UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Adriana Jungbluth

Álgebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora?

Florianópolis

2020

Adriana Jungbluth

Álgebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora?

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Everaldo Silveira

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Jungbluth, Adriana
Álgebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora? / Adriana Jungbluth ; orientador, Everaldo Silveira, 2020.
204 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Anos Iniciais. 3. Álgebra. 4. Pensamento algébrico. 5. Conhecimento para ensinar Álgebra. I. Silveira, Everaldo . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Adriana Jungbluth

Álgebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora?

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Dr.(a) Regina Célia Grando
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Dr.(a) Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
Universidade Federal do Pernambuco

Prof.(a) Dr.(a) Rita de Cassia Pacheco Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof.(a) Dr.(a) Maria Carolina Machado Magnus (examinadora suplente)
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Educação Científica e Tecnológica.

Documento assinado digitalmente
Claudia Regina Flores
Data: 25/03/2020 13:04:56-0300
CPF: 888.905.899-49

Prof. Dr. (a) Cláudia Regina Flores
Coordenador (a) do Programa

Documento assinado digitalmente
Everaldo Silveira
Data: 23/03/2020 13:46:46-0300
CPF: 034.569.417-14

Prof. Dr. Everaldo Silveira
Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, 2020.

Dedico esse trabalho à minha vó, Ângela Cecília, à minha mãe Ilaria Maria, e à minha madrinha, Verena Ana, que sempre me incentivaram a estudar e a realizar os meus sonhos.

E aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental da RMEF, que generosamente contribuíram com esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

À Prefeitura Municipal de Florianópolis, pela concessão da licença aperfeiçoamento, sem a qual não seria possível a minha total dedicação aos estudos e à realização deste trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. Everaldo Silveira, por apostar em meu trabalho e por oportunizar que professores em exercício na Educação Básica tenham acesso à pós-graduação. Sou grata por todos os seus ensinamentos, paciência e compreensão, além das oportunidades e desafios a que me submeteu ao longo do mestrado.

Às professoras da banca de qualificação, Dra. Regina Célia Grando e Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, pelas valiosas contribuições na qualificação à orientação da pesquisa e construção do texto.

Às professoras Dra. Regina Célia Grando, Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, Dra. Rita de Cassia Pacheco Gonçalves e Dra. Maria Carolina Machado Magnus, por aceitarem fazer parte da banca avaliadora. É um grande orgulho poder contar com suas contribuições.

A todos os funcionários da Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis que me apoiaram durante a trajetória da pesquisa, especialmente, Raquel Regina Zmorzenski V. Schöninger e Daniela Guse Weber, e os formadores do Núcleo dos Anos Iniciais, Maria Luiza Beduschi e Marco Cesar Krüger da Silva.

Aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis, que contribuíram com a pesquisa e que prontamente me receberam, sendo generosos e atenciosos à produção de dados para a dissertação.

Ao meu marido, Pedro Paulo, por seu grande apoio, para que eu pudesse me dedicar aos estudos e à escrita da pesquisa.

Aos meus familiares, pais e irmãs, pelo apoio recebido, e ao sobrinho Gabriel, que traz tanta alegria para a nossa vida.

À Neide Souto, diretora da Escola Básica Municipal Osmar Cunha, que me apoiou e assinou minha licença aperfeiçoamento, e aos colegas da escola, que me apoiaram e incentivaram para cursar o mestrado.

À minha colega, professora Jussara Brigo, que me incentivou para cursar o mestrado e me apoiou em vários momentos, inclusive na preparação para a prova de arguição oral e escrita, que me possibilitou passar e entrar no mestrado.

Aos grupos de pesquisa, Insubordinação Criativa em Educação Matemática (ICEM) e Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos de Educação Matemática

(GEPPROFEM), por proporcionarem encontros valiosos e de muito aprendizado. Agradeço o contato aos referenciais teóricos importantes que contribuíram para esta pesquisa e para o meu aperfeiçoamento.

A todos os colegas de grupo de pesquisa por suas contribuições, especialmente à colega Eliandra, com seu curso sobre o *Atlas.ti,* e aos colegas Roberta, Daniela, Gabriel, Guilherme, Silvana, Renata, Aline e José, cada um com sua contribuição, seja para baixar um artigo ou configurar um texto, seja para dar dicas sobre o comitê de ética, dentre outros.

A todos os colegas, amigos e amigas que fizeram parte destes dois anos de mestrado.

À Universidade Federal de Santa Catarina, ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica e a todos os funcionários e professores que, de alguma forma, contribuíram para a minha formação.

O nosso desafio é encontrar formas de tornar o poder da Álgebra (na verdade, de toda a Matemática) acessível a todos os alunos, encontrar formas de ensino que criem ambientes de sala de aula que permitam aos alunos aprender com compreensão (KAPUT, 1999, p. 3).

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar os conhecimentos de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre Álgebra e seu ensino. A Álgebra é uma das cinco unidades temáticas da Matemática para os Anos Iniciais, na BNCC 2017, cujo intuito é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Como base de dados, utilizamos questionários respondidos por 98 professores da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis/SC, e aprofundamos os dados através da análise e transcrição de cinco entrevistas, as três últimas com abordagem reflexiva/formativa. A metodologia utilizada para nortear os trabalhos é a *Grounded Theory* (GT) – Teoria Fundamentada nos Dados. Os dados coletados originaram três categorias durante o processo de codificação e análise: "Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra", "Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos" e "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino", esta última definida como a categoria central da pesquisa. Os resultados obtidos nos questionários e confirmados pelas duas primeiras entrevistas apontam a ausência de formação específica para o ensino dessa unidade temática, relatada por 74,5% dos professores, condição que os leva a não se sentirem preparados acerca de seus conhecimentos para planejar e desenvolver atividades algébricas. Após a análise desses dados iniciais, passamos às entrevistas reflexivas/formativas, realizadas com três duplas de professores, nas quais enfatizamos as principais dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais, como a generalização de padrões em sequências e as propriedades da igualdade, com foco no sentido de equivalência. De forma articulada, abordaram-se o conhecimento específico do conteúdo, as relações com o conhecimento especializado, as estratégias de ensino e o conhecimento de como os conteúdos se desenvolvem ao longo do currículo. Nessas entrevistas, com um objetivo formativo, partimos dos conhecimentos dos professores e buscamos a sua ampliação. Durante as entrevistas, eles apontaram a importância da formação e do saber, ao relatarem, por exemplo, que é possível trabalhar com a generalização de padrões em sequências e que os alunos conseguem realizá-las, desde que o professor esteja preparado para trabalhar o tema. Os dados da pesquisa evidenciam a necessidade de ampliar o conhecimento docente para que ocorra a implementação dessa unidade temática, recentemente incorporada ao currículo de Matemática dos Anos Iniciais.

Palavras-chave: Anos Iniciais; Álgebra; Pensamento algébrico; Conhecimento para ensinar Álgebra.

ABSTRACT

This research investigates the knowledge of teachers of the Early Years of Elementary Education on Algebra and its teaching. Algebra is one of the five thematic units of Mathematics for the Early Years, at BNCC 2017, whose aim is to develop students' algebraic thinking. As a database, we used questionnaires answered by 98 teachers from the Municipal Education Network of Florianópolis/SC - Brazil, and deepened the data through the analysis and transcription of five interviews, the last three with a reflective/formative approach. The methodology used to guide the work is Grounded Theory (GT). The data collected originated three categories during the coding and analysis process: “Training to work on the thematic unit Algebra”, “Implementation of activities that promote the development of students 'algebraic thinking” and “Teachers' knowledge of Algebra and its teaching”, the latter defined as the central category of the research. The results obtained in the questionnaires and confirmed by the first two interviews point to the lack of specific training for teaching this thematic unit, reported by 74.5% of teachers, a condition that leads them to feel unprepared knowledge-wise to plan and develop algebraic activities. After analyzing these initial data, we move on to reflective/formative interviews, conducted with three pairs of teachers, in which we emphasize the main dimensions of Algebra proposed at the BNCC for the Early Years, such as the generalization of patterns in sequences and the properties of equality, with a focus on equivalence. In an articulated way, specific content knowledge, relations with specialized knowledge, teaching strategies and knowledge of how the content develops throughout the curriculum were addressed. In these interviews, with a formative objective, we start from the knowledge of the teachers and seek to expand them. During the interviews, they pointed out the importance of training and knowledge, when reporting, for example, that it is possible to work with the generalization of patterns in sequences and that students are able to carry them out, as long as the teacher is prepared to work on the topic. The research data show the need to expand the teaching knowledge in order to implement this thematic unit, recently incorporated into the mathematics curriculum of the Early Years.

Keywords: Early Years; Algebra; Algebraic thinking; Knowledge to teach Algebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de cálculo na linguagem retórica 40
Figura 2 – Exemplo de cálculo na linguagem sincopada, usada por Diofanto 41
Figura 3 – Exemplos de uso da linguagem simbólica 42
Figura 4 – Primeiros 4 termos de uma sequência apresentada a alunos de 7 ou 8 anos 49
Figura 5 – Quebra-cabeça triangular 51
Figura 6 – Representação das mesas e tabela, relacionando o número de mesas e de pessoas 53
Figura 7 – Representação sobre folhas e lagartos 54
Figura 8 – Padrões do tipo: AB, AB, AB 65
Figura 9 – Padrões do tipo: ABC, ABC, ABC 65
Figura 10 – Padrões do tipo: AAB, AAB, AAB 65
Figura 11 – Padrões repetitivos 66
Figura 12 – Padrão repetitivo do tipo AB, AB, AB 66
Figura 13 – Padrão repetitivo com ordem na sequência 66
Figura 14 – Sequência repetitiva em livro didático 67
Figura 15 – Sequência repetitiva para continuar 68
Figura 16 – Sequência para continuar 68
Figura 17 – Continuação esperada da sequência 68
Figura 18 – Continuação alternativa da sequência 69
Figura 19 – Sequência repetitiva na qual o motivo apresenta 5 figuras 69
Figura 20 – Sequências recursivas numéricas 70
Figura 21 – Sequência recursiva pictórica com padrões de crescimento 70
Figura 22 – Padrões crescentes 71
Figura 23 – Duas relações diferentes em um padrão visual 72
Figura 24 – Sequência recursiva com palitos 73
Figura 25 – Atividade sobre sequência de estrelas em L 74
Figura 26 – Continuações diferentes para a sequência 1, 2, 4... 76
Figura 27 –Exemplo de atividade que pode levar os alunos a atribuir apenas o sentido operacional para a igualdade 77
Figura 28 – Atividade que auxilia na compreensão do sentido de equivalência da igualdade 78
Figura 29 – Atividade em que o sinal de igual tem sentido de relação funcional 80
Figura 30 – Exemplo de Documentos Primários que correspondem aos professores 13, 14 e 15 (prof. 13, prof. 14 e prof. 15) 86
Figura 31 – 299 Documentos Primários inseridos no *ATLAS.ti* 87
Figura 32 – Exemplo de codificação “in vivo” utilizando o *ATLAS.ti* 88
Figura 33 – *Network* ou rede desenvolvida no *ATLAS.ti* 89
Figura 34 – Códigos contendo entre chaves a quantidade de vezes em que foram aplicados e o número de ligações com outros códigos por meio das redes 90
Figura 35 – Citações e códigos ligados ao código “busca se atualizar” 91
Figura 36 – Rede 1: Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra 96
Figura 37 – Códigos sobre o que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola 98
Figura 38 – Rede 2: “O que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola” ... 99
Figura 39 – Códigos sobre o sentimento com relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais 100

Figura 40 – Rede 3: “Sentimento com relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais” 100
Figura 41 – Códigos sobre a presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF 101
Figura 42 – Rede 4: “Presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF” 101
Figura 43 – Códigos expressando a opinião sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais 102
Figura 44 – Rede 5: “Opinião sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais” 102
Figura 45 – Citações que retratam a ausência de formação para o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais. 104
Figura 46 – Rede 6: “Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos” 104
Figura 47 – Códigos expressando a opinião sobre a importância de se ensinar Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais 106
Figura 48 – Rede 7: “Opinião sobre a importância de se ensinar Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais” 107
Figura 49 – Códigos sobre a frequência com que os professores planejam e realizam atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico 108
Figura 50 – Rede 8: “Frequência com que os professores planejam e realizam atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico” 108
Figura 51 – Rede 9: “Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino” 109
Figura 52 – Rede 10: “Dimensões da Álgebra e suas relações com os anos subsequentes” 113
Figura 53 – Rede 11: “Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra” 117
Figura 54 – Rede 12: “A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação” 120
Figura 55 – Ficha com questão sobre sequência numérica 123
Figura 56 – Ficha com questão sobre sequência pictórica 124
Figura 57 – Ficha com questão sobre sequência pictórica 124
Figura 58 – Padrão numérico aplicado com o 3º ano 126
Figura 59 – Sequência recursiva com blocos quadrados 129
Figura 60 – Representação dos próximos termos no papel quadriculado e tabela relacionando o número da figura e o número de peças 129
Figura 61 – Generalização da aluna Filipa, do 2º ano 130
Figura 62 – Generalização do aluno Bruno, do 2º ano 131
Figura 63 – Generalização do aluno Pedro, do 3º ano 139
Figura 64 – Tradução da linguagem natural para a linguagem matemática 139
Figura 65 – Mediação do professor para o uso da linguagem matemática 140
Figura 66 – Ficha com sentenças matemáticas que apresentam igualdade e número desconhecido 141
Figura 67 – Ficha com números a serem descobertos usando a relação de equivalência entre os dois lados da igualdade 142
Figura 68 – Ficha com questão sobre a conservação da igualdade 142
Figura 69 – Ficha contendo o resultado de uma pesquisa sobre a compreensão da relação de equivalência 144

Figura 70 – Ficha com números a serem descobertos usando a relação de equivalência e o pensamento relacional 146
Figura 71 – Escala cuisenaire para visualizar a equivalência em expressões 149
Figura 72 – Equivalência sendo representada com as barrinhas cuisenaire 150
Figura 73 – Ficha com resolução de uma equação 151
Figura 74 – Ficha com questões sobre raciocínio proporcional 153
Figura 75 – Recortes de citações do *Atlas.ti* em que os professores demonstram se sentir pouco ou nada preparados para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais. 156
Figura 76 – Recortes de citações do *Atlas.ti* com professores afirmando que não planejam e desenvolvem atividades que promovem o pensamento algébrico ou o fazem com pouca frequência. 158
Figura 77 – Códigos criados a partir da entrevista reflexiva/formativa estabelecendo a relação entre as sequências e a generalização 159
Figura 78 – Seleção de alguns códigos sobre o sentido de equivalência da igualdade criados a partir das entrevistas reflexivas/formativas 161

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Aspectos a serem desenvolvidos do Pré-Escolar ao 2º ano....................................55
Quadro 2 – Aspectos a serem desenvolvidos do 3º ao 5º ano...56
Quadro 3 – Objetos de conhecimento e habilidades sobre sequências na BNCC....................64
Quadro 4 – Principais elementos constitutivos do *ATLAS.ti*..85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Registros de um modo de ver 75
Tabela 2 – Prof. 94 relacionando o número de quadrados e o número de palitos 136

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Maior grau de formação dos professores da RMEF em atuação em 2019............94
Gráfico 2 – Participação dos professores da RMEF em formação sobre Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais...95

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular
CEC – Centro de Educação Continuada
CNE – Conselho Nacional de Educação
CTS – Ciência, Tecnologia e Sociedade
GEPPROFEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos de Educação Matemática
GT – *Grounded Theory*
ICEM – Insubordinações Criativas em Educação Matemática
MEC – Ministério da Educação e Cultura
NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*
PCK – *Pedagogical Content Knowledge*
PNLD – Plano Nacional do Livro Didático
PPGECT – Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica
RMEF – Rede Municipal de Ensino de Florianópolis
SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SED – Secretaria Estadual de Educação de SC
SMEF – Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis
SC – Santa Catarina
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UNIJUÍ – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
UNOESC – Universidade do Oeste de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 20
1.1 MINHA TRAJETÓRIA COMO ESTUDANTE ATÉ TORNAR-ME PROFESSORA E BUSCAR O MESTRADO........ 20
1.2 A PESQUISA: JUSTIFICATIVA, QUESTÃO DE PESQUISA E OBJETIVOS 25
2 FORMAÇÃO E CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS 28
2.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES........ 28
2.2 OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA O ENSINO........ 31
3 A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO 37
3.1 A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E AS FASES EVOLUTIVAS DA LINGUAGEM ALGÉBRICA........ 37
3.2 RETROSPECTIVA SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA NO BRASIL........ 42
3.3 ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO E SUA INTRODUÇÃO NOS ANOS INICIAIS........ 47
3.3.1 A Álgebra na BNCC 2017........ 56
4 APROFUNDANDO DIMENSÕES DA ÁLGEBRA PROPOSTA NA BNCC PARA OS ANOS INICIAIS........ 60
4.1 REGULARIDADES E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES........ 60
4.1.1 Sequências repetitivas/sequências com padrões repetitivos........ 65
4.1.2 Sequências recursivas/sequências com padrões de crescimento........ 69
4.2 PROPRIEDADES DA IGUALDADE........ 76
5 ASPECTOS METODOLÓGICOS 82
5.1 A METODOLOGIA *GROUNDED THEORY* (GT) - TEORIA FUNDAMENTADA........ 82
5.2 O SOFTWARE *ATLAS.TI*........ 84
6 ANÁLISE DE DADOS E CRIAÇÃO DAS CATEGORIAS 93
6.1 AS CATEGORIAS CRIADAS NA CODIFICAÇÃO FOCALIZADA E A *CORE CATEGORY*........ 93
6.1.1 Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra........ 93
6.1.2 Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos........ 104
6.1.3 Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino........ 109
7 CONHECIMENTOS SOBRE ÁLGEBRA E SEU ENSINO MOBILIZADOS DURANTE A ENTREVISTA REFLEXIVA/FORMATIVA........ 122
7.1 GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES EM SEQUÊNCIAS........ 122
7.1.1 Relação entre as sequências e a generalização........ 123

7.1.2 As diferentes regularidades presentes em uma sequência..**127**
7.1.3 Estudando generalizações de alunos e as estratégias envolvidas..................................**128**
7.1.4 A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação........**131**
7.1.5 Estratégias que contribuem com a generalização de padrões em sequências............**133**
7.1.6 Os professores vivenciando uma generalização distante e/ou algébrica a partir de uma sequência...**135**
7.2 O SENTIDO DE EQUIVALÊNCIA DO SINAL DE IGUALDADE.................................138
7.2.1 O sentido de equivalência do sinal de igualdade em uma expressão Matemática.....**139**
7.2.2 Sinal de igualdade com sentido de equivalência em questões do livro Ápis, adotado pela RMEF..**141**
7.2.3 Pesquisa aponta que poucos alunos consideram o sentido de equivalência da igualdade..**144**
7.2.4 O uso do pensamento relacional para resolver questões que possuem equivalência entre os dois lados da igualdade..**146**
7.2.5 O uso das barrinhas cuisenaire para introduzir a ideia de equivalência.........**149**
7.2.6 O sinal de igualdade com sentido de equivalência presente nas equações.......**151**
7.3 RELAÇÃO ENTRE UM PROBLEMA DE PROPORCIONALIDADE DO QUINTO ANO E A REGRA DE TRÊS..153
8 COMPREENSÃO OBTIDA A PARTIR DOS DADOS E DISCUSSÃO COM O REFERENCIAL TEÓRICO...**155**
9 CONCLUSÃO..**169**
10 REFERÊNCIAS..**175**
APÊNDICE A – Carta de apresentação 180
APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido 181
APÊNDICE C – Autorização da Secretaria de Educação 183
APÊNDICE D – Folha de Rosto Plataforma Brasil 184
APÊNDICE E – Parecer Consubstanciado do CEP 185
APÊNDICE F – Roteiro dos questionários 190
APÊNDICE G – Roteiro para entrevista semiestruturada... 194
APÊNDICE H – Roteiro para entrevista reflexiva/formativa e semiestruturada 199

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo está organizado em duas seções: na primeira, descrevo[1] minha história de vida e percurso estudantil até tornar-me professora e discorro sobre as inquietações e indagações que me motivaram a buscar o mestrado; na segunda, mostro o modo como ocorreu minha aproximação com o tema de estudo desta dissertação e apresento o projeto de pesquisa.

1.1 MINHA TRAJETÓRIA COMO ESTUDANTE ATÉ TORNAR-ME PROFESSORA E BUSCAR O MESTRADO

Nasci no município de Itapiranga, localizado no Extremo Oeste de Santa Catarina. Morei em uma comunidade chamada Linha Fátima, que tinha um pouco mais de cem habitantes. À época, como não existia pré-escola na localidade, eu fui direto para a 1ª série, na Escola Isolada Estadual da Linha Fátima. Pelas minhas lembranças, havia apenas uma família no local que não era de origem alemã, pois dizíamos que eram italianos. Como todos os alunos falavam apenas alemão, a professora Teresia Rhoden ensinou a língua portuguesa até a metade do ano, focando, na segunda metade, em nossa alfabetização. Foi uma etapa de sucesso, pois ao final daquele ano já sabia falar e ler o idioma, além de auxiliar outros alunos com dificuldades. Lembro, por exemplo, que já sabia escrever todos os meses do ano em sequência. Durante o primeiro ano, tive alguns problemas, pois usávamos um livro em grupos de três alunos, do qual tínhamos que copiar textos e atividades. Ele sempre ficava com as letras viradas, pois eu sentava com dois meninos que ficavam à minha frente, enquanto que o livro ficava posicionado corretamente para eles. Então, eu errava as cópias, e quando tentava apagar, a folha do caderno rasgava por causa do suor da mão que pingava nele. A professora não entendeu que eu tinha hiper-hidrose, e em uma manhã de domingo, após o culto católico, relatou para minha mãe que eu era muito nervosa. Ter sido classificada como a terceira melhor aluna da sala, em uma avaliação feita na metade daquele ano, foi o resultado de minha superação. Como prêmio, ganhei um jogo de canetinhas de seis cores. No final daquele ano, consegui o primeiro lugar na avaliação e conquistei o jogo de canetinhas de doze cores.

Eu não era cobrada pelo sucesso escolar em minha casa, pois meus pais só haviam estudado até a 4ª série, o antigo ensino primário. Não me lembro de ter pedido ou recebido

---

[1] Durante a escrita do texto, quando nos referirmos à trajetória pessoal ou formativa da pesquisadora, usaremos a 1ª pessoa do singular, e quando nos referirmos ao contexto geral da pesquisa, usaremos a 1ª pessoa do plural, devido à interlocução com o orientador, as teorias, o grupo de pesquisa e, inclusive, os sujeitos de pesquisa.

ajuda para estudar em casa. Meus pais eram agricultores, e eu sabia, antes mesmo de ir para a escola, que deveria estudar para tentar buscar um futuro diferente, pois não queria morar naquela localidade e ser agricultora. Tive como exemplo apenas um tio, que é irmão marista, de quem eu observava as roupas e o jeito de falar e ouvia as histórias de viagens e de vida, e achava bem mais interessante que a de meus pais, o que me motivou a estudar, pois eu também queria uma vida diferente. Eu sempre mostrava, com orgulho, os boletins escolares para meu tio que vinha de férias, para minha avó e madrinha, e para mais alguém da família que mostrasse interesse. Esse tio deu muitos livros infantis para mim e minhas duas irmãs, e foi dessa forma que comecei a gostar da leitura. Na escola não havia livros para emprestar aos alunos que quisessem ler em casa.

Durante os três anos seguintes do Ensino Fundamental I, continuei na mesma escola, e recordo que a disciplina que mais me encantava era a Matemática, pois eu tinha facilidade com as "contas" e a tabuada. Para chegar à escola, eu enfrentava uma caminhada íngreme de dois quilômetros, enquanto que a vontade de estudar me fazia frequentar as aulas assiduamente, inclusive em dias de chuva ou tempestade. Minha mãe costurou uma capa de chuva com um plástico comprado na mercearia local para que eu não me molhasse. Em dias de muita geada, como ficávamos com os dedos gelados e não conseguíamos escrever, o professor nos levava a um local ensolarado para movê-los antes de começar a aula.

Iniciei o Ensino Fundamental II indo de carona com a Kombi escolar até o município de Iporã do Oeste. Lembro que eu mesma levei o histórico escolar na secretaria da Escola de Educação Básica Padre Vendelino Seidel, no primeiro dia de aula, pois soube que poderia me matricular dessa forma. Nesse meio tempo, o município de Itapiranga foi desmembrado e eu passei a ser moradora do município de Tunápolis, onde frequentei as demais séries do Ensino Fundamental, na Escola de Educação Básica Padre Balduíno Rambo, que se localizava na sede desse município para onde nos deslocávamos de ônibus, o qual passava por várias localidades recolhendo estudantes. As dificuldades eram muitas, pois levávamos muito tempo no deslocamento, e no inverno, quando chegávamos ao local, já estava escuro, sendo que ainda tinha dois quilômetros de caminhada, pois o ônibus só passava na estrada geral. Nas tempestades, eu recordo que os raios iluminavam o caminho.

Durante todo o Ensino Fundamental, a disciplina que eu não gostava era a Educação Física. Eu tinha dificuldades com a bola, sempre errava no vôlei e era a última a ser escolhida para jogar. Eu e minhas amigas mais próximas tínhamos paixão pela leitura e, às vezes, fugíamos das aulas de Educação Física para ficar lendo na biblioteca. Recordo também que nesse período havia muitas disciplinas cujo foco era decorar as respostas para a prova. Para citar um exemplo, na 7ª e 8ª séries, nossas aulas de geografia consistiam em responder questionários (procurar as respostas no livro), sem qualquer compreensão do conteúdo. No dia em que marcava prova, o professor avisava quais questões deveriam ser estudadas e as assinalávamos com um x. Na hora da avaliação, o professor sempre pegava meu caderno para ditar as questões, então, eu desmarcava em casa as questões difíceis que eu não conseguia decorar e isso ajudava para que as notas dessa disciplina ficassem ainda mais altas, o que não significava que eu havia adquirido conhecimento.

Quando frequentei a 8ª série, decidi seguir os passos de meu tio (irmão marista) e me inscrevi para estudar em um colégio de freiras. No ano seguinte, fui para Campo Erê/SC, onde morei como interna em uma casa de freiras. De dia fazíamos serviços domésticos, como limpar, lavar roupa ou cozinhar, e também as tarefas da escola. Na maior parte dos três anos que vivi nessa cidade, trabalhei como cozinheira na casa. Eu fazia o curso de magistério à noite – do qual gostei muito, pois os professores eram ótimos, sem falar que o foco era a compreensão dos conteúdos, sem a perspectiva da decoreba que eu havia experimentado nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Durante o magistério, passei a gostar de Educação Física, pois a professora conseguiu resgatar minha autoestima quanto às práticas esportivas, diminuindo, assim, o caráter competitivo.

No entanto, a disciplina com a que me identifiquei mais foi novamente a Matemática, sendo que nesse período eu já tinha certeza que queria cursar faculdade nessa área. Eu reparava que, às vezes, a professora de Matemática não preparava bem as aulas, pois ficava em dúvida na hora de resolver certas questões no quadro, enquanto eu já pensava em como eu poderia ser diferente. Gostei muito também das disciplinas de Filosofia e Sociologia, pois tínhamos uma professora muito exigente e precisávamos produzir muitos textos a partir das discussões de filósofos e sociólogos. Certo dia, a professora chegou à sala de aula e relatou que havia dado o primeiro dez de sua vida para uma aluna, questionando se eu, de fato, tinha escrito aquele texto. Como eu confirmei, tive que ajudar outra aluna que havia zerado o texto. Desta forma, desenvolvi bastante confiança para escrever a partir dessas experiências, algo que, naquela época, foi muito importante.

Antes de iniciar o 4º ano de magistério, as freiras me transferiram para Chapecó, pois queriam que eu virasse noviça. Chegando à cidade, não fui bem recebida, sendo que eu já pensava em abandonar o convento. No dia em que me levaram para cortar o cabelo, já no carro, disse que não queria mais ser freira e que iria morar com uma colega de magistério que havia me oferecido uma acolhida para que eu pudesse terminar o curso. Como já havia decidido cursar a faculdade de Matemática, se eu continuasse no convento, não poderia fazê-lo. Para me manter financeiramente, fazia companhia para a mãe de uma professora e também substituía professoras dos Anos Iniciais que faltavam no colégio onde eu estudava.

Nesse último ano de magistério, fiz estágio com uma professora que era sócia em uma escola particular, que logo me convidou para trabalhar no ano seguinte. Terminei o magistério, fiz o vestibular para Matemática na Universidade do Oeste de Santa Catarina (UNOESC) e iniciei a faculdade, que tinha uma duração de quatro anos e meio e habilitava para dar aulas de Matemática e Física. Como passar nesse vestibular era o meu grande sonho, estudei muito para isso, tanto que, durante os dois dias de prova, não conseguia dormir, dada a ansiedade, assim que optava por ficar estudando.

Iniciei o curso em 1997. Começou também minha luta particular para pagar as mensalidades e me manter na cidade. Desde o início trabalhei em duas escolas particulares, dando aulas para os Anos Iniciais. Da escola eu ia direto para a faculdade e passei a ter muitas dificuldades, pois o sono era constante e eu dormia na sala de aula muitas vezes. Cursei muitas disciplinas voltadas à Matemática pura e sentia que eu estava aprendendo pouco que pudesse aproveitar em sala de aula depois. Fui levando e consegui me formar em julho de 2001, junto com a turma inicial, apesar de não participar da cerimônia de formatura por motivos financeiros. Era um privilégio concluir em quatro anos e meio, pois o curso de Matemática tinha um índice de reprovação altíssimo. Para isso, cursei Análise Matemática II na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), como disciplina concentrada de verão, pois sabia que, com a carga de trabalho de 40 horas, não daria conta de estudá-la na UNOESC. Eu já conhecia o professor que a ministraria, o mesmo com quem havia feito Análise Matemática I, sendo que eu odiava suas aulas, que consistiam em copiar demonstrações. Eu ficava indignada com esse papel passivo, pois não trazia nenhuma contribuição à minha formação. Na UNIJUÍ, a disciplina teve uma perspectiva bem diferente, com outra metodologia e objetivos, o que acabou sendo muito interessante.

À época quando cursei licenciatura na UNOESC havia pouca articulação entre as disciplinas pedagógicas e específicas do curso. Aprendi muito sobre a “Matemática pura”, embora a transposição desse conhecimento para o contexto de minha atuação, isto é, a Educação Básica, tenha sido pouco problematizada durante minha trajetória acadêmica.

No início de 2001, faltando um semestre para concluir a licenciatura, iniciei dando aulas em duas escolas da rede estadual de Santa Catarina, quando foi possível fazer os estágios de Matemática e Física para o Ensino Médio em minhas próprias turmas. Logo após concluir a licenciatura, em 2002, assumi a vaga no concurso para professora da Secretaria Estadual de Educação (SED), onde atuei por 10 anos ensinando Matemática para o Ensino Fundamental e

Médio e Física para o Ensino Médio. Trabalhei ao mesmo tempo no Colégio Marista São Francisco, onde permaneci quatro anos ensinando Matemática para os Anos Iniciais. Por meio de uma remoção, em 2006, comecei a atuar na SED da Grande Florianópolis e como professora efetiva da prefeitura de Biguaçu. Desde 2010, após passar no concurso da Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis (SMEF), atuo na Escola Básica Municipal Osmar Cunha, em Canasvieiras, com turmas do 6° ao 9° ano.

Durante minha trajetória como professora, voltei a estudar em dois momentos, pois sentia falta de uma formação que discutisse a prática pedagógica da Matemática na Educação Básica, de modo que eu pudesse vislumbrar novas possibilidades para ensinar os conteúdos de Matemática, pois os estudantes questionavam por que estudar alguns conteúdos da disciplina, enquanto que eu sentia muitas inquietações e a necessidade de aprofundar temas da Educação Matemática para promover, junto a eles, uma aprendizagem mais significativa.

Buscando esse aperfeiçoamento, em 2005, concluí o curso de Especialização em Educação Matemática na UNOCHAPECÓ, quando minha pesquisa enfocou os diferentes registros de representação relacionados às operações de multiplicação apresentados por estudantes de 5ª série. Depois comecei a sentir a necessidade e o desejo de cursar mestrado, o qual pensava em fazê-lo na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), mas isso pareceu uma realidade muito distante para quem havia se formado no Oeste e estado muitos anos em sala de aula, com pouco tempo para se aprofundar em estudos da área.

Tentei entrar no mestrado da UFSC pela primeira vez em 2016 para ser aluna da turma de 2017, mas meu projeto não foi aprovado. Então, escrevi uma justificativa para cursar a disciplina isolada “Ciência, Tecnologia e Sociedade” (CTS), no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT), à qual fui aceita e cursei no primeiro semestre de 2017. A partir dela, fiz várias reflexões que me instigaram a pensar acerca de um trabalho com a Matemática voltado à formação crítica, com o objetivo de formar cidadãos conscientes com os problemas do mundo contemporâneo. Após a primeira disciplina, tive certeza quanto à escolha do programa para cursar mestrado, de modo que iria continuar a minha trajetória de estudos voltada à Educação Matemática. Então, ainda em 2017, escrevi um novo projeto e dessa vez passei em todas as etapas, sendo aceita para iniciar o mestrado em 2018. A escolha pelo PPGECT/UFSC se deu pelo fato de o programa priorizar a formação de educadores e pesquisadores capazes de refletir e questionar acerca da produção do conhecimento científico e tecnológico e por estar relacionado ao Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, pois minha proposta de pesquisa voltava-se à Educação Matemática.

No ano de 2018 iniciei o mestrado no PPGECT sob a orientação do Prof. Dr. Everaldo Silveira. As disciplinas cursadas e os seminários realizados no programa foram muito importantes, pois, além de oportunizarem a qualificação das pesquisas a partir das temáticas abordadas e discussões levantadas, foi possível, através deles, trocar ideias, dividir ansiedades e interagir com os colegas da Matemática, Física, Química, Biologia e Pedagogia sobre nossa proposta de pesquisa. Participo de dois grupos de pesquisa que estão me oportunizando muitas aprendizagens: Insubordinações Criativas em Educação Matemática (ICEM) e Grupo de Estudos e Pesquisas em Processos Formativos de Educação Matemática (GEPPROFEM), ambos coordenados pelos professores Regina Célia Grando e Everaldo Silveira. O mestrado me propiciou grande amadurecimento pessoal, profissional e acadêmico.

1.2 A PESQUISA: JUSTIFICATIVA, QUESTÃO DE PESQUISA E OBJETIVOS

Após ingressar no mestrado, o projeto de pesquisa foi repensado junto ao meu orientador. Conversamos sobre o projeto inicial envolvendo Modelagem Matemática, com o qual fui selecionada para o mestrado, e foi possível perceber que havia muitas pesquisas semelhentes àquelas que eu pretendia desenvolver. Então, discutimos sobre outros temas da Educação Matemática que poderiam despertar interesse e trazer uma contribuição relevante para o contexto educativo onde estou inserida, e que também poderia ser objeto de pesquisa. Optamos pela Álgebra, uma das unidades temáticas indicadoras de conhecimentos matemáticos desenvolvidas com crianças nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada no Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologada pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) em dezembro de 2017. A Álgebra também é um dos eixos da Matemática dos Anos Iniciais na Proposta Curricular da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis de 2016, em uso atualmente e em cuja rede se realizou a pesquisa.

A unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico das crianças, e representa um tema recente no Brasil, pois entrou para o currículo a partir da BNCC 2017. Essa novidade, criou novas demandas aos professores que atuam nesse nível de ensino. Para que o pensamento algébrico possa ser potencializado em diferentes dimensões desde os Anos Iniciais é necessário que os professores desenvolvam conhecimentos acerca desse tema. É nesse contexto que se inseriu esta pesquisa.

O desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais e a continuidade desse trabalho nos Anos Finais do Ensino Fundamental podem contribuir para a aprendizagem da

Álgebra. Nas escolas, se introduz, muitas vezes, uma Álgebra formal, cheia de procedimentos e regras, distante da realidade e do interesse dos alunos. Desta forma, a disciplina de Matemática é considerada por muitos alunos como difícil, repetitiva e sem sentido. Eles costumam questionar os professores (experiência que muitas vezes vivenciei) sobre a utilização de determinados conceitos ou procedimentos porque não entendem sua utilização e aplicabilidade. E existem aqueles que não entendem e desistem de aprender, sem questionar, o que é ainda mais preocupante.

Neste sentido, para atender à orientação curricular de trabalhar a Álgebra desde os Anos Iniciais, é de fundamental importância que os professores tenham um sólido conhecimento sobre esse conteúdo, promovendo intencionalmente atividades que desenvolvam o pensamento algébrico. É essencial que estejam preparados para identificar e compreender os diferentes tipos de pensamento algébrico manifestados pelos alunos, proporcionando-lhes experiências variadas através da exploração de tarefas e situações envolvendo noções algébricas, em um trabalho articulado com as demais unidades temáticas propostas na BNCC. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra com significado.

A pesquisa ocorreu junto aos professores dos Anos Iniciais da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis (RMEF). O problema de pesquisa foi direcionado pela seguinte questão: Quais conhecimentos os professores da RMEF têm para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico?

Já o objetivo geral é investigar conhecimentos de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre Álgebra e seu ensino, o qual se desdobra em alguns objetivos específicos:

• Compreender se os professores participantes da pesquisa desenvolveram algum tipo de formação inicial ou continuada sobre a unidade temática Álgebra e se encontram dificuldades para atender a essa nova orientação curricular, no contexto dos Anos Iniciais.

• Identificar como os profissionais participantes da pesquisa se sentem com relação aos seus conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

• Evidenciar a visão dos professores participantes da pesquisa quanto à importância do trabalho com a Álgebra nos Anos Iniciais e quanto à frequência com que planejam e desenvolvem essas atividades.

• Investigar conhecimentos necessários para o ensino a partir de questões algébricas presentes no livro didático adotado pela RMEF no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD)

2019 a 2022, com foco nas ideias de regularidade e generalização de padrões em sequências e nas propriedades da igualdade.

• Mobilizar o conhecimento dos professores para o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais a partir de entrevistas reflexivas/formativas, trazendo à tona aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A estrutura deste trabalho compreende oito capítulos: o 1º apresenta ao leitor um pouco da trajetória da pesquisadora até tornar-se professora e buscar o mestrado, além de apresentar a pesquisa; o 2º discute a formação de professores para ensinar Álgebra e a questão dos conhecimentos necessários para o ensino; o 3º apresenta elementos da história da Álgebra e uma retrospectiva de como ocorreu esse ensino no Brasil ao longo do tempo, além de apresentar aspectos sobre o pensamento algébrico e sua introdução nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental através da BNCC 2017; o 4º aprofunda dimensões da Álgebra que a BNCC coloca em destaque, como as ideias de regularidade e generalização de padrões em sequências repetitivas e recursivas e as propriedades da igualdade; o 5º discute a metodologia escolhida para subsidiar esta pesquisa, a *Grounded Theory* (GT), e apresenta o *software ATLAS.ti*, ferramenta que contribuiu para a organização e análise dos dados; o 6º explica as categorias criadas a partir da pesquisa, incluindo a *core category* (categoria central); o 7º apresenta os conhecimentos mobilizados durante entrevistas reflexivas/formativas sobre a Álgebra e seu ensino, trazendo contribuições que podem auxiliar outros professores no aprofundamento do tema; e o 8º capítulo, por fim, explica a teoria, ou seja, a compreensão em relação aos dados envolvendo a investigação realizada.

2 FORMAÇÃO E CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS

Na primeira seção deste capítulo, enfatizamos a formação de professores voltada ao ensino da Álgebra, pois é o professor que medeia os processos que levam à construção da generalização e ao desenvolvimento do pensamento algébrico, ou seja, o professor exerce um papel fundamental nesse processo. Para essa discussão, usamos a perspectiva de diversos autores, como: Canavarro (2007), Magina, Oliveira e Merlini (2018), Kieran *et al.* (2016), Kaput (1999), Blanton e Kaput (2005), Branco (2008), Nóbrega, Ribeiro e Silva (2017) e Ma (1999).

Na sequência, usamos as perspectivas de Shulman (1986), que discorre sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar, a saber: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular do conteúdo e de Shulman (1987), que estabelece sete categorias de conhecimento para o ensino, dando destaque para o conhecimento pedagógico do conteúdo. Abordamos também a questão do conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, na perspectiva discutida por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), que destacam o conhecimento especializado do conteúdo.

2.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Com relação à formação de professores para atender à orientação curricular de trabalhar com a Álgebra nos Anos Iniciais, no documento da BNCC consta que “a primeira tarefa de responsabilidade direta da União será a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à BNCC” (BRASIL, 2017, p. 21). Uma das ações previstas é criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores e manter processos permanentes de formação docente que possibilitem um aperfeiçoamento contínuo dos processos de ensino e aprendizagem (BRASIL, 2017). No entanto, dois anos após a aprovação da BNCC 2017 e da incorporação da unidade temática “Álgebra” para a Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, ainda não aconteceram formações contemplando o tema junto aos professores da RMEF. Conforme demonstraremos no 6º capítulo, poucos professores relatam ter alguma formação envolvendo o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais, além de comentar que essas formações foram insuficientes.

Sobre a formação de professores para ensinar Álgebra, Magina, Oliveira e Merlini (2018, p. 20) ressaltam que "não basta propor a introdução de conceitos algébricos nos Anos Iniciais, tampouco mudar o currículo; é preciso principalmente preparar os professores, responsáveis por implantar efetivamente tal currículo, sobretudo dos Anos Iniciais". Os autores levantam uma discussão a partir da visão de três estudos: de estudantes que participaram de uma intervenção de ensino; de estudantes que responderam a um instrumento diagnóstico; e de professores pedagogos em formação que atuam nesse nível escolar e que ressaltam o fato de os estudantes mais jovens serem capazes de resolver situações-problema envolvendo conceitos iniciais de Álgebra. Esse quadro, no entanto, exige a existência de professores preparados para mediar os processos de ensino-aprendizagem que levem ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

O professor tem a função de ajudar os alunos a construir um repertório de ferramentas intelectuais que os apoiem no desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo Canavarro (2007), desenvolver uma abordagem algebrizada da aritmética poderá contribuir muito para a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores, pois:

> É a partir da estrutura da Aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da Álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido através do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos constituem 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente. (CANAVARRO, 2007, p. 89).

De acordo com Kieran *et al.* (2016), o pensamento algébrico não é naturalmente desenvolvido com uma instrução baseada em Aritmética. Para desenvolver o pensamento algébrico, formas essenciais de pensar algebricamente precisam ser intencionalmente promovidas desde os Anos Iniciais, de um modo continuado ao longo de toda a escolaridade, permitindo integrar aspectos mais formais. Segundo Kaput (1999), quando explorados de forma conveniente, os diferentes aspectos da Álgebra tornam-se hábitos da mente, auxiliando a construção do conhecimento matemático dos alunos e proporcionando uma experiência matemática significativa.

Neste sentido, para explorar a Álgebra nos Anos Iniciais, os professores precisam conhecer os diferentes tipos de pensamento algébrico para reconhecer os momentos em que são manifestados. Para isso, é necessário que "desenvolvam olhos e ouvidos algébricos como uma nova forma de olhar para a Matemática que ensinam e de ouvir o que os alunos pensam sobre isso" (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 440, tradução nossa). Segundo Branco (2008, p. 1), "é fundamental que o professor conheça as perspectivas atuais que informam o ensino deste tema, para que as possa integrar na sua prática letiva com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos". Em 1999, Kaput já defendia a importância da qualificação do professor para a promoção da generalização e, por consequência, do pensamento algébrico:

> Expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças. (KAPUT, 1999, p. 6, tradução nossa).

Para potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais, faz-se necessário o conhecimento do professor acerca do tema e dos objetivos da Matemática, "superando uma perspectiva na qual essencialmente se ensina a regra na direção de uma realidade (ainda distante) na qual se busca possibilitar que os alunos entendam o que fazem e porque o fazem, a cada momento" (NÓBREGA; RIBEIRO; SILVA, 2017, p. 188). Os autores citam Ma (1999), que destaca a importância de um sólido conhecimento dos professores sobre o conteúdo a ser ensinado:

> O conhecimento dos professores sobre uma matéria pode não produzir automaticamente métodos de ensino promissores ou novas concepções de ensino. Mas sem um apoio sólido desse conhecimento, métodos promissores ou novas concepções não podem ser realizados com sucesso. (MA, 1999, p. 86, apud NOBREGA; RIBEIRO; SILVA, 2017, p. 175).

Em relação ao ensino de Matemática nos Anos Iniciais, Nóbrega, Ribeiro e Silva (2017) ressaltam que o professor, ao se deparar com a necessidade de ensinar os conteúdos, muitas vezes retoma a forma como originariamente aprendeu. Desta forma, vai se perpetuando o ensino tradicional da Matemática, focado nas quatro operações e no trabalho com resolução de problemas de forma repetitiva. De acordo com os autores, esse círculo vicioso "pode ser quebrado com formações que permitam que o professor consiga vislumbrar outras formas de compreender e consequentemente de ensinar Matemática, dando profundidade aos conteúdos a serem desenvolvidos" (NÓBREGA; RIBEIRO; SILVA, 2017, p. 188). Eles também destacam a importância do conhecimento especializado dos professores para o trabalho com o pensamento algébrico:

> O trabalho com os algoritmos, por ser ainda um dos focos essenciais dos Anos Iniciais, torna-se um dos contextos onde a discussão das bases sustentadoras e formas de encarar e desenvolver o pensamento algébrico poderá se sustentar, buscando possibilitar uma passagem para a discussão informal das propriedades em detrimento das regras. Nesse sentido, torna-se essencial também o desenvolvimento de um conhecimento especializado que permita "ver" a estrutura e não apenas os resultados numéricos. (NOBREGA; RIBEIRO; SILVA, 2017, p. 188).

Portanto, as práticas de sala de aula, centradas na explicação por parte do professor seguida da resolução de exercícios por parte dos alunos, não são um contexto favorável ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Para que isso aconteça, a condução das aulas precisa dar lugar à discussão, ao confronto de ideias, à argumentação e construção de generalizações coletivas.

2.2 OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA O ENSINO

Shulman (1986) realizou um estudo sobre o conhecimento do professor envolvendo pesquisas acerca das avaliações e dos testes admissionais aplicados ao final do século XIX. Verificou que, naquela época, os exames enfatizavam a importância do conhecimento do conteúdo e que eram poucas, ou praticamente inexistentes, as questões sobre a prática pedagógica. Ou seja, o conhecimento das teorias e dos métodos de ensino desempenhava um papel secundário nas qualificações de um professor, de acordo com o que era solicitado naqueles testes.

Nas pesquisas de Shulman, a ênfase da avaliação havia se voltado à capacidade de ensinar e aos procedimentos de ensino, em detrimento do conhecimento dos conteúdos. O autor questiona essa lacuna entre o conteúdo e os procedimentos de ensino, perceptível nos cem anos que separam o final do século XIX do final do século XX, ressaltando que o conhecimento do conteúdo e a habilidade pedagógica têm a mesma importância para o ensino. Para Shulman (1986), cada disciplina apresenta suas próprias especificidades, o que justifica estudar a natureza do conhecimento do professor, de modo que diferencia três categorias de conhecimentos necessários aos professores para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo (*subject knowledge matter*), o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical knowledge matter*) e o conhecimento curricular (*curricular knowledge*).

O conhecimento específico do conteúdo se refere ao conhecimento do conteúdo que deverá ser ensinado. Essa compreensão envolve fatos, conceitos e procedimentos de uma área específica do saber. O domínio da estrutura da disciplina envolve a compreensão dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica (SHULMAN, 1986). O conhecimento do conteúdo requer que o professor vá além dos conceitos da disciplina:

> O professor não deve ser capaz de definir para os estudantes as verdades aceitas de um conteúdo. Ele também precisa ser capaz de explicar porque uma dada proposição pode ser justificada, porque vale a pena ser conhecida, como se relaciona com outras proposições, dentro e fora da disciplina, tanto na teoria quanto na prática. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

O conhecimento pedagógico do conteúdo se refere aos processos de mediação para que esse mesmo conteúdo possa ser compreendido pelos alunos. Envolve também o conhecimento sobre o que facilita ou dificulta o aprendizado de um determinado conteúdo e as implicações dos erros conceituais apresentados com frequência pelos alunos (SHULMAN, 1986). É importante que os professores conheçam a especificidade de um conteúdo, embora isso não garanta unicamente a aprendizagem, pois é preciso ter conhecimento pedagógico acerca de determinado conteúdo, que o autor define nestes termos:

> É uma forma particular de conhecimento do conteúdo, que incorpora os aspectos de conteúdo mais pertinente para ser ensinado. São as formas mais úteis de representação das ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações através de uma palavra, de formas de representação e formulação sobre o assunto para torná-lo compreensível para os outros. Uma vez que não existe uma única forma de representação, o professor deve ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, alguns dos quais derivam da investigação, enquanto outros se originam na sabedoria da prática. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

Por fim, o conhecimento curricular do conteúdo se refere ao conhecimento do projeto completo dos programas de ensino. Abrange o conhecimento sobre outros tópicos desse conteúdo que já foram ou serão estudados na mesma disciplina durante os anos anteriores e posteriores, isto é, o conhecimento das relações entre esse conteúdo e outros contextos, dentro da mesma disciplina ou não (SHULMAN, 1986). O autor cita o que, de acordo com a sua visão, representa o currículo:

> O currículo está representado pela ampla gama de programas concebidos para ensinar assuntos específicos e tópicos de um determinado nível, pela variedade de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas e o conjunto de características que servem tanto como indicações e contraindicações de um currículo ou programa específico. (SHULMAN, 1986, p. 10, tradução nossa).

De acordo com Shulman (1987), o ensino começa com o professor entendendo o que deve ser aprendido e como deve ser ensinado. Depois, ele pode transformar essa compreensão do conteúdo em ações e representações pedagógicas para auxiliar na aprendizagem dos alunos. Após esse ensino, há uma nova compreensão, tanto por parte do aluno quanto do professor. O autor não limita sua concepção de ensino à transmissão de conhecimento, mas possui afinidade pelo aprendizado por meio da descoberta. Nos métodos centrados no aluno, Shulman também destaca a importância do conhecimento do professor:

> Mas mesmo nessas formas de educação centradas no aluno, em que a maior parte da iniciativa está nas mãos dos alunos, há pouco espaço para a ignorância do professor. Com efeito, temos razões para acreditar que a compreensão do professor é ainda mais crucial para a sala de aula orientada à investigação do que para sua alternativa didática. Que os alunos aprendam a compreender e resolver problemas, a pensar crítica e

> criativamente, e que também aprendam fatos, princípios e regras de procedimento são objetivos centrais no meu conceito de ensino. Finalmente, entendo que o aprendizado do conteúdo da disciplina muitas vezes não é um fim em si mesmo, mas um veículo a serviço de outras metas. (SHULMAN, 1987, p. 205).

Vários aspectos do conhecimento do professor são destacados pelo autor, que ressalta a questão da responsabilidade do professor diante da compreensão do conteúdo, já que ele influencia a compreensão do aluno:

> O professor tem responsabilidades especiais com relação ao conhecimento do conteúdo, pois serve como fonte primária da compreensão deste pelo aluno. A maneira como essa compreensão é comunicada transmite aos alunos o que é essencial e o que é periférico na matéria. Diante da diversidade dos alunos, o professor deve ter uma compreensão flexível e multifacetada, adequada à oferta de explicações diferentes dos mesmos conceitos ou princípios. Conscientemente ou não, o professor também transmite ideias sobre como a "verdade" é determinada numa área e um conjunto de atitudes e valores que influenciam notoriamente a compreensão do aluno. Essa responsabilidade demanda especialmente a profundidade de compreensão do professor das estruturas da matéria, assim como suas atitudes e entusiasmo com relação ao que está sendo ensinado e aprendido. Esses vários aspectos do conhecimento do conteúdo, portanto, são devidamente entendidos como uma característica central da base de conhecimento para o ensino. (SHULMAN, 1987, p. 208).

Shulman (1987) estabelece sete categorias de conhecimento de base para o ensino. Dentre os conhecimentos docentes, atribui destaque ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK, da expressão *Pedagogical Content Knowledge*) que, segundo ele, representaria o conhecimento profissional docente, algo que distinguiria um professor de uma dada disciplina de um especialista dessa mesma disciplina. Logo, se "o conhecimento do professor fosse organizado num manual, numa enciclopédia ou em algum outro formato de aglomeração de conhecimento" (1987, p. 206), as categorias deveriam incluir no mínimo os seguintes saberes:

> • conhecimento do conteúdo;
> • conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização de sala de aula, que parecem transcender a matéria;
> • conhecimento do currículo, particularmente dos materiais e programas que servem como "ferramentas do ofício" para os professores;
> • conhecimento pedagógico do conteúdo, esse amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional;
> • conhecimento dos alunos e de suas características;
> • conhecimento de contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e suas culturas; e
> • conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica. (SHULMAN, 1987, p. 206).

Shulman destaca que, dentre todas as categorias, o conhecimento pedagógico do conteúdo é o que apresenta maior relevância, por reconhecer os distintos "corpos de conhecimento” necessários para o professor ensinar. Ele consiste em uma combinação entre o conteúdo e a pedagogia que ajuda a entender como “tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e apresentados no processo educacional em sala de aula” (1987, p. 207).

Para o autor (1987), ensinar é antes de tudo compreender. O professor precisa compreender criticamente um conteúdo a ser ensinado. Além disso, é necessário entender como uma ideia se relaciona com outras ideias da mesma matéria de ensino, e com ideias de outras matérias também. E mais, é preciso entender os objetivos educacionais envolvidos em sua ação. Mas não é só compreender conteúdos e objetivos, pois o que distingue a base de conhecimento para o ensino está na:

> interseção entre conteúdo e pedagogia, na capacidade do professor de transformar o conhecimento de conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente poderosas e, mesmo assim, adaptáveis às variações em habilidades e histórico apresentadas pelos alunos. (SHULMAN, 1987, p. 217).

Shulman destaca que ideias compreendidas por professores ainda precisam ser transformadas para serem ensinadas, ou seja, “o professor deve pensar no caminho entre o conteúdo que entendeu e as mentes e motivações dos alunos” (1987, p. 217). E ressalta também a importância dos métodos instrucionais, exemplificando que:

> Aqui, o professor escolhe de um repertório instrucional de abordagens ou estratégias de ensino. Esse repertório pode ser muito rico, incluindo não apenas as alternativas mais convencionais, como leitura, demonstração, recitação ou trabalho individual na carteira, mas também várias formas de aprendizado cooperativo, ensino recíproco, diálogo, aprendizado por descoberta, métodos de projeto e aprender fora do cenário da sala de aula. (SHULMAN, 1987, p. 217).

No processo de instrução, Shulman argumenta que muitos aspectos cruciais da pedagogia precisam estar presentes, tais como: “organizar e gerenciar a sala de aula; apresentar explicações claras e descrições vívidas; atribuir e verificar trabalhos; e interagir eficazmente com os alunos por meio de perguntas, respostas e reações, além de elogio e crítica” (1987, p. 219). O autor fala ainda que gestão, explicação e discussão precisam estar presentes em processos de ensino.

Quanto à avaliação, ressalta que essa etapa requer compreensão do professor acerca do conteúdo e dos processos de aprendizado, pois isso exige o uso do conhecimento pedagógico do conteúdo. Para ele, essa “compreensão precisa ser específica para cada matéria escolar e para tópicos individuais dentro da matéria. [...] Avaliam-se também o próprio ensino do professor e as aulas e materiais empregados nessas atividades” (1987, p. 221).

A reflexão ocorre após esse processo de avaliação. Para tanto, Shulman destaca que é necessário que o professor revise o ensino para compreender se os objetivos foram alcançados, de modo que "o professor atinja uma nova compreensão, tanto dos propósitos e dos conteúdos a serem ensinados como dos alunos e dos próprios processos didáticos" (1987, p. 222). Sobre a reflexão, o autor explica que:

> Isso é o que faz um professor quando olha para o ensino e o aprendizado que acabaram de ocorrer e reconstrói, reencena e/ou recaptura os eventos, as emoções e as realizações. É por meio desse conjunto de processos que um profissional aprende com a experiência. Pode ocorrer sozinho, com a ajuda de dispositivos de gravação ou apenas com a memória. (SHULMAN, 1987, p. 222).

Portanto, Shulman aprofunda a análise da ação do professor na elaboração do conteúdo para o ensino, quando um processo de racionalização pedagógica inclui diferentes momentos: compreensão, transformação, instrução, avaliação, reflexão e nova compreensão. Para ele, esses processos nem sempre ocorrem nessa sequência, sendo que alguns podem nem ocorrer em alguns atos de ensino, embora um professor "precisa demonstrar a capacidade de adotar esses processos quando solicitado progredir mediante o raciocínio e conseguir executar um ato completo de pedagogia" (1987, p. 222).

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), por sua vez, ressaltam que o conhecimento do professor que ensina Matemática pode ser considerado sob uma multiplicidade de perspectivas e conceptualizações, e que muitas destas têm por base as ideias de Shulman (1986). Em relação ao conhecimento do professor que ensina Matemática, destacam a importância do conhecimento especializado, uma das subdivisões que Ball, Thames e Phelps (2008) realizaram acerca do conhecimento do conteúdo proposto por Shulman (1986). Apontam também a importância do saber docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> [...] tendo em consideração a necessidade de que aos alunos sejam propiciadas oportunidades de aprendizagem que permitam o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, torna-se essencial um mais amplo entendimento sobre o conteúdo do conhecimento do professor nessa temática, de modo a possibilitar, posteriormente, equacionar formas de melhorar a prática, as aprendizagens dos alunos e a própria formação de professores. (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017, p. 501).

O conhecimento especializado do conteúdo, de acordo com Ferreira, Ribeiro e Ribeiro, permite "entender os porquês matemáticos associados a cada um dos passos de resolução dessas tarefas/problemas" (2017, p. 502). Os autores citam detalhes sobre esse conhecimento especializado em relação ao pensamento algébrico:

> Considerando o contexto do Pensamento Algébrico, não é, portanto, suficiente saber/obter o resultado correto de determinada operação ou identificar uma solução

> como incorreta, pois é necessário também um conhecimento especializado do conteúdo que é específico do professor (para o trabalho docente). Esse conhecimento associa-se a um saber matemático relacionado com, entre outros, um entendimento dos porquês matemáticos ou dos motivos matemáticos que sustentam uma resposta incorreta. (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017, p. 502).

O conhecimento especializado do conteúdo, segundo Ferreira, Ribeiro e Ribeiro, “corresponde a um conhecimento matemático necessário apenas ao professor que pretende que o outro entenda verdadeiramente o que faz e não o execute meramente como um conjunto de procedimentos sem sentido” (2017, p. 502). Para tanto, ressaltam que, além de entender os porquês, compete ao professor “conhecer também como diferentes imagens, exemplos, contraexemplos e não exemplos do conceito podem fazer com que se adquira uma noção ampla dele e das suas relações com outros conceitos” (p. 502).

O contexto das equações é citado pelos autores, em que, mais do que saber determinar o resultado, o professor precisa ter um conhecimento que permite identificar e compreender os motivos que levam à ocorrência de erros. Ressaltam que compete a ele “conhecer processos alternativos de apresentação/resolução dos conteúdos para que, sem dificuldade, possa colmatar as lacunas de aprendizagem” (p. 503). E para isso, dão um exemplo do conhecimento que o professor precisa ter em relação aos motivos pelos quais os alunos cometem equívocos em seus processos de aprendizagem:

> [...] os professores necessitam antecipar o que os alunos pensam, quais as dificuldades que podem sentir, as suas motivações, ou seja, situações que exigem interação entre a compreensão Matemática e o conhecimento do pensamento matemático dos seus alunos. Por exemplo, não é incomum que os estudantes, no início do processo de representação numérica, ao serem solicitados a representar o numeral 23, escrevam 203. Cabe ao professor ter conhecimento de que esse tipo de equívoco ocorre, possivelmente, em virtude da estrutura da língua portuguesa, que na pronúncia dos números segue o padrão aditivo, ou seja, vinte e um, vinte e dois, vinte e três. (FERREIRA; RIBEIRO; RIBEIRO, 2017, p. 503).

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017) destacam a importância de uma reformulação na formação inicial e continuada, de modo que sejam incrementadas discussões matemáticas que busquem uma perspectiva de trabalho com o pensamento algébrico, que desvie o foco do trabalho com a técnica operatória dos algoritmos e da busca do resultado final.

Nesta pesquisa, discutimos elementos inerentes ao pensamento algébrico, os quais fazem parte do conhecimento necessário para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais. O foco de investigação se volta, principalmente, ao conhecimento do conteúdo específico e ao conhecimento pedagógico (SHULMAN, 1986, 1987), além de serem feitas também relações com o conhecimento curricular (Shulman, 1986 e 1987) e com o conhecimento especializado do conteúdo, explicado por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017).

3 A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Iniciamos este capítulo com um breve estudo a respeito da história da Álgebra e das fases evolutivas da linguagem algébrica: retórica, sincopada e simbólica. O estudo é feito segundo a perspectiva de alguns autores: Ponte, Branco e Matos (2009), Baumgart (1992), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Araújo (2008).

Em seguida, realizamos uma retrospectiva sobre o ensino de Álgebra no Brasil e sobre as concepções de Educação Algébrica adotadas historicamente, uma vez que o cenário do ensino atual é reflexo de suas várias fases de evolução, ou seja, essa história influencia ainda hoje os processos de ensino. Autores como Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Ponte, Branco e Matos (2009), Sousa, Panossian e Cedro (2014) e Araújo (2008) orientaram essa retrospectiva que explica o fato de ainda se encontrar, muitas vezes, um ensino da matéria baseado no transformismo algébrico, com pouco significado para os alunos e que não leva à construção do pensamento algébrico.

No terceiro tópico, caracterizamos o pensamento algébrico, segundo a perspectiva de alguns autores que discutem a importância de sua introdução nos Anos Iniciais: Carraher *et al.* (2006), Mason (2018), Canavarro (2007), Kieran (2004), Blanton e Kaput (2005, 2011), Blanton *et al.* (2015), Kieran *et al.* (2016), Lins e Gimenes (1997), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Cyrino e Oliveira (2011), Radford (2010b) e Kaput (1999). Além disso, trazemos à tona a perspectiva de Álgebra para os Anos Iniciais presente pela primeira vez na BNCC (2017), que objetiva o desenvolvimento do pensamento algébrico.

3.1 A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E AS FASES EVOLUTIVAS DA LINGUAGEM ALGÉBRICA

As origens da Álgebra situam-se, de acordo com Ponte, Branco e Matos, “na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas que já são usadas na Antiguidade – no Egito, na Babilônia, na China e na Índia” (2009, p. 5). Os autores citam como exemplo o papiro de Amhes/Rhind, um documento matemático de cunho algébrico que apresenta a resolução de diversos problemas.

Um autor da Antiguidade, considerado por alguns o fundador da Álgebra, é Diofanto de Alexandria (200-284), que desenvolveu diversos métodos para a resolução de equações e sistemas de equações mediante um estilo de linguagem conhecido como sincopado[2]. Antes de usarem o estilo sincopado, usavam mais a linguagem natural (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Segundo Baumgart, a origem da palavra Álgebra é estranha e intrigante, pois não se origina de uma etimologia nítida, como a palavra Aritmética, por exemplo, que deriva de *arithmos* (número). Sobre isso, escreve que a "álgebra é uma variante da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada al-jebr), usada no título de um livro, Hisab al-jabr w' al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi" (1992, p. 1).

Ponte, Branco e Matos relatam que o termo Álgebra surgiu com Al-Khowarizmi (790-840) "para designar a operação de transposição de termos, essencial na resolução de uma equação" (2009, p. 5). Depois houve avanço com a resolução de equações incompletas e completas de 1º e 2º graus, usando representações diferentes das usadas nos dias atuais.

Um pouco mais adiante na história, a Álgebra ganhou novas formatações importantes através de François Viète (1540-1603), alcançando uma nova etapa, a Álgebra simbólica. Muitos matemáticos italianos do Renascimento tiveram destaque, entre os quais, Scipione del Ferro (1465-1526), o primeiro a resolver a equação do 3º grau, mas que não publicou os resultados; Tartaglia (1500-1557), que resolveu a mesma equação, embora ela tenha sido publicada por Cardano (1501-1576); e Ferrari (1522-1565), que chegou à resolução da equação de 4º grau. Com a resolução das equações de 3º grau, surge a necessidade da introdução dos números complexos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Ponte, Branco e Matos (2009) relatam também que a questão central da teoria das equações é saber quantas soluções pode ter uma equação de grau n. O primeiro matemático a afirmar que uma tal equação tem sempre n soluções foi Albert Girard (1595-1632), em 1629. Esse teorema, atualmente designado como Teorema Fundamental da Álgebra, foi demonstrado de modo satisfatório por Argand (1768-1822) e Gauss (1777-1855).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), ao mesmo tempo em que se desenvolveu a teoria das equações algébricas, foi se constituindo também o conceito de função como uma correspondência entre os valores de duas variáveis. No desenvolvimento da teoria das funções, os conceitos de infinitésimo e derivada vão ocupar um lugar central, dando origem à Análise Infinitesimal.

---

[2] Estilo de linguagem com pequenas abreviações nos enunciados dos problemas.

A partir de meados do século XIX, a atenção dos matemáticos volta-se cada vez mais para o estudo de equações não algébricas, ou seja, de equações diferenciais e de equações envolvendo objetos matemáticos como funções. Outros matemáticos dedicam-se ao estudo de estruturas abstratas como grupo, espaço vetorial, anel e corpo, temas que passam a constituir o núcleo central da Álgebra Moderna (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Mediante os estudos de Ponte, Branco e Matos (2009), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Baumgart (1992), percebe-se que a Álgebra passou por três grandes momentos: (1º) a Álgebra retórica, na Antiguidade, na qual os problemas eram escritos na língua materna, tal como se falava; (2º) a Álgebra sincopada, utilizada para simplificar a linguagem materna por meio de símbolos; (3º) e a Álgebra simbólica, no tempo moderno. Para um melhor entendimento, se demonstrarão alguns exemplos sobre cada etapa da história da Álgebra, nos quais se nota o estilo que as antigas civilizações usavam para fazer os cálculos.

Em função das fases evolutivas da linguagem algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel salientam que "a retórica ou verbal corresponderia à fase em que não se fazia uso de símbolos nem de abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente" (1993, p. 80). De acordo com os autores, essa Álgebra teria sido usada pelos egípcios, babilônios e gregos pré-diofantinos.

A partir da evidência de que a Álgebra se originou na Babilônia, conforme cita Baumgart (1992), ilustra-se um exemplo do estilo retórico daquela região, através do qual é possível perceber o grau de sofisticação da Álgebra babilônica (Figura 1). Esse exemplo, em escrita cuneiforme, foi encontrado em tábulas de argila que sugerem o tempo do rei Hammurabi (1700 a.C.). A explicação é feita em português e se usa a notação decimal indo-arábica no lugar da notação sexagesimal cuneiforme. Na coluna à direita, notam-se as passagens correspondentes tal como se utilizam hoje.

FIGURA 1 – EXEMPLO DE CÁLCULO NA LINGUAGEM RETÓRICA

[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

[2] [Dado] 32 soma; 252 área.	$\left.\begin{matrix} x + y = k \\ xy = P \end{matrix}\right\} \ldots \text{(A)}$
[3] [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.	
[4] Segue-se este método: Tome metade de 32 [que é 16].	$\frac{k}{2}$
16 × 16 = 256	$\left(\frac{k}{2}\right)^2$
256 − 252 = 4	$\left.\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P = t^2\right\} \ldots \text{(B)}$
A raiz quadrada de 4 é 2.	$\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - P} = t.$
16 + 2 = 18 comprimento.	$\frac{k}{2} + t = x.$
16 − 2 = 14 largura.	$\frac{k}{2} - t = y.$

[5] [Prova] Multipliquei 18 comprimento por 14 largura.

18 × 14 = 252 área.	$\left(\frac{k}{2} + t\right)\left(\frac{k}{2} - t\right)$
	$= \frac{k^2}{4} - t^2 = P = xy.$

FONTE: Baumgart (1992, p. 4-5).

Segundo Baumgart (1992), em (1), o problema é formulado; em (2), os dados são apresentados; em (3), a resposta é dada; em (4), o método de solução é explicado com números; e em (5), a resposta é testada.

O estilo sincopado de escrever equações foi introduzido por Diofanto que, conforme argumenta Baumgart (1992), foi um matemático grego que estudou e trabalhou como residente na Universidade de Alexandria, no Egito, e que iniciou o uso do simbolismo algébrico que iria substituir a Álgebra verbal ou retórica. Baumgart destaca a fama de Diofanto em relação à resolução de equações:

> A fama de Diofanto baseia-se em sua Arithmetica, na qual ele apresenta um engenhoso tratamento das equações indeterminadas – geralmente duas ou mais equações em diversas variáveis que têm uma infinidade de soluções racionais. Estas são chamadas, com frequência, equações diofantinas, embora Diofanto não tenha sido o primeiro a resolver tais sistemas. Sua abordagem é inteligente, mas ele não desenvolveu um método sistemático de encontrar soluções gerais. Sua abordagem segue as linhas babilônicas no sentido de que ele expressa todas as incógnitas em termos de um parâmetro, e depois obtém uma equação envolvendo só o parâmetro. (BAUMGART, 1992, p. 9).

No mesmo sentido, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) relatam que o estilo sincopado – a forma de expressar o pensamento com símbolos – teria surgido com Diofanto, já que ele foi o primeiro a utilizar um símbolo como incógnita (o sigma, do alfabeto grego) e encontrar também uma maneira mais abreviada e concisa para expressar suas equações, característica do estilo sincopado (Figura 2).

FIGURA 2 – EXEMPLO DE CÁLCULO NA LINGUAGEM SINCOPADA, USADA POR DIOFANTO

$$\kappa^{\Upsilon}\beta \quad s\eta \wedge \Delta^{\Upsilon}\varepsilon \quad \overset{\circ}{M}\delta \quad \text{ἐστί} \quad \mu\delta;$$

isto é

$$x^3 2 \qquad x8 \; - \; x^2 5 \quad 1 \cdot 4 = 44$$

ou

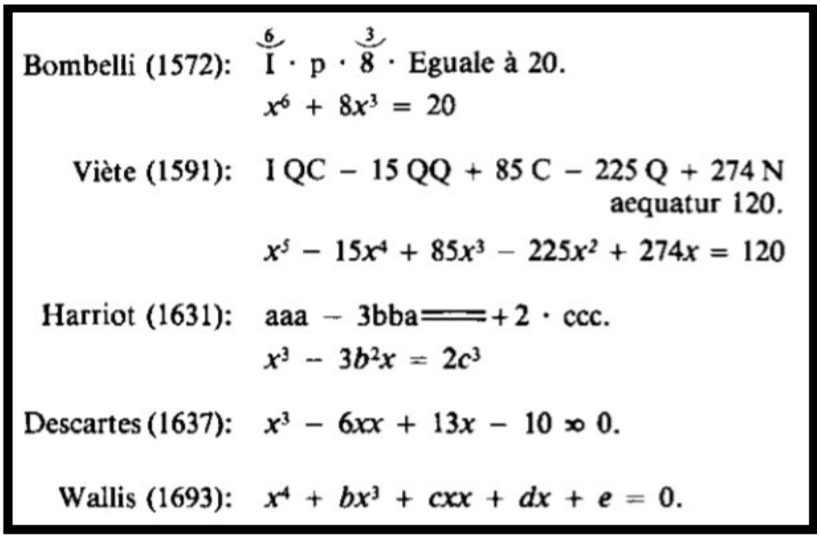
$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$$

FONTE: Baumgart (1992, p. 10).

Os algebristas italianos do século XVI também utilizaram o estilo sincopado. Eles teriam representado a equação $x^3 + 6x = 20$ com a expressão “cubus p.6 rebus aequalis 20”, conforme salientam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que também destacam que os hindus usaram a forma sincopada no século XII.

Desta forma, a fase simbólica, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel, “corresponderia ao momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras” (1993, p. 80). De acordo com os autores, esse período teve grande contribuição de Viète (1540-1603), pois embora o matemático francês ainda usasse um estilo sincopado, introduziu os sinais + e - e as vogais para representar quantidades constantes e consoantes para quantidades incógnitas. Os autores destacam que a consolidação da linguagem simbólica ocorreu com Descartes (1596-1650), a partir da publicação de *La Géométrie*, em 1637. No livro, Descartes usa as primeiras letras (a, b, c, d, ...) como quantidades fixas, e as últimas letras do alfabeto (x, y, z, ...), como incógnitas e variáveis. Na Figura 3, há exemplos de uso da linguagem simbólica:

FIGURA 3 – EXEMPLOS DE USO DA LINGUAGEM SIMBÓLICA



FONTE: Baumgart (1992, p. 13).

A criação de uma linguagem simbólica possibilitou novos avanços e contribuiu para o desenvolvimento da ciência:

> A humanidade levou muitos séculos para criar uma linguagem simbólica: uma linguagem Matemática que, liberta das palavras, se voltava para expressar o pensamento matemático. Uma das maiores contribuições nesse sentido foi dada por François Viète (1540-1603) ao introduzir as vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou indeterminada (variável), e consoantes para representar números supostamente conhecidos (parâmetros). A humanidade, então, criou e deu uma notação para a variável. Pela característica de quebrar a permanência, a variável representa o pensamento sob a ótica do movimento, permitindo assim um expressar próprio – a do pensamento algébrico –, um pensar que quebra o estático, o fixo, transpõe o numérico, o imutável, abrindo assim as portas para um novo tempo, possibilitando o desenvolvimento da ciência de um modo geral. Assim, o pensamento algébrico ganha nova forma de expressão. (ARAÚJO, 2008, p. 341).

Apesar das contribuições que a linguagem simbólica trouxe para o avanço da Matemática e para a ciência de um modo geral, o ensino de Álgebra, ao enfocar muito esse simbolismo, apresenta um problema, pois muitas vezes isso não tem significado para o aluno, o que acarreta dificuldades na hora da aprendizagem.

3.2 RETROSPECTIVA SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA NO BRASIL

Os problemas atuais do ensino da Álgebra no Brasil podem ser um reflexo de sua evolução, desde que a disciplina foi introduzida no currículo escolar, envolvendo toda a trajetória de ensino desse conteúdo. Devido a esse fato, faz-se necessário uma breve retrospectiva, pois isso ainda influencia processos de ensino e aprendizagem.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a Álgebra foi introduzida no ensino brasileiro por meio da Carta Régia de 19 de agosto de 1799, na forma de aulas avulsas, somando-se, assim, a disciplinas já estabelecidas como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria. De acordo com os autores, a Álgebra sucedia o estudo completo da Aritmética e antecedia o estudo completo da Geometria.

Através da Reforma Francisco Campos (1931), ocorreu a união das quatro disciplinas (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria), que se tornaram uma única disciplina que receberia a denominação comum de "Matemática". Mesmo após a reforma, a Aritmética, a Álgebra, a Geometria e a Trigonometria permaneceram em compartimentos estanques, com um equilíbrio enciclopédico entre esses quatro campos, em nível de legislação, porque, na prática escolar, o ensino da Álgebra ficava em desvantagem, pois os professores conheciam pouco seu conteúdo até o início do século XX. Não havia também clareza quanto aos principais objetivos a serem alcançados com os conteúdos, de modo que tudo era considerado essencial (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992).

Através da análise de livros didáticos e programas oficiais anteriores à década de 1960, Miguel, Fiorentini e Miorim concluíram que, no ensino da Álgebra, uma maior ênfase era atribuída às transformações das expressões algébricas e à resolução de problemas, geralmente artificiais. Além disso, "o ensino dos tópicos aritméticos e algébricos fazia-se de modo quase sempre mecanizado e automatizado" (1992, p. 42).

Durante o Movimento da Matemática Moderna, nos anos 1960, ocorreu a tentativa de unificar o ensino dos três campos fundamentais da Matemática: a Álgebra, a Aritmética e a Geometria. De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), esse momento de unificação buscou solucionar alguns dos problemas relacionados ao ensino da Álgebra, dando-lhe um lugar de destaque:

> Esta unificação não se daria entretanto por uma integração mecânica desses campos, nem simplesmente pela exclusão de velhos temas ou inclusão de novos, mas, sobretudo, pela introdução de elementos unificadores, tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático.[...] De fato, a Álgebra viria a desempenhar um lugar de destaque não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se, mais aplicável. Associava-se a isso a crença de que o ensino de 1º e 2º graus deveria refletir o espírito dessa Matemática contemporânea. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 45).

Com o Movimento da Matemática Moderna, a Matemática perdeu seu papel informativo e pragmático, enquanto que a prática pedagógica modernista não conseguia realizar o seu objetivo, segundo o qual “a subordinação dos conteúdos às estruturas deveria dotar o aluno de uma capacidade de aplicar essas formas estruturais de pensamento inteligente aos mais variados domínios, dentro e fora da Matemática” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 49).

Mesmo após algumas tentativas, o Movimento não conseguiu solucionar a crise em que se encontrava o ensino da Matemática. Até o ensino da Álgebra saiu prejudicado, porque, na tentativa de superar o algebrismo, “acabaram imprimindo-lhe um caráter austero, formal e estéril aos olhos dos alunos. Perderia, inclusive, o que tinha de positivo: seu valor instrumental para a resolução de problemas” ((MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 52). Após o declínio do movimento, os professores começaram um processo de recuperação do ensino de Geometria, ao passo que a Álgebra perdia o lugar de destaque:

> [...] se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática Moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo – o papel que ela desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário à resolução de problemas e equações. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 51).

Miguel, Fiorentini e Miorim ressaltam o fato de que a Álgebra, pós Matemática Moderna, parece retomar o seu papel anterior, ou seja, de um estudo com a finalidade de resolver equações e problemas, pois “a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões” (1992, p. 40).

Com relação à Educação Algébrica, os autores (1993) afirmam que existem três concepções de Educação Algébrica que, historicamente, exercem maior influência no ensino: a linguística-pragmática, predominante do século XIX até metade do século XX; a fundamentalista-estrutural, vigente nas décadas de 1970 e 1980; e a fundamentalista-analógica, que representa uma síntese das duas concepções anteriores.

Na concepção linguístico-pragmática, a Álgebra objetiva ser um instrumento de resolução de problemas, mas de uma forma mecanicista, por meio da utilização de técnicas e do transformismo algébrico. De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim, nessa concepção:

> prevalece a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância deles que determinariam

> os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas a forma como fabricar um problema para cuja solução tais tópicos, tidos como indispensáveis, deveriam ser utilizados. (1993, p. 83-84).

A concepção fundamentalista-estrutural desenvolveu-se em torno da ideia de que o uso das propriedades estruturais das operações é suficiente para justificar logicamente cada passagem do transformismo algébrico e para capacitar os estudantes a utilizar essas estruturas em diferentes contextos (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A concepção fundamentalista-analógica considera a Álgebra como um instrumento que deve ser utilizado para resolver problemas. Essa concepção, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel, pode ser considerada uma síntese das duas anteriores, já que procura recuperar o valor instrumental da Álgebra e também manter o caráter fundamentalista, não baseado em propriedades estruturais, mas na manipulação de objetos, por "acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal" (1993, p. 84).

Um dos pontos problemáticos dessas três concepções é que elas praticamente reduzem o ensino da Álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase ao ensino da linguagem algébrica já existente do que ao pensamento algébrico e seu processo de significação. As três concepções priorizam que o aluno domine habilidades manipulativas das expressões algébricas (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Os autores (1993, p. 33-34) enfatizam também que não existe qualquer argumento pedagógico para iniciar o estudo da Álgebra com o transformismo algébrico, pois acreditam que o seu ensino deve iniciar mediante uma exploração de situações-problema, ou então, da problematização de fatos tidos como aritméticos ou geométricos que demandem a construção de generalizações, as quais irão possibilitar que os alunos atribuam sentido à linguagem simbólica. Uma segunda etapa seria fazer o percurso inverso: o aluno partiria de uma expressão algébrica e tentaria atribuir múltiplos sentidos ou significações a ela. Após essa etapa, o cálculo algébrico ganharia certo destaque na prática pedagógica. Esta seria a terceira etapa, momento em que a atenção recai sobre o modo como as expressões algébricas podem ser transformadas em expressões equivalentes e sobre os procedimentos que validam tais transformações. Essas etapas, entretanto, não acontecem necessariamente nessa ordem.

De acordo com Sousa, Panossian e Cedro, a Álgebra exerce um papel importante na formação dos alunos, mas o seu ensino tem sido fonte de alienação em relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, não contribuindo para o desenvolvimento dos sujeitos. Para os autores, "ao ser entendida como uma forma de manipulação de símbolos, perde totalmente a sua relevância na vida deles, dissociando-se de suas práticas sociais" (2014, p. 46).

Os símbolos têm importância para a Matemática. Ponte, Branco e Matos (2009) citam o americano Keith Devlin, matemático que defende que, sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria. Quanto ao ensino, ponderam que, apesar do simbolismo colaborar como ferramenta para a resolução de problemas, pode resultar incompreensível para o aluno. Essa incompreensão ocorre principalmente nas aulas em que a Matemática é pautada em uma prática de ensino baseada em manipulação de expressões algébricas e exercícios repetitivos e exaustivos. De acordo com os autores, "essa simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas" (2009, p. 8). Porém, há alguns problemas, já que:

> [...] esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstrato, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios, como sucedeu no movimento da Matemática Moderna. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 8).

Ainda hoje se encontram nas escolas formas mecânicas de ensinar, que focam em manipulação e transformismo algébrico. Araújo enfatiza que o "pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola; sendo assim, pode-se afirmar que a Álgebra perde seu valor como um rico instrumento de um raciocínio mais abrangente e dinâmico" (2008, p. 338). A pesquisadora lembra que o ensino de Álgebra deve ser focado em atividades que levem as crianças a construir um significado àquilo que estão aprendendo:

> Tendo em vista o contexto delineado, a escola deve propiciar atividades para as crianças no sentido de fazer com que elas construam uma aprendizagem significativa na Álgebra formal. Se não se introduzir a Álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da Álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem Matemática, que para muitos fica desprovida de significação. (ARAÚJO, 2008, p. 336-337).

Araújo enfatiza que a aprendizagem de Álgebra, muitas vezes, continua ocorrendo de forma descontextualizada, com alunos memorizando dados e aplicando fórmulas que logo esquecem, sem chegar a desenvolver o pensamento algébrico. A autora lembra que, para que ocorram mudanças necessárias, fazendo com que o ensino de Álgebra seja significativo, "é preciso que se contemple além dos aspectos formais, a construção do pensamento algébrico" (2008, p. 338).

3.3 ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO E SUA INTRODUÇÃO NOS ANOS INICIAIS

As razões que levaram o ensino de Álgebra a iniciar tradicionalmente nos Anos Finais do Ensino Fundamental estão ligadas a três fatores: suposições sobre o desenvolvimento psicológico (os alunos não estariam prontos para aprender Álgebra); dados que revelam as dificuldades que os adolescentes têm com a Álgebra; razões históricas, pelo fato de a Álgebra ter surgido relativamente há pouco tempo (CARRAHER *et al.*, 2006).

Carraher *et al*. (2006) salientam que as dificuldades em compreender a Álgebra podem estar enraizadas em oportunidades perdidas de desenvolver o pensamento algébrico nos Anos Iniciais, junto à Aritmética. Mason, referindo-se à introdução da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade, enfatiza que nunca é cedo para direcionar com sensibilidade a generalização e a abstração, embora "sempre seja cedo demais para uma instrução insensível" (2018, p. 329, tradução nossa). Canavarro, por sua vez, apresenta diversas razões para a introdução do pensamento algébrico nos Anos Iniciais:

> A introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade representa um passo em frente muito significativo pela possibilidade que inspira de uma abordagem à Matemática mais integrada e interessante, na qual os alunos desenvolvam as suas capacidades Matemáticas motivados por uma atividade rica e com sentido, que lhes possibilita a construção de conhecimento relevante, com compreensão, ampliando o seu patrimônio quer ao nível dos processos, quer dos produtos matemáticos (conhecimentos que podem usar posteriormente). Em consequência, os alunos poderão desenvolver uma atitude favorável em relação à Matemática, reconhecendo a sua unidade, o seu valor e o seu poder, e poderão igualmente conseguir melhorar a preparação para as aprendizagens posteriores, nomeadamente no domínio da Álgebra. (CANAVARRO, 2007, p. 113).

Muitos pesquisadores destacam a importância de introduzir a Álgebra nos currículos escolares desde cedo. Kieran *et al*. (2016) citam que pesquisas obtiveram resultados positivos em estudos de Álgebra com alunos de 6 a 12 anos, os quais tiveram a contribuição de professores preparados em termos de conteúdo e prática pedagógica. Os autores ressaltam que a Álgebra precoce prepara os alunos para os futuros estudos nesse campo, auxiliando-os a adquirir hábitos de práticas matemáticas, como identificar estruturas e expressar regularidades.

Lins e Gimenez também defendem que a Aritmética e a Álgebra podem ser trabalhadas de forma conjunta desde o início da escolaridade. Para eles, a escola tem privilegiado as técnicas de cálculo, não se preocupando em desenvolver um sentido numérico, através do qual seria possível desenvolver "a capacidade de refletir sobre o que há de genérico, sobre as situações envolvidas e refletir sobre a lógica das operações" (1997, p. 160). Na perspectiva desses autores, a Educação Algébrica deveria considerar o desenvolvimento do pensamento algébrico, levando à produção de significados e não à manipulação simbólica-formal e mecânica.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) defendem que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ocorrer desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica. Para tanto, elencam aspectos caracterizadores do pensamento algébrico, que pode ocorrer quando o aluno:

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invarianças; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 5).

Sobre o trabalho com Álgebra nos Anos Iniciais, Kieran defende que ela deve ser considerada como uma forma de pensar. Enfatiza que, para promover o pensamento algébrico, podem ser realizadas atividades sem o uso de qualquer símbolo-letra da Álgebra, tais como "analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever" (2004, p. 149).

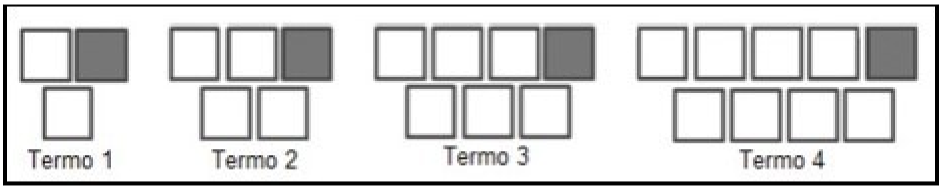
Para Blanton e Kaput, o pensamento algébrico é um:

> processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados a sua idade. (2005, p. 413, tradução nossa).

Diversos autores citam a importância da generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Cyrino e Oliveira consideram o pensamento algébrico "como um modo de descrever significados atribuídos aos objetos da Álgebra, às relações existentes entre eles, à modelação, e à resolução de problemas no contexto da generalização destes objetos" (2011, p. 103).

Outro pesquisador do pensamento algébrico que destaca a importância de processos de generalização é Radford (2010b), que descreve como ocorreu o processo de generalização por estudantes de 7 ou 8 anos, em uma sequência ilustrada na Figura 4:

FIGURA 4 – PRIMEIROS 4 TERMOS DE UMA SEQUÊNCIA APRESENTADA A ALUNOS DE 7 OU 8 ANOS



FONTE: Radford (2010b, p. 3).

A primeira tarefa dos alunos consistia em desenhar os termos 5 e 6 dessa sequência, e a segunda, descobrir o número de quadradinhos dos termos 12 e 25, com o intuito de que os estudantes sentissem a necessidade de encontrar um procedimento geral que lhes permitisse descobrir o número de quadradinhos de qualquer termo da sequência. De acordo com o autor, os alunos conseguiram realizar uma generalização algébrica, encontrando uma regra para determinar o número de quadradinhos de um termo qualquer, apesar de não haver o uso de uma notação simbólica para expressá-la.

Deste modo, estando o foco do pensamento algébrico na atividade de generalizar, Kaput (1999) explica o que está implícito nesse processo de generalização:

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação). (KAPUT, 1999, p. 6, tradução nossa).

Blanton e Kaput (2005) defendem que o raciocínio algébrico pode assumir várias formas, sendo que, em todas elas, a generalização está presente:

> a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
> b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
> c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
> d) a generalização sobre sistemas matemáticos a partir de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Para Blanton e Kaput (2005), a aritmética generalizada se refere ao raciocínio sobre operações, propriedades associadas a números, generalizações sobre a propriedade comutativa de multiplicação ou propriedades de zero, ou então, entender a igualdade como uma relação entre quantidades. O pensamento funcional envolve a generalização de padrões numéricos, de padrões de crescimento ou generalizações sobre somas de números consecutivos. A modelação envolve generalizar regularidades a partir de situações ou fenômenos nos quais a própria regularidade é secundária ao objetivo maior da modelagem. E a generalização sobre sistemas matemáticos, menos comum no Ensino Fundamental, envolve generalizar com objetos e sistemas abstratos, descrita como Álgebra abstrata.

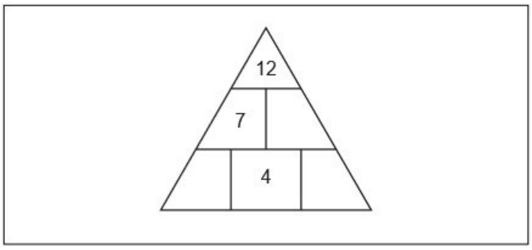
Dentre as quatro formas, de acordo com Blanton e Kaput (2005), a aritmética generalizada e o pensamento funcional são as formas mais comuns de raciocínio algébrico trabalhadas com alunos dos Anos Iniciais. Os autores acompanharam as práticas em sala de aula de uma professora do 3º ano, no contexto de um programa de desenvolvimento profissional, apontando exemplos de atividades algébricas observadas nessa turma, que envolvem aritmética generalizada e pensamento funcional.

Em relação à aritmética generalizada, Blanton e Kaput (2005) destacam exemplos observados no contexto escolar, os quais evidenciam como a Álgebra pode ser explorada ao lado da Aritmética:

- Explorar propriedades e relações de números inteiros: generalizar sobre adição e multiplicação de números pares e ímpares, sobre propriedades da subtração do tipo $a - a = 0$ e sobre propriedades de valor-lugar. Outro exemplo seria decompor números inteiros em possíveis adições e examinar a sua estrutura.
- Explorar propriedades das operações com números inteiros: usar raciocínio algébrico para explorar a estrutura das operações matemáticas. Exemplos: procurar generalidades nas operações, explorar relações entre operações, como a comutatividade da adição ou da multiplicação, ou a propriedade distributiva da adição sobre a multiplicação.
- Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades: usar o sinal de “=” como equivalência e não apenas como resultado de uma operação, através da ideia de balança ou expressões do tipo $8 + 4 = \square + 5$; tratar equações como objetos que expressam relações quantitativas, sendo $3 \times n + 2 = 14$ um dos exemplos usados.
- Tratar o número algebricamente: enfatizar a estrutura do número e não o seu valor, de modo a produzir generalizações. Por exemplo, questionar: $5 + 7$ é par? E $45678 + 85631$ é par ou ímpar? Esses questionamentos ajudam a criar generalizações, por exemplo, quando se somam dois números ímpares, a soma será sempre par.

- Resolver expressões numéricas com número desconhecido: determinar números faltantes, no sentido de incógnita. Exemplos: resolver equações com incógnitas, por exemplo, V + V = 4 ou V + V + 6 = ?; completar quebra-cabeças numéricos onde faltam números, sendo que dois números lado a lado somados resultam no número acima deles. Em relação ao quebra-cabeça da Figura 5, foi gerado um conjunto de equações: 7 + a = 12, e + 4 = 5, 4 + d = 7, no qual os alunos usaram símbolos diferentes para diferentes quantidades desconhecidas.

FIGURA 5 – QUEBRA-CABEÇA TRIANGULAR



FONTE: Blanton e Kaput (2005, p. 423).

O pensamento funcional inicia-se frequentemente com a generalização de padrões, estabelecendo conexões entre padrões geométricos e numéricos. Blanton e Kaput (2005) elencam diversos exemplos de aspectos incluídos no pensamento funcional que observaram junto à prática pedagógica da professora do 3º ano:

- Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas: usar símbolos para modelar problemas e para operar com expressões simbólicas, por exemplo, no contexto de mensagens secretas, que são códigos simbólicos.
- Representar dados graficamente: fazer um gráfico de pares ordenados para expressar uma relação funcional e apoiar nele a análise da variação da função. E embora a representação gráfica não seja um raciocínio inerentemente algébrico, foi incluída porque representa uma maneira de codificar informações que permitem a análise de relações funcionais, desempenhando um papel de apoio no raciocínio algébrico.
- Descobrir relações funcionais: explorar a correspondência entre as quantidades e desenvolver uma regra que descreva essa relação, e explorar também relações recursivas, simbolizar as regras descobertas e encontrar padrões para solucionar problemas.
- Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos: formular conjecturas acerca do que não se sabe, a partir do que se sabe, sem repetir todo o processo anterior. Cita-se um exemplo de problema no qual os alunos determinaram a quantidade de

apertos de mão em grupos de 6, 7 ou 8 pessoas, sendo que a regra consistia em apertar a mão de todos os elementos do grupo. E o passo seguinte seria descobrir um padrão ou sentença matemática e determinar a quantidade possível de apertos de mão em um grupo de 12 pessoas.

- Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos: identificar regularidades numéricas, às vezes, geradas geometricamente, identificar padrões em sequências de figuras geométricas ou em conjuntos de expressões numéricas. Como exemplo, cita-se novamente o problema do aperto de mãos, pois, em um grupo de 6 pessoas, o número total de apertos é dado pela expressão 0+1+2+3+4+5, embora, ao se analisar as somas não executadas, seja possível identificar um padrão para determinar este número para um grupo de qualquer tamanho.

Blanton *et al*. destacam cinco grandes ideias nas quais o pensamento algébrico pode ser desenvolvido nos Anos Iniciais: (a) equivalência, expressões, equações e desigualdades; (b) aritmética generalizada; (c) pensamento funcional; (d) variável; e (e) raciocínio proporcional. Para tanto, apresentam resultados de um estudo sobre o impacto de uma intervenção abrangente de Álgebra no 3º ano, destacando que, com uma instrução apropriada, “as crianças são capazes de se envolver com sucesso com um conjunto amplo e diversificado de grandes ideias algébricas” (2015, p. 39, tradução nossa). A intervenção dos pesquisadores consistiu em dezenove lições de Álgebra de uma hora ensinadas durante o ano letivo. As aulas constituíram cerca de 10% do tempo total destinado a ensinar Matemática. Como a Álgebra apresenta conexões profundas com a Aritmética, de acordo com os autores, os demais tópicos do currículo não precisaram ser eliminados.

A ideia de equivalência, expressões, equações e desigualdades, inclui situações como: desenvolver uma compreensão relacional do sinal de igualdade (por exemplo, 8 + 5 = ___ + 4); resolver problemas com valor desconhecido através das relações estruturais das sentenças; interpretar uma expressão algébrica no contexto de um problema; analisar uma equação para determinar o valor de uma variável; e modelar situações-problema para produzir equações lineares de forma $x + a = b$, etc (BLANTON *et al*., 2015). Antes disso, essas situações faziam parte da aritmética generalizada, conforme as classificações já vistas de Blanton e Kaput (2005). Blanton *et al*. (2015, p. 83, tradução nossa) usaram a seguinte questão para analisar a compreensão dos alunos sobre a noção de equivalência: “Preencha os espaços em branco com o valor que torna a sentença verdadeira. Como você conseguiu sua resposta? a) 7 + 3 = ____ + 4. Por quê? b) 5 + 3 = ____ + 3. Por quê?”

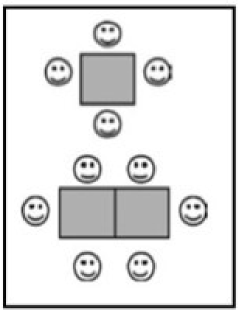
A aritmética generalizada envolve generalizar relações aritméticas, incluindo propriedades como a comutatividade da adição, raciocinar sobre a estrutura de expressões aritméticas, analisar informações para desenvolver uma conjectura sobre uma relação aritmética e desenvolver uma justificativa ou argumento para provar uma conjectura, etc. Blanton *et al.* analisaram a noção de aritmética generalizada com a seguinte questão:

> A professora de Marcy pede a ela para descobrir 23 + 15. Ela soma os dois números e obtém 38. A professora, em seguida, pede-lhe para descobrir quanto dá 15 + 23. Marcy já sabe a resposta. a) Como ela sabe? b) Você acha que isso vai funcionar para todos os números? Se sim, como você sabe? (BLANTON *et al*., 2015, p. 83, tradução nossa).

De acordo com os autores*,* o pensamento funcional "envolve a generalização de relações entre quantidades de covariância e representação e raciocínio com essas relações através da linguagem natural, notação algébrica (simbólica), tabelas, e gráficos" (2015, p. 43, tradução nossa). E também, identificar um padrão recursivo e descrever em palavras, gerar dados e organizar em uma tabela de funções, usar a regra de função e prever valores distantes e determinar o valor de uma variável independente, sendo dada a variável dependente, etc. Para analisar o pensamento funcional, Blanton *et al.* (2015, p. 85-86, tradução nossa) usaram a seguinte questão, que incluía uma figura para representar a sequência do número de mesas e cadeiras e a tabela correspondente (Figura 6):

> Brady convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer verificar se tem um assento para todos. Ele tem mesas quadradas. Ele pode acomodar 4 pessoas em um mesa quadrada conforme a figura. Se ele juntar a outra mesa quadrada com a primeira, ele pode acomodar 6 pessoas. a) Se Brady continuar juntando mesas desta maneira, quantas pessoas podem se sentar em: 3 mesas? 4 mesas? 5 mesas? Registre suas respostas na tabela e preencha todas as informações (figura 6). b) Você vê algum padrão na tabela? Descreva-o. c) Encontre uma regra que descreva a relação entre o número de mesas e o número de pessoas que podem sentar nas mesas. Descreva sua regra em palavras. d) Descreva sua regra usando variáveis. O que suas variáveis representam? e) Se Brady tiver 10 mesas, quantas pessoas podem se sentar? Mostre como você chegou na resposta.

FIGURA 6 – REPRESENTAÇÃO DAS MESAS E TABELA RELACIONANDO O NÚMERO DE MESAS E DE PESSOAS



Número de mesas	Número de pessoas
1	
2	
3	
4	
5	
6	

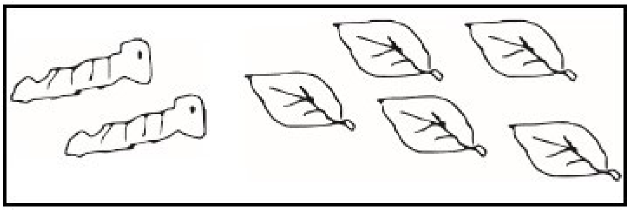
FONTE: Adaptado de Blanton *et al*. (2015).

Embora Blanton *et al.* (2015) tenham classificado as variáveis como uma das ideias distintas da Álgebra, elas foram trabalhadas e avaliadas junto a outras noções algébricas, como na questão das mesas e cadeiras, em que se solicita o uso de variáveis (letra d). Para os autores, as variáveis são usadas para representar generalizações aritméticas ou uma quantidade desconhecida, para descrever uma regra de função, para interpretar seu significado no contexto de um problema, etc. Eles avaliaram os alunos em relação à ideia de variável com uma questão que também envolvia aritmética generalizada:

> Evelyn calcula o seguinte: 8 - 8 = ___ ; 12 - 12 = ___. Ela calcula uma resposta 0 de cada vez . Ela começa a pensar que sempre que você subtrair um número por si só, a resposta é 0. Qual das seguintes alternativas descreve melhor seu pensamento? Círcule sua resposta. a) $a + 0 = 0$; b) $a = b + a + b$; c) $a - a = 0$; d) $a \times 0 = 0$. (BLANTON *et al.*, 2015, p. 84, tradução nossa)

O raciocínio proporcional é outra noção algébrica proposta no trabalho de Blanton *et al.*, estando ligada à ideia de relações multiplicativas e proporção. Por exemplo: se 2 balas custam 10 centavos, quanto custam 4 balas? Os autores analisaram o desempenho dos alunos sobre esse assunto através da seguinte questão: “Uma turma de quarto ano precisa de 5 folhas por dia para alimentar suas 2 lagartas. Quantas folhas eles precisam a cada dia para 12 lagartas? Explique como você conseguiu sua resposta” (BLANTON *et al.*, 2015, p. 86, tradução nossa).

FIGURA7 – REPRESENTAÇÃO SOBRE FOLHAS E LAGARTOS



FONTE: Blanton *et al.* (2015, p. 86).

As cinco grandes ideias de organizar o conteúdo algébrico são “fundamentais para o entendimento da Álgebra porque elas fornecem contextos ricos em que o pensamento algébrico pode ocorrer (por exemplo, Aritmética) ou representam componentes centrais da Álgebra como disciplina (por exemplo, variável)” (BLANTON *et al.*, 2015, p. 44, tradução nossa). Segundo os autores, o ensino baseado em Aritmética não prepara os alunos para um estudo bem sucedido de Álgebra em anos posteriores, enquanto que uma educação em Álgebra nos Anos Iniciais melhora potencialmente algumas dessas dificuldades.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), instituição de referência acerca de tendências curriculares internacionais, propôs em 2000, com a publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics*, recomendações sobre o que os estudantes devem aprender em Matemática, além de muitas orientações que podem contribuir à prática pedagógica em sala de aula. No documento, a Álgebra, apontada como uma das cinco normas de conteúdo para a Matemática escolar, abrange habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos desde o pré-escolar até o 12º ano pelos programas educacionais:

> • Compreender padrões, relações e funções;
> • Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> • Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> • Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa).

As orientações do NCTM indicam que o trabalho com a Álgebra deve iniciar ainda no período pré-escolar:

> Ao ver a Álgebra como uma vertente do currículo a partir do pré-escolar, os professores podem ajudar os alunos a construir uma base sólida de compreensão e experiência como preparação para um trabalho mais sofisticado em Álgebra nas séries intermediárias e secundárias. (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa).

O NCTM (2000) exemplifica que a experiência de aprendizagem com padrões pode construir uma compreensão da ideia de função, enquanto que a experiência com números e suas propriedades pode contribuir com trabalhos posteriores sobre símbolos e expressões algébricas. Até noções elementares de modelagem matemática podem ser aprendidas nos primeiros anos escolares.

Nesta direção, o NCTM especifica os aspectos a serem desenvolvidos pelos alunos para cada um dos níveis de escolaridade, desde o pré-escolar ao 12º ano. E como o foco desta pesquisa envolve a Álgebra dos Anos Iniciais, nos níveis pré-escolar ao 2º ano e 3º ao 5º ano, os aspectos são os seguintes:

QUADRO 1 – ASPECTOS A SEREM DESENVOLVIDOS DO PRÉ-ESCOLAR AO 2º ANO

Compreender padrões, relações e funções	•Agrupar, classificar e ordenar objetos por tamanho, número e outras propriedades; • Reconhecer, descrever e estender padrões, como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples, e interpretá-los de uma representação para outra; •Analisar como os padrões de repetição e crescimento são gerados.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	• Ilustrar princípios gerais e propriedades das operações, como comutatividade, usando números específicos; • Usar representações concretas, pictóricas e verbais para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas inventadas e convencionais.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	• Modelar situações que envolvam a adição e subtração de números inteiros, usando objetos, figuras e símbolos.

Analisar a variação em diversos contextos	• Descrever variações qualitativas, como o crescimento de um aluno; • Descrever variações quantitativas, como a de um aluno crescendo dois centímetros em um ano.

FONTE: NCTM (2000, p. 90, tradução nossa).

QUADRO 2 – ASPECTOS A SEREM DESENVOLVIDOS DO 3º AO 5º ANO

Compreender padrões, relações e funções	• Descrever, ampliar e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos; • Representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos	• Identificar propriedades como comutatividade, associatividade e distributividade e usá-las para calcular com números inteiros; • Representam a ideia de uma variável como uma quantidade desconhecida, usando uma letra ou um símbolo; •Expressar relações matemáticas usando equações.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas	• Modelar situações problemáticas com objetos e usar representações como gráficos, tabelas e equações para tirar conclusões.
Analisar a variação em diversos contextos	• Investigar como uma variação em uma variável se relaciona com uma variação em uma segunda variável; • Identificar e descrever situações com taxas de variação constantes ou variáveis e compará-las.

FONTE: NCTM (2000, p. 158, tradução nossa).

A revisão da literatura mostra que não há uma visão única por parte dos pesquisadores em Educação Matemática a respeito do pensamento algébrico e nem dos aspectos a serem desenvolvidos com os alunos dos Anos Iniciais. No entanto, o NCTM especifica aspectos já levantados por Maria Blanton e James Kaput que, de acordo com Canavarro (2007), são investigadores pioneiros nesse domínio. Das cinco ideias algébricas apresentadas por Blanton *et al*. (2015) para serem desenvolvidas com os Anos Iniciais, a aritmética generalizada e o pensamento funcional já eram considerados pelos pesquisadores. A ideia variável já estava presente no trabalho deles de 2005, como uma subcategoria das anteriores, enquanto que a ideia equivalência, expressões, equações e desigualdades era uma subcategoria da aritmética generalizada. A novidade, em termos classificatórios, é a proposta das situações de raciocínio proporcional.

3.3.1 A Álgebra na BNCC 2017

A BNCC estabelece os conteúdos, as competências e as habilidades fundamentais que os alunos devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Quando trata da unidade temática Álgebra, destaca que a finalidade é desenvolver um tipo especial de pensamento – isto é, o pensamento algébrico – que é:

> [...] essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270).

Além disso, a BNCC enfatiza que as principais ideias matemáticas relacionadas ao pensamento algébrico são: “equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade”, estabelecendo como foco “o desenvolvimento da linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações” (2017, p. 270).

Conforme consta na BNCC, é preciso explorar algumas dimensões da Álgebra desde os Anos Iniciais:

> Nessa perspectiva, é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. (BRASIL, 2017, p. 270)

Nos Anos Iniciais, o foco é o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois, “nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam” (2017, p. 270). Há também, nessa etapa escolar, a preocupação com o desenvolvimento da relação de equivalência e a ideia intuitiva de função:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco? (BRASIL, 2017, p. 270).

A BNCC indica a importância de se trabalhar regularidades e padrões em sequências repetitivas e recursivas e fazer relações entre a unidade temática Álgebra e a unidade temática Números:

> A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. (BRASIL, 2017, p. 270).

O desenvolvimento do pensamento algébrico, ou então, do eixo Álgebra, tende também a promover uma integração entre as unidades temáticas da Matemática. “Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização" (BRASIL, 2017, p. 268).

No referido documento, defende-se que os conceitos algébricos sejam introduzidos nos Anos Iniciais e retomados, aprofundados e ampliados nos Anos Finais do Ensino Fundamental:

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 271).

A BNCC destaca ainda a importância do desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, já que a "linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável" (2017, p. 271). A identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos também é uma habilidade da Álgebra que se relaciona com o pensamento computacional.

Considerando as classificações de Blanton *et al.* (2015), e observando os objetos de conhecimento e habilidades propostos na BNCC para os Anos Iniciais, a categoria variável não está presente, embora algumas ideias algébricas ganhem destaque. O pensamento funcional aparece na generalização de padrões em sequências, como conteúdo do 1º ao 4º ano, enquanto que a categoria das equivalências, expressões, equações e desigualdades aparece do 3º ao 5º ano, propondo as propriedades da igualdade como objetos de conhecimento e relacionando noções de equivalência e elaboração de problemas, cuja resolução exige a construção de uma sentença com uma igualdade e uma operação com termo desconhecido. O raciocínio proporcional proposto por Blanton *et al.* aparece no 5º ano, na habilidade que busca "resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros" (2015, p. 295).

Neste capítulo, fizemos uma retrospectiva procurando entender um pouco da história da Álgebra e como ocorreu o ensino dessa disciplina no Brasil ao longo do tempo. Trouxemos à tona orientações da BNCC e do NCTM relacionadas ao trabalho com a Álgebra nos Anos

Iniciais, além das experiências de diversos pesquisadores, que indicam a possibilidade de trabalhar esse conteúdo e desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

4 APROFUNDANDO DIMENSÕES DA ÁLGEBRA PROPOSTA NA BNCC PARA OS ANOS INICIAIS

A BNCC, na unidade temática Álgebra, destaca as regularidades e a generalização de padrões e as propriedades da igualdade como dimensões a serem trabalhadas com os alunos dos Anos Iniciais. Observando os objetos de conhecimento e as habilidades elencadas pela BNCC para serem desenvolvidas junto aos estudantes, percebemos que as regularidades e a generalização de padrões em sequências estão presentes do 1º ao 4º ano e que as propriedades da igualdade do 3º ao 5º ano.

Priorizando os aspectos que mais aparecem na BNCC para serem desenvolvidos junto aos alunos dos Anos Iniciais, este capítulo enfatiza, inicialmente, as regularidades e a generalização de padrões em sequências repetitivas e recursivas, trazendo exemplos relatados por pesquisadores e encontrados em livros didáticos, apontando como os padrões podem constituir um desafio e uma oportunidade para ensinar e aprender Matemática com significado, especificamente, como podem contribuir ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Para esta discussão, usamos a perspectiva de diversos autores: Vale *et al*. (2011), Van de Walle (2009), Vale e Pimentel (2011, 2013), Hanke (2008), Stacey (1989), Radford (2006, 2010a, 2010b) e Vale *et al*. (2007).

Na sequência, enfatizamos as propriedades da igualdade, destacando a importância de que os alunos vejam a igualdade como uma equivalência e não apenas como o resultado de uma operação. Trazemos diversos elementos que podem contribuir com esse trabalho no contexto dos Anos Iniciais. Referenciamos, para tanto, as contribuições de autores como Ponte, Branco e Matos (2009), Van de Walle (2009), Booth (1995), Kieran (1992, 2004), Vale e Pimentel (2011) e Vale *et al.* (2011).

4.1 REGULARIDADES E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Padrões e regularidades estão presentes na natureza e no cotidiano das pessoas, como nos ladrilhos, nas estampas de tecidos, nas pinturas de parede, nos números, nas estrelas-do-mar, na órbita dos planetas, nas notas musicais, nos artesanatos, nos acessórios e nos itens de decoração, por exemplo. A regularidade na mudança de clima fez com que os seres humanos instituíssem as quatro estações do ano, assim como a regularidade dos movimentos de translação e rotação produzidos pela Terra em seu eixo foi usada para determinar a duração de um dia e de um ano. Segundo Vale *et al*. (2011, p. 9), um certo “padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades". Com base nessa definição, conclui-se que o padrão é composto por regularidades, ou seja, regularidades em uma sequência que estabelecem um padrão.

Hanke (2008) salienta que o homem procura regularidades desde os tempos remotos, e que isso é percebido na história da Matemática, da Física, da Geografia, etc., e cita como exemplo Pitágoras, que partiu de observações e da identificação de regularidades para a construção do teorema: em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos, sistematizando, mais tarde, a demonstração. Cita também o exemplo de Galileu que chegou à ideia da gravidade, observando regularidades na queda de objetos. E ainda dá exemplos de padrões em: alvéolos pulmonares, passos de dança, nado sincronizado, períodos de gestação, genética, componentes do DNA, marés, disposição de pétalas de flores como o lírio ou o girassol, asas de borboletas ou plumas de um pavão.

Padrões matemáticos são encontrados na natureza em uma diversidade de exemplos, conforme Vale *et al.*:

> Vários fenômenos ou ocorrências naturais ou não, explicam-se, através de padrões matemáticos. É o caso do padrão da pelagem dos animais. Também a disposição das folhas no caule de algumas plantas, como o aipo ou a tabaqueira segue os números de Fibonacci. O mesmo se passa com as espirais do ananás ou da pinha, que se relacionam com a série de Fibonacci. Também num girassol se podem encontrar relações com a série de Fibonacci. Nas asas das borboletas podem-se identificar padrões geométricos, o mesmo acontecendo nas plumas do pavão e nas células de uma colmeia. A couve-flor é um exemplo real de um fractal – padrão decrescente. Uma estrela, ao sucumbir, produz dois clarões que são simétricos. Assim como é possível identificar rotações e simetrias numa maçã. (2007, p. 4).

O estudo com padrões tem por finalidade envolver o aluno com a disciplina de Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa porque está associada a experiências e realidades vivenciadas pelos estudantes. Vale *et al.* destacam que "uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas ricas e significativas, onde o professor consegue construir um ambiente de aprendizagem estimulante e capaz de criar múltiplas oportunidades de discussão e de reflexão entre os alunos" (2011, p. 14). Segundo eles:

> os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informações e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem. (VALE *et al.* 2011, p. 10).

Ressaltam também que o uso de padrões é um importante componente da atividade Matemática, pois permitem conjecturar e generalizar. O estudo de padrões contribui, assim, “apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjecturas, previsões e também generalizações” (2011, p. 9). Vale e Pimentel (2011, p. 1), por sua vez, apostam no trabalho com padrões, sugerindo que deveria ser central em todos os temas, uma vez que:

> muito do insucesso em Matemática deve-se ao fato de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. O primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e estabelecer conexões. A procura de padrões deve constituir o núcleo das aulas em todos os temas, já que eles surgem nas fórmulas que descobrimos, nas formas que investigamos e nas experiências que fazemos.

Portanto, conduzir o ensino da Matemática a partir de experiências com padrões em sequências repetitivas e recursivas é uma tentativa de torná-lo mais significativo, de fazer o aluno vivenciar o processo de construção dessa disciplina, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Atividades que envolvam padrões em sequências podem resultar em um trabalho valoroso e expressivo, de modo que os alunos consigam realizar as suas próprias generalizações. Cabe ao professor utilizar metodologias de ensino que contribuam nesse processo, propor questões e tarefas desafiadoras, com espaço para construir padrões, generalizar e justificar relações matemáticas.

Uma das dificuldades frequentemente apresentadas, no estudo da Matemática, é a aprendizagem da Álgebra. Muitas pessoas, ao lembrar de seus estudos na época da escola, associam Álgebra a um conjunto de letras, à resolução de equações de primeiro e segundo grau, a sistemas de equação, etc., mediante uma Álgebra com pouco sentido. Para ajudar a dar mais significado para a matéria, Vale *et al*. sugerem que “os alunos devem começar a aprendizagem da Álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões” (2007, p. 5).

As atividades que envolvem a observação e a generalização de padrões em sequências solicitam ao aluno, geralmente: que descubra o padrão da sequência para continuá-la; que indique um termo faltante da sequência, que pode começar pela posição da última figura da sequência mais próxima e ir se distanciando; ou que procure um termo numa posição qualquer, distante dentro da sequência.

A ideia subjacente a esse tipo de atividade é que o estudante comece fazendo uma generalização próxima e, na continuação dos itens, chegue à generalização distante, que permite calcular o número de elementos de qualquer termo da sequência. Segundo Stacey (1989), a “generalização próxima” acontece quando o aluno, diante da questão envolvendo padrões, resolve-a, passo a passo, desenhando, contando ou usando o apoio de uma tabela, o que normalmente envolve relações recursivas. Já a "generalização distante" ocorre quando o aluno consegue construir uma lei de formação, ou seja, uma regra que permita calcular qualquer termo da sequência.

Radford (2006, 2010a, 2010b) afirma que as generalizações podem ser entendidas como aritméticas e algébricas. Isso porque, quando os alunos descobrem uma regularidade nos termos dados de uma sequência e a continuam, ou então, identificam se um termo pertence ou não à sequência, mas sem elaborar uma regra que lhes possibilite encontrar qualquer termo dela, eles trabalham no campo aritmético. Logo, uma generalização desse tipo é considerada como uma generalização aritmética.

Radford define o processo da generalização algébrica como sendo aquela que:

> [...] é baseada na capacidade de perceber uma regularidade em alguns elementos de um conjunto S e ser capaz de usá-la para construir uma expressão direta de qualquer termo de S. Em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão se baseia na identificação de uma regularidade local que é depois generalizada a todos os termos da sequência e que serve de garantia para a construção da expressão dos elementos da sequência que permanecem para além do campo perceptivo. (2006, p. 5, tradução nossa).

De acordo com Vale e Pimentel, o "pensamento algébrico centra-se em processos de descoberta de invariantes e na oportunidade de, sobre eles, fazer conjecturas e generalizações" (2013, p. 108). As autoras reiteram que tarefas envolvendo padrões são extremamente ricas, porque desafiam os alunos, mobilizam processos matemáticos fundamentais e possibilitam diversas representações.

De acordo com a BNCC (2017), algumas dimensões do trabalho com a Álgebra devem estar presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde os Anos Iniciais, como as ideias de regularidade e generalização de padrões, os quais podem ser trabalhados em sequências repetitivas e recursivas. A BNCC não propõe o uso de letras para expressar regularidades nessa fase escolar (BRASIL, 2017). O desenvolvimento da generalização é um dos objetivos da Álgebra, enquanto que o trabalho com padrões contribui com esse processo, pois, conforme argumentam Vale *et al.*, "em particular, o trabalho com padrões permite o desenvolvimento da capacidade de generalização" (2011, p. 19).

Os objetos de conhecimento e habilidades de Matemática do 1º ao 4º ano que se relacionam com padrões em sequências recursivas ou repetitivas, dentro da unidade temática Álgebra, constam listados no Quadro 3. No 5º ano, as sequências não fazem parte do currículo, na BNCC.

QUADRO 3 – OBJETOS DE CONHECIMENTO E HABILIDADES SOBRE SEQUÊNCIAS NA BNCC

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º ano	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências.	Habilidade EF01MA09[3]: Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	Habilidade EF01MA10: Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º ano	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas.	Habilidade EF02MA09: Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	Habilidade EF02MA10: Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. Habilidade EF02MA11: Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
3º ano	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas.	Habilidade EF03MA10: Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
4º ano	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	Habilidade EF04MA11: Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
	Sequencia numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número natural diferente de zero.	Habilidade EF04MA12: Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.

FONTE: BNCC (2017, p. 278-290).

Diversas atividades podem ser feitas para explorar as sequências, em busca de padrões ou regularidades. Vale *et al*. (2011, p. 10) sugerem tarefas que o professor pode selecionar e implementar, proporcionando oportunidade de:

> - Usar múltiplas representações de um padrão – concreta, pictórica e simbólica de uma representação para outra;
> - Averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade;
> - Descobrir o padrão numa sequência;
> - Descrever o padrão oralmente e por escrito;
> - Continuar uma sequência;
> - Prever termos numa sequência;
> - Generalizar;
> - Construir uma sequência.

[3] EF corresponde a Ensino Fundamental. Na sequência, 01 se refere a uma habilidade do 1º ano, MA a uma habilidade de Matemática e 09 à nona habilidade daquele ano escolar.

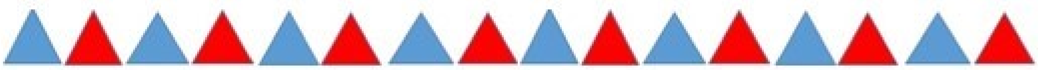
O reconhecimento de padrões de repetição ou de crescimento em sequências e a generalização desses padrões por meio de regras que os alunos podem formular contribuem para que “a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração, essencial no desenvolvimento de capacidades matemáticas” (VALE *et al*., 2011, p. 39).

4.1.1 Sequências repetitivas/sequências com padrões repetitivos

Vale *et al*. definem padrão de repetição como “um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente” (2011, p. 20). Usam ainda o termo “grupo de repetição” (2011, p. 148), referindo-se ao motivo. Para Van de Walle, o conceito de padrão repetitivo parte da identificação de um núcleo que “é a menor cadeia de elementos que se repete” (2009, p. 296).

Os autores citados fazem referência a padrões de vários tipos. Alguns exemplos são mostrados nas Figuras 8, 9 e 10:

FIGURA 8 – PADRÕES DO TIPO: AB, AB, AB...

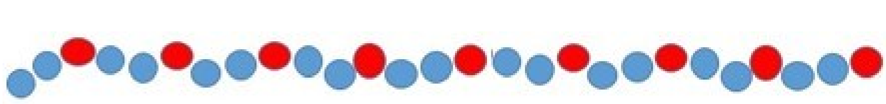


FONTE: elaborado pela autora.

FIGURA 9 – PADRÕES DO TIPO: ABC, ABC, ABC...

FONTE: elaborado pela autora.

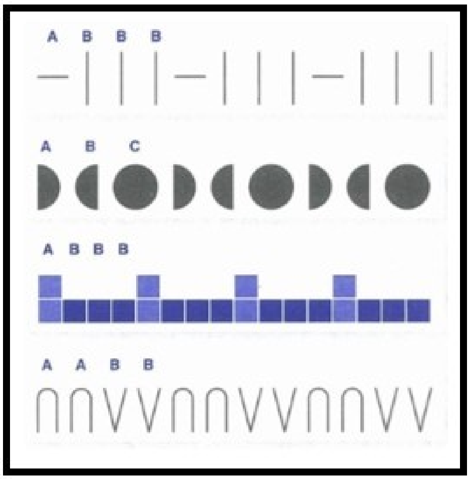
FIGURA 10 – PADRÕES DO TIPO: AAB, AAB, AAB...



FONTE: elaborado pela autora.

Van de Walle (2009) dá sugestões de trabalho inicial com esses padrões, tais como: desenhar padrões no quadro e ampliá-los com sugestões da turma; explorar padrões musicais simples, como “dó, mi, mi, dó, mi, mi...”, posições de braço, “para cima, para baixo, para o lado, para cima, para baixo, para o lado...”, e padrões de “levantar-sentar”, dentre outros. Em seu livro, traz vários exemplos de padrões repetitivos, como os padrões dos tipos ABBB, ABC, ABBB e AABB, visualizados na Figura 11.

FIGURA 11 – PADRÕES REPETITIVOS

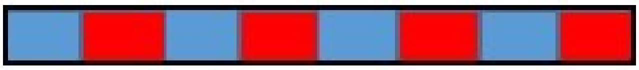


FONTE: Van de Walle (2009, p. 297).

De acordo com Vale *et al*. (2011), as crianças podem trabalhar desde muito cedo com os padrões de repetição, sendo desejável uma exploração aprofundada que inclua processos de generalização. Para tanto, sugerem iniciar com materiais manipuláveis e usar, mais tarde, representações pictóricas (desenhos, gráficos, tabelas e outras formas de representação visual).

Um padrão muito simples adaptado de Vale *et al*. (2011) envolve um raciocínio de pensar figuras que se alternam: ABABABAB... (Figura 12).

FIGURA 12 – PADRÃO REPETITIVO DO TIPO AB, AB, AB...



FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011).

Esse padrão pode ser visto como a junção de duas figuras: AB, AB, AB..., que é o motivo da repetição, o qual, no exemplo, é "azul e vermelho". Além de fazer a continuação da sequência, de identificar o "motivo" que se repete, é possível explorar aspectos ligados à ordem na sequência (Figura 13), o que contribui com os processos de generalização (VALE *et al*., 2011).

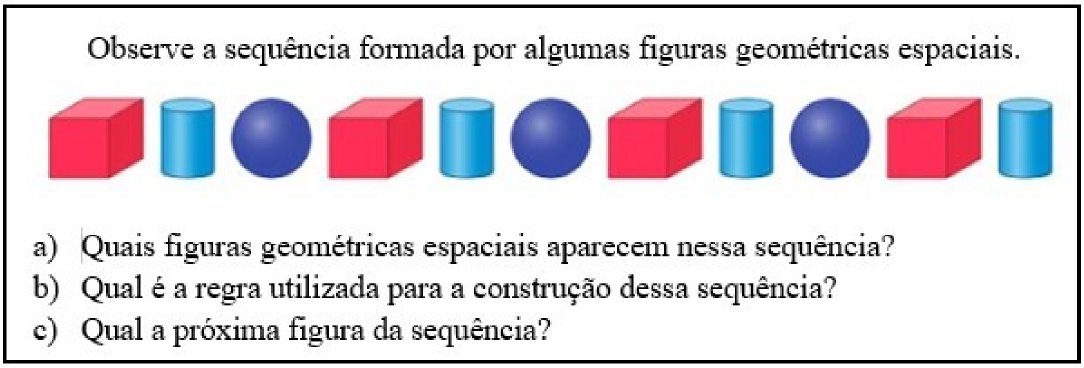
FIGURA 13 – PADRÃO REPETITIVO COM ORDEM NA SEQUÊNCIA

FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011)

Podem ser feitos aos alunos questionamentos como: que cor tem o terceiro elemento? Qual a cor do oitavo elemento? E do décimo segundo elemento? Qual a cor do vigésimo quinto elemento? Nesse processo é importante que os alunos discutam estratégias para descobrir a cor de um elemento, como o vigésimo quinto ou o centésimo, por exemplo, sem ter que desenhar ou contar de um em um. Se os alunos não fizerem a relação de que os ímpares são azuis e os vermelhos são pares, deve-se questionar: quais são vermelhos? Quais são azuis? A generalização para descobrir um termo qualquer nessa sequência é um dos objetivos dessa atividade, logo, o 25.º termo é azul, porque o número 25 é ímpar, e o 100.º termo é vermelho, porque 100 é um número par. Vale ressaltar que os alunos poderão encontrar estratégias diversificadas para responder aos questionamentos propostos e que todas devem ser levadas em consideração e discutidas.

Em uma sequência repetitiva do tipo ABCABC..., encontrada no livro didático do PNLD 2019 a 2022 (Figura 14), os objetivos são: a identificação das figuras geométricas espaciais, a descoberta da regularidade ou do padrão da sequência e a determinação do próximo elemento para continuação da sequência.

FIGURA 14 – SEQUÊNCIA REPETITIVA EM LIVRO DIDÁTICO


Observe a sequência formada por algumas figuras geométricas espaciais.

a) Quais figuras geométricas espaciais aparecem nessa sequência?
b) Qual é a regra utilizada para a construção dessa sequência?
c) Qual a próxima figura da sequência?

FONTE: Coleção Novo Pitanguá – 2º ano (RIBEIRO, 2017, p. 77).

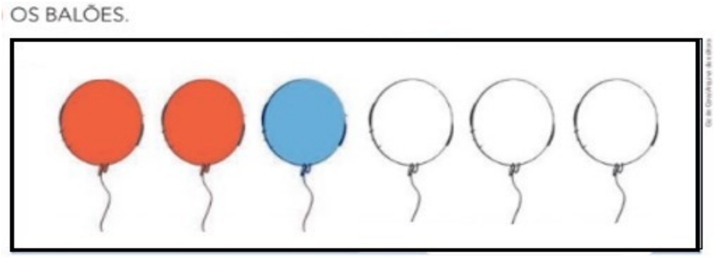
A identificação do “motivo” ou “grupo de repetição” – que, neste caso, é  “cubo vermelho, cilindro azul claro e esfera azul escuro” – contribui para responder às perguntas dessa questão, sendo de extrema importância para identificar um termo distante nessa sequência, como o 47º, por exemplo. Para facilitar essa generalização, que poderia ser proposta em anos subsequentes, é preciso que os alunos já tenham algum domínio da divisão e se apropriado da regularidade de que, em uma divisão por 3, os restos possíveis são 0, 1 e 2. Neste caso, ainda no contexto dos Anos Iniciais, é cabível usar a relação do resto da divisão para descobrir termos mais distantes em uma sequência como a mencionada.

Para descobrir o 47º termo, é possível usar a divisão por 3, porque o “motivo” dessa sequência é composto por 3 figuras. A cada 3 figuras, há um grupo de repetição. A divisão é 47 ÷ 3 = 15, com resto 2. Ao relacionar o algoritmo da divisão com o problema proposto, há 15 "motivos" de repetição, sendo que o termo procurado é o segundo do próximo grupo de repetição (pelo fato do resto ser 2), logo, será o cilindro azul.

Se o objetivo fosse descobrir o 45º termo da sequência, seria preciso realizar a operação 45 ÷ 3=15, com resto zero, então, haveria 15 "motivos" completos, logo, o termo procurado seria a esfera azul, justamente a última figura do 15º grupo de repetição. E se o termo procurado fosse o 46º, seria preciso operar 46 ÷ 3 = 15 com resto 1, o que significa 15 grupos completos de repetição, sendo que o termo procurado seria o 1º do próximo "motivo", logo, o cubo vermelho.

Um padrão pode ser continuado de diversas formas, como no exemplo encontrado no livro didático do PNLD 2019 a 2022 (Figura 15), em que a questão pede para observar como começou a sequência, descobrir um padrão (ou regularidade) e continuar pintando, usando esse mesmo padrão, e depois explicar para um colega o padrão (ou regularidade) descoberto.

FIGURA 15 – SEQUÊNCIA REPETITIVA PARA CONTINUAR

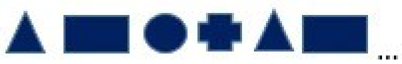


FONTE: Coleção Ápis Matemática – 1º ano (DANTE, 2017a, p. 23).

Neste caso, os alunos poderiam fazer a sequência: vermelho, vermelho, azul, vermelho, vermelho, azul. Mas também é possível fazer a sequência: vermelho, vermelho, azul, azul, vermelho, vermelho, dentre outras. Se a quantidade de balões fosse maior, poderiam ser criados vários outros padrões para continuar a sequência.

Com base em Vale *et al*. (2011), descrevemos, a seguir, alguns cuidados que precisam ser tomados ao se propor a continuação de uma sequência. Em relação à sequência (Figura 16):

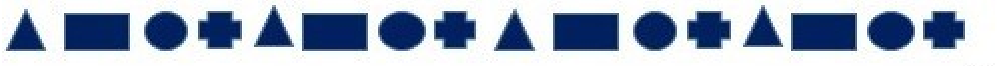
FIGURA 16 – SEQUÊNCIA PARA CONTINUAR



FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011).

O esperado é que os alunos a continuassem conforme a Figura 17:

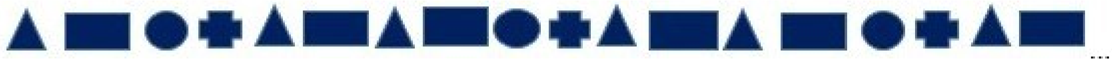
FIGURA 17 – CONTINUAÇÃO ESPERADA DA SEQUÊNCIA



FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011).

Mas a sequência também pode ser continuada, conforme a Figura 18, como se a parte dada fosse o motivo a ser repetido. O importante é que os alunos sejam estimulados a comunicar de que forma pensaram para continuar a sequência, pois essa troca é enriquecedora no processo de aprendizagem.

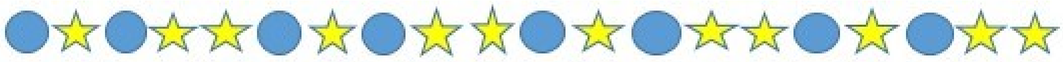
FIGURA 18 – CONTINUAÇÃO ALTERNATIVA DA SEQUÊNCIA



FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011).

Os conceitos iniciais de razão e proporção também podem ser explorados em uma sequência repetitiva (VALE *et al*., 2011). Considerando a Figura 19, que apresenta uma sequência com grupos de cinco, ou seja, o motivo com cinco figuras, o conceito de razão aparece, pois há 2 círculos para 3 estrelas (2/3) em cada grupo. É possível trabalhar outras razões, como 3 estrelas para 5 figuras (3/5) ou 2 círculos para 5 figuras (2/5). E se há, por exemplo, 3 estrelas em cada grupo ou motivo, em 4 repetições deverá haver 12 estrelas (4x3=12). Da mesma forma, por haver 2 círculos em cada grupo, nas 4 repetições, deverá haver 8 círculos (4x2=8). Na última situação se faz presente o raciocínio proporcional.

FIGURA 19 – SEQUÊNCIA REPETITIVA NA QUAL O MOTIVO APRESENTA 5 FIGURAS



FONTE: Adaptado de Vale *et al*. (2011)

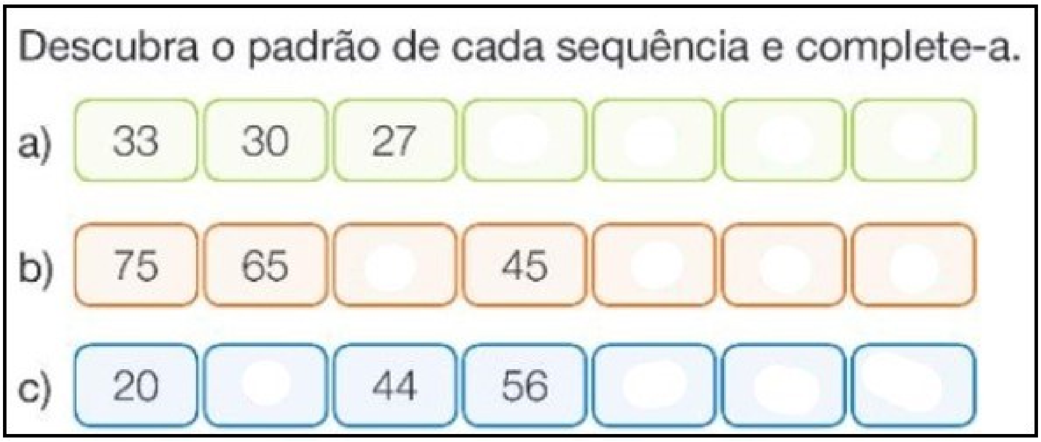
Os padrões de repetição podem ser trabalhados nos Anos Iniciais com níveis diversificados de exploração e fazendo relação com outros conteúdos da Matemática que são objeto de conhecimento em cada ano. Vale *et al*. argumentam que é aconselhável “proporcionar aos estudantes tarefas que lhes permitam reconhecer o motivo da repetição, descrever, completar, continuar e criar padrões, recorrendo a contextos diversificados e em que sejam incentivados e verbalizar os seus pensamentos e a justificá-los” (2011, p. 23).

4.1.2 Sequências recursivas/sequências com padrões de crescimento

As sequências recursivas aparecem como objetos de conhecimento na BNCC (BRASIL, 2017) no 1º, 2º, 3º e 4º anos do Ensino Fundamental. As habilidades consistem em reconhecer e descrever um padrão, completar elementos ausentes em sequências, determinar elementos seguintes em sequências, construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente, utilizando uma regularidade estabelecida ou a ser descoberta (ver

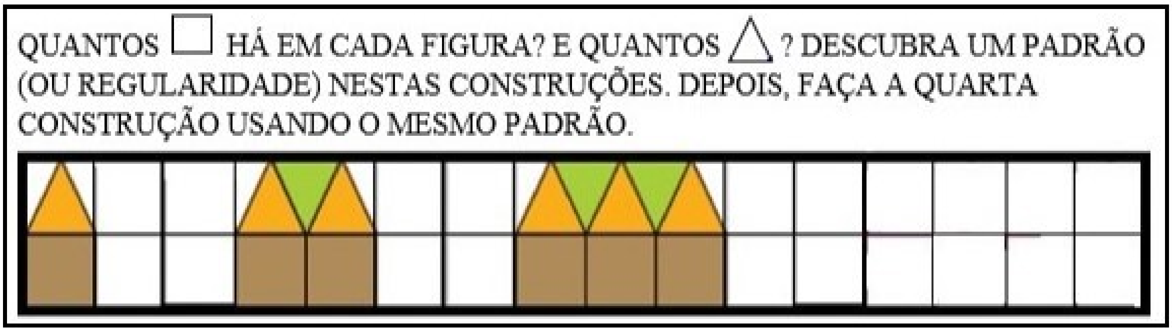
Quadro 3). Nos exemplos das Figuras 20 e 21, encontrados em livros didáticos do PNLD 2019 a 2022, há sequências recursivas numéricas, uma crescente e duas decrescentes, e uma sequência recursiva pictórica com padrões de crescimento. As questões solicitam descobrir a regularidade ou o padrão e completar as sequências com termos faltantes ou próximos.

FIGURA 20 – SEQUÊNCIAS RECURSIVAS NUMÉRICAS



FONTE: Coleção Buriti Mais Matemática, 2º ano (TOLEDO, 2017a, p. 65).

FIGURA 21 – SEQUÊNCIA RECURSIVA PICTÓRICA COM PADRÕES DE CRESCIMENTO

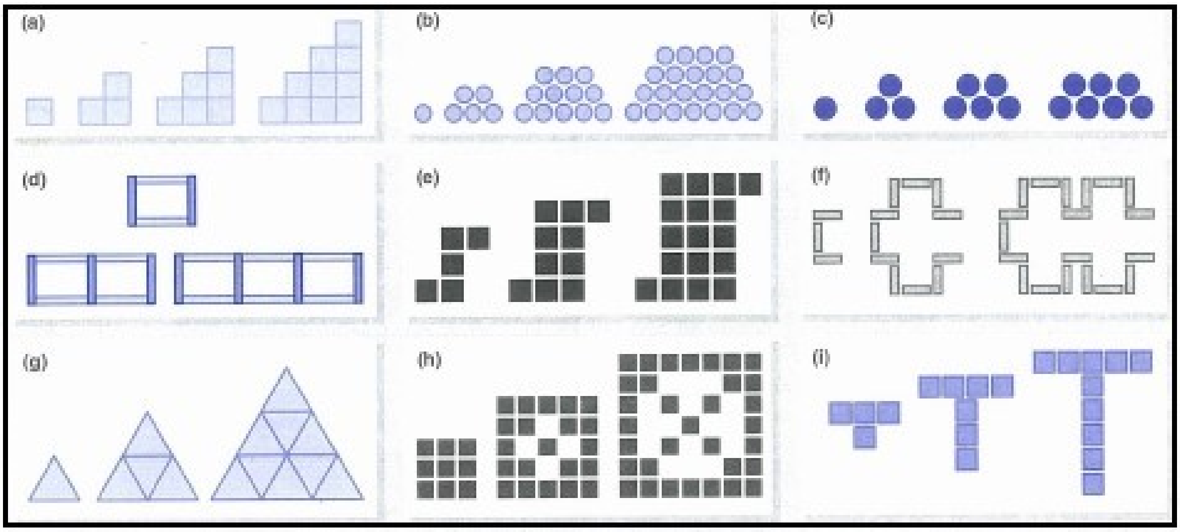


FONTE: Coleção Ápis Matemática – 1º ano (DANTE, 2017a, p. 91).

As sequências recursivas apresentam uma relação recursiva, que permite estabelecer as mudanças de um termo ao outro e, portanto, calcular termos próximos dentro de uma sequência. “A descrição que diz como um padrão é modificado de um passo ao passo seguinte é conhecida como relação recursiva” (VAN DE WALLE, 2009, p. 300).

Para iniciar o trabalho com padrões e facilitar que os alunos percebam as mudanças de um termo da sequência ao próximo, podem ser construídos padrões com materiais concretos como palitos de dente, blocos lógicos, ladrilhos, bolinhas de massinha de modelar, etc. A atividade com o material concreto se torna mais divertida e visualmente adequada, sendo, portanto, uma ótima estratégia para descobrir regularidades em padrões. Na Figura 22, há exemplos de padrões crescentes em sequências recursivas:

FIGURA 22 – PADRÕES CRESCENTES

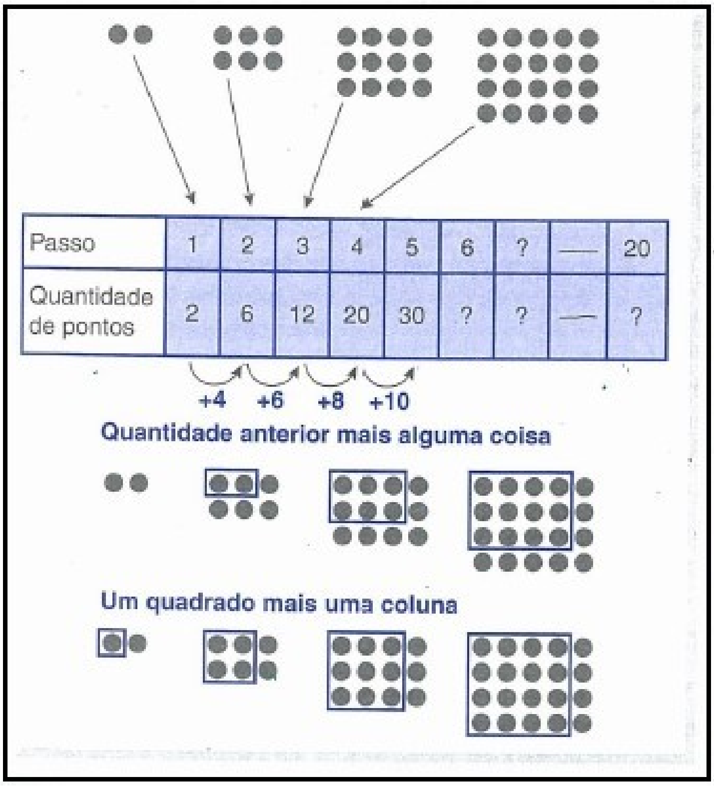


FONTE: Van de Walle (2009, p. 299).

As sequências recursivas com padrões crescentes, em contextos figurativos, contribuem significativamente para os processos de ensino e aprendizagem. “Este tipo de padrões, em particular, fornece uma grande diversidade de situações que proporcionam explorações muito ricas e variadas” (VALE *et al*., 2011, p. 24). Para poder aprofundar esses padrões, que podem ser explorados em contextos escolares, abordamos três sequências desse tipo: a primeira descrita no livro de Van de Walle (2009), que traz explicações sobre os processos recursivos para encontrar termos próximos em uma sequência e os processos envolvidos para encontrar uma regra que permita calcular um termo qualquer da sequência, ou seja, para criar uma lei de formação para a sequência; a segunda, uma atividade de um livro didático do PNLD 2019 a 2022, em que se aponta como a sequência pode ser aplicada aos alunos; e a terceira, o relato das pesquisadoras Vale e Pimentel (2013) sobre a experiência de uma professora do 3º ano na aplicação de uma sequência desse tipo.

Van de Walle (2009) apresenta um padrão visual (Figura 23) e mostra na tabela a relação recursiva que é (+4, +6, +8, +10, +12...), ou seja, são adicionados sucessivos números pares para se obter o próximo termo da sequência. Abaixo da tabela, na regra “quantidade anterior mais alguma coisa”, é possível ver o uso da relação recursiva, que permite encontrar a quantidade de bolinhas de termos próximos na sequência, em que sempre se recorre ao termo anterior para encontrar o termo seguinte. O autor ressalta que “o padrão recursivo passo a passo é quase certamente o primeiro que seus alunos observarão” (2009, p. 300). Cabe ao professor realizar mediações para que os alunos busquem descobrir uma lei de formação que possibilite descobrir o número de bolinhas de qualquer termo da sequência, sem recorrer aos termos anteriores.

FIGURA 23 – DUAS RELAÇÕES DIFERENTES EM UM PADRÃO VISUAL



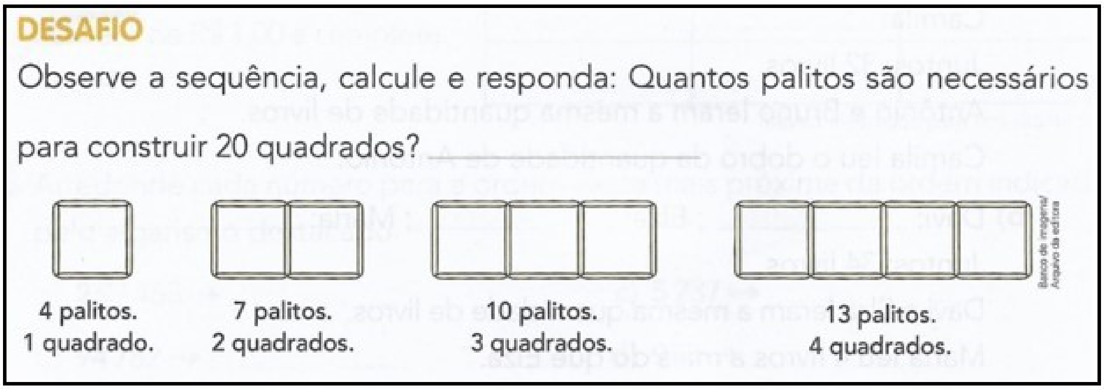
FONTE: Van de Walle (2009, p. 301).

Para encontrar uma regra que possibilite calcular a quantidade de bolinhas em uma posição qualquer, é interessante contar com a ajuda do padrão concreto ou pictórico e uma tabela, que devem estar conectados. Considerando a segunda regra da figura, “um quadrado mais uma coluna”, o aluno pode facilmente calcular quantas bolinhas possui qualquer elemento da sequência, desde que já tenha conhecimento sobre a área de um quadrado. Os 4 primeiros elementos na figura são: $1 \times 1 + 1 = 2$ ou $1^2 + 1 = 2$; $2 \times 2 + 2 = 6$ ou $2^2 + 2 = 6$; $3 \times 3 + 3 = 12$ ou $3^2 + 3 = 12$; $4 \times 4 + 4 = 20$ ou $4^2 + 4 = 20$ (VAN DE WALLE, 2009).

Em relação a esse exemplo, com a regra generalizada “um quadrado mais uma coluna”, é possível calcular, por exemplo, o número de pontos do 27º elemento, pois, para isso, basta fazer $27^2 + 27 = 756$. Para Van de Walle (2009), o estudo de padrões de crescimento ajuda os alunos a fazer generalizações, por meio de relações algébricas que favoreçam dizer a quantidade de elementos em uma posição qualquer.

Em uma sequência recursiva pictórica, encontrada no livro didático do PNLD 2019 a 2022, proposta como um desafio, os alunos são estimulados a observar a sequência e calcular o número de palitos para construir 20 quadrados e, dessa forma, generalizar uma regra que permita calcular o número de palitos para qualquer número de quadrados (Figura 24).

FIGURA 24 – SEQUÊNCIA RECURSIVA COM PALITOS



FONTE: Coleção Ápis Matemática – 5º ano (DANTE, 2017e, p. 95).

Os alunos, preferencialmente em duplas ou grupos, podem construir essa sequência com palitos, continuar a sequência com mais alguns termos próximos e tentar descobrir uma lei de formação, que permita calcular o número de palitos para qualquer número de quadrados. Geralmente, encontram regras diferentes, porque é possível formular várias leis de formação para uma mesma sequência. Uma delas poderia ser: “três vezes o número de quadrados mais 1”. Logo, para calcular o número de palitos em 20 quadrados, basta fazer 3 x 20 + 1 = 61. É bem provável que uma parte dos alunos use uma relação recursiva, por meio de desenho ou sequência numérica, considerando o primeiro quadrado com 4 palitos e acrescentando mais 3 palitos para cada quadrado até chegar no vigésimo quadrado. Nesse caso, para desafiá-los, o professor pode propor que encontrem um termo ainda mais distante na sequência, de modo a instigá-los a encontrar uma lei de formação, sem usar a relação recursiva.

Vale *et al*. (2011) também apresentam em seu livro essa questão envolvendo palitos, ressaltando que a sequência de figuras com padrões de crescimento – que, para ser construída, depende da figura anterior – auxilia o desenvolvimento do raciocínio recursivo, o que leva à generalização próxima. Citam que, nesse caso, os alunos poderiam usar uma relação recursiva adicionando três unidades ao termo anterior. Para os autores, quando é construída uma lei de formação, que possibilita calcular o valor de qualquer termo da sequência, dá-se um passo para a generalização distante.

Em relação à generalização distante, Vale *et al*. destacam que “há muitos modos diferentes que conduzem facilmente à descoberta da lei de formação para termos distantes” (2011, p. 28), argumentando que “é importante que os alunos consigam perceber que diferentes modos de ver a figura conduzirão, eventualmente, a expressões diferentes (pois traduzem modos diferentes de ver) mas que são equivalentes” (2011, p. 29).

Vale e Pimentel (2013) relatam a experiência de uma professora do 3º ano na aplicação de uma sequência didática com três fases. Comentam que essa proposta pode ser aplicada para qualquer nível de escolaridade, embora seja mais recomendada aos Anos Iniciais. Nos atemos aqui à segunda fase da proposta, que trata do reconhecimento de padrões em sequências, para permitir a generalização dos alunos e calcular qualquer termo da sequência. Chamam a atenção sobre a importância da apropriação visual da regularidade para ocorrer a generalização, que não se daria pela simples observação da sequência numérica (Figura 25).

FIGURA 25 – ATIVIDADE SOBRE SEQUÊNCIA DE ESTRELAS EM L

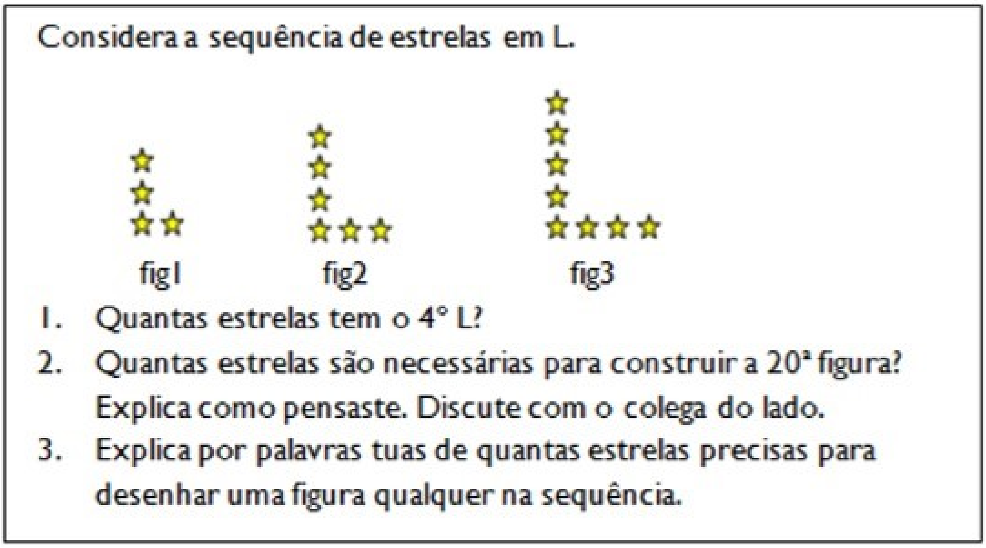

Considera a sequência de estrelas em L.

fig1 fig2 fig3

1. Quantas estrelas tem o 4° L?
2. Quantas estrelas são necessárias para construir a 20ª figura? Explica como pensaste. Discute com o colega do lado.
3. Explica por palavras tuas de quantas estrelas precisas para desenhar uma figura qualquer na sequência.

FONTE: Vale e Pimentel (2013, p 111).

Na sequência sempre aumentam 2 estrelas, então, a sequência numérica equivalente é 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16... Vale e Pimentel (2013) chamam isso de generalização aritmética, pois, iniciando em 4, e depois contando de 2 em 2 (relação recursiva), é possível descobrir termos próximos na sequência.

Para calcular quantas estrelas tem a vigésima, a milésima, ou uma figura qualquer da sequência, Vale e Pimentel (2013, p. 112) afirmam que alunos muito novos conseguem fazer essa descoberta, sendo necessário observar cada uma das figuras e, assim, chegar à conclusão de que há uma “coluna de estrelas e uma linha sobrante”. Então, na primeira figura há 3 + 1 = 4, na segunda figura 4 + 2 = 6 e na terceira 5 + 3 = 8, o que permite concluir que, na vigésima figura, há 22 + 20 = 42 estrelas; na milésima figura, há 1002 + 1000 = 2002 estrelas, já que a coluna de estrelas sempre tem 2 estrelas a mais do que as estrelas da linha restante. As autoras reiteram que a procura da consistência entre a representação figurativa e uma representação numérica organizada, como uma tabela, é muito importante nesse processo (Tabela 1).

TABELA 1 – REGISTROS DE UM MODO DE VER

Número da figura	Número de estrelas
1	3 + 1
2	4 + 2
3	5 + 3
4	6 + 4
...	...
20	22 + 20
N	(n + 2) + n

FONTE: Vale e Pimentel (2013, p. 112).

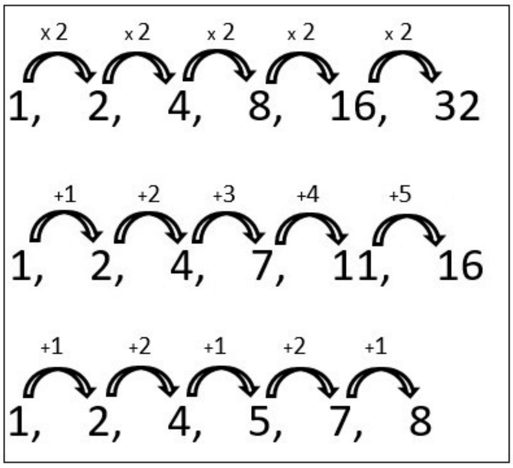
Na aplicação da sequência didática, a descoberta da regra "uma coluna de estrelas e uma linha sobrante" favoreceu calcular o número de estrelas em qualquer posição da sequência, ou seja, os alunos chegaram a uma generalização algébrica (VALE; PIMENTEL, 2013).

Sobre o trabalho com padrões em sequências numéricas, Vale *et al.* enfatizam que "a procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, números pares ou ímpares; múltiplos; potências" (2011, p. 38). Os autores ressaltam que, para descobrir termos próximos em uma sequência, os alunos podem trabalhar recursivamente, ou seja, podem relacionar cada termo com o termo anterior. Van de Walle (2009) propõe exemplos de padrões numéricos, formulando hipóteses das regras observadas nas sequências numéricas.

> 2, 4, 6, 8, 10, ... (números pares: adicione 2 a cada vez)
> 1, 4, 7, 10, 13, ... (comece com 1; adicione 3 a cada vez)
> 1, 4, 9, 16, ... (número s quadrados perfeitos)
> 0, 1, 5, 14, 30, ... (adicione o próximo número quadrado)
> 2, 5, 11, 23, ... (dobre o número e adicione 1)
> 2, 6, 12, 20, 30, ... (multiplique pares de números naturais consecutivos)
> 3, 3, 6, 9, 15, 24, ... (adicione os dois números anteriores, exemplo de uma sequência de Fibonacci). (VAN de WALLE, 2009, p. 298).

Em relação à continuação de uma sequência numérica recursiva, Vale *et al.* (2011, p. 25) sugerem uma questão que solicita: "Escreva os três termos seguintes da sequência numérica 1, 2, 4, ..." Algumas das opções de resposta apresentadas pelos autores constam na Figura 26:

FIGURA 26: CONTINUAÇÕES DIFERENTES PARA A SEQUÊNCIA 1, 2, 4...



FONTE: Vale *et al.* (2011, p. 26).

É possível ver, na Figura, que as três sequências que iniciavam com 1, 2, 4... foram continuadas com relações recursivas diferentes. A continuação das três sequências está correta. Entretanto, o professor deverá estar atento na hora de propor essa tarefa, pois precisará considerar a resposta do aluno, que poderá ser bem diferente daquela que havia imaginado inicialmente. A socialização dos diferentes modos de perceber e continuar uma sequência é importante nesse processo (VALE *et al*., 2011).

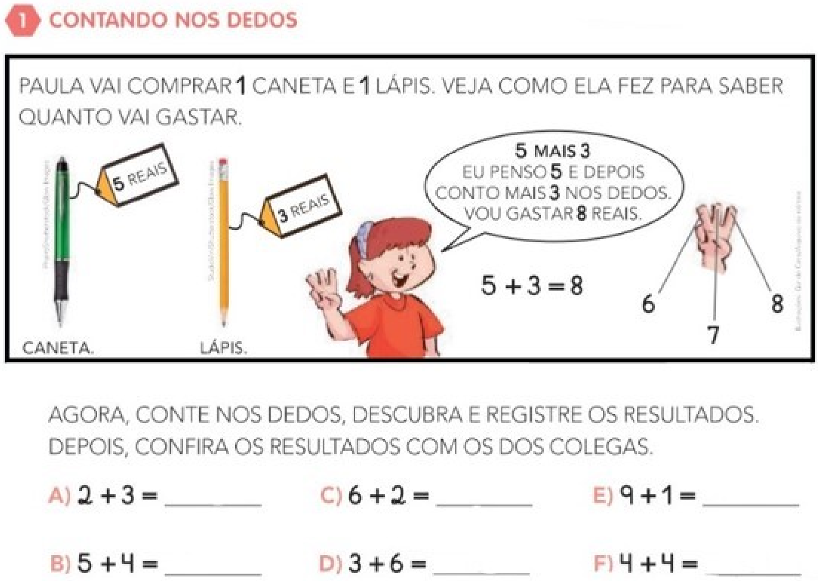
4.2 PROPRIEDADES DA IGUALDADE

As propriedades da igualdade estão entre as dimensões propostas na BNCC para serem trabalhadas com os alunos dos Anos Iniciais. Esse trabalho objetiva, principalmente, a compreensão de que a igualdade tem um sentido de equivalência, não sendo apenas a indicação de uma operação a ser feita.

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam três significados que podem ser atribuídos ao sinal de igualdade: o primeiro relacionado à noção operacional; o segundo, envolvendo a ideia de equivalência; e, por último, a noção de relação funcional.

De acordo com os autores (2009), o sentido do sinal de igual mais usado é como resultado de uma operação (noção operacional), sobretudo nos primeiros anos escolares. Como as crianças dos Anos Iniciais trabalham muito com atividades envolvendo operações aritméticas, talvez acabem compreendendo o sinal de igualdade somente como um símbolo operacional – um símbolo que indica uma ação (operação) a ser realizada. Um exemplo encontrado em um livro didático do PNLD 2019 a 2022 ilustra essa questão, na Figura 27.

FIGURA 27 – EXEMPLO DE ATIVIDADE QUE PODE LEVAR OS ALUNOS A ATRIBUIR APENAS O SENTIDO OPERACIONAL PARA A IGUALDADE



FONTE: Coleção Ápis Matemática – 1º ano (DANTE, 2017a, p. 119).

Sobre a utilização da noção de igualdade para representar o resultado de uma operação aritmética, e também, sobre o significado de equivalência desse sinal, Ponte, Branco e Matos exemplificam:

> Assim, ao dizermos que 5 + 2 = 7, estamos a dizer que se tivermos um conjunto com 5 elementos e o reunirmos com um conjunto com 2 outros elementos obtemos um conjunto com 7 elementos. A expressão numérica 5 + 2 = 7 indica que 7 é o resultado da adição de 5 com 2. Mas também indica que existe o mesmo número de elementos na reunião de dois conjuntos, um com 5 e outro com 2 elementos, e num conjunto com 7 elementos. É a propriedade “ter o mesmo número de elementos” que justifica o uso do sinal de igual nesta expressão. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 19).

Os autores ressaltam que “é fundamental que não se perca o sentido mais geral deste sinal como estabelecendo uma equivalência entre duas expressões numéricas” (2009, p. 20). Neste sentido, indicam o trabalho não só com igualdades do modo habitual, na forma a + b = c, mas também como c = b + a. E citam exemplos de diferentes formas de representar 7 por meio de igualdades numéricas: “7 = 1 + 6, 7 = 2 + 5, 7 = 3 + 4, 7 = 4 + 3, 7 = 5 + 2, 7 = 6 + 1” (p. 20). Além disso, acrescentam aos exemplos as igualdades com zero: “7 = 0 + 7, 7 = 7 + 0” (p. 20), destacam a importância de realizar decomposições de números, como “12 + 0 = 11 + 1 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5 = 6 + 6 = 5 + 7” (p. 21) e de trabalhar com igualdades mais complexas, incluindo: “9 = 8 + 1 + 0 = 7 + 2 = 0 = 6 + 3 + 0 = 5 + 4 + 0 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = ...” (p. 21).

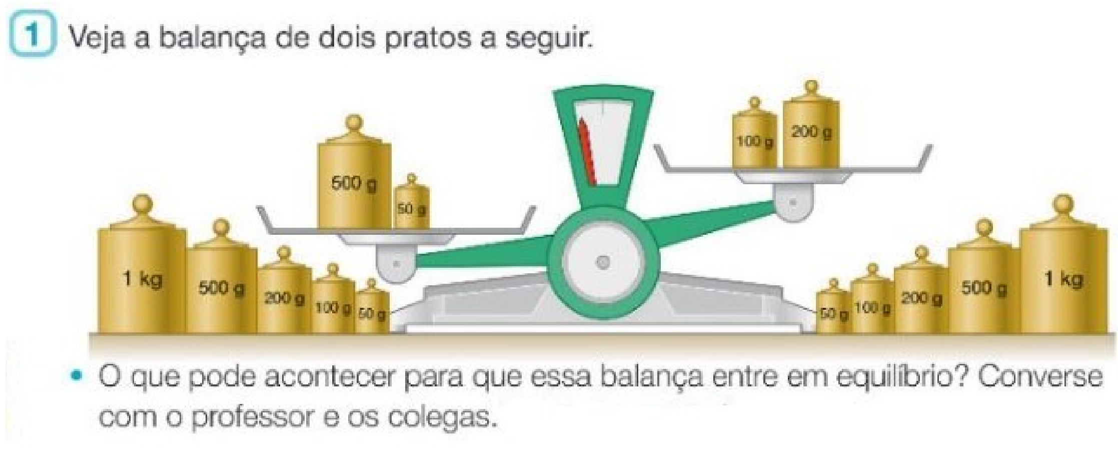
Em relação ao sinal de igualdade, Booth argumenta que “é preciso acentuar o valor bidirecional do sentido de igualdade, tanto se exigindo a leitura adequada do símbolo (por exemplo, ‘é igual a’ em vez de ‘dá’, como em ‘2 + 3 dá 5’), como proporcionando aos alunos experiências com expressões da forma 5 = 2 + 3 (bem como 1 + 4 = 2 + 3, etc.)” (1995, p. 29). Booth destaca também a importância de considerar o sinal de igualdade não só como resultado de uma operação, mas também com um sentido de equivalência.

Da mesma forma podem ser exploradas situações envolvendo igualdades com a utilização das operações de multiplicação, subtração e divisão. O professor deve ser muito cuidadoso com o modo como o sinal de igual é utilizado, pois ele representa sempre a equivalência entre a expressão que está antes e depois. Em uma expressão em que há vários sinais de igual, todos os termos são equivalentes, do primeiro ao último termo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Na resolução de um problema, muitas vezes, os alunos realizam operações de um modo sequencial, da esquerda para a direita, usando o sinal de igual para separar dois raciocínios. Ponte, Branco e Matos (2009) citam um exemplo onde o objetivo do aluno era fazer cinco mais cinco e depois mais cinco, porém, o sinal de igual não foi usado de forma correta na representação: 5 + 5 = 10 + 5 = 15. Com isso, mostram que a forma adequada seria fazer primeiro 5 + 5 = 10, e depois escrever outra expressão acrescentando cinco: 10 + 5 = 15.

O significado de equivalência do sinal de igualdade é muito importante para a compreensão de conceitos algébricos, como o conceito de equação, por exemplo. Neste sentido, a balança de equilíbrio pode ser útil para construir a compreensão de que os dois lados da igualdade são equivalentes. Na sequência, consta um exemplo encontrado em um livro didático do PNLD 2019 a 2022 (Figura 28):

FIGURA 28 – ATIVIDADE QUE AUXILIA NA COMPREENSÃO DO SENTIDO DE EQUIVALÊNCIA DA IGUALDADE



FONTE: Coleção Buriti Mais Matemática – 5º ano (TOLEDO, 2017b, p. 124).

No exercício proposto aos alunos, várias são as soluções, de modo que ocorra uma equivalência entre os dois lados da igualdade: 500 + 50 = 100 + 200 + 200 + 50; 500 – 50 = 100 + 200 + 100 + 50... Assim, uma diversidade de atividades pode ser desenvolvida nos Anos Iniciais com o objetivo de discutir o significado do sinal de igualdade, a partir de diferentes contextos.

Van de Walle ressalta que "o sinal de igualdade é um dos símbolos mais importantes na Aritmética elementar, na Álgebra e em toda a Matemática ao usar números e operações" (2009, p. 288). Para tanto, traz duas motivações para que os alunos entendam corretamente o sinal de igualdade: a primeira visa compreender as relações em nosso sistema de numeração, sendo o sinal de igualdade um modo principal de representá-las, como em 6 x 7 = 5 x 7 + 7, onde 6 = 1 + 5, então, pela propriedade distributiva se multiplica (1 + 5) x 7 = (1 x 7) + (5 x 7). Quando essas ideias da Aritmética são generalizadas e expressas de modo simbólico, é possível trabalhar com outros números de um modo generalizado. Já a segunda motivação se refere a ter dificuldades para lidar com expressões algébricas decorrentes da falta de compreensão do sinal de igual. Na equação 5x – 24 = 81, por exemplo, é necessário ver os dois lados do sinal de igualdade como expressões equivalentes, sendo possível, como parte da resolução, adicionar 24 aos dois lados, de modo que a igualdade se mantém.

Em um estudo relatado por Ponte, Branco e Matos (2009) e Van de Walle (2009), realizado por Falkner, Levi e Carpenter (1999), os pesquisadores questionaram os alunos sobre o número que deveria ser colocado no espaço vazio para tornar verdadeira a expressão numérica: 8 + 4 = ___ + 5. A questão de escolha múltipla apresentava as possibilidades de resposta: 7, 12 e 17. A resposta correta foi indicada apenas por 5% dos alunos do 1º e 2º anos, por 9% dos alunos do 3º e 4º anos e por 2% dos alunos do 5º e 6º anos. De acordo com Ponte, Branco e Matos, os resultados mostram uma incidência forte na concepção processual do significado do sinal de igual, sendo "necessário propor aos alunos situações que promovam uma compreensão da equivalência entre as expressões de ambos os lados do sinal de igual e a análise e comparação dessas mesmas expressões" (2009, p. 21).

Kieran (2004), por sua vez, aponta que alunos habituados a usar o sinal de igualdade como resultado de uma operação normalmente escrevem 13 no espaço a ser completado da expressão: 8 + 5 = ___ + 9, em vez do valor correto 4. Ressalta também que, nesse caso, os alunos usam o sinal de igual como um separador entre o problema e a solução, deixando as operações à esquerda do sinal.

Ponte, Branco e Matos (2009) citam o estudo de Kieran (1992) sobre os dois modos de encarar o sinal de igual – processual e estrutural. Para a autora canadense, os alunos começam por uma concepção processual das operações e relações (pensamento aritmético), podendo desenvolver progressivamente uma concepção estrutural dos números, das operações com números e de outros objetos matemáticos (pensamento algébrico). O sinal de igual, em uma perspectiva processual, indica a realização de uma operação, enquanto que, em uma perspectiva estrutural, remete a uma relação de equivalência.

Para solucionar uma questão em que é necessário descobrir um número para tornar verdadeira uma expressão numérica com uma equivalência, como 534 + 175 = _____ + 174, o pensamento relacional é indicado como uma ótima estratégia de resolução, pois o estudante não precisa calcular os valores de cada lado. Como 174 possui uma unidade a menos que 175, o número desconhecido deverá ter uma unidade a mais que 534 para compor a diferença, logo, o número desconhecido é 535 (VAN DE WALLE, 2009). Sobre quando é possível considerar que o pensamento usado é relacional, o autor explica:

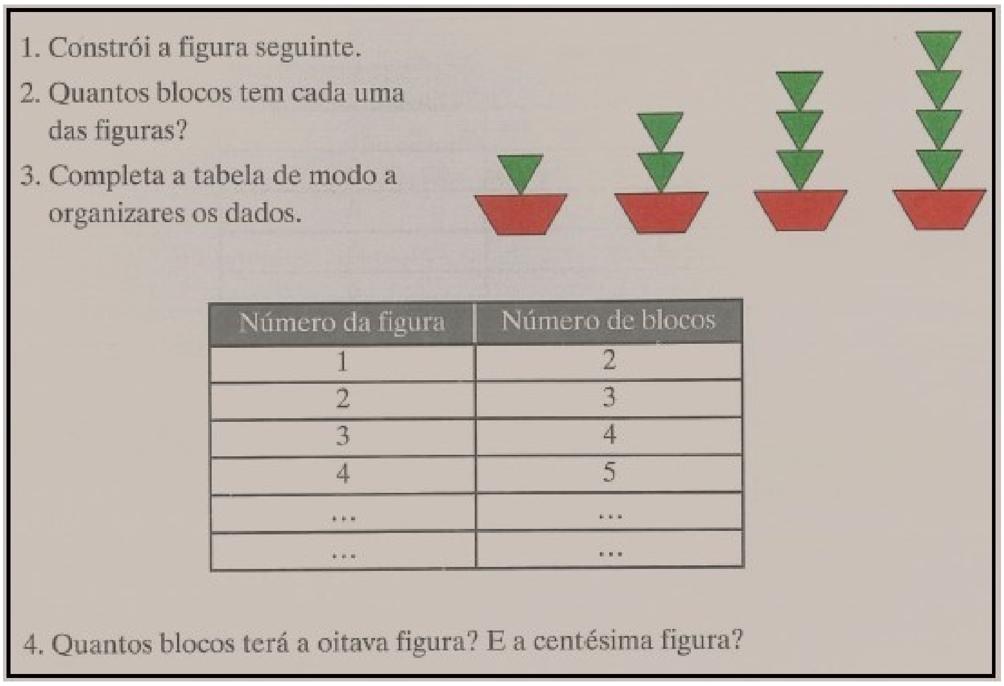
> Quando um estudante observa e usa relações numéricas entre os dois lados do sinal de igualdade em vez de realmente calcular as quantidades, o pensamento envolvido é chamado de pensamento relacional. O pensamento relacional vai além do cálculo e em vez disso se concentra em como uma operação ou série de operações se relaciona com as outras. (VAN DE WALLE, 2009, p. 289).

O uso do pensamento relacional em um contexto mais amplo, "é um primeiro passo em direção à generalização de relações encontradas na aritmética de modo que essas mesmas relações podem ser usadas quando variáveis estiverem envolvidas e não apenas números" (VAN DE WALLE, 2009, p. 290).

Finalmente, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), o sinal de igual pode ainda ser usado para definir uma relação funcional, assinalando uma relação de dependência entre duas variáveis. Vale e Pimentel destacam o contexto das sequências recursivas para o trabalho com relações funcionais, quando se possibilita que os alunos produzam generalizações distantes e/ou algébricas. Para elas, "deve ser feita esta aprendizagem, tanto por professores, como por alunos, do uso do raciocínio funcional que permite relacionar qualquer termo com a respectiva ordem, e que fornece de imediato uma descrição sobre o modo de conhecer qualquer termo da sequência" (2011, p. 4).

Destacamos um exemplo de sequência recursiva (Figura 29), em que os alunos são solicitados a descobrir o padrão para que possam responder qual o número de blocos para termos próximos e distantes, dentro da sequência.

FIGURA 29 – ATIVIDADE EM QUE O SINAL DE IGUAL TEM SENTIDO DE RELAÇÃO FUNCIONAL



1. Constrói a figura seguinte.
2. Quantos blocos tem cada uma das figuras?
3. Completa a tabela de modo a organizares os dados.

Número da figura	Número de blocos
1	2
2	3
3	4
4	5
...	...
...	...

4. Quantos blocos terá a oitava figura? E a centésima figura?

FONTE: Vale *et al*. (2011, p. 75).

A relação funcional envolvida é y = x + 1, embora os alunos dos Anos Iniciais generalizem uma sequência como esta usando a linguagem natural, sem variáveis – conforme indica a BNCC. De acordo com Vale *et al*., os alunos devem ser incentivados a descobrir o padrão, pois “cada figura tem mais um bloco que o número de ordem correspondente, já que o número de triângulos é igual ao número da figura e há mais um bloco, o vaso em forma de trapézio” (2011, p. 76). Desta forma, a oitava figura terá 8 + 1 = 9 blocos e a centésima figura 100 + 1 = 101 blocos. Os autores sugerem questionar também acerca do número de blocos da quadragésima sétima ou da octogésima primeira figura, para confirmar a compreensão do padrão.

Neste capítulo, abordamos as dimensões da Álgebra propostas e destacadas pela BNCC para os Anos Iniciais: as regularidades e a generalização de padrões em sequências repetitivas e recursivas e as propriedades da igualdade. Com os exemplos encontrados na literatura e em livros didáticos, buscamos compreender e descrever como esse trabalho pode ocorrer em sala de aula, no intuito de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Neste sentido, a escrita deste capítulo foi de grande importância para a organização das entrevistas reflexivas/formativas.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo está organizado em duas seções: na primeira, descrevemos a metodologia *Grounded Theory* (GT) – Teoria Fundamentada, por meio das obras de Tarozzi (2011) e Charmaz (2009), e relatamos o processo de entrada no campo de pesquisa em busca de dados; na segunda, mostramos como ocorreu o trabalho com o software *ATLAS.ti*, que traz muitas contribuições para pesquisas qualitativas, auxiliando na organização e análise de dados e na apresentação dos resultados.

5.1 A METODOLOGIA *GROUNDED THEORY* (GT) – TEORIA FUNDAMENTADA

Esta investigação tem como objetivo principal investigar conhecimentos de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre Álgebra e seu ensino. De caráter exploratório e natureza qualitativa, analisamos o problema a partir da compreensão do processo e das manifestações dos sujeitos que fazem parte dele, mediante o estudo de uma realidade específica para alcançar o objetivo proposto.

Ludke e André (1986) consideram a tentativa de capturar a perspectiva dos participantes como uma das características da pesquisa qualitativa:

> O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial do pesquisador. Nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a "perspectiva dos participantes", isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo. (LUDKE E ANDRÉ, 1986, p. 12).

Neste sentido, o aporte metodológico foi constituído pela *Grounded Theory* (GT) – Teoria Fundamentada, baseado, principalmente, nas obras de Tarozzi (2011) e Charmaz (2009), que orientaram a pesquisa e a análise dos dados obtidos por meio de questionários e entrevistas. A escolha pela Teoria Fundamentada se justifica por ela permitir um amplo aproveitamento dos dados, além de possuir um profundo comprometimento com estes, buscando criar teorizações a partir das informações e não impor interpretações à realidade estudada. O uso da Teoria Fundamentada na Educação é aqui entendido e intencionado como uma oposição à racionalidade técnica, ainda tão presente em nosso campo.

Segundo Tarozzi, uma pesquisa conduzida com a *Grounded Theory* (GT) permite construir uma teoria extraída dos dados empíricos, fundamentada e enraizada nos dados, e gerar uma interpretação racional, articulada e sistemática, que represente a realidade estudada. A intenção é "fazer emergir os processos subjacentes às afirmações dos participantes" (2011, p. 93). Para esta pesquisa, considera-se a GT uma metodologia adequada, pois todos os dados dos questionários e das entrevistas foram codificados e categorizados, de modo que a pesquisa não deixa falas sem serem ouvidas. De acordo com o autor, na GT está presente "a visão de uma realidade social em constante mutação, entendida como o produto de contínuas trocas negociáveis, simbólicas e intencionais entre as pessoas" (p. 93).

A questão de pesquisa pode sofrer modificações com a imersão no campo de pesquisa, de acordo com os dados que vão surgindo, argumenta Tarozzi. Para ele, "o problema de pesquisa, em sua formulação precisa, não pode ser definido claramente com antecedência, pois o risco seria de forçar excessivamente os dados" (2011, p. 65). Neste sentido, a nossa questão de pesquisa inicial também foi sendo modificada com a entrada no campo de pesquisa, após a coleta e a análise inicial dos dados.

Os instrumentos e os métodos para coletar dados em uma GT são variados, incluindo "observações, notas etnográficas de campo, relatórios pessoais dos participantes, narrações e até documentos, todos podem oferecer dados ricos e úteis" (2011, p. 66). Para Tarozzi, o principal método de pesquisa é a entrevista:

> O instrumento principal na GT, mesmo não sendo o único, continua sendo a entrevista, especialmente aquela do tipo semiestruturado. E isto em virtude da ênfase sobre a questão da atribuição de significados típica do interacionismo simbólico, mas também porque os instrumentos verbais consentem focalizar a coleta de dados de acordo com o trabalho de codificação. Assim, enquanto emerge a teoria e se definem as categorias, as entrevistas se tornam sempre mais estruturadas: se inicialmente as entrevistas são muito pouco estruturadas (nunca completamente abertas), progressivamente chega-se a uma definição mais pontual das perguntas. (TAROZZI, 2011, p. 67).

Esta pesquisa analisa os textos dos professores a partir das respostas dos questionários e os dados com a utilização das entrevistas semiestruturadas. Charmaz (2009) classifica os textos em dois tipos: os extraídos e os existentes. Fizemos uso de textos extraídos, produzidos pelos professores por solicitação do pesquisador para este estudo. Os textos existentes seriam os presentes na literatura.

O processo de produção de dados teve início após a autorização para a pesquisa junto à Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis (SMEF), mais especificamente, o núcleo dos Anos Iniciais, e a aprovação da pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisas com Seres Humanos da UFSC, segundo pressupostos da resolução Nº 466, do Conselho Nacional de Saúde, de 12 de dezembro de 2012, em relação aos preceitos éticos e à proteção aos participantes da pesquisa.

No primeiro semestre de 2019, agendamos com a diretoria de educação continuada da SMEF as datas da abordagem inicial aos professores dos Anos Iniciais, no momento em que estiveram reunidos para a realização da formação mensal. Na RMEF todos os professores têm, mensalmente, um dia de formação em que todos os profissionais que dão aula às mesmas turmas se encontram, por exemplo, a formação do 4º ano é nas terças-feiras. Na primeira abordagem aos professores, apresentamos o projeto de pesquisa, momento em que foram convidados a participar e a responder o questionário (apêndice F). Este foi proposto a todos os professores dos Anos Iniciais da rede municipal presentes na formação ao final de março, sendo que 98 deles responderam e devolveram. Essa primeira parte da pesquisa ocorreu em três dias diferentes: na terça-feira (26/03/19), com os professores do 2º e 4º anos; na quarta-feira (27/03/19), com os do 3º ano; e na quinta-feira (28/03/19), com os do 1º e 5º anos. Alguns professores, que estavam em outra formação simultânea, não puderam participar da pesquisa.

Dentre os participantes, 34 assinalaram no questionário que aceitavam ser procurados para as entrevistas, as quais seriam agendadas com antecedência. Os professores que manifestaram concordância deixaram um número telefônico ao final do questionário. O contato foi realizado por meio do Whatsapp, solicitando o agendamento do encontro. O critério usado foi a disponibilidade, e conforme os professores iam aceitando, as entrevistas iam sendo realizadas. A intenção era selecionar cinco professores para as entrevistas, sendo que, inicialmente, foram feitas duas (apêndice G) que aprofundam e ampliam os dados obtidos a partir dos questionários. Após a qualificação da pesquisa, por sugestão da banca, foram feitas entrevistas reflexivas/formativas e semiestruturadas (apêndice H) com duplas de professores, totalizando três duplas, ou seja, seis professores participaram da segunda fase de entrevistas, que foram realizadas entre 24/09/19 e 26/09/19, no Centro de Educação Continuada (CEC), em sala cedida pela instituição, durante o período de hora-atividade dos professores. Após a sua finalização, concluímos que houve saturação dos dados.

5.2 O SOFTWARE *ATLAS.ti*

O *ATLAS.ti*[4] é um software para a análise de dados qualitativos, compatível com a *Grounded Theory*. É um importante suporte à organização de documentos e às interpretações,

---

[4] A escolha pelo *ATLAS.ti* se dá porque tive a oportunidade de participar de dois cursos sobre o software durante o mestrado, e também, pela possibilidade de acesso, já que o Programa fez a aquisição do produto.

que possibilita, inclusive, a construção de redes semânticas para apresentar os resultados. No Quadro 4 mostramos os elementos que constituem o *ATLAS.ti*. É importante compreendê-los para entender os relatórios possíveis de gerar.

QUADRO 4 – PRINCIPAIS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DO *ATLAS.ti*

Elemento	Descrição.
Unidade hermenêutica (*Hermeneutic unit*)	Reúne todos os dados e os demais elementos.
Documentos primários (*Primary documents*)	São os dados primários coletados. Em geral, são transcrições de entrevistas e notas de campo e de checagem. São denominados de Px, onde x é o número de ordem.
Citações (*Quotes*)	Trechos relevantes das entrevistas geralmente estão ligados a um código. Sua referência é formada pelo número do documento primário onde se encontra e de seu número de ordem, dentro do documento. Como referência constam também as linhas, inicial e final.
Códigos (*Codes*)	São os conceitos gerados pelas interpretações do pesquisador. Podem estar associados a uma citação ou a outros códigos, sendo indexados pelo nome. Apresentam dois números na referência; o primeiro se refere ao número de citações ligadas a ele, e o segundo, ao número de códigos. Os dois números representam, respectivamente, o grau de fundamentação (*groundedness*) e o grau de densidade (*density*) do código.
Notas de análise (*Memos*)	Descrevem o histórico da interpretação do pesquisador e os resultados das codificações, até a elaboração final da teoria.
Esquemas (*Netview)*	São os elementos mais poderosos à exposição da teoria. São representações gráficas das associações entre os códigos (categorias e subcategorias). O tipo das relações entre os códigos é representado por símbolos.
Comentário (*Comment*)	Todos os elementos podem e devem ser comentados, principalmente os códigos, fornecendo informações sobre o seu significado.

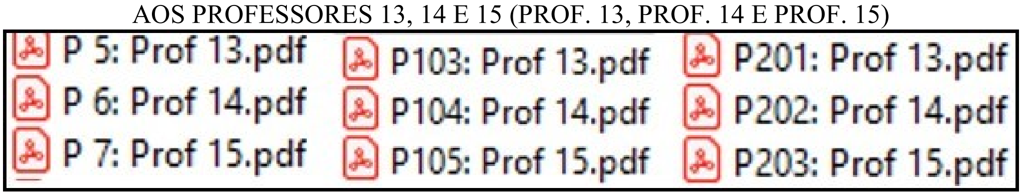
FONTE: Bandeira-de-Mello e Cunha (2003, p. 6, apud MENDONÇA; MELO; PADILHA, 2011, p. 16680).

Iniciamos o trabalho criando uma nova unidade hermenêutica no software *Atlas.ti*, que reúne todos os dados pesquisados (inicialmente os questionários, e depois, as entrevistas). Foi salvo como Projeto Álgebra. O questionário é composto de 4 páginas: a primeira de identificação, contendo informações da pesquisa, dados pessoais e profissionais, e as demais com questões respondidas, analisadas nesta pesquisa e, por isso, inseridas no software.

Antes de inserir os dados nele, escaneamos as páginas 2, 3 e 4, que foram convertidas em PDF. Não se escaneou a primeira página porque ela não seria usada para codificar os textos dos pesquisados. Mais tarde, as transcrições das entrevistas também foram salvas em PDF, de modo que todos os arquivos pudessem ser inseridos na unidade hermenêutica. Para adicionar os documentos nela, optamos pelos termos *Documents/New/Add Documents* e por escolher no computador os arquivos que foram inseridos no *software*.

Os 98 questionários foram nomeados como “Prof. 1”, seguindo um padrão até “Prof. 98”. Ao questionário de cada professor correspondem três Documentos Primários (PD)[5]. Os documentos envolvendo questionários iniciam em P1 e vão até P294. Os documentos primários de 1 a 98 (P1 a P98) correspondem à primeira página do questionário. Os documentos primários 99 a 196 (P99 a P196) à segunda página e os documentos primários 199 a 294 (P199 a P294) à terceira página. Para identificar quais são as três páginas correspondentes a cada professor, exemplificamos: o professor 13 (Prof. 13) tem três arquivos primários: “P5: Prof. 13.pdf”, “P103: Prof. 13.pdf” e “P201: Prof. 13.pdf”. O professor 14 (Prof. 14) tem três arquivos primários: “P6: Prof. 14.pdf”, “P104: Prof. 14.pdf” e “P202: Prof. 14.pdf”, assim como o professor 15 (Prof. 15), que também tem três arquivos: “P7: Prof. 15.pdf”, “P105: Prof. 15.pdf” e “P 203: Prof. 15.pdf” (Figura 30).

FIGURA 30 – EXEMPLO DE DOCUMENTOS PRIMÁRIOS QUE CORRESPONDEM AOS PROFESSORES 13, 14 E 15 (PROF. 13, PROF. 14 E PROF. 15)



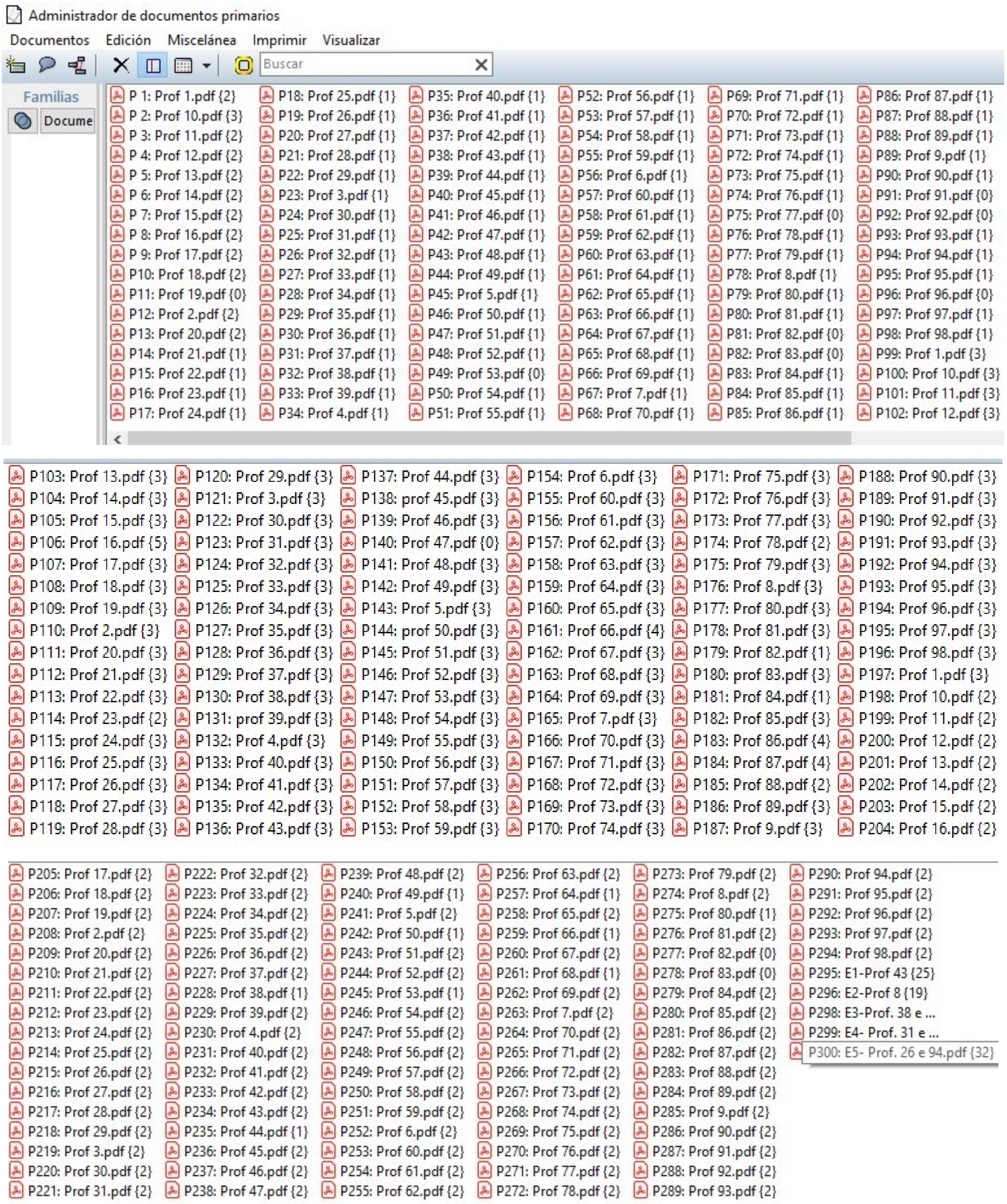
FONTE: elaborado pela autora.

No *software* é possível inserir novos Documentos Primários a qualquer momento e codificá-los, como feito nesta pesquisa, quando inicialmente inserimos e codificamos os questionários, e depois, fizemos o mesmo com as duas primeiras entrevistas, e mais tarde, com as três entrevistas reflexivas/formativas, visando aprofundar os dados obtidos. As duas entrevistas correspondem aos Documentos Primários “P295: E1- Prof 43” (entrevista 1 com o professor 43) e “P296: E2-Prof 8” (entrevista 2 com o professor 8). As três últimas entrevistas correspondem aos Documentos Primários “P298: E3-Prof. 38 e 27”, “P299: E4-Prof. 31 e 44” e “P300: E5- Prof. 26 e 94”. O documento P297 não existe nesse projeto porque inserimos um documento por engano e o apagamos, de modo que não é possível substituir o documento P297. Na Figura 31, é possível visualisar a quantidade de Documentos Primários inseridos no *ATLAS.ti*. Ao lado, entre chaves, aparece o número de ligações dos códigos de cada Documento Primário com os códigos de outros Documentos Primários, através das redes, como se verá.

---

[5] No *Software ATLAS.ti*, PD é a sigla de *Primary Documents* (Documentos Primários). Todos os documentos inseridos na Unidade Hermenêutica recebem uma identificação iniciada pela letra “P”, seguida de um número que indica a ordem em que o documento foi agregado no *software*.

FIGURA 31 – 299 DOCUMENTOS PRIMÁRIOS INSERIDOS NO *ATLAS.ti*



FONTE: elaborado pela autora.

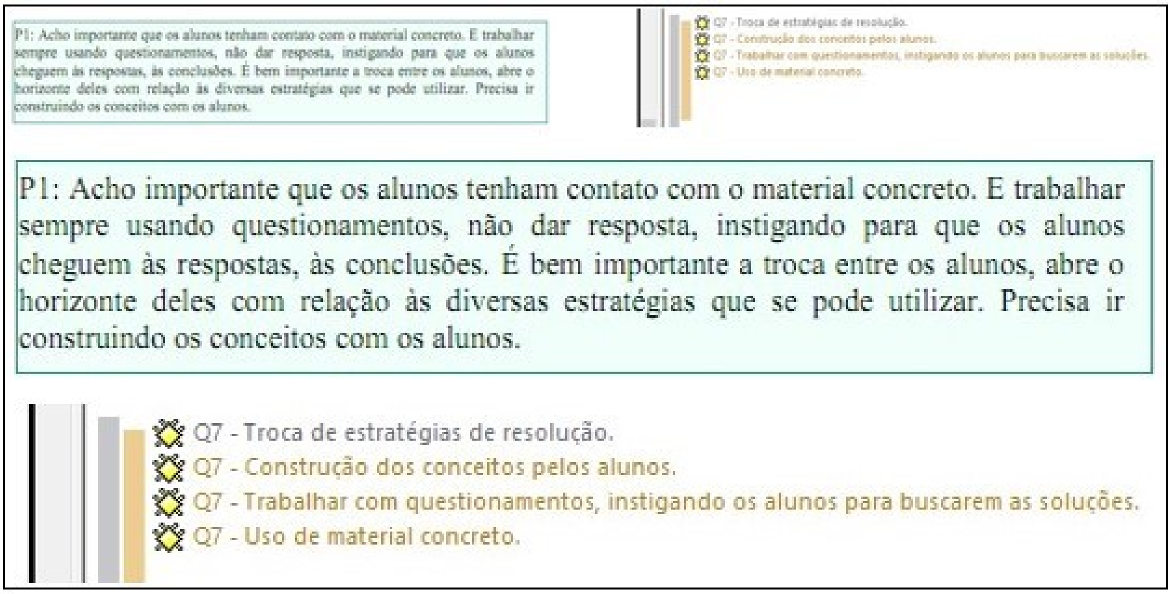
Após a inserção dos questionários e das entrevistas na unidade hermenêutica, começamos o processo de codificação que, segundo Tarozzi (2011, p. 122), "é o conjunto dos procedimentos e das técnicas para conceituar os dados".

No *ATLAS.ti*, a codificação consiste em marcar partes significativas para a pesquisa (*quotes)* e criar códigos específicos (*codes*) ligados a cada trecho selecionado, que é chamado de citação. Após selecionar partes do Documento Primário, é preciso clicar sobre a seleção e, com o botão direito do mouse, escolher a opção *Coding/Enter Code Name(s)* para digitar um código novo. Se um código já usado anteriormente corresponde ao texto selecionado, escolhe-se a opção *Coding/Select Code(s) from list.*

Esse processo é chamado de codificação linha por linha, que consiste em “selecionar os segmentos mínimos de texto dotados de um sentido para a pesquisa. As unidades de sentido podem ser compostas por parágrafos inteiros, locuções, frases” (TAROZZI, 2011, p. 128). Tarozzi (2011) e Charmaz (2009) defendem a codificação “in vivo”, que utiliza códigos com as mesmas palavras presentes no texto para conservar os significados da fala dos participantes, no intuito de que suas opiniões se reflitam nas codificações.

No caso desta pesquisa, procuramos usar as palavras dos pesquisados referentes aos questionários e às entrevistas. Há citações que podem ser classificadas dentro de um código já existente, e isso é importante para não se ter uma quantidade imensa de códigos, pois, nesse caso, a codificação “in vivo” não seria possível. Para exemplificar a codificação “in vivo”, segue a situação abaixo (Figura 32), na qual se atribuem quatro códigos usando as palavras do professor, referentes a um trecho da entrevista em que relata estratégias de ensino que considera importantes para trabalhar a unidade temática Álgebra. Os códigos são: “Troca de estratégias de resolução”, “Construção dos conceitos pelos alunos”, “Trabalhar com questionamentos, instigando os alunos para buscarem as soluções” e “Uso de material concreto”.

FIGURA 32 – EXEMPLO DE CODIFICAÇÃO “IN VIVO” UTILIZANDO O *ATLAS.ti*

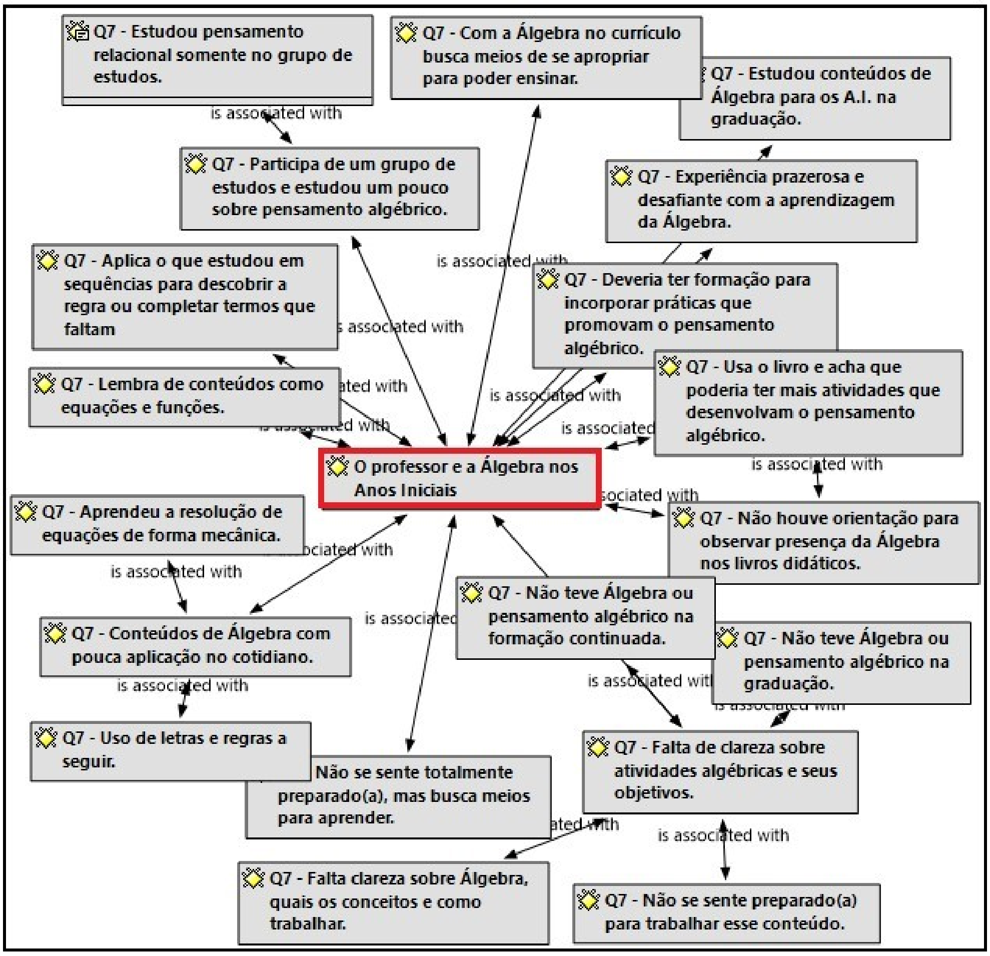


FONTE: elaborado pela autora.

Os códigos relacionados a esse trecho da entrevista apresentam um símbolo na frente: “Q7”, que está no início de todos os códigos relacionados aos conhecimentos dos professores sobre Álgebra e seu ensino. No processo de codificação, como a quantidade de códigos foi ficando maior, usamos um símbolo inicial para poder localizar os códigos relacionados a uma determinada categoria ou subcategoria. Por exemplo, os códigos da subcategoria “O que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola” tem “Q1” ao início.

No *ATLAS.ti* é possível construir redes (*networks*), em que os códigos (*codes*) podem ser associados a outros segundo alguns conectores: “está associado com”, “é causa de”, “é parte de”, “contradiz”, “é um”, “é propriedade de”. Essas redes facilitam a identificação das principais categorias, e até mesmo, da *core category*, a principal categoria na GT. Na sequência, apresentamos a imagem de uma rede (Figura 33) com códigos das duas primeiras entrevistas, e em cujo centro há um código chamado de “O professor e a Álgebra nos Anos Iniciais”, que permite o uso do conector “está associado com”.

FIGURA 33 – *NETWORK* OU REDE DESENVOLVIDA NO *ATLAS.ti*

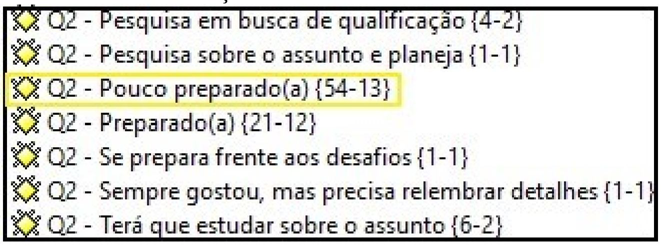


FONTE: elaborado pela autora.

Como se vê na rede da Figura 33, o código “O professor e a Álgebra nos Anos Iniciais” está associado a vários outros, indicando que é preciso ter formação para que os professores possam incorporar práticas que promovam o pensamento algébrico, já que eles não se sentem totalmente preparados, faltando clareza sobre as atividades algébricas e seus objetivos, e também, sobre quais são os conceitos da matéria e como devem ser trabalhados. Além disso, a rede permite visualizar as lembranças e as experiências dos professores em relação à Álgebra que estudaram na escola, as formações que tiveram ou deixaram de ter sobre o tema, a presença dessa unidade temática no livro didático, dentre outros.

Na Figura 34 consta um recorte contendo alguns códigos, onde se destaca o código “Pouco preparado”, seguido da referência {54-13}[6]. Na coluna “*Grounded*”, o número 54 indica a quantidade de vezes em que fora aplicado, ou seja, o código “Pouco preparado” está relacionado a 54 citações. Já na coluna “*Density*”, o número 13 indica a quantidade de ligações existentes entre esse código e os demais por meio das redes.

FIGURA 34 – CÓDIGOS CONTENDO ENTRE CHAVES A QUANTIDADE DE VEZES EM QUE FORAM APLICADOS E O NÚMERO DE LIGAÇÕES COM OUTROS CÓDIGOS POR MEIO DAS REDES



FONTE: elaborado pela autora.

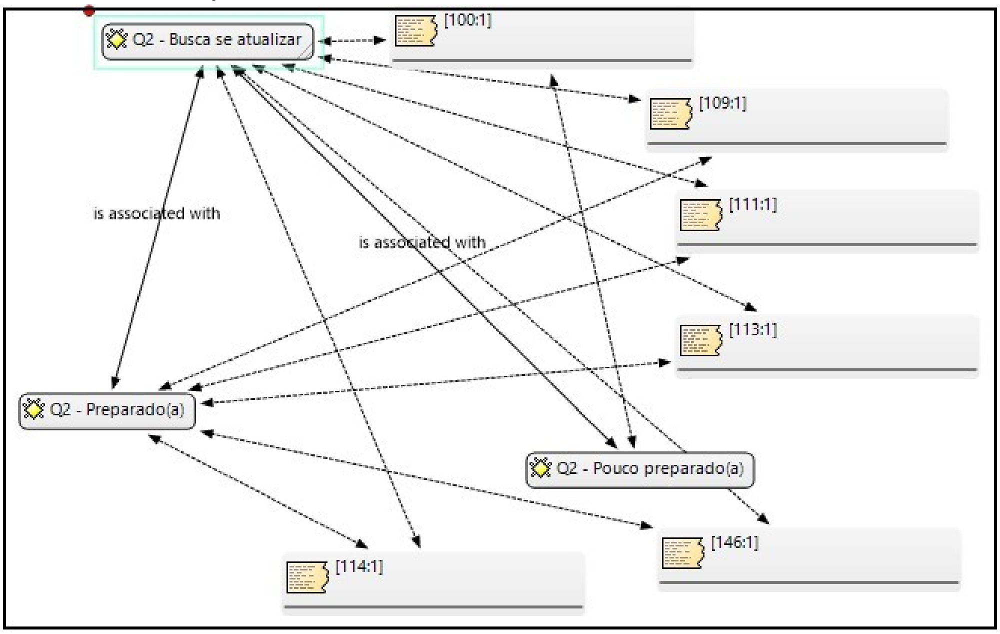
De acordo com Tarozzi (2011, p. 122), a codificação acontece em três fases progressivas: “A primeira, codificação inicial, explora analiticamente os dados, abrindo-os a todas as direções de sentido possíveis, indagando pontualmente e meticulosamente cada porção do texto de que são constituídos e designando as primeiras etiquetas conceituais”. Já as fases seguintes serão explicadas ainda neste capítulo. Assim, após a primeira codificação realizada nos questionários e nas duas entrevistas, foram gerados 183 códigos relacionados a 617 citações. Esse número foi ampliado com a inserção de mais Documentos Primários na unidade hermenêutica e sua codificação, de modo que, após a realização das entrevistas reflexivas/formativas, chegou a 228 códigos relacionados a 750 citações.

O *ATLAS.ti* possibilita que as citações ligadas a um código e os códigos ligados a ele possam ser trazidos à visualização. Na barra de menus, clica-se em “*codes*” e o *software* vai listar todos os códigos criados até o momento. Para mostrar um exemplo (Figura 35), deve-se clicar com o botão direito do mouse sobre o código “Busca se atualizar” e a opção *open network view*. O *software* abre uma rede para o código escolhido, trazendo outros códigos que também

[6] {Grounded - Density}.

estão ligados a ele. Em seguida, clica-se sobre o código escolhido com o botão direito do mouse e escolhe-se a opção *import neighbors/import common neighbors*. O *ATLAS.ti* traz para a tela todas as citações ligadas ao código, nesse caso, as citações dos Documentos Primários 100, 109, 111, 113, 114 e 146. Pela ligação entre os códigos, é possível interpretar dados, por exemplo, na figura a seguir, em que se percebe que a maior parte dos professores que busca atualização se sente preparado para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, mas há também o professor do Documento Primário 100 que busca se atualizar, mas se sente pouco preparado.

FIGURA 35 – CITAÇÕES E CÓDIGOS LIGADOS AO CÓDIGO "BUSCA SE ATUALIZAR"



FONTE: elaborado pela autora.

Após a codificação aberta (inicial), o pesquisador inicia o desenvolvimento da codificação focalizada. De acordo com Tarozzi, a codificação focalizada "analisa elementos conceituais comuns subjacentes a porções mais amplas de texto e, por outro lado, organiza e sintetiza os dados esboçando as categorias e reunindo-as em macrocategorias" (2011, p. 122).

E conforme argumenta Charmaz, nessa fase ocorre "a tomada de decisão sobre quais os códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os dados de forma incisiva e completa" (2009, p. 87). Tarozzi (2011) ressalta ainda que, na codificação focalizada, tem início um processo de buscar linhas de coerência entre os dados e a criação de categorias. Sobre a nomeação das categorias, ressalta que é importante não usar expressões técnicas extraídas da literatura, pois se pode perder a riqueza dos significados presentes no texto dos pesquisados.

Tarozzi (2011) chama a atenção também sobre a importância dos memorandos, que devem ser criados pelo pesquisador durante todo o processo de coleta e análise de dados. Memorandos são anotações sobre ideias, intuições, conjecturas, relatos interessantes ou de destaque, que vão aparecendo na fala dos pesquisados. Segundo Charmaz, “os memorandos projetam, registram e detalham a principal fase analítica da nossa jornada” (2009, p. 106).

A terceira fase apontada por Tarozzi (2011) é a codificação teórica, definida por ele como:

> [...] o processo analítico de conceituação de dados que acontece em um nível mais abstrato. Em particular, é o nível de análise em que se delineiam e se qualificam as relações que subsistem entre as categorias que emergiram na codificação focalizada. É um nível em que a teoria ganha forma, as categorias integram-se e a neblina analítica que acompanha as primeiras fases da codificação, necessariamente abertas a inumeráveis solicitações que provêm do campo, começam a deixar espaço a uma coerente teoria interpretativa. É o momento em que a teoria decola. Distancia-se claramente do plano descritivo e procede por abstrações conceituais crescentes. É uma fase extremamente complexa, não linear, feita de intuições, de fugas para frente e de retorno aos dados. (TAROZZI, 2011, p. 77-78).

Para Tarozzi, a codificação teórica “é o momento da construção da teoria” (2011, p. 122), e por isso, ressalta que é o momento de pontuar as categorias e interligá-las, de identificar a categoria central (*core category*) e, por fim, integrar e delimitar a teoria.

Em busca da categoria central, utilizamos o recurso de análise com base nas redes (*networks*). Analisamos cada categoria emergente e trouxemos à tona a fala dos professores (as citações) vinculada aos códigos. Esse processo de análise de dados e criação de categorias será descrito no próximo capítulo.

6 ANÁLISE DE DADOS E CRIAÇÃO DAS CATEGORIAS

Neste capítulo, apresentamos as categorias criadas na codificação focalizada e as subcategorias associadas, mediante a descrição de elementos importantes relacionados a cada uma delas. Abordamos também a *core category* (categoria central), definida durante o processo de codificação teórica da pesquisa.

6.1 AS CATEGORIAS CRIADAS NA CODIFICAÇÃO FOCALIZADA E A *CORE CATEGORY*

Após a codificação inicial dos 98 questionários, aprofundamos os dados com a inserção de mais 2 documentos, que são as transcrições das entrevistas, e passamos para a codificação focalizada, que apresenta duas funções, de acordo com Tarozzi (2011): identificar macrocategorias a partir dos códigos criados na fase inicial e interligar as categorias e subcategorias entre si.

Com o auxílio de todas as codificações e análise de redes elaboradas interligando códigos, foram criadas as seguintes categorias relacionadas ao conhecimento dos professores para ensinar Álgebra e desenvolver o pensamento algébrico nos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:

- Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra;
- Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos;
- Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino.

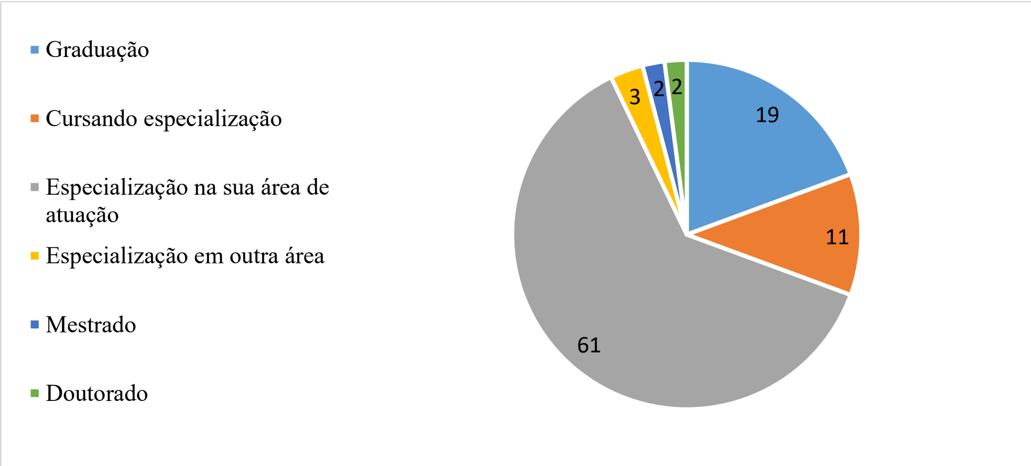
Inicialmente, foram feitas duas entrevistas, pois se esperavam sugestões da banca, no momento da qualificação, para realizar as demais. Essas três categorias já haviam sido elaboradas na primeira etapa, com a codificação de 98 questionários e 2 entrevistas, porém, com a segunda etapa, a terceira categoria foi ampliada e aprofundada, de modo que dos dados extraímos mais uma subcategoria, que será explicitada em 6.1.3.

6.1.1 Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra

Seguindo a metodologia delimitada para esta pesquisa, em um primeiro momento buscamos conhecer a formação profissional dos professores de Anos Iniciais da RMEF, e que estiveram em atuação no ano de desenvolvimento deste estudo.

No Gráfico 1, percebemos que a maior parte dos professores tem especialização ou está cursando, e que todos os professores de Anos Iniciais atuantes na RMEF são graduados (graduação em Pedagogia). O gráfico indica que há um bom nível de formação entre eles, mas há poucos com mestrado ou doutorado.

GRÁFICO 1 – MAIOR GRAU DE FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DA RMEF EM ATUAÇÃO EM 2019



FONTE: elaborado pela autora.

Os professores foram questionados acerca de sua formação para ensinar Álgebra ou pensamento algébrico para alunos dos Anos Iniciais por meio de quatro perguntas iniciais. A primeira questão solicitava: "Considerando apenas a sua formação inicial – graduação –, você teve alguma disciplina que abordou o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais?" Apenas 16 professores assinalaram ter tido alguma formação durante a graduação envolvendo o tema.

A segunda questionava sobre a presença do tema Álgebra ou pensamento algébrico nas formações mensais da RMEF: "A Rede Municipal de Ensino de Florianópolis oferece 1 dia de formação mensal. Nas formações continuadas de que você vem participando na rede, o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais foi abordado?" Apenas 11 professores assinalaram a presença de formação sobre o tema. Na RMEF, os formadores de professores não são os mesmos em todos os grupos, e a isso se deve, provavelmente, o fato de apenas alguns professores terem assinalado alguma formação para o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais.

A terceira questão envolvia a formação em Álgebra ou pensamento algébrico em outros eventos, para além das formações da RMEF: "Você participou de formações em outros locais, grupos de estudo ou eventos sobre Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais?" As opções para assinalar eram "sim" ou "não", e em caso afirmativo, deveriam descrever onde ocorreu a formação. As respostas sobre os locais dos cursos foram:

Prof.20: *Cursos privados e em grupos de estudos autônomos.*

Prof.62: *Na escola.*

Prof.22: *Em Balneário Camboriú, no PNAIC.*

Prof.26: *No grupo de estudos da UFSC.*

Prof.32: *Na UDESC.*

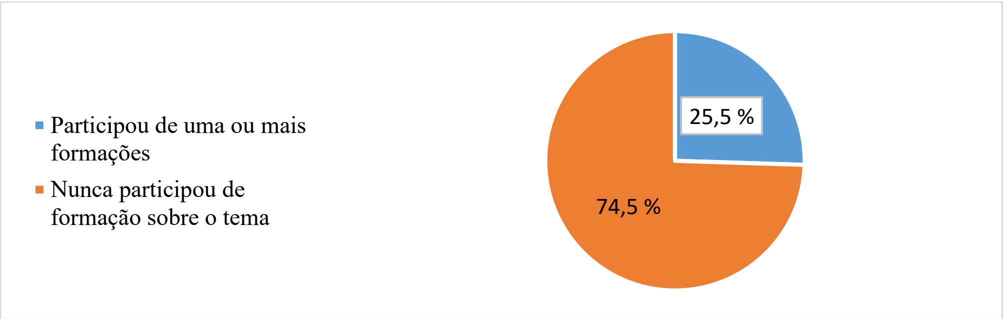
Prof.34: *Formação em Matemática no município de São José.*

Prof.43: *Iniciei no grupo de estudos ICEM, no 2º semestre de 2018.*

Prof.71: *Escola Mosaico – Porto Alegre/RS.*

Dentre os professores que já haviam participado de alguma formação envolvendo a Álgebra dos Anos Iniciais, alguns assinalaram ter frequentado em mais de um lugar, por exemplo, na graduação e na RMEF. Dos 98 professores, 25 assinalaram ter participado de alguma formação e 73 assinalaram que nunca participaram de formação envolvendo esse tema. No Gráfico 2 é possível visualizar a porcentagem[7] de professores que já participaram e dos que nunca participaram de formação sobre Álgebra nos primeiros anos:

GRÁFICO 2 – PARTICIPAÇÃO DOS PROFESSORES DA RMEF EM FORMAÇÃO SOBRE ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS



FONTE: elaborado pela autora.

A quarta questão sobre esse assunto girava em torno das contribuições da formação, nesse caso, sobre Álgebra, e era direcionada a quem já havia participado de alguma formação: “Você considera que os cursos de formação continuada sobre Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais dos quais participou contribuíram para a qualificação de seu trabalho em sala de aula?” As opções para assinalar eram “sim”, “não” ou “não sei responder”, e se solicitava uma justificativa. Do total de professores que responderam ao questionário, apenas 11,22% escreveram sobre as contribuições de alguma formação envolvendo pensamento algébrico, pois, conforme se demonstrou nas questões anteriores, poucos professores tiveram alguma

[7] Arredondamos as porcentagens para uma casa decimal e os professores que assinalaram participação em formações em mais de um local, como, por exemplo, na RMEF e na graduação foram computados uma vez só para a realização desse gráfico.

formação sobre o tema até o momento da pesquisa. E isso aparece na fala do Prof. 32, que busca alternativas de aperfeiçoamento por conta própria: *"Sim. Percebo que são poucos os momentos em que o tema é abordado em cursos de formação. Procuro buscar alternativas por meio de oficinas ou até mesmo pela internet para aperfeiçoar minha prática"* (Prof. 32).

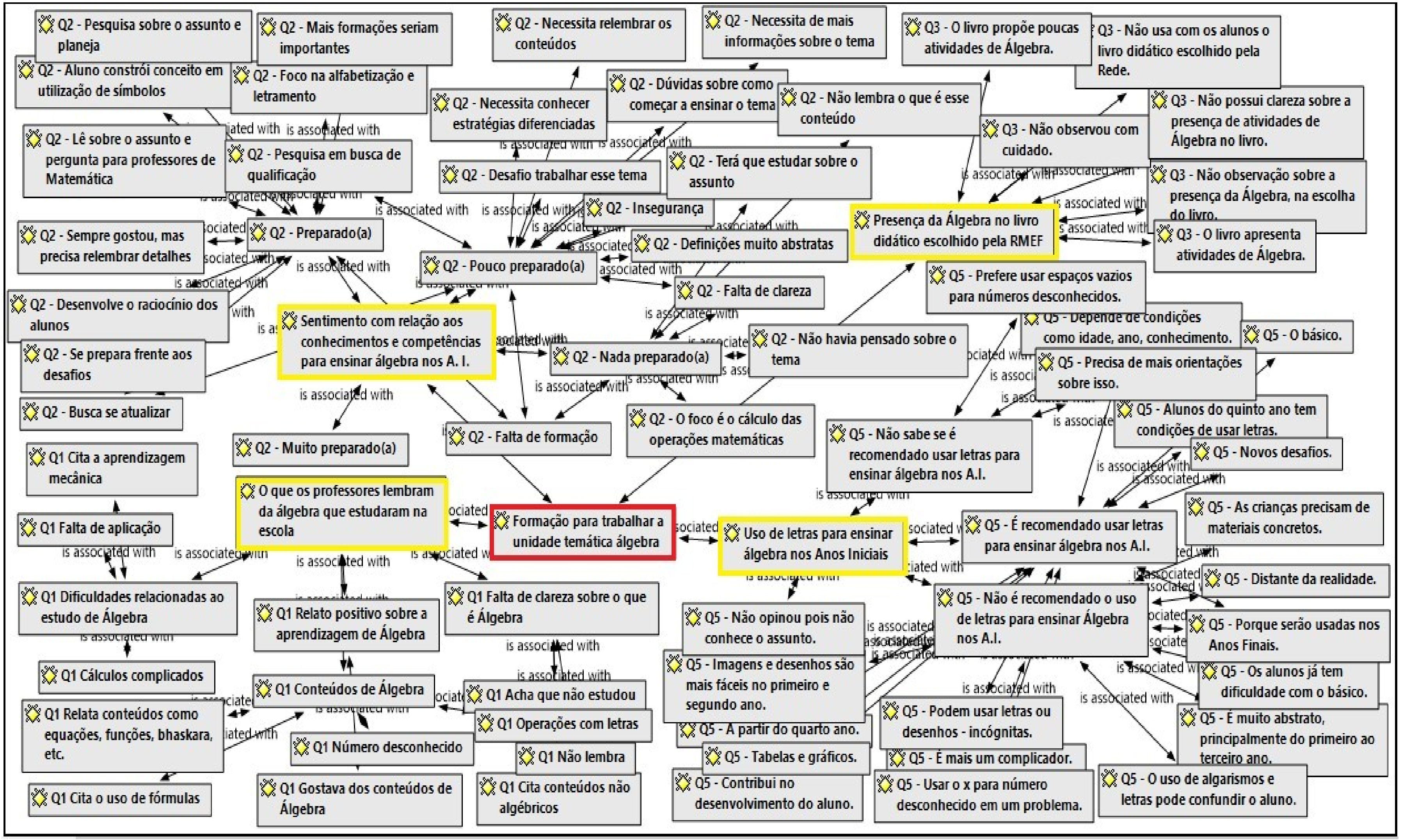
A importância das formações para qualificar o processo de ensino e aprendizagem é relatada pelo Prof. 43 e Prof. 20. O Prof. 75 ressalta que esse processo, se bem conduzido, contribui para o sucesso da vida acadêmica dos alunos:

> ***Prof. 43:*** *É importante para apropriar-se dos conceitos e métodos que qualificam o processo de ensino e aprendizagem junto às crianças.*
> ***Prof. 75:*** *Compreendi que a base da matemática precisa ser muito bem ensinada aos alunos, para que haja sucesso em sua vida acadêmica.*
> ***Prof. 20:*** *Pude ampliar conforme minha realidade em sala de aula e foco de interesse.*

Na codificação focalizada, há quatro subcategorias que fazem parte da categoria "Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra". Na sequência, detalhamos cada uma das subcategorias e suas redes, sobretudo porque a rede 1 (Figura 36) se encontra com uma quantidade muito grande de códigos associados, dificultando a visualização. Por esse motivo, algumas redes estarão com o *layout* da página em paisagem, embora seja possível visualizar as redes com maior nitidez aumentando o *zoom* da tela do computador. As subcategorias associadas a essa categoria são:

- O que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola (rede 2).
- Sentimento com relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais (rede 3).
- Presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF (rede 4).
- Opinião sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais (rede5).

FIGURA 36 – REDE 1: FORMAÇÃO PARA TRABALHAR A UNIDADE TEMÁTICA ÁLGEBRA



Q2 - Pesquisa sobre o assunto e planeja
Q2 - Mais formações seriam importantes
Q2 - Necessita relembrar os conteúdos
Q2 - Necessita de mais informações sobre o tema
Q3 - O livro propõe poucas atividades de Álgebra.
Q3 - Não usa com os alunos o livro didático escolhido pela Rede.
Q2 - Aluno constrói conceito em utilização de símbolos
Q2 - Foco na alfabetização e letramento
Q2 - Necessita conhecer estratégias diferenciadas
Q2 - Dúvidas sobre como começar a ensinar o tema
Q2 - Não lembra o que é esse conteúdo
Q3 - Não possui clareza sobre a presença de atividades de Álgebra no livro.
Q3 - Não observou com cuidado.
Q2 - Lê sobre o assunto e pergunta para professores de Matemática
Q2 - Pesquisa em busca de qualificação
Q2 - Desafio trabalhar esse tema
Q2 - Terá que estudar sobre o assunto
Q3 - Não observação sobre a presença da Álgebra, na escolha do livro.
Q2 - Insegurança
Presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF
Q2 - Sempre gostou, mas precisa relembrar detalhes
Q2 - Preparado(a)
Q2 - Definições muito abstratas
Q3 - O livro apresenta atividades de Álgebra.
Q2 - Pouco preparado(a)
Q5 - Prefere usar espaços vazios para números desconhecidos.
Q2 - Falta de clareza
Q2 - Desenvolve o raciocínio dos alunos
Sentimento com relação aos conhecimentos e competências para ensinar álgebra nos A. I.
Q5 - Depende de condições como idade, ano, conhecimento.
Q5 - O básico.
Q2 - Se prepara frente aos desafios
Q2 - Nada preparado(a)
Q2 - Não havia pensado sobre o tema
Q5 - Precisa de mais orientações sobre isso.
Q2 - Busca se atualizar
Q2 - O foco é o cálculo das operações matemáticas
Q5 - Alunos do quinto ano tem condições de usar letras.
Q1 Cita a aprendizagem mecânica
Q2 - Muito preparado(a)
Q2 - Falta de formação
Q5 - Não sabe se é recomendado usar letras para ensinar álgebra nos A.I.
Q5 - Novos desafios.
O que os professores lembram da álgebra que estudaram na escola
Q5 - As crianças precisam de materiais concretos.
Q1 Falta de aplicação
Formação para trabalhar a unidade temática álgebra
Uso de letras para ensinar álgebra nos Anos Iniciais
Q5 - É recomendado usar letras para ensinar álgebra nos A.I.
Q5 - Distante da realidade.
Q1 Dificuldades relacionadas ao estudo de Álgebra
Q1 Relato positivo sobre a aprendizagem de Álgebra
Q1 Falta de clareza sobre o que é Álgebra
Q5 - Não opinou pois não conhece o assunto.
Q5 - Não é recomendado o uso de letras para ensinar Álgebra nos A.I.
Q5 - Porque serão usadas nos Anos Finais.
Q1 Cálculos complicados
Q5 - Imagens e desenhos são mais fáceis no primeiro e segundo ano.
Q5 - Os alunos já tem dificuldade com o básico.
Q1 Conteúdos de Álgebra
Q1 Acha que não estudou
Q1 Relata conteúdos como equações, funções, bhaskara, etc.
Q1 Operações com letras
Q5 - Podem usar letras ou desenhos - incógnitas.
Q5 - É muito abstrato, principalmente do primeiro ao terceiro ano.
Q5 - A partir do quarto ano.
Q1 Número desconhecido
Q1 Não lembra
Q5 - Tabelas e gráficos.
Q5 - É mais um complicador.
Q1 Cita o uso de fórmulas
Q1 Gostava dos conteúdos de Álgebra
Q1 Cita conteúdos não algébricos
Q5 - Contribui no desenvolvimento do aluno.
Q5 - Usar o x para número desconhecido em um problema.
Q5 - O uso de algarismos e letras pode confundir o aluno.
is associated with

FONTE: elaborado pela autora.

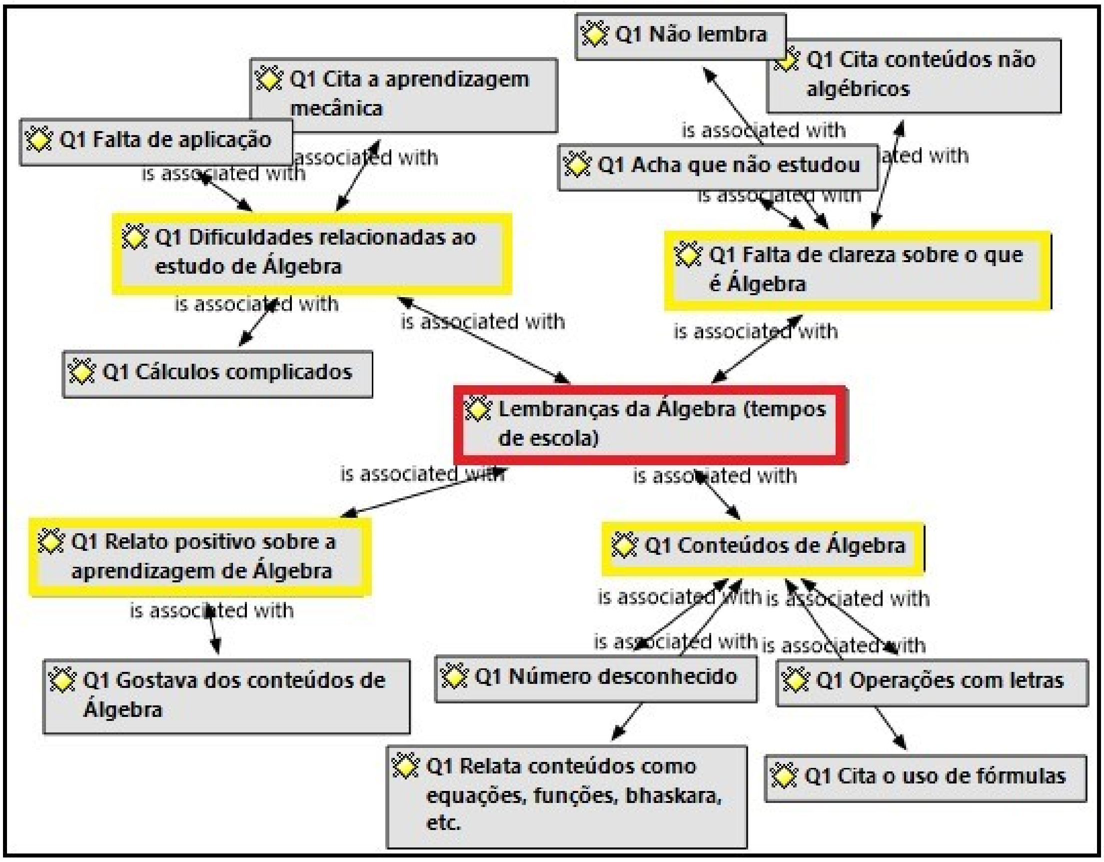
Em relação à subcategoria “O que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola”, foram atribuídos 15 códigos (Figura 37). Muitos professores não se lembram da Álgebra escolar, enquanto outros acham que não estudaram o conteúdo ou citam conteúdos que não são do campo Álgebra. Esses três fatores estão associados a um código que aparece 42 vezes nos questionários, indicando “falta de clareza sobre o que é Álgebra”. O código “conteúdos de Álgebra” aparece 47 vezes, pois professores citam conteúdos algébricos que estudaram na escola, como equações, funções, fórmula de Bhaskara, número desconhecido, operações com letras, citando também o uso de fórmulas. “Dificuldades relacionadas ao estudo da Álgebra” foram relatadas por sete professores, associadas à “falta de aplicação”, “aprendizagem mecânica” e “cálculos complicados”. Houve apenas um “relato positivo sobre a aprendizagem de Álgebra”, no qual o professor citou que gostava dos conteúdos dessa área. A rede 2 (Figura 38) permite visualizar essas lembranças da Álgebra escolar dos professores.

FIGURA 37 – CÓDIGOS SOBRE O QUE OS PROFESSORES LEMBRAM DA ÁLGEBRA QUE ESTUDARAM NA ESCOLA

Q1 Acha que não estudou {4-1}
Q1 Cálculos complicados {4-1}
Q1 Cita a aprendizagem mecânica {4-1}
Q1 Cita conteúdos não algébricos {14-1}
Q1 Cita o uso de fórmulas {6-1}
Q1 Conteúdos da álgebra {47-4}
Q1 Dificuldades relacionadas ao estudo da álgebra {7-3}
Q1 Falta de aplicação {2-1}
Q1 Falta de clareza sobre o que é álgebra {42-3}
Q1 Gostava dos conteúdos da álgebra {1-1}
Q1 Não lembra {25-1}
Q1 Número desconhecido {1-1}
Q1 Operações com letras {12-1}
Q1 Relata conteúdos como equações, funções, bhaskara, etc. {30-1}
Q1 Relato positivo sobre a aprendizagem da álgebra {1-1}

FONTE: elaborado pela autora.

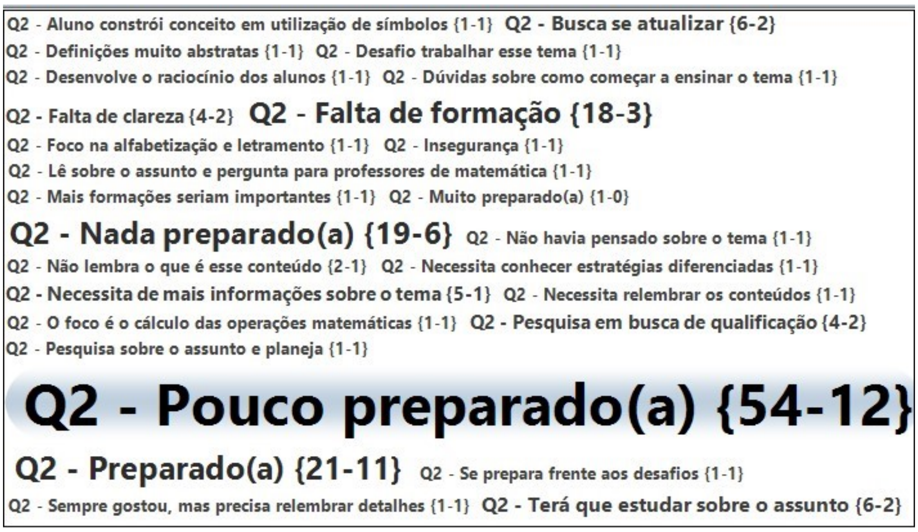
FIGURA 38 – REDE 2: “O QUE OS PROFESSORES LEMBRAM DA ÁLGEBRA QUE ESTUDARAM NA ESCOLA”



FONTE: elaborado pela autora.

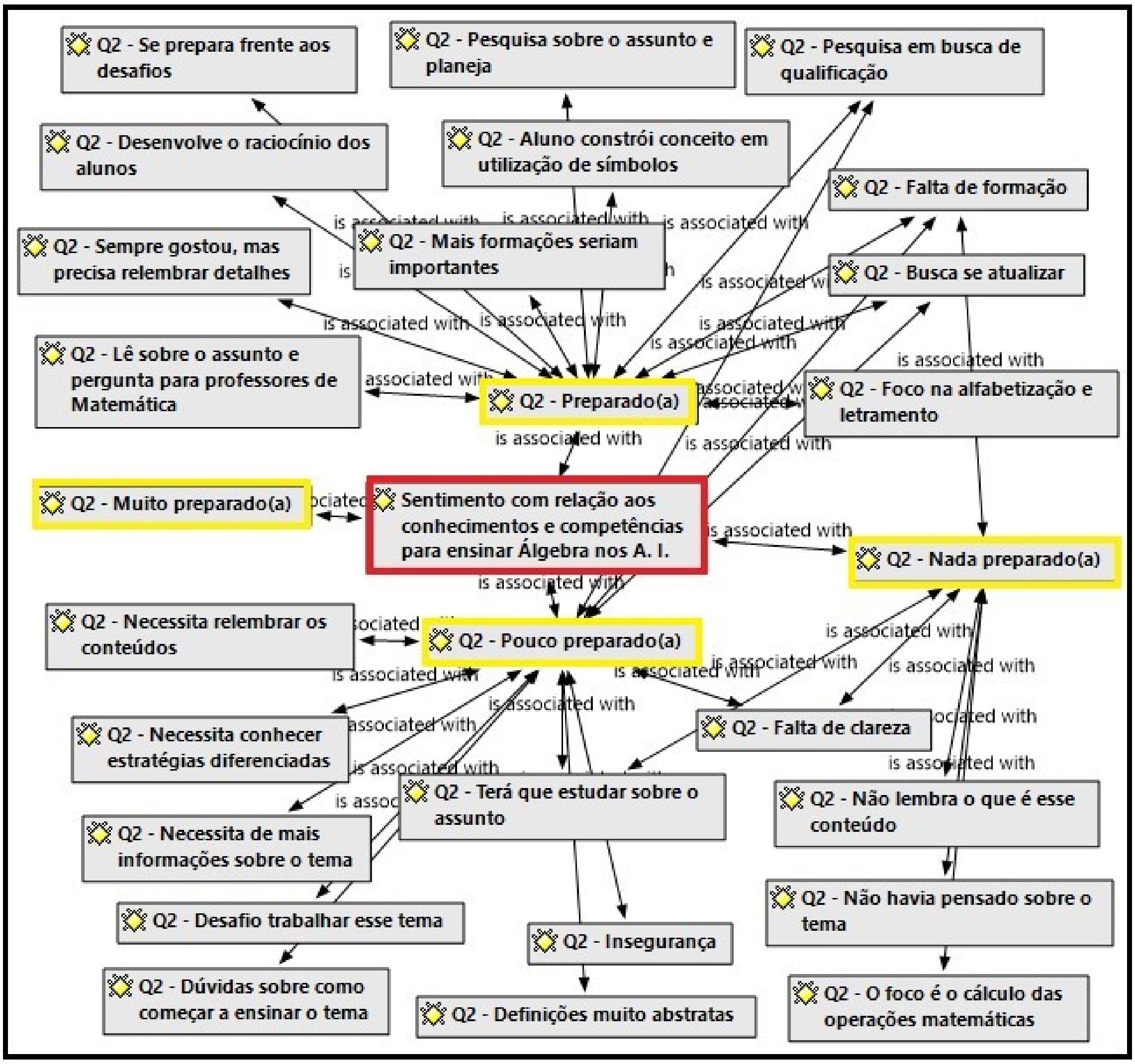
Com relação ao “sentimento de competência dos professores para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais”, constatamos, na lista de códigos (Figura 39) e na rede relacionada a essa questão (Figura 40), que a maioria dos professores sente-se “pouco preparado(a)”, sendo que esse código apareceu 54 vezes e está ligado a 12 outros, sendo a “falta de formação”, a “falta de clareza” sobre o tema, a “necessidade de mais informações” e o reconhecimento de que “terá que estudar sobre o assunto”, os códigos que mais se destacaram. Uma parte dos professores assinalou que se sente “nada preparado(a)”, sendo que os motivos mais relatados foram a falta de formação e de clareza sobre o tema, além de relatos indicando a necessidade de estudar o assunto. E entre aqueles que afirmaram se sentir “preparados(as)” para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, apareceu o relato de que há falta de formação e de que mais informações sobre o tema seriam interessantes. Por outro lado, os professores que se sentem “preparados(as)” relatam que pesquisam sobre o assunto em busca de qualificação e para se atualizar. Apenas um professor afirmou se sentir “muito preparado(a)” para ensinar esse conteúdo, mas não justificou.

FIGURA 39 – CÓDIGOS SOBRE O SENTIMENTO COM RELAÇÃO AOS CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ENSINAR ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS



FONTE: elaborado pela autora.

FIGURA 40 – REDE 3: “SENTIMENTO COM RELAÇÃO AOS CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ENSINAR ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS”



FONTE: elaborado pela autora.

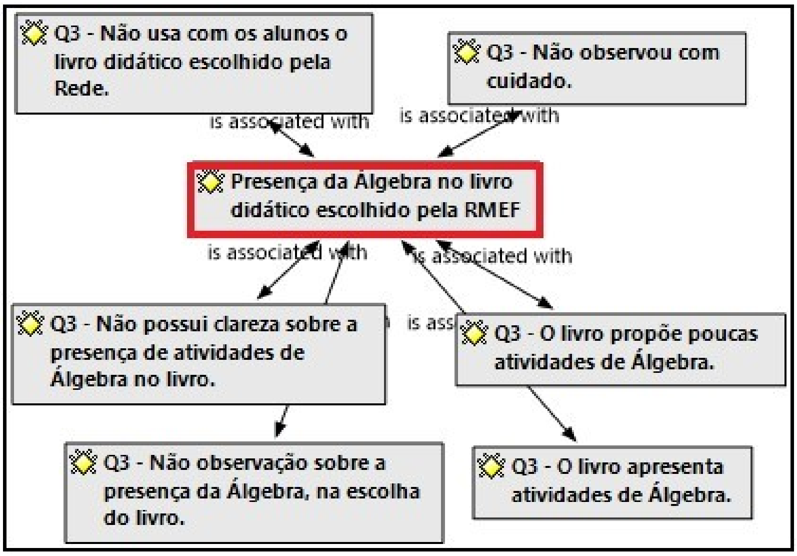
A escolha do livro didático do PNLD 2019 a 2022 foi realizada em várias etapas, que incluíam reuniões por ano escolar e/ou disciplina em que os livros foram avaliados por meio de critérios aprovados pelos participantes. Depois, as escolas foram orientadas a realizar reuniões com todos os professores para fazer a análise e a escolha dos livros. Esta foi registrada em uma plataforma interativa do MEC e o livro de Matemática mais votado pelas escolas da RMEF foi o *Ápis*, da Ática, atualmente em uso nas escolas. A subcategoria “Presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF” apresenta seis códigos associados (Figura 41), sendo que a maior parte dos professores (50) assinalou não possuir clareza sobre a presença de atividades de Álgebra no livro, e 26 deles que, na escolha do livro didático, não tiveram orientação para observar se a Álgebra era contemplada. A presença de atividades de Álgebra foi assinalada por 13 professores, sendo que 7 afirmaram que o livro propõe poucas atividades de Álgebra. Na Figura 42 é possível visualizar as situações descritas envolvendo a presença de atividades algébricas no livro escolhido pela RMEF:

FIGURA 41 – CÓDIGOS SOBRE A PRESENÇA DA ÁLGEBRA NO LIVRO DIDÁTICO ESCOLHIDO PELA RMEF

Q3 - Não observação sobre a presença da álgebra, na escolha do livro. {26-1}
Q3 - Não observou com cuidado. {1-1}
Q3 - Não possui clareza sobre a presença de atividades de álgebra no livro. {50-1}
Q3 - Não usa com os alunos o livro didático escolhido pela Rede. {5-1}
Q3 - O livro apresenta atividades de álgebra. {13-1}
Q3 - O livro propõe poucas atividades de álgebra. {7-1}

FONTE: elaborado pela autora.

FIGURA 42 – REDE 4: ”PRESENÇA DA ÁLGEBRA NO LIVRO DIDÁTICO ESCOLHIDO PELA RMEF”



FONTE: elaborado pela autora.

Os professores foram questionados acerca da recomendação em relação ao uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais e solicitados a justificar a resposta. Conforme se observa na codificação das respostas (Figura 43), a maior parte dos professores afirmou que não sabe se é recomendado usar letras para ensinar Álgebra nesse nível de escolaridade, pois precisam de mais orientações. Outros justificaram que isso depende de condições como a idade, o ano e o conhecimento do aluno, ou que preferem usar espaços vazios para números desconhecidos.

Os professores que acreditam não ser viável o uso de letras argumentam que isso pode confundir o aluno, que é muito abstrato, principalmente do 1º ao 3º ano, entre outras justificativas. Já dentre os que acreditam ser recomendado usá-las, as justificativas são bem variadas, seja porque serão usadas nos Anos Finais, ou que os alunos do 4º ou 5º ano têm condições de usar letras, ou que o x pode ser usado para representar um número desconhecido em um problema, etc. Um dos professores não quis opinar, pois não conhece o assunto.

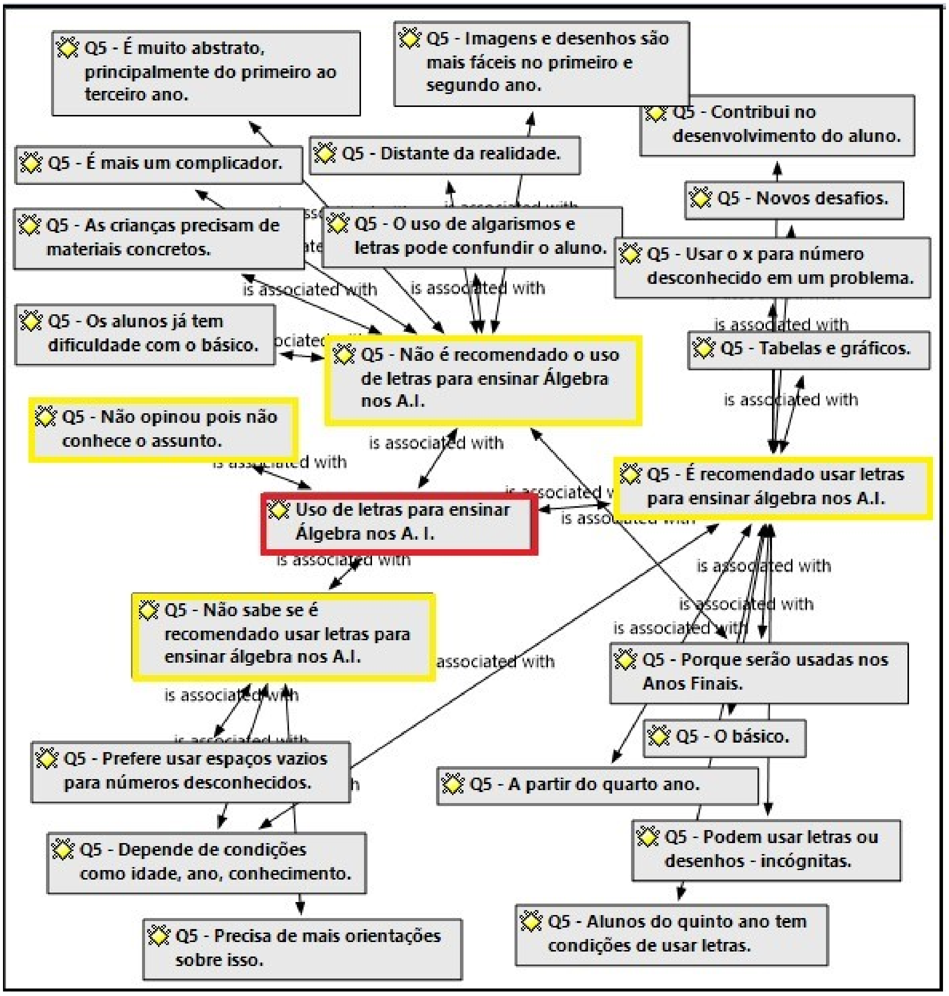
FIGURA 43 – CÓDIGOS EXPRESSANDO A OPINIÃO SOBRE O USO DE LETRAS PARA ENSINAR ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS

Nombre	F...	Den...
Q5 - A partir do quarto ano.	1	1
Q5 - Alunos do quinto ano tem condições de usar letras.	1	1
Q5 - As crianças precisam de materiais concretos.	1	1
Q5 - Contribui no desenvolvimento do aluno.	1	1
Q5 - Depende de condições como idade, ano, conhecimento.	3	2
Q5 - Distante da realidade.	1	1
Q5 - É mais um complicador.	1	1
Q5 - É muito abstrato, principalmente do primeiro ao terceiro ano.	2	1
Q5 - É recomendado usar letras para ensinar álgebra nos A.I.	24	10
Q5 - Imagens e desenhos são mais fáceis no primeiro e segundo ano.	1	1
Q5 - Não é recomendado o uso de letras para ensinar álgebra nos A.I.	18	8
Q5 - Não opinou pois não conhece o assunto.	1	0
Q5 - Não sabe se é recomendado usar letras para ensinar álgebra nos A.I.	52	3
Q5 - Novos desafios.	1	1
Q5 - O básico.	1	1
Q5 - O uso de algarismos e letras pode confundir o aluno.	4	1
Q5 - Os alunos já tem dificuldade com o básico.	1	1
Q5 - Podem usar letras ou desenhos - incógnitas.	1	1
Q5 - Porque serão usadas nos A.F.	2	2
Q5 - Precisa de mais orientações sobre isso.	2	1
Q5 - Prefere usar espaços vazios para números desconhecidos.	1	1
Q5 - Tabelas e gráficos.	1	1
Q5 - Usar o x para número desconhecido em um problema.	1	1

FONTE: elaborado pela autora.

Na rede 5: “Opinião sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais” (Figura 44), é possível visualizar que o código “depende de condições como idade, ano, conhecimento” está associado tanto a professores que não sabem se é recomendado o uso de letras quanto a professores que acreditam ser recomendada a sua utilização. Da mesma forma o código “porque serão usadas nos Anos Finais” está associado não só a professores que acham recomendado, mas também àqueles que não.

FIGURA 44 – REDE 5: “OPINIÃO SOBRE O USO DE LETRAS PARA ENSINAR ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS”

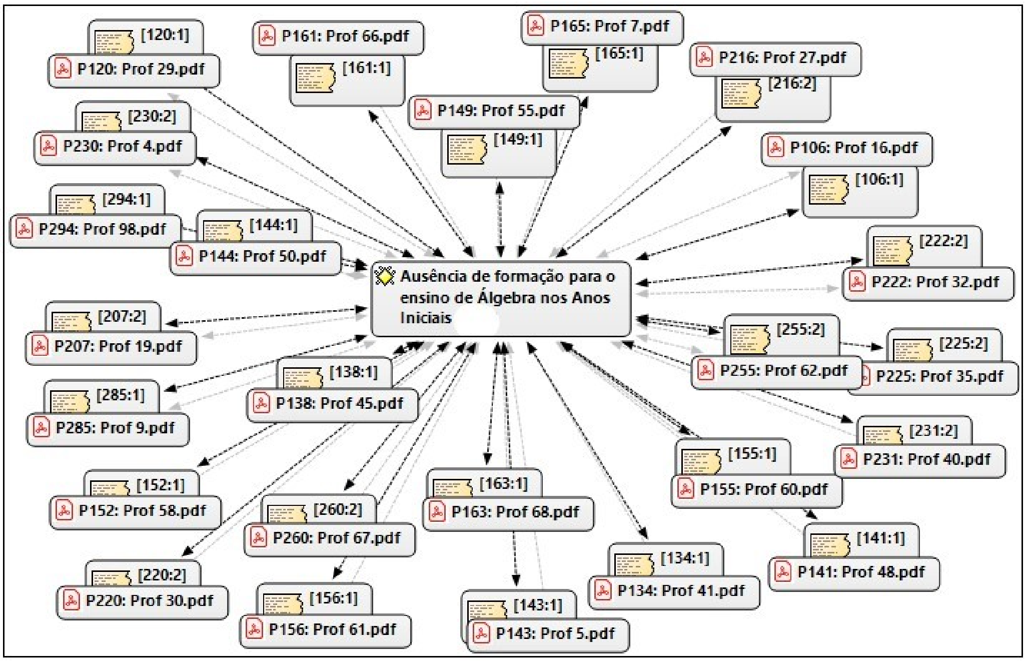


FONTE: elaborado pela autora.

A recomendação que consta na BNCC (BRASIL, 2017), de não usar letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam, não foi citada por nenhum professor. Provavelmente, isso se deve ao fato de a BNCC ter sido aprovada recentemente (em dezembro de 2017) e de não ter ocorrido ainda formações para a maioria dos professores acerca da unidade temática Álgebra, presente pela primeira vez para os Anos Iniciais. Os professores opinaram sobre o tema, mas se percebe que falta uma orientação mais profunda sobre o trabalho com essa unidade temática, que se encontra na Proposta Curricular da rede e também na BNCC em vigor.

Sintetizando, na primeira categoria analisada, “Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra”, 74,5 % dos professores nunca tiveram uma formação sobre o tema, enquanto que os demais tiveram formações pontuais, consideradas insuficientes. Neste sentido, houve também um número muito grande de professores que relatou não ter clareza sobre o que é Álgebra, além de 74,5% deles se sentirem pouco ou nada preparados em relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais. Mais da metade afirmou não ter clareza sobre a presença de atividades da matéria no livro didático e sobre o uso ou não de letras para ensiná-la nos Anos Iniciais. Na Figura 45, constam 25 citações do *ATLAS.ti*, cujos relatos expressam a falta de formação.

FIGURA 45 – CITAÇÕES QUE RETRATAM A AUSÊNCIA DE FORMAÇÃO PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS.

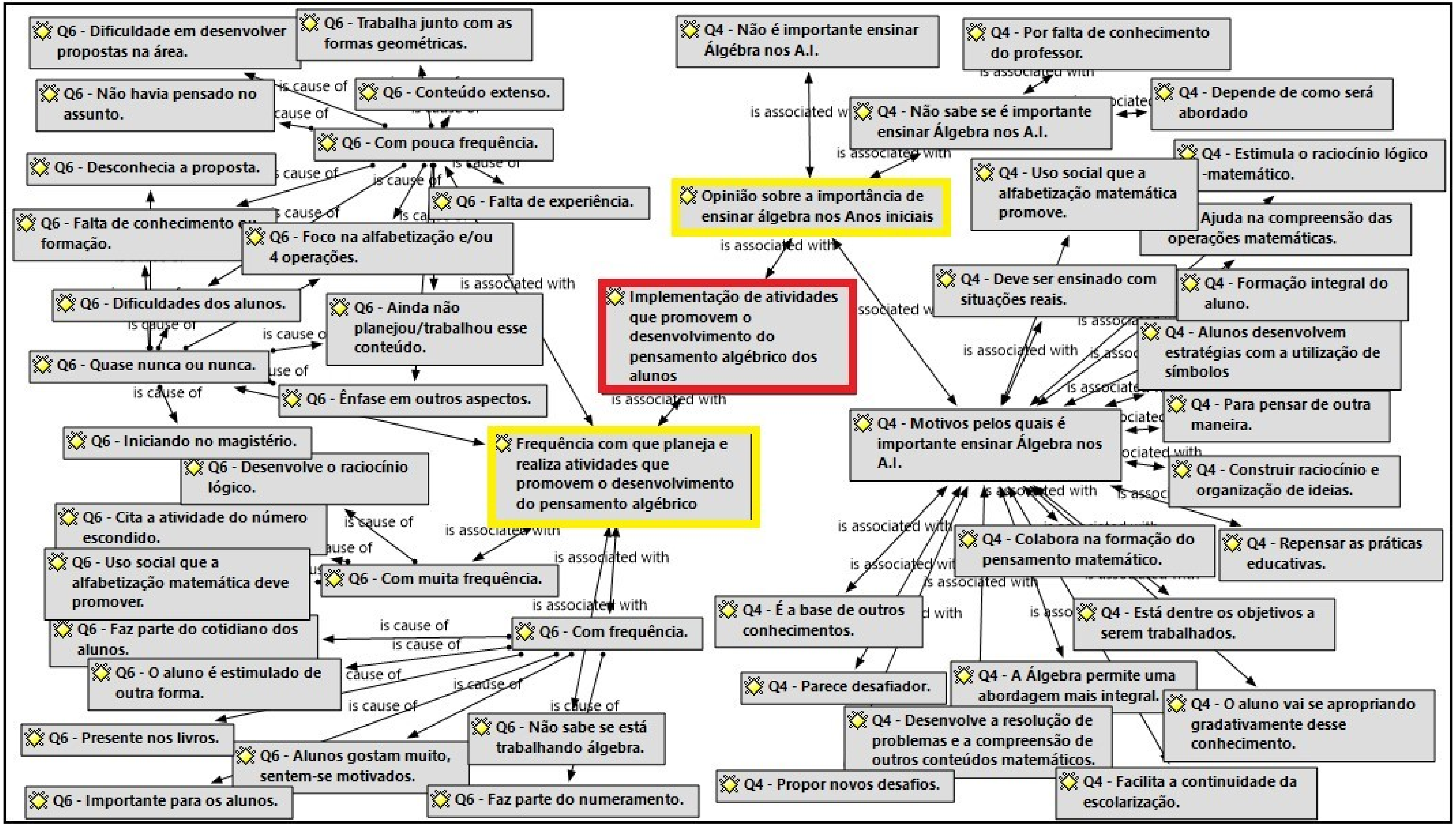


FONTE: elaborado pela autora.

6.1.2 Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Na rede 6 (Figura 46), é possível observar muitos códigos associados à “implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos”:

FIGURA 46 – REDE 6: “IMPLEMENTAÇÃO DE ATIVIDADES QUE PROMOVEM O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DOS ALUNOS”


Q6 - Dificuldade em desenvolver propostas na área.
Q6 - Trabalha junto com as formas geométricas.
Q6 - Não havia pensado no assunto.
Q6 - Conteúdo extenso.
Q6 - Com pouca frequência.
Q6 - Desconhecia a proposta.
Q6 - Falta de experiência.
Q6 - Falta de conhecimento ou formação.
Q6 - Foco na alfabetização e/ou 4 operações.
Q6 - Dificuldades dos alunos.
Q6 - Ainda não planejou/trabalhou esse conteúdo.
Q6 - Quase nunca ou nunca.
Q6 - Ênfase em outros aspectos.
Q6 - Iniciando no magistério.
Q6 - Desenvolve o raciocínio lógico.
Q6 - Cita a atividade do número escondido.
Q6 - Uso social que a alfabetização matemática deve promover.
Q6 - Com muita frequência.
Q6 - Faz parte do cotidiano dos alunos.
Q6 - Com frequência.
Q6 - O aluno é estimulado de outra forma.
Q6 - Presente nos livros.
Q6 - Não sabe se está trabalhando álgebra.
Q6 - Alunos gostam muito, sentem-se motivados.
Q6 - Importante para os alunos.
Q6 - Faz parte do numeramento.
Opinião sobre a importância de ensinar álgebra nos Anos iniciais
Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos
Frequência com que planeja e realiza atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico
Q4 - Não é importante ensinar Álgebra nos A.I.
Q4 - Por falta de conhecimento do professor.
Q4 - Não sabe se é importante ensinar Álgebra nos A.I.
Q4 - Depende de como será abordado
Q4 - Estimula o raciocínio lógico -matemático.
Q4 - Uso social que a alfabetização matemática promove.
Ajuda na compreensão das operações matemáticas.
Q4 - Deve ser ensinado com situações reais.
Q4 - Formação integral do aluno.
Q4 - Alunos desenvolvem estratégias com a utilização de símbolos
Q4 - Para pensar de outra maneira.
Q4 - Motivos pelos quais é importante ensinar Álgebra nos A.I.
Q4 - Construir raciocínio e organização de ideias.
Q4 - Colabora na formação do pensamento matemático.
Q4 - Repensar as práticas educativas.
Q4 - É a base de outros conhecimentos.
Q4 - Está dentre os objetivos a serem trabalhados.
Q4 - Parece desafiador.
Q4 - A Álgebra permite uma abordagem mais integral.
Q4 - O aluno vai se apropriando gradativamente desse conhecimento.
Q4 - Desenvolve a resolução de problemas e a compreensão de outros conteúdos matemáticos.
Q4 - Propor novos desafios.
Q4 - Facilita a continuidade da escolarização.
is cause of
is associated with

FONTE: elaborado pela autora.

A essa categoria estão associadas duas subcategorias, detalhadas na sequência. Os códigos de cada uma podem ser visualizados nas redes 7 e 8 (Figuras 48 e 50):

- Opinião sobre a importância de se ensinar Álgebra nos Anos Iniciais (rede 7).
- Frequência com que planeja e realiza atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico (rede 8).

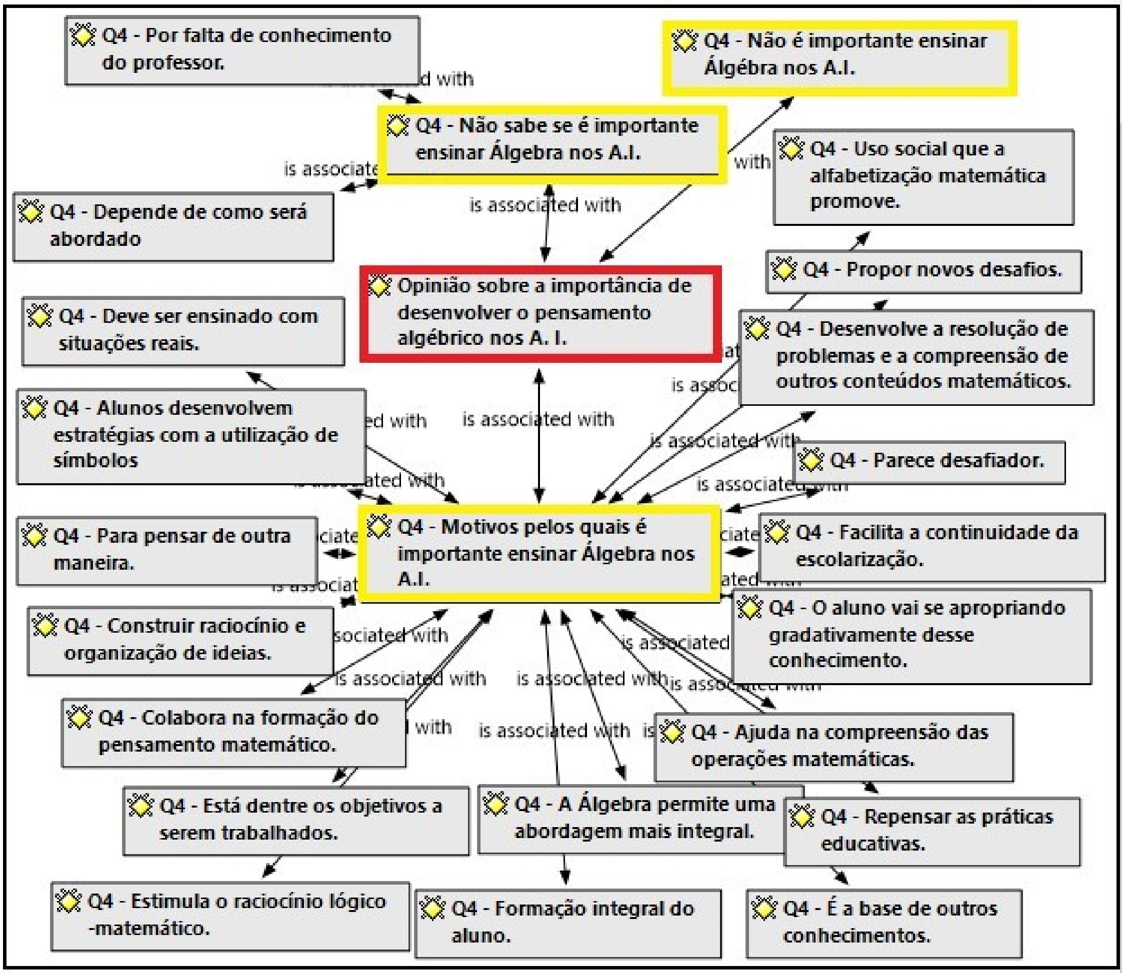
Nos códigos atribuídos (Figura 47) e na rede construída (Figura 48) notamos que a maioria dos professores (69) considera importante ensinar Álgebra nos Anos Iniciais. As justificativas mais citadas são: o estímulo ao raciocínio lógico-matemático, o uso social que a alfabetização Matemática promove, a apropriação gradativa desse conhecimento e a facilitação em relação à continuidade da escolarização. Uma parte dos professores (26) não sabe se é importante ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, citando a falta de conhecimento e o fato de não saber como abordar o conteúdo como justificativas às suas respostas. Apenas dois professores afirmaram que não é importante ensinar Álgebra nesse nível de escolaridade, mas não justificaram.

FIGURA 47 – CÓDIGOS EXPRESSANDO A OPINIÃO SOBRE A IMPORTÂNCIA DE SE ENSINAR ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS

Q4 - A álgebra permite uma abordagem mais integral. {1-1}
Q4 - Ajuda na compreensão das operações matemáticas. {2-1}
Q4 - Alunos desenvolvem estratégias com a utilização de símbolos {1-1}
Q4 - Colabora na formação do pensamento matemático. {1-1}
Q4 - Construir raciocínio e organização de ideias. {1-1}
Q4 - Depende de como será abordado {2-1}
Q4 - Desenvolve a resolução de problemas e a compreensão de outros conteúdos matemáticos. {2-1}
Q4 - Deve ser ensinado com situações reais. {1-1}
Q4 - Está dentre os objetivos a serem trabalhados. {1-1}
Q4 - Estimula o raciocínio lógico-matemático. {16-1}
Q4 - É a base de outros conhecimentos. {1-1}
Q4 - É importante ensinar álgebra nos A. I. {69-18}
Q4 - Facilita a continuidade da escolarização. {4-1}
Q4 - Formação integral do aluno. {2-1}
Q4 - Não é importante ensinar algébra nos A.I. {2-0}
Q4 - Não sabe se é importante ensinar álgebra nos A.I. {26-2}
Q4 - O aluno vai se apropriando gradativamente desse conhecimento. {5-1}
Q4 - Para pensar de outra maneira. {1-1}
Q4 - Parece desafiador. {1-1}
Q4 - Por falta de conhecimento do professor. {6-1}
Q4 - Propor novos desafios. {1-1}
Q4 - Repensar as práticas educativas. {1-1}
Q4 - Uso social que a alfabetização matemática promove. {6-1}

FONTE: elaborado pela autora.

FIGURA 48 – REDE 7: “OPINIÃO SOBRE A IMPORTÂNCIA DE SE ENSINAR ÁLGEBRA OU PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS”



FONTE: elaborado pela autora.

Com relação à “Frequência com que os professores planejam e realizam atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico” nos Anos Iniciais, percebemos que a maioria dos professores não planeja e trabalha com essas atividades ou o faz com pouca frequência. Dos 98 professores, 32 assinalaram a opção “com pouca frequência” e 27 “quase nunca ou nunca” (Figura 49). As principais justificativas, em ambos os casos, podem ser observadas na rede 8 (Figura 50), as quais se referem, principalmente, à falta de formação ou conhecimento, ao fato de ainda não terem planejado ou trabalhado o conteúdo, ao foco que dão na alfabetização e/ou nas operações aritméticas, e também, ao fato dos alunos apresentarem dificuldades. O código “com frequência” foi associado a 21 professores, enquanto que 3 professores relataram fazer esse trabalho “com muita frequência”. A justificativa de que faz parte do cotidiano foi relatada por 3 professores e todas as demais apareceram apenas uma vez, sob os códigos: “faz parte do numeramento”, “presente nos livros”, “importante para os alunos”,”desenvolve o raciocínio lógico”, etc. Cinco professores citaram que não sabem se estão trabalhando Álgebra porque não têm conhecimento sobre o assunto.

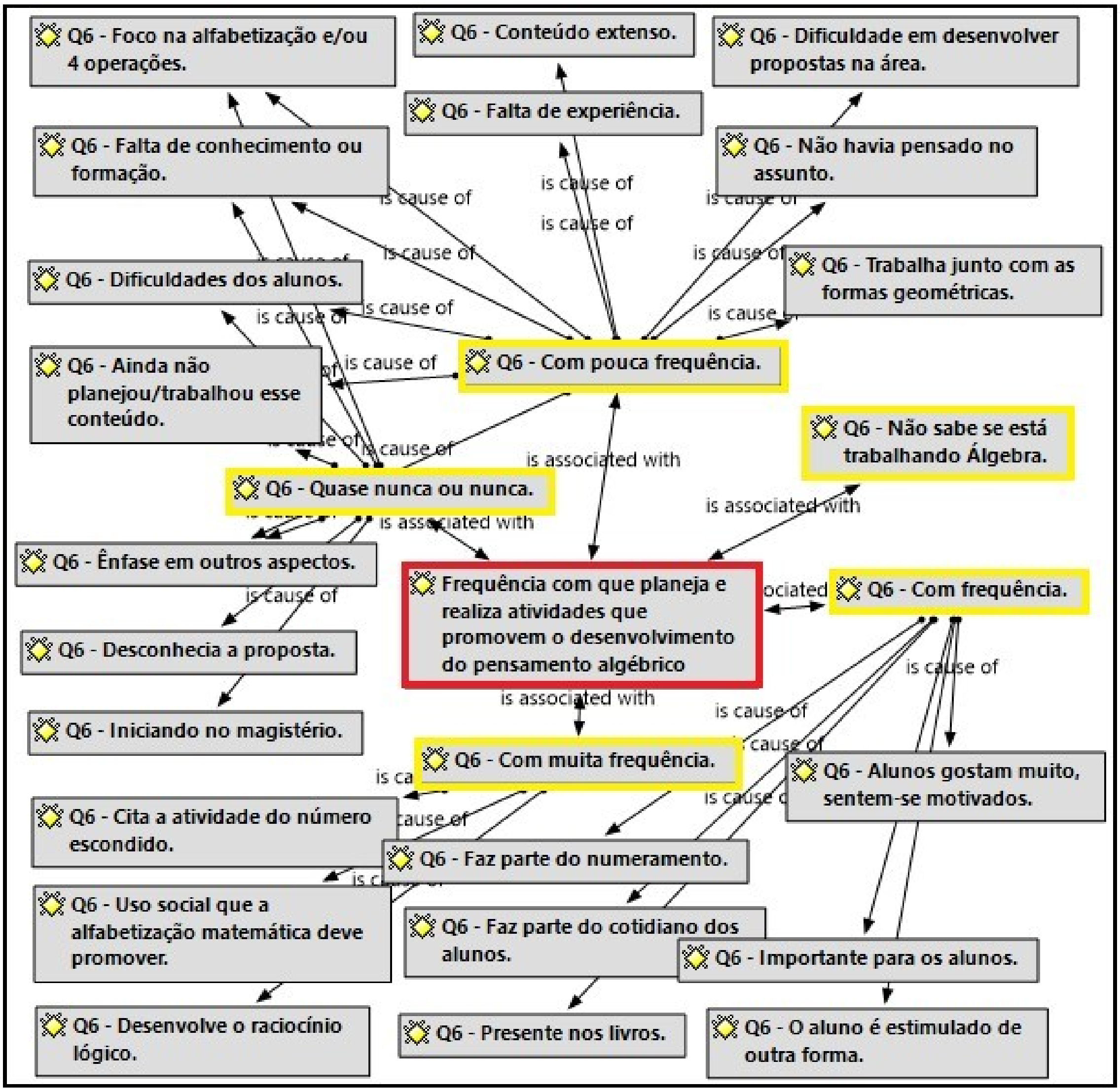
FIGURA 49 – CÓDIGOS SOBRE A FREQUÊNCIA COM QUE OS PROFESSORES PLANEJAM E REALIZAM ATIVIDADES QUE PROMOVEM O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Nombre	F...	Den...
Q6 - Ainda não planejou/trabalhou esse conteúdo.	5	2
Q6 - Alunos gostam muito, sentem-se motivados.	1	1
Q6 - Cita a atividade do número escondido.	1	1
Q6 - Com frequência.	21	6
Q6 - Com muita frequência.	3	3
Q6 - Com pouca frequência.	32	10
Q6 - Conteúdo extenso.	1	1
Q6 - Desconhecia a proposta.	1	1
Q6 - Desenvolve o raciocínio lógico.	1	1
Q6 - Dificuldade em desenvolver propostas na área.	1	1
Q6 - Dificuldades dos alunos.	2	2
Q6 - Ênfase em outros aspectos.	3	2
Q6 - Falta base matemática.	0	0
Q6 - Falta de conhecimento ou formação.	13	2
Q6 - Falta de experiência.	2	1
Q6 - Faz parte do cotidiano dos alunos.	3	1
Q6 - Faz parte do numeramento.	1	1
Q6 - Foco na alfabetização e/ou 4 operações.	4	2
Q6 - Importante para os alunos.	1	1
Q6 - Iniciando no magistério.	1	1
Q6 - Não havia pensado no assunto.	1	1
Q6 - Não sabe se está trabalhando álgebra.	5	0
Q6 - O aluno é estimulado de outra forma.	1	1
Q6 - Presente nos livros.	1	1
Q6 - Prioridade em outros conteúdos da matemática.	0	1
Q6 - Quase nunca ou nunca.	27	8
Q6 - Trabalha junto com as formas geométricas.	1	1
Q6 - Uso social que a alfabetização matemática deve promover.	1	1

FONTE: elaborado pela autora.

De acordo com o que se visualiza nas Figuras 49 e 50, a implementação efetiva de atividades que desenvolvem o pensamento algébrico ainda não está ocorrendo por parte da maioria dos docentes, apesar de considerarem importante ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, conforme apresentado anteriormente. E dentre as justificativas para planejar atividades algébricas com frequência ou com muita frequência, não se encontra o desenvolvimento da generalização, o que indica a necessidade de ampliação do conhecimento dos professores para a execução dessas atividades.

FIGURA 50 – REDE 8: "FREQUÊNCIA COM QUE OS PROFESSORES PLANEJAM E REALIZAM ATIVIDADES QUE PROMOVEM O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO"



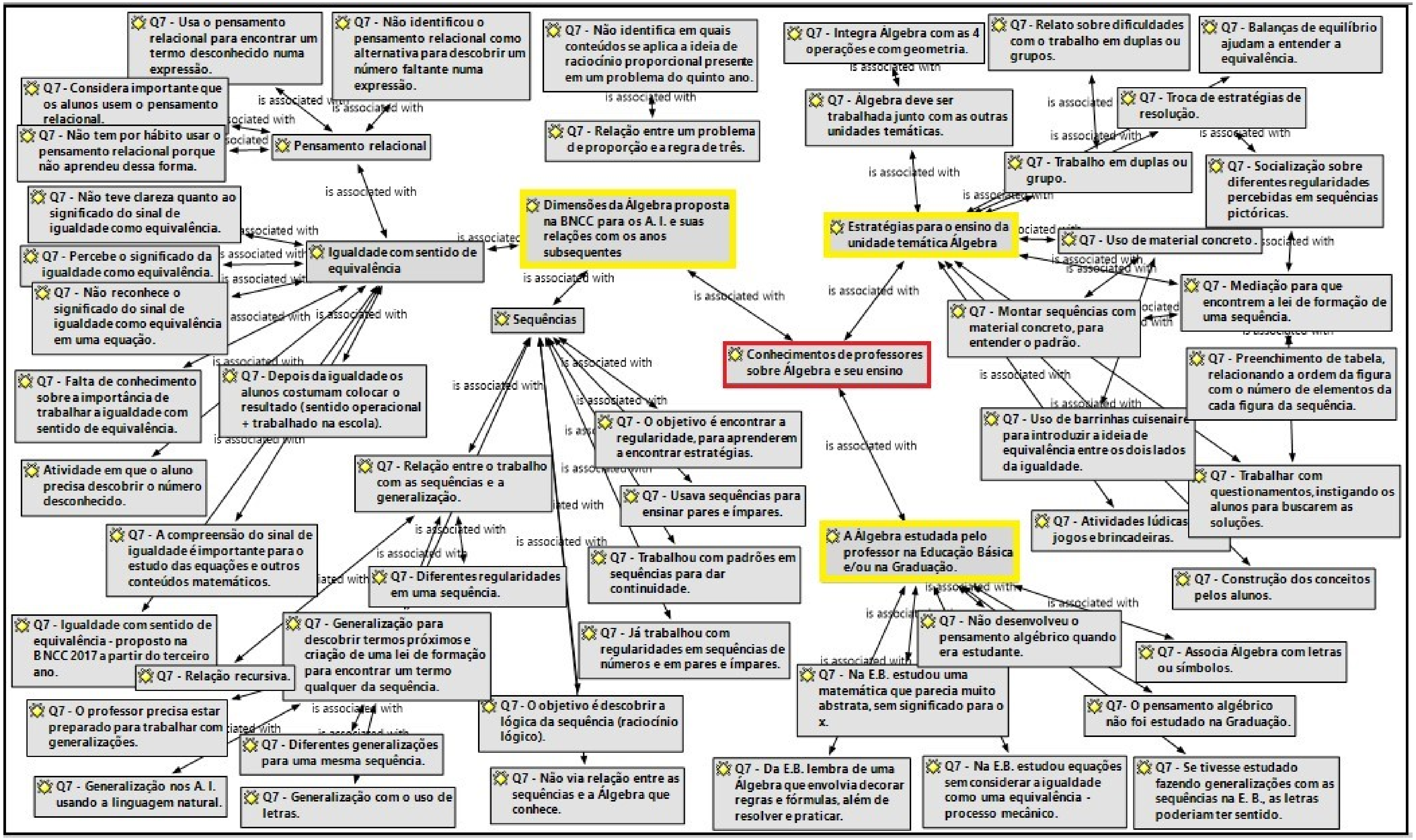
FONTE: elaborado pela autora.

O fato de 60,2% dos professores assinalar que não planeja, ou planeja com pouca frequência, atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado à falta de conhecimento ou formação para trabalhar essa unidade temática, que foram os motivos mais citados.

6.1.3 Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino

Na rede 9 (Figura 51) é possível observar os códigos associados à categoria "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino".

FIGURA 51 – REDE 9: "CONHECIMENTOS DE PROFESSORES SOBRE ÁLGEBRA E SEU ENSINO"


Q7 - Usa o pensamento relacional para encontrar um termo desconhecido numa expressão.
Q7 - Não identificou o pensamento relacional como alternativa para descobrir um número faltante numa expressão.
Q7 - Não identifica em quais conteúdos se aplica a ideia de raciocínio proporcional presente em um problema do quinto ano.
Q7 - Integra Álgebra com as 4 operações e com geometria.
Q7 - Relato sobre dificuldades com o trabalho em duplas ou grupos.
Q7 - Balanças de equilíbrio ajudam a entender a equivalência.
Q7 - Considera importante que os alunos usem o pensamento relacional.
Q7 - Não tem por hábito usar o pensamento relacional porque não aprendeu dessa forma.
Pensamento relacional
Q7 - Relação entre um problema de proporção e a regra de três.
Q7 - Álgebra deve ser trabalhada junto com as outras unidades temáticas.
Q7 - Troca de estratégias de resolução.
Q7 - Trabalho em duplas ou grupo.
Q7 - Socialização sobre diferentes regularidades percebidas em sequências pictóricas.
Q7 - Não teve clareza quanto ao significado do sinal de igualdade como equivalência.
Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os A. I. e suas relações com os anos subsequentes
Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra
Q7 - Uso de material concreto.
Q7 - Percebe o significado da igualdade como equivalência.
Igualdade com sentido de equivalência
Q7 - Não reconhece o significado do sinal de igualdade como equivalência em uma equação.
Sequências
Q7 - Mediação para que encontrem a lei de formação de uma sequência.
Q7 - Montar sequências com material concreto, para entender o padrão.
Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino
Q7 - Preenchimento de tabela, relacionando a ordem da figura com o número de elementos da cada figura da sequência.
Q7 - Falta de conhecimento sobre a importância de trabalhar a igualdade com sentido de equivalência.
Q7 - Depois da igualdade os alunos costumam colocar o resultado (sentido operacional + trabalhado na escola).
Q7 - O objetivo é encontrar a regularidade, para aprenderem a encontrar estratégias.
Q7 - Uso de barrinhas cuisenaire para introduzir a ideia de equivalência entre os dois lados da igualdade.
Atividade em que o aluno precisa descobrir o número desconhecido.
Q7 - Relação entre o trabalho com as sequências e a generalização.
Q7 - Usava sequências para ensinar pares e ímpares.
Q7 - Trabalhar com questionamentos, instigando os alunos para buscarem as soluções.
Q7 - Atividades lúdicas, jogos e brincadeiras.
Q7 - A compreensão do sinal de igualdade é importante para o estudo das equações e outros conteúdos matemáticos.
Q7 - Diferentes regularidades em uma sequência.
Q7 - Trabalhou com padrões em sequências para dar continuidade.
A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação.
Q7 - Construção dos conceitos pelos alunos.
Q7 - Igualdade com sentido de equivalência - proposto na BNCC 2017 a partir do terceiro ano.
Q7 - Relação recursiva.
Q7 - Generalização para descobrir termos próximos e criação de uma lei de formação para encontrar um termo qualquer da sequência.
Q7 - Já trabalhou com regularidades em sequências de números e em pares e ímpares.
Q7 - Não desenvolveu o pensamento algébrico quando era estudante.
Q7 - Associa Álgebra com letras ou símbolos.
Q7 - Na E.B. estudou uma matemática que parecia muito abstrata, sem significado para o x.
Q7 - O professor precisa estar preparado para trabalhar com generalizações.
Q7 - O objetivo é descobrir a lógica da sequência (raciocínio lógico).
Q7- O pensamento algébrico não foi estudado na Graduação.
Q7 - Diferentes generalizações para uma mesma sequência.
Q7 - Generalização nos A. I. usando a linguagem natural.
Q7 - Generalização com o uso de letras.
Q7 - Não via relação entre as sequências e a Álgebra que conhece.
Q7 - Da E.B. lembra de uma Álgebra que envolvia decorar regras e fórmulas, além de resolver e praticar.
Q7 - Na E.B. estudou equações sem considerar a igualdade como uma equivalência - processo mecânico.
Q7 - Se tivesse estudado fazendo generalizações com as sequências na E. B., as letras poderiam ter sentido.
is associated with

FONTE: elaborado pela autora.

A essa categoria estão associadas três subcategorias:

- Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes (rede 10).
- Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra (rede 11).
- A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação (rede 12).

A categoria "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino", em nossa compreensão, é a categoria central identificada nesta investigação, ou seja, a *core category*, de modo que todas as outras estão relacionadas a ela, complementando-a, caracterizando-a ou influenciando-a. Da mesma forma, as demais categorias e subcategorias também são influenciadas pela categoria central.

De acordo com Tarozzi, uma *core category* "é uma categoria-chave, ramificada, muitas vezes é mais frequente que as demais (com um maior número de ocorrência de dados), mas, sobretudo, é aquela mais potente analiticamente. É densa, saturada, integra a teoria, é completa, relevante e funciona" (2011, p. 81).

Ao perceber que as duas primeiras categorias "Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra" e "Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos" já se encontravam saturadas com os 98 questionários respondidos e com as duas primeiras entrevistas, decidimos realizar as demais entrevistas com foco na terceira categoria, ou seja, nos "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino". Ampliamos a entrevista pensando em duas subcategorias já presentes anteriormente, as "Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes" e as "Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra". Na codificação das transcrições, ao ampliar essas duas subcategorias, encontramos uma terceira, que apareceu nos relatos dos professores: "A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação", que também influencia o conhecimento dos professores sobre Álgebra e seu ensino.

Por sugestão da banca, no momento da qualificação, as demais entrevistas tiveram uma abordagem reflexiva/formativa, no intuito de que a pesquisa não servisse apenas para detectar que parte dos professores não teve formação sobre o tema, fazendo com que poucos planejem e implementem atividades para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

A entrevista reflexiva/formativa pode ser visualizada no próximo capítulo, em que constam recortes dos diálogos estabelecidos com os professores sobre o tema. A entrevista traz à tona aspectos importantes que contribuem ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nos quais os professores, em sua maioria, ainda não tiveram formação, podendo contribuir com a RMEF ou outras redes na implementação dessa unidade temática. A Álgebra está presente na BNCC e na Proposta Curricular da RMEF, sendo que os livros também já trazem atividades algébricas, embora os professores de Anos Iniciais não tenham tido um suporte formativo para conduzir o ensino desse conteúdo, já que muitos lembram apenas da Álgebra estudada na Educação Básica (e alguns não lembram, como se viu na pesquisa). Além disso, poucos professores estudaram essa temática na graduação ou em outras formações.

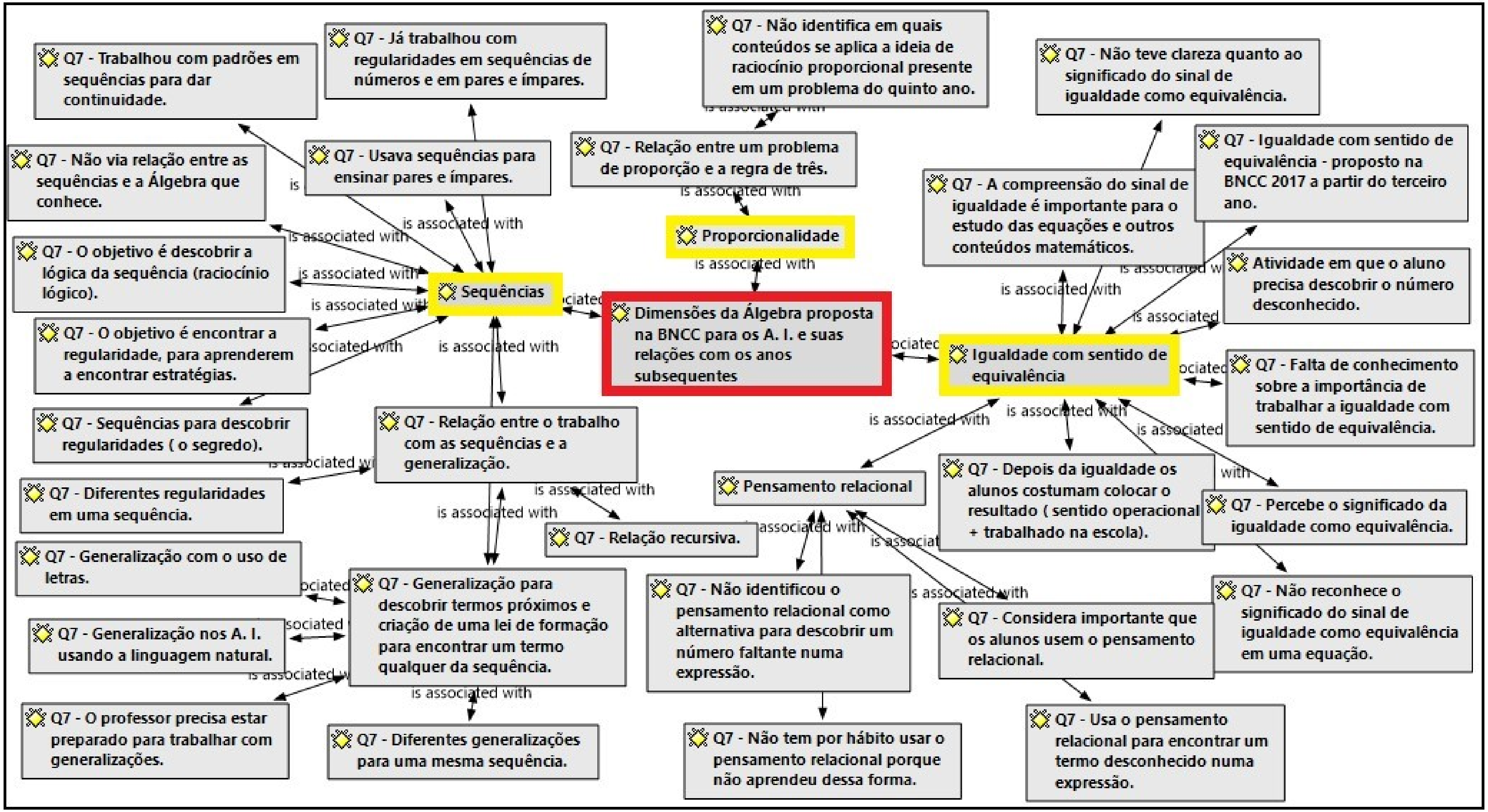
Os códigos das redes da Categoria Central e de suas subcategorias se referem às duas fases de entrevistas e incluem alguns aspectos dos questionários. A primeira entrevista buscava evidenciar quais conhecimentos os professores demonstram ter diante dos principais aspectos da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais. Fez-se uso de questões que envolvem a Álgebra dos Anos Iniciais – presentes principalmente no livro da Coleção Ápis Matemática, adotado pela RMEF no PNLD 2019 a 2022 – para produzir questionamentos. Na segunda fase das entrevistas reflexivas/formativas, foram mantidas as questões do livro didático para direcionar questionamentos e introduzido um resumo a partir do texto "Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º ano". Este foi lido com os professores, pois focava na generalização de padrões presente em uma sequência recursiva e na escrita de uma generalização usando a linguagem matemática e respeitando o sentido de equivalência da igualdade.

A entrevista reflexiva/formativa focou no tema generalização, sendo que foram apresentados exemplos e explicações sobre o tema, visto que, em todas as entrevistas, esse não havia sido o objetivo inicialmente citado pelos professores para se trabalhar com as sequências. Foi realizada uma generalização pelos professores para que pudessem vivenciar esse processo, com estratégias significativas para serem utilizadas com os alunos quando trabalham com sequências. Em relação à igualdade com sentido de equivalência, foi trazido à tona o uso do pensamento relacional e de materiais concretos, como as barrinhas cuisenaire, que podem auxiliar no ensino desse tema. Enfatizou-se também a relação dos conteúdos algébricos da unidade temática Álgebra para os Anos Iniciais com os conteúdos que os professores já haviam estudado na época da Educação Básica.

Conforme mencionado anteriormente, a GT é uma metodologia que prevê o retorno ao campo de pesquisa sempre que o pesquisador precisar ampliar ou aprofundar informações até que haja uma saturação teórica (TAROZZI, 2011). No retorno ao campo, a entrevista reflexiva/formativa foi realizada com duplas de professores para que tivessem mais liberdade de expressar seus conhecimentos e opiniões sobre os temas propostos.

Na subcategoria "Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes" (rede 10), percebemos o conhecimento dos professores sobre regularidades e padrões em sequências e sobre as propriedades da igualdade. No entanto, também apareceram alguns saberes que precisam ser ampliados, como: o elemento generalização, muito importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico e que não foi citado pelos professores, e a importância de trabalhar a igualdade com sentido de equivalência, que não é conhecida por todos os docentes. Neste sentido, frisou-se novamente que uma formação que contemple a Álgebra dos Anos Iniciais poderia ajudar a RMEF a implementar essa nova orientação curricular, que busca desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. A Figura 52 apresenta uma visão geral dos códigos associados a essa subcategoria:

FIGURA 52 – REDE 10: "DIMENSÕES DA ÁLGEBRA E SUAS RELAÇÕES COM OS ANOS SUBSEQUENTES"



FONTE: elaborado pela autora.

Ao se observar os códigos relacionados ao código “Sequências”, percebe-se que os professores já haviam trabalhado com sequências, pois citaram a descoberta de regularidades ou do segredo delas, que são representadas por meio da escrita. Citam também regularidades em sequências, como no quadro numérico ou em pares e ímpares. Assinalam que o objetivo é que os alunos descubram a lógica da sequência e que aprendam a encontrar regularidades ou estratégias. Na abordagem inicial, a generalização não apareceu na fala dos professores como um dos objetivos para o trabalho com as sequências. Ao serem questionados se conseguem visualizar como as atividades com sequências podem contribuir para a aprendizagem de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, não souberam responder, pois não estabeleceram uma relação entre as sequências e a Álgebra estudada na Educação Básica.

Por esse motivo, a generalização foi priorizada nas entrevistas reflexivas/formativas, na tentativa de estabelecer a relação entre o trabalho com as sequências e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para tanto, foram abordados os tipos de generalização, a relação recursiva presente em sequências recursivas, o uso da linguagem natural para expressar generalizações nos Anos Iniciais, as diferentes regularidades presentes em sequências, as diferentes generalizações que podem ser feitas a partir de uma sequência e a relação entre generalizações nos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento do pensamento algébrico está diretamente relacionado à generalização, por isso, é importante que os professores aprofundem seus conhecimentos sobre o tema. Relativamente à importância de trabalhar com a generalização, Mason salienta que a “aritmética sem generalidade é uma atividade puramente clerical; Aritmética que apela às crianças para se tornarem conscientes da generalidade é Matemática” (2018, p. 330, tradução nossa). E sobre isso Carraher *et al.* (2006, p.110, tradução nossa) enfatizam que, “se nos concentrarmos muito na natureza concreta da Aritmética, corremos o risco de oferecer aos alunos uma visão superficial da Matemática e de desencorajar suas tentativas de generalização”.

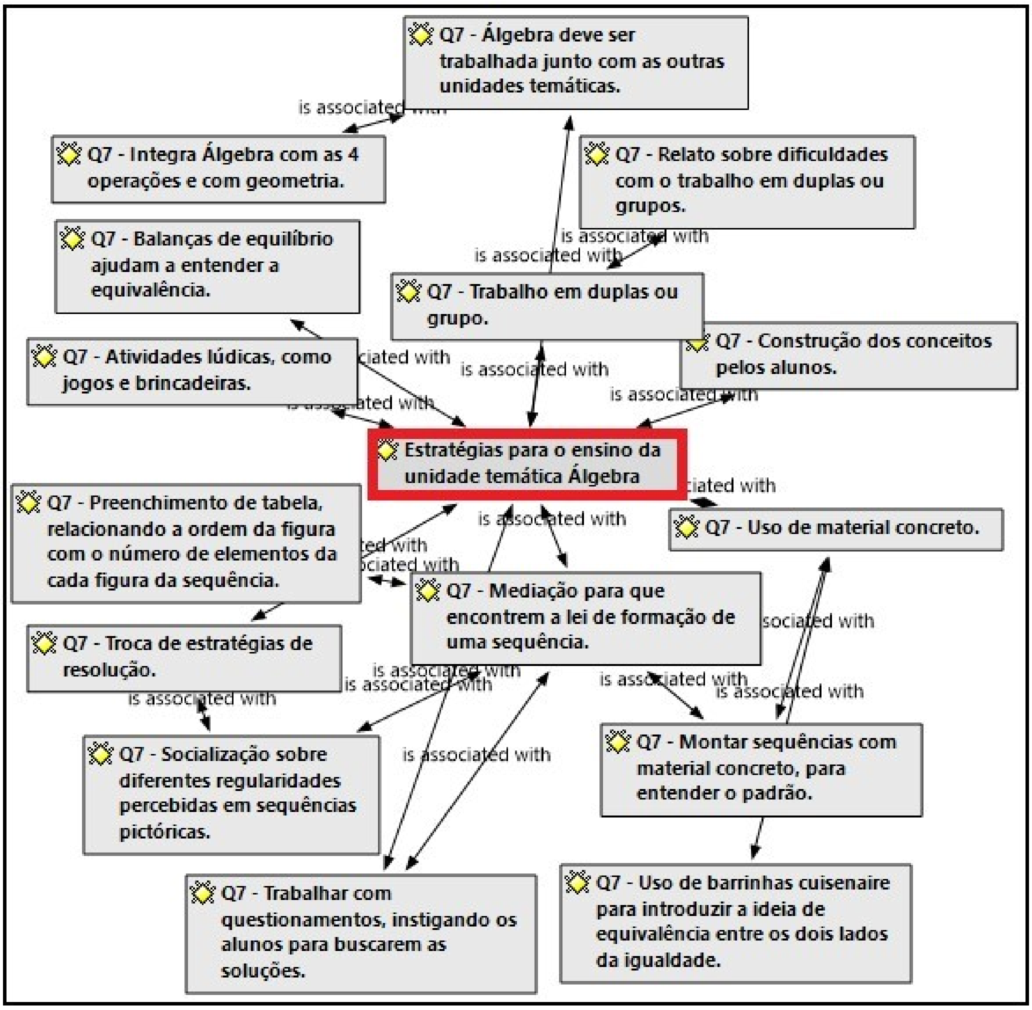
Por meio da observação dos códigos relacionados ao código “Igualdade com sentido de equivalência”, foi possível constatar que alguns professores demonstraram compreensão sobre o sentido de equivalência do sinal de igualdade, assim como houve relatos no sentido de que essa compreensão contribui ao estudo das equações nos Anos Finais. Em contrapartida, outros professores entrevistados não identificaram o sentido de equivalência do sinal de igualdade presente nas questões, pois relacionam mais facilmente com a Álgebra atividades em que o aluno precisa descobrir o número desconhecido. Esse tema foi aprofundado nas entrevistas reflexivas/formativas, com a ampliação de questões que focam no sentido de equivalência da igualdade, incluindo o uso do pensamento relacional e a introdução desse tema com o uso das barrinhas cuisenaire. A maior parte dos professores não conhecia o pensamento relacional como uma alternativa para solucionar questões apresentadas nas entrevistas envolvendo a equivalência, porém, após usá-lo, considera importante que os alunos também aprendam dessa forma. Os professores concordam que o sentido operacional do sinal de igualdade é mais trabalhado nas escolas e acreditam que, por esse motivo, os alunos erram certas questões em que está presente a equivalência.

O sinal de igualdade com sentido operatório é o mais usado, principalmente nos Anos Iniciais, conforme apontam os autores Ponte, Branco e Matos (2009), anteriormente citados. Para a compreensão da igualdade com sentido de equivalência, Beck (2018) sugere a utilização de problemas em que a igualdade represente o equilíbrio entre duas expressões de modo a desenvolver o pensamento relacional. Ressalta, além disso, que os problemas a serem explorados com os alunos não devem ser apenas aqueles em que o sinal de igualdade é resultado de um processo aritmético.

Em relação ao código "proporcionalidade", identificamos que a maioria dos professores não relaciona um problema de raciocínio proporcional do 5º ano com a regra de três, que os alunos começam a estudar nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Esse tema foi retomado nas entrevistas reflexivas/formativas.

Em relação à subcategoria "Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra" (rede 11), os professores, nas primeiras entrevistas, citaram várias estratégias importantes para se trabalhar a unidade temática Álgebra. Podemos dizer que essas estratégias são relevantes para ensinar diversos conteúdos e que fazem parte do conhecimento pedagógico do professor. Na segunda fase das entrevistas foram trazidas à tona estratégias já citadas pelos professores, mas também outras mais específicas para o trabalho com a generalização a partir de sequências e também para trabalhar a questão do sentido de equivalência da igualdade. Na figura 53 é possível visualizar códigos associados a essas diversas estratégias:

FIGURA 53 – REDE 11: "ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DA UNIDADE TEMÁTICA ÁLGEBRA"



FONTE: elaborado pela autora.

Nos questionários, solicitamos aos professores que assinalassem se a unidade temática Álgebra deveria ser trabalhada isoladamente ou se as atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico deveriam ser realizadas em um trabalho articulado com as outras 4 unidades temáticas da Matemática. Dos 98 professores, 87 responderam que deve ser um trabalho integrado com as demais unidades temáticas da Matemática, 10 professores não responderam e um professor respondeu que não sabia.

Com os códigos "álgebra deve ser trabalhada junto com as outras unidades temáticas" e "integra Álgebra com as operações e com a geometria", percebemos o reconhecimento da importância, por parte dos professores, de se trabalhar conceitos integrados ao longo do currículo escolar. A BNCC indica que o trabalho com a Álgebra seja integrado às demais unidades temáticas propostas para a Matemática dos Anos Iniciais, sendo que diversos autores, como Canavarro (2007), Kieran *et al.* (2016), enfatizam que a Álgebra deva ser trabalhada junto com a Aritmética, proporcionando, assim, experiências variadas com as noções algébricas.

As declarações a seguir se referem às primeiras entrevistas e demonstram um pouco desse conhecimento pedagógico voltado às estratégias de ensino que os professores usam em suas aulas:

> ***Prof. 8****: Considero que é preciso ir muito além do livro didático ou quadro e caderno. É preciso criar ou adaptar atividades para trabalhar em duplas ou grupos e mostrar aos colegas possíveis soluções. Depois discutir no grande grupo as respostas encontradas e comparar com as dos outros grupos. Os jogos e brincadeiras são muito bons, por exemplo, momentos de quem consegue resolver determinada atividade de modo mais rápido, usando o raciocínio ou cálculo mental. Realizar recortes e montar sequências na carteira, entre outras formas lúdicas que contribuem para a aprendizagem.*
>
> ***Prof. 43:*** *Acho importante que os alunos tenham contato com o material concreto. E trabalhar sempre usando questionamentos, não dar resposta, instigando para que os alunos cheguem às respostas, às conclusões. É bem importante a troca entre os alunos, abre o horizonte deles com relação às diversas estratégias que se pode utilizar. Precisa ir construindo os conceitos com os alunos.*

As estratégias de ensino citadas pelos professores geraram os códigos "construção de conceitos pelos alunos", "trabalhar com questionamentos instigando os alunos para buscarem as soluções", "troca de estratégias de resolução" e "trabalho em duplas ou grupos". No conjunto, são metodologias muito importantes para que os alunos possam desenvolver o pensamento algébrico e essenciais para que criem suas próprias soluções, conjecturem, discutam, justifiquem e entendam as estratégias de resolução dos colegas. Blanton e Kaput, referindo-se ao trabalho com o pensamento algébrico, indicam a mesma perspectiva: "É, assim, essencial conjecturar, generalizar e justificar" (2011, p. 21, tradução nossa). Canavarro, por sua vez, destaca a importância do trabalho dos alunos com as tarefas e posterior socialização, com troca de estratégias de resolução entre eles:

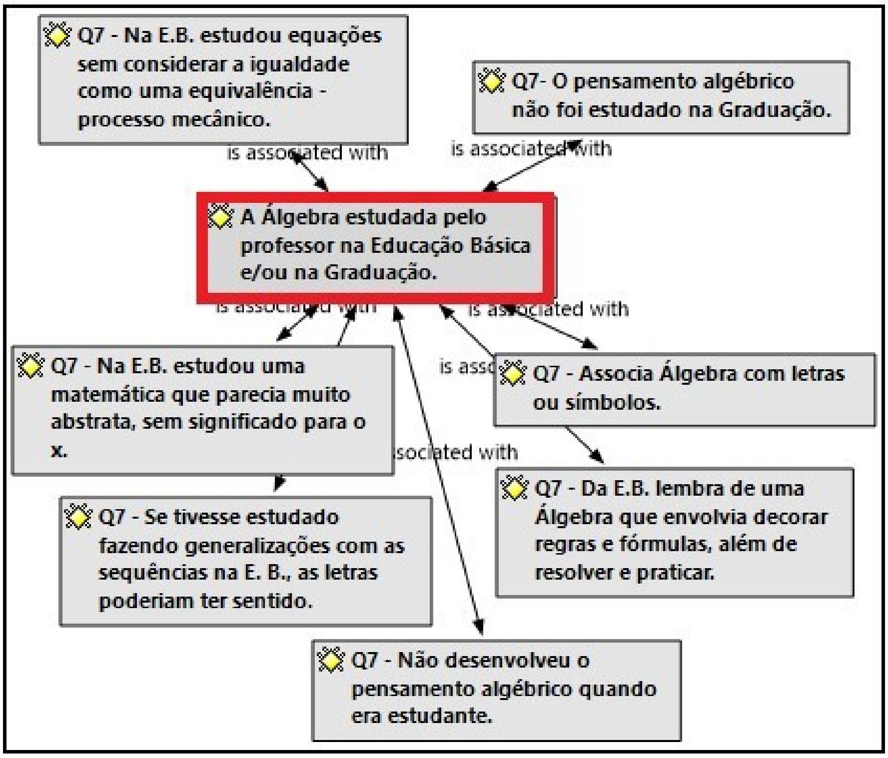
> [...] o desenvolvimento do pensamento algébrico se coaduna bem com uma organização de aula em que os alunos têm oportunidade de trabalhar autonomamente sobre a tarefa proposta e que posteriormente confrontam as suas produções, retirando daí aprendizagens coletivas e crescendo para o apurar de generalizações amplas coletivamente construídas. (CANAVARRO, 2007, p. 111).

O Prof. 8 fala em “atividades lúdicas como jogos e brincadeiras” e traz à tona um exemplo sobre recortes para montar sequências sobre a carteira. O Prof. 43 destaca o “uso do material concreto” para a construção de sequências. Conforme mencionado anteriormente, as sequências estão presentes nas habilidades e competências propostas na BNCC do 1º ao 4º ano, sendo que autores como Vale *et al*. (2011) e Van de Walle (2009) destacam a importância do uso do material concreto para construir sequências, além de darem orientação aos professores. Van de Walle ressalta a importância de usar materiais concretos no trabalho com sequências “para continuar padrões feitos com materiais simples: botões, blocos coloridos, cubos encaixantes, palitos, itens de formas geométricas que você consiga reunir facilmente” (2009, p. 296). E destaca também que “a tarefa dos estudantes é usar materiais reais, copiar o padrão mostrado, e continuá-lo até onde eles desejarem” (p. 296). Vale *et al.* (2011) reiteram que as crianças devem trabalhar em pares e usar um conjunto de vários blocos lógicos, ou até um material não estruturado, para poder realizar a construção dos primeiros termos da sequência e até de termos um pouco mais distantes.

Os professores entrevistados apontam vários elementos metodológicos importantes para a construção do pensamento algébrico. Pode-se dizer que o ambiente da sala de aula, onde o aluno constrói conceitos, busca suas próprias soluções, trabalha em grupo, usa material concreto para facilitar a aprendizagem e compartilha suas estratégias de resolução, é propício para a aprendizagem de Álgebra nos Anos Iniciais. Porém, essas metodologias também são utilizadas para o ensino e aprendizagem de conteúdo dos demais campos de conhecimento. No capítulo seguinte, essas estratégias serão postas à tona durante as entrevistas reflexivas/formativas, assim como metodologias mais específicas que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A subcategoria “A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação” (rede 12) se relaciona a códigos que indicam uma associação da Álgebra com letras ou símbolos (Figura 54).

FIGURA 54 – REDE 12: “A ÁLGEBRA ESTUDADA PELO PROFESSOR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E/OU NA GRADUAÇÃO”



FONTE: elaborado pela autora.

Os códigos relacionados a essa subcategoria foram criados a partir da fala dos professores na fase de entrevistas reflexivas/formativas. Os relatos acerca da Álgebra estudada na Educação Básica remetem a uma Álgebra muito abstrata, sem significado para as letras, pois envolvia apenas a decoração de regras e fórmulas, além da prática de exercícios. Os professores relataram que estudaram as equações usando um processo mecânico, sem considerar a igualdade como uma equivalência. O Prof. 31 relatou que mais tarde entendeu a equivalência entre os dois membros de uma equação, mas que também iniciou o estudo sem essa compreensão. Quanto ao pensamento algébrico, os professores entrevistados consideram que não o desenvolveram durante os estudos na Educação Básica, sendo que na Graduação o tema não foi abordado.

Vale ressaltar que, diante do exposto, se estabelece um grande desafio para implementar a unidade temática Álgebra. Estudada pelos professores na Educação Básica, ela não é a mesma que precisam ensinar, pois precisam mediar, no fundo, atividades que possam contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e a grande maioria desses profissionais não teve nenhuma formação específica voltada ao tema.

Neste capítulo, em 6.1.3, apresentamos uma visão geral sobre as percepções obtidas acerca do conhecimento dos professores sobre a Álgebra e seu ensino durante a codificação das entrevistas e a criação das subcategorias. O detalhamento das entrevistas reflexivas/formativas será feito no próximo capítulo, quando os conhecimentos não serão separados por categorias. As entrevistas abordam, principalmente, as sequências e o sentido de equivalência do sinal de igualdade e os conhecimentos envolvendo o conteúdo específico, sua relação com o currículo, e as estratégias de ensino constam nos diálogos sobre os temas.

7 CONHECIMENTOS SOBRE ÁLGEBRA E SEU ENSINO MOBILIZADOS DURANTE A ENTREVISTA REFLEXIVA/FORMATIVA

Neste capítulo, apresentamos os temas abordados na entrevista reflexiva/formativa, cujo objetivo é aprofundar os dados da Categoria Central da pesquisa, isto é, os "conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino". A entrevista se centrou nas subcategorias já encontradas nos questionários e nas duas primeiras entrevistas, a saber: "Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes" e "Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra". Após a transcrição das entrevistas reflexivas/formativas, encontramos mais uma subcategoria: "A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação".

Nas entrevistas priorizamos aspectos que constam na BNCC para serem desenvolvidos junto aos alunos dos Anos Iniciais, dentro da unidade temática Álgebra, sendo que os temas foram abordados com as três duplas de professores, quando ocorreram pequenas variações nas entrevistas, as quais foram direcionadas também pela fala dos professores, o que permitiu níveis de aprofundamento diferentes em relação aos temas abordados. A transcrição das três entrevistas gerou 42 páginas, então, devido ao grande volume de dados, neste capítulo seguem recortes para ilustrá-los. Em alguns casos, para destacar situações distintas, trazemos à tona a fala de duas duplas, ou até das três, sobre o mesmo tema.

7.1 GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES EM SEQUÊNCIAS

Na primeira parte da entrevista reflexiva/formativa abordamos diversos aspectos envolvidos em processos de generalização. O conhecimento sobre esse tema é fundamental, pois o trabalho com a generalização de padrões em sequências deve ser adaptado de acordo com o ano escolar e com o grau de dificuldade de cada sequência. Logo, é preciso que o professor analise se é possível propor uma generalização próxima e/ou aritmética, ou então, avançar para uma generalização distante e/ou algébrica, diante da sequência desenvolvida com os alunos. Sobre isso, Vale *et al.* ressaltam que "caberá ao professor utilizar a linguagem e os conceitos mais adequados aos fins em vista e ao nível de escolaridade" (2011, p. 29).

7.1.1 Relação entre as sequências e a generalização

Durante a conversa com os professores, abordamos três questões que exploram a generalização de padrões em sequências. Para tanto, solicitamos que olhassem as atividades das Fichas 1, 2 e 3, extraídas dos livros do 2º, 3º e 5º anos, em uso na RMEF, e que falassem sobre suas atividades, objetivos e relação com a Álgebra ou o pensamento algébrico.

Na primeira atividade sobre sequências (Figura 55), apresentada aos professores e voltada ao 3º ano escolar, o intuito é perceber regularidades em relação aos números pares e ímpares presentes na sequência, e depois, generalizar que todos os números coloridos são pares e todos os brancos são ímpares, e com essa generalização, descobrir se um termo distante, como o 138, é par ou ímpar.

FIGURA 55 – FICHA COM QUESTÃO SOBRE SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Ficha 1: (Ápis, 3º ano, p. 23)

SEQUÊNCIA DOS NÚMEROS NATURAIS, NÚMERO PAR E NÚMERO ÍMPAR

a) Observe a sequência dos números naturais e pinte somente os quadrinhos com números pares, a partir do 0 (zero).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...

b) Qual é o algarismo das unidades nos números pares?

c) Qual é o algarismo das unidades nos números ímpares?

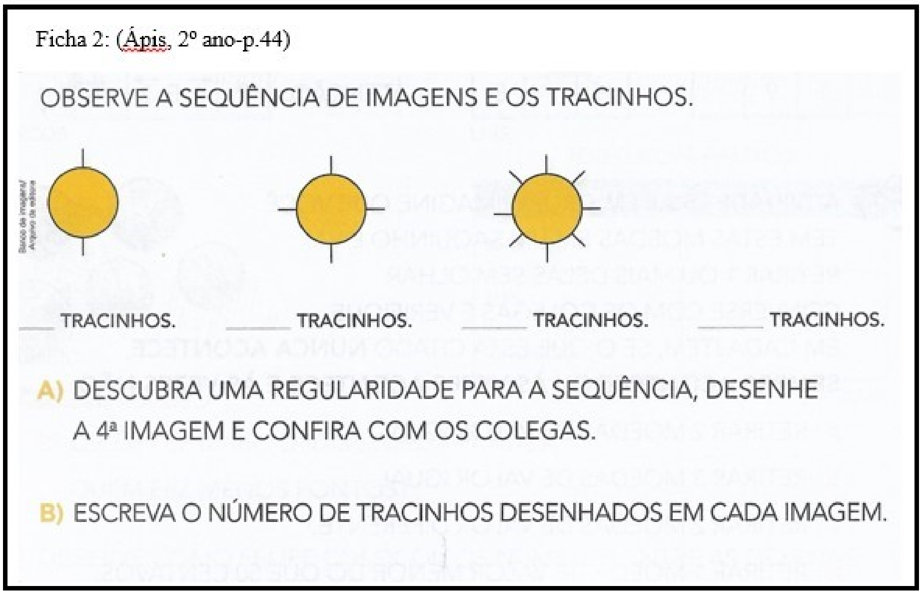
d) O número 138 é par ou ímpar?

e) Qual é o número ímpar que fica entre 375 e 379?

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 23).

Na segunda atividade sobre sequências (Figura 56), apresentada aos professores e voltada ao 2º ano escolar, o objetivo é descobrir a regularidade ou o padrão para determinar o próximo termo da sequência (generalização próxima).

FIGURA 56 – FICHA COM QUESTÃO SOBRE SEQUÊNCIA PICTÓRICA



Ficha 2: (Ápis, 2º ano-p.44)

OBSERVE A SEQUÊNCIA DE IMAGENS E OS TRACINHOS.

___ TRACINHOS. ______ TRACINHOS. ______ TRACINHOS. ______ TRACINHOS.

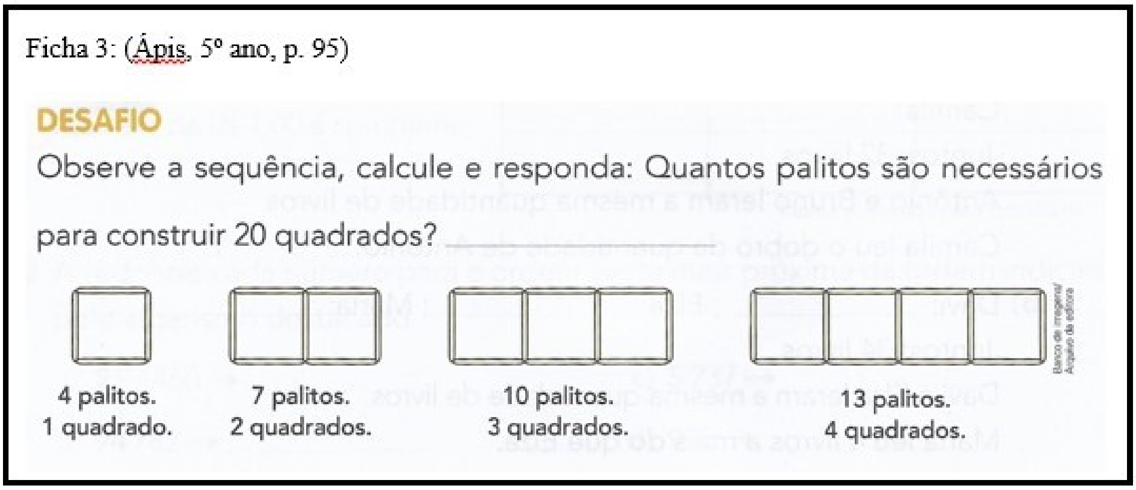
A) DESCUBRA UMA REGULARIDADE PARA A SEQUÊNCIA, DESENHE A 4ª IMAGEM E CONFIRA COM OS COLEGAS.

B) ESCREVA O NÚMERO DE TRACINHOS DESENHADOS EM CADA IMAGEM.

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 2º ano (DANTE, 2017b, p. 44).

Em relação à terceira atividade (Figura 57), voltada ao 5º ano, é necessário descobrir o padrão da sequência e encontrar o número de palitos da vigésima figura, usando, para isso, a relação recursiva ou uma regra geral que permita calcular o número de palitos para qualquer figura da sequência (lei de formação). No 5º ano é importante que o segundo processo também seja estimulado e que os alunos cheguem a uma generalização distante e/ou algébrica.

FIGURA 57 – FICHA COM QUESTÃO SOBRE SEQUÊNCIA PICTÓRICA



Ficha 3: (Ápis, 5º ano, p. 95)

DESAFIO

Observe a sequência, calcule e responda: Quantos palitos são necessários para construir 20 quadrados? ______

4 palitos. 1 quadrado. 7 palitos. 2 quadrados. 10 palitos. 3 quadrados. 13 palitos. 4 quadrados.

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 5º ano (DANTE, 2017e, p. 95).

Na entrevista reflexiva/formativa, em relação à Ficha 1, o Prof. 38 e o Prof. 27 percebem como objetivo ensinar os números pares e ímpares, conforme se observa no trecho selecionado a seguir:

Prof. 38*: Sobre essa Ficha 1, eu mais ou menos fiz uma atividade assim: eu fiz uma sequência de amarelo e verde, associando os números de 0 a 9. Com essas cores eu trabalhei os pares e ímpares; os amarelos eram os pares e os verdes eram os ímpares. Eu queria que, com essa sequência, eles compreendessem quais números seriam pares ou ímpares, mesmo que fossem números bem maiores. Para começar, eu usei as próprias crianças e fui formando pares, por exemplo, com seis crianças, formei três pares, então, seis é par. Já com 7 crianças, uma ficou sem par, porque sete é ímpar.*

Pesquisadora: *É bem interessante. Continue contando.*

Prof. 38: *Antes eles ficavam contando em sequência, iniciando pelo 1: ímpar, par, ímpar, par, ímpar, par... Só que eles se perdiam muito, e com essa atividade facilitou.*

Pesquisadora: *Você tem noção de como se denomina essa questão de compreender um padrão em uma sequência e depois, a partir disso, descobrir outros termos dessa sequência, mesmo termos bem distantes? No caso dessa questão da Ficha 1, os alunos teriam que saber se o termo 138 é par ou ímpar, ou ainda, colorido ou branco.*

Prof. 38: *Eu não tenho ideia. Eu tinha a intenção apenas de ensinar um esquema que fosse mais simples, mais rápido, melhor para os alunos aprenderem os pares e ímpares.*

Pesquisadora: *Além de ensinar os pares e ímpares, você trabalhou com generalização. Vocês já ouviram ou leram sobre a importância de generalizar para desenvolver o pensamento algébrico? Que as sequências podem ser trabalhadas, visando desenvolver a generalização?*

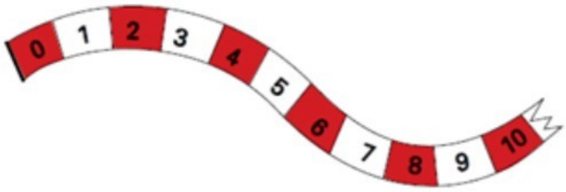
Prof. 38: *Não tenho essa ideia.*

Prof. 27*: Eu também não.*

Pesquisadora: *Então, com a atividade da Ficha 1 é possível trabalhar a generalização. Através do entendimento do padrão da Ficha 1, no qual todos os pares são coloridos e todos os ímpares são brancos, os alunos podem generalizar e responder que 138 é par porque, dentro da sequência, ele é colorido. E, com essa generalização, podem descobrir se outros termos são pares ou ímpares. A percepção da regularidade de que os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 são pares, e de que os números terminados em 1, 3, 5, 7 e 9 são ímpares, permite que os alunos possam dizer se 2035 é par ou ímpar, por exemplo.*

Pesquisadora: *Eu vou aproveitar para mostrar um exemplo parecido de trabalho com padrões numéricos relatado num e-book, que foi lançado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 2018. O e-book traz tarefas preparadas, aplicadas e analisadas por um Grupo Colaborativo em Matemática, chamado GRUCOMAT. Essa tarefa foi aplicada com alunos do 3º ano. A professora trabalhou com essa tira de* *números brancos e vermelhos (Figura 58) e foi questionando o que os brancos têm em comum, e da mesma forma, o que os vermelhos têm em comum. E depois solicitou que os alunos pensassem em um número bem grande e dissessem a cor dele. Além disso, foi fazendo questionamentos para que generalizassem que todos os números vermelhos são pares e todos os números brancos são ímpares.*

FIGURA 58 – PADRÃO NUMÉRICO APLICADO COM O 3º ANO



FONTE: Santos, Luvison e Moreira (2018, p. 119).

Como a generalização a partir das sequências não foi relatada por nenhum professor durante as primeiras entrevistas, como um dos objetivos do trabalho com o pensamento algébrico, foram levados alguns materiais para o encontro que pudessem contribuir para fazer essa relação, para além da semiestrutura organizada para a entrevista. Tornou-se oportuno usar o exemplo relatado no *e-book* publicado pela SBEM semelhante ao da Ficha 1 e ao relato do Prof. 38, o qual pode contribuir com processos de generalização.

Em relação à Ficha 1, o Prof. 31 e o Prof. 44 comentaram:

Prof. 31: *Deixa eu ver aqui, é a questão dos pares e ímpares* (se referindo à Ficha 1, com a atividade do 3º ano).

Prof. 44: *Na ficha do 3º ano eu vejo como objetivo trabalhar nessa sequência os pares e ímpares, mas não vejo relação com a Álgebra, para mim ainda é algo distante. Até o termo Álgebra, quando você foi aplicar o questionário* (se referindo ao dia em que a pesquisadora aplicou o questionário inicial), *fiquei pensando o que seria, só me lembrei das letras. Talvez a questão da regularidade, mas eu não sei identificar uma relação direta das atividades com a Álgebra.*

Prof.31: *Pra mim não é uma coisa muito fácil relacionar essas atividades com a Álgebra, viu. Eu faço uma relação maior daquelas atividades de calcular o número desconhecido, que têm nos livros, porque é como calcular uma incógnita.*

Pesquisadora: *Pelo que eu estou entendendo, quando vocês ouvem a palavra Álgebra, pensam nos conteúdos que estudaram enquanto alunos, e isso envolvia letras.*

Prof. 31: *Com letras ou com símbolos.*

Prof. 44: *Mas eu tenho dúvida. O que é Álgebra? O que é pensamento algébrico?*

No relato do Prof. 31 e do Prof. 44, percebemos que o objetivo da Ficha 1 é trabalhar os pares e ímpares, ao mesmo tempo que demonstram não conseguir estabelecer a relação das sequências com a Álgebra que conheceram quando eram estudantes da Educação Básica. O Prof. 31 relaciona atividades que envolvem calcular o número desconhecido, pois isso remete ao cálculo de incógnitas, presente na Álgebra que estudara. A última frase do trecho selecionado mostra que há dúvidas em relação ao significado de Álgebra e de pensamento algébrico.

O Prof. 26 e o Prof. 94, após expressarem sua compreensão sobre as atividades das Fichas 1 e 2, relataram:

Pesquisadora: *Mas qual é a relação dessas atividades que envolvem sequências de números, de figuras, com a Álgebra, com o pensamento algébrico?*

Prof. 26: *São sequências lógicas. Eu não vejo uma relação maior dessas sequências com a Álgebra que eu conheço.*

Prof. 94*: É, eu acho que é para trabalhar o raciocínio lógico.*

Pesquisadora: *Sim, ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, mas a contribuição das sequências para desenvolver o pensamento algébrico está mais relacionada com a generalização.* [A pesquisadora explica a generalização].

O objetivo relatado para o trabalho com as sequências foi o desenvolvimento do raciocínio lógico, que também é um objetivo. Porém, a generalização produzida pelos alunos a partir das sequências é que contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os professores não veem a relação entre o trabalho com as sequências e o desenvolvimento do pensamento algébrico porque não estudaram essa abordagem em sua formação.

7.1.2 As diferentes regularidades presentes em uma sequência

A partir do questionamento sobre as regularidades presentes na sequência da Ficha 2, surgiram os seguintes comentários:

Pesquisadora: *E essa atividade do 2º ano, com uma sequência de figuras* [pictóricas], *qual regularidade vocês observam para dizer como será a próxima figura?*

Prof. 31: *O número de tracinhos vai dobrando de uma figura para a seguinte.*

Pesquisadora: *Vocês veem mais alguma regularidade, que talvez os alunos de vocês também possam ver?*

Prof. 44: *Sobre a posição dos tracinhos. Sempre precisa desenhar mais um entre dois que já estão na figura.*

Pesquisadora*: Isso! De uma figura para a seguinte precisa desenhar um tracinho entre dois consecutivos.*

Prof. 44: *Eu acho que a maioria dos alunos iria perceber dessa forma primeiro.*

Pesquisadora: *É, eles nem sempre percebem as mesmas regularidades no padrão de uma sequência. Nós professores precisamos conhecer e valorizar as diferentes percepções de regularidades nas sequências e incentivar para que os alunos socializem com a turma. Isso também contribui com processos de generalização. E, nesse caso, o objetivo é que os alunos descubram o padrão da sequência e continuem representando o próximo termo. Essa sequência tem 2, 4, 8, 16, 32, 64... tracinhos. Para as crianças do 2º ano, o livro solicita que representem apenas até a quarta figura. Mas, dependendo da turma, pode ser interessante instigá-los a descobrir mais um ou alguns termos da sequência.*

Como se pode observar, a percepção de diferentes regularidades para descobrir o padrão de uma sequência é relatada pelos professores, sendo que o Prof. 31 acredita que os alunos percebem primeiro as regularidades da sequência pictórica e não da sequência numérica relacionada, que envolve ir dobrando o número de risquinhos. Nesse momento da entrevista, a ênfase se deu nas diferentes percepções acerca das regularidades em uma sequência e os professores precisam conhecer, valorizar e promover a troca entre os alunos sobre esse tema.

O Prof. 26 e o Prof. 94 também perceberam a regularidade do dobro mais rapidamente, embora acreditem que os alunos logo iriam perceber que seria preciso desenhar um novo tracinho entre dois consecutivos para determinar o próximo termo da sequência. A fala do Prof. 26 também retrata essa situação:

Pesquisadora: *Será que tem outra maneira de perceber uma regularidade na sequência, sem ser diretamente pelo dobro?*

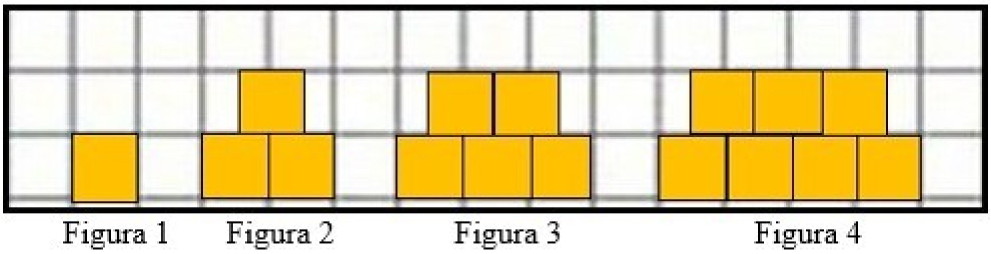
Prof. 26: *Ah, pelo desenho sempre precisa desenhar 1 tracinho no meio de dois tracinhos que já têm. E eu acredito que os alunos iriam perceber dessa forma. É que nós já fomos com um olhar matemático e logo vimos o dobro.*

7.1.3 Estudando generalizações de alunos e as estratégias envolvidas

A entrevista se deteve, inicialmente, nas Fichas 1 e 2, nas quais a questão da generalização não foi citada pelos professores como sendo um dos objetivos do trabalho com as sequências. A Ficha 3 foi apresentada aos professores ao lado da Ficha 2, embora não tenha surgido nenhum comentário relacionando essa sequência com a generalização ou o pensamento algébrico. Para facilitar a compreensão, apresentamos o resumo de um texto que aborda estratégias de generalização por parte de alunos, intitulado “Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º ano”. Esse texto foi entregue aos professores, comentado e discutido com as três duplas entrevistadas. A seguir, é possível visualizar um trecho da entrevista com o Prof. 31 e o Prof. 44, conforme a transcrição:

Pesquisadora: *Os alunos começaram observando a sequência de blocos.*

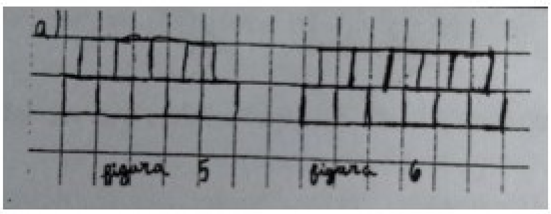
FIGURA 59 – SEQUÊNCIA RECURSIVA COM BLOCOS QUADRADOS



FONTE: Adaptado de Silvestre *et al.* (2010, p. 96).

Pesquisadora: *Os alunos trabalharam em duplas. Representaram as figuras 1, 2, 3 e 4 com blocos (material concreto). Em seguida, representaram as figuras 5 e 6, e para fazer isso, eles já precisam ter o entendimento do padrão dessa sequência. Também fizeram a representação no papel quadriculado. Depois preencheram a tabela, relacionando o número da figura com o número de peças, que ajuda os alunos na produção de generalizações.*

FIGURA 60 – REPRESENTAÇÃO DOS PRÓXIMOS TERMOS NO PAPEL QUADRICULADO E TABELA RELACIONANDO O NÚMERO DA FIGURA E O NÚMERO DE PEÇAS



Número da figura	Número de peças
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11

Fonte: Silvestre *et al.* (2010, p. 96 e 101).

Prof. 31: *Então, a primeira tarefa foi representar as figuras 5 e 6 usando o padrão da sequência.*

Pesquisadora: *Isso. Nesse caso, os alunos fizeram uma generalização para encontrar termos próximos para essa sequência. De quanto aumenta o número de blocos de uma figura para a próxima?*

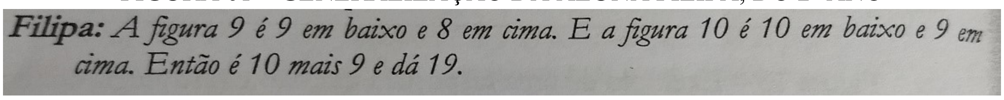
Prof. 44: *Aumentam 2 blocos, um em cima e um embaixo.*

Pesquisadora: *Essa é a relação recursiva (+2). Todas as sequências recursivas, possuem uma relação recursiva, pode ser +3, -4, e às vezes até (+1, +2, +3, +4, +5...), por exemplo. A relação recursiva determina como uma sequência é modificada de um termo até o termo seguinte. Nessa figura é +2 porque sempre aumentam 2 blocos. Qual é a relação recursiva na sequência da Ficha 2, dos tracinhos?*

Prof. 44: *É vezes 2.*

Pesquisadora: *Isso. Vamos dar uma olhada aqui no texto, nas generalizações feitas pelos alunos Filipa e Bruno, do 2º ano. A generalização do aluno Pedro do 3º ano nós vamos discutir depois. E o 5º ano usou estratégias semelhantes, por isso, não iremos discuti-las. No caso da Filipa, ela fez uma generalização, que serve para achar qualquer termo da sequência.*

FIGURA 61 – GENERALIZAÇÃO DA ALUNA FILIPA, DO 2º ANO



Filipa: *A figura 9 é 9 em baixo e 8 em cima. E a figura 10 é 10 em baixo e 9 em cima. Então é 10 mais 9 e dá 19.*

FONTE: Silvestre *et al.* (2010, p. 100).

Pesquisadora: *Então, usando essa generalização, a figura 100 teria quantos blocos?*

Prof. 44: *Teria 100 embaixo e 99 em cima. No total, 199.*

Pesquisadora: *Vocês conhecem muitos alunos, já deram aula para várias turmas, acham que alunos do 2º ano conseguem fazer uma generalização como essa que Filipa fez?*

Prof. 44: *Eu acho que os alunos poderiam fazer esse tipo de generalização, mas envolve todo um processo de montar as sequências com material concreto, incluindo os próximos termos da sequência, preencher a tabela. E o professor instigando, estimulando e direcionando, questionando. Nesse caso, eu acho que sim.*

Pesquisadora: *E o Bruno, que também é do 2º ano, foi pensando de forma semelhante à Filipa, mas depois ele disse que descobriu um segredo. Para a figura 12 da sequência, que tem 12 embaixo e 11 em cima, ele chegou à conclusão que poderia fazer o dobro de 12 menos 1, já que em cima sempre tem 1 a menos. Então, a regra ou lei de formação da sequência (como chamamos na Matemática) é o dobro menos 1. Com essa lei de formação, ele consegue determinar o número de blocos de qualquer figura.*

FIGURA 62 – GENERALIZAÇÃO DO ALUNO BRUNO, DO 2º ANO

Bruno: *Oh professora eu já sei uma maneira muito diferente. Em vez de ser 10 por cima de 11 e 11 por cima de 12 eu fiz de uma maneira muito diferente e pensei. Pensei que ...*

Professora: *Então vai lá... Vai lá ao quadro. (Dirige-se para a turma.) Ele está aqui a ter umas ideias novas.*

Bruno: *Eu pensei que 12+12 era 24. E pensei que se isto não pode dar 24 porque o número 24 é par. Ou é 23. É 23 porque eu pensei logo... Já sei qual é que é. É o número... Já sei o segredo disto.*

Professora: *Então qual é que é o segredo? (A professora solicita agora a atenção da turma.) Ele diz que descobriu o segredo. Vamos lá ver o que é.*

Bruno: *Eu já descobri o segredo! (Saltitando de entusiasmo.) É o dobro de 12 é 24 mas com menos 1 é 23. Já descobri o segredo. É o dobro menos 1.*

FONTE: Silvestre *et al.* (2010, p. 100).

Prof. 31: *É bem interessante esse pensamento do Bruno.*

Pesquisadora: *Essa generalização foi feita por Bruno na linguagem natural, e esse é o objetivo nos Anos Iniciais. A BNCC não propõe o uso de letras nesse nível de escolaridade. Vocês estudaram Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Como essa generalização poderia ser escrita nos Anos Finais, por exemplo?*

Prof. 31: *Eu faria assim 2.Δ- 1. Eu gosto muito de usar o delta.*

Pesquisadora: *Isso. Pode ser. Pode ser usada qualquer letra. O número de blocos = 2.n – 1 seria outra possibilidade. Usei n pensando em número da figura.*

O resumo do texto lido e comentado com os professores focou em generalizações realizadas por alunos de 2º e 3º ano. A generalização do 5º ano não foi incluída no diálogo, pois era semelhante. A generalização de uma sequência recursiva, como a do texto, envolve vários conhecimentos sobre as estratégias que auxiliam nesse processo, sobre relação recursiva e lei de formação de uma sequência, dentre outros. Chama a atenção a fala do Prof. 44 citando estratégias utilizadas no texto lido, as quais ele acredita que ajudariam os alunos na realização de generalizações, como a montagem das sequências com material concreto, o preenchimento de tabela relacionando o número de ordem da figura e o número de peças, além das mediações do professor que vai estimulando e questionando os alunos.

7.1.4 A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação

Os relatos a seguir são uma continuidade da conversa envolvendo o texto sobre "Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º ano". Após visualizarem estratégias de generalização de alunos do texto, as falas remetem às recordações da Álgebra que os professores haviam estudado na escola:

Pesquisadora: *Vocês acham que o trabalho com generalizações nos Anos Iniciais pode ajudar os alunos a entender melhor a Álgebra que é ensinada nos Anos Finais?*

Prof. 44: *Sim, desde que o professor dos Anos Finais também trabalhe dessa forma ou fazendo a continuação desse trabalho. Eu não lembro de ter escrito uma generalização a partir de uma sequência, de ter sido estimulado pra fazer isso. Íamos direto para aquele monte de letras, com pouco sentido.*

Pesquisadora: *Então, esse pensamento algébrico precisa ser construído com os alunos nos Anos Iniciais e o trabalho precisa continuar da mesma forma nos Anos Finais, com a produção de generalizações apropriadas à idade deles.*

Prof. 31: *Para que tudo isso aconteça, precisa ter formação, que aqui não teve ainda. Não basta colocar na BNCC e na Proposta da rede e deixar o professor se virar. Os professores também não estudaram como ensinar isso durante a graduação. Dos tempos da escola, nós só lembramos das contas com x e das fórmulas. Mas isso não é suficiente para ensinar pensamento algébrico nos Anos Iniciais.*

Prof. 44: *Precisamos mesmo de uma formação sobre esse tema, porque na graduação tivemos as disciplinas de didática, mas não deu para aprofundar muito. E de Álgebra não vimos nada, porque isso não era conteúdo a ser trabalhado com os alunos dos Anos Iniciais.*

Prof. 31: *E nós professores dos Anos Iniciais ficamos um pouco perdidos, um formador diz que algo é importante, mas, às vezes, tem professores de matemática dos Anos Finais que dizem que é suficiente trabalhar bem as operações básicas. São cabeças diferentes e nós temos que administrar isso.*

Pesquisadora: *Eu acredito que os alunos devem desenvolver conhecimentos em cada uma das cinco unidades temáticas. Claro que o foco maior ainda está nos números e operações, mas não são os únicos conteúdos importantes.*

A fala do Prof. 31, no trecho anterior, é bem significativa, retratando o contexto que envolve o ensino dessa unidade temática: a Álgebra está na BNCC e na Proposta da RMEF, sendo que os professores, em sua maioria, não estudaram esse conteúdo na graduação ou em outras formações. Além disso, a Álgebra aprendida na Educação Básica não é suficiente para ensinar o pensamento algébrico nos Anos Iniciais.

Na discussão sobre as generalizações dos alunos a partir da sequência de blocos (Figura 59), o Prof. 27 relatou situações semelhantes às comentadas por Prof. 31 e Prof. 44: ter aprendido uma Álgebra muito abstrata, sem significado para as letras. E na sequência da discussão também comentou não ter estudado sobre o pensamento algébrico durante a graduação, conforme os recortes a seguir:

Prof. 27: *E pensando na minha formação enquanto aluno, a Matemática que eu via nos Anos Finais e no Médio parecia muito abstrata, não tinha um significado para o x, pelo menos, eu não entendia. Eu lembro de uma álgebra que envolvia decorar a fórmula e aplicar.*

[...]

Prof. 27: *Esse pensamento algébrico não foi trabalhado comigo enquanto estudante e nem na pedagogia. Porque eu tive Metodologia do Ensino da Matemática e não se falou nesse assunto.*

7.1.5 Estratégias que contribuem com a generalização de padrões em sequências

Diversas estratégias foram utilizadas pelos professores no texto lido e que contribuem para produzir generalizações a partir de sequências. As estratégias foram retomadas com questionamentos, pensando em sistematizar essa ideia:

Pesquisadora: *Pensando em como foi feito esse trabalho no resumo do texto lido, e pela experiência de vocês, quais estratégias seriam importantes para que ocorra esse desenvolvimento do pensamento algébrico, a partir do trabalho com as sequências? Em termos metodológicos...*

Prof. 27: *Montar as sequências com material concreto, como no exemplo que vimos, os alunos usaram os blocos e o papel quadriculado. Eu não tenho usado papel quadriculado nas minhas aulas.*

Pesquisadora: *Mas dá para trabalhar vários conteúdos com papel quadriculado.*

Prof. 27: *Sim, mas é um material que eu ainda não usei com nenhum aluno. Mas acho que pode ser interessante para representar essa sequência.*

Pesquisadora: *Eu também acho que ajuda a compreender o padrão da sequência. E apareceram mais umas três estratégias bem importantes e que ajudam nesse processo. Relembrando, o que seria?*

Prof. 27: *A construção da tabela para registrar o número de blocos de cada figura.*

Pesquisadora: *Isso! E o que mais? Pensando na organização da turma, o que seria melhor, trabalho individual, em duplas, em grupos?*

Prof. 38: *Eu imagino minha turma trabalhando em duplas.*

Prof. 27: *Minha turma teria que trabalhar individualmente, porque é uma turma bem agitada, bem dispersa, principalmente meu 5º ano.*

Pesquisadora: *Os pesquisadores que já desenvolveram trabalhos visando desenvolver o pensamento algébrico enfatizam a importância dos alunos discutirem as sequências em grupos ou duplas, para descobrir o padrão e criar generalizações, e quem sabe até criar uma lei de formação para a sequência. Em grupos, facilita para que criem hipóteses, assim, desenvolvem esse pensamento algébrico. E qual o papel do professor nesse processo?*

Prof. 38: *O professor precisa fazer questionamentos.*

Pesquisadora: *Sim, o professor tem um papel fundamental nesse momento, precisa orientar para que construam a sequência com o material concreto, para que continuem a sequência, para que registrem na tabela e questioná-los para que produzam generalizações. É importante que o professor entenda como os alunos compreenderam o padrão e provocá-los para que tentem descobrir o segredo da sequência e depois comunicar isso para os colegas. Então, o professor precisa organizar essa socialização, para que percebam como os colegas pensaram sobre a sequência. Como no exemplo de texto, onde, no 2º ano, a Filipa criou um tipo de generalização e o Bruno criou outra, e ambos puderam comunicar isso para os colegas.*

Prof. 27: *Na minha turma é difícil fazer trabalho em grupo ou dupla, porque os alunos conversam sobre tudo, menos sobre a atividade. A ideia é ótima, se funcionasse na prática. Quando peço para trabalharem em dupla, eu percebo que eles não trabalham juntos, eles combinam que um aluno faz a atividade até determinado ponto e outro aluno faz o restante. Eles não discutem, não fazem junto.*

Pesquisadora: *Provavelmente, ao longo da escolaridade, eles não criaram esse hábito de trabalhar em conjunto, de discutir... mas nós professores não podemos desistir de tentar, porque há vários ganhos para a aprendizagem com esse tipo de trabalho.*

Prof. 27: *Exatamente. E para compartilhar estratégias de resolução também é difícil, os alunos não têm atenção. Eu entendi que fazer discussões em grupo e compartilhar com os colegas seria muito bom, mas é difícil, falam todos ao mesmo tempo e, às vezes, quando estão em dupla, trabalham individualmente.*

Prof. 38: *Eu estava ouvindo e pensando sobre minhas turmas. Uma das minhas turmas tem um ótimo rendimento e trabalha bem em duplas. E quem vai terminando ajuda outras duplas. A outra turma também tem dificuldade para trabalhar em grupos. E é difícil porque as salas tem uma quantidade muito grande de alunos.*
Prof. 27: *É importante colocar essas coisas, queremos trabalhar certos conceitos, mas, às vezes, o ambiente é pouco favorável.*

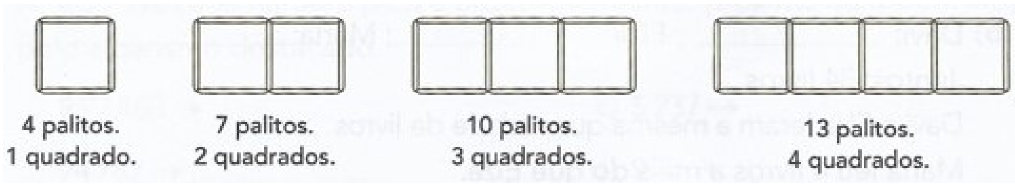
No trecho anterior, o objetivo foi retomar as estratégias que contribuem para que os alunos consigam fazer generalizações a partir de sequências como: montar e continuar a sequência com material concreto; trabalhar em duplas e grupos para favorecer a troca de ideias e conjecturas; registrar na tabela relacionando o número de ordem da figura com o número de blocos; ouvir os questionamentos e incentivos do professor para que não usem apenas a relação recursiva; buscar encontrar uma lei de formação da sequência e socializar estratégias com a turma.

Nessa retomada de estratégias utilizadas no texto, o Prof. 27 relata dificuldades para o trabalho em grupo e a socialização da aprendizagem, porque afirma que há muita dispersão e conversação entre os alunos acerca de outros temas. O Prof. 38 comenta que, em uma de suas turmas, os alunos trabalham bem em duplas, enquanto que na outra esse trabalho já é mais difícil, e que isso pode ser devido ao grande número de alunos por sala. Diante do exposto, a importância do trabalho em duplas ou grupos foi destacada, mas ficou evidente que o Prof. 27 estava preocupado com a indisciplina de sua turma.

7.1.6 Os professores vivenciando uma generalização distante e/ou algébrica a partir de uma sequência

O trecho da entrevista a seguir é um exemplo de como os professores foram construindo a generalização proposta na Ficha 3 (Figura 59), apresentada a eles no início da entrevista e retomada após a discussão do texto com as generalizações dos alunos. Segue a transcrição sobre a generalização feita pelos Prof. 94 e Prof. 26 para essa sequência:

Pesquisadora: *Como nós lemos o texto e vimos generalizações que as crianças fizeram, vou propor que vocês façam a generalização do padrão da sequência com palitos, que é proposta no livro do 5º ano, adotado pela RMEF (Ficha 3).*



Comecem construindo a sequência com os palitos para entender o padrão e podem representar as duas próximas figuras. Vou dar uma tabela para vocês realizarem os registros. E palitos para montar a sequência.

[Tempo para montar a sequência]

Prof. 94: *Nessa sequência sempre aumentam 3 palitos.*

Pesquisadora: *Então, a relação recursiva dessa sequência é +3. Como podemos fazer para saber o número de palitos de 20 quadrados?*

Prof. 94: *Até a figura 4 já temos 13 palitos* [referindo-se à tabela que estava preenchendo], *então, faltam 16 quadrados, e como aumentam 3 palitos para cada quadrado, teria que multiplicar 16 por 3.*

TABELA 2 – PROF. 94 RELACIONANDO O NÚMERO DE QUADRADOS E O NÚMERO DE PALITOS

Número de quadrados	*Número de palitos*
1	*4*
2	*7*
3	*10*
4	*13*

FONTE: Arquivo da autora.

Pesquisadora: *Usando tudo o que vocês já perceberam sobre essa sequência, tentem construir uma regra que permita calcular o número de palitos para qualquer número de quadrados.*

Prof. 26: *Eu fiz 3x + 1.*

Pesquisadora: *Os alunos dos Anos Finais poderiam escrever a lei de formação da sequência dessa forma. Como um aluno dos Anos Iniciais poderia escrever essa generalização, com palavras?*

Prof. 94: *Pra descobrir os palitos de 20 quadrados?*

Pesquisadora: *Sim, mas não só pra isso. A regra seria para calcular o número de palitos de qualquer número de quadrados.*

Prof. 26: *Foi uma sequência toda de 3, só que o primeiro tem 1 a mais. Então, a minha regra seria "3 vezes o número de quadrados mais 1".*

Prof. 94: *Eu criei uma regra assim: só o primeiro quadrado tem 4 palitos, todos os demais têm 3. Então, para calcular os palitos de 20 quadrados, eu preciso fazer (20 – 1).3 + 4 = 19.3 + 4 = 61.*

Pesquisadora: *A tua generalização também está correta, mas a da tua colega parece mais simples, pelo menos pra mim. Usando letras a tua seria...*

Prof. 94: *(x – 1).3 + 4* [A pesquisadora ajudou na montagem da expressão algébrica]

Pesquisadora: *Vocês acham que os alunos chegam sozinhos nisso ou é necessário que vocês façam algum tipo de mediação?*

Prof. 26: *Eles precisam construir a sequência no concreto para entender o padrão, ir acrescentando os palitinhos...*

Prof. 94: *Alguns alunos meus descobririam a regra sozinhos, mas, para a grande maioria dos alunos, teria que incentivar, ir questionando. Se usar a tabela, como nós fizemos aqui, eles percebem facilmente que o número de palitos aumenta de três em três. No caso dessa questão, muitos alunos iriam desenhar os 20 quadrados e contar os palitos ou somar de 3 em 3.*

Pesquisadora: *Nesse caso, eles estariam usando a relação recursiva (+3), onde se depende sempre da figura anterior. O professor deve incentivar para que encontrem a lei de formação da sequência propondo que procurem o número de palitos para 100 ou 300 quadrados, por exemplo. Então, fica inviável desenhar ou contar de 3 em 3.*

Prof. 94: *É, se o professor não fizer essa mediação, a maioria vai apenas desenhar os 20 quadrados e contar.*

Pesquisadora: *Quando os alunos usam a relação recursiva e vão desenhando ou contando em sequência, usando o termo anterior para descobrir os próximos, estão fazendo uma generalização que autores como Stacey chamam de generalização próxima. Quando os alunos descobrem o padrão de uma sequência e criam uma lei de formação que permite calcular qualquer termo da sequência, mesmo um termo muito distante, ocorre uma generalização distante, que é a que vocês acabaram de fazer. Tem um outro autor, Radford, que classifica essas generalizações em aritmética e algébrica, respectivamente. Os alunos não precisam saber essas classificações, mas para o professor é importante, pois precisa analisar se uma determinada sequência pode ser aplicada em sua turma e qual generalização pode propor, se vai solicitar que descubram o padrão e representem apenas termos próximos ou se irá propor que elaborem uma lei de formação para a sequência, de modo a encontrar um termo qualquer.*

Em relação à generalização proposta na Ficha 3, o Prof. 31, após efetuá-la, acredita que os alunos conseguem fazer esse tipo de generalização, além de destacar a importância da tarefa e a necessidade de o professor estar preparado para trabalhar com generalizações:

Pesquisadora: *Vocês acham que no 5º ano é possível que os alunos façam essa generalização?*

Prof. 31: *Eu acho que sim. Eu achei essa atividade bem interessante. Sabe qual é a vantagem dessa atividade? Ela é instigante. Mas o professor precisa estar preparado para fazer esse trabalho, caso contrário, pode nem atribuir a importância devida pra essa atividade. Pensar é muito mais importante do que apenas operar. Nessa questão eles conseguem refletir para criar essa regra que permite achar o número de palitos para qualquer figura da sequência, mas não é uma tarefa fácil.*

Pesquisadora: *Isso faz parte de desenvolver o pensamento algébrico, generalizar. Primeiro entender o padrão para representar os termos próximos da sequência e depois descobrir a lei de formação para encontrar um termo qualquer da sequência.*

O conhecimento dos professores sobre generalização faz toda a diferença ao propor uma tarefa com sequências, porque, de acordo com o relato dos que a realizaram, os alunos poderiam respondê-la usando apenas a relação recursiva, ou seja, fazendo uma generalização próxima e/ou aritmética. Com conhecimento sobre o tema, o professor pode propor que encontrem uma lei de formação para a sequência, que permite calcular o número de elementos de um termo qualquer (generalização distante e/ou algébrica) e solicitar a escrita da mesma usando a linguagem natural. Prof. 26 e Prof. 94 criaram leis de formação diferentes para a sequência, e em uma sala de aula é possível que os alunos criem várias generalizações diferentes, enquanto o professor precisa analisar se estão corretas.

7.2 O SENTIDO DE EQUIVALÊNCIA DO SINAL DE IGUALDADE

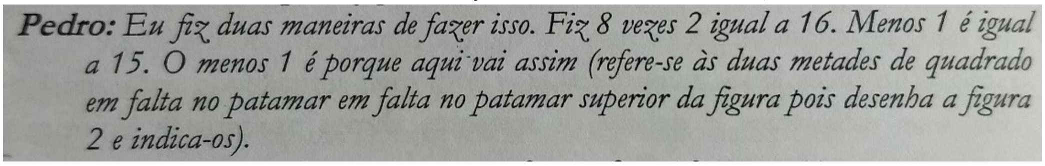
O sentido de equivalência do sinal de igualdade aparece na BNCC 2017, na nova unidade temática para os Anos Iniciais, a Álgebra, nos objetos de conhecimento e habilidades a partir do 3º ano. Na entrevista reflexiva/formativa, esse sentido de equivalência foi abordado em expressões matemáticas, com destaque à importância de se trabalhar essa ideia. Conversamos com os professores sobre estratégias que contribuem para essa compreensão.

7.2.1 O sentido de equivalência do sinal de igualdade em uma expressão Matemática

Voltamos ao texto sobre as “Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º ano” para comentar o segmento em que Pedro apresentou uma generalização para a sequência dos blocos, tentando representar o “dobro de 8 menos 1 igual a 15”, embora tenha cometido uma incongruência na escrita, pois não usou de forma correta o sentido de equivalência da igualdade. O Prof. 44 logo percebeu o problema na escrita de Pedro, conforme o relato:

Pesquisadora: *Agora vamos analisar a generalização do Pedro e o registro desse pensamento. Pedro pensou da mesma forma que o Bruno do 2º ano, que já vimos anteriormente. Ele fez o seguinte registro para determinar o número de blocos da figura:*

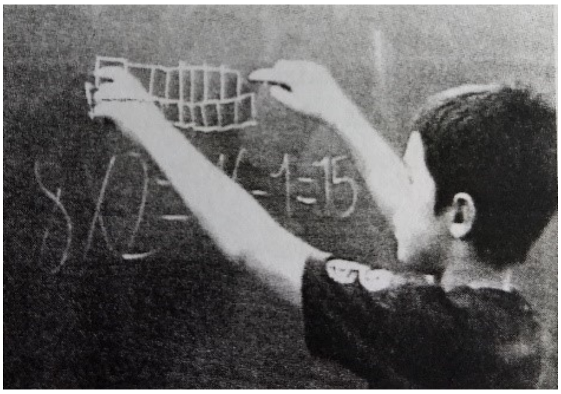
FIGURA 63 – GENERALIZAÇÃO DO ALUNO PEDRO, DO 3º ANO



Pedro: *Eu fiz duas maneiras de fazer isso. Fiz 8 vezes 2 igual a 16. Menos 1 é igual a 15. O menos 1 é porque aqui vai assim (refere-se às duas metades de quadrado em falta no patamar em falta no patamar superior da figura pois desenha a figura 2 e indica-os).*

FONTE: Silvestre *et al.* (2010, p. 104).

FIGURA 64 – TRADUÇÃO DA LINGUAGEM NATURAL PARA A LINGUAGEM MATEMÁTICA



FONTE: Silvestre *et al*. (2010, p. 105).

Pesquisadora: *Pedro escreve, inicialmente, 8 x 2 = 16 – 1 = 15. Em seguida, o professor faz questionamentos e o aluno percebe que o registro de seu pensamento é, na verdade, 2 x 8 -1, como podemos observar nessa parte do texto:*

FIGURA 65 – MEDIAÇÃO DO PROFESSOR PARA O USO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Professor: *Explica-me uma coisa. Aí a figura 8. O que é que tu queres dizer? É o dobro de 8 ou é 8 vezes 2?*
Pedro: *É o dobro de 8. Está trocado.*
(...)
Professor: *Vamos voltar aí ao 2 vezes 8 o que disseste a seguir foi menos 1, então vamos escrever isso de uma forma acertada. E*
Pedro: *(Seguindo a informação do professor.) É mais prático.*

FONTE: Silvestre *et al.* (2010, p. 105).

Pesquisadora: *Mas ainda há mais uma incongruência na escrita de Pedro, e que precisa ser corrigida com a ajuda do professor. Depois que o professor fez a primeira intervenção, Pedro escreveu 2 x 8 = 16 – 1 = 15. Vocês conseguem perceber o que precisa ser mudado nessa escrita?*

Prof. 44: *Que 16 – 1 não é igual a 2 x 8. A gente tem atividade assim no 5º ano em relação às figuras geométricas, nas relações entre as arestas, faces e vértices. Por isso, o Pedro deveria escrever 2 x 8 – 1 = 16 – 1 = 15. Nesse caso, sempre teria uma igualdade.*

Pesquisadora: *Isso mesmo. A igualdade tem sentido de equivalência e isso precisa ser trabalhado com os alunos.*

Nas outras duas entrevistas, as duplas de professores (Prof. 27, Prof. 38, Prof. 26 e Prof. 94) não perceberam qual incongruência se fazia presente na escrita de Pedro. Então, apresentamos um esquema que permitiu essa compreensão. Na sequência, vê-se um recorte dessa situação, envolvendo o Prof. 27 e o Prof. 38:

Pesquisadora: *Na linguagem matemática, há mais uma incongruência na escrita de Pedro, e que precisa ser corrigida com a ajuda do professor. Vocês conseguem perceber o que precisa ser mudado nessa escrita?*

[Tempo para pensar]

Prof. 27: *Eu não percebo o que está errado.*

Prof. 38: *Eu também não.*

Pesquisadora: *O sinal de igualdade não está representando equivalência nessa escrita. Vou mostrar pra vocês:*

$$\underbrace{2 \times 8}_{16} = \underbrace{16 - 1}_{15} = \underbrace{15}_{15}$$

Pesquisadora: *Por isso, a professora questionou o aluno Pedro para que corrigisse a escrita de seu raciocínio. Então, a escrita correta seria:*

Prof. 38: *2 x 8 -1 = 16 – 1 = 15. É que talvez a gente não tenha o costume de dar importância para o significado desse sinal de igual. Por isso, eu nem percebi de começo que essa escrita do Pedro não estava correta.*

Conforme relatou o Prof. 38, é dada pouca importância para o significado de equivalência da igualdade, tanto que o erro na escrita de Pedro não foi percebido inicialmente pelos professores que, em sala de aula, teriam que corrigir expressões, nas quais o sinal de igualdade é usado de forma incorreta.

7.2.2 Sinal de igualdade com sentido de equivalência em questões do livro *Ápis*, adotado pela RMEF

Foram apresentadas aos professores três atividades nas quais o sinal de igualdade não tinha sentido operacional, mas representa uma equivalência entre os dois lados da igualdade, cada questão com especificidades diferentes.

A primeira atividade (Figura 66) explora a resolução de um problema cuja conversão em sentença matemática é uma igualdade com uma operação na qual um dos termos é desconhecido. O número desconhecido pode ser calculado ao se fazer a operação inversa. É importante ressaltar que o número desconhecido não é o resultado da operação e que nessa questão a igualdade também apresenta sentido de equivalência. Esse trabalho introduz informalmente ideias da Álgebra trabalhadas nos Anos Finais, tais como descobrir o valor de uma incógnita. Por exemplo, x + 75 =108, sendo x=33.

FIGURA 66 – FICHA COM SENTENÇAS MATEMÁTICAS QUE APRESENTAM IGUALDADE E NÚMERO DESCONHECIDO

Ficha 4: (Ápis, 4º ano-p. 115)

Faça o diagrama correspondente a cada operação, como na atividade anterior. Depois, descubra o valor procurado.

a) Ana tinha uma quantia, ganhou R$ 75,00 e ficou com R$ 108,00.

Quanto Ana tinha? ______________

b) Rodrigo tinha certa quantia, comprou um livro por R$ 28,00 e ficou com R$ 75,00.

Quanto Rodrigo tinha? ______________

a) _____ +75 = 108

b) _____ - 28 = 75

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 115).

A segunda atividade (Figura 67) explora a relação de equivalência, pois sentenças matemáticas diferentes apresentam o mesmo resultado. Outro objetivo é perceber que a igualdade não significa apenas o resultado de uma operação, mas “ser o mesmo que”. Essa atividade também contribui na aprendizagem das equações, em que é necessário compreender o significado da igualdade.

FIGURA 67 – FICHA COM NÚMEROS A SEREM DESCOBERTOS USANDO A RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE OS DOIS LADOS DA IGUALDADE

Ficha 5: (Ápis, 3º ano, p. 116)

Complete a igualdade de cada item para que os resultados sejam iguais.

a) 3 + 7 = ____ + 1

b) 4 − 1 = 12 − ____

c) 8 + 11 = 20 − ____

d) 48 + 33 = 70 + ____

e) 50 − 12 = 40 − ____

f) ____ + ____ = ____ − ____

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 116).

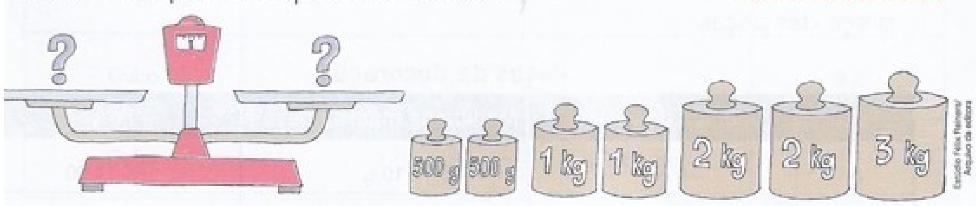
A terceira atividade (Figura 68) explora a conservação da igualdade, ao adicionar um mesmo número aos dois membros (lados). Neste caso, a igualdade é mantida. Isso contribui na aprendizagem das equações, por exemplo, onde o sinal de igualdade apresenta sentido de equivalência.

FIGURA 68 – FICHA COM QUESTÃO SOBRE A CONSERVAÇÃO DA IGUALDADE

Ficha 6: (Ápis, 5º ano-p. 226)

Observe os pesinhos que Gilberto tem.

As imagens não estão representadas em proporção.



Dê 2 soluções para o seguinte problema: equilibrar os 2 pratos colocando 3 pesinhos em cada prato.

1ª solução: ____

2ª solução: ____

1ª solução: 1kg + 2 kg + 500g = 1kg + 2kg + 500g

2ª solução: 3kg + 1 kg + 500g = 2kg + 2kg + 500g

FONTE: Coleção Ápis Matemática – 5º ano (DANTE, 2017e, p. 226).

Em relação às Fichas 4, 5 e 6, seguem as falas com o Prof. 31 e o Prof. 44 sobre as atividades e o significado do sinal de igualdade presente nas questões:

Prof. 31: *Na atividade da Ficha 4 precisa calcular o número desconhecido. Nessa letra b, Rodrigo tinha uma quantia, gastou R$ 28,00 com a compra de um livro e ficou com R$ 75,00 (____ - 28 = 75). O valor que ele tinha era maior, era R$ 28,00 maior do que ele tem agora, por isso, precisa somar 75 + 28 para saber quanto ele tinha no bolso antes.*

Pesquisadora: *E nessa atividade da Ficha 5, do 3º ano, na letra a tem 3 + 7 = ___ +1, como vocês calculariam o valor desconhecido?*

Prof. 44: *Eu faria 3 + 7 que é igual a 10. Daí a resposta é 9, porque 9 + 1 também dá 10. Eu vi que dava 10 de um lado e procurei quanto faltava para dar 10 no outro lado também. Dá até para usar a operação inversa.*

Pesquisadora: *E você, Prof. 31, como resolveria 4 + 6 = ____ + 8?*

Prof. 31: *Se fosse para orientar as crianças, eu iria dizer para calcularem um lado primeiro. No caso aqui, 4 + 6. E depois eles teriam que ver quanto falta para completar o mesmo valor encontrado no outro lado. Então, seria 2, porque daí os dois lados dão 10. Os dois lados precisam ficar com o mesmo valor.*

Pesquisadora: *E essa atividade do 5º ano, Ficha 6, o que podemos dizer sobre ela?*

Prof. 31: *Precisa fazer o equilíbrio. Eu vou tentar. Precisa colocar três pesos em cada prato e equilibrar a balança. De um lado vou colocar 3 kg + 500 g + 500 g, e do outro lado vou colocar 2 kg + 1 kg + 1 kg. Deu certo, porque 3 kg de um lado equilibram com 2 kg + 1 kg do outro lado. E o outro 1 kg equilibra com 500 g + 500 g.*

Pesquisadora: *E qual é o sentido da igualdade nessas três questões que vocês analisaram? O que o sinal de igual representa?*

Prof. 31: *Eu acho que significa um equilíbrio entre os dois lados da igualdade.*

Pesquisadora: *Isso. Dizemos que a igualdade tem sentido de equivalência. Essa questão da igualdade com sentido de equivalência pode ser trabalhada na relação com diversos conteúdos, como no caso da Ficha 6, em que foi solicitado um equilíbrio utilizando as medidas de massa.*

Prof. 31: *Dessa forma, é muito bom para que os alunos entendam, pois a balança precisa ficar sempre em equilíbrio. E fazer essa relação com a igualdade, como se fosse uma balança em equilíbrio. Quando eu estudava no ginasial, tive dificuldade, pois estudei com os livros de Osvaldo Sangiorgi, e as técnicas de impressão não eram muito apuradas, e estudando as equações tudo era muito complicado. Mais tarde, estudando* *mais, entendi que, numa equação, a igualdade significava que os dois lados tinham que estar em equilíbrio.*

Os professores seguiram falando acerca das atividades, demonstrando bastante familiaridade com as mesmas, principalmente com as questões nas quais é preciso descobrir um número desconhecido, como a questão da Ficha 4 (Figura 68). Na questão da Ficha 5 (Figura 69), em cálculos do tipo de 3 + 7 = ____ + 1, os professores resolveram corretamente, mas não mencionaram a possibilidade de usar o pensamento relacional. Já na atividade da Ficha 6 (Figura 70), o Prof. 31 se mostrou disposto e foi logo resolvendo a atividade. E quanto ao significado do sinal de igualdade nessas questões, o Prof. 31 usou o termo equilíbrio entre os dois lados da igualdade, referindo-se à equivalência. Os demais professores entrevistados também mostraram mais familiaridade com as questões das Fichas 4, 5 e 6, porém nesse momento nenhum deles mencionou o uso do pensamento relacional para solucionar questões da Ficha 5. Apesar de reconhecerem que os dois lados da igualdade são equivalentes, mencionam que isso não é destacado em suas aulas.

7.2.3 Pesquisa aponta que poucos alunos consideram o sentido de equivalência da igualdade

Mostramos aos professores o resultado de uma pesquisa em que os alunos tiveram que assinalar o número que tornaria verdadeira a expressão numérica 8 + 4 = ___ + 5 (Figura 69):

FIGURA 69 – FICHA CONTENDO O RESULTADO DE UMA PESQUISA SOBRE A COMPREENSÃO DA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Ficha 7:
Qual é o número que deve ser colocado no espaço vazio para tornar verdadeira a expressão numérica?

8 + 4 = ____ + 5

A questão de escolha múltipla possuía as possibilidades de resposta:

a) 7
b) 12
c) 17

A resposta correta foi indicada apenas por:
5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos
9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos
2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos.

FONTE: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 22).

A partir dos questionamentos e da observação sobre a pesquisa, vieram as seguintes falas:

Pesquisadora: *Vou mostrar pra vocês uma pesquisa em que se constatou que os alunos erram muito porque não compreendem o sentido de equivalência do sinal de igualdade: Falkner, Levi e Carpenter são pesquisadores e questionaram os alunos sobre o número que deveria ser colocado no espaço vazio, de modo a tornar verdadeira a expressão numérica 8 + 4 = ___ + 5. A questão de escolha múltipla possuía as possibilidades de resposta 7, 12 e 17. Qual é a resposta que vocês acham que a maioria dos alunos assinalou?*

Prof. 31: *Eu acho que foi 12.*

Prof. 44: *Ah, também acho que foi 12.*

Pesquisadora: *Por que vocês acham que os alunos colocaram 12 no lugar desse número desconhecido?*

Prof. 44: *Porque eles estão muito acostumados a colocar um resultado após o sinal de igual. Essa questão da equivalência entre os dois lados da igualdade ainda é pouco trabalhada nas escolas. Eles são acostumados a colocar uma resposta depois do igual, porque trabalham muito com as operações nos Anos Iniciais.*

Pesquisadora: *Nessa questão, a igualdade significa uma equivalência entre o que está antes e o que está depois da igualdade. E quando o aluno coloca 12 ou 17 no espaço vazio, significa que não analisou a estrutura toda da expressão e não percebeu o sentido de equivalência dessa igualdade. A resposta correta foi indicada apenas por 5% dos alunos dos 1º e 2º anos, por 9% dos alunos dos 3º e 4º anos e por 2% dos alunos dos 5º e 6º anos. Por isso, é importante trabalhar com os alunos esse sentido mais geral do sinal de igualdade, que é a equivalência.*

Prof. 31: *Eu também acho que, quando os alunos colocam o resultado depois do igual, há um condicionamento, está ligado à forma como se ensina Matemática. O ensino deve ser mais voltado a fazer com que os alunos pensem e não dar tanto foco em achar a resposta de cálculos.*

Em relação ao erro dos alunos por não considerarem a igualdade como equivalência, todos os professores entrevistados também acreditam que a maioria iria assinalar 12, que não é a resposta correta. Para eles, os motivos estão ligados ao hábito que os alunos adquirem durante a escolaridade de colocar a resposta após a igualdade e à falta de trabalho com a igualdade como uma equivalência. Na entrevista, o Prof. 94 e o Prof. 96, em relação à mesma pesquisa, manifestam opiniões parecidas:

Pesquisadora: *Qual é a resposta que vocês acham que a maioria dos alunos assinalou?*

Prof. 26: *Eu acho que colocaram 12.*

Prof. 94: *O 12, porque somaram um lado da igualdade e colocaram a resposta.*

Prof. 26: *E ignoraram o restante.*

Pesquisadora: *Por que vocês acham que os alunos colocaram 12 no lugar desse número desconhecido?*

Prof. 94*: Porque estão muito acostumados a colocar resposta depois de um sinal de igual. Por isso, fizeram 8 + 4 = 12 +5, somaram o que estava à esquerda do igual, colocaram a resposta e ignoraram o restante. Eu achei isso bem interessante. Será que vai ser colocado em formações para ser trabalhado a partir do 1º ano?*

Pesquisadora: *Sobre as formações, espera-se que aconteçam. Essa questão da igualdade com sentido de equivalência está proposta na BNCC a partir do 3º terceiro ano, dentro dessa unidade temática nova, que é a Álgebra.*

7.2.4 O uso do pensamento relacional para resolver questões que apresentam equivalência entre os dois lados da igualdade

Usando a Ficha 8 (Figura 70), questionamos de que forma os professores poderiam orientar os alunos para descobrir o número desconhecido. Essa ficha contém alternativas que podem ser solucionadas com o uso do pensamento relacional.

FIGURA 70 – FICHA COM NÚMEROS A SEREM DESCOBERTOS USANDO A RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E O PENSAMENTO RELACIONAL

Ficha 8:

Descubra o número desconhecido:

a) 4 + 6 = 6 + ______ b) 4 + 6 = 7 + _____

c) 4 + 6 = ____ + 8 d) 4 + ___ = 8 + 2

e) 9 + 5 = _____ + 4 f) 534 + 175 = 174 + ____

FONTE: elaborado pela autora.

Nas entrevistas realizadas com o Prof. 27 e o Prof. 38, após o questionamento em busca de uma alternativa diferente de resolução, este último usou o pensamento relacional para as situações propostas, conforme o relato a seguir:

Pesquisadora: *E nessas questões da Ficha 8, como vocês acham interessante que seus alunos descubram o valor desconhecido? Por exemplo, na letra a, onde temos 4 + 6 = 6 + ____?*

Prof. 27: *O foco seria trabalhar a equivalência. Tipo, 4 + 6 é igual a 10, então, procuro qual número somo com 6 para dar 10 também.*

Pesquisadora: *Está certo. Mas será que é possível resolver sem calcular um dos lados primeiro? Vamos tentar fazer diferente na letra c: 4 + 6 = ___ + 8.*

Prof. 27: *Na letra c, a resposta é 2.*

Pesquisadora: *Como você fez para achar a resposta?*

Prof. 27: *Eu usei a ideia de equivalência. Eu vi que 4 + 6 é igual a 10. E no outro lado da igualdade falta 2 para completar 10. Foi assim que eu pensei.*

Pesquisadora: *E você, Prof. 38, pensou da mesma forma?*

Prof. 38: *Eu tive um outro pensamento. Na letra a, de um lado da igualdade tem 4 + 6, então, do outro lado só inverte a ordem, será 6 + 4.*

Prof. 27: *É, mas nas outras não inverte.*

Prof. 38: *Já na letra b, que é 4 + 6 = 7 + ___, o 7 do lado direito da igualdade tem 1 a mais que o 6 do outro lado, então, o número que falta tem que ser 3, porque tem 1 a menos que o 4.*

Prof. 27: *Faz a mesma coisa na letra e para eu ver:*

Prof. 38: *Na letra e. De um lado, temos 9 + 5, e do outro lado, temos o 4, que tem uma unidade a menos que o 5, então, no número desconhecido temos que aumentar 1 para manter a igualdade. Por isso, vai ser 10. Então, 9 + 5 = 10 + 4.*

Prof. 27: *Vai tirando de um lado e colocando no outro?*

Pesquisadora: *É, você faz uma relação entre os dois lados da igualdade e vai somando ou diminuindo para compensar. É interessante trabalhar com os alunos dessa forma também porque é um cálculo mental, em que é necessário perceber a estrutura toda da expressão para poder achar o número desconhecido, além de relacionar os dois lados, usando a ideia de equivalência. Esse pensamento é chamado de "pensamento relacional".*

Pesquisadora: *Prof. 27, olha como esse pensamento poderia te ajudar na letra f. Tenta encontrar o número desconhecido dessa forma na letra f: 534 + 175 = 174 + ____, e você verá que dessa forma é muito mais rápido, não precisa montar nenhuma conta.*

Prof. 27: *Estou pensando...*

Pesquisadora: *Vamos começar, o 174 que está de um lado da igualdade, tem quanto a menos que 175 do outro lado?*

Prof. 27: *174 tem 1 a menos.*

Pesquisadora*: Então, para que os dois lados fiquem equivalentes, o número que procuramos precisa ter quanto a mais ou a menos que o 534?*

Prof. 27: *Precisa ter 1 a mais, então, é o 535. Mas eu nunca pensei dessa forma, então, é difícil, também porque eu não aprendi desse jeito.*

Pesquisadora: *Usando o pensamento relacional fazemos uma relação entre as expressões de um e do outro lado do sinal, sem calcular um lado e ajustar o resultado do outro lado.*

Em relação ao pensamento relacional, o Prof. 44 e Prof. 31 relatam que nunca o utilizaram, enquanto que o Prof. 44 explica o motivo, visualizado no trecho a seguir:

Pesquisadora: *Vocês já estudaram sobre o pensamento relacional ou já usaram alguma vez com os alunos?*

Prof. 44: *Eu não estudei sobre isso. Na faculdade, tive todas as metodologias em um semestre, então, eu vi pouca prática. Até a questão da tabuada foi na escola, ouvindo outros professores que me dei conta de que 2 x 8 representa uma situação diferente de 8 x 2. E é função da gente corrigir situações como aquela em que o Pedro escreveu um registro equivocado.*

Prof. 31: *Eu também ainda não tinha usado esse pensamento relacional.*

O Prof. 94 e o Prof. 26 também não têm por hábito usar o pensamento relacional. Após experimentar a resolução com o uso dele, o Prof. 94 explica porque não lhe ocorreu resolver dessa forma inicialmente. Segue um recorte do diálogo que expressa essa situação:

Prof. 94*: O nosso pensamento de operação é tão forte e tão habitual que isso nem me ocorreu. Eu já somei logo um lado e diminuí no outro. Durante nosso período de escola e nossa vida fomos muito habituados a calcular, então, isso de relacionar os dois lados nem me passou pela cabeça.*

Pesquisadora: *Da forma como vocês chegaram ao resultado, também está correto, mas, em alguns casos, o pensamento relacional pode ser vantajoso: ajuda os alunos a perceber a equivalência, pois precisam analisar a estrutura da operação e relacionar os dois lados da igualdade. E, além disso, pode ser resolvido mentalmente. Por exemplo, vamos pensar na letra f: 534 + 175 = 174 + ____. Qual é o número desconhecido, usando o pensamento relacional?*

Prof. 26: *535, que tem um a mais, para compor a diferença, em relação ao outro lado da igualdade.*

Prof. 94: *Bem mais prático. Só que nós não usamos porque não aprendemos dessa forma. Mas para os nossos alunos seria bem importante.*

Como podemos perceber, o Prof. 94 relata o hábito de usar operações, tanto que nem lhe ocorreu que pudesse resolver de outra maneira. Após vivenciar questões usando o pensamento relacional, relata que seria muito interessante que os alunos aprendessem a usá-lo, pois considera o método mais prático.

7.2.5 O uso das barrinhas cuisenaire para introduzir a ideia de equivalência

Pensando na introdução do trabalho com a equivalência, foram apresentadas aos professores as barrinhas cuisenaire, por ser um material bastante conhecido, pelo fato de as escolas de Florianópolis geralmente disporem dele e, principalmente, porque sua manipulação permite perceber a equivalência. Não houve relato no sentido de já terem utilizado o material com essa finalidade. Os diálogos com o Prof. 31 e o Prof. 44 sobre o uso das barrinhas constam a seguir:

Pesquisadora: *Vocês conhecem ou já usaram as barrinhas cuisenaire?*

Prof. 44: *Não*

Prof. 31: *Não usei.*

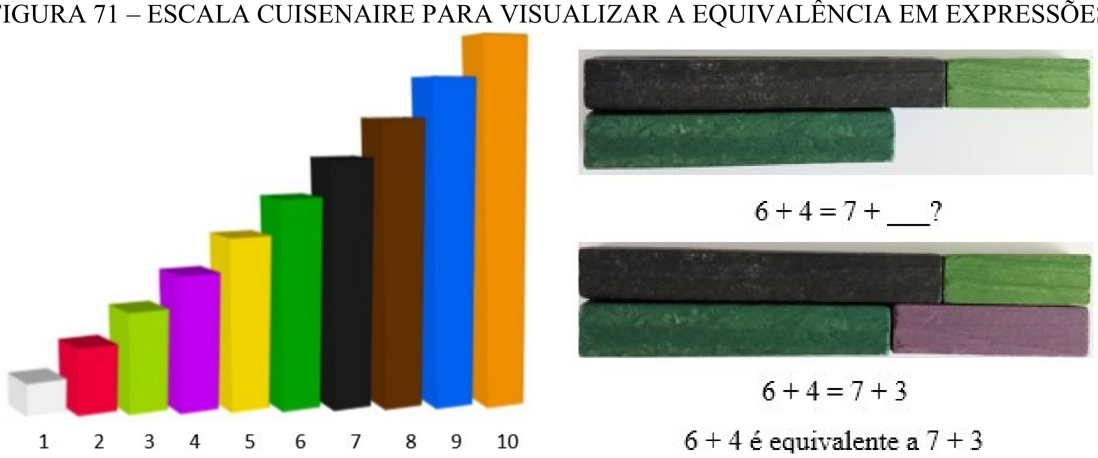
Pesquisadora: *Parece que várias escolas receberam.*

Prof. 31: *Uma coisa é a escola ter o material, outra coisa é saber usar.*

Prof. 44: *Aqui na rede até já teve formação sobre esse material, mas eu ainda não usei, são tantos conteúdos, tantas cobranças...*

Pesquisadora: *Eu trouxe as barrinhas para montarmos umas expressões com dois lados da igualdade equivalentes. Então, cada barrinha tem uma cor e corresponde a um número. Vamos usar as barrinhas para achar o número desconhecido e representar a equivalência 6 + 4 = 7 + ___?*

FIGURA 71 – ESCALA CUISENAIRE PARA VISUALIZAR A EQUIVALÊNCIA EM EXPRESSÕES

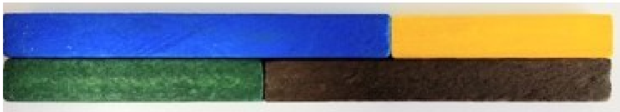


FONTE: elaborado pela autora.

Pesquisadora: *Vamos fazer mais um exemplo? Poderia ser 9 + 5 = ___ + 8*

FIGURA 72 – EQUIVALÊNCIA SENDO REPRESENTADA COM AS BARRINHAS CUISENAIRE

9 + 5 = ___ + 8



9 + 5 = 6 + 8

FONTE: elaborado pela autora.

Pesquisadora: *Esse é um exemplo de material que poderia ser usado para introduzir essa ideia de equivalência e escrever expressões com equivalência entre os dois lados da igualdade. Poderia ajudar os alunos na compreensão dessa ideia de equivalência, que utilizarão muito em toda a Álgebra.*
Prof. 31: *Eu achei bem interessante, é um material concreto, colorido, atrativo e os alunos conseguem ver a equivalência, porque os comprimentos das barrinhas ficam iguais dos dois lados.*
Pesquisadora: *Essa questão do sentido de equivalência da igualdade pode ser trabalhada com esse ou outros materiais concretos, em situações envolvendo diversos conteúdos.*

Após vivenciar o uso das barrinhas cuisenaire na prática, com o objetivo de perceber a equivalência em expressões, o Prof. 31 relatou considerá-las atrativas, coloridas e interessantes para trabalhar a equivalência. Além de conhecer bem o conteúdo específico para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, faz-se necessário também conhecer estratégias e materiais manipuláveis que ajudem na compreensão dos conceitos.

Na entrevista com o Prof. 38 e o Prof.27 apareceu também o relato de que ainda não utilizaram as barrinhas com a finalidade de compreender a equivalência do sinal de igualdade, enquanto que o Prof. 27 destaca que, em sua formação, não aprendeu a usar materiais manipuláveis que possam auxiliar no ensino da Matemática:
Pesquisadora: *Pensando no trabalho com as crianças, alguém já pensou em usar a escala cuisenaire para fazer a introdução desse trabalho?*
Prof. 27*: Não.*

Prof. 38: *Não, eu tenho na escola e não sei usar esse material. Eu usei apenas para uma atividade que tinha no livro, mas não para trabalhar com essa questão da equivalência.*
Prof. *27: Na minha formação de Matemática, não tive nada de concreto.*

7.2.6 O sinal de igualdade com sentido de equivalência presente nas equações

Os professores foram questionados em relação ao significado do sinal de igualdade na equação da Ficha 9 (Figura 73). O sinal de igualdade, em uma equação, tem sentido de equivalência entre os dois membros, e essa compreensão é importante para entender o processo, sem decorar passos para resolver uma equação.

FIGURA 73 – FICHA COM RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO

Ficha 9:

$$5x - 24 = 81$$
$$5x - 24 + 24 = 81 + 24$$
$$5x = 105$$
$$5x/5 = 105/5$$
$$x = 21$$

FONTE: elaborado pela autora.

Prof. 31 e Prof. 44 foram os únicos que relacionaram a equivalência ao estudo das equações, embora tenham relatado que iniciaram estudando esse conteúdo na escola sem o entendimento da equivalência. Foram selecionados excertos a partir das três entrevistas que retratam essa situação, começando pelo Prof. 27 e o Prof. 38:
Pesquisadora: *Pensando na Álgebra que vocês estudaram na escola, onde se aplica essa ideia de equivalência?*
Prof. 27: *De forma específica, eu não lembro. Talvez nas fórmulas...*
Pesquisadora: *Um dos conteúdos dos Anos Finais do Ensino Fundamental em que isso é bem importante é nas equações. Observem a Ficha 9, onde temos que 5x – 24 = 81. A igualdade indica a equivalência entre os dois lados da equação, e para manter essa equivalência, inicialmente adicionamos 24 aos dois membros, e depois, dividimos os dois lados por 5, sempre mantendo a equivalência. Vocês lembram de resolver as equações dessa maneira?*

Prof. 38: *Eu só me dei conta agora dessa ideia de manter a equivalência e acrescentar 24 aos dois lados. Eu lembro que me ensinaram a pegar o -24 e jogar para o outro lado.*

Prof. 27: *Eu também fazia isso, e daí mudava o sinal.*

Prof. 38: *Eu lembro isso, quando mudava de lado, o que era menos ficava mais e o que era mais, ficava menos.*

Prof. 27: *Mas ninguém nunca explicou pra gente porque é que se fazia isso.*

Pesquisadora: *Essa compreensão é bem importante, é como se fosse uma balança em equilíbrio, se eu tiro de um lado, tenho que tirar do outro. Da mesma forma, se eu somo ou divido de um lado, tenho que somar ou dividir do outro lado. E vou mantendo a equivalência entre os dois lados da igualdade.*

Prof. 27: *A gente só aprendeu decorando regras e não entendeu o que é uma equação. Parecia que o objetivo era resolver, resolver, praticar...*

Já o Prof. 31 e o Prof. 44 não estudaram equações com a compreensão da equivalência entre os dois membros da igualdade, conforme os relatos a seguir:

Prof. 31: *Eu vou dizer como eu aprendi: Eu pegava o -24 e jogava pra direita, trocando o sinal, pois queria isolar a incógnita. No final, o 5, que estava multiplicando, passava dividindo.*

Pesquisadora: *E desse jeito que te ensinaram, você percebia a equivalência entre os dois lados da igualdade?*

Prof. 31: *Demorei pra entender, depois com o tempo entendi. Eu fazia assim porque me ensinaram a fazer desse jeito pra chegar no resultado. Depois, mais tarde, em contato com outras obras que não do Osvaldo Sangiorgi, comecei a entender que, numa equação, os dois lados da igualdade tinham o mesmo valor, que eram equivalentes.*

Prof. 44: *Na escola a gente fazia sem saber porquê, sem levar em conta a equivalência entre um e o outro lado da igualdade. Tinha que achar o resultado.*

Prof. 31: *A gente fazia assim porque obedecíamos uma sequência, regras que nos eram apresentadas, eu só não entendia porque fazia aqueles procedimentos.*

A falta de compreensão sobre as equações também está presente na fala do Prof. 26 e Prof. 94:

Prof. 26: *Eu aprendi passando o -24 para o outro lado, onde ele virava + 24. Agora me parece meio complexo acrescentar + 24 nos dois lados, porque eu aprendi diferente.*

Prof. 94: *Se tivéssemos aprendido a manter a equivalência entre os dois lados da equação, eu acho que seria mais fácil. Os professores, muitas vezes, acabam ensinando* *da mesma maneira como aprenderam. Será que atualmente todos ensinam desse jeito que você está mostrando?*

Pesquisadora: *Acredito que muitos professores ensinem dessa forma e os livros também já trazem assim, mas, como você falou, muitos professores acabam ensinando da maneira como aprenderam.*

Os relatos remetem a uma aprendizagem sem compreensão da equivalência entre os dois membros da equação, a fim de decorar, resolver, praticar e seguir regras e procedimentos. A compreensão de que existe a equivalência nos dois lados da igualdade em uma equação é importante, porque os professores podem ver sentido em trabalhá-la também nos Anos Iniciais; dá importância para o trabalho com essa ideia. O Prof. 94 relata que os professores acabam, muitas vezes, ensinando da mesma forma que aprenderam, e questiona se atualmente esse ensino mecânico ainda se faz presente. Será?

7.3 RELAÇÃO ENTRE UM PROBLEMA DE PROPORCIONALIDADE DO 5º ANO E A REGRA DE TRÊS

Para o 5º ano, a BNCC propõe o trabalho com resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três). Neste sentido, perguntamos aos professores se percebiam alguma relação entre a atividade da Ficha 10 (Figura 74) e um conteúdo de Álgebra presente nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

FIGURA 74 – FICHA COM QUESTÕES SOBRE RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Ficha 10: (Ápis. 5º ano - p. 161)

PROPORCIONALIDADE

Complete.

a) Cada grupo de 5 alunos vai receber 8 folhas de papel sulfite.
Então, em uma turma com 30 alunos serão necessárias __________ folhas.

b) Maurício pagou R$ 14,00 por 6 pêssegos.
Se tivesse comprado 3 pêssegos, então ele teria pago R$ __________.

c) Pedro comprou 4 cadernos e pagou R$ 10,00.
Com R$ 50,00 ele pode comprar __________ cadernos.

Fonte: Coleção Ápis Matemática – 5º ano (DANTE, 2017e, p. 161).

Na sequência, é possível visualizar um trecho da conversa com o Prof. 44 e o Prof. 31:

Pesquisadora: *Para finalizar a entrevista, eu gostaria de conversar sobre a atividade de proporcionalidade da Ficha 10, do livro do 5º ano, que também faz parte da unidade temática Álgebra. Vamos ler a letra b: Maurício pagou R$ 14,00 por 6 pêssegos. Se tivesse comprado 3 pêssegos, então, ele teria pago R$______.*

Prof. 44: *Metade. Teria pago R$7,00.*

Prof. 31: *No 5º ano eu gosto de fazer tabelas com os alunos para registrarem a proporcionalidade.*

Pesquisadora: *Trabalhar com tabelas é bem interessante. E como eles poderiam resolver um problema desses, no 7º ano, por exemplo, sem ser pelo cálculo mental ou tabelas? Porque esse problema é bem simples, mas se fosse um problema de proporcionalidade mais complexo, como poderiam resolver? Eu acredito que vocês usem esse conteúdo às vezes.*

[Não houve associação entre esse problema de proporcionalidade e a regra de três]

Pesquisadora: *E a regra de três? Estão lembrados? Poderia ser usada para resolver problemas desse tipo. É claro que, no caso desse problema, por ser simples, a regra de três não faz sentido. E nem é objetivo no 5º ano. Mas no 7º ano faz parte do currículo.*

Os professores entrevistados, exceto o Prof. 38, não relacionaram o problema de proporcionalidade do 5º ano com a regra de três estudada nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Na entrevista, durante as questões relacionadas ao conhecimento do conteúdo de Álgebra para o ensino, percebemos que os professores têm conhecimento, mas que necessitam de formação para compreender melhor alguns aspectos específicos, principalmente a generalização de padrões em sequências e as propriedades da igualdade, que fazem parte da unidade temática Álgebra, que antes não existia no currículo dos Anos Iniciais. A formação é importante para que possam promover atividades que desenvolvam o pensamento algébrico dos alunos, com estratégias de ensino específicas para essa finalidade, e também para compreender como os conceitos de Álgebra ensinados nos Anos Iniciais se relacionam dentro do currículo com os conteúdos dos Anos Finais.

8 COMPREENSÃO OBTIDA A PARTIR DOS DADOS E DISCUSSÃO COM O REFERENCIAL TEÓRICO

No 6º capítulo, realizamos o processo de criação de categorias e subcategorias. Para isso, procedemos à codificação inicial dos dados, e depois, à codificação focalizada, em que se organizaram e sintetizaram os dados. Demos início também ao processo de codificação teórica, quando as categorias e subcategorias foram revistas. Ou seja, definimos, pontualmente, as categorias e as subcategorias, que foram interligadas, além de ter sido definida a Categoria Central (*Core Category*).

Da análise de dados e codificações emergiram dados agrupados nas seguintes categorias: "Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra"; "Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos"; "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino". Estas compõem a teorização sobre a investigação do conhecimento dos professores sobre Álgebra e seu ensino. Através dessas categorias e das subcategorias relacionadas, procuramos explicar nossa compreensão e interpretação em relação aos dados levantados nesta pesquisa, criando, dessa forma, nossa teoria[8] envolvendo a investigação realizada.

Em relação à codificação teórica, a última etapa consiste em integrar e delimitar a teoria, processo desenvolvido neste capítulo. "Quando as categorias estão maduras, evidenciam-se os nexos que as interligam e, sobretudo, são integradas dentro de uma teoria coerente e unitária" (TAROZZI, 2011, p. 123). Nesse momento estabelecemos os nexos entre as categorias e subcategorias, tornando tudo isso um modelo para explicar a teoria que os conecta. A partir disso ocorre também o diálogo dos resultados alcançados empiricamente com a literatura científica da área.

Para Charmaz, os dados e as teorias não são descobertos. De acordo com a autora, "somos parte do mundo o qual estudamos e dos dados os quais coletamos" (2009, p. 24). Somos nós que construímos as teorias fundamentadas, e isso ocorre por meio "dos nossos envolvimentos e das nossas interações com as pessoas, as perspectivas e as práticas de pesquisa, tantos passados como presentes" (2009, p. 25).

Nesta pesquisa, a Categoria Central se trata dos "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino", os quais têm uma estreita relação com as categorias

[8] Uma teoria pode ser entendida como um conjunto sistemático de conceitos ligados entre si através de relações explícitas, capaz de explicar fenômenos e ser dotada de certa capacidade de previsão. Cf. Tarozzi (2011, p. 28).

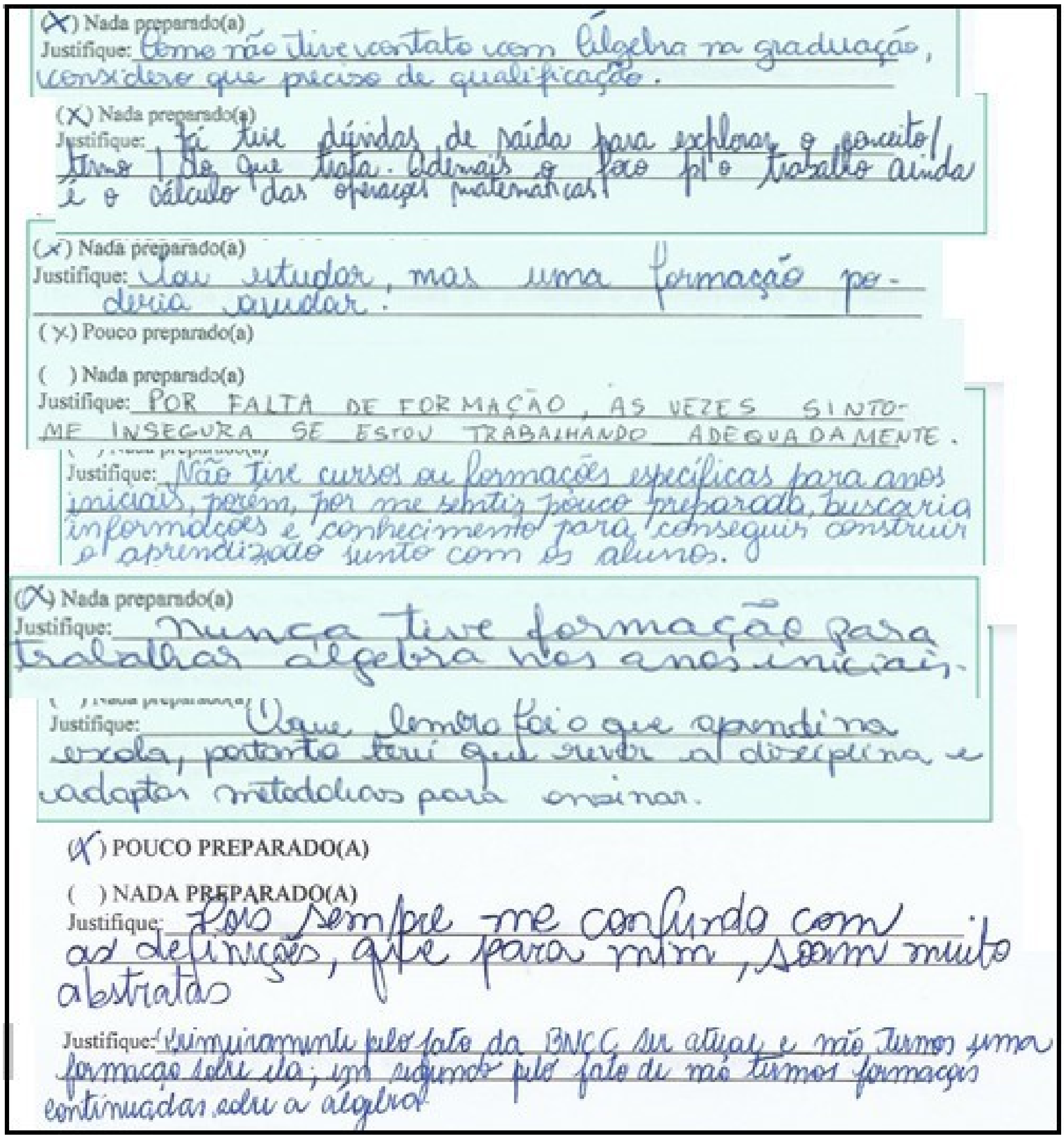
“Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra” e “Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos”. Na sequência, explicamos a relação entre as categorias e subcategorias que compõem a pesquisa.

Na categoria “Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra”, associamos quatro subcategorias que revelam a ausência de formação para o ensino da unidade temática Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, relatada por 74,5% dos professores participantes da pesquisa. Essa ausência pode ser compreendida quando uma parte dos professores revela falta de clareza sobre o que é a Álgebra, e a outra, lembra dela associada a operações com letras, equações e fórmulas, ou seja, a códigos agrupados à subcategoria: “O que os professores lembram da Álgebra que estudaram na escola”.

Na subcategoria “Presença da Álgebra no livro didático escolhido pela RMEF” observamos que mais da metade dos professores relata não possuir clareza sobre a presença de atividades da matéria no livro adotado pela rede, e há muitos relatos de que isso não foi observado na escolha do livro didático. Na subcategoria “Opinião sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais”, agrupamos códigos que indicam que os professores não receberam qualquer orientação sobre o uso ou não de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, já que a recomendação da BNCC de não usar letras para expressar regularidades nessa faixa etária não foi citada por nenhum deles.

A ausência de formação se destaca na subcategoria “Sentimento com relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais”, quando a maior parte dos professores afirma se sentir pouco ou nada preparada para esse ensino. Na Figura 75 constam alguns recortes de citações que correspondem às justificativas dos professores para o fato de se sentirem pouco ou nada aptos para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais.

FIGURA 75 – RECORTES DE CITAÇÕES DO *ATLAS.TI* EM QUE OS PROFESSORES DEMONSTRAM SE SENTIR POUCO OU NADA PREPARADOS PARA ENSINAR ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS



(X) Nada preparado(a)
Justifique: Como não tive contato com Álgebra na graduação, considero que preciso de qualificação.

(X) Nada preparado(a)
Justifique: Já tive dúvidas de saída para explorar o conceito/termo/do que trata. Ademais o foco p/ o trabalho ainda é o cálculo das operações matemáticas!

(X) Nada preparado(a)
Justifique: Vou estudar, mas uma formação poderia ajudar.

(X) Pouco preparado(a)
( ) Nada preparado(a)
Justifique: POR FALTA DE FORMAÇÃO, AS VEZES SINTO-ME INSEGURA SE ESTOU TRABALHANDO ADEQUADAMENTE.

Justifique: Não tive cursos ou formações específicas para anos iniciais, porém, por me sentir pouco preparada, buscaria informações e conhecimento para conseguir construir o aprendizado junto com os alunos.

(X) Nada preparado(a)
Justifique: Nunca tive formação para trabalhar álgebra nos anos iniciais.

Justifique: O que lembro foi o que aprendi na escola, portanto terei que rever a disciplina e adaptar metodologias para ensinar.

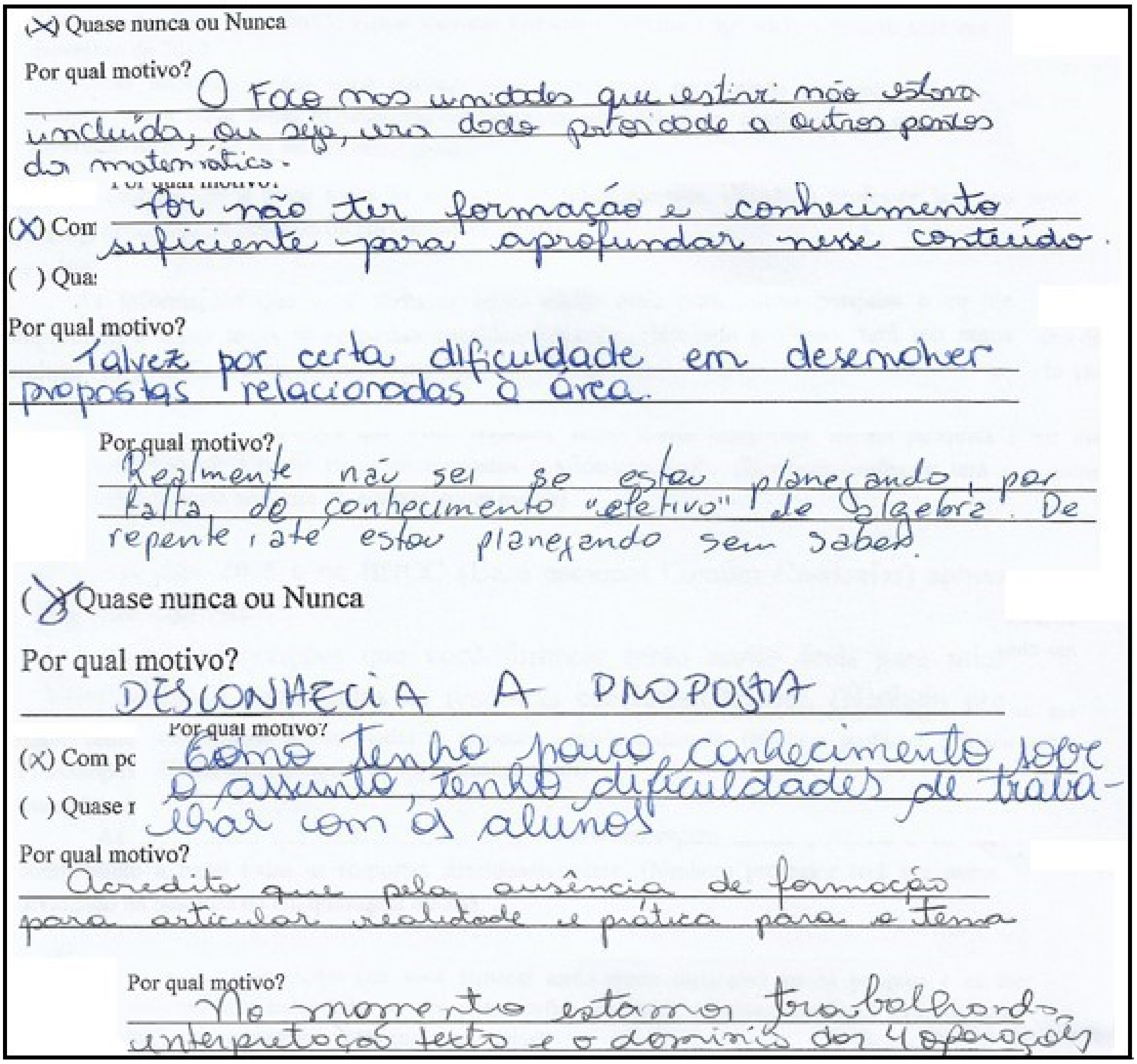
(X) POUCO PREPARADO(A)
( ) NADA PREPARADO(A)
Justifique: Pois sempre me confundo com as definições, que para mim, soam muito abstratas

Justifique: Primeiramente pelo fato da BNCC ser atual e não termos uma formação sobre ela; em segundo pelo fato de não termos formações continuadas sobre a álgebra

FONTE: elaborado pela autora.

A categoria “Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos” está vinculada a duas subcategorias: “Opinião sobre a importância de ensinar Álgebra nos Anos Iniciais”, em que os códigos vinculados mostram que a maior parte dos professores considera importante ensinar Álgebra nos Anos Iniciais, e “Frequência com que planeja e realiza atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico”, em que a maioria dos professores não planeja e desenvolve atividades que promovem o pensamento algébrico ou o faz com pouca frequência. As citações da Figura 76, recortadas do *Atlas.ti,* retratam essa situação:

FIGURA 76 – RECORTES DE CITAÇÕES DO *ATLAS.TI* COM PROFESSORES AFIRMANDO QUE NÃO PLANEJAM E DESENVOLVEM ATIVIDADES QUE PROMOVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO OU O FAZEM COM POUCA FREQUÊNCIA


(X) Quase nunca ou Nunca

Por qual motivo? O foco nas unidades que estive não estava incluída, ou seja, era dado prioridade a outros pontos da matemática.

(X) Com

Por não ter formação e conhecimento suficiente para aprofundar nesse conteúdo.

( ) Qua

Por qual motivo? Talvez por certa dificuldade em desenvolver propostas relacionadas à área.

Por qual motivo? Realmente não sei se estou planejando, por falta de conhecimento "efetivo" de Álgebra. De repente, até estou planejando sem saber.

(X) Quase nunca ou Nunca

Por qual motivo? DESCONHECIA A PROPOSTA

Por qual motivo?

(X) Com pc

( ) Quase r

Como tenho pouco conhecimento sobre o assunto, tenho dificuldades de trabalhar com os alunos

Por qual motivo? Acredito que pela ausência de formação para articular realidade e prática para o tema

Por qual motivo? No momento estamos trabalhando interpretação texto e o domínio das 4 operações

FONTE: elaborado pela autora.

Os recortes do *Atlas.ti* e os dados apresentados no 6º capítulo acerca das justificativas dos professores para não planejarem atividades algébricas ou planejarem as mesmas com pouca frequência estão muito ligados às suas próprias formações, que foram insuficientes, e também pelo fato de perceberem que têm pouco conhecimento para trabalhar com essa temática.

As categorias e subcategorias citadas anteriormente influenciam na categoria central "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino" e são influenciadas por ela. Dados da pesquisa mostram que a ausência de formação específica para o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais ou a formação insuficiente faz com que muitos professores se sintam pouco ou nada preparados em relação aos seus conhecimentos para essa tarefa, o que acarreta na não implementação de atividades com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

A categoria central está relacionada a três subcategorias: através da primeira, que trata das “Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes”, codificamos e analisamos os conhecimentos específicos do conteúdo e seu desenvolvimento ao longo do currículo (conhecimentos curriculares), além de se traçar algumas relações com o conhecimento especializado do conteúdo. A segunda subcategoria está relacionada aos conhecimentos pedagógicos para o ensino, denominada “Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra”, enquanto que a terceira aborda “A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação”, que também o influencia acerca do que entende por Álgebra.

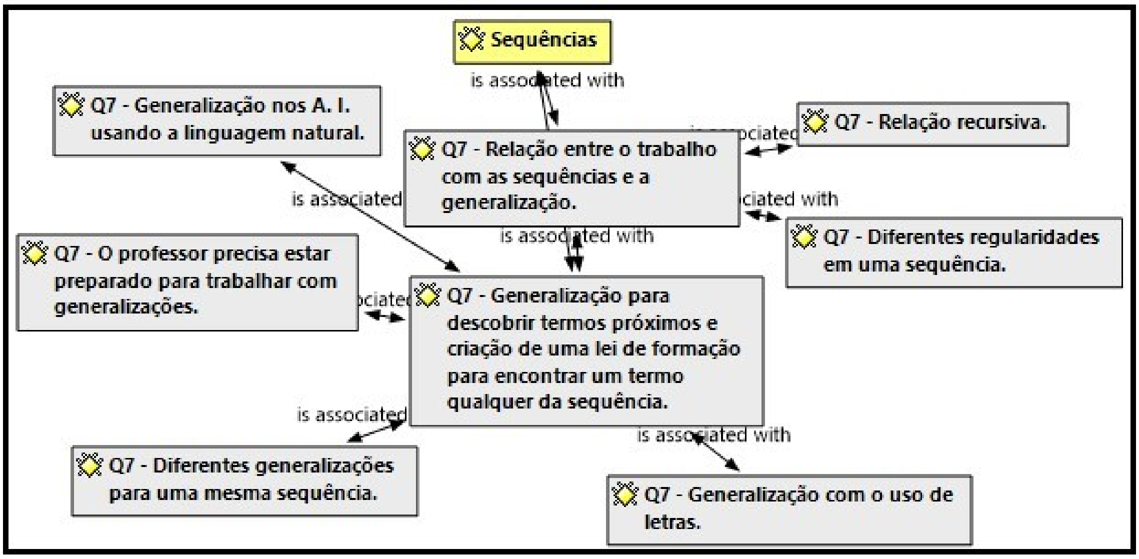
Em relação ao conhecimento específico do conteúdo para o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais, foi possível compreender, através desta pesquisa, diversas dimensões que precisam ser abordadas em formações, principalmente a generalização de padrões em sequências e as propriedades da igualdade, com foco no sentido de equivalência da igualdade. Esses temas estão presentes na BNCC, embora os professores não tenham tido formação específica voltada ao ensino desses conteúdos.

Os professores pesquisados não citaram a generalização como um dos objetivos para o trabalho com as sequências, além de não estabelecerem relação entre o trabalho com estas e a Álgebra que conhecem, estudada na Educação Básica. Eles não estudaram essa temática na graduação. Nos 6º e 7º capítulos relatou-se que os professores, no intuito de ensinar pares e ímpares, já haviam trabalhado com sequências em números para descobrir o padrão e dar continuidade, assim como acreditam que o objetivo é descobrir a lógica da sequência, ou seja, desenvolver o raciocínio lógico.

Nas entrevistas reflexivas/formativas sobre o conteúdo específico para o ensino, focamos na relação entre o trabalho com as sequências e a Álgebra, através do diálogo acerca de diversas generalizações realizadas pelos alunos e encontradas na literatura, sendo que os professores também vivenciaram a generalização de uma sequência, criando uma lei de formação para a mesma (generalização distante e/ou algébrica).

Os códigos a seguir (Figura 77) foram criados a partir dos diálogos que buscaram estabelecer a relação entre o trabalho com as sequências e a generalização.

FIGURA 77 – CÓDIGOS CRIADOS A PARTIR DA ENTREVISTA REFLEXIVA/FORMATIVA ESTABELECENDO A RELAÇÃO ENTRE AS SEQUÊNCIAS E A GENERALIZAÇÃO

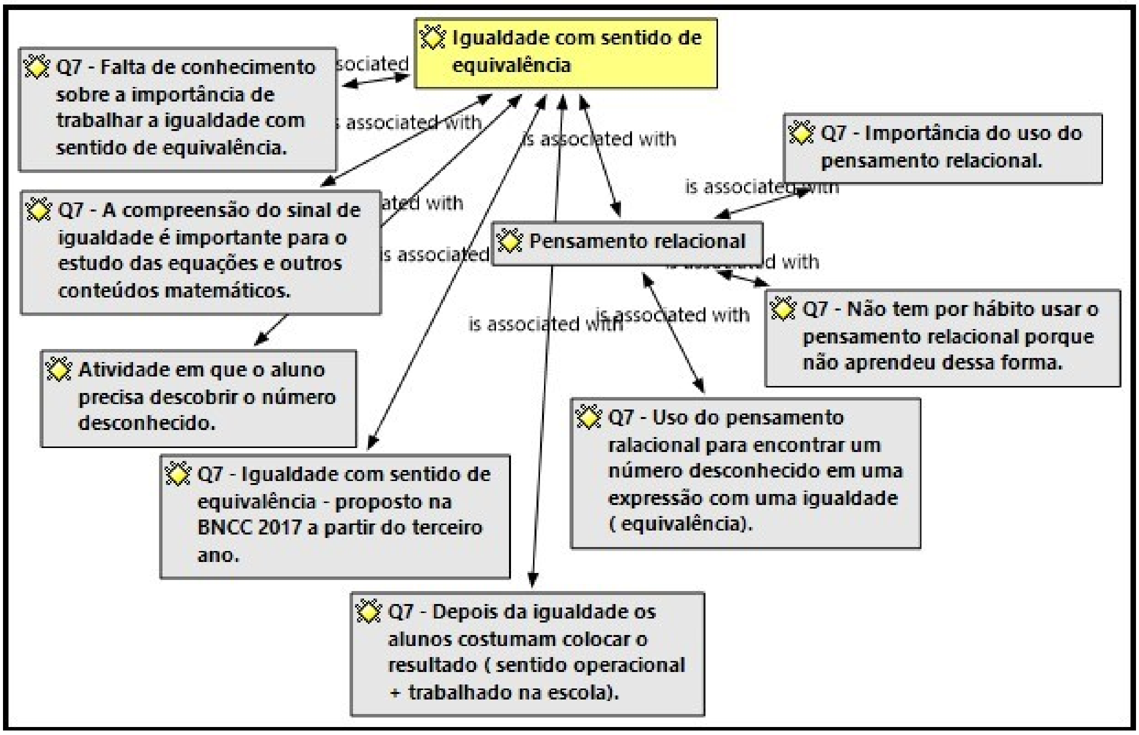


FONTE: elaborado pela autora.

Os diálogos envolveram a relação recursiva presente em sequências recursivas, as diferentes regularidades presentes em uma sequência e a generalização que pode servir para determinar termos próximos na sequência (generalização próxima e/ou aritmética) ou para encontrar um termo qualquer da sequência (generalização distante e/ou algébrica). A generalização com o uso da linguagem natural nos Anos Iniciais e a representação de generalizações com letras nos Anos Finais também fizeram parte dos diálogos, além das diferentes generalizações que podem ser estabelecidas para uma mesma sequência. Compreendemos que se trata de um tópico do conteúdo específico que precisa ser desenvolvido em formações em uma escala maior, de modo que outros professores possam ter acesso a ele.

Da mesma forma, as formações precisam envolver também o sentido de equivalência da igualdade, pois alguns professores não demonstraram compreensão sobre o tema, além não conhecerem o pensamento relacional como alternativa para solucionar expressões que envolvem equivalência entre os dois lados de uma igualdade. Nos diálogos estabelecidos nas entrevistas reflexivas/formativas, procuramos destacar a importância de se trabalhar a igualdade com sentido de equivalência, e não apenas como um sinal que antecede o resultado de uma operação aritmética. Outros tópicos abordados foram: a importância do sentido de equivalência da igualdade para a compreensão das equações e o uso do pensamento relacional para resolver questões contendo equivalência. Destacamos alguns códigos (Figura 78) oriundos dos diálogos sobre esse tema relacionado ao pensamento algébrico nos Anos Iniciais.

FIGURA 78 – SELEÇÃO DE ALGUNS CÓDIGOS SOBRE O SENTIDO DE EQUIVALÊNCIA DA IGUALDADE CRIADOS A PARTIR DAS ENTREVISTAS REFLEXIVAS/FORMATIVAS



FONTE: elaborado pela autora.

Sobre a importância da generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico, foram citados diversos autores, no 3º e 4º capítulos, que reforçam essa ideia, como Cyrino e Oliveira (2011), Radford (2006, 2010a, 2010b), Vale *et al.* (2011), Vale e Pimentel (2013) e Van de Walle (2009). Destacamos a definição de Blanton e Kaput, cujos autores afirmam que o pensamento algébrico é um “processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas” (2005, p. 413, tradução nossa), expressando essas generalizações por meio da argumentação e por caminhos que vão se tornando cada vez mais formais.

De acordo com Mason (1996), a generalização é o coração da Matemática. Para os Anos Iniciais, o autor defende uma aritmética generalizada, em que é possível explorar as propriedades numéricas fazendo relações e percebendo regularidades. Assinala que o trabalho com sequências de padrões é um forte aliado às generalizações e ao desenvolvimento do pensamento algébrico, pois o aluno precisa buscar estratégias para pensar na posição de um termo distante. Destaca que a generalização é tão central em toda a Matemática que muitos professores acabam não fazendo referência a ela, considerando-a elementar. Quando um professor apresenta uma expressão como “3 +2 = 2 + 3”, os alunos podem entender apenas que ambos os lados da igualdade correspondem a 5, sem relacionar com a propriedade comutativa da adição de números inteiros. Para o professor, trata-se de um caso particular de uma situação mais geral, mas para o aluno, esse exemplo pode ser considerado como a totalidade, não como uma ilustração da generalidade, mas a generalidade em si mesma.

Neste sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) também destacam a generalização como um elemento central do pensamento algébrico e assinalam ainda que as tarefas envolvendo generalizações promovem a capacidade de abstração, desenvolvendo a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático.

As propriedades da igualdade foram explicadas no 4º capítulo, no qual abordamos as diversas compreensões sobre o sentido do sinal de igualdade: operacional, equivalência e relação funcional, apontados por Ponte, Branco e Matos (2009). Para aprofundar essa compreensão, referenciamos autores como Van de Walle (2009), Booth (1995), Kieran (1992, 2004), Vale e Pimentel (2011) e Vale *et al.* (2011), quando percebemos que o sentido operacional é muito mais utilizado que os demais. Portanto, é necessário destacar o trabalho com o sentido mais amplo da igualdade, que é o sentido de equivalência, pois os alunos vão avançando em sua escolarização e atribuindo apenas o sentido operacional para a igualdade, conforme ressalta Van de Walle (2009):

> Certamente os estudantes são informados na 1.ª série de que o sinal de igual significa "é o mesmo que" e é dito a eles que as expressões de cada lado devem ter o mesmo valor. Porém, as experiências dos estudantes os levam a acreditar que um lado do sinal de igual – normalmente o lado esquerdo – é o problema e o outro lado é a resposta. Sua compreensão do sinal (=) é próximo do significado da tecla na calculadora – é o que você tecla para obter a resposta. No formato escrito ele separa o problema da resposta. (VAN DE WALLE, 2009, p. 288).

Van de Walle (2009) afirma que o "=" é um símbolo muito mal compreendido e que os professores precisam promover discussões para que os alunos internalizem que o sinal de igualdade tem sentido de equivalência – significa "ser o mesmo que". Enfatiza a importância de usar o pensamento relacional, ou seja, de usar relações numéricas entre os dois lados da igualdade para solucionar expressões com um termo desconhecido e que apresentam uma igualdade (equivalência), sem calcular quantidades.

Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, nesta pesquisa focamos nas estratégias de ensino, sendo que os professores entrevistados citaram, inicialmente, várias estratégias importantes que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Porém, como não compreendem alguns aspectos do conhecimento específico do conteúdo, essas estratégias acabam não sendo usadas para essa finalidade. Já as estratégias citadas são gerais e servem para ensinar outros conteúdos do currículo. Por isso, é necessário conhecer o conteúdo específico e usar as estratégias adequadas para ensinar cada tópico ligado ao pensamento algébrico. Nas entrevistas reflexivas-formativas buscamos relacionar o conhecimento específico do conteúdo com o conhecimento pedagógico voltado às estratégias de ensino. Analisamos que, para implementar metodologias que garantam a aprendizagem dos alunos, é preciso que os professores também tenham conhecimento do conteúdo que deverão ensinar, corroborando com as palavras de Shulman quando diz que o “simples conhecimento do conteúdo é provável que seja tão inútil como a habilidade pedagógica sem conteúdo” (1986, p. 8, tradução nossa).

O conhecimento sobre o desenvolvimento dos conteúdos ao longo do currículo é importante, pois pode levar o professor a valorizar mais determinada atividade ou conteúdo, já que entende que o aluno dará sequência a esse estudo posteriormente. Após os professores realizarem a generalização de uma sequência proposta no livro do 5º ano, os comentários foram no sentido de que o professor precisa conhecer sobre a generalização, a importância dela para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para os estudos posteriores de Álgebra, além das estratégias adequadas para que os alunos realizem generalizações. Eles acreditam que os alunos podem desenvolver generalizações, mas que isso demanda conhecimento dos profissionais para desenvolver e valorizar a tarefa.

A sequência generalizada pelos professores no 7º capítulo trazia 4 palitos na figura 1, 7 na 2, 10 na 3 e 13 na 4: . A generalização algébrica realizada pelo Prof. 26, usando a linguagem natural proposta para os Anos Iniciais, a fim de descobrir o número de palitos de uma figura qualquer da sequência é “3 vezes o número de quadrados mais 1”, sendo possível, com essa lei de formação, descobrir o número de palitos para qualquer número de quadrados da sequência. Já nos Anos Finais do Ensino Fundamental os alunos podem partir da linguagem natural e utilizar também a linguagem matemática, expressando essa generalização com a expressão “3x + 1”. Para calcular o número de palitos de 20 quadrados, o Prof. 94 realizou outra generalização: ao excluir o primeiro quadrado com quatro palitos, fez 20 – 1 e multiplicou o resultado por 3, o número de palitos dos demais quadrados. Ao final acrescentou 4, o número de palitos do quadrado excluído anteriormente. A resolução foi expressa da seguinte forma: *(20 – 1).3 + 4 = 19.3 + 4 = 61.* Na linguagem matemática, nos Anos Finais, essa generalização para determinar o número de palitos para qualquer número de quadrados poderia ser escrita como: (x – 1).3 + 4.

Ao propor para os alunos uma generalização como a descrita anteriormente, o professor precisa aliar seus conhecimentos acerca do conteúdo, sobre estratégias que possam favorecer essa aprendizagem e sobre como uma generalização pode ser expressa pelos alunos ao longo do currículo. Portanto, conhecimentos relacionados ao conteúdo específico e também pedagógicos e curriculares precisam estar presentes nos processos de ensino.

Desta forma, entendemos como relevante levar em consideração as vertentes do conhecimento apontadas pelo psicólogo e pedagogo americano Lee Shulman (1986, 1987), pela relação com muitos dos relatos efetuados pelos professores participantes da pesquisa. No 2º capítulo foram explicadas todas as categorias de conhecimento propostas pelo autor, mas para fins de delimitação, esta pesquisa se centrou em três delas, a saber: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo em relação às estratégias de ensino e o conhecimento curricular voltado às articulações entre os conteúdos dos Anos Iniciais e dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Para Shulman (1986, 1987), o conhecimento do conteúdo da disciplina a ser ensinada envolve a sua compreensão e organização, enquanto que o conhecimento pedagógico ou o conhecimento didático do conteúdo se trata de uma combinação que envolve o conhecimento do conteúdo e o modo como se ensina, a fim de tornar determinado saber compreensível ao aluno, o que envolve as maneiras de apresentação, abordagens e estratégias de ensino. Com relação ao conhecimento do currículo, Shulman define que esse tipo de saber envolve a capacidade de efetuar todo o tipo de articulação entre os conteúdos de anos anteriores e subsequentes, incluindo os materiais necessários para tal.

O conhecimento especializado do conteúdo é uma das subdivisões do conhecimento do conteúdo, explicado no 2º capítulo por Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), e faz-se necessário em muitos momentos para ensinar Álgebra aos alunos dos Anos Iniciais. Por exemplo, quando o professor precisa compreender diferentes generalizações distantes e/ou algébricas que podem ser criadas por alunos e que ele precisa analisar se estão corretas, ou então, se servem para determinar o número de elementos de um termo qualquer da sequência. Esse é um conhecimento necessário ao professor, e na possibilidade de a generalização estar incorreta, ele precisa produzir questionamentos a fim de que o aluno tente produzir outra adequada à tarefa proposta. Outro exemplo diz respeito às intervenções que o professor precisa fazer ao perceber uma resposta incorreta e, dessa forma, contribuir para a aprendizagem dos alunos. Na entrevista reflexiva/formativa apresentamos aos professores um texto contendo a escrita matemática de uma generalização produzida por um aluno, na qual foram necessárias duas mediações de modo que a escrita ficasse correta: primeiro o aluno representou o registro de seu pensamento usando a expressão 8 x 2 para o dobro de 8, quando na verdade é 2 x 8. E depois que a professora fez a primeira intervenção, o aluno escreveu 2 x 8 = 16 – 1 = 15, quando ela teve que fazer uma nova intervenção para que ele escrevesse a expressão respeitando o sentido de equivalência da igualdade, erro que precisa ser corrigido e que pode estar ligado ao sentido operacional, muito usado nas escolas. A incongruência na expressão escrita pelo aluno não foi percebida pela maioria dos professores entrevistados na pesquisa, revelando que o conhecimento especializado para o ensino da unidade temática Álgebra precisa ser desenvolvido.

De acordo com Litoldo, Almeida e Ribeiro, o conhecimento especializado permite ao professor "prever diferentes possibilidades de resolução antes de propor o problema aos alunos bem como optar por uma das formas de explorar uma solução a este que efetivamente permita atribuir sentido ao que se faz e ao porque se faz" (2018, p. 16). De acordo com os autores, o professor precisa antecipar uma diversidade de respostas possíveis e pensar em soluções inesperadas que podem surgir em sala de aula, permitindo obter respostas não só da forma esperada, mas também por meio de caminhos alternativos.

O conhecimento adquirido na Educação Básica, presente entre os professores, pode também influenciar o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais. De modo geral, os professores que lembram da matéria estudada na Educação Básica a associam a letras ou símbolos, ao passo que também relatam uma Álgebra abstrata, que envolvia decorar regras e fórmulas, além da prática de muitos exercícios repetitivos. Há pouca relação entre os conteúdos estudados na Educação Básica e a Álgebra que os professores precisam ensinar nos Anos Iniciais, visando desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Esses mesmos professores não estudaram sobre o ensino de Álgebra para os Anos Iniciais na Graduação, por isso, é compreensível que tenham muitas dúvidas em relação ao ensino dessa unidade temática.

De acordo com Tardif, os saberes experienciais do professor decorrem "em grande parte de preconcepções do ensino e da aprendizagem herdadas da história escolar" (2002, p. 72). O autor destaca que parte importante da competência profissional dos professores tem suas raízes em sua escolarização pré-profissional e que esse legado da socialização escolar permanece forte e estável por muito tempo. Neste sentido, é muito importante que os professores que não estudaram sobre o ensino de Álgebra para os Anos

Iniciais durante a graduação ou em outras formações passem a ter formações continuadas sobre a temática, uma vez que suas experiências se referem apenas aos estudos da Educação Básica.

Tardif (2002) descreve como que diversos saberes influenciam na prática profissional dos professores, incluindo aqueles oriundos de tradições escolares:

> Ao agir, o professor se baseia em vários tipos de juízos práticos para estruturar e orientar sua atividade profissional. [...] Para atingir fins pedagógicos, o professor se baseia em juízos provenientes de tradições escolares, pedagógicas e profissionais que ele mesmo assimilou e interiorizou. Ele se baseia, enfim, em sua "experiência vivida" enquanto fonte viva de sentidos a partir da qual o próprio passado lhe possibilita esclarecer o presente e antecipar o futuro. Valores, normas, tradições, experiência vivida, são elementos e critérios a partir dos quais o professor emite juízos profissionais. (TARDIF, 2002, p. 66).

Segundo Tardif (2002), se as crenças e as atitudes determinadas pelos saberes da escolarização básica não forem modificadas em processos de formação, elas irão provocar interferências na atuação profissional dos professores.

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro destacam a importância do conhecimento docente para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, pois, "para que se possa almejar desenvolver um Pensamento Algébrico com os alunos e nos alunos, torna-se essencial que o próprio professor detenha o conhecimento desse pensamento e sobre ele" (2017, p. 501). Para tanto, citam Nye *et al.* (2004), que afirmam que o conhecimento do professor tem mais influência nos resultados e aprendizagens dos alunos do que outros fatores, como os socioculturais ou econômicos, por exemplo.

Investigar os conhecimentos dos professores em relação ao ensino de Álgebra nos Anos Iniciais se torna um elemento muito importante na medida em que o "sucesso na implementação de novas orientações curriculares depende do modo como os professores lidam com elas", conforme afirmam Cyrino e Oliveira (2011, p. 122). As autoras citam Blantom e Kaput (2005) e Jacobs *et al.* (2007), argumentando que é de extrema "importância que os professores estejam preparados para identificar e compreender os diferentes tipos de pensamento algébrico expressos pelos alunos, sejam estes manifestados por meio de ações programadas pelo professor ou de modo espontâneo" (p. 122). E destacam o suporte profissional necessário quando são implantadas novas orientações curriculares:

> A capacidade de os professores identificarem diferentes tipos de pensamento algébrico é condição necessária para que eles possam explorá-los, em sala de aula, nos momentos em que estes são manifestados. No entanto, para que tal aconteça é necessário providenciar formas de suporte profissional para que eles

> desenvolvam capacidades que possibilitem a execução das novas orientações curriculares de uma forma sustentada. (CYRINO e OLIVEIRA, 2011, p. 122).

Blantom e Kaput (2011) destacam que é preciso investir no desenvolvimento do conhecimento didático e matemático dos professores sobre como construir um pensamento funcional[9], um dos temas importantes para a construção do pensamento algébrico, e que as inovações curriculares isoladamente não trazem mudanças na aprendizagem matemática das crianças. Para os autores, os alunos desenvolvem um pensamento funcional em salas de aula onde os professores promovem de forma intencional a criação de conjecturas, argumentação e generalização, como formas de construir conhecimento. E reiteram que o respeito e o incentivo a esses processos precisa ser uma prática constante.

De acordo Kieran *et al.* (2016), os currículos podem ter um impacto limitado sobre o que acontece em sala de aula, pois o desenvolvimento do pensamento algébrico em salas elementares requer desenvolvimento profissional. "Primeiro, os professores devem aprender o conteúdo que pretendem ensinar. Se os professores entenderem Matemática como procedimentos para calcular e resolver problemas, eles devem ampliar sua visão para incluir a procura e o exame da estrutura" (2016, p. 22, tradução nossa). Para tanto, os autores ressaltam que os professores devem reorientar sua prática para desenvolver a disposição de ouvir as ideias matemáticas dos alunos e aprender a liderar discussões. Eles devem "aprender tipos de perguntas e respostas que atrairão a atenção dos alunos ao conteúdo a ser explorado e ajudá-los a criar novas conexões" (p. 22, tradução nossa).

Neste sentido, de acordo com Ponte e Branco, "é essencial que o professor tenha em atenção os aspectos matemáticos e didáticos relativos ao ensino da Álgebra de modo a preparar e concretizar situações de aprendizagem que visem esse desenvolvimento" (2013, p. 136).

A unidade temática Álgebra foi recentemente incorporada ao currículo dos Anos Iniciais. Por esse motivo, a formação se torna indispensável para que os saberes dos professores em relação a essa temática possam ser ampliados e para que atividades algébricas possam ser efetivamente implementadas junto aos alunos. Os resultados deste estudo estão consistentes com a literatura existente, que indica a necessidade de investir

---

[9] Neste trabalho, quando se fala em produzir generalizações distantes e/ou algébricas a partir de sequências, isso se refere ao desenvolvimento do pensamento funcional, que também pode ser desenvolvido a partir de outros temas.

no conhecimento docente para que o pensamento algébrico possa ser trabalhado de forma efetiva nas salas de aula.

9 CONCLUSÃO

Iniciei a dissertação falando de minha história e da trajetória até chegar ao mestrado. Nesta conclusão, novamente em primeira pessoa, compartilho um pouco sobre as oportunidades para novas aprendizagens que me foram oferecidas e sobre os conhecimentos que adquiri nesse processo.

Com a realização desta investigação, aprofundei o meu conhecimento sobre diversos temas da Educação Matemática, principalmente em relação ao ensino da Álgebra, com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Antes de cursar o mestrado, havia lecionado vários anos para turmas dos Anos Iniciais, passando a atuar depois junto aos Anos Finais e ao Ensino Médio, e desde 2010 atuo apenas junto aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Eu tive muitas experiências em sala de aula, mas considero que eu conhecia muito pouco sobre o pensamento algébrico. Com a entrada no mestrado, consegui um afastamento de dois anos para me dedicar aos estudos e à pesquisa, de modo que retorno como professora de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental em 2020 com muito mais conhecimento e na esperança de trazer contribuições ao meu contexto de trabalho. Deste modo, considero que esta experiência de pesquisa contribuiu para o meu desenvolvimento profissional para o ensino da unidade temática Álgebra e para a compreensão de que o trabalho a realizar deve focar no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Tive muitas oportunidades para adquirir novos conhecimentos durante o mestrado. Participei de dois grupos de estudo, o GEPPROFEM e o ICEM, citados ao início da dissertação, cujos espaços foram valiosos, onde não só ocorria o compartilhamento de referenciais teóricos, mas também se vivenciava momentos de trocas importantes, pois se aprende muito com os professores formadores e os colegas. Todas as disciplinas cursadas trouxeram muitas contribuições para compreender temas da Educação Matemática. Além disso, tive a oportunidade de participar de eventos nacionais e internacionais na área. Dei aulas e palestras sobre pensamento algébrico para estudantes do curso de Pedagogia, apresentei em seminários e congressos, ministrei *workshop* e oficina para professores sobre o tema. A cada nova oportunidade, ocorreram muitas aprendizagens.

Esta pesquisa teve como objetivo investigar conhecimentos de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre Álgebra e seu ensino.

Iniciamos[10] o levantamento de dados através de questionários e entrevistas aplicados a professores dos Anos Iniciais da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis/SC, seguindo, como metodologia de pesquisa, a *Grounded Theory* (TAROZZI, 2011; CHARMAZ, 2009), também conhecida como Teoria Fundamentada nos/em Dados.

O objetivo era estudar os saberes dos professores para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, buscamos fundamentar a pesquisa na perspectiva teórica de Shulman (1986, 1987), que aborda a base de conhecimentos para o ensino, e depois, focar no conhecimento específico do conteúdo e no conhecimento pedagógico do conteúdo, pensando em estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra e no saber curricular. Foram feitas também algumas relações com o conhecimento especializado do conteúdo, sob a perspectiva de Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017). O objetivo não era categorizar os saberes dos professores, embora se relacionassem com os já citados.

Trouxemos à tona as falas de diversos pesquisadores que destacam a importância da formação de professores para trabalhar com a construção do pensamento algébrico. Não é suficiente esse conteúdo estar na BNCC, é preciso preparar os professores para trabalhar com essa unidade temática nova no currículo, para que esse ensino ocorra efetivamente. Destaca-se, nesse caso, o comentário do Prof. 31 que, durante a entrevista reflexiva/formativa, retratou esta situação: *"Para que tudo isso aconteça precisa ter formação, que aqui não teve ainda. Não basta colocar na BNCC e na Proposta da rede e deixar o professor se virar. Os professores também não estudaram como ensinar isso durante a graduação. Dos tempos da escola nós só lembramos das contas com x e das fórmulas. Mas isso não é suficiente para ensinar pensamento algébrico nos Anos Iniciais".*

Realizamos uma retrospectiva para entender a história da Álgebra e a trajetória de seu ensino no Brasil, algo que pode estar influenciando até hoje os processos de ensino que focam em memorização de fórmulas ou procedimentos, sem o objetivo de construir o pensamento algébrico. A fala dos professores exemplifica isso: *"A gente só aprendeu decorando regras e não entendeu o que é uma equação. Parecia que o objetivo era resolver, resolver, praticar..."* (Prof. 27). "*Na escola a gente fazia sem saber porquê, sem levar em conta a equivalência entre um e o outro lado da igualdade. Tinha que achar o*

[10] Voltamos a usar a primeira pessoa do plural, pois nos retratamos à pesquisa.

resultado" (Prof. 44). "*A gente fazia assim porque obedecíamos uma sequência, regras que nos eram apresentadas, eu só não entendia porque fazia aqueles procedimentos"* (Prof. 31).

E depois, buscamos caracterizar o pensamento algébrico, enfatizando a importância de sua introdução nos Anos Iniciais através da perspectiva de diversos pesquisadores. Além disso, no 4º capítulo, centramos a discussão nas dimensões que a BNCC destaca para serem trabalhadas com os alunos desse nível de escolaridade: regularidades e generalização de padrões e as propriedades da igualdade. Neste capítulo, o intuito era compreender o uso de padrões em sequências repetitivas e recursivas, que podem contribuir para desenvolver a ideia de generalização, promovendo o pensamento algébrico. Foram abordadas também as propriedades da igualdade, dada a importância do trabalho com o sentido acerca da equivalência. A elaboração desse capítulo foi muito importante porque oportunizou uma maior compreensão sobre a Álgebra a ser ensinada aos alunos dos Anos Iniciais, fornecendo subsídios para a construção da entrevista reflexiva/formativa.

Com a codificação de 98 questionários e das duas primeiras entrevistas, obtivemos, nesta pesquisa, a saturação de duas categorias: "Formação para trabalhar a unidade temática Álgebra" e "Implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos". Na análise de dados a partir da resposta dos professores da RMEF, foi possível concluir que:

- 74,5% não tiveram formação sobre o tema, enquanto outros contaram com formações pontuais, consideradas insuficientes.
- Parte relatou não ter clareza sobre o que é a Álgebra.
- 74,5% se sentem pouco ou nada preparados em relação aos conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais.
- Mais da metade afirma não ter clareza sobre a presença de atividades de Álgebra no livro didático e sobre o uso ou não de letras para ensinar a matéria nos Anos Iniciais.
- 60,2% não planejam e desenvolvem atividades que promovem o pensamento algébrico ou o fazem com pouca frequência, sendo que o motivo mais citado é a falta de conhecimento ou a formação para trabalhar a unidade.

A terceira categoria desta pesquisa: "Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino", foi ampliada com entrevistas reflexivas/formativas planejadas devido aos vários elementos observados na fase anterior do estudo, com a aplicação dos questionários e dos primeiros encontros. Diversos recortes dessas entrevistas, apresentadas no 7º capítulo, procuram abranger os vários aspectos da Álgebra a ser ensinada para alunos dos Anos Iniciais.

A categoria “Conhecimentos de professores sobre Álgebra e seu ensino” é a Categoria Central desta pesquisa e apresenta três subcategorias: “Dimensões da Álgebra proposta na BNCC para os Anos Iniciais e suas relações com os anos subsequentes”, “Estratégias para o ensino da unidade temática Álgebra” e “A Álgebra estudada pelo professor na Educação Básica e/ou na Graduação”.

Nas entrevistas reflexivas/formativas, focamos na generalização de padrões em sequências e no sentido de equivalência da igualdade. Após a sua consequente codificação e análise, concluímos que ocorreu a saturação dos dados da pesquisa.

A generalização de padrões em sequências foi priorizada porque os professores inicialmente não fizeram relação entre o trabalho com as sequências e a generalização, fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico. A conversa sobre as generalizações dos alunos, observadas a partir do estudo de um texto, e a generalização vivenciada pelos professores usando as estratégias adequadas, fizeram com que estes concluíssem que aqueles podem desenvolver essa habilidade. Isso se reflete na fala de um dos professores: *“Eu acho que os alunos poderiam fazer esse tipo de generalização, mas envolve todo um processo de montar as sequências com material concreto, incluindo os próximos termos da sequência, preencher a tabela. E o professor instigando, estimulando e direcionando, questionando. Nesse caso, eu acho que sim”* (Prof. 44).

Após os professores realizarem uma generalização, outra fala destaca a importância do conhecimento para se trabalhar o tema: *“Eu achei essa atividade bem interessante. Sabe qual é a vantagem dessa atividade? Ela é instigante. Mas o professor precisa estar preparado para fazer esse trabalho, caso contrário, pode nem atribuir a importância devida pra essa atividade. Pensar é muito mais importante do que apenas operar. Nessa questão, eles conseguem refletir para criar essa regra que permite achar o número de palitos para qualquer figura da sequência, mas não é uma tarefa fácil”* (Prof. 31).

Outro tema em destaque nas entrevistas foi o sentido de equivalência da igualdade. Inicialmente, percebemos que alguns professores tinham conhecimento sobre o sentido de equivalência do sinal de igual, enquanto outros precisavam ampliá-lo. Então, na segunda fase de entrevistas, buscamos analisar o sentido de equivalência da igualdade em diversas questões, quando trouxemos à tona a importância de se usar o pensamento relacional que permite ver a estrutura de uma operação e a equivalência entre os dois lados da igualdade, sem recorrer a algoritmos. Após vivenciar o uso do pensamento relacional, um dos professores aportou um relato muito significativo: *"O nosso pensamento de operação é tão forte e tão habitual que isso nem me ocorreu. Eu já somei logo um lado e diminuí no outro. Durante nosso período de escola e nossa vida fomos muito habituados a calcular, então, isso de relacionar os dois lados nem me passou pela cabeça".* E na sequência concluiu: *"Bem mais prático. Só que nós não usamos porque não aprendemos dessa forma. Mas para os nossos alunos seria bem importante"* (Prof. 94).

Já nos diálogos envolvendo estratégias de ensino e materiais manipuláveis como as barrinhas cuisenaire, que os professores ainda não haviam usado com essa finalidade, cabe destacar uma fala sobre o uso de balanças de equilíbrio: *"Dessa forma, é muito bom para que os alunos entendam, pois a balança precisa ficar sempre em equilíbrio"* (Prof. 31). E após o uso das barrinhas: *"Eu achei bem interessante, é um material concreto, colorido, atrativo, e os alunos conseguem ver a equivalência, porque os comprimentos das barrinhas ficam iguais dos dois lados"* (Prof. 31).

Em todos os temas abordados nas entrevistas, o objetivo era relacionar os conteúdos algébricos dos Anos Iniciais com os conteúdos dos anos subsequentes, dentro do currículo. O fato de o professor reconhecer a importância dos alunos aprenderem determinado conceito, que será retomado em séries posteriores e ampliado, pode levá-lo a empenhar-se na incorporação de estratégias que favoreçam a aprendizagem daquele conteúdo.

Com esta pesquisa, compreendemos que há a necessidade de formação para que os professores se sintam preparados acerca de seus conhecimentos para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais e, dessa forma, desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Grande parte dos professores tem conhecimentos relativos à Álgebra, oriundos apenas dos estudos dessa temática na Educação Básica, na qual era muito abstrata, pois envolvia decorar regras e símbolos, sem priorizar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Há, portanto, a necessidade de ampliar o saber dos docentes em relação a essa temática para que o ensino de Álgebra possa ser implementado junto aos alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Fundamentados em toda a pesquisa realizada nesta dissertação, e principalmente nos diálogos estabelecidos durante as entrevistas reflexivas/formativas, defendemos que os professores precisam de formação envolvendo a unidade temática Álgebra. Acreditamos que a formação deva partir da identificação do conhecimento dos professores sobre os temas que serão abordados e articular o conhecimento específico e especializado do conteúdo com as estratégias para o ensino e com as relações entre os conteúdos matemáticos no currículo escolar.

Encerro[11] este trabalho agradecendo aos professores que participaram deste estudo. Fui muito bem recebida pelos grupos na aplicação dos questionários e durante as entrevistas, pois o interesse e a colaboração foram inegáveis. Por esse motivo, durante a conclusão, destaquei a fala dos professores que ilustram a receptividade para a discussão acerca da Álgebra e do pensamento algébrico. Agradeço também aos professores formadores da RMEF, do Núcleo de Anos Iniciais, que colaboraram imensamente com a pesquisa.

[11] Novamente uso a primeira pessoa do singular.

10 REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. A. de. "Ensino de Álgebra e formação de professores"**. Educ. Mat. Pesqui**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BAUMGART, J. K**. Tópicos de história da Matemática para o uso em sala de aul**a – v. 4. São Paulo: Atual, 1992.

BECK, V. C. **Invariantes Operatórios do campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do terceiro ano do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado. Educação em Ciências. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2018.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. "Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning". **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 36, n. 5, p. 412-443, nov. 2005.

BLANTON, M.; KAPUT, J. "Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades". In: CAI, J; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**. A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer, 2011, p. 5-23.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E. *et al.* "The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade". **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 46, n. 1, p. 39-87, 2015.

BOOTH, L. R. "Dificuldades das crianças que se iniciam em algebra". In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**, São Paulo: Atual, 1995.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum**: BNCC. Brasília: MEC, 2017.

CANAVARRO, A. P. "O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos"**. Quadrante**, Lisboa-Portugal, v. XVI, n. 2, p. 81-118, 2007.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.; BRIZUELA, B. M. *et al.* "Arithmetic and algebra in early mathematics education". **Journal for Research in Mathematics Education***,* Reston, v. 37, n. 2, p. 87-115, mar. 2006.

CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada**. Porto Alegre: ArtMed, 2009.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. de. "Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal". **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 97-126, abr. 2011.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática 1º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017a.

______. **Ápis Matemática 2º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017b.

______. **Ápis Matemática 3º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017c.

______. **Ápis Matemática 4º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017d.

______. **Ápis Matemática 5º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3 ed. São Paulo: Ática, 2017e.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. "Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental". **Zetetiké,** Campinas, v. 25, n. 3, p. 496-514, set./dez. 2017.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. "Contribuição para um Pepensar... a Educação Algébrica Elementar". **Pro-posições**, Campinas, UNICAMP, v. 4, p. 79-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTOVÃO, E. "Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações Matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico". In: Seminário luso-brasileiro de investigações Matemáticas no currículo e na formação do professor, 2005, Lisboa. **Anais...** Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

HANKE, T. A. F. **Padrões de regularidades:** Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.

KAPUT, J. J. **Teaching and learning a new algebra, 1999.** Disponível em: www.educ.fc.ul.pt. Acesso em: 22 jun. 2018.

KIERAN, C. "Algebraic thinking in the early grades: What is it?" **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

KIERAN, C.; PANG J. S.; SCHIFTER, D; NG, S. F. **Early Algebra.** Research into its Nature, its Learning, its Teaching. Hamburg: Springer Open, 2016.

LIMA, J. R. de C.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra e o pensamento algébrico na proposta de Base Nacional Curricular Comum para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Rev. Prod. Disc. Educ. Matem.**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 197-208, 2017.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perpectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 1997.

LITOLDO, B. F.; ALMEIDA, M. V. R. de; RIBEIRO, M. “Conhecimento especializado do professor que ensina matemática: uma análise do livro didático no âmbito das frações”. **Tangram, Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 1, n. 3, p. 03-23, 2018.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, S.; OLIVEIRA, C. F. dos S.; MERLINI, V. “O Raciocínio Algébrico no Ensino Fundamental: O debate a partir da visão de quatro estudos”. **Em teia, Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** v. 9, n. 1, p.1-23, 2018.

MASON, J. “Expressing generality and roots of algebra”. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches of algebra:** perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 65-86.

______. “How Early Is Too Early for Thinking Algebraically?” In: KIERAN, C. (Ed.). **Teaching and Learning Algebraic Thinking**. Hamburg: Springer International Publishing, 2018, p. 329-350.

MENDONÇA, J. R. C. de; MELO, R. de C. B. de; PADILHA, M. A. S. “O ATLAS.TI para análise de fotos na pesquisa qualitativa: uma discussão ilustrada sobre os métodos visuais na educação”. In: X Congresso Nacional de Educação - EDUCERE. **Anais...** Curitiba, 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A. “Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?” **Pro-posições**, v. 3, p. 39-54, 1992.

Principles and standards for school mathematics. Reston: NCTM, 2000.

NOBREGA, M. C.; RIBEIRO, F. M.; SILVA, T. H. I. “Matemática nos Anos Iniciais e o desenvolvimento do pensamento algébrico”. In: RIBEIRO, A. J.; BEZERRA, F. J. B.; GOMES V. M. S. (Orgs.) **Formação de professores que ensinam Matemática e a Álgebra da educação básica:** Um projeto desenvolvido na Universidade Federal do ABC no âmbito do Observatório da Educação. Campinas: Edições Leitura Crítica, 2017, p.171-188.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa: ME - DGIDC, 2009.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N. “Pensamento algébrico na formação inicial de professores”. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013.

RADFORD, L. “Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective”. In: ALATORRE, J. L. S.; CORTINA, M. S.; MÉNDEZ, A. (Eds.). **Proceedings...** Vol. 1. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006, p. 2-21.

______. “Layers of generality and types of generalization in pattern activities”. **PNA**, 4 (2), p. 37-62, 2010.

______. “The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities”. **For the Learning of Mathematics,** 30 (2), p. 2-7, 2010.

RIBEIRO, J. **Novo pitanguá:** Matemática 2º ano. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

SANTOS, C. C. S.; LUVISON, C. da C.; MOREIRA, K. G. **“**A construção do pensamento algébrico no Ensino Fundamental I: possíveis trabalhos para a percepção de regularidades e de generalizações”. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (Orgs.) **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Educação Básica:** Compartilhando Propostas de Sala de Aula com o Professor que Ensina (Ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática 2018. (Coleção SBEM, 12).

SHULMAN, L. S. “Those who understand: Knowledge growth in teaching”. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, feb. 1986.

______. “Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform”. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987. Tradução de Leda Back. “Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma”. **Cadernos Cenpec**, v. 4, n. 2, p. 196-229, 2014.

SILVESTRE, A. I.; FARIA, A.; SOUZA, H. *et al.* “Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º anos”. In: GTI (Org.). **O Professor e o Programa do Ensino Básico**. Lisboa: APM, 2010, p. 89-119.

SOUSA, M. do C. de; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

STACEY, K. “Finding and using patterns in linear generalizing problems”. **Educational Studies in Mathematics,** 20, p. 47-164, 1989.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TAROZZI, M**. O que é grounded theory?** Metodologia de pesquisa e de teoria fundamentada nos dados. Rio de Janeiro: Ed. Vozes, 2011.

TOLEDO, C. M. **Buriti Mais Matemática 2º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017a.

______. **Buriti Mais Matemática 5º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017b.

VALE, I.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T. *et al.* **Padrões em Matemática:** uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto, 2011.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. **Os padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra.** Lisboa: SEM-SPCE, 2007. Disponível em: http://dspace.uevora.pt. Acesso em: 05 mar. 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T. "Padrões e Conexões Matemáticas no Ensino Básico". In: **Educação e Matemática**, Lisboa, 2011. Disponível em: www.academia.edu. Acesso em: 09 mar. 2019.

______. "O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores". **Da Investigação às Práticas**, 3(2), p. 98-124, 2013.

VAN DE WALLE. J. A. **A Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A – Carta de apresentação

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

CARTA DE APRESENTAÇÃO

Florianópolis, 22 de novembro de 2018.

Aos senhores,
Diretor de Ensino Fundamental
Diretora de Formação Continuada

Venho, por meio desta carta, apresentar a acadêmica Adriana Jungbluth (matrícula UFSC: 201800692, matrícula PMF: 25901-2), minha orientanda no curso de mestrado pelo Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, junto à Universidade Federal de Santa Catarina. A mesma é professora efetiva de Matemática no Ensino Fundamental na rede municipal de ensino de Florianópolis desde 2010. A acadêmica é formada em Matemática pela UNOESC Chapecó, com especialização em Educação Matemática pela Unochapecó.

No desenvolvimento da pesquisa — ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?, a professora Adriana Jungbluth tem a intenção de coletar dados, utilizando questionários e entrevistas, com professores dos Anos Iniciais que estarão participando da formação continuada da rede, preferencialmente na formação do mês de março de 2019. Dessa forma, essa carta ainda tem a intenção de solicitar anuência à Secretaria de Educação de Florianópolis para o desenvolvimento da pesquisa que ocorrerá durante o ano 2019.

Ressaltamos que o projeto de pesquisa passará por avaliação do Comitê de Ética em Pesquisas com Seres Humanos vinculado à UFSC, e que nos comprometemos a seguir as determinações da RESOLUÇÃO CNS Nº 466, DE 12 DE DEZEMBRO DE 2012 e complementares.

Atenciosamente,

Everaldo Silveira
Professor - MEN/CED/UFSC
Mat. SIAPE 1693072

Dr. Everaldo Silveira
Pesquisador Orientador

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa: — Álgebra no currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora? que será realizada por mim, Adriana Jungbluth, em nível de mestrado, sob a orientação do prof. Dr. Everaldo Silveira, junto ao Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina. Para que você possa contribuir com a minha pesquisa, é preciso que você assine esse Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, também chamado de TCLE, que nada mais é que um documento em que os convidados a participar de pesquisas científicas são informados de todas as características, objetivos, procedimentos, riscos e garantias ao participante, entre outros aspectos relacionados às pesquisas, além de fornecerem ao pesquisador sua anuência para a realização do estudo.

A realização desta pesquisa poderá fornecer elementos para a compreensão da percepção dos professores sobre o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais, sendo esta uma unidade temática recente, que apareceu pela primeira vez na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) aprovada no final de 2017. Como área de conhecimento, a Álgebra também está presente na Proposta Curricular da Rede Municipal de Ensino de Florianópolis 2016 e no livro didático de Matemática adotado pela rede no PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) 2019. A Álgebra nos Anos iniciais traz novas demandas para os professores que atuam nesse nível de ensino.

Nosso objetivo nessa pesquisa é evidenciar e discutir conhecimentos necessários aos professores para seguir as novas orientações curriculares e conduzir atividades que contribuam com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos educandos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para coletar os dados necessários à pesquisa, aplicaremos questionários e realizaremos entrevistas com alguns participantes, para as quais já solicitamos sua autorização para que sejam gravadas e posteriormente transcritas.

É importante que você saiba que, mesmo sendo uma pesquisa em que os dados são coletados por meio de questionários e entrevistas, há alguns riscos aos participantes envolvidos. Nós garantimos a você a manutenção do sigilo sobre as informações que nos fornecer, além de garantir preservação à sua privacidade. Porém, há a remota possibilidade da quebra do sigilo, mesmo que involuntário e não intencional dos dados que você está me fornecendo. Quanto a isso, informamos que se você sofrer qualquer prejuízo material ou imaterial comprovadamente relacionado à nossa pesquisa, você terá direito à indenização nos termos da lei. Você ainda poderá se sentir cansado ou desanimado ao responder as questões do questionário ou ao dialogar conosco durante a entrevista, mesmo sendo essa última feita no momento em que você julgar mais adequado e que for te causar o menor transtorno. Em qualquer uma dessas situações, você poderá remarcar a entrevista ou deixar para responder ao questionário em outro momento à sua escolha, além de poder, simplesmente desistir sem ter que nos dar maiores informações.

Essa pesquisa também não prevê benefícios diretos a você, mas tem o potencial de contribuir com a formação de professores na implementação do ensino de Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, através do desenvolvimento do pensamento algébrico dos educandos. A legislação brasileira não permite que você tenha qualquer compensação financeira pela sua participação em pesquisas. Por outro lado você não terá nenhuma despesa advinda de sua participação. Caso alguma despesa extraordinária associada à pesquisa venha a ocorrer, você será ressarcido pelos pesquisadores.

Informamos ainda que, a qualquer momento, você pode desistir da participação nessa pesquisa e retirar o seu consentimento sem qualquer prejuízo ou penalização. Duas vias deste documento estão sendo rubricadas e assinadas por você e pelo pesquisador responsável. Guarde cuidadosamente a sua via, pois é um documento que traz importantes informações de contato e garante os seus direitos como participante da pesquisa. O pesquisador responsável, que também assina esse documento, compromete-se a conduzir a pesquisa de acordo com o que preconiza a Resolução 466/12 de 12/06/2012, que trata dos preceitos éticos e da proteção aos participantes da pesquisa.

Você poderá entrar em contato com os pesquisadores da seguinte forma:

Adriana Jungbluth pelo telefone (48) 99144-6640, pelo e-mail: adriadrij@gmail.com, ou indo até a Escola Básica Municipal Osmar Cunha, situada à Rodovia Tertuliano Brito Xavier, 661, Canasvieiras, Florianópolis, ou fazendo contato com a escola pelo número: (48) 3266-5312 ou (48) 3282-5511.

Prof. Everaldo Silveira pelo telefone (48) 3721-2618, pelo e-mail: derelst@hotmail.com, ou indo até a sala 311/Bloco D do Centro de Ciências da Educação – CED da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC.

Você também poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da UFSC pelo telefone: (48) 3721-6094, e-mail: cep.propesq@contato.ufsc.br, ou pessoalmente na rua Desembargador Vitor Lima, nº 222, sala 401, Trindade, Florianópolis/SC.

____

Adriana Jungbluth
Pesquisadora Mestranda

____

Prof. Dr. Everaldo Silveira
Pesquisador Responsável

Eu, ____RG __________________, li este documento (ou tive este documento lido para mim por uma pessoa de confiança) e obtive dos pesquisadores todas as informações que julguei necessárias para me sentir esclarecido e optar por livre e espontânea vontade participar da pesquisa.

Escola onde atua ____

Florianópolis, _________ de ____________________________ de 2019.

Assinatura:____

APÊNDICE C – Autorização da Secretaria de Educação

PREFEITURA DE FLORIANÓPOLIS
EDUCAÇÃO

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
DIRETORIA DE GESTÃO ESCOLAR
GERÊNCIA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA
Rua Ferreira Lima, 82 – Centro
CEP 88014-420 – Florianópolis – SC
Telefones: (48) 32120922 – (48) 32120923

Florianópolis, 28 de novembro de 2018.

DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins e efeitos legais que, objetivando atender as exigências para a obtenção de parecer do Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, e como representante legal da Secretaria Municipal de Educação de Florianópolis (Gerência de Educação Continuada), tomei conhecimento do projeto de pesquisa: "Álgebra no currículo de matemática dos Anos Iniciais: e agora?", em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), nível de mestrado, no período de março a dezembro de 2019. O (a) pesquisador (a) Adriana Jungbluth está sob orientação do (a) Profª Dr Everaldo Silveira. Cumprirei os termos das Resoluções CNS nº 466/2012 e nº 510/2016 e suas complementares, e como esta instituição tem condição para o desenvolvimento deste projeto, autorizo a sua execução nos termos propostos.

Luciane Volken – Gerente
Gerência de Educação Continuada
Matrícula 29196-0

Luciane Volken
Gerente de Educação Continuada
Matrícula 29.196-0

APÊNDICE D – Folha de Rosto Plataforma Brasil

Plataforma Brasil MINISTÉRIO DA SAÚDE - Conselho Nacional de Saúde - Comissão Nacional de Ética em Pesquisa – CONEP

FOLHA DE ROSTO PARA PESQUISA ENVOLVENDO SERES HUMANOS

1. Projeto de Pesquisa:
ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DE MATEMATICA DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?

2. Número de Participantes da Pesquisa: 155

3. Área Temática:

4. Área do Conhecimento:
Grande Área 7. Ciências Humanas

PESQUISADOR RESPONSÁVEL

5. Nome:
Everaldo Silveira

6. CPF: 034.569.417-14	7. Endereço (Rua, n.º): CAPITAO ROMUALDO DE BARROS, 611 CARVOEIRA apto 604 FLORIANOPOLIS SANTA CATARINA 88040600		
8. Nacionalidade: BRASILEIRO	9. Telefone: (48) 9620-0468	10. Outro Telefone:	11. Email: dereist@hotmail.com

Termo de Compromisso: Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e a publicar os resultados sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do paramProjeto acima. Tenho ciência que essa folha será anexada ao paramProjeto devidamente assinada por todos os responsáveis e fará parte integrante da documentação do mesmo.

Data: 28 / 11 / 2018

Assinatura

INSTITUIÇÃO PROPONENTE

12. Nome: Universidade Federal de Santa Catarina	13. CNPJ:	14. Unidade/Órgão: Departamento de Metodologia de Ensino
15. Telefone: (48) 3721-9243	16. Outro Telefone:	

Termo de Compromisso (do responsável pela instituição): Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da Resolução CNS 466/12 e suas Complementares e como esta instituição tem condições para o desenvolvimento deste projeto, autorizo sua execução.

Responsável: Cláudia Regina Flores CPF: 838905899.49

Cargo/Função: Coordenador do PPGECT

Data: 28 / 11 / 2018

Assinatura

Professora Cláudia Regina Flores
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica
CFM/CED/CCB/UFSC
Portaria 2063/2018/GR

PATROCINADOR PRINCIPAL

Não se aplica.

APÊNDICE E – Parecer Consubstanciado do CEP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA - UFSC

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?

Pesquisador: Everaldo Silveira

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 04039318.8.0000.0121

Instituição Proponente: Departamento de Metodologia de Ensino

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.090.353

Apresentação do Projeto:

Mestrado de Adriana Jungbluth no PPG em Educação Científica e Tecnológica da UFSC, orientada por Everaldo Silveira. O projeto pretende investigar, segundo a hipótese de pesquisa, "quais conhecimentos os professores da rede municipal de ensino de Florianópolis demonstram ter para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico?"

No início do primeiro semestre de 2019, serão agendadas com a diretoria de educação continuada da secretaria de educação de Florianópolis as datas em que será realizada uma abordagem inicial aos professores de Anos Iniciais, no momento em que estiverem reunidos para a realização da formação mensal. Na Rede Municipal de Ensino de Florianópolis todos os professores têm, mensalmente, um dia de formação em que todos os profissionais que dão aula para as mesmas turmas se encontram, por exemplo, a formação dos terceiros anos é nas terças-feiras. No momento da primeira abordagem aos professores serão apresentados o projeto de pesquisa e o convite para participar, respondendo o questionário em anexo. O questionário que será proposto para todos os professores de Anos Iniciais da rede municipal de ensino, em torno de 150 professores, sendo que serão selecionados cerca de 5 professores para entrevistas. Os professores interessados em colaborar com as entrevistas irão assinalar isso no questionário. A entrevista ocorrerá em outra data, conforme a disponibilidade de cada um que será entrevistado.

Estão previstos 155 participantes (150 que irão responder ao questionário e 5 que irão participar das entrevistas).

Objetivo da Pesquisa:

OBJETIVO GERAL

Evidenciar e discutir conhecimentos necessários aos professores para seguir as novas orientações curriculares e conduzir atividades que contribuam com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos educandos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender se os professores tiveram formação inicial ou continuada sobre a unidade temática Álgebra e se estão encontrando dificuldades para atender essa nova orientação curricular, no contexto dos Anos Iniciais.

- Identificar como os profissionais se sentem com relação aos seus conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais.

- Evidenciar a visão dos professores quanto a importância do trabalho com a Álgebra nos Anos Iniciais.

- Analisar como está ocorrendo o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais, principalmente em relação às ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.

- Caracterizar e problematizar a percepção dos professores sobre questões de Álgebra presentes em livros didáticos do PNLD 2019, quanto aos objetivos das atividades e como as mesmas contribuem com a Álgebra dos anos posteriores.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Adequados, particularmente no TCLE.

Riscos:

Mesmo sendo uma pesquisa em que os dados são coletados por meio de questionários e entrevistas, há alguns riscos aos participantes envolvidos. Há a remota possibilidade da quebra do sigilo, mesmo que involuntário e não intencional dos dados fornecidos pelos participantes. Se houver qualquer prejuízo material ou imaterial comprovadamente relacionado à pesquisa, o mesmo terá direito à indenização nos termos da lei. O participante poderá se sentir cansado ou desanimado ao responder as questões do questionário ou durante a entrevista, mesmo sendo essa última feita no momento em que julgar mais adequado e que for causar o menor transtorno. Em qualquer uma dessas situações, o participante poderá remarcar a entrevista ou deixar para responder ao questionário em outro momento à sua escolha, além de poder, simplesmente desistir sem ter que dar maiores informações.

Benefícios:

Essa pesquisa não prevê benefícios diretos aos participantes, mas tem o potencial de contribuir com a formação de professores na implementação do ensino de Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, através do desenvolvimento do pensamento algébrico dos educandos. A legislação brasileira não permite que haja qualquer compensação financeira pela participação em pesquisas. Por outro lado não haverá nenhuma despesa advinda dessa participação. Caso alguma despesa extraordinária associada à pesquisa venha a ocorrer, o participante será ressarcido pelos pesquisadores.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Sem comentários adicionais.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

A folha de rosto vem assinada pelo pesquisador responsável e pela coordenadora do PPGECT da UFSC.

Consta no protocolo declaração da Gerência de Educação Continuada da PMF autorizando a pesquisa e comprometendo-se com os termos da res. 466/12 e 510/16.

Endereço: Universidade Federal de Santa Catarina, Prédio Reitoria II, R: Desembargador Vitor Lima, nº 222, sala 401
Bairro: Trindade **CEP:** 88.040-400
UF: SC **Município:** FLORIANOPOLIS
Telefone: (48)3721-6094 **E-mail:** cep.propesq@contato.ufsc.br

No projeto e em documentos anexos na PB constam o questionário e o roteiro de entrevista a serem empregados

O cronograma informa que a coleta de dados provavelmente se dará de 01/03/2019 a 30/04/2019.

O TCLE está adequado ao perfil dos participantes, esclarecedor a respeito dos objetivos, procedimentos e riscos da pesquisa, bem como dos direitos dos participantes, atendendo a essencialmente todas as exigências da res. 466/12.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Sem pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1265794.pdf	29/11/2018 23:56:09		Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	declaracao_da_instituicao.pdf	29/11/2018 23:55:35	ADRIANA JUNGBLUTH	Aceito
Brochura Pesquisa	Instrumentos_de_pesquisa.pdf	29/11/2018 23:51:40	ADRIANA JUNGBLUTH	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	projeto.pdf	29/11/2018 23:47:00	ADRIANA JUNGBLUTH	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_Adriana_Jungbluth.pdf	29/11/2018 23:32:56	ADRIANA JUNGBLUTH	Aceito
Folha de Rosto	folha_de_rosto.pdf	29/11/2018 23:23:57	ADRIANA JUNGBLUTH	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

FLORIANOPOLIS, 18 de Dezembro de 2018

Nelson Canzian da Silva (Coordenador(a))

APÊNDICE F – Roteiro dos questionários

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	

PESQUISA DE MESTRADO

ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?

Esta pesquisa de mestrado está sendo desenvolvida por mim, Adriana Jungbluth, sob a orientação do professor Dr. Everaldo Silveira e é direcionada pela seguinte questão: **Quais conhecimentos os professores da rede municipal de ensino de Florianópolis demonstram ter para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico?** O objetivo do questionário é de levantar as primeiras informações sobre o perfil profissional dos professores e suas práticas de ensino diante dessa nova unidade temática presente na Proposta Curricular da Rede Municipal de ensino de Florianópolis 2016 e na BNCC (Base nacional Comum Curricular) aprovada e homologada em dezembro de 2017.

As informações que você fornecer serão muito úteis para minha pesquisa e eu me comprometo a tratar todas as respostas confidencialmente. (Nenhum professor terá seu nome divulgado na pesquisa ou em quaisquer meios)

Questionário

Nome completo: ____

Ano de nascimento:___________

Escola em que atua em 2019:____

Situação funcional: (   ) Efetivo   (   ) Temporário

Contatos:

E-mail:____WhatsApp:(____)
____

Data da aplicação do questionário após a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido: ____________________________________

1ª PARTE: QUANTO A EXPERIÊNCIA DOCENTE E FORMAÇÃO PROFISSIONAL

1 – Tem experiência de quantos anos em classes de Anos Iniciais? __________

2 - Escolaridade:

Ensino Médio: (   ) Magistério   (   ) outro curso de Ensino Médio

Curso de Graduação: ( ) Completo ( ) Em curso Ano de conclusão: ______________
Instituição: ____________________________________ ( ) Pública ou ( ) Privada
Modalidade do nível superior: ( ) Presencial ( ) Semipresencial ( ) A distância

Especialização 1: ( ) Em Anos iniciais ( ) Em outra área da Educação

( ) Completo ( ) Em curso

Instituição: ____ ( )Pública ( ) Privada
Modalidade: ( ) Presencial ( ) Semipresencial ( ) A distância

Especialização 2: ( ) Em Anos iniciais ( ) Em outra área da Educação

( ) Completo ( ) Em curso Instituição: _______________________________________
( )Pública ( ) Privada Modalidade: ( ) Presencial ( ) Semipresencial ( ) A distância

Mestrado: ____ ( ) Completo ( ) Em curso
Instituição: ____ ( ) Pública ( ) Privada

Doutorado: ____ ( ) Completo ( ) Em curso
Instituição: ____ ( ) Pública ( ) Privada

2ª PARTE: SOBRE SUA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA E SUA PRÁTICA PEDAGÓGICA NO ENSINO DE ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS:

1- Você estudou Álgebra no Ensino Fundamental e Médio. O que você lembra quando escuta falar em Álgebra?

____

____

2 – Considerando apenas a sua formação inicial -GRADUAÇÃO- você teve alguma disciplina que abordou o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais?

( ) Sim ( ) Não

3- A Rede Municipal de Ensino de Florianópolis oferece 1 dia de formação mensal. Nas formações continuadas de que você vem participando na rede, o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais foi abordado?

( ) Sim ( ) Não

Se SIM, descreva em qual ano: __________

4- Você participou de formações em outros locais, grupos de estudo ou eventos sobre Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais?

( ) Sim ( ) Não

Se SIM, descreva onde ocorreu: ____

5- Responda essa questão apenas se você respondeu SIM na questão 3 ou na questão 4, ou em ambas.

Você considera que os cursos de formação continuada sobre Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais dos quais participou, contribuíram para a qualificação do seu trabalho em sala de aula?
( ) SIM ( ) NÃO ( ) NÃO SEI RESPONDER

Justifique:____
____

4- Na Proposta Curricular de Florianópolis, de 2016, atualmente em vigor, impressa e amplamente distribuída para as escolas e para os profissionais, a Álgebra aparece entre os objetivos de trabalho desde o primeiro ano, dentro do eixo Álgebra e Funções, um dos 5 eixos da Matemática. Como você se sente com relação aos seus conhecimentos e competências para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais?

( ) COMPLETAMENTE PREPARADO(A)

( ) MUITO PREPARADO(A)

( ) POUCO PREPARADO(A)

( ) NADA PREPARADO(A)
Justifique:____
____

5- Na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) aprovada pelo Conselho Nacional de Educação e homologada pelo Ministério da Educação e Cultura em dezembro de 2017 aparece uma nova unidade temática para ser trabalhada com os Anos Iniciais: a Álgebra. A escolha do livro didático do PNLD 2019 foi feita inicialmente nas escolas e depois com base nessas escolhas, os representantes das escolas votaram e definiram um livro para a Rede Municipal de Ensino de Florianópolis. O livro definido como primeira opção foi o Ápis, da editora Ática. Sobre a Álgebra presente no livro que seus alunos receberam:

( ) O livro apresenta atividades de Álgebra conforme as habilidades elencadas na BNCC.

( ) O livro propõe poucas atividades de Álgebra e não contempla as habilidades elencadas na BNCC.

( ) Ainda não tenho clareza sobre o assunto para dizer se as atividades de Álgebra estão presentes no livro conforme estão definidas na BNCC.

( ) Na escolha do livro didático não houve orientação para que os professores observassem se a Álgebra estava contemplada.

( ) Não uso com os alunos o livro didático escolhido pela Rede.

6- Você acha importante o ensino de Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais?

( )Sim

( ) Não

( ) Não sei

Por qual motivo? ____

____

7- Em sua opinião, como deve ser trabalhada a unidade temática Álgebra?

( ) A unidade temática Álgebra deve ser trabalhada isoladamente, já que agora possui a mesma relevância que as demais unidades temáticas na BNCC ou na Proposta Curricular de Florianópolis.

( ) As atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico devem ser realizadas em um trabalho articulado com as outras 4 unidades temáticas da Matemática.

8- Você acha que é recomendado o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais?

( ) SIM ( ) NÃO ( ) NÃO SEI RESPONDER

Justifique:____

____

9- Você planeja e desenvolve atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos?

( ) Quase sempre

( ) Com muita frequência

( ) Com pouca frequência

( ) Quase nunca ou Nunca

Por qual motivo?

____

____

3ª PARTE: SOBRE SUA DISPONIBILIDADE EM PARTICIPAR DA PESQUISA:

Você aceita ser procurado por mim para conceder entrevista na qual possamos detalhar questões relacionadas ao ensino de Álgebra nos Anos Iniciais, sendo garantido sigilo sobre sua identidade?

( ) SIM ( ) NÃO

Agradecemos a colaboração e afirmamos nosso compromisso com o anonimato dos participantes e confidencialidade dos dados.

Atenciosamente,

Adriana Jungbluth – Pesquisadora Mestranda

Prof. Dr. Everaldo Silveira – Pesquisador Orientador

APÊNDICE G – Roteiro para entrevista semiestruturada

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	

PESQUISA DE MESTRADO

ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?

Esta pesquisa de mestrado está sendo desenvolvida por mim, Adriana Jungbluth, sob a orientação do professor Dr. Everaldo Silveira e é direcionada pela seguinte questão: **Quais conhecimentos os professores da rede municipal de ensino de Florianópolis demonstram ter para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico?**

O objetivo da entrevista é estabelecer uma interação mais específica que nos permita compreender a percepção dos professores sobre o ensino de Álgebra nos Anos Iniciais. Iniciaremos a pesquisa propondo na entrevista, algumas questões abertas que, após respondidas, poderão abrir espaço para modificações, adequações, aprofundamentos conceituais e ampliação da amostragem.

ROTEIRO SEMIESTRUTURADO PARA ENTREVISTA

1. Como foi sua experiência com a aprendizagem de Álgebra no Ensino Fundamental e Médio? O que te vem à lembrança ao ouvir a palavra Álgebra?
Obs: Se o entrevistado não lembrar o que é Álgebra, dar exemplos, equações de 1º e 2º grau, funções, expressões algébricas, etc.

2- Em sua formação inicial – GRADUAÇÃO - foi abordado o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais”?
Se a resposta for afirmativa: -Você identifica em sua prática docente, no ensino de Matemática, alguma relação com a referida formação?

3- Você participou de alguma formação continuada com o tema Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais”?
Se a resposta for afirmativa:- Onde foi essa formação e promovida por qual instituição?
-Você identifica em sua prática docente, no ensino de Matemática, alguma relação com a referida formação?

4- Sabendo que a Álgebra está presente na Proposta Curricular de Florianópolis e também na BNCC para os Anos Iniciais, você se sente preparado(a) para trabalhar esse conteúdo?

5- Você possui clareza sobre quais são as atividades algébricas para os Anos Iniciais, os objetivos que as atividades possuem e como contribuem para a aprendizagem de Álgebra em anos posteriores?

Obs: Se o professor responder que não possui clareza sobre o assunto, perguntar: - O que teria que ser feito para que os professores consigam incorporar práticas que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais?
Se o professor responder que possui clareza quanto às atividades de Álgebra, seus objetivos e como as mesmas contribuem para a aprendizagem de Álgebra em anos posteriores, perguntar: - Que tarefas você prepara e implementa com os seus alunos que consideram o pensamento algébrico?

6- Você acha que é importante ensinar Álgebra ou pensamento algébrico nos Anos Iniciais? Por quê?

7- Você usa o livro didático escolhido no PNLD 2019? O que você achou sobre as atividades de Álgebra presentes no livro didático escolhido? São suficientes ou tem poucas? Ou você ainda não encontrou atividades de Álgebra nos livros?

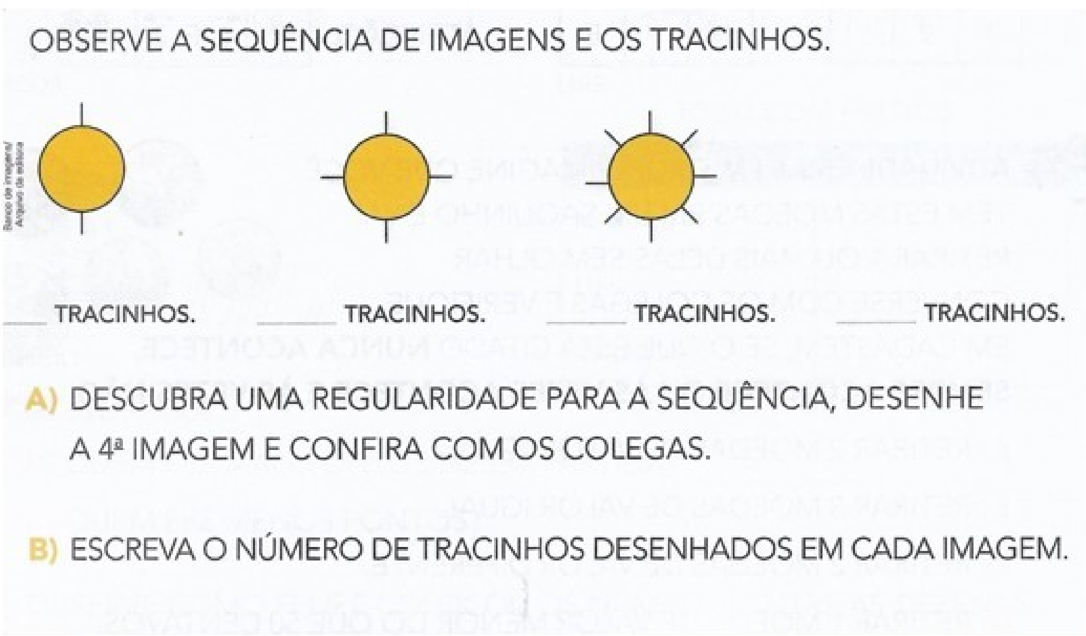
8- Você trabalha a Álgebra de forma isolada ou realiza atividades algébricas integradas com as outras unidades temáticas? Poderia dar um exemplo?

9- O que você sabe sobre o uso de letras para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais? Onde obteve a informação?

10- De acordo com a BNCC (p. 268), algumas dimensões do trabalho com a Álgebra devem estar presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde os Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Você já trabalhou alguma dessas ideias com os alunos? Conte como foi essa atividade.

11- Observe essas atividades presentes no livro do segundo e quinto ano: (mostrar fichas para o entrevistado com as atividades)

Ficha 1: (Ápis, 2º ano-p.44)


OBSERVE A SEQUÊNCIA DE IMAGENS E OS TRACINHOS.

____ TRACINHOS. ____ TRACINHOS. ____ TRACINHOS. ____ TRACINHOS.

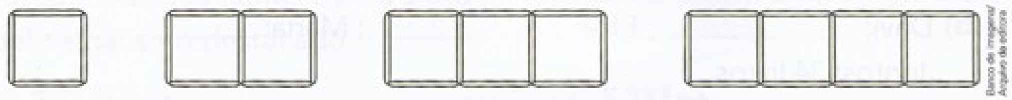
A) DESCUBRA UMA REGULARIDADE PARA A SEQUÊNCIA, DESENHE A 4ª IMAGEM E CONFIRA COM OS COLEGAS.

B) ESCREVA O NÚMERO DE TRACINHOS DESENHADOS EM CADA IMAGEM.

Ficha 2: (Ápis, 5º ano, p. 95)

DESAFIO

Observe a sequência, calcule e responda: Quantos palitos são necessários para construir 20 quadrados? ________



4 palitos. 1 quadrado. | 7 palitos. 2 quadrados. | 10 palitos. 3 quadrados. | 13 palitos. 4 quadrados.

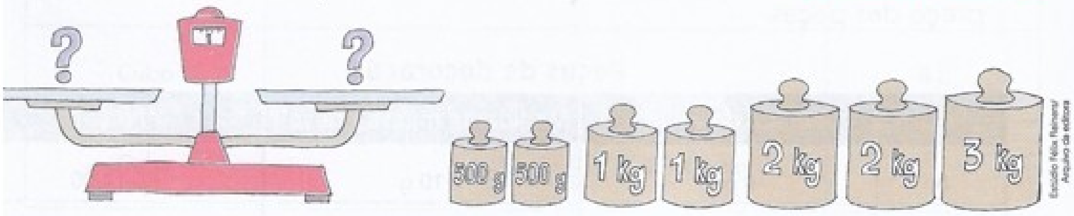
a) Qual é na sua opinião, o objetivo de atividades como essas? Possuem alguma relação com a Álgebra?
b) Você consegue visualizar como essas atividades podem contribuir para a aprendizagem de Álgebra em anos posteriores? Em caso afirmativo perguntar: -De que forma?

12- Observe as 3 atividades presentes em livros do terceiro, quarto e quinto ano: (mostrar fichas para o entrevistado com as atividades)

Ficha 3: (Ápis, 5º ano-p. 226)

Observe os pesinhos que Gilberto tem.

As imagens não estão representadas em proporção.



Dê 2 soluções para o seguinte problema: equilibrar os 2 pratos colocando 3 pesinhos em cada prato.

1ª solução: ________

2ª solução: ________

1ª solução: 1kg + 2 kg + 500g = 1kg + 2kg + 500g

2ª solução: 3kg + 1 kg + 500g = 2kg + 2kg + 500g

Ficha 4: (Ápis, 4º ano-p. 115)

Faça o diagrama correspondente a cada operação, como na atividade anterior. Depois, descubra o valor procurado.

a) Ana tinha uma quantia, ganhou R$ 75,00 e ficou com R$ 108,00.

Quanto Ana tinha? ____________

b) Rodrigo tinha certa quantia, comprou um livro por R$ 28,00 e ficou com R$ 75,00.

Quanto Rodrigo tinha? ____________

a) _____ +75 = 108

b) _____ - 28 = 75

Ficha 5: (Ápis, 3º ano, p. 116)

Complete a igualdade de cada item para que os resultados sejam iguais.

a) 3 + 7 = ____ + 1

b) 4 − 1 = 12 − ____

c) 8 + 11 = 20 − ____

d) 48 + 33 = 70 + ____

e) 50 − 12 = 40 − ____

f) ____ + ____ = ____ − ____

a) Qual é na sua opinião, o objetivo de cada atividade? O que é importante ser explorado em cada atividade?
Mostrar uma atividade de cada vez e deixar que falem sobre ela.

b) Qual é o significado do sinal de igualdade nessas três atividades?

c) Falkner, Levi e Carpenter (1999), são pesquisadores e questionaram os alunos sobre o número que deveria ser colocado no espaço vazio de modo a tornar verdadeira a expressão numérica 8 + 4 = ___ + 5. A questão de escolha múltipla possuía as possibilidades de resposta 7, 12 e 17. A resposta correta foi indicada apenas por 5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos, por 9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos e por 2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos.
Por que você acha que a maioria dos alunos afirmou que a resposta correta era 12?

Ficha 6:
Qual número deve ser colocado no espaço vazio para tornar verdadeira a expressão numérica?

$$8 + 4 = \_\_\_\_ + 5$$

a) 7
b) 12
c) 17

A resposta correta foi indicada por:
5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos, por
9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos e por
2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos.

d) E nessas questões, você pediria que seus alunos descobrissem o valor desconhecido de que forma?

Ficha 8:

Descubra o número desconhecido:

$534 + 175 = 174 + \_\_\_\_$ $\qquad$ $126 - 37 = \_\_\_\_\_\_ - 40$

$12 - 7 = \_\_\_\_ - 8$

e) Você consegue visualizar o significado do sinal de igualdade numa equação?

Ficha 7:

$$5x - 24 = 81$$
$$5x - 24 + 24 = 81 + 24$$
$$5x = 105$$
$$5x/5 = 105/5$$
$$x = 21$$

13- E atividades de proporcionalidade, como essa proposta no quinto ano, contribuem com qual ou quais conteúdos de Álgebra de anos posteriores? (mostrar a ficha)

Ficha 9: (Ápis, 5º ano - p. 161)
PROPORCIONALIDADE
Complete.
a) Cada grupo de 5 alunos vai receber 8 folhas de papel sulfite.
Então, em uma turma com 30 alunos serão necessárias ________ folhas.
b) Maurício pagou R$ 14,00 por 6 pêssegos.
Se tivesse comprado 3 pêssegos, então ele teria pago R$________.
c) Pedro comprou 4 cadernos e pagou R$ 10,00.
Com R$ 50,00 ele pode comprar ________ cadernos.

14- E sobre a dinâmica de trabalho para que os alunos aprendam conceitos de Álgebra, quais estratégias você considera importantes?

APÊNDICE H – Roteiro para entrevista reflexiva/formativa e semiestruturada

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA	UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA	

PESQUISA DE MESTRADO

ÁLGEBRA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS: E AGORA?

ROTEIRO SEMIESTRUTURADO PARA ENTREVISTA REFLEXIVA

1- De acordo com a BNCC (p. 268), algumas dimensões do trabalho com a álgebra devem estar presentes nos processos de ensino desde os Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Observe essas atividades presentes nos livros do segundo, terceiro e quinto ano: (mostrar fichas para o entrevistado com as atividades)

Ficha 1: (Ápis, 3º ano, p. 23)

SEQUÊNCIA DOS NÚMEROS NATURAIS, NÚMERO PAR E NÚMERO ÍMPAR

a) Observe a sequência dos números naturais e pinte somente os quadrinhos com números pares, a partir do 0 (zero).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...

b) Qual é o algarismo das unidades nos números pares?

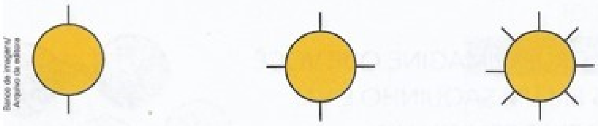
c) Qual é o algarismo das unidades nos números ímpares?

d) O número 138 é par ou ímpar?

e) Qual é o número ímpar que fica entre 375 e 379?

Ficha 2: (Ápis, 2º ano-p.44)

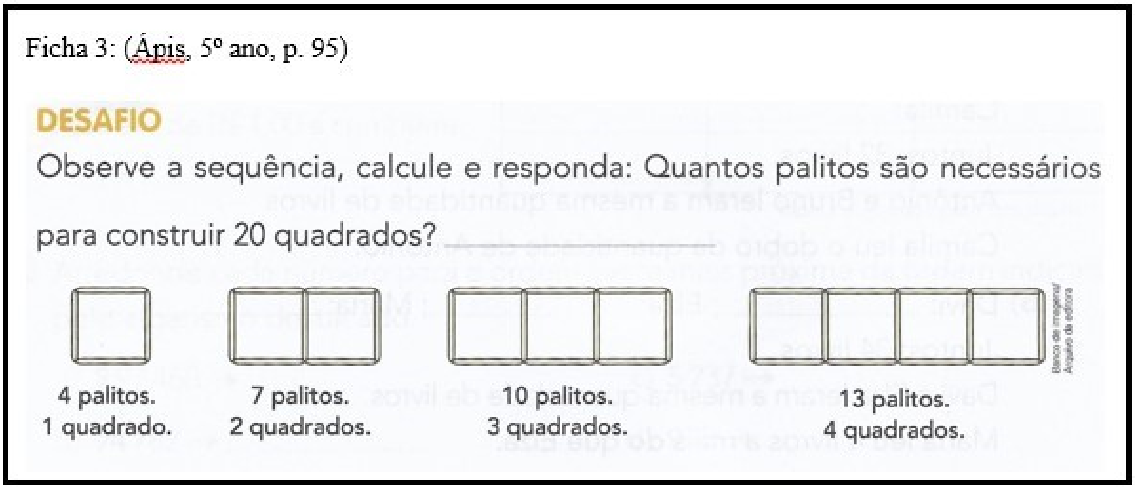
OBSERVE A SEQUÊNCIA DE IMAGENS E OS TRACINHOS.



___ TRACINHOS. ___ TRACINHOS. ___ TRACINHOS. ___ TRACINHOS.

A) DESCUBRA UMA REGULARIDADE PARA A SEQUÊNCIA, DESENHE A 4ª IMAGEM E CONFIRA COM OS COLEGAS.

B) ESCREVA O NÚMERO DE TRACINHOS DESENHADOS EM CADA IMAGEM.


Ficha 3: (Ápis, 5º ano, p. 95)

DESAFIO

Observe a sequência, calcule e responda: Quantos palitos são necessários para construir 20 quadrados?

a) Qual é na sua opinião, o objetivo de atividades como essas? Possuem alguma relação com a álgebra?
b) Você consegue visualizar como essas atividades podem contribuir para a aprendizagem de álgebra em anos posteriores? Em caso afirmativo perguntar: -De que forma?
c) Você já ouviu falar sobre a importância da generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico?
d) Mostrar estratégias de generalização de alunos do 2º e 3º ano encontradas no capítulo do livro__________________, de Silvestre et al. (   ). Trata-se de um resumo, com recortes de algumas generalizações realizadas pelos alunos. Esse texto será entregue impresso e será lido e discutido junto com os professores entrevistados:

Sequências pictóricas: Estratégias de generalização dos alunos do 2º, 3º e 5º ano

Os alunos começaram observando a sequência de blocos.

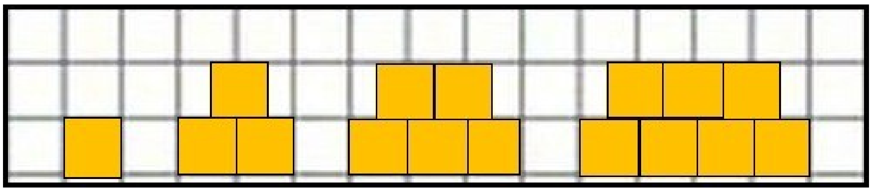
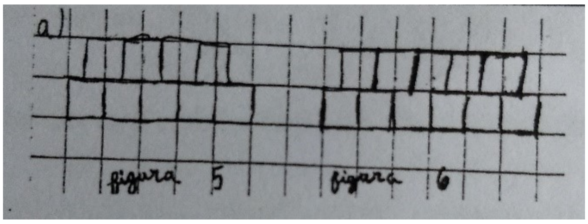


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Os alunos trabalharam em duplas. Representaram as figuras 1, 2, 3 e 4 com blocos. Em seguida, representaram as figuras 5 e 6, conforme solicitado. Também fizeram a representação no papel quadriculado. Preencheram a tabela, relacionando o número da figura com o número de peças.



Número da figura	Número de peças
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11

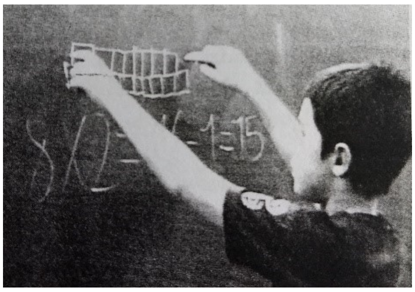
Abaixo aparecem algumas generalizações feitas por alunos de segundo ano para descobrir o número de blocos de uma figura qualquer da sequência:

Filipa: *A figura 9 é 9 em baixo e 8 em cima. E a figura 10 é 10 em baixo e 9 em cima. Então é 10 mais 9 e dá 19.*

Bruno: *Oh professora eu já sei uma maneira muito diferente. Em vez de ser 10 por cima de 11 e 11 por cima de 12 eu fiz de uma maneira muito diferente e pensei. Pensei que …*
Professora: *Então vai lá... Vai lá ao quadro. (Dirige-se para a turma.) Ele está aqui a ter umas ideias novas.*
Bruno: *Eu pensei que 12+12 era 24. E pensei que se isto não pode dar 24 porque o número 24 é par. Ou é 23. É 23 porque eu pensei logo… Já sei qual é que é. É o número... Já sei o segredo disto.*
Professora: *Então qual é que é o segredo? (A professora solicita agora a atenção da turma.) Ele diz que descobriu o segredo. Vamos lá ver o que é.*
Bruno: *Eu já descobri o segredo! (Saltitando de entusiasmo.) É o dobro de 12 é 24 mas com menos 1 é 23. Já descobri o segredo. É o dobro menos 1.*

No terceiro ano, Pedro fez o seguinte registro para determinar o número de blocos da figura 8:

Professor: *Por exemplo, a figura 8.*
Pedro: *Eu fiz duas maneiras de fazer isso. Fiz 8 vezes 2 igual a 16. Menos 1 é igual a 15. O menos 1 é porque aqui vai assim (refere-se às duas metades de quadrado em falta no patamar em falta no patamar superior da figura pois desenha a figura 2 e indica-os).*



Pedro escreve inicialmente: 8 x 2 = 16 – 1 = 15. Em seguida, o professor faz questionamentos:

Professor: *Explica-me uma coisa. Aí a figura 8. O que é que tu queres dizer? É o dobro de 8 ou é 8 vezes 2?*
Pedro: *É o dobro de 8. Está trocado.*
(...)
Professor: *Vamos voltar aí ao 2 vezes 8 o que disseste a seguir foi menos 1, então vamos escrever isso de uma forma acertada. E*
Pedro: *(Seguindo a informação do professor.) É mais prático.*

Observação: De acordo com Silvestre et al. (   ), vários alunos fizeram uma contagem de 2 em 2 porque de uma figura para outra acrescentam sempre mais 2 peças. Essa estratégia sempre depende do número de blocos da figura anterior (estratégia recursiva). Dentre os alunos que descreveram leis de formação, a maioria desenvolveu uma estratégia de generalização que envolveu o número de blocos, no entanto, alguns alunos mostraram ser capazes desenvolver estratégias funcionais. Os autores concluem que, independentemente do ano de escolaridade, os alunos desenvolveram estratégias de generalização semelhantes.

Referência:

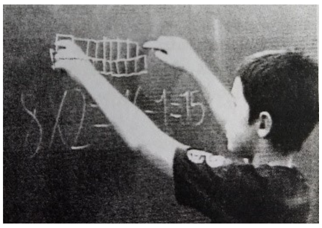
e) Você percebeu como os alunos foram generalizando para responder aos questionamentos?

f) Para generalizar, de acordo com os relatos dos autores, teve alunos que usaram a relação recursiva (+2) e, assim, foram descobrindo termos próximos dessa sequência, pois sempre precisa saber o número de blocos do termo anterior. Teve alunos que criaram uma lei de formação para essa sequência e dessa forma, criaram uma generalização com a qual é possível descobrir qualquer termo da sequência, mesmo um termo muito distante. Será que seus alunos conseguiriam fazer isso para essa sequência?

g) Você acha que os alunos conseguem realizar generalizações nas sequências das fichas 1, 2 e 3 presentes no livro adotado pela RMEF? Explique.

h) Vamos tentar criar uma generalização para a sequência da ficha 3? Iremos construir uma lei de formação que permita calcular o número de palitos para qualquer termo da sequência

i) Na linguagem matemática, há mais uma incongruência na escrita de Pedro, e que precisa ser corrigida com a ajuda do professor. Você consegue perceber o que precisa ser mudado nessa escrita?



2- Observe as 3 atividades presentes em livros do terceiro, quarto e quinto ano: (mostrar fichas para o entrevistado com as atividades)

Ficha 4: (Ápis, 4º ano-p. 115)

Faça o diagrama correspondente a cada operação, como na atividade anterior. Depois, descubra o valor procurado.

a) Ana tinha uma quantia, ganhou R$ 75,00 e ficou com R$ 108,00.

Quanto Ana tinha? ______

b) Rodrigo tinha certa quantia, comprou um livro por R$ 28,00 e ficou com R$ 75,00.

Quanto Rodrigo tinha? ______

a) _____ +75 = 108

b) _____ - 28 = 75

Ficha 5: (Ápis, 3º ano, p. 116)

Complete a igualdade de cada item para que os resultados sejam iguais.

a) 3 + 7 = ____ + 1

b) 4 − 1 = 12 − ____

c) 8 + 11 = 20 − ____

d) 48 + 33 = 70 + ____

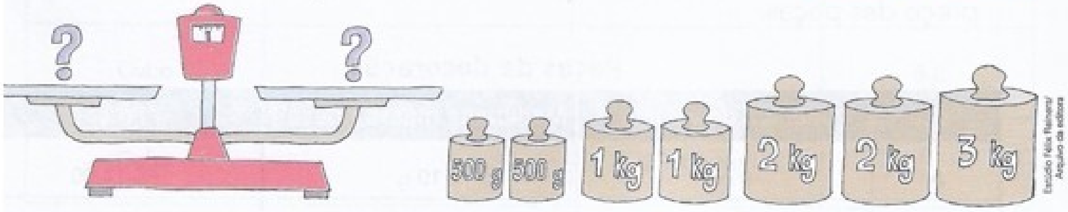
e) 50 − 12 = 40 − ____

f) ____ + ____ = ____ − ____

Ficha 6: (Ápis, 5º ano-p. 226)

Observe os pesinhos que Gilberto tem.

As imagens não estão representadas em proporção.



Dê 2 soluções para o seguinte problema: equilibrar os 2 pratos colocando 3 pesinhos em cada prato.

1ª solução: ______________________

2ª solução: ______________________

1ª solução: 1kg + 2 kg + 500g = 1kg + 2kg + 500g

2ª solução: 3kg + 1 kg + 500g = 2kg + 2kg + 500g

a) Qual é na sua opinião, o objetivo de cada atividade? O que é importante ser explorado em cada atividade?
Mostrar uma atividade de cada vez e deixar que falem sobre ela.

b) Qual é o significado do sinal de igualdade nessas três atividades?

c) Falkner, Levi e Carpenter (1999), são pesquisadores e questionaram os alunos sobre o número que deveria ser colocado no espaço vazio de modo a tornar verdadeira a expressão numérica 8 + 4 = ___ + 5. A questão de escolha múltipla possuía as possibilidades de resposta 7, 12 e 17. A resposta correta foi indicada apenas por 5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos, por 9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos e por 2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos.
Por que você acha que a maioria dos alunos afirmou que a resposta correta era 12?

Ficha 7:
Qual é o número que deve ser colocado no espaço vazio para tornar verdadeira a expressão numérica?

$$8 + 4 = \_\_\_ + 5$$

A questão de escolha múltipla possuía as possibilidades de resposta:

a) 7
b) 12
c) 17

A resposta correta foi indicada apenas por:
5% dos alunos dos 1.º e 2.º anos
9% dos alunos dos 3.º e 4.º anos
2% dos alunos dos 5.º e 6.º anos.

d) E nessas questões, você pediria que seus alunos descobrissem o valor desconhecido de que forma?
Após a fala dos professores, perguntar se conhecem as barrinhas cuisenaire, que poderiam ser utilizadas para um trabalho inicial com o objetivo de escrever expressões em que os dois

lados da igualdade sejam equivalentes ou se conhecem alguma outra estratégia que possa contribuir para esse ensino.

Ficha 8:

Descubra o número desconhecido:

a) $4 + 6 = 6 +$ ______ b) $4 + 6 = 7 +$ _____

c) $4 + 6 =$ ____ $+ 8$ d) $4 +$ ___ $= 8 + 2$

e) $9 + 5 =$ _____ $+ 4$ f) $534 + 175 = 174 +$ ____

e) Você consegue visualizar o significado do sinal de igualdade numa equação?

Ficha 9:

$$5x - 24 = 81$$
$$5x - 24 + 24 = 81 + 24$$
$$5x = 105$$
$$5x/5 = 105/5$$
$$x = 21$$

3- E atividades de proporcionalidade, como essa proposta no quinto ano, contribuem com qual ou quais conteúdos de álgebra de anos posteriores? (mostrar a ficha)

Ficha 10: (Ápis, 5º ano - p. 161)

PROPORCIONALIDADE

Complete.

a) Cada grupo de 5 alunos vai receber 8 folhas de papel sulfite.
Então, em uma turma com 30 alunos serão necessárias _________ folhas.

b) Maurício pagou R$ 14,00 por 6 pêssegos.
Se tivesse comprado 3 pêssegos, então ele teria pago R$ _________.

c) Pedro comprou 4 cadernos e pagou R$ 10,00.
Com R$ 50,00 ele pode comprar _________ cadernos.