



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Víctor Luis Espinoza

**Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com aplicações à relatividade**

Florianópolis  
2020

Victor Luis Espinoza

**Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com aplicações à relatividade**

Dissertação submetida ao Programa de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Espinoza, Victor Luis

Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com  
aplicações à relatividade / Victor Luis Espinoza ;  
orientador, Ivan Pontual Costa e Silva, 2020.  
182 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Teoremas de  
singularidade. 3. Geometria Lorentziana. 4. Incompletude  
geodésica. I. Costa e Silva, Ivan Pontual. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Victor Luis Espinoza

**Linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos com aplicações à relatividade**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Jónatan Herrera Fernandez, Dr.  
Universidad de Córdoba

Prof. José Luis Flores Dorado, Dr.  
Universidad de Málaga

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em geometria e topologia.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Ivan Pontual Costa e Silva, Dr.  
Orientador

Florianópolis, 2020.

## Agradecimentos

Esta dissertação é resultado de um trabalho que efetivamente durou dois anos, com muitas reviravoltas e mudanças de direção até finalmente chegar nesta versão aqui apresentada, com apoio e auxílio de diversas pessoas.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Fernando Luis Espinoza e Maristela Cardoso, pelo apoio durante todo meu percurso acadêmico.

Um especial agradecimento ao meu orientador, Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva, pelos dois anos de ensino e trabalho nas diversas áreas de geometria que ele foi capaz de ensinar, sempre muito paciente e atencioso. Seu vasto conhecimento tanto em matemática quanto em física são uma fonte de inspiração para o estilo de matemático que almejo ser.

Agradeço aos demais professores do programa de pós-graduação em matemática pura e aplicada da UFSC, em especial ao Prof. Dr. Sérgio Tadao Martins, por ser meu primeiro professor de álgebra e topologia, seu estilo engraçado mas sempre preciso nunca me fizeram ter vontade de desistir da matemática, e também à Profa. Dra. Marianna Ravara Vago, sendo minha orientadora por um ano e também minha primeira professora de geometria diferencial, sempre me apoiando e guiando para que eu chegasse onde estou agora.

Não poderia esquecer dos colegas dos seminários com o prof. Ivan, Henrique Puel Martins, Luiz Henrique Suzana, Paulo André Müller e Kledilson Peter Ribeiro Honorato, que agradeço pela ajuda ao longo destes dois anos.

Agradeço também os demais colegas dos departamentos de matemática e física por todas as boas lembranças que carrego destes sete anos em que passei nestes departamentos. Em especial, agradeço meu colega de graduação Paulo Henrique Dos Santos por todas as conversas iluminadoras nos mais diversos e aleatórios assuntos, indo de política internacional a desenhos japoneses, e também agradeço minha querida amiga Anya Volkov (este é seu pseudônimo russo, pois ela prefere se manter anônima, então uso este nome que criamos aos estarmos entediados em uma aula de relatividade geral... não me pergunte os detalhes!) por todo o apoio, conversas e fofocas no café de tarde, ao longo destes mais de cinco anos de amizade.

Por fim, agradeço a FAPESC e CAPES pelo auxílio financeiro sem o qual este trabalho seria impossível de se realizar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Resumo

O objetivo desta dissertação é revisar as principais técnicas geométricas e topológicas subjacentes às demonstrações dos teoremas de singularidade clássicos de Hawking e Penrose no contexto da geometria Lorentziana, e que têm aplicações cruciais na Relatividade Geral. Matematicamente, esses teoremas descrevem a relação entre a completude de certas geodésicas com outros aspectos da geometria global da variedade, em especial sua curvatura. Essas técnicas não apenas se aplicam aos teoremas de singularidade, mas também são amplamente utilizadas na geometria Riemanniana.

Os enunciados e provas dos teoremas de singularidade se apoiam em três classes de estruturas geométricas distintas: a estrutura causal em espaços-tempos, a existência de linhas e raios geodésicos causais em espaços-tempos, e o estudo de pontos conjugados e focais em geodésicas causais, que desenvolvemos em detalhes ao longo deste trabalho.

**Palavras chave:** geometria Lorentziana, linhas e raios geodésicos, teoremas de singularidade.

## **Abstract**

The goal of this dissertation is reviewing the main geometrical and topological techniques underlying the proofs of the classic Hawking and Penrose singularity theorems in the context of Lorentzian geometry, which have crucial applications in General Relativity. In mathematical terms, these theorems describe the relationship between the geodesic completeness of certain geodesics with other aspects pertaining to the manifold's global geometry, especially its curvature. These techniques are not just applicable to the singularity theorems, but are also amply used in Riemannian geometry.

The statements and proofs of the singularity theorems revolve around three distinct geometrical structures: the causal structure of spacetimes, the existence of causal geodesic lines and rays on spacetimes, and the study of conjugate and focal points along causal geodesics, which are developed in detail in this work.

**Keywords:** Lorentzian geometry, geodesic lines and rays, singularity theorems.

# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>Variedades Semi-Riemannianas</b>	<b>12</b>
1.1	Métrica	12
1.2	Conexões	13
1.2.1	Torção e Curvatura	15
1.2.2	Conexão sobre Funções	16
1.2.3	Derivada Covariante e Transporte Paralelo.	17
1.2.4	Aplicações a Dois Parâmetros.	19
1.2.5	Conexão de Levi-Civita	19
1.3	Alguns Exemplos de Variedades Semi-Riemanniana.	21
1.4	Curvatura na Geometria Semi-Riemanniana	24
1.4.1	Simetrias da Curvatura	24
1.4.2	Curvatura Seccional	25
1.4.3	Tensor de Ricci	27
1.5	Geodésicas	28
1.5.1	Aplicação Exponencial	30
1.5.2	Minimização e Maximização Local	31
1.6	Subvariedades Semi-Riemannianas	32
1.6.1	Segunda Forma Fundamental	33
1.6.2	Hipersuperfícies Semi-Riemannianas.	35
1.6.3	Exemplo: Hiperquádricas	37
<b>2</b>	<b>Campos e Tensores de Jacobi</b>	<b>40</b>
2.1	Campos de Jacobi	40
2.1.1	Pontos Conjugados e Pontos Focais	43
2.1.2	Teoria Variacional	45
2.1.3	Aplicação à Geometria Lorentziana	46
2.2	Tensores de Jacobi	47
2.2.1	Geodésicas Luminosas e Módulos Quocientes	47
2.2.2	Tensores Transversais	51
2.2.3	Tensores de Jacobi	55
2.2.4	Equação de Riccati	62
2.2.5	Tensores de Lagrange Canônicos	72
<b>3</b>	<b>Causalidade</b>	<b>79</b>
3.1	Cones Temporais.	79
3.1.1	Cone Causal	80

3.2	Orientação Temporal . . . . .	81
3.3	Relações de Causalidade . . . . .	83
3.4	Curvas $C^0$ Causais e o Lema da Curva Limite . . . . .	87
3.4.1	O Lema da Curva Limite. . . . .	89
3.5	Condições de Causalidade . . . . .	93
3.5.1	Cronologia e Causalidade . . . . .	93
3.5.2	Causalidade Forte . . . . .	94
3.5.3	Topologia de Alexandrov . . . . .	97
3.6	Distância Lorentziana . . . . .	98
3.6.1	Distância Lorentziana a Conjuntos . . . . .	101
3.6.2	Hiperbolicidade Global . . . . .	103
3.7	Conjuntos Acronais. . . . .	104
3.8	Hipersuperfícies de Cauchy . . . . .	110
3.9	Domínios de Dependência . . . . .	116
3.10	Horizontes de Cauchy . . . . .	123
3.11	Horismos. . . . .	127
3.12	Exemplos de Espaços-tempos e Causalidade . . . . .	131
3.12.1	Robertson-Walker . . . . .	131
3.12.2	Produtos Torcidos . . . . .	133
3.12.3	De Sitter . . . . .	134
<b>4</b>	<b>Existência de Geodésicas Maximais . . . . .</b>	<b>136</b>
4.1	Espaço de Curvas Causais e Topologia $C^0$ . . . . .	136
4.2	Comprimento de Arco Lorentziano . . . . .	144
4.2.1	Existência de Geodésicas Causais Maximais . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Linhas e Raios Geodésicos . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Curvas Quase Maximais e Geodésicas Maximais . . . . .	151
5.2	Construção de Raios Geodésicos em Espaços-Tempos Fortemente Causais. . . . .	156
5.3	Espaços-Tempos Causalmente Desconexos e Linhas Geodésicas Causais. . . . .	162
<b>6</b>	<b>Teoremas de Singularidade . . . . .</b>	<b>166</b>
6.1	Motivações Geométricas e Físicas . . . . .	166
6.2	Teoremas de Singularidade de Hawking. . . . .	168
6.3	Teorema de Singularidade de Penrose . . . . .	170
6.4	Teorema de Singularidade de Hawking & Penrose. . . . .	171
	<b>Apêndice. . . . .</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos e Lorentzianos . . . . .</b>	<b>173</b>
A.1	Formas Bilineares . . . . .	173

A.2	Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos . . . . .	174
A.3	Espaços Vetoriais Lorentzianos . . . . .	176
A.3.1	O Caso Luminoso . . . . .	177
<b>B</b>	<b>A Condição Genérica . . . . .</b>	<b>178</b>
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>180</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>181</b>

# Introdução

A motivação para o desenvolvimento desta dissertação está no chamado problema de *completude geodésica* para variedades Lorentzianas. O problema análogo para geometria Riemanniana já é classificado pelo teorema de Hopf-Rinow, dizendo que completude geodésica é equivalente à completude da variedade vista como espaço métrico para a distância induzida pelo tensor métrico, que ainda é equivalente a dizer que a variedade satisfaz a chamada *condição de Heine-Borel*, onde todo conjunto fechado e limitado é compacto. Por exemplo, todas as superfícies suaves e compactas de  $\mathbb{R}^3$  (como a esfera e o toro) são geodesicamente completas em relação à métrica Riemanniana induzida. Na verdade, muitos espaços de interesse para aplicações da geometria Riemanniana são completos, portanto é comum em muitos casos estudar geometria Riemanniana assumindo completude.

Na geometria Lorentziana a questão é diferente. Não há uma generalização satisfatória do teorema de Hopf-Rinow, e também não há muita relação entre completude de geodésicas em direções causais distintas (espacial, temporal ou luminosa) e completude geodésica geral. Mais ainda, muitas das variedades concretas aplicadas, como modelos na teoria de relatividade geral, realmente apresentam geodésicas causais inextensíveis e incompletas, portanto não podemos assumir completude mesmo em situações práticas.

Em termos físicos, a questão de incompletude geodésica está intrinsecamente relacionada à existência de *singularidades* nos modelos relativísticos. A grosso modo, tais singularidades dizem respeito a “defeitos” no espaço-tempo (mais precisamente, singularidades descrevem uma condição física no campo gravitacional) que fazem observadores em queda livre ou raios de luz acabarem suas existências prematuramente, traduzidas matematicamente como o espaço tempo  $M$  ser *causalmente incompleto*, isto é, possuir geodésicas causais inextensíveis e incompletas. Essas singularidades físicas são por exemplo buracos negros ou singularidades cosmológicas (conhecidas popularmente como *big-bang* e *big-crunch*), e tais objetos foram motivações para Stephen Hawking (no caso cosmológico) e Roger Penrose (no caso de buracos negros) desenvolverem seus *teoremas de singularidade*, cujas demonstrações serão nosso objetivo final.

Com tal objetivo, esta dissertação desenvolve os aspectos matemáticos necessários para podermos demonstrar três resultados acerca de singularidades: os teoremas de Hawking, o teorema de Penrose, e o teorema de Hawking-Penrose.

No capítulo 1, fazemos uma breve revisão de geometria semi-Riemanniana, com enfoque nos resultados necessários para o desenvolvimento do tema principal.

No capítulo 2, introduzimos *campos e tensores de Jacobi*, que fornecem técnicas analíticas para auxiliar compreensão de noções geométricas de “divergência” e “convergência” de famílias de geodésicas, por meio de pontos conjugados e focais, também introduzidos neste capítulo.

A partir do capítulo 3 começamos a estudar de *teoria de causalidade*, que é um assunto fundamental, tanto para as teorias físicas de gravitação ou cosmologia, quanto para o estudo

matemático da geometria Lorentziana. Construiremos algumas condições de causalidades e outras estruturas associadas, e veremos suas relações com a geometria e topologia de variedades Lorentzianas.

Para um melhor estudo de alguns aspectos da teoria causal, o capítulo 4 é dedicado à construção de uma topologia no espaço de curvas causais, a chamada *topologia*  $C^0$ , que se mostrará muito útil em diversos casos de interesse para analisar a geometria de espaços-tempos. Por exemplo, com algumas restrições na causalidade do espaço-tempo, será possível utilizar esta topologia para mostrar a existência de geodésicas globalmente maximizantes.

Com uma boa compreensão da teoria de causalidade, no capítulo 5 analisamos a construção de linhas e raios geodésicos em espaços-tempos, que são essencialmente geodésicas causais maximizantes e inextensíveis. A existência de tais geodésicas em uma série de condições associadas a causalidade dos espaços-tempos é por si só bastante interessante, e para os propósitos de demonstrar os teoremas de singularidade, garantir a sua existência e conhecer a respeito de sua completude (ou ausência dela) é um componente crucial.

Por fim, passamos para os teoremas de singularidade e suas demonstrações no capítulo 6. Da maneira em que esta dissertação foi estruturada, suas demonstrações sairão facilmente como consequências dos resultados organizados nos capítulos anteriores.

A organização desta dissertação exhibe a geral dependência lógica dos teoremas de singularidade com outros temas abordados, com cada um dos temas pouco dependentes um do outro, o que nos permite abordar “em blocos” tais tópicos, o que também facilita futuras reanálises de tais teoremas com o objetivo de simplificar suas hipóteses, uma vez que a interdependência lógica entre todos as hipóteses associadas a pontos conjugados/focais, hipóteses sobre causalidade no espaço-tempo e questões de curvatura ficam claras em suas demonstrações.

Para a leitura desta dissertação, um domínio da teoria básica de variedades suaves e uma pequena familiaridade com geometria Riemanniana serão assumidos. Também, para manter este trabalho o mais auto-contido possível, mas evitando deixá-lo muito extenso, optamos por omitir as demonstrações do capítulo 1, omitir no capítulo 2 as demonstrações dos resultados básicos de campos de Jacobi, para então trabalhar detalhadamente na teoria de tensores de Jacobi, e também omitir a demonstração alguns resultados na teoria de causalidade do capítulo 3, remetendo o trabalho técnico para algumas referências escolhidas, e apresentando em detalhes os aspectos da teoria causal que não se encontram em tais referências.

# 1 Variedades Semi-Riemannianas

Neste capítulo fazemos uma breve revisão dos principais conceitos e resultados de geometria semi-Riemanniana, especialmente para fixar a notação e referenciar resultados gerais que serão necessários ao longo desta dissertação.

Um conhecimento elementar da teoria de variedades suaves (de dimensão finita) será assumido, sendo nossa referência para teoria geral de variedades [Lee \(2012\)](#). A menos de menção contrária, variedades terão sempre dimensão finita, e a notação de Einstein para somatórios será sempre adotada quando não houver possibilidade de confusão.

Neste capítulo faremos comentários sobre os principais resultados, omitindo suas demonstrações, que podem ser vistas em grandes detalhes, no caso semi-Riemanniano, nas referências [O’Neill \(1983\)](#), capítulos 2 a 5 e [Costa e Silva \(s.d.\)](#), capítulos 2 a 5, e com um foco mais Riemanniano em [Carmo \(2015\)](#), capítulos 1 a 7, ou [Lee \(2018\)](#), capítulos 1,2, 4 a 7.

## 1.1 Métrica

Como é conhecido da teoria de variedades, a cada ponto  $p$  de uma variedade suave  $M$  se associa naturalmente um espaço vetorial  $T_pM$  (o *espaço tangente* a  $p$ ), e a tal espaço (e seu dual) associamos formas multilineares que variam suavemente com sua dependência em  $p \in M$ , chamadas *tensores*. Por exemplo, um produto interno define uma forma bilinear simétrica positiva-definida em cada  $T_pM$ . Se é possível associar a cada  $T_pM$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  que é suave em  $M$ , chamamos tal tensor de *métrica Riemanniana*. Podemos flexibilizar a positividade do produto interno e exigir apenas que ele seja não degenerado, o que nos leva à seguinte definição.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $M$  uma variedade suave de dimensão  $n$ . Uma métrica (ou tensor métrico) semi-Riemanniana em  $M$  é um  $(0, 2)$ -tensor simétrico não degenerado  $g$  de índice constante  $0 \leq \nu \leq n$ .*

Uma *variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu$*  é um par  $(M, g)$ , onde  $M$  é uma variedade suave e  $g$  uma métrica semi-Riemanniana de índice  $\nu$  definida em  $M$ . Dois casos particulares de métricas semi-Riemannianas serão de interesse: o caso Riemanniano  $\nu = 0$ , e o caso  $\nu = 1$  com  $\dim M \geq 2$  chamado de *métrica Lorentziana*. Nestes casos dizemos que a variedade é Riemanniana e Lorentziana, respectivamente. Frequentemente, quando não houver risco de confusão, denotaremos a métrica  $g$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Uma revisão geral de produtos escalares e espaços vetoriais semi-Euclidianos e Lorentzianos é realizada no apêndice [A](#).

Em coordenadas, para  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  carta local de  $M$ , as componentes do tensor  $g$  são

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Como  $g$  é não degenerado, para cada  $p \in U$  as componentes de  $g_p$  formam uma matriz inversível  $[g_p]$ . Denotamos por  $g_p^{ij}$  as componentes da matriz inversa de  $[g_p]$  na base coordenada de  $(U, \varphi)$ . A fórmula de inversão de matrizes pela regra de Cramer mostra que as funções  $g^{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves. Sendo  $g$  simétrico,  $g_{ij} = g_{ji}$  e portanto  $g^{ij} = g^{ji}$ .

Para campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , com  $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$  em  $U$ , temos

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j = (g_{ij} dx^i \otimes dx^j)(X, Y),$$

e portanto  $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$  em  $U$ . Muitas vezes utilizaremos a notação simplificada  $g = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ . O símbolo  $ds^2$  é chamado *elemento de linha*.

**Exemplo 1.1.2.** Em  $\mathbb{R}^n$  com coordenadas canônicas  $(x^1, \dots, x^n)$ , considere a métrica  $\eta_\nu$  dada pelo elemento de linha

$$ds_\nu^2 = - \sum_{i=1}^{\nu} (dx^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^n (dx^j)^2.$$

Tal métrica é chamada de *métrica semi-euclidiana* de índice  $\nu$ . Denotamos  $\mathbb{R}^n$  munido com tal métrica de  $\mathbb{R}_\nu^n$ . Para o caso  $\nu = 1$ , nos referimos a  $\mathbb{R}_1^n$  como *espaço-tempo de Minkowski*<sup>1</sup>. ◀

Para  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana, se  $0 < \nu < n$ , i.e. , se  $g_p$  é indefinida, há uma partição dos vetores tangentes em classes mutuamente exclusivas. Dizemos que  $v \in T_p M$  é

- (i) *temporal* (ou *tipo-tempo*) se  $g_p(v, v) < 0$ ,
- (ii) *luminoso* (ou *tipo-luz*) se  $g_p(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ ,
- (iii) *espacial* (ou *tipo-espaço*) se  $g_p(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ .

Dizemos ainda que um vetor  $v \in T_p M$  é *causal* se for luminoso ou temporal.

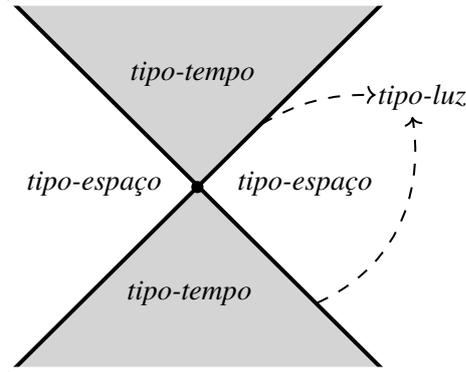
Denotamos por  $\mathcal{T}$  o conjunto de vetores tipo-tempo em um espaço vetorial semi-Euclidiano,  $\mathcal{S}$  o conjunto de todos vetores tipo-espaço excluindo a origem, e  $\Lambda$  o conjunto de todos os vetores luminosos, chamado de *cone de luz*. No caso de  $\mathbb{R}_1^n$  estes conjuntos são descritos por um cone duplo (figura 1.1).

Tais noções se transmitem para outros objetos. Um campo vetorial  $X$  sobre  $M$  é *temporal* (resp. *luminoso*, *espacial* ou *causal*) se em cada  $p \in M$  tivermos  $X_p$  temporal (resp. luminoso, espacial ou causal). Similarmente, uma curva suave  $\gamma : I \rightarrow M$  é *temporal* (resp. *luminoso*, *espacial* ou *causal*) se  $\gamma'(t)$  for temporal (resp. luminoso, espacial ou causal) em todo  $t \in I$ .

## 1.2 Conexões

A noção da velocidade de uma curva surge naturalmente em variedades suaves, mas definir aceleração sobre curvas que generalize de maneira natural a aceleração de curvas em

<sup>1</sup>Há um pequeno e inócua abuso de linguagem, porque ainda não se definiu orientação temporal ou espaço-tempo, noções a serem introduzidas no capítulo 3.

**Figura 1.1:** Cones em Minkowski.

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

$\mathbb{R}^n$  é uma questão mais elaborada. Em linhas gerais, precisamos que nossa variedade tenha uma estrutura extra, chamada *conexão*, para definir uma aceleração sobre curvas que carregue o mesmo tipo de informação que a aceleração usual em  $\mathbb{R}^n$  traz.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $M$  variedade suave. Uma conexão afim em  $M$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

*satisfazendo*

- (i)  $\nabla_{X_1+fX_2}Y = \nabla_{X_1}Y + f\nabla_{X_2}Y$ , para  $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ .
- (ii)  $\nabla_X(Y_1 + cY_2) = \nabla_X Y_1 + c\nabla_X Y_2$ , para  $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $c \in \mathbb{R}$ .
- (iii)  $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ , para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ .

Observe que a conexão não é tensorial, pois  $\nabla$  não é  $C^\infty(M)$ -linear na segunda variável, mas ainda assim, apesar das conexões afim serem a princípio definidas em campos vetoriais globais, é possível mostrar, devido às propriedades (i) - (iii), que  $\nabla$  depende apenas localmente dos campos vetoriais, no sentido da próxima proposição.

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $\nabla$  conexão em  $M$ ,  $U \subseteq M$  aberto. Temos*

- (i) *se  $Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $Y|_U = \tilde{Y}|_U$ , então  $(\nabla_X Y)_q = (\nabla_X \tilde{Y})_q$ , para todo  $q \in U$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .*
- (ii) *se  $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $X_p = \tilde{X}_p$  para algum  $p \in U$ , então  $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}} Y)_p$ , para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .*
- (iii) *se  $X_p = \tilde{X}_p$  e  $Y|_U = \tilde{Y}|_U$ , então  $(\nabla_X Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$ .*

Em vista da proposição 1.2.2, utilizaremos a notação  $\nabla_X Y$  mesmo quando  $X$  ou  $Y$  não forem campos suaves globalmente definidos. Em particular, dado  $v \in T_p M$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , fica bem definida a notação  $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p$ , onde  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é tal que  $X_p = v$ .

A propriedade de localização também nos permite realizar cálculos em coordenadas. Para  $(U, x^1, \dots, x^n)$  carta em  $M$ , escrevemos  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , onde as  $n^3$  funções  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$  são chamadas de *coeficientes de conexão* ou *símbolos de Christoffel*. Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , com  $X = X^i \partial_i$  e  $Y = Y^j \partial_j$  em  $U$ , temos

$$\nabla_X Y = \left( X^i \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \partial_k.$$

### 1.2.1 Torção e Curvatura

Associados a cada conexão construímos dois tensores de grande relevância geométrica.

**Definição 1.2.3.** *Seja  $\nabla$  conexão em  $M$ . A torção de  $\nabla$  é um  $(1, 2)$ -tensor  $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Se  $T \equiv 0$ , dizemos que a conexão  $\nabla$  é simétrica.

Como o colchete de Lie é zero em campos coordenados, vemos que as componentes da torção em um sistema de coordenadas são dadas por

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k,$$

logo uma conexão é simétrica se e somente se seus símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  são simétricos na troca dos índices  $i$  com  $j$ .

**Definição 1.2.4.** *Seja  $\nabla$  conexão em  $M$ . A curvatura de  $\nabla$  é o  $(1, 3)$ -tensor  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por<sup>2</sup>*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Se  $R \equiv 0$ , dizemos que conexão  $\nabla$  é plana.

Em coordenadas<sup>3</sup>,

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i,$$

onde  $R_{jkl}^i \partial_i = R(\partial_k, \partial_l) \partial_j$ .

<sup>2</sup>O sinal da curvatura pode aparecer de maneiras diferentes na literatura. Em O'Neill (1983), a curvatura é o negativo da definida aqui, e a nossa convenção coincide com a de Beem, Ehrlich e Easley (1999).

<sup>3</sup>Também não há uma convenção universal para a posição e ordem dos índices do tensor de curvatura. A convenção aqui é adotada conforme Beem, Ehrlich e Easley (1999).

Sendo  $R$  tensor  $C^\infty(M)$ -trilinear, podemos computar em  $R$  em vetores tangentes, isto é, dado  $p \in M$  e  $x, y, z \in T_pM$  fica bem definido  $R_p(x, y)z \in T_pM$ .

### 1.2.2 Conexão sobre Funções

Em muitas aplicações queremos restringir conexões a imagens de certas funções sobre variedades, por exemplo curvas. Para isto generalizamos a noção de campos vetoriais e consequentemente de conexões.

**Definição 1.2.5.** *Sejam  $N$  e  $M$  variedades suaves e  $F : N \rightarrow M$  uma função. Um campo vetorial sobre  $F$  é uma função  $V : N \rightarrow TM$  tal que  $\pi_M \circ V = F$ , ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{V} & TM \\ & \searrow F & \swarrow \pi_M \\ & & M \end{array}$$

onde  $\pi_M : TM \rightarrow M$  é a projeção canônica do fibrado tangente. Denotamos os campos vetoriais sobre  $F$  que são funções suaves por  $\mathfrak{X}(F)$ .

Observe que  $\mathfrak{X}(F)$  é um  $C^\infty(N)$ -módulo. Também, se  $N = M$  e  $F = \text{Id}_M$ , ganhamos a definição usual de campo vetorial.

**Exemplo 1.2.6.** Dado  $F : N \rightarrow M$  função qualquer e  $V : M \rightarrow TM$  campo vetorial, a função  $V \circ F : N \rightarrow TM$  é um campo vetorial sobre  $F$ , pois

$$\pi_M \circ V \circ F = \text{Id}_M \circ F = F.$$

Também, se  $F$  é suave, considere sua função derivada  $dF : TN \rightarrow TM$ . Para  $X : N \rightarrow TN$ , temos

$$\pi_M \circ dF \circ X = F \circ \pi_N \circ X = F \circ \text{Id}_N = F,$$

e portanto  $dF \circ X$  é campo vetorial sobre  $F$ . ◀

**Definição 1.2.7.** *Uma conexão sobre a função  $F : N \rightarrow M$  é uma função*

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(F) &\rightarrow \mathfrak{X}(F) \\ (X, V) &\mapsto D_X V \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i)  $D_{X_1 + fX_2} V = D_{X_1} V + fD_{X_2} V$ , para  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V \in \mathfrak{X}(F)$  e  $f \in C^\infty(N)$ .
- (ii)  $D_X(V_1 + cV_2) = D_X V_1 + cD_X V_2$ , para  $X \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(F)$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $D_X(fV) = (Xf)V + fD_XV$ , para  $X \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $V \in \mathfrak{X}(F)$  e  $f \in C^\infty(N)$ .

Observe novamente que tal definição remete à de conexão afim usual quando  $N = M$  e  $F = \text{Id}_M$ . Associado a noção de conexão sobre a função  $F : N \rightarrow M$ , definimos *curvatura* sobre a função  $F$ . Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$  e  $V \in \mathfrak{X}(F)$  e  $D$  conexão sobre  $F$ , definimos

$$R^D(X, Y)V = D_X(D_YV) - D_Y(D_XV) - D_{[X, Y]}V,$$

E se  $F$  for suave, definição a *torção* sobre  $F$ :

$$T^D(X, Y) = D_X(dF \circ Y) - D_Y(dF \circ X) - dF \circ [X, Y].$$

O interesse principal para está definição é o fato de uma conexão afim definida sobre uma variedade  $M$  induz uma conexão sobre funções, no sentido do próximo teorema.

**Teorema 1.2.8.** *Seja  $\nabla$  conexão afim em  $M$  e  $F : N \rightarrow M$  função suave. Existe uma única conexão  $D^\nabla$  sobre  $F$ , chamada de conexão induzida por  $\nabla$ , que satisfaz:*

$$D_X^\nabla(V \circ F)(p) = (\nabla_{dF_p(X_p)}V)_{F(p)},$$

para  $p \in N$ ,  $X \in \mathfrak{X}(N)$  e  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

No caso da conexão induzida por uma conexão afim, temos a seguinte relação entre curvatura e torção associadas a conexão e suas respectivas versões induzidas.

**Proposição 1.2.9.** *Seja  $\nabla$  conexão afim em  $M$  e  $F : N \rightarrow M$  função suave. Para  $D = D^\nabla$  conexão induzida em  $F$ ,  $p \in N$ ,  $x, y \in T_pN$  e  $v \in T_{F(p)}M$ , temos*

$$\begin{aligned} R_p^D(x, y)v &= R_{F(p)}(dF_p(x), dF_p(y))v, \\ T_p^D(x, y) &= T_{F(p)}(dF_p(x), dF_p(y)). \end{aligned}$$

### 1.2.3 Derivada Covariante e Transporte Paralelo

O caso de conexões sobre curvas nada mais é que uma reformulação de outro objeto geométrico, como comentamos agora.

**Definição 1.2.10.** *Seja  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  curva suave. Uma função  $D/dt : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  é dita ser derivada covariante da curva  $\alpha$  se é  $\mathbb{R}$ -linear e satisfaz, para qualquer  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e  $h \in C^\infty(I)$ ,*

$$\frac{D(hV)}{dt} = h'V + h \frac{DV}{dt}.$$

A relação entre derivada covariante e conexão sobre a curva se dá pelo próximo teorema.

**Teorema 1.2.11.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave e  $D$  conexão sobre  $\alpha$ . Temos*

(i) Denotando por  $d/dt$  o campo vetorial canônico em  $I$ , a função

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\alpha) &\rightarrow \mathfrak{X}(\alpha) \\ V &\mapsto D \frac{d}{dt} V, \end{aligned}$$

define uma derivada covariante sobre  $\alpha$ . Mais ainda, toda derivada covariante sobre  $\alpha$  é desta forma para uma única conexão sobre  $\alpha$ .

(ii) Dado  $\nabla$  conexão afim em  $M$ , se  $D = D^\nabla$  é a conexão induzida em  $\alpha$ , então

$$\frac{D^\nabla(V \circ \alpha)}{dt}(s) = (\nabla_{\alpha'(s)} V)_{\alpha(s)},$$

para todo  $s \in I$  e  $V \in \mathfrak{X}(M)$ .

Uma vez que  $DV/dt \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , podemos aplicar a derivada covariante  $n$  vezes. Utilizaremos também a notação  $V', V'', V''', \dots, V^{(n)}$  para as subseqüentes derivadas covariantes de  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ .

Sobre uma curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$ , um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  satisfazendo

$$\frac{DV}{dt} = 0$$

é dito ser um campo vetorial *paralelamente transportado* com respeito à conexão  $D$  sobre  $\alpha$ . Em coordenadas, a equação acima se torna

$$\frac{dV^i}{dt}(t) + \Gamma_{jk}^i \circ \alpha(t) (x^j \circ \alpha)'(t) V^k(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

chamadas de *equações de transporte paralelo*. Sendo tais equações diferenciais lineares, trabalhando um pouco sobre coordenadas, é possível mostrar existência e unicidade a partir de uma condição inicial.

**Teorema 1.2.12.** Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave, dado  $t_0 \in I$  e  $v \in T_{\alpha(t_0)}M$ , existe um único  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que

$$\frac{DV}{dt} = 0 \text{ e } V(t_0) = v.$$

A noção de *transporte paralelo* é dada pelo seguinte resultado.

**Teorema 1.2.13 (Transporte Paralelo).** Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave,  $D$  conexão sobre  $\alpha$  e  $D/dt$  derivada covariante associada a  $D$ . Para cada par  $t, s \in I$ , definimos

$$P_{t,s}^{\alpha,D} : T_{\alpha(t)}M \rightarrow T_{\alpha(s)}M,$$

da seguinte maneira: para cada  $v \in T_{\alpha(t)}M$ , seja  $V$  o único campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  paralelamente transportado com  $V(t) = v$ . Fica então bem definida  $P_{t,s}^{\alpha,D}(v) = V(s)$ . A família de funções  $\{P_{t,s}^{\alpha,D}\}_{t,s \in I}$  possui as seguintes propriedades:

- (i) Cada  $P_{t,s}^{\alpha,D}$  é um isomorfismo entre espaços vetoriais.
- (ii) Dados  $t, s, r \in I$ , temos  $P_{s,r}^{\alpha,D} \circ P_{t,s}^{\alpha,D} = P_{t,r}^{\alpha,D}$ , chamadas de condições de cociclo. Em particular  $P_{t,t}^{\alpha,D} = \text{Id}_{T_{\alpha(t)}M}$  e  $(P_{t,s}^{\alpha,D})^{-1} = P_{s,t}^{\alpha,D}$ .
- (iii) Dado  $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$  e  $t_0 \in I$ , temos

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{t_0+t,t_0}^{\alpha,D}(X(t_0+t)) - X(t_0)}{t}.$$

A coleção de isomorfismos  $P_{t,s}^{\alpha,D}$  são chamados de transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  em relação à conexão  $D$ .

### 1.2.4 Aplicações a Dois Parâmetros

Para outro exemplo da aplicação de conexão sobre funções que será relevante nesta dissertação, seja  $\delta > 0$  e considere  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  função suave. Tal função será chamado de *aplicação a dois parâmetros*<sup>4</sup>.

Denote pontos de  $[a, b] \times (-\delta, \delta)$  por  $(t, s)$ , e sejam  $\partial/\partial t$  e  $\partial/\partial s$  os campos coordenados canônicos. Dado  $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ , denotamos

$$Z_t = D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, \quad Z_s = D_{\frac{\partial}{\partial s}} Z.$$

Iterando derivadas, escrevemos

$$Z_{tt} = D_{\frac{\partial}{\partial t}}^2 Z, \quad Z_{ts} = D_{\frac{\partial}{\partial s}} Z_t = D_{\frac{\partial}{\partial s}} D_{\frac{\partial}{\partial t}} Z, \text{ etc.}$$

Escrevemos também  $\sigma_t = d\sigma \circ \partial/\partial t$  e  $\sigma_s = d\sigma \circ \partial/\partial s$ .

**Proposição 1.2.14.** Dado  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  aplicação a dois parâmetros e  $\nabla$  conexão afim em  $M$  com  $D = D^\nabla$  conexão induzida em  $\sigma$ . Temos

- (i) Dado  $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ , temos  $Z_{ts} - Z_{st} = R(\sigma_s, \sigma_t)Z$ .
- (ii)  $\sigma_{ts} - \sigma_{st} = T(\sigma_s, \sigma_t)$ , e em particular  $\sigma_{st} = \sigma_{ts}$  se  $\nabla$  for conexão simétrica.

### 1.2.5 Conexão de Levi-Civita

Muito mais pode ser dito sobre conexões afins em variedades, mas nosso interesse neste objeto vem do fato que uma métrica semi-Riemanniana induz uma conexão natural, que passamos a discutir.

<sup>4</sup>Podemos definir aplicações a dois parâmetros para regiões mais gerais em  $\mathbb{R}^2$ , mas tal generalização não será utilizada aqui.

Antes de enunciar o teorema principal, temos o seguinte resultado, geralmente introduzido para a demonstração existência de uma conexão de Levi-Civita, mas é por si só interessante.

**Proposição 1.2.15.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , seja  $X^*$  a 1-forma tal que*

$$X^*(Y) = g(X, Y), \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*Então, a função  $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^* \in \mathfrak{X}^*(M)$  é um isomorfismo entre  $C^\infty(M)$ -módulos.*

Dados  $\theta$  1-forma e  $X$  campo vetorial sobre uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  tais que  $\theta = X^*$ , dizemos que  $X$  e  $\theta$  estão *metricamente associados*. Um exemplo concreto desta situação é o seguinte: dado  $f \in C^\infty(M)$ , o *gradiente* de  $f$ , é o campo vetorial  $\text{grad } f$  que é metricamente equivalente à 1-forma  $df$ , isto é,  $df(X) = g(\text{grad } f, X)$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Em coordenadas,  $\text{grad } f = g^{ij} \partial_i f \partial_j$ .

**Teorema 1.2.16 (Conexão Levi-Civita).** *Em uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  simétrica que é compatível com sua métrica, isto é, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\nabla$  satisfaz*

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

*Tal conexão é chamada de conexão de Levi-Civita e pode ser caracterizada pela Fórmula de Koszul:*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

*para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .*

Com tal conexão vêm os objetos associados discutidos anteriormente (curvatura, símbolos de Christoffel, conexões induzidas, derivada covariante, etc). Como nosso interesse é apenas em geometria semi-Riemanniana, a partir de agora trabalharemos exclusivamente com a conexão de Levi-Civita, e não faremos nenhuma notação especial para diferenciar tal conexão outras conexões que poderiam ser definidas sobre a variedade.

Em um sistema de coordenadas locais, compatibilidade com a métrica nos dá

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{il} \Gamma_{jk}^l + g_{jl} \Gamma_{ik}^l,$$

e pela fórmula de Koszul,

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right).$$

Temos assim uma maneira sistemática de obter os símbolos de Christoffel a partir das coordenadas de  $g$ . Por exemplo, em  $\mathbb{R}_\nu^n$ , sua métrica tem coeficientes constantes em relação ao

sistema de coordenadas canônicas, logo  $\Gamma_{jk}^i = 0$  para qualquer combinação de índices. Com isto, o tensor de curvatura associado à conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_\nu^n$  é identicamente nulo, a variedade semi-Riemanniana  $\mathbb{R}_\nu^n$  é *plana* (em relação a Levi-Civita).

Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave e  $D/dt$  derivada covariante sobre  $M$  associada à conexão de Levi-Civita, dados  $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , temos

$$g(V, W)' = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right),$$

onde  $t \in I \mapsto g_{\alpha(t)}(V(t), W(t)) \in \mathbb{R}$  é a função sendo derivada do lado esquerdo da igualdade acima.

### 1.3 Alguns Exemplos de Variedades Semi-Riemanniana

Já estudamos um pouco sobre  $\mathbb{R}_\nu^n$ , onde vimos que uma variedade semi-Riemanniana de índice  $\nu$  e plana. Consideramos agora outros exemplos.

#### A Esfera $\mathbb{S}^n$

Da teoria usual de variedades, dado qualquer  $(0, s)$ -tensor  $\mathbb{T}$  sobre uma variedade  $M$  e qualquer função suave  $F : N \rightarrow M$ , o *pullback* de  $\mathbb{T}$  por  $F$  é o  $(0, s)$ -tensor  $F^*\mathbb{T}$  em  $N$  definido por

$$F^*\mathbb{T}_p(v_1, \dots, v_s) = \mathbb{T}_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_s)),$$

para todo  $p \in N, v_1, \dots, v_s \in T_pN$ . Agora, seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Para qualquer aplicação suave  $F : N \rightarrow M$ , o *pullback*  $F^*g$  define um  $(0, 2)$ -tensor simétrico em  $N$ , que não é necessariamente uma métrica semi-Riemanniana em  $N$ .

Um exemplo familiar onde o *pullback* se torna métrica é a *n-esfera*. No espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  usual, denotando sua métrica por  $\delta$ , considere a inclusão  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . A *métrica redonda* na esfera é a métrica Riemanniana  $\omega_n = i^*\delta$ .

Considere o caso  $n = 2$ , com coordenadas esféricas usuais em  $\mathbb{R}^3$  dadas por

$$(r, \theta, \phi) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

que com  $r = 1$  se restringem de acordo para coordenadas adaptadas

$$(\theta, \phi) \mapsto (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

sobre  $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$  até aberto de  $\mathbb{S}^2$ . As componentes  $(\omega_2)_{ij}$  são facilmente computadas, nos dando o elemento de linha

$$ds_{\omega_2}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.1)$$

## O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$

O espaço hiperbólico possui diversas representações equivalentes. Para uma primeira ilustração, exibimos o modelo de semi-espaço superior. Considere

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

chamado de *semi-espaço superior* em  $\mathbb{R}^n$ . A *métrica hiperbólica*  $g_H$  é dada da seguinte maneira. Para  $\delta$  a métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^n$  restringida em  $\mathbb{H}^n$ , considere

$$\Omega : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n \mapsto 1/x_n \in (0, +\infty),$$

e ponha  $g_H = \Omega^2 \delta$ . Em coordenadas Cartesianas  $(x^1, \dots, x^n)$ , o elemento de linha é então

$$ds_H^2 = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

## Produtos Torcidos

A partir de variedades semi-Riemannianas conhecidas, podemos obter novas variedades “combinando” de certa forma, o que dá vasta classe de variedades. Algumas variedades Lorentzianas utilizadas na relatividade geral são obtidas desta forma.

Seja  $(B, g_B)$  e  $(F, g_F)$  variedades semi-Riemannianas, e  $f : B \rightarrow (0, +\infty)$  suave. Denote por  $\pi_B : (p, q) \in B \times F \mapsto p \in B$  e  $\pi_F : (p, q) \in B \times F \mapsto q \in F$  as projeções canônicas. O *produto torcido* da base  $(B, g_B)$ , a *fibra*  $(F, g_F)$  e *função de torção*  $f$  é

$$B \times_f F = (B \times F, \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F)).$$

Se  $f \equiv 1$ , um produto torcido é simplesmente um *produto*.

Explicitamente, para  $(p, q) \in B \times F$ , como  $T_{(p,q)}(B \times F) \simeq T_p B \oplus T_q F$ , e se  $(v, w), (v', w') \in T_p B \oplus T_q F$ , então

$$g_B \times_f F((v, w), (v', w')) = (g_B)_p(v, v') + f(p)^2 (g_F)_q(w, w').$$

Dadas bases ortonormais  $\{v_1, \dots, v_{\dim(B)}\}$  e  $\{w_1, \dots, w_{\dim(F)}\}$  de  $(T_p B, (g_B)_p)$  e  $(T_q F, (g_F)_q)$ , respectivamente, vemos que

$$\left\{ (v_1, 0), \dots, (v_{\dim(B)}, 0), \left(0, \frac{w_1}{f(p)}\right), \dots, \left(0, \frac{w_{\dim(F)}}{f(p)}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal  $(T_{(p,q)}(B \times F), (g_{B \times_f F})_{(p,q)})$ . Utilizando tais bases, é fácil ver que

$$\text{ind}(B \times_f F) = \text{ind}(B) + \text{ind}(F).$$

Em particular,

- i) se  $(B, g_B)$  is Lorentziana e  $(F, g_F)$  é Riemanniana, então  $B \times_f F$  é Lorentziana;
- ii) se  $(B, g_B)$  e  $(F, g_F)$  são ambas Riemannianas, então  $B \times_f F$  também é.

Consideramos agora alguns exemplos importantes de produtos torcidos.

- 1) Seja  $(B, g_B) = (\mathbb{R}, dt^2)$  a métrica positiva padrão em  $\mathbb{R}$ , e  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$  a  $n$ -esfera redonda. o produto  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, dt^2 + \omega_n)$  é o *cilindro (Riemanniano) padrão*.
- 2) A versão Lorentziana do exemplo anterior é a seguinte: seja  $(B, g_B) = (\mathbb{R}, -dt^2)$  e  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$ , o produto  $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n, -dt^2 + \omega_n)$  é chamado de *cilindro de Einstein*.
- 3) Seja  $(B, g_B) = ((a, b), -dt^2)$  a métrica negativa no intervalo aberto  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$  função suave e  $(F, g_F)$  uma variedade Riemanniana qualquer. O produto torcido Lorentziano  $(a, b) \times_f F$  é chamado de *espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado*. (É chamado simplesmente de *espaço-tempo de Robertson-Walker* se  $(F, g_F) = (\mathbb{R}^n, \delta)$ ,  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^n, \omega_n)$ , ou  $(F, g_F) = (\mathbb{H}^n, g_H)$ .)
- 4) Fixe  $M > 0$ . Para o conjunto aberto

$$B = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r > 2M\}$$

com a métrica Lorentziana

$$g_B = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr \otimes dr.$$

Se  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^2, \omega_2)$ , e como função de torção escolha a projeção  $(t, r) \in B \mapsto r \in (2M, +\infty)$ . O produto torcido Lorentziano  $B \times_f F$  neste caso é chamado de *espaço-tempo de Schwarzschild de massa  $M$* .

- 5) Fixe  $M > 0$ , e considere a função suave

$$f : r \in (0, +\infty) \mapsto (r - 2M)e^{(r/2M)-1} \in \mathbb{R}.$$

Um cálculo simples mostra que  $f' > 0$  on  $(0, +\infty)$ , logo  $f$  é um difeomorfismo com sua imagem  $\text{Im } f = (-2M/e, +\infty)$ . Seja

$$K_M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv > -2M/e\}.$$

Definindo  $r : (u, v) \in K_M \mapsto f^{-1}(uv) \in (0, +\infty)$  como a função de torção.  $K_M$  com a métrica Lorentziana

$$g_{K_M} = F(u, v)(du \otimes dv + dv \otimes du), \quad F(u, v) = (8M^2/r(u, v))e^{1-(r(u, v)/2M)}$$

é conhecida como *plano de Kruskal-Szekeres*, e tomando novamente  $(F, g_F) = (\mathbb{S}^2, \omega_2)$ , o produto torcido Lorentziano  $K_M \times_r F$  é chamado de *espaço-tempo de Schwarzschild-Kruskal-Szekeres de massa  $M$* .

## 1.4 Curvatura na Geometria Semi-Riemanniana

Com a conexão de Levi-Civita em uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  propriamente introduzida, podemos explorar o tensor de curvatura associado a tal conexão, que, apesar de parecer um objeto algébrico complicado à primeira vista, possui uma rica interpretação geométrica.

Sumarizamos nesta seção suas diversas propriedades, como também a de alguns outros objetos derivados do tensor de curvatura que também serão importantes.

### 1.4.1 Simetrias da Curvatura

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , vemos que a aplicação

$$R(X, Y) : Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$$

é claramente  $C^\infty(M)$ -linear, e é chamada de *operador de curvatura* associado ao par de campos vetoriais  $(X, Y)$ . Devido a sua natureza tensorial, ela naturalmente induz um operador linear em cada espaço tangente  $T_p M$ , a saber, para  $x, y \in T_p M$ ,

$$R_p(x, y) : z \in T_p M \mapsto R_p(x, y)z \in T_p M.$$

Outro importante operador linear associado à curvatura é o chamado *operador força de maré*<sup>5</sup> associado a um vetor  $v \in T_p M$ , definido por

$$R_v : x \in T_p M \mapsto R_v(x) = R(x, v)v \in T_p M.$$

**Teorema 1.4.1 (Simetrias do Tensor de Curvatura).** *Para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , temos*

- (i)  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ .
- (ii)  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(Z, R(X, Y)W)$ .
- (iii)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ . (*Primeira identidade de Bianchi.*)
- (iv)  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$ . (*Troca por Pares.*)
- (v)  $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$ . (*Segunda Identidade de Bianchi.*)

Tais simetrias induzem as seguintes propriedades no operador força de maré.

---

<sup>5</sup>Do inglês *tidal force operator*.

**Corolário 1.4.2.** Dado  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , o operador força de maré  $R_v$  possui as seguintes propriedades:

- (i)  $R_v(v) = 0$  e  $R_v(T_p M) \subseteq v^\perp$ . Em particular, o operador força de maré pode ser visto como um operador em  $v^\perp$ .
- (ii)  $g_p(R_v(x), y) = g_p(x, R_v(y))$ , para todo  $x, y \in T_p M$ , isto é,  $R_v$  é autoadjunto com respeito ao produto escalar  $g_p$ .

**Observação 1.4.3.** Devido às simetrias do tensor de curvatura como no teorema 1.4.1, é conveniente introduzir o chamado tensor *tensor de Riemann* (ou *de curvatura de Riemann*)  $\tilde{R}$ , que é um tensor  $(0, 4)$  definido, para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , por

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Na verdade,  $R$  e  $\tilde{R}$  carregam exatamente a mesma informação geométrica pois são metricamente equivalentes, ou seja, em qualquer sistema de coordenadas, é fácil ver que suas componentes se relacionam por

$$R_{mkij} = g_{ml} R^l_{kij}.$$

Para  $\tilde{R}$ , as simetrias (i)-(iv) do teorema 1.4.1 se tornam

- (i)  $\tilde{R}(W, Z, X, Y) = -\tilde{R}(W, Z, Y, X)$ .
- (ii)  $\tilde{R}(W, Z, X, Y) = -\tilde{R}(Z, W, X, Y)$ .
- (iii)  $\tilde{R}(W, Z, X, Y) + \tilde{R}(W, X, Y, Z) + \tilde{R}(W, Y, Z, X) = 0$ . (Primeira identidade de Bianchi.)
- (iv)  $\tilde{R}(X, Y, W, Z) = \tilde{R}(W, Z, X, Y)$ . (Troca por Pares.)

Para tratar problemas envolvendo geodésicas luminosas, que serão exploradas na teoria principal, introduzimos a seguinte adaptação do operador força de maré.

**Proposição 1.4.4 (Operador Força de Maré Luminoso).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ , e fixe  $p \in M$ . No espaço vetorial Lorentziano  $(T_p M, g_p)$ , seja  $v \in T_p M$  vetor luminoso, e considere o quociente  $\overline{v^\perp}$  tal como construído no apêndice A (ver proposição A.3.6). Então, o operador*

$$\overline{R}_v : \overline{w} \in \overline{v^\perp} \mapsto \overline{R_v(w)} \in \overline{v^\perp}$$

*está bem definido e é autoadjunto com respeito ao produto interno induzido por  $g_p$ , tal como definido na proposição A.3.6-(ii).*

## 1.4.2 Curvatura Seccional

Surpreendentemente, apesar do do tensor de curvatura ser um objeto elaborado no sentido algébrico, em muitos casos de interesse uma análise apenas em planos bidimensionais é suficiente

para determinar completamente a curvatura. A análise completa de tais técnicas passa por alguns resultados técnicos e algébricos que omitiremos aqui, enunciando apenas os pontos principais (ver [Costa e Silva \(s.d.\)](#), seções 3.7.2 e 3.7.3, ou [O'Neill \(1983\)](#), capítulo 3, para uma discussão mais aprofundada).

Em cada  $p \in M$ , chamaremos de *plano* o conjunto  $\Pi \subseteq T_p M$  que é subespaço vetorial bidimensional.

**Definição 1.4.5.** *Se  $\Pi \subseteq T_p M$  é um plano não degenerado, a curvatura seccional de  $\Pi$  é o valor*

$$K(\Pi) = \frac{g_p(R_p(w, v)v, w)}{g_p(w, w)g_p(v, v) - g_p(v, w)^2},$$

onde  $\{v, w\}$  é uma base de  $\Pi$ .

(Nas referências dadas acima é mostrado que o denominador nunca se anula para planos não degenerados, e que tal valor independe da escolha de base.)

**Proposição 1.4.6 (Schur).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana com a propriedade de que, para todo  $p \in M$ , existe  $f(p) \in \mathbb{R}$  tal que  $K(\Pi) = f(p)$ , para qualquer plano  $\Pi \subseteq T_p M$  não degenerado. Então, a função  $f : p \in M \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$  é suave e temos, para qualquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$R(X, Y)Z = f[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y].$$

As condições da proposição acima são trivialmente satisfeitas em variedades bidimensionais.

**Corolário 1.4.7.** *Se  $(M, g)$  é uma variedade semi-Riemanniana bidimensional (também chamada de superfície semi-Riemanniana), então existe uma única função  $K \in C^\infty(M)$  tal que, para qualquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$R(X, Y)Z = K[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y].$$

Tal função  $K$  é chamada de curvatura Gaussiana da superfície.

**Definição 1.4.8 (Curvatura Constante).** *Dado  $C_0 \in \mathbb{R}$ , uma variedade semi-Riemanniana é dita ser de curvatura constante  $C_0$  se*

$$K(\Pi) = C_0,$$

para qualquer plano  $\Pi$  plano não degenerado em qualquer espaço tangente de  $M$ . Se existe um tal número real, dizemos que  $(M, g)$  é uma variedade de curvatura constante.

A respeito de curvatura constante, a proposição 1.4.6 tem uma importante consequência.

**Corolário 1.4.9.** *Uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  tem curvatura constante  $C_0$  se e somente se*

$$R(X, Y)Z = C_0[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y],$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Em particular,  $(M, g)$  é plana se e somente se tem curvatura constante  $C_0 = 0$ .

### 1.4.3 Tensor de Ricci

**Definição 1.4.10.** *Seja  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana  $n$ -dimensional e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  referencial ortonormal local, com  $g(E_i, E_i) = \epsilon_i = \pm 1$ . O tensor de Ricci (ou curvatura de Ricci) de  $M$  é dado, para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , por*

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(E_i, Y)X, E_i).$$

Denotando por  $S$  o traço do tensor de Ricci,  $S$  é chamado de curvatura escalar. Explicitamente,

$$S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \text{Ric}(E_i, E_i).$$

Naturalmente, não é difícil ver que tais definições independem da escolha de referencial ortonormal. Também, pelas simetrias do tensor de curvatura, vemos que o tensor de Ricci é simétrico.

Em coordenadas locais, temos

$$R_{ij} = (\text{Ric})_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k,$$

$$S = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}.$$

O tensor de Ricci e a curvatura se relacionam da seguinte maneira.

**Teorema 1.4.11 (Identidade de Bianchi Contraída).** *O tensor de Ricci e a curvatura escalar de qualquer variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  satisfazem*

$$2 \text{div Ric} = dS$$

E com esta identidade é possível mostrar o seguinte.

**Corolário 1.4.12.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana conexa de dimensão  $n \geq 3$ . Então*

- (i) *Se  $\text{Ric} = fg$  para alguma função  $f \in C^\infty(M)$ , então  $f$  é constante.*

(ii) Se  $(M, g)$  satisfaz as condições da proposição 1.4.6, então  $(M, g)$  tem curvatura constante.

O tensor de Ricci também se associa ao operador força de maré em direções não luminosas da seguinte maneira.

**Proposição 1.4.13.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $n \geq 2$ ,  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  não nulo e temporal caso  $g$  seja indefinida. Temos então que*

$$\text{Ric}(v, v) = \text{tr } R_v.$$

E temos uma adaptação via quociente para o caso luminoso.

**Proposição 1.4.14.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ ,  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  luminoso. Na notações e propriedades do quociente feitas no apêndice A (proposição A.3.6), e para o operador força de maré luminoso  $\overline{R}_v$  introduzido na proposição 1.4.4, temos*

$$\text{Ric}(v, v) = \text{tr } \overline{R}_v.$$

## 1.5 Geodésicas

O transporte paralelo nos dá uma maneira padrão de comparar vetores sobre curvas em espaços tangentes diferentes por meio de uma conexão. Observe que, se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma curva suave, pelo item (iii) do teorema 1.2.13 aplicado à conexão de Levi-Civita e conexões induzidas, podemos calcular um “limite” da derivada de  $\alpha$ , que definiremos<sup>6</sup> como a *aceleração*  $\alpha''$  de  $\alpha$ ,

$$\alpha''(t) = \frac{D\alpha'}{dt}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_{t+s,t}^\alpha(\alpha'(t+s)) - \alpha'(t)}{s}.$$

Assim, dizemos que uma curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  é *geodésica* se possui aceleração nula, i.e.,  $\alpha'' = 0$ . Em outras palavras, o campo vetorial  $\alpha'$  é paralelo.

A questão de uma curva ser geodésica depende da parametrização. Se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica e  $h : J \rightarrow I$  é um difeomorfismo, temos

$$(\alpha \circ h)'' = h''(\alpha' \circ h) + (h')^2(\alpha \circ h'')$$

que não é zero se  $h'' \neq 0$ . Vemos que apenas *reparametrizações afins* preservam o caráter geodésico. Por outro lado, se  $\beta : I \rightarrow M$  é uma curva tal que existe uma reparametrização  $h : J \rightarrow I$  de forma que  $\beta \circ h$  é uma geodésica, dizemos que  $\beta$  é uma *pré-geodésica*.

Observe também que o *caráter causal* de uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  é único, pois

$$\frac{dg(\alpha', \alpha')}{dt} = 2g(\alpha'', \alpha') = 0,$$

<sup>6</sup>Tais noções fazem sentido em conexões afins gerais, mas aqui estamos interessados no caso semi-Riemanniano com conexão de Levi-Civita.

logo  $g(\alpha', \alpha')$  é constante. Sendo positivo, negativo ou zero, diremos que  $\alpha$  é geodésica *espacial*, *temporal* ou *luminosa*, respectivamente. Se  $g(\alpha', \alpha') \leq 0$ ,  $\alpha$  é chamada de geodésica *causal*.

Em coordenadas, a equação  $\alpha'' = 0$  se torna

$$\frac{d^2(x^i \circ \alpha)}{dt^2} + (\Gamma_{jk}^i \circ \alpha) \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^k \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

chamadas de *equações geodésicas*. Com elas, já podemos obter um exemplo bastante simples: em  $\mathbb{R}_v^n$  com coordenadas canônicas, os coeficientes de Christoffel se anulam, logo a equação 1.2 se torna simplesmente  $d^2x^i/dt^2 = 0$ , mostrando que as geodésicas em  $\mathbb{R}_v^n$  são retas.

Diferente do transporte paralelo, estas equações diferenciais são não lineares, e em geral, existência e unicidade só podem ser garantidas localmente, como diz o próximo resultado.

**Teorema 1.5.1.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Dado  $v \in TM$ , existe  $\varepsilon > 0$  e uma geodésica  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha'(0) = v$ . Ainda, se  $\alpha : I \rightarrow M$  e  $\beta : J \rightarrow M$  são geodésicas tais que, para algum  $t_0 \in I \cap J$ , temos  $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$ , então  $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$ .*

**Observação 1.5.2.** A definição de geodésica pode ser facilmente adaptada para o caso de curvas definidas em intervalos fechados ou semi-abertos, considerando derivadas laterais. Assim, para uma geodésica em intervalo semi-aberto (o caso fechado é análogo)  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ , de acordo com o teorema anterior existe uma geodésica  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\beta'(0) = \alpha'(0)$ . Definindo a curva  $\gamma : (0 - \varepsilon, b) \rightarrow M$  por

$$\gamma(t) \begin{cases} \beta(t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \alpha(t), t \notin (-\varepsilon, \varepsilon). \end{cases}$$

O teorema anterior também implica que  $\gamma$  é uma curva bem definida, que na verdade é uma geodésica. Esse argumento ilustra que *qualquer geodésica  $\alpha$  definida em um intervalo fechado ou semi-aberto pode ser estendida para um intervalo aberto*.

**Corolário 1.5.3.** *Para cada  $v \in TM$ , existe uma única geodésica  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  tal que*

(i)  $I_v \subseteq \mathbb{R}$  é um intervalo aberto contendo 0 e  $\gamma_v'(0) = v$ .

(ii) se  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $0 \in I$ , é uma geodésica com  $\alpha'(0) = v$ , então  $I \subseteq I_v$  e  $\gamma_v|_I = \alpha$ .

$\gamma_v$  é chamada de geodésica maximal com velocidade inicial  $v$ .

A respeito de geodésicas maximais  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ , se  $I_v = \mathbb{R}$ , dizemos que a geodésica  $\gamma_v$  é *completa*. Se  $I_v = [0, +\infty)$ , tais geodésicas são as vezes chamadas de *semi-completas*. Uma variedade semi-Riemanniana é dita ser *completa* se todas as suas geodésicas maximais são completas.

De acordo com o caráter causal de geodésicas, podemos ainda separar completude por tais caracteres. Uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  é dita ser *temporalmente completa*,

*espacialmente completa* ou *luminosamente completa* se todas geodésicas com os respectivos caracteres causais são completas. Se ambas geodésicas temporais e luminosas são completas, dizemos que  $(M, g)$  é *causalmente completa*.

Uma outra propriedade relevante de geodésicas diz respeito ao seu comprimento. O *comprimento* de uma curva suave  $\alpha : I \rightarrow M$  entre valores  $a \leq b$  é dada por

$$L_g(\alpha|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{|g_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s))|} ds.$$

No caso de  $\alpha$  ser geodésica,  $g(\alpha', \alpha')$  é constante, em particular igual a  $|\alpha'(a)|$ , assim,

$$L_g(\alpha|_{[a,b]}) = (b - a)|\alpha'(a)|.$$

Vemos portanto que a reparametrização por comprimento de arco se torna reparametrização afim, em particular, quando trabalhando com geodésicas não luminosas, se outras propriedades não forem relevantes, podemos sempre assumir serem de *velocidade unitária*.

### 1.5.1 Aplicação Exponencial

Uma aplicação de extrema relevância para a geometria semi-Riemanniana é a chamada *aplicação exponencial*. Uma discussão completa deste tópico requer discutir uma série de outros resultados auxiliares que não serão relevantes no resto desta dissertação (para uma discussão em detalhes do assunto, ver O'Neill (1983), capítulos 3 e 5, Costa e Silva (s.d.), capítulo 5 para o caso semi-Riemanniano, ou Lee (2018), capítulo 5, para um foco mais Riemanniano), portanto daremos sua definição e os resultados mais relevantes a serem utilizados.

Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana e considere  $\mathcal{D} \subseteq TM$  o conjunto de vetores  $v \in TM$  tais que a geodésica maximal  $\gamma_v : I_v \rightarrow M$  está definida para  $t = 1$ . Usando fluxo de campos, é possível mostrar que  $\mathcal{D}$  é aberto em  $TM$  contendo a seção nula  $\mathcal{Z}$ . A *aplicação exponencial* é a função

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{D} &\rightarrow M \\ v &\mapsto \exp(v) = \gamma_v(1). \end{aligned}$$

É possível mostrar que  $\exp$  é uma função suave com  $\exp(tv) = \gamma_v(t)$  se  $t \in [0, 1]$ .

A restrição de  $\exp$  para um espaço tangente  $T_p M$  é denotada por  $\exp_p : \mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M \rightarrow M$ . O domínio  $\mathcal{D}_p$  contém o vetor nulo  $0_p$  e é *estrelado*, isto é, se  $v \in \mathcal{D}_p$ , então  $tv \in \mathcal{D}_p$  para  $t \in [0, 1]$ .

Uma cálculo simples mostra que a derivada de  $\exp_p$  em  $0_p$  é o *isomorfismo canônico* entre espaços vetoriais (cf. Lee (2012), proposição 3.13). Aplicando o teorema da função inversa, existe um aberto  $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{D}_p$  contendo  $0_p$  tal que  $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \exp_p(\tilde{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}$  é um difeomorfismo. Ainda,  $\tilde{\mathcal{N}}$  pode ser escolhido a ser estrelado.

A discussão acima mostra que todo ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança aberta  $\mathcal{N} = \exp_p(\tilde{\mathcal{N}})$  com  $\tilde{\mathcal{N}}$  estrelado e  $\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}}$  difeomorfismo. Um tal vizinhança é dita ser *vizinhança normal* de  $p$ . Tais vizinhanças formam uma base para a topologia de  $M$ . A necessidade de considerar vizinhanças normais se dá pelo seguinte resultado.

**Proposição 1.5.4 (Geodésicas Radiais).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana, e  $\mathcal{N}$  vizinhança normal de  $p \in M$ . Então, para cada  $q \in \mathcal{N}$ , existe uma única geodésica  $\rho_q : [0, 1] \rightarrow M$  começando em  $p$  e terminando em  $q$  com imagem inteiramente contida em  $\mathcal{N}$ . Ainda,*

$$\rho'_q(0) = (\exp_p|_{\tilde{\mathcal{N}}})^{-1}(q).$$

Podemos melhorar a noção de vizinhanças normais. Uma *vizinhança convexa* ou *aberto convexo*  $C$  é uma aberto de  $M$  que é vizinhança normal de todos os seus pontos.

**Teorema 1.5.5.** *Dado  $p \in M$  e  $U \subseteq M$  aberto contendo  $p$ , existe um aberto convexo  $C$  com  $p \in C \subseteq U$ .*

Portanto temos também uma base de  $M$  por abertos convexos. Dados dois pontos de uma vizinhança convexa  $p, q \in C$ , seja  $\rho_q : [0, 1] \rightarrow C$  a geodésica radial de  $p$  até  $q$ , o *vetor deslocamento* é definido por  $\vec{p}q = \rho'_q(0) \in T_pM$ . Um fato importante sobre vetores deslocamento é que a função

$$\begin{aligned} \Delta : C \times C &\rightarrow TM, \\ (p, q) &\mapsto \vec{p}q, \end{aligned}$$

é suave.

## 1.5.2 Minimização e Maximização Local

Um resultado extremamente importante que utiliza a aplicação exponencial diz respeito ao problema de minimizar ou maximizar o comprimento de curvas entre dois pontos. O caso Riemanniano diz respeito à minimização, e o caso Lorentziano à maximização.

**Teorema 1.5.6.** *Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana e  $\mathcal{N}$  é vizinhança normal de um ponto  $p \in M$ , então para todo  $q \in \mathcal{N}$ , a geodésica radial  $\rho_q$  é a geodésica de menor comprimento entre todas as curvas ligando  $p$  a  $q$  dentro de  $\mathcal{N}$ .*

**Teorema 1.5.7.** *Seja  $(M, g)$  é uma variedade Lorentziana e  $\mathcal{N}$  é vizinhança normal de um ponto  $p \in M$ . Se para  $q \in \mathcal{N}$  existe uma curva causal (suave por partes) ligando  $p$  a  $q$  e inteiramente contida em  $\mathcal{N}$ , então a geodésica radial  $\rho_q$  é a geodésica de maior comprimento entre todas as curvas causais ligando  $p$  a  $q$  dentro de  $\mathcal{N}$ .*

Podemos nos perguntar sobre o problema de minimizar ou maximizar globalmente entre dois pontos. O caso Lorentziano será explorado ao longo desta dissertação, e o caso Riemanniano está relacionado ao *teorema de Hopf-Rinow*.

**Definição 1.5.8.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana conexa. A distância Riemanniana  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  entre dois pontos  $p$  e  $q$  é dada por*

$$d_g(p, q) = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M \text{ é curva suave por partes com } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

É possível verificar que tal função é de fato uma distância cuja topologia induzida coincide com a topologia de  $M$ . Também, se existe curva suave por partes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  de  $p$  até  $q$  com  $d_g(p, q) = L_g(\gamma)$ , é possível mostrar que  $\gamma$  é na verdade uma pré-geodésica.

**Teorema 1.5.9 (Hopf-Rinow).** *Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana conexa, são equivalentes*

- (i)  $M$  é um espaço métrico completo em relação à distância  $d_g$ .
- (ii)  $M$  é geodesicamente completo.
- (iii) Existe um ponto  $p \in M$  tal que  $\exp_p$  está definida em todo  $T_p M$ .
- (iv) Todo subconjunto fechado e limitado de  $M$  na distância  $d_g$  é compacto (propriedade de Heine-Borel).

*Ainda, valendo uma (logo todas) das afirmações acima, quaisquer dois pontos de  $M$  podem ser ligados por uma geodésica minimizante entre todas as curvas ligando tais pontos.*

## 1.6 Subvariedades Semi-Riemannianas

Para  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  variedade Semi-Riemanniana e  $M$  uma subvariedade imersa ou mergulhada de  $\tilde{M}$ , (i.e.  $M$  possui estrutura suave cuja inclusão  $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$  é imersão ou mergulho, respectivamente), dizemos que  $M$  é *subvariedade semi-Riemanniana* de  $\tilde{M}$  se o pullback  $g = \iota^* \tilde{g}$  da métrica em  $\tilde{M}$  define uma métrica semi-Riemanniana<sup>7</sup> em  $M$ . Se tal métrica for Riemanniana ou Lorentziana, trocamos “subvariedade semi-Riemanniana” por estes termos. No caso de  $\tilde{M}$  ser variedade Lorentziana e  $M$  ser subvariedade Riemanniana, dizemos que  $M$  é subvariedade *tipo-espaço* ou *espacial*, e no caso de  $M$  ser Lorentziana, é dita ser subvariedade *tipo-tempo* ou *temporal*.

Para  $M \subseteq \tilde{M}$  subvariedade, um vetor tangente  $v \in T_p M$  pode ser identificado como um vetor de  $T_p \tilde{M}$  de maneira canônica pela aplicação  $d\iota_p : T_p M \rightarrow T_p \tilde{M}$ ,  $\tilde{v} = d\iota_p(v) \in T_p \tilde{M}$ . Faremos tal identificação sempre que não houver risco de confusão. Em particular, por meio desta identificação tratamos  $T_p M$  como subespaço vetorial de  $T_p \tilde{M}$ .

<sup>7</sup>No caso de  $\tilde{M}$  ser Riemanniana,  $\iota^* \tilde{g}$  é sempre métrica Riemanniana na subvariedade  $M$ .

Para  $X : M \rightarrow T\tilde{M}$  campo vetorial sobre a aplicação inclusão  $\iota : M \hookrightarrow \tilde{M}$ , vemos que em cada  $p \in M$ ,  $X_p$  é um vetor em  $T_p\tilde{M}$ . No contexto de subvariedades utilizaremos a notação  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$  para denotar o conjunto  $\tilde{\mathfrak{X}}(\iota)$  dos campos vetoriais suaves sobre a inclusão. Em particular, dado  $Y \in \tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{M})$ , a restrição  $Y|_M$  é campo em  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ . Como estamos identificando vetores tangentes em  $M$  com sua inclusão em  $\tilde{M}$ , temos também que  $\mathfrak{X}(M)$  é  $C^\infty(M)$ -submódulo de  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ .

Com  $M$  subvariedade semi-Riemanniana de  $\tilde{M}$ , cada  $T_pM$  é subespaço não degenerado de  $T_p\tilde{M}$ , e utilizando as decomposições de espaços vetoriais semi-Riemannianos obtidas no apêndice A, temos

$$T_p\tilde{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp,$$

com  $T_pM^\perp$  também não degenerado, com dimensão igual à codimensão de  $M$  em  $\tilde{M}$ .

Em vista de tal decomposição em  $T_p\tilde{M}$ , definimos as projeções *tangente* e *normal*, dadas respectivamente por

$$\begin{array}{ccc} T_p\tilde{M} \rightarrow T_pM & \text{e} & T_p\tilde{M} \rightarrow T_pM^\perp \\ v \mapsto v^\top & & v \mapsto v^\perp \end{array}$$

Temos uma decomposição análoga para campos vetoriais. Se  $X \in \mathfrak{X}(M) \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ , dizemos que  $X$  é campo vetorial *tangente* a  $M$ , e se  $Z \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$  é tal que  $Z_p \in T_pM^\perp$ , para todo  $p \in M$ , dizemos que  $Z$  é campo vetorial *normal* a  $M$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^\perp(M)$  o conjunto dos campos vetoriais normais a  $M$ , que também é  $C^\infty(M)$ -submódulo de  $\tilde{\mathfrak{X}}(M)$ .

Aplicando as projeções tangente e normal em cada ponto  $p \in M$  de um campo  $X \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ , obtemos dois campos vetoriais  $X^\top$  e  $X^\perp$  que são pontualmente tangentes e normais a  $M$ , respectivamente. Com uma análise local é possível mostrar que ambos os campos acima são suaves (Costa e Silva (s.d.), proposição 4.1.6). Portanto ficam bem definidas as projeções

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) & \text{e} & \tilde{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M) \\ X \mapsto X^\top & & X \mapsto X^\perp \end{array}$$

e temos a decomposição  $\tilde{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}^\perp(M)$ .

### 1.6.1 Segunda Forma Fundamental

Fixamos aqui as seguintes notações:  $\tilde{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita em  $\tilde{M}$ ,  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita em  $M$  para a métrica  $g = \iota^*\tilde{g}$ , e  $D$  a conexão sobre a inclusão  $\iota : M \rightarrow \tilde{M}$  induzida por  $\tilde{\nabla}$ .

Uma vez que todo campo vetorial  $V \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$  pode ser visto localmente como a restrição de um campo vetorial  $\tilde{V} \in \tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{M})$  a um aberto de  $M$  (Costa e Silva (s.d.), lema 4.1.5) destacamos o seguinte resultado.

**Lema 1.6.1.** *Sejam  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $V, W \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ . Para  $U \subseteq M$  aberto e  $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{M})$  campos*

que em  $U$  são iguais<sup>8</sup> a  $X, V$  e  $W$ , respectivamente. Então temos

$$(i) \quad (D_X V)|_U = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{V})|_U.$$

$$(ii) \quad X(\tilde{g}(V, W)) = \tilde{g}(D_X V, W) + \tilde{g}(V, D_X W).$$

(Em (ii), observe que  $\tilde{g}(V, W) \in C^\infty(M)$ , logo fica bem definida tal expressão.)

Analisamos agora a relação entre as conexões em  $\tilde{M}$  e  $M$ . Mesmo para campos vetoriais  $V, W$  em  $\mathfrak{X}(M)$ , não é necessário que  $D_V W$  seja campo vetorial tangente a  $M$ , então fazemos uma análise das partes tangente e normal.

**Lema 1.6.2.** *Dados  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , e lembrando que  $\nabla$  é conexão de Levi-Civita em  $M$  para a métrica  $g$ , temos*

$$\nabla_V W = (D_V W)^\top.$$

Esta lema nos diz que sua parte tangente não nos traz nenhuma informação nova, diferente da parte normal.

**Lema 1.6.3.** *A função  $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$  dada por*

$$II(V, W) = (D_V W)^\perp$$

é  $C^\infty(M)$ -linear e simétrica, chamada de tensor da segunda forma fundamental (ou *shape tensor*).

**Observação 1.6.4.** *Pela  $C^\infty(M)$ -bilinearidade da segunda forma fundamental, pontualmente em  $p \in M$ ,  $II$  nos dá uma aplicação  $II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M^\perp$   $\mathbb{R}$ -bilinear simétrica, e  $II$  possui essencialmente caráter de  $(0,2)$ -tensor, apesar de sua imagem ser  $T_p M^\perp$ .*

Em vista da observação acima, podemos fazer a contração métrica de  $II$ , o que nos dá um campo vetorial normal a  $M$ . Dividindo tal vetor por  $n = \dim M$  dá origem ao *vetor de curvatura média*  $H$  em  $M$ . Explicitamente, para cada  $p \in M$ ,

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i II(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal para  $T_p M$  e  $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$ .

Por estes dois lemas é imediata a decomposição de  $D_V W$ ,  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  em parte tangente e normal:

$$D_V W = \nabla_V W + II(V, W).$$

Para uma primeira aplicação desta decomposição, relacionamos a aceleração de uma curva em  $M$  com sua aceleração ao ser observada como curva em  $\tilde{M}$ .

<sup>8</sup>Para manter a consistência com a notação utilizada na seção de conexões sobre funções, deveríamos escrever  $\tilde{X}|_U = d_t \circ X|_U$ , mas como decidimos identificar  $T_p M$  com  $d_t|_p(T_p M)$ , mantemos tal identificação também em campos vetoriais, que no contexto de inclusão não trará confusão.

**Proposição 1.6.5.** Para  $\alpha : I \rightarrow M$  curva suave, dado  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que  $V_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t \in I$ , e denotando por  $V'$  a derivada covariante de  $V$  em  $M$  com relação a  $\nabla$  e  $\dot{V}$  a derivada covariante em  $\tilde{M}$  para  $\tilde{\nabla}$ , temos

$$\dot{V} = V' + II(\alpha', V),$$

e em particular  $\ddot{\alpha} = \alpha'' + II(\alpha', \alpha')$ .

Como corolário imediato desta proposição, temos uma maneira de verificar quando curvas são geodésicas em  $M$ .

**Corolário 1.6.6.** Uma curva  $\alpha$  em  $M$  é geodésica em sua geometria intrínseca se e somente se sua aceleração  $\ddot{\alpha}$  em  $\tilde{M}$  é sempre normal a  $M$ .

Este último corolário nos dá uma maneira sistemática de obter, por exemplo, geodésicas de subvariedades semi-Riemannianas em  $\mathbb{R}_v^{n+1}$ . Um caso simples é a da  $n$ -esfera, que conforme foi definida anteriormente, é uma subvariedade Riemanniana  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Corolário 1.6.7.** As geodésicas da  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n$  são parametrizações de velocidade constante de curvas dadas pela intersecção de  $\mathbb{S}^n$  com hiperplanos  $n$ -dimensionais passando pela origem (tais curvas são chamadas de grandes círculos).

A segunda forma fundamental também dá origem a um operador sobre espaços tangentes de bastante importância.

**Definição 1.6.8.** Dada  $M$  subvariedade semi-Riemanniana  $\tilde{M}$ , seja  $p \in M$  e  $\vec{n} \in T_pM^\perp$  unitário, definimos

- (i) A segunda forma fundamental (associada a  $\vec{n}$ ) é a forma bilinear simétrica  $\mathcal{K}_{\vec{n}} : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{K}_{\vec{n}}(v, w) = \tilde{g}_p(II_p(v, w), \vec{n}),$$

para todo  $v, w \in T_pM$ , onde  $II$  é o shape tensor de  $M$ .

- (ii) O operador de Weingarten (ou shape operator) (associado a  $\vec{n}$ ) é o operador linear  $\mathcal{S}_{\vec{n}} : T_pM \rightarrow T_pM$  metricamente associado a  $\mathcal{K}_{\vec{n}}$ , ou seja, é definido por

$$\tilde{g}_p(\mathcal{S}_{\vec{n}}(v), w) = \mathcal{K}_{\vec{n}}(v, w).$$

## 1.6.2 Hipersuperfícies Semi-Riemannianas

Uma hipersuperfície semi-Riemanniana  $M \subseteq \tilde{M}$  é uma subvariedade semi-Riemanniana de codimensão 1. Neste caso, temos que o co-índice (i.e. o índice comum de todos os  $T_pM^\perp$ ) de  $M$  é 0 ou 1. Classificamos  $M$  por um sinal  $\epsilon = \pm 1$ , da seguinte maneira:

- +1 se o co-índice de  $M$  é 0, ou seja,  $\tilde{g}(z, z) > 0$  para todo vetor  $z \neq 0$  normal à  $M$ .

- -1 se o co-índice de  $M$  é 1, ou seja,  $\tilde{g}(z, z) < 0$  para todo vetor  $z \neq 0$  normal à  $M$ .

Observe que  $\text{ind } M = \text{ind } \tilde{M}$  se  $M$  tem sinal 1, mas  $\text{ind } M = \text{ind } \tilde{M} - 1$ . Também, no caso de  $\tilde{M}$  Riemanniana não há hipersuperfícies de sinal -1.

Para  $f \in C^\infty(\tilde{M})$ , sabemos que a imagem inversa de seus valores regulares são sub-variedades mergulhadas de codimensão 1. No caso semi-Riemanniano, temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.6.9.** *Seja  $c$  valor regular de  $f \in C^\infty(\tilde{M})$ . Então  $M = f^{-1}(c)$  é hipersuperfície semi-Riemanniana se e somente se  $\tilde{g}(\text{grad } f, \text{grad } f) > 0$  em todo  $M$  ou  $< 0$  em todo  $M$ . Em caso positivo, o sinal de  $M$  é o sinal de  $\tilde{g}(\text{grad } f, \text{grad } f)$  e o campo vetorial  $U = \text{grad } f / |\text{grad } f|$  é unitário e normal a  $M$ .*

No caso de codimensão 1, temos uma versão mais conveniente dos operadores de Weingarten.

**Definição 1.6.10.** *Fixe  $U$  campo vetorial suave, unitário e normal<sup>9</sup> a uma hipersuperfície semi-Riemanniana  $M \subseteq \tilde{M}$ . Definimos:*

- (i) A segunda forma fundamental (associada a  $U$ ) como o  $(0, 2)$ -tensor em  $M$  dada para cada  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  por

$$\mathcal{K}(V, W) = \mathcal{K}_U(V, W) = \tilde{g}(\text{II}(X, Y), U)$$

- (ii) O operador de Weingarten (ou shape operator) como o  $(1, 1)$ -tensor  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_U$  em  $M$  metricamente equivalente a  $\mathcal{K}$ , ou seja,  $\mathcal{S} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é tal que, para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$g(\mathcal{S}(V), W) = \mathcal{K}(V, W).$$

**Observação 1.6.11.** A segunda forma fundamental e o operador de Weingarten estão definidos a menos de sinal, que também troca na mudança de  $U$  para  $-U$ . Em certas situação é mais conveniente definir tais tensores com sinal oposto.

Sendo  $\mathcal{K}$  bilinear e simétrico vemos que pontualmente o operador de Weingarten  $\mathcal{S}_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é um operador linear autoadjunto em relação ao produto escalar  $g_p$ . Por fim, o operador de Weingarten possui as seguintes propriedades.

**Proposição 1.6.12.** *Fixado  $U$  campo unitário e normal a  $M$  e seja  $\mathcal{S}$  operador de Weingarten associado a  $U$ . Temos, para todo  $p \in M$  onde  $U$  está definido e para todo  $v \in T_p M$ , que  $(D_v U)_p$  é vetor tangente a  $M$  e*

$$\mathcal{S}_p(v) = -(D_v U)_p.$$

<sup>9</sup>Obviamente pode não existir tal campo vetorial definido em todo  $M$  (por exemplo a faixa de Möbius), mas tal campo existe em uma vizinhança aberta de cada ponto, que é o suficiente para nossas aplicações.

### 1.6.3 Exemplo: Hiperquádricas

Em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , considere a forma quadrática  $q : \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i (x^i)^2 = - \sum_{i=1}^{\nu} (x^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (x^j)^2,$$

que é uma função suave, com gradiente

$$\text{grad } q(x) = 2x^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x.$$

Para o *campo vetorial posição*  $P$  em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  dado por  $P(x) = x^i \partial_i|_x$ , vemos que  $q = \langle P, P \rangle_\nu$  e  $2P = \text{grad } q$ . Assim,  $\langle \text{grad } q, \text{grad } q \rangle_\nu = 4\langle P, P \rangle_\nu = 4q$  em todo  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . Pela proposição 1.6.9, fixado  $r > 0$ , as hipersuperfícies de nível  $Q = q^{-1}(\epsilon r^2)$  são hipersuperfícies semi-Riemannianas de sinal  $\epsilon$ , com vetor normal unitário  $U = P/r$ .

**Definição 1.6.13.** As hiperquádricas (centrais) de raio  $r > 0$  são as pseudoesferas

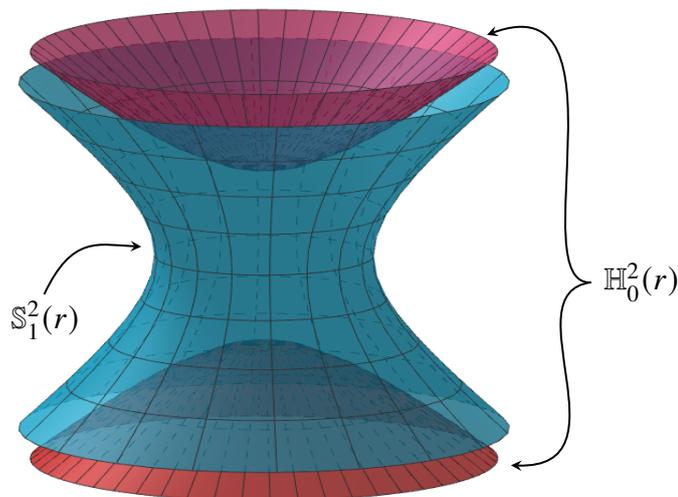
$$\mathbb{S}_\nu^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} \mid q(x) = r^2\},$$

e, se  $\nu \geq 1$ , os pseudohiperboloides

$$\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} \mid q(x) = -r^2\}.$$

Em  $\mathbb{R}_1^3$ , tais conjuntos são os familiares hiperboloide de uma e duas folhas, respectivamente.

**Figura 1.2:** Pseudoesfera e pseudohiperboloide em  $\mathbb{R}_1^3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

É possível mostrar que, como variedades, (O'Neill (1983), lema 4.25) que  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  é

difeomorfa a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-\nu}$ , e  $\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r)$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^{\nu-1} \times \mathbb{R}^{n-\nu+1}$ . Em particular,  $\mathbb{H}_0^n(r)$  possui duas componentes conexas.

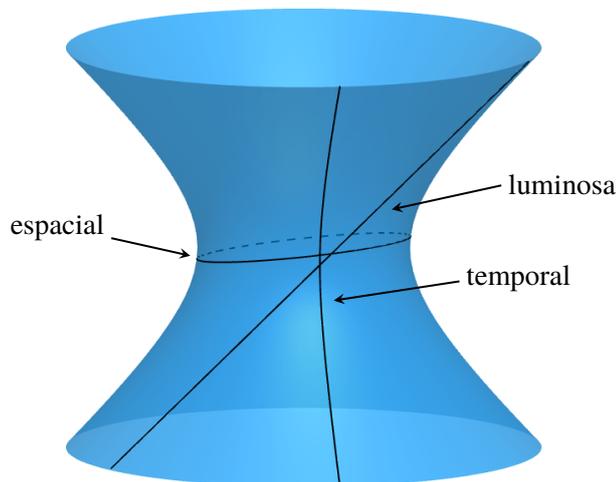
De maneira análoga a  $n$ -esfera, estudando a intersecção com hiperplanos passando pela origem, conseguimos exibir todas as geodésicas de  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ .

**Proposição 1.6.14.** *Seja  $\gamma$  uma geodésica de  $\mathbb{S}_\nu^n(r) \subseteq \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . Temos<sup>10</sup>:*

- (i) *Se  $\gamma$  é temporal, então  $\gamma$  é parametrização de uma hipérbole em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ .*
- (ii) *Se  $\gamma$  é luminosa, então ela é uma reta em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ .*
- (iii) *Se  $\gamma$  é espacial, então é uma reparametrização periódica de uma elipse em  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ .*

*Em particular,  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  é geodesicamente completo.*

**Figura 1.3:** Geodésicas em  $\mathbb{S}_1^2(r)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

De maneira similar, é possível mostrar que  $\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r)$  é geodesicamente completo.

Obtemos também no caso de hiperquádricas que o operador de Weingarten associado a  $U = P/r$  toma a simples forma  $\mathcal{S}_U = \mathbb{I}/r$  (O'Neill (1983), lema 4.27), onde  $\mathbb{I}$  é a identidade. Isto nos permite calcular a curvatura seccional das hiperquádricas (O'Neill (1983), corolário 4.20).

**Proposição 1.6.15.** *Seja  $n \geq 2$  e  $0 \leq \nu \leq n$ .*

1. *A pseudoesfera  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  é uma variedade semi-Riemanniana completa de curvatura constante positiva  $K = 1/r^2$ .*
2. *O pseudohiperboloide  $\mathbb{H}_{\nu-1}^n(r)$  é uma variedade semi-Riemanniana completa de curvatura constante positiva  $K = -1/r^2$ .*

<sup>10</sup>Observe a diferença do caso Lorentziano com o Riemanniano. Neste último, há geodésicas que formam espirais ao longo do hiperboloide.

O caso  $\nu = 1$  é de especial interesse. A variedade semi-Riemanniana  $\mathbb{S}_1^n(r)$  é chamada de *espaço-tempo de de Sitter*. Para  $\mathbb{H}_0^n(r)$ , é possível mostrar (Lee (2018), teorema 3.7) que a componente conexa passando por  $(r, 0)$  é isometria ao espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$ , logo é chamada de *mergulho superior* do espaço hiperbólico (o mesmo vale para a outra componente conexa).

## 2 Campos e Tensores de Jacobi

Como visto anteriormente, geodésicas são curvas de aceleração nula, portanto as curvas mais “retas” possíveis na geometria em consideração. Neste sentido, a curvatura age sobre famílias de geodésicas “próximas” fazendo elas convergirem ou divergirem umas em relação às outras. Nosso objetivo neste capítulo é tornar tais noções geométricas precisas, por meio de campos vetoriais especiais sobre geodésicas, chamados de *campos de Jacobi*, e pontos especiais sobre geodésicas que tais campos podem gerar, os chamados pontos *conjugados e focais* associados a tais campos.

Com este fim, nossa referência principal [O’Neill \(1983\)](#) mostra tais resultados utilizando *teoria variacional*. Faremos aqui abordagem diferentes de tais problemas, utilizando *tensores de Jacobi*, baseados em [Costa e Silva \(s.d.\)](#), capítulo 8. Mesmo assim, a teoria variacional ainda é interessante em alguns aspectos, portanto faremos breves comentários sobre ela.

Neste capítulo fazemos uma breve introdução a campos de Jacobi, apresentando definições e resultados principais, para então abordarmos a teoria de Tensores de Jacobi em maiores detalhes. As demonstrações dos fatos mencionados sobre a teoria geral de campos de Jacobi pode ser vista em [Costa e Silva \(s.d.\)](#), capítulo 6, e a teoria variacional aplicada a campos de Jacobi pode ser vista em [O’Neill \(1983\)](#), capítulo 10.

### 2.1 Campos de Jacobi

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  uma geodésica. Um campo vetorial  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é dito ser campo de Jacobi sobre  $\alpha$  se  $J$  satisfaz a equação de Jacobi,*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \alpha')\alpha' = 0,$$

onde  $R$  denota o tensor de curvatura e  $D/dt$  a derivada covariante sobre  $\alpha$ . Denotamos por  $\mathcal{J}^\alpha$  o conjunto de todos os campos de Jacobi sobre a curva  $\alpha$ .

A equação de Jacobi é uma equação diferencial ordinária linear, logo  $\mathcal{J}^\alpha$  é um espaço vetorial. Esperamos então existência e unicidade para soluções desta equação.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $\alpha : I \subseteq M$  geodésica. Dados  $t_0 \in I$  e  $v, w \in T_{\alpha(t_0)}M$ , existe um único campo de Jacobi  $J \in \mathcal{J}^\alpha$  tal que  $J(t_0) = v$  e  $J'(t_0) = w$ . Ainda,  $\dim \mathcal{J}^\alpha = 2n$ .*

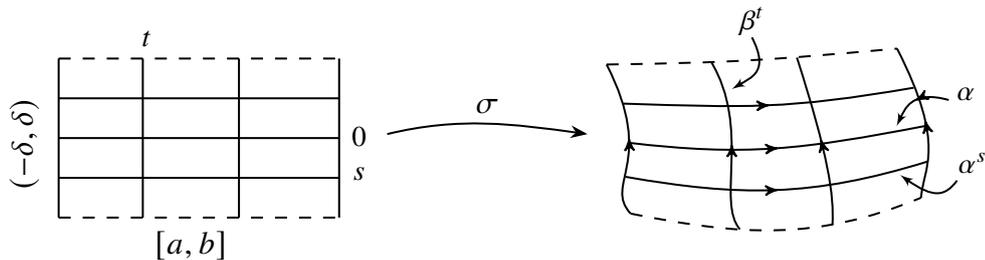
Observamos também que reparametrizações afins de geodésicas preservam campos de Jacobi no seguinte sentido: Se  $h : J \rightarrow I$  é função afim não constante,  $J$  é campo de Jacobi da geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  se e só se  $J \circ h$  é campo de Jacobi de  $\alpha \circ h$ .

Damos agora a noção precisa para nossos propósitos de “geodésicas próximas” a uma geodésica principal, que como veremos está associada a campos de Jacobi.

**Definição 2.1.3.** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  uma curva suave. A aplicação a dois parâmetros suave  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  é dita ser *variação da curva  $\alpha$*  se  $\sigma(t, 0) = \alpha(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Fixado  $s \in (-\delta, \delta)$ , a curva  $\alpha^s : [a, b] \rightarrow M$  dada por  $\alpha^s = \sigma(\cdot, s)$  é chamada *curva longitudinal*. Em particular,  $\alpha^0 = \alpha$ . Similarmente, fixado  $t \in [a, b]$ , definimos  $\beta^t : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ,  $\beta^t = \sigma(t, \cdot)$ , chamada *curva transversal*. Quando todas as curvas longitudinais de  $\sigma$  são geodésicas, dizemos que  $\sigma$  é *variação geodésica*. Tal caso será o de maior interesse para nós.

**Figura 2.1:** Variação de curvas.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Acerca de variações e curvas longitudinais e transversais, temos os seguintes fatos.

**Lema 2.1.4.** Seja  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação da curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ . A função

$$V^\sigma : [a, b] \rightarrow TM$$

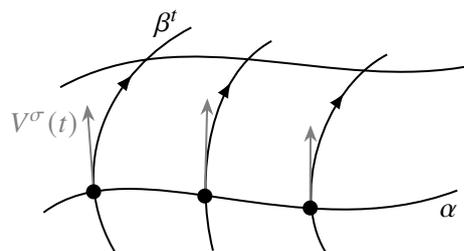
$$t \mapsto (\beta^t)'(0)$$

é campo vetorial suave sobre a curva  $\alpha$  e  $V^\sigma(t) = \sigma_s(t, 0)$  para todo  $t \in [a, b]$ .  $V^\sigma$  é chamado de campo vetorial variacional de  $\alpha$ . Também, para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , a curva longitudinal  $\alpha^s$  tem derivada dada por  $(\alpha^s)'(t) = \sigma_t(t, s)$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

**Corolário 2.1.5.** Para  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação da curva suave  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ , dados  $(t_0, s_0) \in [a, b] \times (-\delta, \delta)$ , temos

$$\sigma_{tt}(t_0, s_0) = (\alpha^{s_0})''(t_0).$$

**Figura 2.2:** Campo vetorial variacional.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Em particular,  $\sigma$  é variação geodésica se e somente se  $\sigma_{tt} = 0$ .

Relacionado variações a campos de Jacobi, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.1.6.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica e  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  uma variação geodésica de  $\alpha$ . Então o campo variacional  $V^\sigma$  é campo de Jacobi sobre  $\alpha$ .*

Como cada campo de Jacobi está em  $\mathfrak{X}(\alpha)$ , podemos separá-lo em componente tangente e normal, e analisar cada uma separadamente.

**Definição 2.1.7.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica. Um campo vetorial  $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$  é dito ser tangente a  $\alpha$  se existe  $h \in C^\infty(I)$  tal que  $V = h\alpha'$ , e é normal se  $g(\alpha', V) = 0$ .*

**Proposição 2.1.8.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica não constante, e  $J \in \mathfrak{X}(\alpha)$  campo de Jacobi. Temos*

- (i)  *$J$  é tangente a  $\alpha$  se e somente se existem  $c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $J(t) = (ct + d)\alpha'(t)$  para todo  $t \in I$ .*
- (ii) *existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $g_{\alpha(t)}(J(t), \alpha'(t)) = at + b$  para todo  $t \in I$ . Em particular, se  $g(J, \alpha')$  se anula em dois pontos distintos ou ambos  $g(J, \alpha')$  e  $g(J', \alpha')$  se anulam em algum ponto, então  $J$  é normal a  $\alpha$ .*

Obviamente, campos de Jacobi em geral não são nem normais nem tangentes, mas no caso de uma geodésica  $\gamma$  não luminosa, temos que cada espaço tangente pode ser decomposto em parte normal e tangente, isto é,  $T_{\gamma(t)}M = \mathbb{R}\gamma'(t) \oplus \{\gamma(t)\}^\perp$ , o que nos permite decompor campos de Jacobi em parte tangente e normal, que denotamos por  $J^\top$  e  $J^\perp$ , respectivamente.

**Proposição 2.1.9.** *Dado  $\gamma : I \rightarrow M$  geodésica não luminosa e  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ,  $J$  é campo de Jacobi se e somente se  $J^\top$  e  $J^\perp$  são campos de Jacobi.*

Denotando por  $\mathcal{J}_\perp^\gamma$  e  $\mathcal{J}_\top^\gamma$  o subespaço dos campos de Jacobi normal e tangente, respectivamente, da última proposição temos a decomposição  $\mathcal{J}^\gamma = \mathcal{J}_\top^\gamma \oplus \mathcal{J}_\perp^\gamma$  no caso de  $\gamma$  ser geodésica não luminosa. No caso luminoso,  $\mathcal{J}_\top^\gamma \subseteq \mathcal{J}_\perp^\gamma$  e em geral não há uma decomposição natural. Em qualquer caso, observamos que  $\dim \mathcal{J}_\top^\gamma = 2$  pela proposição 2.1.8.

**Lema 2.1.10.** *Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  geodésica, e fixe  $v, w \in T_{\alpha(0)}M$ . Para  $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  curva suave com  $\beta(0) = \alpha(0)$  e  $\beta'(0) = v$ , e dado  $Z \in \mathfrak{X}(\beta)$  com  $Z(0) = \alpha'(0)$  e  $D^\beta Z/ds(0) = w$ , temos*

- (i) *Existe  $0 < \delta_0 \leq \delta$  tal que a função*

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] \times (-\delta_0, \delta_0) &\rightarrow M \\ (t, s) &\mapsto \exp_{\beta(s)}(tZ(s)) \end{aligned}$$

*está bem definida e é variação geodésica de  $\alpha$ .*

- (ii) O campo variacional  $V^\sigma$  da variação geodésica definida acima é o único campo de Jacobi sobre  $\alpha$  tal que  $V^\sigma(0) = v$ ,  $(V^\sigma)'(0) = w$ .

Em particular, todo campo de Jacobi sobre a geodésica  $\alpha$  é campo variacional de alguma variação geodésica de  $\alpha$ .

### 2.1.1 Pontos Conjugados e Pontos Focais

A noção um tanto analítica de campos de Jacobi se associa a noção de geométrica “convergência” ou “divergência” de família de geodésicas por meio da noção de pontos conjugados e focais, que passamos a comentar.

**Definição 2.1.11.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica não constante. Dois pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$ ,  $a \neq b$ , são ditos conjugados sobre  $\gamma$  se existir um campo de Jacobi  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  não nulo tal que  $J(a) = 0$  e  $J(b) = 0$ .*

O conjunto

$$\mathcal{J}_{a,b}^\gamma = \{J \in \mathcal{J}^\gamma \mid J(a) = 0 \text{ e } J(b) = 0\}$$

é um subespaço vetorial de  $\mathcal{J}^\gamma$ , e sua dimensão é dita *ordem de conjugação* de  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  ao longo de  $\gamma$ , denotada por  $\text{Conj}(\gamma(a), \gamma(b))$ .

Podemos estimar a dimensão de  $\mathcal{J}_{a,b}^\gamma$  em  $\mathcal{J}^\gamma$ . Para  $\mathcal{J}_a^\gamma \subseteq \mathcal{J}^\gamma$  o subespaço vetorial dos campos de Jacobi que se anulam em  $a$ , por considerações de existência e unicidade da equação de Jacobi, é fácil ver que  $\dim \mathcal{J}_a^\gamma = n$ . Mas o campo de Jacobi  $V(t) = (t - a)\gamma'(t)$ ,  $t \in I$ , está em  $\mathcal{J}_a^\gamma$  e só se anula em  $t = a$ , uma vez que  $\gamma$  é geodésica não constante. Como  $\mathcal{J}_{a,b}^\gamma$  é subespaço vetorial de  $\mathcal{J}_a^\gamma$ , segue que  $\dim \mathcal{J}_{a,b}^\gamma \leq n - 1$ .

**Teorema 2.1.12.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma geodésica não constante. São equivalentes:*

- (i)  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são pontos conjugados sobre  $\gamma$ .
- (ii) Existe uma variação geodésica  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\gamma$  não trivial (i.e., seu campo variacional  $V^\sigma$  não é nulo) tal que todas as curvas longitudinais começam em  $\gamma(a)$  ( $\sigma(a, s) = \gamma(a)$  para todo  $s \in (-\delta, \delta)$ ) e  $V^\sigma(b) = 0$ .
- (iii)  $(b - a)\gamma'(a)$  é ponto crítico de  $\exp_{\gamma(a)}$ . Em outras palavras,  $d(\exp_{\gamma(a)})_{(b-a)\gamma'(a)} : T_{(b-a)\gamma'(a)}(T_{\gamma(a)}M) \rightarrow T_{\gamma(b)}M$  é singular.

Ainda, se vale algum (logo todos) item acima e  $\gamma$  é geodésica luminosa, então a variação  $\sigma$  no item (ii) pode ser escolhida de forma que todas as curvas longitudinais são geodésicas luminosas.

Uma maneira de interpretar a análise de pontos conjugados geometricamente é observar em que condições geodésicas saindo de um ponto vão convergir novamente em outro ponto. Fazemos agora uma certa generalização desta ideia, trocando o primeiro ponto por uma subvariedade semi-Riemanniana mergulhada.

**Definição 2.1.13.** *Seja  $P$  subvariedade semi-Riemanniana mergulhada de  $M$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  geodésica não constante tal que  $\gamma(a) \in P$  e  $\gamma'(a) \in T_{\gamma(a)}P^\perp$  (tal geodésica será chamada de normal a  $P$  ou simplesmente  $P$ -normal). Um campo  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  é dito ser  $P$ -campo de Jacobi sobre  $\gamma$  se satisfaz*

$$J(a) \in T_{\gamma(a)}P \text{ e } \tan_P \left( \frac{DJ}{dt}(a) \right) = -\mathcal{S}_{\gamma'(a)}(J(a)),$$

onde  $\mathcal{S}_{\gamma'(a)} : T_{\gamma(a)}P \rightarrow T_{\gamma(a)}P$  é o operador de Wiengarten de  $P$  em  $\gamma(a)$  associado ao vetor normal  $\gamma'(a)$  (definição 1.6.8) e  $\tan_P : T_pM \rightarrow T_pP$  é a projeção<sup>1</sup> de um vetor na sua componente tangente a  $P$ .

Dizemos que  $\gamma(b)$  é ponto focal de  $P$  sobre  $\gamma$  se existe um  $P$ -campo de Jacobi não nulo  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  tal que  $J(b) = 0$ .

**Observação 2.1.14.** De maneira análoga aos campos de Jacobi usuais, mas também para preservar a assimetria da definição e relação a subvariedade e o ponto final, dada  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma função afim crescente, um campo  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$  é  $P$ -campo de Jacobi sobre  $\gamma$  se e somente se  $J \circ h$  é  $P$ -campo de Jacobi sobre  $\gamma \circ h$ .

Vemos claramente que o conjunto  $P\mathcal{J}^\gamma$  dos  $P$ -campos Jacobi sobre  $\gamma$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{J}^\gamma$ . Ainda,  $\dim \mathcal{J}_P^\gamma = n$ . Para ver isto, dado  $v \in T_{\gamma(a)}P$  e  $w \in T_{\gamma(a)}P^\perp$ , por existência e unicidade da equação de Jacobi existe uma única solução  $J$  tal que  $J(a) = v$  e  $J'(a) = -\mathcal{S}_{\gamma'(a)}(v) + w$ , logo  $J$  é  $P$ -campo de Jacobi e é facilmente verificável que a aplicação  $(v, w) \in T_{\gamma(a)}P \times T_{\gamma(a)}P^\perp \mapsto J \in P\mathcal{J}^\gamma$  é isomorfismo linear.

Com um argumento análogo ao caso conjugado, vemos que a dimensão dos  $P$ -campos de Jacobi que se anulam em  $\gamma(b)$ , denotado por  $P\mathcal{J}_b^\gamma$ , é no máximo  $n - 1$ . Tal dimensão é chamada de *ordem focal* do ponto  $\gamma(b)$ .

**Proposição 2.1.15.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  geodésica não constante normal a  $P$ , com  $0 < \dim P < \dim M$ , e  $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . São equivalentes:*

- (i)  $J$  é  $P$ -campo de Jacobi.
- (ii) Existe uma variação de  $\sigma$  de  $\gamma$  com  $J$  sendo seu campo vetorial variacional tal que todas as suas curvas longitudinais são geodésicas normais a  $P$ .

Ainda, se  $\gamma$  é luminosa e  $J$  for  $P$ -campo de Jacobi normal a  $\gamma$ , então a variação  $\sigma$  em (ii) pode ser escolhida de tal forma que todas as suas geodésicas longitudinais são luminosas.

Imediatamente desta proposição segue a seguinte caracterização de pontos focais.

**Corolário 2.1.16.** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  geodésica normal a  $P$ . Então,  $\gamma(b)$  é um ponto focal de  $P$  sobre  $\gamma$  se e somente se existe uma variação geodésica de  $\gamma$  por geodésicas longitudinais*

<sup>1</sup>Aqui, mudamos a notação utilizada no capítulo 1 para projeção no espaço tangente e normal a um subvariedade. Mantemos  $\perp$  e  $\top$  para projeção de campos de Jacobi em suas partes normal e tangente.

normais a  $P$  cujo campo variacional se anula em  $b$  mas não é identicamente nulo. Em caso positivo e com  $\gamma$  luminosa, podemos escolher a variação com todas as geodésicas longitudinais também luminosas.

## 2.1.2 Teoria Variacional

Fazemos aqui um breve comentário sobre a teoria variacional. Os resultados importantes (com uma exceção, que será comentada em breve) poderão ser derivados de maneira alternativa por meio da teoria de tensores de Jacobi, que é o foco da próxima seção.

Heuristicamente, a teoria variacional está associada ao conceito de “perturbações pequenas” em curvas e as consequências destas perturbações em um funcional definido sobre estas curvas. Considerando  $(M, g)$  variedade semi-Riemanniana, o funcional de interesse é o *comprimento de arco*  $L_g$ , com o objetivo estudar seus pontos críticos.

Mais precisamente, para uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  e  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  variação desta curva, fixado  $s \in (-\delta, \delta)$ , ponha  $L^\sigma(s) = L_g(\alpha^s)$  o comprimento da curva da longitudinal correspondente à  $s$ . Isto define uma função  $L^\sigma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $L^\sigma(0)$  é o comprimento de arco de  $\alpha$ . A *primeira e segunda variação do comprimento de arco* em relação a  $\sigma$  são a primeira e segunda derivada de  $L^\sigma$  em 0 (quando existirem), respectivamente, isto é

$$L^{\sigma'}(0) = \frac{dL^\sigma}{ds}(0), \quad L^{\sigma''}(0) = \frac{d^2L^\sigma}{ds^2}(0).$$

Se  $\alpha$  é uma curva espacial ou temporal<sup>2</sup> podem-se obter fórmulas gerais para primeira e segunda variação, que dependem apenas da curva  $\alpha$  e do campo variacional. O primeiro fato notável sobre este processo é que, se  $\sigma$  é uma *variação de extremos fixos* (i.e.  $\sigma(a, \cdot)$  e  $\sigma(b, \cdot)$  são constantes),  $L^{\sigma'}(0) = 0$  para toda variação de extremos fixos se e somente se  $\alpha$  é geodésica.

Conhecendo a condição para uma curva ser geodésica por meio da primeira variação, passamos a analisar se ela é ponto de máximo/mínimo do funcional comprimento de arco, o que está associado à segunda variação. Uma discussão mais precisa sobre seu papel nesta teoria seria um tanto longa, mas a ideia é que a fórmula para segunda variação (a chamada *fórmula de Synge*) dá origem a uma forma bilinear (a *forma índice*  $I_\alpha^\perp$ ) sobre o espaço vetorial

$$\{V \in \mathfrak{X}'(\alpha) \mid g(V, \alpha') = 0, V(a) = 0 \text{ e } V(b) = 0\}.$$

e o sinal desta forma (i.e. se é positiva, negativa-definida ou indefinida) está associada ao aparecimento de pontos conjugados, que é dado pelo seguinte resultado, enunciado apenas para o caso Lorentziano, que será nosso foco nos próximos capítulos.

**Teorema 2.1.17.** *Seja  $(M, g)$  variedade Lorentziana e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  geodésica temporal ( $\epsilon = -1$ ) ou espacial ( $\epsilon = 1$ ).*

<sup>2</sup>o caso luminoso precisa ser tratado separadamente, via o chamado *funcional energia*. Para não estender muito mais esta apresentação da teoria variacional, omitiremos este caso.

- (i) Se não existem pontos conjugados a  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$ ,  $\epsilon I_\alpha^\perp$  é positiva definida.
- (ii) Se  $\alpha(b)$  é o único ponto conjugado de  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$ ,  $\epsilon I_\alpha^\perp$  é positiva semi-definida, mas não definida.
- (iii) Se existe um ponto  $\alpha(r)$  conjugado a  $\alpha(a)$  sobre  $\alpha$  com  $a < r < b$ , então  $I_\alpha^\perp$  é indefinida.

Está discussão pode ser generalizada para o contexto de uma subvariedade semi-Riemanniana  $P$ . No caso da primeira variação para o comprimento de arco, considerando uma curva  $\gamma$  que começa em  $P$ , especial ou temporal, e normal a  $P$  e uma variação  $\sigma$  cuja curva transversal inicial  $\sigma(a, \cdot)$  é uma curva em  $P$ , e cuja curva transversal final  $\sigma(b, \cdot)$  é constante, digamos igual a um ponto  $q$  (tal variação é chamada de  $(P, q)$ -variação). Então  $L^{\sigma'}(0) = 0$  para toda  $(P, q)$ -variação se e somente se  $\gamma$  é uma geodésica temporal ou espacial normal à  $P$ .

A interpretação da segunda variação para uma geodésica normal a  $P$  neste caso segue o mesmo princípio. Ela induz uma forma bilinear  $I_\gamma^\perp$  definida no espaço vetorial

$$\{V \in \mathfrak{X}'(\gamma) \mid g(\gamma', V) = 0, V(0) \in T_{\gamma(0)}P \text{ e } V(b) = 0\},$$

que associa pontos focais ao sinal desta forma de maneira análoga ao caso conjugado.

**Teorema 2.1.18.** *Seja  $(M, g)$  variedade Lorentziana,  $P$  subvariedade semi-Riemanniana de  $M$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  geodésica temporal ( $\epsilon = -1$ ) ou espacial ( $\epsilon = 1$ ) e normal a  $P$ . Então,*

- (i) Se não existem pontos focais a  $P$  sobre  $\gamma$ ,  $\epsilon I_\gamma^\perp$  é positiva definida.
- (ii) Se  $\gamma(b)$  é o único ponto focal de  $P$  sobre  $\gamma$ ,  $\epsilon I_\gamma^\perp$  é semi-definida positiva, mas não definida.
- (iii) Se existe um ponto focal  $\gamma(r)$  de  $P$  sobre  $\gamma$  com  $a < r < b$ ,  $I_\gamma^\perp$  é indefinida.

### 2.1.3 Aplicação à Geometria Lorentziana

Como será discutido em detalhes nos próximos capítulos, um problema fundamental na teoria de variedades Lorentzianas é determinar quais pontos podem ser ligados por uma curva temporal. Exibimos aqui dois resultados sobre este assunto, que serão essenciais para os próximos capítulos, e que nos dão condições suficientes para a existência de tais curvas. Suas demonstrações utilizam profundamente a teoria variacional desenvolvida em O'Neill (1983), capítulo 10, e portanto serão omitidas.

**Teorema 2.1.19 (O'Neill (1983), proposição 10.46).** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva causal entre dois pontos  $p$  e  $q$  numa variedade Lorentziana. Se  $\alpha$  não é pré-geodésica luminosa, então existe uma variação de extremos fixos  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\alpha$  cujas curvas longitudinais  $t \mapsto \sigma(t, s)$ ,  $s \neq 0$ , são temporais.*

Mais geralmente, o aparecimento de pontos focais sobre uma subvariedade  $P$  ao longo de uma curva causal nos permite perturbá-la (através de uma variação) por curvas temporais, como estabelece o próximo resultado.

**Teorema 2.1.20 (O’Neill (1983), teorema 10.51).** *Seja  $P$  uma subvariedade espacial numa variedade Lorentziana e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva causal começando em  $P$  e terminando em um ponto  $q$ . Suponha que  $\alpha$  não seja uma geodésica luminosa normal a  $P$  sem pontos focais de  $P$  antes de  $\alpha(b)$ . Então, existe uma  $(P, q)$ -variação  $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  de  $\gamma$  tal que as curvas longitudinais  $t \mapsto \sigma(t, s)$ ,  $s \neq 0$ , são temporais.*

## 2.2 Tensores de Jacobi

Na primeira parte deste capítulo, comentamos como campos de Jacobi e suas variações geodésicas associadas se relacionam com a (des)focalização de geodésicas pela curvatura. Para obter resultados geométricos mais profundos, nosso objetivo agora é estudar melhor a equação de Jacobi e suas soluções, introduzindo os chamados *tensores de Jacobi* e a associada *equação de Riccati*. Em especial, introduziremos a *equação de Raychaudhuri*, essencial para estudar os teoremas de singularidade.

### 2.2.1 Geodésicas Luminosas e Módulos Quocientes

Para fazer um tratamento unificado com geodésicas de qualquer caráter causal no caso da geometria Lorentziana, fazemos uma digressão do caso luminoso com técnicas similares às introduzidas para espaços vetoriais Lorentzianos como no apêndice A e proposição A.3.6. A ideia é estender o quociente também para campos normais sobre a geodésica.

Se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica luminosa em uma variedade Lorentziana com  $\dim M \geq 3$ , sabemos que  $\alpha' \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ . Relembrando, como no apêndice A, temos para cada  $t \in I$ , a relação de equivalência em  $\{\alpha'(t)\}^\perp$  : dados  $v, w \in \alpha'(t)^\perp$ ,

$$v \sim w \Leftrightarrow w = v + c\alpha'(t), \text{ para algum } c \in \mathbb{R},$$

com o espaço quociente denotado por  $\overline{\alpha'(t)^\perp}$ . Para campos vetoriais em  $\mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , fazemos uma coisa similar: definimos a relação de equivalência em  $\mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , para  $V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , por

$$V \sim W \Leftrightarrow W = V + h\alpha', \text{ para algum } h \in C^\infty(I),$$

e denotaremos por  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  o conjunto de classes de equivalência. Aqui, chamaremos seus elementos de *seções*, quando não houver risco de confusão com as acepções mais comuns dessa palavra. O conjunto  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  herda uma estrutura natural de  $C^\infty(I)$ -módulo via a seguinte operação

$$\overline{V} + f\overline{W} = \overline{V + fW},$$

para todos  $V, W \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ ,  $f \in C^\infty(I)$ .

Para todo  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , podemos pensar em  $\bar{V}$  como uma aplicação

$$\bar{V} : t \in I \mapsto \overline{V(t)} \in \overline{\alpha'(t)^\perp}.$$

Assim, podemos estender o operador derivada covariante  $D^\alpha/dt$  sobre  $\alpha$  para  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  naturalmente. A saber, dado  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , temos que  $D^\alpha V/dt \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$ , pois  $\alpha$  é geodésica. Daí, definimos

$$\bar{V}' = \frac{D^\alpha \bar{V}}{dt} = \overline{\frac{D^\alpha V}{dt}}.$$

Essa operação está bem definida, pois se  $W = V + h\alpha'$ , então

$$W' = V' + \frac{dh}{dt}\alpha',$$

portanto  $\bar{V}' = \bar{W}'$ . É fácil ver que o operador  $D^\alpha/dt : \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \rightarrow \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é  $\mathbb{R}$ -linear e que satisfaz

$$(h\bar{V})' = \left(\frac{dh}{dt}\right)V + h\bar{V}', \quad \text{para todo } h \in C^\infty(I).$$

Dizemos que  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é uma *seção transportada paralelamente* (ou simplesmente *paralela*) se  $\bar{V}' = 0$ . O próximo resultado é uma extensão análoga para o transporte paralelo em  $\mathfrak{X}(\alpha)$ .

**Proposição 2.2.1.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica luminosa em uma variedade Lorentziana  $(M, g)$ . Dados  $t_0 \in I$  e  $\bar{v} \in \overline{\alpha'(t_0)^\perp}$ , existe uma única seção paralela  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  tal que  $\bar{V}(t_0) = \bar{v}$ .*

*Demonstração.* Para a existência, seja  $v \in \{\alpha'(t_0)\}^\perp$  um representante de  $\bar{v}$  e  $V \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  o único campo transportado paralelamente ao longo de  $\alpha$  (no sentido usual) tal que  $V(t_0) = v$ . Então,  $\bar{V}' = 0$  e  $\bar{V}(t_0) = \bar{v}$ , como desejado.

Para a unicidade, sejam  $\bar{V}, \bar{W} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  seções paralelas tais que  $\bar{V}(t_0) = \bar{W}(t_0)$ . Ponha  $\bar{U} = \bar{V} - \bar{W}$ . Como  $\bar{U}$  é também seção paralela, existe  $f \in C^\infty(I)$  e um representante  $U$  da classe  $\bar{U}$  tal que  $U' = f\alpha'$ . Temos também que  $U(t_0) = c\alpha'(t_0)$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Defina  $g \in C^\infty(I)$  por

$$g(t) = c + \int_{t_0}^t f(s)ds, \quad \text{para todo } t \in I,$$

e seja  $Z = U - g\alpha'$ . Então  $Z' = U' - f\alpha' = 0$ , e  $Z(t_0) = U(t_0) - c\alpha'(t_0) = 0$ . Portanto,  $Z = 0$  e, assim  $U = g\alpha' \Rightarrow \bar{U} = 0$ , ou seja,  $\bar{V} = \bar{W}$ . ■

**Observação 2.2.2.** Como estamos assumindo  $(M, g)$  Lorentziana, para cada  $t \in I$ , de acordo com a proposição A.3.6-(ii), a função

$$(\bar{v}, \bar{w}) \in \overline{\alpha'(t)^\perp} \times \overline{\alpha'(t)^\perp} \mapsto \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle_{\alpha(t)} := g_{\alpha(t)}(v, w) \in \mathbb{R},$$

induz um produto interno (positivo-definido) em  $\overline{\alpha'(t)^\perp}$ . Analogamente, a aplicação

$$(\overline{V}, \overline{W}) \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \times \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)} \mapsto \langle \overline{V}, \overline{W} \rangle := g(V, W) \in C^\infty(I) \quad (2.1)$$

está bem definida, e satisfaz

$$\frac{d\langle \overline{V}, \overline{W} \rangle}{dt} = \langle \overline{V}', \overline{W} \rangle + \langle \overline{V}, \overline{W}' \rangle, \quad (2.2)$$

para todo  $\overline{V}, \overline{W} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ . Designaremos a aplicação definida em (2.1) como *produto interno induzido em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$* .

A existência de bases pseudo-ortonormais e suas propriedades em relação ao quociente (cf. apêndice A, proposições A.3.5 e A.3.6-(iii)) nos permitem mostrar a seguinte propriedade para o produto interno induzido em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ .

**Corolário 2.2.3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica luminosa na variedade Lorentziana  $(M, g)$  de dimensão  $n \geq 3$ . Fixe  $t_0 \in I$  e seja  $\{\alpha'(t_0), w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  base pseudo-ortonormal de  $T_{\alpha(t_0)}M$ . Então, para  $\overline{E}_i$  as únicas seções paralelas tais que  $\overline{E}_i(t_0) = \overline{e}_i, i = 1, \dots, n-2$ , temos*

$$\langle \overline{E}_i, \overline{E}_j \rangle = \delta_{ij},$$

para todo  $i, j \in \{1, \dots, n-2\}$ . Também, para qualquer  $\overline{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ , existem únicas  $f_1, \dots, f_{n-2} \in C^\infty(I)$  tais que

$$\overline{V} = \sum_{i=1}^{n-2} f_i \overline{E}_i.$$

*Demonstração.* Segue da equação (2.2) que

$$\frac{d\langle \overline{E}_i, \overline{E}_j \rangle}{dt} = \langle \overline{E}_i', \overline{E}_j \rangle + \langle \overline{E}_i, \overline{E}_j' \rangle = 0.$$

Assim,  $\langle \overline{E}_i, \overline{E}_j \rangle$  é constante e igual a  $\delta_{ij}$ , pois

$$\langle \overline{E}_i(t_0), \overline{E}_j(t_0) \rangle_{t_0} = \langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle_{t_0} = g_{t_0}(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Além disso,  $\{\overline{E}_1(t), \dots, \overline{E}_{n-2}(t)\}$  é base de  $\overline{\alpha'(t)^\perp}$  para todo  $t \in I$ . Assim, dado  $\overline{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ , para cada  $t \in I$ , existem únicos  $f_i(t) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n-2$ , tais que

$$\overline{V}(t) = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(t) \overline{E}_i(t),$$

e portanto as funções  $f_i \in C^\infty(I)$  são as desejadas. ■

Agora, de acordo com nosso contexto de quocientes, podemos estender a noção de campos de Jacobi da seguinte forma.

**Definição 2.2.4 (Classes de Jacobi).** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica luminosa numa variedade Lorentziana  $(M, g)$  de dimensão  $n \geq 3$ . Uma seção  $\bar{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  é dita uma classe de Jacobi (em, ou sobre  $\alpha$ ) se*

$$\bar{V}'' + \overline{R_{\alpha'}}(\bar{V}) = 0, \quad (2.3)$$

em que  $\overline{R_{\alpha'}}$  é o operador força de maré luminoso introduzido na proposição 1.4.4.

Como a equação 2.3 é linear, temos existência e unicidade de maneira completamente análoga ao caso clássico 2.1.2, utilizando seções paralelas.

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica luminosa numa variedade Lorentziana  $(M, g)$  de dimensão  $n \geq 3$ . Dados  $t_0 \in I$  e  $\bar{v}, \bar{w} \in \overline{\alpha'(t_0)^\perp}$ , existe uma única classe de Jacobi  $\mathcal{V} \in \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  tal que*

$$\mathcal{V}(t_0) = \bar{v} \quad e \quad \mathcal{V}'(t_0) = \bar{w}.$$

Em particular, o conjunto das classes de Jacobi é um subespaço de  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$  de dimensão  $2(n-2)$ . Denotaremos esse subespaço por  $\mathcal{J}C^\alpha$ .

O próximo resultado relaciona campos de Jacobi com classes de Jacobi em  $\alpha$ .

**Proposição 2.2.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica luminosa numa variedade Lorentziana  $(M, g)$  de dimensão  $n \geq 3$ . A projeção induzida*

$$\pi_\alpha : J \in \mathcal{J}_\perp^\alpha \mapsto \mathcal{J} \in \mathcal{J}C^\alpha$$

está bem definida, é linear e sobrejetiva. Mais ainda, para quaisquer  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}_\perp^\alpha$ , temos  $\pi_\alpha(J_1) = \pi_\alpha(J_2)$  se e somente se existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $J_1(t) = J_2(t) + (at + b)\alpha'(t)$ , para todo  $t \in I$ .

*Demonstração.* Seja  $J \in \mathcal{J}_\perp^\alpha$ . Temos que

$$\bar{J}'' = \bar{J}' = \bar{J}'' = -\overline{R(J, \alpha')\alpha'} = -\overline{R_{\alpha'}}(\bar{J}) \Rightarrow \bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha,$$

mostrando que  $\pi_\alpha$  está bem definida, e a linearidade é imediata da estrutura de  $C^\infty(I)$ -módulo em  $\overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}$ . Para a sobrejetividade, seja  $\mathcal{V} \in \mathcal{J}C^\alpha$  arbitrário. Então,  $\mathcal{V} = \bar{V}$  para algum representante  $V \in \mathcal{J}_\perp^\alpha$ , tal que

$$V'' + R(V, \alpha')\alpha' = f\alpha'$$

para alguma  $f \in C^\infty(I)$ . Seja  $h \in C^\infty(I)$  tal que  $d^2h/dt^2 = f$ , e defina  $J \in \mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  por  $J = V - h\alpha'$ . Assim,  $\pi_\alpha(J) = \pi_\alpha(V)$ , isto é,  $J$  define a mesma classe de Jacobi  $\mathcal{V}$  de  $V$ . Mas,

$$J'' = V'' - f\alpha' = -R(V, \alpha')\alpha' = -R(J, \alpha')\alpha',$$

ou seja,  $J \in \mathcal{J}^\perp(\alpha)$ , o que garante sobrejetividade.

Agora, se  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}_\perp^\alpha$  definem a mesma classe em  $\mathcal{J}C^\alpha$ , então existe  $f \in C^\infty(I)$  tal que  $J_1 = J_2 + f\alpha'$ . Assim,  $f\alpha'$  é um campo de Jacobi tangente a  $\alpha$ , então, pelo lema 2.1.8, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(t) = at + b$ , para todo  $t \in I$ . A recíproca é imediata. ■

Em outras palavras, a proposição acima diz que para campo de Jacobi  $J$  perpendicular a uma geodésica luminosa  $\alpha$ , sua classe  $\bar{J}$  é classe de Jacobi, e que toda classe de Jacobi é desta forma.

## 2.2.2 Tensores Transversais

Para unificar a discussão com geodésicas não luminosas, introduzimos a seguinte notação, que será adotada até o fim deste capítulo.

$$\mathfrak{N}(\alpha) = \begin{cases} \mathfrak{X}^\perp(\alpha), & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ \overline{\mathfrak{X}^\perp(\alpha)}, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa e } n \geq 3, \end{cases} \quad (2.4)$$

e, para cada  $t \in I$ ,

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} (\alpha'(t))^\perp, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ \overline{(\alpha'(t))^\perp}, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa e } n \geq 3. \end{cases} \quad (2.5)$$

Eventualmente, também omitiremos as barras sobre  $\mathfrak{X}^\perp(\alpha)$  e  $\overline{\alpha'(t)^\perp}$  se não houver risco de confusão. Desse modo, podemos introduzir algumas definições unificadas.

**Definição 2.2.7.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma geodésica qualquer em  $(M, g)$ . Um  $(1, 1)$ -tensor transversal sobre  $\alpha$  é uma aplicação  $C^\infty(I)$ -linear  $\mathcal{A} : \mathfrak{N}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{N}(\alpha)$ .*

**Observação 2.2.8.** Se  $\mathcal{A}$  é  $(1, 1)$ -tensor transversal sobre uma geodésica  $\alpha$ , temos que a  $C^\infty(I)$ -linearidade de  $\mathcal{A}$  induz, para cada  $t \in I$ , aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares

$$\mathcal{A}(t) : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t),$$

de modo que

$$\mathcal{A}(V)(t) = \mathcal{A}(t)(V(t)),$$

para qualquer  $V \in \mathfrak{N}$ ,  $t \in I$ . Reciprocamente, dada uma família  $\{\mathcal{A}(t) : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t)\}_{t \in I}$  de aplicações  $\mathbb{R}$ -lineares suaves no sentido de que, para qualquer  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ , a aplicação

$$\mathcal{A}(V) : t \in I \mapsto \mathcal{A}(t)(V(t)) \in \mathcal{N}(t)$$

está em  $\mathfrak{N}(\alpha)$ , temos que

$$\mathcal{A} : V \in \mathfrak{N}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}(V) \in \mathfrak{N}(\alpha)$$

define um  $(1, 1)$ -tensor transversal sobre  $\alpha$ . Equivalentemente, podemos descrever a suavidade de um  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\mathcal{A}$  por meio de matrizes, da seguinte forma: primeiramente,

suponha que  $\alpha$  é uma geodésica não luminosa. Seja  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  conjunto de campos vetoriais em  $\alpha$  gerando  $\alpha'(t)^\perp$  para cada  $t \in I$ . Escreva, para cada  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\mathcal{A}(E_j) = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ij} E_i,$$

em que  $A_{ij} \in C^\infty(I)$ , e portanto definem uma aplicação suave com valores matriciais

$$A : t \in I \mapsto [A_{ij}(t)] \in M(n-1, \mathbb{R}).$$

(Vemos que  $A(t)$  é a matriz associada ao operador  $\mathcal{A}(t)$  com respeito à base  $\{E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)\}$  de  $\mathcal{N}(t)$ .)

Agora, suponha que  $\alpha$  é luminosa e a dimensão de  $M$  é  $n \geq 3$ . Seja  $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n-2}\}$  conjunto de seções paralelas ortonormais conforme o corolário 2.2.3. Essas seções geram  $\overline{\{\alpha'(t)\}^\perp}$  para cada  $t \in I$ , e assim, para  $j \in \{1, \dots, n-2\}$ ,

$$\mathcal{A}(\bar{E}_j) = \sum_{i=1}^{n-2} A_{ij} \bar{E}_i,$$

com  $A_{ij} \in C^\infty(I)$  unicamente determinadas, e portanto definindo uma aplicação suave

$$A : t \in I \mapsto [A_{ij}(t)] \in M(n-2, \mathbb{R}).$$

O conjunto dos  $(1, 1)$ -tensores transversais sobre uma geodésica  $\alpha$  admite estrutura natural de  $C^\infty(I)$ -módulo, a qual denotaremos por  $\mathfrak{T}(\alpha)$ . Dados  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(\alpha)$ , vê-se facilmente que a composição  $A \circ B$  também está em  $\mathfrak{T}(\alpha)$ , e que a aplicação

$$(A, B) \in \mathfrak{T}(\alpha) \times \mathfrak{T}(\alpha) \mapsto A \circ B \in \mathfrak{T}(\alpha)$$

é  $C^\infty(I)$ -bilinear.

**Exemplo 2.2.9.** O exemplo mais simples de  $(1, 1)$ -tensor transversal sobre uma geodésica  $\alpha$  é o *tensor identidade*  $\mathbb{I}$  dado por  $\mathbb{I}(V) = V$  para todo  $V \in \mathfrak{R}(\alpha)$ , e que induz a aplicação identidade em cada  $\mathcal{N}(t)$ . ◀

**Exemplo 2.2.10.** Um  $(1, 1)$ -tensor transversal que será muito importante é o *endomorfismo curvatura*  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  definido da seguinte forma: se  $\alpha$  é uma geodésica não luminosa, considere a família  $\{R_{\alpha'(t)}\}_{t \in I}$  de aplicações lineares em cada  $t \in I$  dada pelos *operadores força de maré* associados a  $\alpha'(t)$ ,

$$R_{\alpha'(t)} : v \in \alpha'(t)^\perp \mapsto R(v, \alpha'(t))\alpha'(t) \in \alpha'(t)^\perp,$$

e aplique as considerações feitas na observação 2.2.8 para definir  $\mathcal{R}_\alpha$ . Se  $\alpha$  é luminosa e a

dimensão é  $n \geq 3$ , obtemos  $\mathcal{R}_\alpha$  a partir da família de operadores força de maré luminosos  $\{\bar{R}_{\alpha'(t)}\}_{t \in I}$  como na proposição 1.4.4. ◀

Introduziremos agora uma série de operações sobre o  $C^\infty$ -módulo  $\mathfrak{T}(\alpha)$  de interesse para as próximas seções.

A primeira operação relevante é a *derivada covariante*:

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}' \in \mathfrak{T}(\alpha)$$

dada por

$$\mathcal{A}'(V) = \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(V))}{dt} - \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right), \quad (2.6)$$

para todo  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  e  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ . Como  $\alpha$  é geodésica, temos que  $D^\alpha V/dt \in \mathfrak{N}(\alpha)$  para todo  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ . Assim,  $\mathcal{A}'$  está bem definido como um  $(1, 1)$ -tensor transversal<sup>3</sup>.

Diremos que  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  é *paralelo* se  $\mathcal{A}' = 0$ . Por exemplo, o tensor identidade  $\mathbb{I} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  é paralelo, pois, dado  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ ,

$$\mathbb{I}'(V) = \frac{D^\alpha(\mathbb{I}(V))}{dt} - \mathbb{I}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right) = \frac{D^\alpha(V)}{dt} - \frac{D^\alpha(V)}{dt} = 0,$$

As seguintes propriedades são facilmente verificáveis pela definição:

$$\text{P1)} \quad (h \cdot \mathcal{A})' = (dh/dt) \cdot \mathcal{A} + h \cdot \mathcal{A}', \quad \forall h \in C^\infty(I), \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

$$\text{P2)} \quad (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}', \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

Para exemplificar, verificamos vale P2). Para todo  $V \in \mathfrak{N}(\alpha)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})'(V) &= \frac{D^\alpha((\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(V))}{dt} - (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right) \\ &= \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V)))}{dt} - \mathcal{A}\left(\mathcal{B}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right)\right) \\ &= \frac{D^\alpha(\mathcal{A}(\mathcal{B}(V)))}{dt} - \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha(\mathcal{B}(V))}{dt}\right) + \mathcal{A}\left(\frac{D^\alpha(\mathcal{B}(V))}{dt}\right) - \mathcal{A}\left(\mathcal{B}\left(\frac{D^\alpha V}{dt}\right)\right) \\ &= \mathcal{A}'(\mathcal{B}(V)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}'(V)) \\ &= (\mathcal{A}' \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{B}')(V). \end{aligned}$$

Abstraindo  $V$ , obtemos a igualdade desejada.

A segunda operação associa cada  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  a sua *adjunta*  $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{T}(\alpha)$  dada, em cada  $t \in I$ , por

$$\mathcal{A}^*(t) = (\mathcal{A}(t))^*$$

<sup>3</sup>Usamos implicitamente o fato de que, quando  $\alpha$  é geodésica luminosa, a derivada covariante de campos vetoriais sobre  $\alpha$  permanece bem definida em  $\bar{\mathfrak{X}}^\perp(\alpha)$ .

em que a adjunta no lado direito é a definida para produtos escalares entre espaços vetoriais semi-Riemannianos. Se  $\alpha$  é geodésica luminosa e  $(M, g)$  é Lorentziana, a adjunta em  $\mathcal{N}(t)$  é tomada com respeito ao produto interno induzido em  $\overline{(\alpha'(t))^\perp}$ . Segue da caracterização matricial de suavidade para  $(1, 1)$ -tensores transversais feita na observação 2.2.8 que  $\mathcal{A}^*$  está bem definida, e, por construção,

$$\langle \mathcal{A}^*(V), W \rangle = \langle V, \mathcal{A}(W) \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{R}(\alpha).$$

A aplicação

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}^* \in \mathfrak{T}(\alpha)$$

possui as seguintes propriedades de fácil verificação:

$$\text{T1) } (h\mathcal{A})^* = h\mathcal{A}^*, \text{ para todo } h \in C^\infty(I), \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

$$\text{T2) } (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \circ \mathcal{A}^*, \text{ para todo } \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

$$\text{T3) } (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}, \text{ para todo } \mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

$$\text{T4) } (\mathcal{A}^*)' = (\mathcal{A}')^*, \text{ para todo } \mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha).$$

Diremos que  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$  é *autoadjunto* se  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ . Por exemplo, segue facilmente das simetrias do tensor de curvatura  $R$  que o endomorfismo curvatura  $\mathcal{R}_\alpha$  é sempre autoadjunto<sup>4</sup>.

A última operação de interesse a ser definida em  $\mathfrak{T}(\alpha)$  é a de inversão. Dado  $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}(\alpha)$ , definimos

$$I_{\mathcal{A}} = \{t \in I \mid \mathcal{A}(t) \text{ é inversível}\}.$$

Usando representações matriciais obtidas na observação 2.2.8, as seguintes propriedades são facilmente verificáveis:

$$\text{I1) } I_{\mathcal{A}} \text{ é aberto em } I.$$

$$\text{I2) Para qualquer intervalo } I' \subseteq I_{\mathcal{A}},$$

$$t \in I' \mapsto (\mathcal{A}(t))^{-1} : \mathcal{N}(t) \rightarrow \mathcal{N}(t)$$

define um  $(1, 1)$ -tensor transversal sobre a restrição  $\alpha|_{I'}$ , que denotaremos simplesmente por  $\mathcal{A}^{-1}$  quando não houver risco de confusão.

$$\text{I3) } I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}^*}, \text{ e para todo intervalo } I' \subseteq I_{\mathcal{A}},$$

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*.$$

Temos também uma regra de derivação para a inversa.

<sup>4</sup>isso permanece válido quando  $\alpha$  é geodésica luminosa. Nesse caso, consideramos o operador força de maré luminoso.

**Lema 2.2.11.** Dado  $\mathcal{A} \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , para todo intervalo  $I' \subseteq I_{\mathcal{A}}$ , temos que

$$(\mathcal{A}^{-1})' = -\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}^{-1}.$$

*Demonstração.* Utilizando a propriedade P2) da operação derivada, temos que

$$0 = \mathbb{I}' = (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1})' = \mathcal{A}' \circ \mathcal{A}^{-1} + \mathcal{A} \circ (\mathcal{A}^{-1})'.$$

Aplicando  $\mathcal{A}^{-1}$  à esquerda na igualdade acima e rearranjando os termos, obtemos a igualdade desejada. ■

### 2.2.3 Tensores de Jacobi

Nesta seção, fixamos uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  em uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$ . Se  $\alpha$  é luminosa, então  $M$  será subentendida ser Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ .

Dizemos uma  $\alpha$  é *codefinida* se o produto escalar induzido em cada  $\mathcal{N}(t)$ ,  $t \in I$  é positivo definido. Claramente, isto só pode acontecer em dois casos:

- 1) ou  $\alpha$  é coespacial, isto é, ou  $(M, g)$  é Riemanniana, ou  $\alpha$  é temporal em  $(M, g)$  Lorentziana,
- 2) ou  $\alpha$  é luminosa, e  $(M, g)$  é Lorentziana (aqui o produto escalar em questão é o induzido pelo quociente).

Alguns dos resultados abaixo restringem-se a geodésicas codefinidas.

Como feito anteriormente para lidar simultaneamente com geodésicas independentemente de seu caráter causal, introduzimos outra notação conveniente: defina

$$\mu = \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Pelo restante do capítulo,  $\mu$  sempre terá este significado.

**Definição 2.2.12 (Tensores de Jacobi).** Um  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha$  é um tensor de Jacobi (ou endomorfismo de Jacobi) se satisfaz

$$\mathcal{A}'' + \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} = 0, \quad (2.8)$$

em que  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é o endomorfismo curvatura.

A equação acima é claramente linear, e, como nos casos anteriores, esperamos existência e unicidade para tal equação, que é nosso próximo resultado.

**Proposição 2.2.13.** *Sejam  $t_0 \in I$  e  $B, C : \mathcal{N}(t_0) \rightarrow \mathcal{N}(t_0)$  operadores lineares. Então, existe um único tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  tal que*

$$\mathcal{A}(t_0) = B \text{ e } \mathcal{A}'(t_0) = C. \quad (2.9)$$

*Em particular, o conjunto dos tensores de Jacobi em  $\alpha$  é um espaço vetorial de dimensão de  $2\mu^2$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\{e_1, \dots, e_\mu\}$  uma base ortonormal de  $\mathcal{N}(t_0)$ , e  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  um referencial sobre  $\alpha$  de campos vetoriais transportados paralelamente (ou seções paralelas, se  $\alpha$  é luminosa e  $M$  é Lorentziana) tal que  $E_i(t_0) = e_i$  para  $i = 1, \dots, \mu$ . Sejam  $\hat{B} = [B_{ij}], \hat{C} = [C_{ij}] \in M(\mu, \mathbb{R})$  as matrizes de  $B$  e  $C$ , respectivamente, com respeito à tal base, isto é, para cada  $j \in \{1, \dots, \mu\}$ ,

$$B(e_j) = \sum_{i=1}^{\mu} B_{ij}e_i \text{ e } C(e_j) = \sum_{i=1}^{\mu} C_{ij}e_i,$$

Analogamente, podemos escrever o endomorfismo curvatura como

$$\mathcal{R}_{\alpha'}(E_j) = \sum_{i=1}^{\mu} R_{ij}E_i,$$

$j \in \{1, \dots, \mu\}$ , em que  $R_{ij} \in C^\infty(I)$ , definindo a seguinte aplicação suave com valores matriciais

$$R : t \in I \mapsto [R_{ij}(t)] \in M(\mu, \mathbb{R}).$$

Agora, seja  $A = [A_{ij}] : I \rightarrow M(\mu, \mathbb{R})$  a única solução global do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + RA = 0, \\ A(t_0) = \hat{B} \text{ e } \frac{dA}{dt}(t_0) = \hat{C}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Assim, para cada  $j \in \{1, \dots, \mu\}$ , temos que

$$\mathcal{A}(E_j) = \sum_{i=1}^{\mu} A_{ij}E_i \quad (2.11)$$

define um tensor de Jacobi com condições iniciais em (2.9).

Para mostrar unicidade, considere um outro tensor de Jacobi  $\mathcal{D}$  satisfazendo as condições (2.9). Decompondo  $\mathcal{D}$  como em (2.11), obtemos componentes  $D_{ij} \in C^\infty(I)$  que formam uma aplicação com valores matriciais  $D : I \rightarrow M(\mu, \mathbb{R})$  que também é solução de (2.10). Assim,  $D = A$ , implicando em  $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ . ■

Denote por  $\mathfrak{B}(\alpha) \subseteq \mathfrak{N}(\alpha)$  o subespaço vetorial formado pelos campos vetoriais perpendiculares e transportados paralelamente sobre  $\alpha$  (ou de seções paralelas, se  $\alpha$  é luminosa). Uma

das principais utilidades de tensores de Jacobi está associada a tal subespaço, como mostramos a seguir.

**Proposição 2.2.14.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi sobre a geodésica não luminosa [resp. luminosa]  $\alpha$  na variedade semi-Riemanniana (resp. Lorentziana)  $(M, g)$ . Então, para qualquer  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$ , o campo (resp. a seção)  $\mathcal{A}(V)$  é um campo de Jacobi (resp. classe de Jacobi). Mais ainda, as seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A aplicação linear

$$J_{\mathcal{A}} : V \in \mathfrak{P}(\alpha) \mapsto \mathcal{A}(V) \in \mathcal{J}_{\perp}^{\alpha} \text{ [resp. } \mathcal{J}C^{\alpha}]$$

é injetora.

ii) Para todo  $t \in I$  temos  $\ker \mathcal{A}(t) \cap \ker \mathcal{A}'(t) = \{0\}$ .

iii)  $\ker \mathcal{A}(t_0) \cap \ker \mathcal{A}'(t_0) = \{0\}$ , para algum  $t_0 \in I$ .

Se uma (logo todas) afirmação de (i) – (iii) vale, então  $\mathcal{A}$  é dito ser não degenerado.

*Demonstração.* Dado  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$ , temos

$$(\mathcal{A}(V))'' = \mathcal{A}''(V) = -\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A}(V) = -R(\mathcal{A}(V), \alpha')\alpha'$$

(em que utilizamos o operador força de maré luminoso na última igualdade se  $\alpha$  é luminosa), o que mostra a primeira afirmação.

(i)  $\implies$  (ii) Fixe  $t \in I$  e  $v \in \ker \mathcal{A}(t) \cap \ker \mathcal{A}'(t)$ . Seja  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  o único campo perpendicular e paralelo (resp. seção paralela) tal que  $V(t) = v$ . Então,

$$(\mathcal{A}(V))(t) = \mathcal{A}(t)(v) = 0 \text{ e } (\mathcal{A}(V))'(t) = \mathcal{A}'(t)(v) = 0,$$

donde concluímos que  $\mathcal{A}(V) = 0$ , pois  $\mathcal{A}(V)$  é um campo de Jacobi (resp. classe de Jacobi, conforme proposição 2.2.5), e como  $J_{\mathcal{A}}$  é injetora, temos que  $V = 0$ . Em particular,  $v = 0$  como desejado.

(ii)  $\implies$  (iii) Trivial.

(iii)  $\implies$  (i) Seja  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $\mathcal{A}(V) = 0$ . Temos que  $\mathcal{A}'(V) = (\mathcal{A}(V))' = 0$ , assim

$$\mathcal{A}(t_0)(V(t_0)) = (\mathcal{A}(V))(t_0) = 0 \text{ e } \mathcal{A}'(t_0)(V(t_0)) = (\mathcal{A}(V))'(t_0) = 0 \implies V(t_0) = 0$$

por (iii). Mas, como  $V$  é paralelo, concluímos que  $V = 0$ , mostrando que  $J_{\mathcal{A}}$  é injetora. ■

Em particular, se um tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  é inversível em algum ponto  $t_0 \in I$  (e nesse caso,  $\ker \mathcal{A}(t_0) = \{0\}$ ), então  $\mathcal{A}$  é não degenerado. (A recíproca em geral não é verdadeira, como veremos mais adiante.)

Claramente, o espaço  $\mathfrak{P}(\alpha)$  é  $\mu$ -dimensional. Assim, de acordo com a proposição 2.2.14, vemos que um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  induz à existência de um subespaço vetorial  $\mu$ -dimensional dos campos de Jacobi normais  $\mathcal{J}_\perp^\alpha$  (resp.  $\mathcal{J}C^\alpha$  se  $\alpha$  é luminoso). A saber, o subespaço

$$\mathcal{J}_\mathcal{A}^\alpha = J_\mathcal{A}(\mathfrak{P}(\alpha)). \quad (2.12)$$

Por questões de conveniência mas também motivadas geometricamente, estaremos interessados em tensores de Jacobi não degenerados<sup>5</sup>. Eventualmente, iremos restringir ainda mais a classe dos tensores de Jacobi e trabalhar com os chamados *tensores de Lagrange* (ou *Lagrangianos*), que introduzimos a seguir.

Lembre-se que uma *forma simplética*  $\sigma$  em um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é uma forma bilinear antissimétrica não degenerada. O par  $(\mathbb{V}, \sigma)$  é dito ser *espaço vetorial simplético*, e neste caso  $\mathbb{V}$  tem dimensão necessariamente par. Dado um subespaço  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ , temos um análogo do complemento ortogonal num espaço semi-euclidiano para a forma simplética, dado por

$$\mathbb{W}^{\perp, \sigma} = \{v \in \mathbb{V} \mid \sigma(v, w) = 0, \text{ para todo } w \in \mathbb{W}\},$$

assim,  $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^{\perp, \sigma}$ . Ainda,  $\mathbb{W}$  é dito ser *Lagrangiano* se  $\mathbb{W} = \mathbb{W}^{\perp, \sigma}$ , e neste caso,  $\dim \mathbb{W} = \dim \mathbb{V}/2$ .

Para qualquer geodésica não luminosa (resp. luminosa), o espaço vetorial  $\mathcal{J}_\perp^\alpha$  (resp.  $\mathcal{J}C^\alpha$ ) admite uma forma bilinear antissimétrica natural  $\sigma$ , dada, para cada  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}_\perp^\alpha$  (resp.  $\mathcal{J}C^\alpha$ ), por

$$\sigma(J_1, J_2) = \langle J'_1, J_2 \rangle - \langle J_1, J'_2 \rangle \quad (2.13)$$

que está bem definida, pois a expressão do lado direito em (2.13) é constante para cada  $t \in I$  devido à equação de Jacobi.

**Proposição 2.2.15 (Tensores de Lagrange).** *A forma bilinear definida  $\sigma$  (2.13) é simplética, e são equivalentes as seguintes afirmações sobre um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre uma geodésica  $\alpha$ :*

i)  $(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$ .

ii) O subespaço vetorial  $\mathcal{J}_\mathcal{A}^\alpha$  é um subespaço Lagrangiano de  $(\mathcal{J}_\perp^\alpha, \sigma)$  (resp.  $(\mathcal{J}C^\alpha, \sigma)$ ).

iii)  $(\mathcal{A}')^*(t_0) \circ \mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}^*(t_0) \circ \mathcal{A}'(t_0)$  para algum  $t_0 \in I$ .

Se alguma (logo todas) afirmação vale, então  $\mathcal{A}$  é dito ser um tensor de Lagrange (sobre  $\alpha$ ).

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $\sigma$  é não degenerada. Ponha

$$\mathbb{V} = \begin{cases} \mathcal{J}_\perp^\alpha, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa} \\ \mathcal{J}C^\alpha, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa,} \end{cases}$$

<sup>5</sup>É até comum para muitos autores já incluir a condição de não degenerescência na definição de tensores de Jacobi. Não fazemos isto nesta dissertação para expor melhor as suas propriedades.

e seja  $J \in \mathbb{V}$  tal que  $\sigma(J, \cdot) = 0$ . Fixe  $t_0 \in I$ , e escolha qualquer  $w \in \mathcal{N}(t_0)$ . Defina  $J_i \in \mathbb{V}$  ( $i = 1, 2$ ) pelas condições iniciais

$$J_1(t_0) = 0, J_1'(t_0) = w, \quad J_2(t_0) = w, J_2'(t_0) = 0.$$

Como  $\sigma$  é independente do parâmetro  $t \in I$  e  $\sigma(J, J_i) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma(J, J_1) &= \langle J'(t_0), J_1(t_0) \rangle - \langle J(t_0), J_1'(t_0) \rangle = -\langle J(t_0), w \rangle = 0, \\ \sigma(J, J_2) &= \langle J'(t_0), J_2(t_0) \rangle - \langle J(t_0), J_2'(t_0) \rangle = \langle J'(t_0), w \rangle = 0 \end{aligned}$$

portanto  $\langle J(t_0), w \rangle = \langle J'(t_0), w \rangle = 0$ . Como  $w$  é arbitrário e o produto escalar em  $\mathcal{N}(t_0)$  é não degenerado, segue que  $J(t_0) = J'(t_0) = 0$ , logo  $J = 0$ , mostrando que  $\sigma$  é uma forma simplética.

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Como  $\dim \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha} = \mu = (\dim \mathbb{V})/2$ , basta mostrar que (i) é satisfeita se e somente se

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha} \subseteq (\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha})^{\perp, \sigma}. \quad (2.14)$$

Assim, dados  $V, W \in \mathfrak{B}(\alpha)$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma(J_{\mathcal{A}}(V), J_{\mathcal{A}}(W)) &= \langle (\mathcal{A}(V))', \mathcal{A}(W) \rangle - \langle \mathcal{A}(V), (\mathcal{A}(W))' \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}'(V), \mathcal{A}(W) \rangle - \langle \mathcal{A}(V), \mathcal{A}'(W) \rangle \\ &= \langle V, [(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'](W) \rangle, \end{aligned}$$

o que torna imediata a equivalência entre (i) e (2.14).

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii) Claramente (i)  $\Rightarrow$  (iii). A fim de mostrar a recíproca, note que

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}')' &= (\mathcal{A}'')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'' \\ &= -(\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A})^* \circ \mathcal{A} + \mathcal{A}^* \circ \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{A}^* \circ (\mathcal{R}_{\alpha'}^* - \mathcal{R}_{\alpha'}) \circ \mathcal{A} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

uma vez que o endomorfismo curvatura  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é autoadjunto. Ou seja, o tensor de Jacobi

$$\mathcal{X} = (\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$$

é paralelo. Agora, seja  $\{E_1, \dots, E_{\mu}\}$  um referencial ortonormal paralelo sobre  $\alpha$ , e escreva

$$\mathcal{X}(E_j) = \sum_{i=1}^{\mu} X_{ij} E_i,$$

com  $X_{ij} \in C^{\infty}(I)$  para  $i, j = 1, \dots, \mu$ . Se cada  $X_{ij} = 0$ , o resultado segue. Para ver isto, temos

que

$$(\mathcal{X}(E_j))'(t) = \mathcal{X}'(E_j)(t) = \sum_{i=1}^{\mu} X'_{ij}(t)E_i(t) = 0,$$

para todo  $t \in I$  e  $j = 1, \dots, \mu$ . Isso mostra que cada  $X_{ij}$  é constante. Mas  $\mathcal{X}(t_0) = 0$  por (iii), ou seja,

$$\mathcal{X}(E_j)(t_0) = \sum_{i=1}^{\mu} X_{ij}(t_0)E_i(t_0) = 0,$$

para  $j = 1, \dots, \mu$ . Logo vemos que, para cada  $i, j = 1, \dots, \mu$ ,  $X_{ij}(t_0) = 0$ , e então  $X_{ij} = 0$ . ■

O seguinte critério para a obtenção de um tensor de Lagrange será útil, e é consequência direta do item (iii) da proposição 2.2.15.

**Corolário 2.2.16.** *Se um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  se anula em algum  $t_0 \in I$ , então  $\mathcal{A}$  é um tensor de Lagrange.*

Introduzimos agora a seguinte notação. Dado  $\mathcal{A}$  tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$  e  $t_0 \in I$ , denotamos

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha} = \{J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha} \mid J(t_0) = 0\}. \quad (2.16)$$

Associado a tal espaço temos o seguinte resultado, que será útil no futuro.

**Proposição 2.2.17.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$ . Dado  $t_0 \in I$ , defina a aplicação  $\Phi : \ker \mathcal{A}(t_0) \rightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$  da seguinte forma: dado  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$ , tome o único  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que  $V(t_0) = v$ , e ponha  $\Phi(v) = J_{\mathcal{A}}(V)$ . Então  $\Phi$  é um isomorfismo linear.*

*Demonstração.* Dado  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$ , tome o único  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que  $V(t_0) = v$ . Temos

$$(\Phi(v))(t_0) = \mathcal{A}(V)(t_0) = \mathcal{A}(t_0)(v) = 0,$$

ou seja,  $\mathcal{A}(V) \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$ . Portanto,  $\Phi$  está bem definida e é claramente linear.

Se  $\Phi(v) = \mathcal{A}(V) = 0$ , então  $\mathcal{A}(V)' = 0$ , e, em particular,  $\mathcal{A}(t_0) = \mathcal{A}'(t_0)(v) = 0$ . Assim, sendo  $\mathcal{A}$  não degenerado, temos  $v = 0$ , provando que  $\Phi$  é injetora. Agora, dado  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha}$ , tome o único  $V \in \mathfrak{F}(\alpha)$  tal que  $J_{\mathcal{A}}(V) = J$ . Então,

$$\mathcal{A}(t_0)(V(t_0)) = J(t_0) = 0 \Rightarrow V(t_0) \in \ker \mathcal{A}(t_0) \text{ e } \Phi(V(t_0)) = J,$$

mostrando que  $\Phi$  é sobrejetora. ■

Dado um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre  $\alpha$ , dizemos que um ponto  $\alpha(t_0)$  é  $\mathcal{A}$ -conjugado se  $\dim \mathcal{J}_{\mathcal{A}, t_0}^{\alpha} > 0$ , isto é, se existe  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha}$  não nulo tal que  $J(t_0) = 0$ . Da proposição 2.2.17, segue imediatamente o seguinte resultado.

**Corolário 2.2.18.** Para  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi não degenerado sobre  $\alpha$ , temos que

$$I \setminus I_{\mathcal{A}} = \{t \in I \mid \alpha(t) \text{ é } \mathcal{A}\text{-conjugado}\}.$$

Em particular, esse conjunto é fechado em  $I$ .

Podemos melhorar esse resultado no caso em que  $\mathcal{A}$  é um tensor Lagrangiano sobre uma geodésica codefinida. Para isto, precisaremos do seguinte lema técnico.

**Lema 2.2.19.** Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi não degenerado e considere um referencial ortonormal em  $\alpha$  paralelamente transportado  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$ . Associada a esse referencial, defina uma base  $\{J_1, \dots, J_\mu\}$  de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^\alpha$  pondo, para cada  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ ,  $J_i = \mathcal{A}(E_i)$ . Então,  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$  se e somente se  $\alpha(t_0)$  não é  $\mathcal{A}$ -conjugado, isto é, se  $\mathcal{A}(t_0)$  é inversível.

*Demonstração.* Como  $\{E_1(t_0), \dots, E_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ , se  $\mathcal{A}(t_0)$  é inversível, em particular preserva bases, logo  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é também base de  $\mathcal{N}(t_0)$ .

Reciprocamente, se  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ , então, para cada  $j \in \{1, \dots, \mu\}$ , as equações

$$J_j(t_0) = \sum_{i=1}^{\mu} M_{ij} E_i(t_0),$$

onde  $[M_{ij}]$  é a matriz mudança de base (que é sempre inversível) mostram que essa matriz coincide com a matriz de  $\mathcal{A}(t_0)$  com respeito à base  $\{E_1(t_0), \dots, E_\mu(t_0)\}$ . Portanto,  $\mathcal{A}(t_0)$  é inversível. ■

**Teorema 2.2.20.** Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Lagrange sobre a geodésica codefinida  $\alpha : I \rightarrow M$ . Se  $\alpha(t_0)$  é um ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado, então existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\} \Rightarrow \mathcal{A}(t) \text{ é inversível}.$$

Em outras palavras,  $I \setminus I_{\mathcal{A}}$  é discreto em  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  ( $0 < k \leq \mu$ ) base ortonormal de  $\ker \mathcal{A}(t_0)$ . Complete tal para uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_\mu\}$  de  $\mathcal{N}(t_0)$ . Para o único referencial ortonormal paralelo  $\{E_1, \dots, E_\mu\} \subseteq \mathfrak{B}(\alpha)$  tal que  $E_i(t_0) = e_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ , tome a base associada  $J_i = \mathcal{A}(E_i)$ , de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^\alpha$ . Pelo lema 2.2.19, sabemos que  $\{J_1(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  não é base de  $\mathcal{N}(t_0)$ . Porém, para estabelecer o resultado, basta mostrar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\{J_1(t), \dots, J_\mu(t)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t)$  para todo  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}$ .

Note que, para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , temos  $J_i(t_0) = \mathcal{A}(t_0)(e_i) = 0$ , e então, usando o exercício 1.17 de O'Neill (1983), existem  $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(\alpha)$  tais que

$$J_i(t) = (t - t_0)Y_i(t), \quad \text{para todo } t \in I \text{ e } i \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.17)$$

**Afirmção:** para algum  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{B}_t = \{Y_1(t), \dots, Y_k(t), J_{k+1}(t), \dots, J_\mu(t)\}$  é base de  $\mathcal{N}(t)$  para todo  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

Por continuidade, basta mostrar que  $\{Y_1(t_0), \dots, Y_k(t_0), J_{k+1}(t_0), \dots, J_\mu(t_0)\}$  é linearmente independente em  $\mathcal{N}(t_0)$ .

Agora, note que  $Y_i(t_0) = J'_i(t_0) \neq 0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sejam  $a_1, \dots, a_\mu \in \mathbb{R}$  tais que

$$\sum_{i=1}^k a_i J'_i(t_0) + \sum_{j=k+1}^{\mu} a_j J_j(t_0) = 0. \quad (2.18)$$

Definindo

$$v = \sum_{i=1}^k a_i e_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{j=k+1}^{\mu} a_j e_j,$$

temos então que a igualdade (2.18) pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}'(t_0)(v) + \mathcal{A}(t_0)(w) = 0.$$

Mas então, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{A}'(t_0)(v), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{A}(t_0))^* \mathcal{A}'(t_0)(v), w \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle (\mathcal{A}'(t_0))^* \mathcal{A}(t_0)(v), w \rangle + \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}(t_0)(w), \mathcal{A}(t_0)(w) \rangle, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que  $\mathcal{A}$  é de Lagrange na terceira igualdade e de que  $\mathcal{A}(t_0)(v) = 0$  (pois  $v \in \ker \mathcal{A}(t_0)$ ) na última equação.

Como  $\alpha$  é codefinida, concluímos que

$$\mathcal{A}(t_0)(w) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow a_{k+1} = \dots = a_\mu = 0.$$

Mas então  $\mathcal{A}'(t_0)(v) = 0$ , e como  $\mathcal{A}(t_0)(v) = 0$  e  $\mathcal{A}$  é não degenerado, concluímos que  $v = 0$ , isto é,  $a_1 = \dots = a_k = 0$ , provando a afirmação.

Para finalizar a prova, basta notar que, para  $\varepsilon > 0$  conforme a afirmação acima,  $\hat{\mathcal{B}}_t = \{J_1(t) = (t - t_0)Y_1(t), \dots, J_k(t) = (t - t_0)Y_k(t), J_{k+1}(t), \dots, J_\mu(t)\}$  é de fato uma base de  $\mathcal{N}(t)$  sempre que  $t \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}$ . ■

## 2.2.4 Equação de Riccati

Seja  $u : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução não trivial da equação diferencial linear

$$u'' + Fu = 0, \quad (2.19)$$

em que  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua fixada. Fazendo a mudança de variáveis  $v = u'/u$ , obtemos a *equação de Riccati* associada a equação (2.19):

$$v' + v^2 + F = 0. \quad (2.20)$$

Ao contrário de (2.19), a equação (2.20) está definida apenas num intervalo  $I' \subseteq I$  em que  $u$  é não nulo, pois só assim a mudança de variável faz sentido. Reciprocamente, se uma solução  $v : I' \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  da equação de Riccati está dada, então uma solução positiva  $u$  de (2.19) pode ser dada por  $u = \exp(h)$ , em que  $h' = v$ . Observe que a função  $u$ , sendo solução de uma equação linear, pode ser estendida para todo o  $I$ , porém pode não ser mais positiva fora de  $I'$ .

É interessante observar que, apesar da equação de Riccati ser não linear e a princípio mais complicada que sua versão linear, ela pode carregar informações úteis sobre soluções globais da equação linear 2.19, mais especificamente sobre os zeros das soluções. Esse fato será ilustrado nesta seção num contexto bem mais geral, e tem consequências geométricas importantes.

Assim como nas seções anteriores, fixaremos uma variedade semi-Riemanniana  $(M, g)$  de dimensão  $n \geq 2$  e uma geodésica  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ , mas se  $\alpha$  é luminosa, assumiremos sempre que  $(M, g)$  é Lorentziana de dimensão  $n \geq 3$ .

**Definição 2.2.21 (Equação de Riccati para Tensores).** *Seja  $I' \subseteq I$  um intervalo não vazio. Dizemos que um  $(1, 1)$ -tensor transversal  $S$  sobre  $\alpha|_{I'}$  é um tensor de Riccati em  $\alpha$  se satisfaz a equação de Riccati*

$$S' + S^2 + \mathcal{R}_{\alpha'} = 0, \quad (2.21)$$

em que  $S^2 = S \circ S$  e  $\mathcal{R}_{\alpha'}$  é a restrição para  $\alpha|_{I'}$  do endomorfismo curvatura. Um tensor de Riccati é dito ser maximalmente estendido se, dado qualquer outro intervalo  $I' \subseteq I'' \subseteq I$ , e um  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\hat{S}$  sobre  $\alpha|_{I''}$  satisfazendo a equação de Riccati em  $\alpha$  tal que  $\hat{S}|_{I'} = S$ , temos então  $I'' = I'$  e  $\hat{S} = S$ .

A conexão entre tensores de Jacobi e Riccati é estabelecida no seguinte resultado.

**Teorema 2.2.22.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica em  $(M, g)$ . Então,*

- 1) *seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Jacobi em  $\alpha$ , e seja  $I' \subseteq I$  um intervalo não vazio de modo que  $\mathcal{A}|_{I'}$  seja inversível em todo  $I'$ . O  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  sobre  $\alpha|_{I'}$  definido em cada  $t \in I'$  por*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1}, \quad (2.22)$$

*satisfaz a equação de Riccati. Mais ainda,  $\mathcal{A}$  é tensor Lagrangiano se e somente se  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  é autoadjunto.*

- 2) *Dado um intervalo não vazio  $I' \subseteq I$  e um tensor de Riccati  $S$  em  $\alpha|_{I'}$ , existe um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  que é (i) inversível em  $I'$ , e (ii) tal que  $S = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ . Se  $\hat{\mathcal{A}}$  é qualquer outro tensor de Jacobi não degenerado satisfazendo as propriedades (i) e (ii), então existe um único  $(1, 1)$ -tensor transversal paralelo inversível  $C$  tal que  $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ C$ .*

3) Se um tensor de Riccati  $\mathcal{S}$  em  $\alpha|_{I'}$  é maximalmente estendido, e um tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$  é tal que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  como em (2.22), então, para  $t_0 \in \partial I' \cap I$ , temos que  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado. Um tal valor  $t_0$  será dito uma singularidade da equação de Riccati.

*Demonstração.* (1) Primeiramente, note que  $\mathcal{A}$  é não degenerado pois é inversível em  $I'$ . Para cada  $t \in I'$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{\mathcal{A}}(t) &= \mathcal{A}''(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} - \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} \circ \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'}(t) \circ \mathcal{A}(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1} - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^2(t) \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'}(t) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^2(t), \end{aligned}$$

em que utilizamos o lema 2.2.11 na primeira igualdade. Isso mostra que  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  é tensor de Riccati. Mais ainda, para cada  $t \in I'$ ,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*(t) - \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) = (\mathcal{A}^*(t))^{-1} \circ (\mathcal{A}'(t))^* - \mathcal{A}'(t) \circ (\mathcal{A}(t))^{-1},$$

assim

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(t) \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(t) \circ \mathcal{A}'(t) = (\mathcal{A}'(t))^* \circ \mathcal{A}(t),$$

o que conclui a prova do item (1).

Para (2), dado um tensor de Riccati  $\mathcal{S}$  em  $\alpha|_{I'}$ , fixe  $t_0 \in I'$ , e considere as únicas soluções  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dos problemas de valor inicial<sup>6</sup> lineares

$$\begin{cases} \mathcal{A}' = \mathcal{S} \circ \mathcal{A} \text{ em } I', \\ \mathcal{A}(t_0) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t_0)}, \\ \mathcal{B}' = -\mathcal{B} \circ \mathcal{S} \text{ em } I', \\ \mathcal{B}(t_0) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t_0)}. \end{cases}$$

Assim,  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são (1, 1)-tensores transversais em  $\alpha|_{I'}$ . Ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' &= \mathcal{S}' \circ \mathcal{A} + \mathcal{S} \circ \mathcal{A}' \\ &= -\mathcal{S}^2 \circ \mathcal{A} - \mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A} + \mathcal{S}^2 \circ \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{R}_{\alpha'} \circ \mathcal{A}, \end{aligned}$$

em que utilizamos a equação de Riccati para o primeiro termo e a equação diferencial que define  $\mathcal{A}$  no segundo termo da segunda igualdade.

Isto mostra que  $\mathcal{A}$  é um tensor de Jacobi em  $\alpha|_{I'}$ , que pode ser unicamente estendido

<sup>6</sup>Podemos interpretar tais PVI's de forma matricial, a fim de aplicarmos os teoremas de existência e unicidade. Para isso, basta tomar um referencial paralelo  $\{E_1, \dots, E_\mu\}$  em  $\alpha|_{I'}$ , como feito na proposição 2.2.13. Daqui em diante, assumimos que esse procedimento está sendo aplicado implicitamente.

como tensor de Jacobi em  $\alpha$  pela proposição 2.2.13. Mais ainda, em  $I'$ , temos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})' &= \mathcal{B}' \circ \mathcal{A} + \mathcal{B} \circ \mathcal{A}' \\ &= -\mathcal{B} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{A} + \mathcal{B} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{A} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$  é paralelo, e, em decorrência das condições iniciais, segue que  $\mathcal{B}(t) \circ \mathcal{A}(t) = \mathbb{I}_{\mathcal{N}(t)}$ , para todo  $t \in I'$ . Concluimos assim que  $\mathcal{A}$  é inversível em  $I'$ , e, em particular, é um tensor de Jacobi com  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ , por construção.

Finalmente, se  $\hat{\mathcal{A}}$  é outro tensor de Jacobi não degenerado em  $\alpha$  satisfazendo (i) e (ii), então  $\hat{\mathcal{A}}$  é a única solução em  $I'$  do PVI linear

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}' = \mathcal{S} \circ \hat{\mathcal{A}} \text{ em } I', \\ \hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(t_0) \text{ em } \mathcal{N}(t_0). \end{cases} \quad (2.23)$$

Seja  $C$  é o único  $(1, 1)$ -tensor transversal paralelo em  $\alpha$  tal que  $C(t_0) = \hat{\mathcal{A}}(t_0)$ . Então, se definirmos o  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \circ C$ , um cálculo direto mostra que  $\mathcal{Z}$  é um tensor de Jacobi em  $\alpha$ , e que satisfaz o mesmo PVI (2.23) que  $\hat{\mathcal{A}}$  em  $I'$ . Assim,  $\mathcal{Z}|_{I'} = \hat{\mathcal{A}}|_{I'}$  e, em particular,  $\mathcal{Z}'(t_0) = \hat{\mathcal{A}}'(t_0)$ . Segue então da proposição 2.2.13 que  $\mathcal{Z} = \hat{\mathcal{A}}$ , provando (2).

(3) Se  $\alpha(t_0)$  não fosse ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado, então  $I'$  poderia ser estendido para um intervalo estritamente maior  $I' \subsetneq I'' \subseteq I$  contendo  $t_0$  com  $\mathcal{A}$  ainda inversível em  $I''$ . Assim,  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \mathcal{S}$  seria extensível para  $I''$ , uma contradição com a hipótese de  $\mathcal{S}$  ser maximalmente estendido. ■

Para o restante da seção, fixamos um tensor de Jacobi não degenerado  $\mathcal{A}$  sobre a geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$ , e tomamos  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  como o tensor de Riccati associado definido pela equação (2.22), maximalmente estendido no intervalo  $I' \subseteq I$ .

**Observação 2.2.23.** Lembre-se que, sendo  $\mathcal{A}$  não degenerado, para cada  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ , existe um único  $V \in \mathfrak{B}(\alpha)$  tal que  $J = \mathcal{A}(V)$ . Assim, em  $I'$  temos a seguinte “lei de propagação” para campos/classes de Jacobi  $J \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha|I'}$  :

$$J' = \mathcal{A}'(V) = \mathcal{A}'(\mathcal{A}^{-1}(J)) = \mathcal{S}(J), \quad (2.24)$$

A equação (2.24) pode ser interpretada como dizendo que  $\mathcal{S}$  mede o quanto campos/classes de Jacobi em  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}^{\alpha|I'}$  falham em ser paralelos. Em outras palavras, o quanto campos/classes de Jacobi “torcem e giram” com respeito a uma base  $\{E_1, \dots, E_{\mu}\} \subseteq \mathfrak{N}(\alpha)$  ortonormal e paralelamente transportada ao longo da geodésica  $\alpha|_{I'}$ .

Para o nosso próximo objetivo, faremos uma decomposição conveniente de  $\mathcal{S}$ , que nos permitirá uma melhor visualização geométrica dos efeitos de  $\mathcal{S}$ . Para isso, no restante do capítulo,

assumiremos que  $\alpha$  é geodésica codefinida. Lembre-se que, neste caso, o produto escalar restrito a  $\mathcal{N}(t)$  é positivo-definido.

Neste contexto, definiremos três novos objetos associados a  $\mathcal{S}$  :

a) A *expansão* (ou *expansão escalar*)  $\theta = \theta_{\mathcal{S}} \in C^\infty(I')$ , dada por

$$\theta = \text{tr } \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \mathcal{S}(E_i), E_i \rangle, \quad (2.25)$$

b) O *cisalhamento*, que é o  $(1, 1)$ -tensor transversal, autoadjunto e de traço nulo  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\mathcal{S}}$  sobre  $\alpha|_{I'}$ , dado por

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{2} [\mathcal{S} + \mathcal{S}^*] - \frac{\theta}{\mu} \mathbb{I}, \quad (2.26)$$

em que  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade.

c) A *vorticidade*, que é o  $(1, 1)$ -tensor transversal antiautoadjunto e de traço nulo  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_{\mathcal{S}}$  sobre  $\alpha|_{I'}$ , dado por

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2} [\mathcal{S} - \mathcal{S}^*]. \quad (2.27)$$

Com essas definições, temos a decomposição

$$\mathcal{S} = \frac{\theta}{\mu} \mathbb{I} + \hat{\sigma} + \hat{\omega}. \quad (2.28)$$

Observe que, de acordo com o teorema 2.2.22-(1),  $\mathcal{A}$  é tensor de Langrange se e somente se  $\hat{\omega} = 0$ .

Uma outra razão pela qual estamos restringindo nossa análise para geodésicas codefinidas é para controlar o sinal do *cisalhamento escalar*  $\sigma \geq 0$ , dado por

$$\sigma^2 = \text{tr } \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{\mu} \langle E_i, \hat{\sigma}^2(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \hat{\sigma}(E_i), \hat{\sigma}(E_i) \rangle \geq 0, \quad (2.29)$$

e da *vorticidade escalar*  $\omega \geq 0$ , dada por

$$\omega^2 = -\text{tr } \hat{\omega}^2 = -\sum_{i=1}^{\mu} \langle E_i, \hat{\omega}^2(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\mu} \langle \hat{\omega}(E_i), \hat{\omega}(E_i) \rangle \geq 0. \quad (2.30)$$

Com estas definições, temos o seguinte teorema fundamental.

**Teorema 2.2.24 (A Equação de Raychaudhuri).** *Se  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica codefinida, então a expansão escalar  $\theta$  satisfaz a equação de Raychaudhuri em  $I'$ :*

$$\theta' + \frac{\theta^2}{\mu} + \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 - \omega^2 = 0. \quad (2.31)$$

Em particular, se  $\mathcal{S}$  é autoadjunto, essa equação se reduz a

$$\theta' + \frac{\theta^2}{\mu} + \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 = 0.$$

*Demonstração.* Aplicando o traço na equação de Riccati (2.21), obtemos

$$\text{tr } \mathcal{S}' + \text{tr } \mathcal{S}^2 + \text{tr } \mathcal{R}_{\alpha'} = 0. \quad (2.32)$$

Agora, utilizando as proposições 1.4.13 e 1.4.14, temos, tanto para o caso temporal quanto para o luminoso, temos

$$\text{tr } \mathcal{R}_{\alpha'} = \text{Ric}(\alpha', \alpha'). \quad (2.33)$$

Diferenciando a decomposição em (2.28), temos que

$$\mathcal{S}' = \frac{\theta'}{\mu} \mathbb{I} + \hat{\sigma}' + \hat{\omega}', \quad (2.34)$$

cujos dois últimos termos possuem traço nulo, logo

$$\text{tr } \mathcal{S}' = \frac{\theta'}{\mu} \text{tr } \mathbb{I} = \theta'. \quad (2.35)$$

Elevando ao quadrado (2.28), obtemos

$$\mathcal{S}^2 = \frac{\theta^2}{\mu^2} \mathbb{I} + \hat{\sigma}^2 + \hat{\omega}^2 + \frac{2\theta}{\mu} \hat{\sigma} + \frac{2\theta}{\mu} \hat{\omega} + \hat{\sigma} \circ \hat{\omega} + \hat{\omega} \circ \hat{\sigma}.$$

Somente os três primeiros termos dessa igualdade possuem traço não nulo. Assim, usando (2.29) e (2.30), temos que

$$\text{tr } \mathcal{S}^2 = \frac{\theta^2}{\mu} + \sigma^2 - \omega^2. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.33), (2.35) e (2.36) em (2.32), obtemos o resultado desejado. ■

O próximo resultado é uma consequência fundamental da equação de Raychaudhuri.

**Corolário 2.2.25.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica codefinida e inextensível. Suponha  $\theta(t_0) \neq 0$  para algum  $t_0 \in I$  e*

$$f_{\mathcal{A}} = \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 - \omega^2 \geq 0 \quad (2.37)$$

ao longo de  $\alpha|_I$ . Então,

- i) Se  $\theta(t_0) > 0$ , existe um ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado  $\alpha(t)$  para algum  $t \in [t_0 - \mu/\theta(t_0), t_0)$ , caso  $t_0 - \mu/\theta(t_0) \in I$ ;
- ii) Se  $\theta(t_0) < 0$ , existe um ponto  $\mathcal{A}$ -conjugado  $\alpha(t)$  para algum  $t \in (t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|]$ , caso  $t_0 + \mu/|\theta(t_0)| \in I$ .

*Demonstração.* Provaremos (ii), e a demonstração é análoga para (i).

Assuma  $\theta(t_0) < 0$  e, por contradição, suponha que  $t_0 + \mu/|\theta(t_0)| \in I$  e que não existam pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados para  $t \in (t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|]$ .

Lembre-se que estamos assumindo, sem perda de generalidade, que  $\mathcal{S}$  está definido no intervalo  $I' \subseteq I$  maximalmente estendido e  $t_0 \in I'$ . Em particular,  $(t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|)$ , pela nossa hipótese de contradição. Porém, usando a condição (2.37) na equação de Raychaudhuri (2.31), obtemos

$$\theta' \leq -\theta^2/\mu \text{ em } I'. \quad (2.38)$$

Em particular,  $\theta$  é não crescente e, assim, permanece negativa em  $(t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|]$ . Dividindo (2.38) por  $-\theta^2$  e integrando de  $t_0$  a qualquer  $t \in (t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|]$ , temos

$$1/\theta(t) \geq \frac{1}{\mu} [t - (t_0 + \mu/|\theta(t_0)|)]. \quad (2.39)$$

Mas, para  $t = t_1 = t_0 + \mu/|\theta(t_0)|$ , temos  $1/\theta(t_1) \geq 0$ , de forma que  $\theta(t_1) \geq 0$ , e assim teríamos  $1/\theta(t') = 0$  para algum  $t'$  no intervalo, que em qualquer caso é um absurdo.

Portanto,  $t_0 + \mu/|\theta(t_0)| \in I \setminus I'$ , e então existe  $t_1 \in \partial I' \cap (t_0, t_0 + \mu/|\theta(t_0)|) \neq \emptyset$ , implicando em  $\alpha(t_1)$  ser  $\mathcal{A}$ -conjugado, pelo teorema 2.2.22-(3), concluindo a prova. ■

**Observação 2.2.26.** Um caso particular muito importante onde a condição 2.37 no corolário 2.2.25 é válida será quando  $\mathcal{A}$  é um *tensor de Lagrange* (e neste caso  $\omega = 0$ ) e o tensor de Ricci é não negativo, isto é,  $\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq 0$  em  $I$ . No entanto, existem variedades Lorentzianas relevantes para a cosmologia, nas quais  $\text{Ric}(\alpha', \alpha')$  se torna negativo mas ainda assim (2.37) vale, o que nos motiva a ter dado o resultado anterior com tais hipóteses.

**Corolário 2.2.27.** *Seja  $\mathcal{A}$  um tensor de Lagrange sobre a geodésica codefinida inextensível  $\alpha : I \rightarrow M$ , tal que*

$$\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq \mu c > 0 \quad (2.40)$$

*em  $I$  para alguma constante positiva  $c$ . Se  $I$  tem comprimento maior que  $\pi/\sqrt{c}$ , então  $\alpha$  possui um par de pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados.*

*Demonstração.* Sejam  $t_0 < t_1$  em  $I$  tais que  $[t_0, t_1] \subseteq I'$ . Como  $\mathcal{A}$  é Lagrangiano, temos que  $\mathcal{S}$  é autoadjunto, de acordo com a proposição 2.2.22-(1). Nesse caso, a equação de Raychaudhuri fica

$$\theta' + \frac{\theta^2}{\mu} + \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 = 0,$$

cuja condição em (2.40) pode ser aplicada de modo que

$$\left(\frac{\theta}{\mu}\right)' \leq -\left[\left(\frac{\theta}{\mu}\right)^2 + c\right],$$

e integrando ambos os lados entre  $t_0$  e  $t_1$ , obtemos

$$t_1 - t_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan \left( \frac{\theta(t_0)}{\mu\sqrt{c}} \right) - \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan \left( \frac{\theta(t_1)}{\mu\sqrt{c}} \right) < \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Portanto,  $I'$  tem comprimento estritamente menor do que  $\pi/\sqrt{c}$ , onde concluímos que ambos  $t_0$  e  $t_1$  podem ser escolhidos de forma a intersectar  $I$ . Novamente, o teorema 2.2.22-(3) nos permite concluir o desejado. ■

Os corolários 2.2.25 e 2.2.27 sugerem que a não negatividade do tensor de Ricci, juntamente com  $\mathcal{A}$  ser Lagrangiano, tendem a formar pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados. O quão forte é essa tendência pode ser vista através do seguinte resultado.

**Proposição 2.2.28.** *Seja  $\alpha$  geodésica codefinida e completa (i.e.,  $I = \mathbb{R}$ ), tal que*

$$\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq 0. \quad (2.41)$$

*Se  $\mathcal{A}$  é um tensor de Lagrange sobre  $\alpha$  sem pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados, então, ao longo de  $\alpha$ , temos*

i)  $\theta = 0$  e

ii)  $\mathcal{R}_\alpha = 0$ . *Em outras palavras, o operador força de maré associado a  $\alpha'$  é identicamente nulo ao longo de  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\mathcal{A}$  de Lagrange, juntamente com (2.41), implica em  $f_{\mathcal{A}} \geq 0$  e  $\hat{\omega} = 0$ . A inexistência de pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados significa que  $I' = \mathbb{R}$ , isto é, o tensor de Riccati  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  está definido em todo o  $\mathbb{R}$ . Pelo corolário 2.2.25, temos que  $\theta = 0$ . A equação de Raychaudhuri com estas condições nos dá que  $\text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 = 0$ , implicando  $\sigma = 0$ , em virtude da não negatividade de  $\text{Ric}(\alpha', \alpha')$ . Segue da equação (2.29) que  $\hat{\sigma} = 0$ , e a decomposição (2.28) implica que  $\mathcal{S} = 0$ . Assim, a equação de Riccati para  $\mathcal{S}$  neste caso se reduz a  $\mathcal{R}_\alpha = 0$ . ■

O escopo da proposição 2.2.28 pode ser expandido utilizando o seguinte lema técnico, cuja demonstração pode ser vista em Guimarães (1992), pag. 658.

**Lema 2.2.29 (Guimarães).** *Sejam  $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas, e  $a > 0$  um número real. Então*

(i)  $\limsup_{s \rightarrow +\infty} \left( u(s) + a \int_0^s u(t)^2 dt \right) \leq 0$ , com igualdade se e somente se  $u = 0$ .

(ii)  $\limsup_{s \rightarrow +\infty} \left( v(s) - v(-s) + a \int_0^s v(t)^2 dt \right) \leq 0$ , com igualdade se e somente se  $v = 0$ .

E com isto podemos mostrar o seguinte resultado, cuja relevância geométrica ficará clara na próxima seção.

**Proposição 2.2.30.** *Suponha que  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma geodésica codefinida e sem pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados. Assuma também que vale*

- (a)  $I = [0, +\infty)$ , ( $\alpha$  é semi-completa) ou
- (b)  $I = (-\infty, +\infty)$  ( $\alpha$  é completa).

Então, para  $f_{\mathcal{A}}$  como definida (2.37):

- (i) se vale (a), temos

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \leq \theta(0),$$

com igualdade se e somente se  $\theta = 0$ ;

- (ii) se vale (b), temos

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \leq 0,$$

com igualdade se e somente se  $\theta = 0$ .

*Demonstração.* Assuma que vale (a). Então, integrando a equação de Raychaudhuri entre 0 e qualquer  $t > 0$ , temos

$$\theta(t) + \frac{1}{\mu} \int_0^t \theta(s)^2 ds = \theta(0) - \int_0^t f_{\mathcal{A}}(s) ds. \quad (2.42)$$

Aplicando o lema 2.2.29-(i) para o lado esquerdo da igualdade (2.42) (tomando  $u = \theta$  para o lema citado), obtemos

$$\theta(0) - \liminf_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_0^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \right) \equiv \theta(0) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left( - \int_0^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \right) \geq 0, \quad (2.43)$$

e portanto

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_0^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \right) \leq \theta(0), \quad (2.44)$$

com igualdade se e somente se  $\theta = 0$ . A prova quando (b) vale é similar, integrando a equação de Raychaudhuri de  $-t$  até  $t$ , e usando o lema 2.2.29-(ii). ■

A primeira consequência da proposição 2.2.30 é a seguinte versão mais forte da proposição 2.2.28.

**Proposição 2.2.31.** *Suponha que  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma geodésica codefinida tal que*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t Ric(\alpha'(s), \alpha'(s)) ds \geq 0. \quad (2.45)$$

Assuma que  $\mathcal{A}$  é um tensor de Lagrange sobre  $\alpha$  para o qual não existe pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados ao longo de  $\alpha$ . Então,

- i)  $\theta = 0$  e

ii)  $\mathcal{R}_{\alpha'} \equiv 0$ . Em outras palavras, o operador força de maré associado a  $\alpha'$  é identicamente nulo ao longo de  $\alpha$ .

*Demonstração.* A condição de Lagrange junto com (2.45) implicam (cf. observação 2.2.26) que  $\hat{\omega} = 0$  e

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f_{\mathcal{A}}(s) ds \geq 0. \quad (2.46)$$

A ausência de pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados significa que  $I' = \mathbb{R}$ , i.e, o tensor de Riccati associado  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  está definido em  $\mathbb{R}$ . Agora, a proposição 2.2.30-(ii) junto com a equação (2.46) implicam em  $\theta = 0$ . Pela equação de Raychaudhuri,

$$f_{\mathcal{A}} = \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 = 0.$$

Integrando, a condição (2.45) implica em

$$0 \geq -\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sigma^2(s) ds = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t (-\sigma^2(s)) ds \geq 0,$$

e assim

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sigma^2(s) ds = 0. \quad (2.47)$$

Por sua vez, (2.47) implica na existência de uma sequência  $\{t_k\}$  em  $[0, +\infty)$  tal que  $t_k \rightarrow +\infty$  e com

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-t_k}^{t_k} \sigma^2(s) ds = 0.$$

Afirmamos agora que

$$\int_{-a}^a \sigma^2(s) ds = 0, \quad \text{para todo } a \in (0, +\infty) \Rightarrow \sigma = 0. \quad (2.48)$$

De fato, caso contrário, teríamos

$$\int_{-a}^a \sigma^2(s) ds > 0$$

para algum  $a > 0$ . Para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, teremos  $t_k > a$  e portanto

$$\int_{-a}^a \sigma^2(s) ds \leq \int_{-t_k}^{-a} \sigma^2(s) ds + \int_{-a}^a \sigma^2(s) ds + \int_a^{t_k} \sigma^2(s) ds = \int_{-t_k}^{t_k} \sigma^2(s) ds < \int_{-a}^a \sigma^2(s) ds,$$

uma contradição.

Como  $\sigma = 0$ , por meio da definição de  $\sigma$  em (2.29) ser tomada em um produto interno, vemos que  $\hat{\sigma} = 0$ , e a decomposição (2.28) implica que  $\mathcal{S} = 0$ . Mas então, pela equação de Riccati para  $\mathcal{S}$  segue que  $\mathcal{R}_{\alpha'} = 0$ . ■

## 2.2.5 Tensores de Lagrange Canônicos

Os resultados abstratos sobre tensores de Jacobi e sua equação de Riccati associada que obtemos até agora são de bastante interesse analítico, mas sua importância geométrica permanece em dúvida.

Em particular, qual a relação entre a noção analítica de “ $\mathcal{A}$ -conjugação” a de pontos conjugados/focais ao longo de geodésicas? O próximo exemplo, extraído de [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#), p. 428, ilustra que essa relação pode ser mais indireta do que o esperado.

**Exemplo 2.2.32.** Seja  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  geodésica coespacial ao longo do qual o endomorfismo curvatura é identicamente nulo:  $\mathcal{R}_{\alpha'} = 0$ . Seja  $\{E_1, E_2\}$  referencial ortonormal ao longo de  $\alpha$  gerando  $(\alpha')^\perp$ . Defina um  $(1, 1)$ -tensor transversal  $\mathcal{A}$  em  $\alpha$ , pondo, para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$\mathcal{A}(t)(E_1(t)) = tE_1(t) \text{ e } \mathcal{A}(t)(E_2(t)) = (t - 1)E_2(t).$$

É facilmente verificado que  $\mathcal{A}' = \mathbb{I}$  e  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . Logo,  $\mathcal{A}'' = 0$  e  $(\mathcal{A}')^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}'$ , ou seja,  $\mathcal{A}$  é Lagrangiano. Mais ainda,  $\mathcal{A}(0)(E_1(0)) = 0$  e  $\mathcal{A}(1)(E_2(1)) = 0$ , e portanto  $\alpha(0)$  e  $\alpha(1)$  são pontos  $\mathcal{A}$ -conjugados. Porém, não há pontos conjugados ao longo de geodésicas em  $\mathbb{R}_1^3$ . ◀

O exemplo anterior nos mostra que nem todas as escolhas de tensores de Jacobi tem relevância geométrica. Definimos a seguir as os de importância geométrica (relembre existência e unicidade da proposição [2.2.13](#).)

**Definição 2.2.33 (Tensores de Lagrange Canônicos).** *Assuma que  $0 \in I$ <sup>7</sup>. Os tensores de Lagrange canônicos sobre uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  são definidos da seguinte forma:*

a)  $\mathcal{A}_0$  é o único tensor de Jacobi sobre  $\alpha$  tal que

$$\mathcal{A}_0(0) = 0 \text{ e } \mathcal{A}'_0(0) = \mathbb{I}_{N(0)}. \quad (2.49)$$

b) Seja  $P \subseteq M$  uma subvariedade semi-Riemanniana tal que  $\alpha(0) \in P$  e  $\alpha'(0) \in (T_{\alpha(0)}P)^\perp$ , isto é, se  $\alpha$  é normal a  $P$ , então  $\mathcal{A}_P$  é o único tensor de Jacobi tal que

$$\mathcal{A}_P(0) = \tan_P \text{ e } \mathcal{A}'_P(0) = -S_{\alpha'(0)} \circ \tan_P + \text{nor}_P, \quad (2.50)$$

(onde  $S$  é o operador de Weingarten) se  $\alpha$  é geodésica não luminosa, e adaptamos as definições para seus correspondentes induzidos em  $\overline{\alpha'(0)^\perp}$  se  $\alpha$  é luminosa e  $(M, g)$  Lorentziana.

A importância geométrica dos tensores canônicos é esclarecida no próximo resultado. Até o restante do capítulo,  $P \subseteq M$  denotará uma subvariedade semi-Riemanniana tal que a geodésica  $\alpha$  é normal a  $P$ .

<sup>7</sup>Centramos o intervalo em 0 por conveniência, uma vez que reparametrizações afim de uma geodésica não alteram pontos conjugados/focais.

**Teorema 2.2.34.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica não luminosa (resp. luminosa) e  $0 \in I$ . Então,*

i)  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}_P$  são tensores de Lagrange sobre  $\alpha$ .

ii)  $\text{Im } J_{\mathcal{A}_0} = \{J \in \mathcal{J}_\perp^\alpha \mid J(0) = 0\}$  (resp.  $\{\bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha \mid J(0) = 0\}$ )

iii)  $\text{Im } J_{\mathcal{A}_P} = \{J \in \mathcal{J}_\perp^\alpha \mid J \text{ é } P\text{-Jacobi}\}$  (resp.  $\{\bar{J} \in \mathcal{J}C^\alpha \mid J \text{ é } P\text{-Jacobi}\}$ )

iv) Para  $t_0 \neq 0$  em  $I$ ,

$$\alpha(t_0) \text{ é } \mathcal{A}_0\text{-conjugado} \Leftrightarrow \alpha(t_0) \text{ é conjugado a } \alpha(0) \text{ sobre } \alpha.$$

v) Para  $t_0 \neq 0$  em  $I$ ,

$$\alpha(t_0) \text{ é } \mathcal{A}_P\text{-conjugado} \Leftrightarrow \alpha(t_0) \text{ é ponto focal de } P \text{ sobre } \alpha.$$

*Demonstração.* (i) Como  $\ker \mathcal{A}'_0(0) = \{0\}$ ,  $\mathcal{A}_0$  é não degenerado, e assim Lagrangiano pelo corolário 2.2.16. Agora, por um lado, temos que  $\ker \mathcal{A}_P(0) = (T_{\alpha(0)}P)^\perp$ , enquanto que  $\ker \mathcal{A}'_P(0) \subseteq T_{\alpha(0)}P$ , logo  $\ker \mathcal{A}_P(0) \cap \ker \mathcal{A}'_P(0) = \{0\}$ , e, portanto,  $\mathcal{A}_P$  é também não degenerado. Mais ainda, para quaisquer  $v, w \in \mathcal{N}(0)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_P(0)(v), \mathcal{A}'_P(0)(w) \rangle &= -\langle \tan_P(v), \mathcal{S}_{\alpha(0)}(\tan_P(w)) \rangle \\ &= -\langle \tan_P(w), \mathcal{S}_{\alpha(0)}(\tan_P(v)) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}_P(0)(w), \mathcal{A}'_P(0)(v) \rangle \end{aligned}$$

uma vez que o operador de Weingarten  $\mathcal{S}_{\alpha(0)}$  é autoadjunto. Logo,

$$\langle (\mathcal{A}'_P)^*(0) \circ \mathcal{A}_P(0)(v), w \rangle = \langle \mathcal{A}_P^*(0) \circ \mathcal{A}'_P(0)(v), w \rangle,$$

e, portanto,

$$(\mathcal{A}'_P)^*(0) \circ \mathcal{A}_P(0) = \mathcal{A}_P^*(0) \circ \mathcal{A}'_P(0).$$

Assim, pela proposição 2.2.15, segue que  $\mathcal{A}_P$  é de Lagrange.

(ii) Seja  $J \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ . Assim,  $J$  é um campo de Jacobi (resp. classe) normal, e seja  $V \in \mathfrak{B}(\alpha)$  (que é único pela proposição 2.2.14-(i)) tal que  $J = \mathcal{A}_0(V)$ . Assim,

$$J(0) = \mathcal{A}_0(0)(V(0)) = 0.$$

Reciprocamente, dado um campo (resp. classe) de Jacobi  $J$  com  $J(0) = 0$ , seja  $v = J'(0)$ , e  $V \in \mathfrak{B}(\alpha)$  o único campo (resp. classe) paralelo estendendo  $v$ . Ponha  $\hat{J} = \mathcal{A}_0(V) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ . Então,

$$\hat{J}(0) = \mathcal{A}_0(0)(v) = 0 = J(0) \text{ e } \hat{J}'(0) = \mathcal{A}'_0(0)(v) = v = J'(0),$$

onde concluímos que  $J = \hat{J}$ , mostrando (ii).

(iii) Examinaremos os casos não luminoso e luminoso separadamente.

**Caso 1:**  $\alpha$  geodésica não luminosa.

Seja  $J \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Então,  $J \in \mathcal{J}_{\perp}^{\alpha}$ , e tome o único  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $J = \mathcal{A}_P(V)$ . Assim,

$$J(0) = \mathcal{A}_P(0)(V(0)) = \tan_P(V(0)) \in T_{\alpha(0)}P.$$

Mais ainda,

$$J'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(V(0)) = -\mathcal{S}_{\alpha'(0)} \circ \tan_P(V(0)) + \text{nor}_P(V(0)) \Rightarrow \tan_P(J'(0)) = -\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)),$$

assim  $J$  é um campo  $P$ -Jacobi perpendicular.

Reciprocamente, dado um campo  $P$ -Jacobi  $J$ , seja  $v = J(0) + \text{nor}_P(J'(0)) \in \alpha'(0)^{\perp}$ , e  $V \in \mathfrak{P}(\alpha)$  o único campo paralelo estendendo  $v$ . Tomando  $\hat{J} = \mathcal{A}_P(V) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ , temos,

$$\hat{J}(0) = \mathcal{A}_P(0)(v) = \tan_P(v) = J(0),$$

$$\hat{J}'(0) = \mathcal{A}'_P(0)(v) = -\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)) + \text{nor}_P(J'(0)) = \tan_P(J'(0)) + \text{nor}_P(J'(0)) = J'(0).$$

Portanto,  $J = \hat{J}$ . Isto conclui o caso 1.

**Caso 2:**  $\alpha$  é luminoso.

Seja  $\mathcal{J} \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ . Então,  $\mathcal{J}$  é uma classe de Jacobi, e considere o único  $\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $\mathcal{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V})$ . Tome  $v \in \alpha'(0)^{\perp}$  tal que  $\bar{v} = \mathcal{V}(0)$  em  $\overline{\alpha'(0)^{\perp}}$ . Considere o único campo  $P$ -Jacobi em  $\alpha$  dado por

$$J(0) = \tan_P(v) \text{ e } J'(0) = -\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(\tan_P(v)) + \text{nor}_P(v).$$

Assim, pela definição de  $\mathcal{A}_P$  para o caso luminoso,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(0) &= \mathcal{A}_P(0)(\bar{v}) = \overline{\tan_P(v)} = \overline{J(0)} \\ \mathcal{J}'(0) &= \mathcal{A}'_P(0)(\bar{v}) = \overline{-\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(\tan_P(v)) + \text{nor}_P(v)} = \overline{J'(0)}, \end{aligned}$$

e unicidade das classes de Jacobi implica  $\mathcal{J} = \bar{J}$ .

Reciprocamente, dado  $\mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathcal{C}^{\alpha}$  tal que  $\mathcal{J} = \bar{J}$  para algum campo  $P$ -Jacobi  $J$ . Sejam  $v = J(0) + \text{nor}_P(J'(0)) \in (\alpha'(0))^{\perp}$ , e  $\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(\alpha)$  a única classe paralela tal que  $\mathcal{V}(0) = \bar{v}$ . Então,  $\mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \in \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ .

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_P(\mathcal{V})(0) &= \mathcal{A}_P(0)(\bar{v}) = \overline{\tan_P(v)} = \overline{J(0)} = \mathcal{J}(0), \\ \mathcal{A}_P(\mathcal{V})'(0) &= \mathcal{A}'_P(0)(\bar{v}) = \overline{-\mathcal{S}_{\alpha'(0)}(J(0)) + \text{nor}_P(J'(0))} = \overline{J'(0)} = \mathcal{J}'(0). \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V})$  como desejado.

(iv) e (v) As demonstrações são similares, então faremos o caso que requer um cuidado maior, que é o caso luminoso para o item (v).

Para  $\alpha$  geodésica luminosa, dado  $t_0 \neq 0$  tal que  $\alpha(t_0)$  seja um ponto focal de  $P$  sobre  $\alpha$ . Tome um campo  $P$ -Jacobi  $J$  em  $\alpha$  tal que  $J(t_0) = 0$ . Pelo item (iii), existe uma classe paralela  $\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(\alpha)$  tal que  $\bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V})$ . Em particular,  $\mathcal{V}(t_0) \neq 0_{N(t_0)}$ , mas

$$0_{N(t_0)} = \bar{J}(t_0) = \mathcal{A}_P(t_0)(\mathcal{V}(t_0)),$$

portanto,  $\ker \mathcal{A}_P(t_0)$  é não trivial, e assim,  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado.

Reciprocamente, suponha que  $\alpha(t_0)$  é ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado para algum  $t_0 \neq 0$  em  $I$ , e seja  $\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(\alpha)$  uma classe paralela não nula tal que

$$\mathcal{A}_P(t_0)(\mathcal{V}(t_0)) = 0_{N(t_0)}.$$

Novamente,  $\mathcal{A}_P(\mathcal{V})$  é uma classe de Jacobi, e, por (iii), existe um campo  $P$ -Jacobi  $J$  em  $\alpha$  tal que

$$\bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \implies \bar{J}(t_0) = 0_{N(t_0)}.$$

Assim, existe um número  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $J(t_0) = c\alpha'(t_0)$ . Agora, considere o campo  $P$ -Jacobi sobre  $\alpha$  dado, para todo  $t \in I$ , por

$$\tilde{J}(t) = J(t) - (c/t_0)t\alpha'(t).$$

Por construção,  $\tilde{J}(t_0) = J(t_0) - c\alpha'(t_0) = 0$ . Mais ainda, se  $\tilde{J}$  fosse identicamente nulo, teríamos, pela proposição 2.2.6,

$$0 = \bar{\tilde{J}} = \bar{J} = \mathcal{A}_P(\mathcal{V}) \implies \mathcal{V} = 0,$$

uma contradição. Portanto,  $\tilde{J}$  é não nulo com  $\tilde{J}(t_0) = 0$ , ou seja,  $\alpha(t_0)$  é ponto focal de  $P$ . ■

**Corolário 2.2.35.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  geodésica codefinida em  $(M, g)$  com  $0 \in I$ .*

i) *O conjunto dos pontos conjugados a  $\alpha(0)$  ao longo de  $\alpha$  é um conjunto discreto. Mais ainda, se  $\alpha(t_0)$  é conjugado com  $t_0 \neq 0$ , a corresponde ordem de conjugação é*

$$\text{Conj}(\alpha(0), \alpha(t_0)) \leq \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa.} \end{cases}$$

ii) *Se  $\alpha$  é normal à (necessariamente espacial) subvariedade  $P \subseteq M$ , então o conjunto dos pontos focais a  $P$  ao longo de  $\alpha$  é um conjunto discreto. Ainda, dado um ponto focal  $\alpha(t_0)$*

com  $t_0 \neq 0$ , sua ordem focal é

$$\text{Foc}(P, \alpha(t_0)) \leq \begin{cases} n - 1, & \text{se } \alpha \text{ é não luminosa,} \\ n - 2, & \text{se } \alpha \text{ é luminosa.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Para as afirmações a respeito de conjuntos discretos, o item (i) do teorema 2.2.34 nos garante que  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}_P$  são não degenerados, então segue do teorema 2.2.20 que  $I \setminus I_{\mathcal{A}_0}$  e  $I \setminus I_{\mathcal{A}_P}$  são discretos em  $\mathbb{R}$ . Mas,  $I_{\mathcal{A}_0}$  e  $I \setminus I_{\mathcal{A}_P}$  coincidem com os conjuntos de pontos conjugados a  $\alpha(0)$  e de pontos focais a  $P$  pelos itens (iv) e (v) do teorema 2.2.34, respectivamente.

Para as ordens de conjugação/focal, pelo item (ii) do teorema 2.2.34, temos que  $\mathcal{J}_{0,t_0}^\alpha \subseteq \text{Im } J_{\mathcal{A}_0}$ , e, portanto,

$$\text{Conj}(\alpha(0), \alpha(t_0)) = \dim \mathcal{J}_{0,t_0}^\alpha \leq \dim J_{\mathcal{A}_0} = \mu.$$

Por outro lado, o item (iii) do teorema 2.2.34 nos garante que  $P\mathcal{J}_{t_0}^\alpha \subseteq \text{Im } J_{\mathcal{A}_P}$ , logo,

$$\text{Foc}(P, \alpha(t_0)) = \dim P\mathcal{J}_{t_0}^\alpha \leq \dim J_{\mathcal{A}_P} = \mu \quad \blacksquare$$

**Observação 2.2.36.** Note que a escolha  $t_0 \neq 0$  no teorema 2.2.34-(iv),(v) é necessária, pois tecnicamente  $\alpha(0)$  é sempre um ponto  $\mathcal{A}_0$ -conjugado e um ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado quando  $\dim P < \mu$ , mas não faz sentido caracterizar tal ponto como conjugado a  $\alpha(0)$ , nem como ponto focal. Porém, note que, quando  $\dim P = \mu$ , então  $\alpha(0)$  não é um ponto  $\mathcal{A}_P$ -conjugado. De fato, neste caso,

$$\mathcal{A}_P(0) \equiv \mathbb{I}_{N(0)} \text{ e } \mathcal{A}'_P(0) = -\mathcal{S}_{\alpha'(0)}, \quad (2.51)$$

onde, novamente,  $\mathcal{S}_{\alpha'(0)}$  deve ser interpretado como o operador induzido se  $\alpha$  é luminosa. A equação (2.51) será importante para os próximos resultados.

**Teorema 2.2.37 (Condição suficiente para existência de pontos focais).** *Seja  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$  ( $0 < b \leq +\infty$ ) uma geodésica codefinida e inextensível para  $b$  de uma variedade semi-Riemanniana (necessariamente Riemanniana ou Lorentziana)  $(M, g)$ . Seja  $P \subseteq M$  uma subvariedade espacial  $\mu$ -dimensional (cf. convenção 2.7), tal que  $\alpha$  é normal, i.e.,  $\alpha(0) \in P$  e  $\alpha'(0) \in (T_{\alpha(0)}P)^\perp$ . Assuma:*

- a)  $k = \langle \alpha'(0), \vec{H}_{\alpha(0)} \rangle > 0$ , onde  $\vec{H}_{\alpha(0)}$  é vetor de curvatura média,
- b)  $\text{Ric}(\alpha', \alpha') \geq 0$ .

Então, ou  $b \leq 1/k$  (e em particular  $\alpha$  é incompleta), ou então existe um ponto focal a  $P$  ao longo de  $\alpha$  no intervalo  $(0, 1/k]$ .

*Demonstração.* Podemos assumir  $b > 1/k$ , e estender  $\alpha$  para uma geodésica maximal, que ainda denotaremos por  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $[0, b) \subseteq I$ . Agora, podemos usar o tensor de Riccati maximalmente estendido

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_P} = \mathcal{A}'_P \circ (\mathcal{A}_P)^{-1},$$

definido em  $I' \subseteq I$ . Como  $\dim P = \mu$  implica em  $0 \in I'$  (cf. observação 2.2.36), a expansão escalar associada  $\theta$  está definida em  $t = 0$ . Mais ainda, (2.51) implica em

$$\theta(0) = \text{tr } \mathcal{S} = -\text{tr } \mathcal{S}_{\alpha'(0)} = -\mu k,$$

e assim  $\theta(0) < 0$  devido a hipótese (a). Este fato, junto com o teorema 2.2.34 e a hipótese (b) (cf. observação 2.2.26) significa que podemos usar o corolário 2.2.25 para concluir<sup>8</sup> que existe um ponto focal a  $P$  sobre  $\alpha$  em  $(0, 1/k]$ . ■

Podemos expandir o resultado anterior para geodésicas codefinidas e semi-completas usando a proposição 2.2.30.

**Teorema 2.2.38.** *Considere  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$  uma geodésica codefinida e semi-completa normal à subvariedade espacial  $\mu$ -dimensional  $P \subseteq M$  em  $\alpha(0)$  e sem pontos focais. Assuma que*

$$a) \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f_{\mathcal{A}_P}(s) ds \geq 0, \text{ para } f_{\mathcal{A}_P} \text{ como definida em (2.37), e}$$

$$b) k = \langle \alpha'(0), \vec{H}_{\alpha(0)} \rangle \geq 0.$$

Então  $k = 0$  e  $\mathcal{R}_{\alpha'} = 0$ .

*Demonstração.* Assim como na demonstração do teorema anterior, se estendemos  $\alpha$  para uma geodésica maximal  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $[0, +\infty) \subseteq I$ , então o tensor de Riccati maximalmente estendido

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_P} = \mathcal{A}'_P \circ (\mathcal{A}_P)^{-1},$$

definido em  $I' \subseteq I$  mostra, uma vez que  $\dim P = \mu$ , que temos  $0 \in I'$  (cf. observação 2.2.36), logo a expansão escalar associada  $\theta$  está definida em  $t = 0$ . Mais ainda, (2.51) novamente implica em

$$\theta(0) = \text{tr } \mathcal{S} = -\text{tr } \mathcal{S}_{\alpha'(0)} = -\mu k.$$

Logo  $\theta(0) \leq 0$  pela hipótese (b). Aplicando a proposição 2.2.30, temos, por (a), que

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f_{\mathcal{A}_P}(s) ds \leq \theta(0) \leq 0,$$

<sup>8</sup>Poderíamos ter um problema pois a desigualdade em (b) é válida, a princípio, somente em  $[0, b)$ . Mas, claramente, a demonstração do corolário 2.2.25 depende somente no que acontece para valores maiores que 0, assim não há problemas em usá-la aqui.

e assim  $\theta = 0$ . Em particular,  $k = 0$ , e pela equação de Raychaudhuri, concluímos que  $f_{\mathcal{A}_P} = 0$ . Mas então  $\hat{\sigma} = 0$ , e como  $\hat{\omega} = 0$ , sendo  $\mathcal{A}_P$  de Lagrange, obtemos  $\mathcal{S} = 0$ , e por fim a equação de Riccati implica em  $\mathcal{R}_{\alpha'} = 0$ , como desejado. ■

Para finalizar, temos a seguinte consequência da proposição 2.2.31, que será outra parte fundamental para os teoremas de singularidade.

**Teorema 2.2.39.** *Suponha que  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  é uma geodésica codefinida e completa na variedade Lorentziana  $(M, g)$  tal que*

- i)  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t Ric(\alpha'(s), \alpha'(s)) ds \geq 0$ ;
- ii)  $\mathcal{R}_{\alpha'} \neq 0$  em algum ponto de  $\alpha$ .

Então, existe um par de pontos conjugados ao longo de  $\alpha$ .

*Demonstração.* Os resultados discutidos em [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#) ( 12.12 a 12.18), existe um tensor de Lagrange  $\mathcal{D}$  em  $\alpha$  tal que

- a)  $\mathcal{D}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{D}_s(t)$  e  $\mathcal{D}'(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{D}'_s(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde, para cada  $s > 0$ ,  $\mathcal{D}_s$  é o único tensor de Lagrange sobre  $\alpha$  tal que  $\mathcal{D}_s(0) = \mathbb{I}$  e  $\mathcal{D}_s(s) = 0$ ;
- b)  $\mathcal{D}$  é não singular em  $[0, +\infty)$ .

Pela proposição 2.2.31, em vista das hipóteses (i) e (ii), existe um ponto  $\mathcal{D}$ -conjugado  $\alpha(t_0)$  ao longo de  $\alpha$ , e o item (b) acima implica  $t_0 < 0$ .

Agora, como o conjunto de pontos  $\mathcal{D}$ -conjugados é discreto pelo teorema 2.2.20, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $I' = (t_0, +\infty)$  é um intervalo maximalmente estendido para o tensor de Riccati  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  associado a  $\mathcal{D}$  (cf. seção 2.2.4).

Pela proposição 1.4.2 de [Treude \(2011\)](#) existem  $(1, 1)$ -tensores transversais  $C, P$  sobre  $\alpha|_{I'}$  com  $P$  paralelo tais que

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(t) = C(t) + \frac{P(t)}{(t - t_0)}, \quad \text{para todo } t \in I', \quad (2.52)$$

e  $C, P$  podem ser continuamente estendidos para  $t_0$ . De maneira similar, para cada  $s > 0$ ,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_s}(t) = C_s(t) + \frac{P_s(t)}{(t - t_0)}, \quad \text{para todo } t \in I'. \quad (2.53)$$

O item (a) implica em  $P_s(t_0) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} P(t_0)$ , e como  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  não pode ser estendido para  $t_0$ , devemos ter  $P(t_0) \neq 0$ , onde podemos escolher  $s_0 > 0$  tal que  $P_{s_0}(t_0) \neq 0$ . Mas então  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}_{s_0}}$  não pode ser estendido para além de  $t_0$ , i.e.,  $\alpha(t_0)$  é um ponto  $\mathcal{D}_{s_0}$ -conjugado pelo teorema 2.2.22-(3).

Seja  $v \in \mathcal{N}(t_0) \setminus \{0\}$  para o qual  $\mathcal{D}_{s_0}(v) = 0$ , e  $V \in \mathfrak{B}(\alpha)$  paralelo com  $V(t_0) = v$ . O campo/classe de Jacobi não trivial  $J$  sobre  $\alpha$  dado por  $J = \mathcal{D}_{s_0}(V)$  se anula em ambos  $t_0 < 0$  e  $s_0 > 0$ , portanto  $\alpha(t_0)$  e  $\alpha(s_0)$  são pontos conjugados ao longo de  $\alpha$ , como desejado. ■

## 3 Causalidade

Em linhas gerais, causalidade se traduz matematicamente no problema de descobrir quando é possível conectar pontos em uma variedade Lorentziana por curvas causais. Esse problema se traduz fisicamente, na teoria de relatividade, em determinar quais eventos afetam e/ou são causalmente afetados por quais outros eventos. Veremos que a causalidade estará muito relacionada a propriedades geométricas da variedade Lorentziana subjacente.

Este estudo nos levará, por exemplo, a obter condições suficientes na nossa variedade para conectar pontos por geodésicas de comprimento Lorentziano maximal entre todas as outras possibilidades de curvas causais, que possui um análogo na geometria Riemanniana com o teorema de Hopf-Rinow.

O conteúdo apresentado neste capítulo está quase todo presente em [O’Neill \(1983\)](#), capítulo 14, ou em [Lichtenfelz \(2009\)](#), capítulos 3 e 5. Portanto, faremos neste capítulo demonstrações detalhadas de alguns resultados que não se encontram nessas obras, ou então de alguns resultados adaptados destas referências que serão necessários para nossos fins.

### 3.1 Cones Temporais

Antes de definir matematicamente causalidade, precisamos analisar um pouco mais detalhadamente a estrutura de cada espaço tangente a uma variedade Lorentziana. Cada espaço tangente em um dado ponto possui estrutura de um espaço vetorial Lorentziano; portanto, necessitaremos de ao menos alguns aspectos da descrição abstrata desses espaços no contexto da Álgebra Linear. Propriedades mais gerais de espaço vetoriais Lorentzianos e semi-Riemannianos são revisadas no apêndice [A](#).

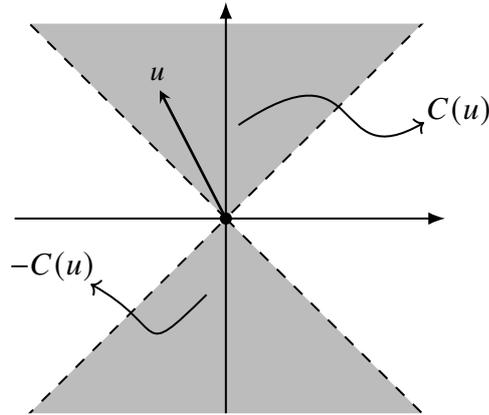
**Definição 3.1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial Lorentziano, e fixe  $u \in V$  vetor temporal. O cone temporal contendo  $u$  é o conjunto*

$$C(u) = \{v \in V \text{ temporal} \mid \langle u, v \rangle < 0\},$$

*e o cone temporal oposto a  $u$  é o conjunto*

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in V \text{ temporal} \mid \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Como  $u^\perp$  é espacial em um espaço vetorial Lorentziano e  $V = \mathbb{R}u \oplus u^\perp$ , dado  $v \in \mathcal{T}$ , podemos escrever  $v = au + z$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  é não nulo e  $z$  espacial é tal que  $\langle u, z \rangle = 0$ . Logo  $\langle u, v \rangle = a\langle u, u \rangle$ , e vemos que  $v$  está exclusivamente em algum dos cones temporais acima associados a  $u$ , o que mostra que o conjunto  $\mathcal{T}$  de todos os vetores temporais é a união disjunta de tais cones temporais.

**Figura 3.1:** Cones temporais.

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Lema 3.1.2.** *Vetores temporais  $v$  e  $w$  de um espaço vetorial Lorentziano pertencem ao mesmo cone temporal se e somente se  $\langle v, w \rangle < 0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $v, w \in V$  temporais e  $C(u)$  cone temporal, onde podemos assumir  $|u| = 1$  pois  $C(u) = C(u/|u|)$ . Escrevendo  $v = au + x, w = bu + y$  com  $x, y$  espaciais e ortogonais a  $u$ , computando  $\langle v, v \rangle$  e  $\langle w, w \rangle$  temos  $|a| > |x|$  e  $|b| > |y|$ . Como  $\langle v, w \rangle = -ab + \langle x, y \rangle$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,  $\langle v, w \rangle < -ab + |a||b|$ . Sem perda de generalidade, assuma  $v \in C(u)$ , logo  $a > 0$ , o que nos dá  $\langle v, w \rangle < a(|b| - b)$ , donde segue que  $w \in C(u)$  se e somente se  $\langle v, w \rangle < 0$ . ■

Segue deste lema que  $C(u) = C(v)$  se e somente se  $v \in C(u)$  se e somente se  $u \in C(v)$ . Os cones temporais no espaço de Minkowski são facilmente descritos: fixado  $y = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}_1^n$ ,  $C(y) = \{x \in \mathbb{R}_1^n \mid x \text{ é temporal e } \langle x, y \rangle_1 < 0\}$

Também vale observar que cones temporais são convexos: dados  $v, w \in C(u)$  e  $\lambda, \mu \geq 0$  com pelo menos um destes números sendo não nulo,  $\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle < 0$ , logo  $\lambda v + \mu w \in C(u)$ .

### 3.1.1 Cone Causal

Para tratar causalidade em vetores luminosos, fazemos uma pequena modificação nos cones temporais.

**Definição 3.1.3.** *Fixado  $u \in V$  vetor temporal, o cone causal contendo  $u$  é o conjunto*

$$\bar{C}(u) = \{v \in V \text{ causal} \mid \langle u, v \rangle < 0\}$$

*e o cone causal oposto a  $u$  é definido como no caso temporal.*

Claramente,  $C(u) \subseteq \bar{C}(u)$ . Os resultados de cones temporais se transferem para cones causais com pequenas modificações. Por exemplo, mostra-se com o mesmo argumento que cones

causais são convexos e que o conjunto de todos os vetores causais é a união disjunta de um cone causal com seu cone oposto. Temos também o análogo do lema 3.1.2.

**Lema 3.1.4.** *Vetores causais  $v$  e  $w$  de um espaço vetorial Lorentziano pertencem ao mesmo cone causal se e somente se  $\langle v, w \rangle < 0$  ou  $v$  e  $w$  são luminosos com  $v = \alpha w$  para  $\alpha > 0$ .*

*Demonstração.* Se  $v$  e  $w$  são colineares a equivalência é imediata. Se não são colineares, a análise é a mesma realizada no caso temporal (a única mudança sendo  $|a| \geq |x|$  e  $|b| \geq |y|$ ), e o resultado segue facilmente. ■

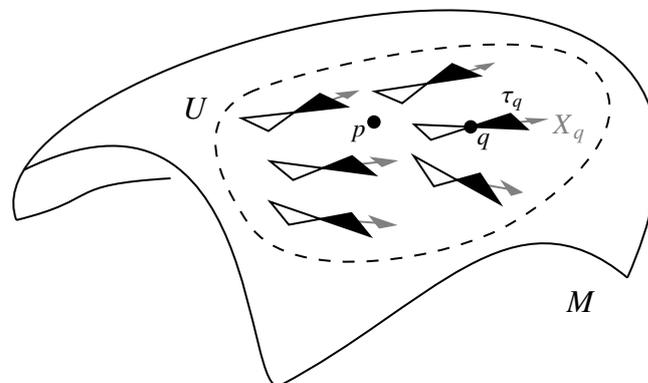
Com esta caracterização do cone causal, vemos que  $\overline{C}(u) = \overline{C(u)} \setminus \{0\}$ , que é fácil de se obter uma vez que o limite de uma sequência convergente de vetores temporais é causal se não for nulo.

## 3.2 Orientação Temporal

Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana. Em cada espaço tangente escolhemos um cone temporal. De forma análoga à noção de orientabilidade em variedades suaves, a noção de orientabilidade temporal está relacionada a uma escolha contínua de tais cones temporais ao longo de toda variedade. Mais precisamente, seja  $\tau$  uma função que a cada ponto  $p \in M$  escolhe um cone temporal  $\tau(p)$  em  $T_p M$ .

**Definição 3.2.1.** *Dizemos que  $\tau$  é suave se para cada  $p \in M$  existir um campo vetorial suave  $X$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que  $X_q \in \tau(q)$  para todo  $q \in U$  (figura 3.2). Tal função  $\tau$  é chamada de orientação temporal. Se  $M$  admite uma orientação temporal, dizemos que  $M$  é temporalmente orientável. O ato de escolher uma orientação temporal específica em  $M$  é orientar temporalmente  $M$ .*

**Figura 3.2:** Orientabilidade temporal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Proposição 3.2.2.** *Se  $M$  é uma variedade Lorentziana conexa e temporalmente orientável, existem exatamente duas orientações temporais em  $M$ .*

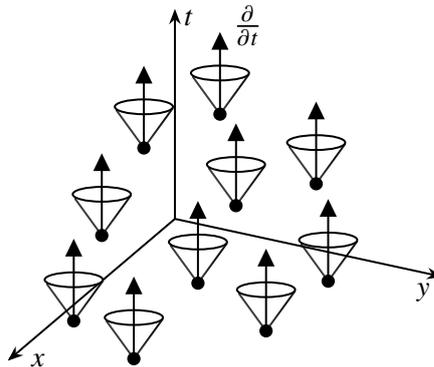
Temos uma caracterização de orientabilidade temporal muito mais útil na prática.

**Lema 3.2.3.** *Uma variedade Lorentziana  $M$  é temporalmente orientável se e somente se existe um campo vetorial suave, temporal e globalmente definido em  $M$ .*

Se existe campo vetorial  $X$  como no lema 3.2.3, a orientação definida por  $X$  é chamada de *orientação temporal induzida*.

**Exemplo 3.2.4.** No espaço de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ , o campo vetorial  $\partial/\partial t$  é um campo temporal, suave e globalmente definido, portanto induz uma orientação temporal em  $\mathbb{R}_1^n$ . A menos de menção contrária, sempre que mencionarmos espaços de Minkowski, será subentendido que ele está munido desta orientação. ◀

**Figura 3.3:** Orientação temporal usual no espaço de Minkowski.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Observação 3.2.5.** (i) Como, para cada cone temporal corresponde apenas um único cone causal, a definição de orientação pode ser feita de maneira completamente análoga utilizando cones temporais. Isto nos permite tratar de causalidade também para vetores luminosos.

(ii) Como curvas suaves por partes também são utilizadas para estudar causalidade, vale aqui observar que, no caso de uma curva  $\gamma : I \rightarrow M$  suave por partes, para ela ser temporal ou causal, não só  $\gamma'(t)$  é temporal ou causal em todo  $I$ , mas também exigimos a condição extra de que, em pontos de quebra  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , os vetores tangentes não trocam de cone temporal. Mais precisamente, denotando por  $\gamma'(t_i^-)$  e  $\gamma'(t_i^+)$  os vetores tangentes em  $t_i$  de  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  e  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ , respectivamente, no caso temporal temos  $g_p(\gamma'(t_i^-), \gamma'(t_i^+)) < 0$ , e a condição análoga para o caso causal.

### 3.3 Relações de Causalidade

Seja  $M$  variedade temporalmente orientável, e induza uma orientação a partir de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temporal.

**Definição 3.3.1.** Para  $p \in M$ , um vetor causal  $v \in T_p M$  é dito ser futuro-dirigido (respectivamente passado-dirigido) se  $g_p(v, X_p) < 0$  (respectivamente  $g_p(v, X_p) > 0$ ). Similarmente, dizemos que uma curva causal  $\gamma : I \rightarrow M$  é futuro-dirigida (respectivamente passado-dirigida) se  $\gamma'(t)$  é futuro-dirigido (respectivamente passado-dirigido) em todo  $I$ .

**Observação 3.3.2.** Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é causal com algum vetor tangente futuro-dirigido, a curva  $\gamma$  será futuro-dirigida. De fato, assumindo primeiramente que  $\gamma$  é suave, se  $t_0 \in I$  é tal que  $g_{\gamma(t_0)}(X_{\gamma(t_0)}, \gamma'(t_0)) < 0$ , se eventualmente o produto escalar trocar de sinal, existirá  $t_1 \in I$  com  $g_{\gamma(t_1)}(X_{\gamma(t_1)}, \gamma'(t_1)) = 0$ . Sendo  $X$  temporal,  $\gamma'(t_1)$  será espacial, contradizendo  $\gamma$  ser causal. Caso  $\gamma$  seja suave por partes, tal fato segue pois os vetores tangentes a um ponto de quebra permanecem no mesmo cone causal.

Utilizaremos uma nomenclatura especial para extensibilidade de curvas neste contexto de causalidade.

**Definição 3.3.3.** Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  curva causal futuro-dirigida, com  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Um ponto limite futuro de  $\alpha$  é um ponto  $p \in M$  tal que toda sequência  $\{t_k\}$  em  $(a, b)$  com  $t_k \rightarrow b$  é tal que  $\alpha(t_k) \rightarrow p$ . A curva  $\alpha$  é dita ser futuro-inextensível se não existe ponto limite futuro. Definimos analogamente ponto limite passado e passado-inextensível em  $a$ . No caso de uma curva  $\beta : (a, b) \rightarrow M$  passado-dirigida, invertamos os papéis das definições em  $a$  e  $b$ . Em qualquer caso, se há inextensibilidade em ambos os extremos, dizemos que a curva é inextensível.

Sendo a variedade  $M$  Hausdorff, sequências convergentes convergem para um único ponto, logo pontos de extensão, se existirem, são únicos.

**Observação 3.3.4.** Para simplificar o texto, dado  $\gamma : [a, b) \rightarrow M$  curva causal, ao dizermos que  $\gamma$  é futuro ou passado-inextensível ficará implícito, a menos de menção contrária, que ela é futuro ou passado-dirigida, respectivamente.

A existência de orientação temporal é fundamental para estabelecer relações entre pontos que modelam as relações causais na física. A partir de agora, a menos de menção contrária, nos restringiremos ao estudo de variedades Lorentzianas conexas que admitem orientação temporal.

**Definição 3.3.5.** Um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana  $(M, g)$  conexa e temporalmente orientada.

Tal condição geométrica não é tão restritiva como aparenta ser a primeira vista, pois para qualquer variedade Lorentziana conexa  $M$  é possível construir um recobrimento duplo  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  que é uma variedade Lorentziana conexa e temporalmente orientável, logo um espaço-tempo localmente isométrico a  $M$  (ver discussão em [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#) após a definição 3.1).

Com os pré-requisitos todos postos, passamos agora para o estudo da causalidade.

**Definição 3.3.6.** *Dados  $p, q \in M$ , definimos as seguintes relações entre  $p$  e  $q$ :*

- (1) *se existe uma curva temporal suave por partes e futuro dirigida de  $p$  até  $q$ , escrevemos  $p \ll q$ ;*
  - (2) *se existe uma curva causal suave por partes e futuro dirigida de  $p$  até  $q$ , escrevemos  $p < q$ ;*
- Também, utilizaremos  $p \leq q$  para denotar  $p < q$  ou  $p = q$ . Tais relações são chamadas de relações de causalidade em  $M$ .*

Evidentemente,  $p \ll q$  implica  $p < q$ . Para um subconjunto qualquer  $A \subseteq M$ , o conjunto

$$I^+(A) = \{q \in M \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \ll q\},$$

é chamado *futuro cronológico* de  $A$ . Similarmente, definimos

$$J^+(A) = \{q \in M \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \leq q\},$$

chamado *futuro causal* de  $A$ . Claramente  $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$ . No caso de um conjunto unitário  $\{p\}$ , denotaremos  $I^+(\{p\})$  por  $I^+(p)$ , e similarmente para  $J^+$ . Neste caso vemos que  $I^+(A) = \bigcup_{p \in A} I^+(p)$ , e o mesmo para  $J^+$ .

Dualmente, trocando a ordem das relações de causalidade, define-se o *passado cronológico*  $I^-(A)$  e *passado causal*  $J^-(A)$ .

**Exemplo 3.3.7 (Causalidade em Minkowski).** Considere um ponto  $p$  em  $\mathbb{R}_1^n$ . Afirmamos que o futuro cronológico de  $p$  é o conjunto

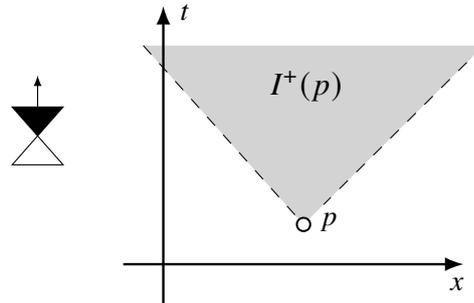
$$I^+(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - p, x - p \rangle_1 < 0 \text{ e } x^1 - p^1 > 0\},$$

ou seja, é o cone temporal futuro em  $\mathbb{R}_1^n$  transladado por  $p$ .

Para mostrar isso, por um lado, a curva  $\rho(t) = t(x - p)$ ,  $t \in [0, 1]$ , é geodésica temporal de  $p$  a  $x$ , e é futuro-dirigida pois  $\langle \rho'(t), \partial/\partial t \rangle_1 = -(x^1 - p^1) < 0$ , o que estabelece a inclusão “ $\supseteq$ ”. Por outro lado, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  curva temporal e futuro-dirigida com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = x$ . Considere as funções  $f(t) = \langle \gamma(t) - p, x - p \rangle_1$  e  $h(t) = \langle \gamma(t) - p, (1, 0, \dots, 0) \rangle = -(\gamma^1(t) - p^1)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Diferenciando, temos  $f'(t) = \langle \gamma'(t), x - p \rangle_1 < 0$  (pois  $\gamma$  é temporal) e  $h'(t) = -(\gamma^1)'(t) < 0$  (pois  $\gamma$  é futuro-dirigida). Pelo teorema do valor médio, existe  $c \in (0, 1)$

com  $h'(c) = h(1) - h(0) = p^1 - x^1 < 0$ . Aplicando novamente o teorema do valor médio para  $f$ ,  $f(1) - f(0) < 0$ , logo  $\langle x - p, x - p \rangle_1 > 0$ , estabelecendo a igualdade.

**Figura 3.4:** Futuro cronológico de um ponto em Minkowski.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

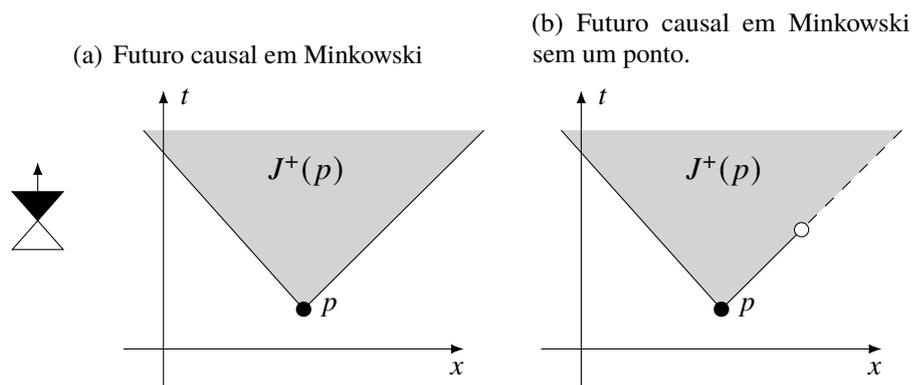
Com uma análise análoga obtemos que o futuro causal de um ponto em  $\mathbb{R}_1^n$  é o conjunto

$$J^+(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - p, x - p \rangle_1 \leq 0 \text{ e } x^1 - p^1 \geq 0\} = \overline{I^+(p)},$$

Ilustrado na figura 3.5-(a).

A relação entre  $J^+(p)$  e  $I^+(p)$  é um tanto delicada em espaços-tempos gerais. Se removemos um ponto de  $\mathbb{R}_1^2$ , para algum  $p$  teremos  $J^+(p) \neq \overline{I^+(p)}$  (figura 3.5-(b)). Este exemplo também mostra que  $J^+(p)$  não é necessariamente fechado. ◀

**Figura 3.5:** Removendo um ponto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\overline{I^+(p)} \neq J^+(p)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

As relações de causalidade são transitivas. Tal fato segue concatenando curvas temporais (ou causais) e observando que em um possível ponto de quebra da concatenação os vetores tangentes não trocam de cone pois as curvas são futuro-dirigidas. Utilizando técnicas variacionais para geometria Lorentziana comentadas no capítulo 2, temos ainda a seguinte relação entre  $\ll$  e  $\leq$ .

**Corolário 3.3.8.** *Se  $p \ll q$  e  $q \leq r$ , ou se  $p \leq q$  e  $q \ll r$ , então  $p \ll r$ .*

Como já observado, o plano de Minkowski com um ponto removido mostra que é possível  $J^+(A) \neq \overline{I^+(A)}$ . Mas como sempre vale  $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$ , é natural se perguntar quais curvas causais estão faltando para “completar”  $J^+(A)$  a partir de  $I^+(A)$ . Um outro corolário da teoria variacional responde este questionamento.

**Corolário 3.3.9.** *Seja  $A \subseteq M$  subconjunto qualquer e  $\alpha$  curva causal futuro-dirigida entre  $A$  e um ponto  $q \in J^+(A) \setminus I^+(A)$ . Então  $\alpha$  é pré-geodésica luminosa que não possui pontos conjugados antes de  $q$  e sua imagem até  $q$  está contida em  $J^+(A) \setminus I^+(A)$ .*

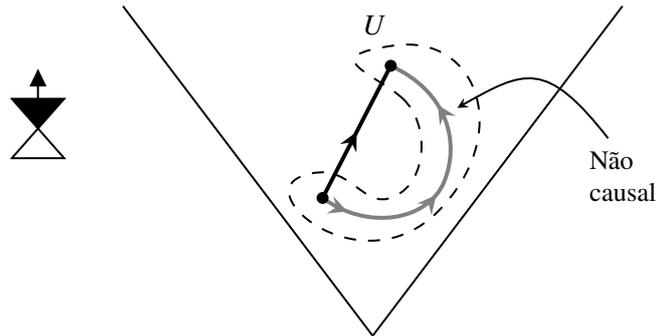
Vemos portanto que  $J^+(A)$  é a união de  $I^+(A)$  com  $A$  e um conjunto de pontos  $p$  que podem ser ligados a  $A$  por geodésicas luminosas sem pontos conjugados antes de  $p$ .

Uma vez que um aberto  $U$  de  $M$  é por si só uma variedade Lorentziana temporalmente orientada, podemos definir relações de causalidade intrínsecas em  $U$  exigindo que as curvas como na definição 3.3.6 tenham imagem em  $U$ . Denotamos tais relações por  $\ll_U, <_U$  e  $\leq_U$ . Com isto, para  $A \subseteq U$  definimos o futuro cronológico de  $A$  intrínseco a  $U$  por

$$I^+(A, U) = \{q \in U \mid \text{existe } p \in A \text{ com } p \ll_U q\},$$

e o análogo para  $J^+(A, U)$  e passados. Segue de imediato desta definição que  $I^+(A, U) \subseteq I^+(A) \cap U$ , mas a outra inclusão não é válida, como ilustrado na figura 3.6.

**Figura 3.6:** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , Um aberto  $U$  pode falhar em conectar dois pontos por curva causal inteiramente contida em  $U$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

No caso do aberto em questão ser convexo, as relações de causalidade intrínsecas se comportam essencialmente como em Minkowski.

**Lema 3.3.10.** *Se  $C$  é um aberto convexo de  $M$ , temos*

- (i) *Para  $p \neq q \in C$ ,  $q \in I^+(p, C)$  se e somente se  $\overrightarrow{pq}$  é temporal e futuro-dirigido (o análogo vale para  $J^+$ ).*
- (ii)  *$I^+(p, C)$  é aberto em  $C$  (logo em  $M$ ) para todo  $p \in C$ .*

- (iii)  $J^+(p, C) = \overline{I^+(p, C)}^C$  (o fecho em  $C$ ).
- (iv) A relação  $\leq_C$  é fechada em  $C$ , isto é, dados  $p, q \in C$  e  $\{p_k\}_{k=1}^\infty, \{q_k\}_{k=1}^\infty$  seqüências em  $C$  com  $p_k \rightarrow p$  e  $q_k \rightarrow q$ , então  $q_k \in J^+(p_k, C)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  implica  $q \in J^+(p, C)$ .
- (v) Uma curva causal  $\alpha$  com imagem em um compacto  $K$  contido em  $C$  é extensível.

**Observação 3.3.11.** Como estamos assumindo  $M$  conexa, pela proposição 3.2.2 existem apenas duas orientações temporais em  $M$ , e observamos que, trocando a orientação fixada em  $M$  as noções de futuro se tornam passado e vice-versa, logo todos os resultados acima e os próximos a serem discutidos continuam válidos, *mutatis mutandis*, para os conjuntos relacionados ao passado. Portanto, muitas vezes nossos resultados serão enunciados e demonstrados apenas para uma direção temporal, com o resultado temporalmente dual implícito na discussão.

Com exceção do item (ii), os outros itens do lema 3.3.10 são falsos em espaços-tempos gerais. Por exemplo, o plano de Minkowski com um ponto removido nos dá contraexemplos para os itens (i), (iii) e (iv) No caso, o item (ii) se generaliza para a seguinte proposição.

**Proposição 3.3.12.** Para  $p, q \in M$  com  $p \ll q$ , existem vizinhanças abertas  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tais que para todo  $p' \in U$  e  $q' \in V$ , temos  $p' \ll q'$ .

Esta proposição nos mostra que a relação de cronologia “ $\ll$ ” é aberta em qualquer espaço-tempo. Em particular,  $I^+(p)$  é aberto, e sendo  $I^+(A)$  união de tais abertos, também é aberto. Também, se  $U$  é aberto,  $I^+(p, U)$  é aberto pelo mesmo argumento restrito para dentro de  $U$ . Utilizando este resultado temos as seguintes propriedades entres os futuros  $I$  e  $J$ .

**Proposição 3.3.13.** Para um subconjunto qualquer  $A \subseteq M$ , temos

- (i)  $I^+(A) = I^+(\bar{A})$ .
- (ii)  $\text{int} J^+(A) = I^+(A)$ .
- (iii)  $\overline{J^+(A)} = \overline{I^+(A)}$ .
- (iv)  $\partial J^+(A) = \partial I^+(A)$ .

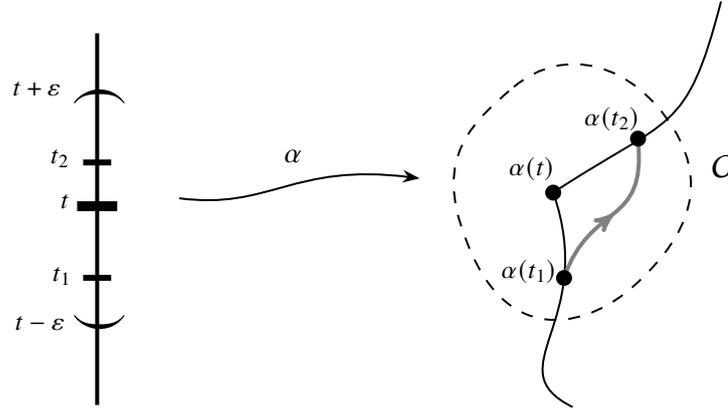
## 3.4 Curvas $C^0$ Causais e o Lema da Curva Limite

O objetivo agora é estender a noção de causalidade para uma certa classe de curvas contínuas. Como veremos mais adiante, o espaço de tais curvas se mostrará muito útil para analisar propriedades do espaço-tempo original.

**Definição 3.4.1 (Curvas  $C^0$  Causais).** Dizemos que uma função contínua  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  é curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida (respectivamente passado-dirigida) se para todo  $t \in I$  existe  $C$  vizinhança convexa de  $\alpha(t)$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

- (i)  $\alpha(I \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \subseteq C$ .
- (ii) Para todo  $t_1, t_2 \in I \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  com  $t_1 < t_2$ , temos  $\alpha(t_1) <_C \alpha(t_2)$ . (respectivamente  $\alpha(t_1) >_C \alpha(t_2)$ .)

**Figura 3.7:** Uma curva  $C^0$  causal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Apesar de nossa primeira definição de causalidade ser feita sobre curvas suaves por partes, não há perda de generalidade trabalhar com curvas  $C^0$  causais (pelo menos no que diz respeito a relações de causalidade) como mostra o próximo resultado.

**Teorema 3.4.2.** Para quaisquer  $p, q \in M$ , são equivalentes,

- (i)  $p < q$ .
- (ii) Existe  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida com  $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$ .

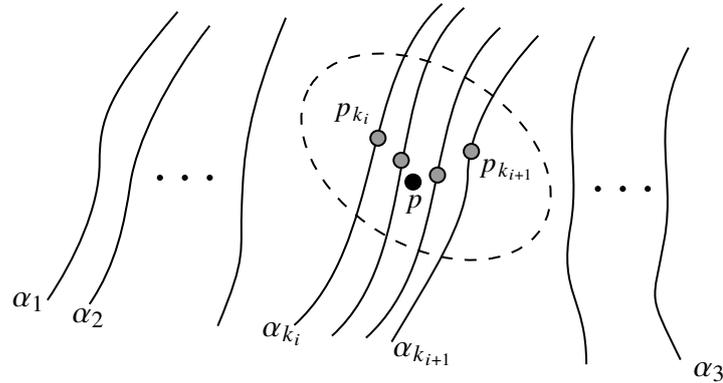
A importância de considerar curvas  $C^0$  aqui é devido a uma noção de limite e convergência entre curvas, que passamos a explorar.

**Definição 3.4.3.** Seja  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  uma sequência de curvas em  $M$ . Um ponto  $p \in M$  é ponto de acumulação da sequência  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  se existe uma subsequência  $\{\alpha_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  em que, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $p_{k_i} \in \text{Im } \alpha_{k_i}$  tal que a sequência  $\{p_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  converge para  $p$ . Neste caso dizemos que a subsequência  $\{\alpha_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  distingue o ponto  $p$ . Uma curva  $\alpha$  é curva limite da sequência  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  quando existe subsequência de  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  que distingue todos os pontos de  $\text{Im } \alpha$ .

Como ilustrado na figura 3.8, uma sequência de curvas distinguir um ponto significa que existe uma subsequência de curvas cujas imagens eventualmente intersectam qualquer vizinhança de tal ponto. No caso da curva limite, em todo ponto da curva, a imagem da subsequência eventualmente intersecta qualquer vizinhança do ponto.

Observamos também que a curva limite é independente de parametrização: se  $\alpha : I \rightarrow M$  é curva limite da sequência  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  e  $f : J \rightarrow I$  é uma função contínua, a curva  $\alpha \circ f$  também é curva limite de  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ , pois  $\text{Im } \alpha \circ f \subseteq \text{Im } \alpha$ .

**Figura 3.8:** As imagens das curvas  $\{\alpha_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  eventualmente intersectam qualquer vizinhança de  $p$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Teorema 3.4.4.** *Toda curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é curva limite de uma sequência  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  com cada  $\alpha_k : [a, b] \rightarrow M$  curva causal, suave por partes e futuro-dirigida.*

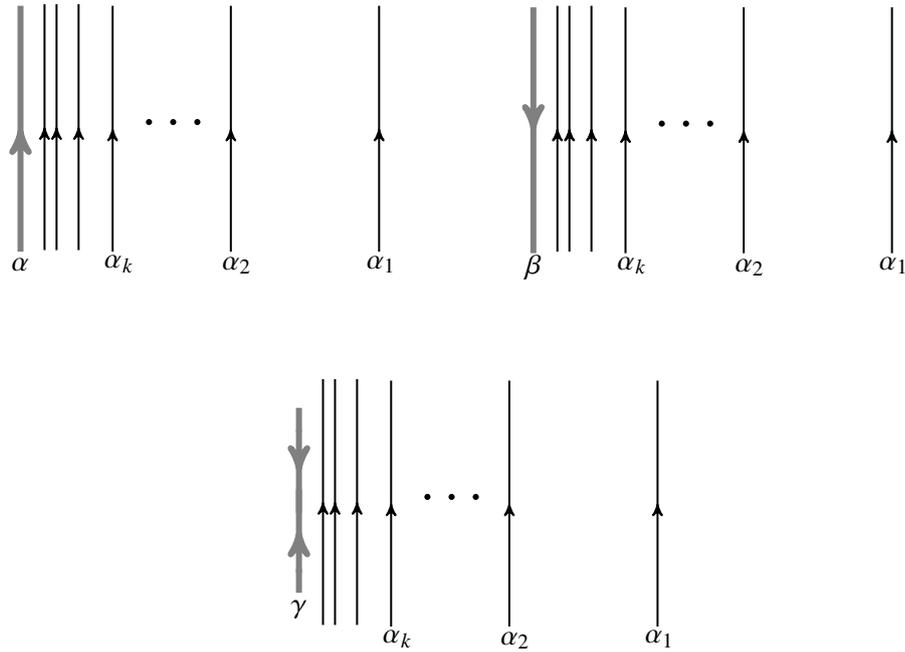
Em contraste com o teorema 3.4.4, a curva limite para uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas não precisa ser necessariamente causal futuro-dirigida, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.4.5.** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$  com orientação temporal usual, considere  $\alpha_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha_k(t) = (t, 1/k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Cada curva  $\alpha_k$  é temporal futuro-dirigida. Uma curva limite para a sequência  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  é  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (t, 0)$ , curva causal futuro-dirigida. Mas, em vista da independência de reparametrização,  $\beta(t) = (-t, 0)$  também é curva limite, que por sua vez é passado-dirigida. Mais ainda, para  $f(t) = \sin(t)$ ,  $\gamma = \alpha \circ f$  é uma outra curva limite, esta sequer possuindo causalidade definida (figura 3.9). ◀

### 3.4.1 O Lema da Curva Limite

Nosso objetivo agora é então investigar em quais condições a curva limite de uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas será também causal futuro-dirigida. Tal problema será respondido no *lema da curva limite*. Sua demonstração é um tanto técnica e longa, necessitando de outros resultados também trabalhosos, portanto enunciaremos os resultados principais seguindo Lichtenfelz (2009), seção 3.3. Antes de enunciar este lema, exibimos uma série outros resultados que cujo objetivo inicial seriam auxiliar na demonstração do teorema principal, porém também serão úteis em outros contextos nesta dissertação.

**Lema 3.4.6.** *Todo ponto  $p \in M$  possui um sistema de coordenadas normais  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  ao redor de  $p$  tal que  $\text{grad } x^1$  é temporal.*

**Figura 3.9:** Ilustração de  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  no exemplo 3.4.5.

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Lema 3.4.7.** *Dado qualquer  $K_0 > 1$  e  $p \in M$ , existe vizinhança  $U$  de  $p$  tal que a métrica plana Lorentziana  $g_0$  que possui elemento de linha, em relação a um sistema de coordenadas normais ao redor de  $p$  (na métrica  $g$ ) da forma*

$$ds_{g_0}^2 = -K_0(dx^1)^2 + \sum_{i=2}^n (dx^i)^2,$$

*é tal que todo vetor causal na métrica  $g$  é temporal na métrica  $g_0$ .*

Uma estrutura Riemanniana auxiliar sobre espaço-tempo será indispensável. Relembramos alguns outros fatos de geometria Riemanniana além dos já mencionados no capítulo 1.

**Definição 3.4.8.** *Seja  $(N, h)$  uma variedade Riemanniana com  $d_h$  métrica induzida por  $h$ . Para  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  curva contínua e  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$  partição de  $[a, b]$ , defina*

$$\ell_P(\gamma) = \sum_{i=1}^k d_h(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

*Dizemos que a curva  $\gamma$  é  $h$ -retificável se o  $h$ -comprimento da curva  $\gamma$ , definido por*

$$L_h(\gamma) = \sup\{\ell_P(\gamma) \mid P \text{ é partição de } [a, b]\},$$

*existir e for finito.*

As seguintes propriedades são imediatas da definição:

- (i)  $L_h$  é independente de reparametrização (homeomorfismos  $[c, d] \rightarrow [a, b]$ ).
- (ii) Para  $x \in [a, b]$ ,  $L_h(\gamma) = L_h(\gamma|_{[a,x]}) + L_h(\gamma|_{[x,b]})$ .

Naturalmente, tal noção de comprimento para curvas contínuas coincide com o comprimento de curvas suaves por partes em uma variedade Riemanniana, ou seja, se  $\gamma : [a, b] \rightarrow N$  é suave por partes, então  $\gamma$  é retificável e

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \sqrt{h_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Sabemos por um argumento de partição da unidade que sempre existem métricas Riemannianas em variedades suaves (ver Lee (2012), proposição 13.3). Em particular podemos analisar a existência de comprimento para curvas causais no espaço-tempo  $M$  em relação a alguma métrica Riemanniana definida em  $M$  e suas consequências.

No caso de um espaço-tempo, apesar de não haver *a priori* uma relação entre sua estrutura Lorentziana e uma estrutura Riemanniana qualquer sobre a variedade, ocorre que as curvas causais  $C^0$  são retificáveis, como mostra o próximo resultado.

**Lema 3.4.9.** *Seja  $h$  uma métrica Riemanniana em  $M$ , e  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida. Então  $\gamma$  é  $h$ -retificável em cada intervalo compacto contido em  $I$ .*

Como o  $h$ -comprimento generaliza o comprimento de arco definido para uma curva suave por partes, faz sentido buscar uma função que desempenha o papel análogo ao comprimento de arco no caso diferenciável. Para  $\gamma : I \rightarrow M$  curva contínua e retificável em cada intervalo fechado de  $I$ , fixado  $t_0 \in I$ , definimos a função  $h$ -comprimento de arco  $S_{t_0} : I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$S_{t_0}(t) = \begin{cases} L_h(\gamma|_{[t_0,t]}), & t \geq t_0 \\ -L_h(\gamma|_{[t,t_0]}), & t \leq t_0, \end{cases}$$

O próximo resultado mostra que curvas  $C^0$  causais também se comportam bem em relação a este comprimento.

**Lema 3.4.10.** *Para  $\gamma : I \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal, futuro-dirigida e retificável em cada intervalo fechado de  $I$ , dado  $t_0 \in I$ , o  $h$ -comprimento de arco  $S_{t_0}$  é uma função contínua e crescente.*

Esta lema garante, em particular, que podemos reparametrizar tais curvas por comprimento de arco, o que dá  $L_h(\gamma|_{[t,s]}) = s - t$ . Estaremos especialmente interessados no caso de curvas inextensíveis.

Para o próximo lema, precisaremos adicionar a hipótese de completude para uma métrica Riemanniana em  $M$ . Tal existência foi provada por Nomizu e Ozeki (1961), e portanto não há perda de generalidade ao se adotar tal métrica em um espaço-tempo.

**Teorema 3.4.11 (Nomizu-Ozeki).** *Toda variedade suave admite uma métrica Riemanniana completa.*

A partir deste ponto, e a menos de menção contrária,  $h$  sempre denotará uma métrica Riemanniana completa em espaços-tempos. Para uma tal métrica, temos então o seguinte resultado.

**Lema 3.4.12.** *Se  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  (onde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) é uma curva  $C^0$ , causal, futuro-dirigida e futuro-inextensível, então  $S_{t_0}([t_0, b)) = [0, +\infty)$  para todo  $t_0 \in I$ . (Análogo para curva passado-dirigida e passado-inextensível.)*

Considerando  $h$  métrica Riemanniana completa em  $M$ , uma curva  $C^0$ , causal e futuro-inextensível, tem reparametrização por  $h$ -comprimento de arco com domínio  $[0, +\infty)$ , e portanto em uma sequência de curvas todas deste tipo podemos reparametrizá-las por comprimento de arco e tornar o domínio único em toda sequência de curvas.

Com estas definições e resultados em mão, podemos enunciar o lema da curva limite, um resultado de extrema importância e que será frequentemente referenciado nos próximos capítulos.

**Teorema 3.4.13 (Lema da Curva Limite).** *Dado  $h$  métrica Riemanniana completa em  $M$ , seja  $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$  sequência de curvas  $C^0$ , causais e futuro-inextensíveis parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco, e tais que  $\gamma_k(0) \rightarrow p$ . Então existe  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-inextensível com  $\gamma(0) = p$ , e uma subsequência  $\{\gamma_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  que, em cada compacto de  $[0, +\infty)$ , converge uniformemente para  $\gamma$  em relação à métrica  $d_h$ . Em particular,  $\gamma$  é curva limite de  $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ .*

**Observação 3.4.14.** (i) Naturalmente temos a versão dual do lema da curva limite trocando futuro por passado.

(ii) Para  $\gamma_k : \mathbb{R} \rightarrow M$  sequência de curvas  $C^0$ , causais, futuro-dirigidas e inextensíveis parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco, aplicamos o lema da curva limite na restrição  $[0, +\infty)$  para obter  $\gamma^+ : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-inextensível onde, passando para subsequência, podemos assumir que  $\gamma_k$  converge  $d_h$ -uniforme para  $\gamma^+$  em compactos de  $[0, +\infty)$ . Novamente aplicamos nesta sequência lema da curva limite em  $(-\infty, 0]$  (reparametrizando para torná-las futuro-dirigidas, e depois retornando à orientação original) para obtermos  $\gamma^- : (-\infty, 0] \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida passado-inextensível, e uma subsequência com convergência  $d_h$ -uniforme em compactos de  $(-\infty, 0]$ . A concatenação  $\gamma = \gamma^+ * \gamma^- : \mathbb{R} \rightarrow M$  é então uma curva  $C^0$ , causal, futuro-dirigida e inextensível tal que a subsequência extraída na segunda etapa converge  $d_h$ -uniformemente para  $\gamma$  em compactos de  $\mathbb{R}$ . Este argumento nos dá uma versão do lema da curva limite para curvas inextensíveis definidas em  $\mathbb{R}$ .

(iii) A questão de convergência uniforme e ser curva limite no lema da curva limite é a menos de subsequência. Em muitas aplicações, as curvas da sequência em si não serão relevantes, pois, por exemplo, buscamos uma sequência de curvas onde vale alguma afirmação, então será

comum abusarmos a notação e não carregarmos os índices de subsequência, ou mesmo dizer que a própria sequência é a que converge uniformemente, sempre tendo-se em mente que tais argumentos são a menos de passagem para uma subsequência quando nada a mais for observado.

## 3.5 Condições de Causalidade

As condições de causalidade, que passamos a discutir agora, terão grande importância neste trabalho. Elas dão algumas restrições geométricas nos espaços-tempos, resultando em algumas propriedades geométricas e topológicas extras na variedade a partir destas restrições, e também tornando-os fisicamente mais razoáveis do ponto de vista da relatividade geral.

### 3.5.1 Cronologia e Causalidade

**Definição 3.5.1.** *Se  $p \in M$  é tal que  $p \notin I^+(p)$ , dizemos que a condição de cronologia vale em  $p$ . Um espaço tempo é dito ser cronológico se a condição de cronologia vale em todos os seus pontos. De maneira análoga definimos a condição de causalidade em  $p$  se  $p \notin J^+(p) \setminus \{p\}$ , e um espaço-tempo é dito causal se vale a condição de causalidade em todos os pontos.*

Em outras palavras, cronologia valer em um ponto significa que não existe curva temporal fechada neste ponto, ou curva causal para a condição de causalidade. Claramente, causalidade implica cronologia, mas o próximo exemplo mostra que a recíproca é falsa.

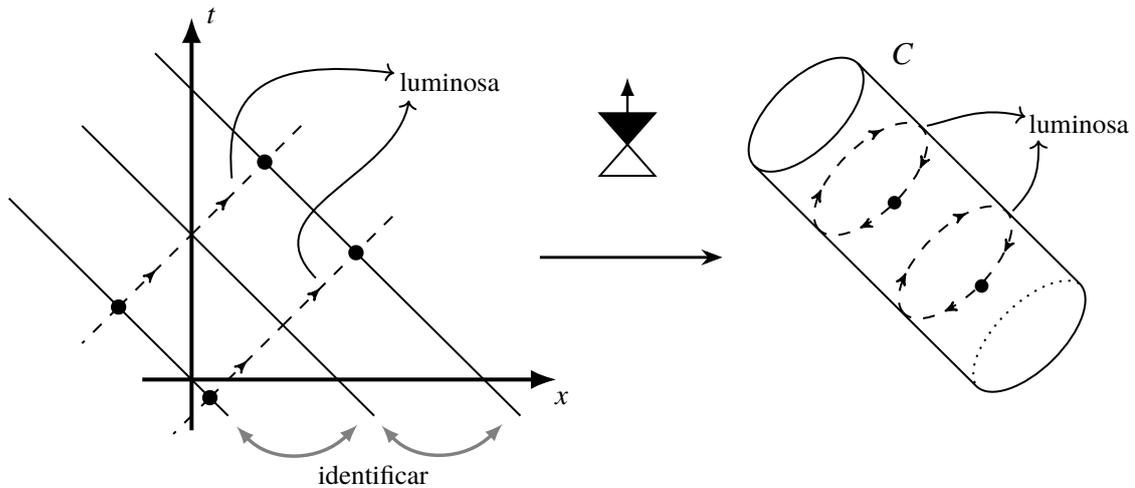
**Exemplo 3.5.2.** Considere o plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ . A ação de  $\mathbb{Z}$  pela isometria  $(t, x) \rightarrow (t + 1, x + 1)$  é propriamente descontínua, logo o quociente de  $\mathbb{R}_1^2$  por esta ação é uma variedade Lorentziana  $C$  localmente isométrica a  $\mathbb{R}_1^2$ . Sendo a reta  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ ,  $\alpha(s) = (t_0 + s, x_0 + s)$  geodésica luminosa em  $\mathbb{R}_1^2$  e  $C$  localmente isométrica ao plano de Minkowski, em todo ponto de  $C$  existe uma geodésica fechada luminosa (figura 3.10), e portanto  $C$  não é causal.

Para ver que  $C$  é cronológico, considere a função  $u : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(t, x) = t - x$ . A função  $\tilde{u}$  induzida em  $C$  está bem definida e é suave. Como  $\text{grad } u = -\partial/\partial t - \partial/\partial x$ ,  $\langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle_1 = 0$ . Sendo  $C$  localmente isométrico a  $\mathbb{R}_1^2$ ,  $\langle \text{grad } \tilde{u}, \text{grad } \tilde{u} \rangle_C = 0$ , e  $\text{grad } \tilde{u}$  é luminoso. Dado  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$  temporal suave por partes e futuro-dirigida em relação a orientação em  $C$  induzida pela orientação usual do plano de Minkowski. Observamos que  $(\tilde{u} \circ \gamma)'(s) = \langle \gamma'(s), \text{grad } \tilde{u} \circ \gamma(s) \rangle_C > 0$  para todo  $s \in [a, b]$ , pois  $\gamma'$  e  $\text{grad } \tilde{u}$  estão em cones causais diferentes, logo  $\tilde{u} \circ \gamma$  é crescente, mostrando que  $\gamma$  não pode ser uma curva temporal fechada em  $C$ , garantido a condição de cronologia. ◀

**Teorema 3.5.3.** *O conjunto de pontos onde a condição de cronologia (resp. causalidade) falha é a união disjunta de conjuntos da forma  $I^+(p) \cap I^-(p)$  (resp.  $J^+(p) \cap J^-(p)$ ). Em particular, o conjunto de pontos onde vale cronologia é fechado.*

Espaços-tempos compactos são em particular pouco interessantes para a relatividade geral, pois sempre haverá algum laço temporal, como mostra o próximo teorema.

**Figura 3.10:** Todo ponto de  $C$  pode ser conectado por geodésica luminosa fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Teorema 3.5.4.** *Um espaço-tempo  $M$  compacto não é cronológico.*

### 3.5.2 Causalidade Forte

**Definição 3.5.5.** *Um aberto  $U \subseteq M$  é dito ser causalmente convexo se  $J^+(U) \cap J^-(U) \subseteq U$ .*

É imediato que tal definição é equivalente à seguinte afirmação. Dados: dado  $p, q \in U$  e  $r \in M$ , se  $p \leq r \leq q$ , então  $r \in U$ . Portanto, toda curva causal com extremos em  $U$  tem imagem contida em  $U$ .

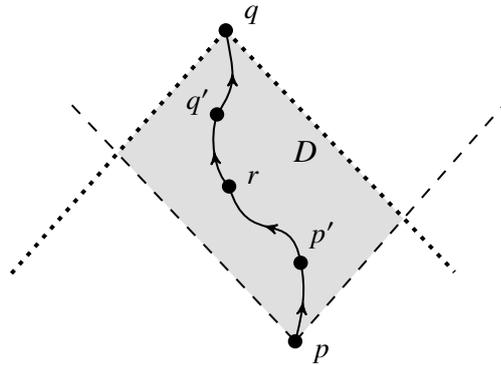
**Exemplo 3.5.6.** Sejam  $p, q \in M$  com  $p \ll q$  e considere o conjunto  $D = I^+(p) \cap I^-(q)$  (tal conjunto é chamado às vezes de *diamante cronológico*; tal nome é inspirado no desenho de tal conjunto em Minkowski, ilustrado na figura 3.11). Para  $p', q' \in D$ , e  $r \in M$  com  $p' \leq r \leq q'$ , temos  $p \ll p'$  e  $q' \ll q$ , logo  $p \ll r \ll q$  pelo corolário 3.3.8, e  $r \in D$ , portanto  $D$  é causalmente convexo.

**Definição 3.5.7.** *Dizemos que a condição de causalidade forte vale em  $p \in M$  se em toda vizinhança aberta  $U$  de  $p$  existir um aberto causalmente convexo  $V$  contendo  $p$  e contido em  $U$ . Se vale causalidade forte em todo ponto de  $M$ , dizemos que  $M$  é fortemente causal.*

**Proposição 3.5.8.** *Vale causalidade forte em um ponto  $p \in M$  se e somente se, para toda vizinhança aberta de  $p$  existe  $V \subseteq U$  aberto contendo  $p$  tal que qualquer segmento de curva causal com extremos em  $V$  fica inteiramente contido em  $U$ .*

Vemos por esta proposição que a condição de causalidade forte falhar em um ponto  $p$  é equivalente a existir uma vizinhança  $U_0$  de  $p$  e uma sequência de curvas causais  $\alpha_k : [a_k, b_k] \rightarrow$

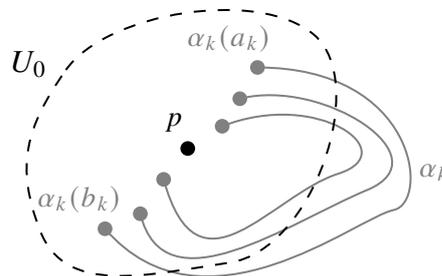
**Figura 3.11:**  $I^+(p) \cap I^-(q)$  é causalmente convexo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

$M$  com  $\alpha_k(a_k)$  e  $\alpha_k(b_k)$  convergindo para  $p$  mas a imagem de todas as curvas  $\alpha_k$  escapam  $U_0$  (figura 3.12). Isto ilustra que, quando falha causalidade forte em um ponto, a causalidade é “quase violada”, no sentido de que conseguimos segmentos de curvas causais com extremos arbitrariamente próximos.

**Figura 3.12:** Violação de causalidade forte.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

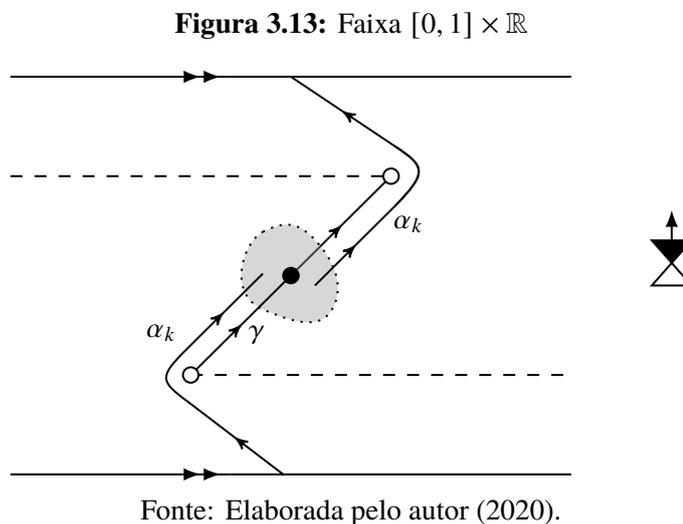
Por outro lado, assumamos que falha a condição de causalidade forte em um ponto  $p \in M$ . Assim, existe um laço causal  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  baseado em  $p$  que não é curva constante. Escolhendo  $t \in (0, 1)$  com  $\gamma(t) \neq p$ , uma vez que  $M$  é Hausdorff, existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  que não contém  $\gamma(t)$ . Com isto, vemos que a sequência de curvas constantes  $\{\gamma_k = \gamma\}$  é uma sequência como na violação de causalidade forte argumentada acima. A contra-positiva deste argumento mostra que *causalidade forte implica causalidade*. A recíproca é falsa, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.5.9.** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , podemos interpretar seu quociente pela ação  $(t, x) \mapsto (t + 1, x)$ , como sendo faixa  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  com os lados  $(0, x)$  e  $(1, x)$  identificados. Nesta

faixa, removemos as semi-retas

$$R_1 = \{(\frac{1}{4}, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \geq \frac{1}{4}\}, \quad R_2 = \{(\frac{3}{4}, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \leq \frac{3}{4}\},$$

que são conjuntos fechados, logo o espaço resultante  $M$  é um espaço-tempo. Devido a escolha das semi-retas removidas, não podemos ligar pontos da faixa por curvas causais suave por partes, e fica claro que tal espaço-tempo é causal. Mas ele não é fortemente causal: considere a geodésica luminosa  $\gamma : [1/4, 3/4] \rightarrow M$ ,  $\gamma(s) = (s, s)$ , que liga os extremos das semi-retas removidas. Em cada ponto da imagem de  $\gamma$  existe vizinhança e uma sequência de curvas causais  $\alpha_k$  com extremos convergindo para o ponto mas a imagem das curvas  $\alpha_k$  escapa da vizinhança (figura 3.13).



**Proposição 3.5.10.** *Seja  $C$  aberto convexo de  $M$ ,  $V \subseteq C$  aberto e  $p \in V$ . Então existem  $p^+, p^- \in V$  tais que  $p \in I^+(p^-, C) \cap I^-(p^+, C) \subseteq V$ .*

Este resultado mostra que um aberto convexo possui intrinsecamente uma estrutura de espaço-tempo fortemente causal, e em particular qualquer espaço-tempo possui localmente uma estrutura fortemente causal.

**Teorema 3.5.11.** *O conjunto de pontos de  $M$  onde vale causalidade forte é aberto.*

Com causalidade forte, há também uma restrição sobre curvas causais inextensíveis terem imagem contidas em compactos, como diz o próximo resultado

**Proposição 3.5.12.** *Se causalidade forte vale em todos os pontos de um compacto  $K \subseteq M$ , então dada qualquer curva  $C^0$ , causal e futuro-inextensível  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) \in K$ , existe  $t_0 \in (0, b)$  tal que  $\alpha(t) \notin K$  para todo  $t_0 < t < b$ .*

**Definição 3.5.13.** *Seja  $\gamma : [a, b) \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e futuro-dirigida. Tal curva é dita ser futuro-aprisionada em um compacto  $K \subseteq M$  se existe  $t_0 \in [a, b)$  tal que  $\gamma(t) \in K$  para todo  $t_0 < t < b$ .  $\gamma$  é parcialmente futuro-aprisionada se existe uma sequência  $t_k \rightarrow b$  com  $\gamma(t_k) \in K$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

Por esta última definição, vemos que a proposição 3.5.12 significa que nenhuma curva causal futuro-inextensível pode estar futuro-aprisionada em um compacto onde pontos vale causalidade forte em todos os seus pontos.

### 3.5.3 Topologia de Alexandrov

Uma outra maneira de analisar causalidade forte é por meio de uma nova topologia que pode ser definida sobre espaços-tempos. Fazemos aqui uma breve análise de tal topologia.

**Proposição 3.5.14.** *A coleção de conjuntos  $\{I^+(p) \cap I^-(q) \mid p, q \in M\}$  formam base para uma topologia em  $M$ , chamada topologia de Alexandrov.*

Sendo cada  $I^+(p) \cap I^-(q)$  aberto na topologia de variedade em  $M$ , vemos que a topologia de Alexandrov é em geral mais grosseira.

**Lema 3.5.15.** *Causalidade forte vale em um ponto  $p \in M$  se e somente se para toda vizinhança aberta  $U$  de  $p$ , existem pontos  $x, y \in M$  tais que  $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq U$ .*

Tal topologia é útil para a causalidade forte devido ao seguinte teorema.

**Teorema 3.5.16.** *As seguintes afirmações são equivalentes em um espaço-tempo  $M$ :*

- (i)  *$M$  é fortemente causal;*
- (ii) *A topologia de variedade em  $M$  e a de Alexandrov coincidem;*
- (iii) *A topologia de Alexandrov é Hausdorff.*

*Demonstração.* Vemos que (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) segue imediatamente do lema 3.5.15, e (ii)  $\Rightarrow$  (iii) é trivial.

Para (iii)  $\Rightarrow$  (i), seja  $p \in M$  e  $U$  vizinhança aberta de  $p$  na topologia de variedade. Considere  $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$  outro aberto contendo  $p$  pré-compacto também na topologia de variedade. Como sua fronteira  $\partial V$  é compacta nesta topologia, é também compacta na topologia de Alexandrov, sendo esta última mais grosseira. Sendo Hausdorff por hipótese, para cada ponto  $q \in \partial V$  encontramos abertos em Alexandrov disjuntos  $A_q$  e  $B_q$  contendo  $p$  e  $q$ , respectivamente. Extraindo uma subcobertura finita de  $\partial V$ , a intersecção das finitas vizinhanças de  $p$  correspondentes é um aberto  $B$  na topologia de Alexandrov que não intersecta  $\partial V$ . Considerando a base de tal topologia, existe um diamante cronológico  $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq B$ , que sendo conexo por caminhos fica contido em  $V$ . Como tal diamante é um aberto causalmente convexo o resultado segue. ■

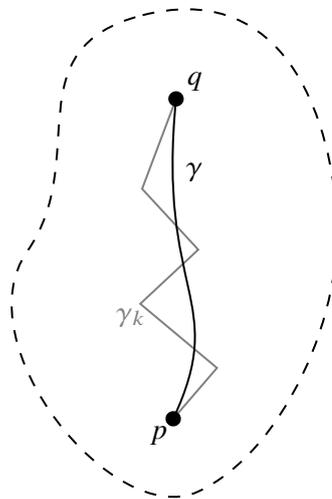
### 3.6 Distância Lorentziana

Em uma variedade Riemanniana completa, uma consequência do teorema de Hopf-Rinow é a existência de geodésicas minimizantes entre quaisquer dois pontos. Uma ferramenta fundamental na prova desse resultado passa pela construção de uma distância métrica na variedade induzida pela métrica Riemanniana, associada a minimização do comprimento de curvas entre dois pontos.

Nesta seção vamos começar a analisar o caso análogo para a geometria Lorentziana. Já sabemos que geodésicas causais maximizam localmente o comprimento Lorentziano, e buscamos condições de causalidade para uma maximização em toda variedade.

A ideia inicial é proceder em analogia à geometria Riemanniana, definindo um análogo Lorentziano de uma distância através da métrica Lorentziana  $g$ . Uma total imitação, com uma distância minimizante entre as curvas causais ligando dois pontos, se mostra de pouca utilidade, pois é possível aproximar qualquer curva temporal entre dois pontos por uma sequência de curvas suave por partes “quase luminosas”, isto é, toda vizinhança de uma curva temporal  $\gamma$  entre pontos  $p$  e  $q$  possui eventualmente curvas  $\gamma_k$  causais de  $p$  a  $q$  com  $L_g(\gamma_k) \rightarrow 0$  (figura 3.14), de forma que o ínfimo é zero.

**Figura 3.14:** Curva quase luminosa “arbitrariamente próxima” de  $\gamma$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Falhando minimização, e também motivados pela maximização local por geodésicas causais, buscamos uma distância que maximize o comprimento Lorentziano entre dois pontos. Ocorre que esta distância não define uma métrica no sentido de espaço métrico, mas ainda assim seremos capazes de estudar várias propriedades do espaço-tempo.

Aqui denotamos por  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  o conjunto dos reais estendidos e  $(M, g)$  é um espaço-tempo qualquer. Seja  $p \leq q$ . Denotamos por  $\Omega_{\mathcal{C}}(p, q)$  o conjunto de curvas  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

causais, futuro-dirigidas e suave por partes com  $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ .

**Definição 3.6.1.** A distância Lorentziana é a função  $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$  dada por

$$d(p, q) = \begin{cases} \sup\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{\mathcal{C}}(p, q)\}, & \text{se } p \leq q, \\ 0, & \text{se } p \not\leq q. \end{cases}$$

Note que tal função não define uma distância no sentido usual, pois ela pode não ser simétrica, e podemos ter  $d(p, q) = +\infty$ , inclusive se  $p = q$ .

Facilmente vemos que  $d(p, q) > 0 \Leftrightarrow q \in I^+(p)$ , pois se há uma curva causal não luminosa de  $p$  a  $q$ , os argumentos variacionais nos garantem existência de curva temporal de  $p$  a  $q$ .

Observamos também que sempre vale  $d(p, p) = 0$  ou  $d(p, p) = +\infty$ , pois se  $d(p, p) > 0$ , há um laço temporal baseado em  $p$ . A curva definida por dar  $n$  voltas em tal laço nos dá uma curva de comprimento arbitrariamente grande, logo  $d(p, p) = +\infty$ . No caso de  $M$  causal, não há laços causais, logo sempre  $d(p, p) = 0$ . Porém, a recíproca não é verdadeira. Para o espaço-tempo não causal construído no exemplo 3.5.2,  $d(p, p) = 0$ , mas há laços causais.

**Proposição 3.6.2 (Desigualdade Triangular Reversa).**  $d(p, q) \geq d(p, r) + d(r, q)$ , para todo  $p, q, r \in M$  com  $p \leq r \leq q$ .

Com tantas diferenças entre a distância Lorentziana e as distâncias métricas usuais, naturalmente analisamos a questão da continuidade de  $d$  em  $M \times M$ . Ocorre que ela não é contínua, como ilustramos no próximo exemplo.

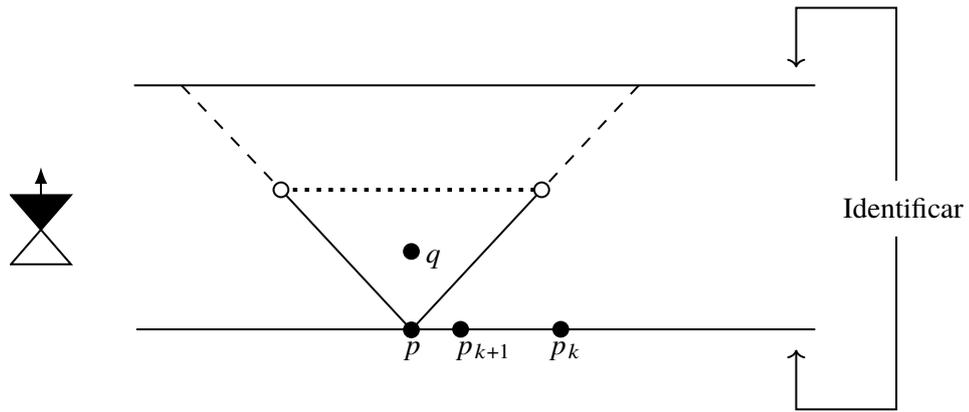
**Exemplo 3.6.3.** Consideramos um cilindro de Lorentz com um segmento de reta removido. Ponha  $M = \{(t, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid t \in [0, 2]\} \setminus \{(1, x) \mid x \in [-1, 1]\}$  com a identificação  $(0, x) \sim (2, x)$  e com métrica de Minkowski usual. Para os pontos  $p = (0, 0)$  e  $q = (1/2, 0)$  e uma sequência  $p_k \rightarrow p$  como na figura 3.15, então  $p_k \in I^+(p_k)$ , logo  $d(p_k, p_k) = +\infty$ . Para  $k$  grande,  $q \in I^+(p_k)$ , logo também temos  $d(p_k, q) = +\infty$ . Por outro lado,  $d(p, q) = 1/2$ , logo  $d(p, q) < \limsup d(p_k, q)$ , violando semicontinuidade superior. ◀

No exemplo acima, o espaço-tempo em questão não é causa, mas encontramos espaços-tempos fortemente causais onde  $d$  não é contínua. Esboçamos um tal exemplo.

**Exemplo 3.6.4.** Considere  $\mathbb{R}_1^2$  com um segmento de reta espacial removido. Tal espaço ainda é fortemente causal. Agora, escolha pontos  $p$  e  $q$  como arranjados na figura 3.16-(a). A região em cinza nesta figura é o conjunto  $J^-(q) \cap J^+(p)$ . Dentro deste conjunto, conseguimos ainda faixas de largura  $\varepsilon$  arbitrariamente pequenas, de forma a encontrar uma sequência de pontos  $(p_k, q_k)$  com distância  $d$  cada vez menor convergindo para  $(p, q)$ .

Por outro lado, da forma que os pontos  $p$  e  $q$  foram configurados no plano, encontramos uma sequência  $\{q_k\}$  convergindo para  $q$  com curvas causais de  $p$  a  $q_k$  tais como na figura

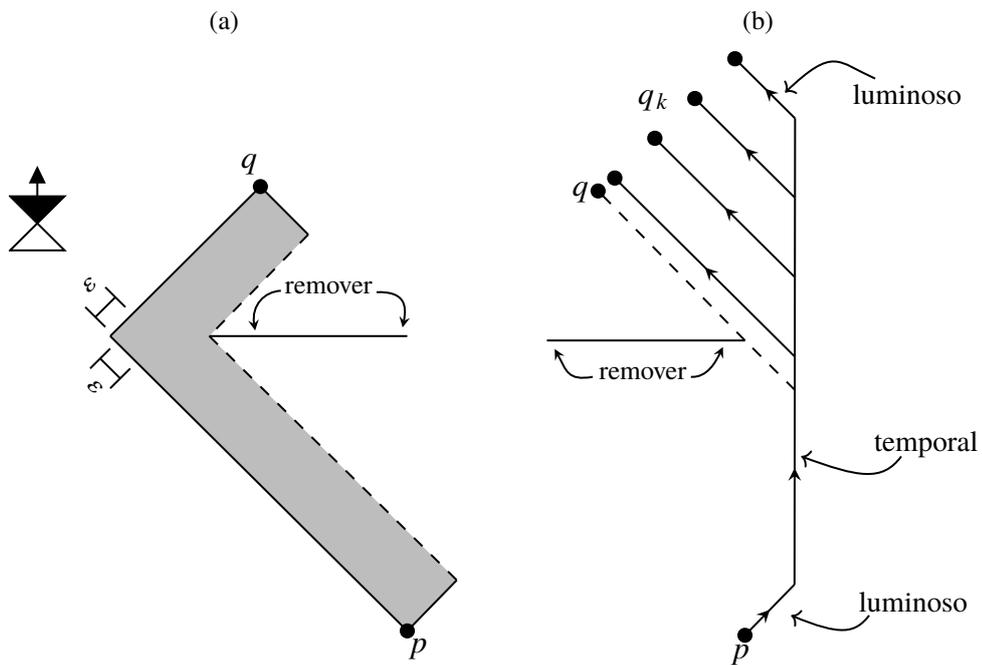
**Figura 3.15:** Espaço-tempo onde  $d$  não é contínua.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

3.16-(a), de forma que a sequência  $\{d(p, q_k)\}$  fica limitada inferiormente por um valor positivo. Assim  $d$  não é contínua neste espaço-tempo. ◀

**Figura 3.16:** Espaço-tempo construído no exemplo 3.6.4.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Os exemplos anteriores mostram que  $d$  não é contínua superiormente, mas mostraremos que sempre vale semicontinuidade inferior. Relembramos sua definição geral, e ao longo dessa dissertação outros resultados sobre semicontinuidade de interesse para nossa teoria.

**Definição 3.6.5.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\bar{\mathbb{R}}$  o conjunto dos reais estendidos. Uma função  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é dita ser semicontínua superiormente (semicontínua inferiormente) em um ponto*

$x_0 \in X$  se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe vizinhança  $U$  de  $x_0$  tal que, para todo  $x \in U$ ,  $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$  ( $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$ ) no caso  $f(x_0) > -\infty$  ( $f(x_0) < \infty$ ) e no caso  $f(x_0) = -\infty$  ( $f(x_0) = \infty$ ) temos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ).

**Teorema 3.6.6.** A distância  $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$  é semicontínua inferiormente.

Associado a distância, de maneira análoga ao caso Riemanniano, temos a noção de maximalidade.

**Definição 3.6.7.** Sejam  $p, q \in M$  com  $p < q$ . Uma curva  $\gamma \in \Omega_{\mathcal{C}}(p, q)$  é dita ser maximal se  $L_g(\gamma) = d(p, q)$ .

**Proposição 3.6.8.** Seja  $\gamma \in \Omega_{\mathcal{C}}(p, q)$  curva maximal com  $p < q$ . Dados  $s, t \in [a, b]$  com  $s < t$ , temos  $L_g(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t))$ .

**Teorema 3.6.9.** Se  $\gamma \in \Omega_{\mathcal{C}}(p, q)$  é curva maximal, com  $p < q$ , então  $\gamma$  é pré-geodésica causal.

### 3.6.1 Distância Lorentziana a Conjuntos

Naturalmente, podemos transferir a noção de distância a um conjunto na teoria de espaços métricos para nossa métrica Lorentziana, levando em conta suas peculiaridades.

**Definição 3.6.10.** Seja  $A \subseteq M$  não vazio. A distância Lorentziana futura de  $A$  é a função  $d_A^+ : M \rightarrow [0, +\infty]$  dada por

$$d_A^+(q) = d(A, q) = \begin{cases} \sup\{d(p, q) \mid p \in A\}, & \text{se } q \in J^+(A), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A distância Lorentziana passada  $d_A^-$  se define de maneira temporalmente dual.

(Uma vez que, caso  $q \notin J^+(A)$ , então  $p \not\prec q$  para todo  $p \in A \Rightarrow d(p, q) = 0$  para todo  $p \in A$ , vemos que  $d_A^+(q)$  é simplesmente o supremo de  $d(p, q)$  em  $A$ .)

De maneira similar à distância entre pontos, a distância de um conjunto nos dá informações sobre causalidade. Por exemplo,  $d_A^+(q) > 0 \Leftrightarrow q \in I^+(A)$ , que segue imediatamente do fato análogo para distância entre pontos. Há também uma versão da desigualdade triangular reversa.

**Proposição 3.6.11.** para  $p, q \in J^+(A)$  com  $p \leq q$ , temos

$$d(A, q) \geq d(A, p) + d(p, q).$$

*Demonstração.* Seja  $a \in A$  tal que  $a \leq p$ . Pela desigualdade triangular reversa,

$$d(A, q) \geq d(a, q) \geq d(a, p) + d(p, q).$$

Tomando o supremo em  $A$ , tem-se  $d(a, p) = 0$  para  $a \in A$  tal que  $a \neq p$ , portanto neste caso o supremo em  $A$  de  $d(a, p)$  é igual ao supremo em  $A \cap J^-(p)$ . ■

**Lema 3.6.12.** *Seja  $X$  um espaço topológico e  $\{f_\lambda : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma coleção de funções semicontínuas inferiormente. Então a função  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  dada por  $g(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$  para todo  $x \in X$  é semicontínua inferiormente.*

*Demonstração.* Fixado  $x_0 \in X$ , caso  $g(x_0) < +\infty$ , seja  $\varepsilon > 0$ . Existe  $\lambda$  tal que  $g(x_0) - \varepsilon/2 < f_\lambda(x_0)$ . Também, por semicontinuidade inferior existe aberto  $U_0$  contendo  $x_0$  tal que  $f_\lambda(x_0) < f_\lambda(x) + \varepsilon/2$  para todo  $x \in U_0$ . Assim

$$g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f_\lambda(x_0) < f_\lambda(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

portanto  $g(x_0) - g(x) < \varepsilon$ , para todo  $x \in U_0$ .

Caso  $g(x_0) = +\infty$ , para qualquer  $A > 0$ , existe  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $f_\lambda(x_0) > A$ . Sendo  $f_\lambda$  semicontínua inferiormente, veja que, no caso finito ou infinito, existe vizinhança aberta  $U_0$  de  $x_0$  tal que  $f_\lambda(x) > A$  para todo  $x \in U_0$  (o caso infinito é imediato da definição, e para o caso finito ponha  $\varepsilon = f_\lambda(x_0) - A$ ). Assim, para qualquer  $x \in U_0$ ,

$$g(x) \geq f_\lambda(x) > A,$$

como  $A > 0$  foi escolhido arbitrariamente, segue que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , e temos semicontinuidade inferior em qualquer caso. ■

**Teorema 3.6.13.**  $d_A^+ : M \rightarrow [0, +\infty]$  é semicontínua inferiormente.

*Demonstração.* Como  $d_A^+(q) = \sup_{p \in A} d(p, q)$ , com cada  $d(p, \cdot)$  semicontínua inferiormente, o resultado é imediato do lema anterior. ■

Observe que, para  $A \subseteq M$ , dado  $p \in A$  e  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  curva causal, futuro-dirigida e suave por partes tal que  $\alpha(a) = p$ ,  $\alpha(b) = q \in J^+(A)$ , se temos

$$L_g(\alpha) = d(A, p) = d_A^+(p),$$

então

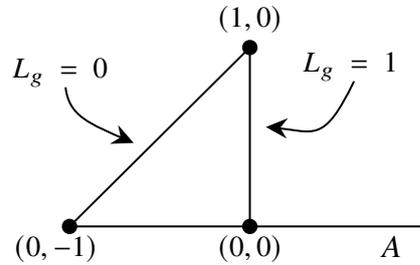
$$d(p, q) = d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq d(A, q) = L_g(\alpha),$$

logo  $\alpha$  é maximizante entre  $p$  e  $q$ , sendo então pré-geodésica causal. Uma tal curva será dita ser *A-maximizante*, ou simplesmente *maximizante*, quando não houver risco de confusão com  $A$ .

Porém, observe também que uma curva pode ser maximal entre  $q$  e um ponto de  $A$  sem ser maximal entre todas as curvas saindo de  $A$  e terminando em  $q$ , que é o que significa a *A-maximalidade*. Por exemplo, considere no plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$  segmento de reta

$A = \{0\} \times [-1, 1]$  e o ponto  $p = (1, 0)$ . Entre o ponto  $p' = (0, -1)$  e  $p$ , a curva maximizante é uma reta luminosa, logo  $d(p', p) = 0$ , mas a curva que maximiza a distância é a reta temporal entre a origem  $0$  e  $p$ , com distância  $d(0, p) = 1 = d(A, p)$  (figura 3.17)

**Figura 3.17:** Reta maximizante de  $A = \{0\} \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}_1^2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

### 3.6.2 Hiperbolicidade Global

Passamos agora para a última condição de causalidade que será relevante nesta dissertação, e que será melhor explorada nas próximas seções.

**Definição 3.6.14.** Um subconjunto  $U$  de um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser globalmente hiperbólico se

(H.1) Causalidade forte vale em todo ponto de  $U$ .

(H.2) Dados  $p, q \in U$  com  $p < q$ ,  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto e está contido em  $U$ .

Quando a própria variedade  $M$  é um conjunto globalmente hiperbólico, dizemos que  $(M, g)$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico <sup>1</sup>.

A necessidade de espaços-tempos globalmente hiperbólicos se dá pois estes são o análogo Lorentziano das variedades Riemannianas completas e sua propriedade de que quaisquer dois pontos podem ser ligados por uma geodésica minimizante. No caso globalmente hiperbólico, como será visto mais adiante, qualquer par de pontos causalmente relacionados pode ser ligado por uma geodésica causal maximal.

**Proposição 3.6.15.** Em um espaço-tempo  $(M, g)$  qualquer, dado  $p \in M$ ,

- (i) Existe  $U$  vizinhança de  $p$  tal que  $(U, g|_U)$  é fortemente causal.
- (ii) Existe vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $(V, g|_V)$  é globalmente hiperbólico.

<sup>1</sup>A definição dada aqui é a exposta na literatura padrão. Bernal e Sánchez (2007) mostraram que podemos trocar “fortemente causal” por “causal” na definição. Mais recentemente, Hounnonkpe e Minguzzi (2019) mostraram que em espaços-tempos não compactos de dimensão maior que dois, é possível remover a condição de causalidade por completo.

Esta proposição mostra que localmente há sempre hiperbolicidade global.

Para espaços-tempos globalmente hiperbólicos, ganhamos também propriedades globais sobre as relações de causalidade que só eram garantidas localmente até agora.

**Teorema 3.6.16.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Temos*

- (i) *a relação  $\leq$  é fechada, ou seja, se  $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$  e  $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$  são sequências em  $M$  com  $p_k \leq q_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $p_k \rightarrow p$ ,  $q_k \rightarrow q$ , então  $p \leq q$ .*
- (ii) *Se  $A \subseteq M$  é compacto, então  $J^+(A)$  e  $J^-(A)$  são fechados.*
- (iii) *Se  $A, B \subseteq M$  são compactos então  $J^+(A) \cap J^-(B)$  é compacto.*

Para finalizar está discussão, mencionamos o resultado principal acerca de espaços globalmente hiperbólicos sobre a existência de geodésicas maximizantes, que será utilizado nas próximas seções. Provaremos tais resultados no capítulo 4, com auxílio de uma topologia no espaço de curvas que nos permitirá obter tais resultados como corolário de um problema de funções reais semicontínuas superiormente em compactos (ver O'Neill (1983), proposição 14.19 e lema 14.21 para uma demonstração que não envolve tais técnicas).

**Teorema 3.6.17.** *Se  $M$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico e  $p < q$ , então existe uma geodésica causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  que é maximal. Também, a distância Lorentziana é finita e contínua.*

## 3.7 Conjuntos Acronais

Exploramos agora subconjuntos de espaços-tempos que possuem boas propriedades associadas a causalidade, e veremos o que estes conjuntos podem nos dizer sobre o espaço-tempo no seu todo. Aqui fixamos  $(M, g)$  espaço-tempo  $n$ -dimensional qualquer.

**Definição 3.7.1.** *Um subconjunto  $A \subseteq M$  é acronal se para quaisquer  $p, q \in A$ , não existe curva temporal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$ . Equivalentemente,  $q \notin I^+(p)$ .*

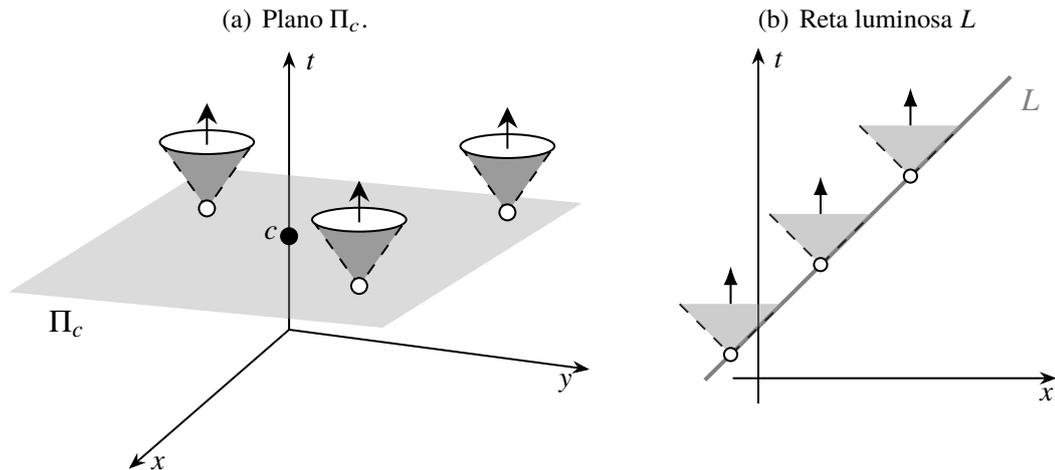
Claramente, qualquer subconjunto de um conjunto acronal também é acronal, e o fecho de um conjunto acronal é acronal, pois caso contrário, sejam  $p, q \in \bar{A}$  com  $p \ll q$ . Pela proposição 3.3.12 existem vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, com  $x \ll y$  para todo  $x \in U, y \in V$ . Mas ambas as intersecções  $A \cap U$  e  $A \cap V$  são não vazias, logo existem  $x', y' \in A$  com  $x' \ll y'$ , contradizendo  $A$  ser acronal.

Conjuntos abertos (não vazios) nunca são acronais, pois considerando qualquer geodésica temporal começando em um ponto do aberto, ela fica inicialmente neste aberto.

**Exemplo 3.7.2.** Em Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$ , os hiperplanos  $\Pi_c = \{x^1 = c\}$  são conjuntos acronais. De fato, Para  $p \in \Pi_c$ , se  $q \in I^+(p)$ , a análise realizada no exemplo 3.3.7 mostra que  $q^1 > p^1 = c$ , portanto  $q \notin \Pi_c$ . ◀

**Exemplo 3.7.3.** O disco fechado  $D = \{(0, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  em  $\mathbb{R}_1^3$  é acronal, sendo subconjunto do plano  $\Pi_0$ . A reta luminosa  $L = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$  em  $\mathbb{R}_1^2$  também é um conjunto acronal, pois não há pontos conjugados em retas, logo pelo teorema 2.1.20 não podemos ligar pontos de  $L$  por curvas temporais. ◀

**Figura 3.18:** Exemplos de conjuntos acronais.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Exemplo 3.7.4.** A reta luminosa em  $\mathbb{R}_1^n$  se generaliza para um espaço-tempo  $M$  qualquer. Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  uma geodésica luminosa sem nenhum par de pontos conjugados. De acordo com as considerações variacionais (teorema 2.1.20) não podemos ligar nenhum par de pontos de  $\gamma$  por uma curva temporal, logo  $\text{Im } \gamma$  é um conjunto acronal. ◀

**Definição 3.7.5.** A borda acronal<sup>2</sup> de um conjunto acronal  $A \subseteq M$  é o conjunto de pontos  $p \in \bar{A}$  com a propriedade que em toda vizinhança aberta  $U$  de  $p$  existe uma curva temporal futuro-dirigida de  $I^-(p, U)$  a  $I^+(p, U)$  dentro de  $U$  sem intersectar  $A$ . Denotamos a borda acronal de  $A$  por  $\text{edge}(A)$ .

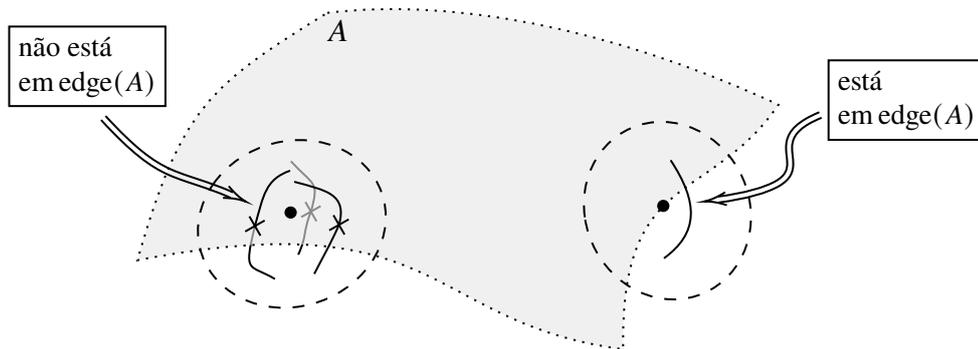
Nos exemplos anteriores, temos  $\text{edge}(D) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  e  $\text{edge}(L) = \emptyset$ .

Relembramos rapidamente alguns fatos topológicos necessários para o estudo da acronalidade.

**Definição 3.7.6.** Um subconjunto  $S \subseteq M$  é dito ser hipersuperfície topológica, ou simplesmente hipersuperfície  $C^0$ , se em todo ponto  $p \in S$  existe carta (topológica)  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \Pi$ , onde  $\Pi$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  (figura 3.20).

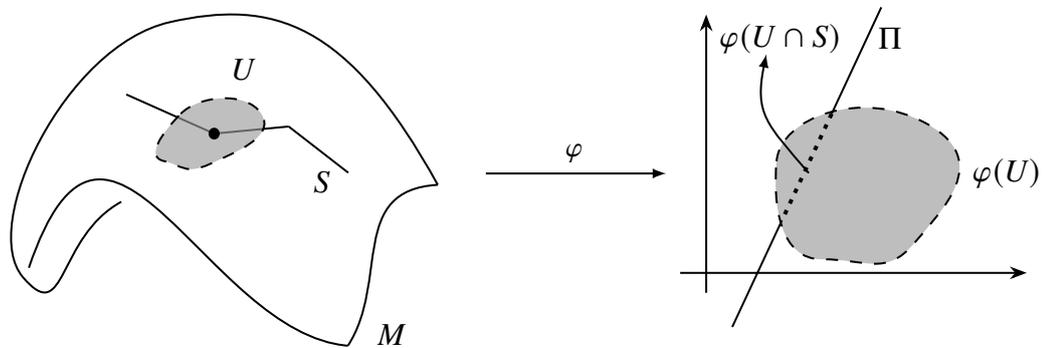
<sup>2</sup>Não confundir com borda topológica ou bordo de uma variedade com bordo.

**Figura 3.19:** Borda acronal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Figura 3.20:** Hipersuperfície  $C^0$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Teorema 3.7.7 (Invariância de Domínio).** *Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  função contínua e injetora. Então  $F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  é aberto e a restrição a imagem  $F : U \rightarrow F(U)$  é um homeomorfismo.*

A demonstração envolve técnicas de homologia e pode ser vista por exemplo em [Hatcher \(2016\)](#), teorema 2B.3. Uma simples análise em coordenadas locais mostra que a invariância de domínio se estende para variedades de mesma dimensão.

**Corolário 3.7.8.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades topológicas de dimensão  $n$ , e  $F : M \rightarrow N$  função contínua e injetora. Então  $F(M)$  é aberto em  $N$  e  $F : M \rightarrow F(M)$  é homeomorfismo.*

**Exemplo 3.7.9.** Mostramos que, para  $p \in \mathbb{R}_1^n$ , os cones de luz  $\Lambda^+(p) = J^+(p) \setminus I^+(p)$  em Minkowski são superfícies topológicas. Uma vez que o próprio  $\mathbb{R}_1^n$  é vizinhança convexa de  $p$ , temos  $\overline{I^+(p)} = J^+(p)$ , portanto

$$\Lambda^+(p) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}_1^n \mid (x^1 - p^1)^2 = (x^2 - p^2)^2 + \dots + (x^n - p^n)^2 \text{ e } x^1 \geq p^1\},$$

onde vemos que, para  $x \in \Lambda^+(p)$ , a primeira coordenada depende continuamente das outras  $n - 1$  coordenadas na forma  $x^1 = h(x^2, \dots, x^n) = p^1 + \sqrt{\sum_{i=2}^n (x^i - p^i)^2}$ . Com isto, a projeção

$\pi_{n-1} : \Lambda^+(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \cap \{x^1 = 0\}$ ,  $\pi_{n-1}(x^1, \dots, x^n) = (0, x^2, \dots, x^n)$  tem inversa contínua  $\phi : \mathbb{R}^n \cap \{x^1 = 0\} \rightarrow \Lambda^+(p)$ ,  $\phi(x^1, \dots, x^n) = (h(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n)$ . ◀

No caso de um conjunto acronal, há uma relação entre hipersuperfícies  $C^0$  e bordas acronais, como mostra o próximo resultado.

**Teorema 3.7.10.** *Um subconjunto acronal  $A \subseteq M$  é uma hipersuperfície  $C^0$  se e somente se  $A \cap \text{edge}(A) = \emptyset$ .*

Como corolário temos, no caso acronal, uma caracterização de hipersuperfícies  $C^0$  fechadas.

**Corolário 3.7.11.** *Um subconjunto acronal  $A \subseteq M$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada se e somente se  $\text{edge}(A) = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Se  $A$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada,  $A = \bar{A}$  e pelo teorema 3.7.10,  $A \cap \text{edge}(A) = \emptyset$ , logo  $\text{edge}(A) \subseteq M \setminus A$ . Mas também  $\text{edge}(A) \subseteq \bar{A} = A$ , e assim  $\text{edge}(A) = \emptyset$ . Por outro lado, sendo  $\text{edge}(A) = \emptyset$ , em particular  $A \cap \text{edge}(A) = \emptyset$  e  $A$  é hipersuperfície  $C^0$ . Também, dado  $p \in \bar{A}$ , como  $p \notin \text{edge}(A)$ , existe  $U$  vizinhança aberta de  $p$  tal que toda curva temporal  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$  de  $I^-(p, U)$  a  $I^+(p, U)$  passando por  $p$  intersecta  $A$ . Pela acronalidade de  $\bar{A}$  este ponto deve ser o próprio  $p$  implicando em  $p \in A$  e portanto  $\bar{A} \subseteq A$ . ■

**Teorema 3.7.12.** *Para  $A \subseteq M$ ,  $\partial I^+(A)$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada e acronal. Ainda, se  $A$  é acronal,  $A \subseteq \partial I^+(A)$ .*

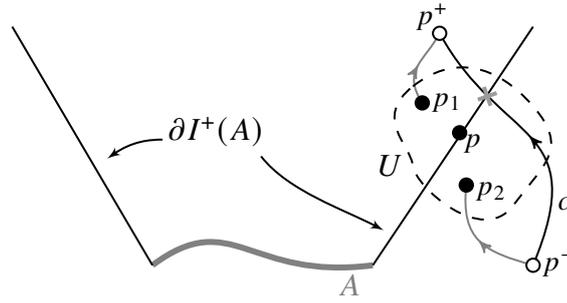
*Demonstração.* Para verificar acronalidade de  $\partial I^+(A)$ , suponha que existam  $p, q \in \partial I^+(A)$  com  $p \ll q$ . Como a relação  $\ll$  é aberta e  $p$  está na fronteira, existe  $a \in A$  com  $a \ll q$ , portanto  $q \in I^+(A) \cap \partial I^+(A)$ , uma contradição pois  $I^+(A)$  é aberto.

Certamente  $\partial I^+(A)$  é fechado e, sendo acronal, para a outra afirmação basta mostrar que  $\partial I^+(A) \cap \text{edge}(\partial I^+(A)) = \emptyset$ . Dado  $p \in \partial I^+(A)$ , sejam  $p^\pm \in I^\pm(p)$  e  $\alpha$  curva temporal e futuro-dirigida de  $p^-$  a  $p^+$ . Novamente,  $\ll$  aberta implica na existência de  $U$  aberto contendo  $p$  tal que  $p^- \ll p' \ll p^+$  para todo  $p' \in U$ . Com  $p$  na fronteira temos  $p_1 \in U \cap I^+(A)$  e  $p_2 \in U \cap (M \setminus I^+(A))$ . Mas então  $p^+ \in I^+(A)$  pois  $p_1 \ll p^+$ , e  $p^- \ll p_2$  implicando  $p^- \in I^-(M \setminus I^+(A)) \subseteq M \setminus I^+(A)$ , sendo  $M \setminus I^+(A)$  conjunto passado (figura 3.21). Por conexidade então  $\alpha$  intersecta  $\partial I^+(A)$ , logo  $p \notin \text{edge}(\partial I^+(A))$ .

Assumindo  $A$  acronal, seja  $p \in A$  e  $U$  vizinhança aberta de  $p$ . Por acronalidade, se  $q \ll p$ ,  $q \notin I^+(A)$ . Logo, para  $p^+ \in I^+(p, U)$  e  $p^- \in I^-(p, U)$ ,  $p^+ \in U \cap I^+(A)$  e  $p^- \in U \cap (M \setminus I^+(A))$ , mostrando que  $p \in \partial I^+(A)$ . ■

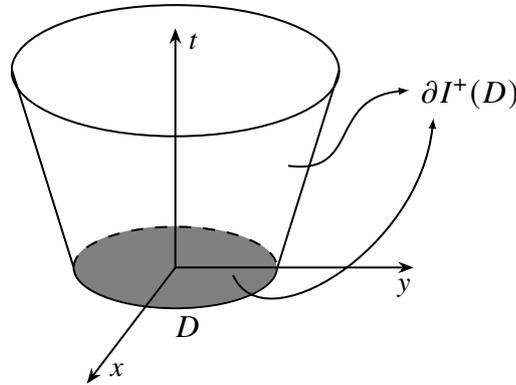
**Definição 3.7.13.** *Um subconjunto (não vazio)  $A$  é dito ser fronteira acronal se existe um conjunto  $S \subseteq M$  tal que  $A = I^+(S)$ .*

**Figura 3.21:** Curva  $\alpha$  intersecta  $\partial I^+(A)$  na demonstração do teorema 3.7.12.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Figura 3.22:**  $\partial I^+(D)$  para o disco  $D$  em  $\mathbb{R}_1^3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Por exemplo, no caso do disco  $D$  em  $\mathbb{R}_1^3$ , como  $J^+(D) = \overline{I^+(D)}$ ,  $\partial I^+(D) = J^+(D) \setminus I^+(D)$ , que aqui é o a união do disco  $D$  com o troco  $t \geq 0$  do cone  $C = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid t = \sqrt{x^2 + y^2} - 1\}$  (figura 3.22).

**Teorema 3.7.14.** *Seja  $A \subseteq M$  subconjunto fechado e  $p \in \partial I^+(A) \setminus A$ . Então existe geodésica  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  luminosa e passado-dirigida começando em  $p$  e com imagem em  $\partial I^+(A)$ , que é passado inextensível sem pontos conjugados a  $p$ , ou possui ponto limite passado em  $A$ , e neste último caso, denotando a extensão para a também como  $\gamma$ , temos*

$$L_g(\gamma) = 0 = d(A, p).$$

*Se  $A$  é acronal, temos ainda no segundo caso que  $\gamma(a) \in \text{edge}(A)$ .*

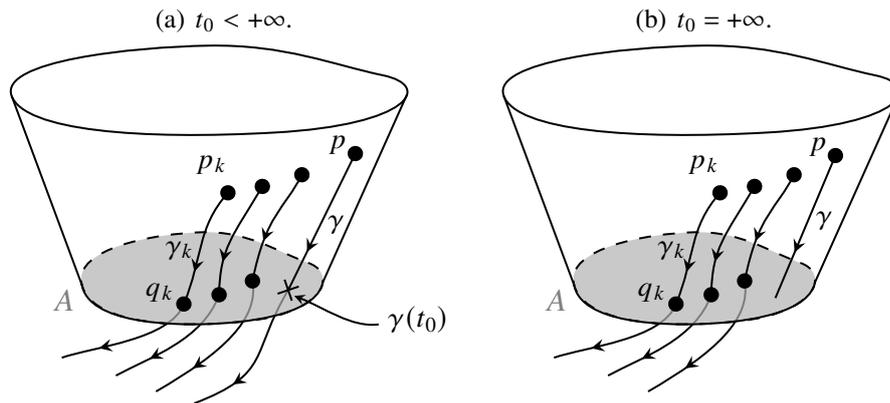
*Demonstração.* Dado  $p \in \partial I^+(A) \setminus A$ , seja  $\{p_k\}_{k=1}^\infty$  sequência em  $I^+(A)$  com  $p_k \rightarrow p$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , escolha  $q_k \in A$  e  $\gamma_k$  curva temporal passado dirigida de  $p_k$  a  $q_k$ . Estendendo cada  $\gamma_k$  além de  $q_k$  para uma curva temporal passado inextensível e reparametrizando por comprimento de arco em relação a uma métrica Riemanniana completa, assumimos cada  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  temporal passado inextensível, com  $\gamma_k(0) = p_k$  e  $\gamma_k(t_k) = q_k$ . Aplicamos o lema da curva limite

(teorema 3.4.13) para obter  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e passado inextensível com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma_k$  convergindo  $d_h$ -uniformemente em compactos para  $\gamma$  (a menos de subsequência).

Vamos primeiro mostrar que  $\gamma$  está inicialmente em  $\partial I^+(A)$ . Podemos passar novamente para subsequência e assumir que  $t_k \rightarrow t_0 \in [0, +\infty]$ . Dado  $0 < t < t_0$ ,  $t_k > t$  eventualmente, logo  $\gamma_k(t_k) \ll \gamma_k(t)$  e temos  $\gamma_k(t) \in I^+(A)$ , e pela convergência,  $\gamma(t) \in \overline{I^+(A)}$ . Mas, caso  $\gamma(t) \in I^+(A)$ , como  $p \in J^+(\gamma(t))$ , temos  $a \ll \gamma(t) \leq p$  para algum  $a \in A$ , e assim  $p \in I^+(A)$ , contradizendo a escolha de  $p$ . Agora, observe que  $t_0 \neq 0$ , pois do contrário, como  $\gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(0) = p$  e  $A$  é fechado,  $p$  estaria em  $A$ , contradizendo novamente a escolha de  $p$ . Com isto, temos  $\gamma([0, t_0)) \in \partial I^+(A)$ .

Considere as duas possibilidades para  $t_0$ , ilustradas na figura 3.23. Se  $t_0 = +\infty$ ,  $\gamma([0, +\infty)) \subseteq \partial I^+(A)$  e  $\gamma$  é passado-inextensível. Se  $t_0 < +\infty$ , por convergência uniforme,  $\gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(t_0)$ , e  $\gamma(t_0) \in A$  pois este é fechado, e vemos que  $\gamma|_{[0, t_0)}$  possui ponto limite passado em  $A$ .

**Figura 3.23:** Construção de  $\gamma$  no teorema 3.7.14.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Em qualquer caso, para  $t, t'$  no domínio em que  $\gamma$  fica em  $\partial I^+(A)$ , se  $t < t'$ ,  $\gamma(t) \leq \gamma(t')$ . Mas pela acronalidade de  $\partial I^+(A)$ ,  $\gamma(t) \not\ll \gamma(t')$ , e segue pelos resultados variacionais (teorema 2.1.19) que  $\gamma$  é pré-geodésica luminosa. No segundo caso temos ainda que, como  $\partial I^+(A)$  é acronal, não há curvas temporais de  $A$  até  $p$ , logo  $d(A, p) = 0 = L_g(\gamma|_{[0, t_0]})$ .

Para a última afirmação, assumindo  $A$  acronal, suponha que  $\gamma(t_0) \notin \text{edge}(A)$ . Seja  $U$  vizinhança aberta de  $\gamma(t_0)$  tal que toda curva temporal de  $I^-(\gamma(t_0), U)$  até  $I^+(\gamma(t_0), U)$  intersecta  $A$ . Escolha  $p^\pm \in I^\pm(\gamma(t_0), U)$  e ponha  $V = I^-(p^+, U) \cap I^+(p^-, U)$ , que é vizinhança aberta de  $\gamma(t_0)$ . Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $t_0 - \varepsilon > 0$  e  $\gamma([t_0 - \varepsilon, t_0]) \subseteq V$ . Da construção de  $\gamma$ , temos  $\gamma(t_0 - \varepsilon) \notin A$ . Agora, existe curva  $\beta$  temporal futuro-dirigida de  $p^-$  a  $p^+$  passando por  $\gamma(t_0 - \varepsilon)$  que intersecta  $A$  pela escolha de  $U$ . Assim, ou  $\gamma(t_0 - \varepsilon) \in I^+(A)$ , que pelas observações feitas na construção de  $\gamma$  é impossível, ou então  $\gamma(t_0 - \varepsilon) \in I^-(A)$ , e neste caso  $\gamma(t_0) \in A \cap I^-(A)$ , o que contradiz a acronalidade de  $A$ . ■

Por este teorema, podemos reparametrizar e obter em cada  $p \in \partial I^+(A) \setminus A$  uma geodésica

luminosa  $\gamma : (a, 0] \rightarrow M$  futuro-dirigida com imagem em  $\partial I^+(A)$ , que termina em  $p$  e, ou é extensível em  $a$  para um ponto em  $A$ , ou é passado inextensível. Tal geodésica é chamada de *gerador geodésico de  $\partial I^+(A)$  em  $p$* .

**Proposição 3.7.15.** *Seja  $A \subseteq M$  fechado e  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  ( $0 \in (a, b)$ ) geodésica luminosa futuro-dirigida tal que sua restrição em  $(a, 0]$  é gerador geodésico de  $\partial I^+(A)$ . Temos*

- (i) *Se existe  $t \in (a, b)$  com  $\gamma(t) \notin \partial I^+(A)$ , então  $\gamma(t) \in I^+(A)$ .*
- (ii) *Para  $t_0, s_0 \in (a, b)$  com  $t_0 < s_0$  e  $\gamma([t_0, s_0]) \subseteq \partial I^+(A)$ , se  $\gamma(t_0)$  e  $\gamma(s_0)$  são pontos conjugados de  $\gamma$  ou existe outro gerador  $\beta$  de  $\partial I^+(A)$  encontrando  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$ , então  $\gamma(t) \in I^+(A)$  para  $t > s_0$ .*

*Demonstração.* (i) Seja  $\gamma(0) = p \in \partial I^+(A)$ . Como  $\gamma((a, 0]) \subseteq \partial I^+(A)$ , se  $\gamma(t) \notin \partial I^+(A)$ , então  $t > 0$ . Mas se  $\gamma(t) \notin \overline{I^+(A)}$ , existe vizinhança aberta  $U$  de  $\gamma(t)$  com  $U \cap \overline{I^+(A)} = \emptyset$ . Dado  $q \in U$  com  $\gamma(t) \ll q$ , seja  $V$  um aberto contendo  $p$  e com  $p' \ll q$  para todo  $p' \in V$ . Para  $p' \in V \cap I^+(A)$ ,  $p' \ll q$ , logo  $q \in I^+(A)$ , contradizendo a escolha de  $q$ , e temos então  $\gamma(t) \in I^+(A)$ .

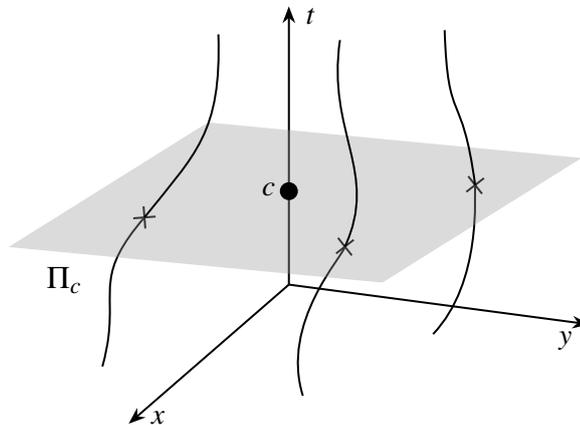
(ii) Em qualquer caso, se  $t > s_0$  podemos ligar  $\gamma(t)$  a  $\gamma(s_0)$  por meio de uma curva temporal (teorema 2.1.20). Então  $\gamma(t) \notin \partial I^+(A)$  por acronalidade, e por (i) segue que  $\gamma(t) \in I^+(A)$ . ■

### 3.8 Hipersuperfícies de Cauchy

**Definição 3.8.1.** *Um conjunto  $S \subseteq M$  é hipersuperfície de Cauchy se toda curva temporal e inextensível intersecta  $S$  exatamente uma única vez.*

**Exemplo 3.8.2.** Os hiperplanos  $\Pi_c$  em Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  (exemplo 3.7.2) são hipersuperfícies de Cauchy.

**Figura 3.24:** Hiperplanos  $\{t = cte.\}$  são hipersuperfícies de Cauchy.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Sendo  $\Pi_c$  acronal, curvas temporais só podem cruzar o hiperplano uma única vez. Para ver que isto sempre acontece com curvas temporais inextensíveis, seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  uma tal curva. Escrevendo  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \dots, \gamma^n(t)) \equiv (\gamma^1(t), \vec{\gamma}(t))$ , precisamos mostrar que  $\gamma^1(t_0) = c$  para algum  $t_0 \in (a, b)$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir  $\gamma$  futuro-dirigida, logo  $(\gamma^1)' > 0$  e  $\gamma^1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é homeomorfismo crescente com sua imagem, que é um intervalo  $I$ . Suponha que  $I$  seja limitado superiormente, com  $s = \sup I$ . Dado  $\{t_k\}$  sequência em  $(a, b)$  com  $t_k \rightarrow b$ , temos  $\gamma^1(t_k) \rightarrow s$ . Agora, de acordo com as desigualdades obtidas no exemplo 3.3.7, temos

$$\|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(t_m)\|_2^2 \leq (\gamma^1(t_k) - \gamma^1(t_m))^2 \xrightarrow{k, m \rightarrow +\infty} 0,$$

e  $\{\vec{\gamma}(t_k)\}$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}^{n-1}$ , portanto convergente para um ponto  $\vec{x}$ . Para outra sequência  $s_k \rightarrow b$ , a mesma análise mostra que  $\vec{\gamma}(s_k) \rightarrow y$ . Mas

$$\|\vec{\gamma}(t_k) - \vec{\gamma}(s_k)\|_2^2 \leq (\gamma^1(t_k) - \gamma^1(s_k))^2 \rightarrow 0,$$

portanto  $\vec{x} = \vec{y}$ , contradizendo  $\gamma$  ser inextensível para o futuro, e concluímos que  $I = \gamma^1(a, b)$  é ilimitada superiormente. De maneira análoga temos ilimitação inferior, logo  $\gamma^1((a, b)) = \mathbb{R}$ , e em particular  $\gamma^1$  atinge o valor  $c$ , mostrando o desejado. ◀

**Observação 3.8.3.** A imagem deste último exemplo sugere uma decomposição do espaço-tempo na presença de uma hipersuperfície de Cauchy, que é de fato geral. Para  $S \subseteq M$  hipersuperfície de Cauchy,  $M$  se decompõe na união de  $S$  com o futuro e o passado cronológico de  $S$ , isto é,

$$M = I^-(S) \cup S \cup I^+(S).$$

Tal decomposição é imediata da definição, pois se  $p \notin S$ , uma curva temporal inextensível passando por  $p$  intersecta  $S$  uma única vez, fazendo-a para o futuro ou passado de  $p$ . Ainda, se a hipersuperfície de Cauchy for acronal, tal união é disjunta.

Vemos na próximas proposições que hipersuperfícies de Cauchy possuem boas propriedades topológicas e de causalidade.

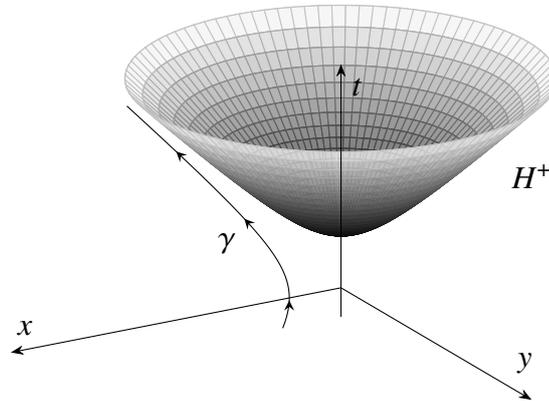
**Proposição 3.8.4.** *Toda hipersuperfície de Cauchy é hipersuperfície  $C^0$  fechada e acronal.*

A recíproca desta proposição é falsa, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.8.5.** Em Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ , considere o hiperboloide  $H^+ = \{-t^2 + x^2 + y^2 = -1, t \geq 0\}$ . Sendo valor regular da função  $f(t, x, y) = -t^2 + x^2 + y^2$ ,  $H^+$  é hipersuperfície suave e fechada.  $H^+$  também é acronal. Isto é facilmente visto pois, se  $\alpha$  é curva temporal futuro-dirigida começando em  $H^+$ , ela está em particular dentro do cone temporal  $C^+$  de  $\mathbb{R}_1^3$  centrado na origem. Como  $\text{grad } f = -t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$  é temporal e futuro-dirigido em  $C^+$ , temos  $(f \circ \alpha)' = g(\text{grad } f \circ \alpha, \alpha') < 0$ , portanto  $f \circ \alpha$  é estritamente decrescente e não podemos ter  $f \circ \alpha(s) = -1$  para  $s > 0$ .

Mas  $H^+$  não é hipersuperfície de Cauchy: a curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\gamma(s) = (\sinh(s), 0, \cosh(s))$  é temporal, futuro-dirigida e inextensível, tendo comprimento Lorentziano infinito, porém nunca encontra  $H^+$  (figura 3.25), uma vez que  $f \circ \gamma(s) = -1$ . ◀

**Figura 3.25:** A curva  $\gamma$  não intersecta o hiperboloide  $H^+$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Proposição 3.8.6.** *Seja  $C \subseteq M$  subconjunto fechado e  $\alpha$  uma curva causal e passado-inextensível começando em um ponto  $p \in M$ . Suponha que a curva  $\alpha$  não encontra  $C$ . Então*

- (i) *Se  $p_0 \in I^+(p, M \setminus C)$  existe curva temporal e passado-inextensível começando em  $p_0$  que não intersecta  $C$ .*
- (ii) *Se  $\alpha$  não é pré-geodésica luminosa sem pontos conjugados, existe curva temporal e passado-inextensível começando em  $p$  e que não intersecta  $C$ .*

**Teorema 3.8.7.**  *$S \subseteq M$  é hipersuperfície de Cauchy se e somente se é acronal e toda curva causal inextensível intersecta  $S$ .*

Para o próximo resultado, precisamos revisar alguns fatos sobre curvas integrais e fluxos de campos suaves.

**Lema 3.8.8 (O’Neill (1983), lema 1.56).** *Seja  $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ ,  $b < +\infty$ , curva integral de um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . São equivalentes:*

- (i)  *$\alpha$  não é curva integral maximal, ou seja, podemos estender  $\alpha$  para uma curva integral de  $X$  em um intervalo maior  $[0, b + \varepsilon)$ .*
- (ii)  *$\alpha$  é extensível como curva contínua.*
- (iii)  *$\text{Im } \alpha$  está contida em um conjunto compacto de  $M$ .*
- (iv) *Existe uma sequência  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  em  $[0, b)$  com  $t_k \rightarrow b$  tal que  $\{\alpha(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$  converge.*

**Lema 3.8.9.** *Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos:*

- (i) Para  $\Phi : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  fluxo local de  $X$ , dado  $p \in U$ , se existe uma seqüência  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  em  $(-\delta, \delta)$  com todo  $t_k \neq 0$ ,  $t_k \rightarrow 0$  e tal que  $\Phi(p, t_k) = p$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então  $X(p) = 0$ .
- (ii) Se uma curva integral  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$  de  $X$  é continuamente extensível com ponto limite  $p$ , então  $X(p) = 0$ .

**Corolário 3.8.10.** *Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vetorial temporal e futuro-dirigido, todas as suas curvas integrais maximais são temporais, futuro-dirigidas e inextensíveis.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  uma curva integral maximal do campo  $X$ . Se  $b < \infty$  e  $\alpha$  é continuamente extensível em  $b$ , então ela é extensível para  $[0, b + \varepsilon)$  como curva integral pelo lema 3.8.8, contradizendo sua maximalidade. Se  $b = +\infty$  e  $\alpha$  é extensível com ponto limite  $p$ , pelo lema 3.8.9-(ii), temos que  $X(p) = 0$ , um absurdo pois  $X$  é temporal. De maneira análoga se mostra a inextensibilidade em  $a$ . ■

**Lema 3.8.11.** *Em uma variedade Riemanniana completa  $(N, h)$ , toda curva suave inextensível  $\gamma : [0, b) \rightarrow N$  possui comprimento  $L_h(\gamma)$  infinito. Em particular, se  $\gamma$  tem velocidade unitária,  $b = +\infty$ .*

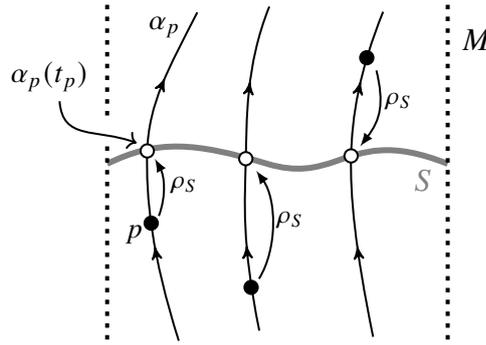
Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vetorial temporal no espaço-tempo  $M$  e fixada métrica Riemanniana completa, podemos dividir  $X$  por seu comprimento em tal métrica. Isto não altera sua causalidade e, pelo lema 3.8.11, todas as suas curvas integrais tem domínio  $\mathbb{R}$ . Pelo corolário 3.8.10, suas curvas integrais são inextensíveis tanto para o passado quanto para o futuro. Estabelecemos então que *todo espaço-tempo admite um campo vetorial temporal suave e completo, com curvas integrais inextensíveis.*

**Teorema 3.8.12.** *Seja  $S \subseteq M$  hipersuperfície de Cauchy. Então*

- (i)  $S$  é conexa.
- (ii) Se  $T \subseteq M$  é outra hipersuperfície de Cauchy,  $T$  é homeomorfa a  $S$ .

*Demonstração.* Nosso primeiro passo é construir uma retração  $\rho_S : M \rightarrow S$  que auxiliará na análise de (i) e (ii), mas que por sí só importante será importante em outros resultados. Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo vetorial completo, temporal e futuro-dirigido,  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  seu fluxo global suave. Como todas as curvas integrais de  $X$  são temporais, futuro-dirigidas e inextensíveis, elas intersectam a hipersuperfície de Cauchy  $S$  em um único ponto. Assim, dado  $p \in M$  e  $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$  curva integral começando em  $p$ , existe um único  $t_p \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha_p(t_p) \in S$ . Fica então bem definida a função  $\rho_S : M \rightarrow S$ ,  $\rho_S(p) = \alpha_p(t_p)$  (figura 3.26). Para  $p \in S$ ,  $\rho_S(p) = \alpha_p(0) = p$ , portanto  $\rho_S|_S = \text{Id}_S$  e  $\rho_S$  é sobrejetora.

Afirmamos que  $\rho_S$  é função contínua e aberta, e em particular é uma retração. De fato, para  $\Phi_S : S \times \mathbb{R} \rightarrow M$  restrição de  $\Phi$  a  $S \times \mathbb{R}$  hipersuperfície  $C^0$  de  $M \times \mathbb{R}$ , temos que  $\Phi_S$  é contínua em relação a topologia de subespaço. Observe que, dado  $(p, s) \in S \times \mathbb{R}$

**Figura 3.26:** Construção de  $\rho_S$  no teorema 3.8.12.

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

e pondo  $q = \Phi_S(p, s) = \alpha_p(s)$ , temos  $\rho_S(\Phi_S(p, s)) = \alpha_q(t_q) = \Phi(q, t_q)$ . Por outro lado,  $q = \alpha_p(s) \Rightarrow \alpha_q(t) = \alpha_p(s + t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e em particular  $\alpha_p(s + t_q) = \alpha_q(t_q) \in S$ . Como  $p \in S$ , devemos ter  $s + t_q = 0$ , o que dá

$$\rho_S(\Phi_S(p, s)) = \Phi(q, -s) = \Phi(p, s - s) = \Phi(p, 0) = p,$$

para qualquer  $(p, s) \in S \times \mathbb{R}$ , mostrando que  $\rho_S \circ \Phi_S = \pi_S$ , a projeção canônica de  $S \times \mathbb{R}$  em  $S$ . Observe que  $\Phi_S$ , além de ser contínua, é injetora: dados  $(p, s), (p', s') \in S \times \mathbb{R}$  com  $\Phi_S(p, s) = \Phi_S(p', s')$ , a composição com  $\rho_S$  nos dá  $p = p'$ , e então  $\Phi_S(p, s) = \Phi_S(p, s')$ . Pondo  $q = \alpha_p(s) = \alpha_p(s')$ , novamente temos  $\alpha_q(t) = \alpha_p(s + t) = \alpha_p(s' + t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular, aplicando  $\alpha_q$  em  $-s$  e  $-s'$ ,  $p = \alpha_p(s - s')$ . A acronalidade de  $S$  implica  $s = s'$ . Por invariância de domínio (corolário 3.7.8),  $\Phi_S(S \times \mathbb{R})$  é aberto em  $M$  e  $\Phi_S$  é homeomorfismo com sua imagem, que é na verdade todo  $M$ , pois, para todo  $p \in M$ ,

$$\Phi_S(\alpha_p(t_p), -t_p) = \Phi(\Phi(p, t_p), -t_p) = \Phi(p, 0) = p.$$

Sendo  $\Phi_S : S \times \mathbb{R} \rightarrow M$  homeomorfismo, temos  $\rho_S = \pi_S \circ \Phi_S^{-1}$ , uma composição de funções contínuas e abertas.

Imediatamente, sendo  $\rho_S : M \rightarrow S$  contínua e sobrejetora com  $M$  conexa,  $S$  é conexa, mostrando (i). Para (ii), seja  $T \subseteq M$  outra hipersuperfície de Cauchy. A restrição  $\rho_S|_T : T \rightarrow S$  é contínua. Também é bijetora, pois dado  $p \in S$ , sendo  $T$  e  $S$  hipersuperfícies de Cauchy e usando a unicidade de curvas integrais, existe um único  $q \in T$  cuja curva integral  $\alpha_q$  intersecta  $S$  no ponto  $p$ . Invariância de domínio novamente garante que  $\rho_S|_T$  é homeomorfismo. ■

**Corolário 3.8.13.** *Seja  $S \subseteq$  hipersuperfície de Cauchy e  $\rho_S : M \rightarrow S$  como definida na demonstração do teorema 3.8.12. Se  $\Sigma \subseteq M$  é hipersuperfície  $C^0$  compacta e acronal, então a restrição  $\rho_S|_\Sigma : \Sigma \rightarrow S$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Como na demonstração do teorema 3.8.12, a unicidade de curvas integrais e acronalidade garantem que  $\rho_S|_\Sigma$  é injetora. Por invariância de domínio,  $\rho_S|_\Sigma(\Sigma)$  é aberto em

$S$  e  $\rho_S|_\Sigma$  é homeomorfismo com sua imagem. Sendo  $\Sigma$  compacto,  $\rho_S|_\Sigma(\Sigma)$  é em particular fechado em  $S$ , que é conexo pelo teorema 3.8.12-(i), portanto  $\rho_S|_\Sigma(\Sigma) = S$  e  $\rho_S|_\Sigma : \Sigma \rightarrow S$  é homeomorfismo. ■

**Definição 3.8.14.** Um subconjunto  $A \subseteq M$  é dito ser acausal se não existe curva causal ligando pontos de  $A$ , ou equivalentemente, se para todo  $p, q \in A$ ,  $p \not\prec q$ .

A condição de acausalidade é em geral mais forte que acronalidade. Por exemplo, o conjunto formado por uma reta luminosa em  $\mathbb{R}_1^2$  não é acausal, mas é acronal. Definimos uma *hipersuperfície de Cauchy parcial* como uma hipersuperfície  $C^0$  fechada e acausal. No caso de hipersuperfícies *espaciais* (suaves), temos o seguinte resultado.

**Lema 3.8.15.** Toda hipersuperfície  $S \subseteq M$  acronal e espacial também é acausal.

*Demonstração.* Caso  $S$  não seja acausal, existiriam  $p, q \in S$  com  $p < q$ . Para  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  curva causal entre  $p$  e  $q$ , como  $p \not\prec q$ ,  $\alpha$  é geodésica luminosa normal a  $S$  em  $p$  (teorema 2.1.20), uma contradição com  $T_p S$  ser subespaço de codimensão 1 e espacial em  $T_p M$ . ■

Naturalmente, hipersuperfícies espaciais não precisam ser sequer acronais.

**Exemplo 3.8.16.** Para o helicóide em  $\mathbb{R}_1^3$  parametrizado por

$$\begin{aligned} \sigma : (0, 4\pi) \times (1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v \cos(u), v \sin(u)), \end{aligned}$$

uma computação padrão de geometria em superfícies mostra que  $S = \text{Im } \sigma$  é superfície suave de  $\mathbb{R}_1^3$  com vetor normal  $N = (-v, -\sin(u), \cos(u))$ , com  $\langle N, N \rangle_1 = -v^2 + 1 < 0$ , logo  $S$  é espacial. Mas  $S$  não é acronal: a curva  $\gamma(s) = (s, 2, 0)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  é temporal com  $\gamma(0) = (0, 2, 0) = \sigma(0, 2)$  e  $\gamma(2\pi) = (2\pi, 2, 0) = \sigma(2, 2\pi)$ . ◀

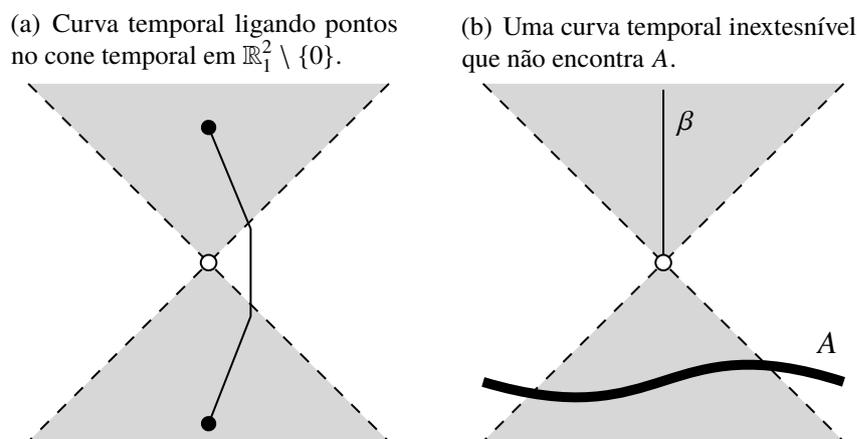
Uma importante aplicação da existência de hipersuperfícies de Cauchy em um espaço-tempo vem do fato, mostrado por Geroch (Geroch (1970)), que estabelece a equivalência entre um espaço-tempo ser hiperbólico e possuir uma hipersuperfície de Cauchy, e que em caso positivo também possui uma hipersuperfície de Cauchy acausal. Mais adiante seremos capazes de mostrar que a existência de uma hipersuperfície de Cauchy implica a hiperbolicidade global, mas a demonstração da recíproca envolve técnicas que fogem do escopo desta dissertação.

Para ilustrar este resultado de Geroch, o próximo exemplo mostra como a existência de hipersuperfícies de Cauchy está fortemente relacionada a estrutura global do espaço-tempo, e que “estragando” um pouco o espaço já perdemos a hiperbolicidade global.

**Exemplo 3.8.17.** Sabemos que o plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$  é globalmente hiperbólico. Agora, remova apenas um ponto, por exemplo pondo  $M = \mathbb{R}_1^2 \setminus \{0\}$  com a métrica de Minkowski. Não é difícil verificar que, mesmo com a origem removida, conseguimos ligar quaisquer pontos dentro

do cone temporal passado e futuro por uma curva temporal (figura 3.27-(a), ver [Lichtenfelz \(2009\)](#), exemplo 5.2.14 para uma construção explícita). Pondo  $C^+$  e  $C^-$  o cone futuro e passado, respectivamente, temos que nenhum conjunto  $A$  acronal intersecta ambos os cones. Caso  $A$  não intersecta  $C^+$ . Seja  $\beta : (0, +\infty) \rightarrow M$ ,  $\beta(s) = (s, 0)$ .  $\beta$  é curva temporal inextensível e  $\text{Im } \beta \subseteq C^+$ , logo  $\beta$  não intersecta  $A$  (figura 3.27-(b)) e temos uma construção análoga caso  $A$  não intersecta  $C^-$ . Em qualquer caso, existe uma curva temporal inextensível que não intersecta  $A$ , mostrando em particular que não existe hipersuperfície de Cauchy no plano de Minkowski com um ponto excluído, logo não é globalmente hiperbólico. ◀

**Figura 3.27:** Exemplo 3.8.17.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Finalizamos esta seção com um resultado que será um componente crucial para os teoremas de singularidade de Hawking. Sua demonstração depende de uma série de resultados técnicos envolvendo exponencial normal, topologia algébrica e teoria de intersecção, que podem ser todos vistos em [O’Neill \(1983\)](#), capítulo 14, e [Lichtenfelz \(2009\)](#), seção 5.5.

**Teorema 3.8.18.** *Se  $S \subseteq M$  é hipersuperfície espacial conexa e fechada, então existe um espaço-tempo  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  e um recobrimento Lorentziano  $k : \tilde{M} \rightarrow M$  tal que, se  $\tilde{S}$  é uma componente conexa de  $k^{-1}(S)$ , então  $k|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow S$  é uma isometria (em particular um difeomorfismo) e  $\tilde{S}$  é uma hipersuperfície espacial, conexa, fechada e acronal em  $\tilde{M}$ .*

### 3.9 Domínios de Dependência

**Definição 3.9.1.** *Para  $A \subseteq M$  subconjunto acronal, definimos o domínio de dependência futuro de  $A$ , as vezes chamado também de desenvolvimento de Cauchy futuro de  $A$ , como o conjunto*

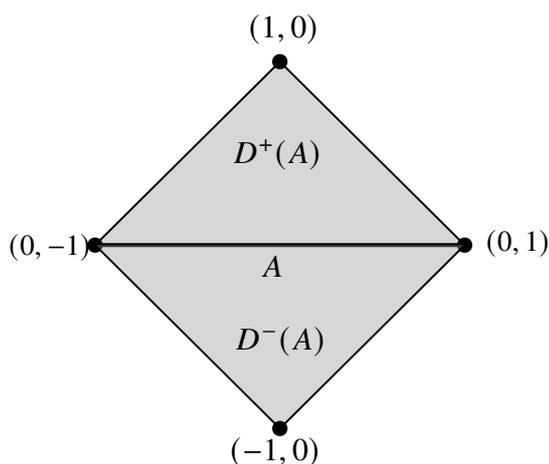
$$D^+(A) = \left\{ p \in M \left| \begin{array}{l} \text{toda curva causal e passado-inextensível} \\ \gamma : [a, b) \rightarrow M \text{ com } \gamma(a) = p \text{ intersecta } A \end{array} \right. \right\}.$$

O domínio de dependência passado ou desenvolvimento de Cauchy passado de  $A$ , denotado por  $D^-(A)$ , se define de maneira temporalmente dual (claramente  $A \subseteq D^\pm(A)$ ). Por fim, o domínio de dependência ou desenvolvimento de Cauchy de  $A$  é a união  $D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$ .

Podemos interpretar  $D^+(A)$  do ponto de vista da relatividade como sendo a parte do futuro causal de  $A$  que pode ser prevista a partir de  $A$ , isto é, nenhuma partícula ou raio de luz percorrendo um caminho passado-inextensível pode alcançar um evento em  $D^+(A)$  sem antes alcançar algum em  $A$ .

**Exemplo 3.9.2.** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , considere o segmento de reta  $A = \{0\} \times [-1, 1]$ . Temos que  $D^+(A)$  é o conjunto  $J^-(1, 0)$  limitado pelo segmento de reta  $A$  (figura 3.28). Similarmente,  $D^-(A)$  é  $J^+(-1, 0)$  limitado pelo segmento de reta  $A$ . Assim,  $D(A)$  é o diamante causal  $J^-(1, 0) \cap J^+(-1, 0)$ . ◀

**Figura 3.28:** Domínio de dependência de  $\{0\} \times [-1, 1]$  em  $\mathbb{R}_1^2$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Exemplo 3.9.3.** Considere os hiperplanos  $\Pi_c$  em  $\mathbb{R}_1^n$ . Como são hipersuperfícies de Cauchy, pelo teorema 3.8.7, toda curva causal inextensível intersecta  $\Pi_c$ , logo  $D^+(\Pi_c)$  é a região com  $t \geq c$  e  $D^-(\Pi_c)$  é a região  $t \leq c$ . Assim,  $D(\Pi_c) = \mathbb{R}_1^n$ . ◀

Este último exemplo se generaliza vastamente, como mostra o próximo resultado.

**Proposição 3.9.4.** Um subconjunto acronal  $S \subseteq M$  é hipersuperfície de Cauchy se e somente se  $D(S) = M$ .

Passamos agora a comentar diversas propriedades dos domínios de dependência e como tais conjuntos se relacionam com propriedades globais do espaço-tempo subjacente.

**Proposição 3.9.5.** Seja  $A \subseteq M$  subconjunto acronal. Temos

- (i)  $D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$ .
- (ii)  $D^+(A) \cap D^-(A) = A$ .
- (iii)  $D^+(A) \setminus A = D(A) \cap I^+(A)$ .

**Exemplo 3.9.6.** Sempre temos  $A \subseteq D(A)$ , mas também podemos ter  $D(A) \subseteq A$ . Consideramos dois exemplos deste fenômeno

(i) Em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere a reta espacial  $A = \{(0, x, 0) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Para  $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}_1^3 \setminus A$ . Se  $y_0 \neq 0$ , tome  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , com  $\gamma(s) = (t_0 + s, x_0, y_0)$ . Assim  $\gamma$  é temporal e inextensível  $y_0 \neq 0$ ,  $\gamma$  nunca intersecta  $A$ , portanto  $(t_0, x_0, y_0) \notin D(A)$ . Se  $y_0 = 0$ , definimos  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  por

$$\beta(s) = \begin{cases} \left( |t_0|s, x_0, \frac{t_0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \right), & \text{se } -1 \leq s \leq 1 \\ (|t_0|s, x_0, 0), & \text{se } s \geq 1 \text{ ou } s \leq -1. \end{cases}$$

Como  $(t_0, x_0, y_0) \notin A$ ,  $t_0 \neq 0$ . Assim,  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 \leq -t_0^2 + \frac{t_0^2}{4} < 0$ , para  $-1 \leq s \leq 1$  e  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 = -t_0^2 < 0$ , para  $|s| \geq 1$ . Portanto  $\beta$  é temporal, inextensível e não intersecta  $A$ . Novamente, concluímos que  $(t_0, x_0, 0) \notin D(A)$ , e então  $D(A) = A$ .

(ii) Em  $\mathbb{R}_1^2$ , considere  $A = \{(0, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ . Dado  $p = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_1^2 \setminus A$ , se  $t_0 = 0$ , então  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Defina  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  como  $\alpha(s) = (s, x_0)$ . Vemos que  $\alpha$  é temporal e inextensível, passando por  $p$  e evitando  $A$ , já que  $(0, x_0) \notin A$ . Se  $t_0 \neq 0$ , escolha  $0 < \varepsilon < |t_0|$  e  $a \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  irracional. Defina  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  pondo  $\beta(s) = (1-s)(0, a) + s(t_0, x_0)$ . Assim  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle_1 = -t_0^2 + (x_0 - a)^2 < -t_0^2 + \varepsilon^2 < 0$ . Vemos que  $\beta$  é temporal, inextensível e não intersecta  $A$ , logo  $(t_0, x_0) \notin D(A)$ . ◀

No segundo exemplo acima vemos também que é possível termos  $D(A) = \emptyset$ . Outra coisa notável em ambos é que  $\bar{A} = \text{edge}(A)$ . O que concluímos em tais exemplos é na verdade uma propriedade geral, como é verificado a seguir.

**Proposição 3.9.7.** *Seja  $A \subseteq M$  acronal. Temos*

- (i)  $\text{edge}(A)$  é um conjunto fechado. Em particular,  $A \subseteq \text{edge}(A)$  se e somente se  $\text{edge}(A) = \bar{A}$ .
- (ii) Se  $p \in \text{edge}(A)$ , então  $D^+(A) \cap I^+(p) = \emptyset$ .
- (iii)  $\text{edge}(A) = \bar{A} \Rightarrow A = D(A)$ .

E como corolário, é possível verificar as seguintes condições em  $D^+(A)$ .

**Corolário 3.9.8.** *Para  $A \subseteq M$  acronal e  $p \in D^+(A)$ , temos  $I^-(p) \cap I^+(A) \subseteq D^+(A)$  e  $I^-(p) \cap A$  (caso não seja vazio) é hipersuperfície  $C^0$ .*

Com  $A$  acronal, se uma curva causal e passado-inextensível começando em  $D^+(A)$  sai deste conjunto eventualmente, é de se esperar que o seu encontro com  $A$  se dá em um parâmetro anterior ao parâmetro onde a curva foi encontrada fora de  $D^+(A)$ , que é o afirmado no próximo resultado.

**Proposição 3.9.9 (Regressão).** *Seja  $A \subseteq M$  acronal e  $\alpha : [a, b)$  uma curva causal e passado-dirigida com  $\alpha(a) \in D^+(A)$ . Se existe  $s \in (a, b)$  com  $\alpha(s) \notin D^+(A)$ , então existe  $s_0 \in [a, s)$  com  $\alpha(s_0) \in A$ .*

**Proposição 3.9.10.** *Se  $A \subseteq M$  um é subconjunto acronal e  $p \in \text{int}(D(A))$ , então toda curva causal,  $C^0$  e inextensível passando por  $p$  intersecta ambos  $I^+(A)$  e  $I^-(A)$ .*

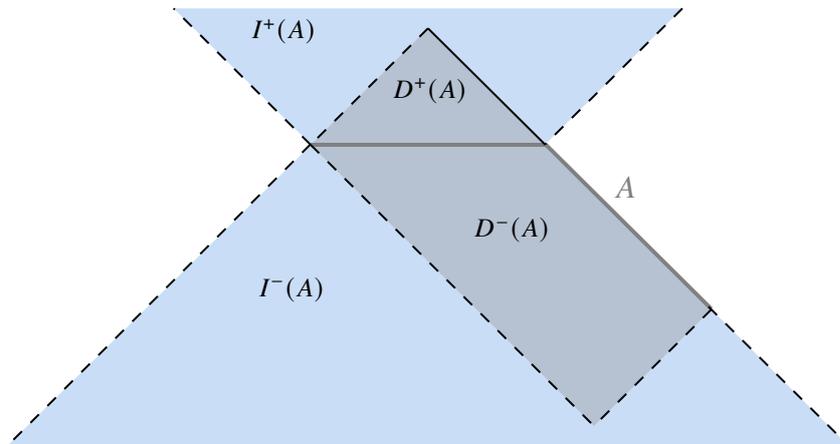
A proposição acima pode falhar se  $p \notin \text{int}(D(A))$ , como ilustra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.9.11.** Em  $\mathbb{R}_1^2$ , considere o conjunto

$$A = \{(t, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \in (-1, 1), t = 0 \text{ se } x \in (-1, 0], t = -x, \text{ se } x \in [0, 1)\}.$$

Claramente,  $A$  é acronal, pois cada uma dos segmentos de reta é acronal. Na figura 3.29, exibimos  $A$ ,  $D^\pm(A)$  e  $I^\pm(A)$ , e fica claro que a geodésica luminosa inextensível  $\gamma(s) = (-s, s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , começa no segmento luminoso de  $A$  e nunca intersecta  $I^-(A)$ , com  $\gamma(0) \in \partial D(A)$ . ◀

**Figura 3.29:** Conjuntos do exemplo 3.9.11.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Chegamos agora no nosso principal resultado para domínios de dependência, que é uma das implicações da equivalência obtida por Geroch (1970).

**Teorema 3.9.12.** *Se  $A \subseteq M$  é acronal, então  $\text{int}(D(A))$  é globalmente hiperbólico.*

*Demonstração.* Dividimos a demonstração em quatro etapas. Ao longo da demonstração, fixe  $h$  métrica Riemanniana completa em  $M$ .

**Afirmção 1.** *Causalidade vale em todo ponto de  $\text{int}(D(A))$ .*

De fato, suponha por contradição que existe um laço causal e futuro-dirigido não constante  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  baseado em algum ponto  $p \in \text{int}(D(A))$ . A curva  $\beta : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$  gerada ao darmos infinitas voltas por  $\alpha$  é inextensível, pois possui dois pontos distintos que se repetem

indefinidamente, e portanto encontra  $A$  em algum ponto. Mas pela proposição 3.9.10,  $\beta$  também encontra  $I^+(A)$  e  $I^-(A)$ , o que viola a acronalidade de  $A$ .

**Afirmção 2.** *Causalidade forte vale em todo ponto de  $\text{int}(D(A))$ .*

Por contradição novamente, suponha que causalidade forte falha em algum ponto  $p \in \text{int}(D(A))$ . Então existe vizinhança aberta  $U$  de  $p$ , que podemos assumir contida em  $D^+(A)$ , e uma sequência de curvas causais e passado-dirigidas  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow M$  com extremos em  $U$ ,  $\gamma_k(0), \gamma_k(1) \rightarrow p$  e com cada  $\text{Im } \gamma_k \not\subseteq U$ . Estendendo cada  $\gamma_k$  de maneira causal e inextensível para além de 1 e reparametrizando por  $h$ -comprimento de arco, ganhamos uma sequência de curvas causais e passado-inextensíveis  $\tilde{\gamma}_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  tal que  $\tilde{\gamma}_k(0) \rightarrow p$  e com uma sequência  $\{t_k\}$  de  $(0, +\infty)$  com  $\tilde{\gamma}_k(t_k) \rightarrow p$ . Aplicando o lema da curva limite (teorema 3.4.13), temos  $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva  $C^0$ , causal e passado-dirigida com  $\tilde{\gamma}(0) = p$  e  $\tilde{\gamma}_k \rightarrow \tilde{\gamma}$  uniformemente em compactos (a menos de subsequência). Suponha que  $\{t_k\}$  é limitada superiormente. A menos de subsequência, podemos assumir  $t_k \rightarrow t_0 > 0$  (pois cada  $\tilde{\gamma}_k$  possui um ponto fora de  $U$  em  $[0, t_k]$ ), e por convergência uniforme temos  $\tilde{\gamma}_k(t_k) \rightarrow \tilde{\gamma}(t_0)$ , logo  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(t_0) = p$ , o que viola a causalidade de  $\text{int}(D(A))$ . Logo  $\{t_k\}$  é ilimitada e podemos assumir  $t_k \rightarrow +\infty$ . Pela proposição 3.9.10,  $\tilde{\gamma}$  intersecta  $I^-(A)$  em um ponto  $q = \tilde{\gamma}(s_0)$ . Seja  $a \in A$  com  $\tilde{\gamma}(s_0) \ll a$ . Repetimos o argumento via curva limite para as curvas inversas  $\beta_k : [0, 1] \rightarrow M$  dadas por  $\beta_k(t) = \gamma_k(1 - t)$ , que são causais e futuro-dirigidas. Para  $k$  suficientemente grande,  $t_k > t_0$ , logo existe uma sequência  $\{\tilde{s}_k\}$  de  $(0, 1)$  com  $\beta_k(\tilde{s}_k) = \gamma_k(1 - \tilde{s}_k) = \tilde{\gamma}_k(s_0) \rightarrow q$ . Como nas curvas anteriores, coloque  $\tilde{\beta}_k$  extensão e  $\beta$  do lema da curva limite. Ponha  $\{s_k\}$  sequência em  $[0, +\infty)$  com  $\tilde{\beta}_k(s_k) = \beta_k(\tilde{s}_k)$ . Novamente, se  $\{s_k\}$  é limitada temos uma contradição com a causalidade de  $\text{int}(D(A))$ , então assumimos  $s_k \rightarrow +\infty$ . Com  $\beta$  futuro-inextensível ela intersecta  $I^+(A)$  em um ponto  $q' = \beta(b)$ , logo existe  $a' \in A$  com  $a' \ll q'$ . Mas com  $\tilde{\beta}_k(b) \rightarrow q'$  e  $\tilde{\beta}_k(s_k) \rightarrow q$ , para  $s_k > b$  e  $k$  suficientemente grande,  $\tilde{\beta}_k(b) \leq \tilde{\beta}_k(s_k)$ , implicando em  $a' \ll a$ , o que viola a acronalidade de  $A$ .

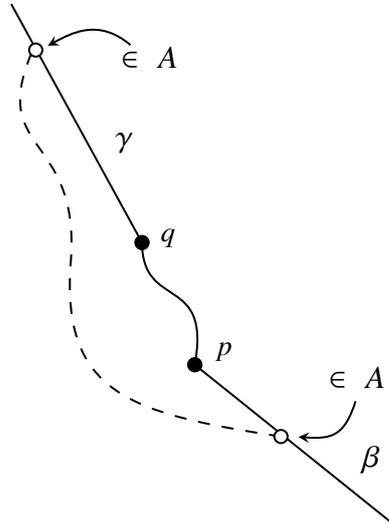
**Afirmção 3.** *Se  $p, q \in \text{int}(D(A))$  e  $p < q$ , então  $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq \text{int}(D(A))$ .*

Como  $p, q \in \text{int}(D(A))$ , escolha  $p^-, q^+ \in D(A)$  com  $p^- \ll p$  e  $q \ll q^+$ . Pelo argumento variacional usual, temos  $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq I^+(p^-) \cap I^-(q^+) \equiv V$ . Sendo aberto, se  $V \subseteq D(A)$ , imediatamente  $V \subseteq \text{int}(D(A))$ . Então suponha que exista  $x \in V \setminus D(A)$ . Considere  $\beta^+$  e  $\beta^-$  curvas futuro e passado-inextensíveis, respectivamente, começando em  $x$  que não intersectam  $A$ , e também curvas  $\alpha^+$  temporal e passado-dirigida de  $q^+$  a  $x$ ,  $\alpha^-$  temporal e futuro-dirigida de  $p^-$  a  $x$ . Observe que se  $p^- \in D^+(A)$ , como  $p^- \ll q^+$  e  $q^+ \in D(A)$  segue que  $q^+ \in D^+(A)$  (figura 3.30). Então  $\beta^- * \alpha^+$  é causal e passado-inextensível começando em  $q^+$ , que encontra  $A$ , portanto  $\alpha^+$  encontra  $A$ , então  $x \in I^-(A)$ , implicando em  $p^- \in I^-(A)$ , mas assim  $p^- \in I^-(A) \cap D^+(A) = \emptyset$ , um absurdo, e devemos ter  $p^- \in D^-(A)$ . Analogamente,  $q^+ \in D^+(A)$ , logo as curvas  $\alpha^+$  e  $\alpha^-$  ambas encontram  $A$ , violando acronalidade.

**Afirmção 4.** *Para  $p, q \in \text{int}(D(A))$  com  $p < q$ , então  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto.*

Seja  $\{x_k\}$  uma sequência em  $J^+(p) \cap J^-(q)$ . Seja  $\alpha_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  uma sequência de curvas causais futuro-inextensíveis parametrizadas por comprimento de arco tais que, para

**Figura 3.30:** Se  $p, q \in D(A)$ ,  $p \in D^+(A)$  e  $p \ll q$ , caso  $q \notin D^+(A)$ , então  $q \in D^-(A)$  e a contradição com a acronalidade de  $A$  está esquematizada na figura, onde  $\beta$  é passado-inextensível e  $\gamma$  futuro-inextensível, e a curva tracilhada é temporal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

sequências  $\{s_k\}$ ,  $\{\bar{s}_k\}$  em  $[0, +\infty)$  com  $s_k \leq \bar{s}_k$ , tem-se  $\alpha_k(0) = p$ ,  $\alpha_k(s_k) = x_k$  e  $\alpha(\bar{s}_k) = q$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Similarmente, considere  $\{\beta_k\}$  com  $\beta_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  sequência de curvas causais passado-inextensíveis parametrizadas por comprimento de arco tais que, para sequências  $\{a_k\}$  e  $\{\bar{a}_k\}$  em  $[0, +\infty)$  com  $a_k \leq \bar{a}_k$ , tem-se  $\beta_k(0) = q$ ,  $\beta_k(a_k) = x_k$  e  $\beta_k(\bar{a}_k) = p$ . Aplicamos o lema da curva limite como feito anteriormente para  $\alpha, \beta : [0, +\infty) \rightarrow M$  curvas limite de  $\{\alpha_k\}$  e  $\{\beta_k\}$  respectivamente, com  $\alpha$  futuro-inextensível e  $\beta$  passado-inextensível e com convergência uniforme em compactos (a menos de subsequência). Analisamos agora as várias possibilidades para as sequências definidas acima.

Caso ambas  $\{s_k\}$  e  $\{a_k\}$  sejam ilimitadas superiormente, assumimos  $a_k, s_k \rightarrow +\infty$ . Temos  $\alpha(s_0) \in I^+(A)$  e  $\beta(a_0) \in I^-(A)$  para certos parâmetros  $s_0, a_0 \in [0, +\infty)$ . Como  $\alpha_k(s_0) \rightarrow \alpha(s_0)$  e  $\beta_k(a_0) \rightarrow \beta(a_0)$ , se  $k$  é suficientemente grande temos  $\alpha_k(s_0) \in I^+(A)$ ,  $\beta_k(a_0) \in I^-(A)$ , para  $s_k > s_0$  e  $a_k > a_0$ . Assim, para  $k$  grande,  $x_k = \beta_k(a_k) \leq \beta_k(a_0) \in I^-(A) \Rightarrow x_k \in I^-(A)$ . Analogamente  $x_k \in I^+(A)$ , violando acronalidade de  $A$ . Portanto uma das sequências é limitada superiormente, digamos  $\{a_k\}$ , sendo o outro caso análogo. Como usual, podemos assumir  $a_k \rightarrow a$ , de modo que  $x_k = \beta_k(a_k) \rightarrow \beta(a) \equiv x_0$ . Temos portanto  $x_0 \leq q$ . Se  $\{s_k\}$  também é limitada superiormente, assumimos  $s_k \rightarrow s$ , implicando  $x_k = \alpha_k(s_k) \rightarrow \alpha(s) = x_0$ , logo  $p \leq x_0$  mostrando  $x_0 \in J^+(p) \cap J^-(q)$ , provando o desejado neste caso.

Resta analisar o caso de  $\{s_k\}$  ser ilimitada, e novamente assumimos  $s_k \rightarrow +\infty$ . Primeiramente, afirmamos que isto implica em  $x_0 \in D^+(A)$  e  $q \in D^+(A) \setminus A$ . De fato, caso  $x_0 \notin D^+(A)$ , existe uma curva causal passado-inextensível  $\eta$  começando em  $x_0$  que não intersecta  $A$ . Agora, vimos anteriormente que para  $k$  suficientemente grande,  $x_k = \alpha_k(s_k) \in I^+(A)$ , e  $x_k \leq q$ , logo  $q \in I^+(A)$ . Portanto  $q \in D(A) \cap I^+(A) = D^+(A) \setminus A$ . Escolha  $q^+ \in I^+(q) \cap D(A)$ , tal que

$q^+ \in D^+(A) \setminus A$  também. Então  $x_0 \ll q^+$ , e podemos tomar uma curva  $\zeta$  temporal passado-dirigida de  $q^+$  até  $x_0$ . A concatenação  $\eta * \zeta$  precisa então intersectar  $A$ , logo  $\zeta$  o faz, implicando  $x_0 \in I^-(A)$ , e assim para  $k$  grande temos  $x_k \in I^+(A) \cap I^-(A)$ , novamente violando acronalidade. Isto estabelece que  $x_0 \in D^+(A)$ . Para a segunda afirmação, escolha  $\{\gamma_k\}$  sequência de curvas da forma  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$ , causais passado-inextensíveis e parametrizadas por comprimento de arco tais que  $\gamma_k(0) = x_k$ ,  $\gamma_k(c_k) = p$ , para alguma sequência  $\{c_k\}$  em  $[0, +\infty)$  tal que  $\gamma_k|_{[0, c_k]}$  é uma reparametrização de  $\beta_k|_{[a_k, \bar{a}_k]}$ . Aplicando mais uma vez o lema da curva limite para tal sequência, obtemos  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva causal,  $C^0$  e passado-inextensível, com  $\gamma(0) = x_0$ . Novamente, caso  $\{c_k\}$  seja limitada superiormente, podemos assumir  $c_k \rightarrow c$ , implicando em  $\gamma_k(c_k) \rightarrow \gamma(c) = p$ . Ou seja,  $p \leq x_0$  e o resultado segue. Verificamos então o caso ilimitado, com  $c_k \rightarrow +\infty$ . A curva  $\gamma * \beta|_{[0, a]}$  é passado-inextensível e começa em  $q \in \text{int}(D(A))$ , logo intersecta  $I^-(A)$ . Mas  $\beta|_{[0, a]}$  não a faz pois teríamos  $x_0 \in D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$ , então  $\gamma$  intersecta  $I^-(A)$ , isto é, existe  $c_0 \in (0, +\infty)$  tal que  $\gamma(c_0) \in I^-(A)$ . Portanto, para  $k$  grande o suficiente,  $c_k > c_0$  e  $p = \gamma_k(c_k) \leq \gamma_k(c_0) \in I^-(A)$ . Em particular,  $p \in I^-(A) \cap D(A) = D^-(A) \setminus A$ . Pela afirmação 3,  $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq \text{int}(D(A))$ , logo em particular  $x_k \in \text{int}(D(A))$ , e podemos assumir que  $x_k \in I^+(A) \cap D(A) = D^+(A) \setminus A$ . Uma vez que as curvas  $\gamma_k$  saem de  $D^+(A)$  no segmento  $[0, c_k]$  (equivalentemente as  $\beta_k$  saem em  $[a_k, \bar{a}_k]$ ), pela proposição 3.9.9, existem sequências  $\{e_k\}$ ,  $\{d_k\}$  em  $(0, +\infty)$  com  $0 < d_k < c_k$ ,  $a_k < e_k < \bar{a}_k$ , tais que  $\gamma_k(d_k) = \beta_k(e_k) \in A$ . Se  $\{e_k\}$  e  $\{d_k\}$  são ilimitadas superiormente, então eventualmente  $\gamma_k(d_k), \beta_k(e_k) \in I^-(A)$ , violando acronalidade. Portanto podemos assumir  $e_k \rightarrow e$ ,  $d_k \rightarrow d$ , logo  $\beta_k(e_k) = \gamma_k(d_k) \rightarrow \gamma(d) = \beta(e) \equiv y_0$ , e temos  $p \leq y_0 \leq x_0$ . Em particular,  $p \leq x_0 \leq q$ , portanto  $x_0 \in J^+(p) \cap J^-(q)$ , mostrando a compacidade. ■

**Observação 3.9.13.** Na primeira afirmação da demonstração do teorema acima, o resultado é em geral falso para pontos em  $D(A)$ . Por exemplo, considere o cilindro do exemplo 3.5.2, e a imagem de uma geodésica luminosa como conjunto  $A$ . Neste caso  $A$  é acronal,  $D(A) = A$ , mas causalidade é violada em todo ponto de  $A$ .

Uma vez que, na existência de hipersuperfície de Cauchy,  $M = D(S)$  (proposição 3.9.4), é imediato deste teorema:

**Corolário 3.9.14.** *Um espaço-tempo  $M$  que possui uma hipersuperfície de Cauchy é globalmente hiperbólico.*

Em particular, os espaços-tempos de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  são todos globalmente hiperbólicos.

Finalizamos esta seção com mais alguns resultados sobre domínios de dependência que serão importantes para mais adiante.

**Proposição 3.9.15.** *Se  $A \subseteq M$  é acronal e  $p \in \text{int}(D(A)) \setminus I^-(A)$ , então  $J^-(p) \cap D^+(A)$  é compacto.*

Alguns autores definem domínios de dependência por meio de curvas temporais ao invés de curvas casuais (por exemplo, [Penrose \(1972\)](#) e [Geroch \(1970\)](#)). A próxima proposição relaciona as duas definições, que também terá importância em outros contextos.

**Proposição 3.9.16.** *Seja  $A \subseteq M$  acronal. Defina*

$$T^+(A) = \left\{ p \in M \left| \begin{array}{l} \text{toda curva temporal e passado-inextensível} \\ \gamma : [a, b) \rightarrow M \text{ com } \gamma(a) = p \text{ intersecta } A \end{array} \right. \right\}.$$

Então  $D^+(A)$  é denso em  $T^+(A)$  (i.e.  $D^+(A) \subseteq T^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$ ). Também,  $T^+(A)$  é fechado se e somente se  $A$  é fechado, e neste caso  $T^+(A) = \overline{D^+(A)}$ .

### 3.10 Horizontes de Cauchy

A fronteira dos domínios de dependência desempenha um papel especial para a causalidade, que passamos agora a estudar.

**Definição 3.10.1.** *Seja  $A \subseteq M$  acronal. O horizonte futuro de Cauchy para  $A$  é o conjunto  $H^+(A)$  dos pontos de  $\overline{D^+(A)}$  cujo futuro cronológico não intersecta  $D^+(A)$ , ou seja,*

$$H^+(A) = \overline{D^+(A)} \setminus I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} \mid I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset\}.$$

Dualmente, definimos o horizonte passado de Cauchy  $H^-(A)$ , e o horizonte de Cauchy é a união  $H(A) = H^+(A) \cup H^-(A)$ .

Em termos relativísticos,  $H^+(A)$  representa o limite da região do espaço-tempo controlada por dados de  $A$ . Assim, se  $H^+(A) = \emptyset$ , o futuro de  $A$  não pode ser todo previsto a partir de  $A$ .

**Exemplo 3.10.2.** (i) Para  $A = \{0\} \times [-1, 1]$  em  $\mathbb{R}_1^2$ , de acordo com  $D^+(A)$  obtido no exemplo 3.9.2, vemos neste caso que  $H^+(A)$  é  $\partial D^+(A) \setminus (\{0\} \times (-1, 1))$ , e o análogo para  $H^-(A)$ , de forma que  $H(A) = \partial D(A)$  (figura 3.31).

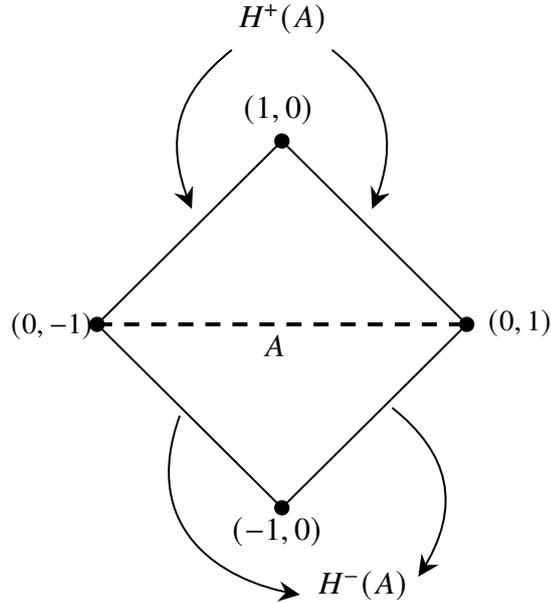
(ii) Tome Considere o “disco racional”  $A = \{(0, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}_1^3$ . Similar à análise feita no exemplo 3.9.6, temos  $D^+(A) = A$ , portanto

$$D^+(A) \cap I^-(D^+(A)) = I^-(A) \cap A = \emptyset$$

e  $\overline{D^+(A)} = \bar{A} = \{(0, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Assim,  $H^+(A) = \bar{A}$ . Similarmente,  $H^-(A) = \bar{A}$ , portanto  $H(A) = \bar{A}$ . ◀

Estes exemplos ilustram propriedades bastante gerais dos horizontes de Cauchy, que listamos na próxima proposição.

**Proposição 3.10.3.** *Seja  $A \subseteq M$  acronal. Temos*

**Figura 3.31:** Horizontes para  $A = \{0\} \times [-1, 1]$ .

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

- (i)  $H^\pm(A)$  são acronais e fechados.
- (ii)  $\partial D^\pm(A) = H^\pm(A) \cup A$ .
- (iii)  $\text{edge}(H^\pm(A)) \subseteq \text{edge}(A)$ , com igualdade se  $A$  é fechado.
- (iv)  $\partial D(A) = H(A)$ .

Se  $A$  não for fechado, a outra inclusão no item (iii) pode falhar.

**Exemplo 3.10.4.** (i) Em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere o disco  $A_1 = \{(0, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , que não é fechado. Vemos que  $H^+(A_1)$  é o cone  $\{t = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, t \geq 0\}$ , mas ainda assim  $\text{edge}(A_1) = \text{edge}(H^+(A_1))$ .

(ii) Em  $\mathbb{R}_1^3$  vimos que para o disco racional  $A_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , que não é um conjunto fechado, temos  $\text{edge}(A_2) = \overline{A_2} = H^+(A_2)$ , assim  $\text{edge}(H^+(A_2))$  é o círculo unitário e  $\text{edge}(A_2) \not\subseteq \text{edge}(H^+(A_2))$ . ◀

Estes dois exemplos também mostram que  $H^+(A)$  não precisa ser hipersuperfície  $C^0$ . Porém, ao removermos  $\text{edge}(A_1)$  no exemplo (i), obtemos um cone que é hipersuperfície  $C^0$ , que na verdade é algo geral.

**Corolário 3.10.5.** Para  $A \subseteq M$  acronal, o conjunto  $H^+(A) \setminus \text{edge}(A)$  é hipersuperfície  $C^0$  acronal. Ainda, se  $A$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada, então  $H^+(A)$  também o é.

O próximo resultado é um análogo do teorema 3.7.14 para horizontes.

**Teorema 3.10.6.** *Seja  $A \subseteq M$  acronal. Para cada  $p \in H^+(A) \setminus \text{edge}(A)$  existe uma geodésica luminosa e passado-dirigida começando em  $p$  e contida em  $H^+(A)$ , que, ou é passado-inextensível, ou termina em  $\text{edge}(A)$ .*

A geodésica luminosa  $\gamma$  começando em  $H^+(A) \setminus \text{edge}(A)$  e contida em  $H^+(A)$  obtida no teorema acima é chamada de *gerador geodésico* de  $H^+(A)$ .

**Definição 3.10.7.** *Um subconjunto  $A \subseteq M$  acronal é dito ser hipersuperfície de Cauchy futura se  $J^+(A) \subseteq D^+(A)$  (implicando em  $J^+(A) = D^+(A)$ ). Uma hipersuperfície de Cauchy passada é definida de maneira temporalmente dual.*

Associado a hipersuperfícies de Cauchy futuras ou passadas, temos os seguintes resultados.

**Teorema 3.10.8.**  *$A \subseteq M$  acronal é hipersuperfície de Cauchy futura se e somente se  $H^+(A) = \emptyset$ . Em caso afirmativo, também  $A$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada.*

**Corolário 3.10.9.** *Seja  $A \subseteq M$  subconjunto acronal não vazio. São equivalentes:*

- (i)  *$A$  é hipersuperfície de Cauchy;*
- (ii)  *$A$  é hipersuperfície de Cauchy futura e passada;*
- (iii)  *$H(A) = \emptyset$ .*

Um espaço-tempo pode ter distintas hipersuperfícies de Cauchy passadas e futuras e ainda não possuir hipersuperfícies de Cauchy. Ainda, mesmo se for globalmente hiperbólico, uma podemos ter hipersuperfícies de Cauchy futuras (ou passadas) sem que elas sejam hipersuperfícies de Cauchy. Ilustramos estas possibilidades no próximo exemplo.

**Exemplo 3.10.10.** (i) Considere o plano de Minkowski sem a origem  $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Os conjuntos  $A^\pm = \{(\pm 1, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$  são, respectivamente, hipersuperfícies de Cauchy futura e passada. Mas, como visto no exemplo 3.8.17, este espaço-tempo não admite hipersuperfícies de Cauchy.

(ii) Em  $\mathbb{R}_1^2$ , tome as hipérbolas  $A^\pm = \{(t, x) \in \mathbb{R}_1^2 : t = \pm\sqrt{1+x^2}\}$ . Apesar de  $\mathbb{R}_1^2$  ser globalmente hiperbólico,  $A^+$  é uma hipersuperfície de Cauchy futura, mas não é hipersuperfície de Cauchy passada (sendo a situação dual no caso de  $A^-$ ). Para ver isto, considere a curva  $\gamma(s) = (\sinh(s), \cosh(s))$ . Tal curva é temporal e futuro-inextensível, está em  $J^-(A^+)$  mas nunca intersecta  $A^+$ , logo  $J^-(A^+) \not\subseteq D^-(A^+)$ . ◀

**Teorema 3.10.11.** *Seja  $A \subseteq M$  hipersuperfície  $C^0$ , acronal e fechada. Se vale alguma das seguintes condições*

- (i)  *$M$  é globalmente hiperbólico e  $A$  é compacta; ou*
- (ii)  *$A$  é acausal (portanto hipersuperfície de Cauchy parcial) e toda geodésica luminosa inextensível intersecta  $A$ ;*

*Então  $A$  é uma hipersuperfície de Cauchy.*

Utilizando os horizontes de Cauchy, conseguimos mostrar alguns resultados à respeito da relação entre  $D(A)$  e seu interior.

**Lema 3.10.12.** *Se  $A \subseteq M$  é um conjunto acronal, então  $A \subseteq \text{int}(D(A))$  se e somente se  $D(A)$  é aberto. Em caso afirmativo,  $A$  é uma hipersuperfície  $C^0$ .*

*Demonstração.* A direção ( $\Leftarrow$ ) é imediata. Para ( $\Rightarrow$ ) com  $A$  acronal contido em  $\text{int}(D(A))$ , primeiramente mostramos que  $A$  é hipersuperfície  $C^0$ . De fato, suponha que exista  $p \in A \cap \text{edge}(A)$ . Assim, existe uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  temporal inteiramente contida no aberto  $\text{int}(D(A))$  com  $\alpha(0) \ll p \ll \alpha(1)$ , que não intersecta  $A$ . Por acronalidade,  $\alpha(1) \in D^+(A)$ . Mas então, estendendo  $\alpha$  de maneira temporal e inextensível para além de  $\alpha(0)$ , por acronalidade tal curva intersecta  $A$  fora de  $\alpha$ , e neste caso teremos  $p \in I^+(A)$ , novamente contradizendo a acronalidade.

Agora, para mostrar que  $D(A)$  é aberto, é suficiente mostrar  $D(A) \cap \partial D(A) = \emptyset$ . Mas  $\partial D(A) = H(A)$ . Mostramos então que  $D(A) \cap H^+(A) = \emptyset$ , sendo o outro caso análogo.

Como  $A \subseteq \text{int}(D(A))$ , certamente  $A \cap H^+(A) = \emptyset$ . Agora, se existisse  $p \in D(A) \cap H^+(A)$ , caso  $p \in D^-(A) \setminus A$ , então  $p \in I^-(A)$ , de forma que  $p \in I^-(A) \cap H^+(A)$ , um absurdo. Assim,  $p \in (D^+(A) \setminus A) \cap H^+(A)$ . Neste caso  $p \in I^+(A)$ , e em particular  $p \notin \text{edge}(A)$ . Considerando um gerador geodésico  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$  de  $H^+(A)$  começando em  $p$ , (cf. teorema 3.10.6) se  $\gamma$  for passado-inextensível, tal curva intersecta  $A$ , logo intersectando  $\text{int}(D(A))$ , um absurdo. Portanto  $\gamma$  é extensível em  $b$  para um ponto em  $\text{edge}(A)$ . Temos então que o segmento  $\gamma([0, b])$  está em  $H^+(A)$  e não intersecta  $A$ . Logo  $\gamma([0, b]) \setminus (D^+(A) \setminus A) \subseteq I^+(A)$ , e em particular  $\gamma(b) \in \text{edge}(A) \cap I^+(A)$ , violando a acronalidade de  $A$ . Está última violação mostra que  $D(A) \cap H^+(A) = \emptyset$ . ■

**Proposição 3.10.13.** *Se  $A \subseteq M$  é uma hipersuperfície  $C^0$  acausal, então  $D(A)$  é aberto (e portanto globalmente hiperbólico).*

*Demonstração.* Pelo lema 3.10.12, precisamos apenas provar que  $A \subseteq \text{int}(D(A))$ , e portanto, como no lema anterior, é suficiente mostrar que  $A \cap H(A) = \emptyset$ . Como sempre mostramos  $A \cap H^+(A) = \emptyset$ , o outro caso sendo análogo.

Se existe  $p \in A \cap H^+(A)$ , como em particular  $A$  é hipersuperfície  $C^0$  acronal,  $A \cap \text{edge}(A) = \emptyset$ , logo existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  tal que toda curva temporal de  $I^-(p, U)$  à  $I^+(p, U)$ , intersecta  $A$ . Para  $p^\pm \in I^\pm(p, U)$ , pondo  $V = I^-(p^+, U) \cap I^+(p^-, U)$ ,  $V$  é vizinhança aberta de  $p$ . Por acronalidade,  $V \cap A = V \cap \bar{A}$ , e também  $V \cap \text{edge}(A) = \emptyset$ . Em particular  $p \in H^+(A) \setminus \text{edge}(A)$ , logo novamente consideramos um gerador geodésico  $\gamma : [0, b) \rightarrow M$  de  $H^+(A)$  começando em  $p$ . Para  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma([0, \varepsilon]) \subseteq H^+(A) \cap V$ . Como  $p \in A$ , a acausalidade de  $A$  implica que  $\gamma(\varepsilon) \notin A$ , implicado por sua vez, pelas igualdades anteriores,  $\gamma(\varepsilon) \notin \bar{A}$ . Assim, para  $W$  vizinhança aberta de  $\gamma(\varepsilon)$  com  $W \cap \bar{A} = \emptyset$ , fixe  $q \in I^-(\gamma(\varepsilon), W)$ .

Como  $\gamma(\varepsilon) \in \overline{D^+(A)}$ , existe  $q' \in I^+(q, W) \cap D^+(A)$ , e isto implica em  $q \in D^+(A) \setminus A \subseteq I^+(A)$ . Porém,  $q \ll p$ , e temos uma contradição com a acronalidade de  $A$ . ■

Se  $A$  é apenas um conjunto acausal, ou se for hipersuperfície  $C^0$  acronal, o resultado obtido acima pode falhar, como ilustra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.10.14.** (i) Para  $A = \{0\} \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}_1^2$ , tal conjunto é acausal mas não é hipersuperfície  $C^0$ , pois  $\text{edge}(A) \cap A = \{(0, 1), (0, -1)\}$ , e neste caso,  $D(A)$  é o diamante causal como visto no exemplo 3.9.2, que não é aberto.

(ii) Para  $A$  como visto no exemplo 3.9.11,

$$A = \{(t, x) \in \mathbb{R}_1^2 \mid x \in (-1, 1), t = 0 \text{ se } x \in (-1, 0], t = -x, \text{ se } x \in [0, 1)\},$$

$A$  é hipersuperfície  $C^0$  acronal, mas como observado no exemplo mencionado,  $\partial D(A) \cap D(A) \neq \emptyset$ , e também não é aberto. ◀

## 3.11 Horismos

Exploramos uma última estrutura associada à causalidade de interesse para os teoremas de singularidade.

**Definição 3.11.1.** O horismo futuro de um conjunto  $S \subseteq M$  é o conjunto  $E^+(S) = J^+(S) \setminus I^+(S)$ . O horismo passado é definido de maneira temporalmente dual.

Listamos algumas propriedades simples para o horismo

- (1)  $E^+(S) = J^+(S) \cap \partial J^+(S) : J^+(S) \cap \partial J^+(S) = J^+(S) \cap (\overline{J^+(S)} \setminus \text{int}(J^+(S))) = J^+(S) \cap (\overline{J^+(S)} \setminus I^+(S)) = J^+(S) \setminus I^+(S) = E^+(S)$ . Em particular,  $E^+(S) \subseteq \partial J^+(S) = \partial I^+(S)$  e  $E^+(S)$  é acronal.
- (2) Se  $S$  é acronal,  $S \cap I^+(S) = \emptyset$ , logo  $S \subseteq E^+(S)$ .
- (3)  $E^+(S) \subseteq J^+(S)$ , logo  $\overline{E^+(S)} \subseteq \overline{J^+(S)} = \overline{I^+(S)}$ , então  $I^+(\overline{E^+(S)}) \subseteq I^+(\overline{I^+(S)}) = I^+(I^+(S)) = I^+(S)$ .

Para hipersuperfícies  $C^0$  acronais e fechadas, o horismo não traz nenhuma novidade.

**Proposição 3.11.2.** Se  $A$  é uma hipersuperfície  $C^0$  acronal e fechada, então  $E^\pm(A) = A$ .

*Demonstração.* Fazemos o caso  $E^+(A)$ , sendo o outro análogo. Como  $A$  é acronal, sempre vale  $A \subseteq E^+(A)$ . Por outro lado, suponha que exista  $p \in E^+(A) \setminus A$ . Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  geodésica luminosa passado-dirigida com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(a) \in A$ , e escolha  $t_0 \in (0, a]$  tal que  $\gamma(t) \in E^+(A) \setminus A$  se  $t < t_0$  e  $\gamma(t_0) \in A$ . Como  $\gamma$  é em particular um segmento do gerador geodésico de  $\partial J^+(A)$ , temos  $\gamma(t_0) \in \text{edge}(A)$  pela proposição 3.7.14, porém  $\text{edge}(A) = \emptyset$  neste caso, e temos uma contradição. ■

**Lema 3.11.3.** *Se  $A$  é um conjunto fechado e acronal em um espaço-tempo  $M$  qualquer, então vale*

$$H^+(\overline{E^+(A)}) \subseteq H^+(\partial J^+(A)).$$

*Demonstração.* Suponha que exista  $p \in H^+(\overline{E^+(A)}) \setminus H^+(\partial J^+(A))$ . Como  $\overline{E^+(A)} \subseteq \partial J^+(A)$ , obtemos  $D^+(\overline{E^+(A)}) \subseteq \overline{D^+(\partial J^+(A))}$ , e portanto  $p$  está neste último conjunto, logo temos  $p \in I^-(D^+(\partial J^+(A)))$  e a interseção  $I^+(p) \cap D^+(\partial J^+(A))$  é não vazia. Fixe um ponto  $q$  desta interseção, e seja  $q'$  com  $p \ll q' \ll q$ . Como  $I^+(p) \cap D^+(\overline{E^+(A)}) = \emptyset$ ,  $q' \notin D^+(\overline{E^+(A)})$ . Agora, com  $p \in D^+(\overline{E^+(A)})$  e  $p \ll q'$ , temos

$$q' \in I^+(\overline{D^+(\overline{E^+(A)})}) = I^+(D^+(\overline{E^+(A)})) \subseteq I^+(D^+(J^+(A))) \subseteq I^+(A) \subseteq I^+(\partial J^+(A)),$$

e também, como  $q \in D^+(\partial J^+(A))$ ,

$$q' \in I^-(D^+(\partial J^+(A))) \cap I^+(\partial J^+(A)) \subseteq D^+(\partial J^+(A)),$$

portanto  $q' \in D^+(\partial J^+(A))$ , mostrando que  $q' \in I^+(p) \cap I^-(q) \subseteq D^+(\partial J^+(A))$ . Em particular, o interior de  $D^+(\partial J^+(A))$  é não vazio.

Agora, seja  $\gamma$  uma curva causal passado-inextensível começando em algum  $q'$  como anteriormente, que não encontra  $\overline{E^+(A)}$ . Tal curva intersecta  $\partial J^+(A)$  em um ponto  $\gamma(t_0) = r \in \partial J^+(A) \setminus \overline{E^+(A)}$ . Seja  $\beta$  o gerador de  $r$  em  $\partial J^+(A)$  (cf. teorema 3.7.14). Então  $\beta$  é passado-inextensível ou intersecta  $A$ . Mostramos que há uma contradição em qualquer caso.

- **$\beta$  intersecta  $A$ .** Neste caso  $\text{Im } \beta \subseteq J^+(A)$  e portanto  $r \in J^+(A) \cap \partial J^+(A) = E^+(A) \subseteq \overline{E^+(A)}$ , uma contradição com a escolha de  $\gamma$ .

- **$\beta$  é passado-inextensível (e não intersecta  $A$ ).** Neste caso podemos assumir  $\beta \subseteq \partial J^+(A)$ . A concatenação de  $\gamma|_{[0, t_0]}$  com  $\beta$  é uma curva causal passado-inextensível começando em  $q' \in \text{int}(D^+(\partial J^+(A)))$ . Pelo teorema 3.9.10 tal curva intersecta  $I^-(\partial J^+(A))$ . Porém a imagem de toda a curva está em  $J^+(\partial J^+(A))$ , que não intersecta  $I^-(\partial J^+(A))$  pela acronalidade de  $\partial J^+(A)$ , e temos uma contradição. ■

**Proposição 3.11.4.** *Seja  $A$  um subconjunto fechado e acronal de um espaço-tempo  $(M, g)$  fortemente causal. Então  $H^+(\overline{E^+(A)})$  é não compacto ou vazio.*

*Demonstração.* Suponha que  $H^+(\overline{E^+(A)})$  não é vazio mas é compacto. Como  $M$  é fortemente causal, podemos cobrir  $H^+(\overline{E^+(A)})$  por uma coleção finita  $U_1, \dots, U_k$  de abertos causalmente convexos e pré-compactos e distintos.

Escolha  $p_1 \in H^+(\overline{E^+(A)})$ . Reorganizando os índices, podemos assumir  $p_1 \in U_1$ . Pelo lema 3.11.3,  $H^+(\overline{E^+(A)}) \subseteq \overline{H^+(\partial J^+(A))}$ , portanto, dado  $q_1 \in I^+(p_1, U_1)$ , temos  $q_1 \notin D^+(\partial J^+(A))$ , mas como  $p_1 \in D^+(\overline{E^+(A)}) = T^+(\overline{E^+(A)})$  (ver proposição 3.9.16), segue que  $q_1 \in I^+(\overline{E^+(A)}) \subseteq I^+(A)$ .

Escolha agora  $\alpha_1 : [0, b) \rightarrow M$  curva causal e passado-inextensível começando em  $q_1$  e não intersectando  $\partial J^+(A)$ , que pelo teorema 3.8.6 pode ser assumida temporal. Em particular,

como  $q_1 \in I^+(A)$ ,  $\alpha_1$  não sai de  $I^+(A)$ . Mas sendo  $U_1$  pré-compacto,  $\alpha_1$  sai de  $U_1$  eventualmente, e ao sair não pode retornar a  $U_1$  por ser também causalmente convexo. Seja  $t_1 \in (0, b)$  tal que  $\alpha_1(t_1) \notin \overline{U_1}$ , e  $\beta_1 : [t_1, s_1] \rightarrow M$  curva temporal passado-dirigida com  $\beta_1(t_1) = \alpha_1(t_1)$  e  $\beta_1(s_1) \in A$ .

Para a concatenação  $\gamma_1 = \beta_1 * \alpha_1|_{[0, t_1]}$ , que é temporal, uma vez que  $A \subseteq \overline{E^+(A)} \subseteq D^+(\overline{E^+(A)})$  e  $q_1 \notin D^+(\overline{E^+(A)})$ ,  $\gamma_1$  intersecta  $\partial D^+(\overline{E^+(A)}) = H^+(\overline{E^+(A)}) \cup \overline{E^+(A)}$  em algum ponto  $p_2$ . Se  $p_2 \in \overline{E^+(A)}$ , Isto contradiz sua acronalidade, pois  $\beta_1(s_1) \in A \subseteq \overline{E^+(A)}$ . Assim,  $p_2 \in H^+(\overline{E^+(A)})$  (observe que  $p_2$  não é um ponto no segmento  $\alpha_1$ , pois nenhum tal está em  $\overline{D^+(\partial J^+(A))} = T^+(\partial J^+(A))$ ). Uma vez que  $\gamma_1$  não retorna para  $U_1$ , podemos reorganizar a cobertura e assumir  $p_2 \in U_2 \neq U_1$ . Escolha  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $s_1 - \varepsilon_1 > t_1$  e  $\beta_1([s_1 - \varepsilon_1, s_1]) \subseteq U_2$ . Para  $q_2 = \gamma_1(s_1 - \varepsilon_1) = \beta_1(s_1 - \varepsilon_1)$ , de forma que  $q_2 \in I^+(p_2, U_2)$ .

Para finalizar, seguimos este argumento indutivamente, obtendo curvas causais  $\gamma_i|_{[t_i, s_i - \varepsilon_i]}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Como há um numero finito de coberturas, eventualmente a concatenação destas curvas retorna para  $U_1$ , contradizendo a convexidade causal de tal aberto. ■

**Definição 3.11.5.** Um conjunto acronal  $A \subseteq M$  é dito ser futuro-aprisionado<sup>3</sup> se seu horismos  $E^+(A)$  for compacto. Conjuntos passado-aprisionados são definidos de maneira temporalmente dual.

**Lema 3.11.6.** Se  $A \subseteq M$  é um conjunto futuro-aprisionado, então  $E^+(A) = E^+(\overline{A})$ .

*Demonstração.* Sempre vale  $E^+(A) \subseteq E^+(\overline{A})$ . Por outro lado, uma vez que  $E^+(A)$  é compacto e  $A$  é acronal, temos  $\overline{A} \subseteq E^+(A)$ , logo dado  $p \in E^+(\overline{A})$ , ou temos  $p \in \overline{A}$  e portanto  $p \in E^+(A)$ , ou então existe  $r \in \overline{A}$  tal que  $r < p$ . Mas então existe  $r' \in A$  tal que  $r' \leq r < p$ , logo  $p \in J^+(A)$ , e como  $I^+(A) = I^+(\overline{A})$ , segue que  $p \in J^+(A) \setminus I^+(A) = E^+(A)$ . ■

**Lema 3.11.7.** Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo  $n$ -dimensional fortemente causal e  $A \subseteq M$  futuro-aprisionado. Para  $X \in \mathfrak{X}(M)$  campo vetorial completo, temporal e futuro-dirigido, existe  $p \in E^+(A)$  tal que a curva integral maximal de  $X$  começando em  $p$  que não intersecta  $H^+(E^+(A))$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $A$  é fechado pelo lema anterior.

Se  $H^+(E^+(A)) = \emptyset$ , não há nada a fazer. Suponha então que tal conjunto não é vazio, e logo não é compacto pela proposição 3.11.4. Assuma que o resultado seja falso, isto é, para todo  $p \in E^+(A)$  a curva integral maximal começando em  $p$  intersecta  $H^+(E^+(A))$ .

O argumento aqui é similar ao realizado no teorema 3.8.12. Seja  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  fluxo de  $X$ . Como  $\partial J^+(A)$  é hipersuperfície  $C^0$  fechada e acronal, a restrição

$$\Phi_0 = \Phi|_{\partial J^+(A) \times \mathbb{R}} : \partial J^+(A) \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

<sup>3</sup>Não confundir conjuntos futuro-aprisionados com curvas futuro-aprisionadas. Em inglês é comum usar os termos *future-imprisoned* para curvas e *future-trapped* para conjuntos, que se traduzem em português da mesma maneira.

é uma função contínua entre variedades  $C^0$  de dimensão  $n$  e é injetora. Por invariância de domínio,  $W = \text{Im } \Phi_0$  é aberto em  $M$  e  $\Phi_0$  é homeomorfismo com sua imagem. Como estamos assumindo falsa a conclusão,  $H^+(E^+(A)) \subseteq W$ , ou seja, para cada  $p \in E^+(A)$ , existe  $h(p) \in \mathbb{R}$  tal que a curva integral  $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$  de  $X$  em  $p$  intersecta  $H^+(E^+(A))$  em  $\alpha_p(h(p)) = \Phi_0(p, h(p))$ . Sendo  $H^+(E^+(A))$  acronal e  $\alpha_p$  temporal, tal  $h(p)$  está unicamente definido.

Afirmamos que  $h : E^+(A) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. De fato, assumamos que não seja. Então existe uma sequência  $\{p_k\}$  de  $E^+(A)$  convergindo para  $p \in E^+(A)$  mas com  $\{h(p_k)\}$  não convergindo para  $h(p)$ . Mas então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, a menos de subsequência,  $h(p_k) \notin (h(p) - \varepsilon, h(p) + \varepsilon)$ . Analisamos o caso  $h(p_k) \geq h(p) + \varepsilon$ , sendo o outro análogo. Pela continuidade de  $\Phi_0$  relação de cronologia ser aberta, para  $k \in \mathbb{N}$  grande o suficiente, temos

$$\Phi_0(p, h(p)) \ll \Phi_0(p_k, h(p) + \varepsilon) \ll \Phi_0(p_k, h(p_k)),$$

o que viola a acronalidade de  $H^+(E^+(A))$ . Portanto  $h$  é contínua. Com isto, vemos que a função

$$\xi : p \in E^+(A) \mapsto \Phi_0(p, h(p)) \in H^+(E^+(A))$$

está bem definida e é contínua. A acronalidade de  $E^+(A)$  implica em  $\xi$  ser injetora, e como toda curva temporal inextensível começando em  $H^+(E^+(A))$  intersecta  $E^+(A)$ , sendo este conjunto fechado (proposição 3.9.16), temos que  $\xi$  é bijetora.

Por fim, vemos que está bem definida a função

$$\rho = \pi_1 \circ (\Phi_0^{-1})|_{H^+(E^+(A))} : H^+(E^+(A)) \rightarrow E^+(A),$$

onde  $\pi_1$  é a projeção canônica  $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ . Vemos que  $\rho$  é contínua em relação as topologias de subespaço, e por construção é bijetora. Um cálculo direto mostra que  $\xi$  e  $\rho$  são inversas. Assim,  $E^+(A)$  e  $H^+(E^+(A))$  são homeomorfos, um absurdo, sendo um conjunto compacto e o outro não. ■

**Corolário 3.11.8.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal. Se  $A$  é futuro-aprisionado, então existe uma curva temporal futuro-inextensível inteiramente contida em  $D^+(E^+(A))$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 3.11.7, existe  $p \in E^+(A)$  e curva temporal futuro-dirigida inextensível  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  começando em  $p$  que não intersecta  $H^+(E^+(A))$ . Agora,  $\partial D^+(E^+(A)) = H^+(E^+(A)) \cup E^+(A)$ , logo pelas hipóteses de  $\alpha$  e como  $E^+(A)$  é acronal e  $E^+(A) \subseteq D^+(E^+(A))$ , tal curva começa neste último conjunto e para parâmetros  $t > 0$  nunca encontra sua fronteira. Também,  $\alpha(t) \in I^+(E^+(A))$  para  $t > 0$ , logo  $\alpha(t) \notin D^-(E^+(A))$ . Vemos então que a única possibilidade para  $\alpha|_{[0, +\infty)}$  é estar em  $D^+(E^+(A))$ , e tal curva é a desejada. ■

**Proposição 3.11.9.** *Não existem conjuntos acronais aprisionados em um espaços-tempos globalmente hiperbólicos que não possui hipersuperfícies de Cauchy compactas.*

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  um tal espaço-tempo, e por contradição assuma que existe  $A \subseteq M$  acronal e futuro-aprisionado. Uma vez que  $A \subseteq E^+(A) = E^+(\bar{A})$ , este último compacto, temos que  $A$  é pré-compacto, assim podemos assumir que  $A$  é compacto. Sendo  $M$  globalmente hiperbólico e  $A$  compacto,  $J^+(A)$  é fechado, logo  $E^+(A) = \partial J^+(A)$ , e portanto  $E^+(A)$  é hipersuperfície  $C^0$  acronal compacta.

Seja  $\Sigma$  hipersuperfície de Cauchy em  $M$ , que é não compacta por hipótese. Para a  $\rho_\Sigma : M \rightarrow \Sigma$  a retração construída na demonstração do teorema 3.8.12, o corolário 3.8.13 mostra que a restrição  $\rho_\Sigma|_{E^+(A)}$  é homeomorfismo, um absurdo, sendo  $E^+(A)$  compacto e  $\Sigma$  não. ■

## 3.12 Exemplos de Espaços-tempos e Causalidade

Com todas as diversas técnicas comentadas e desenvolvidas ao longo deste capítulo, podemos estudar exemplos concretos de espaços-tempos mais elaborados.

### 3.12.1 Robertson-Walker

Seja  $(N, h)$  uma variedade Riemanniana completa e conexa, e considere  $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$  função suave. Como visto no capítulo 1, o espaço-tempo de Robertson-Walker (generalizado) é o produto torcido

$$(M, g) = ((a, b) \times N, -dt^2 \oplus f^2h).$$

Sendo  $N$  conexa,  $M$  é conexa, e escolhendo o campo vetorial canônico  $d/dt$  junto com o campo vetorial nulo em  $N$ , vemos que  $(M, g)$  é um espaço-tempo de dimensão  $\dim N + 1$ . A condição de causalidade para esta classe de espaços-tempos é a melhor possível de todas as definidas aqui.

**Teorema 3.12.1.** *O espaço-tempo de Robertson-Walker é globalmente hiperbólico. Mais ainda, para qualquer  $t_0 \in (a, b)$ , a subvariedade espacial  $\{t_0\} \times N$  é uma hipersuperfície de Cauchy em  $(M, g)$ .*

*Demonstração.* O primeiro passo é verificar que  $(M, g)$  é fortemente causal. Fixe  $p = (t_0, x_0) \in (a, b) \times N = M$ . Seja  $\tilde{U}$  vizinhança aberta de  $p$ , e considere  $\varepsilon_0 > 0$  e  $\mathcal{N}$  aberto contendo  $x_0$  tal que  $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \mathcal{N} \subseteq \tilde{U}$ . Ponha  $c = \min_{t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]} f(t) > 0$  e escolha  $r > 0$  tal que  $\underline{B}_r^{d_h}(x_0) \subseteq \mathcal{N}$ . Seja  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  tal que  $2\varepsilon < cr$ . Definindo  $\tilde{V} = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times B_r^{d_h}(x_0) \subseteq [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \mathcal{N} \subseteq \tilde{U}$ . Dado  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  curva causal com  $\gamma(0), \gamma(1) \in \tilde{V}$ , escrevendo  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), \alpha(\lambda))$ , temos  $t(0), t(1) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  e  $\alpha(0), \alpha(1) \in B_r^{d_h}(x_0)$ . Sendo  $\gamma$  passado ou futuro-dirigida, é fácil ver que  $\text{Im } t \subseteq (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ . Se existe  $\lambda_0 \in (0, 1)$  tal que  $\alpha(\lambda_0) \notin B_r^{d_h}(x_0)$ . Assim,

$$L_h(\alpha|_{[0, \lambda_0]}) \geq d_h(\alpha(\lambda_0), \alpha(0)) \geq r,$$

portanto

$$0 \geq g(\gamma'(\lambda), \gamma'(\lambda)) = -t'(\lambda)^2 + f(t(\lambda))^2 h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)),$$

implicando em

$$\sqrt{h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} \leq \frac{t'(\lambda)}{f(t(\lambda))}.$$

Mas  $t(\lambda) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , logo temos

$$\sqrt{h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} \leq \frac{t'(\lambda)}{c},$$

por sua vez implicando em

$$r \leq L_h(\alpha|_{[0,1]}) \leq \frac{t(1) - t(0)}{c} < \frac{2\varepsilon}{c} < \frac{cr}{c} = r,$$

um absurdo. Isto mostra que  $\text{Im } \alpha \subseteq B_r^{d_h}(x_0)$ , por fim implicando em  $\text{Im } \gamma \subseteq \tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ .

Agora, seja  $p, q \in M$ , com  $q \leq p$  e  $q = (t_1, x_1)$ ,  $p = (t_2, x_2)$ . Queremos mostrar que  $J_M^-(p) \cap J_M^+(q) \equiv D(q, p)$  é compacto. Mostramos primeiro que tal conjunto está contido em um compacto. Fixe  $r = (t_r, x_r) \in J_M^-(p) \cap J_M^+(q)$  e seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  curva causal e futuro-dirigida de  $q$  até  $p$  e passando por  $r$ . Pondo  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), \alpha(\lambda))$ , temos  $t_1 \leq t(\lambda) \leq t_2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Em particular, para  $\lambda_0 \in [0, 1]$  tal que  $t(\lambda_0) = t_r$ ,  $\alpha(\lambda_0) = x_r$ . De maneira similar aos cálculos realizados para mostrar que  $M$  é fortemente causal, obtemos, para  $c' = \min_{t \in [t_1, t_2]} f(t)$ ,

$$d_h(x_1, x_r) \leq L_h(\alpha) \leq \frac{t_2 - t_1}{c'} \equiv r',$$

ou seja,  $D(q, p) \subseteq [t_1, t_2] \times \overline{B_{r'}^{d_h}(x_1)}$ .

Pela análise acima, precisamos apenas mostrar que  $D(q, p)$  é fechado. Suponha por contradição que  $D(q, p)$  não o seja, e escolha  $p_0 = (t_0, x_0) \in \overline{D(q, p)} \setminus D(q, p)$ . Dado  $\{p_k\}$  sequência em  $D(q, p)$  convergindo para  $p_0$  e uma sequência de curvas causais  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  futuro-inextensíveis parametrizadas por comprimento de arco em relação a alguma métrica Riemanniana completa em  $M$ , com cada uma começando em  $q$  e passando por  $p_k$  e  $p$ . Pondo  $\gamma_k(\lambda_k) = p_k$ ,  $\gamma_k(\mu_k) = p$ ,  $\lambda_k \leq \mu_k$ , e também  $\gamma_k(\lambda_k) \rightarrow p_0$ . Pelo teorema da curva limite, existe  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva causal e futuro-inextensível começando em  $q$ , tal que, a menos de subsequência,  $\{\gamma_k\}$  converge uniformemente em compactos para  $\gamma$ , com respeito a métrica completa auxiliar em  $M$ .

Suponha que  $\{\mu_k\}$  é limitada, implicando em  $\{\lambda_k\}$  também ser, logo podemos assim assumir ambas convergentes,  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$  e  $\mu_k \rightarrow \mu_0$ ,  $\lambda_0 \leq \mu_0$ . Temos portanto  $\gamma_k(\lambda_k) \rightarrow \gamma(\lambda_0) = p_0$  e  $\gamma(\mu_0) = p$ , implicando em  $p_0 \in D(q, p)$  contradizendo sua escolha na hipótese de contradição. Assim  $\{\mu_k\}$  é ilimitada.

Uma análise similar encontra a mesma contradição assumindo  $\{\lambda_k\}$  limitada com  $\{\mu_k\}$  ilimitada, logo devemos ter  $\{\lambda_k\}$  ilimitada, em que podemos assumir  $\lambda_k \rightarrow +\infty$ . Daí, para

qualquer  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda_k > \lambda$  eventualmente, portanto

$$q = \gamma_k(0) \leq \gamma_k(\lambda) \leq \gamma_k(\lambda_k) = p,$$

ou seja, cada  $\gamma_k(\lambda) \in D(q, p)$ , portanto  $\gamma(\lambda) \in \overline{D(q, p)}$ , e como  $\lambda$  foi escolhido arbitrariamente, segue que  $\gamma([0, +\infty)) \subseteq \overline{D(q, p)}$ , este último contido em um compacto. Mas isto contradiz  $M$  fortemente causal não possuir curvas causais inextensíveis aprisionadas em compactos (proposição 3.5.12). Esta última contradição mostra o desejado.

Fixe agora  $t_0 \in (a, b)$  e considere a hipersuperfície espacial  $\{t_0\} \times N$ . Seja  $\gamma : (A, B) \rightarrow M$  curva temporal futuro-dirigida e inextensível, com  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), \alpha(\lambda))$ . Sendo futuro-dirigida, temos  $t' > 0$ .

Caso  $t(\lambda) < t_0$  para todo  $\lambda \in (A, B)$ , a função  $t$  é limitada, e como é crescente, pode ser estendida para  $B$ . Sendo  $\gamma$  inextensível, devemos ter  $\alpha$  inextensível para  $B$ . Agora, fixe  $\lambda_0 \in (A, B)$ . Sendo  $\alpha|_{[\lambda_0, B]}$  inextensível em  $N$  variedade Riemanniana completa, temos

$$\lim_{s \rightarrow B} L_h(\alpha|_{[\lambda_0, s]}) = +\infty,$$

e portanto existe  $\lambda \in (\lambda_0, B)$  tal que, pondo  $\tilde{c} = \min_{s \in [t(\lambda_0), t_0]} f$ , um mesmo cálculo realizado na primeira parte da demonstração mostra que

$$\frac{t(\lambda) - t(\lambda_0)}{\tilde{c}} \geq L_h(\alpha|_{[\lambda_0, \lambda]}) > \frac{t_0 - t(\lambda_0)}{\tilde{c}},$$

um absurdo, portanto  $t(\lambda) \geq t_0$  para algum  $\lambda \in (A, B)$ . O caso análogo para a outra desigualdade mostra que  $\gamma$  intersecta  $\{t_0\} \times N$ . ■

### 3.12.2 Produtos Torcidos

Seja  $(M, g)$  é um espaço-tempo,  $(N, h)$  é uma variedade Riemanniana conexa e completa e  $f : M \rightarrow (0, +\infty)$  é uma função suave, vemos facilmente, escolhendo em  $M$  um campo vetorial temporal associado a sua orientação temporal, e em  $N$  escolhendo o campo vetorial nulo, que o produto torcido  $M \times_f N$  é um espaço tempo. Se  $(M, g)$  ainda é globalmente hiperbólico, é razoável esperar que o produto torcido também o seja, que é de fato o que temos.

**Teorema 3.12.2.** *Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico e  $(N, h)$  é uma variedade Riemanniana conexa e completa, então para qualquer função suave  $f : M \rightarrow (0, +\infty)$ , o produto torcido  $M \times_f N$  é globalmente hiperbólico.*

*Demonstração.* Verificamos primeiramente que  $M \times_f N$  é fortemente causal. Fixe  $(p, x) \in M \times N$ . Se falha causalidade forte neste ponto, existe vizinhança aberta  $\tilde{U}$  de  $(p, x)$  e uma sequência de curvas causais e futuro-dirigidas  $\gamma_k = (\alpha_k, \beta_k) : [0, 1] \rightarrow M \times N$  com extremos em  $\tilde{U}$  convergindo para  $(p, x)$  mas com imagem não contida neste aberto. Sendo  $M$  globalmente

hiperbólico, podemos ainda reduzir  $\tilde{U}$  e assumir que é da forma  $O \times N$ , com  $O$  aberto causalmente convexo e pré-compacto em  $M$ . Novamente por  $M$  ser globalmente hiperbólico,  $\text{Im } \alpha_k \subseteq O$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , portanto  $\beta_k$  deve sair de  $N$ . Por outro lado, para  $c = \min_{r \in \bar{O}} f(r)$ , temos

$$h(\beta'_k(s), \beta'_k(s)) \leq \frac{|g(\alpha'_k(s), \alpha'_k(s))|}{(f \circ \alpha_k(s))^2} \leq \frac{|g(\alpha'_k(s), \alpha'_k(s))|}{c^2},$$

e portanto

$$L_h(\beta_k) \leq \frac{L_g(\alpha_k)}{c} \leq \frac{d_M(\alpha_k(0), \alpha_k(1))}{c}.$$

Reduzindo  $N$  mais ainda, podemos assumir  $N = B_{2R}^{d_h}(x)$ , para algum  $R > 0$ . Seja  $s_k \in (0, 1)$  tal que  $\beta_k(s_k) \notin B_{2R}^{d_h}(x)$ . Assim, para  $k$  suficientemente grande,  $R \leq L_h(\beta_k)$ , e portanto

$$0 < R \leq L_h(\beta_k) \leq \frac{d_M(\alpha_k(0), \alpha_k(1))}{c} \rightarrow 0,$$

um absurdo. Isto mostra que vale causalidade forte em qualquer ponto de  $M \times_f N$ .

Para mostrar que, se  $(p, x), (q, y) \in M \times N$  com  $(p, x) \leq (q, y)$ , então  $J^+(p, x) \cap J^-(q, y)$  é compacto, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \times N$  curva causal e futuro-dirigida de  $(p, x)$  até  $(q, y)$ ,  $\gamma = (\alpha, \beta)$ . Sendo  $M$  globalmente hiperbólico,  $\alpha([0, 1]) \subseteq J_M^+(p) \cap J_M^-(q)$ , este último compacto em  $M$ . Agora, para  $c' = \min_{r \in J_M^+(p) \cap J_M^-(q)} f(r)$ , novamente temos

$$L_h(\beta) \leq \frac{L_g(\alpha)}{c'} \leq \frac{d_M(p, q)}{c'},$$

implicando em

$$d_h(\beta(s), x) \leq \frac{d_M(p, q)}{c'} < +\infty,$$

para todo  $s \in [0, 1]$ . Pondo  $R' = d_M(p, q)/c' + 1$ , vemos portanto que

$$\gamma([0, 1]) \subseteq (J_M^+(p) \cap J_M^-(q)) \times \overline{B_{R'}^{d_h}(x)},$$

ou seja  $J^+(p, x) \cap J^-(q, y)$  é pré-compacto. O argumento para verificar que  $J^+(p, x) \cap J^-(q, y)$  é fechado segue uma análise via lema da curva limite similar ao caso Robertson-Walker, e omitiremos aqui. ■

### 3.12.3 De Sitter

Relembre que o *espaço-tempo de de Sitter* é a hiperquádrica de Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  com sinal  $\epsilon = 1$  dada por

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_1 = r^2\}.$$

Como comentado no capítulo 1,  $\mathbb{S}_1^n(r)$  é hipersuperfície Lorentizana de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , conexa e geodesicamente completa de curvatura seccional constante  $1/r^2$ . Para  $q$  a forma quadrática introduzida

no capítulo 1, um cálculo simples mostra que o campo vetorial

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{t}{2r^2} \text{grad } q$$

é tangente (i.e.  $dq|_{\mathbb{S}_1^n(r)}(X) = 0$ ) e temporal em  $\mathbb{S}_1^n(r)$ , logo induz uma orientação temporal. Naturalmente, há uma homotetia entre  $\mathbb{S}_1^n(r)$  e  $\mathbb{S}_1^n(1)$ , logo podemos só considerar o caso  $r = 1$ , denotado simplesmente por  $\mathbb{S}_1^n$ .

Pode ser verificado com simples cálculo (Lichtenfelz (2009), pgs. 112-113) que  $\mathbb{S}_1^n$  é isométrico ao produto torcido  $\mathbb{R}_1^1 \times_{\cosh} \mathbb{S}^{n-1}$ , ( $\mathbb{R}_1^1$  denota a reta com métrica  $-dt^2$ ) por meio da função

$$\Phi : (t, p) \in \mathbb{R}_1^1 \times_{\cosh} \mathbb{S}^{n-1} \mapsto (\sinh(t), 0) + \cosh(t)(0, p) \in \mathbb{S}_1^n.$$

Com isto, o teorema 3.12.1 garante que de Sitter é um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

## 4 Existência de Geodésicas Maximais

Neste capítulo nos dedicamos a construir uma topologia no espaço de curvas causais que possui boas propriedades de convergência e compacidade sempre que o espaço-tempo subjacente seja fortemente causal ou globalmente hiperbólico. Esta é, de fato, a principal razão matemática para introduzir as condições causais estudadas no capítulo 3.

Com essa topologia em mãos, podemos interpretar o funcional comprimento Lorentziano (redefinido para também calcular comprimento de curvas causais  $C^0$ ) como uma função do espaço de curvas a valores reais, e seremos capazes de verificar sua semicontinuidade superior; usando isto e certas propriedades de compacidade, poderemos maximizá-lo, o que estará diretamente relacionado à existência de curvas maximais.

Para todo este capítulo fixaremos, para qualquer espaço-tempo em discussão,  $h$  como uma métrica Riemanniana completa.

### 4.1 Espaço de Curvas Causais e Topologia $C^0$

Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo (a princípio sem nenhuma restrição de causalidade). Fixado  $[a, b]$  intervalo fechado, definimos o conjunto de curvas

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M \mid \gamma \in C^0, \text{ causal e futuro-dirigida}\},$$

e definimos em  $\tilde{\mathcal{C}}$  a relação de equivalência

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha(a) = \beta(a), \alpha(b) = \beta(b) \text{ e } \text{Im } \alpha = \text{Im } \beta.$$

Definimos o *espaço de curvas causais* como o quociente  $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}/\sim$ . A classe de uma curva  $\alpha \in \tilde{\mathcal{C}}$  será denotada por  $[\alpha]$ .

**Lema 4.1.1.** *Em um espaço-tempo  $(M, g)$  causal, sejam  $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{C}}$ . Temos  $[\alpha] = [\beta]$  se e só se existe um homeomorfismo crescente  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  com  $\beta = \alpha \circ f$ .*

*Demonstração.* A implicação  $(\Leftarrow)$  é imediata. Para a outra implicação, se  $[\alpha] = [\beta]$ , sendo  $M$  causal,  $\alpha$  e  $\beta$  são injetoras. Assim, como  $\text{Im } \alpha = \text{Im } \beta$ , para cada  $t \in [a, b]$  existe um único  $s_t \in [a, b]$  tal que  $\beta(t) = \alpha(s_t)$ . Logo fica bem definida e é bijetora a função  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  dada por  $f(t) = s_t$ . Para tal  $f$  temos  $\beta(t) = \alpha(f(t))$ .

Afirmamos que  $f$  é contínua. Por contradição, se  $f$  não é contínua em algum  $t_0 \in [a, b]$ , para uma sequência  $t_k \rightarrow t_0$ ,  $f(t_k) \not\rightarrow f(t_0)$ . Por compacidade podemos assumir que a sequência  $\{f(t_k)\}_{k=1}^\infty$  converge para  $s_0 \neq f(t_0)$ . Pela continuidade de  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\beta(t_k) \rightarrow \beta(t_0) = \alpha(f(t_0))$  e  $\alpha(f(t_k)) \rightarrow \alpha(s_0)$ . Como  $\beta(t_k) = \alpha(f(t_k))$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s_0 = f(t_0)$ , uma contradição.

Sendo  $f$  bijetora e contínua,  $f$  é estritamente crescente ou decrescente, e a condição  $f(a) = a, f(b) = b$  nos dá  $f$  crescente, e assim  $f$  é homeomorfismo. ■

**Observação 4.1.2.** (i) Poderíamos de maneira equivalente trabalhar com curvas causais futuro-dirigidas definidas em intervalos compactos possivelmente distintos, e definir as relações de equivalência exigindo mesma imagem e extremos. O lema 4.1.1 tem um análogo imediato com homeomorfismos  $[c, d] \rightarrow [a, b]$ . Mas, para facilitar nossa análise em alguns teoremas, sempre o intervalo  $[a, b]$  será fixado para todas as curvas.

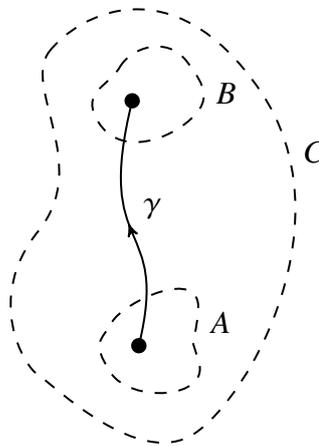
(ii) Apesar das definições iniciais fazerem sentido em espaços-tempos quaisquer, o lema 4.1.1 já indica um mal comportamento da relação de equivalência em  $\tilde{\mathcal{C}}$  se o espaço não for pelo menos causal.

Dados subconjuntos  $A, B, C \subseteq M$  com  $A, B \subseteq C$ , definimos

$$\mathcal{C}_C(A, B) = \{[\gamma] \in \mathcal{C} \mid \gamma(a) \in A, \gamma(b) \in B, \text{Im } \gamma \subseteq C\},$$

que é um subconjunto de  $\mathcal{C}$  bem definido pois, se  $\tilde{\gamma} \in [\gamma]$ ,  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a), \tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$  e  $\text{Im } \tilde{\gamma} = \text{Im } \gamma$ .

**Figura 4.1:** O subconjunto  $\mathcal{C}_C(A, B)$  em  $\mathcal{C}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

**Proposição 4.1.3.** A coleção de conjuntos  $\{\mathcal{C}_C(A, B) \mid A, B, C \text{ abertos em } M\}$  é base para uma topologia em  $\mathcal{C}$ . Tal topologia é chamada de topologia  $C^0$  no espaço de curvas causais  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Claramente  $\mathcal{C}_M(M, M) = \mathcal{C}$ . Dados  $\mathcal{C}_C(A, B)$  e  $\mathcal{C}_{C'}(A', B')$  com intersecção não vazia, então  $A \cap A', B \cap B' \subseteq C \cap C'$ , com nenhum destes vazio. Dado  $[\gamma] \in \mathcal{C}_{C \cap C'}(A \cap A', B \cap B')$ ,  $\gamma(a) \in A \cap A', \gamma(b) \in B \cap B'$  e  $\text{Im } \gamma \subseteq C \cap C'$ , implicando em  $[\gamma] \in \mathcal{C}_C(A, B) \cap \mathcal{C}_{C'}(A', B')$ . ■

A topologia  $C^0$  dá uma noção de proximidade de curvas quando suas imagens e extremos estão próximos na topologia da variedade. O próximo resultado estabelece esta equivalência.

**Proposição 4.1.4.** *Seja  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  sequência de curvas em  $\tilde{\mathcal{C}}$  e  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$ . São equivalentes*

- (i) *A sequência  $\{[\gamma_k]\}_{k=1}^\infty$  converge para  $[\gamma]$  na topologia  $C^0$ .*
- (ii)  *$\gamma_k(a) \rightarrow \gamma(a)$ ,  $\gamma_k(b) \rightarrow \gamma(b)$  e para toda vizinhança aberta  $U$  de  $\text{Im } \gamma$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  com  $\text{Im } \gamma_k \subseteq U$  para  $k \geq N$ .*

*Demonstração.* A equivalência segue facilmente das definições e da base da topologia  $C^0$ , pois  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$ , se e somente se existem abertos  $A, B$  e  $U$  de  $M$  com  $A, B \subseteq U$  tal que  $\mathcal{C}_U(A, B)$  é vizinhança de  $[\gamma]$  e  $[\gamma_k] \in \mathcal{C}_U(A, B)$  eventualmente, ou seja, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_k(a) \in A$ ,  $\gamma_k(b) \in B$  e  $\text{Im } \gamma_k \subseteq U$  para  $k \geq N$ . ■

**Observação 4.1.5.** Para simplificar a notação, e também em vista da independência de reparametrização, quando uma sequência  $\{[\gamma_k]\}_{k=1}^\infty$  converge na topologia  $C^0$ , dizemos simplesmente que  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  converge em  $C^0$ .

No capítulo 3 definimos a noção de curva limite de uma sequência de curvas. O próximo teorema relaciona convergência  $C^0$  com convergência para curvas limite no caso fortemente causal.

**Teorema 4.1.6.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal. Dada  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  sequência em  $\tilde{\mathcal{C}}$  e  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$  tal que  $\gamma_k(a) \rightarrow \gamma(a)$  e  $\gamma_k(b) \rightarrow \gamma(b)$ , são equivalentes*

- (i)  *$\gamma$  é curva limite da sequência  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ .*
- (ii) *Existe subsequência de  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  convergente na topologia  $C^0$ .*

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Com  $\gamma$  curva limite de  $\{\gamma_k\}$ , seja  $\{\gamma_{k_j}\}$  subsequência que distingue todos os pontos de  $\gamma$ . Dado  $W$  aberto contendo  $\text{Im } \gamma$ , considere  $\{C_1, \dots, C_s\}$  e  $\{V_1, \dots, V_s\}$  coberturas finitas por abertos de  $\text{Im } \gamma$  tal que cada  $C_i$  é convexo e  $V_i \subseteq C_i \subseteq W$  e cada  $V_i$  tem a propriedade de que qualquer segmento de curva causal com extremos em  $V_i$  fica inteiramente contido em  $C_i$ . Sendo  $\gamma$  curva causal e  $C^0$ , existe uma partição  $P = \{a = t_0 < \dots < t_s = b\}$  de  $[a, b]$  tal que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$ , e sendo curva limite, em particular para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$  existe uma sequência  $\{p_j^i\}_{j=1}^\infty$  com cada  $p_j^i \in \text{Im } \gamma_{k_j}$  e tal que  $p_j^i \rightarrow \gamma(t_i)$ . Pela hipótese na convergência dos pontos extremos, podemos ainda escolher  $p_j^0 = \gamma_{k_j}(a)$ ,  $p_j^s = \gamma_{k_j}(b)$ .

Fixado  $i \in \{1, \dots, s\}$ , afirmamos que, para  $j$  suficientemente grande,  $p_j^{i-1} <_{C_i} p_j^i$ . De fato, por causalidade a curva é injetora e em particular  $\gamma(t_{i-1}) \neq \gamma(t_i)$ , e isto implica, uma vez que  $M$  é Hausdorff, que eventualmente teremos  $p_j^{i-1} \neq p_j^i$ . Também, pela convergência,  $p_j^{i-1}, p_j^i \in V_i$  eventualmente, ou seja, para  $j$  suficientemente grande, o segmento de  $\gamma_{k_j}$  entre  $p_j^{i-1}$  e  $p_j^i$  fica contido em  $C_i$ , implicando alguma relação de causalidade entre os dois pontos. O caso  $p_j^i \leq_{C_i} p_j^{i-1}$  implica  $\gamma(t_i) \leq \gamma(t_{i-1})$ , uma contradição, logo  $p_j^{i-1} <_{C_i} p_j^i$  para  $j$  grande o

suficiente. Vemos então que, para  $j$  suficientemente grande de forma a satisfazer a afirmação para todo  $i$ , temos  $\text{Im } \gamma_{k_j} \subseteq W$ . Junto com a convergência dos extremos, o resultado segue pela proposição 4.1.4.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Se  $\{\gamma_{k_j}\}$  converge para  $\gamma$  na topologia  $C^0$ , definimos

$$\mathcal{J} = \left\{ t \in [a, b] \left| \begin{array}{l} \text{para todo } s \in [a, t] \text{ e } U \subseteq M \text{ aberto contendo } \gamma(s), \\ \text{existe } N_s \in \mathbb{N} \text{ tal que } j > N_s \text{ implica } \text{Im } \gamma_{k_j} \cap U \neq \emptyset \end{array} \right. \right\}.$$

Claramente,  $a \in \mathcal{J}$ , pois  $\gamma_{k_j}(a) \rightarrow \gamma(a)$ . Pondo  $t_0 = \sup \mathcal{J}$ , é imediato da definição que qualquer  $s \in [a, b]$  com  $s < t_0$  pertence a  $\mathcal{J}$ . Também, como  $t_0 \in [a, b]$ , dado  $\{t_m\}$  sequência em  $\mathcal{J}$  com  $t_m \rightarrow t_0$ , por continuidade temos  $\gamma(t_m) \rightarrow \gamma(t_0)$ . Seja  $U$  uma vizinhança qualquer de  $\gamma(t_0)$ . Podemos escolher  $m_0 \in \mathbb{N}$  com  $\gamma(t_{m_0}) \in U$ . Agora, como  $t_{m_0} \in \mathcal{J}$ , existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $j > N_0 \Rightarrow \text{Im } \gamma_{k_j} \cap U \neq \emptyset$ . Mas então, pela definição de  $\mathcal{J}$ , temos  $t_0 \in \mathcal{J}$ , e portanto  $\mathcal{J} = [a, t_0]$ . Mostramos agora que  $t_0 = b$ , pois caso contrário,  $t_0 < b$ , logo existe  $s_0$  com  $t_0 < s_0 < b$  que não é ponto limite de  $\mathcal{J}$ , ou seja, existe  $U_0$  vizinhança aberta de  $\gamma(s_0)$  tal que infinitas curvas  $\gamma_{k_j}$  não intersectam  $U_0$ , implicando em  $\gamma(b) \notin U_0$  e  $\gamma([a, t_0]) \cap U_0 = \emptyset$ . A continuidade de  $\gamma$  nos permite escolher  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma([s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]) \subseteq U_0$ . Como  $\gamma([a, s_0 - \varepsilon])$  e  $\gamma([s_0 + \varepsilon, b])$  são fechados disjuntos por compacidade e causalidade, a normalidade da topologia de variedade em  $M$  nos permite escolher abertos  $W_1$  e  $W_2$  disjuntos contendo os respectivos segmentos da curva  $\gamma$ . Vemos que  $\text{Im } \gamma \subseteq U_0 \cup W_1 \cup W_2$ , e pela convergência  $C^0$  temos em particular  $\gamma_{k_j}(a) \in W_1$ ,  $\gamma_{k_j}(b) \in W_2$  e  $\text{Im } \gamma_{k_j} \subseteq U_0 \cup W_1 \cup W_2$  eventualmente. Mas se  $\text{Im } \gamma_{k_j} \subseteq W_1 \cup W_2$ , teríamos uma contradição com a conexidade de sua imagem, logo  $\text{Im } \gamma_{k_j} \cap U_0 \neq \emptyset$ , uma contradição com a escolha de  $U_0$ , o que mostra  $t_0 = b$ , ou seja,  $\mathcal{J} = [a, b]$ , o que por sua definição implica em  $\gamma$  ser curva limite de  $\{\gamma_k\}$ . ■

**Observação 4.1.7.** No teorema acima, na demonstração da implicação (ii)  $\Rightarrow$  (i) precisamos apenas supor causalidade. O próximo exemplo mostra que não podemos enfraquecer esta hipótese.

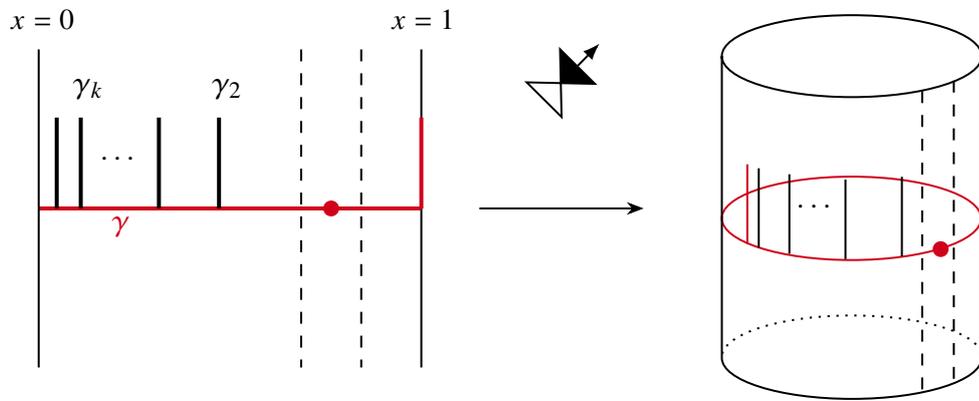
**Exemplo 4.1.8.** Em  $M = \mathbb{R}^2$ , considere a métrica  $g$  dada pelo elemento de linha  $ds_g^2 = -2dx dy$ , que é Minkowski “rotacionado em 45 graus”. Aqui, retas com  $x$  e  $y$  constantes são curvas luminosas. É fácil ver que o campo  $X = \partial_x + \partial_y$  é temporal para está métrica, definindo assim uma orientação temporal em  $M$ . Quocientamos tal espaço-tempo pelas translações  $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ , o que nos dá um cilindro com uma métrica localmente isométrica a  $g$ . De fato, é fácil ver que tal cilindro é essencialmente uma rotação do cilindro no exemplo 3.5.2, onde já mostramos que tal espaço-tempo não é causal.

Representamos tal espaço-tempo pelo quociente da faixa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$ , com as laterais identificadas (ou seja,  $(0, y) \sim (1, y)$ ). Para a curva  $\gamma : [0, 2] \rightarrow M$ , dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & 0 \leq t \leq 1 \\ (0, t - 1), & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

observe que  $\gamma(1) = (1, 0) \sim (0, 0) = \gamma(1)$ , logo está bem definida, é contínua e futuro-dirigida. Para a sequência  $\gamma_k : [0, 2] \rightarrow M$ ,  $\gamma_k(t) = (1/k, t/2)$ ,  $k \geq 2$ , temos  $\gamma_k(0) \rightarrow (0, 0) = \gamma(0)$ ,  $\gamma_k(2) \rightarrow (0, 1) = \gamma(2)$ . Também,  $\gamma_k([0, 2]) = \{1/k\} \times [0, 1]$ , portanto  $\text{Im } \gamma_k$  fica eventualmente em qualquer aberto contendo  $\text{Im } \gamma|_{[1,2]} = \{0\} \times [0, 1]$ , e portanto fica em qualquer aberto contendo  $\text{Im } \gamma$ , onde concluímos pela proposição 4.1.4 que  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$  na topologia  $C^0$ , mas vemos que  $\gamma$  não é curva limite da sequência, pois conseguimos um ponto  $p = (r, 0)$ ,  $1/2 < r < 1$  e uma faixa de largura pequena o suficiente centrada em  $p$  que não intersecta nenhuma curva  $\gamma_k$  (figura 4.2). ◀

**Figura 4.2:** Contraexemplo para o teorema 4.1.6 na ausência de causalidade.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Conhecendo como convergência na topologia  $C^0$  se relaciona com sequência de curvas e curvas limite em espaços-tempos fortemente causais, vamos agora melhor explorar tal topologia e verificar que ela possui boas propriedades. Para tais fins, o próximo lema técnico será relevante.

**Lema 4.1.9.** *Seja  $(E, d)$  um espaço métrico. Defina*

$$\Theta_E = \{A \subseteq E \mid A \text{ é não vazio, limitado e } x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0\}.$$

Então a função  $\rho_E : \Theta_E \times \Theta_E \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\rho_E(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y) \right\},$$

define uma distância em  $\Theta_E$ , chamada de métrica de Hausdorff.

*Demonstração.* Observamos que a escolha dos conjuntos no seu domínio garante que  $\rho_E$  está bem definida, é simétrica e  $\rho_E(A, A) = 0$ . Suponha agora que  $\rho_E(A, B) = 0$ . Então,  $\sup_{x \in A} d(x, B) = 0 = \sup_{y \in B} d(A, y)$ . Mas  $d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in B$ . Analogamente  $d(A, y) = 0 \Rightarrow y \in A$ , logo  $A = B$ .

Para a desigualdade triangular, sejam  $A, B, C \in \Theta_E$ . Temos, para todo  $x \in A$ ,  $y \in B$  e  $z \in C$ ,

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \\ \Rightarrow d(x, B) - d(x, z) &\leq d(y, z) \\ \Rightarrow d(x, B) - d(x, z) &\leq d(z, B) = \inf_{y \in B} d(z, y) \leq \rho_E(C, B), \end{aligned}$$

A última desigualdade ser reescrita como

$$d(x, B) - \rho_E(C, B) \leq d(x, z).$$

Como  $z \in C$  é arbitrário, temos

$$d(x, B) - \rho_E(C, B) \leq d(x, C) \leq \rho_E(A, C),$$

mostrando que  $d(x, B) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B)$  para qualquer  $x \in A$ . Uma análise análoga mostra que  $d(y, A) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B)$ , para qualquer  $y \in B$ , e tomando supremos temos  $\rho_E(A, B) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B)$ . ■

**Teorema 4.1.10.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal. Para  $\rho_M$  métrica de Hausdorff em  $\Theta_M$ ,  $M$  sendo considerado como espaço métrico  $(M, d_h)$ , a função  $H : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$H([\beta], [\gamma]) = \rho_M(\text{Im } \beta, \text{Im } \rho) + d_h(\beta)(a, \gamma(a)) + d_h(\beta)(b, \gamma(b)),$$

define uma distância para  $\mathcal{C}$ , e a topologia induzida por tal distância coincide com a topologia  $C^0$  em  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* A função  $H$  está bem definida pois a imagem de cada curva é compacta e não vazia, e também a imagem e extremos das curvas são os mesmos na classe de equivalência. Pela proposição 4.1.9 é imediato que  $H$  define uma distância em  $\mathcal{C}$ . Denotando por  $\mathcal{T}_0$  a topologia  $C^0$  em  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{T}_H$  a topologia induzida pela distância  $H$ , verificamos que as duas coincidem.

•  $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_0$ . Seja  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$  aberto na topologia gerada por  $H$ . Se  $\mathcal{A}$  não é aberto na topologia  $C^0$ , existe  $[\gamma] \in \mathcal{A}$  que não está no interior de  $\mathcal{A}$  em relação à topologia  $C^0$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  considere a cobertura aberta  $\{B_{1/k}^h(\gamma(t))\}_{t \in [a, b]}$  de  $\gamma([a, b])$ , e defina

$$C_k = \bigcup_{t \in [a, b]} B_{1/k}^h(\gamma(t)), \quad A_k = B_{1/k}^h(\gamma(a)) \text{ e } B_k = B_{1/k}^h(\gamma(b)).$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[\gamma] \in \mathcal{C}_{C_k}(A_k, B_k) \not\subseteq \mathcal{A}$ , assim construímos uma sequência  $[\gamma_k] \in \mathcal{C}_{C_k}(A_k, B_k) \setminus \mathcal{A}$ . Pela construção das vizinhanças vemos que  $\gamma_k(a) \rightarrow \gamma(a)$  e  $\gamma_k(b) \rightarrow \gamma(b)$ , e para  $W$  aberto contendo  $\text{Im } \gamma$ , um argumento padrão de análise utilizando uma cobertura finita de  $\text{Im } \gamma$  por bolas abertas e as bolas de raio  $1/k$  definidas anteriormente mostra que  $\text{Im } \gamma_k \subseteq W$

eventualmente, logo  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$  na topologia  $C^0$ .

Agora, pelo teorema 4.1.6,  $\gamma$  é curva limite da sequência  $\{\gamma_k\}$ , que podemos assumir distinguir  $\gamma$  (a menos de subsequência). Como  $\mathcal{A}$  é aberto para  $\mathcal{T}_H$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_r^H([\gamma]) \subseteq \mathcal{A}$ . Seja  $\{B_{r/4}^h(\gamma(t_1)), \dots, B_{r/4}^h(\gamma(t_l))\}$  uma cobertura finita de  $\text{Im } \gamma$  por bolas abertas, com  $t_1 = a$  e  $t_l = b$ . Podemos escolher  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $k > N_0 \Rightarrow \text{Im } \gamma_k \subseteq \bigcup_{i=1}^l B_{r/4}^h(\gamma(t_i))$ ,  $d_h(\gamma_k(a), \gamma(a)) < \frac{r}{4}$  e  $d_h(\gamma_k(b), \gamma(b)) < \frac{r}{4}$ , pela convergência na topologia  $C^0$ . Neste caso, dado  $t \in [a, b]$ ,  $\gamma_k(t) \in B_{r/4}^h(\gamma(t_i))$  para algum  $i \in \{1, \dots, l\}$ , e

$$d_h(\gamma_k(t), \text{Im } \gamma) \leq d_h(\gamma_k(t), \gamma(t_i)) < \frac{r}{4},$$

portanto  $\sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_k(t), \text{Im } \gamma) \leq \frac{r}{4}$ , para  $k > N_0$ . Também, dado  $j \in \{1, \dots, l\}$ , existe  $N_j \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Im } \gamma_k \cap B_{r/4}^h(\gamma(t_j)) \neq \emptyset$ , para  $k > N_j$ . Defina  $N = \max\{N_0, \dots, N_l\}$ . Dado  $s \in [a, b]$ ,  $\gamma(s) \in B_{r/4}^h(\gamma(t_j))$  para algum  $j$ . Se  $k > N$ ,

$$d_h(\gamma(s), \text{Im } \gamma_k) \leq d_h(\gamma(s), \gamma_k(t')),$$

para algum  $t' \in [a, b]$  com  $\gamma_k(t') \in B_{r/4}^h(\gamma(t_j))$ , logo

$$d_h(\gamma(s), \text{Im } \gamma_k) \leq d_h(\gamma(s), \gamma(t_j)) + d_h(\gamma(t_j), \gamma_k(t')) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2},$$

mostrando que  $\sup_{s \in [a, b]} d_h(\gamma(s), \text{Im } \gamma_k) \leq r/2$ , e então  $\rho_M(\text{Im } \gamma, \text{Im } \gamma_k) \leq r/2$ , o que implica, junto com as condições nos pontos extremos,  $H([\gamma], [\gamma_k]) < r$  e então  $[\gamma_k] \in B_r^H([\gamma])$ , uma contradição com a escolha dos elementos da sequência. Verificamos assim que  $\mathcal{A}$  aberto na topologia  $C^0$ .

•  $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_H$ . É suficiente mostrar que os elementos básicos da topologia  $C^0$  são abertos em  $\mathcal{T}_H$ . Dados  $A, B, C \subseteq M$  abertos com  $A, B \subseteq C$  e  $[\gamma] \in \mathcal{C}_C(A, B)$ , escolha  $\{B_r^h(\gamma(t_1)), \dots, B_r^h(\gamma(t_m))\}$  uma cobertura finita de  $\text{Im } \gamma$  por bolas com raio  $r$  tais que  $t_1 = a$ ,  $t_m = b$ ,  $B_{2r}^h(\gamma(a)) \subseteq A$ ,  $B_{2r}^h(\gamma(b)) \subseteq B$  e  $\bigcup_{i=1}^m B_{2r}^h(\gamma(t_i)) \subseteq C$ . Dado  $[\beta] \in B_r^H([\gamma])$ , pela definição da distância  $H$  temos  $d_h(\beta(a), \gamma(a))$  e  $d_h(\beta(b), \gamma(b))$  ambos menores que  $r$ , logo  $\beta(a) \in A$  e  $\beta(b) \in B$ . Além disso,  $\rho_M(\text{Im } \gamma, \text{Im } \beta) < r$ . Então, para todo  $t \in [a, b]$ ,  $d_h(\beta(t), \text{Im } \gamma) < r$ , de modo que para algum  $s_t \in [a, b]$ ,  $d_h(\beta(t), \gamma(s_t)) < r$ . Como  $\gamma(s_t) \in B_r^h(\gamma(t_j))$  para algum  $j$ , pela desigualdade triangular segue que  $d_h(\beta(t), \gamma(t_j)) < 2r$  que implica  $\beta(t) \in C$ . Sendo  $t \in [a, b]$  arbitrário,  $\text{Im } \beta \subseteq C$ , mostrando que  $[\beta] \in \mathcal{C}_C(A, B)$ , portanto  $B_r([\gamma]) \subseteq \mathcal{C}_C(A, B)$ , sendo então aberto de  $\mathcal{T}_H$ . ■

**Teorema 4.1.11.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal. Para  $A, B, C \subseteq M$  com  $A, B \subseteq C$ ,  $A, B$  fechados e  $C$  compacto, temos que  $\mathcal{C}_C(A, B)$  é compacto em  $\mathcal{C}$  na topologia  $C^0$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\mathcal{C}$  metrizável, mostramos a compacidade sequencial. Dado  $\{[\gamma_k]\}$  sequência em  $\mathcal{C}_C(A, B)$ , como  $A$  é compacto, podemos assumir  $\{\gamma_k(a)\}$  convergente para algum ponto  $p \in A$ . Aplicamos o lema da curva limite, considerando curvas causais futuro-

inextensíveis parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco  $\tilde{\gamma}_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  extensão de  $\gamma_k$  com  $\tilde{\gamma}_k(0) = \gamma_k(a) \rightarrow p$  e  $\gamma_k(b) = \tilde{\gamma}_k(s_k)$  para algum  $s_k \in [0, +\infty)$ . Obtemos  $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva causal,  $C^0$  e futuro-inextensível com  $\tilde{\gamma}(0) = p$  e  $\{\tilde{\gamma}_k\}$  convergindo uniformemente para  $\tilde{\gamma}$  em compactos (a menos de subsequência).

Como de costume analisamos a sequência  $\{s_k\}$ . Se for ilimitada, assumimos  $s_k \rightarrow +\infty$ . Para qualquer  $t \in [0, +\infty)$ , eventualmente  $s_k > t$ . Então  $\tilde{\gamma}_k(t) \in C$ , mas  $\tilde{\gamma}_k|_{[0,t]} \rightarrow \tilde{\gamma}|_{[0,t]}$  uniformemente, em particular  $\tilde{\gamma}([0, t]) \subseteq C$ . Como  $t$  é arbitrário, vemos que  $\tilde{\gamma}([0, +\infty)) \subseteq C$ . Mas então  $\tilde{\gamma}$  fica aprisionada em um compacto, contradizendo a proposição 3.5.12.

Temos então  $\{s_k\}$  limitada, que assumimos  $s_k \rightarrow s_0$ . Para  $t \in [0, +\infty)$  com  $0 \leq t < s_0$ , eventualmente  $s_k > t$ . Como anteriormente temos  $\tilde{\gamma}([0, t]) \subseteq C$ , mas também  $\tilde{\gamma}_k(s_k) \rightarrow \tilde{\gamma}(s_0) \in B$ , sendo este conjunto fechado, logo  $\tilde{\gamma}([0, s_0]) \subseteq C$ . A convergência uniforme em compactos garante também que em qualquer vizinhança aberta de  $\tilde{\gamma}|_{[0,s_0]}$  eventualmente contém os segmentos  $\tilde{\gamma}_k|_{[0,s_0]}$ . Portanto, reparametrizando  $\tilde{\gamma}|_{[0,s_0]}$  para  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  preservando sua causalidade, vemos que  $\text{Im } \gamma \subseteq C$ ,  $\gamma_k(a) \rightarrow \gamma(a) \in A$ ,  $\gamma_k(b) \rightarrow \gamma(b) \in B$  e toda vizinhança aberta de  $\text{Im } \gamma$  eventualmente contém  $\text{Im } \gamma_k$ , mostrando que  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$  e consequentemente a compacidade de  $\mathcal{C}_C(A, B)$ . ■

Sabendo que a topologia  $C^0$  é metrizável em espaços-tempos fortemente causais, em particular vale compacidade ser equivalente à compacidade sequencial, e com isto conseguimos associar compactos em  $M$  com certos compactos em  $\mathcal{C}$ .

**Corolário 4.1.12.** *Em um espaço-tempo fortemente causal,  $\mathcal{C}$  é localmente compacto na topologia  $C^0$ .*

*Demonstração.* Seja  $[\gamma] \in \mathcal{C}$ . Sendo  $M$  localmente compacto e  $\text{Im } \gamma$  compacto, existe um compacto  $K \subseteq M$  com interior não vazio tal que  $\text{Im } \gamma \subseteq \text{int}(K)$ , e portanto  $[\gamma] \in \mathcal{C}_{\text{int}(K)}(\text{int}(K), \text{int}(K))$ , que é um aberto pré-compacto pelo teorema anterior. ■

**Observação 4.1.13.** Podemos extrair da demonstração do teorema 4.1.11 o fato de que uma sequência  $\{\gamma_k\}$  em  $\tilde{\mathcal{C}}$  convergindo uniformemente para  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$  na métrica  $d_h$  implica em  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$  na topologia  $C^0$ . O próximo exemplo mostra que a recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 4.1.14.** No plano de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$ , considere a sequência de curvas  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^2$  dadas por  $\gamma(s) = (s^{k+1}, 0)$  e a curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ ,  $\gamma(s) = (s, 0)$ . Claramente todas as curvas são temporais e possuem mesma imagem, com  $\gamma_k(0) \rightarrow \gamma(0)$  e  $\gamma_k(1) \rightarrow \gamma(1)$ , logo a convergência na topologia  $C^0$  é imediata. Porém, na métrica Euclidiana usual, temos

$$\|\gamma(s) - \gamma_k(s)\|_2 = s - s^{k+1} \geq \frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} \geq \frac{1}{2},$$

logo não há convergência uniforme. ◀

Para finalizar esta seção, mostramos uma maneira equivalente de definir um espaço-tempo globalmente hiperbólico por meio da compacidade na topologia  $C^0$ . Denote, para  $p, q \in M$  com  $p < q$ ,  $\mathcal{C}(p, q) \equiv \mathcal{C}_{J^+(p) \cap J^-(q)}(\{p\}, \{q\})$ .

**Teorema 4.1.15.** *Para  $(M, g)$  fortemente causal, sejam  $p, q \in M$  com  $p < q$ . São equivalentes*

- (i)  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto em  $M$ .
- (ii)  $\mathcal{C}(p, q)$  é compacto em  $\mathcal{C}$  na topologia  $C^0$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) é imediato pelo teorema 4.1.11.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Seja  $\{x_k\}$  uma sequência em  $J^+(p) \cap J^-(q)$ . Tome  $\{\gamma_k\}$  sequência em  $\mathcal{C}$  com  $\gamma_k(a) = p$ ,  $\gamma_k(b) = q$  e  $\gamma_k(t_k) = x_k$  para algum  $t_k \in [a, b]$ . Como  $\{[\gamma_k]\}$  é uma sequência em  $\mathcal{C}(p, q)$ , que é por hipótese um conjunto compacto, podemos assumir que tal sequência converge para  $[\gamma] \in \mathcal{C}(p, q)$ . Em particular,  $\gamma(a) = p$  e  $\gamma(b) = q$ . Seja  $K \subseteq M$  um compacto com interior não vazio com  $\text{Im } \gamma \subseteq \text{int}(K)$ . Pela convergência na topologia  $C^0$  e pela compacidade de  $K$ , podemos assumir que cada  $x_k \in \text{int}(K)$  e  $x_k \rightarrow x_0 \in K$ . Se  $x_0 \notin \text{Im } \gamma$ , existem abertos disjuntos  $U, V \subseteq M$  tais que  $x_0 \in U$  e  $\text{Im } \gamma \subseteq V$ . Mas então, como  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$ , para  $k$  grande o suficiente teremos  $x_k = \gamma_k(t_k) \in U$  e  $\text{Im } \gamma_k \subseteq V$ , uma contradição. Assim,  $x_0 \in \text{Im } \gamma$ , e  $q \leq x_0 \leq p$ , logo  $x_0 \in J^+(p) \cap J^-(q)$  e  $J^+(p) \cap J^-(q)$  é compacto. ■

Em outras palavras, o conjunto de todas as curvas causais conectando dois pontos em um espaço-tempo globalmente hiperbólico é compacto na topologia  $C^0$ . Isto dá um dos ingredientes para mostrar a existência de geodésicas causais maximais no caso globalmente hiperbólico.

## 4.2 Comprimento de Arco Lorentziano

Como nosso interesse é em maximização, veremos que semicontinuidade superior de uma função sobre um compacto é suficiente para garantir a existência de um elemento maximizador.

Queremos maximizar distância, o que significa maximizar o comprimento de uma curva causal entre dois pontos, isto é, maximizar  $L_g$  entre todas as curvas causais possíveis, e a topologia  $C^0$  entra naturalmente nesta análise. Porém, nosso comprimento de arco Lorentziano  $L_g$  até agora foi definido sobre curvas suave por partes, então um trabalho preliminar será generalizar comprimentos para curvas  $C^0$  causais.

**Definição 4.2.1.** *Uma partição  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$  de  $[a, b]$  é dita ser admissível para a curva  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$  se para todo  $i \in \mathbb{N}$  existe  $C_i \subseteq M$  aberto convexo com  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq C_i$  e  $\gamma(t) \prec_{C_i} \gamma(s)$  para todo  $t, s \in [t_{i-1}, t_i]$  com  $t < s$ . Denotamos por  $\mathcal{P}_\gamma$  o conjunto das partições admissíveis de  $\gamma$ .*

Definimos, Para  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$  e  $P \in \mathcal{P}_\gamma$ ,

$$\ell_g(\gamma, P) = \sum_{i=1}^k |\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}|.$$

Observe que  $\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$  é causal e futuro-dirigido, pois  $\gamma(t_{i-1}) <_{C_i} \gamma(t_i)$ . Também, se  $Q$  é uma partição que refina  $P$  (i.e.  $Q \subseteq P$ ) então  $Q \in \mathcal{P}_\gamma$ .

**Proposição 4.2.2.** *Dados  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$ ,  $P \in \mathcal{P}_\gamma$  e  $Q$  refinamento de  $P$ , temos  $\ell_g(\gamma, Q) \leq \ell_g(\gamma, P)$ .*

*Demonstração.* Escrevendo  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ , dado  $s_j \in Q$ ,  $s_j \in [t_{i-1}, t_i]$ . Como  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq C_i$  aberto convexo, a geodésica radial de  $\gamma(t_{i-1})$  a  $\gamma(t_i)$  maximiza a distância Lorentziana entre todas as curvas causais suaves por partes futuro-dirigidas entre  $\gamma(t_{i-1})$  e  $\gamma(t_i)$  contidas em  $C_i$ , e em particular seu comprimento é maior ou igual a concatenação da geodésica radial de  $\gamma(t_{i-1})$  a  $\gamma(s_j)$  com a geodésica radial de  $\gamma(s_j)$  a  $\gamma(t_i)$ . Portanto

$$|\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(s_j)}| + |\overrightarrow{\gamma(s_j)\gamma(t_i)}| \leq |\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}|,$$

e o resultado segue indutivamente desta análise. ■

**Definição 4.2.3.** *Para  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$ , definimos seu comprimento de arco Lorentziano  $L_g(\gamma)$  como sendo*

$$L_g(\gamma) = \inf\{\ell_g(\gamma, P) \mid P \in \mathcal{P}_\gamma\}.$$

Tal valor está bem definido, pois conjunto onde o ínfimo é tomado na definição de  $L_g(\gamma)$  nunca é vazio, uma vez que podemos cobrir  $\gamma \in \tilde{\mathcal{C}}$  por uma quantidade finita de abertos convexos e extrair uma partição admissível desta construção, e  $\ell_g(\gamma, P) \geq 0$ .

Naturalmente, é possível mostrar a equivalência destas definições no caso suave, de maneira análoga ao feito no caso Riemanniano com curvas retificáveis.

**Teorema 4.2.4.** *Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal suave por partes, então*

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

A demonstração de tal resultado é uma análise um tanto longa e técnica, podendo ser vista em [Lichtenfelz \(2009\)](#), teorema 4.3.5.

**Observação 4.2.5.** Apesar da distância Lorentziana ser *a priori* definida para comprimentos de curvas suaves por partes, é de se esperar esta definição de comprimento de arco contínuo nos permita adicionar as curvas  $C^0$  causais no cálculo da distância  $d$ .

Mais precisamente, ponha  $\hat{d}$  uma função análoga à distância Lorentziana mas onde o supremo de sua definição é tomado em curvas causais,  $C^0$  e futuro-dirigidas entre pontos  $p$  e  $q$  quando  $p \leq q$ , e 0 caso contrário. No caso de não haver relação causal entre os pontos, o teorema 3.4.2 estabelece a equivalência. No outro caso, claramente  $d(p, q) \leq \hat{d}(p, q)$ . Por outro lado, dado  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  curva  $C^0$  causal de  $p$  a  $q$ , pela definição de  $L_g(\gamma)$  existe uma curva causal suave por partes  $\rho$  com  $L_g(\gamma) \leq L_g(\rho) \leq d(p, q)$ . Como  $\gamma$  é arbitrária, segue que  $\hat{d}(p, q) \leq d(p, q)$ .

Em particular, os diversos resultados obtidos anteriormente comparando  $d$  e  $L_g$  com curvas suaves por partes se transferem para o caso  $C^0$ . Destacamos em especial o teorema 3.6.9, que será futuramente referenciando em situações onde trabalhamos com curvas  $C^0$ .

Em um espaço-tempo fortemente causal, podemos também mostrar a independência de  $L_g$  por reparametrizações contínuas, isto é, se  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é um homeomorfismo crescente, então  $L_g(\gamma \circ h) = L_g(\gamma)$ . Em particular  $L_g(\gamma)$  independe de homeomorfismos crescentes entre  $[a, b]$ , logo fica bem definida a passagem para o quociente de  $\tilde{\mathcal{C}}$ , isto é, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \bar{L}_g : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\gamma] &\mapsto \bar{L}_g([\gamma]) = L_g(\gamma), \end{aligned}$$

que continuaremos a denotar por  $L_g(\gamma)$ , em vista da independência por representantes, e que também chamaremos de funcional de comprimento (de arco) Lorentziano. Antes de mostrar a relação fundamental entre topologia  $C^0$  e o funcional de comprimento Lorentziano  $L_g$ , relembremos a seguinte equivalência para a definição de semicontinuidade em espaços métricos.

**Proposição 4.2.6.** *Se  $X$  é um espaço métrico, uma função  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  é semicontínua superiormente (semitínua inferiormente) em  $x_0 \in X$  se e somente se para toda sequência  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  de  $X$  convergindo para  $x_0$  temos  $\limsup f(x_k) \leq f(x_0)$  ( $\liminf f(x_k) \geq f(x_0)$ ).*

*Demonstração.* Fazemos o caso contínuo superiormente. O outro caso é análogo.

( $\Rightarrow$ ) Por contradição, se existe sequência  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  convergente para algum  $x_0$  mas  $\limsup f(x_k) > f(x_0)$ , seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x_0) + \varepsilon < \limsup f(x_k)$ . Considere uma subsequência  $\{x_{k_j}\}$  tal que  $f(x_{k_j}) > f(x_0) + \varepsilon$ . Pela semicontinuidade superior de  $f$ , existe  $U$  vizinhança de  $x_0$  tal que  $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ . Mas  $x_{k_j} \rightarrow x_0$ , portanto  $x_{k_j} \in U$  eventualmente, implicando em  $f(x_{k_j}) < f(x_0) + \varepsilon$ , uma contradição.

( $\Leftarrow$ ) Se  $f$  não é semicontínua superiormente em  $x_0 \in X$ , existe  $\varepsilon > 0$  e uma sequência convergente  $x_k \rightarrow x_0$  com  $f(x_k) \geq f(x_0) + \varepsilon$ , e portanto  $\limsup f(x_k) \geq f(x_0) + \varepsilon > f(x_0)$ , contradizendo a hipótese. ■

**Teorema 4.2.7.** *Se  $(M, g)$  é fortemente causal, o funcional  $L_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  é semicontínuo superiormente em relação à topologia  $C^0$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista algum  $[\gamma] \in \mathcal{C}$  onde falha a semicontinuidade superior. Então, pela proposição 4.2.6 existe  $\varepsilon > 0$  e uma sequência  $\{[\gamma_k]\}$  em  $\mathcal{C}$  com  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$  e  $L_g(\gamma_k) \geq L_g(\gamma) + \varepsilon$ . Seja  $P = \{a = t_0 < \dots < t_l = b\} \in \mathcal{P}_\gamma$  tal que

$$L_g(\gamma) \leq \ell_g(\gamma, P) < L_g(\gamma) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam  $\{C_1, \dots, C_l\}$  cobertura de  $\text{Im } \gamma$  por abertos convexos e  $\{V_1, \dots, V_l\}$  outra cobertura por abertos causalmente convexos com  $V_i \subseteq C_i$ ,  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$  e  $\gamma(t) <_{C_i} \gamma(s)$  para

$t_{i-1} \leq t < s \leq t_i$ . Como a aplicação  $(p, q) \in C_i \times C_i \mapsto |\overrightarrow{pq}| \in \mathbb{R}$  é contínua em cada  $i = \{1, \dots, l\}$ , existem abertos  $W_0, \dots, W_l$  tais que, para  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,  $\gamma(a) \in W_0 \subseteq V_1$ ,  $\gamma(t_i) \in W_i \subseteq V_{i-1} \cap V_i$ , e para todo  $p \in W_{i-1}, q \in W_i$  temos

$$|\overrightarrow{pq}| < |\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}| + \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Também, pela convergência  $C^0$ , a menos de subsequência, para  $k$  suficientemente grande temos  $\text{Im } \gamma_k \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_l$ ,  $\text{Im } \gamma_k \cap W_i \neq \emptyset$  para todo  $i = \{1, \dots, l\}$ ,  $\gamma_k(a) \in W_0$  e  $\gamma_k(b) \in W_l$ , o que dá

$$L_g(\gamma_k|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq |\overrightarrow{\gamma_k(t_{i-1})\gamma_k(t_i)}| < |\overrightarrow{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}| + \frac{\varepsilon}{2l},$$

e somando, obtemos

$$L_g(\gamma) < \ell_g(\gamma, P) + \frac{\varepsilon}{2} < L_g(\gamma) + \varepsilon,$$

um absurdo. ■

Como corolário, temos uma versão um tanto mais geral para a relação entre  $\limsup$  e  $L_g$  que exige apenas convergência uniforme em relação a uma métrica Riemanniana completa. Este resultado é devido originalmente a Eschenburg e Galloway.

**Corolário 4.2.8.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo qualquer. Se  $\{\gamma_k\}$  é uma sequência de curvas  $\alpha_k : [a, b] \rightarrow M$  causais,  $C^0$ , futuro-dirigidas e parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco convergindo  $d_h$ -uniformemente para uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  causal,  $C^0$  e futuro-dirigida, então*

$$L_g(\gamma) \geq \limsup L_g(\gamma_k).$$

*Demonstração.* Seja  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b\}$  partição de  $[a, b]$  e  $\{C_1, \dots, C_l\}$  cobertura de  $\gamma$  por abertos convexos tais que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq C_i$ . Pela convergência uniforme, eventualmente  $\gamma_k([t_{i-1}, t_i]) \subseteq C_i$ . Como as subvariedades abertas  $(C_i, g|_{C_i})$  são fortemente causais (proposição 3.5.10) temos, pelo teorema 4.2.7 junto com o fato que convergência  $d_h$ -uniforme implica convergência  $C^0$ ,

$$L_g(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \geq \limsup L_g(\gamma_k|_{[t_{i-1}, t_i]}),$$

e o resultado segue somando em  $i = 1, \dots, l$  devido a subaditividade do  $\limsup$ . ■

## 4.2.1 Existência de Geodésicas Causais Maximais

Temos agora todos os meios para demonstrar a existência de geodésicas causais maximizantes em espaços-tempos globalmente hiperbólicos. Antes, apenas relembramos o seguinte resultado relacionando maximização e semicontinuidade.

**Teorema 4.2.9.** *Seja  $X$  espaço topológico Hausdorff e compacto, e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  semicontínua superiormente (semicontínua inferiormente). Então  $f$  atinge um máximo (mínimo). Além disso, se  $\{x_k\}$  converge para  $x$  ponto de máximo (mínimo) e  $f(x_k) \rightarrow y$ , então  $y \geq f(x)$  ( $y \leq f(x)$ ).*

*Demonstração.* Novamente, mostramos o caso em que  $f$  é semicontínua inferiormente, sendo o outro análogo.

Por contradição, se  $f$  não é limitada inferiormente, podemos escolher uma sequência  $\{x_k\}$  em  $X$  tal que  $f(x_k) < -k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Podemos assumir  $x_k \rightarrow x_0$  pela compacidade. A semicontinuidade inferior de  $f$  garante que existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  tal que, para todo  $y \in U$ ,  $f(y) > f(x_0) - 1$ . Mas para  $k$  suficientemente grande,  $f(x_k) < f(x_0) - 1$  e  $x_k \in U$ , uma contradição. Existe portanto  $a = \inf\{f(x) \mid x \in X\} > -\infty$  e  $f$  é limitada inferiormente.

Sendo limitada inferiormente, buscamos um mínimo. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , escolha  $a_k \in X$  com  $a + 1/k > f(a_k) \geq a$ . Podemos novamente assumir  $a_k \rightarrow a_0 \in X$ . Suponha  $f(a_0) > a$  e escolha  $\delta > 0$  com  $f(a_0) > a + \delta$ . Pondo  $\varepsilon = f(a_0) - a - \delta > 0$ , existe vizinhança aberta  $V$  de  $a_0$  tal que, para todo  $x \in V$ ,  $f(x) > f(a_0) - \varepsilon = a + \delta$ . Eventualmente,  $a_k \in V$  e  $1/k < \delta$ , logo  $f(a_k) > a + \delta$ , implicando em  $a + \delta > a + 1/k > f(a_k)$ , uma contradição. Assim  $f(a_0) = a$ , e o mínimo é atingido.

Para a segunda afirmação, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que para todo  $z \in U$  temos  $f(z) > f(x) - \varepsilon$ . Mas para  $k$  suficientemente grande,  $x_k \in U$  logo  $f(x_k) > f(x) - \varepsilon$ , portanto  $y \leq f(x) - \varepsilon$ . Como isto vale para  $\varepsilon$  arbitrário,  $y \leq f(x)$ . ■

**Corolário 4.2.10.** *Seja  $(M, g)$  espaço-tempo fortemente causal. Dados  $K \subseteq M$  compacto,  $p, q \in M$  com  $p < q$ , se  $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq K$ , então existe geodésica causal maximal de  $p$  a  $q$ . Em particular,  $d(p, q) < +\infty$ .*

*Demonstração.* Sendo  $L_g$  semicontínua superiormente, pelo teorema 4.2.9 existe uma curva  $[\gamma]$  em  $\mathcal{C}(p, q)$  que maximiza  $L_g$ . Como  $d(p, q)$  é o supremo de tais curvas, segue que

$$d(p, q) = L_g(\gamma) < +\infty,$$

ou seja,  $\gamma$  maximiza a distância, e portanto é pré-geodésica causal. ■

E como corolário imediato vem o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 4.2.11.** *Se  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico e  $p < q$ , então existe uma geodésica causal maximal de  $p$  a  $q$ .*

Verifica-se ainda a continuidade da distância Lorentziana neste caso, em contraste com sua semicontinuidade inferior em espaços-tempos mais gerais.

**Corolário 4.2.12.** *Se  $(M, g)$  é globalmente hiperbólico, então  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.*

*Demonstração.* Vimos que no caso globalmente hiperbólico,  $d(p, q) < +\infty$  em todo  $M$ , e sempre vale semicontinuidade inferior.

Suponha por contradição que  $d$  não é semicontínua superiormente. Então existem sequências  $\{p_k\}, \{q_k\}$  com  $p_k \rightarrow p, q_k \rightarrow q$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $d(p_k, q_k) \geq d(p, q) + \varepsilon$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular,  $0 < d(p_k, q_k) < +\infty$ , portanto existe  $\alpha_k : [a, b] \rightarrow M$  curva causal, futuro-dirigida com  $\alpha_k(a) = p_k, \alpha_k(b) = q_k$  e  $L_g(\alpha_k) > d(p_k, q_k) - \varepsilon/2 \geq d(p, q) + \varepsilon/2$ .

Fixados pontos  $p^- \in I^-(p)$  e  $q^+ \in I^+(q)$ , como  $p, q \in I^+(p^-) \cap I^-(q^+)$ , eventualmente teremos  $p_k, q_k \in I^+(p^-) \cap I^-(q^+)$ , o que implicará em  $\text{Im } \alpha_k \subseteq J^+(p^-) \cap J^-(q^+) \equiv \mathcal{J}$  (este último conjunto compacto em  $M$ ), ou seja,  $[\alpha_k] \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$  para  $k$  grande. Sendo tal conjunto compacto na topologia  $C^0$ , podemos assumir  $[\alpha_k] \rightarrow [\alpha] \in C_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ , onde  $\alpha(a) = p$ , e  $\alpha(b) = q$ . Pela semicontinuidade superior do comprimento Lorentziano, temos

$$d(p, q) \geq L_g(\alpha) \geq \limsup L_g(\alpha_k) \geq d(p, q) + \frac{\varepsilon}{2},$$

um absurdo. ■

Finalizamos o capítulo com um resultado técnico importante para os próximos capítulos, cuja demonstração envolve resultados da teoria de causalidade e topologia  $C^0$ .

**Teorema 4.2.13.** *Seja  $A \subseteq M$  conjunto acronal,  $p \in \text{int}(D(A)) \setminus (A \cup I^-(A))$ . Então, existe uma geodésica temporal e futuro-dirigida  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  inteiramente contida em  $D^+(A)$  tal que  $\alpha(a) = p$  e  $L_g(\alpha) = d(A, p)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  uma curva causal e futuro-dirigida com  $\beta(0) \in A$  e  $\beta(b) = p$ . Mostramos o resultado por uma série de afirmações.

**Afirmção 1.**  $\beta([0, b]) \subseteq J^-(p) \cap D^+(A)$ .

Imediatamente,  $\beta([0, b]) \subseteq J^-(p)$ . Fixe  $t \in [0, b]$ . Se  $\beta(t) \in A$ , nada a fazer. Assim, se  $\beta(t) \notin A$ , escolha  $p' \in I^+(p) \cap D(A) \subseteq D^+(A)$ . Como  $\beta(t) \leq p \ll p'$ , escolha  $\alpha$  curva temporal passado-inextensível começando em  $p'$  e passando por  $\beta(t)$ , que intersecta  $A$ . Se tal interseção se dá antes de  $\beta(t)$ , então como  $\beta(0) \leq \beta(t)$ , teríamos uma contradição com a acrolidade de  $A$ . Assim a intersecção se dá após  $\beta(t)$  e  $\beta(t) \in I^+(A)$ , implicando em  $\beta|_{[t, b]} \subseteq I^+(A)$ . Agora, para qualquer  $\gamma$  curva causal passado-inextensível começando em  $\beta(t)$ . Como a concatenação de  $\gamma$  com  $\beta|_{[t, b]}$  é uma curva causal passado-inextensível, deve intersectar  $A$ . Tal interseção não se dá no segmento de  $\beta$ , logo  $\gamma$  intersecta  $A$ , mostrando que  $\beta(t) \in D^+(A)$ .

**Afirmção 2.**  $A \cap J^-(p)$  é fechado.

Seja  $\{x_k\}$  sequência em  $A \cap J^-(p)$  sequência convergente para algum  $x$ . Temos  $A \cap J^-(p) \subseteq D^+(A) \cap J^-(p)$ , que é compacto pela proposição 3.9.15. Assim,  $x \in D^+(A) \cap J^-(p) \subseteq J^-(p)$ . Agora, se  $x \in D^+(A) \setminus A \subseteq I^+(A)$ , então  $x_k \in I^+(A)$  eventualmente, violando a acronalidade de  $A$ . Portanto temos  $x \in A$ .

**Afirmção 3.**  $J^-(p) \cap D^+(A) \subseteq \text{int}(D(A))$ .

Suponha que a afirmação seja falsa, e tome  $x \in J^-(p) \cap D^+(A) \cap \partial D(A)$ . Agora, a escolha de  $p$

na hipótese garante que  $p \in I^-(D^+(A)) \cap D^+(A)$ , logo  $x \notin H^+(A)$ , e portanto  $x \in H^-(A)$ , uma contradição pois  $x \in D^+(A)$ .

Agora, como  $J^-(p) \cap D^+(A) \subseteq \text{int}(D(A))$ , este último um conjunto globalmente hiperbólico, em particular vale causalidade forte em  $J^-(p) \cap D^+(A)$ . Sendo também compacto, temos que o conjunto na topologia  $C^0$  de  $\text{int}(D(A))$ , temos  $\mathcal{C}_{J^-(p) \cap D^+(A)}(J^-(p) \cap A, \{p\})$  compacto, que pela afirmação 1 contém todas as curvas causais futuro-dirigidas de  $A$  até  $p$ , que é não vazio pois  $p \in I^+(A)$ . A maximização de  $L_g$  em compactos na topologia  $C^0$  nos garante a existência de uma curva causal  $\alpha$  de  $A$  até  $p$  maximizante entre todas tais possíveis curvas, isto é,

$$d(A, p) = L_g(\alpha),$$

que é uma pré-geodésica temporal, uma vez que  $p \in I^+(A)$ . ■

## 5 Linhas e Raios Geodésicos

Em variedades Riemannianas  $(M, h)$  completas e não compactas, em qualquer ponto  $p \in M$  sempre existem raios geodésicos começando em  $p$ , isto é, geodésicas começando em  $p$ , com domínio em  $[0, +\infty)$  e tal que todos os seus segmentos são curvas minimizantes. A ideia da construção de tais curvas começando em um ponto  $p$  passa por uma sequência “arbitrariamente distante” de  $p$ , que pode ser conectada a  $p$  por uma geodésica minimizante devido a completude de  $M$ . Considerando os vetores tangentes de tais curvas no ponto  $p$ , a geodésica obtida pela aplicação exponencial do limite destes vetores pode ser verificada como tal raio (ver [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#), p. 271 ou [O’Neill \(1983\)](#), exercício 5.12 para maiores detalhes desta construção).

Conhecendo que o análogo de completude para geometria Lorentziana corresponde a espaços-tempos globalmente hiperbólicos, estudamos neste capítulo os análogos de raios e linhas em espaços-tempos, considerando curvas maximizantes no lugar de minimizantes.

Para as aplicações de raios e linhas nos teoremas de singularidade, no entanto, é interessante não só considerar espaços-tempos globalmente hiperbólicos, como também o caso deles serem apenas fortemente causais. Mostramos no capítulo anterior a existência de geodésicas causais maximizantes no caso globalmente hiperbólico, o que é falso para espaços-tempos fortemente causais em geral, e assim precisaremos buscar condições para existência de geodésicas causais maximais no caso fortemente causal, que é o primeiro tópico a ser explorado neste capítulo.

### 5.1 Curvas Quase Maximais e Geodésicas Maximais

Sejam  $(M, g)$  um espaço-tempo arbitrário e  $p, q \in M$  tais que  $p < q$ . Para  $d$  a distância Lorentziana em  $M$ , lembre-se que se  $d(p, q) = 0$ , então qualquer curva causal futuro-dirigida  $\gamma$  de  $p$  até  $q$  tem comprimento nulo. Assim,  $\gamma$  é pré-geodésica luminosa, e neste caso também maximal. Considere  $d(p, q) > 0$  (se e só se  $p \ll q$ ). Se  $d(p, q) < +\infty$ , então dado  $\varepsilon > 0$  existe uma curva causal futuro-dirigida  $\gamma$  tal que

$$d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma) \leq d(p, q).$$

Uma curva  $\gamma$  nestas condições é chamada de *quase maximal*.

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal e futuro-dirigida entre pontos  $p, q \in M$  com  $p < q$  e tal que  $d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma) < +\infty$ , então, dados  $s, t \in [a, b]$  com  $s < t$ , temos

$$L_g(\gamma|_{[s,t]}) \geq d(\gamma(s), \gamma(t)) - \varepsilon.$$

De fato, suponha que  $L_g(\gamma|_{[s_0, t_0]}) < d(\gamma(s_0), \gamma(t_0)) - \epsilon$  para certos  $s_0, t_0 \in [0, 1]$  com  $s_0 < t_0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 L_g(\gamma) &= L_g(\gamma|_{[a, s_0]}) + L_g(\gamma|_{[s_0, t_0]}) + L_g(\gamma|_{[t_0, b]}) \\
 &\leq d(\gamma(a), \gamma(s_0)) + L_g(\gamma|_{[s_0, t_0]}) + d(\gamma(t_0), \gamma(b)) \\
 &\leq d(\gamma(a), \gamma(s_0)) + d(\gamma(s_0), \gamma(t_0)) - \epsilon + d(\gamma(t_0), \gamma(b)) \\
 &\leq d(\gamma(a), \gamma(b)) - \epsilon \\
 &= d(p, q) - \epsilon,
 \end{aligned}$$

uma contradição.

A primeira construção, entre pontos com distância Lorentziana finita, relaciona o limite de curvas quase maximais com uma curva maximal. Com este objetivo, o próximo lema será útil, cuja demonstração pode ser vista em [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#), lema 3.29.

**Lema 5.1.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal. Se  $\gamma$  é uma curva limite de uma sequência  $\{\gamma_k\}$  de curvas causais futuro-dirigidas, então  $\gamma$  é uma curva causal futuro-dirigida.*

**Proposição 5.1.2.** *Sejam  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal e  $p, q \in M$  tais que  $0 < d(p, q) < +\infty$ . Suponha que existam sequências  $\{p_k\}$  e  $\{q_k\}$  em  $M$  com  $p_k \leq q_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  e tais que  $p_k \rightarrow p$  e  $q_k \rightarrow q$ . Além disso, para cada  $k, \gamma_k : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal e futuro-dirigida de  $p_k$  a  $q_k$  tal que*

$$0 < d(p_k, q_k) - \epsilon_k \leq L_g(\gamma_k) \leq d(p_k, q_k),$$

onde  $\epsilon_k > 0$  é tal que  $\epsilon_k \rightarrow 0$ . Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva limite da sequência  $\{\gamma_k\}$  com  $\gamma(a) = p$  e  $\gamma(b) = q$ , então  $L_g(\gamma) = d(p, q)$ . Em particular,  $\gamma$  é uma pré-geodésica causal maximal de  $p$  a  $q$ .

*Demonstração.* Pelo lema 5.1.1,  $\gamma$  é uma curva causal futuro-dirigida, e por um lado sempre vale  $d(p, q) \geq L_g(\gamma)$ . Também, pelo teorema 4.1.6 existe uma subsequência  $\{\gamma_{k_j}\}$  que converge para  $\gamma$  na topologia  $C^0$ . Como  $\mathcal{C}$  é metrizável e o funcional comprimento de arco Lorentziano é semicontínuo superiormente para espaços-tempos fortemente causais (teorema 4.2.7) então temos

$$\begin{aligned}
 L_g(\gamma) &\geq \limsup L_g(\gamma_{k_j}) \\
 &\geq \limsup (d(p_{k_j}, q_{k_j}) - \epsilon_{k_j}) \\
 &\geq \liminf (d(p_{k_j}, q_{k_j}) - \epsilon_{k_j}) \\
 &= \liminf d(p_{k_j}, q_{k_j}) \\
 &\geq d(p, q),
 \end{aligned}$$

a última desigualdade devido a semicontinuidade inferior da distância Lorentziana. A última afirmação segue do teorema 3.6.9. ■

Estudamos agora uma segunda construção de curvas maximais em espaços-tempos fortemente causais, que incluem pontos com distância Lorentziana infinita. Como de costume, fixe  $h$  uma métrica Riemanniana completa em  $M$ . Também, fixe  $p_0 \in M$  um ponto qualquer e defina, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{B}_m = \{q \in M \mid d_h(p_0, q) \leq m\},$$

a bola fechada de raio  $m$  e centrada em  $p_0$  na distância  $d_h$  induzida pela métrica  $h$ . Pelo teorema de Hopf-Rinow, cada  $\bar{B}_k$  é compacto. Claramente a coleção  $\{\bar{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forma uma exaustão por compactos de  $M$ .

Consideramos também a restrição da distância Lorentziana a caminhos em  $\bar{B}_m$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , defina  $d[\bar{B}_m] : \bar{B}_m \times \bar{B}_m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  por

$$d[\bar{B}_m](p, q) = \begin{cases} \sup\{L_g(\gamma) \mid [\gamma] \in \mathcal{C}_{\bar{B}_m}(\bar{B}_m, \bar{B}_m) \text{ com } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}, & \text{se } p \leq_{\bar{B}_m} q, \\ 0, & \text{se } p \not\leq_{\bar{B}_m} q. \end{cases}$$

Imediatamente vemos que  $d[\bar{B}_m](p, q) \leq d(p, q)$ . É fácil ver que vale a desigualdade triangular reversa para  $d[\bar{B}_m]$ , bastando repetir a demonstração com curvas dentro de  $\bar{B}_m$ . Também, ressaltamos que  $d[\bar{B}_m]$  não é simplesmente a restrição de  $d$  a  $\bar{B}_m \times \bar{B}_m$ , pois ela só diz respeito a curvas com imagem contidas em  $\bar{B}_m$ . Ainda assim conseguimos relacionar  $d$  com o limite  $m \rightarrow +\infty$  em  $d[\bar{B}_m]$ .

**Lema 5.1.3.** *Em um espaço-tempo  $(M, g)$  fortemente causal, para todo  $p, q \in M$ , temos*

$$d(p, q) = \lim_{m \rightarrow +\infty} d[\bar{B}_m](p, q).$$

*Demonstração.* Caso  $d(p, q) = 0$ , como  $d[\bar{B}_m](p, q) \leq d(p, q)$  o resultado é imediato. Suponha então que  $0 < d(p, q) < +\infty$ . Da definição de  $d$  podemos escolher uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas  $\{\gamma_k\}$  tais que  $L_g(\gamma_k) \rightarrow d(p, q)$ . Como a imagem de cada  $\gamma_k$  é compacta em  $M$ , então  $\text{Im } \gamma_k$  é limitada, logo existe  $m_k$  com  $\text{Im } \gamma_k \subseteq \bar{B}_{m_k}$  se  $m \geq m_k$ . Também, para todo  $k \in \mathbb{N}$  temos  $L_g(\gamma_k) \leq d[\bar{B}_{m_k}](p, q)$ , e então,

$$d(p, q) = \lim_{k \rightarrow +\infty} L_g(\gamma_k) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} d[\bar{B}_m](p, q),$$

e como sempre vale  $d[\bar{B}_m](p, q) \leq d(p, q)$ , o resultado segue. O caso  $d(p, q) = +\infty$ , escolhemos  $L_g(\gamma_k) \geq k$  e o argumento é análogo. ■

Fixamos agora uma notação para simplificar a discussão envolvendo segmentos de curvas. Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é uma curva causal futuro-dirigida em um espaço-tempo  $M$  causal, para  $s < t$  com  $\gamma(s) = p$ ,  $\gamma(t) = q$ , escrevemos  $\gamma|_{[s, t]} \equiv \gamma[p, q]$ .

Para espaços-tempos fortemente causais, a distância  $d$  e as  $d[\bar{B}_m]$  estão relacionados pela seguinte relação de semicontinuidade inferior.

**Lema 5.1.4.** *Sejam  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal e  $p, q \in M$ . Se  $p_k \rightarrow p, q_k \rightarrow q$ , então*

$$d(p, q) \leq \liminf d[\bar{B}_k](p_k, q_k).$$

*Demonstração.* O caso  $d(p, q) = 0$  é imediato. Suponha que  $0 < d(p, q) < +\infty$ . Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < d(p, q) - \varepsilon$ . Pela definição de  $d$  e por argumentos variacionais podemos encontrar  $\gamma$  curva temporal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  com  $d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma) \leq d(p, q)$ . Escolha os pontos  $p'$  e  $q'$  sobre  $\gamma$  tal que  $d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma[p', q']) \leq d(p, q)$  e  $p \ll p' \ll q' \ll q$ . Como  $I^-(p')$  e  $I^+(q')$  são conjuntos abertos em  $M$  contendo  $p$  e  $q$ , respectivamente, uma vez que  $p_k \rightarrow p, q_k \rightarrow q$ , eventualmente  $p_k \in I^-(p')$  e  $q_k \in I^+(q')$ . Ou seja,  $p_k \ll p' \ll q' \ll q_k$  para  $k$  suficientemente grande. Também  $\text{Im } \gamma \subseteq \bar{B}_N$  para algum  $N \in \mathbb{N}$ , logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\text{Im } \gamma \subseteq \bar{B}_k, p_k \in J^-(p', \bar{B}_k)$  e  $q_k \in J^+(q', \bar{B}_k)$  para  $k$  suficientemente grande. Assim,

$$d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma[p', q']) \leq d[\bar{B}_k](p_k, q_k)$$

para  $k$  suficientemente grande. Então

$$d(p, q) - \varepsilon < L_g(\gamma[p', q']) \leq \liminf d[\bar{B}_k](p_k, q_k)$$

como isto vale para qualquer  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, segue que

$$d(p, q) \leq \liminf d[\bar{B}_k](p_k, q_k).$$

Para o caso  $d(p, q) = +\infty$ , para cada  $m \in \mathbb{N}$  escolha curvas temporais  $\gamma_m$  de  $p$  a  $q$  com  $L_g(\gamma_m) \geq m$ . Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, para  $k$  grande o suficiente temos  $d[\bar{B}_k](p_k, q_k) \geq m - \varepsilon$ , logo  $\lim d[\bar{B}_k](p_k, q_k) = +\infty$ . ■

Como estamos assumindo causalidade forte, distâncias Lorentzianas infinitas são de fato possíveis, mas cada  $\bar{B}_m$  é compacto, implicando em  $\mathcal{C}_{\bar{B}_m}(\bar{B}_m, \bar{B}_m)$  é compacto na topologia  $C^0$ , vamos buscar um análogo do corolário 4.2.10 para este caso, que mostrará  $d[\bar{B}_m]$  sempre finito e a distância  $d[\bar{B}_m]$  entre dois pontos  $p, q \in \bar{B}_m$  com  $p \leq_{\bar{B}_m} q$  é sempre realizada por uma curva dentro de  $\bar{B}_m$ .

**Lema 5.1.5.** *Seja  $(M, g)$  espaço-tempo fortemente causal e  $m \in \mathbb{N}$ . Se  $q \in J^+(p, \bar{B}_m)$ , então  $d[\bar{B}_m](p, q) < +\infty$  e existe uma curva  $\gamma$  causal futuro-dirigida em  $\bar{B}_m$  de  $p$  a  $q$  tal que  $L_g(\gamma) = d[\bar{B}_m](p, q)$ .*

*Demonstração.* Caso  $d[\bar{B}_m](p, q) = 0$ , como  $q \in J^+(p, \bar{B}_m)$  e  $p \neq q$ , então existe uma curva  $\gamma$  causal futuro-dirigida em  $\bar{B}_m$  de  $p$  a  $q$ . Pela definição de  $d[\bar{B}_m]$ , temos

$$0 \leq L_g(\gamma) \leq d[\bar{B}_m](p, q) = 0,$$

e portanto  $L_g(\gamma) = 0 = d[\bar{B}_m](p, q)$ .

Considere então  $d[\bar{B}_m](p, q) > 0$ . Temos  $p < q$  e neste caso, uma vez que o funcional  $L_g$  é semicontínuo superiormente e  $\mathcal{C}_{\bar{B}_m}(\bar{B}_m, \bar{B}_m)$  é compacto na topologia  $C^0$ , ele atinge um máximo finito em uma curva  $[\gamma] \in \mathcal{C}_{\bar{B}_m}(\bar{B}_m, \bar{B}_m)$  (teoremas 4.2.7 e 4.2.9), logo, por definição,  $d[\bar{B}_m](p, q) = L_g(\gamma) < +\infty$ . ■

Seja  $p, q \in M$  pontos distintos com  $p < q$ . Temos que existe uma curva  $\gamma_0$  causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$ . Para  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Im } \gamma_0 \subseteq \bar{B}_N$ , assim  $q \in J^+(p, \bar{B}_k)$  para todo  $k \geq N$ . Pelo lema 5.1.5 podemos obter uma sequência  $\{\gamma_k\}$  de curvas causais futuro-dirigidas com  $\text{Im } \gamma_k \subseteq \bar{B}_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  e tais que  $L_g(\gamma_k) = d[\bar{B}_k](p, q)$  para  $k \geq N$ . No caso da sequência de curvas ter um limite, obtemos um análogo da proposição 5.1.2.

**Proposição 5.1.6.** *Sejam  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal e  $p, q \in M$  pontos distintos tais que  $p < q$ . Para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, seja  $\gamma_k$  uma curva causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  dentro de  $\bar{B}_k$  com  $d[\bar{B}_k](p, q) = L_g(\gamma_k)$ . Se existe curva  $\gamma$  causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  tal que  $[\gamma_k] \rightarrow [\gamma]$ , então  $d(p, q) = L_g(\gamma)$ , e em particular  $\gamma$  é pré-geodésica causal.*

*Demonstração.* Valendo a primeira afirmação, o fato de  $\gamma$  ser pré-geodésica causal segue por sua maximização (teorema 3.6.9). Agora, devido ao lema 5.1.4 e a semicontinuidade superior de  $L_g$ , temos

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq \liminf d[\bar{B}_k](p, q) \\ &= \liminf L_g(\gamma_k) \\ &\leq \limsup L_g(\gamma_k) \leq L_g(\gamma) \leq d(p, q). \end{aligned}$$

■

Considere agora pontos distintos em um espaço-tempo fortemente causal  $(M, g)$  com  $p \leq q$ , e considere uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas  $\{\gamma_k\}$  de  $p$  a  $q$  como no enunciado da proposição 5.1.6. Apesar de sempre podemos extrair uma curva limite  $\gamma$  causal de tal sequência começando em  $p$ , não podemos concluir imediatamente que  $\gamma$  passa por  $q$ , a não ser que  $M$  seja globalmente hiperbólico. De fato, se  $d(p, q) = +\infty$ , não existe uma curva causal maximal de  $p$  até  $q$ , logo nenhuma curva limite de  $\{\gamma_k\}$  começando em  $p$  pode passar por  $q$ . Mas no caso da 5.1.6, a hipótese de que  $\gamma$  liga  $p$  a  $q$ , junto com sua demonstração garantem que  $d(p, q) < +\infty$ . Por outro lado,  $d(p, q) < +\infty$  não implica que uma sequência  $\{\gamma_k\}$  causal ligando  $p$  a  $q$  possui uma curva limite  $\gamma$  começando em  $p$  e passando por  $q$ . Isto é imediatamente visto no plano de Minkowski com um ponto removido, que é fortemente causal mas não é globalmente hiperbólico.

## 5.2 Construção de Raios Geodésicos em Espaços-Tempos Fortemente Causais

Conhecendo algumas condições para a existência de geodésicas maximais em espaços-tempos fortemente causais, podemos agora analisar a existência de raios geodésicos causais.

**Definição 5.2.1 (Raios Geodésicos Causais Futuro e Passado-Dirigidos).** *Um raio geodésico causal e futuro-dirigido (ou simplesmente raio futuro) é uma geodésica causal futuro-inextensível  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  tal que*

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = L_g(\gamma|_{[0,t]}),$$

para todo  $t \in [0, a)$ .

Mais geralmente, para  $A \subseteq M$  não vazio, um  $A$ -raio geodésico causal e futuro-dirigido (ou simplesmente  $A$ -raio futuro) é uma geodésica  $\gamma$  causal futuro-inextensível começando em  $A$  tal que

$$d_A^+(\gamma(t)) = d(A, \gamma(t)) = L_g(\gamma|_{[0,t]})$$

para todo  $t \in [0, a)$ .

As noções de raio e  $A$ -raio geodésico causal e passado-dirigido são definidas de maneira temporalmente dual.

Segue facilmente da desigualdade triangular reversa que um raio geodésico causal maximiza a distância entre quaisquer dois pontos sobre o raio.

O seguinte resultado é crucial para o resto do capítulo.

**Proposição 5.2.2.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo fortemente causal e  $K$  um subconjunto compacto de  $M$ . Se  $p$  e  $q$  são dois pontos distintos em  $M$  tais que  $p \leq q$  e toda curva causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  intersecta  $K$ , então vale pelo menos uma das seguintes afirmações:*

- (1) *Existe um segmento geodésico causal maximal futuro-dirigido de  $p$  a  $q$  que intersecta  $K$ .*
- (2) *Existe uma geodésica causal maximal futuro-dirigida e futuro-inextensível começando em  $p$  que intersecta  $K$ .*
- (3) *Existe uma geodésica causal maximal futuro-dirigida e passado-inextensível terminando em  $q$  que intersecta  $K$ .*
- (4) *Existe uma geodésica causal maximal futuro-dirigida que intersecta  $K$  que é inextensível.*

*Demonstração.* Seja  $\gamma_0$  uma curva causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$ . Como  $K \cup \text{Im } \gamma_0$  é compacto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K \cup \text{Im } \gamma_0 \subseteq \bar{B}_N$ . Dessa forma,  $q \in J^+(p, \bar{B}_k)$  para todo  $k \geq N$ . Assim, pelo lema 5.1.5, para cada  $k \geq N$  existe uma curva  $\gamma_k$  causal futuro-dirigida de  $p$  a  $q$  em  $\bar{B}_k$  tal que  $L_g(\gamma_k) = d[\bar{B}_k](p, q)$ . Além disso, por hipótese  $\text{Im } \gamma_k \cap K \neq \emptyset$ , para cada  $k \geq N$ . Seja  $r_k \in \text{Im } \gamma_k \cap K$ ,  $k \geq N$ . Como  $K$  é compacto, podemos assumir  $r_k \rightarrow r \in K$ .

Estendemos cada  $\gamma_k$  para uma curva causal futuro-dirigida e inextensível  $\tilde{\gamma}_k : \mathbb{R} \rightarrow M$  reparametrizada por  $h$ -comprimento de arco com  $\tilde{\gamma}_k(0) = r_k$ . Como sempre, aplicamos o lema da curva limite para obter uma curva  $\gamma$  causal inextensível com  $\gamma(0) = r$  (em particular intersectando  $K$ ) e com  $\tilde{\gamma}_k$  convergindo uniformemente em compactos para  $\gamma$  (a menos de subsequência). Tal curva é a candidata natural para verificar as afirmações.

Como  $p = \tilde{\gamma}_k(t_k)$ ,  $q = \tilde{\gamma}_k(s_k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \leq r_k \leq q$ , então  $t_k \leq 0 \leq s_k$ . Sendo o espaço-tempo fortemente causal,  $p < q$ , e alguma das desigualdades é restrita. Agora, os quatro casos estão associados às possibilidades das sequências  $\{t_k\}$  e  $\{s_k\}$ . Se  $\{t_k\}$  é limitada, podemos assumir  $t_k \rightarrow t_0$ , logo  $\tilde{\gamma}_k(t_k) \rightarrow \gamma(t_0) = p$ , e se é ilimitada inferiormente, podemos assumir  $t_k \rightarrow -\infty$ , e por causalidade forte  $p \notin \text{Im } \gamma$ . Analogamente, se  $s_k \rightarrow s_0$  temos  $\gamma(s_0) = q$ , e se é sequência ilimitada,  $q \notin \text{Im } \gamma$ , cobrindo todas as possibilidades. Em qualquer caso, precisamos verificar que certos segmentos de  $\gamma$  são maximais, o que em particular implica  $\gamma$  ser pré-geodésica nos segmentos maximizantes.

Para ilustrar, consideramos o caso (2), com  $p \in \text{Im } \gamma$  mas não  $q$ . Os outros casos remetem a uma análise muito similar. Como  $t_k \rightarrow t_0$  e  $s_k \rightarrow +\infty$ , para qualquer  $a, b \in [t_0, +\infty)$ ,  $a < b$ , eventualmente  $t_k < a$  e  $s_k > b$ . Pela convergência uniforme, os segmentos  $\tilde{\gamma}_k|_{[a,b]}$  convergem para  $\gamma|_{[a,b]}$  na topologia  $C^0$ . Escolha um aberto  $V$  contendo  $\gamma|_{[a,b]}$  mas não  $q$ . Então  $\text{Im } \tilde{\gamma}_k|_{[a,b]} \subseteq V$  eventualmente, e dessa forma  $q \notin \text{Im } \tilde{\gamma}_k|_{[a,b]}$  para  $k$  suficientemente grande. Como  $\text{Im } \tilde{\gamma}_k|_{[a,b]} \subseteq \text{Im } \tilde{\gamma}_k|_{[t_k, s_k]}$  eventualmente, temos  $L_g(\tilde{\gamma}_k|_{[a,b]}) = d[\bar{B}_k](\tilde{\gamma}_k(a), \tilde{\gamma}_k(b))$ . Pelo lema 5.1.4 e semicontinuidade superior de  $L_g$ , temos

$$\begin{aligned} d(\gamma(a), \gamma(b)) &\leq \liminf d[\bar{B}_k](\tilde{\gamma}_k(a), \tilde{\gamma}_k(b)) \\ &= \liminf L_g(\tilde{\gamma}_k|_{[a,b]}) \\ &\leq \limsup L_g(\tilde{\gamma}_k|_{[a,b]}) \leq L_g(\gamma|_{[a,b]}), \end{aligned}$$

e como sempre vale  $L_g(\gamma|_{[a,b]}) \leq d(\gamma(a), \gamma(b))$ , o resultado segue.  $\blacksquare$

Note que se  $(M, g)$  é um espaço-tempo globalmente hiperbólico, o caso (1) na proposição 5.2.2 sempre ocorre, devido a existência de geodésicas causais maximais entre quaisquer  $p < q$ . Além disso, deletando pontos do espaço-tempo de Minkowski e obtendo um espaço-tempo fortemente causal que não é globalmente hiperbólico, podemos facilmente construir os casos (2), (3) e (4) para pontos  $p$  e  $q$  tais que  $p \ll q$ .

**Teorema 5.2.3.** *Seja  $A \subseteq M$  um conjunto acronal compacto. Então, ou  $A$  é futuro-aprisionado, ou então existe um  $A$ -raio futuro luminoso  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ .*

*Demonstração.* Assuma que  $E^+(A)$  não é compacto. Seja  $\{p_k\}$  uma sequência de em  $E^+(A)$  sem nenhuma subsequência convergente em  $E^+(A)$ . Em particular, nenhuma subsequência fica em  $A$  por este ser compacto, logo podemos assumir que  $\{p_k\}$  é sequência em  $E^+(A) \setminus A$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , seja  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva causal e futuro-inextensível parametrizada por  $h$ -comprimento de arco começando em  $A$ , com  $p_k = \gamma_k(t_k)$  e tais que  $\gamma_k([0, t_k]) \subseteq E^+(A)$

(que existem pois  $E^+(A) = J^+(A) \setminus I^+(A)$  e  $p_k \notin A$ ). Note que os segmentos  $\gamma_k|_{[0,t_k]}$  são pré-geodésicas luminosas sem pontos conjugados (corolário 3.3.9), e pela mesma razão cada segmento é  $A$ -maximal em relação a  $p_k$  (de comprimento zero).

Podemos assumir pela compacidade de  $A$  que  $\gamma_k(0) \rightarrow p \in A$ . Aplicando o lema da curva limite, existe  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  causal  $C^0$  e futuro-inextensível começando em  $p$  e com convergência  $d_h$ -uniforme de  $\gamma_k$  em compactos.

Afirmamos que a sequência  $\{t_k\}$  é ilimitada. De fato, se fosse limitada, podemos assumir, passando para subsequência, que  $t_k \rightarrow t_0$ , logo  $p_k = \gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(t_0)$ . Como  $E^+(A) \subseteq \partial J^+(A)$ ,  $\gamma(t_0) \in \partial J^+(A)$ , mostrando que  $\gamma(t_0) \in J^+(A) \cap \partial J^+(A) = E^+(A)$ , uma contradição com a escolha de  $\{p_k\}$ .

Sendo  $\{t_k\}$  ilimitada, podemos assumir  $t_k \rightarrow +\infty$ . Para qualquer  $t > 0$ , eventualmente  $t_k > t$ , assim  $d(A, \gamma_k(t)) = L_g(\gamma_k|_{[0,t]})$  para  $k$  suficientemente grande, devido a  $A$ -maximalidade. Segue da semicontinuidade inferior de  $d_A^+$  e superior do comprimento de arco Lorentziano  $L_g$  que

$$\begin{aligned} d(A, \gamma(t)) &\leq \liminf d(A, \gamma_k(t)) \leq \limsup d(A, \gamma_k(t)) \\ &= \limsup L_g(\gamma_k|_{[0,t]}) \leq L_g(\gamma|_{[0,t]}), \end{aligned}$$

portanto  $L_g(\gamma|_{[0,t]})$  é  $A$ -maximal para  $t > 0$  qualquer, e segue que  $\gamma$  é  $A$ -raio futuro.

Caso  $\gamma$  fosse temporal, teríamos  $\gamma(t) \in I^+(A)$ ,  $t > 0$ . Mas novamente  $t_k > t$  e  $\gamma_k(t) \in I^+(A)$  eventualmente, assim  $\gamma_k(t) \leq \gamma_k(t_k)$ , implicando em  $p_k \in I^+(A) \cap \partial I^+(A)$ , um absurdo, mostrando que  $\gamma$  é luminosa. ■

Quando  $M$  for globalmente hiperbólico sem hipersuperfícies de Cauchy compactas, este teorema tem a seguinte consequência.

**Corolário 5.2.4.** *Seja  $(M, g)$  espaço-tempo globalmente hiperbólico  $n$ -dimensional sem hipersuperfícies de Cauchy compactas. Então todo subconjunto  $A$  (não vazio) acronal e compacto admite um  $A$ -raio futuro luminoso. Em particular, se  $A$  também é subvariedade espacial, sua dimensão é no máximo  $n - 2$ .*

*Demonstração.* Pela proposição 3.11.9, nenhum conjunto acronal e compacto é aprisionado em  $M$ , logo pelo teorema 5.2.3 existe um  $A$ -raio futuro luminoso  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ . Se  $A$  for ainda subvariedade espacial, sua dimensão é no máximo  $n - 1$ , mas se for  $n - 1$ , sendo  $\gamma$  é em particular geodésica luminosa normal a  $A$  temos uma contradição, pois  $(T_{\gamma(0)}A)^\perp$  seria temporal. ■

É interessante estudar também  $A$ -raios no caso em que estamos trabalhando com hipersuperfícies  $C^0$  acronais e fechadas. O seguinte resultado ilustra a necessidade de explorar separadamente este caso.

**Proposição 5.2.5.** *Suponha que  $A$  é hipersuperfície  $C^0$  acronal e fechada. Então, qualquer  $A$ -raio luminoso de  $A$  é uma curva inteiramente contida em  $A$ .*

*Demonstração.* Pela proposição 3.11.2,  $E^+(A) = A$ . Se algum  $A$ -raio luminoso eventualmente sai de  $A$ , o segmento até antes deste ponto seria um gerador geodésico contido em  $E^+(A) \setminus A$  o que é impossível. ■

Assim, para tais conjuntos, raios luminosos não são muito interessantes, logo buscaremos raios temporais. Precisaremos ainda impor mais condições para garantir a existência de tais raios, como ilustram os seguintes exemplos.

**Exemplo 5.2.6.** Para o espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . Considere o plano  $\Pi_0 = \{t = 0\}$ . Então  $\Pi_0$  é uma superfície espacial acausal e fechada, logo  $E^\pm(A) = A$ . Dado  $p = (0, x, y) \in \Pi_0$ , considere  $\alpha_a : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  curva integral do campo vetorial  $\partial_t$  começando em  $p$ , que é um  $\Pi_0$ -raio temporal. Mas como  $\Pi_0$  é acausal e também neste caso toda curva causal futuro-dirigida começando em  $\Pi_0$  está contida em  $I^+(\Pi_0)$ , não há  $\Pi_0$ -raios luminosos. ◀

**Exemplo 5.2.7.** Em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere o disco  $D = \{(0, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , que é uma hipersuperfície espacial, acausal e pré-compacta, mas não é fechada. Seu fecho  $\bar{D}$  é compacto mas já não é hipersuperfície  $C^0$ . Considere as seguintes geodésicas

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}_1^3, \gamma_1(s) = (s, 0, 0) \\ \gamma_2 : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}_1^3, \gamma_2(s) = (s, s + 1, 0).\end{aligned}$$

Vemos que  $\gamma_1$  é raio temporal tanto para  $D$  quanto para  $\bar{D}$ , e  $\gamma_2$  é  $\bar{D}$ -raio luminoso, mas não é um  $D$ -raio, pois nem sequer intersecta  $D$ . ◀

**Exemplo 5.2.8.** Em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere o plano  $A = \{t = x\}$ , que é uma superfície suave (luminosa) acronal e fechada, e pode ser parametrizada da forma  $\{(s, s, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid s, y \in \mathbb{R}\}$ . Dado qualquer  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_1^3, \gamma(s) = (s, s, y),$$

é um  $A$ -raio luminoso contido em  $A$ . Afirmamos que não existem  $A$ -raios temporais neste caso. De fato, considerando  $\alpha : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ,  $\alpha(s) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s), \alpha^3(s))$ , qualquer curva temporal, suave pro partes e futuro-inextensível começando em  $A$ . Tome  $s_0 \in (0, a)$  e concatene  $\alpha|_{[0, s_0]}$  no ponto  $\alpha(0)$  com a geodésica luminosa  $\beta = (\alpha^1(0) - 1 + s, \alpha^1(0) - 1 + s, \alpha^3(0))$ ,  $s \in [0, 1]$ , o que dá uma curva causal de  $A$  até  $\alpha(s_0)$  com mesmo comprimento de  $\alpha|_{[0, s_0]}$ , que não pode ser maximal pois não é sequer pré-geodésica. Assim, por argumentos variacionais, existe uma curva temporal futuro-dirigida de  $A$  até  $\alpha(s_0)$  com comprimento estritamente maior que  $\alpha|_{[0, s_0]}$ , mostrando que  $\alpha$  não é  $A$ -raio. ◀

**Exemplo 5.2.9.** Em  $\mathbb{R}_1^3$ , considere o conjunto  $A$  dado pela união de conjuntos da forma

$$A_k = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid t = \frac{k}{2} \text{ se } x \in [k, k + \frac{1}{2}], t = x - \frac{k+1}{2}, \text{ se } x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1]\},$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . (A imagem de tal conjunto é uma “escadaria infinita” em  $\mathbb{R}_1^3$ , com uma parte horizontal espacial e a parte inclinada luminosa.)

Vemos que  $A$  é um conjunto acronal, fechado e com  $\text{edge}(A) = \emptyset$ , logo hypersuperfície  $C^0$  acronal e fechada. Por argumentos padrões de  $\mathbb{R}_1^3$ , logo não existem  $A$ -raios luminosos. Um argumento similar ao exemplo anterior mostra que também não há  $A$ -raios temporais. ◀

O exemplo 5.2.8 ilustra mostra que a existência de  $A$ -raios está relacionada ao “tamanho” de conjunto globalmente hiperbólico  $\text{int}(D(A))$  (que no caso do exemplo é vazio). Como mostrado na proposição 3.10.13,  $D(A)$  é aberto para hypersuperfícies  $C^0$  acausais. Porém, apenas acausalidade não é suficiente, como ilustramos no próximo exemplo.

**Exemplo 5.2.10.** Em  $\mathbb{R}_1^3$  novamente, considere o hiperboloide

$$H^- = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}_1^3 \mid t < 0 \text{ e } t^2 - x^2 - y^2 = 1\},$$

que é uma hypersuperfície espacial fechada e acausal com  $\text{edge}(H^-) = \emptyset$ , logo não possui  $H^-$ -raios luminosos.  $H^-$  também não possui  $H^-$ -raios temporais futuros, pois todas as geodésicas temporais futuro-inextensíveis começando em  $H^-$  se encontram na origem, mas possui raios temporais passados. (A análise do hiperboloide  $H^+$  mostra que existem raios temporais futuros mas não passados.) ◀

Se exigimos também compacidade, temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.2.11.** *Se  $A \subseteq M$  é uma hypersuperfície  $C^0$  acausal e fechada, dado  $p \in H^+(A) \setminus A$ , temos que, ou existe um  $A$ -raio futuro e temporal contido em  $D^+(A)$ , ou então  $d(A, p) < +\infty$  e existe uma geodésica temporal e futuro-dirigida  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  que é maximal, com  $\gamma(0) \in A$ ,  $\gamma(a) = p$  e*

$$L_g(\gamma) = d(A, p).$$

*Demonstração.* Como  $A$  é fechado, seja  $U$  vizinhança aberta de  $p$  tal que  $U \cap A = \emptyset$ , e escolha  $p^- \in I^-(p, U)$ . Afirmamos que  $I^+(p^-, U) \cap I^-(p, U) \subseteq D^+(A)$ . De fato, para  $q \in I^+(p^-, U) \cap I^-(p, U)$ , seja  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  curva causal e passado-inextensível começando em  $q$ . Como  $p \in \overline{D^+(A)}$ , escolha também  $p' \in D^+(A) \cap I^+(q, U)$ . A concatenação de uma curva temporal  $\alpha$  contida em  $U$  de  $p'$  até  $q$  com a curva  $\beta$  é causal e passado-inextensível, logo deve intersectar  $A$ , e tal intersecção não se dá ao longo de  $\alpha$ , e então  $\beta$  intersecta  $A$ , mostrando a afirmação.

Considere agora uma sequência  $\{p_k\}$  em  $I^+(p^-, U) \cap I^-(p, U)$  tal que  $p_k \rightarrow p$ . Sendo  $D(A)$  aberto (proposição 3.10.13), a afirmação anterior também garante que  $p_k \in \text{int}(D(A)) \setminus A$ . Assim, pelo teorema 4.2.13, para cada  $k \in \mathbb{N}$  temos que existe uma curva causal futuro-inextensível parametrizada por  $h$ -comprimento de arco  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  tal que  $\gamma_k(0) \in A$ ,  $\gamma_k(t_k) = p_k$  para algum  $t_k \geq 0$ ,  $\gamma_k([0, t_k]) \subseteq D^+(A)$  e

$$L_g(\gamma_k|_{[0, t_k]}) = d(A, p_k).$$

Como  $A$  é compacto, passando para subsequência e aplicando o lema da curva limite, existe curva causal,  $C^0$  e futuro-inextensível  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  com as características vindas do lema da curva limite. Consideramos as duas possibilidades para  $\{t_k\}$ .

Se  $\{t_k\}$  é ilimitada, podemos assumir  $t_k \rightarrow +\infty$ . Fixado  $t \geq 0$ , eventualmente  $t_k > t$ , logo  $\gamma_k|_{[0,t]} \rightarrow \gamma|_{[0,t]}$   $d_h$ -uniformemente. Pela semicontinuidade superior de  $L_g$  e semicontinuidade inferior de  $d_A^+$ , temos

$$\begin{aligned} d(A, \gamma(t)) &\leq \liminf d(A, \gamma_k(t)) \\ &\leq \limsup L_g(\gamma_k|_{[0,t]}) \leq L_g(\gamma|_{[0,t]}), \end{aligned}$$

donde concluímos que  $\gamma$  é um  $A$ -raio. Por construção,  $\text{Im } \gamma \subseteq \overline{D^+(A)}$ . Também, uma vez que  $\text{edge}(A) = \emptyset$ ,  $\gamma$  só pode ser temporal, e por acausalidade  $\text{Im } \gamma \cap A = \emptyset$ . Para verificar que tal curva está em  $D^+(A)$ , primeiro observe que  $A \cap \partial D(A) = \emptyset$  novamente pela proposição 3.10.13. Se  $\gamma(t') \in H^+(A)$  para algum  $t' > 0$ , então, uma vez que  $H^+(A)$  é acronal,  $\gamma((t', +\infty)) \subseteq \text{int}(D^+(A))$ , de forma que  $D^+(A) \cap I^+(\gamma(t')) \neq \emptyset$ , uma contradição.

Se  $\{t_k\}$  é limitado, podemos assumir  $t_k \rightarrow t_0 \geq 0$ . Por convergência uniforme,  $p_k = \gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(t_0) = p \notin A$ , logo  $t_0 > 0$ . Para cada  $t \in [0, t_0)$ , novamente temos  $t_k > t$  eventualmente, e novamente o argumento via semicontinuidade mostra que

$$d(A, p) = L_g(\gamma|_{[0,t_0]}) < +\infty,$$

logo  $\gamma|_{[0,t_0]}$  é pré-geodésica maximizante, que é novamente temporal pois  $\text{edge}(A) = \emptyset$ . ■

E com isto temos um resultado para a existência de  $A$ -raios temporais em hipersuperfícies acausais compactas.

**Teorema 5.2.12.** *Seja  $A \subseteq M$  uma hipersuperfície  $C^0$  compacta e acausal. Então existe um  $A$ -raio temporal contido em  $D^+(A)$ .*

*Demonstração.* Podemos assumir que  $H^+(A) \neq \emptyset$ , pois caso contrário  $A$  é também hipersuperfície de Cauchy futura, e é fácil adaptar o primeiro caso na demonstração da proposição 5.2.11 para garantir o resultado.

Por contradição, assuma que  $H^+(A) \neq \emptyset$  mas não existe  $A$ -raio temporal contido em  $D^+(A)$ . Então, pela proposição 5.2.11, para cada  $p \in H^+(A) \setminus A$  existe uma geodésica temporal  $A$ -maximal de  $A$  até  $p$ . Consideramos duas possibilidades para  $H^+(A)$ .

•  **$H^+(A)$  não é compacto.** Como  $H^+(A)$  é sempre fechado, neste caso  $H^+(A)$  não é  $d_h$ -limitado pelo teorema de Hopf-Rinow. Assim, existe uma sequência  $\{p_k\}$  em  $H^+(A)$  com  $d_h(A, p_k) > k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Neste caso, como cada  $p_k \in H^+(A) \setminus A$ , estendemos e reparametrizamos as geodésicas temporais  $A$ -maximais de forma a obter curvas causais futuro-inextensíveis parametrizada por  $h$ -comprimento de arco  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  tal que  $\gamma_k(0) \in A$ ,  $\gamma_k(t_k) = p_k$

para algum  $t_k \geq 0$ ,  $\gamma_k([0, t_k]) \subseteq D^+(A)$  e

$$L_g(\gamma_k|_{[0, t_k]}) = d(A, p_k).$$

Com  $A$  é compacto, passando para subsequência e aplicando o lema da curva limite, existe curva causal,  $C^0$  e futuro-inextensível  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  com as características vindas do lema da curva limite. Agora,  $\{t_k\}$  não pode ser limitada, pois nesse caso uma subsequência de  $p_k$  convergiria, o que é impossível pela escolha de  $\{p_k\}$ . Assim assumimos  $t_k \rightarrow +\infty$ , e o argumento usual via semicontinuidade mostra que  $\gamma$  é  $A$ -raio, que é temporal pois  $\text{edge}(A) = \emptyset$ , e com  $\text{Im } \gamma \subseteq \overline{D^+(A)}$ , que na verdade está em  $D^+(A)$ , argumentando de maneira análoga ao primeiro caso da proposição 5.2.11.

•  **$H^+(A)$  é compacto.** Neste caso, uma vez que  $d_A^+|_{H^+(A)}$  é semicontínua inferiormente em um compacto, tal função atinge um mínimo em algum ponto  $p_0 \in H^+(A)$ . Considerando  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  gerador geodésico de  $H^+(A)$  começando em  $p_0$ , sendo  $\text{edge}(A) = \emptyset$ , temos que  $\gamma$  é passado-inextensível e está contida em  $H^+(A)$ . Escolha  $T > 0$  tal que  $\gamma(t) \notin A$ . Pela proposição 5.2.11, existe uma geodésica  $\alpha$  temporal futuro-dirigida e  $A$ -maximal de  $A$  até  $\gamma(t)$ . A curva  $\beta$  dada pela concatenação de  $\alpha$  com a reversa temporal de  $\gamma|_{[0, t]}$  é então curva causal não geodésica de  $A$  até  $p_0$ . Assim,

$$d(A, \gamma(t)) = L_g(\alpha) + L_g(\gamma|_{[0, t]}) = L_g(\beta) < d(A, p_0),$$

e primeira igualdade vindo de  $L_g(\gamma|_{[0, t]}) = 0$ , e a desigualdade estrita vindo de  $\beta$  não ser geodésica. Mas isto contradiz  $p_0$  ser minimizante de  $d_A^+|_{H^+(A)}$ . ■

## 5.3 Espaços-Tempos Causalmente Desconexos e Linhas Geodésicas Causais

Relembre que uma sequência em um espaço topológico Hausdorff não compacto *diverge para infinito* se qualquer subconjunto compacto possui uma quantidade finita de termos da sequência.

**Definição 5.3.1 (Espaços Causalmente Desconexos).** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito ser causalmente desconexo por um subconjunto compacto  $K$  se existem duas sequências infinitas  $\{p_k\}$  e  $\{q_k\}$  que divergem para o infinito tais que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_k \leq q_k$ ,  $p_k \neq q_k$  e todas as curvas causais futuro-dirigidas de  $p_k$  a  $q_k$  intersectam  $K$ . Um espaço-tempo  $(M, g)$  que é causalmente desconexo para algum subconjunto compacto  $K$  é chamado causalmente desconexo.*

**Definição 5.3.2 (Linhas Geodésicas Causais).** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo arbitrário. Uma geodésica causal futuro-dirigida e inextensível  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  é dita ser uma linha geodésica*

causal se para todo  $r, s \in (a, b)$  com  $r < s$  tem-se

$$L_g(\gamma|_{[r,s]}) = d(\gamma(r), \gamma(s)).$$

**Teorema 5.3.3.** *Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo fortemente causal e causalmente desconexo por um conjunto compacto  $K$ , então  $M$  contém uma linha geodésica causal  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  que intersecta  $K$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\{p_k\}$  e  $\{q_k\}$  duas sequências que divergem para o infinito. Aplicando a proposição 5.2.2 para cada  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos uma geodésica  $\gamma_k$  causal futuro-dirigida intersectando  $K$  em algum ponto  $r_k$  e que satisfaz um dos quatro casos de tal proposição. Se para algum  $k$  ocorre o caso (4), o resultado é imediato. Suponha então que o quarto caso nunca ocorre. Assim, pelo menos um dos casos se repete infinitamente nas sequências  $\gamma_k$ , e podemos então assumir que tal caso vale em todas as curvas, digamos ser o caso (2), os outros com demonstração análoga. O resto da demonstração segue o mesmo raciocínio dos dois resultados anteriores.

Podemos assumir  $\gamma_k(0) = r_k \rightarrow r \in K$ . Estenda e reparametrize cada curva para ser inextensível definida em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  causal inextensível originada do lema da curva limite, com  $\gamma(0) = r$  e convergência uniforme em compactos. Mostramos que  $\gamma$  é maximal em qualquer segmento, onde é suficiente mostrar maximalidade entre pontos da forma  $t_0 \leq 0 \leq s_0$  (proposição 3.6.8) Como  $\gamma_k|_{[t_0, s_0]} \rightarrow \gamma|_{[t_0, s_0]}$  na topologia  $C^0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\gamma_k|_{[t_0, s_0]}$  fica em  $\bar{B}_N$  eventualmente. Como  $\{p_k\}$  diverge para o infinito então  $\bar{B}_N$  contem finitos desta sequência, e segue que  $p_k < \gamma_k(t_0)$  para  $k$  suficientemente grande, e em particular com  $k$  grande o segmento  $\gamma_k|_{[t_0, s_0]}$  é maximal. Então

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_0), \gamma(s_0)) &\leq \liminf d(\gamma_k(t_0), \gamma_k(s_0)) \\ &= \liminf L_g(\gamma_k|_{[t_0, s_0]}) \\ &\leq \limsup L_g(\gamma_k|_{[t_0, s_0]}) \\ &\leq L_g(\gamma|_{[t_0, s_0]}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Conhecendo a existência de linhas geodésicas causais para espaços-tempos fortemente causais com a condição de causalmente desconexa, é interessante saber quando espaços-tempos são causalmente desconexos. Nosso próximo objetivo é então buscar condições geométricas no espaço-tempo que são suficientes para isto acontecer. Veremos que a existência de conjuntos aprisionados (cf. definição 3.11.5) dá condições suficientes para um espaço-tempo fortemente causal ser causalmente desconexo e também para a existência de linhas, que analisamos agora.

**Proposição 5.3.4.** *Um espaço-tempo  $(M, g)$  fortemente causal é causalmente desconexo por qualquer conjunto aprisionado.*

*Demonstração.* Pela dualidade temporal, é suficiente mostrar para conjuntos futuro-aprisionados. Seja então  $A$  acronal futuro-aprisionado. Pelo lema 3.11.7, existe uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$

temporal futuro-dirigida e inextensível começando em  $E^+(A)$  e que nunca intersecta  $H^+(E^+(A))$ . Como mostrado no corolário 3.11.8,  $\alpha|_{[0,+\infty)}$  está toda em  $D^+(E^+(A))$ .

Considere as sequências  $p_k = \alpha(-k)$  e  $q_k = \alpha(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $p_k \ll q_k$  e ambas as sequências divergem para o infinito, devido a  $M$  ser fortemente causal e não aprisionar curvas causais inextensíveis em compactos.

Para qualquer curva  $\beta$  causal futuro-dirigida de  $p_k$  a  $q_k$ , a concatenação de  $\beta$  com  $\alpha|_{(-\infty,-k]}$  é uma curva causal passado-inextensível que passa por  $q_k \in D^+(E^+(A))$ , e portanto intersecta  $E^+(A)$ . Esta intersecção não se dá no segmento correspondente a  $\alpha|_{(-\infty,-k]}$  pela acronalidade de  $E^+(A)$  portanto  $\beta$  intersecta  $E^+(A)$ , mostrando o desejado. ■

**Corolário 5.3.5.** *Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo fortemente causal e  $A \subseteq M$  é futuro-aprisionado, então existe uma linha geodésica causal intersectando  $E^+(A)$ .*

*Demonstração.* Imediato da proposição 5.3.4 junto com o teorema 5.3.3. ■

Utilizando estes últimos resultados, encontramos uma condição suficiente para um espaço-tempo cronológico ser na verdade fortemente causal, e que terá aplicações no próximo capítulo.

**Proposição 5.3.6.** *Suponha que  $(M, g)$  é um espaço-tempo cronológico, geodesicamente completo em direções luminosas, e tal que toda geodésica luminosa inextensível possui um par de pontos conjugados. Então  $(M, g)$  é fortemente causal.*

*Demonstração.* Por contradição, suponha que causalidade forte falha em algum ponto  $p \in M$ . Então existe um vizinhança aberta  $U$  de  $p$  e uma sequência de curvas causais futuro-dirigidas  $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow M$  com  $\alpha_k(0), \alpha_k(1) \rightarrow p$  mas cada  $\text{Im } \alpha_k \not\subseteq U$ .

Seja  $V \subseteq U$  aberto convexo contendo  $p$  com  $\bar{V} \subseteq U$ . Considere uma sequência de curvas  $\gamma_k : [0, +\infty) \rightarrow M$  causais e futuro-inextensíveis parametrizadas por  $h$ -comprimento de arco tais que  $\gamma_k(0) = \alpha_k(0)$ ,  $\gamma_k(t_k) = \alpha_k(1)$  para algum  $t_k \in (0, +\infty)$ , e o segmento  $\gamma_k|_{[0, t_k]}$  é reparametrização de  $\alpha_k$ . Como  $\gamma_k(0) \rightarrow p$ , considere  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  curva obtida da já padrão aplicação do lema da curva limite.

Afirmamos que a sequência  $\{t_k\}$  é ilimitada. De fato, se for limitada, podemos assumir  $t_k \rightarrow t_0 \in [0, +\infty)$ . Como cada curva  $\alpha_k$  sai de  $U$ , existe  $s_k \leq t_k$  tal que  $\gamma_k(s_k) \in \partial V$ . Em particular, a sequência  $s_k$  é limitada, logo podemos assumir  $s_k \rightarrow s_0 \leq t_0$ . Assim,  $\gamma_k(s_k) \rightarrow \gamma(s_0) \in \partial V$ , e  $\gamma(s_0) \neq p$ , ou seja,  $s_0 > 0$ , implicando em  $t_0 > 0$ . Por outro lado,  $\alpha_k(1) = \gamma_k(t_k) \rightarrow \gamma(t_0) = p$ . Isto é,  $\gamma|_{[0, t_0]}$  é uma curva causal fechada. Agora, a curva dada pela repetição deste laço indefinidamente é uma curva causal inextensível. Por cronologia e as considerações variacionais, tal curva deve ser uma geodésica luminosa sem pontos conjugados, contradizendo nossa hipótese. Concluimos assim que  $\{t_k\}$  é ilimitada, e podemos assumir  $t_k \rightarrow +\infty$ .

Suponha agora que existe  $t > 0$  tal que  $\gamma(0) \ll \gamma(t)$ . Sejam  $W_1, W_2$  vizinhanças abertas de  $p$  e  $\gamma(t)$ , respectivamente, tais que  $x \ll y$ , para todo  $x \in W_1, y \in W_2$ . Para  $k$  suficientemente grande, temos  $t_k > t$  e  $\gamma_k(t_k) \in W_1, \gamma_k(t) \in W_2$ , logo

$$\gamma_k(t) \ll \gamma_k(t_k) \leq \gamma(t_k) \Rightarrow \gamma_k(t_k) \ll \gamma_k(t_k),$$

uma contradição com  $M$  ser cronológica. Assim,  $\text{Im } \gamma$  é um conjunto acronal, implicando em  $\gamma$  ser de um raio futuro luminoso e começando em  $p$  (reparametrizando se necessário). Ainda, por hipótese,  $\gamma$  é completa para o futuro.

Observe agora que podemos repedir o argumento acima para curvas  $\beta_k : [0, +\infty)$  causais passado-inextensíveis com  $\beta_k(0) = \alpha_k(1)$  e  $\beta_k(r_k) = \alpha_k(0)$  para obter  $\beta : (-\infty, 0] \rightarrow M$  raio luminoso passado terminando em  $p$  completo para o passado.

Afirmamos que  $\gamma$  é na verdade a extensão para o futuro da geodésica luminosa  $\beta$ . De fato, caso não seja, existe  $\delta > 0$  tal que  $\gamma([0, \delta]), \beta([- \delta, 0])$  e  $\beta(-\delta) \ll \gamma(\delta)$ . Mas isto implica, pela construção de  $\beta$  e  $\gamma$ , que teremos eventualmente  $\alpha_k(1) \ll \alpha_k(0) \leq \alpha_k(1)$ , novamente contradizendo a cronologia.

Por fim, a concatenação  $\gamma * \beta$  é então linha geodésica luminosa, e em particular não possui par de pontos conjugados, uma contradição com nossa hipótese em  $M$ . ■

## 6 Teoremas de Singularidade

Temos agora todas as técnicas necessárias para estudar os teoremas de singularidade. Para nossos fins, um espaço-tempo  $(M, g)$  é dito possuir uma *singularidade* se existe uma geodésica causal inextensível incompleta, ou seja, é *causalmente* incompleto, o que na relatividade geral descreve uma condição física no campo gravitacional que fazem observadores em queda livre ou raios de luz deixarem de existir em um tempo finito. Os teoremas de Hawking tratam de incompletude temporal, o de Penrose de incompletude luminosa, e o de Hawking e Penrose de incompletude causal.

Para utilizar os resultados associados às geodésicas luminosas obtidas no capítulo 2, assumiremos neste capítulo que os espaços-tempos são no mínimo tridimensionais, mas quando não é necessário utilizar tais resultados, o caso bidimensional pode ser incluído.

### 6.1 Motivações Geométricas e Físicas

Consideremos um tensor de Jacobi  $\mathcal{A}$  não singular e seu tensor de Riccati associado  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  sobre uma geodésica temporal  $\alpha$ . Como comentado na observação 2.2.23, o tensor de Riccati mede o quanto os campos de Jacobi associados a  $\mathcal{A}$  “torcem e giram”. Por outro lado, campos de Jacobi podem ser interpretados geometricamente como “deslocamentos infinitesimais” da geodésica. Podemos visualizar essa situação por meio de um “tubo” de geodésicas centrado em  $\alpha$ , com  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  distorcendo este tubo.

A maneira precisa como  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  deforma está codificada em sua decomposição  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \theta/\mu\mathbb{I} + \hat{\sigma} + \hat{\omega}$ . Como seus nomes indicam, o coeficiente de expansão  $\theta$  mede o quanto  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  expande ( $\theta > 0$ ) ou contrai ( $\theta < 0$ ) o volume de “cortes transversais” do tubo em consideração. O cisalhamento  $\hat{\sigma}$  representa deformações que preservam volume (na nossa interpretação geométrica transformando as esferas de secções transversais do tubo em elipsoides de mesmo volume), e a vorticidade  $\hat{\omega}$  representando rotações das geodésicas ao redor de  $\alpha$  (figura 6.1, mais detalhes sobre a interpretação geométrica, considerações sobre o caso luminoso e também outras propriedades de cada tensor podem ser vistas em Wald (1984), seção 9.2).

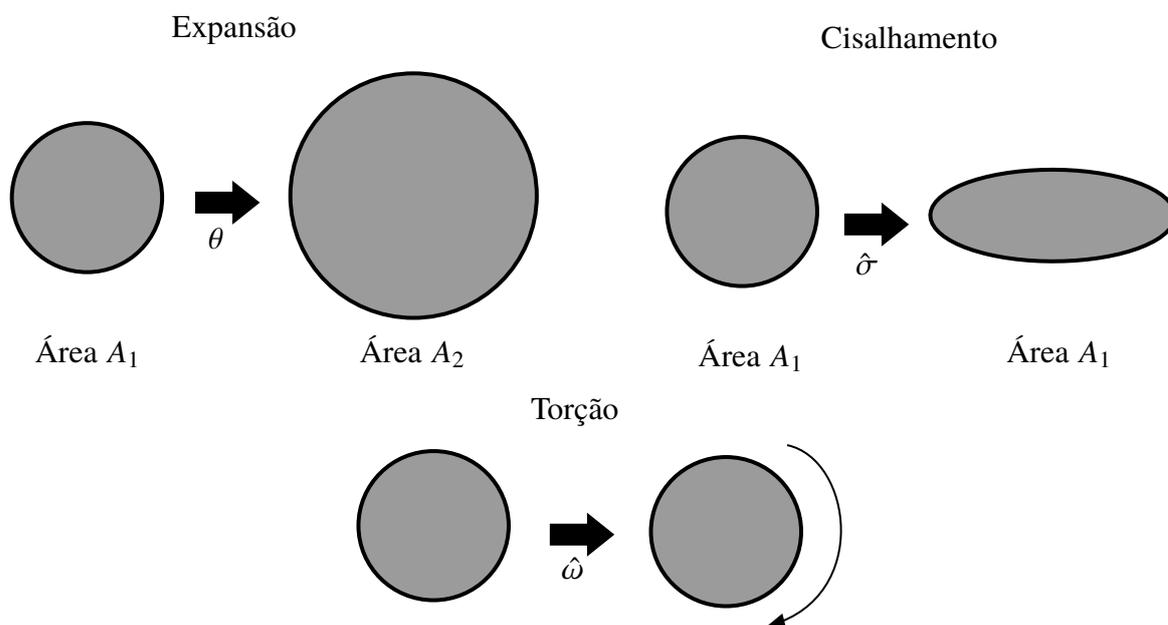
Neste contexto, a equação de Raychaudhuri

$$\theta' + \frac{\theta^2}{\mu} + \text{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2 - \omega^2 = 0,$$

para  $\theta$  descreve sua taxa de variação da expansão ao longo da geodésica  $\alpha$ . No caso de interesse, com tensores de Lagrange canônicos,  $\hat{\omega} = 0$  (e em particular não há efeitos de rotação), logo temos

$$\theta' = -\frac{\theta^2}{\mu} - \text{Ric}(\alpha', \alpha') - \sigma^2.$$

**Figura 6.1:** Efeitos da decomposição  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \theta/\mu\mathbb{I} + \hat{\sigma} + \hat{\omega}$ .



Fonte: Baseada em [Kar e Sengupta \(2007\)](#), figura 2.

Vemos portanto que, se o tensor de Ricci é não negativo,  $\theta$  não crescente, logo, a família de geodésicas no “tubo” tende a convergir, ou ao menos a não divergir, da geodésica central. A questão da não negatividade do tensor de Ricci é uma maneira precisa de descrever o caráter atrativo da gravidade em aplicações físicas.

**Definição 6.1.1.** Um espaço-tempo  $(M, g)$  satisfaz a condição de convergência temporal se  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vetor  $v \in TM$  temporal. Analogamente, satisfaz a condição de energia luminosa se  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vetor  $v \in TM$  luminoso.

Por continuidade, é fácil ver que esta condição é equivalente a condição análoga definida para vetores causais. Em particular, a condição de convergência temporal implica a condição de convergência luminosa, embora a recíproca possa ser falsa. (Por exemplo, o espaço-tempo de deSitter satisfaz a condição de convergência luminosa, mas não a temporal.) Uma motivação física para essas condições é descrita em detalhes em [Hawking e Ellis \(1973\)](#), e discutida brevemente abaixo.

Suponha que um espaço-tempo  $(M, g)$  satisfaça a equação de Einstein:

$$\text{Ric} + \left( \Lambda - \frac{1}{2}S \right) g = 8\pi T,$$

onde  $S$  é a curvatura escalar,  $T$  é um  $(0, 2)$ -tensor conhecido como *tensor de energia-momento* e  $\Lambda$  é a *constante cosmológica*. Com  $\dim M = 4$ , um cálculo com o traço da equação de Einstein nos permite escrever

$$\text{Ric} + (4\pi \text{tr} T - \Lambda)g = 8\pi T.$$

Assim, vemos que, no caso quadridimensional, a condição de convergência temporal é equivalente ao espaço satisfazer, para todo  $v \in TM$  causal,

$$T(v, v) \geq \left( \frac{\text{tr} T}{2} - \frac{\Lambda}{8\pi} \right) g(v, v).$$

Também, um tensor de energia-momento satisfaz a *condição de energia fraca* se  $T(v, v) \geq 0$  para todo  $v \in TM$  temporal, e satisfaz a *condição de energia forte* se  $T(v, v) \geq (\text{tr} T/2 - \Lambda/8\pi)g(v, v)$  para todo  $v \in TM$  temporal (que vemos ser equivalente a condição de convergência temporal para soluções  $(M, g)$  da equação de Einstein correspondente).

É fisicamente razoável assumir que tensores de energia-momento relevantes para a relatividade geral satisfazem ao menos uma dessas condições, e talvez as duas (ver [Hawking e Ellis \(1973\)](#), seção 4.3, para tais argumentos físicos). Note ainda que a despeito dos nomes, e ao contrário do que ocorre com as condições geométricas de convergência, essas são condições independentes sobre um tensor de energia-momento  $T$ : a condição de energia forte não implica a condição de energia fraca, nem é consequência desta. Como veremos nos teoremas de singularidade, alguma forma de convergência temporal e/ou luminosa é um dos ingredientes para mostrar existência de singularidades.

## 6.2 Teoremas de Singularidade de Hawking

Os primeiros teoremas aqui tratados são devidos a [Hawking \(1966\)](#). A ideia física motivadora destes teoremas é colocar em termos geométricos os argumentos cosmológicos para a existência de uma singularidade no passado distante do universo (o *big-bang*). Como de costume, enunciamos aqui a versão para incompletude futura, sendo o caso passado temporalmente dual.

**Teorema 6.2.1 (Hawking - I).** *Seja  $\Sigma \subseteq M$  uma hipersuperfície de Cauchy futura suave e espacial. Suponha que*

- (i)  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vetor  $v \in TM$  temporal.
- (ii) Existe  $\kappa > 0$  tal que

$$g_p(H_p, U_p) \geq \kappa,$$

para todo  $p \in \Sigma$ , em que  $H$  é o vetor curvatura média de  $\Sigma$  e  $U$  é o campo vetorial unitário futuro-dirigido e normal a  $\Sigma$ .

Então toda curva causal futuro-dirigida saindo de  $\Sigma$  possui comprimento Lorentziano no máximo  $1/\kappa$ . Em particular, toda geodésica temporal futuro-dirigida começando em  $\Sigma$  é incompleta.

*Demonstração.* Sendo  $\Sigma$  espacial e acronal, ela é então acausal (lema 3.8.15). Assim, para qualquer curva  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  causal e futuro-dirigida começando em  $\Sigma$ ,  $\beta((0, b]) \subseteq J^+(\Sigma) \setminus \Sigma = D^+(\Sigma) \setminus \Sigma \subseteq I^+(\Sigma)$ , onde a igualdade aqui vem de  $\Sigma$  ser em hipersuperfície de Cauchy futura

(corolário 3.10.9). Pelo mesmo motivo,  $H^+(\Sigma) = \emptyset$  (teorema 3.10.8), e portanto, por acausalidade, temos  $\beta((0, b]) \subseteq \text{int}(D(\Sigma)) \setminus (I^-(\Sigma) \cup \Sigma)$ .

Pelo teorema 4.2.13, existe uma geodésica temporal futuro-dirigida  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  de  $\Sigma$  até  $\alpha(a) = \beta(b)$  com  $L_g(\beta) \leq d(\Sigma, \beta(b)) = L_g(\alpha)$ . Sendo temporal e maximal, ela é normal a  $\Sigma$  e também não possui pontos focais antes de  $\alpha(a)$ .

Ora, se  $L_g(\alpha) > 1/\kappa$ , as condições (i) e (ii) garantem que  $\alpha$  possui um ponto focal num parâmetro menor ou igual a  $1/\kappa$  pela proposição 2.2.37, o que violaria a maximalidade de  $\alpha$ , logo  $L_g(\beta) \leq 1/\kappa$ . ■

**Teorema 6.2.2 (Hawking - II).** *Seja  $\Sigma \subseteq M$  uma hipersuperfície espacial e compacta. Com a notação do teorema anterior, suponha que*

(i)  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vetor  $v \in TM$  temporal.

(ii)  $g_p(H_p, U_p) > 0$  para todo  $p \in \Sigma$ .

Então  $M$  é temporalmente incompleto.

*Demonstração.* Analisando componentes conexas, podemos supor que  $\Sigma$  é conexa. Mais ainda, podemos assumir que  $\Sigma$  é acronal (logo acausal) pelo teorema 3.8.18, uma vez que recobrimentos preservam geodésicas e completude. Pelo teorema 5.2.12, existe um  $\Sigma$ -raio futuro  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  temporal e normal a  $\Sigma$ . Sendo raio, não possui pontos focais a  $\Sigma$ , e portanto, as condições (i) e (ii) implicam, pelo teorema 2.2.37, que  $\gamma$  é incompleta. ■

Ilustramos nos próximos exemplos o que acontece na ausência de alguma das hipóteses dos teoremas de Hawking.

**Exemplo 6.2.3.** Podemos ver um exemplo onde falham os teoremas de Hawking na ausência de convergência temporal, considerando o espaço-tempo de Sitter  $\mathbb{S}_1^4$ .

Como visto na seção 3.12, tal espaço-tempo é globalmente hiperbólico e geodesicamente completo. Sendo isométrico ao produto torcido  $\mathbb{R}_1^1 \times_{\cosh} \mathbb{S}^3$ , possui hipersuperfícies de Cauchy compactas da forma  $\{t\} \times \mathbb{S}^3$ . Neste caso, podemos aplicar as fórmulas de curvatura para Robertson-Walker quadridimensional obtidas em O'Neill (1983), pgs. 344-345. Temos que o campo vetorial  $\partial_t = d/dt$  é unitário e normal à tais hipersuperfícies de Cauchy, que em particular são espaciais. Se  $H$  é a curvatura média de  $\{t\} \times \mathbb{S}^3$ , um resultado geral em hipersuperfícies  $n - 1$ -dimensionais, que segue facilmente das propriedades do operador de Weingarten, é que

$$g(H, U) = \frac{\text{tr } \mathcal{S}_U}{n - 1}.$$

( $g(H, U)$  é as vezes chamada de *convergência futura* da hipersuperfície). No caso em questão, utilizando as fórmulas anteriormente mencionadas, o operador de Weingarten em  $\{t\} \times \mathbb{S}^3$  é  $\mathcal{S}_U = -(\sinh(t)/\cosh(t))\mathbb{I}$ , logo, para  $t < 0$ , vemos que  $\{t\} \times \mathbb{S}^3$  satisfaz o item (ii) em ambos os teoremas. Porém,

$$\text{Ric}(\partial_t, \partial_t) = -3 \frac{\cosh''}{\cosh} = -3 < 0,$$

logo não satisfaz a condição de convergência temporal. ◀

**Exemplo 6.2.4.** Se  $\Sigma$  não é nem de Cauchy nem compacta, Ambos os teoremas falham. Considerando por exemplo a parte inferior  $H^-$  do pseudohiperboloide  $\mathbb{H}_0^n$  em  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , tal hipersuperfície é espacial com convergência futura 1. Também, sendo Minkowski plano,  $\text{Ric} \equiv 0$ , mas  $H^-$  mas não é compacta nem hipersuperfície de Cauchy futura, e de fato  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  é geodesicamente completo. ◀

## 6.3 Teorema de Singularidade de Penrose

O próximo teorema tratado é devido a [Penrose \(1965\)](#). Em linhas gerais, este teorema é motivado pela descrição geométrica do fenômeno de *colapso gravitacional*, uma forma de “implosão” que ocorre, por exemplo, em estrelas muito massivas sob o efeito de seu próprio peso, ao esgotar seu combustível nuclear. A definição seguinte fornece o critério geométrico apropriado para modelar colapsos gravitacionais.

**Definição 6.3.1.** *Uma subvariedade espacial  $S$  é dita ser futuro-convergente se seu vetor de curvatura média  $H$  é temporal e passado-dirigido em todo  $S$ . A definição de passado-convergente é dada de maneira temporalmente dual.*

**Teorema 6.3.2.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo  $n$ -dimensional e  $S$  uma subvariedade espacial, compacta, acronal e futuro-convergente de dimensão  $n-2$ . Assuma ainda que para toda geodésica  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$  luminosa e normal começando em  $S$  temos*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \text{Ric}(\alpha'(s), \alpha'(s)) ds \geq 0. \quad (6.1)$$

*Então, ou existe uma geodésica luminosa normal a  $S$  e futuro-incompleta, ou então  $S$  é um conjunto futuro-aprisionado.*

*Demonstração.* Se  $S$  não é futuro-aprisionado, pelo teorema [5.2.3](#), existe um  $S$ -raio futuro luminoso  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  normal a  $S$ . Como  $S$  é futuro-convergente,  $k = g(H_{\gamma(0)}, \gamma'(0)) > 0$ . Agora, se  $a = +\infty$ , como  $\gamma$  é raio, logo não possui pontos focais a  $S$ , futuro-convergência e a condição (6.1) implicariam, pelo teorema [2.2.38](#), que  $k = 0$ , um absurdo. Assim,  $a < +\infty$  e  $\gamma$  é futuro-incompleta se  $S$  não é futuro-aprisionado. ■

**Teorema 6.3.3 (Penrose).** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico  $n$ -dimensional,  $n \geq 3$ . Assuma que*

- (i)  *$M$  possui uma hipersuperfície de Cauchy não compacta*
- (ii)  *$\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo  $v \in TM$  luminoso.*
- (iii) *Existe uma subvariedade  $S$  de dimensão  $(n-2)$  espacial, compacta, acronal e futuro-convergente.*

Então o espaço-tempo  $M$  é luminosamente incompleto.

*Demonstração.* Pela hipótese (i),  $M$  não possui conjuntos aprisionados, e portanto, pela proposição 6.3.2, existe uma geodésica luminosa incompleta saindo de  $S$ . ■

**Observação 6.3.4.** Podemos enfraquecer as hipóteses do teorema de Penrose, que são exigências mais razoáveis do ponto de vista físico ao estudar espaços-tempos concretos.

(1) A convergência luminosa (ii) pode ser trocada pela condição (6.1) valendo em toda geodésica luminosa futuro-completa (esta condição é às vezes chamada de *condição de convergência luminosa média*). Mais ainda, podemos exigir tal condição apenas para geodésicas luminosas normais a  $S$ . A grosso modo, a utilidade física desta condição está na possibilidade do espaço-tempo não satisfazer convergência luminosa em geral, por exemplo devido a fenômenos quânticos, mas se satisfaz esta condição média, podemos aplicar igualmente o teorema de Penrose.

(2) A hipótese de  $M$  possuir hipersuperfícies de Cauchy não compactas pode ser enfraquecida se  $S$  possui um recobrimento universal não compacto. Isto se deve pois as hipóteses do corolário 5.2.4 serão válidas no recobrimento universal de  $M$ , e a incompletude geodésica se preserva por recobrimentos.

(3) Recentemente, [Minguzzi \(2019\)](#) mostrou que é possível enfraquecer existência de hipersuperfície de Cauchy não compacta, eliminando também hiperbolicidade global na hipótese, por condições mais fracas (mas que fogem do escopo desta dissertação) no espaço-tempo que são discutidas no artigo citado.

O teorema de singularidade de Penrose pode ser utilizado, por exemplo, para o estudo de singularidades (e sua interpretação como buraco negro) associadas ao espaço-tempo de Schwarzschild ou Schwarzschild-Kruskal-Szekeres. Uma discussão completa de tais espaços pode ser vista em [O'Neill \(1983\)](#), capítulo 13.

## 6.4 Teorema de Singularidade de Hawking & Penrose

O último teorema de singularidade que discutimos aqui é devido originalmente a [Hawking e Penrose \(1970\)](#).

**Teorema 6.4.1.** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo de dimensão  $n \geq 3$  tal que*

- (i)  $(M, g)$  é cronológico.
- (ii) Toda geodésica causal completa possui um par de pontos conjugados.
- (iii) Existe um conjunto aprisionado  $A$  em  $M$ .

Então  $M$  é causalmente incompleto.

*Demonstração.* Por contradição, suponha que valem as condições (i)-(iii) mas  $M$  é completo em direções causais. Condições (i) e (ii) implicam, pela proposição 5.3.6, que  $M$  é fortemente

causal. Assim, a condição (iii) implica, pelo corolário 5.3.5, que  $M$  possui uma linha geodésica causal completa, que é maximal, logo não possui pontos conjugados, contradizendo (ii). ■

**Observação 6.4.2.** À respeito da existência de um conjunto aprisionado, por meio dos teoremas 5.2.3 e 6.3.2, vemos facilmente que cada uma das condições abaixo garantem sua existência.

- $(M, g)$  é cronológico e existe um ponto  $p$  sem raios luminosos emanando de  $p$ , e neste caso o próprio ponto é um conjunto aprisionado. Como descrito por Hawking e Penrose, este fenômeno significa que todo gerador geodésico de  $\partial J^+(A)$  começando em  $p$  “começa a reconvergir” eventualmente, isto é, possui pontos conjugados.
- Se  $(M, g)$  é um espaço-tempo  $n$ -dimensional, futuro-completo em direções luminosas e satisfazendo a condição de convergência luminosa, caso  $M$  possua uma hipersuperfície espacial, compacta, acronal e futuro-convergente de dimensão  $n - 2$ .
- $M$  possui uma hipersuperfície  $C^0$ , compacta e acronal  $\Sigma$ . Neste caso  $E^\pm(\Sigma) = \Sigma$ , pela proposição 3.11.2.

Temos uma versão de Hawking-Penrose utilizando condição de convergência temporal, tal como nos outros teoremas. Damos a seguinte versão utilizando convergência média (que implica a versão usual), devido a Tipler (1978).

**Corolário 6.4.3 (Tipler, 1978).** *Seja  $(M, g)$  um espaço-tempo satisfazendo*

- (i)  $(M, g)$  cronológico.
- (ii)  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \text{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s)) ds \geq 0$ , para toda geodésica causal completa  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ .
- (iii) Toda geodésica causal completa satisfaz a condição genérica (cf. apêndice B).
- (iv)  $M$  possui um conjunto aprisionado.

*Então  $(M, g)$  possui pelo menos uma geodésica causal incompleta.*

*Demonstração.* Observe que as condições (ii) e (iii) implicam, de acordo com o teorema 2.2.39, que  $\alpha$  possui um par de pontos conjugados. Logo estamos nas condições do teorema de Hawking e Penrose, donde segue o resultado. ■

O principal razão para a importância do teorema de Hawking-Penrose se dá nas exigências na condição de causalidade para o espaço-tempo possuir singularidades. Nos teoremas de Hawking, precisamos, ou de uma hipersuperfície de Cauchy futura e suave, ou então de uma hipersuperfície espacial compacta e futuro-convergente, e no teorema de Penrose precisamos de hiperbolicidade global com hipersuperfícies de Cauchy não compactas. Já em Hawking-Penrose, precisamos apenas de cronologia e existência de conjuntos aprisionados, que são exigências mais razoáveis na prática.

# A Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos e Lorentzianos

Neste apêndice fazemos uma breve revisão sobre questões de álgebra linear necessárias para o estudo da geometria Semi-Riemanniana, com especial ênfase no caso Lorentziano. As demonstrações dos fatos citados aqui serão omitidas e podem ser vistas em grande detalhe em [Costa e Silva \(s.d.\)](#), capítulo 1, ou [O'Neill \(1983\)](#), capítulo 2.

## A.1 Formas Bilineares

Uma *forma bilinear* sobre um espaço vetorial (real)  $\mathbb{V}$  de dimensão finita  $n$  é uma função  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo,

$$\begin{aligned} b(u, cv + w) &= cb(u, v) + b(u, w) \\ b(cu + v, w) &= cb(u, w) + b(v, w), \end{aligned}$$

para todo  $u, v, w \in \mathbb{V}$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Uma forma bilinear  $b$  é dita ser *simétrica* (resp. *antissimétrica*) se  $b(v, w) = b(w, v)$  (resp.  $b(v, w) = -b(w, v)$ ), e uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica é dita ser *não degenerada* se, para todo  $w \in \mathbb{V}$ ,  $b(v, w) = 0$  implica  $v = 0$ .

Em relação ao sinal de uma forma bilinear  $b$  *simétrica*, dizemos que

- $b$  é *positivo-definida* se  $b(v, v) > 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$  não nulo.
- $b$  é *negativo-definida* se  $b(v, v) < 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$  não nulo.
- $b$  é *indefinida* se não for positiva nem negativa-definida.

Observe que formas bilineares positivo ou negativo-definidas são sempre não degeneradas. Formas *positivo-semidefinidas* são tais que  $b(v, v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{V}$ , podendo se anular em algum  $v \neq 0$ . Formas *negativo-semidefinidas* são definidas analogamente.

Fixado uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathbb{V}$ , associamos qualquer bilinear  $b$  a uma matriz  $n \times n$  dada por  $B = [b(v_i, v_j)]$ , que é simétrica no caso de  $b$  ser simétrica. Com isto, definimos a *nulidade*, denotado por  $N(b)$ , e o *rank* de  $b$  denotado por  $R(b)$ , como sendo, respectivamente, a dimensão do núcleo e da imagem de uma representação matricial de  $b$ . Tais números são invariantes por escolha de base, visto que uma troca de base leva não altera dimensão de núcleo e imagem. Pelo teorema do núcleo e imagem,  $R(b) = \dim \mathbb{V} - N(b)$ .

Se  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é um subespaço vetorial, denotaremos por  $b|_{\mathbb{W}}$  a restrição  $b|_{\mathbb{W} \times \mathbb{W}}$ . Tais restrições nos dão outra quantidade invariante para formas bilineares simétricas. O *índice* de  $b$  é

o número natural

$$\text{ind}(b) = \max\{\dim \mathbb{W} \mid \mathbb{W} \subseteq \mathbb{V} \text{ é subespaço vetorial e } b|_{\mathbb{W}} \text{ é negativa-definida}\}.$$

Vemos facilmente que  $\text{ind}(b) \leq R(b)$ . O nosso resultado principal para formas bilineares simétricas é o seguinte.

**Teorema A.1.1 (Lei da Inercia de Sylvester).** *Seja  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para  $\nu = \text{ind}(b)$  e  $r = R(b)$ , temos*

- (i) *Existe uma base ordenada  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{V}$  tal que, para todo vetor  $v \in \mathbb{V}$ , escrevendo  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,*

$$b(v, v) = - \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^r x_i^2.$$

*Tal base é chamada de base de Sylvester.*

- (ii) *Se uma base  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  é tal que existem  $\nu', r' \in \{0, \dots, n\}$  com*

$$g(v, v) = - \sum_{i=1}^{\nu'} x_i^2 + \sum_{i=\nu'+1}^{r'} x_i^2,$$

*para qualquer vetor  $v = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ , então  $\nu' = \text{int}(b)$  e  $r' = R(b)$ , e tal base é de Sylvester.*

## A.2 Espaços Vetoriais Semi-Euclidianos

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real de dimensão finita munido de uma forma bilinear  $g$  simétrica e não degenerada de índice  $\nu$ . O par  $(\mathbb{V}, g)$  é dito ser um espaço vetorial *semi-Euclidiano* de índice  $\nu$ . Uma tal forma bilinear  $g$  é chamada de *produto escalar*.

Espaços semi-Euclidianos são generalizações naturais de espaços com produto interno. Vemos que  $\nu = 0$  se e somente se  $g$  é positivo-definida, logo um produto interno usual. Neste contexto chamamos tais espaços de *Euclidianos*. Quando  $\dim \mathbb{V} \geq 2$  e  $\nu = -1$ ,  $(\mathbb{V}, g)$  é dito ser um espaço vetorial *Lorentziano*.

De maneira análoga ao caso Euclideano, definimos a norma de um vetor  $v$  em um espaço semi-Euclidiano  $(V, g)$  como sendo

$$|v| = \sqrt{|g(v, v)|} \geq 0,$$

que pode ser nula mesmo se  $v \neq 0$ , logo não é uma norma no sentido Euclidiano. Um vetor  $v$  com  $|v| = 1$  é dito ser *unitário*. Novamente, por analogia aos espaços Euclidianos, vetores  $v, w$  são *ortogonais* se  $g(v, w) = 0$ , e *ortonormais* se são ortogonais e unitários. No caso de  $g$  não degenerada o seguinte resultado é imediato do teorema A.1.1.

**Proposição A.2.1.** *Todo espaço semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$  possui uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .*

**Observação A.2.2.** É comum ordenar bases ortogonais  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de forma que os primeiros ou últimos  $\nu$  vetores sejam tais que  $g(e_i, e_i) = -1$ . Aqui sempre que bases ortogonais forem mencionadas ficará sempre implícita que escolhemos os *primeiros*  $\nu$  de tal maneira. Neste contexto, o símbolo  $\epsilon_i$  para um espaço vetorial semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$  sempre significará

$$\epsilon_i = \begin{cases} g(e_i, e_i) = -1, & \text{se } i = 1, \dots, \nu \\ g(e_i, e_i) = +1, & \text{se } i = \nu + 1, \dots, n, \end{cases}$$

que claramente não depende da escolha de base ortonormal.

O complemento ortogonal de um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{V}$  é

$$A^\perp = \{w \in \mathbb{V} \mid g(v, w) = 0 \text{ para todo } v \in A\}.$$

Um subespaço vetorial  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  é dito ser *não degenerado* se a restrição  $g|_{\mathbb{W}}$  é uma forma bilinear não degenerada. Temos as seguintes propriedades sobre complementos ortogonais e subespaços não degenerados.

**Proposição A.2.3.** *Seja  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial semi-Euclidiano  $n$ -dimensional e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço. Então*

- (i)  $\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp = n$ .
- (ii)  $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$ .
- (iii)  $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp \Leftrightarrow \mathbb{W}$  é não degenerado  $\Leftrightarrow \mathbb{W}^\perp$  é não degenerado.

Com mais uma analogia ao caso Euclidiano, definimos, em um espaço vetorial semi-Euclidiano com uma base ordenada ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$

- O *adjunto* de um operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  como sendo o único operador linear  $T^*$  tal que

$$g(T(v), w) = g(v, T^*(w)),$$

para todo  $u, v \in \mathbb{V}$ . Em particular,  $T$  é *autoadjunto* se  $T^* = T$ .

- O *traço* de uma forma bilinear  $b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\text{tr } b = \sum_{i=1}^n \epsilon_i b(e_i, e_i).$$

É fácil ver que tal definição não depende da escolha de base *ortonormal*. (Há uma relação utilizando bases não ortonormais, mas não faremos uso dela aqui.)

- O *traço* de um operador linear  $S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  é definido como sendo o traço (no sentido do último item) da forma bilinear  $g(S(v), w)$ . Isto é,

$$\text{tr } S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(S(e_i), e_i).$$

Em um espaço vetorial semi-Euclidiano  $(\mathbb{V}, g)$ ,  $g(v, v)$  pode ser tanto positivo quando negativo ou nulo. Seu sinal diz respeito ao *caráter causal* de  $v$ . Mais precisamente, dizemos que  $v$  é

- (i) *temporal* (ou *tipo-tempo*) se  $g(v, v) < 0$ ,
- (ii) *luminoso* (ou *tipo-luz*) se  $g(v, v) = 0$  e  $v \neq 0$ ,
- (iii) *espacial* (ou *tipo-espaço*) se  $g(v, v) > 0$  ou  $v = 0$ .

Dizemos ainda que um vetor  $v$  é *causal* se for temporal ou luminoso<sup>1</sup>.

### A.3 Espaços Vetoriais Lorentzianos

Para espaços vetoriais Lorentzianos  $(\mathbb{V}, g)$ , temos  $\dim \mathbb{V} \geq 2$  e  $\nu = 1$ , assim, subespaços vetoriais possuem classificações bem características para este caso. Se  $\mathbb{W}$  é um subespaço com  $g|_{\mathbb{W}}$  não degenerada, tal forma só pode ter índice 0 ou 1. Dizemos que  $\mathbb{W}$  é *temporal* se  $\text{ind}(g|_{\mathbb{W}}) = 1$ , e que é *espacial* se  $\text{ind}(g|_{\mathbb{W}}) = 0$ . No caso de  $g|_{\mathbb{W}}$  ser degenerada, dizemos que  $\mathbb{W}$  é *luminoso*.

Temos os seguintes resultados para subespaços no caso Lorentziano.

**Proposição A.3.1.** *Dado  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço vetorial de  $(\mathbb{V}, g)$  Lorentziano, temos*

1.  $\mathbb{W}$  é *temporal* se e somente se  $\mathbb{W}^\perp$  é *espacial*.
2.  $\mathbb{W}$  é *luminoso* se e somente se  $g|_{\mathbb{W}}$  é *positivo-semidefinido* mas não *positivo-definido*.

**Proposição A.3.2.** *Para um espaço vetorial Lorentziano  $(\mathbb{V}, g)$  e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço vetorial com  $\dim \mathbb{W} \geq 2$ , são equivalentes*

- (i)  $\mathbb{W}$  é *temporal*;
- (ii)  $\mathbb{W}$  contém dois vetores *temporais* linearmente independentes;
- (iii)  $\mathbb{W}$  contém um vetor *luminoso*.

<sup>1</sup>É comum encontrar, na literatura em inglês, vetores luminosos serem chamados de *nulos* (*null vectors*). Isto pode se tornar muito ambíguo, portanto nunca utilizaremos esta nomenclatura

### A.3.1 O Caso Luminoso

Finalizamos este apêndice comentando brevemente alguns resultados associados a vetores luminosos e espaços vetoriais quocientes sobre vetores luminosos que são necessários para construções no texto principal.

**Proposição A.3.3.** *Para um espaço vetorial Lorentziano  $(\mathbb{V}, g)$  e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  um subespaço qualquer, são equivalentes*

- (i)  $\mathbb{W}$  é luminoso;
- (ii)  $\mathbb{W}$  contém um vetor luminoso mas nenhum vetor temporal;
- (iii)  $\dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp) = 1$ .

**Definição A.3.4.** *Para  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$ , uma base ordenada  $\{v, w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é dita ser base pseudo-ortonormal se  $v$  e  $w$  são vetores luminosos tais que  $g(v, w) = -1$ , e o conjunto  $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é composto de vetores espaciais ortonormais, com cada um normal a  $v$  e  $w$ .*

**Proposição A.3.5.** *Todo espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$  admite uma base pseudo-ortonormal. Mais ainda, qualquer vetor luminoso  $v$  pode ser escolhido como o primeiro elemento de tal base.*

A partir deste resultado, para  $(\mathbb{V}, g)$  um espaço vetorial Lorentziano de dimensão  $n \geq 3$ , considere  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  subespaço luminoso. Pela proposição A.3.3, existe  $w \in \mathbb{W}$  luminoso tal que  $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = \mathbb{R}w$ . Agora, introduza em  $\mathbb{W}$  a seguinte relação:

$$w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 = w_2 + cw, \text{ para algum } c \in \mathbb{R},$$

que é claramente de equivalência. Defina  $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{W}/(\mathbb{R}w)$  o quociente por tal relação, e denote por  $\bar{u}$  uma classe de equivalência em  $\overline{\mathbb{W}}$ . Acerca de tal quociente, temos os seguintes fatos.

**Proposição A.3.6.** *Para  $\overline{\mathbb{W}}$  como definido acima, temos*

- (i)  $\overline{\mathbb{W}}$  não depende da escolha de  $w$ , e com as operações no quociente  $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w_1} + \overline{w_2}$  e  $\overline{cw_1} = c\overline{w_1}$ , é um espaço vetorial de dimensão  $\dim(\mathbb{W}) - 1$ . Em particular, se  $W = v^\perp$  para algum vetor luminoso  $v \in \mathbb{V}$ , então  $\dim(\overline{v^\perp}) = n - 2$ .
- (ii) Dados  $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{W}}$ , a operação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \overline{\mathbb{W}} \times \overline{\mathbb{W}} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\langle \overline{w_1}, \overline{w_2} \rangle = g(w_1, w_2).$$

*está bem-definida e define um produto interno (positivo-definido) em  $\overline{\mathbb{W}}$ .*

- (iii) Se  $\{v, w, e_1, \dots, e_{n-2}\}$  é uma base pseudo-ortonormal de  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W} = v^\perp$ , então  $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_{n-2}}\}$  é base de  $\overline{\mathbb{W}}$  ortonormal em relação ao produto interno induzido no item (ii).

## B A Condição Genérica

A condição genérica é uma hipótese necessária para alguns teoremas de singularidade. Fazemos aqui um breve comentário sobre tal condição, que aqui é restrita apenas para geometria Lorentziana. As demonstrações dos fatos mencionado podem ser encontradas em [Beem, Ehrlich e Easley \(1999\)](#), seção 2.5.

**Definição B.1.** *Em uma variedade Lorentziana  $(M, g)$   $n$ -dimensional, seja  $v \in TM$  um vetor tangente, com  $v = v^i \partial_i$  em relação a algum sistema de coordenadas. Dizemos que  $v$  satisfaz a condição genérica se*

$$\sum_{k,l=1}^n v^k v^l v_{[i} R_{j]kl[m} v_{r]} \neq 0, \quad (\text{B.1})$$

para alguma combinação de índices livres, onde  $R_{ijkl}$  são as componentes do tensor de Riemann  $\tilde{R}$ , e  $v_i$  são as componentes da 1-forma metricamente equivalente a  $v$ . Um tal  $v$  satisfazendo a condição genérica é dito ser vetor genérico.

Em vista da condição genérica dada por [B.1](#), para um vetor  $\in TM$  violar a condição genérica, isto significa que

$$\sum_{k,l=1}^n v^k v^l v_{[i} R_{j]kl[m} v_{r]} = 0, \quad (\text{B.2})$$

para toda combinação possível de índices livres.

Definimos também uma condição genérica para geodésicas.

**Definição B.2.** *Dizemos que a condição genérica vale para uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  se em algum  $t_0 \in I$  temos que  $\alpha'(t_0)$  é vetor genérico.*

A condição genérica pode parecer uma condição algébrica sem muito significado geométrico à primeira vista, mas como é de se esperar, encontramos relações geométricas entre genericidade e o caráter causal do vetor, que discutimos agora.

**Proposição B.3.** *Se  $v \in T_p M$  é um vetor não luminoso, então  $v$  não é genérico se e somente se a curvatura seccional  $K(\Pi)$  se anula em todo plano  $\Pi \subseteq T_p M$  não degenerado contendo  $v$ .*

Temos também uma caracterização em termos do operador força de maré  $R_v$ .

**Proposição B.4.** *Seja  $v \in TM$  vetor temporal. São equivalentes:*

- (i)  $v$  é genérico.
- (ii) Existe algum plano  $\Pi$  contendo  $v$  com  $K(\Pi) \neq 0$ .
- (iii)  $R_v$  não é identicamente nulo.

O tensor de Ricci também dá uma condição suficiente para genericidade.

**Proposição B.5.** *Se  $v \in TM$  é um vetor não luminoso com  $\text{Ric}(v, v) \neq 0$ , então  $v$  é genérico.*

Os resultados mencionados até agora são para vetores não luminosos. O tratamento do caso luminoso utiliza o quociente introduzido no apêndice A, proposição A.3.6 (ver também seção 2.2.1), e também utilizamos o operador de maré luminoso  $\overline{R}_v$  introduzido na proposição 1.4.4.

Com tais técnicas, temos o seguinte resultado para vetores luminosos.

**Proposição B.6.** *Seja  $v \in TM$  vetor luminoso. São equivalentes<sup>1</sup>:*

- (i)  $v$  é genérico.
- (ii)  $\overline{R}_v$  não é identicamente nulo.

E unificamos a condição para o tensor de Ricci em qualquer caráter causal.

**Proposição B.7.** *Se  $v \in TM$  é um vetor qualquer com  $\text{Ric}(v, v) \neq 0$ , então  $v$  é genérico.*

---

<sup>1</sup>A condição associada a curvatura seccional já não é válida para o caso luminoso, pois é possível que um tal vetor esteja em um plano não degenerado com curvatura seccional não nula mas não seja genérico.

## Conclusão

Ao longo desta dissertação estudamos diversos aspectos de geometria semi-Riemanniana e Lorentziana, em uma ordem de construção e sequência lógica com o objetivo de enunciar claramente e demonstrar os teoremas de singularidade como consequência da teoria de Jacobi, causalidade e construção de linhas e raios geodésicos.

Uma coisa a observar sobre o estudo destes teoremas são suas hipóteses de causalidade. Como observado ao longo do texto, o material aqui apresentado em grande parte segue as fontes clássicas dos assuntos, e desde as primeiras definições e resultados muito foi desenvolvido na literatura de forma a enfraquecer e melhorar as hipóteses dos teoremas. Aqui fomos capazes, com um pouco de trabalho na teoria de Jacobi, trabalhar com condições de convergência temporal média no tensor de Ricci ao invés da versão “clássica” desta hipótese.

Naturalmente, há mais teoremas de singularidade, envolvendo mais propriedades topológicas, geométricas e causais das apresentadas aqui, e temos então duas fontes de motivação para continuar o estudo desta área: estudar novos teoremas de singularidade, que por sua vez exigem estudar mais aspectos da teoria de causalidade, e também refinar as hipóteses nos teoremas de singularidade já conhecidos.

# Referências

- BEEM, John K.; EHRLICH, Paul E.; EASLEY, Kevin L. **Global Lorentzian Geometry**. 2. ed. New York: CRC Press, 1999. p. 656.
- BERNAL, Antonio N.; SÁNCHEZ, Miguel. Globally hyperbolic spacetimes can be defined as ‘causal’ instead of ‘strongly causal’. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 24, n. 3, p. 745–750, 2007.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. p. 335.
- COSTA E SILVA, Ivan Pontual. **Lecture Notes on Semi-Riemannian Geometry**. [S.l.: s.n.]. No prelo 2020.
- GEROCH, Robert. Domain of Dependence. **Journal of Mathematical Physics**, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970.
- GUIMARÃES, Florêncio F. The integral of the scalar curvature of complete manifolds without conjugate points. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 36, n. 3, p. 651–662, 1992.
- HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. p. 544.
- HAWKING, S. W. The Occurrence of Singularities in Cosmology. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 294, n. 1439, p. 511–521, 1966.
- HAWKING, S. W.; PENROSE, R. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 314, n. 1519, p. 529–548, 1970.
- HAWKING, S.W; ELLIS, G.F.R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 391. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- HOUNNONKPE, R. A.; MINGUZZI, E. Globally hyperbolic spacetimes can be defined without the ‘causal’ condition. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 36, n. 19, p. 9, 2019.
- KAR, Sayan; SENGUPTA, Soumitra. The Raychaudhuri equations: A brief review. **Pramana**, Springer Science e Business Media LLC, v. 69, n. 1, p. 49–76, 2007.
- LEE, John M. **Introduction to Riemannian Manifolds**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2018. v. 176, p. 437. (Graduate Texts in Mathematics).
- \_\_\_\_\_. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012. v. 218, p. 708. (Graduate Texts in Mathematics).

- LICHTENFELZ, Leandro. **Teoremas de Singularidade de Hawking e Penrose**. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- MINGUZZI, E. **A gravitational collapse singularity theorem consistent with black hole evaporation**. [S.l.: s.n.], 2019. arXiv: [1909.07348 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1909.07348).
- NOMIZU, Katsumi; OZEKI, Hideki. The existence of complete Riemannian metrics. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v. 12, n. 6, p. 889–891, 1961.
- O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian Geometry: With Applications to Relativity**. 1. ed. San Diego: Academic Press, 1983. v. 108. (Pure and Applied Mathematics).
- PENROSE, Roger. Gravitational Collapse and Space-Time Singularities. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 14, p. 57–59, 1965.
- \_\_\_\_\_. **Techniques in Differential Topology in Relativity**. Philadelphia: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1972. p. 72.
- TIPLER, Frank J. Energy conditions and spacetime singularities. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 17, p. 2521–2528, 1978.
- TREUDE, Jan-Hendrik. **Ricci Curvature Comparison in Riemannian and Lorentzian Geometry**. 2011. Dissertação – University of Vienna.
- WALD, Robert M. **General Relativity**. 1. ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1984. p. 491.