UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS JOÃO DAVID FERREIRA LIMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Djerly Simonetti

Processos Algébricos no Esboço de Curvas: o caso da parábola à luz dos Registros de Representação Semiótica

Florianópolis
2020

Djerly Simonetti

Processos Algébricos no Esboço de curvas: o caso da parábola à luz dos Registros de Representação Semiótica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Méricles Thadeu Moretti, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Simonetti, Djerly
Processos Algébricos no Esboço de Curvas : o caso da parábola à luz dos Registros de Representação Semiótica / Djerly Simonetti ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2020.
106 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Registros de Representação Semiótica. 3. Aprendizagem de álgebra. 4. Interpretação Global de Propriedades Figurais. 5. Esboço de Parábolas. I. Moretti, Méricles Thadeu. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Djerly Simonetti

Processos Algébricos no Esboço de Curvas: o caso da parábola à luz dos Registros de Representação Semiótica

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profa. Celia Finck Brandt, Dra.
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof. Afrânio Austregésilo Thiel, Dr.
Instituto Federal Catarinense

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Documento assinado digitalmente
Juliano Camillo
Data: 27/04/2020 14:20:20-0300
CPF: 225.964.728-64

Prof. Juliano Camillo, Dr.
Coordenador do Programa

Documento assinado digitalmente
Mericles Thadeu Moretti
Data: 24/04/2020 15:57:33-0300
CPF: 169.097.639-04

Prof. Méricles Thadeu Moretti, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

Dedico este trabalho a todos os educadores matemáticos que buscam melhorar a aprendizagem, apesar dos inúmeros obstáculos pelo caminho; e aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me concedido paciência e discernimento em todos os momentos conflituosos durante o processo de construção desta pesquisa.

Ao meu orientador Professor Dr. Méricles Thadeu Moretti agradeço imensamente. Sua calma, confiança e exemplo de profissional me fez ir mais longe ao longo dessa difícil caminhada.

Aos professores Dr. Afrânio Austregésilo Thiel, Dra. Célia Finck Brandt e Dr. David Antonio Costa que analisaram o projeto de pesquisa com apontamentos e correções imprescindíveis. Muito obrigada por me acompanhar na defesa.

A todos os membros do Programa que auxiliaram nas dúvidas e nos procedimentos burocráticos. Em especial, aos professores que em cada disciplina realizada contribuíram para minha formação.

Aos estudantes da escola pública de Santa Catarina que participaram da pesquisa, permitindo a análise dos registros escritos das atividades. Agradeço, imensamente, cada momento de aprendizado com vocês – "môs quiridos".

Ao Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM) que a cada encontro trazia calorosas discussões sobre a teoria de Raymond Duval. Toda quinta-feira era dia de repor as energias com esse Grupo!

Aos amigos e amigas que sempre dedicavam um tempo para me apoiar neste processo e fortalecer os vínculos afetivos: agradeço a todos vocês de coração.

Aos meus pais que mesmo distantes sempre se fizeram presentes com todos os telefonemas recebidos!

Ao meu companheiro que compreendeu amorosamente todas as minhas presenças ausentes.

Aos financiamentos recebidos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) e do Programa de Bolsas Universitárias do Estado de Santa Catarina (UNIEDU) para a execução e a finalização da presente dissertação.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre a utilização de dois registros de representação semiótica envolvidos no esboço da parábola, com o olhar voltado para os processos algébricos presentes nesse esboço. Buscamos discorrer sobre: de que maneira os processos algébricos se fazem presentes no esboço da parábola a partir de uma interpretação global de curvas? O estudo está fundamentado na teoria Registros de Representação Semiótica, na Interpretação Global de Propriedades Figurais, nas Funções Discursivas de uma língua, nos apontamentos sobre a aprendizagem de álgebra apresentados por Raymond Duval e no esboço por meio de translações proposto por Moretti (2008). A investigação tem por objetivo compreender os processos algébricos necessários para o esboço de curvas para uma interpretação global da parábola. Neste sentido, a pesquisa consiste na análise qualitativa dos registros produzidos pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio. Para tanto, organizamos uma sequência de atividades que aborda o objeto matemático "parábola", fazendo uso de alguns aspectos da Engenharia Didática para sistematizar a experiência. A partir da análise dos registros dos alunos, infere-se que o processo de esboço por meio de translações contribui para a coordenação entre o registro gráfico e o registro algébrico. A análise revela como os processos algébricos ocorrem de fato, especificamente, o significado de equivalência presente em $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$; nessa ordem nem sempre ocorre de modo direto. Diante das equações o trabalho de transformação não pauta-se nas letras, mas sim nas circunstâncias em que as letras aparecem. Por fim, há uma predominância das operações discursivas de substituição e designação nos processos algébricos.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica. Aprendizagem de álgebra. Interpretação Global de Propriedades Figurais. Esboço de Parábolas.

ABSTRACT

This work presents an investigation on the use of two register of semiotic representation involved in the parabola sketching, with a focus on the algebraic processes present in that sketch. We seek to discuss: how are algebraic processes present in the outline of the parabola from a global interpretation of curves? The study is based on the theory of Registers of Semiotic Representation, the Global Interpretation of Figurative Properties, the Discursive Functions of a language, the notes on learning algebra presented by Raymond Duval and the sketch through translations proposed by Moretti (2008). The research aims to understand the algebraic processes necessary for sketching curves for a global interpretation of the parable. In this sense, the research consists of a qualitative analysis of the registers produced by the students at High School 1st year. For that, we organized a sequence of activities that addresses the mathematical object "parabola", making use of some aspects of Didactic Engineering to systematize the experience. From the analysis of the students' registers, it appears that the process of sketching through translations contributes to the matchup between the graphic and the algebraic registers. The analysis reveals how algebraic processes actually occur, specifically, the meaning of equivalence present in $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$; in that order does not always occur directly. In view of the equations, the transformation work is not based on letters, but on the circumstances in which the letters appear. Finally, there is a predominance of discursive operations of substitution and designation in algebraic processes.

Keywords: Register of Semiotic Representation. Algebra learning. Global Interpretation of Figural Properties. Parabola Sketching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática vem sendo culturalmente atrelada ao termo difícil, seja pelo seu rigor ou até mesmo pelo tipo específico de raciocínio exigido, o qual não se aproxima muito das outras áreas de conhecimento. Tudo isso reflete diretamente no modo de ensinar e aprender matemática. E ainda, o campo da Educação Matemática têm nos mostrado essenciais discussões em torno do ensino e aprendizagem desse conhecimento. Somente o fato de a matemática ser estruturada por elementos que não são observáveis pelo ser humano e pelo fato de todos os elementos serem abstratos, já nos aponta que os gestos intelectuais envolvidos na aprendizagem são fatores fundamentais para se chegar à compreensão. A abstração permeia o processo de aprender.

Atualmente, há muitas práticas de sala de aula que não levam em consideração o cognitivo do estudante, no seguinte sentido, ensina-se do modo que se ensina pautado puramente no aspecto matemático do conceito abordado. Se analisarmos rapidamente, há anos, por exemplo, as quatro operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão são trabalhadas nessa ordem para explorar o conjunto dos números inteiros relativos[1], assim como se faz para o conjunto dos números naturais. E poderíamos citar outros casos semelhantes. Isso nos faz questionar, por qual razão o conteúdo matemático é o principal item a ser considerado no ato de ensinar? Será que realmente esta perspectiva favorece a aprendizagem?

Esses questionamentos começaram a surgir em minha vida profissional com mais sentido quando iniciei o mestrado no Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT-UFSC). Até então, desde a época da graduação na qual participava do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)[2] no período de 2012 a 2015, no contato com a sala de aula, comecei a me questionar sobre a dificuldade que os alunos tinham para trabalhar com assuntos que envolviam a álgebra. A meu ver, sempre aparecia álgebra nas aulas de matemática seja qual fosse o assunto tratado. Então, ela é uma das frentes essenciais no desenvolvimento da aprendizagem em matemática. Num primeiro momento sempre pensei o obvio, o problema estava na base, no desenvolvimento do pensamento

[1] Hillesheim (2013) problematiza o ensino e a aprendizagem das operações de adição, subtração e multiplicação com os números inteiros fundamentando nos aspectos cognitivos envolvidos no processo, além de apontar que o ideal é trabalhar na seguinte ordem: adição, multiplicação, subtração.

[2] O Programa foi oficializado pelo governo federal pelo Decreto de Lei nº 7.219/2010 como estratégia para melhorar as formações docentes em formação inicial.

algébrico. Com a presente pesquisa, vamos mostrar que há fatores específicos a ser considerados para entender as dificuldades no trabalho com a álgebra.

No PIBID eu conheci a teoria de Raymond Duval. Conhecê-la foi uma revolução. A partir daquele momento eu tive consciência que eu não visualizava que havia na matemática um conjunto de várias representações semióticas para o mesmo objeto matemático. Dado isso, aquela estudante de matemática passou a conceber a matemática de modo diferente. Consequentemente, com minhas experiências em sala de aula, minhas aulas na Educação Básica levam em consideração os registros de representação semiótica.

Ingressei no mestrado para pesquisar como o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser melhorado a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Durante a jornada percebi que eu não sabia quase nada da teoria, o que conheci na graduação era só o básico. Mas, com o orientador foi possível entender que estava no lugar certo, o próprio Duval iniciou estudos no campo da álgebra recentemente, então, já havia algumas considerações para direcionar a dissertação.

Não posso deixar de mencionar que o presente estudo vem ao encontro das pesquisas que o professor Dr. Méricles T. Moretti vem produzindo. Moretti (2008) desenvolveu um processo para construção de gráficos pautado nos registros semióticos e em translações no plano cartesiano. No Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Educação Matemática – GPEEM já tivemos dissertações que discorreram sobre essa prática no campo teórico. Agora, com o presente estudo, será a primeira vez que a pesquisa vai diretamente para a sala de aula. Estamos continuando as pesquisas de um grupo e, assim, iniciando um trabalho com uma nova investigação: **de que maneira os processos algébricos se fazem presentes no esboço da parábola a partir de uma *interpretação global* de curvas?**

A partir da questão problematizadora, outros questionamentos se fazem presentes e podem auxiliar na busca de dissertar sobre a maneira que os processos algébricos aparecem no esboço da parábola, como:

1 – O que caracteriza uma interpretação global de uma curva?

2 – Como fazer essa interpretação global a partir da linguagem algébrica?

3 – O que a linguagem algébrica pode revelar da curva?

4 – Quais as relações entre a curva e sua representação algébrica?

Pensamos que, a partir do momento que entendemos como se dá a "tomada de consciência dos gestos intelectuais requeridos para fazer-se matemática" (DUVAL, MORETTI, 2018, p. 84) é que podemos pensar o ensino. Em particular, a interpretação global de curvas permite isso, considerar os aspectos cognitivos da aprendizagem. Tanto que, Duval (2014, p. 36) afirma ser "preciso levar em conta exigências não matemáticas e, mais, exigências que dizem respeito aos processos de aquisição de conhecimentos e do funcionamento cognitivo do pensamento" para escolher e organizar as atividades em sala de aula. Então, como a aprendizagem de determinado conteúdo acontece é que deve ser levada em conta antes de analisar o ensino de matemática.

No presente trabalho vamos nos limitar a dissertar sobre o ensino de determinado objeto matemático, mostrando que sua efetiva aprendizagem só ocorre, se ele for pensado e ensinado pressupondo as funções cognitivas que devem ser mobilizadas pelo sujeito diante de tal objeto. Até mesmo porque, se a matemática é abstrata por natureza, só há um meio de seus elementos se fazerem acessíveis ao homem, por meio de representações, e as representações só podem ser compreendidas e manuseadas por intermédio de funções semio-cognitivas[3].

Fica evidente assim, que os entes matemáticos não são acessíveis empiricamente, mas sim, no âmbito semiótico, e não podemos considerar isso puramente teórico. As funções semio-cognitivas delineam todo o fazer matemática, uma vez que, "a atividade matemática é independente do conhecimento de conceitos" (DUVAL, 2014, p. 37), pois, o exercício da matemática não se resume a utilizar conceitos, mas sim, em saber olhar, designar, trabalhar com as diferentes representações, as quais são condições cognitivas essenciais para daí sim chegar à compreensão e efetiva utilização dos entes matemáticos envolvidos.

Posto isso, vamos problematizar as transformações algébricas que permeiam o esboço de retas e de parábolas. Porque as transformações exigem o uso de funções cognitivas específicas, as quais se definem mediante a linguagem matemática apresentada. Não há como pensar os objetos algébricos puramente como uma amontado de letras e operações relacionadas, ou até mesmo somente como fórmulas. É preciso ter claro que "a álgebra começa com as *equações* e com a explicitação da noção de equação como um objeto matemático" (DUVAL et al. 2015). Essa concepção não é muito divulgada ou levada em conta nas atividades de sala de aula, por isso, inferimos que nossa problematização apresenta-se potencialmente positiva para o campo de pesquisa.

Tanto que, em nossas buscas identificamos que as discussões em torno da aprendizagem de álgebra para a Educação Básica, não estão sendo fundamentadas na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica para além das noções de tratamento e

---

[3] As funções semio-cognitivas são as discursivas e as meta-discursivas apresentadas por Duval (2004); abordadas no Capítulo 2 e 3.

conversão[4], porque não encontramos dissertações ou teses que fazem isso no portal da Capes[5], usando como termo de busca "*pensamento algébrico*", "*ensino de álgebra*" e "*aprendizagem de álgebra*"[6]. Para cada termo obtemos sessenta e um trabalhos, trinta e três, e vinte e oito trabalhos, respectivamente. Entretanto, em relação a pensamento algébrico somente quatro pesquisas, do total encontrado, pautam-se na teoria de Duval, mas, como já afirmado, o foco são as conversões entre registros e o tratamento, e não necessariamente, fazem uso somente desta teoria; isso também ocorreu com "aprendizagem de álgebra" para cinco pesquisas. Não houve nenhum trabalho da busca "ensino de álgebra" relacionado aos estudos de Duval.

Como estamos interessados no esboço de curvas para estudar as transformações algébricas presentes na linguagem algébrica, é preciso especificar que o esboço ao qual nos referimos é o pautado em translações no plano cartesiano, estudadas por Moretti (2008), por meio de uma abordagem de *interpretação global das propriedades figurais*[7], preconizada por Duval (2011a). Podemos dizer, de modo geral, que essa abordagem consiste em intensificar a apreensão dos aspectos visuais pertinentes e presentes nas curvas, bem como, estabelecer as correspondências gráficas e algébricas existentes; itens esses que estão estritamente relacionados com um olhar cognitivo para a aprendizagem do esboço de gráficos, ou seja, uma análise semiótica visual e algébrica.

Consequentemente, a exigência do trabalho com translações por meio da interpretação global[8], para o esboço de retas e parábolas, acaba possibilitando manipulações algébricas, entretanto, até o momento, essa ideia encontra-se somente no plano teórico, sem considerações a respeito dos gestos intelectuais que os estudantes mobilizam diante de tal atividade.

Temos apenas dois trabalhos no banco de dados da Capes que fazem uso da interpretação global para a construção de gráficos no Ensino Médio, a saber: Silva (2008) discorreu sobre uma proposta de trabalhar o esboço de gráficos de função senoide, cossenoide, exponencial e logarítmica utilizando a translação e a simetria, e não apresentou

---

[4] Tratamento e conversão são atividades cognitivas definidas por Duval (2004). As mesmas serão explicadas no Capítulo 2.

[5] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes. Fundação responsável junto ao Ministério da Educação pela pós-graduação brasileira.

[6] As buscas foram realizadas no final do segundo semestre de 2018.

[7] Termo denominado por Duval no artigo Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives. v.1. Strasbourg: ULP – IREM, 1988. No Capítulo 3 da presente dissertação o termo será aprofundado.

[8] No presente trabalho, estaremos usando os termos: interpretação global de propriedades figurais, interpretação global figural e interpretação global, como sinônimos, a fim de facilitar a leitura.

análises empíricas. Pasa (2017) foca no trabalho com as taxas de variações das funções, quadráticas e polinomiais de terceiro grau, entendidas a partir da noção de infinitésimo, para o esboço dessas curvas. Ambos são oriundos do grupo de pesquisa GPEEM – SC.

De igual modo, temos o artigo de Côrrea e Moretti (2014) no qual também é possível pensar o esboço de curvas de funções trigonométricas e funções exponenciais e logarítmicas para o Ensino Médio, levando em consideração a interpretação global das propriedades figurais e o processo de translação. Já no artigo de Menoncini e Moretti (2017) propõe-se o esboço de curvas de funções modulares lineares para o Ensino Médio, também pautado nos apontamentos de Duval sobre interpretação global de uma curva.

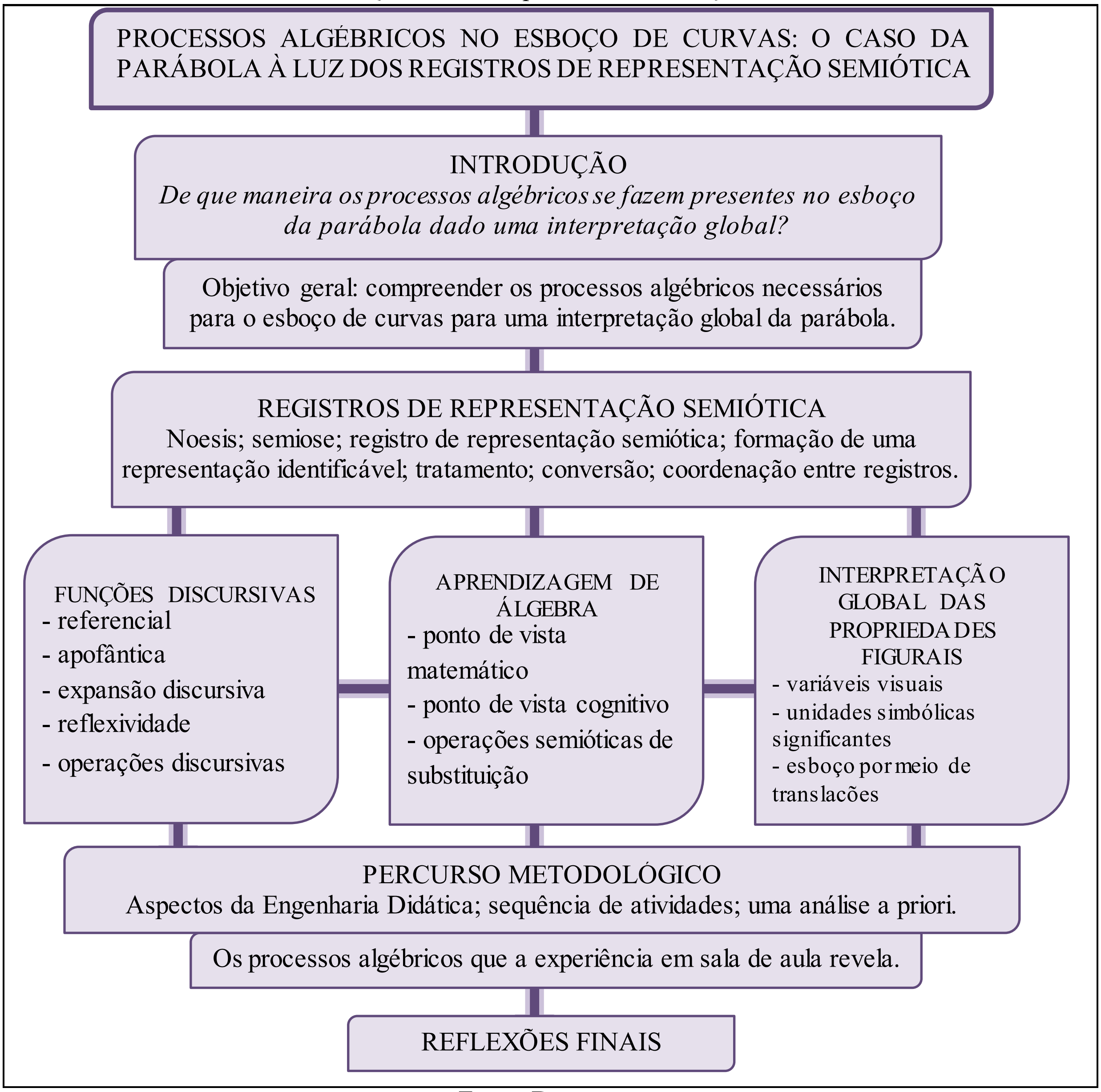
Diante desses apontamentos, esta pesquisa se encaminha no sentido de ressaltar os conceitos algébricos presentes no esboço de curvas, quando ocorre por meio de translações na ótica da interpretação global figural, no contexto da sala de aula do Ensino Médio. Com esta proposta vamos poder discutir aspectos relacionados a aprendizagem de álgebra que difere do que já vem sendo feito nas pesquisas brasileiras, já que, um olhar do ponto de vista cognitivo será considerado. Em síntese, o objetivo é compreender os processos algébricos necessários para o esboço de curvas para uma interpretação global da parábola.

Assim, a fim de obter material empírico para análise, foi desenvolvida no decorrer do ano de 2019, uma sequência de atividades com procedimentos metodológicos pautados na Engenharia Didática de Artigue (1996) em duas turmas regular de uma escola pública de Santa Catarina. Os estudantes são do primeiro ano do Ensino Médio. A escolha das turmas deve-se ao fato de que é nessa fase que estão estudando os gráficos de funções, por isso, o estudo da parábola e da reta, vem ao encontro do planejamento curricular anual das turmas.

Todo o processo para atingir o objetivo proposto está estruturado nos próximos três capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais. No Capítulo 2 discorremos sobre a teoria Registros de Representação Semiótica, base de nossos estudos. No Capítulo 3 versamos sobre a aprendizagem da álgebra pensada por Duval. Também discorremos a respeito da interpretação global figural e seus possíveis desdobramentos para o trabalho de aspectos algébricos envolvidos. O Capítulo 4 descreve procedimentos metodológicos, a descrição dos dados e a análise destes à luz do quadro teórico. Em seguida, apresentamos as Considerações Finais, as Referências Bibliográficas, os Apêndices com as atividades e o Termo de Consentimento.

No Quadro 1 apresentamos de modo sistematizado a estrutura da presente pesquisa.

Quadro 1 – Esquema da Dissertação



Fonte: Da autora.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Pensar a matemática de um ponto de vista cognitivo é o que a teoria dos Registros de Representação Semiótica nos possibilita. Por meio dela podemos discutir a aprendizagem de qualquer conteúdo matemático, e, no caso, estamos interessados na aprendizagem de álgebra. Sendo assim, é preciso explorar os conceitos de representações semióticas, *noesis*, *semioses*, registros de representação semiótica, tratamento, conversão, congruência semântica, coordenação entre registros. Conceitos esses que se fazem presentes no fazer matemática a todo o momento.

2.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Ao pensar na aprendizagem de matemática se faz necessário descrever o funcionamento cognitivo exigido para o sujeito expressar-se com êxito diante das diferentes situações envolvendo matemática que lhe são apresentadas. E isso não pode ser descrito pensando em "um modelo geral comum de aquisição de conhecimentos centrados sobre a ação, as interações e os desequilíbrios como fatores principais da construção de conceitos matemáticos" (DUVAL, 2008, p. 12). Precisamos considerar que a aquisição na matemática está relacionada à forma que ela se apresenta para nós, pois, os processos cognitivos envolvidos para mobilizar os objetos matemáticos[9] pelo sujeito não são os mesmos de outra área de conhecimento.

Segundo Duval (2004), a matemática possui uma estrutura que a caracteriza, e é uma área permeada de conteúdos que estão aquém de nosso mundo, ou seja, os conceitos elaborados não podem ser encontrados nele, no sentido de podermos visualizar; não são perceptíveis ou observáveis. Então, como que os objetos matemáticos, os quais devem ser mobilizados pelos sujeitos, apresentam-se nessa área de conhecimento? Primeiro, precisamos entender que o conhecimento matemático só nos é acessível por meio de representações. Ademais, a representação caracteriza-se "por uma correspondência abstrata entre duas entidades que são colocadas em algum relacionamento referencial entre si, por um ator ou um observador" (FONT; GODINO; D'AMORE, 2005, p. 2, tradução nossa)[10]. Assim sendo,

---

[9] Objeto matemático é qualquer entidade, real ou imaginária, a qual nos referimos ou da qual falamos, na atividade matemática (FONT; GODINO; D'AMORE, 2005, p. 2, tradução nossa).

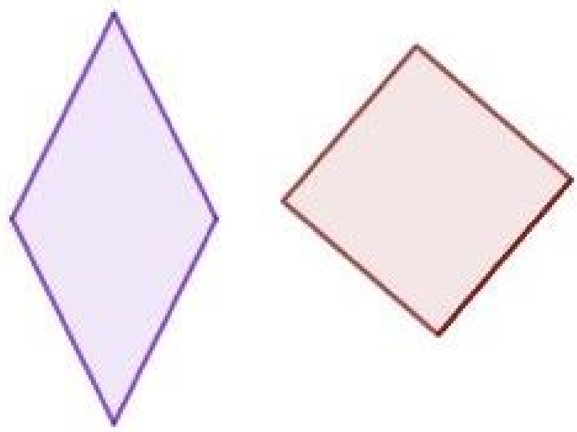
[10] No original: "por una correspondencia abstracta entre dos entidades que son puestas en alguna relación referencial una con otra, por un actor o un observador" (FONT; GODINO; D'AMORE, 2005, p. 2).

> “representa-se” para tornar algo presente, algo esse que existe e é substituído pela representação. Uma representação é de fato uma “representação” se exprimir ideias e se provocar na mente daqueles que o percebem uma atitude interpretativa (VERTUAN, 2007, p. 19).

Nessa perspectiva, estamos considerando que no processo de aprendizagem de matemática são as relações que os sujeitos estabelecem com os conceitos e suas representações o fator essencial desse processo. Sendo que, no que tange ao funcionamento cognitivo, “não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação” (DUVAL, 2004, p. 25, tradução nossa).

Para Duval (2008), é de extrema importância na aprendizagem de matemática que o objeto matemático representado não seja confundido com a representação. Tanto que, o “conhecimento começa quando não adotamos mais uma representação do objeto no lugar do próprio objeto” (DUVAL, 2011b, p. 16). Percebam que pela Figura 1, temos duas representações das inúmeras possíveis para o objeto losango, e nenhuma delas pode ser considerada o losango em si.

Figura 1 – Representações de losangos.



Fonte: Da autora.

Para Duval (2011b) as representações apresentam duas características fundamentais: a existência de muitas representações possíveis para o mesmo objeto; e a sua diversidade se origina na variedade dos sistemas semióticos[11] que permitem produzir as representações. Isso nos mostra uma diferença inerente entre representação e objeto: as representações possuem variabilidade, enquanto que, os objetos têm invariância. Além disso, “uma representação não

[11] “Conjunto de signos que possui convenções e regras próprias de formação” (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 41).

pode ser compreendida independentemente do sistema que permitiu sua produção" (DUVAL, 2001, p. 43, tradução nossa).

Sendo assim, não estamos diante de qualquer representação ou signo[12], estamos nos referindo às representações semióticas, as quais possuem uma interação com o objeto; interação essa que os signos não possuem. Elas têm uma "representação interna que varia de um tipo de representação semiótica para outra" (DUVAL, 2011b, p. 37), ou seja, as representações semióticas "são relativas a um sistema particular de signos: a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e podem ser convertidas em representações 'equivalentes' em outro sistema semiótico" (DUVAL, 2004, p. 27, tradução nossa). Em síntese, as representações semióticas são "as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços" (DUVAL, 2011b, p. 38).

Segundo Duval (2004) as representações semióticas são consideradas representações externas e conscientes do sujeito; apresentam as três funções meta-discursivas, funções essas que são comuns a todos os registros de representação linguísticos, simbólicos ou figurativos. A função cognitiva de comunicação, ou seja, a função de exteriorizar as representações para que sejam acessíveis a outras pessoas, além das funções de objetivação[13] e a função de tratamento[14]. A pensar no estudante, uma representação externa comunicada por ele, pode significar como ele está lidando com essa representação internamente. Por isso, mais um motivo para o professor estar atento às representações utilizadas pelos estudantes.

Os objetos a serem estudados são "(...) conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático" (DAMM, 2016, p. 167). Nessa perspectiva, cada representação semiótica evidencia algum aspecto do objeto considerado. Como no caso da Figura 2, temos de imediato a concavidade da parábola, embora, em uma das representações algébrica do mesmo objeto, $y = (x-2)(x+3)$, o que fica evidente são os valores das raízes e, de momento, não se pode afirmar nada sobre a concavidade, ao menos que se faça alguma alteração nessa representação.

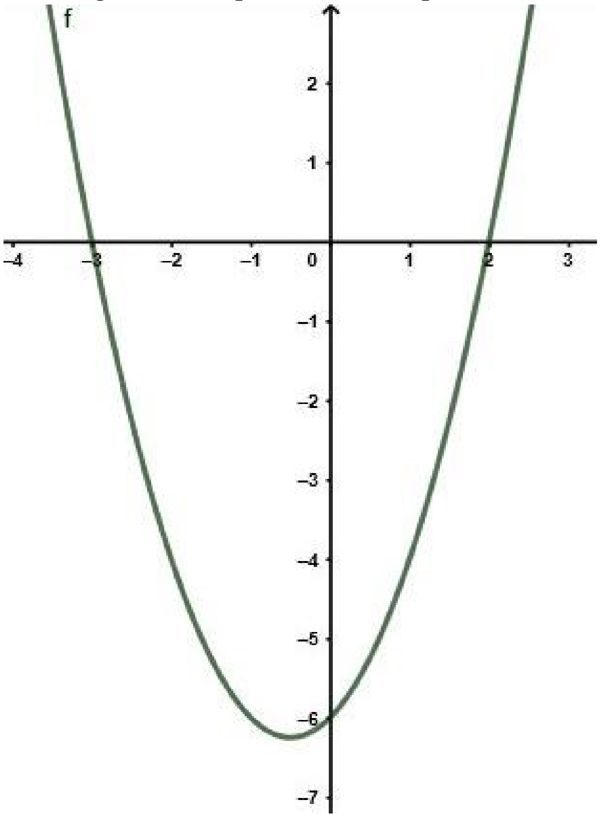
---

[12] "O signo está no lugar de algo; é uma expressão que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto" (COLOMBO, 2008, p. 90).

[13] A objetivação é uma função cognitiva característica do ato de pensar. Ela permite a "tomada de consciência do que não se tinha consciência antes de produzir-se a si mesmo para si mesmo uma primeira representação" (DUVAL, 2011b, p. 99).

[14] A função cognitiva de tratamento é explorada com detalhes na Subseção 2.2.2 devido a sua importância.

Figura 2 – Representação de parábola.



Fonte: Da autora.

Sendo assim, é crível considerar que, pelo fato de cada representação apresentar uma propriedade diferente do objeto, determinadas representações semióticas proporcionam um maior ou menor custo cognitivo para o indivíduo que está lidando com essas representações. Portanto, é fundamental transitar pelas diferentes representações de dado objeto matemático, não somente para possibilitar uma compreensão global do objeto, mas também, para buscar a representação que melhor o auxilia em cada situação.

Apesar de toda essa discussão levantada em torno das representações semióticas, é preciso frisar que "(...) é o objeto representado que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis" (DUVAL, 2012, p. 268). E isso não exclui o aspecto necessário das representações para se compreender os objetos. Duval (2004) argumenta sobre a relação entre *noesis* e *semiose*, definindo *semiose* como "a apreensão ou a produção de uma representação semiótica" (DUVAL, 2004, p. 14), e a *noesis* são os atos cognitivos como "a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência" (DUVAL, 2004, p. 14). Posto que, para o autor, a *noesis* é inseparável da *semiose*.

Por isso, para que aconteça a apreensão de um objeto matemático, a *noesis* deve ocorrer por meio de expressivas e significativas *semioses*. Isso resulta na compreensão matemática pelo sujeito, se esse conseguir articular diferentes representações semióticas pertencentes a um mesmo objeto matemático. E fazer essas articulações potencializa uma melhor apreensão conceitual do objeto.

Um problema recorrente em matemática é interpretar a representação como sendo o objeto em si, como já foi dito anteriormente. É bem provável que essa confusão esteja fortemente atrelada ao currículo de matemática, cada vez mais fragmentado. Muitas vezes, o estudante está determinando o domínio da função real de uma variável real, sem ter visto ainda a representação gráfica e sem associar a escrita do domínio com o lugar geométrico no plano cartesiano que a função ocupa. Por isso, contemplar as diferentes representações semióticas de um mesmo objeto em momentos distanciados, não favorece tanto a aprendizagem, como articular as diversas representações possíveis simultaneamente.

2.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

É por meio das representações que o acesso à matemática torna-se possível como ferramenta de resolução de problemas ou como conhecimento acumulado pela humanidade. E como o que se constitui por matemática difere das outras áreas de conhecimento, as representações semióticas em matemática são denominadas por Duval (2004) de *registros de representação semiótica*, o que torna possível discriminar as representações que são somente signos e as que permitem atividades cognitivas específicas no trabalho com a matemática.

Toda e qualquer representação semiótica que seja possível reconhecê-la a um dado sistema semiótico, trabalhar com suas propriedades e transformá-la em uma nova representação pertencente a outro sistema semiótico é considerada um registro de representação semiótica. Isso nos mostra que "falar de registro de representação semiótica e não apenas de representação semiótica vai no sentido que se considera prioritariamente as possibilidades de transformar uma representação semiótica em outra representação semiótica (DUVAL, 2001, p, 44, tradução nossa)".

Para Duval (2004) um registro de representação semiótica está intrinsicamente relacionado com três atividades cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão de representações semióticas. Todas elas são a base para determinar uma representação como registro de representação semiótica. O tratamento e a conversão são transformações que constituem a dinâmica cognitiva de qualquer atividade matemática. Por isso que letras, símbolos de operações, sistema de signos que não permitem as três atividades cognitivas, por exemplo, não são consideradas representações semióticas.

2.2.1 A Atividade Cognitiva de Formação de uma Representação Identificável

A formação de representações ocorre seja para "expressar" uma representação em um registro semiótico particular ou para "evocar" um objeto. Sendo assim, precisa ser uma formação em que seja possível reconhecer a representação produzida. Nesse processo de reconhecimento, afirmamos que a representação formada "(...) implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que 'queremos' representar" (DUVAL, 2004, p. 42, tradução nossa). Portanto, o signo ou sistema de signo escolhido tem de ser identificável não somente pelo sujeito que o produziu.

Além disso, a formação de representações semióticas deve respeitar as regras próprias do sistema semiótico empregado. Essas regras são denominadas regras de conformidade e são importantes porque são elas que definem o sistema de representação. Com elas é possível fazer uso das transformações específicas do sistema utilizado. Sendo assim, as representações produzidas são reconhecidas em um registro específico. Isso faz com que também a representação tenha sentido para o sujeito que não a tenha produzido (DUVAL, 2004).

Se considerarmos $y = 3x^2 + 4x - 5$ não temos uma representação elaborada por nós, mas, mesmo assim, ocorre o processo de reconhecimento por meio das regras de conformidade, uma vez que é algo que conseguimos identificar por já trabalhar com esse registro de representação ou simplesmente porque um dia já nos foi apresentado essa representação semiótica. Entretanto, é importante considerar, de acordo com Duval (2004), que somente com o reconhecimento das regras não seja possível compreender e explorar a representação dada. Porque reconhecer não é formar; toda formação de uma representação identificável implica a seleção de características e do conteúdo[15] que se quer representar, e isso, no âmbito da matemática, torna-se complexo quando não se domina o registro de representação semiótico empregado.

[15] O conteúdo de uma representação não é o objeto representado, e sim, o que fica explícito na representação escolhida (DUVAL, 2001).

2.2.2 A Atividade Cognitiva de Tratamento

O tratamento é uma transformação da representação semiótica em outra representação no mesmo registro em que ela foi formada, ou seja, a representação inicial é transformada, todavia, mantém-se no mesmo sistema semiótico. Sendo assim, é uma atividade que obedece à regras próprias de transformação do registro, utilizando somente as possiblidades do funcionamento próprio do sistema semiótico, sendo que essas regras variam em natureza e em quantidade de acordo com o registro (DUVAL, 2004).

Todo registro de representação semiótica oferece possibilidades específicas de tratamento. "Não importa que o tratamento não possa ser efetuado em qualquer outro registro. Um tipo de tratamento depende das possibilidades de funcionamento representacional do registro. Cada registro favorece um tipo de tratamento" (DUVAL, 2001, p. 45, tradução nossa). Por isso que de certa maneira, a pluralidade de registros de representação semiótica está estritamente conectada à diversidade de tratamentos, os quais devem ser empregados o tempo todo em uma atividade matemática.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria (DUVAL, 2008, p. 16).

Vejamos a passagem da representação $y = x^2 - 6x + 9$ para $y = (x-3)^2$. Aqui o registro de representação é o algébrico, e seu tratamento respeita as regras de transformação por meio de uma substituição de uma expressão por outra. Observe que ambas são representações diferentes, entretanto, se referem ao mesmo objeto matemático, no caso uma parábola, como também não há mudança de registro de representação. Dito de outro modo, a mudança é interna ao registro. Para muitos estudantes, o exemplo não passa de um cálculo, pois não chegam à compreensão do objeto representado e suas possíveis representações.

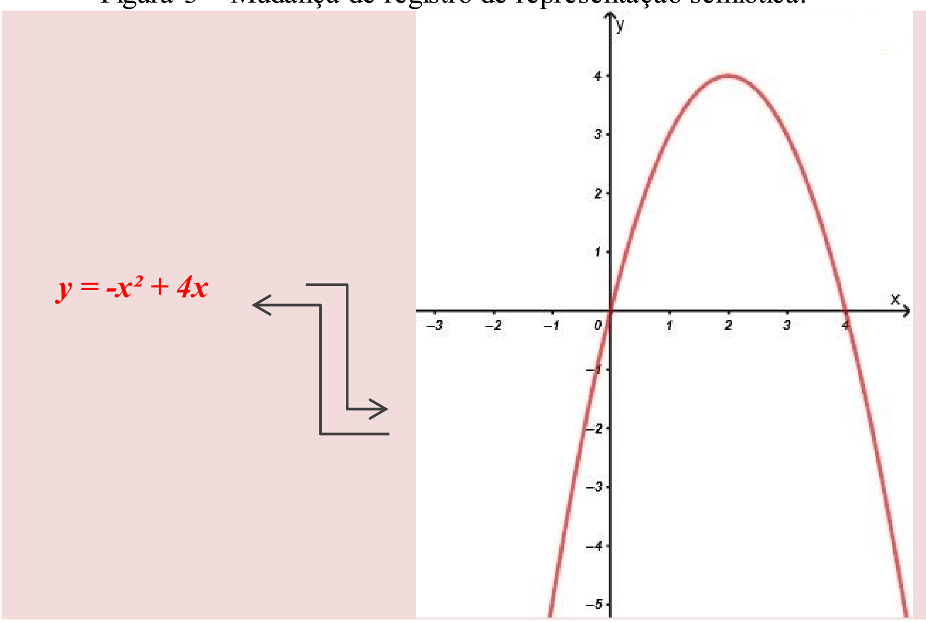
Outro fator importante a ser discutido quando se pensa na atividade de tratamento, é que somente realizar as transformações internas que um registro possibilita, não é suficiente para compreender o objeto representado, uma vez que toda representação é limitada. Sem contar que as diferentes dificuldades no tratamento estão relacionadas ao registro escolhido, por isso, Duval (2004) sinaliza a importância de conhecer bem os diferentes registros para o sujeito ter a autonomia de trabalhar com o registro que lhe apresentar menor custo cognitivo nos tratamentos, contudo, para isso, a conversão precisa ser uma atividade recorrente.

2.2.3 A Atividade Cognitiva de Conversão

A conversão é a transformação de uma representação em um registro pertencente a um sistema semiótico diferente da representação no registro pertencente a outro registro semiótico. Portanto, toda conversão irá mudar a forma que a representação se apresenta obrigatoriamente, já que é uma mudança externa ao registro inicial. Na troca de registros, do A para B, por exemplo, ela ocorre tanto na ida como na volta (de B para A), de tal maneira "a característica da conversão é **manter a referência ao mesmo objeto** (objeto no sentido estrito, situação...), **mas sem conservar a explicitação das mesmas propriedades desse objeto**" (DUVAL, 2001, p. 45, grifos do autor, tradução nossa).

Na Figura 3 a seguir, $y = -x^2 + 4x$ é a representação da parábola no registro algébrico e por meio da conversão temos sua representação no registro gráfico. As flechas sinalizam que essa conversão pode ser realizada na ordem inversa também. Observe que em ambos os registros a parábola considerada continua sendo a mesma, o que muda é o conteúdo da representação, as propriedades explicitadas da parábola, como por exemplo, as raízes, ficam marcadas de imediato no registro gráfico. Assim como as coordenadas do vértice, o que não ocorre no registro algébrico, a menos que um tratamento seja realizado. E está aqui uma das confusões que os estudantes geralmente apresentam no trabalho com a matemática: afirmar que representações diferentes dizem respeito a coisas diferentes.

Figura 3 – Mudança de registro de representação semiótica.



Fonte: Da autora.

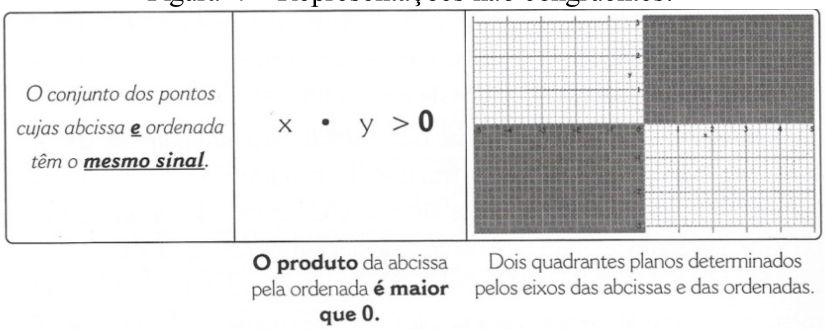
"A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento" (DUVAL, 2012, p. 272). O estudante pode tranquilamente mudar a escrita $\frac{1}{2}$ para *0,5* – o que caracteriza uma conversão, bem como não conseguir fazer uso das regras de codificação do registro fracionário de representação de número para adicionar um terço e três quartos. Portanto, tratar e converter são sim atividades semióticas de transformação distintas e fundamentais na atividade matemática.

Ela só pode acontecer no trabalho com no mínimo dois registros de representação semiótica. Os gestos intelectuais envolvidos na passagem de uma representação no registro A para o registro B nem sempre são os mesmos quando se muda a orientação da conversão (de B para A). "Dito de outra maneira, as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido em que se efetuam a troca de registros" (DUVAL, 2004, p. 48, tradução nossa). Isso pode apresentar dificuldades diferentes de acordo com o registro de partida, até mesmo porque Duval (2012, p. 276) afirma que "a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática".

As dificuldades também estão relacionadas à congruência ou não-congruência. Uma conversão é congruente quando "a representação do registro de partida é transparente a representação no registro de chegada" (DUVAL, 2001, p. 46, tradução nossa). Ademais quando a representação no registro de chegada não transparecer a representação do registro de partida, estamos diante de uma não congruência, o que é o caso da conversão realizada na Figura 3.

Na Figura 4 a seguir temos três representações não congruentes. Sair de uma e chegar à outra não apresenta ao sujeito que as manipulam relação direta entre as representações, ou seja, o conteúdo de cada representação não permite reconhecer a outra. Além disso, a orientação da conversão determina diferentes níveis de não congruência.

Figura 4 – Representações não congruentes.



Fonte: DUVAL, 2011b, p. 122.

O reconhecimento de um mesmo objeto matemático "representado por duas representações A e B repousa sobre a correspondência das unidades de sentido de duas representações" (DUVAL, 2011b, p. 49)[16]. Por isso que, em alguns casos, um tratamento no registro pode deixar a conversão com um grau de congruência maior, como exemplo, se em vez de trabalhar com a seguinte equação $y = -x^2 + 4x$ fosse usada a expressão equivalente $y - (+4) = -(x - (+2))^2$, a qual vem da forma canônica da parábola representada, o gráfico seria esboçado por meio de translações nos eixos do plano cartesiano e como as unidades de sentido são correspondentes, a passagem do gráfico para a equação se daria de modo mais espontâneo[17].

Entretanto, a maioria das situações em matemática não é congruente, há muito mais conversões com não congruência. Além disso, quando a matemática é ensinada privilegia-se situações congruentes como se a conversão no sentido contrário fosse automática ou com a mesma transparência, o que pode gerar compreensões parciais do objeto matemático estudado. Por isso, somente fazer o estudante reconhecer os diferentes registros de representação semiótica não garante uma aprendizagem de fato, é preciso que ele consiga coordenar os registros entre si.

2.3 A COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS

Para Duval (2004) é a coordenação entre registros que irá permitir de modo mais claro a apreensão de um objeto matemático.

> "A mobilização de um segundo registro é necessária para poder discernir e reconhecer as unidades de sentido que são pertinentes no conteúdo das representações produzidas no primeiro registro! Ela não é suficiente, pois é preciso que haja também uma coordenação de registros de forma que os registros funcionem em sinergia" (DUVAL, 2011b, p. 100).

Os registros irão funcionar em sinergia quando o sujeito conseguir colocar em correspondência as unidades de sentido próprias de cada representação, e não somente reconhecer as que são pertinentes no primeiro registro. Quando isso ocorrer será possível

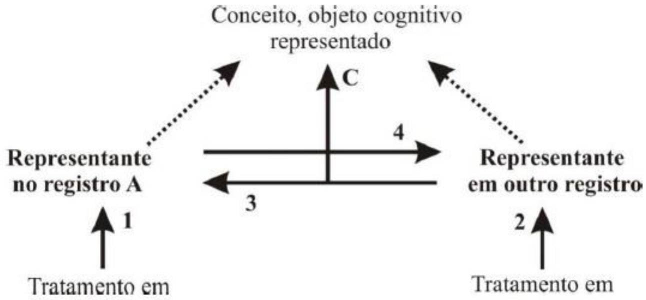
[16] As unidades de sentido matematicamente pertinentes no conteúdo de uma representação podem ser obtidas em dois processos. Primeiro na operação de conversão. Segundo na conversão com todas as modificações possíveis da representação no registro inicial (DUVAL, 2011b).

[17] No Capítulo 3 subseção 3.2.2 será abordado com detalhes o processo de esboço da parábola fazendo uso de translações e da interpretação global das propriedades figurais.

reconhecer um mesmo objeto em representações diferentes (DUVAL, 2011b). Temos assim a coordenação entre os registros. Consequentemente, "a discriminação das unidades de sentido próprias a cada registro deve ser o objeto de uma aprendizagem específica. Tal discriminação é a condição necessária para toda atividade de conversão, e portanto, para o desenvolvimento da coordenação dos registros de representação" (DUVAL, 2004, p. 76, tradução nossa).

Com a coordenação entre os registros definida, podemos falar da hipótese fundamental de aprendizagem apresentada na Figura 5 por Duval (2012):

Figura 5 – Hipótese fundamental de aprendizagem.



Fonte: DUVAL, 2012, p. 282.

A hipótese sintetiza tudo que foi mencionado até então, pois, as flechas 1 e 2 se referem aos tratamentos possíveis em cada representação do registro, já as de número 3 e 4 indicam as conversões. A flecha C denota a coordenação entre dois registros (poderia haver mais registros). Por fim, as flechas pontilhadas servem para distinguir a representação de seu objeto. Está aqui o que Duval (2008) denomina de: a originalidade da atividade matemática.

Enfim, é com este embasamento teórico o qual explica como o sujeito aprende matemática, ou melhor, como a atividade matemática acontece que vamos pautar nosso estudo. No próximo capítulo, vamos utilizar nosso referencial teórico para sustentar discussões em torno da aprendizagem de álgebra, iniciando com apontamentos sobre as funções discursivas, funções essas que aparecem nos tratamentos e conversões. Com isso, podemos direcionar um modo de trabalho em sala de aula com a parábola potencialmente significativo para o sujeito que aprende.

3 PROCESSOS ALGÉBRICOS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Pelo capítulo anterior, já temos uma perspectiva teórica de como pensar a aprendizagem para o campo algébrico: sempre olhar para os objetos matemáticos de um ponto de vista cognitivo. Ao esboçar retas e parábolas pautado na interpretação global das propriedades figurais alguns tratamentos algébricos surgem. A partir das transformações algébricas envolvidas no esboço da reta e da parábola é possível adentrar a aprendizagem de álgebra na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. Para tanto, é preciso levar em conta que toda transformação em registros discursivos está envolvida em funções discursivas que lhe são próprias, e que sem este discernimento pouco se avança no estudo da atividade cognitiva que os processos algébricos exigem. Por isso, além de explorar as funções discursivas de uma língua, vamos apresentar a abordagem de interpretação global e discorrer sobre a aprendizagem de álgebra.

3.1 AS FUNÇÕES DISCURSIVAS EM MATEMÁTICA

Duval (2004) aponta que todo discurso é inseparável de um funcionamento cognitivo, e que não serve somente para fins de comunicação; entende-se por discurso "o emprego de uma língua para 'dizer alguma coisa', a saber, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente as potencialidades significantes de uma língua" (DUVAL, 2004, p. 86, tradução nossa). No emprego de uma língua são mobilizadas diferentes funções cognitivas, independente se vai produzir um discurso ou não, as quais se dividem em dois tipos: as meta-discursivas e as discursivas. O conjunto da primeira são funções comuns a todos os sistemas de representações[18]. Por sua vez, as discursivas são as que se fazem presentes em um sistema de representações semióticas para que um discurso exista.

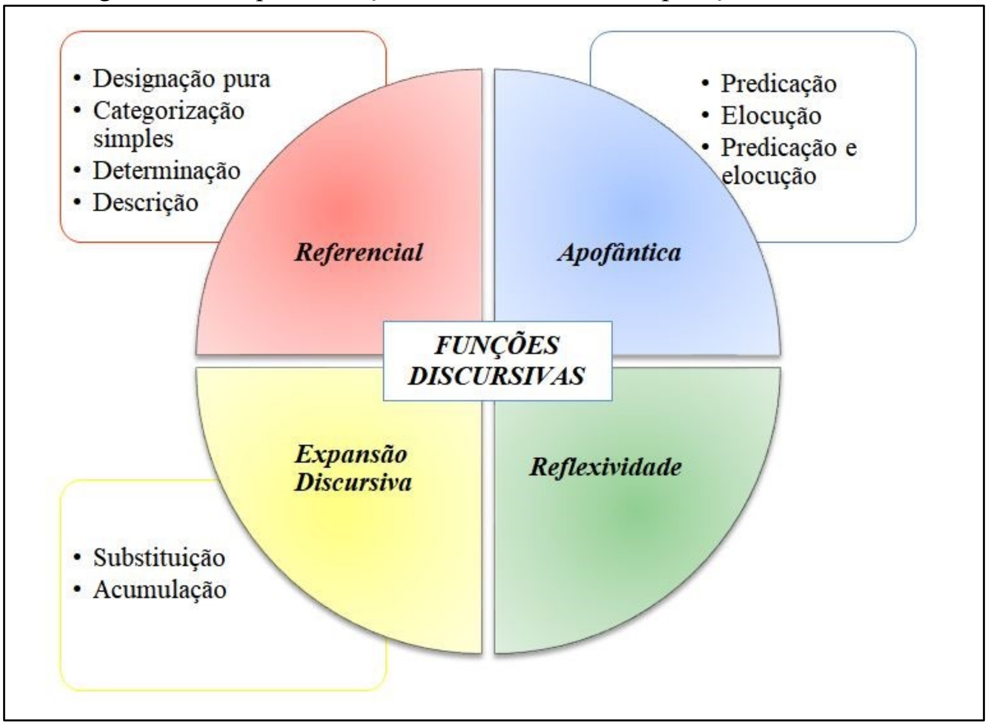
Quando estamos no campo da álgebra, o que acontece é que a representação das relações entre números e letras exige funções discursivas para além das atividades cognitivas de tratamento e conversão, as quais se fazem presentes no trabalho com todo objeto matemático. O discurso algébrico assim como qualquer outro, apresenta unidades de sentido:

[18] Ver página 24 onde já definimos as funções meta-discursivas.

> todo discurso, produzido oralmente ou em um gesto de escrita, se decompõe em unidades de sentido, as quais podem também ser decompostas em outras unidades de sentido, mas em um nível de organização inferior. São as operações discursivas que determinam as unidades de sentido. Podemos, portanto, partir das unidades de sentido para identificar as operações discursivas ou, inversamente, partir das operações discursivas para segmentar um discurso produzido em unidades de sentido (DUVAL, 2011b, p. 76).

Por isso, vamos adentrar especialmente nas funções discursivas para explorar os processos algébricos. Pela Figura 6, temos uma visão geral dessas funções e de quais são suas específicas operações discursivas. Para Duval (2004) somente quando um sistema semiótico cumpre as quatro funções discursivas - referencial, apofântica, de expansão discursiva e reflexividade, podemos considerá-lo como uma língua. Qualquer discurso só se organiza no cumprimento das funções discursivas e de suas respectivas operações discursivas.

Figura 6 – As quatro funções discursivas e suas operações discursivas.



Fonte: Da autora.

3.1.1 A Função Referencial de Designação

A função referencial se caracteriza pela designação de objetos. “A designação de um objeto ou a referência a um objeto depende sempre de uma operação de designação” (DUVAL, 2011b, p. 78). Para designar o sujeito pode exercer quatro tipos diferentes de operações cognitivas, sendo elas: *designação pura* – envolve o emprego de signos de identificação, sendo que as outras operações discursivas, *categorização*, *determinação* e *descrição*, faz uso de combinação dos signos (DUVAL, 2004).

Na *designação pura* podemos considerar, por exemplo: "Encontre o MMC...". Aqui o léxico MMC, entendido como o mínimo múltiplo comum entre números é suficiente para identificar e designar o objeto desejado. Ou até se a frase "um número mais seu dobro resulta em doze" for expressa por $x + 2x = 12$, estamos diante de uma operação de designação, na qual identificamos x como o número desconhecido. Nesta última situação, os léxicos são associativos, já que x poderia ser utilizado em outro contexto para designar outro objeto, como a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Léxico é um termo recorrente em Duval (2004) quando vamos nos referir a função referencial de designação. "Um léxico é um conjunto de elementos (signos, símbolos ou palavras) que permitem marcar explicitamente o cumprimento de uma das quatro operações que contribuem para cumprir a função referencial" (DUVAL, 2004, p. 96).

Os léxicos podem ser associativos, como já explicitado no exemplo $x + 2x = 12,$ sistemáticos ou de extensão semântica. Léxicos sistemáticos são os que pertencem a um sistema regrado, como por exemplo, o sistema de numeração romano, já que os léxicos básicos e os outros são obtidos a partir de combinações. Quando precisamos formas novos termos para os objetos, acabamos apenas usando termos já conhecidos, mas, com outro sentido, como é o caso de raiz na matemática, um léxico que na língua portuguesa nos remete a outra ideia. Assim, estamos diante de uma extensão semântica lexical.

Na *operação discursiva de categorização*, a designação está estritamente relacionada à classe típica com que o objeto designado pertence, ou a uma de suas qualidades. Pode aparecer substantivos, verbos, adjetivos que qualificam o objeto (DUVAL, 2004). Embora, para Duval (2004) a categorização não é um processo completo, no sentido de ser suficiente por si mesmo para identificar o objeto. Ela se completa com a operação cognitiva de *determinação*. A determinação se refere aos artigos definidos e indefinidos da língua natural (o, uns, alguns, a, uma, algumas, etc...), o que acarreta a garantia de se designar objetos com unicidade e existência.

Descrever é algo mais complexo, pois, é uma combinação de todas as designações citadas anteriormente, uma vez que, no conjunto delas melhor nos aproximamos de uma descrição de dado objeto. A descrição é uma operação análoga a de categorização, mas, irredutível na seguinte situação: ela se impõe primeiro quando pode haver uma falta de termos, de nomenclaturas, de léxicos que uma língua se dispõe para nomear algum objeto (DUVAL, 2004).

3.1.2 A Função Apofântica de Expressão de Enunciados Completos

Só designar objetos não permite uma atividade discursiva, é preciso a função apofântica entrar em ação para dizer algo sobre esses objetos e assim, não reduzir a língua a um código. A função apofântica acontece ao expressar algo dos objetos designados na forma de uma proposição[19], ou seja, ela existe quando o sujeito expressa enunciados completos. Por exemplo, diante da Figura 2, dizer “a parábola representada possui duas raízes reais”.

Também poderia ser dito “a parábola é côncava para baixo”. Não deixa de ser uma proposição, mas, ela é falsa no caso. Isso nos remete ao fato de que, para Duval (2004) um enunciado completo sempre apresenta um valor lógico, um valor epistêmico e um valor social. Portanto, um enunciado está muito mais ligado ao sentido que seus valores apresentam do que a sua completude. O valor lógico se define em verdade, falsidade ou indeterminado. O valor epistêmico diz respeito a certeza, a necessidade, a verossimilidade, a possibilidade ou a um absurdo. O valor social está na pergunta que exige uma resposta, em uma ordem, desejo, promessa, declaração. Dependendo do discurso, o enunciado pode apresentar somente um valor social, ou um valor epistêmico e social, ou um valor epistêmico e lógico. No exemplo da frase acima, temos um valor epistêmico e um valor lógico, já que o contexto é puramente teórico.

As operações discursivas da função apofântica são duas, *predicação* e *elocução*. Na Figura 6 consideramos uma terceira porque elas podem ocorrer juntas. A predicação são frases com sentido, predicado e verbo que estão vinculadas a uma expressão que designa o objeto. Ato ilocutório ou elocução realiza-se quando o sujeito expressa uma vontade, uma apelação, ou explica seu raciocínio; aqui se faz fortemente presente o valor social, pois, acaba relacionando quem diz e para quem diz.

3.1.3 A Expansão Discursiva

A expansão discursiva dá a ideia justamente de expansão do discurso. É uma expansão que amplia os enunciados completos, mas, que exige a existência de articulações

[19] Proposição é uma frase ou sentença que exprime um pensamento em sentido completo.

entre eles. Com ela podemos "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (DUVAL, 2004, p. 94), e por isso seria a mais importante das quatro funções discursivas. Na prática, o emprego da função discursiva acontece vinculando diferentes enunciados do mesmo assunto, para melhor compreender ou explicitar o assunto, só que sem entrar em redundâncias discursivas.

Segundo Duval (2004) as operações da função discursiva são *substituição* e *acumulação*. São essas duas operações, uma lógica e a outra natural, por ser mais espontânea, respectivamente, que permitem desenvolver as descrições, as narrações, as explicações e o raciocinamento. Por exemplo, "a barragem em Brumadinho rompeu. A cidade está debaixo d'água e lama" é uma expansão do discurso por acumulação, pois, a segunda parte apresenta uma continuidade temática inferindo uma relação de causa-consequência entre os enunciados completos. Já no campo da substituição, poderíamos considerar a mudança de representação de $9x^2 - 12x + 4$ para $(3x - 2)^2$. Sendo que, a compreensão em uma substituição consiste em reconhecer a aplicação da regra utilizada.

As formas associadas à função de expansão discursiva, relato, descrição, explicação e raciocinamento permitem a expansão por acumulação. E todo discurso produzido neste contexto deve seguir as restrições de coerência global, ou seja, falar sempre dos mesmos objetos, só podendo fazer uso do registro de representação semiótica língua natural. Na expansão por substituição a única forma presente é o raciocinamento, sendo que a restrição de coerência é local, isto é, a substituição precisa ter validade ao passar de uma proposição a outra. O registro envolvido são os de escrituras simbólicas – números, escrita literal, língua formal,... (DUVAL, 2001).

Para Duval (2004) há quatro formas em que as operações de expansão discursiva atuam: lexical, formal, natural e cognitiva, conforme o Quadro 2. A lexical e a formal são similaridades semióticas, pois, são recuperados com elas alguns significantes na continuação dos enunciados ao fazer uso dos mesmos signos ou palavras. Como exemplo de significante temos "base", sendo as frases a seguir não equivalentes referencialmente apesar da mesma semiótica: "a base não é a decimal" e "onde deixei minha base, mãe?". Já a expansão natural e cognitiva são similaridades semânticas, as quais mantém invariância referencial em um conjunto de enunciados com continuidade temática, possibilitando um progresso contínuo. Como, "o produto de dois números é negativo" ou "$xy < 0$".

Quadro 2 – Formas de expansão discursivas.

Mecanismos de Expansão	Similaridade interna	Similaridade externa
Similaridade semiótica	Expansão LEXICAL	Expansão FORMAL
Similaridade semântica	Expansão NATURAL	Expansão COGNITIVA

Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 119).

Caso um terceiro enunciado seja necessário, a similaridade é denominada de externa. E quando a passagem de um enunciado para outro é direta, sem terceiros, de similaridade interna, já que, o "reconhecimento do léxico de base da língua utilizada é suficiente para reconhecer a similaridade semiótica ou uma similaridade semântica entre os enunciados" (DUVAL, 2004, p. 118).

A expansão natural aparece quando se faz o uso comum da linguagem, sendo o conhecimento da língua corrente suficiente. A expansão formal pauta-se exclusivamente na aplicação de regras de substituição de símbolos de um conhecimento específico, o que aparece muito na matemática ao se trabalhar com equações, por exemplo. A função de expansão discursiva lexical é uma recuperação sonora ou gráfica de um mesmo significante, assegurando a continuidade e a coesão do discurso ampliado. E a função de expansão discursiva cognitiva caracteriza-se pelo emprego especializado da língua natural com os léxicos restritos a um domínio de conhecimento, como exemplo, descrições, explicações técnicas, demonstrações (DUVAL, 2004, p. 119-121).

3.1.4 A Reflexividade Discursiva

A reflexividade discursiva ocorre quando o enunciado completo é potencialmente modificado, e mantém sua referência. É uma função discursiva que permite analisar a relação que o locutor pretende estabelecer com o interlocutor. E ao mesmo tempo é preciso levar em conta que um enunciado elaborado deve se situar em relação a outros já existentes. A função de reflexividade discursiva está fortemente presente nos discursos científicos, sendo que nesse contexto o valor lógico das expressões se sobressai, uma vez que, a cada expressão elaborada, podem-se ter valores lógicos diferentes de um discurso formado pelo conjunto de expressões iniciais.

Todas essas funções discursivas são importantes para compreender os processos algébricos, dado que permitem fazer inferências sobre os sentidos e os significados dos discursos; até mesmo porque a linguagem algébrica é caracterizada com o um registro de representação semiótico discursivo.

3.2 A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Vimos que uma das atividades cognitivas de operações discursivas é a designação. A designação só ocorre quando o aluno é capaz de categorizar, determinar e descrever para resolver os problemas algébricos (DUVAL, 2015). Há de se considerar também que atrelado a designação temos os enunciados completos ou não, a composição de enunciados, a descrição, e a explicação. São esses aspectos que permitem apreensões para se compreender os conceitos envoltos à álgebra. Nessa perspectiva, pensar a aprendizagem de álgebra é se debruçar muito mais sobre o funcionamento cognitivo necessário para compreender algo, e não nos conteúdos que devem ser adquiridos.

Duval (2015) ao discorrer sobre a aprendizagem de álgebra, aponta que é essencial pensar as diferenças entre um ponto de vista cognitivo e um ponto de vista matemático para a álgebra, pois, cada campo da matemática, seja ele o geométrico, o estatístico, o aritmético, possui suas especificidades. Somente com esse esclarecimento podemos melhor nos aproximar de um ensino e aprendizagem coerente com os gestos intelectuais que a estrutura matemática exige.

Vamos considerar que os valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 se referem ao número de cada carta que um mágico "adivinhou" e que 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 é a respectiva posição de cada carta em um monte de quarenta cartas. Como que os estudantes podem explicar a situação? Se escrevermos esses valores seja no quadro ou se o estudante representa no caderno, ele estará designando os elementos da situação. Caso alguém perceba que "está indo de quatro em quatro", entendemos que o sujeito faz uso de um enunciado completo, inferindo o que não é evidente; situação da função apofântica. E até mesmo a representação $y = 4x$ é uma designação com léxicos associativos.

Percebam que, uma atividade como a descrita permite que os estudantes façam uso de diferentes funções discursivas, de acordo com o que já sabem. Por isso, a álgebra precisa ser pensada sobre um viés cognitivo, já que na exploração da atividade, diferentes sistemas semióticos discursivos vão surgindo, e nos mostrando que, a álgebra não é uma ampliação das operações aritméticas.

Duval (2015) especifica que pensar o ensino de álgebra de um ponto de vista matemático é: 1) Definir conhecimentos globais para serem adquiridos ao final de um ciclo; 2) Estabelecer uma decomposição desse conhecimento global em conhecimentos de base, para que se estabeleçam atividades para o que está na base; 3) Definir a progressão organizada para adquirir esse conhecimento de base. Ou seja, a partir desses três itens estamos diante de um processo regressivo, porque, decompõe o todo que deve ser ensinado em partes, entendendo que a aprendizagem das partes, dos elementos de base, vão garantir a compreensão global do conteúdo.

Um exemplo de decomposição de conteúdo é quando vamos trabalhar com equações, primeiro abordamos as letras com status de incógnita, depois, ensinamos os procedimentos de cálculo algébrico, em seguida as letras já são variáveis, e partimos para os problemas que exigem as equações para ser solucionados, de modo bem sutil. Mas, Duval (2015) afirma que pensar conteúdos em processo de decomposição regressiva é inviável. O ideal é a partir de um olhar cognitivo estabelecer os objetivos para a aquisição de equações, ou para qualquer conceito algébrico. Para isso, enfatiza que:

a) A ideia central é pensar sempre nas atividades intelectuais necessárias para que o conhecimento seja adquirido, ou seja, não focando no conteúdo a ser ensinado, mas sim, nas funções cognitivas requeridas.
b) As operações discursivas merecem atenção já que o trabalho com a álgebra apresenta diferentes sistemas semióticos envolvidos, e em geral a função discursiva referencial de designação prevalece. Temos os signos como letras, números, palavras e até mesmo símbolos, e assim, uma designação sempre se fará presente.

Assim, Duval (2015) vem explicitando que os objetivos do ensino de álgebra precisam considerar: a contemplação das operações discursivas de designação; elaboração de problemas; resolução de problemas fazendo uso de uma representação auxiliar; resolução de problemas com fórmulas; e o uso de listas abertas de números para obter o padrão de regularidade. Esse conjunto a todo momento deve levar em conta os sistemas semióticos envolvidos.

No que tange ao uso das letras temos que "a organização das letras, dos números e dos símbolos de relação em expressões que são ou os termos, ou uma equação, é puramente operatória" (DUVAL, 2015, p. 53). A álgebra permite a generalização da operação semiótica de substituição. E há quatro tipos de substituições: a) a substituição de listas abertas de números por uma expressão geral; b) substituir um enunciado ou partes dele por uma letra, mais especificamente um número do problema por uma letra, c) substituições no contexto de uma fórmula; d) substituir uma expressão literal por outra literal mais desenvolvida (DUVAL, 2015).

É preciso considerar que na presente pesquisa não estamos elaborando uma sequência de ensino de álgebra, tanto porque nosso objetivo é compreender os processos algébricos presentes na interpretação global da parábola. Entretanto, os apontamentos de Duval (2015) mencionados nesta seção contribuem para situar o cenário de ensino que temos e para comparar se os resultados que serão obtidos não estariam relacionados com essas discussões que ele aborda.

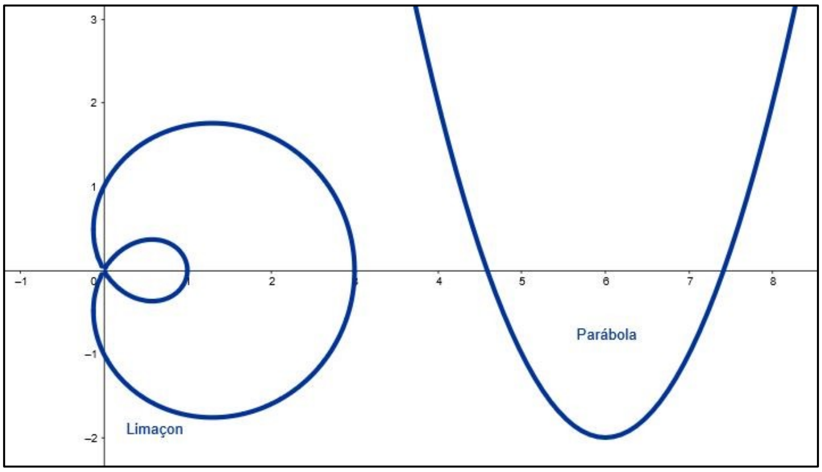
Sendo assim, a partir dos apontamentos anteriores, no presente trabalho estamos nos propondo a problematizar um pouco mais sobre como os estudantes apresentam seus gestos intelectuais quando são colocados em atividades de substituições sucessivas. A partir dos registros desses sujeitos vamos poder analisar como os processos algébricos vêm sendo mobilizados.

3.3 A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DAS PROPRIEDADES FIGURAIS

Como vamos estudar os processos algébricos presentes no esboço de curvas, vamos começar a discutir o que é esse objeto matemático geometricamente. Intuitivamente a curva é um conjunto infinito de pontos que formam uma linha, não necessariamente reta, ou podemos dizer que é o traçado gerado pelo movimento contínuo de um único ponto.

Com a ascensão da Geometria Analítica, as curvas passaram a ser estudadas como uma representação geométrica de funções reais de uma variável real. Antes disso, no máximo se considerava curva somente as retas e as circunferências, pois, era com esses elementos que os gregos se pautavam para construir as soluções de problemas. Essas denotações nos remetem a dois tipos de curvas, as curvas fechadas ou abertas. As primeiras delimitam uma região no plano, já as abertas, são curvas no plano cartesiano não fechadas. Na Figura 7, o Limaçon de Pascal é um exemplo de curva fechada, e a parábola, de curva aberta.

Figura 7 – Curva fechada e curva aberta.



Fonte: Da autora.

No Ensino Médio o esboço de curvas se limita a ser trabalhado somente no domínio de representar graficamente funções, ou seja, quando quer se representar o gráfico da função (SILVA, 2008). Assim, o esboço é direcionado somente para curvas abertas. Nesse contexto, já podemos identificar que há dois registros de representação semiótica envolvidos na figura curva, o gráfico e o algébrico. Portanto, é sob esses dois registros que nosso olhar se volta neste momento, uma vez que, compreender o gráfico em sua totalidade é uma dificuldade recorrente dos estudantes da Educação Básica.

Como estamos diante de duas representações semióticas diferentes para o mesmo objeto matemático, Duval (2011a) defende que a interpretação de gráficos no plano cartesiano exige do sujeito a capacidade de discriminar as variáveis visuais[20] presentes na representação, passar da expressão algébrica para a gráfica, e vice-versa, com maior naturalidade possível, bem como, associar cada variável visual com sua respectiva alteração significativa na escrita algébrica. Assim, estaríamos possibilitando uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

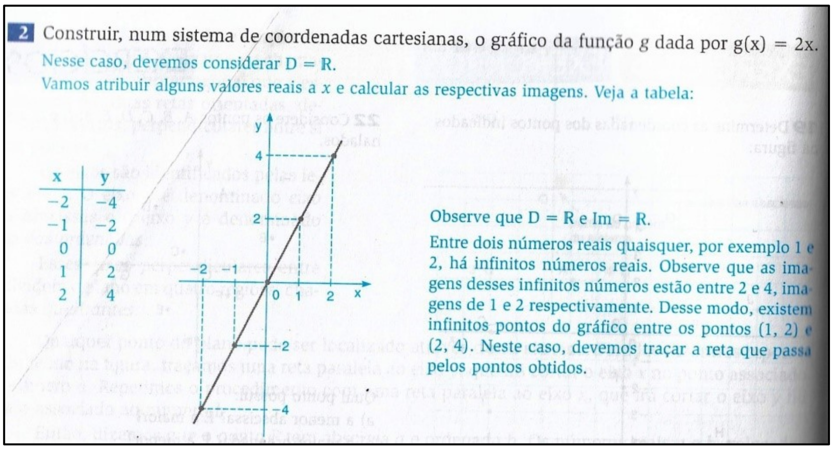
Toda essa leitura gráfica proposta propicia entender o gráfico como um todo. E está dialogando com a hipótese fundamental de aprendizagem:

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (DUVAL, 2012, p. 282).

[20] Variáveis visuais são todas aquelas modificações no gráfico que estão estritamente associadas a modificações nos parâmetros da representação algébrica da função ou da curva relacionada.

Sendo assim, estamos ressaltando a importância de passar de um registro a outro, espontaneamente. E isso nos permite problematizar o uso de um procedimento que parte da expressão algébrica para indicar um par de números por meio de uma tabela, e a localização destes pares no plano cartesiano seguido de um traçado que une os pontos marcados para representar o gráfico de uma função. O que pode ser ilustrado pela Figura 8 a seguir, retirado de um livro didático:

Figura 8 – Construção de gráficos em livro didático.


2 Construir, num sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x$.
Nesse caso, devemos considerar $D = \mathbb{R}$.
Vamos atribuir alguns valores reais a x e calcular as respectivas imagens. Veja a tabela:

x	y
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4

Observe que $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$.
Entre dois números reais quaisquer, por exemplo 1 e 2, há infinitos números reais. Observe que as imagens desses infinitos números estão entre 2 e 4, imagens de 1 e 2 respectivamente. Desse modo, existem infinitos pontos do gráfico entre os pontos (1, 2) e (2, 4). Neste caso, devemos traçar a reta que passa pelos pontos obtidos.

Fonte: Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr (2002, p. 92).

Esse procedimento denominado por Duval (2011a) de ponto a ponto apresenta alguns impasses para a apreensão do objeto matemático em questão. Primeiro, é um procedimento que só foca em um sentido da conversão entre os registros, do algébrico para o gráfico. Segundo, por fazer uso de uma representação intermediária, a tabela, acaba não evidenciando as correspondências existentes entre os dois registros. Terceiro, não passa de uma regra de codificação.

Para o primeiro argumento, já vimos que ao considerar ao menos duas representações semióticas de um objeto matemático, devemos propiciar ao sujeito a passagem de um registro de partida em outro registro de chegada, alternando o registro de chegada com o de partida, para uma melhor apreensão. “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão” (DUVAL, 2008, p. 20). Assim, constatamos que o procedimento ponto a ponto não permite contemplar essa operação cognitiva, uma vez que, dado o gráfico não há como obter o registro algébrico correspondente, se o sujeito só foi instruído numa ideia de ponto a ponto.

Para o segundo argumento Duval (2004) salienta que

> a representação intermediária (o uso de tabelas, listas, esquemas sagitais) não possui regras de formação e tratamento. Ela é uma representação que faz papel de ponte entre dois registros de representação. É muito usada, porém ocorrem muitos impasses didáticos, pois mesclam as características de dois registros, e as expressões que devem cumprir a função referencial estão enredadas (FRANCO, 2008, p. 35).

Portanto, outro problema gerado pelo procedimento ponto a ponto é que ao fazer uso de um par de números associados a um ponto, perdemos toda a associação entre as unidades significativas do registro de representação algébrico e as variáveis visuais do gráfico. Pois, de fato, a tabela com as duplas de números em nada se aproximam das modificações que um gráfico pode sofrer. E para Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) se há congruência semântica entre o par ordenado e sua representação no plano, o mesmo não ocorre entre o conjunto de pontos no plano cartesiano e a regra matemática referente a ele.

E por terceiro, estamos diante de uma regra de codificação que

> (...) permite não mais do que duas coisas: a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico, a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto, a partir de uma dupla de números. A repetição dessas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros (DUVAL, 2012, p. 275).

Sem contar que só pelo fato de marcar alguns pontos no espaço cartesiano, não temos como garantir a continuidade do traçado. E sabemos que a continuidade envolve questões de limite, o que é um assunto que não se faz presente na grade curricular do Ensino Médio.

Sendo assim, percebemos que o procedimento ponto a ponto "sugere um estudo discreto (através de pontos e pares ordenados) de algo que é contínuo (as curvas e as representações analíticas de funções reais)" (NÉ, 2013, p. 44), e em vista disso, não dialoga com uma proposta de pensar a matemática do ponto de vista cognitivo. Portanto, precisamos considerar a interpretação global de propriedades figurais, a qual faz com que não estejamos **"(...) mais na presença da associação 'um ponto - um par de números', mas na presença da associação 'variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica'"** (DUVAL, 2011a, p. 99, grifo do autor).

Para tanto, Duval (2011a) exemplifica como pensar a interpretação global para o caso da representação da função afim. Primeiramente, ele explicita quais são as unidades significativas específicas de cada registro, pois, somente discriminando as mesmas é que podemos fazer uma análise de congruência. Para o gráfico as unidades significativas são denominadas de variáveis visuais, e para a forma analítica são denominadas de unidades simbólicas significativas. Assim, pelo Quadro 3 podemos analisar as relações que podem ser estabelecidas entre as unidades significativas relevantes.

Quadro 3 – Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano[21].

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença de sinal -
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

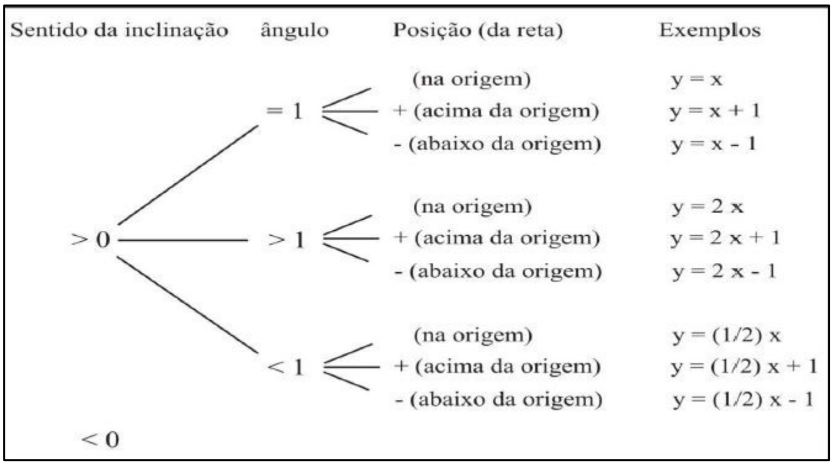
Fonte: Duval (2011a, p. 101).

A análise é pensada a partir da inclinação positiva ou negativa da reta, ou seja, considera-se ora $y = x$ ora $y = -x$, com o ângulo estabelecido no sentido horário, e o quanto esta inclinação se aproxima do eixo das abscissas, do eixo das ordenadas ou se sobrepõe ao próprio eixo. Para a parte analítica, como se tem apenas duas unidades simbólicas significativas, a e b, ambos números reais, é observado uma não congruência semântica entre as três variáveis visuais e as duas unidades simbólicas. Para tanto, a análise voltou-se para o coeficiente angular. Considerando os casos em que ele é positivo ou negativo relacionando com o sentido da inclinação, e as situações em que temos o valor do coeficiente igual, menor, ou maior que um, relacionando ao ângulo com os eixos. Sendo assim, Duval (2011a) acaba concluindo que para retas não paralelas aos eixos há dezoito representações gráficas visualmente diferentes de modo significativo, o que podemos observar pela Figura 9 a seguir[22]:

[21] A título de ilustração, pode-se encontrar uma análise, a partir do Quadro 2, de algumas retas particulares como $y = x$, $y = -x$, $y = -2x$, $y = 1/2x$, $y = 2x + 1$, $y = -1/2x - 2$ em Martins (2016), páginas 61 à 68.

[22] Para uma melhor visualização das dezoito representações gráficas citadas, consultar Silva (2008), página 137.

Figura 9 – Dezoito representações gráficas visualmente diferentes.



Fonte: Duval (2011a, p. 102).

Dada essa análise de interpretação global da reta, em Duval (2011a) fica afirmada a possibilidade de fazer um estudo semelhante para a parábola. Embora, Duval não o faça, já é de se imaginar que uma análise para outros tipos de curvas não seja tão simples assim, ainda mais se apresentar mais de dois parâmetros, como no caso da parábola, $y = ax^2 + bx + c$ sendo a, b, e c números reais e a diferente de zero. Com certeza, teremos muito mais que dezoito variáveis visuais. E de imediato, se não se conhece o traçado da curva, se faz necessário trabalhar com noções de limite e de derivada; novamente conceitos não abordados na Educação Básica.

Diante disso, estudos de Moretti (2008) vêm ao encontro desta perspectiva de interpretação global de propriedades figurais, e foca especialmente no esboço da parábola. No âmbito da teoria Registros de Representação Semiótica e sempre considerando a congruência semântica entre registros, é proposto que as curvas sejam esboçadas a partir de uma família de curvas, e, acredita-se que o uso "(...) da *translação* pode contribuir para que o esboço de curva mantenha-se bastante próximo do procedimento que permite estabelecer correspondência entre gráfico e expressão algébrica" (MORETTI, 2008, p. 152, grifo do autor). Sendo assim, o esboço com translação será exemplificado nas duas próximas seções para o caso da reta e da parábola.

3.3.1 Esboço de retas no plano cartesiano

As ideias a seguir são fundamentas nos apontamentos apresentados por Moretti (2008) para o esboço de retas. O objeto matemático reta está aqui associado ao gráfico de funções polinomiais de primeiro grau, que são genericamente representadas por $y = ax + b$, onde a, b são valores reais, com $a \neq 0$. Vale ressaltar que o coeficiente angular a é um elemento chave para obter outras retas (desde que seja diferente de zero), ou seja, estamos pensando no seguinte, dada a expressão $y = ax$ (uma função linear) podemos chegar a todas as outras funções dessa família de funções por meio da translação, pois, graficamente, $y = ax$ estará passando na origem do plano cartesiano.

Sendo assim, dada uma reta qualquer, $y = ax + b$, como associar sua representação geométrica correspondente? Há de se considerar que a pode assumir valores negativos quanto positivos, portanto, vamos estudar primeiro o caso em que o coeficiente angular seja positivo. A ideia parte do fato que $y = ax + b$ corresponde a uma translação da reta $y = ax$. Então, por uma questão de menor custo cognitivo, vamos associar translações que $y = ax + b$ (modificada) graficamente sofre no eixo das abscissas, e isso estará representado algebricamente por: $x - v$, sendo v em módulo o valor do deslocamento. Lembrando que $y = ax$ é a minha reta referência, pois, não foi transladada, precisamos manipular $y = ax + b$ de modo que fique evidente o valor do deslocamento, então, o tratamento a seguir se faz necessário:

$$y = ax + b \tag{1}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \tag{2}$$

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right) \tag{3}$$

De (1) para (2) estávamos mantendo a associação com a reta referência $y = ax$. Já de (2) → (3) percebe-se que “x –”determina um deslocamento no eixo x, sendo o valor desse deslocamento de b/a, e o segundo traço “–” especifica o sentido do deslocamento, no caso, – indica que é para a esquerda. E não podemos deixar de falar sobre o deslocamento no eixo y, o qual poderia ter sido escrito assim: $y - 0 = a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)$, o que representa que a translação ocorreu somente na horizontal.

É válido destacar a importância da escrita (3), pois, a mesma apresenta muito mais congruência semântica que a (2), se analisarmos quanto ao que se pode representar graficamente diante de tais representações algébricas.

Agora, para o caso em que o coeficiente angular é negativo, podemos pensar rapidamente por rotação de $y = ax$ em torno do eixo y; a representação algébrica será conforme (4). Assim, não há deslocamentos em relação ao eixo das ordenadas, e o deslocamento horizontal é para a direita. E a reta referência seria representada por $y = -ax$.

$$y = -a\left(x - \left(+\frac{b}{a}\right)\right) \tag{4}$$

Todavia, por mais que estamos afirmando que não ocorreram deslocamentos verticais, eles se fazem presentes sim, mas a questão é que não é o foco dada a correspondência pensada, que por sua vez, está pautada na congruência semântica. O que podemos pontuar, é que podemos fazer a mesma análise enfatizando a translação vertical e minimizando a horizontal. Vejamos, sem perda de generalidade:

$$y = ax + b \tag{5}$$

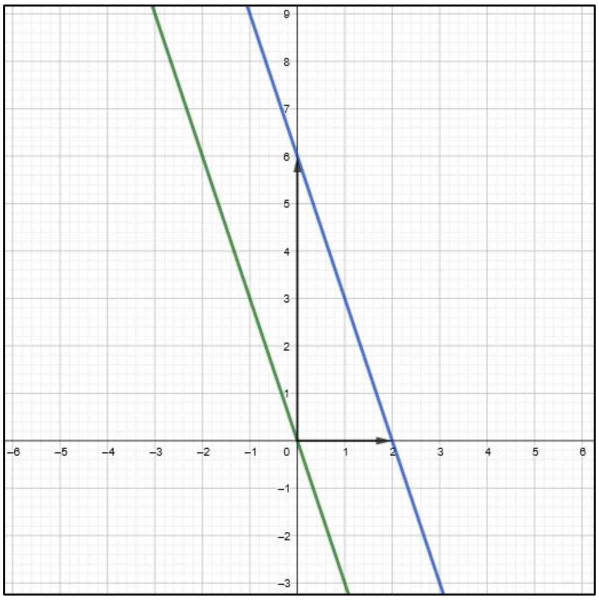
$$y - b = ax \tag{6}$$

$$y - (+b) = ax \tag{7}$$

Percebam que por (7) o deslocamento está somente no eixo *y*, e são *b* unidades para cima. Se fosse *–b*, consideraríamos *b* unidades para baixo. E não estamos considerando deslocamento no eixo das abscissas apesar dele existir. Temos que voltar nosso olhar apenas para um eixo por vez para manter a congruência semântica entre a escrita algébrica e o gráfico correspondente.

Cada translação, seja ela horizontal ou vertical, dá ênfase ora à raiz da função, ora ao coeficiente linear *b*. Assim, o que fica mais perceptível no movimento de translação horizontal é a raiz da função polinomial de primeiro grau. Já o papel do coeficiente *b*, evidencia-se no movimento de translação vertical. Na Figura 10 temos o esboço de $y = -3x + 6$, sendo que antes de reescrever a função, é preciso considerar a qual família de curvas ela pertence, no caso, $y = 3x$, a qual o ponto (0,0) lhe pertence, então, $y = -3x + 6 \leftrightarrow y = -3(x - 2) \leftrightarrow y = -3(x -(+ 2))$, ou podemos pensar em $y = -3x + 6 \leftrightarrow y - 6 = -3x \leftrightarrow y -(+6) = -3x$.

Figura 10 – Representação gráfica de y = -3x+6.



Fonte: Da autora.

E quanto ao caso de funções em que o coeficiente angular é nulo e o coeficiente linear não? Diante do exposto, a ideia de esboço é semelhante. Basta considerar a reta $y = b$ com $b = 0$ como referência, e todas as outras se obtém por translações verticais somente. Se $b > 0$, teremos $y = +b \leftrightarrow y = -(+b)$, e, caso contrário, $b < 0$, segue que, $y = -(-b)$. O que mantém sempre as mesmas considerações para o esboço da reta, seja qual caso for.

3.3.2 Esboço de parábolas no plano cartesiano

Dados os apontamentos da seção anterior sobre interpretação global e translações possíveis, vamos discorrer sobre o esboço da parábola de modo similar. A parábola é tida como "o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes F e d" (STEINBRUCH; WINTERLE, 1985, p. 204) sendo F o foco e d a reta diretriz, ou a curva que representa funções quadráticas representada por $y = ax^2 + bx + c$ com coeficientes reais e $a \neq 0$.

Novamente, para pensar no esboço de uma parábola qualquer, vamos partir de uma curva referência, no caso, $y = ax^2$, pois, a mesma se encontra na origem do plano cartesiano. É interessante discutirmos que, toda parábola com vértice na origem, possui foco em $(0, p/2)$ e a reta diretriz é $y = -p/2$, sendo $p \neq 0$, donde obtemos $y = x^2/2p$, e substituindo $1/2p$ por a, podemos representar por $y = ax^2$. Disso, já podemos fazer associações quanto à posição do foco, sem mesmo conhecer suas coordenadas, porque, se $a < 0$, o foco estará abaixo da reta diretriz.

Agora, tendo como referência $y = ax^2$, quais as translações necessárias para esboçar a curva da parábola $y = ax^2 + bx + c$? Vamos transformando até obter a translação desejada:

$$\begin{aligned} & y = ax^2 + bx + c \leftrightarrow y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \leftrightarrow y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}] + c \leftrightarrow \\ & y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \leftrightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \leftrightarrow \\ & y - \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 \leftrightarrow y - \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = a(x - \frac{-b}{2a})^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Das transformações ocorridas em (8) chegamos em $y - \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$. Portanto, já aparecem duas translações na mesma representação algébrica, que devem ser feitas, uma na vertical e outra na horizontal. Pensando bem, pouco importa a ordem escolhida para transladar primeiro, desde que as duas ocorram, o gráfico será condizente com a equação. Outro aspecto importante, é que a expressão final está revelando as coordenadas do vértice da parábola $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$; comumente também representado por $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante. Ou seja, a abordagem de fazer algumas manipulações no registro algébrico já permite obter o vértice, sem precisar memorizar fórmulas, e mais, estabelece diretamente a articulação gráfica com a algébrica.

A título de exemplificação, vamos ilustrar o esboço da seguinte parábola $y = -2x^2 - 8x - 4$. Primeiro, a mesma pertence a família das curvas do tipo $y = -2x^2$. Sendo assim, teremos:

$$y = -2x^2 - 8x - 4 \tag{9}$$

$$y = -2(x^2 + 4x + 2) \tag{10}$$

$$y = -2\left((x + 2)^2 - 4 + 2\right) \tag{11}$$

$$y = -2\left((x + 2)^2 - 2\right) \tag{12}$$

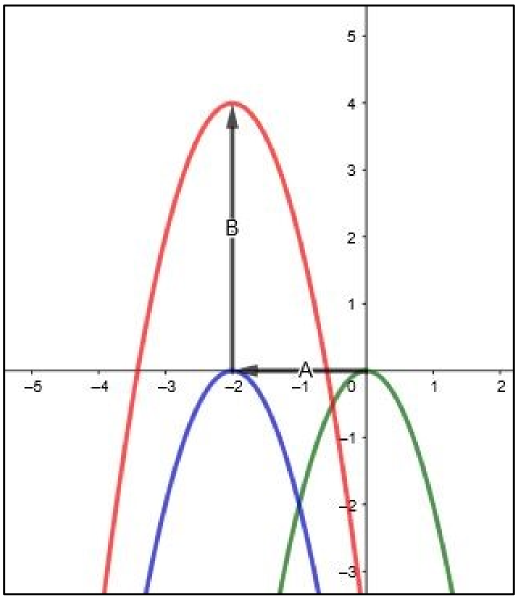
$$y = -2(x + 2)^2 + 4 \tag{13}$$

$$y - 4 = -2(x + 2)^2 \tag{14}$$

$$y - (+4) = -2(x - (-2))^2 \tag{15}$$

Após, os tratamentos realizados de (9) a (15), vamos à conversão: sabe-se que a família de curvas é $y = -2x^2$, então, pela Figura 11 temos a representação gráfica da parábola com concavidade voltada para baixo. O sentido da translação no eixo x está indicado pela flecha A, e em seguida, foi realizada a translação indicada pela flecha B.

Figura 11 – Translações para se obter y = –2x² – 8x – 4.



Fonte: Da autora.

Podemos afirmar que, o fato de precisar completar quadrados quando não se tem um trinômio quadrado perfeito, mesmo quando a equação é completa, é um processo mais moroso no tratamento, e ele é exigido também quando os registros algébricos são do tipo $y = ax^2 + bx$, mas, todos os outros casos são obtidos com menor custo cognitivo, principalmente, quando a função dada pode ser associada a um quadrado perfeito ou é do tipo $y = ax^2 + c$. Há várias ilustrações de casos particulares em Silva (2008).

Disso também decorre as afirmações do Quadro 4 a seguir:

Quadro 4 – Raízes da função quadrática quanto as translações.

Concavidade	Translação acima do eixo x	Translação abaixo do eixo x	Sem translação no eixo y
$a > 0$	Não há raízes reais	Possui raízes reais distintas	Raízes reais com duplicidade
$a < 0$	Possui raízes reais distintas	Não há raízes reais	

Fonte: Da autora.

Em síntese, nesta proposta, contempla-se a existência das raízes da função, as coordenadas do vértice, o intercepto y, a concavidade da parábola, bem como, o foco e a reta diretriz. Todos esses objetos podem ser estudados fazendo a correspondência do gráfico com o registro algébrico.

4 UMA ANÁLISE DOS PROCESSOS ALGÉBRICOS NO ESBOÇO DE CURVAS

Estamos levando em consideração que "pesquisar não se resume a listar uma série de procedimentos destinados à realização de coleta de dados, que, por sua vez, serão analisados por meio de um quadro teórico estabelecido antecipadamente para responder a uma dada pergunta" (BORBA; ARAÚJO, 2004, p. 43). No entanto, vemos a necessidade, sim, de uma sistematização coerente e flexível para atingir o objetivo proposto.

Portanto, foram elaboradas atividades de acordo com o referencial teórico apresentado nos capítulos anteriores, como meio de se obter o material empírico para análise. Essas atividades foram desenvolvidas em duas turmas de primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado de Santa Catarina. A escolha deve-se ao fato de ser nessa fase que o currículo estadual exige o trabalho com o esboço de gráficos de funções afim e quadrática. E assim sendo, a pesquisa contribuiu para a formação dos sujeitos em curso que participaram da pesquisa.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo na qual a professora-pesquisadora apresenta um possível olhar, dentre outros existentes, para o estudo em questão. E sendo a pesquisadora professora da turma, entendemos que há uma maior articulação entre professora, conhecimento e estudantes, a qual, possivelmente, faz com que a pesquisa não seja caracterizada como um caso isolado na percepção dos sujeitos envolvidos.

No que tange à realização das atividades em sala, optamos por fazer uso de alguns elementos da Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue (1996), um referencial metodológico de investigação, que se caracteriza por um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino. Por isso, a escolha e o desenvolvimento de nossas atividades se aproximam de uma sequência didática, nos moldes de alguns aspectos da Engenharia Didática.

4.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Nas pesquisas em Educação Matemática, a Engenharia Didática é uma abordagem que se individualiza como um aspecto particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas realizadas no contexto do espaço escolar, especificamente, na sala de aula. Tendo esse princípio metodológico "(...) estabelece-se uma relação entre a construção do saber matemático e um método reflexivo investigativo diante de uma sequência de atividades" (BERLANDA, 2017, p. 63).

A Engenharia Didática consiste em uma forma de sistematização da execução de determinado método na pesquisa didática, levando em consideração sempre o elo entre a pesquisa acadêmica e as práticas escolares, ou seja,

> interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa. Entendida dessa maneira, a engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização prática da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre a teoria e a prática (PAIS, 2011, p. 99).

A execução da Engenharia Didática percorre quatro fases consecutivas, de acordo com Artigue (1996), a saber, as análises prévias; a concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula; a experimentação e; a análise *a posteriori* e validação da experiência.

A primeira fase, das análises prévias, apoia-se em um quadro teórico didático geral e na introdução do quadro teórico do referencial estudado, servindo de fundamentação para a realização de todo o trabalho. Nessa fase, é recomendado olhar nosso objeto de pesquisa por três dimensões distintas, a saber:

> 1. A dimensão *epistemológica* associada às características do saber em jogo;
> 2. A dimensão *cognitiva* associada às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino;
> 3. A dimensão *didáctica* associada às características do funcionamento do sistema de ensino (ARTIGUE, 1996, p. 200, grifos do autor).

Nas análises prévias relacionadas à dimensão 1 a atenção se volta à epistemologia dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula, compreendendo também o ensino atual e seus efeitos. Já na dimensão cognitiva é o momento de se ater as concepções dos sujeitos da pesquisa, suas dificuldades, os obstáculos que estão presentes na vida escolar, e também, das especificidades do objeto de conhecimento, no caso a álgebra. A dimensão didática refere-se à rotina da sala de aula. E sempre, devemos olhar para esses aspectos levando em consideração os objetivos da investigação.

A segunda fase, da concepção e análise *a priori*, caracteriza-se pelo estudo de referencial teórico e a definição das variáveis a serem consideradas na experimentação. Pois, de acordo com Artigue (1996) o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: variáveis de comando, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado.

O objetivo dessa fase de análise *a priori* junto à Engenharia Didática é:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efectuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, funda-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (ARTIGUE, 1996, p. 205, grifos do autor).

Sendo assim, Artigue (1996) destaca a necessidade de assumir nesta fase uma parte descritiva e uma parte preditiva. Descritiva no sentido de descrever as escolhas de variáveis realizadas e preditiva com intuito de prever possíveis comportamentos diante das escolhas efetuadas, buscando mostrar que essas escolhas permitem controlar seu sentido e que, quando ocorrem, resultam da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

Na fase de experimentação uma sequência didática é formada por certo número de aulas planejadas e analisadas com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Para Pais (2011) é de extrema relevância a aplicação da sequência didática para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica. A sequência é formada por sessões nas quais é necessário atenção ao maior número possível de informações que podem contribuir para o fenômeno investigado. Muitas pesquisas exigem a observação direta de atividades realizadas pelos alunos, podendo ser também filmadas, gravadas e outras apenas descritas pelo pesquisador. Isto depende das variáveis priorizadas na análise *a priori*.

Na análise *a posteriori* e validação da experiência faz-se o tratamento das informações obtidas na experimentação. A ideia é que se atinja a realidade da produção dos alunos e se possa descrever o mais próximo possível os procedimentos de raciocínio.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008) a análise *a posteriori* é o conjunto de resultados que se pode ter das informações obtidas e que acabam contribuindo para melhoria dos conhecimentos do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

Diante de todos esses apontamentos anteriores, vale ressaltar que:

> o desenvolvimento das aulas a partir de princípios da Engenharia Didática deve ser entendido por atividades investigativas, nas quais os saberes matemáticos são dispostos de maneira a pesquisar, discutir, refletir, de forma que o aluno perceba a complexidade dos objetos estudados. A aprendizagem se consolida com a compreensão do que está sendo trabalhado, de como está sendo desenvolvido. Nessa

> abordagem metodológica, o importante é o processo como se dá a aprendizagem (BERLANDA, 2017, p. 63).

É crível considerar que, ao realizar a análise da sequência didática, estamos levando em conta que o pesquisador é elemento constitutivo da mesma, pois, há um contexto, aspectos da construção histórico-social e subjetividade envolvidos, todos os aspectos que interferem na pesquisa de modo direto ou indiretamente.

4.2 O PERCURSO METODOLÓGICO

Levando em consideração a Engenharia Didática, e suas quatro etapas, vamos apresentar de modo ordenado as relações que cada fase possui com nossa pesquisa. Lembrando que, estávamos buscando uma sistematização e rigor na elaboração das atividades, por isso nos apoiamos na Engenharia, mas, somente alguns aspectos são contemplados. Nossa *análise prévia* se materializou no estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, das funções discursivas, na aprendizagem de álgebra sob um viés cognitivo e na interpretação global das propriedades figurais por meio de translações para o esboço da reta e da parábola. Isso tudo pode ser encontrado no Capítulo 2 e no Capítulo 3.

Na fase de *concepção e análise a priori* temos a sequência de atividades em si, que norteiam o trabalho em sala de aula, e que servem para traçar os objetivos das atividades e os meios que podem levar os estudantes alcançarem tais objetivos. É a sistematização da sequência de atividades e a preparação do material necessário. Será apresentada em detalhes na subseção 4.2.1.

Na etapa de *experimentação* é a realização das aulas que se concretiza. Aqui apresentamos os registros dos estudantes, pontos positivos, situações conflituosas, ou seja, os dados são levantados e registrados para servir de base ao próximo passo da Engenharia. Utilizamos a subseção 4.2.2 para expor o ocorrido. Concomitantemente apresentamos uma *análise a posteriori* à luz do referencial teórico explorando os procedimentos adotados pelos estudantes durante a realização da atividade e confrontamos com o que foi elencado na análise *a priori*. Nossa experimentação ocorreu na Turma A, composta por 20 estudantes matriculados, e na Turma B, com 32 estudantes matriculados.

4.2.1 A sequência de atividades

Dado nosso objetivo o qual envolve estudar os processos algébricos presentes no esboço da reta e da parábola, nossas atividades estão fortemente atreladas ao esboço dessas curvas, portanto, o contexto[23] escolhido, foi o próprio contexto matemático. E sendo assim, as atividades envolvem os procedimentos para esboçar a parábola e dado o gráfico, obter a representação da equação correspondente.

Diante do tempo que tínhamos para desenvolver a pesquisa, optamos por separar em seis situações e isso acabou resultando em um total de doze aulas, o que corresponde a um período de aproximadamente um mês, dado que as aulas em cada turma são compostas de três aulas semanais de quarenta e cinco minutos cada. Ficando distribuídas as atividades da seguinte forma:

Quadro 5 – A esquematização da sequência de atividades.

Situações didáticas	Quantidade de aulas	Assunto abordado	Objetivo
1ª situação	2 aulas	Trinômio quadrado perfeito	Reconhecer um trinômio quadrado perfeito.
2ª situação	2 aulas	Esboço da reta	Registrar a representação gráfica da reta no plano cartesiano.
3ª situação	1 aula	Equação da reta	Determinar a equação da reta fazendo a correspondência entre as variáveis gráficas visuais e as unidades significantes da equação.
4ª situação	4 aulas	Esboço da parábola	Esboçar a parábola por meio de translações e do trabalho com trinômios quadrados perfeito.
5ª situação	2 aulas	Equação da parábola	Determinar a equação da parábola considerando as variáveis gráficas visuais e as unidades significantes da equação.
6ª situação	1 aula	Avaliação	Analisar cada questão fazendo uso adequado de algum aspecto do objeto matemático necessário para obter a solução.

Fonte: Da autora.

Por uma questão de organização, de sistematização da presente pesquisa e para fazer sentido para a aprendizagem do aluno houve a necessidade de separar em seis situações a sequência de atividades, embora, cada situação, principalmente as que são específicas da reta e da parábola, sozinhas não dão conta de contribuir com a efetiva apreensão do objeto matemático envolvido, porquê, somente na dependência da segunda situação (*esboço da reta*) com a terceira (*equação da reta* - do Quadro 5) e na articulação entre ambas as situações, bem

[23] Entendemos como contexto tudo que diz respeito ao "(...) universo experiencial associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana em que o aluno tem maior ou menor experiência pessoal, ou remeter para o universo matemático" (PONTE; QUARESMA, 2012, p. 196).

como, da quarta situação (*esboço da parábola*) com a quinta situação (*equação da parábola*), além do trabalho com a reta dar suporte a alguns pontos da atividade com a parábola é que se chega perto de uma compreensão global do assunto abordado.

4.2.1.1 Análise a priori da primeira situação: trinômio quadrado perfeito

A situação 1, conforme Apêndice A, justifica-se pois, na quarta situação ela se faz muito presente. Sem uma revisão a sequência pode tornar-se muito difícil para os estudantes. E também, é bem provável que o professor tenha mais trabalho e ao mesmo tempo os alunos podem apresentar muito mais questionamentos, o que pode fazer com que se distancie em alguns momentos do foco da situação.

A primeira situação poderia ser trabalhada imediatamente antes da quarta onde se esboça a parábola. Entretanto, optou-se por colocá-la em primeiro para aumentar o tempo de estudo dos sujeitos envolvidos, já que assim, quem sentisse necessidade poderia ir estudando trinômio quadrado perfeito por outras fontes fora da sala de aula (prática muito comum hoje em dia com o acesso a *internet* nos *smartphones*). Além do mais, entendemos que a escolha não faz da situação um assunto isolado, porque ele ganha utilidade no esboço da parábola e esse é um argumento recorrente durante a aula com trinômios.

Com um olhar mais atento para as questões da primeira situação, podemos afirmar que com os primeiros exemplos é possível discutir a ideia de equivalência entre expressões com diferentes representações remetendo a operação discursiva de expansão formal, já que $(x+9)^2$ pode ser substituído pelo trinômio $x^2+18x+81$, ou vice-versa.

Iniciar com uma atividade de ligar as colunas de modo correspondente coloca o estudante em uma situação mais calma para relembrar a estrutura de um trinômio quadrado perfeito. Sendo que, o trabalho com trinômios que não podem ser considerados quadrados perfeitos corrobora para melhor compreender o que é um. E por fim, fazer uso da propriedade distributiva é fundamental por duas razões, uma para servir como conferência se a substituição foi realizada de modo correto, e outra, porque permite trabalhar com as regras dessa representação, que muitas vezes é realizada de modo equivocado pelos estudantes.

Há um ponto que não está contemplado a fundo na primeira situação. Justifica-se porque ao longo do processo de esboço de gráficos de parábolas não aparecem trinômios cujo coeficiente do termo ao quadrado seja diferente de um para reconhecer se é trinômio quadrado perfeito. Portanto, apenas menciona-se um trinômio quadrado perfeito obtido de uma representação como $(3x+10)^2$ para colocar em discussão essa representação. O emprego de letras diferentes serve para fortalecer a ideia que o que importa é a designação que se faz delas no conjunto da expressão.

4.2.1.2 Análise a priori da segunda situação: esboço da reta

Na segunda situação (Apêndice B) entendemos que a noção de reta já é algo visto em anos anteriores pelos alunos, portanto, não seria algo que não faria sentido apresentando diretamente no quadro com a representação geométrica. Trabalhando com a reta no plano cartesiano é possível que a atividade cognitiva de formação de uma representação identificável entre em ação.

Com essa segunda situação, almejávamos discriminar em um primeiro momento as variáveis visuais gráficas da reta, como estabelecido no Quadro 3, com foco no sentido da inclinação. Apesar de que discutimos também casos sobre o ângulo formado com o eixo das abscissas quando o coeficiente angular era diferente de um. A opção pelo trabalho voltado para o sentido da inclinação, a nosso ver, já dava conta de alcançar o objetivo da aula.

Na Subseção 3.3.1 discorremos que podemos considerar a translação vertical a partir da origem do plano cartesiano, no eixo das ordenadas, ou a translação horizontal, no sentido do eixo das abscissas. Para as atividades em sala, optamos por trabalhar somente com as translações verticais no caso da reta, porque entendemos que essa prática já instruiu o olhar do aluno para o esboço da parábola, a qual será primeiramente translada no eixo y de modo que o esboço da abertura da parábola é mantido com mais facilidade, do que se fosse transladado inicialmente para a esquerda ou à direita.

A ideia com o primeiro exemplo escolhido $y = x$ é dar sentido à posição da reta no plano cartesiano com sua representação algébrica. Essa reta divide o plano cartesiano ao meio e assim, a construção do processo de esboço torna-se mais natural, pois, a partir de sua posição na origem do plano passamos a falar de suas possíveis translações. Deixar para o final casos em que o coeficiente angular seja diferente de um contribui para afirmar o raciocínio de que há retas que passam pela origem, mas, não estão em uma angulação de quarenta e cinco graus com o eixo das abscissas.

A passagem de $y -6 = x$ para $y-(+6) = x$ torna-se obrigatória para poder associar os diferentes registros, algébricos e gráficos, de modo semanticamente congruente. Compreender "*y*-" como sendo a translação no eixo y, e "+6" como o sentido para cima de seis unidades, faz com que a escrita $y-(+6) = x$ seja necessária; escrita essa que não é comum o uso em matemática, mas colabora para mostrar que $y = x + 6$, $y - 6 = x$ e $y-(+6) = x$ representam o mesmo objeto, e mais, cada expressão pode ser substituída pela outra sem perda de referência. Assim, desde o início a operação cognitiva de expansão formal já deve se fazer presente no desenvolvimento da atividade pelo aluno.

Um ponto importante da estrutura do esboço da reta é que ao mesmo tempo que se faz necessários conhecer as variáveis visuais gráficas, estamos relacionando elas com as unidades simbólicas do registro algébrico. Na matemática, essa prática irá proporcionar uma melhor compreensão do objeto matemático abordado, bem como, se este passo do processo for bem compreendido, julgamos que a terceira situação ocorrerá de modo mais espontâneo.

4.2.1.3 Análise a priori da terceira situação: equação da reta

A partir da representação gráfica obter a equação da reta é um dos diferenciais da presente sequência de atividades, porque geralmente este sentido da conversão entre os registros de representação semiótica não são abordados (Apêndice C). Como foi proposto na segunda situação o esboço de retas com várias variações, e até mesmo, com coeficientes racionais, entendemos que dará suporte para que a terceira situação seja desenvolvida de modo mais natural. Inclusive é com esta etapa que se almeja solidificar a interpretação global das propriedades da reta. Dado que o grau de congruência entre expressão algébrica e gráfico é alto na forma que estamos trabalhando a reta, julgamos que um exemplo no quadro é suficiente para colocar o aluno em ação.

4.2.1.4 Análise a priori da quarta situação: a álgebra no esboço da parábola

Mesmo que nos Anos Finais do Ensino Fundamental já esteja previsto o trabalho com o gráfico da parábola no estudo de funções quadráticas polinomiais de segundo grau, se faz pertinente iniciar com a definição de parábola como ente geométrico. Com a definição podemos buscar rigor no esboço do gráfico no sentido de melhorar o desenho quanto à abertura e entender a existência do eixo de simetria.

Semelhante ao que foi realizado para o estudo da reta, aqui vamos estender a ideia para o trabalho com a parábola. Por isso, ao iniciar temos a família das parábolas que são do tipo $y = x^2$ e as que são $y = -x^2$. Veja Apêndice D. A partir dessa representação o aluno será conduzido ao conceito de concavidade e conforme for surgindo às outras famílias, falar-se-á suavemente sobre a abertura, sendo que no momento não vamos fazer cálculos com o foco e com a reta diretriz, pelo fato de sobrecarregar a atividade para o aluno, além do mais, não contemplar a fundo esses elementos não compromete o estudo em questão. Nos casos em que a parábola admite raízes reais elas serão obtidas e com a marcação delas no plano cartesiano o traçado da abertura já fica mais preciso.

Já foi discorrido no Capítulo 3, seção *A Interpretação Global das Propriedades Figurais*, como a passagem da equação da parábola para a representação gráfica está estruturada dentro da teoria dos Registros de Representação Semiótica e embasada no processo por meio de translações no plano cartesiano, portanto, aqui vamos nos ater aos processos algébricos de fato envolvidos. A partir dos apontamentos de Duval (2015) entendemos que devemos partir do caso mais geral, ou seja, do caso em que temos que fazer mais tratamentos com a equação da parábola até chegar no formato $y - (y_V) = a(x - x_V)^2$, onde x_V, y_V são as coordenadas do vértice e a um número real diferente de zero.

Sendo assim, elencamos quatro itens essenciais quando vamos fazer o tratamento algébrico:

a) Colocar em evidência;
b) Reconhecer um trinômio quadrado perfeito;
c) Completar quadrado;
d) Reescrever (substituir) o trinômio quadrado perfeito com outra representação.

Os quatro itens estão envolvidos na função discursiva de expansão, cuja a operação de comando é a de substituição. De certa forma, podemos afirmar que esses itens quando ocorrem, seguem uma hierarquia na sequência em que foram elencados, podendo um ou outro ficar de fora dependendo da equação dada. Independente de qual for a equação, sempre será preciso pensar sobre qual família de parábola pertence a equação e se é necessário colocar em evidência o coeficiente a ou não.

Já afirmamos anteriormente que a álgebra permite a generalização da operação semiótica de substituição, e são quatro tipos de substituições (DUVAL, 2015):

1) Substituição de listas abertas de números por uma expressão mais geral;
2) Substituição de enunciado ou partes dele por uma letra;
3) Substituição em fórmulas;
4) Substituição de uma expressão literal por outra mais desenvolvida.

Aqui poderemos perceber fortemente que a operação se constitui em substituir uma expressão literal por outra literal mais desenvolvida que se faz presente. Processo esse importante, tanto para o aluno compreender que cada equação diz respeito ao mesmo objeto matemático e que há uma relação de equivalência entre elas, bem como, somente a que está no formato $y-(y_v) = a(x- x_v)^2$ com o coeficiente a diferente de zero serve para esboçar o gráfico de modo significativo.

O próximo passo consiste em reconhecer se já há um trinômio quadrado perfeito na equação. Estamos diante de uma operação de designação que com certeza exigirá retomar as discussões realizadas na primeira situação da sequência de atividades proposta. Em caso afirmativo, presença de um trinômio quadrado perfeito $x^2 + bx + c$, realiza-se a substituição pela escrita no formato $(x + \frac{b}{2})^2$ sendo $(\frac{b}{2})^2 = c$. Observe que nesse item sempre o termo com x^2 do trinômio quadrado perfeito terá o coeficiente igual a um, pelo fato do passo anterior colocar em evidência o coeficiente.

Agora, se não temos um trinômio quadrado perfeito, faz-se necessário completar quadrado para ter. Feito isso, realiza-se a substituição. Os outros tratamentos que seguem são mais simples, e de certa forma mais presentes na vida escolar do aluno, por isso, não damos tanto destaque a eles, embora, eles precisam ocorrer para obter o formato da equação desejada. De acordo com Duval (2002) as atividades de colocar em evidência o fator comum, completar quadrado sem alterar o valor verdade da equação, substituir a escrita do trinômio quadrado perfeito é um requisito muito mais semântico do que sintático.

Em síntese, podemos exemplificar do seguinte modo conforme atividade em Apêndice D:

$y = 2x^2 - 8x - 10$	*Precisa colocar em evidência? Sim.*
$y = 2(x^2 - 4x - 5)$	*Não temos um trinômio quadrado perfeito. Deve-se completar.*
$y = 2(x^2 - 4x + 4 - 4 - 5)$	*Há um trinômio quadrado perfeito. Vamos substituí-lo.*
$y = 2((x-2)^2 - 9)$	*Agora, seguir com os tratamentos necessários para chegar em*
$y = 2(x-2)^2 - 18$	$y-(y_v) = a(x- x_v)^2$.
$y + 18 = 2(x-2)^2$	
$y-(-18) = 2(x-(+2))^2$	

Dado esses apontamentos, todas as equações colocadas no Apêndice D são pertinentes porque elas permitem trabalhar com diferentes transições durante o tratamento algébrico, ou seja, as quatro situações ocorrem de modo variado, principalmente porque, as equações foram escolhidas considerando formatos do tipo: $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$ e $y = ax^2 + c$ onde a, b e c são números reais e a diferente de zero.

4.2.1.5 Análise a priori da quinta situação: a equação da parábola

Determinar a equação da parábola dado seu gráfico é uma atividade praticamente inexistente nas aulas de matemática. Por meio do processo de completar quadrado e translação conseguimos fazer que fosse possível a prática de trabalhar a conversão no sentido gráfico para equação. A ideia é fazer uso de $y- (\ \ ) = \_(x- (\ \ ))^2$ para obter a equação. Entre parênteses completamos com as coordenadas do vértice da parábola, e onde está sublinhado é preciso fazer referência a família da parábola e sua concavidade. Em teoria, o que temos é uma situação com congruência semântica, já que cada parte da expressão possui relação direta com alguma variável visual da representação gráfica.

A expressão $y- (\ \ ) = \_(x- (\ \ ))^2$ não será vista pelo aluno como algo estranho, pelo contrário, se antes tínhamos que reescrever a equação inicial, ou seja, fazer sucessivas substituições para chegar no formato desejado, o qual era possível relacionar com o esboço do gráfico, intuitivamente, ao partir do gráfico, é com ela que devemos trabalhar.

Como estamos diante de uma primeira experiência, com o propósito de não sobrecarregar com cálculos, no momento não vamos propor o trabalho diretamente com o foco da parábola. O próprio processo de completar quadrados já é de certa forma exigente cognitivamente. Então, vamos sempre informar o valor do coeficiente a quando for diferente de 1 e -1, intuindo que fazendo isso o objetivo de compreender a relação da escrita algébrica com a gráfica será atingido.

4.2.1.6 Análise a priori da sexta situação: avaliação

Estamos interessados nos processos algébricos presentes no esboço de curvas, sendo assim, sem perder a importância da compreensão dos objetos parábola e reta quanto a coordenação de seus registros de representação geométrico e algébrico, desenvolvemos uma avaliação para ser realizada em uma hora-aula, com aspectos chaves das atividades realizadas. Claro que dado o tempo de avaliação, quarenta e cinco minutos, muitos outros itens ficaram de fora, mas, pensamos que as questões elencadas são potenciais para fechar nosso trabalho de pesquisa.

Na questão 1 estamos diante de três equações com formato $y = ax^2 +bx +c$, $y = x^2 +bx +$c e $y = ax^2 + bx$. Deixamos de fora o caso $y = ax^2 +c$ e também a reta, pelo tempo de prova e porque as manipulações algébricas não iriam proporcionar tantas discussões como os outros casos. Na ordem em que estão postas colaboram para realizar a avaliação com êxito, por partir de um caso mais geral e depois seguir com passos particulares do caso geral. Acabam por retomar aspectos já discorridos nas análises *a priori* das atividades anteriores. Vejamos as resoluções no Quadro 7.

Na questão 2 temos duas parábolas e uma reta para fazer a conversão. Almejamos que após as aulas os alunos sejam capazes de analisar que representações gráficas diferentes como a da reta e da parábola possuem equações específicas, bem como, as variações gráficas visuais da parábola e suas respectivas variações nas unidades significantes da equação.

Quadro 6 – Resolução da questão 2 da avaliação.

a) $y-(0) = (x-(+3))^2$ $y = (x-3)^2$ $y = x^2 -6x +9$	b) $y-(-4) = 3(x-(-2))^2$ $y +4 = 3(x+2)^2$ $y = 3(x^2 +4x +4) -4$ $y = 3x^2 +12x +12 -4$ $y = 3x^2 +12x +8$	c) $y-(+7) = x$ $y -7 = x$ $y = x +7$

Fonte: Da autora.

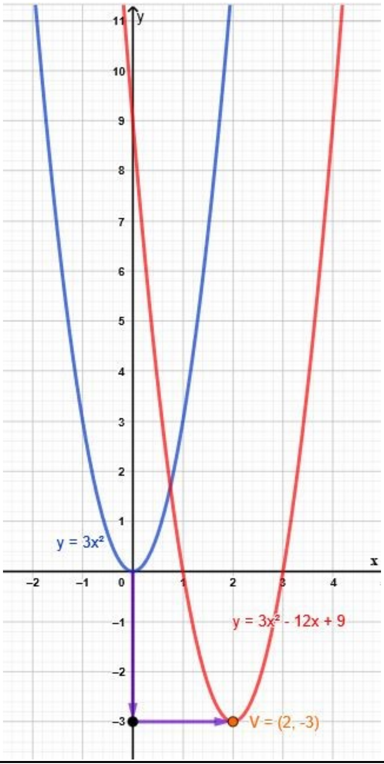
Quadro 7 – Resolução da questão 1 da avaliação.

a) $y = 3x^2 - 12x + 9$

$y = 3(x^2 - 4x + 3)$
$y = 3((x-2)^2 - 4 + 3)$
$y = 3((x-2)^2 - 1)$
$y = 3(x-2)^2 - 3$
$y + 3 = 3(x-2)^2$
$y - (-3) = 3(x - (+2))^2$

As raízes reais se existirem:

$y + 3 = 3(x-2)^2$
$1 = (x-2)^2$
$\pm\sqrt{1} = x - 2$
$\pm 1 = x - 2$
$x' = 3$ e $x'' = 1$

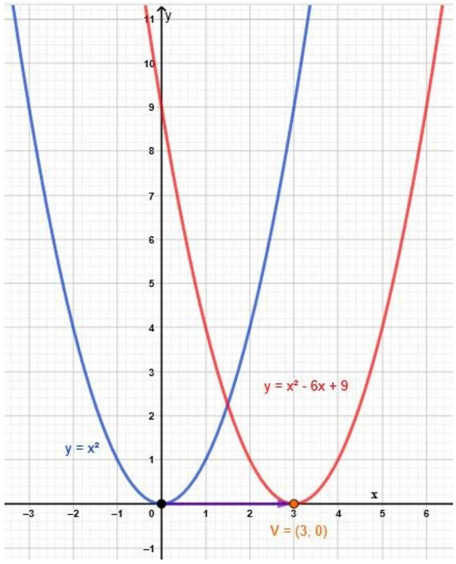


b) $y = x^2 - 6x + 9$

$y = (x-3)^2$
$y = (x - (+3))^2$

As raízes reais se existirem:

$y = (x-3)^2$
$0 = (x-3)^2$
$\pm\sqrt{0} = x - 3$
$0 = x - 3$
$x' = x'' = 3$

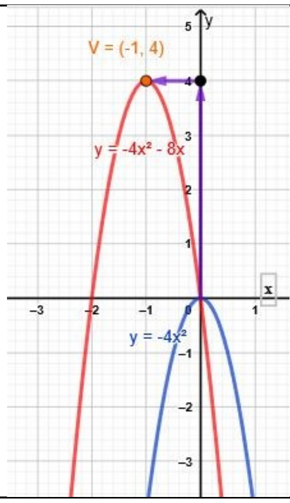


c) $y = -4x^2 - 8x$

$y = -4(x^2 + 2x)$
$y = -4((x+1)^2 - 1)$
$y = -4(x+1)^2 + 4$
$y - 4 = -4(x+1)^2$
$y - (+4) = -4(x - (-1))^2$

As raízes reais se existirem:

$y - 4 = -4(x+1)^2$
$0 - 4 = -4(x+1)^2$
$-4 = -4(x+1)^2$
$1 = (x+1)^2$
$\pm\sqrt{1} = x + 1$
$\pm 1 = x + 1$
$x' = 0$ e $x'' = -2$



Fonte: Da autora.

4.2.2 A realização das atividades e uma análise *a posteriori*

Diante das análises prévias, *a priori* e a experimentação vamos agora, partir para uma análise *a posteriori*. Como a análise é de cunho qualitativo, estamos muito mais interessados em como se fizeram presentes as funções discursivas, os tratamentos e as conversões durante todo o processo, e de que modo a atividade realizada permite aprofundar as discussões em torno da aprendizagem de álgebra numa perspectiva semiótica conforme Duval (2015) pondera.

Cabe observar que cada turma tinha três aulas semanais. Na turma A as aulas ocorriam uma em cada dia da semana, já na turma B havia um dia da semana em que duas aulas eram seguidas. A turma A possuía 20 alunos sendo que no ano letivo anterior já eram uma turma com a mesma quantidade de alunos e os mesmos estudantes. A turma B era formada por alunos oriundos de escolas diferentes, apresentava sete alunos que estavam fazendo o primeiro ano pela segunda vez, e havia uma variação na idade-série grande.

Na primeira situação, a qual o objetivo era reconhecer um trinômio quadrado perfeito temos que a revisão foi fundamental, porque ao dizer "hoje vamos retomar o que é trinômio quadrado perfeito. O que esse termo, trinômio quadrado perfeito, faz vocês lembrarem?" os estudantes, em sua maioria, no máximo chegaram a dizer que "*tri*" significa três, ou que *"o desenho do quadrado tem que ser perfeito"* (estavam se referindo a representação geométrica), mas, não sabiam falar[24] sobre o termo completo na matemática, ou seja, podemos afirmar que de início "trinômio quadrado perfeito" não era um objeto passível de designação, ao menos oralmente.

Diante disso, para esclarecer "quadrado perfeito" foi exemplificado casos em que temos um quadrado perfeito[25], como, o número 9, porque pode ser escrito como 3^2, ou seja, de modo mais geral, tudo que pode ser reescrito como algo ao quadrado é um quadrado perfeito (essa foi a noção de quadrado perfeito que a professora apresentou). Assim, chegamos em x^2+4x+4, que pode ser representado por $(x+2)^2$, e exclusivamente, por ter três termos não semelhantes estamos diante de um trinômio quadrado perfeito. O processo de nomear x^2+4x+4 como trinômio quadrado perfeito foi tranquilo, embora, não aceitaram e/ou questionaram que poderia ser reescrito como $(x+2)^2$.

[24] As falas citadas nesta subseção são próximas das que foram ditas em aula. Não estávamos gravando. Elas foram anotadas após a aula dada, portanto, somente reproduzem a ideia do contexto da situação presenciada.

[25] Usamos como referência o site Clubes de Matemática da OBMEP: http://clubes.obmep.org.br/blog/quadrado-perfeito/. Acesso em: 25 jun. 2019.

Quando é escrito no quadro "*x^2+4x+4 é um trinômio quadrado perfeito porque pode ser representado por um quadrado perfeito $(x+2)^2$*" e "*$x^2+4x+4 = (x+2)^2$*" (conforme Apêndice A) houveram questionamentos em ambas as turmas sobre a veracidade da equivalência ou o por quê. A expansão cognitiva formal no primeiro ano do Ensino Médio já deveria estar consolidada para a situação apresentada e não está. Tanto porque, ao fazermos uso da propriedade distributiva para expandir $(x+2)^2$, foram poucos os estudantes das turmas os quais mencionaram que o processo já era conhecido por eles, lá dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Duval (2002) já pondera que os alunos possuem dificuldade em ver que uma letra pode ser substituída por outras e, acima de tudo, por um agrupamento de outras letras. E quando se trata de desenvolver ou simplificar expressões, acabam não pensando em usar as identidades notáveis que eles conhecem.

Usamos os números 9, 49, 144 como exemplos de quadrados perfeitos. Apenas um estudante, da turma B, levantou a discussão que quadrados perfeitos seriam sempre números positivos, então, tem sim semelhança a um quadrado, já que tudo isso representa área de quadrados. Ampliei a ideia dele: "*Não necessariamente é isso. Pensa comigo, se 9 é a área do quadrado, então três é a medida do lado, concorda? Por que $3^2 = 9$*". Ao mesmo tempo fez-se a representação de um quadrado com lados medindo 3. "*E no caso de $x^2+4x+4 = (x+2)^2$, o que podemos dizer? Comece por aqui.*"; (eu circulei o segundo membro da equivalência). Não demorou para ele afirmar que não podemos relacionar com quadrado. Primeiro perguntou "*O x é qualquer valor?*". "*Se for pode ser que $x+2$ dê um número negativo daí não pode ser o lado do quadrado*".

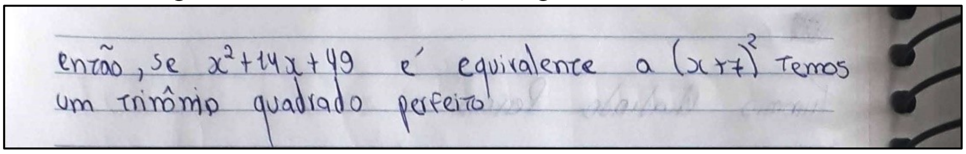
Esse fato denota a presença de funções discursivas, dentre elas, a função apofântica por se tratar de frases completas e a função de expansão discursiva com ênfase na operação acumulativa. O discurso do estudante apresenta um valor epistêmico e lógico coerente até certo ponto, o que nos mostra a importância do papel do professor na condução do raciocínio, sendo que, querer dar uma explicação para o termo trinômio quadrado perfeito da forma que foi posto não causou obstáculos de inconsistência conceitual.

Além do mais, isso vem ao encontro do que Pluvinage e Flores (2016) afirmam sobre o trabalho diante de produtos notáveis, no nosso caso serve para trinômio quadrado perfeito, não deve ser pensado com o uso de figuras planas, por levar a construção de uma ideia que não pode ser usada o tempo todo, a não ser para um contexto específico, o conjunto dos números reais com exceção dos números negativos. Contexto o qual quase não se faz presente em Matemática, porque em geral são sempre os números reais que permeiam as atividades.

Outro aspecto a ser discutido é o pensamento indutivo que o estudante apresentou. Partindo de exemplos numéricos que eram quadrados perfeitos fez conjecturas que contestavam até a fala inicial da professora. O que é de grande valia, porque além de mostrar que temos sujeitos ativos em aula, permite refletir sobre o papel da indução provocado por nossos exemplos, e questionar até que ponto isso pode ser tido como propício na aprendizagem de matemática.

Claro que houve estudantes que sabiam desenvolver o termo ao quadrado após a primeira expansão formal, de $(x+2)^2$ para $(x+2)(x+2)$, outros não faziam ideia. Sem contar que foi preciso discorrer sobre como sabemos que 5^2 equivale a 25, para associar as regras envolvidas no tratamento do registro algébrico. Assim, os processos foram sendo justificados no nível de conhecimento dos estudantes e tornando-se mais claros a eles. Pela Figura 12 ilustramos que houve uma reprodução muito próxima à forma que a professora estava registrando no quadro a teoria quando a pergunta "*$x^2+14x+49$ é trinômio quadrado perfeito?*" foi lançada.

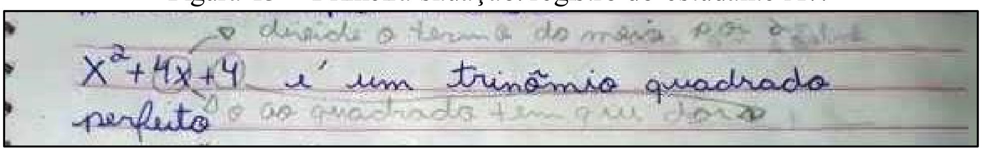
Figura 12 – Primeira situação: registro do estudante B18.



Fonte: Acervo da autora.

Como ponderado na análise *a priori*, a atividade de ligar as colunas se mostrou tranquila aos estudantes. Foi importante para se sentirem capazes e por dentro do assunto. Além de fazerem com agilidade fizeram corretamente. A turma A foi respondendo verificando se era mesmo um trinômio quadrado perfeito, como a ideia da Figura 13, por mais que era só para ligar as colunas. Nas anotações do estudante A7 ele escreveu a lápis o que entendeu para reconhecer se é trinômio quadrado perfeito: *divide o termo do meio por 2. O [resultado] ao quadrado tem que dar*. Apesar da forma simplificada que ele escreveu a frase está coerente para compreender situações em que se tem trinômios com coeficiente 1 no termo x^2.

Figura 13 – Primeira situação: registro do estudante A7.



Fonte: Acervo da autora.

A turma B, em sua maioria, olhava diretamente para o último termo, como por exemplo, o número 121, e já procurava onde estava o 11 na segunda coluna, porque perceberam a relação. No conjunto das atividades isso não se mostrou um problema, porque na próxima atividade quando a turma B começou a responder a questão a qual tinha que analisar se o trinômio dado era trinômio quadrado perfeito para reescrevê-lo, eles estavam considerando somente o último termo, e mais, se não fosse um número com raiz exata já afirmavam que não estavam diante de um trinômio quadrado perfeito. Por isso que diante da situação, a professora teve que elaborar na hora o seguinte: x^2+8x+9, $x^2+50x+36$ e $x^2+100x+64$. O que gerou um momento de reflexão na turma e fez com que os estudantes direcionassem o olhar não somente para o último termo, mas, para o termo que possui x também.

A questão "*desenvolva cada expressão a seguir*", conforme Apêndice A, colaborou para reforçar a ideia do que é um trinômio quadrado perfeito, como previsto. Na turma A, os estudantes desenvolveram toda a expressão, embora, ao longo do caminho foram percebendo que estavam chegando aos trinômios já abordados na questão anterior. Na turma B, alguns já escreveram direto, por exemplo, $(x+50)^2 = x^2+100x+2500$. Pode ser que devido às discussões, os estudantes já foram adquirindo um olhar mais atento ao que estavam fazendo.

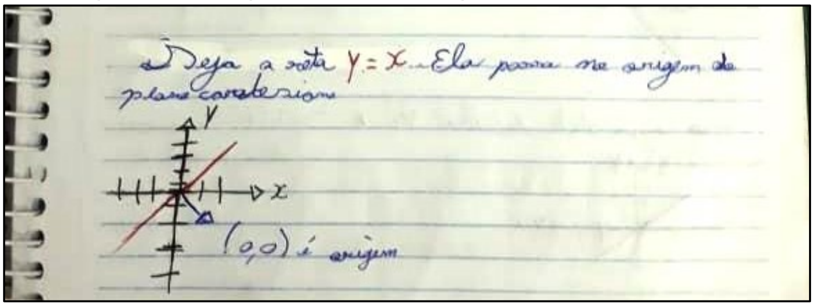
Somente o caso $(3x+10)^2$ serviu para exemplificar um trinômio quadrado perfeito no qual o termo ax^2 apresentava $a \neq 1$. A sequência de atividades levou os estudantes afirmarem que não seria um trinômio quadrado perfeito. A professora precisou retomar rapidamente, se pode ser reescrito como algo ao quadrado e tem três termos, é sim um trinômio quadrado perfeito. Isso foi compreendido. Certamente, discutimos que o modo que estávamos olhando para um trinômio e reescrevendo como algo ao quadrado, ali em $9x^2+60x+100$ já mudava radicalmente. Um olhar atento a álgebra da situação, nos mostra que, iniciar o trabalho com um conceito por um caso particular, podemos dizer, trinômios quadrados perfeito da forma x^2+bx+c e não ax^2+bx+c gera conflitos cognitivos e mais, faz mudar a forma como se trabalha, ou melhor, o tratamento dado a representação parece ser outro, porque deixa de envolver o conceito ali presente como um todo.

Houve uma preferência em se trabalhar com números decimais. Os estudantes já estavam atentos no segundo termo $-5x$ de $x^2-5x+25/4$ e a maioria optou por trabalhar com a representação na forma decimal $(x -2,5)^2$. Utilizaram a metade de -5 para ver se ao quadrado resultava em 6,25. Obviamente, a professora fez o seu registro no quadro com fração $(x -5/2)^2$ para diversificar os registros de representação. A passagem da escrita 25/4 para 6,25 já era muito utilizada em aulas anteriores, por isso, fizeram isso espontaneamente.

Cabe considerar que a terminologia *trinômio quadrado perfeito,* de certa forma, não dizia nada aos estudantes, já o registro algébrico $(x+2)^2$ com seu respectivo tratamento para chegar no trinômio foi mais espontâneo, diferentemente do tratamento no sentido inverso. Pode ser que isso seja um reflexo do ensino recebido no Ensino Fundamental. “Das três atividades cognitivas ligadas à semiose, somente a formação e o tratamento são levados em conta no ensino, mesmo em se tratando da organização de sequências de aprendizagem ou da construção de questionários de validação” (DUVAL, 2012. p. 277). Então, provavelmente os alunos tiveram um ensino que priorizou muito mais o uso da propriedade distributiva sem fazer a substituição para $(x+2)^2$, ou seja, tratamento, mas só em um sentido.

Na segunda situação ficou evidente uma dificuldade inicial na turma B para desenhar o próprio plano cartesiano. A professora fazia os esboços no quadro quadriculado e as reproduções nos cadernos apresentavam problemas quanto às escalas utilizadas nos eixos. Observe a Figura 14. Esta situação foi resolvida, na próxima aula foi oferecida aos alunos da turma B uma folha quadriculada com alguns planos cartesianos; ver Apêndice G. Dada a experiência a turma A já iniciou com a malha quadriculada. De modo geral, os tratamentos algébricos foram bem sucedidos, mas, a conversão da álgebra para o gráfico no que tange a entender a translação que deveria ser realizada, de início pareceu que não foi algo compreendido de imediato.

Figura 14 – Segunda situação: registro do estudante B27.

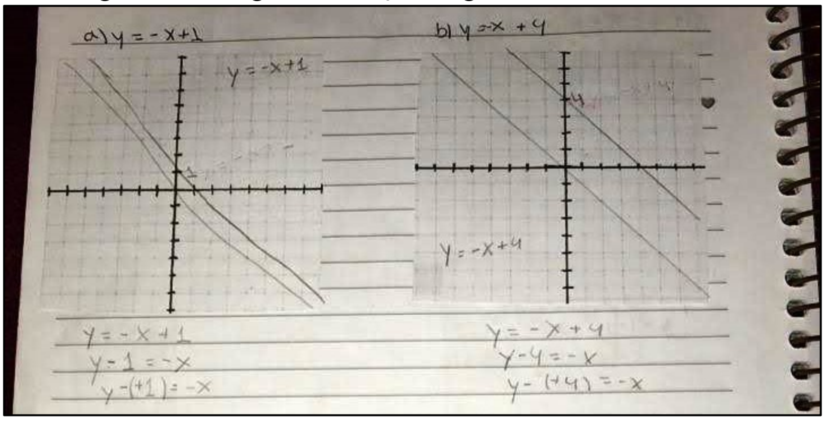


Fonte: Acervo da autora.

Em particular, alguns alunos da turma B faziam o tratamento correto na parte algébrica, embora, tinham uma dificuldade em relacionar a escrita com o deslocamento na vertical. Em suas falas ficava nítido que focavam a translação no sentido do eixo das abscissas. Por exemplo, chegavam em $y\text{-}(+7) = x$, e diziam que a reta da origem se deslocaria sete unidades para a direita. Isso só foi possível perceber por eu estar olhando os cadernos durante as construções e dialogando com os alunos. Então, como de fato existia uma translação na horizontal também, entendemos que visualmente, o eixo x chama muito mais a atenção do que o eixo *y*. Certamente, a incompreensão também estava relacionada ao significado de "*y*-", o qual era algo novo para eles, e precisou que a prática do esboço fosse reforçada pela professora.

A turma A entendeu rápido o processo de construção dos gráficos da reta e até acompanhava as explicações com perguntas por meio das quais os próprios alunos variavam os valores dos coeficientes angular e linear, o que tornou a situação de ensino muito mais dinâmica. Como pode ser visto pela Figura 15 na qual fizemos gráficos que a turma solicitou.

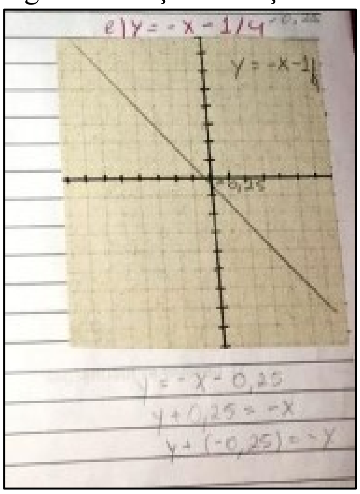
Figura 15 – Segunda situação: registro do estudante A14.



Fonte: Acervo da autora.

Embora, nos casos em que o coeficiente angular era diferente de um, de início não se percebia tanto rigor no traçado da reta final desejada em ambas às turmas. Foi preciso um acompanhamento atento para destacar o papel da translação no plano cartesiano. Pode ser que na turma A isso acontecia pelo fato de muitos alunos não desenhar a reta referência que representava a família, por exemplo, faziam direto no plano cartesiano a reta final como na Figura 16.

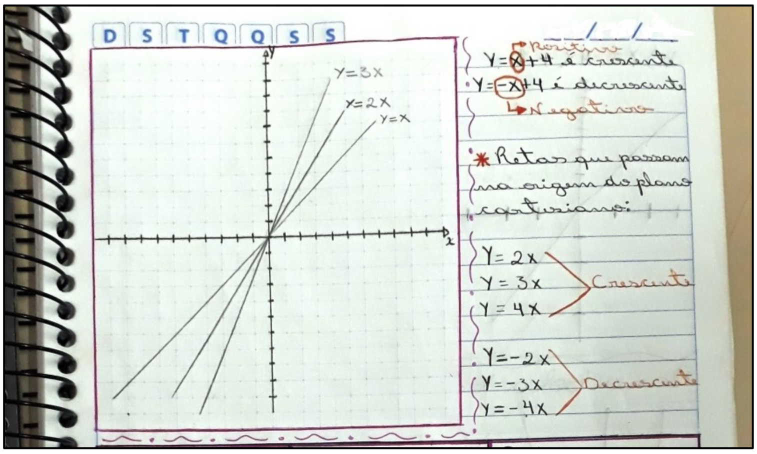
Figura 16 – Segunda situação: esboço do estudante A15.



Fonte: Acervo da autora.

De modo geral, o esboço das retas com coeficiente angular igual a um foi tranquilo. Após a discussão de situações como da Figura 17, nos casos em que tínhamos $y = 2x + 6$ e $y = -2x + 3$ foi necessária a intervenção da professora em relação a translação. Estavam considerando a translação vertical de seis unidades corretamente, embora, a reta se deslocava também seis unidades no eixo x, o que não pode ocorrer no caso da reta $y = 2x + 6$.

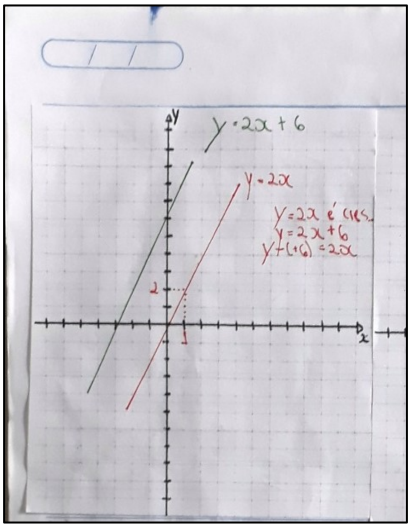
Figura 17 – Segunda situação: registro do estudante B17.



Fonte: Acervo da autora.

Fez-se uso do argumento que a reta da origem em relação a qual queremos traçar são retas paralelas, portanto, no plano nunca irão ter algum ponto em comum, pois, a ideia de translação parecia algo mais distante de ser concreto no início das atividades. Assim, foi na prática que perceberam que as retas deveriam ser paralelas, como o esboço do estudante B18 a seguir. Na primeira linha da redação alinhada a direita está escrito "*y = 2x é cres.*"; era o modo que ele encontrou para registrar a família da reta $y = 2x + 6$ e já deixar explícito que era crescente para representar corretamente o sentido da reta no plano.

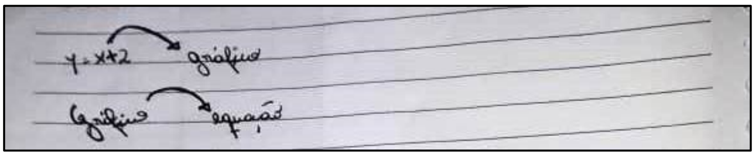
Figura 18 – Segunda situação: esboço do estudante B18.



Fonte: Acervo da autora.

No momento de fazer a conversão do gráfico para a equação algébrica (terceira situação) como havíamos previsto foi um processo simples para os alunos. Os gráficos do Apêndice C foram entregues para os alunos em uma folha impressa tal como está no quadro do apêndice. O primeiro gráfico da folha serviu para a professora usar de exemplo. Eles comentavam que estavam gostando mais dessa parte. Encontramos até uma anotação de um estudante a qual denota o sentido das conversões que podem ser realizadas (Figura 19). Era uma atividade que teria que ser mais rápida se tivessem compreendido bem o esboço da reta. E foi justamente isso que aconteceu. Podemos afirmar com propriedade que o esboço das retas por translação faz sentido aos alunos e possibilita sim uma melhor compreensão desse objeto matemático já que busca a coordenação entre os registros.

Figura 19 – Segunda situação: registro do estudante A15.

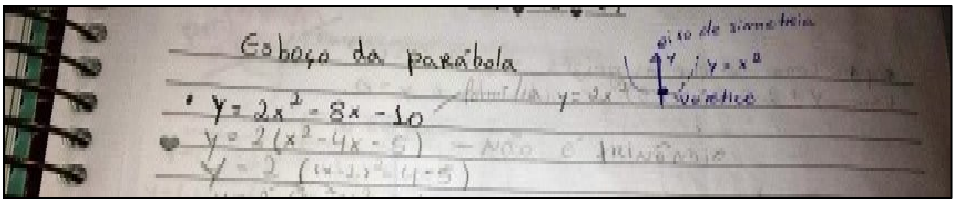


Fonte: Acervo da autora.

A ideia era partir de y- ( ) = x, fazer o tratamento necessário, para chegar no seguinte formato $y = x + 3$, por exemplo. Novamente a turma A não fazia todos os passos. Muitos alunos a partir do gráfico já escreviam direto a equação correspondente. Isso não foi um problema para a situação do momento, entretanto, sempre a professora fazia passo a passo. Eles observaram um comportamento padrão diferente, apesar de começar a distanciar-se da noção de translação no eixo y de três unidades para cima quando se tem y- $(+3)$.

A quarta situação de esboço do gráfico da parábola iniciou com a definição de parábola. Para os alunos a definição era algo novo, embora, a representação gráfica apresentou-se como algo familiar, ou seja, estava sendo designada. O estudante A14 registrou conforme a Figura 20 seu esboço de $y = x^2$. A ideia era chamar a atenção para a definição, a qual permite compreender que cada curva possui um traçado específico. Na turma A houve alguns questionamentos de como seria o gráfico se a equação fosse diferente como, $y = 2x^2$, por exemplo. Esse momento foi aproveitado e traçado alguns exemplos de diferentes famílias, para ilustrar a situação. Também chegaram a pedir sobre equações completas. Assim, entramos naturalmente em nosso primeiro exemplo.

Figura 20 – Quarta situação: registro do estudante A14.



Fonte: Acervo da autora.

Como era de se esperar, em ambas as turmas o tratamento algébrico sobre $y = 2x^2 -8x -10$ ficou sobrecarregado no sentido que não se sentiram aptos a refazer a situação sozinhos. Surgiram vários questionamentos, alguns de ordem processual, outros do por que se faz o que se está fazendo, apesar da professora ter apresentado com detalhes. Antes mesmo de partir da equação $y- (-18) = 2(x- (+2))^2$ para o esboço do gráfico discutimos todo o processo descrito. As perguntas proporcionaram explicações sobre retomar o conceito de trinômio quadrado perfeito, discutir por que está aparecendo um -4 no membro direito da equação, se antes não havia, por que colocar o 2 em evidência, como se coloca o 2 em evidência.

Um ponto interessante diante das discussões dos alunos da turma B fez com que logo no início a professora acrescentasse uma linha no desenvolvimento; veja o Quadro 8 na terceira linha, pois, percebeu que os alunos precisavam ver literalmente que estavam diante de um trinômio quadrado perfeito. Sendo assim, na turma A a professora iniciou as explicações fazendo uso da expressão $y = 2(x^2 -4x +4 -4 -5)$, mas, ao longo das correções, as vezes não escrevia assim tão passo a passo. Há indícios de que se há necessidade de por no papel a escrita $x^2 -4x +4$, possivelmente, seria porque em anos anteriores trinômios quadrados perfeito foram trabalhados de modo muito superficial, ou até mesmo mecânico.

Quadro 8 – Expansão discursiva de $y = 2x^2 -8x -10$.

1ª	$y = 2x^2 -8x -10$	$y = 2x^2 -8x -10$
2ª	$y = 2(x^2 -4x -5)$	$y = 2(x^2 -4x -5)$
3ª	$y = 2((x-2)^2 -4 -5)$	$y = 2(x^2 -4x +4 -4 -5)$
4ª	$y = 2((x-2)^2 -9)$	$y = 2((x-2)^2 -4 -5)$
5ª	$y = 2(x-2)^2 -18$	$y = 2((x-2)^2 -9)$
6ª	$y +18 = 2(x-2)^2$	$y = 2(x-2)^2 -18$
7ª	$y- (-18) = 2(x- (+2))^2$	$y +18 = 2(x-2)^2$
8ª		$y- (-18) = 2(x- (+2))^2$

Fonte: Da autora.

Em resumo, a professora fez o primeiro exemplo no quadro até a equação $y- (-18) = 2(x- (+2))^2$ e deu uma pausa para discussão e retomada do que havia feito. Em seguida iniciou o esboço do gráfico da parábola. Como para a equação dada haveria uma translação de 18 unidades, usou-se uma escala de 2 unidades no quadro. E também, para não ficar muito poluído o desenho, a translação na vertical sempre era marcada somente com a coordenada y do vértice. No momento de fazer a última translação a professora chama a atenção para o fato de a parábola interceptar o eixo x, portanto, precisamos dos valores das raízes. Assim, retornamos para a penúltima linha, $y + 18 = 2(x-2)^2$, para obter as raízes. O esboço do gráfico por meio das translações se deu naturalmente, praticamente não indagaram nada. Acharam ruim que depois de todas aquelas trocas de equações ainda teriam que fazer o cálculo das raízes, reclamaram, contudo, eles mesmos afirmaram que o cálculo das raízes por meio da equação $y + 18 = 2(x-2)^2$ era muito mais simples.

No segundo exemplo a professora deixou que eles tentassem fazer, pois, é na prática que as maiores dúvidas surgem; e foi acompanhando de carteira em carteira o que estavam fazendo. Na turma B eles pediram que fosse feito outro exemplo no quadro antes deles tentarem fazer sozinho, então, a professora usou $y = 2x^2 + 12x + 16$. Acompanhando nas mesas percebeu-se que alguns alunos reescriavam o trinômio no formato $(x-b/2)^2$ mas em seguida reescreviam o trinômio com três termos. Por isso, que esse contato da professora com os alunos permitia uma orientação mais adequada, e no momento de correção no quadro, já se sabia em quais pontos deveria dar uma atenção especial, de acordo com a turma.

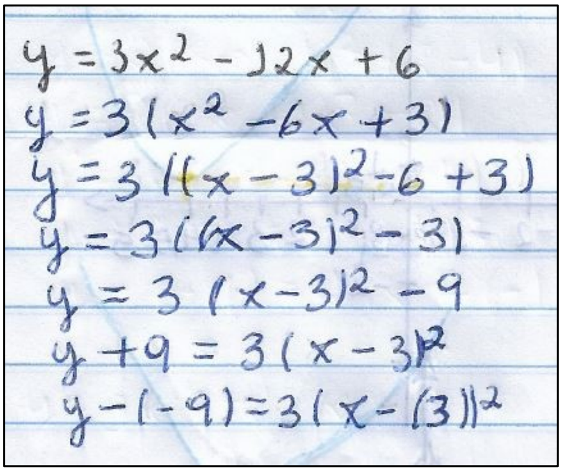
No momento em que apareceram números como $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ no cálculo das raízes os alunos usaram a calculadora para transformar em número decimal e marcar no plano cartesiano. Sempre que necessário, a professora fazia o exemplo no quadro, depois dava um tempo para eles fazerem um sozinho e corrigia no quadro. Quando apareceram os casos de equações $y = x^2 + bx + c$, mesmo partindo direto para a análise se já tínhamos um trinômio quadrado perfeito, os alunos da turma A pediram para escrever o número um em evidência, pois, afirmavam que escrevendo ele parecia confundir menos. Ou seja, a escrita do coeficiente um, poder vê-lo literalmente, reforçava a explicação do processo realizado para aqueles alunos.

A importância de partir de casos mais gerais para o esboço da parábola, permitiu que alguns alunos tivessem mais tempo para amadurecer a compreensão do processo. Porque ao trabalhar com equações como $y = x^2 + 8x + 16$, as quais já se tinha um trinômio quadrado perfeito, alguns ainda não estavam reconhecendo um trinômio quadrado perfeito ali. Por outro lado, muitos já designavam facilmente que era um trinômio quadrado perfeito, então, bastava substituir a escrita. Até chegaram a dizer que seria muito bom se na avaliação aparecesse só casos assim. Ou seja, eles tinham consciência que para esse formato de equação as transformações eram em quantidades menores.

Na turma A sempre no final da aula deixava uma ou duas equações para tarefa de casa que deveriam ser trazidas na próxima aula no caderno. A professora carimbava as tarefas feitas, por isso a maioria sempre fazia. Na turma B tínhamos 32 alunos e surgiram muitas perguntas ou comentários, às vezes, uma pergunta já tinha sido feita novamente surgia, sem contar, que durante os primeiros tratamentos algébricos, alguns passos os alunos realizavam de modo incorreto, a professora identificava e precisava de mais tempo para refazer. Sendo assim, decidiu-se passar na turma B um trabalho para entregar com as seguintes equações da sequência de atividades que ainda não tinham sido feitas em sala: $y = 3x^2 -12x +6$, $y = 3x^2 +3x -3$, $y = x^2 -2x +11$ e $y = -3x^2 -12x +6$ para esboçar o gráfico.

Com o trabalho tivemos o seguinte resultado na turma B: as regras de tratamento do processo de colocar em evidência o fator comum ainda não estavam bem consolidadas para muitos alunos, porque, na equação $y = 3x^2 -12x +6$, mesmo que escrevessem o número 3 em evidência, dentro do parênteses colocavam $3(x^2 -6x +3)$, como na Figura 21.

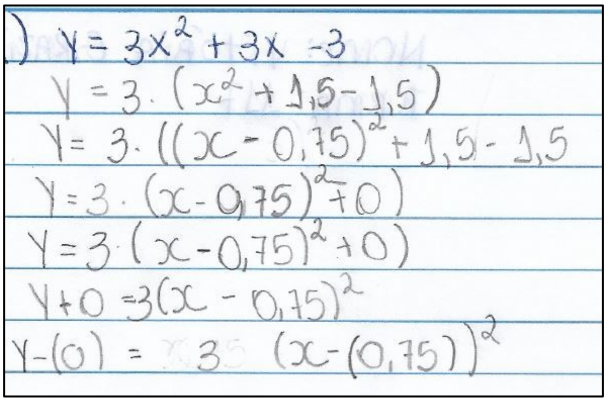
Figura 21 – Quarta situação: registro do estudante B26.



Fonte: Acervo da autora.

Pode ser que o discurso da professora predominou, quando se tinha o número dois em evidência a partir da equação $y = 2x^2 -8x -10$ falava-se "*a metade de -8x é quanto?*", "*a metade de -10 é quanto?*" para saber qual o termo que iria dentro do parênteses. Veja outro registro em Figura 22. Apesar de sempre a professora conferir com a turma oralmente se a expressão obtida $2(x^2 -4x -5)$ voltava na expressão anterior $y = 2x^2 -8x -10$. A partir das respostas no trabalho a professora alterou seu discurso em sala para "*-8x* dividido por 2 é quanto?", "-10 divido por 2 é quanto?", "*-12x* divido por 3 é quanto?".

Figura 22 – Quarta situação: registro do estudante B30.

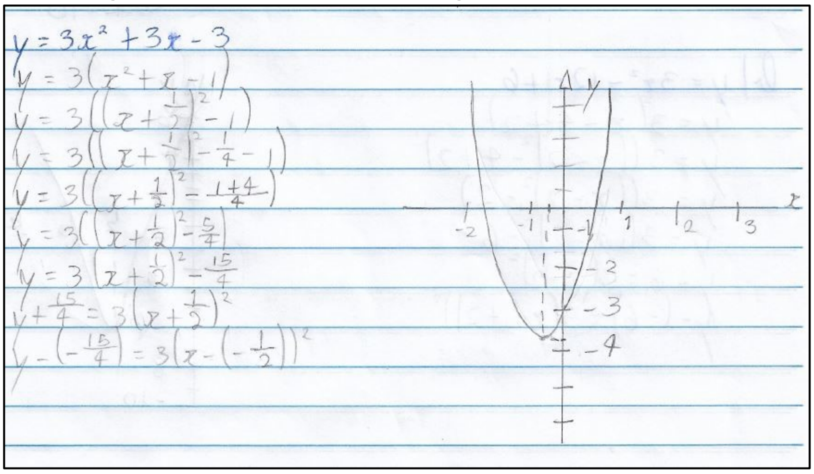


Fonte: Acervo da autora.

Nas Figura 21 e Figura 22 acima fica visível que o reconhecimento de um trinômio quadrado perfeito ainda está em fase de concretização, porque, os outros passos saíram corretamente, mas, o estudante B26 não fez o cálculo das raízes, o que poderia fazer ele perceber seu erro ao esboçar o gráfico. Já o estudante 30 não chegou a realizar o esboço nem obter os valores das raízes.

Mesmo que os casos do trabalho ainda não tivessem sido discutidos em sala no que diz respeito às suas particularidades, tivemos que a equação da parábola $y = 3x^2 + 3x - 3$ foi tratada corretamente e o esboço do gráfico também (Figura 23). Ou seja, as aulas anteriores foram suficientes para entender o processo de completar quadrados e transladar no plano cartesiano a curva estudada.

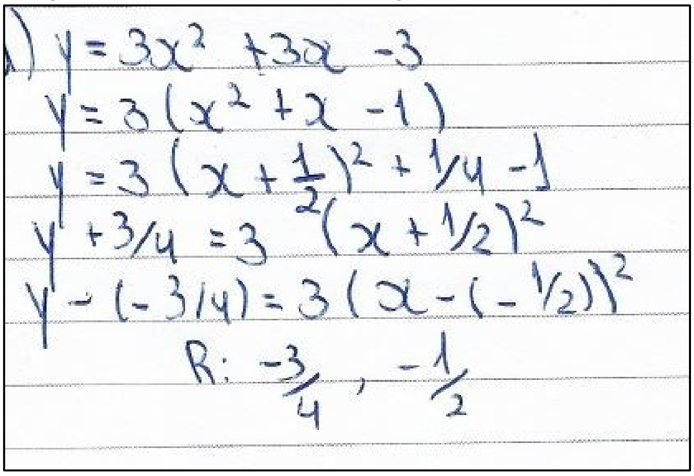
Figura 23 – Quarta situação: registro do estudante B10.



Fonte: Acervo da autora.

Há outro registro (Figura 24) em que o estudante identifica perfeitamente qual deve ser o trinômio quadrado perfeito usando os números racionais, mas, se perde em algumas passagens posteriores. Percebam que ele busca fazer os passos de modo mais direto e pode ter sido uma falta de atenção, porque, os outros gráficos do trabalho fez com êxito. Embora, ele tinha o costume de dar destaque ao vértice da parábola no final do procedimento.

Figura 24 – Quarta situação: registro do estudante B18.



Fonte: Acervo da autora.

Na turma A as equações do trabalho da turma B foram realizadas em sala. A situação que poderia ser escrita com frações eles fizeram uso de números decimais, embora, não apresentando tanta dificuldade para completar quadrado em $y = 3(x^2 + x - 1)$.

Após o trabalho na turma B, o qual foi corrigido em aula, a professora sentiu necessidade em pedir mais uma atividade fora da sala de aula. Foi solicitado que individualmente cada aluno elaborasse um vídeo explicando como se faz para esboçar o gráfico de uma das seguintes representações de parábola: $y = -9x^2 + 18x + 27$, $y = -7x^2 + 14x - 7$, $y = x^2 + 16x + 63$, $y = -x^2 + 18x - 81$, $y = 3x^2 + 6x$ e $y = 3x^2 - 9$. O vídeo deveria ser entregue quatro horas antes do horário da avaliação. Alguns alunos postaram o vídeo no *Youtube*, outros encaminharam por *e-mail* e outros ainda enviaram por *whatsapp*.

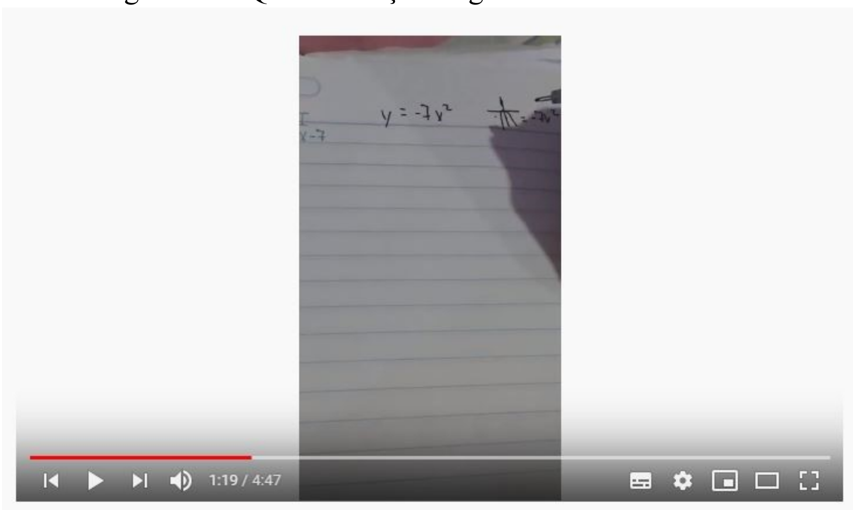
Veremos a seguir trechos de falas dos alunos sobre o processo de esboço do gráfico. Não estaremos destacando, mas, o leitor irá perceber que alguns não fizeram o vídeo com as equações das parábolas sugeridas. Contudo, a fala apresentada torna-se válida do mesmo jeito para nossa análise. Em um primeiro momento optamos em mostrar a transcrição praticamente completa de um vídeo do estudante B22, porque esse vídeo era um dos que mais o discurso fazia sentido ler a transcrição sem visualizar o que se estava escrevendo. Em seguida, trabalhamos com trechos conforme Quadro 9 para uma melhor sistematização da análise.

Vamos colocar entre colchetes [ ] uma descrição do que estava ocorrendo no vídeo para que o leitor entenda mais diretamente a fala do estudante. Entendemos que somente a transcrição direta não fica coerente a redação.

Em relação ao gráfico de $y = -7x^2 +14x -7$ o estudante B22 começou o vídeo assim: "*Ele é equivalente a família* $y=-7x^2$*. O que que isso significa? Que se eu tivesse um gráfico normal...* [faz um desenho a parte para representar $y=-7x^2$]. *Isso aqui é um esboço meio ruim mesmo, a parábola vai ser voltada pra baixo porque o valor de y é negativo, e essa parábola seria equivalente ao* $-7x^2$".

"*Mas o nosso cálculo não se resume só a isso. Ele continua. Então a gente quer saber o valor em que essa parábola* [fala apontando para o esboço de $y=-7x^2$ - Figura 25] *vai se deslocar ou pra esquerda ou pra direita, porque a gente sabe que ela não sobe nem desce porque o y não tem valor*". Bem provável que antes de fazer o vídeo já tinha realizado o esboço, por isso que as palavras não sobe nem desce se referem a equação $y =-7x^2 +14x -7$.

Figura 25 – Quinta situação: registro do estudante B22.



Fonte: Acervo da autora.

Aqui ele vai escrevendo e explicando o que está acontecendo na passagem de $y =-7x^2 +14x -7$ para $y = -7(x^2 -2x +1)$: "*Então y vai ser igual a menos sete x, eu vou colocar ele em evidência então o* x^2 *vai ficar dentro do parênteses, agora que vem o jogo de sinais. Sinais iguais menos, catorze dividido por sete dá dois, 2x, sinais diferentes mais, sete dividido por sete dá 1, e agora fecha o parênteses.*". O estudante realizou corretamente o registro.

"*Esse termo é um trinômio quadrado perfeito?* [Aponta a caneta para a parte da expressão que está entre parênteses] *Ele é. Por quê? Porque a metade de dois é 1 e 1 ao quadrado dá 1.*"

"*E agora, como que a gente segue essa equação? Eu vou vir aqui pra baixo* [estava se referindo a linha logo abaixo] *e eu vou saber que y vai ser igual a -7 e eu sei que posso abrir parênteses, e sei que x vai ser igual a algum valor ao quadrado* [escreveu $(x\ \ )^2$]. *Qual vai ser esse valor? Vai ser a metade de dois, porque ele que vai fazer com que a gente* *preencha esse termo. Então a metade de menos dois é? -1. Então, a gente sabe que o y vai deslocar, quer dizer o x, ele vai deslocar um pro lado.*”. O estudante realizou corretamente o registro.

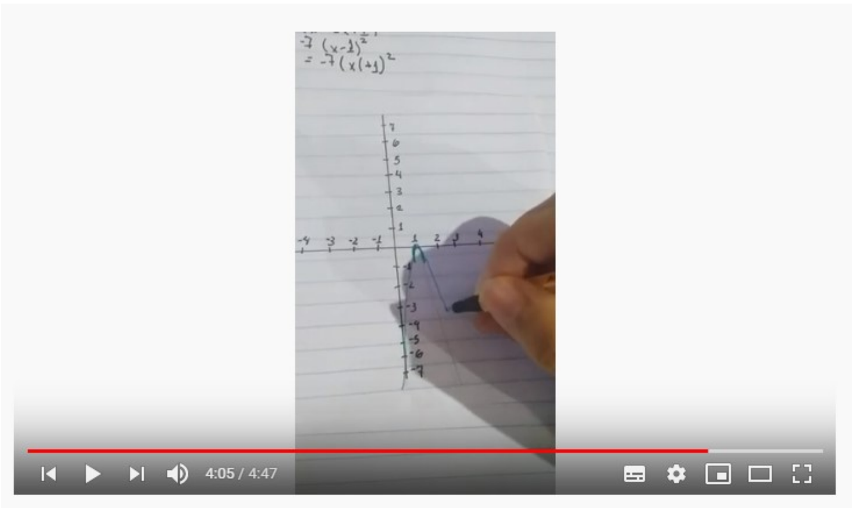
“*E agora a gente termina esse cálculo. Com y = -7, a gente abre parênteses, x e agora vai ser 1 aqui dentro ao quadrado* [a escrita fica assim y = -7(x (+1)²] *e agora a gente vai ter que representar esse valor no gráfico.*”. No registro ficou faltando fechar um parênteses e escrever x-(+1). Entretanto, esboçou o gráfico corretamente.

“*Então eu sei que ele vai deslocar um pra direita porque aqui são os números positivos* [aponta para o eixo x nos valores positivos] *se ele fosse -1* ele ia deslocar um pra esquerda.”

“*E se x fosse positivo, quer dizer y fosse positivo*, *que é a nossa família, a nossa família é o -7x². Se fosse 7x², tipo sete x positivo, ia ser pra cima* [faz o movimento com a caneta do traçado da parábola côncava para cima]*, mas como não é, a nossa parábola vai ser pra baixo.*”

“*Então a gente vai ter que fazer com que ela corte, quer dizer ela passa no menos um, ela não vai cortar, ela vai ficar aqui embaixo; um erro. E ela vai cortar, o que que ela vai cortar? Vai cortar o -7 porque ele é o valor de nosso y, então ela vai passar aqui* [no intercepto y que é -7] *e ela vai fazer essa volta aqui em cima.*” Apesar de algumas incoerências no discurso ela faz o esboço correto (Figura 26).

Figura 26 – Quinta situação: registro do estudante B22.



Fonte: Acervo da autora.

“*A representação está meio ruim mesmo porque é realmente ruim de gravar e desenhar ao mesmo tempo, mas é basicamente isso, porque eu sei que vai ter um eixo de* *simetria, mesmo que não tenho porque isso aqui não tá nada simétrico, tem dois traços, mas isso aqui é um erro mesmo*". Acabou deslizando a mão ao fazer a parábola e ficou borrada um pouco do lado direito com dois traços.

Em síntese, para o estudante B22, apesar de obter o esboço do gráfico com sucesso, ainda há pequenas incoerências na fala. Contudo, não é qualquer aluno que consegue dizer tudo que esse estudante falou sobre o que estava fazendo. Podemos afirmar que há domínio do tratamento, o registro fica bem elaborado, mas falar fazendo uso dos termos matemáticos ainda há muito para melhorar. Um ponto que nos chama a atenção é julgar que as substituições de equações são procedimentos operatórios. O aluno ainda possui o olhar preso aos cálculos do que a ideia de equação.

A seguir, no Quadro 9, elencamos as falas que se referem aos procedimentos algébricos, principalmente. Em muitos vídeos os alunos não possuíam ainda o domínio de dizer o porquê ou de dizer conceitualmente o que estava acontecendo, apesar de conseguirem fazer o tratamento corretamente. Os vídeos onde os alunos ficavam apenas narrando o que iriam escrever na maior parte do tempo, por exemplo, "agora, abre parênteses, coloca o 3 e o +2x", não foram utilizados para compor nosso quadro de discursos.

Quadro 9 – Discurso dos estudantes

DISCURSO	CONTEXTO	ESTUDANTE
"*Podemos fazer 2 vezes 4 que dá 8 e o sinal fica igual.*"	Conferindo se o termo em evidência estava correto.	B27
"*Quantas vezes o -9 vai dar -9x²? x². -9 vezes -2x vai dar +18x, e -9 vezes -3 vai dar +27* [de $-9x^2 +18x +27$ para $-9(x^2 -2x -3)$]."	Escrevendo o termo em evidência.	B17
"*Vou colocar entre parênteses os outros números, os outros termos né.*"	Explicando o termo em evidência.	B7
"*Precisamos saber que aqui é quadrado trinômio perfeito, se aqui não é* [o aluno sublinha o $x^2 +2x -4$ nesse momento] *daí precisamos fazer isso daqui* [aponta para a escrita $(x +1)^2-1$] *daí se fosse pulava para o outro exemplo.*"	Explicando trinômio quadrado perfeito.	B27
"*Primeira coisa que a gente vê é que ele é côncavo para baixo por causa do -6x, com sinal negativo ele vai ser côncavo para baixo* [falava de $y = -6x^2$]"	Explicando a concavidade a partir da representação algébrica.	B24
"*Temos aqui o -7 eu sei que a minha parábola vai ser pra baixo, ou seja, negativa, assim* [desenha uma parábola côncava para baixo] *porque ela é negativa vai ser pra baixo.*"	Explicando a concavidade a partir da representação algébrica.	B7
"*Aqui já dá pra perceber que forma um trinômio quadrado perfeito... aqui já dá pra perceber, mas, mesmo assim faremos a prova real*". "*Corresponde*	Explicando trinômio quadrado perfeito.	B24

com a anterior [a nova representação de trinômio quadrado perfeito estava verificada ele quis dizer].”.		
“*Agora eu vou identificar pra ver se ele faz parte de um trinômio. Vamos botar o x e metade de dois... ele é um trinômio porque é... o 2x dividido é igual a 1 e eu tenho +1 aqui* [de x^2 -2x +1 escreveu $(x -1)^2$].”	Explicando trinômio quadrado perfeito.	B7
“*Com isso eu vi que o* x^2 *+2 é a mesma coisa que* $(x+1)^2$ *só que sobraria o -1* [escreveu corretamente $2(x^2 +2x -4) = 2((x +1)^2 -1 -4)$].”	Explicando trinômio quadrado perfeito e a complementação de quadrado.	B20
“*$(x-1)^2$ é igual a x^2 -2x +1, mas, como aqui* [em $-9(x^2 -2x -3)$] *a gente não tem o +1, a gente vai botar -1 pra... como se ficasse zero.*”	Explicando trinômio quadrado perfeito e a complementação de quadrado.	B17
“*Agora, isso aqui* [x^2 -4x] *tu sabe que é um trinômio quadrado perfeito. Agora falta achar o que completa aqui à equação que tu sabe que é $(x -2)^2$ ... daí tu adicionou o +4* [ele escreveu $2(x^2 - 4x -5) = 2(x -2)^2$ riscou $\cancel{2(x -2)^2}$ e trocou por $2(x^2 - 4x +4 -4 -5)$] *é isso que tu sabe.*”	Explicando trinômio quadrado perfeito e a complementação de quadrado.	B11
“*Pra fechar a gente tem que ver o deslocamento que a parábola irá fazer.*”	Movimento de translação representado algebricamente.	B24
“*Sabendo disso aqui* [aponta para $-7(x- (+1))^2$] *eu sei que ela vai ficar no eixo das abscissas, no x, e que ela vai andar um pouquinho pra direita.*”	Movimento de translação representado algebricamente.	B7
“*Ok! Tu achou o vértice, vai botar aqui -18 e +2* [falou isso quando chegou em $y-(-18)=2(x-(+2))^2$].”	Coordenadas do vértice representado geometricamente.	B11
“*Como a parábola vai se deslocar um para a direita, ela vai ficar aqui* [marca um ponto em +1 no eixo x], *aqui vai ser o vértice.*”	Lugar do vértice no plano cartesiano.	B24
“*E ela tem que cruzar no seis x* [desenhou o intercepto y em -6 corretamente].”	Intercepto y.	B24

Fonte: Da autora.

No Quadro 9 temos o discurso oral do aluno. Dentro das funções discursivas apresentadas por Duval (2004) podemos dizer que a função apofântica, a qual diz respeito a fazer enunciados completos, ainda está em desenvolvimento. Duval (2015) chama essas falas dos alunos de verbalização implícita associada ao reconhecimento visual, “ela resulta da verbalização oral que fazemos a nós mesmos quando de uma exploração ou em curso de aprendizagem, e não somente aquela que entendemos da boca de um professor ou da boca de um aluno” (DUVAL, 2015, p. 41).

Pelos vídeos fica claro que os alunos sabem o tratamento e as substituições de equações que devem fazer. A professora não fez uma explicação pontual do que deveria haver no vídeo, apenas a ordem era "*explicar o processo de esboço da parábola*". E pelas falas percebe-se que os alunos elencaram os pontos importantes do processo, ou seja, a aprendizagem da matemática ali envolvida estava ocorrendo de fato. Eles se preocupam em tentar explicar os processos algébricos e as relações da equação com a representação gráfica.

Especificamente dois alunos tiram a prova real para conferir se a expressão ao quadrado irá formar o trinômio quadrado prefeito que possuem na equação. Ou seja, possuem dificuldade em dizer exatamente o que é um trinômio quadrado perfeito, mas, sabem fazer as manipulações necessárias. Apesar de tudo isso, quatro alunos tratam a equação como se fosse uma conta, pelo fato de usar a palavra *resolver*, pois, para eles, as partes do processo se sobressaem sobre o todo.

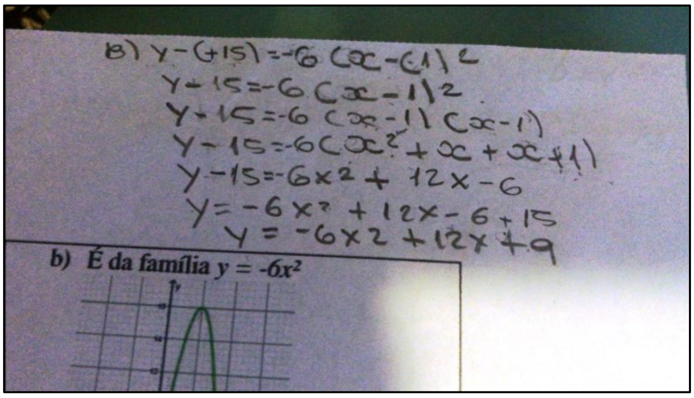
A quinta situação ocorreu de modo semelhante a terceira; era o momento de determinar a equação da parábola. A professora entregou uma folha impressa com as seis representações geométricas da parábola conforme Apêndice E. O primeiro gráfico serviu de exemplo para discutir como a equação seria obtida. Novamente ao entregar a folha com os gráficos a turma A mencionou que gostava de fazer aquela atividade, pois, associaram ao que foi praticado no estudo da reta.

Em geral, ambas as turmas se saíram muito bem no desenvolvimento dessa atividade. Eles já tinham compreendido que a equação no formato $y-(-12) = 4(x-(-2))^2$ representava a parábola que estava no gráfico porque para eles argumentavam que não havia necessidade de chegar em $y = 4x^2 +16x +4$, mas, a professora elogiou a argumentação deles e afirmou que em geral, na maioria dos casos é essa equação $y = 4x^2 +16x +4$ mais utilizada.

Não podemos afirmar que os alunos não reconheciam que $(x+2)^2$ era um trinômio quadrado perfeito e que poderiam escrever direto $x^2 +4x +4$. A professora acabou fazendo o primeiro exemplo no quadro no passo a passo com a propriedade distributiva: $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2 +2x +2x +4 = x^2 +4x +4$. Eles seguiram o exemplo, veja o registro do estudante B12 e do B17 (Figura 27 e Figura 28). O importante é que estavam fazendo corretamente.

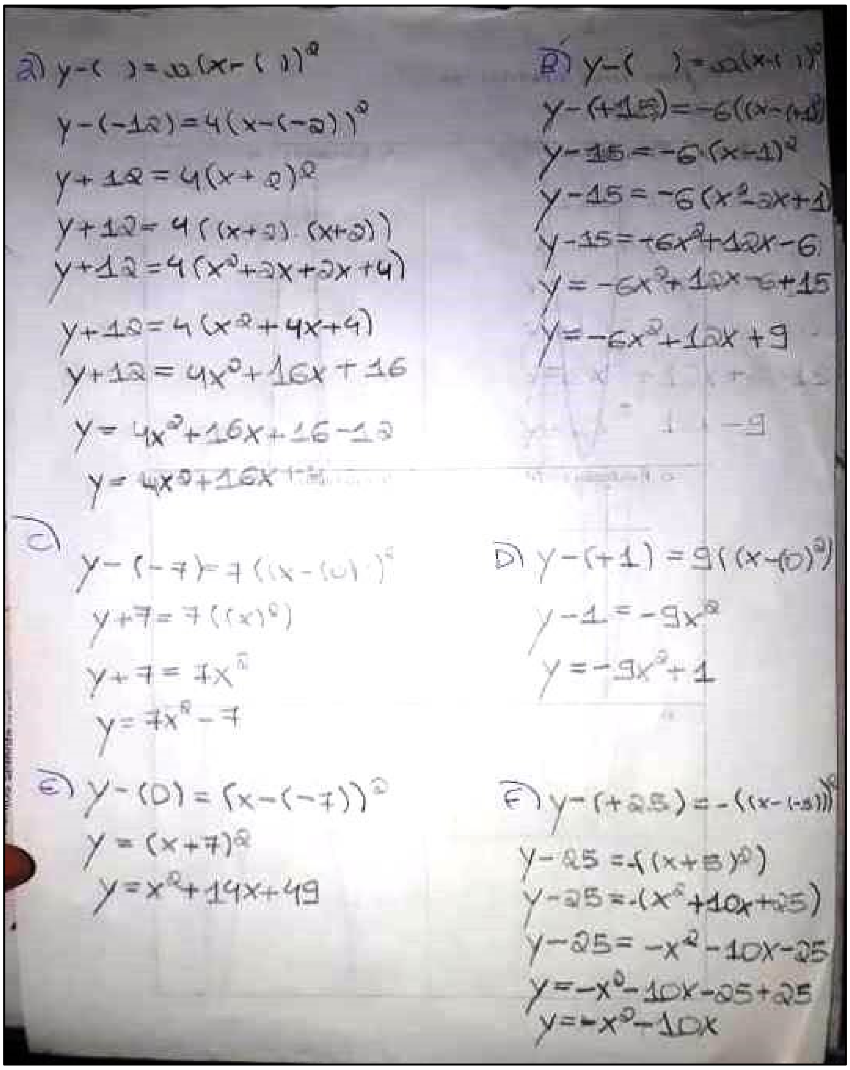
Especialmente na letra c) muitos desenvolveram $(x-(0))^2$ assim $(x-0)(x-0) = x^2 -0x -0x +0$. Mais uma vez isso se justifica porque estavam seguindo o exemplo e nem pararam para pensar que o zero é o elemento neutro da operação de subtração. Contudo, para $y- (0)$ enxergavam que era apenas y. Na correção no quadro a professora discorreu sobre esse episódio.

Figura 27 – Quinta situação: registro do estudante B12.



Fonte: Acervo da autora.

Figura 28 – Quinta situação: registro do estudante B17.



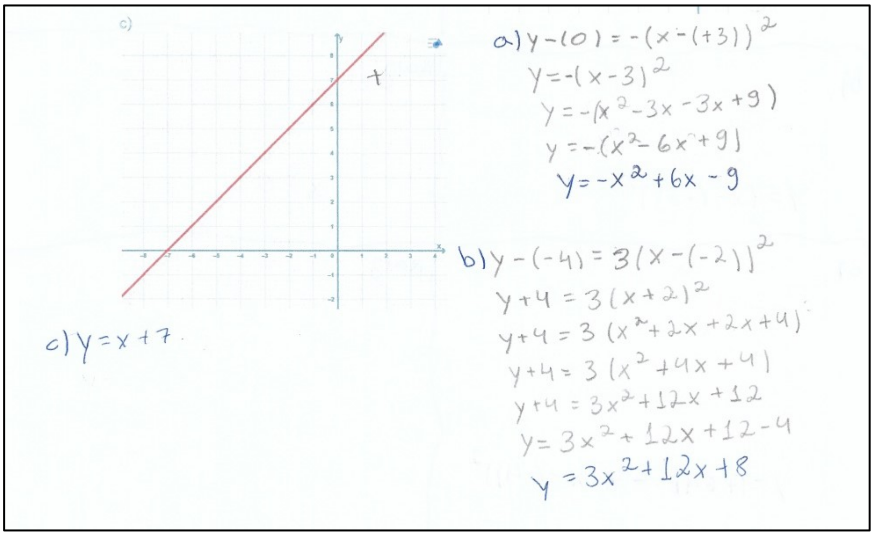
Fonte: Acervo da autora.

A sexta situação foi a avaliação (Apêndice F). A turma B teve 29 alunos presentes para fazer a avaliação. Desses fica nítido que 13 alunos não conseguiram aprender durante as onze aulas, das quais seis foram dedicadas somente para o estudo da parábola. Julgamos que o tempo de aprendizagem foi o fator que criou um obstáculo maior, bem como a base matemática que eles possuíam, pois, em outras atividades esses alunos também deixavam transparecer uma dificuldade significativa em matemática. Esses registros não foram utilizados para a análise a seguir. Outro fator que confirma a situação, é que muitos dos vídeos que não foram utilizados para expor as falas no presente texto, eram desses alunos que não fizeram uma avaliação bem sucedida. Já na turma A dos 20 alunos 19 compareceram na data da avalição. Do total de presentes 15 avaliações foram respondidas com mais registros significativos e serão aqui contempladas.

Na questão 2, que era para escrever a equação correspondente à representação gráfica a maioria fez com destreza (Figura 29). Um estudante não desenvolveu a equação, deixou somente escrito a primeira linha. Entendemos que foi o tempo disponível para realizar a avaliação que fez com que deixasse assim.

Os três alunos que não fizeram passo a passo o registro do trinômio quadrado perfeito na questão 2, também não fizeram na questão 1. Estavam diante de uma situação que exigia "um reconhecimento que repousa sobre uma mudança de sentido produzido por certos termos da expressão algébrica" (DUVAL, 2015, p. 42). E eles demostraram que estavam reconhecendo muito bem os termos ali presentes, ou seja, a operação de designação fez-se presente. De $(x\ \ -3)^2$ já escreviam direto $x^2\ -6x\ +9$, e de $3(x^2\ -4x\ +3)$ registravam $3((x\ -2)^2\ -4\ +3)$. Os outros alunos faziam tudo passo a passo.

Figura 29 – Sexta situação: registro do estudante A14.



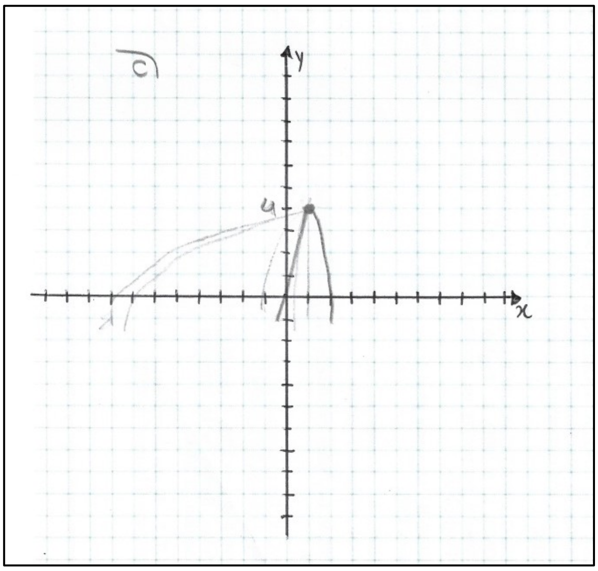
Fonte: Acervo da autora.

Na questão 1 vamos pensar conforme Duval (2015, p. 42) aponta:

> "são as variações de desempenho dos alunos em questões matematicamente próximas, ou quase idênticas, que permitem analisar as produções em termos de compreensão ou incompreensão [...]. Contabilizar os sucessos não permite fazer nenhum prognóstico em termos de margem de progressão nas aprendizagens, nem em termos de capacidade de transferência para situações não matemáticas. E não podemos mais explicar os erros, sem remontar aos processos cognitivos que possibilitam o reconhecimento de um mesmo objeto em representações diferentes".

Os itens da questão 1 são semelhantes, repousam muito mais no trabalho de designação das equações dadas do que no tratamento algébrico. De modo geral, o esboço do gráfico era realizado. Um ou outro aluno errava no trabalho com os números inteiros, como no caso da Figura 30, a parábola deveria estar com as raízes em 0 e -2, o erro foi no cálculo da coordenada x do vértice, que era -1. Na passagem de $-4x^2 -8x$ para $-4(x^2 +2x)$ foi escrito $-2x$.

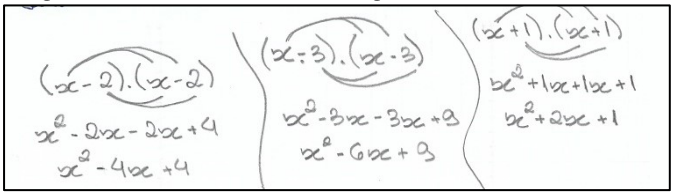
Figura 30 – Sexta situação: registro do estudante B17.



Fonte: Acervo da autora.

Sendo assim as avaliações expressam que o aluno que identifica o momento que precisava reconhecer um trinômio quadrado perfeito, completar quadrado, quando o fez, o fez em todos os três itens da questão 1. Embora, no caminho possa ter ocorrido problemas com as operações numéricas. Alguns faziam em um rascunho o desenvolvimento dos termos ao quadrado como na Figura 31.

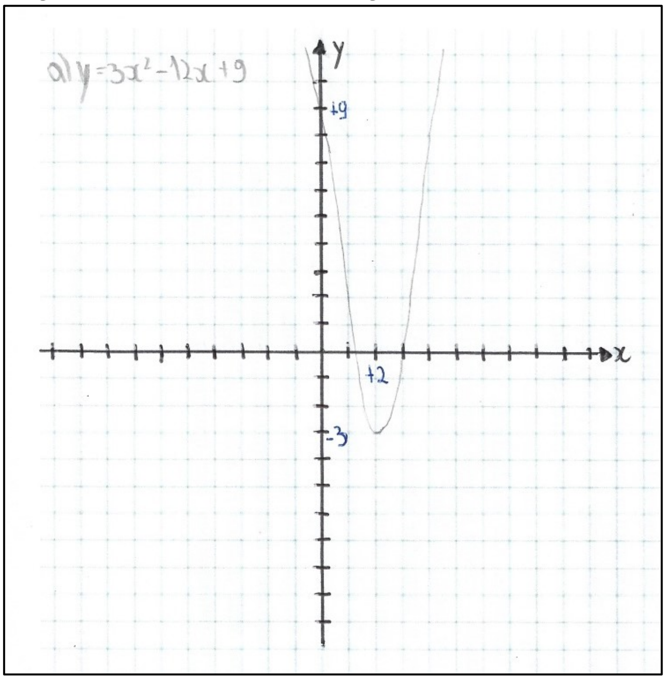
Figura 31 – Sexta situação: registro do estudante A10.



Fonte: Acervo da autora.

O reconhecimento das unidades significantes da equação com as variáveis visuais dos gráficos foram bem estabelecidas. Na Figura 32 até o intercepto *y* o estudante B18 se preocupou em registrar.

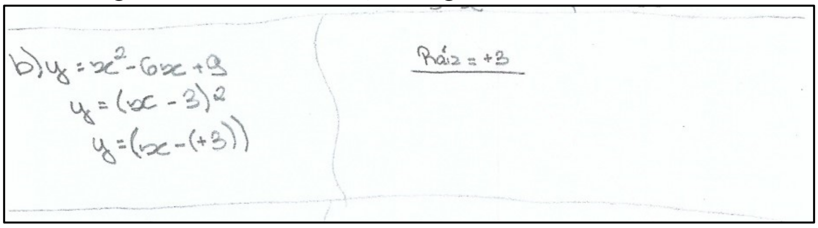
Figura 32 – Sexta situação: registro do estudante B18.



Fonte: Acervo da autora.

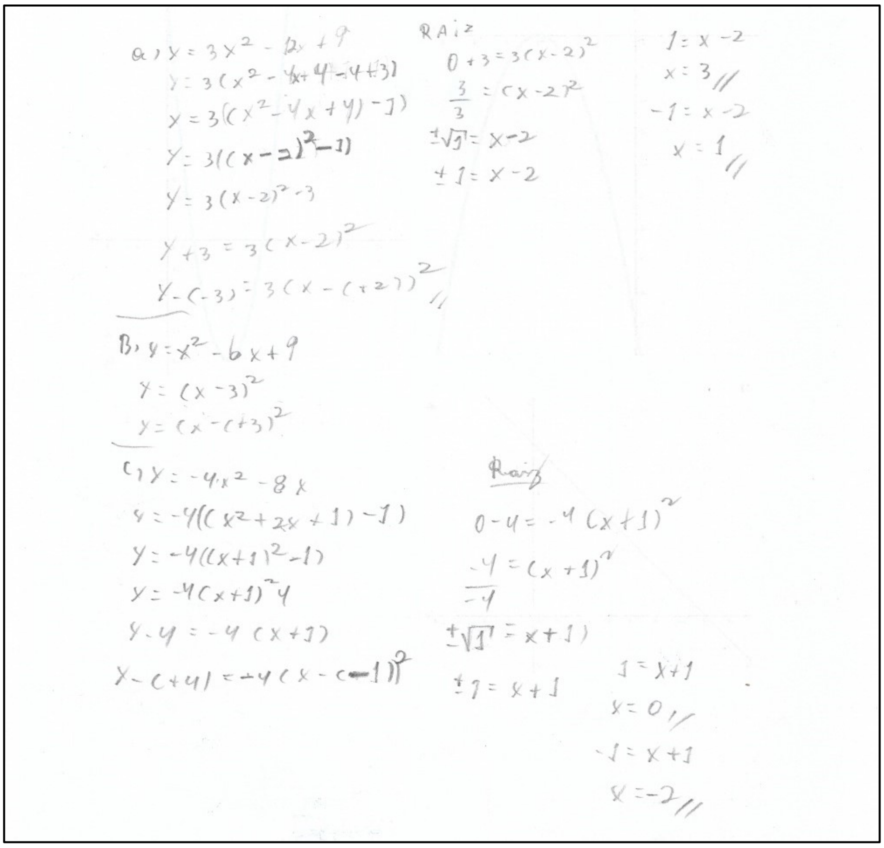
Os estudantes A10 e A11 (Figura 33 e Figura 34) fazem o procedimento completo e bem detalhado, apresentando o cálculo das raízes também. O estudante A10 deixa claro que entendeu que no caso da parábola $y = x^2 - 6x + 9$ a raiz é dupla. Já o estudante A11 não faz referência sobre isso, embora, tenha realizado o esboço do gráfico de modo adequado.

Figura 33 – Sexta situação: registro do estudante A10.



Fonte: Acervo da autora.

Figura 34 – Sexta situação: registro do estudante A11.



Fonte: Acervo da autora.

Em síntese, a experiência corrobora para buscarmos mais aulas de matemática que contemple o trabalho com diferentes registros de representação semiótica. Os alunos aprendem aquilo que você ensina, portanto, podemos investir mais em aulas com o esboço da parábola por meio de translações, sim! Enfim, aqui ficou expresso que no trabalho com a álgebra o conhecimento base é importante, e acima de tudo, o reconhecimento do significado dos termos é o que determina as substituições realizadas.

5 CONCLUSÃO

A partir das inquietações de professora da Educação Básica de Matemática, da busca pela melhoria de sua própria prática e da aprendizagem de seus alunos, chegamos a presente pesquisa. Mais importante do que a concretização da dissertação, é o processo percorrido que determina a evolução da professora-pesquisadora. Diante do exposto, podemos tecer algumas considerações sob dois vieses: o de aprendizagem e o de ensino; para discorrer sobre *de que maneira os processos algébricos se fazem presentes no esboço da parábola dado uma interpretação global*, nossa questão problematizadora.

Na perspectiva de aprendizagem temos que o aluno é capaz de trabalhar com a ideia de completar quadrado já no Ensino Médio. O aspecto visual acaba se sobressaindo para identificar um trinômio quadrado perfeito. Com três termos o faziam com êxito. Embora, a passagem de um trinômio com três termos como $x^2 -6x +9$, por exemplo, para $(x-3)^2$ apresentava-se mais morosa e não era realizada de imediato, porque precisavam desenvolver a fatoração. O amadurecimento da compreensão de que $x^2 -6x +9$ pode ser substituído *por* $(x-3)^2$ se dá conforme sucessivas trocas de representação são exigidas. Por isso, há a necessidade de pensar um trabalho em sala de aula que contemple mais esta troca. E também, explorar o significado de equivalência presente em $x^2 +2ax +a^2 = (x+a)^2$.

As operações discursivas que predominaram no processo algébrico foram as de substituição e a de designação. Até mesmo Duval pondera que o problema da álgebra é o da "consciência da diversidade complexa dos procedimentos discursivos para designar os objetos" (DUVAL, 2002, p. 67). Quando reconheciam, designavam as duas formas de escrever um trinômio quadrado perfeito, desenvolviam as substituições de equações tranquilamente.

Diante das equações o trabalho de transformação não pauta-se nas letras, mas sim nas circunstâncias em que as letras aparecem. Ora ela é o termo de um trinômio como x^2, ora, o mesmo x escrito assim x- representa a translação no eixo das abscissas. O aluno precisa reconhecer esses diferentes *status* do mesmo signo (estou me referindo ao x) para compreender o objeto equação.

Diante disso concluímos que é urgente um estudo teórico aprofundado sobre as atividades cognitivas que são necessárias mobilizar na aprendizagem de álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, para que o aluno apresente um melhor desempenho ao fazer uso do registro de representação algébrico. Nossa pesquisa identificou a operação cognitiva de designação e a operação de substituição como predominantes.

Na perspectiva de ensino ao nos perguntar por que ensinamos o que ensinamos da forma que ensinamos, concluímos que ensinar o esboço de parábolas por meio das translações fazendo uso da complementação de quadrados é importante primeiro porque é um processo que permite obter a equação na forma reduzida, e muitas vezes, em situações práticas do âmbito da física, por exemplo, é esse formato da equação que colabora para solucionar problemas.

Segundo porque é o ensino de um processo que possui serventia dupla, ou seja, com o mesmo processo podemos dar conta de partir do gráfico e obter a sua respectiva equação, bem como, do registro algébrico esboçar o gráfico, de modo que tudo faça sentido para o aluno, dado o alto grau de congruência semântica. Sem contar que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" (DUVAL, 2008, p. 15). É um processo que é válido sempre, e mais, vale para as outras curvas também. Na matemática, em geral, temos o costume de ensinar métodos que só são válidas para determinada situação, talvez, por isso, surgem tantas dificuldades de coordenação entre registros.

A maneira de explorar no ensino o esboço da parábola nos mostra que os processos algébricos envolvidos ganham sentido, porque agora eles possuem utilidade. Completar quadrado, reconhecer trinômios quadrados perfeitos são assuntos vistos no Ensino Fundamental de forma isolada. Aqui já é possível dialogar com o aluno sobre a base que ele precisa ter para dar conta de realizar o processo de modo satisfatório.

Com a realização da sequência de atividades, reunindo os registros escritos nos cadernos, as falas dos alunos e a avaliação, a experiência nos mostra que a teoria dos Registros de Representação Semiótica contribui sim para uma melhor compreensão do objeto matemático parábola. De fato, se a teoria fundamentou a construção das atividades, o resultado não poderia ser outro. Ainda assim, podemos afirmar com propriedade que o que fica de contribuição para o campo da Educação Matemática é a possibilidade de saber o como ocorrem os processos algébricos e o esboço da parábola dentro da perspectiva de interpretação global com translações.

Um ponto final foi dado diante da experiência, o que é necessário em qualquer pesquisa. Agora temos que continuar contribuindo com o campo da Educação, experienciando a interpretação global por meio de translações para as outras curvas como as das funções modulares, exponenciais, trigonométricas.

No que tange ao campo algébrico, podemos nos indagar se a álgebra do modo que vem sendo ensinada nos Anos Finais do Ensino Fundamental realmente contempla os aspectos cognitivos de aprendizagem, porque na experiência com o Ensino Médio percebemos que há uma lacuna por parte dos alunos neste domínio da Matemática. Que tipo de atividades contribuiria para o tratamento algébrico ser realizado com êxito? Como podemos trabalhar em sala de aula para melhor desenvolver a função discursiva de expansão por meio de operações de substituição e a função referencial com a operação de designação? tão presentes no domínio algébrico.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag.; QUEIROZ, Cileda de; COUTINHO, Silva. Engenharia Didática: características e seu usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. *In:* BRUN, Jean (org.). **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José de Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-218.

BERLANDA, Juliane Carla. **Mobilizações de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o Auxílio do Software GeoGebra.** 2017. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin. **Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar.** 2008. 252 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. *In:* BRANDT, Célia F.; MORETTI, Méricles T. (orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2014. p. 39-65.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. *In:* MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação matemática:** Uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2016. p. 167-188.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 7, n. 15, p. 513-536, 2014.

DUVAL, Raymond. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.** Santiago de Cali: Universidad del Valle, 2001.

DUVAL, Raymond. L’apprentissage de l’algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. **IREM de Nice**, França, p. 67-96, 2002.

DUVAL, Raymond. **Semiose e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagem intelectuais. Trad. Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004. 328 p.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *In:* MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 11-34.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tânia Maria Mendonça Campos (org.). Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, v. 1, 2011b.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, Raymond. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. *In:* BRANDT, Célia F.; MORETTI, Méricles T. (orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2014. p. 15-38.

DUVAL, Raymond *et al*. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: introduzir a álgebra no ensino:** qual o objetivo e como fazer isso?. Tânia Maria Mendonça Campos (org.). Trad. Marlene Alves Dias. 1ed. São Paulo: PROEM, 2015.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles Thadeu. Temas do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica: significado do que é "fazer matemática". *In:* CUSTÓDIO, José Francisco et al. (orgs.). **Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): contribuições para pesquisa e ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 79-106.

FONT, Vicenç; GOLDINO, Juan D.; D'AMORE, Bruno. Enfoque Ontosemiótico de las Representaciones em Educación Matemática. In: Simpósio da Sociedade Espanhola de Investigação em Educação Matemática, 9., 2005, Córdoba. **Anais [...]**, Argentina: Universidade de Córdoba, 2005. p. 1-16.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática Fundamental:** uma nova abordagem. Ensino Médio. Volume único. São Paulo: FTD, 2002.

HILLESHEIM, Selma Felisbino. **Os números inteiros relativos em sala de aula: perspectivas de ensino para a regra de sinais.** 2013. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

MARTINS, Marcos Henrique Santos. **A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas.** 2016. 220 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

MENONCINI, Lucia; MORETTI, Méricles Thadeu. A Interpretação Global Figural como recurso para o Esboço de Curvas de Funções Modulares Lineares. **Educação Matemática em Revista**, RS, v. 1, n. 18, p. 126-134, 2017.

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. *In:* MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. p. 149-160.

MORETTI, Méricles Thadeu; FERRAZ, Ademir Gomes; FERREIRA, Verônica Gitirana Gomes. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Revista Quadrante**, [Portugal], v. 17, n. 2, p. 97-122, 2008.

NÉ, Adriano Luiz dos Santos. **A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior.** 2013. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Belo horizonte: Autêntica, 2011.

PASA, Bárbara Cristina. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais.** 2017. 311 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

PLUVINAGE, François; FLORES, Patricia. Génesis Semiótica de los Enteros. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 120-141, 2016.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções**, Minas Gerais, n. 22, p. 196-216, dez. 2012.

SALGUEIRO, Nilton Cesar Garcia; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. Registros de Representação Semiótica de Funções: análise de produções escritas de estudantes de Ensino Médio. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 14, 2014.

SILVA, Madeline Odete. **Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica.** 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Pearson, 1985.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2007. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

APÊNDICE A – Primeira situação: trinômio quadrado perfeito

Objetivo: *reconhecer um trinômio quadrado perfeito.*

Na primeira aula o professor expõe o termo *trinômio quadrado perfeito* no quadro para dar início a uma revisão. Para revisar exploram-se exemplos de casos que são trinômios quadrados perfeito como:

e) x^2+4x+4 é um trinômio quadrado perfeito porque pode ser representado por um quadrado perfeito $(x+2)^2$.

$$x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

f) $x^2+18x+81$ é um trinômio quadrado perfeito porque pode ser representado por um quadrado perfeito $(x+9)^2$.

$$x^2+18x+81 = (x+9)^2$$

Após os exemplos, vem a pergunta: $x^2+14x+49$ é trinômio quadrado perfeito?

E se faz a seguinte atividade de ligar as colunas de modo correspondente:

$x^2+22x+121$	$(x-4)^2$
$x^2+3x+9/4$	$(x+11)^2$
$x^2+5x+25/4$	$(x+9)^2$
$x^2-8x+16$	$(x+3/2)^2$
$x^2+18x+81$	$(x+5/2)^2$

Outra atividade é: analise cada expressão a seguir e se for trinômio quadrado perfeito reescreva como algo ao quadrado:

a) $x^2+50x+625$ b) $x^2+50x+20$ c) $x^2+100x+2500$
d) $x^2+8x+16$ e) $x^2+8x+10$ f) $x^2+100x+30$

Desenvolva cada expressão a seguir:

a) $(x+50)^2$ b) $(x+4)^2$ c) $(x+25)^2$ d) $(x+3)^2$ e) $(3x+10)^2$

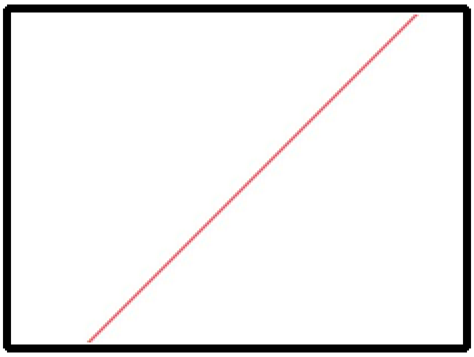
Reescreva cada trinômio quadrado perfeito:

a) x^2-6x+9 b) x^2-2x+1 c) $y^2-14y+49$
d) $a^2-16a+64$ e) $x^2-5x+25/4$ f) $y-11y+121/4$

APÊNDICE B – Segunda situação: esboço da reta

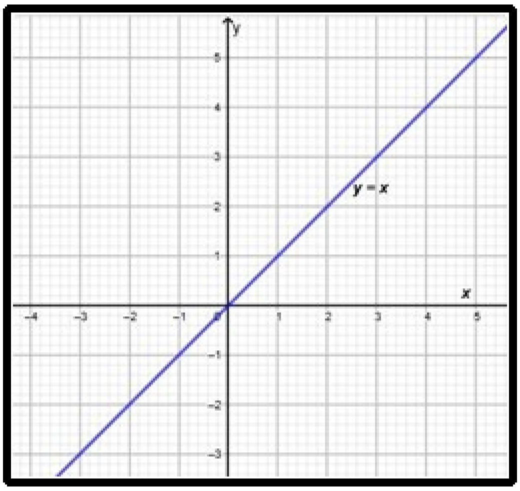
Objetivo: *registrar a representação gráfica da reta no plano cartesiano.*

Apresentar a reta como o lugar geométrico composto por infinitos pontos[26]:

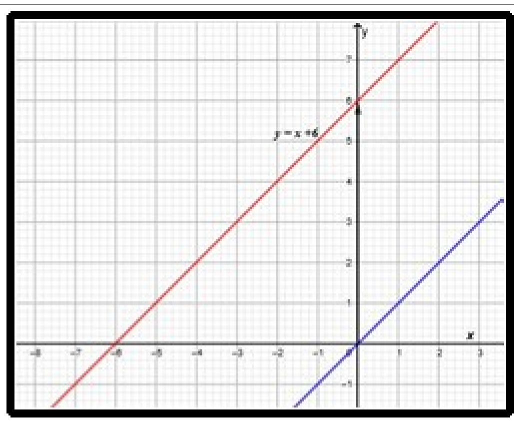


E sua representação algébrica $y = ax+b$ com a, b valores reais.

Exemplo 1: A reta $y = x$ está situada na origem do plano cartesiano:



Exemplo 2: A reta $y = x+6$ não está na origem. É preciso primeiro fazer um tratamento na equação para saber o lugar que $y = x +6$ ocupa no plano cartesiano:

$y = x +6$ $y -6 = x$ $y - (+6) = x$ $\Downarrow$ Translação no eixo y	

[26] Todas as imagens da sequência de atividades foram elaboradas pela autora.

Exemplo 3: Esboçar a reta $y = x - 4$ no plano cartesiano.

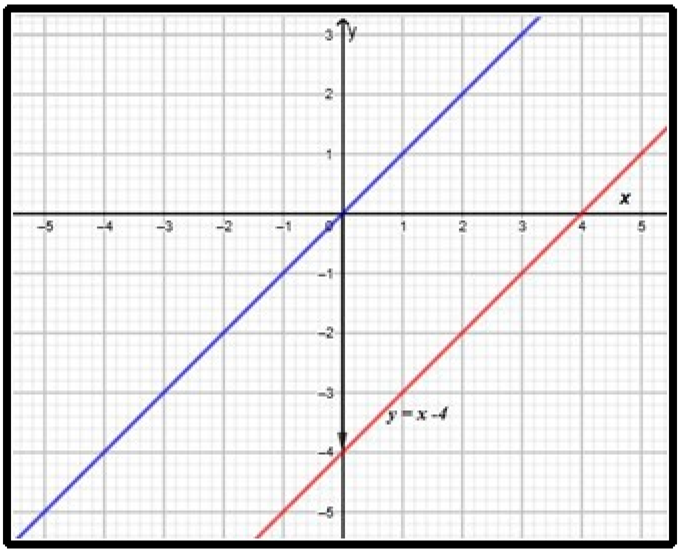
$y = x - 4$

$y + 4 = x$

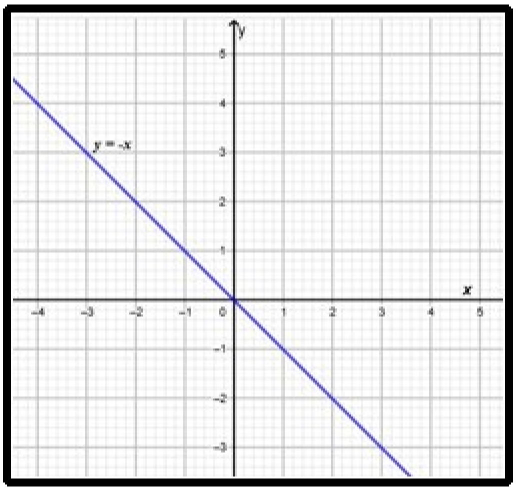
$y - (-4) = x$

⇓

Translação no eixo y



Exemplo 4: A reta $y = -x$ é de outra família.



Exemplo 5: Esboçar a reta $y = -x - 6$ no plano cartesiano.

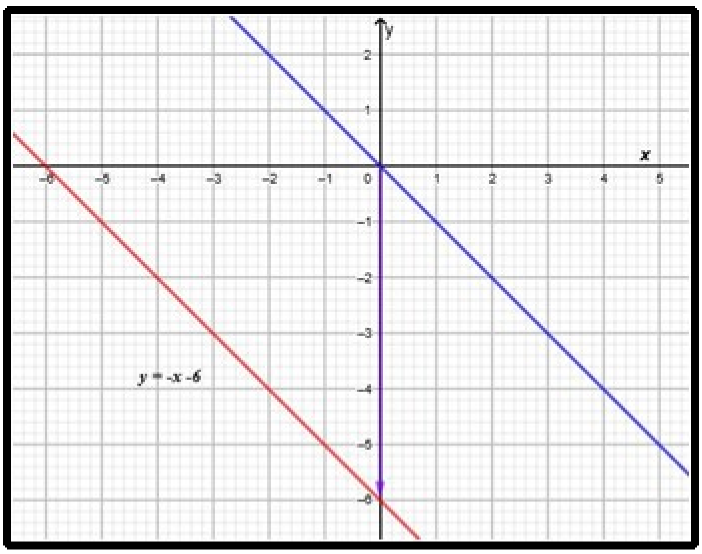
$y = -x - 6$

$y + 6 = -x$

$y - (-6) = -x$

⇓

Translação no eixo y

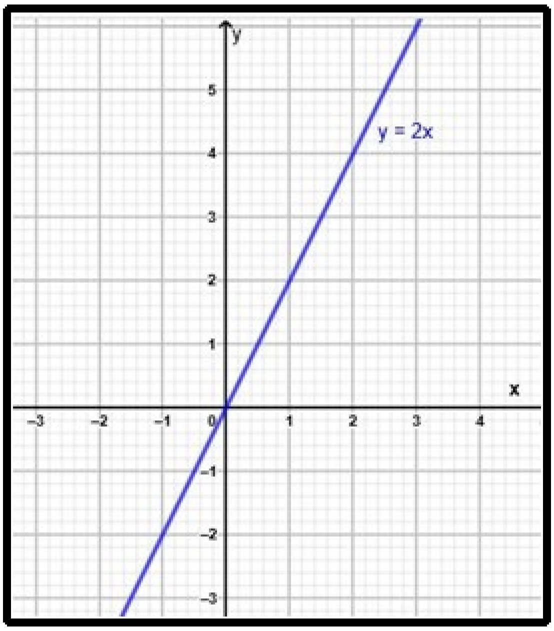


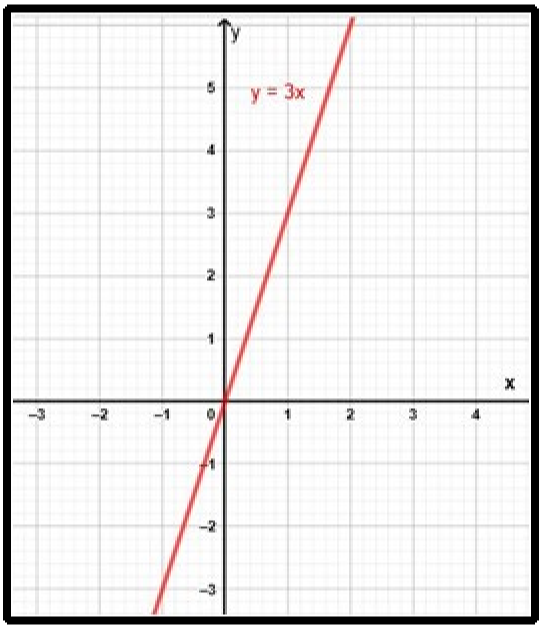
Esboçar as retas a seguir no plano cartesiano (deixar os alunos fazer):

a) y = x +7 b) y = -x +7 c) y = x -8

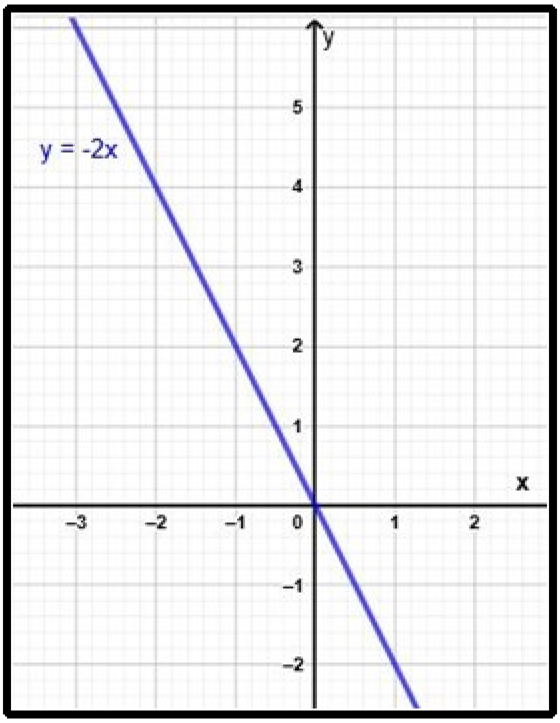
d) y = -x -8 e) y = -x -1/4 f) y = x +1/4

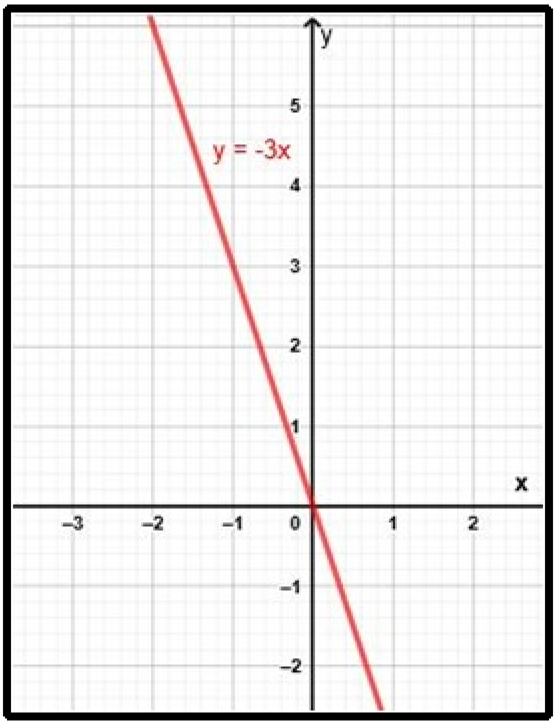
Exemplo 6: Família das retas com $a>0$.





Exemplo 7: Família das retas com $a<0$.





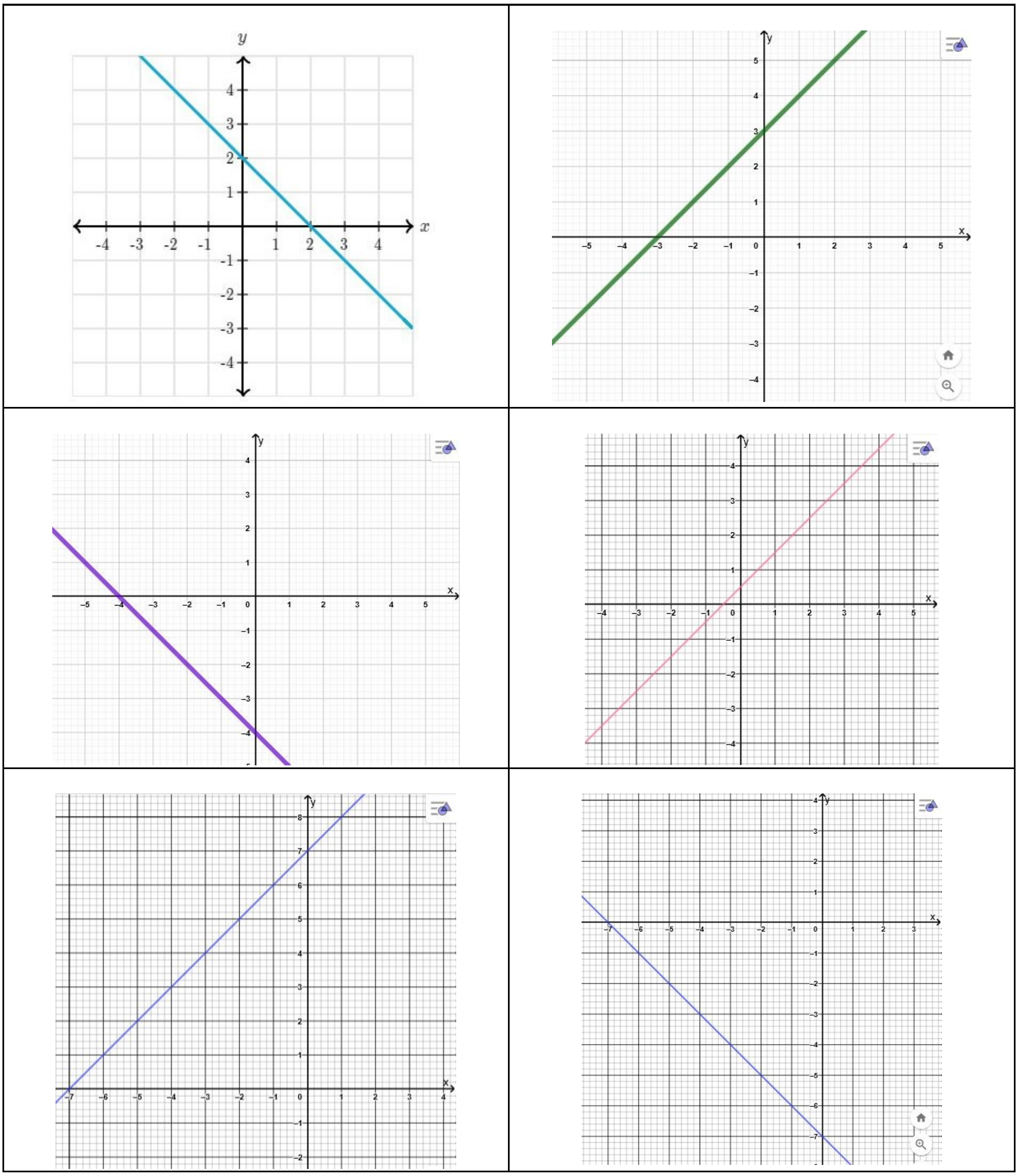
Esboçar as retas a seguir no plano cartesiano (deixar os alunos fazer):

a) y = 2x +6 b) y = -2x +3 c) y = 3x +2 d) y = -3x -2

APÊNDICE C – Terceira situação: equação da reta

Objetivo: *determinar a equação da reta fazendo a correspondência entre as variáveis gráficas visuais e as unidades significantes da equação.*

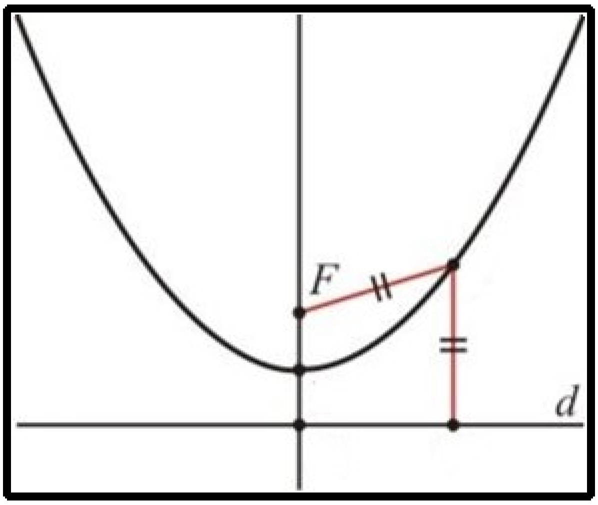
Dada a representação gráfica da reta, determinar sua respectiva equação correspondente.



APÊNDICE D – Quarta situação: esboço da parábola

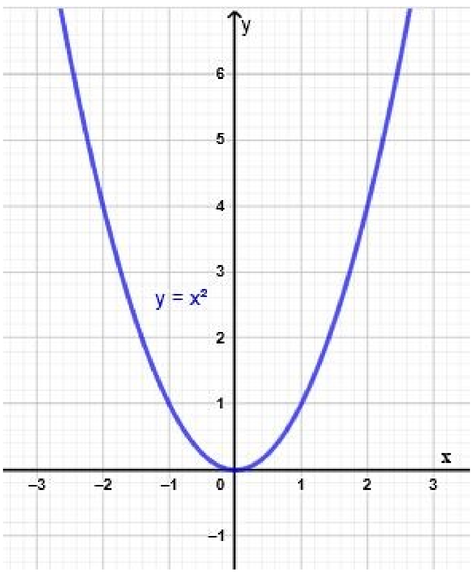
<u>Objetivo:</u> *Esboçar a parábola por meio de translações e do trabalho com trinômios quadrados perfeito.*

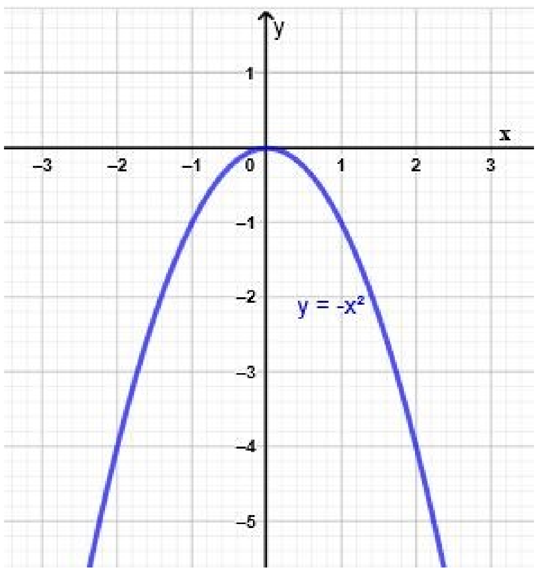
1º Definição de parábola: consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d (STEINBRUCH; WINTER, 1985).



De modo geral, a parábola possui a seguinte representação algébrica: $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

2º O lugar geométrico das parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2$.





3º Iniciar com o esboço de $y = 2x^2 -8x -10$. Aqui é necessário discutir a família que essa parábola pertence, no caso, $y = 2x^2$, completar quadrados, concavidade, coordenadas do vértice, raízes e intercepto y. Tudo isso está presente no processo a seguir:

$y = 2x^2 -8x -10$

$y = 2(x^2 -4x -5)$

$y = 2((x-2)^2 -4 -5)$

$y = 2((x-2)^2 -9)$

$y = 2(x-2)^2 -18$

$y +18 = 2(x-2)^2$

$y- (-18) = 2(x- (+2))^2$

$\Downarrow$ Translação no eixo y

$\Downarrow$ Translação no sentido do eixo x

As raízes reais:

$y +18 = 2(x-2)^2$

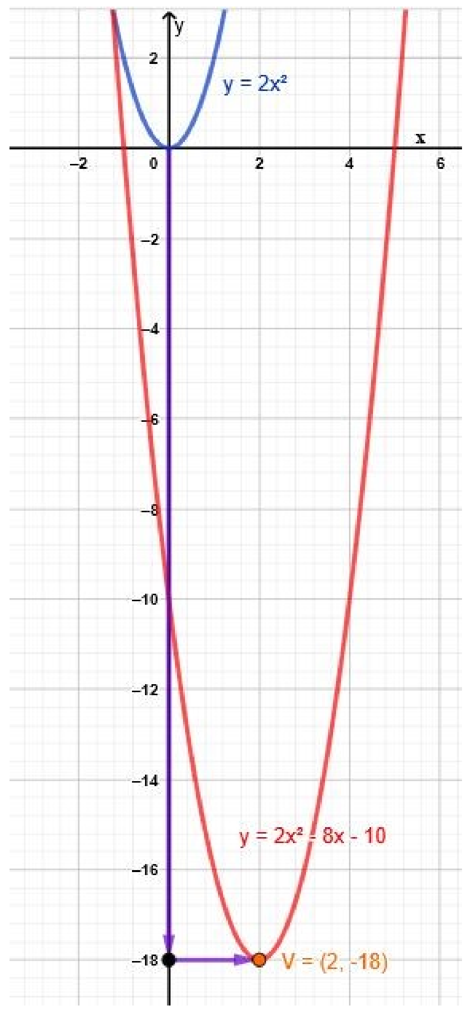
$0+18 = 2(x-2)^2$

$9 = (x-2)^2$

$\pm\sqrt{9} = x-2$

$\pm 3 = x-2$

$x' = 5$ e $x'' = -1$



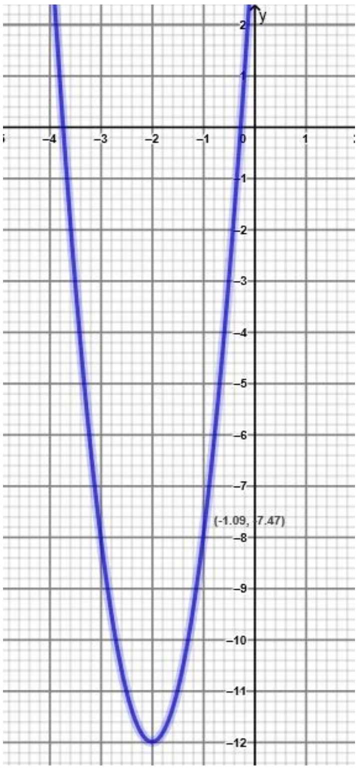
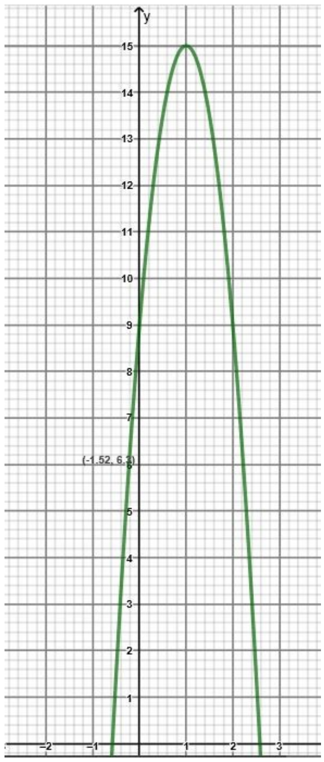
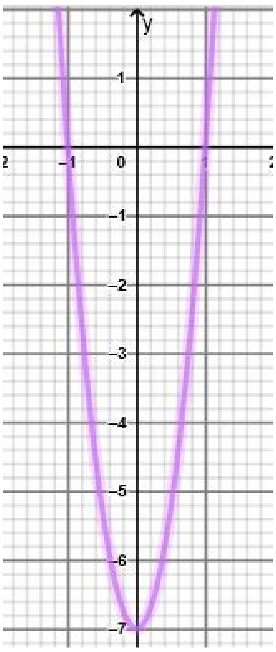
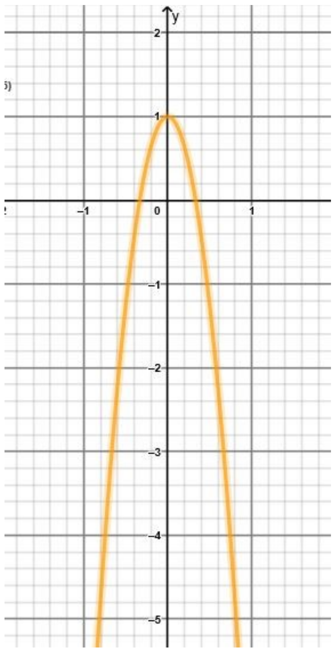
4º Usar as situações a seguir para trabalhar a conversão da representação algébrica para a gráfica.

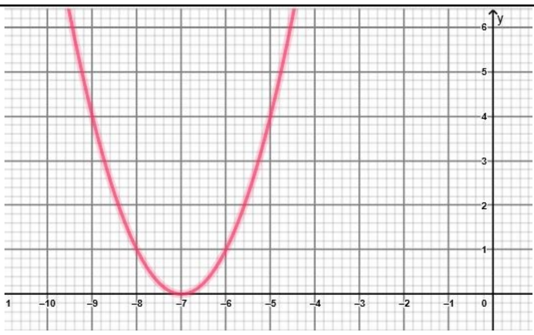
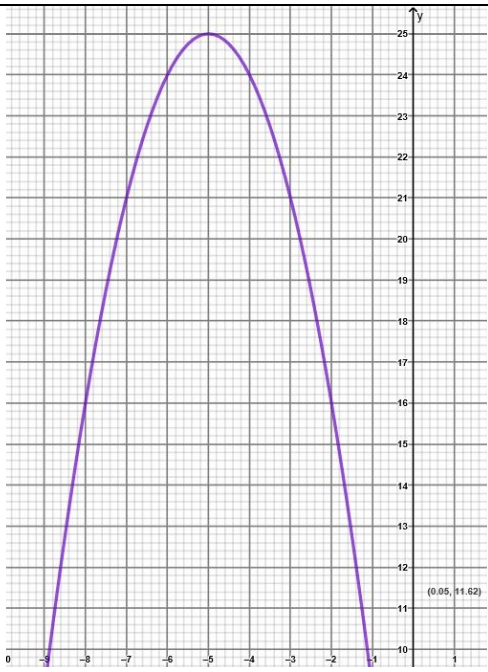
a) $y = 2x^2 +4x -8$
b) $y = 2x^2 +12x +16$
c) $y = x^2 +10x +24$
d) $y = x^2 +8x +16$
e) $y = x^2 +10x +25$
f) $y = 3x^2 -12x +6$
g) $y = 3x^2 +3x -3$
h) $y = x^2 -2x +11$
i) $y = -3x^2-12x+6$
j) $y = 3x^2 +6x$
k) $y = 3x^2 -9$
l) $y = -x^2 +6x -9$
m) $y = x^2 -6x +9$

APÊNDICE E – Quinta situação: equação da parábola

Objetivo: *Determinar a equação da parábola considerando as variáveis gráficas visuais e as unidades significantes da equação.*

Dada a representação gráfica da parábola, determinar sua respectiva equação correspondente.

<table>
<tr>
<td>a) É da família $y = 4x^2$

</td>
<td>b) É da família $y = -6x^2$

</td>
</tr>
<tr>
<td>c) É da família $y = 7x^2$

</td>
<td>d) É da família $y = -9x^2$

</td>
</tr>
<tr>
<td>e)</td>
<td>f)</td>
</tr>
</table>

y
6
5
4
3
2
1
1
−10
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0	y
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
(0.05, 11.62)
0
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1

APÊNDICE F – Sexta situação: avaliação

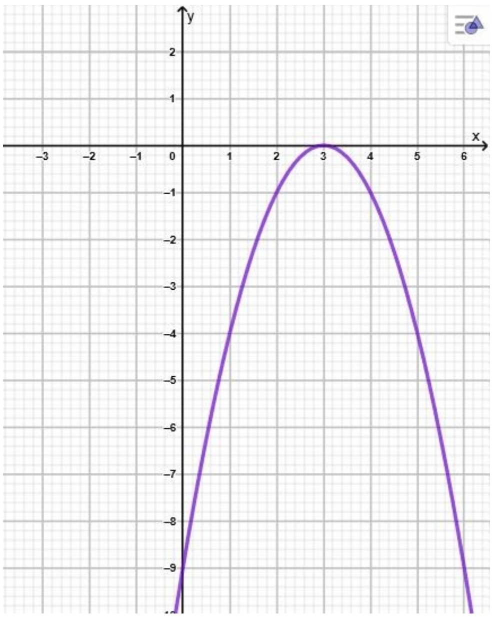
Objetivo: *Analisar cada questão fazendo uso adequado de algum aspecto do objeto matemático necessário para obter a solução.*

1. Para cada representação algébrica da parábola a seguir, esboce o gráfico considerando as translações em relação à origem do plano cartesiano e o processo de completar quadrado.

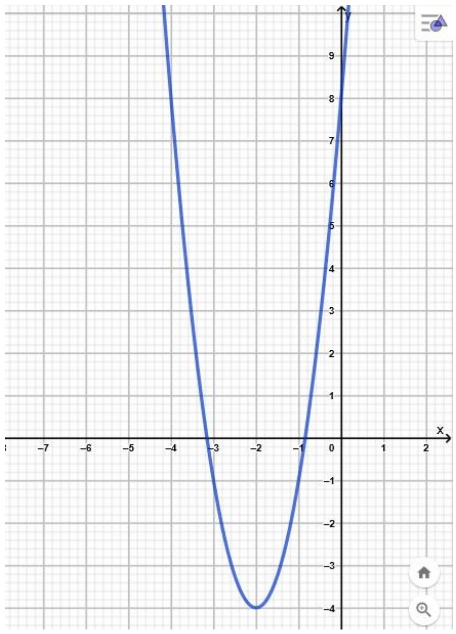
a) $y = 3x^2 - 12x + 9$ b) $y = x^2 - 6x + 9$ c) $y = -4x^2 - 8x$

2. Para cada representação gráfica a seguir escreva a equação correspondente.

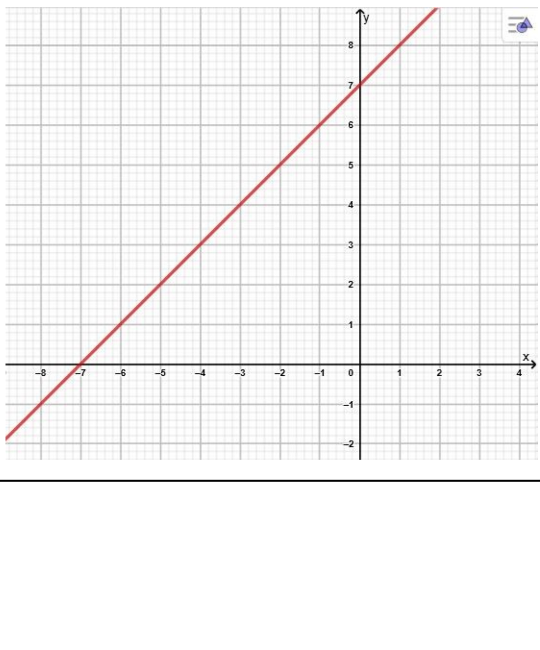
a)



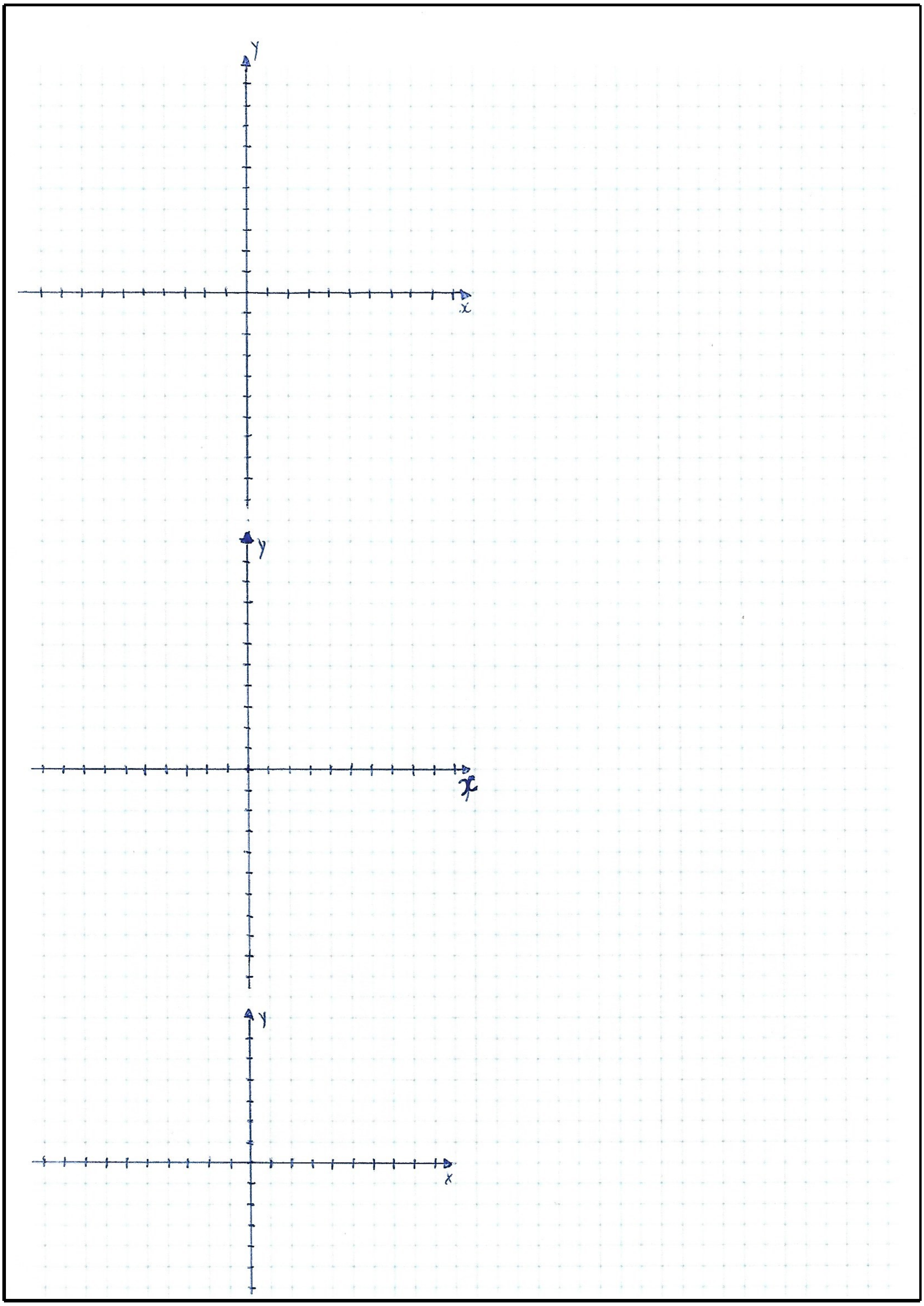
b) Considere $y = 3x^2$



c)



APÊNDICE G – Modelos de plano cartesiano



APÊNDICE H – Termo de Consentimento

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGECT
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Mestrado em Educação Científica e Tecnológica

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, Djerly Simonetti, estou desenvolvendo uma pesquisa acadêmica de dissertação de mestrado para o Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, sob orientação do Prof. Dr. Méricles T. Moretti. O objetivo é dissertar sobre os processos algébricos presentes na interpretação global da reta e da parábola. As atividades desenvolvidas com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio ocorrerão nos horários de aula, sendo considerados para análise qualitativa os registros escritos dos estudantes envolvidos. As atividades contemplam o conteúdo previsto para o primeiro ano do Ensino Médio, logo, os envolvidos não terão nenhum prejuízo quanto a ementa do planejamento anual escolar. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente para a presente pesquisa e em publicações relacionadas ao campo da Educação Matemática. Em momento algum será feito referência direta ao estudante envolvido, ou seja, nome do sujeito participante não será publicado, garantindo sempre o anonimato e sigilo dos envolvidos. Ao estudante será esclarecida toda e qualquer dúvida antes e durante o processo da pesquisa, sendo que, a qualquer momento o mesmo poderá desistir de participar do desenvolvimento da pesquisa, sem prejuízo algum, comunicando a pesquisadora. Para qualquer questionamento ou esclarecimento, o mesmo poderá ser realizado pelo telefone (48) 998304179 ou *e-mail* djerlysimonetti@alunos.utfpr.edu.br.

____

Djerly Simonetti – mestranda

Eu, ____ fui esclarecido(a) sobre a pesquisa PROCESSOS ALGÉBRICOS NO ESBOÇO DE CURVAS: O CASO DA PARÁBOLA SOB A ÓTICA DOS RESGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA e concordo que o estudante sob minha responsabilidade participe das atividades.

Assinatura do responsável: _________________________________ RG: _________________

Florianópolis, 01 de agosto de 2019.