3)$ corresponde ao das rotações no espaço, e que este é um grupo. \square

Daqui para frente, citaremos o grupo $\text{SO}(3)$ sempre que precisarmos nos referir ao grupo das rotações no espaço.

2.4 MOVIMENTOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

Agora que provamos que o grupo $\text{SO}(3)$ corresponde ao das rotações em \mathbb{R}^3 , podemos dizer que uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma rotação se existir $R \in \text{SO}(3)$ tal que, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{v}) = R \cdot \vec{v}.$$

Além disso, dizemos que T será uma **translação** se existir $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{t}.$$

As rotações e translações em \mathbb{R}^3 são considerados elementos do conjunto dos movimentos rígidos em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.4.1. Uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um **movimento rígido** se preserva a orientação e, para todos $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\|T(\vec{u}) - T(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

Geometricamente falando, um movimento rígido é uma transformação que preserva a orientação e a distância entre os vetores. Note que, pela definição 1.4.1, todo movimento rígido é uma isometria.

O conjunto dos movimentos rígidos em \mathbb{R}^3 é um grupo, e será denotado aqui como $SE(3)$.

$$SE(3) = \{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid T \text{ é um movimento rígido}\}$$

A seguir, temos um importante teorema que remete à caracterização de um movimento rígido no espaço. Este teorema nos garante que, se uma transformação T é um movimento rígido em \mathbb{R}^3 , ela pode ser “decomposta” em uma rotação e uma translação. Como um movimento rígido é uma isometria, este teorema já foi demonstrado na seção 1.4 para o caso geral. Enunciaremos aqui a versão do teorema para \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.4.2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um movimento rígido. Então existem $R \in SO(3)$ e $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ tais que, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\vec{v}) = R \cdot \vec{v} + \vec{t}.$$

Demonstração. Segue do teorema 1.4.4. □

Diante do resultado acima, podemos adotar a notação $T_{R, \vec{t}}$ para um movimento rígido:

$$T_{R, \vec{t}}(\vec{v}) = R \cdot \vec{v} + \vec{t}.$$

3 O CONJUNTO DOS QUATÉRNIOS

Neste capítulo, falaremos da estrutura algébrica do conjunto dos quatérnios, denotado por \mathbb{H} . Apresentaremos as características básicas desta estrutura e alguns resultados importantes, além de uma aplicação que atuará nos quatérnios e será indispensável para codificar uma rotação no espaço por meio dos mesmos.

Falaremos também dos quatérnios duais e de como eles são utilizados para codificar um movimento rígido no espaço.

3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Iniciamos, portanto, pela definição do conjunto:

Definição 3.1.1. *O conjunto dos quatérnios, representado por \mathbb{H} , fica definido como*

$$\mathbb{H} = \{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \mid q_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\},$$

em que i , j e k são tais que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (3.1)$$

Podemos montar uma tabela de multiplicações entre i , j e k . Para começar, multiplicamos (3.1) pelos mesmos, à direita e à esquerda:

$$ijk = -1 \implies ijk^2 = -k \implies -ij = -k \implies ij = k \quad (3.2)$$

$$ijk = -1 \implies i^2jk = -i \implies -jk = -i \implies jk = i. \quad (3.3)$$

De (3.2), temos:

$$ij = k \implies i^2j = ik \implies ik = -j$$

$$ij = k \implies ij^2 = kj \implies kj = -i.$$

De (3.3), temos:

$$jk = i \implies j^2k = ji \implies ji = -k. \quad (3.4)$$

De (3.4), temos:

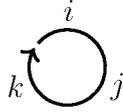
$$ji = -k \implies ji^2 = -ki \implies -j = -ki \implies ki = j.$$

Portanto, a tabela fica da seguinte forma:

\cdot	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabela 1: Tábua de multiplicações entre i , j e k

Estas multiplicações também podem ser representadas graficamente, como mostra a Figura 11. O sentido da seta indica o produto positivo e o sentido contrário, o produto negativo.

Figura 11: Multiplicação entre i , j e k

Dados $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$, as operações em \mathbb{H} ficam definidas da seguinte forma:

- Adição:

$$\begin{aligned} q + r &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) + (r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= (q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)i + (q_2 + r_2)j + (q_3 + r_3)k. \end{aligned}$$

- Multiplicação por escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\alpha q = \alpha(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = \alpha q_0 + \alpha q_1i + \alpha q_2j + \alpha q_3k.$$

- Multiplicação:

$$\begin{aligned} q \cdot r &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \cdot (r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= q_0r_0 + q_0r_1i + q_0r_2j + q_0r_3k + q_1r_0i + q_1r_1i^2 + \\ &\quad + q_1r_2ij + q_1r_3ik + q_2r_0j + q_2r_1ji + q_2r_2j^2 + \\ &\quad + q_2r_3jk + q_3r_0k + q_3r_1ki + q_3r_2kj + q_3r_3k^2 \\ &= q_0r_0 + q_0r_1i + q_0r_2j + q_0r_3k + q_1r_0i - q_1r_1 + \\ &\quad + q_1r_2k - q_1r_3j + q_2r_0j - q_2r_1k - q_2r_2 + \\ &\quad + q_2r_3i + q_3r_0k + q_3r_1j - q_3r_2i - q_3r_3 \\ &= (q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3) + (q_0r_1 + q_1r_0 + q_2r_3 - q_3r_2)i + \\ &\quad + (q_0r_2 - q_1r_3 + q_2r_0 + q_3r_1)j + (q_0r_3 + q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_0)k. \end{aligned}$$

Com as operações acima, \mathbb{H} tem as seguintes propriedades:

- (1) **Associatividade da soma:** $p + (q + r) = (p + q) + r$, para todos $p, q, r \in \mathbb{H}$;
- (2) **Comutatividade da soma:** $q + r = r + q$, para todos $q, r \in \mathbb{H}$;
- (3) **Existência do elemento neutro da soma:** existe $0 = 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ tal que $q + 0 = 0 + q = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$;
- (4) **Existência do elemento oposto:** para todo $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ existe $qz = -a - bi - cj - dk \in \mathbb{H}$ tal que $q + (-q) = -q + q = 0$;
- (5) **Associatividade do produto:** $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$, para todos $p, q, r \in \mathbb{H}$;
- (6) **Existência do elemento neutro do produto:** existe $1 = 1 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ tal que $q \cdot 1 = 1 \cdot q = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$;
- (7) **Existência do elemento inverso:** para todo $q \in \mathbb{H}$, $q \neq 0$, existe $q^{-1} \in \mathbb{H}$ tal que $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ para todo $q \in \mathbb{H}$ (mais adiante veremos a validade desta propriedade e calcularemos q^{-1});
- (8) **Distributividade do produto em relação à soma:** para todos $p, q, r \in \mathbb{H}$ devemos ter:
 - $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$ (distributividade à direita)
 - $(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$ (distributividade à esquerda).

Com as operações e propriedades acima, \mathbb{H} forma uma álgebra não comutativa. Vamos determinar o centro de \mathbb{H} , ou seja, o subconjunto de \mathbb{H} formado por todos os elementos que comutam na multiplicação. Se $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ pertence ao centro de \mathbb{H} , podemos dizer que

$$\begin{aligned}
 qi = iq &\implies q_0i - q_1 - q_2k + q_3j = q_0i - q_1 + q_2k - q_3j \\
 &\implies -q_2k + q_3j = q_2k - q_3j \\
 &\implies -q_2 = q_2 \text{ e } q_3 = -q_3 \\
 &\implies q_2 = q_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 qj = jq &\implies q_0j + q_1k - q_2 - q_3i = q_0j - q_1k - q_2 + q_3i \\
 &\implies -q_1k + q_3i = q_1k - q_3i \\
 &\implies -q_1 = q_1 \text{ e } q_3 = -q_3 \\
 &\implies q_1 = q_3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
qk = kq &\implies q_0k - q_1j + q_2i - q_3 = q_0k + q_1j - q_2i - q_3 \\
&\implies -q_1j + q_2i = q_1j - q_2i \\
&\implies -q_1 = q_1 \text{ e } q_2 = -q_2 \\
&\implies q_1 = q_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

e, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
qx = xq &\implies q_0x + q_1xi + q_2xj + q_3xk = xq_0 + xq_1i + xq_2j + xq_3k \\
&\implies 0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), temos que q é um número real. Concluimos, portanto, que o centro de \mathbb{H} é \mathbb{R} .

Assim como no corpo dos números complexos, podemos definir a conjugação para a álgebra dos quatérnios:

Definição 3.1.2. *Seja $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ um quatérnio. O **conjugado** de q é o quatérnio*

$$\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k.$$

Temos o seguinte resultado envolvendo o conjugado de um quatérnio.

Proposição 3.1.3. *Sejam $q, r \in \mathbb{H}$. Então $\overline{q+r} = \bar{q} + \bar{r}$ e $\overline{q \cdot r} = \bar{r} \cdot \bar{q}$.*

Demonstração. Sejam $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$. Então:

$$\begin{aligned}
\overline{q+r} &= \overline{(q_0+r_0) + (q_1+r_1)i + (q_2+r_2)j + (q_3+r_3)k} \\
&= (q_0+r_0) - (q_1+r_1)i - (q_2+r_2)j - (q_3+r_3)k \\
&= (q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) + (r_0 - r_1i - r_2j - r_3k) \\
&= \bar{q} + \bar{r}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{q \cdot r} &= \overline{(q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) + (q_0 r_1 + q_1 r_0 + q_2 r_3 - q_3 r_2)i +} \\
&\quad \overline{+(q_0 r_2 - q_1 r_3 + q_2 r_0 + q_3 r_1)j + (q_0 r_3 + q_1 r_2 - q_2 r_1 + q_3 r_0)k} \\
&= (q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) - (q_0 r_1 + q_1 r_0 + q_2 r_3 - q_3 r_2)i - \\
&\quad -(q_0 r_2 - q_1 r_3 + q_2 r_0 + q_3 r_1)j - (q_0 r_3 + q_1 r_2 - q_2 r_1 + q_3 r_0)k \\
&= q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3 - q_0 r_1 i - q_1 r_0 i - q_2 r_3 i + q_3 r_2 i - \\
&\quad - q_0 r_2 j + q_1 r_3 j - q_2 r_0 j - q_3 r_1 j - q_0 r_3 k - q_1 r_2 k + q_2 r_1 k - q_3 r_0 k \\
&= r_0 q_0 - r_1 q_1 - r_2 q_2 - r_3 q_3 - r_1 q_0 i - r_0 q_1 i - r_3 q_2 i + r_2 q_3 i - \\
&\quad - r_2 q_0 j + r_3 q_1 j - r_0 q_2 j - r_1 q_3 j - r_3 q_0 k - r_2 q_1 k + r_1 q_2 k - r_0 q_3 k \\
&= (r_0 - r_1 i - r_2 j - r_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\
&= \overline{r} \cdot \overline{q}.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.1.4. *Seja $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ um quatérnio. Definimos a **norma** de q como sendo*

$$||q|| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Proposição 3.1.5. *Seja $q \in \mathbb{H}$. Então $||q||^2 = q\overline{q} = \overline{q}q$.*

Demonstração. Seja $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Então

$$\begin{aligned}
q\overline{q} &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\
&= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + (-q_0 q_1 + q_1 q_0 - q_2 q_3 + q_3 q_2)i + \\
&\quad + (-q_0 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_0 - q_3 q_1)j + (-q_0 q_3 - q_1 q_2 + q_2 q_1 + q_3 q_0)k \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\
&= ||q||^2.
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que $\overline{q}q = ||q||^2$.

□

Proposição 3.1.6. *Sejam $q, r \in \mathbb{H}$. Então $||q \cdot r|| = ||q|| \cdot ||r||$.*

Demonstração. Pelas Proposições 3.1.3 e 3.1.5,

$$\begin{aligned}
||q \cdot r||^2 &= q \cdot r \cdot \overline{q \cdot r} \\
&= q \cdot r \cdot \overline{r} \cdot \overline{q} \\
&= q \cdot ||r||^2 \cdot \overline{q} \\
&= q \cdot \overline{q} \cdot ||r||^2 \\
&= ||q||^2 \cdot ||r||^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\|q \cdot r\| = \|q\| \cdot \|r\|$. □

Definição 3.1.7. *O subconjunto dos quatérnios inversíveis é definido por*

$$\mathbb{H}^\times = \{q \in \mathbb{H} \mid \exists q^{-1} \in \mathbb{H} : qq^{-1} = q^{-1}q = 1\}.$$

Temos, também, o subconjunto dos quatérnios não-nulos, definido como

$$\mathbb{H}^* = \{q \in \mathbb{H} \mid q \neq 0\}.$$

Note que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^\times$.

Se $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \neq 0$, pelo menos um de seus componentes é diferente de zero, o que implica $\|q\| \neq 0$. De $q\bar{q} = \|q\|^2$, temos que $q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = 1$. Podemos, então, escrever o inverso de um quatérnio q como

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}.$$

Logo, \mathbb{H} pode ser considerada uma álgebra de divisão sobre \mathbb{R} .

Definição 3.1.8. *O subconjunto dos quatérnios unitários é definido por*

$$\text{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}.$$

De maneira análoga ao que foi feito na seção 1.1, $\text{Sp}(1)$ pode ser interpretado, do ponto de vista geométrico, como a esfera S^3 em \mathbb{R}^4 . De fato, se $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \text{Sp}(1)$, então $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Portanto, podemos escrever:

$$S^3 = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \mid q \in \text{Sp}(1)\}$$

Para encerrar esta seção, apresentaremos uma importante classe de transformações lineares que atuarão sobre os quatérnios e serão fundamentais para definir a sua relação com as rotações no espaço: as **conjugações**.

Definição 3.1.9. *Seja $q \in \mathbb{H}^*$. Definimos como a conjugação por q a função*

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ r &\longmapsto qrq^{-1} \end{aligned}$$

Proposição 3.1.10. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^*$. Então:*

- a) Ad_q é uma transformação linear.
- b) $\text{Ad}_q(zw) = \text{Ad}_q(z) \text{Ad}_q(w)$ para todos $z, w \in \mathbb{H}$.
- c) $\text{Ad}_p \circ \text{Ad}_q = \text{Ad}_{pq}$.

d) Ad_1 corresponde à função identidade em \mathbb{H} .

e) $(\text{Ad}_q)^{-1} = \text{Ad}_{q^{-1}}$.

Demonstração. a) Sejam $z, w \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(\lambda z + w) &= q(\lambda z + w)q^{-1} \\ &= q\lambda zq^{-1} + qwq^{-1} \\ &= \lambda qzq^{-1} + qwq^{-1} \\ &= \lambda \text{Ad}_q(z) + \text{Ad}_q(w). \end{aligned}$$

Logo, Ad_q é uma transformação linear.

b) Sejam $z, w \in \mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(zw) &= qzwq^{-1} \\ &= qzq^{-1}qwq^{-1} \\ &= \text{Ad}_q(z) \text{Ad}_q(w). \end{aligned}$$

c) Seja $z \in \mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_p \circ \text{Ad}_q)(z) &= \text{Ad}_p(\text{Ad}_q(z)) \\ &= \text{Ad}_p(qzq^{-1}) \\ &= pqzq^{-1}p^{-1} \\ &= pqz(pq)^{-1} \\ &= \text{Ad}_{pq}(z). \end{aligned}$$

Logo, $\text{Ad}_p \circ \text{Ad}_q = \text{Ad}_{pq}$.

d) Seja $z \in \mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_1)(z) &= 1z1^{-1} \\ &= 1z1 \\ &= z. \end{aligned}$$

Logo, Ad_1 corresponde à função identidade em \mathbb{H} .

e) Pelo itens (c) e (d), temos que

$$\text{Ad}_q \circ \text{Ad}_{q^{-1}} = \text{Ad}_{qq^{-1}} = \text{Ad}_1 = \text{Id}_{\mathbb{H}}.$$

Analogamente, $\text{Ad}_{q^{-1}} \circ \text{Ad}_q = \text{Id}_{\mathbb{H}}$. Logo, $(\text{Ad}_q)^{-1} = \text{Ad}_{q^{-1}}$.

□

Pelos itens (a) e (e) da Proposição 3.1.10, podemos concluir que Ad_q é um automorfismo de \mathbb{H} , ou seja, é uma transformação linear inversível. Portanto, $\text{Ad}_q \in \text{GL}(\mathbb{H})$, o grupo das transformações lineares inversíveis em \mathbb{H} . Então, podemos considerar a seguinte representação do grupo \mathbb{H}^* , chamada de **ação adjunta**:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathbb{H}^* &\longrightarrow \text{GL}(\mathbb{H}) \\ q &\longmapsto \text{Ad}_q. \end{aligned}$$

Pelo item (c) da Proposição 3.1.10, Ad é um homomorfismo de grupos entre \mathbb{H}^* e $\text{GL}(\mathbb{H})$.

3.2 NOTAÇÃO VETORIAL DE UM QUATÉRNIO

Sendo $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ um quatérnio, q_0 é chamada de **parte real** do quatérnio e $q_1i + q_2j + q_3k$ é a **parte imaginária** do quatérnio. Denotamos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Re}(q) &= q_0 \\ \text{Im}(q) &= q_1i + q_2j + q_3k \end{aligned}$$

Vamos considerar a seguinte função:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (x, y, z) &\longmapsto xi + yj + zk \end{aligned}$$

Proposição 3.2.1. δ é uma transformação linear injetora.

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned} \delta(\lambda u + v) &= \delta(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2)i + (\lambda y_1 + y_2)j + (\lambda z_1 + z_2)k \\ &= \lambda(x_1i + y_1j + z_1k) + (x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= \lambda\delta(u) + \delta(v). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\delta(u) = \delta(v) &\implies (x_1i + y_1j + z_1k) = (x_2i + y_2j + z_2k) \\ &\implies x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2 \\ &\implies u = v.\end{aligned}$$

Logo, δ é uma transformação linear injetora. \square

A função δ estabelece uma relação entre \mathbb{R}^3 e a parte imaginária de um quatérnio. Ou seja, sendo $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$q = q_0 + \delta(\vec{q}). \quad (3.9)$$

No entanto, para facilitar a escrita, omitiremos δ e passaremos a escrever a expressão (3.9) como

$$q = q_0 + \vec{q}. \quad (3.10)$$

A expressão (3.10) mostra um quatérnio escrito em **notação vetorial**.

Quando escritos na forma vetorial, a multiplicação de dois quatérnios envolve produto interno e produto vetorial em \mathbb{R}^3 , como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2.2. *Sejam $q = q_0 + \vec{q}$ e $r = r_0 + \vec{r}$ dois quatérnios. Então*

$$q \cdot r = q_0r_0 - \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle + q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{r}.$$

Demonstração. Da definição da multiplicação de quatérnios, segue que

$$\begin{aligned}q \cdot r &= (q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3) + (q_0r_1 + q_1r_0 + q_2r_3 - q_3r_1)i + \\ &\quad + (q_0r_2 - q_1r_3 + q_2r_0 + q_3r_1)j + (q_0r_3 + q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_0)k \\ &= q_0r_0 - (q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3) + \\ &\quad + q_0(r_1i + r_2j + r_3k) + r_0(q_1i + q_2j + q_3k) + \\ &\quad + (q_2r_3 - q_3r_1)i + (-q_1r_3 + q_3r_1)j + (q_1r_2 - q_2r_1)k \\ &= q_0r_0 - \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle + q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

\square

Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(q \cdot r) &= q_0r_0 - \langle \vec{q}, \vec{r} \rangle \\ \operatorname{Im}(q \cdot r) &= q_0\vec{r} + r_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{r}.\end{aligned}$$

3.3 QUATÉRNIOS E NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta seção apresentaremos a relação que há entre quatérnios e números complexos. Faremos também uma relação análoga a que fizemos entre o conjunto dos números complexos e o das matrizes quadradas de ordem 2.

É fácil ver que o conjunto dos números complexos é uma subálgebra de \mathbb{H} . De fato, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, segue que

$$z = a + bi + 0j + 0k \in \mathbb{H}.$$

A seguir, vejamos que os quatérnios podem ser vistos como o espaço vetorial \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C} :

$$\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}\}.$$

De fato, dado $q \in \mathbb{H}$, temos que

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \\ &= \underbrace{q_0 + q_1i}_z + \underbrace{(q_2 + q_3i)}_w j \\ &= z + wj. \end{aligned}$$

Além disso, dado $p = z + wj$, com $z, w \in \mathbb{C}$, é fácil ver que o seu conjugado é dado por

$$\bar{p} = \bar{z} - wj.$$

Proposição 3.3.1. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Então $zj = j\bar{z}$.*

Demonstração. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Então

$$zj = (a + bi)j = aj + bk = aj - bji = ja - jbi = j(a - bi) = j\bar{z}.$$

□

Dados $q = z_1 + w_1j$ e $r = z_2 + w_2j$, com $z_i, w_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, temos:

$$\begin{aligned} q \cdot r &= (z_1 + w_1j)(z_2 + w_2j) \\ &= z_1z_2 + z_1w_2j + w_1jz_2 + w_1jw_2j \\ &= z_1z_2 + z_1w_2j + w_1\bar{z}_2j + w_1\bar{w}_2j^2 \\ &= (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)j. \end{aligned}$$

Assim como foi feito na seção 2.2, quando estabelecemos um homomorfismo entre \mathbb{C} e $M_2(\mathbb{R})$, podemos fazer a mesma coisa entre \mathbb{H} e $M_2(\mathbb{C})$. Para isso, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Omega : \quad \mathbb{H} &\longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ z + wj &\longmapsto \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2. Ω é um homomorfismo injetor de álgebras entre \mathbb{H} e $M_2(\mathbb{C})$.

Demonstração. Sejam $q_1 = z_1 + w_1j$ e $q_2 = z_2 + w_2j$ dois quatérnios. Então:

$$\begin{aligned} \Omega(q_1 + q_2) &= \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -(\overline{w_1 + w_2}) & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \Omega(q_1) + \Omega(q_2). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Omega(q_1 \cdot q_2) &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -(\overline{z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2}) & \overline{z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -\bar{z}_1 w_2 - \bar{w}_1 z_2 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mas

$$\begin{aligned} \Omega(q_1) \cdot \Omega(q_2) &= \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -\bar{z}_1 w_2 - \bar{w}_1 z_2 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 - \bar{w}_1 w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (3.11) e (3.12) segue que $\Omega(q_1 \cdot q_2) = \Omega(q_1) \cdot \Omega(q_2)$, o que conclui a prova de que Ω é um homomorfismo. Por fim, mostremos que Ω é injetora:

$$\begin{aligned} \Omega(q_1) = \Omega(q_2) &\implies \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &\implies z_1 = z_2 \text{ e } w_1 = w_2 \\ &\implies z_1 + w_1j = z_2 + w_2j \\ &\implies q_1 = q_2. \end{aligned}$$

Portanto, Ω é um homomorfismo injetor entre \mathbb{H} e $M_2(\mathbb{C})$. \square

Para encerrar esta seção, mostraremos que o grupo dos quatérnios unitários $\text{Sp}(1)$ é isomorfo ao grupo $\text{SU}(2)$, das matrizes unitárias de determinante igual a 1. Denotando $P = \Omega(q)$, temos que

$$\begin{aligned} PP^* &= \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |z|^2 + |w|^2 & -zw + zw \\ -\bar{z}\bar{w} + \bar{z}\bar{w} & |z|^2 + |w|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|q\|^2 & 0 \\ 0 & \|q\|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

e é fácil ver que P^*P resulta em (3.13). Além disso,

$$\det(P) = \begin{vmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{vmatrix} = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 = \|q\|^2.$$

Se $q \in \text{Sp}(1)$, P é unitária e $\det P = 1$, o que nos leva à conclusão de que $P \in \text{SU}(2)$. Isto quer dizer que, restringindo-se o domínio de Ω a $\text{Sp}(1)$, o conjunto imagem será $\text{SU}(2)$. Vamos considerar, portanto,

$$\begin{aligned} \Omega : \text{Sp}(1) &\longrightarrow \text{SU}(2) \\ z + wj &\longmapsto \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.3. Ω é um isomorfismo entre $\text{Sp}(1)$ e $\text{SU}(2)$.

Demonstração. Vimos, pela Proposição 3.3.2, que Ω é um homomorfismo injetor entre \mathbb{H} e $M_2(\mathbb{C})$. Então Ω , restrita a $\text{Sp}(1)$, também será um homomorfismo injetor, agora entre $\text{Sp}(1)$ e o conjunto imagem, que é $\text{SU}(2)$. Basta provar, portanto, que Ω é sobrejetora. Para isto, considere

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ u & v \end{pmatrix} \in \text{SU}(2).$$

Como $A^* = A^{-1}$ e $\det(A) = zv - uw = 1$, temos que

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{u} \\ \bar{w} & \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & -w \\ -u & z \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

De (3.14), temos que $v = \bar{z}$ e $u = -\bar{w}$. Com isso, segue que

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

e, como $\det(A) = 1$,

$$1 = z\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2.$$

Se $q = z + wj$, $q \in \text{Sp}(1)$ e $\Omega(q) = A$. Logo, Ω é sobrejetora e, portanto, um isomorfismo entre $\text{Sp}(1)$ e $\text{SU}(2)$. \square

3.4 QUATÉRNIOS PUROS

Definição 3.4.1. Um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ é dito **puro** quando a sua parte real é nula, ou seja,

$$q = q_1i + q_2j + q_3k,$$

em que $q_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3$.

Denotaremos como $\widehat{\mathbb{H}}$ o subespaço dos quatérnios puros.

Na forma complexa, $q = z + wj$, em que $z \in i\mathbb{R}$ (conjunto dos imaginários puros) e $w \in \mathbb{C}$.

Se $q \in \text{Sp}(1)$ é um quatérnio puro, temos que $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, ou seja, do ponto de vista geométrico, q pertence à esfera S^2 em \mathbb{R}^3 . Ou seja, podemos escrever

$$S^2 = \{q = q_1i + q_2j + q_3k \mid q \in \text{Sp}(1)\} = \widehat{\mathbb{H}} \cap \text{Sp}(1).$$

É possível estabelecer uma relação entre o espaço euclidiano tridimensional usual e o subespaço dos quatérnios puros, utilizando a função δ definida na seção 3.2.

Proposição 3.4.2. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Então

$$\delta(\vec{u})\delta(\vec{v}) = -\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \delta(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.2.2. \square

Como havíamos omitido δ para facilitar a escrita, dados $u, v \in \widehat{\mathbb{H}}$, temos que

$$u \cdot v = -\langle u, v \rangle + u \times v.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \text{Re}(u \cdot v) &= -\langle u, v \rangle \\ \text{Im}(u \cdot v) &= u \times v. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Proposição 3.4.3. *Sejam $q \in \mathbb{H}^*$ e $r \in \widehat{\mathbb{H}}$. Então, $\text{Ad}_q(r) \in \widehat{\mathbb{H}}$.*

Demonstração. Considere $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $r = r_1i + r_2j + r_3k$. Sabemos que

$$\text{Ad}_q(r) = qrq^{-1} = qr \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2} qr\bar{q}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} r\bar{q} &= (r_1i + r_2j + r_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= r_1q_0i + r_1q_1 - r_1q_2k + r_1q_3j + r_2q_0j + r_2q_1k + \\ &\quad + r_2q_2 - r_2q_3i + r_3q_0k - r_3q_1j + r_3q_2i + r_3q_3 \\ &= (r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3) + (r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2)i + \\ &\quad + (r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1)j + (-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)k \end{aligned} \quad (3.16)$$

Multiplicando (3.16) por q à esquerda:

$$\begin{aligned} qr\bar{q} &= q_0(r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3) + q_0(r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2)i + \\ &\quad + q_0(r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1)j + q_0(-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)k + \\ &\quad + q_1(r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3)i - q_1(r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2) + \\ &\quad + q_1(r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1)k - q_1(-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)j + \\ &\quad + q_2(r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3)j - q_2(r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2)k - \\ &\quad - q_2(r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1) + q_2(-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0)i + \\ &\quad + q_3(r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3)k + q_3(r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2)j - \\ &\quad - q_3(r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1)i - q_3(-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \text{Re}(qr\bar{q}) &= q_0(r_1q_1 + r_2q_2 + r_3q_3) - q_1(r_1q_0 - r_2q_3 + r_3q_2) - \\ &\quad - q_2(r_1q_3 + r_2q_0 - r_3q_1) - q_3(-r_1q_2 + r_2q_1 + r_3q_0) \\ &= q_0r_1q_1 + q_0r_2q_2 + q_0r_3q_3 - q_1r_1q_0 + q_1r_2q_3 - q_1r_3q_2 - \\ &\quad - q_2r_1q_3 - q_2r_2q_0 + q_2r_3q_1 + q_3r_1q_2 - q_3r_2q_1 - q_3r_3q_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $qr\bar{q}$ é um quatérnio puro. Logo, $\frac{1}{\|q\|^2}qr\bar{q} = \text{Ad}_q(r)$ é um quatérnio puro. \square

Sabendo, agora, que, para todo $q \in \mathbb{H}^*$, Ad_q leva quatérnios puros em quatérnios puros, podemos fazer uma restrição no contradomínio da ação adjunta Ad :

$$\begin{aligned} \text{Ad}: \mathbb{H}^* &\longrightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ q &\longmapsto \text{Ad}_q \end{aligned}$$

Na restrição acima, $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ corresponde ao grupo das transformações lineares inversíveis em $\widehat{\mathbb{H}}$.

3.5 QUATÉRNIOS E ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Para finalmente compreender a relação entre os quatérnios e as rotações no espaço, faremos uma restrição do domínio de Ad para o conjunto dos quatérnios unitários $\text{Sp}(1)$. Veremos que, nesse caso, a imagem será exatamente o grupo $\text{SO}(3)$, das rotações no espaço.

Teorema 3.5.1. *Considere a função*

$$\begin{aligned} \text{Ad}: \text{Sp}(1) &\longrightarrow \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ q &\longmapsto \text{Ad}_q. \end{aligned}$$

Então Ad é um homomorfismo de grupos e $\text{Im}(\text{Ad}) = \text{SO}(3)$.

Demonstração. Como $\text{Sp}(1)$ é subgrupo de \mathbb{H}^* , segue que Ad é um homomorfismo. Sejam $r = r_1i + r_2j + r_3k$ e $s = s_1i + s_2j + s_3k$ dois quatérnios puros e $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \text{Sp}(1)$. Como $q \in \text{Sp}(1)$, $q^{-1} = \bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$. Por um lado, temos

$$\text{Ad}_q(r) \cdot \text{Ad}_q(s) = -\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(r)}, \overrightarrow{\text{Ad}_q(s)} \rangle + \overrightarrow{\text{Ad}_q(r)} \times \overrightarrow{\text{Ad}_q(s)}. \quad (3.17)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(r) \text{Ad}_q(s) &= qrq^{-1}qsq^{-1} \\ &= qrsq^{-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observe que

$$\begin{aligned} rs &= -\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + \vec{r} \times \vec{s} \\ &= -\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + (r_2s_3 - r_3s_2)i + (r_3s_1 - r_1s_3)j + (r_2s_1 - r_1s_2)k. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Multiplicando (3.19) por q à esquerda,

$$\begin{aligned} qrs &= q_0[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + (r_2s_3 - r_3s_2)i + (r_3s_1 - r_1s_3)j + (r_2s_1 - r_1s_2)k] + \\ &+ q_1[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle i - (r_2s_3 - r_3s_2) + (r_3s_1 - r_1s_3)k - (r_2s_1 - r_1s_2)j] + \\ &+ q_2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle j - (r_2s_3 - r_3s_2)k - (r_3s_1 - r_1s_3) + (r_2s_1 - r_1s_2)i] + \\ &+ q_3[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle k + (r_2s_3 - r_3s_2)j - (r_3s_1 - r_1s_3)i - (r_2s_1 - r_1s_2)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Multiplicando (3.20) por q^{-1} à direita,

$$\begin{aligned}
qrsq^{-1} = & q_0^2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + (r_2s_3 - r_3s_2)i + (r_3s_1 - r_1s_3)j + (r_2s_1 - r_1s_2)k] + \\
& + q_0q_1[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle i - (r_2s_3 - r_3s_2) + (r_3s_1 - r_1s_3)k - (r_2s_1 - r_1s_2)j] + \\
& + q_0q_2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle j - (r_2s_3 - r_3s_2)k - (r_3s_1 - r_1s_3) + (r_2s_1 - r_1s_2)i] + \\
& + q_0q_3[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle k + (r_2s_3 - r_3s_2)j - (r_3s_1 - r_1s_3)i - (r_2s_1 - r_1s_2)] + \\
& + q_0q_1[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle i + (r_2s_3 - r_3s_2) + (r_3s_1 - r_1s_3)k - (r_2s_1 - r_1s_2)j] + \\
& + q_1^2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + (r_2s_3 - r_3s_2)i - (r_3s_1 - r_1s_3)j - (r_2s_1 - r_1s_2)k] + \\
& + q_1q_2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle k + (r_2s_3 - r_3s_2)j + (r_3s_1 - r_1s_3)i + (r_2s_1 - r_1s_2)] + \\
& + q_1q_3[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle j + (r_2s_3 - r_3s_2)k - (r_3s_1 - r_1s_3) + (r_2s_1 - r_1s_2)i] + \\
& + q_0q_2[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle j - (r_2s_3 - r_3s_2)k + (r_3s_1 - r_1s_3) + (r_2s_1 - r_1s_2)i] + \\
& + q_1q_2[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle k + (r_2s_3 - r_3s_2)j + (r_3s_1 - r_1s_3)i - (r_2s_1 - r_1s_2)] + \\
& + q_2^2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle - (r_2s_3 - r_3s_2)i + (r_3s_1 - r_1s_3)j - (r_2s_1 - r_1s_2)k] + \\
& + q_2q_3[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle i + (r_2s_3 - r_3s_2) + (r_3s_1 - r_1s_3)k + (r_2s_1 - r_1s_2)j] + \\
& + q_0q_3[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle k + (r_2s_3 - r_3s_2)j - (r_3s_1 - r_1s_3)i + (r_2s_1 - r_1s_2)] + \\
& + q_1q_3[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle j + (r_2s_3 - r_3s_2)k + (r_3s_1 - r_1s_3) + (r_2s_1 - r_1s_2)i] + \\
& + q_2q_3[\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle i - (r_2s_3 - r_3s_2) + (r_3s_1 - r_1s_3)k + (r_2s_1 - r_1s_2)j] + \\
& + q_3^2[-\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle - (r_2s_3 - r_3s_2)i - (r_3s_1 - r_1s_3)j + (r_2s_1 - r_1s_2)k].
\end{aligned}$$

Temos que

$$\operatorname{Re}(-\langle \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(r)}, \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(s)} \rangle + \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(r)} \times \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(s)}) = -\langle \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(r)}, \overrightarrow{\operatorname{Ad}_q(s)} \rangle \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(qrsq^{-1}) = & -q_0^2\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle - q_0q_1(r_2s_3 - r_3s_2) - q_0q_2(r_3s_1 - r_1s_3) - \\
& - q_0q_3(r_2s_1 - r_1s_2) + q_0q_1(r_2s_3 - r_3s_2) - q_1^2\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + \\
& + q_1q_2(r_2s_1 - r_1s_2) - q_1q_3(r_3s_1 - r_1s_3) + \\
& + q_0q_2(r_3s_1 - r_1s_3) - q_1q_2(r_2s_1 - r_1s_2) - q_2^2\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle + \\
& + q_2q_3(r_2s_3 - r_3s_2) + q_0q_3(r_2s_1 - r_1s_2) + \\
& + q_1q_3(r_3s_1 - r_1s_3) - q_2q_3(r_2s_3 - r_3s_2) - q_3^2\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle \\
= & -\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\
= & -\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle \quad (3.22)
\end{aligned}$$

De (3.17), (3.18), (3.21) e (3.22), segue que

$$\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(r)}, \overrightarrow{\text{Ad}_q(s)} \rangle = \langle \vec{r}, \vec{s} \rangle.$$

Segue, portanto, que Ad_q é ortogonal, ou seja $\text{Ad}_q \in \text{O}(3)$. Vamos, agora, calcular a matriz da transformação Ad_q na base $\beta = \{i, j, k\}$:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(i) &= qi q^{-1} \\ &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)i(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= (q_0 i - q_1 - q_2 k + q_3 j)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0^2 i + q_0 q_1 - q_0 q_2 k + q_0 q_3 j - q_0 q_1 + q_1^2 i + q_1 q_2 j + q_1 q_3 k - \\ &\quad - q_0 q_2 k + q_1 q_2 j - q_2^2 i - q_2 q_3 + q_0 q_3 j + q_1 q_3 k + q_2 q_3 - q_3^2 i \\ &= (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)i + (2q_0 q_3 + 2q_1 q_2)j + (-2q_0 q_2 + 2q_1 q_3)k \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(j) &= qj q^{-1} \\ &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)j(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= (q_0 j + q_1 k - q_2 - q_3 i)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0^2 j + q_0 q_1 k + q_0 q_2 - q_0 q_3 i + q_0 q_1 k - q_1^2 j + q_1 q_2 i + q_1 q_3 - \\ &\quad - q_0 q_2 + q_1 q_2 i + q_2^2 j + q_2 q_3 k - q_0 q_3 i - q_1 q_3 + q_2 q_3 k - q_3^2 j \\ &= (-2q_0 q_3 + 2q_1 q_2)i + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)j + (2q_0 q_1 + 2q_2 q_3)k \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(k) &= qk q^{-1} \\ &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)k(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= (q_0 k - q_1 j + q_2 i - q_3)(q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k) \\ &= q_0^2 k - q_0 q_1 j + q_0 q_2 i + q_0 q_3 - q_0 q_1 j - q_1^2 k - q_1 q_2 + q_1 q_3 i + \\ &\quad + q_0 q_2 i + q_1 q_2 - q_2^2 k + q_2 q_3 j - q_0 q_3 + q_1 q_3 i + q_2 q_3 j + q_3^2 k \\ &= (2q_0 q_2 + 2q_1 q_3)i + (-2q_0 q_1 + 2q_2 q_3)j + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)k \end{aligned} \tag{3.25}$$

De (3.23), (3.24) e (3.25), segue que

$$[\text{Ad}_q]_\beta = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_3 + 2q_1q_2 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_0q_3 + 2q_1q_2 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & -2q_0q_1 + 2q_2q_3 \\ -2q_0q_2 + 2q_1q_3 & 2q_0q_1 + 2q_2q_3 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Fazendo-se o cálculo do determinante de (3.26), chega-se à conclusão de que é igual a 1. Logo, $\text{Ad}_q \in \text{SO}(3)$ para qualquer $q \in \text{Sp}(1)$ e com isso concluímos que $\text{Im}(\text{Ad}) \subseteq \text{SO}(3)$. Então Ad_q é uma rotação espacial. Veremos que o eixo de rotação e o ângulo de rotação podem ser obtidos a partir das componentes de q .

Afirmção 1: O eixo de rotação de Ad_q é o vetor

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - q_0^2}}(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3.$$

De fato, considere o quatérnio $R = q_1i + q_2j + q_3k$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(R) &= qRq^{-1} \\ &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_1i + q_2j + q_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= (q_0q_1i + q_0q_2j + q_0q_3k - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= q_0^2q_1i + q_0^2q_2j + q_0^2q_3k + q_1^3i + q_1q_2^2i + q_1q_3^2i + \\ &\quad + q_1^2q_2j + q_2^3j + q_2q_3^2j + q_1^2q_3k + q_2^2q_3k + q_3^2k \\ &= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)(q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= R. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que \vec{R} é um autovetor de Ad_q , com autovalor 1. Para que o eixo de rotação seja unitário, basta dividir \vec{R} por sua norma. Logo, podemos escrever:

$$\vec{r} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{\sqrt{1 - q_0^2}}(q_1, q_2, q_3).$$

Afirmção 2: O ângulo de rotação de Ad_q é

$$\theta = 2 \arccos q_0.$$

De fato, podemos considerar um vetor \vec{v} perpendicular a \vec{r} e verificar o ângulo θ entre $\overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}$ e \vec{v} . Por exemplo, vamos considerar $v = q_3j - q_2k$. Temos que

$$\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle = 0q_1 + q_3q_2 - q_2q_3 = 0,$$

o que mostra que $\vec{v} \perp \vec{r}$. Além disso, $\|\vec{v}\|^2 = q_2^2 + q_3^2$. Sabemos que

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}, \vec{v} \rangle}{\|\overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}. \quad (3.27)$$

De (3.15), $\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}, \vec{v} \rangle = -\text{Re}(\text{Ad}_q(v) \cdot v)$. Efetuando os cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(v) &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k)(q_3j - q_2k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) \\ &= (-2q_0q_2 - 2q_0q_3)i + (2q_0q_1q_2 + q_0^2q_3 - q_1^2q_3 - q_2^2q_3 - q_3^3)j + \\ &\quad + (2q_0q_1q_3 - q_0^2q_2 + q_1^2q_2 + q_2^3 + q_2q_3^2)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\text{Ad}_q(v) \cdot v) &= -q_3(2q_0q_1q_2 + q_0^2q_3 - q_1^2q_3 - q_2^2q_3 - q_3^3) + \\ &\quad + q_2(2q_0q_1q_3 - q_0q_2^2 + q_1^2q_2 + q_2^3 + q_2q_3^2) \\ &= -q_0^2q_3^2 + q_1^2q_3^2 + q_2^2q_3^2 + q_3^4 - q_0^2q_2^2 + q_1q_2^2 + q_2^4 + q_2q_3^2 \\ &= q_2^2(-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + q_3^2(-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\ &= (-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)(q_2^2 + q_3^2) \\ &= (1 - 2q_0^2)(q_2^2 + q_3^2). \end{aligned}$$

Logo, $\langle \overrightarrow{\text{Ad}_q(v)}, \vec{v} \rangle = -(1 - 2q_0^2)(q_2^2 + q_3^2) = (2q_0^2 - 1)(q_2^2 + q_3^2)$. Substituindo em (3.27):

$$\cos \theta = \frac{(2q_0^2 - 1)(q_2^2 + q_3^2)}{q_2^2 + q_3^2} = 2q_0^2 - 1. \quad (3.28)$$

Mas

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1. \quad (3.29)$$

Comparando (3.28) e (3.29), segue que

$$\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = q_0$$

o que implica $\theta = 2 \arccos q_0$, como queríamos demonstrar.

Para finalizar a demonstração, podemos notar que Ad é sobrejetora. De fato, dado $A \in \text{SO}(3)$, pelo que foi visto na seção 2.3, existe um eixo de rotação unitário \vec{r} e um ângulo θ tal que $A = R_{\theta, \vec{r}}$. Facilmente nota-se que

$$A = R_{\theta, \vec{r}} = \text{Ad}_q$$

em que

$$q = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{r},$$

com \vec{r} representado na forma de quatérnio puro. Logo, Ad é sobrejetora, o que implica $\text{Im}(\text{Ad}) = \text{GL}_3(\mathbb{R})$. Como $\text{SO}(3) \subseteq \text{GL}_3(\mathbb{R})$, temos que $\text{GL}_3(\mathbb{R}) \subseteq \text{Im}(\text{Ad})$, concluindo a prova de que o conjunto imagem de Ad é igual ao conjunto das rotações no espaço. \square

Com este teorema, finalmente mostramos a relação entre os quatérnios e as rotações no espaço e a clara vantagem em utilizá-los na descrição das mesmas. Na seção 2.3 foi visto que, para se obter a matriz de rotação de um ângulo qualquer em torno de um eixo qualquer, era necessário efetuar uma composição de cinco rotações em torno dos eixos, o que envolve efetuar um produto de cinco matrizes de rotação. E agora, com o teorema 3.5.1, vimos que um simples quatérnio unitário pode carregar todas as informações necessárias para descrever a rotação dada.

Portanto, para rotacionar um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 por um ângulo θ em torno de um eixo definido por um vetor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ qualquer, basta fazer

$$R_{\theta, \vec{r}}(\vec{v}) = \text{Ad}_q(v) = qvq^{-1},$$

em que

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{r}{\|r\|}, \quad (3.30)$$

com $v = v_1i + v_2j + v_3k = \delta(\vec{v})$ e $r = r_1i + r_2j + r_3k = \delta(\vec{r})$.

Para finalizar a seção, vamos ver um pequeno exemplo de aplicação dos resultados acima.

Exemplo 3.5.2. Calcule o vetor resultante de uma rotação de 90° do vetor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ em torno do eixo definido pelo vetor $\vec{r} = (0, 1, 2)$.

Solução. Temos $v = i + 2j + 3k$, $r = j + 2k$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Como $\|r\| = \sqrt{5}$, temos que

$$\begin{aligned} q &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(j + 2k) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}(j + 2k) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10}j + \frac{\sqrt{10}}{5}k. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|q\| = 1$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(v) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10}j + \frac{\sqrt{10}}{5}k \right) (i + 2j + 3k) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{10}j - \frac{\sqrt{10}}{5}k \right) \\ &= \left(-\frac{4\sqrt{10}}{5} + \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{10}i + \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10}}{5}j + \frac{15\sqrt{2} - \sqrt{10}}{10}k \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{10}j - \frac{\sqrt{10}}{5}k \right) \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5}i + \frac{2\sqrt{5} + 8}{5}j + \frac{16 - \sqrt{5}}{5}k. \end{aligned}$$

Logo, $R_{\theta, \vec{r}}(\vec{v}) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5} + 8}{5}, \frac{16 - \sqrt{5}}{5} \right)$. □

À primeira vista, os cálculos envolvendo quatérnios parecem ser bem trabalhosos, sobretudo quando feitos manualmente. No entanto, com o auxílio de softwares computacionais, os cálculos tornam-se bem mais simples.

O homomorfismo entre $\text{Sp}(1)$ e $\text{SO}(3)$ pode ser construído de outra maneira. Na seção 3.3 mostramos que há um isomorfismo entre $\text{Sp}(1)$ e $\text{SU}(2)$, denotada pela função Ω . Facilmente pode-se construir uma correspondência de 2 para 1 entre $\text{SU}(2)$ e $\text{SO}(3)$ através da composição $\text{Ad} \circ \Omega^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sp}(1) & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{SO}(3) \\ \Omega \uparrow & \nearrow \text{Ad} \circ \Omega^{-1} & \\ \text{SU}(2) & & \end{array}$$

A composição $\text{Ad} \circ \Omega^{-1} : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ tem como núcleo o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{H}$. Desta forma, temos

$$\text{SO}(3) \simeq \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2. \quad (3.31)$$

3.6 QUATÉRNIOS DUAIS

Um importante conjunto que envolve quatérnios e números duais e que será usado para codificar os movimentos rígidos no espaço de três dimensões é o conjunto dos quatérnios duais, que será denotado por $\tilde{\mathbb{H}}$.

Nesta seção e na próxima, nos permitiremos um pequeno abuso de notação: ao contrário das seções anteriores, em que utilizávamos os q_i 's, os r_i 's, etc. para representar os coeficientes reais dos quatérnios, usaremos-os agora para representar os próprios quatérnios (uma vez que cada quatérnio dual é formado por dois quatérnios, e adotar uma

notação diferente para os mesmos não seria muito adequado esteticamente). Se precisarmos denotar os coeficientes reais dos quatérnios nestas duas seções, usaremos q_{ij} , r_{ij} , etc.

Definição 3.6.1. *Definimos o conjunto dos **quatérnios duais** como*

$$\tilde{\mathbb{H}} = \{q_0 + q_1\epsilon \mid q_0, q_1 \in \mathbb{H} \text{ e } \epsilon^2 = 0\}.$$

Dados $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ e $\tilde{r} = r_0 + r_1\epsilon$, as operações em $\tilde{\mathbb{H}}$ ficam definidas da seguinte forma:

- Adição:

$$\tilde{q} + \tilde{r} = (q_0 + q_1\epsilon) + (r_0 + r_1\epsilon) = (q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)\epsilon.$$

- Multiplicação:

$$\tilde{q} \cdot \tilde{r} = (q_0 + q_1\epsilon) \cdot (r_0 + r_1\epsilon) = (q_0r_0) + (q_0r_1 + r_0q_1)\epsilon.$$

Agora, vamos explicitar os coeficientes reais de um quatérnio dual. Considerando $q_0 = q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k$ e $q_1 = q_{10} + q_{11}i + q_{12}j + q_{13}k$, então

$$\begin{aligned} q_0 + q_1\epsilon &= (q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k) + (q_{10} + q_{11}i + q_{12}j + q_{13}k)\epsilon \\ &= q_{00} + q_{01}i + q_{02}j + q_{03}k + q_{10}\epsilon + q_{11}i\epsilon + q_{12}j\epsilon + q_{13}k\epsilon \end{aligned}$$

e com isto podemos ver que $\beta = \{1, i, j, k, \epsilon, i\epsilon, j\epsilon, k\epsilon\}$ é uma base para $\tilde{\mathbb{H}}$, como espaço vetorial.

Dado $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ um quatérnio dual, o conjugado de \tilde{q} , denotado como $(\tilde{q})^*$, será dado por

$$(\tilde{q})^* = q_0 - q_1\epsilon.$$

Proposição 3.6.2. *Se $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ um quatérnio dual não nulo, o inverso de \tilde{q} é dado por*

$$\tilde{q}^{-1} = q_0^{-1}(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon). \quad (3.32)$$

Demonstração. Temos que

$$(q_0 + q_1\epsilon)q_0^{-1}(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon) = (1 + q_1q_0^{-1}\epsilon)(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon) = 1$$

Analogamente mostra-se que $q_0^{-1}(1 - q_1q_0^{-1}\epsilon)\tilde{q} = 1$. □

3.7 QUATÉRNIOS DUAIS E MOVIMENTOS RÍGIDOS

Para finalizar este capítulo, falaremos sobre como os movimentos rígidos no espaço podem ser codificados por meio de quatérnios duais.

Sejam $q_0, q_1, r_0, r_1 \in \mathbb{H}$. Considere os quatérnios duais $\tilde{q} = q_0 + q_1\epsilon$ e $\tilde{r} = r_0 + r_1\epsilon$. Vamos definir a conjugação para o espaço dos quatérnios duais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{q}}: \tilde{\mathbb{H}} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{H}} \\ \tilde{r} &\longmapsto \tilde{q}\tilde{r}(\tilde{q}^{-1})^* \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{q}\tilde{r}(\tilde{q}^{-1})^* &= (q_0 + q_1\epsilon)(r_0 + r_1\epsilon)q_0^{-1}(1 + q_1q_0^{-1}\epsilon) \\ &= (q_0r_0 + q_0r_1\epsilon + q_1r_0\epsilon)(q_0^{-1} + q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon) \\ &= q_0r_0q_0^{-1} + q_0r_0q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon + q_0r_1q_0^{-1}\epsilon + q_1r_0q_0^{-1}\epsilon. \end{aligned}$$

Considere o quatérnio dual $\tilde{s} = 1 + s_1\epsilon$, em que s_1 é um quatérnio puro. Então,

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{q}}(\tilde{s}) &= q_0q_0^{-1} + q_0q_0^{-1}q_1q_0^{-1}\epsilon + q_0s_1q_0^{-1}\epsilon + q_1q_0^{-1}\epsilon \\ &= 1 + q_1q_0^{-1}\epsilon + q_0s_1q_0^{-1}\epsilon + q_1q_0^{-1}\epsilon \\ &= 1 + (q_0s_1q_0^{-1} + 2q_1q_0^{-1})\epsilon. \end{aligned}$$

Seja $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$. Considere $g_0, g_1 \in \mathbb{H}$ tal que $2g_1g_0^{-1} = t \in \widehat{\mathbb{H}}$, ou seja, o vetor \vec{t} visto como um quatérnio puro. Desta maneira, temos o quatérnio dual \tilde{g} , dado por

$$\tilde{g} = g_0 + \frac{1}{2}tg_0\epsilon. \quad (3.33)$$

Calculando $\text{Ad}_{\tilde{g}}(\tilde{s})$, obtemos

$$\text{Ad}_{\tilde{g}}(\tilde{s}) = 1 + (g_0s_1g_0^{-1} + t)\epsilon = 1 + T_{R, \vec{t}}(s_1)\epsilon. \quad (3.34)$$

Com isto, acabamos de obter uma maneira de codificar um movimento rígido no espaço usando conjugação de quatérnios duais. Note que, na expressão (3.34), a parcela $g_0s_1g_0^{-1}$ representa uma rotação codificada através de conjugação de quatérnios, exatamente do jeito que vimos na seção 3.5. Daí a necessidade de que s_1 seja um quatérnio puro.

Então, dado um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, para calcularmos o deslocamento

$T_{R, \vec{t}}(P)$ desse ponto por uma rotação de ângulo θ em torno do eixo definido pelo vetor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ seguido de uma translação definida pelo vetor $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$, consideremos os quatérnios duais

$$\tilde{s} = 1 + s\epsilon \quad \text{e} \quad \tilde{g} = g + \frac{1}{2}tg\epsilon,$$

em que $s = xi + yj + zk$, $t = t_1i + t_2j + t_3k = \delta(\vec{t})$ e g é tomado tal como na expressão (3.30), ou seja,

$$g = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{r}{\|r\|},$$

com $r = r_1i + r_2j + r_3k = \delta(\vec{r})$. Com isso, basta calcular $\text{Ad}_{\tilde{g}}(\tilde{s})$.

Para finalizar esta seção, veremos um exemplo de aplicação dos resultados acima para se calcular deslocamentos de pontos no espaço.

Exemplo 3.7.1. Calcule o deslocamento T do ponto $P = (2, 1, 5)$ por uma rotação de 180° em torno do eixo Oy seguido de uma translação definida pelo vetor $\vec{t} = (6, 4, 2)$.

Solução: Como o eixo de rotação é o Oy , segue que $r = j$. Então

$$\begin{aligned} g &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot j \\ &= j. \end{aligned}$$

Como $t = 6i + 4j + 2k$, segue que

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= g + \frac{1}{2}tg\epsilon \\ &= j + \frac{1}{2}(6i + 4j + 2k)j\epsilon \\ &= j + (-2 - i + 3k)\epsilon. \end{aligned}$$

O inverso de \tilde{g} será

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-1} &= -j[1 - (-2 - 1 + 3k)(-j)\epsilon] \\ &= -j + j(3i + 2j + k)\epsilon \\ &= -j + (-2 + i - 3k)\epsilon. \end{aligned}$$

Como $s = 2i + j + 5k$, temos que

$$\tilde{s} = 1 + (2i + j + 5k)\epsilon.$$

Calculando $\text{Ad}_{\tilde{g}}(\tilde{s})$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}_{\tilde{g}}(\tilde{s}) &= \tilde{g}\tilde{s}(\tilde{g}^{-1})^* \\
 &= [j + (-2 - i + 3k)\epsilon][1 + (2i + j + 5k)\epsilon][-j - (-2 + i - 3k)\epsilon] \\
 &= [j + (-3 + 4i + k)\epsilon][-j - (-2 + 1 - 3k)\epsilon] \\
 &= 1 + \underbrace{(4i + 5j - 3k)\epsilon}_{\text{Solução}}.
 \end{aligned}$$

Logo, $T_{R, \vec{t}}(P) = (4, 5, -3)$.

□

4 ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Neste capítulo falaremos de uma importante classe de álgebras geométricas que formarão uma generalização de todos os exemplos que vimos até agora: tratam-se das álgebras de Clifford.

Veremos a definição dessas álgebras e de que maneira corpos como os do números complexos e álgebras como a das matrizes quadradas e a dos quatérnios podem ser vistos como casos particulares de álgebras de Clifford.

4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Sendo V um espaço vetorial sobre um corpo (real ou complexo) K , a ideia é construir uma álgebra que, além de conter uma cópia de V e uma cópia de K , possua uma forma quadrática \mathfrak{q} de modo que, dado $v \in V$, tenhamos $v^2 = \mathfrak{q}(v)$. Ou seja, queremos que o quadrado do elemento do espaço vetorial coincida com a forma quadrática aplicada no mesmo. Tal álgebra desejada é definida a seguir:

Definição 4.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre K e $\mathfrak{q} : V \rightarrow K$ uma forma quadrática relacionada a uma forma bilinear $\mathfrak{b} : V \times V \rightarrow K$ simétrica. A **Álgebra de Clifford** associada a (V, \mathfrak{q}) , denotada como $\text{Cl}(V, \mathfrak{q})$, é a álgebra gerada em V sujeita à relação*

$$u \cdot v + v \cdot u = 2 \cdot \mathfrak{b}(u, v) \quad (4.1)$$

para todos $u, v \in V$.

A partir de agora, fixaremos $V = \mathbb{R}^n$ e $K = \mathbb{R}$. Sendo assim, teremos $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sendo $n = \dim(\mathbb{R}^n)$, o Teorema da Classificação de Sylvester nos diz que \mathbb{R}^n possui uma base \mathfrak{q} -ortonormal $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ com p geradores cujo quadrado é igual a 1, q cujo quadrado é igual a -1 e r cujo quadrado é igual a zero. Dessa maneira, podemos denotar a álgebra $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{q})$ da seguinte maneira: $\text{Cl}_n(p, q, r)$.

Então, $\text{Cl}_n(p, q, r)$, como espaço vetorial, será gerada por **monômios** da forma

$$e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \dots \cdot e_{i_k}, \quad (4.2)$$

de comprimentos que variam entre 0 (escalares) e n , em que o produto dos elementos da base é dado, simplesmente, pela justaposição dos mesmos. Com isso, a expressão (4.2) pode ser reescrita como

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}.$$

O produto dos elementos da base obedecerá às seguintes condições:

- (1) $e_i^2 = 1$, se $1 \leq i \leq p$;
- (2) $e_i^2 = -1$, se $p + 1 \leq i \leq p + q$;
- (3) $e_i^2 = 0$, se $p + q + 1 \leq i \leq p + q + r = n$;
- (4) $e_i e_j = -e_j e_i$, se $i \neq j$ (anti-comutatividade).

A definição das propriedades da álgebra de Clifford virá da propriedade do produto dos elementos da base listados acima. Um elemento de uma álgebra de Clifford será dado pela combinação linear dos monômios geradores da mesma.

Exemplo 4.1.2. *Considere a álgebra de Clifford $Cl_4(0, 3, 1)$. Esta álgebra possui os geradores $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, em que $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$ e $e_4^2 = 0$. Então, os monômios geradores de $Cl_4(0, 3, 1)$ serão:*

- Comprimento 0: 1
- Comprimento 1: e_1, e_2, e_3, e_4
- Comprimento 2: $e_1 e_2, e_1 e_3, e_1 e_4, e_2 e_3, e_2 e_4, e_3 e_4$
- Comprimento 3: $e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_3 e_4, e_2 e_3 e_4$
- Comprimento 4: $e_1 e_2 e_3 e_4$

Note que temos $2^4 = 16$ monômios geradores.

Sejam $a = 1 + e_2$ e $b = e_1 + 3e_2 e_3$ dois elementos de $Cl_4(0, 3, 1)$. Vamos calcular o produto destes elementos usando as propriedades dos produtos dos elementos da base.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (1 + e_2)(e_1 + 3e_2 e_3) \\ &= e_1 + 3e_2 e_3 + e_2 e_1 + e_2^2 e_3 \\ &= e_1 - e_3 - e_1 e_2 + 3e_2 e_3. \end{aligned}$$

Uma outra operação que podemos definir numa álgebra de Clifford é a **conjugação**. A conjugação de qualquer elemento da base será dada pelo seu oposto, ou seja,

$$e_i^* = -e_i.$$

A conjugação de monômios de comprimento maior do que 1 será dada pela conjugação individual de suas bases e da inversão de sua ordem. Por exemplo:

$$(e_i e_j)^* = (e_j^*)(e_i^*) = (-e_j)(-e_i) = e_j e_i = -e_i e_j$$

$$(e_i e_j e_k)^* = (e_k^*)(e_j^*)(e_i^*) = (-e_k)(-e_j)(-e_i) = -e_k e_j e_i = e_k e_i e_j = -e_i e_k e_j = e_i e_j e_k.$$

Os monômios de comprimento 0 (escalares) não são afetados pela conjugação. O conjugado de um elemento qualquer de uma álgebra de Clifford será dado pela conjugação de seus geradores.

Voltando ao exemplo 4.1.2, podemos calcular alguns conjugados:

$$1^* = (-e_1 e_1)^* = e_1^*(-e_1)^* = -e_1 e_1 = 1$$

$$0^* = (e_4 e_4)^* = e_4^* e_4^* = (-e_4)(-e_4) = 0$$

$$a^* = (1 + e_2)^* = 1^* + e_2^* = 1 - e_2.$$

Denotaremos como $\text{Cl}_n^0(p, q, r)$ o subespaço gerado por monômios de comprimento par e como $\text{Cl}_n^1(p, q, r)$ o subespaço gerado por monômios de comprimento ímpar, ou seja:

$$\text{Cl}_n^0(p, q, r) = \{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} \mid m = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Cl}_n^1(p, q, r) = \{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} \mid m = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\},$$

em que $k \in \mathbb{Z}$. $\text{Cl}_n^0(p, q, r)$ é uma subálgebra de $\text{Cl}_n(p, q, r)$.

Proposição 4.1.3. $\text{Cl}_n(p, q, r) = \text{Cl}_n^0(p, q, r) \oplus \text{Cl}_n^1(p, q, r)$.

Demonstração. Por definição, um elemento de $\text{Cl}_n(p, q, r)$ será dado pela combinação linear dos monômios geradores, de comprimento 0 até n . A parte deste elemento que corresponde à combinação linear de monômios de comprimento par constituirá um elemento de $\text{Cl}_n^0(p, q, r)$ e a parte que corresponde à combinação linear de monômios de comprimento ímpar, um elemento de $\text{Cl}_n^1(p, q, r)$. \square

Voltando ao exemplo 4.1.2, podemos considerar os seguintes subespaços para a álgebra de Clifford $\text{Cl}_4(0, 3, 1)$:

- $\text{Cl}_4^0(0, 3, 1)$, com geradores $1, e_1 e_2, e_1 e_3, e_1 e_4, e_2 e_3, e_2 e_4, e_3 e_4$ e $e_1 e_2 e_3 e_4$;
- $\text{Cl}_4^1(0, 3, 1)$, com geradores $e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_3 e_4$ e $e_2 e_3 e_4$.

Note que $\text{Cl}_4(0, 3, 1)$ possui $16 = 2^4$ geradores. Este resultado pode ser generalizado, conforme mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.1.4. *A dimensão de $\text{Cl}_n(p, q, r)$, como espaço vetorial, é 2^n .*

Demonstração. Sabemos que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base \mathfrak{q} -ortonormal para \mathbb{R}^n . Uma base para $\text{Cl}_n(p, q, r)$, como espaço vetorial, será dada por

$$\{1\} \cup E \cup \{e_i e_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{e_i e_j e_k \mid 1 \leq i, j, k \leq n\} \cup \dots \cup \{e_1 e_2 \dots e_n\}.$$

Dado um monômio de comprimento m , existem $\binom{n}{m}$ maneiras de escolher os m e_i 's. Portanto,

$$\dim(\text{Cl}_n(p, q, r)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

□

4.2 EXEMPLOS DE ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Nesta seção, veremos alguns exemplos de álgebras de Clifford. Alguns deles são isomorfos a estruturas estudadas nos capítulos anteriores.

Exemplo 4.2.1. *Vamos conhecer algumas álgebras de Clifford associadas a \mathbb{R} . Para isso, seja $E = \{e_1\}$ uma base para \mathbb{R} .*

a) *Definimos $\mathfrak{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(xe_1) = x^2$. Então $\mathfrak{q}(e_1) = 1$, ou seja $e_1^2 = 1$. Temos, então, a álgebra de Clifford $\text{Cl}_1(1, 0, 0)$ definida da seguinte maneira:*

$$\text{Cl}_1(1, 0, 0) = \{x_0 + x_1e_1 \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R}, e_1^2 = 1\}.$$

É fácil ver que $\text{Cl}_1(1, 0, 0) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Além disso, é possível construir um isomorfismo entre $\text{Cl}_1(1, 0, 0)$ e um subconjunto de matrizes 2×2 simétricas, a saber:

$$\text{Cl}_1(1, 0, 0) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

De fato, sendo $\{1, e_1\}$ a base de $\text{Cl}_1(1, 0, 0)$, o isomorfismo é induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) *Definimos $\mathfrak{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(xe_1) = -x^2$. Então $\mathfrak{q}(e_1) = -1$, ou seja $e_1^2 = -1$. Temos, então, a álgebra de Clifford $\text{Cl}_1(0, 1, 0)$ definida da seguinte maneira:*

$$\text{Cl}_1(0, 1, 0) = \{x_0 + x_1e_1 \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R}, e_1^2 = -1\}.$$

Dessa vez, temos o seguinte isomorfismo:

$$\text{Cl}_1(0, 1, 0) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.3)$$

Sendo $\{1, e_1\}$ a base de $\text{Cl}_1(1, 0, 0)$, o isomorfismo é induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vimos, em (2.11) e na proposição 2.2.3, que existe um homomorfismo injetor φ entre \mathbb{C} e o conjunto mostrado em (4.3). É fácil ver que φ é sobrejetora, o que nos permite concluir que é um isomorfismo. Logo,

$$\text{Cl}_1(0, 1, 0) \simeq \mathbb{C}.$$

c) Como último exemplo de álgebra de Clifford associada a \mathbb{R} , definimos $\mathfrak{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(xe_1) = 0$. Então $\mathfrak{q}(e_1) = 0$, ou seja $e_1^2 = 0$. Temos, então, a álgebra $\text{Cl}_1(0, 0, 1)$ definida da seguinte maneira:

$$\text{Cl}_1(0, 0, 1) = \{x_0 + x_1e_1 \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R}, e_1^2 = 0\}.$$

Dessa vez, temos o seguinte isomorfismo:

$$\text{Cl}_1(0, 0, 1) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix} \mid x_0, x_1 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.4)$$

Sendo $\{1, e_1\}$ a base de $\text{Cl}_1(0, 0, 1)$, o isomorfismo é induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vimos, na proposição 1.2.3, que existe um isomorfismo ς entre \mathbb{D} e o conjunto mostrado em (4.4). Logo,

$$\text{Cl}_1(0, 0, 1) \simeq \mathbb{D}.$$

Exemplo 4.2.2. Agora, vamos conhecer algumas álgebras de Clifford associadas a \mathbb{R}^2 . Para isso, seja $E = \{e_1, e_2\}$ uma base para \mathbb{R}^2 .

a) Sendo $x = (x_1e_1 + x_2e_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(x) = x_1^2 + x_2^2$. Então, $e_1^2 = e_2^2 = 1$. Temos, portanto, a álgebra $\text{Cl}_2(2, 0, 0)$, definida da seguinte maneira:

$$\text{Cl}_2(2, 0, 0) = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2 \mid x_i \in \mathbb{R}, e_1^2 = e_2^2 = 1\}.$$

b) Agora, definimos $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(x_1e_1 + x_2e_2) = -x_1^2 - x_2^2$. Temos, então, $e_1^2 = e_2^2 = -1$. Temos, então, a álgebra $\text{Cl}_2(0, 2, 0)$, definida da seguinte maneira:

$$\text{Cl}_2(0, 2, 0) = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2 \mid x_i \in \mathbb{R}, e_1^2 = e_2^2 = -1\}. \quad (4.5)$$

O produto entre os geradores de $\text{Cl}_2(0, 2, 0)$ será dado pela tabela abaixo:

\cdot	1	e_1	e_2	e_1e_2
1	1	e_1	e_2	e_1e_2
e_1	e_1	-1	e_1e_2	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_1e_2$	-1	e_1
e_1e_2	e_1e_2	e_2	$-e_1$	-1

Tabela 2: Tábua de multiplicações entre os geradores de $\text{Cl}_2(0, 2, 0)$

É fácil ver que há um isomorfismo entre $\text{Cl}_2(0, 2, 0)$ e a álgebra dos quatérnios \mathbb{H} .

De fato, o isomorfismo é induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ e_1 &\longmapsto i \\ e_2 &\longmapsto j \\ e_1e_2 &\longmapsto k. \end{aligned}$$

Podemos, então, reescrever (4.5) como

$$\text{Cl}_2(0, 2, 0) = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Sendo $q, x \in \text{Cl}_2(0, 2, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} q \cdot x &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \cdot (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) \\ &= (q_0x_0 - q_1x_1 - q_2x_2 - q_3x_3) + (q_0x_1 + q_1x_0 + q_2x_3 - q_3x_2)i + \\ &\quad + (q_0x_2 - q_1x_3 + q_2x_0 + q_3x_1)j + (q_0x_3 + q_1x_2 - q_2x_1 + q_3x_0)k \\ &= (q_0x_0 - q_1x_1 - q_2x_2 - q_3x_3)1 + (q_0x_1 + q_1x_0 + q_2x_3 - q_3x_2)e_1 + \\ &\quad + (q_0x_2 - q_1x_3 + q_2x_0 + q_3x_1)e_2 + (q_0x_3 + q_1x_2 - q_2x_1 + q_3x_0)e_1e_2 \\ &= \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Agora, defina $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(x_1e_1 + x_2e_2) = 0$. Então $e_1^2 = e_2^2 = 0$. Temos,

então, a álgebra de Clifford $\text{Cl}_2(0, 0, 2)$, definida da seguinte maneira:

$$\text{Cl}_2(0, 0, 2) = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_i \in \mathbb{R}, e_1^2 = e_2^2 = 0\}.$$

d) Como último exemplo de álgebra de Clifford associada a \mathbb{R}^2 , defina $\mathfrak{q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathfrak{q}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 - x_2^2$. Então $e_1^2 = 1$ e $e_2^2 = -1$. Podemos, então, definir a álgebra $\text{Cl}_2(1, 1, 0)$ da seguinte maneira:

$$\text{Cl}_2(1, 1, 0) = \{x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_i \in \mathbb{R}, e_1^2 = 1, e_2^2 = -1\}.$$

Exemplo 4.2.3. Vamos conhecer algumas álgebras de Clifford associadas a \mathbb{R}^3 . Para isso, seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base para \mathbb{R}^3 .

a) A álgebra de Clifford $\text{Cl}_3(0, 2, 1)$ é gerada pelos monômios $1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3$ e $e_1e_2e_3$, que satisfazem $e_1^2 = e_2^2 = -1$ e $e_3^2 = 0$. Com isso, todo elemento de $\text{Cl}_3(0, 2, 1)$ é escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_1e_2 + x_5e_2e_3 + x_6e_1e_3 + x_7e_1e_2e_3 \\ &= x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_4e_1e_2 + (x_3 + x_6e_1 + x_5e_2 + x_7e_1e_2)e_3, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $x_i \in \mathbb{R}$. Além disso, note que

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -(-1)(-1) = -1. \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7), é fácil ver que haverá um isomorfismo entre $\text{Cl}_3(0, 2, 1)$ e a álgebra dos quatérnios duais $\tilde{\mathbb{H}}$. De fato, o isomorfismo será induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ e_1 &\mapsto i \\ e_2 &\mapsto j \\ e_1e_2 &\mapsto k \\ e_3 &\mapsto \epsilon. \end{aligned}$$

b) A álgebra de Clifford $\text{Cl}_3(0, 3, 0)$ é gerada pelos monômios $1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3$ e $e_1e_2e_3$, que satisfazem $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$. Com isso, todo elemento de $\text{Cl}_3(0, 3, 0)$ é escrito como

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_1e_2 + x_5e_2e_3 + x_6e_1e_3 + x_7e_1e_2e_3,$$

em que $x_i \in \mathbb{R}$. Note que

$$(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -(-1)(-1) = -1.$$

$$(e_1e_3)^2 = e_1e_3e_1e_3 = -e_1e_1e_3e_3 = -(-1)(-1) = -1.$$

$$(e_2e_3)^2 = e_2e_3e_2e_3 = -e_2e_2e_3e_3 = -(-1)(-1) = -1.$$

$$(e_1e_2e_3)^2 = e_1e_2e_3e_1e_2e_3 = -e_1e_2e_1e_3e_2e_3 = -e_1e_1e_2e_2e_3e_3 = -(-1)(-1)(-1) = 1.$$

Com isso, é fácil ver que há um isomorfismo entre $\text{Cl}_3(0, 3, 0)$ e $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Além disso, há a subálgebra $\text{Cl}_3^0(0, 3, 0)$, cujos elementos são escritos como

$$x = x_0 + x_1e_1e_2 + x_2e_2e_3 + x_3e_1e_3,$$

em que $x_i \in \mathbb{R}$, donde fica claro o isomorfismo com \mathbb{H} .

Para finalizar esta seção, vamos ver um exemplo de uma subálgebra de uma álgebra de Clifford que também é isomorfa ao conjunto dos quatérnios duais.

Seja $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base para \mathbb{R}^4 . Vamos voltar à álgebra de Clifford $\text{Cl}_4(0, 3, 1)$ vista no exemplo 4.1.2. Sabemos que $\text{Cl}_4(0, 3, 1)$ possui uma subálgebra $\text{Cl}_4^0(0, 3, 1)$ que, como espaço vetorial, possui base $\{1, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2, e_1e_4, e_2e_4, e_3e_4, e_1e_2e_3e_4\}$. Com isso, todo elemento de $\text{Cl}_4^0(0, 3, 1)$ é escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + x_1e_2e_3 + x_2e_3e_1 + x_3e_1e_2 + x_4e_1e_4 + x_5e_2e_4 + x_6e_3e_4 + x_7e_1e_2e_3e_4 \\ &= x_0 + x_1e_2e_3 + x_2e_3e_1 + x_3e_1e_2 + (x_4e_1 + x_5e_2 + x_6e_3 + x_7e_1e_2e_3)e_4 \\ &= x_0 + x_1e_2e_3 + x_2e_3e_1 + x_3e_1e_2 + (x_4e_3e_1 - x_5e_2e_3 + x_6 + x_7e_1e_2)e_3e_4, \end{aligned}$$

em que $x_i \in \mathbb{R}$. Usando o isomorfismo induzido por

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ e_2e_3 &\longmapsto i \\ e_3e_1 &\longmapsto j \\ e_1e_2 &\longmapsto k \\ e_3e_4 &\longmapsto \epsilon, \end{aligned}$$

fica claro que todo elemento de $\text{Cl}_4^0(0, 3, 1)$ é escrito na forma $x' + x''\epsilon$, com $x', x'' \in \mathbb{H}$. Portanto, temos um isomorfismo entre $\text{Cl}_4^0(0, 3, 1)$ e $\tilde{\mathbb{H}}$.

4.3 GRUPO SPIN E MOVIMENTOS RÍGIDOS

Para finalizar este capítulo, apresentaremos uma importante classe de grupos contidos numa álgebra de Clifford que nos proporcionarão uma conexão das mesmas com a codificação dos movimentos rígidos no espaço.

Considere a álgebra de Clifford $\text{Cl}(V, \mathfrak{q})$. Se \mathfrak{q} não for a forma quadrática identicamente nula, $\text{Cl}(V, \mathfrak{q})$ possui vários elementos inversíveis. De fato, seja $v \in V$ tal que $\mathfrak{q}(v) \neq 0$. Então

$$v^2 = \mathfrak{q}(v) \implies v \cdot \frac{v}{\mathfrak{q}(v)} = 1. \quad (4.8)$$

Definição 4.3.1. *Definimos como $\text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q})$ o subconjunto da álgebra de Clifford formada pelos elementos inversíveis.*

$$\text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q}) = \{v \in V \mid \mathfrak{q}(v) \neq 0\}.$$

Sendo $v \in \text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q})$, podemos definir a conjugação

$$\begin{aligned} \text{Ad}_v : \text{Cl}(V, \mathfrak{q}) &\longrightarrow \text{Cl}(V, \mathfrak{q}) \\ w &\longmapsto v w v^{-1} \end{aligned}$$

da mesma forma que definimos para os quatérnios e os quatérnios duais. Da mesma maneira feita no final da seção 3.1, podemos mostrar que Ad_x é um automorfismo em $\text{Cl}(V, \mathfrak{q})$ e, sendo assim, podemos definir a ação adjunta

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q}) &\longrightarrow \text{Aut}(\text{Cl}(V, \mathfrak{q})) \\ v &\longmapsto \text{Ad}_v. \end{aligned}$$

Proposição 4.3.2. *Seja $v \in V \subset \text{Cl}(V, \mathfrak{q})$ tal que $\mathfrak{q}(v) \neq 0$. Então $\text{Ad}_v(V) \subseteq V$. De fato,*

$$-\text{Ad}_v(w) = w - 2 \frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)} v \quad (4.9)$$

para todo $w \in V$.

Demonstração. Temos que

$$\text{Ad}_v(w) = v w v^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{q}(v)} v w v. \quad (4.10)$$

Da definição de álgebra de Clifford, temos que

$$v w + w v = 2\mathfrak{b}(v, w) \iff w v = 2\mathfrak{b}(v, w) - v w. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10), segue que

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}_v(w) &= \frac{1}{\mathfrak{q}(v)}v(2\mathfrak{b}(v, w) - vw) \\
 &= \frac{1}{\mathfrak{q}(v)}(2\mathfrak{b}(v, w)v - v^2w) \\
 &= \frac{1}{\mathfrak{q}(v)}(2\mathfrak{b}(v, w)v - \mathfrak{q}(v)w) \\
 &= 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v - w,
 \end{aligned}$$

de onde concluímos que $-\text{Ad}_v(w) = w - 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v$. \square

Definição 4.3.3. Definimos como $P(V, \mathfrak{q}) \subseteq \text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q})$ o subgrupo multiplicativo gerado pelos vetores $v \in V$ tais que $\mathfrak{q}(v) \neq 0$.

Podemos observar que, se $v \in V$ é tal que $\mathfrak{q}(v) \neq 0$, temos que, para todo $w \in V$,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{q}(\text{Ad}_v(w)) &= \mathfrak{b}\left(2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v - w, 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v - w\right) \\
 &= 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\mathfrak{b}\left(v, 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v - w\right) - \mathfrak{b}\left(w, 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v - w\right) \\
 &= 4\left(\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\right)^2\mathfrak{b}(v, v) - 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\mathfrak{b}(v, w) - 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\mathfrak{b}(w, v) + \mathfrak{b}(w, w) \\
 &= 4\left(\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\right)^2\mathfrak{q}(v) - 4\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}\mathfrak{b}(v, w) + \mathfrak{q}(w) \\
 &= 4\frac{(\mathfrak{b}(v, w))^2}{\mathfrak{q}(v)} - 4\frac{(\mathfrak{b}(v, w))^2}{\mathfrak{q}(v)} + \mathfrak{q}(w) \\
 &= \mathfrak{q}(w),
 \end{aligned}$$

ou seja, Ad_v é ortogonal. Sendo assim, podemos definir a seguinte restrição para Ad :

$$\begin{aligned}
 \text{Ad} : P(V, \mathfrak{q}) &\longrightarrow O(V, \mathfrak{q}) \\
 x &\longmapsto \text{Ad}_x.
 \end{aligned}$$

Entende-se como $O(V, \mathfrak{q})$ o grupo das transformações ortogonais em V relativas à forma quadrática \mathfrak{q} .

Diante dos resultados obtidos acima, podemos observar a semelhança com o que fizemos no capítulo 3 quando codificamos as rotações no espaço. De fato, se considerarmos a álgebra de Clifford $\text{Cl}_2(0, 2, 0)$, obteremos a mesma função.

Para dar continuidade a este raciocínio, podemos definir um subgrupo de $P(V, \mathfrak{q})$ que equivale à esfera unitária na álgebra de Clifford.

Definição 4.3.4. Definimos como $\text{Pin}(V, \mathfrak{q})$ o subgrupo de $\text{P}(V, \mathfrak{q})$ gerado pelos vetores $v \in V$ tais que $\mathfrak{q}(v) = \pm 1$.

Definição 4.3.5. Definimos o subgrupo $\text{Spin}(V, \mathfrak{q})$ como

$$\text{Spin}(V, \mathfrak{q}) = \text{Pin}(V, \mathfrak{q}) \cap \text{Cl}^0(V, \mathfrak{q}).$$

Podemos observar que o membro direito da expressão (4.9) representa uma reflexão com relação ao hiperplano $v^\perp = \{w \in V \mid \mathfrak{b}(v, w) = 0\}$. Ou seja, uma transformação que fixa um hiperplano e leva v em $-v$. O problema é que existe um sinal negativo no membro esquerdo da expressão (4.9). Isto quer dizer que, se a dimensão de V for ímpar, Ad_v preservará a orientação. Para corrigir isto, podemos definir a representação “adjunta torcida” como

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} : \text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q}) &\longrightarrow \text{GL}(\text{Cl}(V, \mathfrak{q})) \\ v &\longmapsto \widetilde{\text{Ad}}_v \end{aligned}$$

em que, para todo $w \in V$,

$$\widetilde{\text{Ad}}_v(w) = \alpha(v)wv^{-1}.$$

Na expressão acima, temos o isomorfismo $\alpha : \text{Cl}(V, \mathfrak{q}) \longrightarrow \text{Cl}(V, \mathfrak{q})$ induzido por $\alpha(v) = -v$, para todo $v \in V$.

Proposição 4.3.6. Sejam $v_1, v_2 \in \text{Cl}^0(V, \mathfrak{q})$. Então

$$\widetilde{\text{Ad}}_{v_1} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_2} = \widetilde{\text{Ad}}_{v_1 v_2}.$$

Demonstração. Análogo ao item (c) da proposição 3.1.10. □

Além disso, de (4.9), temos que

$$\widetilde{\text{Ad}}_v(w) = w - 2\frac{\mathfrak{b}(v, w)}{\mathfrak{q}(v)}v.$$

Desta forma, podemos definir o subgrupo

$$\widetilde{\text{P}}(V, \mathfrak{q}) = \{v \in \text{Cl}^\times(V, \mathfrak{q}) \mid \widetilde{\text{Ad}}_v(u) = u, \forall u \in V\}.$$

É fácil ver que $\widetilde{\text{P}}(V, \mathfrak{q}) \subseteq \text{P}(V, \mathfrak{q})$. Um importante teorema que envolve os grupos Pin e Spin , cuja demonstração pode ser encontrada no livro *Spin Geometry* (JR.; MICHELSON, 1989), é o seguinte:

Teorema 4.3.7. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $\text{Cl}(V, \mathfrak{q})$ a álgebra de Clifford associada a V . Então existe um homomorfismo sobrejetor de grupos entre $\text{Spin}(V, \mathfrak{q})$ e $\text{SO}(V, \mathfrak{q})$ em que o núcleo é igual a \mathbb{Z}_2 .

No teorema acima, entende-se $O(V, \mathfrak{q})$ como o grupo das transformações ortogonais em V relativas à forma quadrática \mathfrak{q} e cuja matriz de transformação possui determinante igual a 1. O homomorfismo injetor citado no teorema acabará sendo o $\widetilde{\text{Ad}}$.

A relação destes grupos estudados acima com os movimentos rígidos no espaço ocorre quando consideramos $V = \mathbb{R}^3$, a álgebra de Clifford $\text{Cl}_3(0, 3, 0)$ e a forma quadrática \mathfrak{q} tal que $-\mathfrak{q}(v) = v^2$. Desta forma, temos, para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$uv + vu = -2 \langle u, v \rangle .$$

Para $\phi \in \text{Cl}_3^\times(0, 3, 0)$, temos a “adjunta torcida”

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}} : \text{Cl}_3^\times(0, 3, 0) &\longrightarrow \text{GL}(\text{Cl}_3(0, 3, 0)) \\ \phi &\longmapsto \text{Ad}_\phi . \end{aligned}$$

Se $\phi = v \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\widetilde{\text{Ad}}_v(u) = (-v)uv^{-1} = -\frac{1}{|v|^2}(-v)uv = u - 2\frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2}v. \quad (4.12)$$

Note que, de (4.12), $\widetilde{\text{Ad}}_v(v) = -v$ e que, quando $u \perp v$, $\widetilde{\text{Ad}}_v(u) = u$. Desta forma, $\widetilde{\text{Ad}}_v$ será uma reflexão. Portanto, se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, então $\widetilde{\text{Ad}}_{v_1 v_2}$ será uma rotação no espaço gerado por $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Os grupos $\widetilde{\text{P}}$, Pin e Spin para $V = \mathbb{R}^3$ são:

$$\widetilde{\text{P}}(3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \text{Ad}_v(u) = u, \forall u \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{Pin}(3) = \{v = v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in \widetilde{\text{P}}(3); v_i \in \mathbb{R}^3, |v_i| = 1\}$$

$$\text{Spin}(3) = \text{Pin}(3) \cap \text{Cl}_3^0(0, 3, 0).$$

Pelo teorema 4.3.7, $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(3) \longrightarrow \text{SO}(3)$ será um homomorfismo injetor de grupos cujo núcleo é igual a \mathbb{Z}_2 . Então

$$\text{SO}(3) \simeq \text{Spin}(3)/\mathbb{Z}_2.$$

De (3.31), segue que

$$\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2).$$

Com relação aos movimentos rígidos no espaço, podemos definir o conjunto

$$G = \left\{ \tilde{g} = g + \frac{1}{2}tg \in \mid g \in \text{Spin}(3), t \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Desta forma, para $g \in \text{Spin}(3)$ e $t \in \mathbb{R}^3$, temos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{SE}(3) \\ \tilde{g} &\longmapsto \text{Ad}_{\tilde{g}}, \end{aligned}$$

Em que

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{\tilde{g}}(1 + x\epsilon) &= \left(g + \frac{1}{2}tg\epsilon\right) (1 + x\epsilon) \left(g^{-1} + \frac{1}{2}tg^{-1}\epsilon\right) \\ &= 1 + (g x g^* + t)\epsilon \end{aligned}$$

da mesma forma que fizemos na seção 3.7 quando codificamos um movimento rígido no espaço por meio de quatérnios duais.

5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Curso: Ensino Médio

Disciplina: Matemática

Tema: Uso de números complexos para descrever rotações no plano

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos uma pequena aplicação em sala de aula de um conteúdo abordado nesta dissertação. O assunto escolhido se baseia na maneira de como um produto entre dois números complexos pode ser visto como uma rotação no plano, assunto abordado no capítulo 2.

O presente plano de aula foi feito para ser aplicado no terceiro ano do Ensino Médio, uma vez que o conjunto dos números complexos figura entre os conteúdos trabalhados neste ano. Como os alunos já terão um primeiro contato com os números complexos e suas principais propriedades, bem como conceitos básicos que permeiam a geometria analítica, fica fácil de introduzir a ideia de um número complexo visto como um vetor no plano e estabelecer conexões com outros tópicos sobre números complexos pertinentes ao conteúdo do terceiro ano, tais como módulo, argumento e forma trigonométrica.

5.2 OBJETIVOS

5.2.1 Gerais

Conhecer uma aplicação dos números complexos numa área fora da Álgebra e estabelecer um primeiro contato com o plano de Argand-Gauss.

5.2.2 Específicos

- Entender como um número complexo pode ser visto como um vetor no plano;
- Visualizar o resultado de uma multiplicação de dois número complexos no plano;
- Analisar a relação entre o vetor original e o vetor resultante;
- Conhecer a definição de módulo de um número complexo;
- Entender que só é possível preservar a norma do vetor quando o número complexo

envolvido na rotação possui módulo unitário;

- Descobrir de que maneira o ângulo de rotação pode ser deduzido a partir das componentes reais do complexo unitário;
- Conhecer a forma trigonométrica de um número complexo.

5.3 LINHAS DE AÇÃO

5.3.1 Metodologia

Esta aula é para ser ministrada num momento em que os alunos já estudaram o conjunto dos números complexos, já sabem fazer operações com os mesmos e tiveram um primeiro contato com o plano de Argand-Gauss, mas ainda não viram conteúdos como módulo, argumento e forma trigonométrica de um número complexo. Usaremos o plano cartesiano em vez do plano de Argand-Gauss, uma vez que o primeiro é o utilizado na geometria analítica.

Começaremos introduzindo a ideia de um número complexo visto como um vetor no plano, fazendo uso de um exemplo em vez de começar com a parte teórica, a fim de facilitar o entendimento por parte dos alunos. Em seguida, faremos um exemplo de multiplicação de dois números complexos (sendo um deles, propositalmente, de módulo unitário), representaremos o resultado como um vetor no plano. Espera-se que os alunos percebam que o vetor resultante corresponde ao vetor original após sofrer uma rotação.

Em seguida, apresentaremos o conceito de módulo de um número complexo e de que maneira ele se relaciona com a norma do vetor correspondente. Explicaremos o motivo de ter que ser de módulo unitário o número complexo a ser usado na multiplicação que vai gerar a rotação sem alterar a norma do vetor.

Para finalizar, apresentaremos de que maneira o ângulo de rotação pode ser obtido, introduzindo o conceito de argumento de um número complexo. Faremos um último exemplo e o representaremos no plano cartesiano. Para aproveitar o raciocínio, apresentaremos também a forma trigonométrica de um número complexo.

5.3.2 Conteúdo

Vamos ver como um número complexo pode ser visto como um vetor no plano. Em vez de utilizar o plano de Argand-Gauss, utilizaremos o plano cartesiano usual. Usaremos o eixo Ox para o eixo real e o Oy para o imaginário. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, podemos

considerar o vetor $\vec{z} = (a, b)$, como mostra a figura 12.

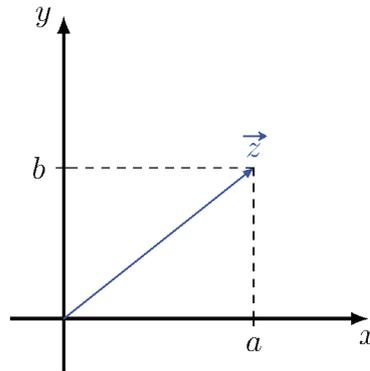


Figura 12: Vetor \vec{z} referente ao complexo z

Por exemplo, considere o número complexo $2 + i$. Temos, então, o vetor $\vec{z} = (2, 1)$, como mostra a figura 13.

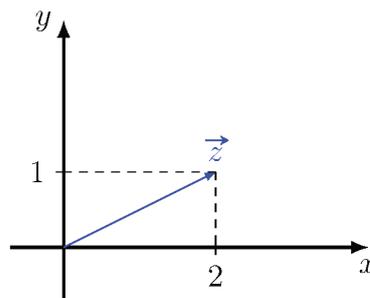


Figura 13

Agora, considere o número complexo $w = i$. Temos que

$$z \cdot w = (2 + i)i = -1 + 2i. \quad (5.1)$$

De (5.1), podemos considerar o vetor $\vec{v} = (-1, 2)$, resultante do produto entre z e w . Vamos representar este vetor no plano, juntamente com o vetor \vec{z} :

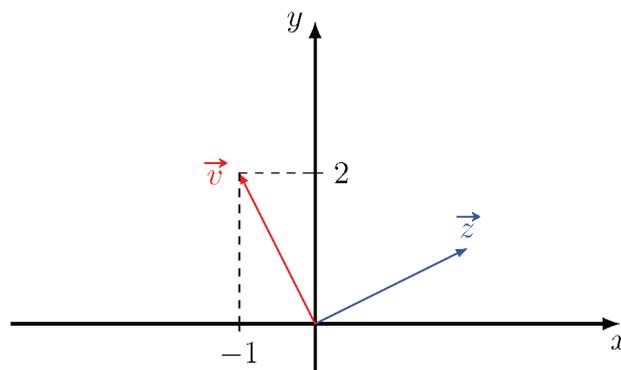


Figura 14

Observando a figura 14, podemos notar que, aparentemente, o vetor \vec{v} corresponde ao vetor \vec{z} após sofrer uma rotação de 90° no sentido anti-horário. De fato, é exatamente isto que acontece, e vamos entender o porquê a seguir.

Em primeiro lugar, precisamos falar sobre o **módulo** de um número complexo. Sendo $z = a + bi$, o módulo de z será dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5.2)$$

Por exemplo, para o número complexo $z = 2 + i$, temos que

$$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

O módulo de um número complexo z corresponderá à norma (comprimento) do vetor \vec{z} . De fato, é fácil ver que a expressão (5.2) corresponderá à distância do ponto $P = (a, b)$ até a origem.

Uma importante propriedade envolvendo módulo é a de que o módulo do produto de dois complexos corresponde ao produto dos módulos de cada um, ou seja, dados z e w dois números complexos, temos que

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|. \quad (5.3)$$

A rotação de um vetor no plano não altera o seu comprimento, apenas a sua posição. Caso contrário, não teríamos apenas uma rotação atuando naquele vetor, e sim uma outra transformação composta com a rotação. Então, para conservar o comprimento do vetor \vec{z} após uma rotação, deveremos ter, na expressão (5.3),

$$|z \cdot w| = |z|. \quad (5.4)$$

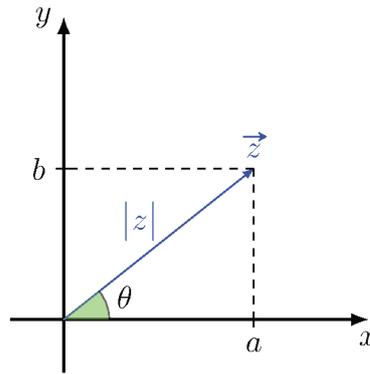
Comparando as expressões (5.3) e (5.4), chegamos a conclusão de que deveremos ter $|w| = 1$, ou seja, o vetor \vec{w} deverá ser unitário (ter comprimento igual a 1).

Voltando à situação da figura 14, podemos ver que, de fato, o número complexo $w = i$ é unitário:

$$|w| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Desta forma, ao multiplicar qualquer número complexo z por i , o vetor \vec{z} sofrerá uma rotação sem alterar a sua norma, ou seja, o seu comprimento.

Agora, vamos entender como é determinado o ângulo de rotação. Olhando o número complexo $z = a + bi$ como um vetor no plano, consideraremos o ângulo θ entre o eixo Ox e o vetor \vec{z} , como mostra a figura 15. O ângulo θ é chamado de **argumento** de z .

Figura 15: Argumento de z

No caso do número complexo $w = i$, temos o vetor $\vec{w} = (0, 1)$, que se sobrepõe ao eixo Oy , formando um ângulo de 90° com o eixo Ox . Isto quer dizer que, multiplicar qualquer número complexo z por i significa rotacionar o vetor \vec{z} no plano por um ângulo de 90° , como já havíamos suspeitado anteriormente.

Mas como é possível determinar a medida exata do argumento de um número complexo qualquer? Observando a figura 15, podemos tirar as seguintes relações trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad (5.5)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|} \quad (5.6)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{a}.$$

É fácil obter a medida do ângulo θ a partir de qualquer uma das três relações acima. No caso em que z é um complexo unitário, temos $\cos \theta = a$ e $\text{sen } \theta = b$.

Em mais um exemplo, vamos considerar os números complexos $z = 2 + 4i$ e $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Temos que

$$z \cdot w = (2 + 4i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (1 - 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i.$$

É fácil ver que $|w| = 1$. Desta forma, temos $\cos \theta = \frac{1}{2}$ e $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o que nos dá $\theta = 60^\circ$. Então, ao multiplicar z por w , estaremos efetuando uma rotação de 60° no vetor \vec{z} no sentido anti-horário. A figura 16 ilustra esta situação.

Para finalizar, apresentaremos uma outra forma de se representar um número complexo. De (5.5) e (5.6), podemos tirar as seguintes relações:

$$a = |z| \cos \theta \quad (5.7)$$

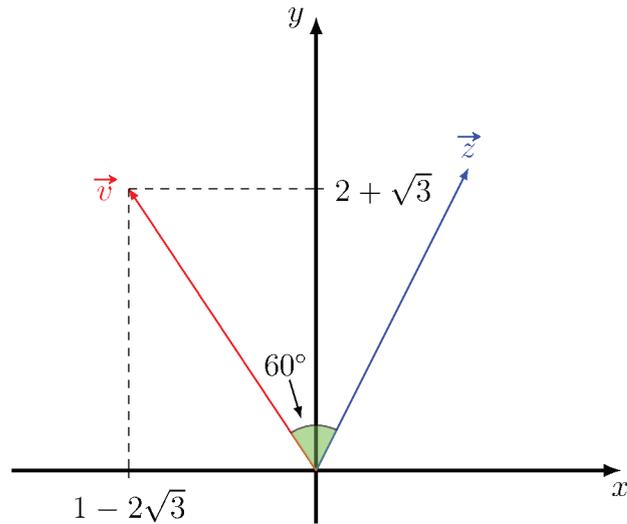


Figura 16

$$b = |z| \operatorname{sen} \theta. \quad (5.8)$$

Desta forma, dado $z = a + bi$ um número complexo, substituindo (5.7) e (5.8), obtemos

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (5.9)$$

A expressão (5.9) apresenta a **forma trigonométrica** de um número complexo.

5.4 RECURSOS

Esta aula pode ser dada, tranquilamente, em um quadro (com giz ou caneta). No entanto, o uso de um computador ou lousa digital equipado com um software de desenho como o GeoGebra^{®1} é bem-vindo para o esboço dos vetores no plano cartesiano. O uso de um livro didático também é importante, para dar ao aluno uma complementação dos conteúdos trabalhados, além de exercícios propostos.

¹Disponível em <http://www.geogebra.org/>.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho pudemos constatar as relações que existem entre os movimentos rígidos no espaço, os quatérnios de Hamilton e as álgebras geométricas de Clifford. Estas relações trouxeram grandes avanços em diversas áreas.

Hamilton fez diversas tentativas de formular as leis da Mecânica Clássica e do Eletromagnetismo usando quatérnios. Estas tentativas acabaram sendo ofuscadas pelo advento da Análise Vetorial. No entanto, nos dias de hoje, o uso de quatérnios para descrever as rotações no espaço possuem várias aplicações na Computação Gráfica e também na Robótica.

Os quatérnios duais são bastante utilizados na Teoria Cinemática (OLIVEIRA, 2011) e na Robótica, uma vez que a descrição do movimento de um robô não envolve somente rotações, mas também translações. Ou seja, envolve movimentos rígidos.

Na Matemática, as álgebras de Clifford são utilizadas em teorias de representações de grupos e análise harmônica, bem como na geometria diferencial. Na Física, as álgebras de Clifford são indispensáveis no estudo de qualquer fenômeno quântico. E, é claro, também são frequentemente usadas na Robótica por descreverem, com mais facilidade, os movimentos rígidos.

Para finalizar, um pequeno comentário sobre a aplicação em sala de aula: dependendo do tempo disponível e do nível de interesse por parte dos alunos, pode-se “pegar o gancho” e abordar outros assuntos pertinentes, tais como a matriz de rotação no plano e um breve relato histórico sobre a tentativa de Hamilton de descrever algebricamente as rotações no espaço, dando uma ideia do conceito de quatérnio.

REFERÊNCIAS

- ALTMANN, S. L. *Rotations, Quaternions and Double Groups*. [S.l.]: Dover Publications, 2005.
- BATISTA, E.; SANTOS, M. V. D. Rotações, quatérnions e álgebras de clifford. *VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2012.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra linear*. [S.l.]: Harper & Row do Brasil, 1980.
- CLIFFORD, W. K. Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 4, v. 64, 65, p. 381–395, 1873.
- DORIA, C. M. Pontos, linhas, planos e espaço no \mathbb{R}^3 . Colóquio do PET/Matemática - UFSC. 2014.
- DORIA, C. M. Álgebras de clifford. Departamento de Matemática - UFSC. 2016.
- DORIA, C. M. *Geometrias: Euclidiana, Esférica e Hiperbólica*. [S.l.]: SBM, 2019.
- GARLING, D. *Clifford Algebras: An Introduction*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- HAMILTON, W. R. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, v. 2, p. 424–434, 1844.
- HAMILTON, W. R. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine*, v. 25, p. 10–13, 241–246, 489–495, 1844.
- HAMILTON, W. R. On a theory of quaternions. *British Association Report 1844*, v. 2, p. 2, 1845.
- JR., H. B. L.; MICHELSON, M.-L. *Spin Geometry*. [S.l.]: Princeton University Press, 1989.
- OLIVEIRA, A. S. d. *Análise Cinemática via Quatérnions Duais Aplicada a um Sistema Veículo-manipulador Subaquático*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- ROONEY, J. On the three types of complex number and planar transformations. *Environment and Planning B*, v. 5, p. 89–99, 1978.
- SELIG, J. M. *Geometrical Methods in Robotics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1996.

ÍNDICE REMISSIVO

- Ação adjunta, 44
- Adjunta torcida, 73
- Conjugação, 42
- Forma Bilinear, 16
- Grupos
 - $GL(V)$, 11
 - $GL_n(\mathbb{R})$, 11
 - $O(n)$, 12
 - $SE(3)$, 35
 - $SO(n)$, 13
 - $SU(n)$, 13
 - $U(n)$, 13
- Isometria, 14
- Matrizes
 - Ortogonais, 11
 - Unitárias, 13
- Movimentos Rígidos, 34, 59
- Números
 - Complexos, 3, 7
 - Duais, 3, 9
- Quatérnios, 37
 - Duais, 57
 - Puros, 49
 - Unitários, 42
- Símbolos
 - $Sp(1)$, 42
 - $U(1)$, 8, 13
 - \mathbb{D} , 9
 - \mathbb{H} , 37
 - \mathbb{H}^* , 42
 - \mathbb{H}^\times , 42
 - $\widehat{\mathbb{H}}$, 49
 - $\widetilde{\mathbb{H}}$, 58