



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Gustavo Henrique dos Santos

Feixes de luz modulados espacialmente e analisados por uma cavidade ótica

Florianópolis
2020

Gustavo Henrique dos Santos

Feixes de luz modulados espacialmente e analisados por uma cavidade ótica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Gustavo Henrique dos

Feixes de luz modulados espacialmente e analisados por
uma cavidade ótica / Gustavo Henrique dos Santos ;
orientador, Renné Luiz Câmara Medeiros de Araújo, 2020.

74 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Cavidade ótica. 3. Momento Angular Orbital.
4. Modulação Espacial da Luz. I. Araújo, Renné Luiz Câmara
Medeiros de. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Gustavo Henrique dos Santos

Feixes de luz modulados espacialmente e analisados por uma cavidade ótica

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Jorge Douglas Massayuki Kondo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Antônio Nemer Kanaan Neto, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Física.

Prof. Ivan Helmuth Bechtold, Dr.
Coordenador do Programa

Prof. Renné Luiz Câmara Medeiros de
Araújo, Dr.
Orientador

Florianópolis, 19 de fevereiro de 2020.

Este trabalho é dedicado aos meus queridos sobrinhos
Luís e Maria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos concedidas em minha vida; pela força nos momentos difíceis; por suprir as minhas necessidades emocionais sempre que precisei; pela oportunidade de estudar e principalmente por Sua benevolência.

Agradeço imensamente ao professor Dr. Renné Medeiros de Araújo não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade, pelo apoio durante o período do mestrado, compreensão e exemplo que sempre foi a todos os membros do grupo.

Ao professor Dr. Marcelo Martinelli que forceneu a cavidade extendida e o controlador de corrente, além de ter me recebido muito bem em SP.

Ao professor Dr. Paulo H. Souto Ribeiro por ser um exemplo de pesquisador, além de carismático, competente, acolhedor e, principalemnte, um grande amigo.

A todos os membros do grupo, tanto professores quanto alunos, representam muito mais do que colaboradores, mas são verdadeiros amigos e companheiros. É um prazer enorme estar na presença do grupo todos os dias.

Igualmente, agradeço aos meus pais Reinaldo e Eneliz que sempre me apoiaram, sempre souberam apoiar todos os filhos da melhor maneira possível, são a base da minha vida, agradeço por todo o esforço que fizeram para me oferecer a oportunidade de estudo e apoio durante todos esses anos, me fez crescer muito intelectualmente, culturalmente, socialmente e espiritualmente.

Aos meus irmãos Alan e Lorena pelas conversas de apoio ou discussões, pela confiabilidade mútua que sempre admirei e pretendo preservar para sempre.

À minha cunhada Daiane, que sempre demonstrou um carinho muito grande e também propiciar momentos de muita alegria para mim com meus sobrinhos.

À Jaíne que sempre foi uma pessoa importante na minha vida e independente do que aconteça, sempre propiciou momentos da alegria; sempre me ajudou muito com sua personalidade calma, leal, amorosa, fervorosa, atenciosa e principalmente amiga em todos os momentos.

Gostaria de agradecer também os amigos e a família como um todo que estão unidos todos os finais de semana compartilhando experiências e alegria.

À CAPES pela bolsa concedida durante o mestrado.

*“Você será em breve honrado por alguém que você respeita.
Números da sorte: 04 - 20 - 27 - 37 - 44 - 46”
(BOX, China in - biscoito da sorte, 2020)*

RESUMO

Os dispositivos a laser, desde a sua descoberta em 1960, possuem grande aplicabilidade em ciência e dentre as características do mesmo, o perfil transversal tem sido bastante explorado devido à alta dimensão nos graus de liberdade. Para a geração dos modos de ordem superior, máscaras geradas digitalmente contendo informação de fase são enviadas a um dispositivo modulador espacial de luz, do inglês *Spatial Light Modulator* (SLM), o qual transfere a informação de fase para o feixe de luz. O processo de análise de feixes, utiliza um interferômetro de Fabry-Perot, que consiste num conjunto de espelhos que confina a luz em modos específicos de propagação e é também conhecido como cavidade ótica. Tanto o SLM quanto o interferômetro de Fabry-Perot são utilizados corriqueiramente em diversos laboratórios pelo mundo, mas são raramente postos a serviço um do outro. Com o intuito de conhecer, ajustar e controlar mais precisamente o feixe modulado - e possivelmente oferecer alternativas para a criptografia quântica - foram analisadas através do interferômetro, configurações no SLM referentes a alinhamento e tamanho da máscara, para diferentes máscaras de fase comumente utilizadas. Para máscaras do tipo só fase, assim como a teoria prevê, surgem modos não desejados mesmo quando os parâmetros de alinhamento são otimizados. Tanto para máscara de Hermite-Gauss quanto para a de Laguerre-Gauss, em primeira ordem, o feixe produzido possui aproximadamente 70% da ordem desejada, enquanto que os 30% restantes são ruídos de ordens superiores. No caso de máscaras hermite-gaussianas com modulação de amplitude, o modo permanece puro para pequenos desalinhamentos ou desajustes nos parâmetros da máscara.

Palavras-chave: Hermite-Gauss. Laguerre-Gauss. SLM.

ABSTRACT

Laser devices, since their discovery in 1960, have great applicability in science and among its characteristics, the transversal profile has been extensively explored due to the high dimension in the degrees of freedom. For the generation of higher-order modes, digitally generated masks containing phase information are sent to a spatial light modulator device (SLM), which transfers the phase information to the light beam. The beam analysis process uses a Fabry-Perot interferometer, which consists of a set of mirrors that confines light to specific modes of propagation and is also known as an optical cavity. Both the SLM and the Fabry-Perot interferometer are commonly used in several laboratories around the world but rarely work together in the same experiment. To know, adjust and control more precisely the modulated beam - and possibly offer alternatives for quantum cryptography - it was analyzed through the interferometer, configurations in the SLM referring to the alignment and size of the mask, for different phase masks commonly used. For single-phase masks, as the theory predicts, unwanted modes emerge even when the alignment parameters are optimized. For both the Hermite-Gauss mask and the Laguerre-Gauss mask, in the first order, the beam produced has approximately 70% of the desired order, while the remaining 30% is noise from higher orders. In the case of Hermite-Gaussian masks with amplitude modulation, the model remains pure for minor misalignments or mismatches in the mask parameters.

Keywords: Hermite-Gaussian beam. Laguerre-Gaussian beam. SLM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Descrição de feixe com vórtice ótico. Representação da distribuição de intensidade do perfil transversal, a distribuição de fase e a frente de onda num plano de mesma fase e o momento angular orbital representado por um círculo azul.	19
Figura 2 – Onda esférica divergindo a partir de uma fonte localizada no ponto (x_0, y_0, z_0) com raio de curvatura $R(z)$ descrito em função da distância z	22
Figura 3 – Feixe gaussiano descrito pelo parâmetro complexo $q(z)$	23
Figura 4 – Comportamento de propagação indicando as variações em $R(z)$, $w(z)$ ao longo do eixo de propagação z ; além da indicação da cintura do feixe em $z=0$ e o local aproximado do comprimento de Rayleigh.	24
Figura 5 – Modos de Hermite-Gauss com a representação da intensidade e o perfil transversal do feixe nos modos $HG_{2,2}$, $HG_{2,4}$ e $HG_{2,6}$	26
Figura 6 – Perfil de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss com índices radiais e azimutais variando até 3.	27
Figura 7 – Variação de fase de um feixe com momento angular orbital (coluna da esquerda). Na coluna central, o padrão de intensidade anular do perfil transversal e na coluna da direita o padrão de intensidade da interferência do feixe com uma onda plana, onde o número de espirais é igual ao número ℓ	28
Figura 8 – Distribuição de intensidade do campo elétrico no perfil transversal. Modo LG_0^1 , LG_2^0 e LG_1^1	28
Figura 9 – Representação da frente de onda dos modos de Laguerre-Gauss com índice radial $p=0$ e índices azimutais a) $\ell=0$; b) $\ell=1$; c) $\ell=2$	29
Figura 10 – Representação da placa que possui uma superfície espiralada de h_0 a h_0+h_s e uma base de comprimento h_0	30
Figura 11 – Interferência de 2 feixes, sendo um de referência e um de reflexão, numa placa holográfica	31
Figura 12 – a) processo de geração das máscaras holográficas, onde o feixe coerente é dividido por um divisor de feixe, uma parte incide no objeto e posteriormente os feixes são recombinados no filme holográfico. b) processo de reconstrução da imagem: o feixe incide sobre a máscara holográfica e o feixe refletido forma a imagem holográfica.	31
Figura 13 – Padrão de interferência da máscara holográfica para um feixe de Laguerre-Gauss com carga de vórtice igual a 1	32
Figura 14 – Imagem de um dispositivo modulador espacial de luz utilizado neste trabalho	33

Figura 15 – Combinação no SLM de grade de difração e variação de fase do modo LG_0^1 produzindo a máscara bifurcada, característica das máscaras de Laguerre-Gauss	33
Figura 16 – Combinação no SLM de grade de difração e variação de fase do modo $HG_{0,1}$ produzindo a máscara com diferença de fase π entre o nível superior e o inferior.	34
Figura 17 – Grade de difração <i>blazed</i> onde h é a profundidade das ranhuras, d é a separação entre as ranhuras e θ é o ângulo de blaze.	34
Figura 18 – Mudança nos parâmetros de ajuste da função blazing. a) função totalmente desalinhada difratando em muitas ordens; b) ajustado apenas para a primeira ordem (± 1) e ordem zero; c) primeira ordem aparente e ordem zero bloqueada.	35
Figura 19 – Raio óptico perpendicular aos espelhos, separados por um comprimento L , refletindo sem escapar do ressonador (Fabry-Perot <i>etalon</i>)	35
Figura 20 – Campo elétrico das ondas confinadas na cavidade	37
Figura 21 – Espectro de 3 frequências ressonantes na cavidade (a) sem perdas, com finesse $\mathcal{F} = \infty$ e intervalo espectral livre igual a ν_1 ; (b) com perdas, pico com largura de banda igual a ν_1/\mathcal{F} centralizado na frequência de ressonância $\nu_n + 1$	39
Figura 22 – Diferentes modelos de cavidades baseados no modelo de Fabry-Perot e indicando a área em azul como sendo a região estável e os pontos vermelhos indicam as condições de estabilidade das respectivas cavidades	40
Figura 23 – À esquerda, cavidade triangular com ponto focal entre os espelhos planos M_1 e M_3 e espelho esférico M_2 numa distância L (no eixo óptico) do ponto focal; À direita, cavidade hemisférica plano-côncava com distância L entre o ponto focal e o espelho esférico.	41
Figura 24 – Raio de entrada com distância y_1 do eixo z e inclinação θ_1 sofre uma transformação ao passar por um sistema óptico e sai com distância y_2 e inclinação θ_2	43
Figura 25 – Raio de curvatura associado ao ponto de distância y_1 e inclinação θ_1 .	44

Figura 26 – Layout da simulação de casamento de modo feita no software Mathematica com representações do comportamento da largura do feixe ao longo da distância z percorrida. A linha azul representa o comportamento do modo alvo (o modo ressonante na cavidade). A linha laranja representa o comportamento do feixe à medida que se propaga através das lentes. As linhas verticais representam as posições de cada uma das 3 lentes utilizadas. Estas posições podem ser ajustadas interativamente via cursor com o mouse graças à função "Manipulate".	45
Figura 27 – Máscaras holográficas bifurcadas para geração de feixes com MAO de índices azimutais ℓ iguais a 1, 2 e 3 respectivamente. O feixe incidente adquire a variação de fase correspondente ao atravessar a máscara holográfica	46
Figura 28 – Caracterização de feixes gaussianos com cintura $w=1$ e variação de fase $2\pi\ell$ reescritos em famílias de outra cintura tal que maximiza o coeficiente do índice radial $p=0$	47
Figura 29 – Montagem experimental, um feixe de laser de diodo é modulado por um SLM e direcionado para uma cavidade ótica, cujo comprimento é variado nanometricamente por um transdutor piezoelétrico, e um fotodetector conectado à um osciloscópio indicam o(s) modo(s) nos respectivos comprimentos de cavidade.	48
Figura 30 – Mesa ótica e a representação do eixo ótico.	49
Figura 31 – Foto da cavidade utilizada no experimento.	49
Figura 32 – Varredura dos comprimentos que satisfazem a condição de ressonância de um comprimento de onda específico. Em azul, uma representação da tensão aplicada no PZT em função do tempo	50
Figura 33 – Feixe com diâmetro $2w_0$ é modulado no SLM, 2 lentes fazem o casamento de modo para o feixe possuir o diâmetro de $2w_{cav}$ no foco da cavidade. A linha vermelha representa o eixo ótico de entrada, no interior e na saída da cavidade; um detector envia o sinal da saída da cavidade para um osciloscópio.	50
Figura 34 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $HG_{1,0}$ sendo deslocada uma quantidade δ do centro do feixe incidente	52
Figura 35 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $HG_{2,0}$ sendo alterada a cintura do feixe de saída α em relação à cintura de entrada.	52

Figura 36 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $LG_{1,0}$ sendo deslocada uma quantidade δ do centro do feixe incidente	53
Figura 37 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara com modulação de amplitude de uma gaussiana ($HG_{0,0}$) descritos com cintura αw_0 ; O círculo cinza representa para a máscara holográfica de fase + grade de difração centralizada no feixe com modulação de a) uma pequena área do feixe; b) quase todo o feixe.	54
Figura 38 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara com modulação de amplitude gaussiana do modo ($HG_{0,0}$) com cintura ideal e variando o deslocamento da máscara em δ ; O círculo cinza representa uma medida para a máscara holográfica de fase + grade de difração no feixe com modulação a) centralizada ($\delta = 0$); b) deslocada ($\delta \neq 0$).	54
Figura 39 – Amplitude gaussiana do perfil transversal ao aplicar uma máscara de fase π em $x = \delta$. Os 3 casos mostram um δ igual a 0, -0.8 e 0.4, respectivamente.	56
Figura 40 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss até a segunda ordem para um feixe de saída com um deslocamento δ da máscara.	57
Figura 41 – Medida da combinação linear dos modos gerados para máscara do modo HG_{00} para referência (linha azul) e para máscara do modo HG_{10} com a descontinuidade deslocada em $\delta = -0.7$ (linha laranja).	57
Figura 42 – Resultado da intensidade dos modos gerados em função do deslocamento δ da máscara holográfica. Os pontos representam resultados experimentais enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas; azul - HG_0 , laranja - HG_1 , verde - HG_2 , vermelho - HG_3	58
Figura 43 – Comparação entre o modo $HG_{2,0}$ puro e o perfil criado pela máscara.	58
Figura 44 – Demonstração da amplitude gaussiana do perfil transversal ao se aplicar uma máscara de fase π em $x = -\frac{\alpha w_0}{2}$ e $x = \frac{\alpha w_0}{2}$. Os 3 casos representam αw_0 iguais a 0.4, 1.0 e 1.5, respectivamente.	59
Figura 45 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss até a quarta ordem para um feixe de saída com α da máscara é igual a 0.4.	59

Figura 46 – Os pontos representam resultados experimentais em cada posição da máscara enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas; azul - HG_0 , laranja - HG_2 , verde - HG_4 , vermelho - HG_6 , roxo - HG_8 , marrom - HG_{10} , ciano - HG_{12}	60
Figura 47 – Feixe com MAO de $l = +1$, com uma seta no sentido anti-horário indicando a variação de fase azimutal, rescrito como combinação de feixes hermite-gaussianos.	61
Figura 48 – Feixe com MAO de $l = -1$, com uma seta no sentido horário indicando a variação de fase azimutal, rescrito como combinação de feixes hermite-gaussianos.	61
Figura 49 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss do feixe modulado.	62
Figura 50 – Os pontos representam resultados experimentais em cada deslocamento δ da máscara, enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas: azul - $HG_{0,0}$, laranja - $HG_{1,0}$, verde - $HG_{0,1}$, vermelho - $HG_{2,0}$, roxo - $HG_{0,2}$, marrom - $HG_{3,0}$	63
Figura 51 – Amplitude dos modos HG_0 e HG_1 ; em azul o feixe de incidência com cintura igual a w_0 , em laranja o feixe modulado com cintura igual a $0.5w_0$ com 50% de amplitude e em verde o feixe modulado com cintura igual a w_0 com 30% de amplitude.	64
Figura 52 – Imagem do osciloscópio mostrando os modos gerados por uma máscara holográfica ressonantes em seus respectivos comprimentos de cavidade e uma foto de cada modo ressonante. A linha azul indica a tensão aplicada ao PZT, portanto, indica a variação do comprimento da cavidade.	65
Figura 53 – Coeficientes de cada um dos modos e a combinação dos índices de mesma ordem.	65
Figura 54 – Modos ressonantes na cavidade para diferentes cinturas. Em azul - modo de ordem zero, em laranja - modos de ordem 2, em verde - modos de ordem 4.	66
Figura 55 – Combinação de modos ressonantes para cada desvio δ no deslocamento da máscara de geração. Em azul - HG_0 , laranja - HG_1 , verde - HG_2 , vermelho - HG_3	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados num processo de distribuição de chaves criptográficas segundo protocolo BB84	17
Tabela 2 – Dados considerando que o interceptor está fazendo uma medida entre o emissor e o receptor	18
Tabela 3 – Polinômios de Hermite	26
Tabela 4 – Polinômios generalizados de Laguerre	29

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	CONCEITOS INTRODUTÓRIOS	20
2.1	EQUAÇÃO DE ONDA	20
2.1.1	De Onda Esférica a Feixe Gaussiano	21
2.1.2	Feixes de Hermite-Gauss	25
2.1.3	Feixes de Laguerre-Gauss	27
2.2	MODULAÇÃO ESPACIAL DE FEIXES	29
2.2.1	Placas de Fase Espiral	30
2.2.2	Máscaras holográficas	30
2.2.3	Modulador Espacial de Luz	32
2.3	CAVIDADES ÓTICAS	34
2.3.1	Condições de ressonância num interferômetro de Fabry-Perot	36
2.3.2	Condições de estabilidade geométrica para cavidades óticas	39
2.3.2.1	Exemplo: cavidade plano-esférica	40
2.3.3	Fase de Gouy e modos de ordem superior em cavidades óticas	41
2.3.4	Casamento de Modo	42
2.3.4.1	Formalismo da Matriz ABCD	42
2.3.4.2	Matriz ABCD aplicada a feixes gaussianos	43
3	PROPOSTA EXPERIMENTAL	46
3.1	PROPOSTA 1	51
3.2	PROPOSTA 2	52
3.3	PROPOSTA 3	53
3.4	PROPOSTA 4	53
3.5	PROPOSTA 5	54
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	56
4.1	MÁSCARA DE FASE HERMITE-GAUSSIANA COM DESLOCAMENTO δ	56
4.2	MÁSCARA DE FASE HERMITE-GAUSSIANA COM VARIAÇÃO α	58
4.3	MÁSCARA DE FASE LAGUERRE-GAUSSIANA COM DESLOCAMENTO δ	60
4.4	MÁSCARA GAUSSIANA	63
4.4.1	Máscara Gaussiana com cintura variável	64
4.4.2	Máscara Gaussiana com Deslocamento δ	66
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

Devido à Mecânica Quântica, a humanidade é capaz de explicar em grande nível de detalhe o comportamento da matéria na escala microscópica. Não só a matéria como também o campo eletromagnético e a interação radiação-matéria podem ser descritos usando estados físicos não acessíveis à Física Clássica. Com os novos estados quânticos, fez-se necessário repensar o conceito de informação e a maneira como ela é codificada, armazenada e transmitida entre sistemas físicos. Assim, no último meio século, foi-se construindo a Teoria da Informação Quântica.

Espera-se que os estudos nessa área permitam avanços importantes no desenvolvimento de computadores quânticos. Os primeiros computadores, na década de 1940, eram enormes chegando a ocupar andares inteiros enquanto que o uso era exclusivo para o cálculo de operações complexas. Então, com o intuito de substituir as enormes válvulas, presentes nos computadores, os laboratórios Nokia Bell criaram um grupo, composto principalmente por John Bardeen, Willian Bradford Shockley e Walter Houser Brattain, os quais desenvolveram pesquisas em semicondutores e inventaram o transistor em 1947 (1), através da descoberta do efeito transistor que rendeu o prêmio Nobel de 1956 (2). Assim, com a substituição das válvulas por transistores, os computadores foram ficando menores e se tornaram cada vez mais velozes e potentes.

Então em 1965, Gordon Moore, que viria a se tornar fundador da empresa Intel em 1968, notou que tanto o número de transistores embutidos nos microprocessadores quanto a velocidade de processamento de informação dobravam a cada ano (período posteriormente atualizado para 18 meses). Essa previsão, que ficou conhecida como lei de Moore, serviu como um incentivo no desenvolvimento de computadores cada vez menores. No entanto, com a diminuição no tamanho dos dispositivos e o aumento na velocidade de processamento, o tamanho do suporte físico no qual se codifica uma unidade de informação (bit) também diminui, podendo chegar em princípio a um único átomo. Nesse limite, a computação necessitaria de um novo paradigma em que predominam a Física Quântica e a Informação Quântica. É nesse cenário, que pode ter vantagens – mas também desvantagens – computacionais que surge a ideia do computador quântico.

Um bit clássico, pode assumir valores: 0 ou 1. Toda a computação é construída em cima dessa base binária, em que toda a unidade de informação assume apenas dois valores possíveis.

$$bit = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Já um bit quântico, ou q-bit, a informação pode representar os dois valores ao mesmo tempo, graças à superposição de estados.

$$qubit = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

Num computador clássico, bits são componentes eletrônicos dentro de um chip. No caso dos qubits, eles podem ser gerados em todas as áreas da física de baixas energias, seja a partir de íons aprisionados em armadilhas magnéticas, elétrons de estado sólido, ressonância magnética nuclear, junções supercondutoras ou ótica quântica. Assim sendo, o desenvolvimento de tecnologias quânticas recebe investimentos massivos, principalmente nos Estados Unidos, na Europa e na China.

Com o avanço do controle e manipulação de sistemas quânticos, outra aplicação com grande interesse é a criptografia quântica. Um processo que é dito inviolável para a transmissão segura de dados.

A criptografia quântica já é realidade e vem sendo empregada para transações bancárias na Europa e em redes de comunicação entre universidades e empresas, nos Estados Unidos. Outros protocolos de comunicação quântica são implementados rotineiramente em laboratórios de pesquisa.

O processo se dá a partir da criação de duas partículas gêmeas, emaranhadas. É enviada uma partícula para cada receptor, através de um meio que pode ser fibra óptica quando se trata de fótons, e mesmo que a mensagem seja interceptada através de uma ou mais partículas, os receptores finais ficam sabendo da tentativa de interceptação ao compararem o estado quântico final. Isso se dá devido ao fato de que o interceptor altera o estado quântico de cada uma das partículas arrancadas.

Existem alguns protocolos de distribuição de chaves quânticas. O primeiro deles foi proposto em 1984 por Charles Bennett da IBM e Gilles Brassard da Universidade de Montreal, que ficou conhecido como protocolo BB84 (3) e que consiste em enviar a informação através da polarização dos fótons. Para isso, se utiliza de 2 conjuntos de bases: HV - Horizontal e Vertical, AD - Anti-diagonal e diagonal.

Tabela 1 – Dados num processo de distribuição de chaves criptográficas segundo protocolo BB84

Base A	Valor A	Base B	Valor B	Bases Coincidentes	Chave
HV	1	AD	0	Não	
AD	1	AD	1	Sim	1
AD	0	HV	0	Não	
HV	1	HV	1	Sim	1
AD	0	HV	1	Não	
HV	0	HV	0	Sim	0
AD	0	AD	0	Sim	0
HV	1	AD	1	Não	

Então A envia a informação através da polarização dos fótons com uma sequência aleatória de bits, sendo 0 ou 1, também seleciona de forma aleatória a escolha da

base, sendo HV ou AD, então envia os fótons para B contendo esses bits nas respectivas bases. Como B não sabe a base em que foram enviados os bits, escolhe também de forma aleatória, a base para medidas. Ao final, A e B se comunicam e anunciam as bases utilizadas no processo e são mantidos apenas os bits que coincidem as bases de envio e detecção.

No exemplo utilizado, o primeiro bit é enviado na base HV e medido na base AD, portanto é descartado. O segundo bit, as bases utilizadas foram AD tanto no envio quanto na detecção. Então ao longo de 8 bits, 50% foram coincidentes, sendo eles os bits do segundo, quarto, sexto e sétimo envio. A chave gerada é então, 1-1-0-0.

O fato do número de bases coincidentes ser de apenas 50% é que torna o processo seguro, pois, caso utilizassem sempre bases conhecidas, seria possível interceptar a informação escolhendo a base adequada e na sequência enviar para B o resultado obtido. Como o agente interceptor não sabe em qual base foi enviada a informação, caso ele meça na base errada e envie a informação para B, há ainda 25% de chance de B escolher a base certa mas a informação chegar errada.

Tabela 2 – Dados considerando que o interceptor está fazendo uma medida entre o emissor e o receptor

Base A	Valor A	Base Interceptor	Valor Interceptor	Base B	Valor B
HV	1	AD	1	HV	1
HV	1	AD	1	HV	0
HV	1	AD	0	AD	1
HV	1	AD	0	AD	0

Alem do método segundo protocolo BB84, existem outros métodos para explorar graus de liberdade do fóton. Além da polarização de dimensão 2, outras alternativas como comprimento de onda, direção de propagação e perfil transversal, possuem dimensão infinita.

Nesse sentido, tem-se explorado bastante nos últimos anos propriedades relacionadas ao perfil espacial do feixe. Dentre as variadas famílias de feixes gaussianos, os mais explorados são os feixes de Hermite-Gauss e, principalmente, os feixes de Laguerre-Gauss.

Os feixes de Laguerre-Gauss constituem uma família de feixes que tem despertado interesse devido à propriedade topológica de momento angular orbital (MAO) da luz (4, 5, 6). Feixes de luz com momento angular orbital possuem uma frente de onda helicoidal e um vórtice ótico em seu centro, conhecidos como feixes de vórtices óticos.

Na Figura 1, o índice ℓ representa a ordem de momento angular orbital. Feixes com vórtice ótico são feixes de ordem maior que zero. Para o caso de $\ell = 0$ não há variação de fase em seu perfil transversal, portanto as frentes de onda são planas e o perfil de intensidade é uma gaussiana. No caso de índices $\ell = 1$ ou $\ell = 2$ a variação de fase sobre o perfil transversal varia uma quantidade $2\pi\ell$ e a frente de onda se torna

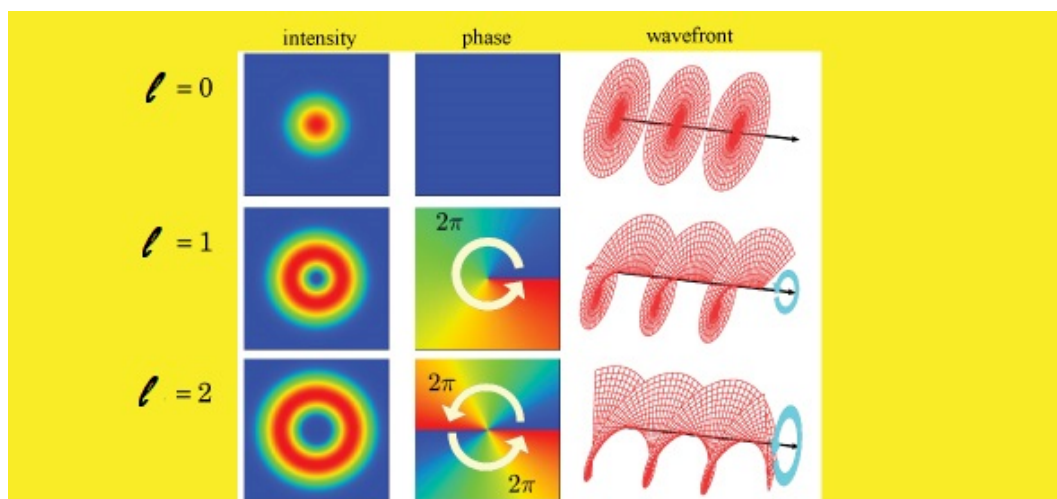


Figura 1 – Descrição de feixe com vórtice ótico. Representação da distribuição de intensidade do perfil transversal, a distribuição de fase e a frente de onda num plano de mesma fase e o momento angular orbital representado por um círculo azul.

Fonte: Morita (2014).

helicoidal.

Um modo com carga topológica ℓ apresenta MAO de $\hbar\ell$ por fóton, onde \hbar é a constante reduzida de Planck.

A comunidade da área já dispõe de conhecimentos relativamente completos que permitem gerar, controlar e medir fótons com MAO com certo grau de precisão (7, 8, 9). Um dos desafios atuais é aperfeiçoar estas técnicas, tanto pelo interesse fundamental que elas despertam, quanto pelo intuito de se aproximar de uma realidade em que as tecnologias quânticas que usem a luz como suporte físico de informação atinjam um patamar de viabilidade econômica.

2 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

2.1 EQUAÇÃO DE ONDA

Os feixes entregues pelos lasers comerciais têm comumente um perfil transversal de intensidade gaussiano e são por isso chamados de feixes gaussianos. Outros feixes um pouco mais complexos são possíveis de se obter, ainda mantendo um envelope gaussiano na expressão do campo elétrico. Veremos, nesta seção, duas famílias de feixes gaussianos: a família de modos de Hermite-Gauss e a de Laguerre-Gauss. Vamos mostrar que essas famílias são compatíveis com as Equações de Maxwell no espaço livre, sem carga livre ou corrente.

Neste caso, as equações de Maxwell são reescritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei d'Ampère})$$

Aplicando o rotacional na Lei d'Ampère e na Lei de Faraday e usando a propriedade matemática $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, encontramos equações de onda para o campo elétrico (1) e para o campo magnético (2), onde, em ambos casos, a velocidade de propagação é igual a $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (11).

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Por convenção, utiliza-se o campo elétrico para descrever a onda eletromagnética regida pelas equações acima, ficando o campo magnético completamente determinado pelo campo elétrico através da equação vetorial $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$. Neste caso, por simplicidade considera-se somente ondas monocromáticas de frequência ω e polarização constante \vec{e} . Assim, trabalharemos com o ansatz $\vec{E}(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp(i(kz - \omega t)) \vec{e}$, que representa uma onda plana monocromática modulada espacialmente pela função $u(x, y, z)$, a que se costuma chamar de *envelope complexo do campo elétrico*. Ao substituir este ansatz na equação de onda (1), obtemos a seguinte equação diferencial para o envelope complexo:

$$\nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + (\omega^2/c^2 - k^2)u = 0.$$

Na equação acima, o termo proporcional a u é anulado se levarmos em conta a relação de dispersão no vácuo: $\omega = kc$. Assim, resta:

$$\nabla^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Onde $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Assumindo que a magnitude do campo é muito maior que a variação do mesmo ao avançar um comprimento de onda ao longo do eixo z , então

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} \ll \frac{u}{\lambda}$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial z} \ll ku$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Podemos então dirimir o termo da segunda derivada, obtendo:

$$\nabla_T^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

A aproximação realizada acima é chamada de aproximação paraxial, que leva à equação paraxial de Helmholtz (4). Esta aproximação é válida, em geral, para feixes que não são extremamente focalizados, como é o caso da esmagadora maioria dos experimentos em mesas óticas e até para vários sistemas de microscopia ótica.

2.1.1 De Onda Esférica a Feixe Gaussiano

Dentre diversas soluções da equação de onda, uma solução simples, exata e interessante é a onda esférica, que descreve uma onda produzida por uma fonte puntual. Considerando que a onda está divergindo de uma fonte fixa no ponto $(0,0,0)$, seu campo no ponto x,y,z é

$$E(x, y, z) = \frac{E_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ao se propagar ao longo do eixo z , o campo pode ser reescrito como

$$E(x, y, z) = \frac{E_0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} e^{-ik\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

, onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

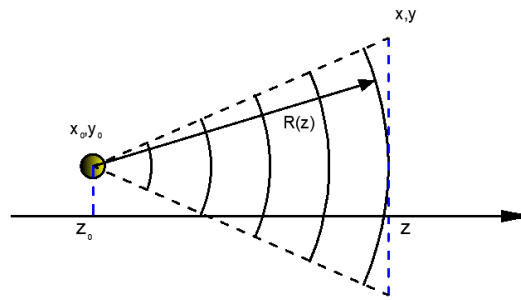


Figura 2 – Onda esférica divergindo a partir de uma fonte localizada no ponto (x_0, y_0, z_0) com raio de curvatura $R(z)$ descrito em função da distância z .

O raio de curvatura da frente de onda pode ser reescrito como série de potências em torno de ρ .

$$R(\rho, z) = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$R(\rho, z) = z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{3\rho^4}{24z^3} + \dots$$

Analisando a onda ao longo do eixo z , o campo no plano transversal, num ponto não muito distante da origem, é obtido pela aproximação de Fresnel da teoria de difração.

Assim,

$$E(x, y, z) = \frac{E_0}{z} e^{-ik(z + \frac{\rho^2}{2z})}$$

Ou

$$u(x, y, z) = \frac{u_0}{z} e^{-ik \frac{\rho^2}{2z}}$$

$$u(x, y, z) = \frac{u_0}{R(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2R(z)}}, \tag{5}$$

que é solução analítica da equação paraxial de Helmholtz (4).

Em primeira aproximação o raio de curvatura cresce linearmente com a distância z e pode ser escrito de maneira mais geral como $R(z) = R_0 + z$, onde R_0 representa seu valor no ponto $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$.

Como um feixe físico real não é tão bem representado pela equação (5), devido à amplitude da onda não cair com a distância transversal em relação ao eixo z , então uma solução interessante consiste em converter o raio de curvatura $R(z)$ por um raio de curvatura complexo $q(z)$ onde

$$q(z) = q_0 + z \tag{6}$$

e q_0 é um número complexo. A função continua sendo solução da equação (4) e adquire propriedades de feixe gaussiano (12) (Figura 3). O envelope complexo é descrito como:

$$u(r) = \frac{u_1}{q(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}}. \quad (7)$$

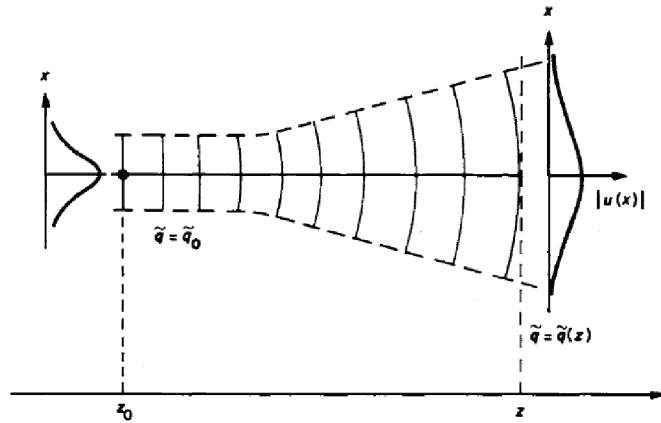


Figura 3 – Feixe gaussiano descrito pelo parâmetro complexo $q(z)$.

Fonte: Siegman (1986).

Como $q(z)$ é complexo, podemos separar o expoente numa parte real e numa imaginária.

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q_r} - i \frac{1}{q_i} \quad (8)$$

Então a equação (7) fica

$$u(r) = \frac{u_1}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2q_r} \right] \exp \left[-k \frac{\rho^2}{2q_i} \right] \quad (9)$$

Notamos, na equação acima, uma exponencial complexa que descreve uma frente de onda de raio de curvatura $q_r(z)$ e uma exponencial real que representa o perfil transversal de amplitude do feixe. Esta última é uma função gaussiana no formato $e^{-\rho^2/w(z)^2}$, onde $w(z) = \sqrt{2q_i/k}$ é o raio (metade do diâmetro) definido a 1/e da amplitude máxima (a qual ocorre em $\rho = 0$).

Desta forma, podemos escrever:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}. \quad (10)$$

Se q_0 é um número puramente imaginário, então

$$q_0 = iz_R$$

onde

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

é o chamado comprimento de Rayleigh e w_0 é a cintura do feixe. O comprimento de Rayleigh tem uma interpretação física simples: é a distância medida, ao longo do eixo de propagação, entre a cintura do feixe e o ponto em que a largura do feixe mede $\sqrt{2}w_0$.

A equação 6 mostra que

$$q(z) = z + iz_R$$

então

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{z - iz_R}{z^2 + z_R^2}$$

Assim, o raio de curvatura e a cintura podem ser reescritos como

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{z}{z^2 + z_R^2}$$

e

$$\frac{1}{w(z)^2} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{w_0^2} \frac{z_R^2}{z^2 + z_R^2}$$

No espaço livre, o feixe que obedece as leis de propagação tem um comportamento mostrado na figura a seguir

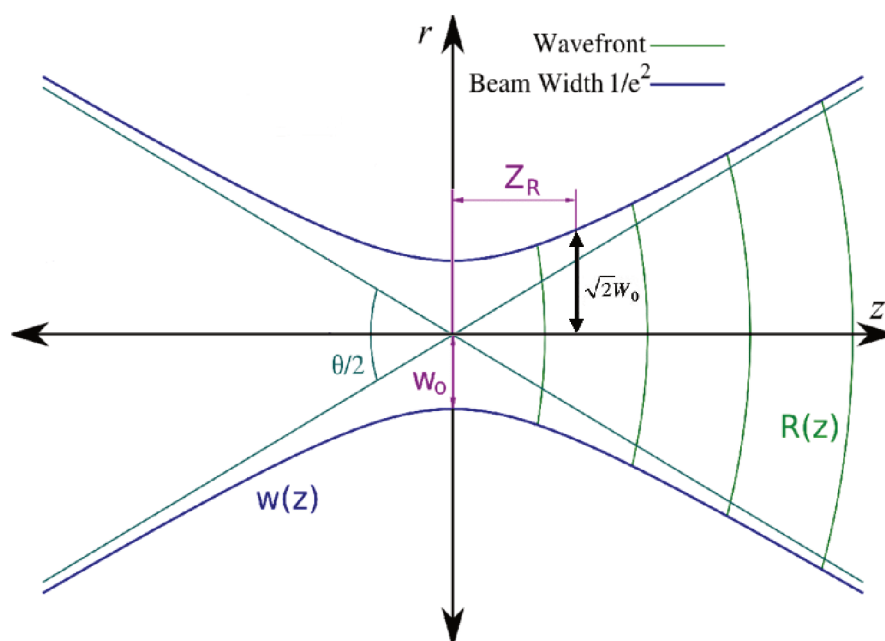


Figura 4 – Comportamento de propagação indicando as variações em $R(z)$, $w(z)$ ao longo do eixo de propagação z ; além da indicação da cintura do feixe em $z=0$ e o local aproximado do comprimento de Rayleigh.

Fonte: Leight (2008).

A relação dos parâmetros do feixe, em função da distância percorrida, são descritos pelas funções 11-14.

$$w_0 = \left(\frac{\lambda z_R}{\pi} \right)^{1/2} \quad (11)$$

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (13)$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_R} \quad (14)$$

Pelas equações (11)-(14) pode perceber que a cintura do feixe w_0 , tamanho transversal mínimo ao longo da propagação, está diretamente relacionado com a difração do feixe.

A equação (14) é um termo de fase conhecido como fase de Gouy por ter sido descrito, e demonstrado experimentalmente, primeiramente por Louis Georges Gouy em dois documentos(15, 16) nos quais ele prevê que uma fase anômala de π é adicionada ao feixe cada vez que o mesmo passa por um ponto de focalização.

Assim, o campo $u(\rho, z)$ pode ser reescrito como

$$u(\rho, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right] \quad (15)$$

A eq (15) é uma solução particular da equação paraxial. É a solução que representa o envelope complexo do chamado feixe gaussiano de ordem zero, cujo perfil de intensidade é simplesmente uma função gaussiana. É possível encontrar outras soluções mais complexas e até famílias de soluções que formam bases adequadas para a descrição de feixes paraxiais submetidos a variadas condições de contorno. As duas famílias mais importantes e comumente utilizadas serão estudadas aqui: feixes de Hermite-Gauss (descritos por envelopes separáveis nas coordenadas x e y) e feixes de Laguerre-Gauss (que apresentam momento angular orbital e simetria cilíndrica no perfil de intensidade).

2.1.2 Feixes de Hermite-Gauss

O conjunto de feixes Hermite-Gauss são feixes que possuem os polinômios de Hermite como funções que descrevem seu perfil espacial. Neste caso, a função mais geral é descrita por:

$$u_{m,n}(x, y, z) = \frac{C}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - i\zeta_{m,n}(z) \right] \quad (16)$$

Onde m e n são números naturais que definem as ordens dos polinômios de Hermite e determinam a ordem N do feixe gaussiano, dada por $N = m + n$. Portanto, um feixe de ordem 1 é descrito pelo polinômio de Hermite H_1 em x e o polinômio H_0 em y , ou vice-versa. A fase de Gouy é descrita, para ordens superiores, como $\zeta_{m,n}(z) = (m + n + 1) \arctan \frac{z}{z_R}$.

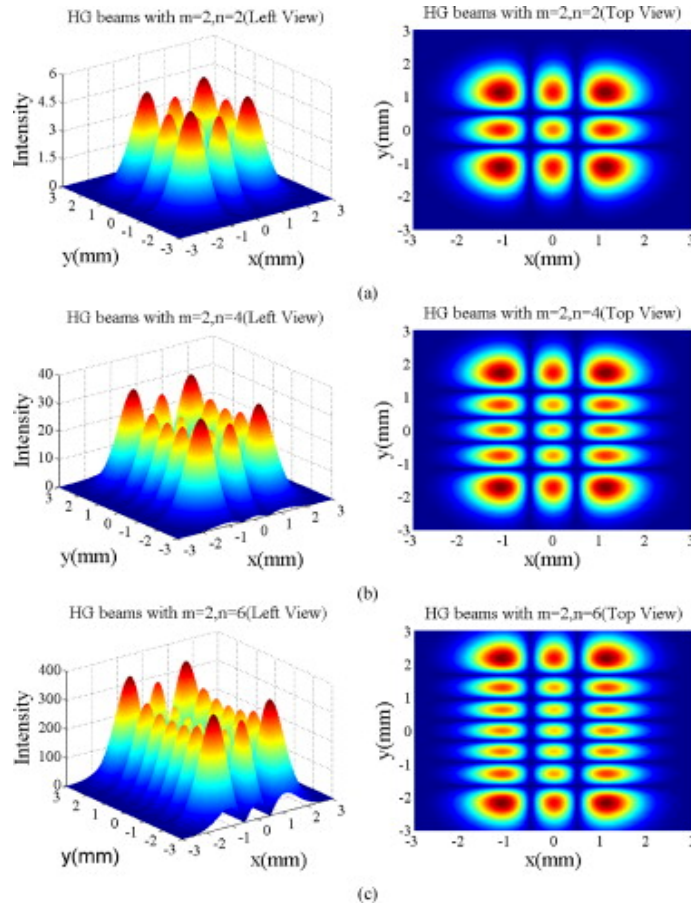


Figura 5 – Modos de Hermite-Gauss com a representação da intensidade e o perfil transversal do feixe nos modos $HG_{2,2}$, $HG_{2,4}$ e $HG_{2,6}$.

Alguns dos polinômios de ordem mais baixa que descrevem esse perfil transversal são descritos pelas expressões mostradas na tabela 3.

Tabela 3 – Polinômios de Hermite

Ordem	função
$H_0(x)$	1
$H_1(x)$	$2x$
$H_2(x)$	$4x^2 - 2$
$H_3(x)$	$8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	$16x^4 - 48x^2 + 12$

2.1.3 Feixes de Laguerre-Gauss

Além dos feixes de Hermite, que são descritos em coordenadas cartesianas, outra classe importante de feixes são os feixes de Laguerre-Gauss, os quais são descritos em coordenadas cilíndricas:

$$E^{\ell}_p(r, \theta, z) = C_1 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{\ell} L^{\ell}_p \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ik \frac{r^2}{2R(z)} + i\ell\theta - i\zeta^{\ell}_p(z) \right] \quad (17)$$

O C_1 é uma constante de normalização, p e ℓ são números inteiros com $p \geq 0$ e a fase de Gouy, aqui, é reescrita como $\zeta^{\ell}_p(z) = (2p + |\ell| + 1) \arctan \frac{z}{z_R}$, devido à ordem do feixe ser dada por $N = 2p + |\ell|$.

Uma característica dos modos de Laguerre-Gauss, das ordens superiores, é que os perfis de intensidades são descritos por anéis concêntricos, onde o índice radial p representa os números de anéis (p anéis concêntricos quando $\ell = 0$ e $p + 1$ anéis concêntricos quando $\ell > 0$) e o raio do anel central é proporcional à raiz quadrada do número de variação de fase azimutal ℓ (17) como pode ser visto na figura 6.

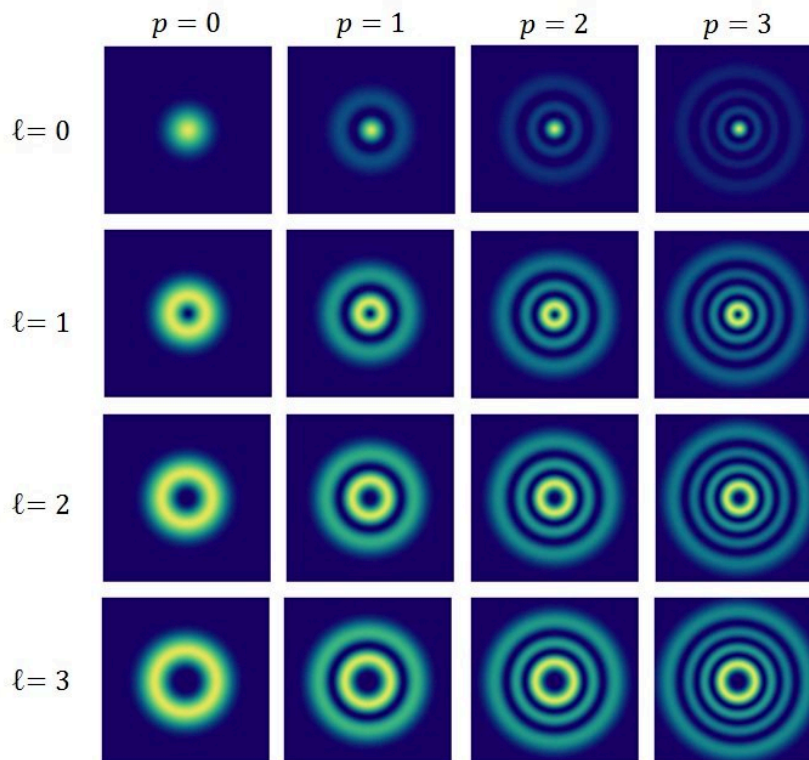


Figura 6 – Perfil de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss com índices radiais e azimutais variando até 3.

Num dos trabalhos de *Allen et al*, em 1992, (18) demonstra-se que um feixe de Laguerre-Gauss carrega momento angular orbital (MAO), ou seja, o feixe com vórtice ótico possui uma frente de onda helicoidal, isso significa que a estrutura de fase do

feixe rotaciona à medida que se propaga no espaço. Na Figura 7 é possível ver que o número de frentes de onda entrelaçadas é igual ao índice azimutal.(19)

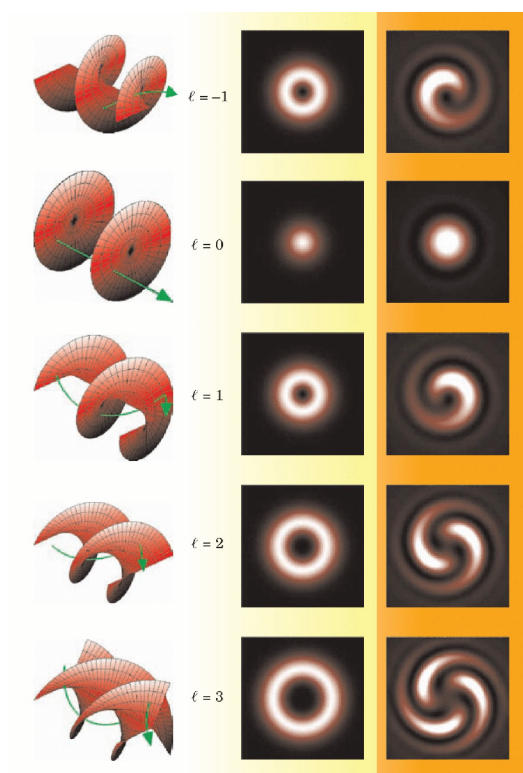


Figura 7 – Variação de fase de um feixe com momento angular orbital (coluna da esquerda). Na coluna central, o padrão de intensidade anular do perfil transversal e na coluna da direita o padrão de intensidade da interferência do feixe com uma onda plana, onde o número de espirais é igual ao número ℓ .

Fonte: Padgett (2011).

Outros exemplos de perfis transversais de intensidade de modos de Laguerre-Gauss podem ser visto na Figura 8.

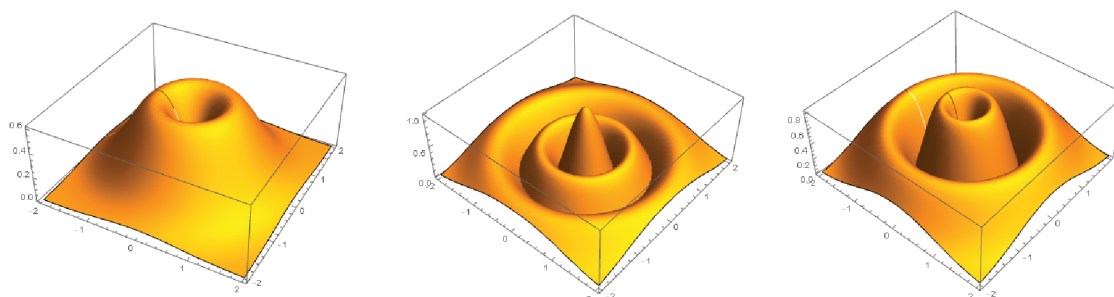


Figura 8 – Distribuição de intensidade do campo elétrico no perfil transversal. Modo LG_0^1 , LG_2^0 e LG_1^1

Os polinômios generalizados de Laguerre, de ordem mais baixa, que descrevem esses perfis transversais são

Tabela 4 – Polinômios generalizados de Laguerre

L_p^ℓ	função
$L_0^0(x)$	1
$L_1^0(x)$	$-x + 1$
$L_0^1(x)$	1
$L_1^1(x)$	$-2x + 4$
$L_2^1(x)$	$3x^2 - 18x + 18$
$L_0^2(x)$	2
$L_1^2(x)$	$-6x + 18$
$L_2^2(x)$	$12x^2 - 96x + 144$
$L_0^3(x)$	6
$L_1^3(x)$	$-24x + 96$

2.2 MODULAÇÃO ESPACIAL DE FEIXES

A geração e manipulação dos feixes de ordem superior sempre foi de grande interesse, principalmente os feixes de Laguerre-Gauss devido às características de vórtice. Hoje, é sabido que os vórtices óticos podem melhorar a capacidade de comunicação com ondas de rádio(20) e ondas milimétricas(21), de forma geral, levando a um avanço em pesquisas nas áreas que envolvem comunicação e astronomia(22).

Desde 1970 estudos mostram evidências das singularidades de fase(23), ou vórtices óticos, numa simulação das ondas de rádio refletidas na parte inferior da camada de gelo da Antártica, encontraram que o sinal retornado continha intensidade nula no centro enquanto a fase variava em 2π , configurando um vórtice ótico, também descrito como singularidade de fase (24, 25).

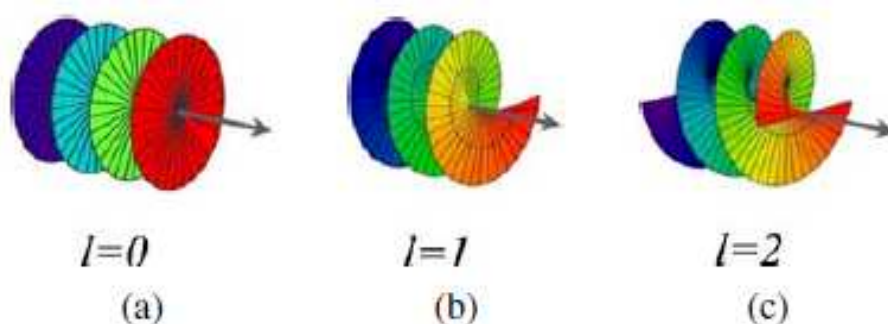


Figura 9 – Representação da frente de onda dos modos de Laguerre-Gauss com índice radial $p=0$ e índices azimutais a) $\ell=0$; b) $\ell=1$; c) $\ell=2$.

Fonte: Andrews (2008).

Como já citado num capítulo anterior, em 1992 um trabalho mostrou que todos os feixes com fase helicoidal possuem momento angular orbital (18). Essa demonstração trouxe ainda mais interesse para os feixes de ordem superior da família

de Laguerre-Gauss. Por essa característica, hoje são muito utilizados em estudos de aplicação em astrofísica(26), no controle da rotação de partículas em armadilhas microscópicas(27), em pinças óticas (28), além de aplicações em computação quântica e criptografia.

Dentre os diversos métodos para geração de feixes com vórtices óticos, os mais comuns são por placas de fase espiral e através de máscaras holográficas.

2.2.1 Placas de Fase Espiral

A placa de fase espiral tem uma ideia simples e intuitiva. A maneira mais prática de gerar um feixe de fase helicoidal seria passar uma onda plana por um elemento ótico com superfície helicoidal e índice de refração n . Assim, a espessura h da placa, depende do ângulo azimutal θ , onde

$$h = h_s \frac{\theta}{2\pi} + h_0$$

como indicado na Figura 10.

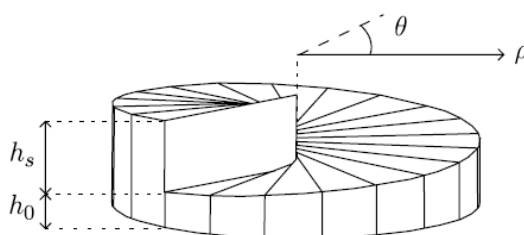


Figura 10 – Representação da placa que possui uma superfície espiralada de h_0 a $h_0 + h_s$ e uma base de comprimento h_0 .

Fonte: Oemrawsingh (2004).

Como o índice de refração no material é diferente do meio externo, a placa imprimirá no feixe uma carga de vórtice igual a(29)

$$Q = h_s(n - n_0)\lambda$$

portanto, tem liberdade para alterar a carga de vórtice do feixe mudando a estrutura da placa, tamanho ou índice de refração, ou mudando o comprimento de onda do feixe.

2.2.2 Máscaras holográficas

Em 1951, Dennis Gabor demonstrou uma maneira de produzir imagens através da interferência de dois campos. Graças a isso foi laureado em 1971 com o prêmio Nobel de física pela sua invenção e desenvolvimento do método holográfico(30). O método consiste em dividir um feixe coerente de forma a enviar uma parte do feixe

para refletir num objeto e recombinar o mesmo, refletido, com a outra parte do feixe (luz de referência), ambos num filme fotográfico, como ilustrado na Figura 11. Dessa forma, os padrões de interferência registram os máximos e mínimos no filme fotográfico gerando uma máscara. Após a criação da máscara holográfica, ao incidir apenas a luz de referência na máscara a luz é combinada com as franjas de interferência da máscara de forma a reproduzir a imagem desejada (31).

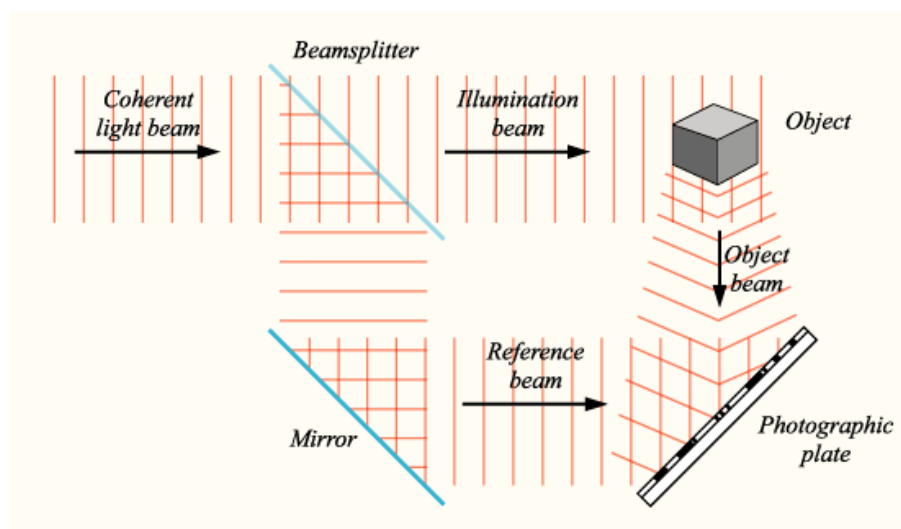


Figura 11 – Interferência de 2 feixes, sendo um de referência e um de reflexão, numa placa holográfica

A imagem a seguir foi utilizada pelo próprio Dennis Gabor, em sua apresentação do Nobel, para demonstrar o processo de geração das máscaras holográficas e, posteriormente, o processo de reconstrução da imagem.

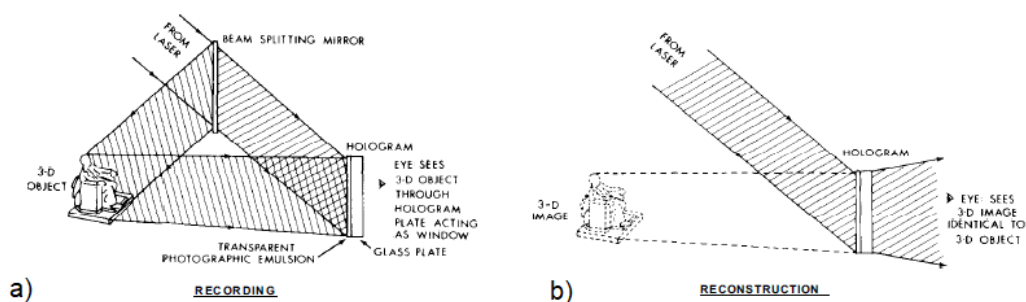


Figura 12 – a) processo de geração das máscaras holográficas, onde o feixe coerente é dividido por um divisor de feixe, uma parte incide no objeto e posteriormente os feixes são recombinados no filme holográfico. b) processo de reconstrução da imagem: o feixe incide sobre a máscara holográfica e o feixe refletido forma a imagem holográfica.

Fonte: Gabor (1971).

uma máscara holográfica pode ser utilizada na produção de um feixe de Laguerre-Gauss a partir de um feixe gaussiano de ordem zero. No processo de geração da

máscara holográfica do feixe de Laguerre-Gauss com índice azimutal $l = 1$ e índice radial $p = 0$, vamos considerar uma onda de referência

$$R = R_0 e^{ik_x x + ik_z z}$$

incidindo no plano $z = 0$ com um ângulo $\phi = \arcsin \frac{k_x}{k}$ em relação a sua normal e formando um padrão de interferência no plano X-Y com o feixe laguerre-gaussiano (32).

Em $z=0$, ou seja, no plano onde o padrão de interferência é gravado,

$$I = |R_0 e^{ik_x x} + E_0(r/w) e^{i\theta} e^{-r^2/w^2}|^2$$

$$I = R_0^2 + E_0^2(r/w)^2 + 2R_0 E_0(r/w) e^{-r^2/w^2} \cos[k_x x - \theta], \quad (18)$$

onde o último termo representa o padrão de interferência, o qual gera a máscara mostrada na Figura 13.

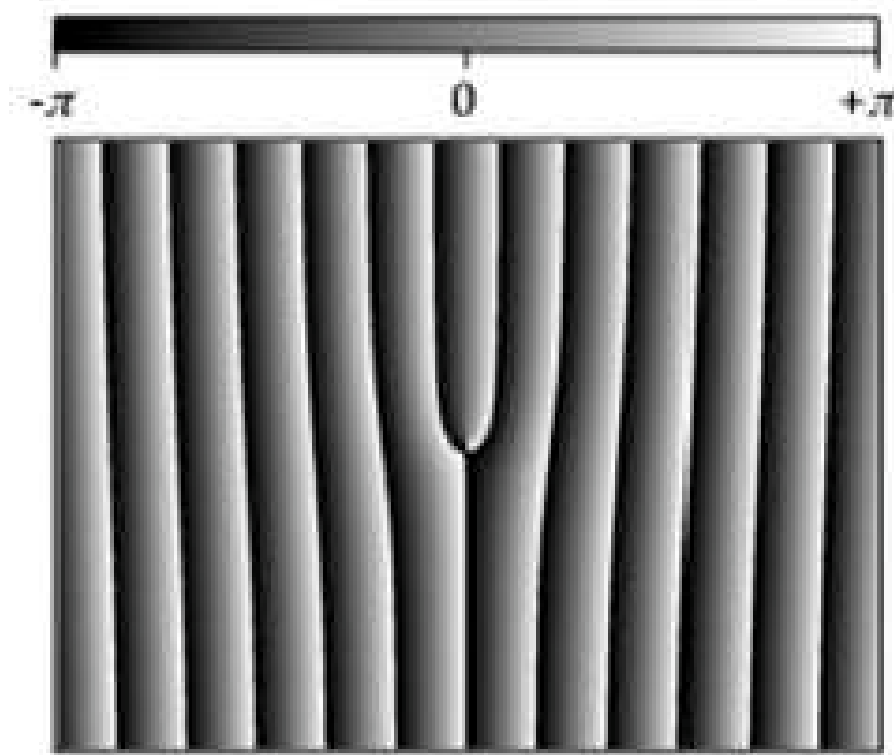


Figura 13 – Padrão de interferência da máscara holográfica para um feixe de Laguerre-Gauss com carga de vórtice igual a 1

Fonte: Heckenberg (1992).

2.2.3 Modulador Espacial de Luz

O modulador espacial de luz (SLM da singla em inglês *Spatial Light Modulator*) é um dispositivo eletrônico com uma tela de cristal líquido designado especialmente

para modular feixes através da aplicação de máscaras holográficas geradas por um computador.

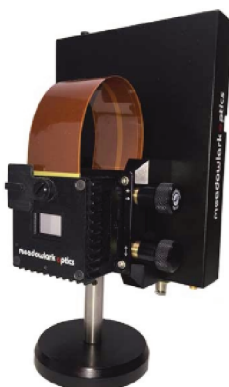


Figura 14 – Imagem de um dispositivo modulador espacial de luz utilizado neste trabalho

Fonte: Meadowlark (2019).

O cristal líquido possui moléculas reorientáveis pela voltagem aplicada nos pixels. Uma mudança de orientação provoca uma mudança de índice de refração, que por sua vez provoca uma mudança na fase acumulada pela onda que atravessa o cristal líquido. Importante salientar que a onda atravessa o cristal líquido uma vez na ida, reflete num espelho de fundo e o atravessa outra vez na volta.

O SLM opera aplicando 1 dos 256 níveis de cinza disponíveis em cada pixel da tela, reproduzindo não mais de forma binária a equação (18), mas o argumento da função cosseno. Isso é feito através de uma imagem no computador em escalas de cinza, realizando uma variação linear entre os níveis branco e preto.

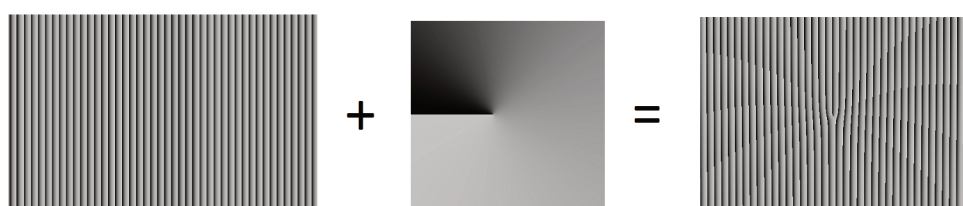


Figura 15 – Combinação no SLM de grade de difração e variação de fase do modo LG_0^1 produzindo a máscara bifurcada, característica das máscaras de Laguerre-Gauss

Com este equipamento, é possível simular uma grade de difração *blazed*, o termo em inglês 'blaze' significa 'brilho'. Justifica-se o nome desta grade pelo fato de que a luz - portanto, o 'brilho' - fica concentrada numa só ordem de difração. A grade *blazed* consiste em um modelo específico de grade de difração, em geral refletiva, projetada para produzir máxima interferência construtiva em uma única ordem de difração, minimizando a energia enviada à ordem zero.



Figura 16 – Combinação no SLM de grade de difração e variação de fase do modo $HG_{0,1}$ produzindo a máscara com diferença de fase π entre o nível superior e o inferior.

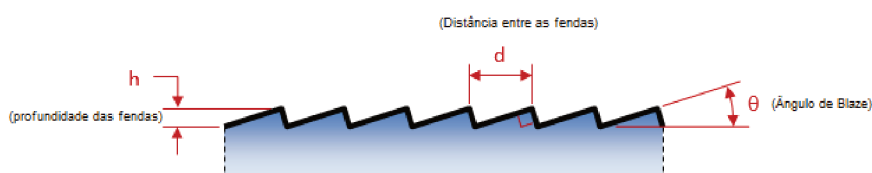


Figura 17 – Grade de difração *blazed* onde h é a profundidade das ranhuras, d é a separação entre as ranhuras e θ é o ângulo de blaze.

Fonte: Dynasil (2019).

A grade *blazed* possui equação de difração semelhante às grades de transmissão e reflexão comuns.

$$d[\sin[\theta_m] + \sin[\theta_i]] = m\lambda, \quad (19)$$

onde θ_m é o ângulo refletido, θ_i é o ângulo incidente com relação à superfície normal e m é a ordem de difração.

Uma condição especial, conhecida como configuração Littrow, é quando o ângulo de incidência θ_i é igual ao ângulo de difração θ_m , assim a equação 19 toma a forma

$$2d\sin[\theta_m] = m\lambda \quad (20)$$

usada pra calcular o ângulo da primeira ordem de difração ($m=1$) do ângulo de *blaze*, para um específico comprimento de onda de *blaze* e distância entre as fendas.

A reprodução das grades de blaze no SLM dependem então de uma função periódica que simula as rampas da Figura 17. Para isso, utiliza-se a função *blazing* em que, no caso ideal, é uma função linear que varia de 0 a 255 num intervalo de voltagens cujos extremos provocam defasagem que diferem de 2π entre si.

2.3 CAVIDADES ÓTICAS

As cavidades óticas, ou ressonadores óticos, são instrumentos interferométricos formados por espelhos que confinam a certos comprimentos de onda. A luz confinada

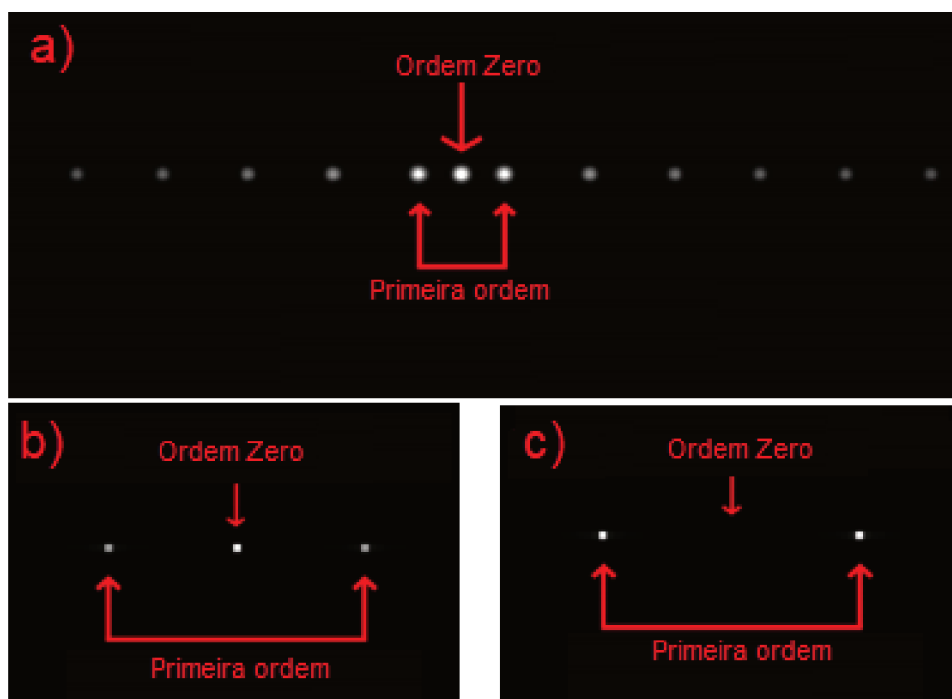


Figura 18 – Mudança nos parâmetros de ajuste da função blazing. a) função totalmente desalinhada difratando em muitas ordens; b) ajustado apenas para a primeira ordem (± 1) e ordem zero; c) primeira ordem aparente e ordem zero bloqueada.

na cavidade é refletida pelos espelhos produzindo ondas estacionárias em certas frequências de ressonância. Cavidades óticas são os dispositivos mais comuns usados na análise espectral ou caracterização espacial dum feixe de luz, entre outras aplicações (34).

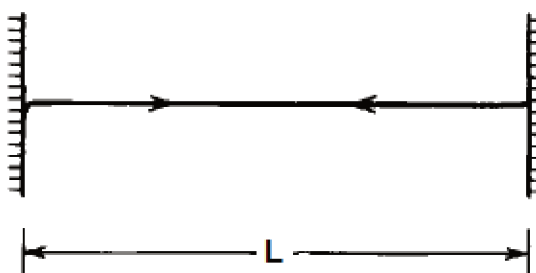


Figura 19 – Raio ótico perpendicular aos espelhos, separados por um comprimento L , refletindo sem escapar do ressonador (Fabry-Perot *etalon*)

Fonte: Saleh (1991).

Uma das cavidades óticas mais simples consiste em 2 espelhos planos semi-transparentes, os quais encontram-se dispostos de modo que as superfícies refletoras

sejam paralelas entre si; um dos espelhos é mantido fixo, enquanto o outro é montado sobre um suporte móvel. Quando os espelhos estão separados por uma distância fixa, o interferômetro passa a ser denominado de *etalon*. Esse interferômetro foi proposto por Charles Fabry e Alfred Perot em 1899 (35) com o propósito de utilização em medidas espectroscópicas.

2.3.1 Condições de ressonância num interferômetro de Fabry-Perot

A condição de ressonância dum raio ótico num Fabry-Perot *etalon* exige a necessidade de que as componentes transversais do campo elétrico se anulem nas extremidades da cavidade. Esta condição é equivalente às condições de contorno de uma corda vibrante presa em suas extremidades. Uma onda se propagando numa corda em tais condições deve conter apenas comprimentos de onda submúltiplos de $2L$, onde L é o comprimento da corda:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (21)$$

onde n é um número inteiro.

Em termos do número de onda k e da frequência ν , esta condição se reescreve

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (22)$$

e

$$\nu_n = \frac{nc}{2L}. \quad (23)$$

Já no caso da luz, existem modos ressonantes para determinado comprimento de cavidade. Esses modos apresentam-se no interior da cavidade como ondas estacionárias resultantes da interferência construtiva do campo intracavidade com o campo externo que adentra a cavidade por um dos espelhos semitransparentes. Para que haja interferência construtiva, é necessário que a fase total adquirida pela luz ao dar uma volta completa na cavidade (ida e volta, para o caso do Fabry-Perot *etalon*) seja um múltiplo de 2π .

Para entender o processo de confinamento da uma cavidade, vamos considerar uma fonte enviando ondas eletromagnéticas para a cavidade e, então, analisar o campo elétrico refletido, transmitido e no interior da mesma. No caso idealizado, com ondas planas, a cavidade pode ser caracterizada pela distância L entre os espelhos, pelas perdas sofridas e pelos coeficientes de transmissão e reflexão dos espelhos, equivalentes a t_j e r_j respectivamente, onde $t_j^2 + r_j^2 = 1$.

Os campos refletidos e transmitidos pela cavidade serão as somas de todas as contribuições de múltiplas interferências entre as ondas transmitidas e refletidas por cada espelho, além de um fator α , relacionado à perdas espúrias por volta. No interior da cavidade, o envelope complexo do campo elétrico depende do campo incidente

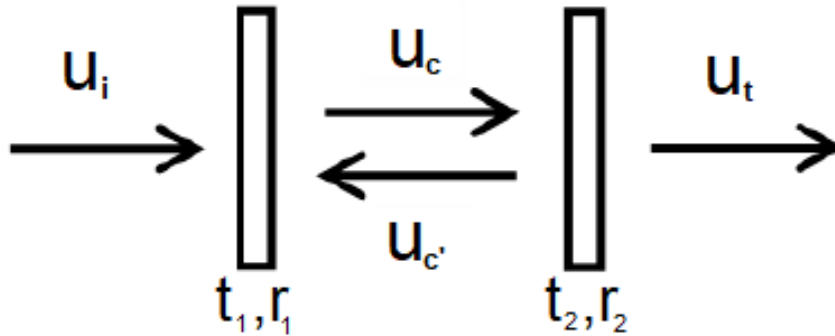


Figura 20 – Campo elétrico das ondas confinadas na cavidade

que foi transmitido pelo espelho de entrada, das múltiplas reflexões internas e da fase adquirida em seu interior (no processo de ida e volta), então

$$u_c = u_i t_1 + u_i t_1 r_1 r_2 \alpha e^{-i\phi} + u_i t_1 (r_1 r_2 \alpha)^2 e^{-2i\phi} + u_i t_1 (r_1 r_2 \alpha)^3 e^{-3i\phi} + \dots, \quad (24)$$

enquanto que o campo transmitido é

$$u_t = u_c t_2. \quad (25)$$

Reescrevendo o campo transmitido em função do campo incidente, ou seja, em função da equação 24,

$$u_t = t_2 u_i t_1 + u_i t_1 r_1 r_2 \alpha e^{-i\phi} + u_i t_1 (r_1 r_2 \alpha)^2 e^{-2i\phi} + u_i t_1 (r_1 r_2 \alpha)^3 e^{-3i\phi} + \dots$$

$$u_t = t_2 \frac{u_i t_1}{1 - r_1 r_2 \alpha e^{-i\phi}}$$

Considerando que os espelhos são idênticos e possuem coeficientes de transmissão e reflexão iguais a t e r respectivamente, então

$$u_t = \frac{u_i t^2}{1 - r^2 \alpha e^{-i\phi}}. \quad (26)$$

Como os coeficientes de reflexão e transmissão para a intensidade são definidos por $R = r^2$ e $T = t^2$, a intensidade transmitida pode ser reescrita como

$$I = \frac{I_0 T}{(1 - R\alpha)^2 + 4R\alpha \sin^2 \frac{\phi}{2}}. \quad (27)$$

Então a intensidade máxima do campo transmitido pela cavidade é igual a

$$I_{max} = \frac{I_0 T}{(1 - R\alpha)^2} \quad (28)$$

Rearranjando em função da intensidade máxima, a equação 27 fica

$$I = \frac{I_{m\acute{a}x}}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2(\phi/2)}, \quad (29)$$

onde

$$\mathcal{F} = \frac{\pi r^{1/2}}{1 - R\alpha} \quad (30)$$

é um parâmetro conhecido como finesse da cavidade, cujo significado discutiremos mais adiante. Note que este é um parâmetro que depende exclusivamente das perdas na cavidade. A título de exemplo quantitativo, para perdas de potência de 2% por volta ($r = \sqrt{0,98} \approx 0,99$), a finesse vale ≈ 314 .

A expressão 29 é uma função periódica em ϕ , apresentando máximos (tipicamente com picos estreitos) quando a fase ϕ é um múltiplo de 2π , ou seja, quando

$$\phi = k \times 2L = \frac{4\pi L}{c} \nu = 2n\pi.$$

Fixado o comprimento de cavidade L , isto equivale a dizer que há certas frequências óticas $\nu_n = n \times c/2L$ que são ressonantes com a cavidade, atingindo máxima transmissão através da mesma. A distância, em frequência, entre estas ressonâncias é conhecida como *intervalo espectral livre* (livre de picos de ressonância):

$$\Delta\nu_{iel} = \frac{c}{2L}.$$

A largura à meia altura (FWHM), em frequência, de um pico de ressonância é denominada largura de banda da cavidade, $\delta\nu$. Para finesse “altas”, que ocorrem comumente nas situações experimentais, é fácil mostrar que a finesse corresponde (aproximadamente) à razão entre o intervalo espectral livre e a largura de banda:

$$\mathcal{F} \approx \frac{\Delta\nu_{iel}}{\delta\nu},$$

ou seja, a finesse é uma medida do quão estreitos são os picos de ressonância em comparação com o intervalo espectral livre da cavidade.

Além da relação da finesse com a intensidade máxima, temos a expressão da intensidade mínima na cavidade,

$$I_{min} = \frac{I_{max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)}. \quad (31)$$

A finesse também está relacionada com o fator de qualidade (Q) da cavidade, uma cavidade com pouca perda por volta, possui uma finesse alta e, conseqüentemente, um fator de qualidade alto.

Uma cavidade sem perdas retornaria uma cavidade com finesse igual a infinito, conforme vai aumentando as perdas por volta, a finesse vai diminuindo. Na prática, isso

quer dizer que as perdas abrem margem para que "modos quase estacionários"(36) sejam ressonantes na cavidade. Assim os picos de ressonância se alargam como mostrado na Figura 21.

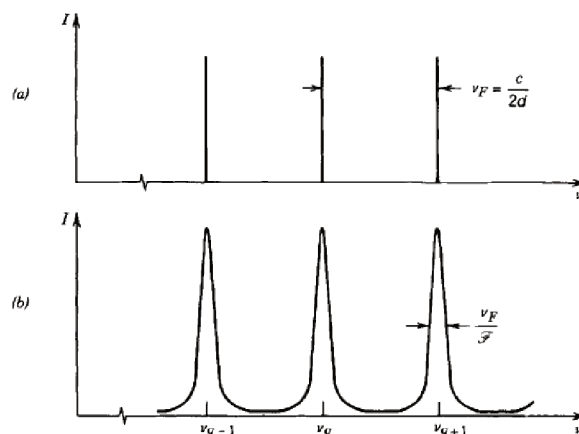


Figura 21 – Espectro de 3 frequências ressonantes na cavidade (a) sem perdas, com finesse $\mathcal{F} = \infty$ e intervalo espectral livre igual a ν_1 ; (b) com perdas, pico com largura de banda igual a ν_1/\mathcal{F} centralizado na frequência de ressonância ν_{q+1}

Fonte: Saleh (1991).

2.3.2 Condições de estabilidade geométrica para cavidades óticas

Um feixe gaussiano, ainda que inicialmente colimado, diverge naturalmente à medida que se propaga – $w = w(z)$ – tendo também um raio de curvatura de frente de onda que se altera ao longo da propagação – $R = R(z)$. Tal feixe, se enviado a um etalon Fabry-Perot, divergiria indefinidamente enquanto ricocheteasse entre seus espelhos planos. Por um lado, esta divergência dificultaria a visibilidade da interferência do feixe consigo mesmo no interior da cavidade e, por outro, em casos extremos, o feixe pode divergir a ponto de ficar maior que o próprio espelho, causando perdas por divergência e diminuindo o fator de qualidade da ressonância. Diz-se que o ressonador composto por espelhos planos é *geometricamente instável*, pois **não existe** feixe gaussiano que, lançado em seu interior, seja capaz de completar uma volta e retornar aos mesmos w e R de partida de maneira a atingir o recobrimento perfeito e maximizar os efeitos de interferência. No entanto, existem diferentes tipos de cavidades baseadas no interferômetro de Fabry-Perot em que a presença de pelo menos um elemento ótico com alguma curvatura – por exemplo, um espelho côncavo – compense a divergência do feixe no interior da cavidade, tornando-a estável.

A capacidade da cavidade, baseada no modelo de Fabry-Perot, ser estável e produzir modos ressonantes depende do seu comprimento L e dos raios de curvatura dos espelhos R_1 e R_2 (37). A estabilidade pode ser mostrada graficamente na Figura

22 em função do parâmetro da estabilidade g de cada espelho.

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}$$

e

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

Sendo a condição de estabilidade

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \tag{32}$$

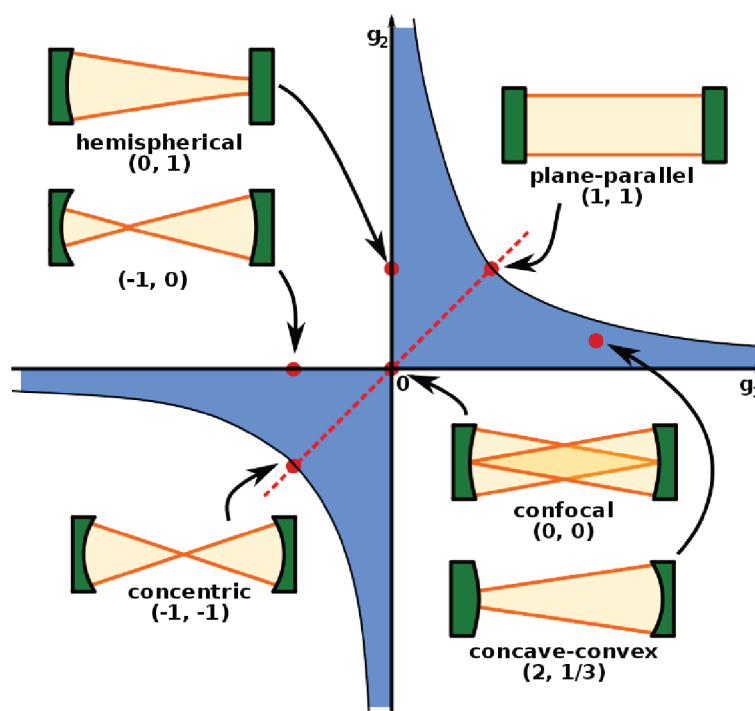


Figura 22 – Diferentes modelos de cavidades baseados no modelo de Fabry-Perot e indicando a área em azul como sendo a região estável e os pontos vermelhos indicam as condições de estabilidade das respectivas cavidades

Fonte: Yariv (1989).

2.3.2.1 Exemplo: cavidade plano-esférica

No caso deste trabalho, foi utilizada uma cavidade triangular, sendo 2 espelhos planos e 1 espelho côncavo, mas o critério de estabilidade pode ser interpretado analogamente a uma cavidade hemisférica plano-côncava (Figura 23). Além da fase adquirida durante uma volta ser múltiplo de 2π , para que o feixe seja auto reproduzido o mesmo precisa que seu raio de curvatura coincida com o raio de curvatura do espelho. Isso faz com que as características da cavidade, juntamente com as equações que descrevem os parâmetros do feixe com relação à distância, definam as condições do tamanho de cintura, para o comprimento de onda específico, no ponto focal.

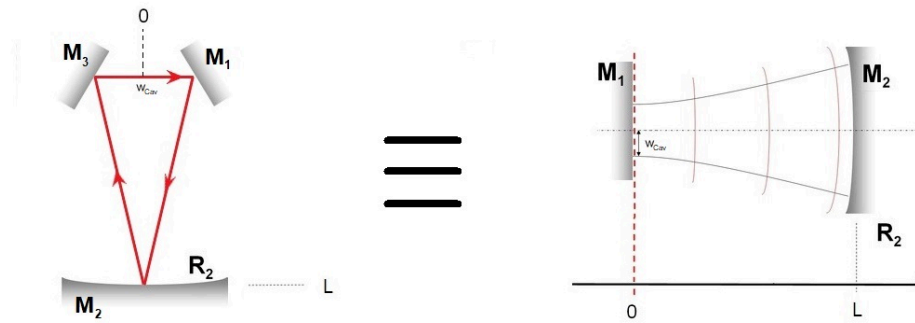


Figura 23 – À esquerda, cavidade triangular com ponto focal entre os espelhos planos M_1 e M_3 e espelho esférico M_2 numa distância L (no eixo ótico) do ponto focal; À direita, cavidade hemisférica plano-côncava com distância L entre o ponto focal e o espelho esférico.

Utilizando as equações 11 e 13 é fácil ver que a cintura no ponto focal é

$$w_0 = \left[\left(\frac{R}{L} - 1 \right) \frac{L^2 \lambda^2}{\pi^2} \right]^{1/4} \quad (33)$$

onde L é o comprimento médio da cavidade, pois uma pequena variação δL , onde $\delta L = L_{n+1} - L_n$, provoca resultado insignificante na variação da cintura do feixe.

2.3.3 Fase de Gouy e modos de ordem superior em cavidades óticas

A fase acumulada por volta numa cavidade ótica é composta basicamente por três termos: um termo idêntico ao de onda plana que é a multiplicação da distância total propagada pelo número de onda; um termo devido à fase de Gouy (eq. (14)) no qual a ordem do feixe é determinante; e um último termo devido às reflexões nos espelhos. Cada reflexão realiza uma transformação $x \rightarrow -x$, que equivale, no caso de funções ímpares, a uma multiplicação por -1 , ou seja, uma adição de uma fase π .

Numa cavidade linear composta por dois espelhos, essas fases causadas pela inversão do eixo horizontal se anulariam numa volta. No caso de uma cavidade triangular composta por três espelhos, cujos modos ressonantes são os modos de Hermite-Gauss, uma fase de π por volta deve ser adicionada aos modos com índice horizontal ímpar. Assim, a condição de ressonância para tais modos numa cavidade triangular se escreve:

$$\phi = 2n\pi = k * 2L + \zeta_{pq}(2L) + p\pi, \quad (34)$$

onde p e q são os índices que representam as ordens dos modos de Hermite-Gauss. O termo $p\pi$ foi adicionado devido às funções de Hermite H_{2p+1} serem funções ímpares, assim, ao completarem uma volta em cavidades triangulares, as funções de Hermite

na coordenada x $H_{2p+1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)$, adquirem uma diferença de fase igual a π , por conta da geometria.

A condição de ressonância (34) admite que somente os comprimentos de onda

$$k_n = \frac{(2n-p)\pi - \zeta_{pq}(2L)}{2L}$$

serão modos na cavidade.

Entretanto, como o comprimento de onda não é um parâmetro livre, mas uma característica intrínseca do laser disponível para a pesquisa, a solução é mudar o comprimento L da cavidade, tal que satisfaça a equação acoplada.

$$L_n = \frac{(2n-p)\pi - \zeta_{pq}(2L_n)}{2k} \quad (35)$$

2.3.4 Casamento de Modo

Em geral, para obter os parâmetros definidos pela cavidade, utiliza-se componentes óticos para alterar as propriedades espaciais de propagação, já que o feixe sai do laser com características espaciais diferentes do desejado. Esse casamento de modo é calculado a partir dos conhecimentos de ótica geométrica com suas respectivas relações de transformações para raios e adaptado para feixes gaussianos. No formalismo que será apresentado a seguir, os raios luminosos são representados por vetores de duas coordenadas, e sistemas óticos, por matrizes 2×2 .

2.3.4.1 Formalismo da Matriz ABCD

No caso do raio de luz, os parâmetros que importam, os quais serão modificados ao passar por um sistema ótico, são a distância y_1 do eixo ótico e a inclinação (θ_1) num plano z_1 , tendo como resultado uma nova distância y_2 e inclinação θ_2 num plano z_2 . As relações de (y_2, θ_2) e (y_1, θ_1) na aproximação paraxial, são lineares e podem ser generalizadas como sendo

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1$$

onde A,B,C e D são números reais. Escrito em forma matricial, a relação é dada por

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}.$$

Essa forma facilita os cálculos, pois elementos óticos em sucessão tornam-se simples multiplicações de matrizes. Este formalismo é conhecido como formalismo da matriz de transferência de raios ou, simplesmente, da matriz ABCD.

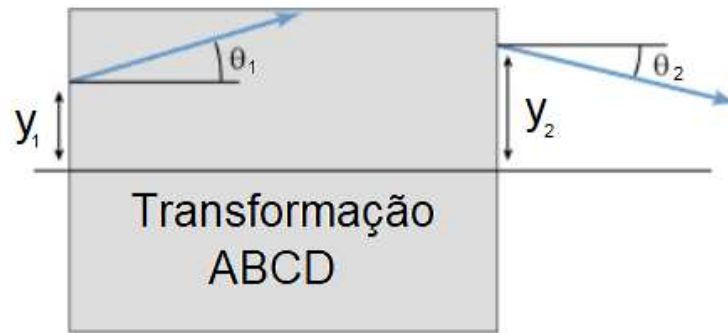


Figura 24 – Raio de entrada com distância y_1 do eixo z e inclinação θ_1 sofre uma transformação ao passar por um sistema óptico e sai com distância y_2 e inclinação θ_2 .

No caso de lentes delgadas de distância focal f , a matriz ABCD que descreve a transformação é

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz ABCD que descreve a propagação livre numa distância d é simplesmente

$$P = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.4.2 Matriz ABCD aplicada a feixes gaussianos

Como os feixes gaussianos possuem uma frente de onda esférica, essa onda pode ser vista como infinitos raios saindo de um ponto fonte. Assim, é possível usar o formalismo da matriz ABCD de raios, desde seja associado, para cada raio óptico, uma altura y_1 e θ_1 em função do raio de curvatura do feixe. Pois para qualquer raio óptico a altura y_1 pode ser escrita como

$$y_1 = R_1(z) \sin \theta_1,$$

mas que na aproximação paraxial fica

$$R_n(z) = \frac{y_n}{\theta_n}.$$

Portanto, cada raio óptico assume a transformação

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1,$$

$$\frac{y_2}{\theta_1} = AR_1 + B \quad (36)$$

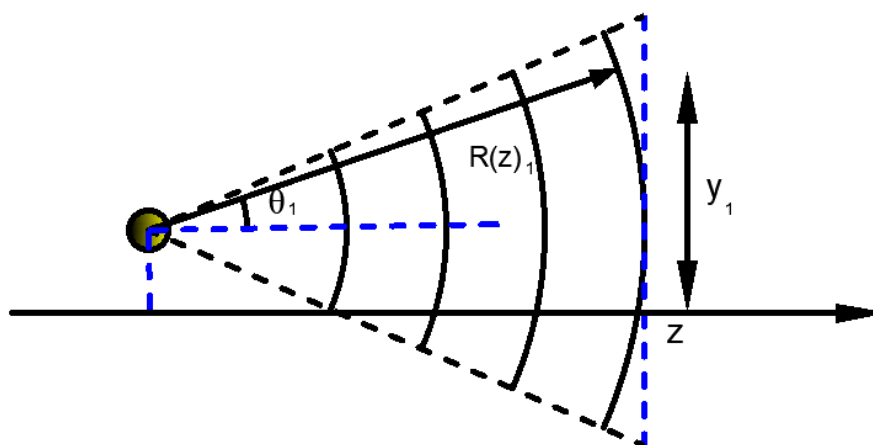


Figura 25 – Raio de curvatura associado ao ponto de distância y_1 e inclinação θ_1 .

e

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1,$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = CR_1 + D. \quad (37)$$

Dividindo as equações 36 por 37, temos

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \quad (38)$$

de forma que a relação de transformação através das matrizes ABCD continua sendo válida.

Conhecendo a relação de transformação, a partir de um feixe de laser colimado, é possível fazer o casamento de modo com a cavidade.

Pelas equações 12 e 13 é possível encontrar uma expressão da variação da largura do feixe com relação à distância percorrida e ao raio de curvatura ($R(z)$), que é

$$w(R, z) = w_0 \left[1 + \frac{z}{R-z} \right]^{1/2}. \quad (39)$$

Com essa expressão, é possível definir o comportamento da largura do feixe através da matriz ABCD, já que a transformação para o raio de curvatura é conhecido.

Com isso, tendo conhecimento do valor da cintura de um dado feixe e de sua localização na mesa ótica, é possível encontrar uma configuração de lentes que leva ao casamento de modo com a cavidade. Levar ao casamento de modo significa fazer com que o feixe tenha, mais adiante, num dado ponto no interior da cavidade, a cintura do seu modo ressonante.

A maneira mais simples de fazer esse casamento entre de modo é pelo produto das matrizes ABCD correspondente a cada trecho e por simulações da variação dos parâmetros num computador.

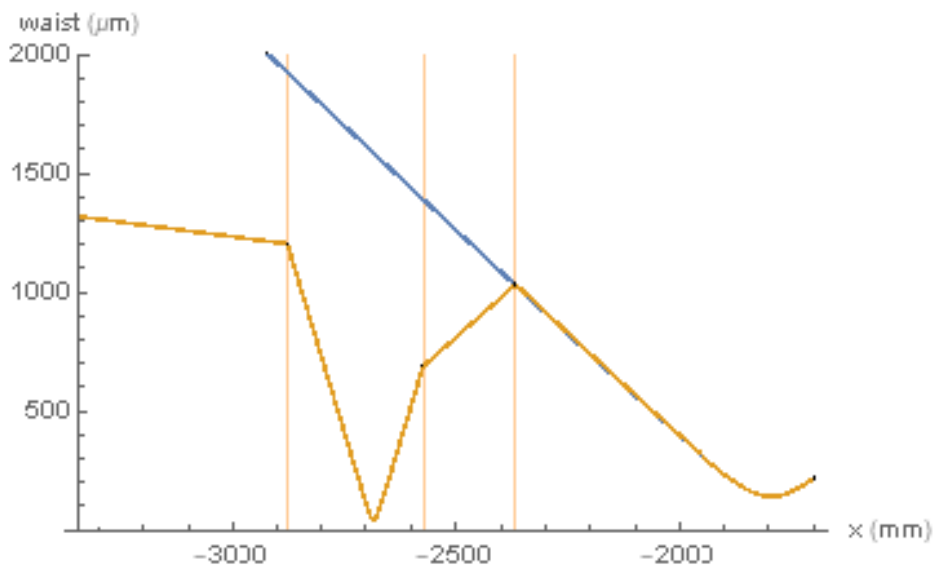


Figura 26 – Layout da simulação de casamento de modo feita no software Mathematica com representações do comportamento da largura do feixe ao longo da distância z percorrida. A linha azul representa o comportamento do modo alvo (o modo ressonante na cavidade). A linha laranja representa o comportamento do feixe à medida que se propaga através das lentes. As linhas verticais representam as posições de cada uma das 3 lentes utilizadas. Estas posições podem ser ajustadas interativamente via cursor com o mouse graças à função "Manipulate".

O computador auxilia no cálculo devido à praticidade de encontrar, de maneira rápida, uma solução por 'tentativa e erro'. Isso significa que as posições das lentes na Figura 26, bem como suas distâncias focais podem ser ajustadas manualmente na simulação, até que se obtenha acordo entre o feixe propagado e o feixe desejado, que é o modo ressonante na cavidade. Portanto, não se faz necessária a solução analítica dos parâmetros.

3 PROPOSTA EXPERIMENTAL

Os diferentes modos transversais de um feixe, especialmente os modos de Laguerre-Gauss, são de grande valia em diversos trabalhos envolvendo mesas óticas com diferentes aplicações, desde a capacidade de controlar e analisar os diferentes modos(40), também amplamente utilizados em processos de emaranhamento(41), em pinças óticas(42), assim como em termodinâmica quântica (43, 44).

No entanto, a literatura dispõe de pouco material demonstrando experimentalmente a eficiência de SLMs na geração de modos puros. Também encontram-se poucos estudos comparativos analisando os efeitos de diferentes tipos de modulação, bem como os efeitos de desvios em determinados parâmetros experimentais, como alinhamento.

As máscaras holográficas resultantes da combinação entre a variação de fase azimutal e a grade de difração possuem o aspecto visual de uma forquilha, ou bifurcação, onde o número de bifurcações corresponde ao número ℓ da variação de fase $2\pi\ell$. Na figura 27 é mostrado 3 diferentes máscaras holográficas com variação de fase azimutal (45).

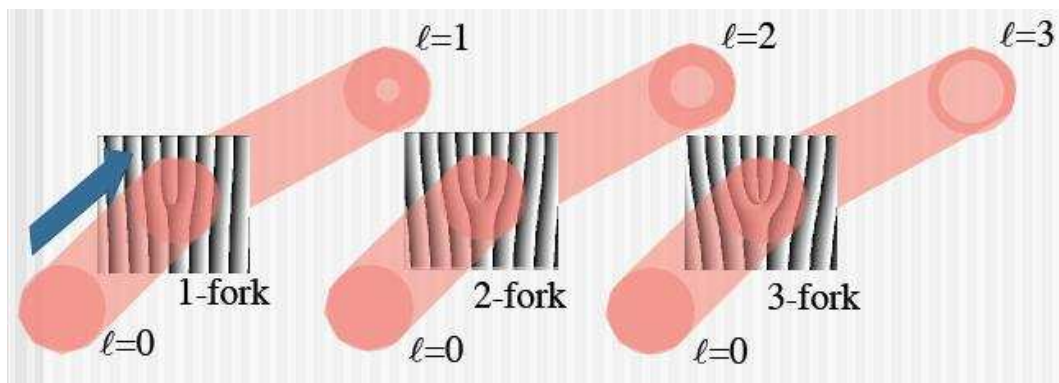


Figura 27 – Máscaras holográficas bifurcadas para geração de feixes com MAO de índices azimutais ℓ iguais a 1, 2 e 3 respectivamente. O feixe incidente adquire a variação de fase correspondente ao atravessar a máscara holográfica

Fonte: Barbieri (2012).

Como é sabido, o holograma bifurcado é o equivalente difrativo de uma placa de fase espiral, ou seja, insere um termo de fase $\exp(i\ell\phi)$ no feixe incidente, enquanto que mantém inalterado o perfil de intensidade transversal. A consequência disso é que embora o feixe possua uma estrutura de fase helicoidal perfeita, a secção transversal de intensidade não corresponde exatamente ao modo de Laguerre-Gauss desejado (46).

Por exemplo, uma máscara de única bifurcação, utilizada para gerar feixes com $\ell = 1$, produz na primeira ordem de difração uma superposição de modos, todos com o

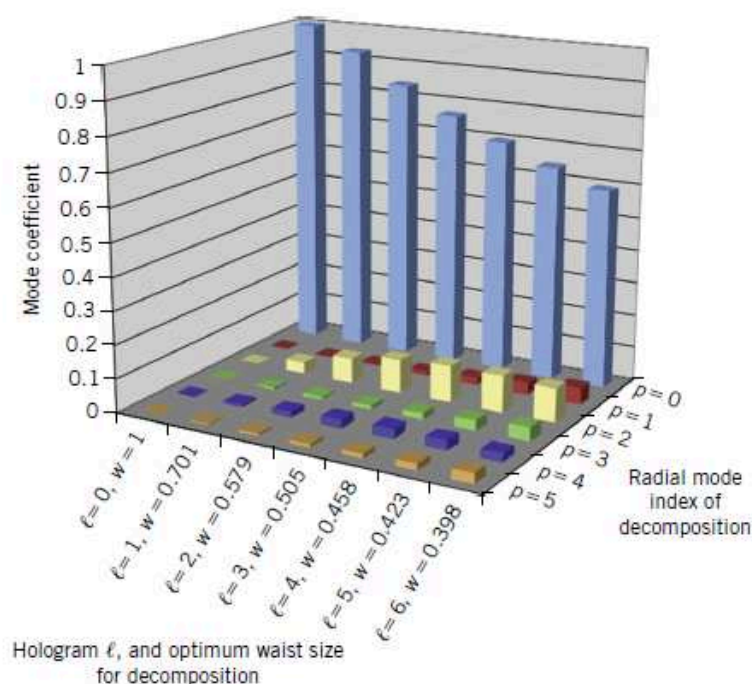


Figura 28 – Caracterização de feixes gaussianos com cintura $w=1$ e variação de fase $2\pi\ell$ reescritos em famílias de outra cintura tal que maximiza o coeficiente do índice radial $p=0$.

Fonte: Dennis (2009).

mesmo momento angular $\ell = 1$ mas com índices radiais p diferentes. Porém, na maioria dos casos o índice $p=0$ é dominante(47). Como, em muitos experimentos, o índice ℓ é o fator de maior importância, assim, o fato do índice radial $p=0$ ser predominante, faz com que possa ser desconsiderada a produção de modos com p não-nulos.

Na figura 28, é mostrado o resultado de um cálculo numérico que fornece os coeficientes de índices radiais produzidos na modulação de um feixe gaussiano com cintura $w = 1$ (unidade arbitrária) em função da máscara de momento angular orbital utilizada. Para o caso de geração do MAO $\ell = 0$, o SLM age no feixe como um espelho, pois não necessita de modulação, então o modo produzido é o próprio feixe de entrada puro. Para $\ell = 1$, o feixe de saída pode ser reescrito como, basicamente, uma combinação de $p=0$ e $p=2$, sendo $p=0$ equivalente a mais de 90%, na família de modos com cintura igual a $w = 0,701$. No caso de geração de $\ell = 2$, a família de feixes que maximiza o coeficiente em $p=0$ é a cintura de $w = 0.579$ onde o modo LG_0^2 possui pouco mais de 80%. Conforme o momento angular vai aumentando, a predominância do índice radial $p=0$ vai diminuindo, assim como a família de feixes que maximiza essa predominância tem a cintura cada vez menor. Em $\ell = 6$, a predominância é de pouco menos que 60%, quando reescrito na família de modos com cintura de $w = 0.398$.

Além disso, existem diferentes máscaras com diferentes tipos de modulações

que buscam corrigir essa superposição de modos, de maneira a filtrar a intensidade de uma região do feixe, através de uma modulação de amplitude, além da modulação de fase. A consequência dessa modulação de amplitude é a diminuição da intensidade do feixe de saída, já que para esse tipo de modulação de amplitude, a máscara é aplicada numa área menor do feixe incidente, fazendo com que apenas uma pequena parte do feixe interaja com o holograma (variação de fase + grade de difração) e a parte não selecionada é direcionada para a ordem zero de difração e descartada. Esta pode ser uma das razões pelas quais opta-se, em muitos experimentos, por não utilizar este tipo de modulação.

Outro fator importante é o posicionamento da máscara geradora de modos, que, em alguns casos, pode ser difícil alinhar com precisão. Em especial, nos trabalhos já mencionados de Zanin, et al, 2019, e Ribeiro, et al. 2019, os feixes a serem modulados não são do espectro visível, dificultando no alinhamento e centralização das máscaras.

Com base nessas necessidades, foi utilizada uma cavidade ótica como analisadora de modos, tanto para medir a eficiência do SLM na geração das máscaras holográficas, quanto para analisar os efeitos de possíveis desalinhamentos no caminho ótico, ou desajustes de largura do feixe.

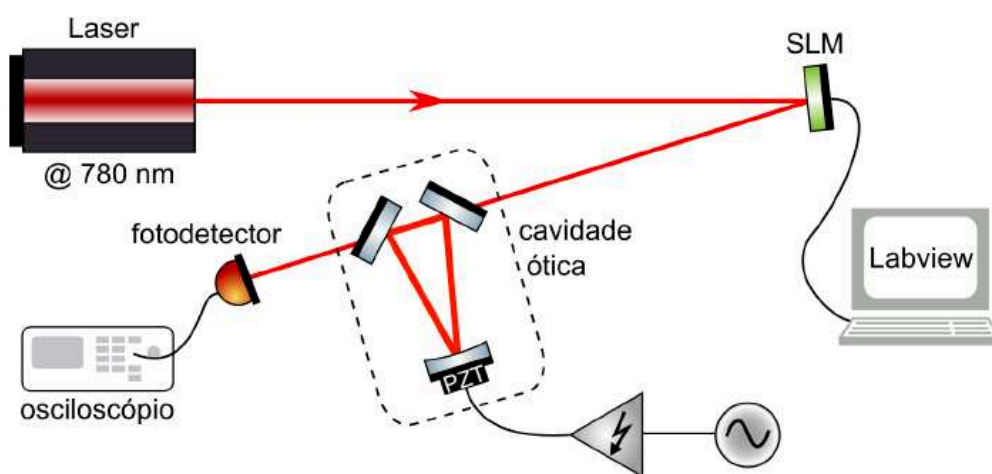


Figura 29 – Montagem experimental, um feixe de laser de diodo é modulado por um SLM e direcionado para uma cavidade ótica, cujo comprimento é variado nanometricamente por um transdutor piezoelétrico, e um fotodetector conectado à um osciloscópio indicam o(s) modo(s) nos respectivos comprimentos de cavidade.

A montagem experimental consiste de um laser de diodo da Sanyo DL7140-201S (780 nm) acoplado a uma cavidade estendida (oferecida, juntamente com um controlador de corrente, pelo Professor Dr. Marcelo Martinelli do Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz - USP/SP), objetivando ter um laser com menor largura de linha, em outras palavras, melhorar a Finesse da cavidade – principalmente para obter uma melhor separabilidade dos picos de ordens adjacentes. O feixe passa

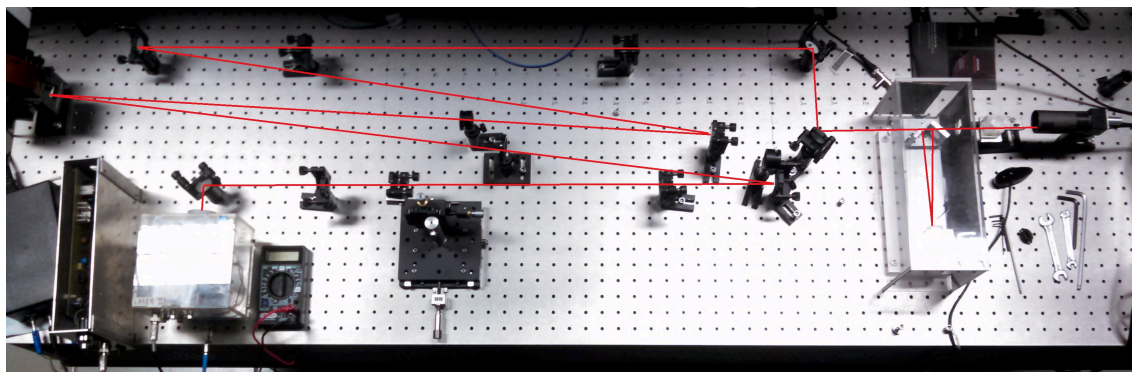


Figura 30 – Mesa ótica e a representação do eixo ótico.

por um filtro espacial (*pin-hole*) e segue para o SLM de alta resolução da Meadowlark. Para melhorar a qualidade de modulação, e potência, o feixe foi ajustado para incidir bem próximo da normal ($<5^\circ$); com isso, houve uma maximização na primeira ordem de difração, por meio da função blazing, de aproximadamente, 80% da potência incidente. Para o casamento de modos, foram utilizadas 2 lentes de distâncias focais igual a 300 mm e 150 mm, posicionadas, em relação ao centro da cavidade, a 1087 mm e 587 mm, respectivamente.

A cavidade, é um ressonador triangular que foi preparado sobre um bloco de alumínio maciço e posteriormente posto sobre uma base de madeira, para reduzir vibrações entre os espelhos e, conseqüentemente, ser mais estável quanto à intensidade dos modos. Como a cavidade necessita obedecer a equação 35, para obter os respectivos modos, então foi acoplado junto ao espelho esférico da cavidade, um material cerâmico com alta sensibilidade às suas propriedades piezoelétricas, o qual é composto à base de chumbo (Pb), zircônio (Zr) e titânio (Ti) e, portanto, é conhecido como PZT (38).

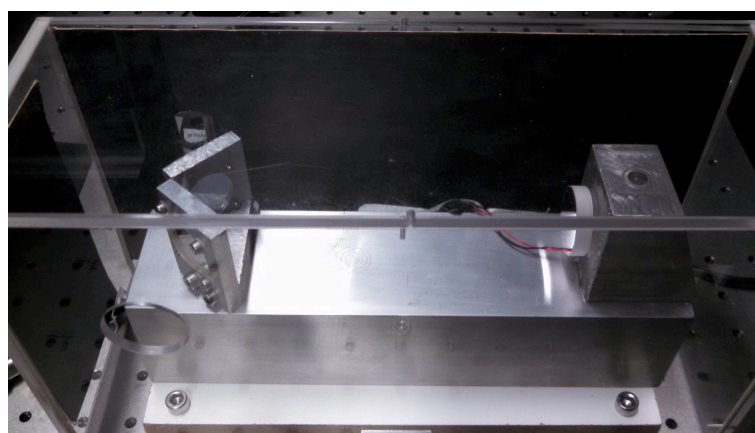


Figura 31 – Foto da cavidade utilizada no experimento.

Esse efeito piezoelétrico consiste em gerar uma carga elétrica todas as vezes em que o material sofre uma deformação. O efeito inverso também ocorre: quando

aplicada uma tensão elétrica no material, o mesmo sofre a deformação (38, 39).

Em virtude da alta sensibilidade ao efeito piezoelétrico, com um sistema controlador de tensão, é possível fazer um ajuste fino do comprimento da cavidade. Além disso, é possível fazer uma varredura de vários comprimentos que satisfaçam a condição de ressonância.

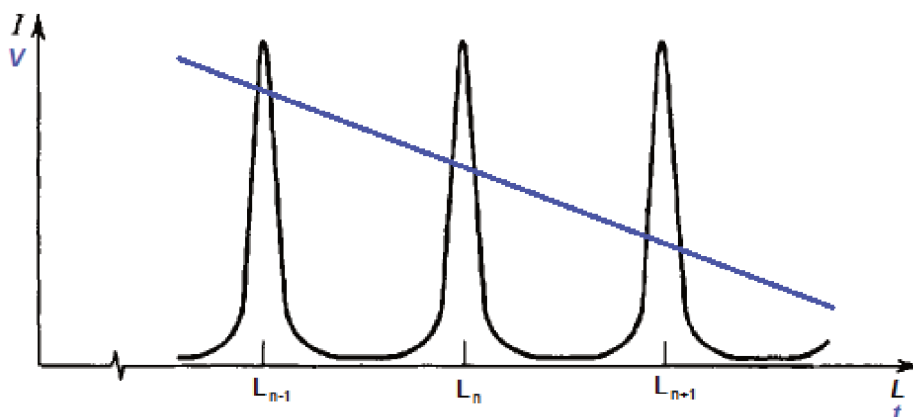


Figura 32 – Varredura dos comprimentos que satisfazem a condição de ressonância de um comprimento de onda específico. Em azul, uma representação da tensão aplicada no PZT em função do tempo

Para que a cavidade satisfaça a condição de estabilidade, é necessário que o comprimento L no interior da cavidade, no ponto central entre os 2 espelhos planos até o espelho côncavo, seguindo o caminho do feixe, seja menor que o raio de curvatura do espelho. Nesse caso, $R = 200\text{mm}$ e o comprimento $L = 159\text{mm}$.

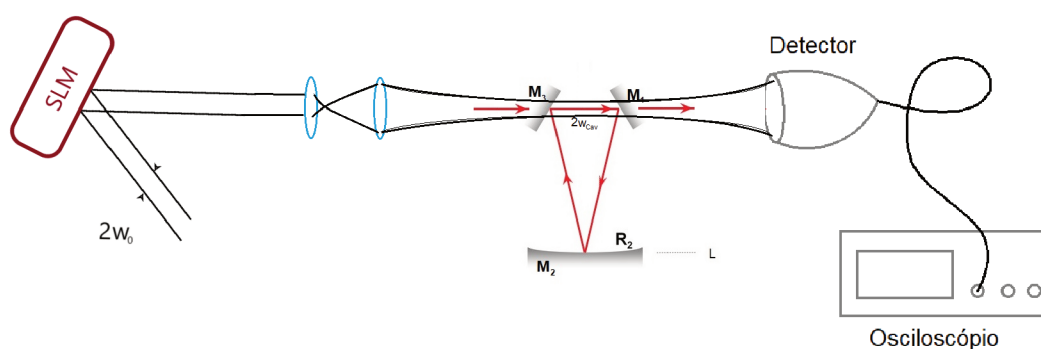


Figura 33 – Feixe com diâmetro $2w_0$ é modulado no SLM, 2 lentes fazem o casamento de modo para o feixe possuir o diâmetro de $2w_{cav}$ no foco da cavidade. A linha vermelha representa o eixo óptico de entrada, no interior e na saída da cavidade; um detector envia o sinal da saída da cavidade para um osciloscópio.

Pelas equações 11 e 13, a cintura w_0 que satisfaz a condição de estabilidade

para um laser de $\lambda = 780\text{nm}$ é

$$w_0 = \left[\frac{\lambda^2}{\pi^2} L(R-L) \right]^{1/4}, \quad (40)$$

$$w_0 = 141,6\mu\text{m}. \quad (41)$$

Assim, a fase de Gouy, que varia de $0-2\pi$ entre picos de ressonância de mesma ordem, adquirida em cada volta pode ser calculada. Como

$$z_R = 80,69\text{mm},$$

então

$$\frac{\zeta_{m,n}}{2\pi} = 2 \frac{(m+n+1)}{2\pi} \arctan(159/80,69). \quad (42)$$

Portanto, para cada ordem superior terá um acréscimo de fase equivalente a

$$\frac{\arctan(159/80,69)}{\pi},$$

que corresponde a

$$\frac{\zeta_{m,n}}{2\pi} \approx 0,350. \quad (43)$$

Isso significa que, caso 2 picos adjacentes de ordem zero, sejam ressonantes para cavidade com comprimento igual a L e $L + \epsilon$, então, o modo de ordem 1 será ressonante num comprimento $L + 0,350\epsilon$.

Embora o uso de feixes de Laguerre-Gauss esteja atualmente em voga, graças ao MAO neles presente, as máscaras geradoras de Hermite-Gauss foram mais exploradas neste experimento devido às propriedades geométricas da cavidade. Foram realizadas diferentes análises, sendo duas análises para máscaras geradoras dos modos de Hermite-Gauss sem modulação de amplitude, uma análise para máscara de Laguerre-Gauss e duas análises para máscaras de Hermite-Gauss com modulação de amplitude, como veremos a seguir.

3.1 PROPOSTA 1

A primeira proposta consiste em, sem modular a amplitude do feixe incidente, gerar um modo de $HG_{1,0}$ variando a posição da descontinuidade de fase da máscara ao longo de todo o perfil transversal do feixe.

A figura 34 ilustra uma máscara comumente usada para geração de $HG_{1,0}$. A máscara aplica ao feixe uma fase zero na região branca e uma fase π na região preta. Ao varrer o ponto de descontinuidade de fase por toda a área de incidência do feixe, é simulado um erro de centralização da máscara em montagens experimentais.

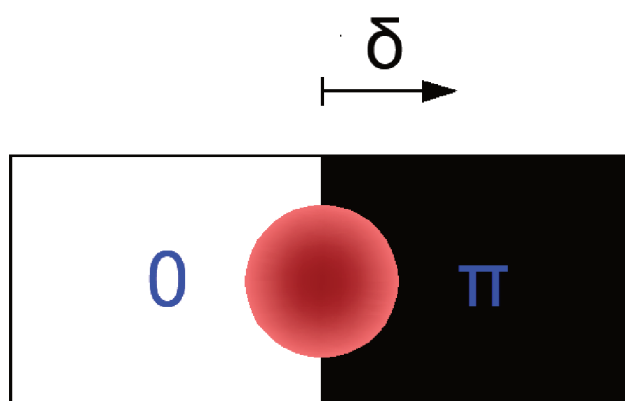


Figura 34 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $HG_{1,0}$ sendo deslocada uma quantidade δ do centro do feixe incidente

3.2 PROPOSTA 2

A segunda proposta é a geração de um feixe de $HG_{2,0}$ sem a modulação de amplitude, alterando a cintura da família dos modos de Hermite-Gauss.

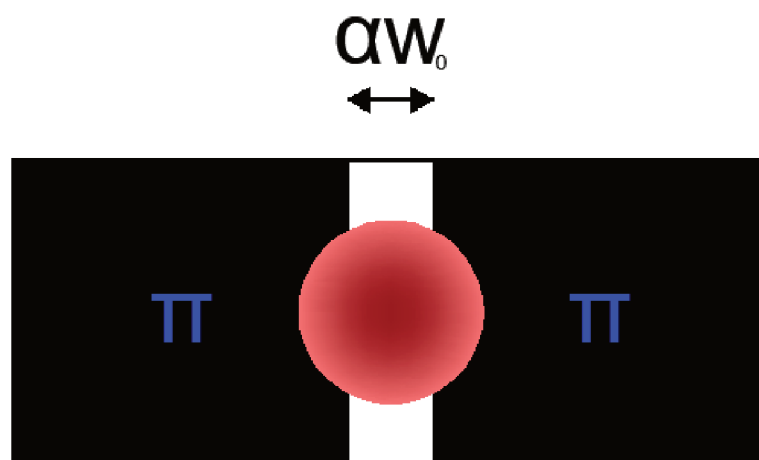


Figura 35 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $HG_{2,0}$ sendo alterada a cintura do feixe de saída α em relação à cintura de entrada.

A figura 35 ilustra uma máscara de $HG_{2,0}$ sendo aplicada num feixe incidente. A máscara de $HG_{2,0}$ consiste em aplicar uma fase π na região preta e uma fase zero na região branca e a área delimitada pela região branca é determinada pela cintura do feixe pretendido, neste caso, $\alpha = 1$ representa a família de modos que maximiza a intensidade do $HG_{2,0}$ na cavidade.

3.3 PROPOSTA 3

A terceira proposta considera o deslocamento de uma máscara de Laguerre-Gauss com índices radial e azimutal iguais a 0 e 1 respectivamente, sem a modulação de amplitude.

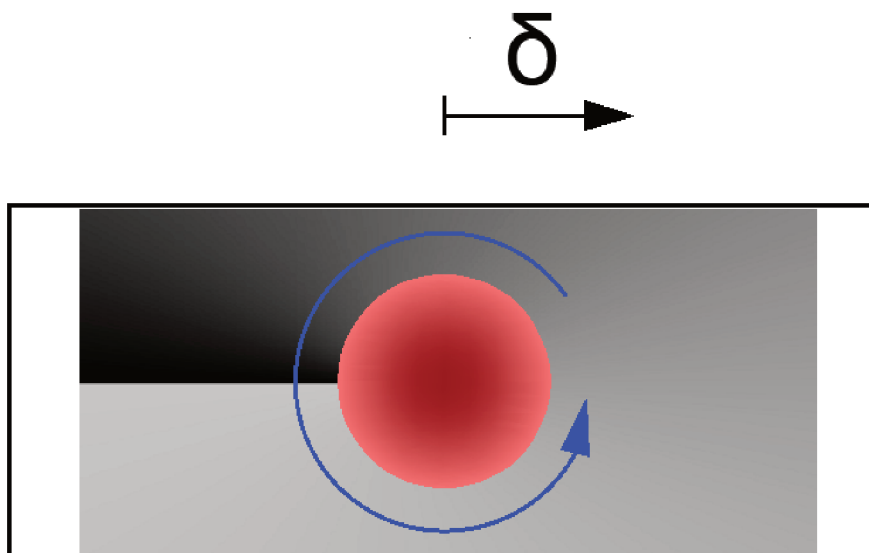


Figura 36 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara de fase de $LG_{1,0}$ sendo deslocada uma quantidade δ do centro do feixe incidente

No caso de máscaras de Laguerre-Gauss, a variação da fase acontece de forma contínua no plano transversal, com variação de fase de 0 a $2l/\pi$ ao longo do eixo azimutal e sem diferença de fase na distribuição radial. Neste caso, como $l = 1$ a variação é de 0 a 2π . Na figura 36, o centro da máscara é deslocado por uma quantidade δ desde $-\infty$ a $+\infty$ e a parte hachurada representa a transição de fase contínua, onde o semicírculo em azul indica o comportamento da variação em torno do eixo de propagação.

3.4 PROPOSTA 4

A quarta proposta tem como propósito avaliar a eficiência na criação das máscaras com modulação de amplitude, ou seja, a máscara é aplicada de forma a enviar para a primeira ordem de difração a região selecionada pela máscara e apenas refletir a parte do feixe não modulada.

Aqui, o feixe foi alterado para possuir um tamanho grande o suficiente para que cintura αw_0 da máscara seja menor que a do incidente. O w_0 é a cintura ideal ressonante na cavidade. Na figura 37, a parte hachurada indica a parte do feixe que está sendo modulada, enquanto o restante do feixe é refletido para fora da cavidade.

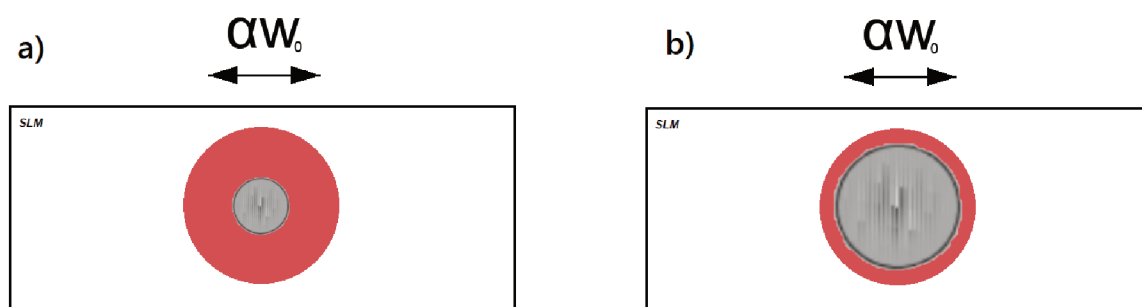


Figura 37 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara com modulação de amplitude de uma gaussiana ($HG_{0,0}$) descritos com cintura αw_0 ; O círculo cinza representa para a máscara holográfica de fase + grade de difração centralizada no feixe com modulação de a) uma pequena área do feixe; b) quase todo o feixe.

Aqui o objetivo é mensurar o impacto do mau casamento de modo entre o feixe e a cavidade, através da variação da cintura do feixe que é enviado à cavidade.

3.5 PROPOSTA 5

A quinta proposta também utiliza um feixe grande sendo modulado em fase e amplitude, mantendo a cintura w_0 como sendo a ideal para os modos da cavidade e desviando a centralização da máscara.

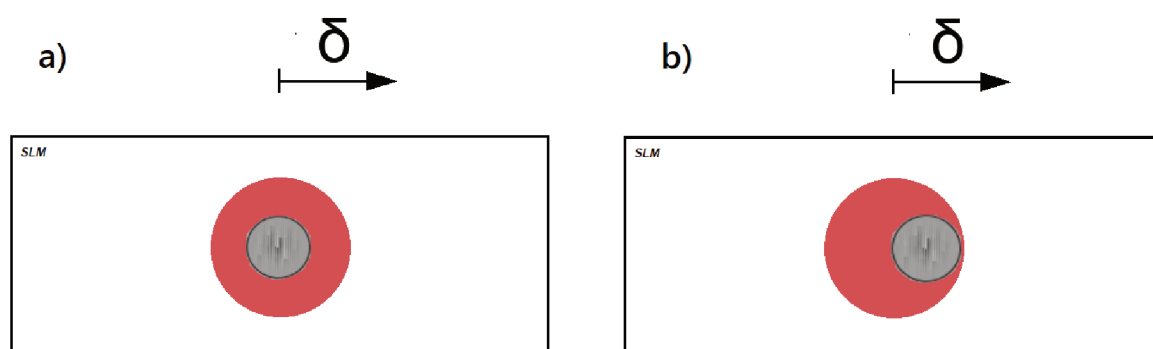


Figura 38 – Simulação de um feixe de entrada no centro do SLM e uma máscara com modulação de amplitude gaussiana do modo ($HG_{0,0}$) com cintura ideal e variando o deslocamento da máscara em δ ; O círculo cinza representa uma medida para a máscara holográfica de fase + grade de difração no feixe com modulação a) centralizada ($\delta = 0$); b) deslocada ($\delta \neq 0$).

Na figura 38 a modulação ocorre apenas na parte hachurada e a mesma é deslocada uma quantidade δ de $-\infty$ a $+\infty$ a qual simula um desalinhamento da montagem. O objetivo aqui, portanto, é mensurar o impacto do mau alinhamento entre o feixe e a

cavidade.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Dentre as cinco propostas citadas, 3 utilizam máscaras holográficas com modulação apenas na fase e, portanto, serão citadas subsequentemente como máscaras de fase, enquanto as outras 2 propostas, que utilizam da modulação de fase e amplitude, serão citadas como máscaras gaussianas.

4.1 MÁSCARA DE FASE HERMITE-GAUSSIANA COM DESLOCAMENTO δ

A máscara de fase $HG_{1,0}$, mesmo quando aplicada bem no centro do feixe ($\delta = 0$), fornece uma combinação de infinitos modos de Hermite-Gauss devido à estrutura do modo de ordem 1 ser proporcional a xe^{-x^2} enquanto que o modo criado pela máscara é apenas um atraso de fase numa região de interesse.

Essa mudança de fase pode ser visualizada mais facilmente através do perfil transversal do feixe, a amplitude do campo elétrico de perfil gaussiano terá uma descontinuidade em $x = \delta$, como explicitado na Figura 39.

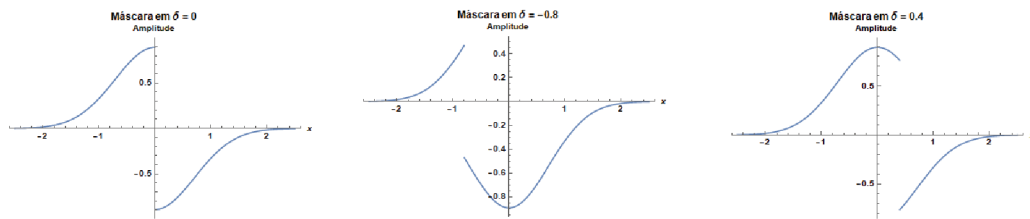


Figura 39 – Amplitude gaussiana do perfil transversal ao aplicar uma máscara de fase π em $x = \delta$. Os 3 casos mostram um δ igual a 0, -0.8 e 0.4, respectivamente.

A função que descreve a amplitude gaussiana do perfil transversal para um determinado δ é

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2), & x \leq \delta \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2), & x > \delta \end{cases}$$

que pode ser reescrita como combinação linear das funções de Hermite-Gauss¹ como

$$f(x) = c_0 HG_0(x) + c_1 HG_1(x) + c_2 HG_2(x) + c_3 HG_3(x) + \dots \quad (44)$$

onde

$$HG_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2^m m!}} H_m(\sqrt{2}x) \exp(-x^2). \quad (45)$$

Uma representação gráfica da equação 44 pode ser visualizada na figura 40

¹ Funções de Hermite-Gauss com mesma largura do feixe interagente com a máscara do SLM. Por ser colimado, a largura do feixe é descrita pela sua cintura w_0 e foi considerada, por simplicidade, como sendo igual a 1, ou seja, as distâncias são escritas em unidades de w_0

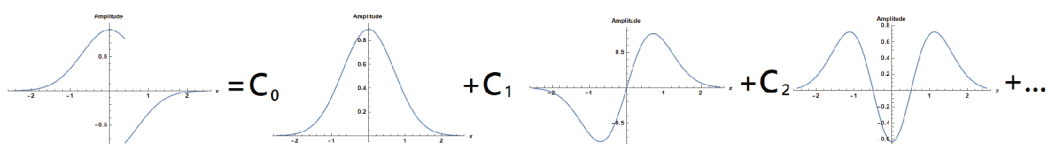


Figura 40 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss até a segunda ordem para um feixe de saída com um deslocamento δ da máscara.

Os coeficientes da decomposição em funções de Hermite-Gauss podem ser calculados por

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) HG_m(x) dx. \quad (46)$$

Assim, para cada deslocamento δ da máscara de fase, o conjunto cavidade-detector-osciloscópio identifica os principais modos com suas respectivas intensidades, permitindo então uma comparação relacionada aos coeficientes teóricos e, portanto, permite avaliar tanto a eficácia da máscara com e sem alinhamento.

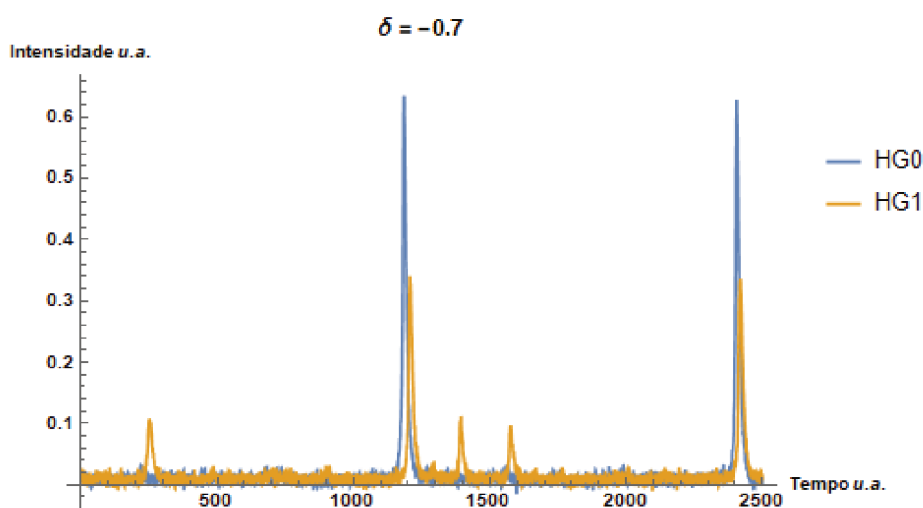


Figura 41 – Medida da combinação linear dos modos gerados para máscara do modo HG_{00} para referência (linha azul) e para máscara do modo HG_{10} com a descontinuidade deslocada em $\delta = -0.7$ (linha laranja).

Foi obtido um comportamento similar ao que os resultados teóricos indicam, ao varrer todo o perfil espacial do feixe, variando a posição da máscara no SLM, como pode ser visto na figura 42.

Além do fato dos coeficientes respeitarem bem o comportamento das curvas teóricas, é importante notar que, próximo de $\delta = 0$, os coeficientes, em relação às suas respectivas ordens, não variam abruptamente, portanto há uma tolerância de cerca de $0,2w_0$ na centralização da máscara no SLM para outras aplicações.

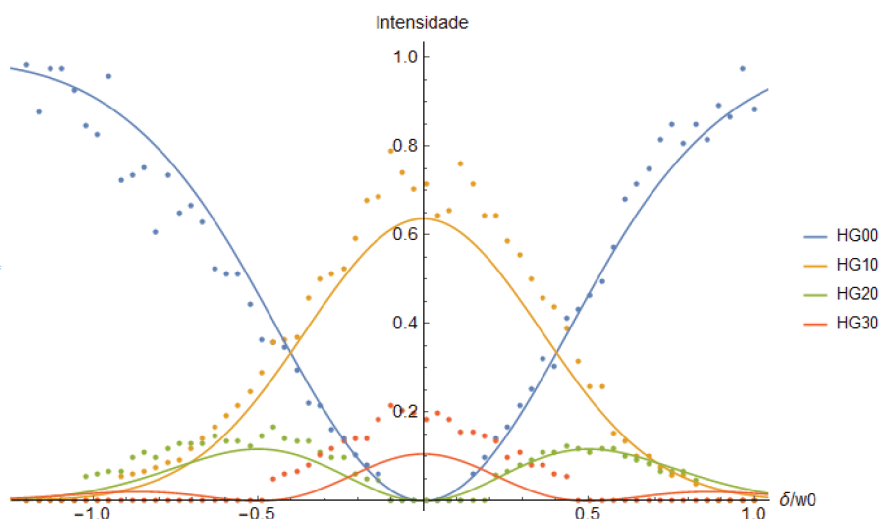


Figura 42 – Resultado da intensidade dos modos gerados em função do deslocamento δ da máscara holográfica. Os pontos representam resultados experimentais enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas; azul - HG_0 , laranja - HG_1 , verde - HG_2 , vermelho - HG_3 .

4.2 MÁSCARA DE FASE HERMITE-GAUSSIANA COM VARIAÇÃO α

A máscara de fase comumente usada para a geração do modo $HG_{2,0}$, assim como aquela destinada à geração de $HG_{1,0}$, também criando componentes em modos de outras ordens. A estrutura do modo de ordem 2 é proporcional a $(4x^2 - 2)e^{-x^2}$ assim, o perfil criado pela máscara é uma combinação linear de modos.

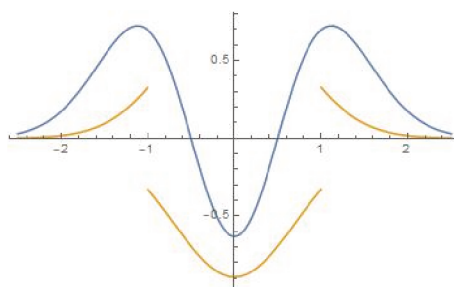


Figura 43 – Comparação entre o modo $HG_{2,0}$ puro e o perfil criado pela máscara.

Neste caso, a amplitude do campo elétrico, após modulação de fase pela máscara, terá dois pontos simétricos de descontinuidade na gaussiana incidente, com uma separação αw_0 .

A função que descreve o perfil gaussiano após a máscara é

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2), & -\frac{\alpha w_0}{2} < x < \frac{\alpha w_0}{2} \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-x^2), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

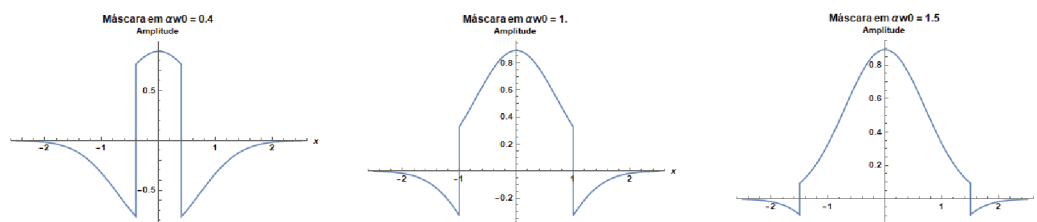


Figura 44 – Demonstração da amplitude gaussiana do perfil transversal ao se aplicar uma máscara de fase π em $x = -\frac{\alpha W_0}{2}$ e $x = \frac{\alpha W_0}{2}$. Os 3 casos representam αw_0 iguais a 0.4, 1.0 e 1.5, respectivamente.

Os coeficientes da expansão apresentada na equação 44 são calculados pela equação 46. Como a função $f(x)$ que descreve o perfil gaussiano é uma função par, então todos os coeficientes com m ímpar serão nulos. Assim, a representação gráfica em série assemelha-se à apresentada na figura 45, na qual não participam as funções ímpares que são elementos da base de Hermite-Gauss.

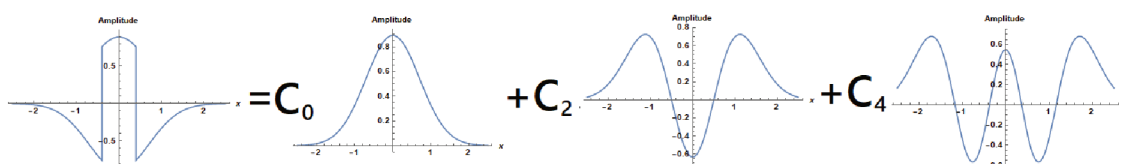


Figura 45 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss até a quarta ordem para um feixe de saída com α da máscara é igual a 0.4.

As medidas foram realizadas variando o parâmetro α , desde 0.08 até 2. Então, como esperado, nos limites extremos o modo predominante na geração é o $HG_{0,0}$ pois, quando α é muito pequeno, a maior parte do feixe não sofre nenhuma alteração de fase, apenas uma porção mínima na região central. O análogo acontece quando $\alpha = 2$. Nesse caso, devido ao fato do feixe incidente na máscara ser bem menor que a máscara, apenas as bordas externas do feixe adquirem a diferença de fase, no entanto a intensidade nas bordas é mínima.

No caso em que $\alpha = 1$, a máscara aplicada no SLM é a ideal para geração na família desejada, então ocorre a maximização do modo $HG_{2,0}$. Então, pelos resultados obtidos é possível ver que os dados experimentais estão em acordo com as previsões teóricas e o modo gerado se aproxima mais do modo $HG_{2,0}$ quando $\alpha = 1$.

Próximo do ponto de maximização do coeficiente $HG_{2,0}$, uma pequena variação do parâmetro α no SLM, não afeta significativamente a resposta do modo desejado, portanto, não se faz necessário um ajuste fino quando utilizado o dispositivo em outras aplicações.

É importante notar que ao utilizar máscaras de HG_{20} sem modulação de amplitude, a maximização do coeficiente HG_{20} é de apenas 40%, os 60% restantes são

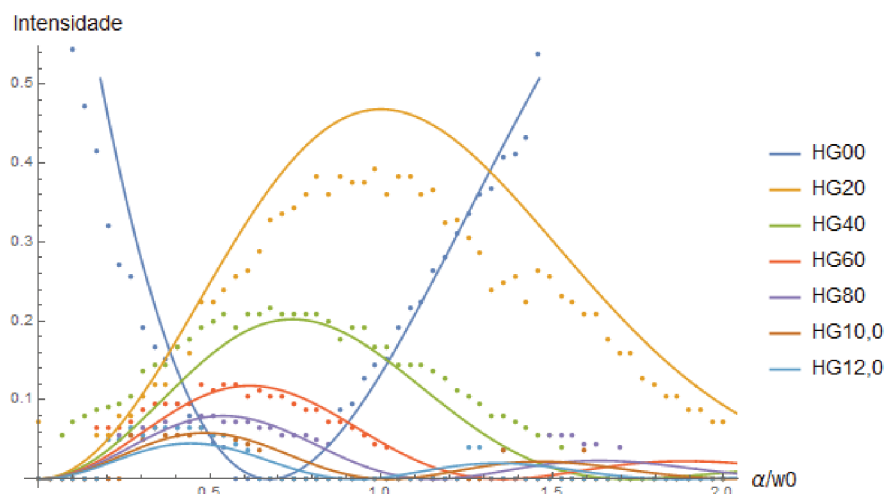


Figura 46 – Os pontos representam resultados experimentais em cada posição da máscara enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas; azul - HG_0 , laranja - HG_2 , verde - HG_4 , vermelho - HG_6 , roxo - HG_8 , marrom - HG_{10} , ciano - HG_{12} .

uma combinação entre, basicamente, os modos $HG_{0,0}$, $HG_{4,0}$ e $HG_{6,0}$. Mesmo que o conjunto de alinhamento, parâmetros utilizados, a eficiência de modulação do SLM seja perfeita, a conversão no modo $HG_{2,0}$ não ultrapassa os 50% para este tipo de máscara.

4.3 MÁSCARA DE FASE LAGUERRE-GAUSSIANA COM DESLOCAMENTO δ

Embora a cavidade tenha geometria triangular e, conseqüentemente, seja favorável aos modos de Hermite-Gauss, os feixes de Laguerre-Gauss merecem uma análise pela grande importância(22) que possuem, em especial, para aplicações do laboratório de informação quântica da UFSC.

Com o objetivo de analisar os níveis de pureza na produção dos modos, a máscara de fase de momento angular orbital $LG_{l,p} = LG_{1,0}$ é estudada aqui a título de exemplo. Assim, análogo ao caso de deslocamento da máscara de Hermite-Gauss, essa máscara de Laguerre também foi deslocada horizontalmente de uma quantidade δ , desde valores negativos (máscara deslocada, digamos, para a esquerda) até valores positivos (deslocamento para a direita).

Além da observação da eficiência do SLM, uma análise importante é a taxa de conversão dos feixes em $LG_{1,0}$ na família de cintura $w_0 = 1$.

Como a máscara de Laguerre-Gauss possui uma variação contínua da distribuição da fase, a visualização através da intensidade no perfil transversal do feixe não é nada intuitiva. Os feixes de Hermite-Gauss permitem essa fácil visualização devido ao atraso de fase, aplicado pela máscara, ser zero em toda uma região e igual a π em

outra.

Outro fator que facilita a interpretação visual dos feixes de Hermite-Gauss é o fato das funções serem separáveis em x e y . Por simplicidade, até o momento somente uma das direções foram exploradas, pois a separabilidade das funções permite que, ao analisar a variação na direção x , a série combinatória dos modos esteja multiplicando globalmente o fator HG_0 em y , e vice-versa. No entanto, os modos de Laguerre-Gauss não são separáveis, quando reescritos nas coordenadas cartesianas.

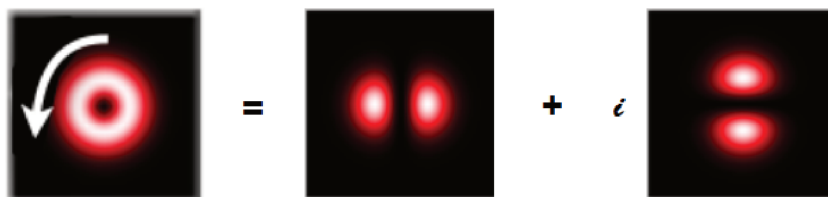


Figura 47 – Feixe com MAO de $l=+1$, com uma seta no sentido anti-horário indicando a variação de fase azimutal, rescrito como combinação de feixes hermite-gaussianos.

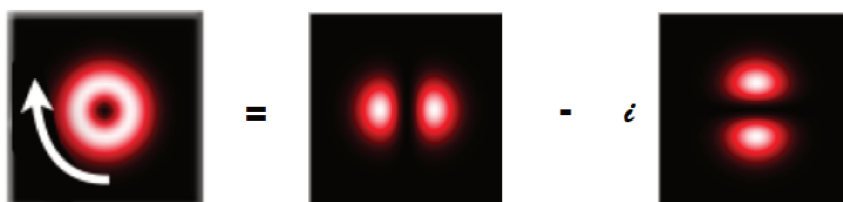


Figura 48 – Feixe com MAO de $l=-1$, com uma seta no sentido horário indicando a variação de fase azimutal, rescrito como combinação de feixes hermite-gaussianos.

Dessa forma, a variação na posição da máscara de MAO afeta, além dos modos hermite-gaussianos horizontais $HG_{m,0}$, os modos verticais $HG_{0,n}$. Neste caso, a condição de ressonância da cavidade, sobre a fase adquirida em seu interior, é importante, pois, dentre os principais modos, os de ordem 1 serão ressonantes para comprimentos diferentes de cavidade, enquanto que os de ordem 2 serão ressonantes em comprimentos coincidentes.

O perfil gaussiano do feixe após uma máscara de Laguerre-Gauss no SLM com $l=1$, escrito em coordenadas cartesianas, pode ser resumido a

$$f_1(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x^2+y^2)} * e^{-i \arctan(\frac{y}{x})}.$$

Então, quando a posição da máscara de fase sofrer um deslocamento δ na direção x , a função que descreve o perfil gaussiano é

$$f(x, y, \delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x^2+y^2)} * e^{-i \arctan(\frac{y}{x-\delta})}, \quad (47)$$

enquanto que as funções de Hermite-Gauss ² são descritas por

$$HG_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{2^{m+n} m! n!}} H_m(\sqrt{2}x) H_n(\sqrt{2}y) \exp\left(-\left(x^2 + y^2\right)\right) \exp\left(-i \frac{x^2 + y^2}{2}\right) \quad (48)$$

e os coeficientes de cada termo são obtidos por

$$c_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \delta) HG_{m,n}(x, y) dx dy. \quad (49)$$

A composição dos feixes modulados por máscara de Laguerre-Gauss, como representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss podem ser vistos na figura 49, enquanto que os principais coeficientes, ao longo da variação na posição da máscara, podem ser vistos na figura 50.

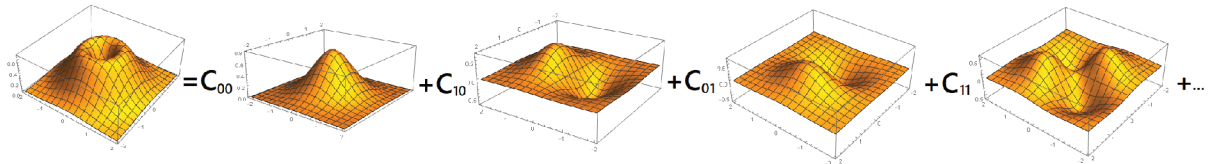


Figura 49 – Representação da combinação linear das funções de Hermite-Gauss do feixe modulado.

Quando a máscara está bem centralizada, ou seja, δ aproximadamente zero, pode-se perceber que os modos $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$ possuem um comportamento suave, indicando que pequenas variações na centralização da máscara não interferem na composição do modo $LG_{\pm 1,0}$ desejado.

As curvas teóricas indicam que, considerando uma modulação de fase perfeita, cerca de 70% da intensidade do feixe é convertida no $LG_{1,0}$, já que os modos $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$ são igualmente referentes a aproximadamente 35% da intensidade total. No caso dos resultados experimentais, essa intensidade poderia ser em torno de 50–60%, no entanto, o modo $HG_{1,0}$ é mais intenso que o $HG_{0,1}$ e isso, se deve ao fato da cavidade possuir um desalinhamento em um dos seus espelhos. Esse desalinhamento provoca um deslocamento do ponto focal entre as coordenadas x e y (48) que pela

² Devido à não separabilidade das funções em x e y deve ser levado em conta o termo de fase.

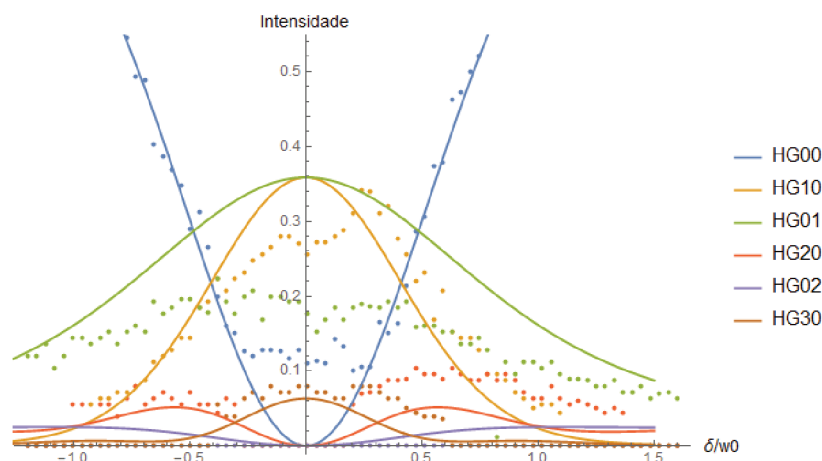


Figura 50 – Os pontos representam resultados experimentais em cada deslocamento δ da máscara, enquanto que as linhas contínuas representam os coeficientes teóricos. As cores representam os coeficientes das funções hermite-gaussianas: azul - $HG_{0,0}$, laranja - $HG_{1,0}$, verde - $HG_{0,1}$, vermelho - $HG_{2,0}$, roxo - $HG_{0,2}$, marrom - $HG_{3,0}$.

câmera é imperceptível, mas que na reconstrução do feixe de Laguerre-Gauss com $\ell = 1$, a cavidade mostrou uma diferença significativa. Com essas diferenças entre as intensidades dos modos $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$, o máximo de $LG_{1,0}$ gerado foi de 40–45%.

4.4 MÁSCARA GAUSSIANA

Para analisar máscaras gaussianas, exige-se que seja alterada a largura do feixe de incidência no SLM, pois a montagem experimental foi criada tal que o feixe de saída (modulado no SLM) possua a cintura ideal utilizada no mode matching. No entanto, os feixes de ordens superiores possuem a intensidade distribuída em lobos externos, então, não é viável fazer essa distribuição a partir de um feixe $HG_{0,0}$ de mesma cintura. A não viabilidade da operação se dá devido ao fato dos feixes com ordem ímpar possuírem um mínimo em seu centro, consequentemente, a intensidade do feixe é muito pequena.

Além do feixe, com cintura inferior à de incidência ter maior amplitude e, consequentemente, maior intensidade, há a condição de gerar modos com ordem superior.

Então, diferente da máscara de fase, de acordo com o modo e cintura desejados, a máscara seleciona quanto da intensidade de cada região do feixe será direcionado para a cavidade. Este processo seletor é possível devido ao SLM estar relacionado a uma grade de difração, direcionando, portanto, para a primeira ordem de difração apenas a intensidade desejada.

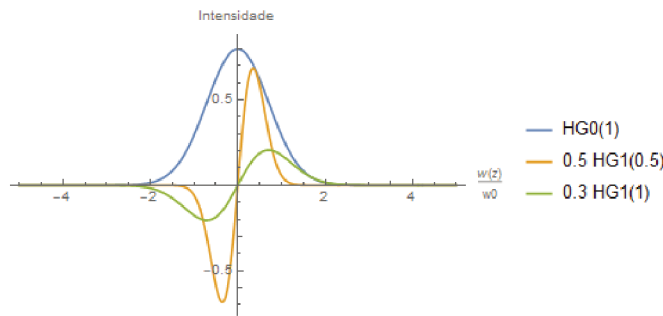


Figura 51 – Amplitude dos modos HG_0 e HG_1 ; em azul o feixe de incidência com cintura igual a w_0 , em laranja o feixe modulado com cintura igual a $0.5w_0$ com 50% de amplitude e em verde o feixe modulado com cintura igual a w_0 com 30% de amplitude.

4.4.1 Máscara Gaussiana com cintura variável

A fim de analisar a eficiência de modulação do SLM, foi aplicada a máscara gaussiana simples ($HG_{0,0}$) e alterada a cintura do feixe. Como a cavidade seleciona um modo com sua cintura específica, ao variar a mesma pela modulação do SLM, seria o equivalente a reescrever o feixe gerado com sua cintura, numa outra família cuja cintura é determinada pela cavidade, conforme equação 40.

O perfil gaussiano é

$$f(x, y, w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w}}, \quad (50)$$

enquanto que a família de Hermite-Gauss ressonante na cavidade é

$$HG_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{2^{m+n} m! n!}} H_m(\sqrt{2}x) H_n(\sqrt{2}y) \exp\left(-\left(x^2 + y^2\right)\right). \quad (51)$$

Então o coeficiente para cada função é dado por

$$c_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, w) HG_{m,n}(x, y) dx dy. \quad (52)$$

Como a cintura influencia tanto na coordenada x quanto y , há a necessidade de calcular em ambas as coordenadas. Além do que, por ser simétrica a função, ao variar a cintura, apenas os coeficientes $c_{m,n}$ pares serão produzidos e os mesmos são ressonantes em um comprimento de cavidade igual para qualquer modo de sua ordem.

Isso pode ser visto na imagem 52 de forma que os picos ressonantes são modos de Laguerre-Gauss com diferentes índices radiais.

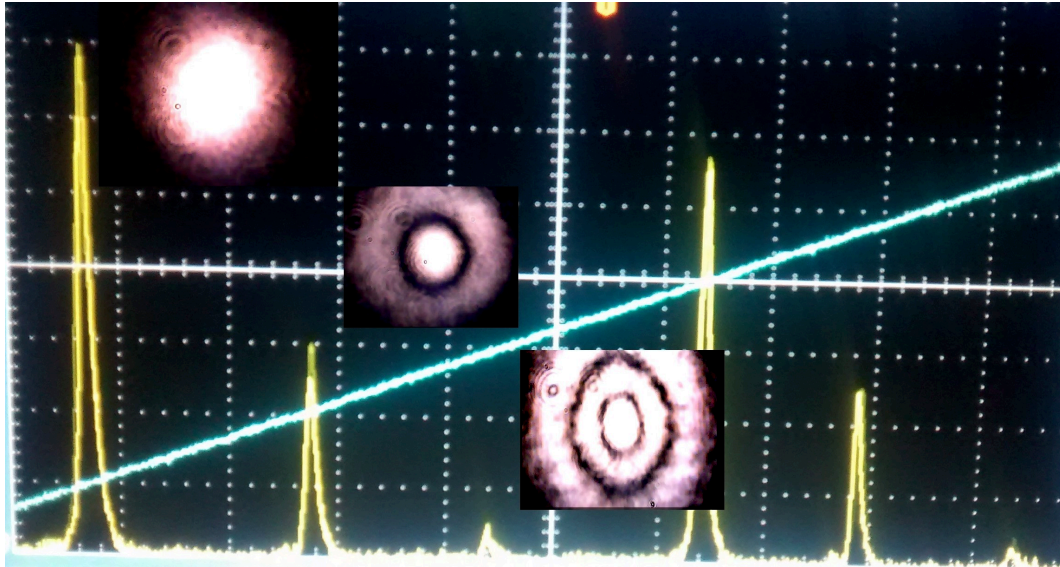


Figura 52 – Imagem do osciloscópio mostrando os modos gerados por uma máscara holográfica ressonantes em seus respectivos comprimentos de cavidade e uma foto de cada modo ressonante. A linha azul indica a tensão aplicada ao PZT, portanto, indica a variação do comprimento da cavidade.

Essa combinação de modos de Hermite-Gauss que formam os modos de Laguerre-Gauss apresentados na imagem 52 são descritos por

$$LG_{0,1} = \sqrt{\frac{1}{2}} (HG_{0,2} + HG_{2,0}) \quad (53)$$

e

$$LG_{0,2} = \sqrt{\frac{3}{8}} (HG_{0,4} + HG_{4,0}) + \sqrt{\frac{1}{4}} HG_{2,2}. \quad (54)$$

Assim, a variação entre as cinturas de entrada do feixe são descritas teoricamente pela imagem abaixo.

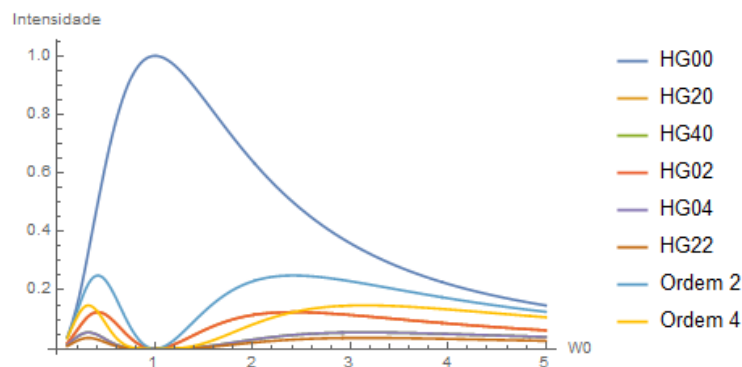


Figura 53 – Coeficientes de cada um dos modos e a combinação dos índices de mesma ordem.

O resultado obtido é apresentado na figura 54.

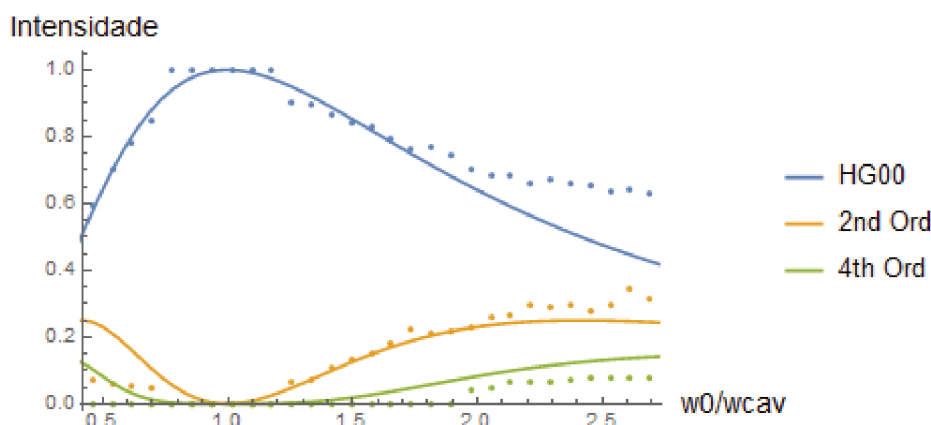


Figura 54 – Modos ressonantes na cavidade para diferentes cinturas. Em azul - modo de ordem zero, em laranja - modos de ordem 2, em verde - modos de ordem 4.

A modulação do SLM respeita bem as curvas teóricas, uma pequena variação em torno da cintura ideal para a cavidade $w_0 = 1$ não apresenta variações significativas, no entanto, para valores de cintura muito acima do ideal, a máscara gaussiana começa a perder sua modulação, já que a máscara é praticamente do tamanho, ou maior, que o feixe incidente.

4.4.2 Máscara Gaussiana com Deslocamento δ

Também a fim de analisar a eficiência de modulação do SLM, foi aplicada a máscara gaussiana simples ($HG_{0,0}$) e alterada a posição de deslocamento da máscara. Aqui, como a variação foi apenas no eixo x , não houve superposição dos picos referentes aos modos em x e y .

Então, a função que descreve o comportamento dessa variação, pode ser escrita apenas na variável x , enquanto que no eixo y é uma gaussiana HG_0 . A função do perfil gaussiano no eixo x é então

$$f(x, \delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x-\delta)^2}. \quad (55)$$

Os coeficientes são calculados pelo mesmo método com as funções de HG, dadas por

$$HG_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2^m m!}} H_m(\sqrt{2}x) \exp(-x^2) \quad (56)$$

e

$$c_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \delta) HG_m(x) dx. \quad (57)$$

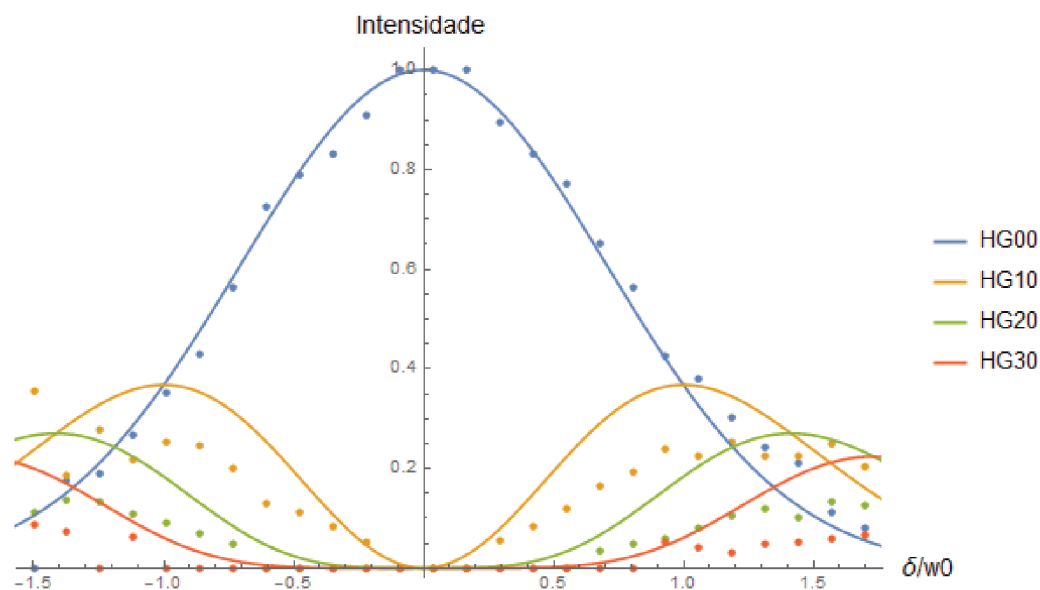


Figura 55 – Combinação de modos ressonantes para cada desvio δ no deslocamento da máscara de geração. Em azul - HG_0 , laranja - HG_1 , verde - HG_2 , vermelho - HG_3 .

Os resultados para o modo HG_0 coincidem muito bem com as curvas teóricas. Nota-se que mesmo para deslocamentos próximos a $0.5w_0$, a intensidade do feixe HG_0 é de cerca de 80%. Este é o efeito do desalinhamento lateral do feixe com relação ao eixo da cavidade.

5 CONCLUSÃO

Foi apresentado um conjunto laser-SLM-cavidade no intuito de verificar a eficiência de modulação do SLM através das máscaras de fase com e sem modulação de amplitude. Assim, foram apresentadas 5 propostas de análises, 3 delas contendo máscaras holográficas com modulação de fase, apenas, enquanto que em 2 propostas a modulação na amplitude também estava presente.

De modo geral, as máscaras implementadas no SLM apresentavam uma boa taxa de conversão ao modo desejado para a configuração e alinhamento utilizada nesse experimento, já que a eficiência do dispositivo está relacionada, também, à montagem experimental, ângulo de incidência do feixe com a normal do modulador, comprimento de onda do laser, largura do feixe incidente e colimação do laser. Neste caso, os parâmetros livres foram ajustados para que o dispositivo tivesse o melhor desempenho possível, pequeno ângulo de incidência e largura grande do feixe para que o mesmo pudesse interagir com uma quantidade considerável de pixels.

Com respeito às variações das condições propostas, a máscara de $HG_{1,0}$ de apenas fase quando deslocado o centro da máscara, obteve cerca de 70% do modo $HG_{1,0}$ em $\delta = 0$ mas manteve o modo desejado acima dos 60% até com um deslocamento de, aproximadamente, $0,2w_0$. O que é um deslocamento considerável, mesmo para um alinhamento grosseiro a olho nu.

Para a máscara de apenas fase do modo $HG_{2,0}$, o máximo de geração no modo desejado foi de 40%, mas o coeficiente ser baixo é devido à dificuldade de criar modos de Hermite-Gauss puros com ordem superior, já que o máximo teórico para este caso foi de aproximadamente 50%. Neste caso, o coeficiente ser baixo é devido ao método utilizado e não por parte de eficiência do dispositivo.

Na análise da família de Laguerre-Gauss, a maximização ($\delta = 0$) foi de 40% do feixe com $\ell = 1$, enquanto que as curvas teóricas indicam que 70% do feixe possui a respectiva carga topológica. O motivo que leva aos modos de HG_{10} e HG_{01} possuírem coeficientes diferentes em $\delta = 0$ é que dentro da cavidade, o raio de curvatura da frente de onda não coincide exatamente com o raio de curvatura do espelho esférico. Essa não coincidência está relacionada ao fato de cavidades triangulares o eixo ótico não coincidir exatamente com a normal do espelho esférico, ou seja, há um ângulo de incidência com relação ao versor normal do espelho. A consequência desse ângulo de incidência é a elipticidade do feixe no ponto focal da cavidade e, conseqüentemente, influenciando diretamente na intensidade de ressonância do modo desejado.

Nos processos utilizando máscaras com modulação de amplitude os resultados foram bem estimuladores. No caso do modo $HG_{0,0}$ variando a largura da máscara, as curvas teóricas coincidem muito bem com os dados experimentais até um valor de cintura igual a $2w_0$. Acima disso é compreensível que os dados experimentais

extrapolem, já que para aplicação de máscaras com modulação de amplitude, se faz necessário incidir um feixe bem maior que o feixe de saída. Então, quando se aumenta a máscara, é aumentado também o feixe de saída e conseqüentemente a potência do feixe que chega na cavidade.

Para a máscara de $HG_{0,0}$ e deslocamento δ , para um desvio de $0,5w_0$ o feixe ainda possui a componente na ordem desejada igual a 80%.

Além das análises de modulação, uma característica importante é a separabilidade dos modos ressonantes desse conjunto laser e cavidade. Modos de ordens adjacentes possuem separações nítidas, isso abre caminho para pesquisas em criptografia e computação quântica, já que o SLM, além dos modos puros, pode fornecer superposições de modos de Laguerre-Gauss e então utilizar uma cavidade para analisar e decompor o feixe gerado. A dificuldade primária é que os modos de Laguerre-Gauss são ressoantes em cavidades lineares e para a montagem da mesma se faz necessário de um isolador ótico, já que a luz refletida no espelho de entrada retorna pelo mesmo caminho até o laser, causando instabilidade e potenciais danos no dispositivo.

REFERÊNCIAS

- 1 Nokia Bell Lab. *The transistor*, Disponível em: <https://www.bell-labs.com/about/recognition/1956-transistor/> Acesso em: 31 de janeiro de 2020.
- 2 The Nobel Prize in Physics 1956. NobelPrize.org. Nobel Media AB 2020. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1956/summary/> Acesso em: 31 de janeiro de 2020.
- 3 Gisin, N., Ribordy, G., Wolfgang, T., Zbinden, H. Quantum cryptography, *Review of modern physics*, 74(1), 145-195, 2002.
- 4 Padjett, M. Courtial, J., Allen, L. Light's orbital angular momentum. *Physics Today*, 57(5), 35-40, 2004.
- 5 Yao, A. M., Padjett, M.J. Orbital angular momentum: origins behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*, 3(2), 161-204, 2011.
- 6 Wang, J. Advances in communications using optical vortices. *Photonics Research*, 4(5), B14-B28, 2016.
- 7 Berkhout, G.C., Lavery, M.P., Courtial, J., Beijersbergen, M.W., Padjett, M.J. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Physical review letters*, 105(15), 153601, 2010.
- 8 Ren, H. Li, X., Zhang, Q. Gu, M. On-chip noninterference angular momentum multiplexing of broadband light. *Science*, 352(6287), 805-809, 2016.
- 9 Devlin, R.C., Ambrosio, A., Rubin, N.A., Mueller, J.B., Capasso, F. Arbitrary spin-to-orbital angular momentum conversion of light. *Science*, 358(6365), 896-901, 2017.
- 10 Morita, R., Yamane, K., Yang, Z., Toda, Y. Development of a method for rapid and precise measurement of laser light helicity, *New journal of physics*, 16, 2014.
- 11 Griffiths, David J. *Eletrodinâmica*, 3ed, pp. 261-262, 2010.

- 12 Siegman, A. E, Lasers, University Science Books, pp. 638-640, 1986.
- 13 Saleh, B.E.A., Teich, M.C. Fundamentals of Photonics, 1991.
- 14 Leight, M. High power pulsed fiber laser sources and their use in terahertz generation. Dissertation submitted to the faculty of the Department of Physics. University of Arizona. 2008.
- 15 Gouy, L. G. "Sur une propriété nouvelle des ondes" C. R. Acad.Sci.110, 1251–1253, 1890.
- 16 Gouy, L. G. "Sur la propagation anormale des ondes" C. R.Acad. Sci.111,33–40, 1890.
- 17 Galvez, E. J. "Gaussian Beams" Department of Physics and Astronomy Colgate University, 2014.
- 18 Allen, L. Beijersbergen, M. W., Spreew, R. J. C., and Woerdman, J. P., "Orbital angular-momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes" Phys. Rev. A 45, 8185-8189, 1992.
- 19 Padgett, M. J, Yao, A. M, "Orbital angular momentum: origins, behavior and applications" Advances in Optics and Photonics 3, 161-204, 2011.
- 20 Thidé B, Then H, Palmer K, et al. Utilization of Photon Orbital Angular Momentum in the Low-Frequency Radio Domain. Phys Rev Lett. 99, 087701, 2007.
- 21 Yan Y, Xie G, Lavery MP, et al. High-capacity millimetre-wave communications with orbital angular momentum multiplexing. Nat Commun. 2014;5:4876. Published 2014 Sep 16. doi:10.1038/ncomms5876.
- 22 Shen, Y. Optical Vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. Light: Science & Applications 8:90, 2019.
- 23 J. F. Nye and M. Berry, "Dislocations in wave trains," Proc. R. Soc. Lond. A 336, 165–190, 1974.

- 24 Yao A M, Padgett M J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics* 3, 161–204, 2011.
- 25 Andrews D. L. *Structured Light and Its Applications*. Elsevier 2008.
- 26 Harwit, M. Photon orbital angular momentum in astrophysics. *Astrophys. J.* 597, 1266–1270, 2003.
- 27 Paterson, L. et al. Controlled rotation of optically trapped microscopic particles. *Science* 292, 912–914, 2001.
- 28 Grier, D. G. A revolution in optical manipulation. *Nature* 424, 810–816, 2003.
- 29 Oemrawsingh S S R. et al. Half-integral spiral phase plates for opticals wavelengths. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 6, S288-S290, 2004.
- 30 NobelPrize.org, Dennis Gabor – Biographical. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1971/gabor-bio.html>. Acesso em: 11/12/2019.
- 31 Gabor, D. Holography, 1948-1971. Disponível em: <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1971/gabor-lecture.pdf>. Acesso em: 11/12/2019.
- 32 Heckenberg N R, et al. Laser beams with phase singularities. *Op. Quantum Elect.* 24, S951-S962, 1992.
- 33 Dynasil. Definitive Guide to Diffraction Grating. Disponível em: <<https://www.dynasil.com/optical-materials/buyers-guide-to-selecting-a-diffraction-grating/>>. Acesso em: 16/12/2019.
- 34 Ye, J., Lynn, T. W. Applications of optical cavities in modern atomic, molecular, and optical physics. In *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*. Academic Press.49,1-83, 2003.
- 35 Fabry, C., Perot, A. Théorie et applications d'une nouvelle méthode de spectroscopie interférentielle, *Annales de Chimie et de Physique*. 16,366, 1899.

- 36 Villar, A. S. Estudo de Emaranhamento no Oscilador Paramétrico Ótico Não-Degenerado Acima do Limiar, Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo, 2014.
- 37 Yariv, A. Quantum Electronics (3rd ed.). Wiley. p. 142, 1989.
- 38 APC Internacional, What is "PZT"?, <https://www.americanpiezo.com/piezo-theory/pzt.html>, Acesso em: 14/01/2020
- 39 Ikeda, T. Fundamentals of piezoelectricity. Oxford University Press, 1996.
- 40 Cheng Ze-Di, et al. Experimental implementation of a degenerate optical resonator supporting more than 46 Laguerre-Gaussian modes. *App. Phys. Lett.* 112, 201104, 2018.
- 41 Fickler, R., et al. Quantum Entanglement of High Angular Momenta. *Science.* 338, 6107, 640-643, 2012.
- 42 Curtis, J. E., Koss, B. A., and Grier, D. G. Dynamic holographic optical tweezers. *Opt. Commun.* 207, 169–175, 2002.
- 43 Zanin, G.L., Häffner, T., et al. Experimental Quantum Thermodynamics with Linear Optics. *Brazilian Journal of Physics.* 49, 5, 783-798, 2019.
- 44 Ribeiro, P.H.S., et al. Experimental Study of the Thermodynamics of Entangled Photons under Kolmogorov Turbulence. *arXiv:1912.06447v1*, 2019.
- 45 Barbieri, C. Orbital Angular Momentum (OAM) of light beams and photons. 2012, Disponível em: <<https://docplayer.net/44557009-Orbital-angular-momentum-oam-of-light-beams-and-photons.html>>. Acesso em: 09/03/2020.
- 46 Sacks, Z.S., Rozas, D., Swartzlander, G.A., Holographic formation of optical-vortex filaments. *J. Opt. Soc. Am. B* 15, 2226-2234, 1998.
- 47 Dennis, M.R., O'Holleran, K., Padjett, M.J., Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities, *Progress in Optics*, 53, 293-363, 2009.

48 Kawazoe, F., Schilling, R. and Lück, H., Eigenmodes in a misaligned triangular optical cavity, *J. of Optics*, 13, 055504, 2011.