**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**BRUNA ARIELLY SCHULZ**

# TEOREMAS FUNDAMENTAIS PARA ESPAÇOS NORMADOS

Blumenau

2020

**Bruna Arielly Schulz**

# TEOREMAS FUNDAMENTAIS PARA ESPAÇOS NORMADOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador**: Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu

Blumenau

2020

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 11:04h do dia 16 de dezembro de 2020.

Schulz, Bruna Arielly
Teoremas Fundamentais para Espaços Normados : / Bruna Arielly Schulz; Orientador, Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu; - Blumenau, 11:04, 04 de dezembro de 2020.
110 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Espaços Normados. 2. Transformação Linear e Limitada. 3. Espaços de Banach. 4. Análise Funcional.
I. Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Teoremas fundamentais para Espaços Normados

Bruna Arielly Schulz

**TEOREMAS FUNDAMENTAIS PARA ESPAÇOS NORMADOS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 04 de dezembro de 2020.

Documento assinado digitalmente
Julio Faria Correa
Data: 17/12/2020 16:05:01-0300
CPF: 045.818.289-37

**Prof. Dr. Julio Faria Corrêa**
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

**Banca Examinadora:**

Documento assinado digitalmente
Rafael dos Reis Abreu
Data: 16/12/2020 10:37:27-0300
CPF: 752.470.892-00

**Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu**
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Documento assinado digitalmente
Claudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita
Data: 16/12/2020 11:04:03-0300
CPF: 813.292.102-04

**Profa. Dra. Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita**
Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP

Documento assinado digitalmente
Maicon Jose Benvenutti
Data: 17/12/2020 09:04:47-0300
CPF: 041.968.189-27

**Prof. Dr. Maicon José Benvenutti**
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

*Aos meus maiores incentivadores, meus pais.*

# AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Adilson e Marcia, que me ensinaram o valor da educação. Deles nunca me faltou amor, carinho, apoio e palavras para acalentar meu coração angustiado.

Aos meus avós, pelo amor. Em especial, minha avó, Heldrauth, pelo apoio e por sempre querer me agradar com suas comidas deliciosas.

Aos meus demais familiares que me ajudaram de alguma forma, agradeço imensamente.

Ao meu professor e orientador, Rafael dos Reis Abreu, por dirigir meus estudos com excepcionalidade. Mesmo quando muito ocupado, foi paciente e sanou todas as minhas dúvidas matemáticas. Obrigada pela amizade, por me ajudar nas minhas inquietações quanto a minha carreira acadêmica e por toda contribuição para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos professores Felipe Vieira e Louise Reips, pelas conversas e por me oportunizarem com bolsas em projetos de extensão.

Ao professor André Vanderlinde, por ser um ótimo exemplo de professor. Sua maneira de ensinar é única.

À todos os maravilhosos professores e servidores da UFSC que um dia cruzaram minha trajetória na universidade e contribuíram para o meu desenvolvimento. Em especial, ao professor, Maicon Benvenutti pelos ensinamentos e pelas contribuições a este trabalho.

À professora Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita, que aceitou dedicar seu precioso tempo para enriquecer este estudo.

Aos meus amigos, Aline, Bryan, Cleison, Gustavo, Guilherme, Jaqueline, João, Maria Eduarda e Matheus, por todo ombro amigo e pelas risadas. Em especial, ao meus amigos, Gabriel e Paula, que fizeram de meus dias na graduação mais leves e que não negavam um cafézinho.

À minha amiga de vida, Débora, por ter me acompanhado desde nova, por todas as conversas e por todo apoio.

Por fim, agradeço a cada pessoa que de alguma forma contribuiu para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

*"Matemática é a criação mais poderosa e bonita do espírito humano."*

Stefan Banach.

## RESUMO

Neste trabalho, tratamos dos teoremas definidos em espaços normados que são essenciais para a fundamentação da Análise Funcional. Enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Além disso, demonstramos que os dois últimos teoremas citados são equivalentes. Para tanto, primeiramente, estudamos as definições de norma, de transformações lineares e limitadas e de espaço de Banach, bem como os principais resultados relacionados a estas definições.



**Palavras-chaves**: Espaços Normados. Transformação Linear e Limitada. Espaços de Banach. Análise Funcional.

## ABSTRACT

In this present study, we analyze the theorems defined in normed spaces that are essentials for the grounding of the Functional Analysis. We will enunciate and demonstrate The Hahn–Banach theorem, The Banach-Steinhaus theorem, The Open Mapping theorem, and The Closed Graph theorem. Furthermore, we demonstrate that the two last aforementioned theorems are equivalent. Therefore, firstly, we study the definitions of norm, of bounded linear transformations and of Banach space, as well as the main results related to these definitions.



**Keywords**: Normed Spaces. Bounded Linear Transformations. Banach Spaces. Function Analysis.

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A partir do século XVII, a comunidade matemática se deparou fortemente com problemas em que não possuíam soluções numéricas. Em geral, essas soluções faziam parte de conjuntos de dimensão infinita, por exemplo, o espaço vetorial das funções e o espaço vetorial das sequências. Anos depois, com a necessidade do estudo ds espaços de dimensões infinitas, surgiu uma nova área da matemática que atualmente conhecemos como Análise Funcional. No ano de 1928, Stefan Banach e Hugo Steinhaus criaram o jornal "Studia Mathematica" no qual suas publicações eram exclusivamente sobre a Análise Funcional. Apesar disso, de acordo com [3], considera-se que o primeiro material básico desta área foi a monografia de Banach publicada em 1931, solidificando, difundindo e marcando o início da Análise Funcional.

Essencialmente, a Análise Funcional faz o estudo dos espaços normados de dimensão infinita, especialmente dos espaços de Banach, e das transformações lineares e contínuas entre eles. E porque há a necessidade de que as transformações lineares entre os espaços normados sejam contínuas? Ao longo do trabalho isso ficará melhor justificado, mas por hora podemos adiantar que as transformações lineares definidas nos espaços normados de dimensão infinita não são automaticamente contínuas. É interessante lembrarmos que ao estudar as transformações lineares definidas em espaços normados de dimensão finita, na Álgebra Linear, não precisamos exigir que elas sejam contínuas uma vez que essa propriedade ocorre automaticamente.

Descreveremos agora como está organizado o trabalho. No segundo capítulo, introduziremos o conceito fundamental para o nosso trabalho, o conceito de espaço normado. Daí, seguimos para a discussão das transformações lineares e limitadas. Nessa parte, conseguiremos perceber os primeiros indicativos de quão proveitoso é a união da estrutura algébrica com a estrutura topológica. E finalizamos o capítulo, estudando os espaços quocientes.

No terceiro capítulo, estudaremos os espaços de Banach. Nessa parte, apresentaremos diversos exemplos e caracterizações desses espaços. Partindo deste estudo, podemos entender os espaços normados de dimensão finita como exemplos particulares dos espaços de Banach. Dito isso, é claro que entre os diversos resultados que enunciaremos e demonstraremos está incluso o resultado de que todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.

O quarto capítulo é especialmente dedicado ao famoso Teorema de Hahn-Banach. Inicialmente apresentamos o Lema de Zorn que é fundamental para a demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Assim, enunciaremos e demonstraremos esse teorema na sua versão mais clássica e, em seguida, enunciaremos e demonstraremos uma versão mais generalizada do Teorema de Hahn-Banach. Após isso, discutiremos algumas de suas consequências. E para um estudo breve de biduais, estudaremos a classe dos espaços de Banach reflexivos.

No quinto e último capítulo, nossa proposta é apresentar o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Para o estudo desses teoremas, utilizaremos o conceito de espaços de Banach e alguns resultados apresentados nos capítulos anteriores. Ainda, estudaremos resultados da Topologia Geral para que possamos demonstrar o Teorema de Banach-Steinhaus e suas consequências. Em seguida, apresentaremos o Teorema da Aplicação Aberta e demonstraremos o Teorema da Inversa Limitada e o Teorema do Gráfico Fechado. Por fim, mostraremos que os três últimos teoremas mencionados são equivalentes.

No final desse estudo temos três apêndices. O primeiro apêndice possui resultados auxiliares que são utilizados nas demonstrações ao longo dos capítulos, o segundo apresenta resultados complementares aos resultados enunciados nos capítulos e no último temos uma breve explanação sobre convergência fraca.

É preciso ressaltar que os espaços vetoriais considerados nos resultados mencionados nesse estudo podem ser explorados sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$ e sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, mas por simplicidade escolhemos definir os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. Além disso, consideramos que o leitor já tenha conhecimentos prévios de Álgebra Linear, Análise Real, Espaços Métricos e Topologia Geral. Caso o leitor não tenha tais conhecimentos, para um primeiro momento, é ao menos necessário os conhecimentos das definições como espaços vetoriais, transformações lineares, espaços topológicos, conjuntos compactos, supremo, ínfimo e as propriedades relativas a essas definições. Para fundamentar a pesquisa dos leitores quanto aos conhecimentos citados, indicamos as seguintes referências: [5] para Álgebra Linear, [6] para Análise Real, [7] para Espaços Métricos e [9] para Topologia Geral.

# 2 ESPAÇOS NORMADOS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES LIMITADAS

No início deste capítulo, temos o interesse de estudarmos o conceito matemático central deste trabalho: o espaço normado. Esse espaço possui a estrutura algébrica de um espaço vetorial e a estrutura topológica de um espaço métrico. Como este espaço possui duas estruturas robustas, uma associada as transformações lineares e a outra associada as funções contínuas, estudaremos, também, as transformações lineares e limitadas. Veremos na segunda seção, como se dá a relação entre a continuidade e as transformações lineares e limitadas e os ganhos da incorporação das duas estruturas em um só conjunto.

## 2.1 ESPAÇOS NORMADOS

**Definição 2.1 (Norma).** Seja $E$ um espaço vetorial. Uma função

$$\begin{aligned} \|.\|_E : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|_E \end{aligned}$$

é chamada de *norma* se satisfaz as seguintes propriedades:

- **(N.1)** $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$;
- **(N.2)** $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- **(N.3)** $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \, \|x\|_E$ para todo $x \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
- **(N.4)** $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para todos $x, y \in E$.

A propriedade $(N.4)$ é conhecida como a desigualdade triangular. Além disso, $\|.\|_E$ denotará a norma definida no espaço vetorial $E$, a menos que se faça menção do contrário.

Note que a norma satisfaz a segunda desigualdade triangular

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

A partir dessa desigualdade, podemos mostrar que a norma é uma função contínua.

**Definição 2.2 (Espaço Normado).** Um *espaço normado* $E$ é um espaço vetorial com uma norma definida nele.

Denotaremos o espaço normado $E$ com sua respectiva norma $\|.\|_E$ como o par $(E, \|.\|_E)$. Apresentamos, a seguir, alguns exemplos de espaços normados.

**Exemplo 2.1.** Sejam $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e $\|.\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Da Álgebra Linear, sabemos que $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, é um espaço vetorial. Ao mostrar que $\|.\|_p$ é uma norma, temos que as propriedades $(N.1)$, $(N.2)$ e $(N.3)$ não são difíceis de demonstrar, mas para demonstrar a propriedade $(N.4)$ é necessário fazer o uso da famosa desigualdade de Minkowski, apresentada no Apêndice A.1. Portanto, temos que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ é um espaço normado.

Em especial, quando $p = 1$ essa norma é chamada de *norma da soma*. Agora, quando $p = 2$ essa norma é chamada de *norma euclidiana*.

**Exemplo 2.2.** Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|x\|_\infty := \max \{|x_i| : i = 1, \ldots, N\},$$

para $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Temos que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$ é um espaço normado.

A norma apresentada acima é denominada de *norma do máximo*. Interessantemente, podemos obter a norma do máximo da seguinte forma

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left( \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 2.3.** Sejam $E$ um espaço vetorial de dimensão finita, $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ uma base ordenada e $\|.\|_b : E \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|x\|_b := \left(\sum_{i=1}^{N} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i \in E$. Temos que $(E, \|.\|_b)$ é um espaço normado.

O espaço $\ell_p$ apresentado a seguir é chamado de espaço das sequências $p$ somáveis.

**Exemplo 2.4.** Sejam $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial

$$\ell_p := \left\{ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

e $\|.\|_p : \ell_p \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para $x \in \ell_p$. Temos que $(\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço de normado.

Da Álgebra Linear, sabemos que o espaço de todas as sequências reais é um espaço vetorial. Da Desigualdade de Minkowski (Teorema A.1), segue que $\ell_p$ é um subespaço do espaço de todas as sequências reais e que $\|.\|_p$ é uma norma.

**Exemplo 2.5.** Sejam o espaço vetorial

$$\ell_\infty := \left\{ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sup_i |x_i| < \infty \right\}$$

e $\|.\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|x\|_\infty := \sup_i |x_i|,$$

para $x \in \ell_\infty$. Temos que $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ é um espaço normado.

Da Análise, sabemos que o conjunto de todas as sequências limitadas, denotado por $\ell_\infty$, é um espaço vetorial. Além disso, não é difícil mostrar que $\|.\|_\infty$ é uma norma.

**Definição 2.3 (Extensão).** Sejam $\tilde{X} \subset X, X$ e $Y$ conjuntos e uma função $f : \tilde{X} \to Y$. Se $g : X \to Y$ tal que $g(x) = f(x)$, para todo $x \in \tilde{X}$, dizemos que $g$ é uma extensão de $f$ e escrevemos $g|_{\tilde{X}} = f$.

Ainda podemos dizer que a função $f$ é a *restrição* da função $g$ ao conjunto $\tilde{X}$.

**Exemplo 2.6.** Seja $(E, \|.\|_E)$ um espaço normado e $M$ um subespaço de $E$. Como a norma $\|.\|_E$ é uma função, faz sentido considerarmos a função restrição

$$\|.\|_M =: \|.\|_E|_M : M \to \mathbb{R}.$$

Veja que essa função está bem definida e que satisfaz as propriedades de norma apresentadas na Definição 2.1. A norma $\|.\|_M$ é conhecida na literatura como *norma induzida.*

**Exemplo 2.7.** Sejam

$$c := \{x = (x_i)_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R} : (x_i) \text{ é convergente}\}$$

e

$$c_0 := \{x = (x_i)_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R} : (x_i) \text{ converge a zero}\}.$$

Temos que $(c, \|.\|_\infty)$ e $(c_0, \|.\|_\infty)$ são espaços normados com a norma induzida em $c$ e $c_0$ de $\|.\|_\infty$, respectivamente.

Dado um conjunto não vazio $X$, denotaremos por $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ o espaço de todas as funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$.

Agora, dado um espaço topológico $X$, denotaremos por $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$. Vale observar que quando $X$ é um espaço topológico compacto, temos $\mathscr{C}(X, \mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$.

**Exemplo 2.8.** Sejam $X$ um conjunto não vazio e $\|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})}$ : $\mathscr{B}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|f\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} = \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

para $f \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$. Temos que $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ é um espaço normado.

Da Análise, sabemos que $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial. Além disso, não é difícil mostrar que $\|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})}$ é uma norma.

**Exemplo 2.9.** Se $X$ é um espaço topológico compacto, então $(\mathscr{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ é um espaço normado com a norma induzida apresentada no Exemplo 2.8.

No que segue, $E, F$ e $G$ sempre irão denotar espaços normados com suas respectivas normas $\|.\|_E$, $\|.\|_F$ e $\|.\|_G$.

**Definição 2.4.** Sejam $a \in E$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. A *bola aberta de centro* $a$ *e raio* $r$ é o conjunto

$$B_E(a,r) = \{x \in E : \|x-a\|_E < r\}.$$

A *bola fechada de centro* $a$ *e raio* $r$ é o conjunto

$$B_E[a,r] = \{x \in E : \|x-a\|_E \leq r\}.$$

A *esfera de centro* $a$ *e raio* $r$ é o conjunto

$$S_E[a,r] = \{x \in E : \|x-a\|_E = r\}.$$

**Exemplo 2.10.** Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e as normas $\|.\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\|.\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, apresentadas no Exemplo 2.1, e a norma $\|.\|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, apresentada no Exemplo 2.2. Assim, as representações geométricas de uma bola aberta de centro $(0,0)$ e raio $r$ com cada uma das normas, respectivamente, são

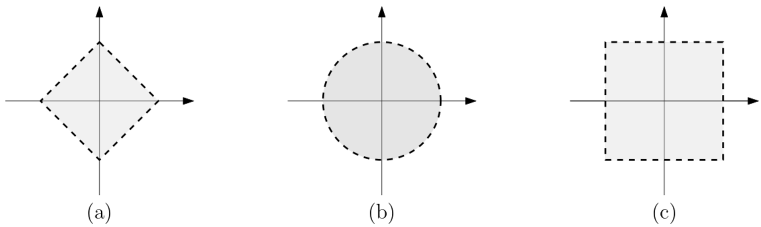


Figura 2.1 – O conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^2$
tais que $(a)\ \|x\|_1 \leq 1$, $(b)\ \|x\|_2 \leq 1$ e $(c)\ \|x\|_\infty \leq 1$.

**Definição 2.5 (Normas equivalentes).** Seja $E$ um espaço vetorial. Duas normas $\|.\|_E^{(1)}$ e $\|.\|_E^{(2)}$ em $E$ são equivalentes se existem constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_E^{(1)} \leq \|x\|_E^{(2)} \leq c_2 \|x\|_E^{(1)}$$

para todo $x \in E$.

**Exemplo 2.11.** Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Pela desigualdade

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq N \|x\|_\infty, \tag{2.1}$$

e pela definição 2.5, temos que a norma euclidiana, a norma do máximo e a norma da soma são equivalentes. Além disso, a desigualdade (2.1) implica nas inclusões

$$S'_{\|\cdot\|_\infty} \subset S_{\|\cdot\|_1} \subset S_{\|\cdot\|_2} \subset S_{\|\cdot\|_\infty} \tag{2.2}$$

em que $S_{\|\cdot\|_\infty}, S_{\|\cdot\|_2}, S_{\|\cdot\|_1}$ são as esferas de centro em 0 e raio $r$ relativas às normas do máximo, euclidiana e da soma, respectivamente, e ainda $S'_{\|\cdot\|_\infty}$ é a esfera de centro 0 e raio $\frac{r}{n}$ na norma do máximo. As inclusões (2.2) têm a representação geométrica abaixo

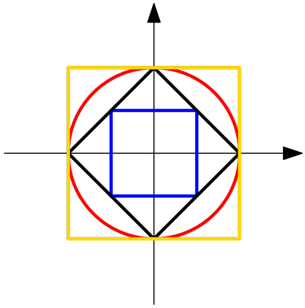

Figura 2.2 – Representação geométrica das inclusões (2.2).

**Proposição 2.1.** *Sejam $E$ um espaço normado e $M$ um subespaço de $E$. Se $M \subsetneq E$, então $M$ não é um subconjunto aberto de $E$.*

*Demonstração.* Suponhamos, por contrapositiva, que $M$ é um conjunto aberto de $E$. Seja $a \in M$. Assim, existe $r > 0$ tal que $B_E(a, r) \subset M$. Dado arbitrariamente $y \in E$, $y \neq 0$, temos que $\left\| \frac{ry}{2\|y\|_E} \right\|_E = \frac{r}{2}$. Então, $\left\| a + \frac{ry}{2\|y\|_E} - a \right\|_E = \frac{r}{2}$, ou seja, $a + \frac{r}{2\|y\|_E} y \in B_E(a, r)$. Logo, $a + \frac{r}{2\|y\|_E} y \in M$ implicando que $\frac{r}{2\|y\|_E} y \in M$. Desta forma, $y \in M$ contradizendo o fato de que $M \subsetneq E$. ■

## 2.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES E LIMITADAS

**Definição 2.6 (Transformação limitada).** Dada uma transformação linear $T \colon E \to F$, dizemos que $T$ é *limitada* se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|Tx\|_F \leq k \|x\|_E ,$$

para todo $x \in E$.

**Exemplo 2.12.** Sejam $E \neq \emptyset$ um espaço normado e a transformação linear

$$\begin{aligned} I : E &\to E \\ x &\mapsto Tx = x. \end{aligned}$$

Temos que a transformação identidade é limitada.

**Exemplo 2.13.** Seja a transformação linear

$$\begin{aligned} 0 : E &\to E \\ x &\mapsto Tx = 0. \end{aligned}$$

Temos que a transformação nula é limitada.

**Exemplo 2.14.** Seja uma matriz $A = (\alpha_{jk})$ com $r$ linhas e $N$ colunas. Definimos a transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^r \\ x &\mapsto Tx := y = Ax \end{aligned}$$

em que $x = (\xi_j)$ e $y = (\eta_j)$ são vetores coluna com $N$ e $r$ componentes, respectivamente. Temos que essa transformação $T$ é linear e limitada. Veja a demonstração no Exemplo 2.7-7 em ([4], p.95).

Da Álgebra Linear, sabemos que o conjunto de todas as funções $\mathscr{F}(E,F)$ é um espaço vetorial. Assim, podemos mostrar que o conjunto de todas as transformações lineares $L(E,F)$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(E,F)$. Entretanto, ao munirmos esse espaço de uma norma, não teremos propriedades que nos interessarão futuramente. Agora, após estudarmos as transformações lineares e limitadas é natural nos perguntarmos se há alguma norma que fará com que o espaço vetorial de todas as transformações lineares e limitadas $\mathscr{L}(E,F)$ seja um espaço de Banach, conceito que abordaremos no próximo capítulo.

Chamaremos de dual topológico ou, simplesmente, dual de $E$ o conjunto de todas as transformações lineares e limitadas $T : E \to \mathbb{R}$. Denotamos este conjunto por $E'$.

A partir da Definição 2.6 com $E \neq \emptyset$, pode-se considerar o conjunto $\left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0 \right\}$, não vazio e limitado superiormente em $\mathbb{R}$, no qual admite supremo pelo Postulado de Dedekind. Assim, está bem definida a função

$$\begin{aligned} \|.\|_{\mathscr{L}(E,F)} : \mathscr{L}(E,F) &\to \mathbb{R} \qquad (2.3) \\ T &\mapsto \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.2.** *A função $\|.\|_{\mathscr{L}(E,F)} : \mathscr{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ definida em (2.3) é uma norma em $\mathscr{L}(E,F)$.*

*Demonstração.* Como a função definida em (2.3) está bem definida, basta mostrar que as propriedades de norma são satisfeitas. Vamos mostrar que a propriedade $(N.1)$ é satisfeita. Dado arbitrariamente $T \in \mathscr{L}(E,F)$, temos que

$$0 \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

para todo $x \in E, x \neq 0$. Então,

$$0 \leq \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} = \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}. \tag{2.4}$$

Portanto, $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \geq 0$, para todo $T \in \mathscr{L}(E,F)$.

Vamos mostrar que a propriedade $(N.2)$ é satisfeita. Suponhamos que $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = 0$. Então,

$$0 \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} = 0$$

para todo $x \in E, x \neq 0$. Assim, $\|Tx\|_F = 0$ para todo $x \in E, x \neq 0$. Concluímos que $Tx = 0$ quando $x \in E, x \neq 0$. Visto que $T0 = 0$, temos então que $Tx = 0$ para todo $x \in E$, ou seja, $T = 0$. Agora, suponha que $T = 0$. Então

$$\frac{\|0x\|_F}{\|x\|_E} = 0$$

para todo $x \in E, x \neq 0$. Logo,

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|0\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup\left\{\frac{\|0x\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} = 0.$$

Portanto, $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Vamos mostrar que a propriedade $(N.3)$ é satisfeita. Sejam

$\alpha \in \mathbb{R}$ e $T \in \mathscr{L}(E,F)$ arbitrários. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\|_{\mathscr{L}(E,F)} &= \sup\left\{\frac{\|(\alpha T)x\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|\alpha|\,\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&= |\alpha| \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&= |\alpha|\,\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\alpha T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = |\alpha|\,\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Para verificarmos a desigualdade triangular, consideremos arbitrariamente $T, U \in \mathscr{L}(E,F)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|T+U\|_{\mathscr{L}(E,F)} &= \sup\left\{\frac{\|(T+U)x\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|Tx+Ux\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} + \frac{\|Ux\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&\quad + \sup\left\{\frac{\|Ux\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\} \\
&= \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} + \|U\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|T+U\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} + \|U\|_{\mathscr{L}(E,F)}$, o que conclui a demonstração.

■

**Proposição 2.3.** *Dado $T \in \mathscr{L}(E,F)$, temos que*

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} &= \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E < 1\} \\
&= \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\} \\
&= \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\
&= \inf\{c > 0 : \|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E \text{ para todo } x \in E\}
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Primeiramente definamos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E < 1\}; \\ A_2 &:= \{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}; \\ A_3 &:= \{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}; \\ A_4 &:= \left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}; \\ A_5 &:= \{c > 0 : \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E \text{ para todo } x \in E\}. \end{aligned}$$

Assim sendo, mostraremos as igualdades

$$\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3 = \sup A_4 = \inf A_5.$$

Vamos mostrar que $\sup A_1 = \sup A_2$. Seja $a \in A_1$. Então, existe $x \in E$, $\|x\|_E < 1$, tal que $a = \|Tx\|_F$. Seja $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Temos que $y \in E$, $\|y\|_E = 1$ e

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \|Ty\|_F \leq \sup A_2.$$

Então,

$$a = \|Tx\|_F \leq (\sup A_2)\|x\|_E < \sup A_2.$$

Pela definição de supremo,

$$\sup A_1 \leq \sup A_2.$$

Agora, seja $a \in A_2$. Então, existe $x \in E$, $\|x\|_E = 1$, tal que $a = \|Tx\|_F$. Seja $(x_n)$ uma sequência em $E$ tal que $\|x_n\|_E < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \to x$. Temos que

$$\|Tx_n\|_F \leq \sup A_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, sendo $T$ e a norma aplicações contínuas, temos que $\|Tx_n\|_F \to \|Tx\|_F$. Assim,

$$a = \|Tx\|_F \leq \sup A_1.$$

Logo,

$$\sup A_2 \leq \sup A_1.$$

Portanto,

$$\sup A_1 = \sup A_2.$$

Vamos mostrar que $\sup A_2 = \sup A_3$. Visto que $A_2 \subset A_3$, temos que a desigualdade

$$\sup A_2 \leq \sup A_3$$

é imediata. Suponhamos que $a \in A_3$. Temos que existe $x \in E$, $\|x\|_E \leq 1$, tal que $a = \|Tx\|_F$. Se $\|x\|_E = 1$, então

$$a = \|Tx\|_F \leq \sup A_2.$$

Se $\|x\| < 1$, então

$$a = \|Tx\|_F \leq \sup A_1 = \sup A_2.$$

Logo,

$$\sup A_3 \leq \sup A_2.$$

Portanto,

$$\sup A_2 = \sup A_3.$$

Vamos mostrar que $\sup A_2 = \sup A_4$. Dado $a \in A_2$, temos que existe $x \in E$, $\|x\|_E = 1$, tal que $a = \|Tx\|_F$. Então,

$$a = \|Tx\|_F = \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup A_4.$$

Logo,

$$\sup A_2 \leq \sup A_4.$$

Agora, suponhamos por absurdo que $\sup A_2 < \sup A_4$. Existe $x \neq 0$ tal que

$$\sup A_2 < \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Seja $y = \frac{x}{\|x\|_E}$. Temos que $\|Ty\|_F \in A_2$ e

$$\sup A_2 < \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \|Ty\|_F\,,$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter

$$\sup A_2 = \sup A_4.$$

Vamos mostrar que $\sup A_4 = \inf A_5$. Dado $c \in A_5$, temos que $\|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E$, para todo $x \in E$. Logo, para todo $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq c.$$

Daí, $\sup A_4 \leq c$ para todo $c \in A_5$ e, consequentemente,

$$\sup A_4 \leq \inf A_5.$$

Agora, notemos que, para todo $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup A_4.$$

Se $T = 0$, é imediato que

$$\sup A_4 = 0 = \inf A_5.$$

Se $T \neq 0$, então $\sup A_4 > 0$ e

$$\|Tx\|_F \leq (\sup A_4)\,\|x\|_E\,,$$

para todo $x \in E$. Portanto, $\sup A_4 \in A_5$. Assim,

$$\inf A_5 \leq \sup A_4.$$

Portanto,

$$\sup A_4 = \inf A_5.$$

$\blacksquare$

Vejamos que é verdadeira a desigualdade

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,\|x\|_E\,. \tag{2.5}$$

Como $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}$, pela definição de supremo, temos que

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}\,,$$

para todo $x \in E$, verificando a desigualdade (2.5).

Sabemos que dados dois espaços métricos e uma função entre eles, são verdadeiras as implicações sobre a função ser

$$\begin{aligned} \text{lipschitziana} \quad &\Rightarrow \quad \text{uniformemente contínua} \\ &\Rightarrow \quad \text{contínua} \\ &\Rightarrow \quad \text{contínua na origem,} \end{aligned}$$

mas raramente temos as implicações inversas. O resultado seguinte elucida bem o ganho ao adicionarmos estrutura algébrica nos espaços métricos.

**Proposição 2.4.** *Dada uma transformação linear $T\colon E \to F$, as seguintes condições são equivalentes:*

*(a) $T$ é limitada;*

*(b) $T$ é lipschitziana;*

*(c) $T$ é uniformemente contínua.*

*(d) $T$ é contínua.*

*(e) $T$ é contínua na origem*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $(a)$ implica em $(b)$. Supondo que $T$ limitada, temos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx\|_F \leq k\,\|x\|_E$, para todo $x \in E$. Daí, sendo $T$ linear, então

$$\|Tx - Ty\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq k\,\|x-y\|_E\,,$$

para todo $x, y \in X$. Portanto, $T$ é lipschitziana.

Vamos mostrar que $(b)$ implica em$(c)$. Suponhamos que $T$ é lipschitziana. Então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|Tx - Ty\|_F \leq k\,\|x-y\|_E\,,$$

para todos $x, y \in E$. Se $k = 0$, então $T$ é uma transformação linear constante que, por sua vez, é uniformemente contínua. Se $k \neq 0$, então dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Então, para $x, y \in E$, $\|x - y\|_E < \delta$, temos

$$\|Tx - Ty\|_F \leq k \|x - y\|_E < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Portanto, $T$ é uniformemente contínua.

Os fatos de que $(c)$ implica em $(d)$ e $(d)$ implica em $(e)$ são imediatos.

Vamos mostrar que $(e)$ implica em $(a)$. Suponhamos que $T$ é contínua e, por contrapositiva, que T não é limitada. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n$ em $E$, $x_n \neq 0$, tal que $n\|x_n\|_E < \|Tx_n\|_F$. Seja $y_n = \frac{x_n}{\|Tx_n\|_F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|y_n\|_E = \left\| \frac{x_n}{\|Tx_n\|_F} \right\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|Tx_n\|_F} < \frac{1}{n},$$

e

$$\|Ty_n\|_F = \left\| T\left( \frac{x_n}{\|Tx_n\|_F} \right) \right\|_F = \frac{\|Tx_n\|_F}{\|Tx_n\|_F} = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, quando $n \to +\infty$, $\|y_n\|_E \to 0$ e $\|Ty_n\|_F \to 1$, o que contradiz o fato de T ser contínua na origem. ■

Demonstrado isso, ao longo do estudo não faremos distinção entre transformações lineares e limitadas e transformações lineares e contínuas.

**Corolário 2.5.** *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então $T$ é contínua se, e somente se, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E,$$

*para todo $x \in E$.*

**Definição 2.7.** Seja $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Chamamos $T$ de isomorfismo topológico se $T$ é bijetivo e seu inverso é contínuo. Além disso, se $T$ é um isomorfismo topológico entre $E$ e o subespaço $T(E)$ de $F$ dizemos que $T$ é um mergulho topológico.

Temos que a equivalência de normas também pode ser caracterizada da seguinte forma.

*Observação* 1. As normas $\|.\|_E^{(1)}$ e $\|.\|_E^{(2)}$ definidas em um espaço vetorial $E$ são ditas equivalentes se, e somente se, a transformação identidade de $(E, \|.\|_E^{(1)})$ em $(E, \|.\|_E^{(2)})$ é um isomorfismo topológico.

**Definição 2.8.** Dizemos que $T \in \mathscr{L}(E,F)$ é um isomorfismo isométrico se $T$ é bijetivo e $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$. Além disso, se $T \in \mathscr{L}(E,F)$ é um isomorfismo isométrico entre $E$ e o subespaço $T(E)$ de $F$, diremos que T é um mergulho isométrico.

**Corolário 2.6.** *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então $T$ é um mergulho topológico se, e somente se, existem constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que*

$$c_1 \|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq c_2 \|x\|_E ,$$

*para todo $x \in E$.*

**Proposição 2.7.** *Seja $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Se $U \in \mathscr{L}(F,G)$, então $(U \circ T) \in \mathscr{L}(E,G)$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e $U \in \mathscr{L}(F,G)$. Dados arbitrariamente $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(U \circ T)(\alpha x + y) = U(T(\alpha x + y)) &= U(\alpha Tx + Ty) \\
&= U(\alpha Tx) + U(Ty) \\
&= \alpha U(Tx) + U(Ty) \\
&= \alpha(U \circ T)x + (U \circ T)y
\end{aligned}$$

Portanto, $(U \circ T)$ é linear. Temos, por hipótese, que

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E ,$$

para todo $x \in E$, e

$$\|Uy\|_G \leq \|U\|_{\mathscr{L}(F,G)} \|y\|_F ,$$

para todo $y \in F$, e assim,

$$\begin{aligned}
\|(U \circ T)x\|_G = \|U(Tx)\|_G &\leq \|U\|_{\mathscr{L}(F,G)} \|Tx\|_F \\
&\leq \|U\|_{\mathscr{L}(F,G)} \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E .
\end{aligned}$$

Portanto, $(U \circ T)$ é limitada, como queríamos. ■

**Corolário 2.8.** *Seja $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Se $T' : F' \to E'$ é definida por $f \mapsto T'_f := f \circ T$, então $T' \in \mathscr{L}(F',E')$ e $\|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$. O operador $T'$ é chamado de operador dual, ou operador transposto, de $T$.*

*Demonstração.* Dado $f \in F'$ arbitrário, seja $T'_f := f \circ T$. Dados arbitrariamente $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T'_f(\alpha x + y) = (f \circ T)(\alpha x + y) &= f(T(\alpha x + y)) \\ &= f(\alpha Tx + Ty) \\ &= \alpha f(Tx) + f(Ty) \\ &= \alpha (f \circ T)x + (f \circ T)y \\ &= \alpha T'_f(x) + T'_f(y). \end{aligned}$$

Além disso, dados arbitrariamente $x \in E$ e $f \in F'$, temos

$$\left|T'_f(x)\right| = |f(Tx)| \leq \|f\|_{F'} \|Tx\|_F \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E \tag{2.6}$$

Logo, $T'_f \in E'$. Assim, concluímos que $T'$ está bem definida. Agora, se considerarmos arbitrariamente $f, g \in F'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $x \in E$, então

$$\begin{aligned} T'_{\alpha f + g}(x) = ((\alpha f + g) \circ T)x &= (\alpha f + g)(Tx) \\ &= \alpha f(Tx) + g(Tx) \\ &= \alpha (f \circ T)x + (g \circ T)x \\ &= \alpha T'_f(x) + T'_g(x). \end{aligned}$$

Logo, $T'$ é linear. Além disso, da desigualdade (2.6), temos que $\left\|T'_f\right\|_{E'} \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$, para todo $f \in F'$. Isto implicará que $T' \in \mathscr{L}(F',E')$ e que

$$\|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E',F')},$$

como queríamos. ∎

Com teoremas que veremos mais adiante, conseguiremos demonstrar que na verdade

$$\|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')} = \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

## 2.3 ESPAÇO QUOCIENTE

**Definição 2.9 (Relação de Equivalência).** Dado um conjunto $X$, uma *relação de equivalência* em $X$ $\sim$ é uma relação binária tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

**(i)** $a \sim a$ para todo $a \in X$; (Reflexiva)

**(ii)** Se $a \sim b$ então $b \sim a$; (Simétrica)

**(iii)** Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$, (Transitiva)

para $a, b$ e $c \in X$.

**Exemplo 2.15 (Relação de Equivalência Módulo M).** Dados $E$ um espaço vetorial e $M$ um subespaço de $E$. Considere a relação

$$x \equiv y \,(\text{mod} M) \Leftrightarrow x - y \in M.$$

Essa relação é uma relação de equivalência e não é difícil mostrar tal afirmação. Nesse caso, dizemos que $x, y \in E$ são equivalentes módulo $M$.

**Definição 2.10.** Seja uma relação de equivalência $\sim$ num espaço normado $E$. Definimos, para todo $x \in E$,

$$[x] = \{y \in E : x \sim y\}.$$

Esses conjuntos são chamados de classes de equivalências.

Considerando a relação de equivalência módulo $M$, apresentada no Exemplo 2.15, denotaremos por $E/M$ o conjunto de todas as classe de equivalência módulo $M$.

**Definição 2.11.** Definamos as operações de soma e multiplicação por escalar em $E/M$. Assim, temos

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \lambda [x] = [\lambda x]$$

para todo $[x], [y] \in E/M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Não é difícil que essas operações são bem definidas e que com elas $E/M$ é um espaço vetorial. Chamamos o espaço vetorial $E/M$ de espaço quociente de $E$ módulo $M$.

Existe a transformação linear natural definida como

$$\begin{aligned} \pi : E &\to E/M \\ x &\mapsto \pi(x) = [x] \end{aligned}$$

Essa transformação linear sobrejetora é chamada de *aplicação quociente.*

**Definição 2.12.** Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais. A aplicação $T : E \to F$ é dita *aberta* se $T(A)$ é um conjunto aberto de $F$ para todo conjunto $A$ aberto de $E$.

**Proposição 2.9.** *Sejam $E$ um espaço normado, $M$ um subespaço fechado de $E$ e*

$$\|[x]\|_{E/M} = \inf \{\|z\|_E : z \in [x]\}$$

*para cada $[x] \in E/M$. Então:*

*(a) $[x] = x + M$ e $\|[x]\|_{E/M} = d(x, M)$ para cada $x \in E$;*

*(b) A função*

$$\begin{aligned} \|.\|_{E/M} : E/M &\to \mathbb{R} \\ [x] &\mapsto \|[x]\|_{E/M} \end{aligned}$$

*é uma norma em $E/M$;*

*(c) $\pi\left(B_E(0,1)\right) = B_{E/M}(0,1)$. Em particular, a aplicação quociente $\pi : E \to E/M$ é contínua e aberta.*

*Demonstração.* Vamos primeiramente mostrar $(a)$. Seja $y \in [x]$ arbitrário. Logo, $x \equiv y \pmod M$. Assim, $x - y \in M$ e, consequentemente, $m := y - x \in M$. Sendo $y = x + (y - x)$, então $y = x + m$.

Seja $y \in x + M$ arbitrário. Então, existe $m \in M$ tal que $y = x + m$. Assim, $m = y + (-x)$ e, consequentemente, $x - y \in M$, isto é, $x \equiv y \ (\mathrm{mod} M)$. Logo, $y \in [x]$ e, portanto, $[x] = x + M$.

Observemos que

$$\begin{aligned} d(x, M) &= \inf\{\|x-w\|_E : w \in M\} \\ &= \inf\{\|x+(-w)\|_E : w \in M\} \\ &= \inf\{\|x+y\|_E : y \in M\}. \end{aligned}$$

Já que os ínfimos de conjuntos iguais são iguais, basta mostrarmos que

$$A := \{\|x+y\|_E : y \in M\} = \{\|z\|_E : z \in [x]\} =: B.$$

De fato, seja $w \in A$ arbitrário. Então, existe $y_0 \in M$ tal que $w = \|x+y_0\|_E$. Como $x+y_0 \in x+M = [x]$, temos que $w \in B$. Por outro lado, seja $w \in B$ arbitrário. Então, existe $z_0 \in [x]$ tal que $w = \|z_0\|_E$. Como $[x] = x+M$, temos que existe $m_0 \in M$ tal que $x_0 = x+m_0$. Logo, $w = \|x_0\|_E = \|x+m_0\|_E$ com $m_0 \in M$ e, assim, $w \in M$. Portanto, $A = B$, o que concluí o que queríamos.

Vamos agora mostrar $(b)$. Para concluirmos que $\|.\|_{E/M} : E/M \to \mathbb{R}$ é uma norma em $E/M$ precisamos mostrar as propriedades citadas na Definição 2.1. Visto que $\|[x]\|_{E/M} = d(x, M)$, para todo $x \in E$, é imediato que $\|[x]\|_{E/M} \geq 0$, para todo $[x] \in E/M$, satisfazendo a propriedade $(N.1)$.

Vamos mostrar que a propriedade $(N.2)$ é satisfeita. Suponhamos que $\|[x]\|_{E/M} = 0$, ou seja,

$$\inf\{\|x-y\|_E : y \in M\} = d(x, M) = 0.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M$ tal que

$$0 \leq \|x-y_n\|_E < \frac{1}{n}.$$

Desta forma, a sequência $(y_n)$ em $M$ é tal que $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - x\|_E = 0$. Logo, $x \in \overline{M} = M$. Assim, $x - 0 \in M$, e portanto, $[0] = [x]$.

Suponhamos agora que $[x] = [0]$. Então,

$$\|[x]\|_{E/M} = \|[0]\|_{E/M} = \inf\{\|y\|_E : y \in M\}.$$

Como $0 \in M$, então $0 = \|[0]\|_{E/M} = \|[x]\|_{E/M}$, como queríamos.

Vamos mostrar que a propriedade $(N.3)$ é satisfeita. Dados arbitrariamente $[x] \in E/M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha[x]\|_{E/M} = \|[\alpha x]\|_{E/M} &= \inf\{\|\alpha x\|_E : x \in [x]\} \\
&= \inf\{|\alpha|\,\|x\|_E : x \in [x]\} \\
&= |\alpha| \inf\{\|x\|_E : x \in [x]\} \\
&= |\alpha|\,\|[x]\|_{E/M}.
\end{aligned}$$

Para finalizar, basta mostrarmos a desigualdade triangular. Dados arbitrariamente $[x], [y] \in E/M$ e $\varepsilon > 0$, existem $x \in [x]$ e $y \in [y]$ tais que

$$\|x\|_E < \|[x]\|_{E/M} + \varepsilon$$

e

$$\|y\|_E < \|[y]\|_{E/M} + \varepsilon.$$

Então $x + y \in [x] + [y] = [x + y]$ e daí,

$$\begin{aligned}
\|[x] + [y]\|_{E/M} \leq \|x + y\|_E &\leq \|x\|_E + \|y\|_E \\
&< \|[x]\|_{E/M} + \|[y]\|_{E/M} + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\|[x] + [y]\|_{E/M} \leq \|[x]\|_{E/M} + \|[y]\|_{E/M}.$$

Portanto, $\|.\|_{E/M} : E/M \to \mathbb{R}$ é uma norma em $E/M$.

Vamos agora mostrar $(c)$. Seja $y \in \pi(B_E(0,1))$ arbitrário. Então, existe $x \in B_E(0,1))$ tal que $y = \pi(x) = [x]$. Temos que

$$\|y\|_{E/M} = \|[x]\|_{E/M} = \inf\{\|x\|_E : x \in [x]\} \leq \|x\|_E < 1.$$

Logo, $y \in B_{E/M}(0,1)$.

Seja $y \in B_{E/M}(0,1)$ arbitrário. Então, $\|y\|_{E/M} < 1$, e consequentemente, existe $x \in Y$ tal que $\|y\|_{E/M} \leq \|x\|_E < 1$, ou seja $y = \pi(x)$ e $x \in B_E(0,1)$. Logo, $y \in \pi(B_E(0,1))$. Portanto,

$$\pi\left(B_E(0,1)\right) = B_{E/M}(0,1).$$

Mostrado isso, podemos concluir que

$$\pi\left(B_E(x,r)\right) = B_{E/M}([x], r), \tag{2.7}$$

para todo $x \in E$ e para todo $r > 0$. Notemos que $\pi$ é contínua. De fato, sejam $Y \subset E/M$ aberto e $[x] \in E/M$. Então, existe $x \in E$ tal que $\pi(x) = [x] \in Y$. Além disso, por $Y$ ser um conjunto aberto, existe $r > 0$ tal que $B_{E/M}([x], r) \subset Y$. Pela igualdade (2.7), temos que $\pi\left(B_E(x, r)\right) \subset Y$. Logo, $B_E(x, r) \subset \pi^{-1}(Y)$. Portanto, pela Proposição A.7, $\pi$ é contínua.

Agora, notemos que $\pi$ também é aberta. De fato, seja $X \subset E$ aberto. Então, existe $r > 0$ tal que $B_E(x, r) \subset X$. Logo, $\pi\left(B_E(x, r)\right) \subset \pi(X)$. Pela igualdade (2.7), temos que $B_{E/M}([x], r) \subset \pi(X)$, concluindo a demonstração. ■

**Lema 2.1.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Se $T : E \to F$ é linear limitada, então existe uma transformação linear limitada injetiva $\tilde{T} : E/kerT \to F$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$ em que $\pi : E \to E/kerT$ é a transformação quociente.*

*Demonstração.* Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ uma transformação linear limitada. Consideremos

$$\begin{aligned} \tilde{T} : E/kerT &\to F \\ [x] &\mapsto \tilde{T}[x] = Tx. \end{aligned}$$

Notemos que se $[x], [y] \in E/kerT$ com $[x] = [y]$, então $x - y \in kerT$. Assim, $x = y + i$ em que $i := x - y \in kerT$. Logo,

$$Tx = T(y + i) = Ty + Ti = Ty + 0 = Ty.$$

Portanto, $\tilde{T}$ está bem definida. Para mostrar que $\tilde{T}$ é linear, sejam arbitrariamente $[x], [y] \in E/kerT$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\alpha[x] + [y]) = \tilde{T}([\alpha x + y]) = T(\alpha x + y) &= \alpha Tx + Ty \\ &= \alpha\tilde{T}[x] + \tilde{T}[y]. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{T}$ é linear. Para mostrar que $\tilde{T}$ é limitada, notemos que para cada $x \in [x]$, temos

$$\left\|\tilde{T}[x]\right\|_F = \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E \, .$$

Como o $kerT$ é fechado, temos

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{T}[x]\right\|_{F]} &\leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \inf \{\|x\|_E : x \in [x]\} \\ &= \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|[x]\|_{E/kerT} . \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{T}$ é limitada. Vamos mostrar que $\tilde{T}$ é injetiva. Se $\tilde{T}[x] = \tilde{T}[y]$, então $Tx = Ty$, e consequentemente, $T(x-y) = Tx - Ty = 0$. Isso implica que $x - y \in kerT$, e ainda que, $[x] = [y]$. Portanto, $\tilde{T}$ é injetiva. Por fim, se $x \in E$ arbitrário, então

$$(\tilde{T} \circ \pi)x = \tilde{T}(\pi x) = \tilde{T}[x] = Tx.$$

Portanto, $T = \tilde{T} \circ \pi$ finalizando a demonstração. ■

# 3 ESPAÇOS DE BANACH

Nesse capítulo, iremos estudar os famosos espaços de Banach. De acordo com [10], a partir de 1913 vários matemáticos tinham seus estudos projetados para a criação desse conceito. Os primeiros resultados contemplavam apenas os espaços de transformações lineares, Bennett e Lamson estudavam esses espaços com completude, em 1916 e 1917, respectivamente. Em 1920, Wiener já estudava os espaços vetoriais abstratos, mas sem completude. O marco para a criação dos espaços de Banach foi a publicação da tese de Banach, em 1920, no qual apresentava esse conceito e seus estudos em volta dos espaços vetoriais abstratos com completude. Vale ressaltar que Hahn, meses depois da publicação de Banach, também publicou seus estudos sobre os espaços vetoriais abstratos com completude.

Antes de abordarmos o conceito de espaços de Banach, relembremos algumas definições.

**Definição 3.1 (Limite).** Seja $E$ um espaço normado. Diz-se que $x \in E$ é o *limite* da sequência $(x_n)$ em $E$ quando dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, então

$$\|x_n - x\|_E < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos $\lim x_n = x$.

**Definição 3.2 (Sequência Convergente).** Uma sequência $(x_n)$ é dita *convergente* quando $(x_n)$ possui limite.

**Definição 3.3 (Sequência de Cauchy).** Seja $E$ um espaço normado. Uma sequência $(x_n)$ em $E$ é uma sequência de Cauchy quando dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_0$, então

$$\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon.$$

**Definição 3.4 (Espaço de Banach).** Seja $(E, \|.\|_E)$ um espaço normado. Dizemos que $E$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em $E$ é convergente em $E$.

Vejamos alguns exemplos de espaços de Banach.

**Exemplo 3.1.** Sejam $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ e $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.1 . Temos que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ é um espaço de Banach. De fato, seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^N$. Observemos que cada $x_n$ é uma $N$-upla de números reais tal que $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_N^{(n)})$ em que $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > n_0$, temos

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \left( \sum_{i=1}^{N} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon, \quad (3.1)$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, N$. Logo, $(x_i^{(n)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e por conseguinte, existe $x_i = \lim\limits_{n \to +\infty} x_i^{(n)}$, para cada $i = 1, \ldots, N$. Claramente, $x := (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Seja $\varepsilon > 0$. Da existência do $\lim\limits_{n \to +\infty} x_i^{(n)}$ , para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, existe $n_i$ tal que se $n > n_i$, então

$$|x_i^{(n)} - x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{N^p}.$$

Fazendo $q_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$ e $n > q_0$, temos

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_p &= \left( \sum_{i=1}^{N} |x_i^{(n)} - x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( |x_1^{(n)} - x_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left( |x_N^{(n)} - x_N|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \frac{\varepsilon}{N} + \cdots + \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$ como queríamos.

**Exemplo 3.2.** Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.2. Temos que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. A demonstração de que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach é semelhante à demonstração de que $(\mathbb{R}^N, \|.\|_p)$ é um espaço de Banach.

**Exemplo 3.3.** Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(\ell_p, \|.\|_p)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.4. Temos que $(\ell_p, \|.\|_p)$ é um espaço de

Banach. De fato, seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p$. Então, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > n_0$, temos

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon, \quad (3.2)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim, $(x_i^{(n)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e portanto, existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lim_{n\to+\infty} x_i^{(n)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade (3.2), temos que

$$\|x_n - x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

para $n > n_0$. Portanto, $(x - x_n) \in \ell_p$, para todo $n > n_0$ e, consequentemente, $x = x_n + (x - x_n) \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \to 0$.

**Exemplo 3.4.** Seja $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.5. Temos que $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. De fato, seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então

$$\sup_i |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| = \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon,$$

Daí, para todo $i \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| \leq \sup_i |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon, \quad (3.3)$$

para $n, m > n_0$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que $(x_i^{(n)})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, existe $x_i \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lim_{n\to+\infty} x_i^{(n)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Mostremos que $x_n \to x$. Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade (3.3), tem-se que

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq \varepsilon,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, e todo $n > n_0$. Logo,

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_i |x_i^{(n)} - x_i| \leq \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Portanto, $(x - x_n) \in \ell_\infty$, para todo $n > n_0$. Assim, $x = x_n + (x - x_n) \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Antes de continuarmos com os exemplos, precisaremos da seguinte preposição.

**Proposição 3.1.** *Seja $E$ um espaço de Banach. Um subespaço $M \subset E$ é fechado se, e somente se, $M$ é Banach.*

*Demonstração.* Suponhamos que $M$ é fechado e seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $M$. Temos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $E$. Logo, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ em $E$. Como $x \in \overline{M} = M$, concluímos que $x_n \to x$ em $M$. Portanto, $F$ é Banach.

Agora, suponhamos que $M$ é um espaço de Banach e seja $x \in \overline{M}$. Temos que existe $(x_n)$ sequência em $M$ tal que $x_n \to x$ em $E$. Então, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $M$, e portanto, existe $\overline{x} \in M$ tal que $x_n \to \overline{x}$ em $M$. Pela unicidade do limite, $\overline{x} = x$ e $x \in M$. Portanto, $M$ é fechado. ■

**Exemplo 3.5.** Seja $(c, \|.\|_\infty)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.7. Temos que $(c, \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. De fato, notemos que $c \subset \ell_\infty$ e $c$ é um espaço vetorial. Então, sendo $\ell_\infty$ um espaço de Banach e pela Proposição 3.1 é suficiente mostrar que $c$ é fechado em $\ell_\infty$.

Seja $x = (x_j) \in \bar{c}$. Então, existe $(x_n)$ em $c$ tal que $x_n \to x$ em $\ell_\infty$. Desta forma, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$|x_j^{(n)} - x_j| < \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^{(n)} - x_j| = \|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Notemos que $x_{n_0+1} = (x_j^{(n_0+1)})$ é de Cauchy. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i, j > j_0$, então

$$|x_i^{(n_0+1)} - x_j^{(n_0+1)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Do fato de que $i, j > j_0$, então

$$\begin{array}{rcl} |x_i - x_j| & = & |x_i - x_i^{(n_0+1)} + x_i^{(n_0+1)} - x_j^{(n_0+1)} + x_j^{(n_0+1)} - x_j| \\ & \leq & |x_i^{(n_0+1)} - x_i| + |x_i^{(n_0+1)} - x_j^{(n_0+1)}| + |x_j^{(n_0+1)} - x_j| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{array}$$

temos que $x = (x_j) \in c$.

**Exemplo 3.6.** Seja $(c_0, \|.\|_\infty)$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.7. Temos que $(c_0, \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach. De fato, sendo $c_0 \subset \ell_\infty$ um espaço vetorial e pela Proposição 3.1, então basta mostrarmos que $c_0$ é fechado em $\ell_\infty$. Seja $x = (x_j) \in \overline{c_0}$. Então existe $(x_n)$ em $c_0$ tal que $x_n \to x$ em $\ell_\infty$, ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$|x_j^{(n)} - x_j| < \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j^{(n)} - x_j| = \|x_n - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Notemos que $x_j^{(n_0+1)} \to 0$ quando $j \to +\infty$, ou seja, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_0$, então

$$|x_j^{(n_0)+1}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como, se $j > j_0$ então

$$\begin{array}{rcl} |x_j| & = & |x_j - x_j^{(n_0+1)} + x_j^{(n_0+1)}| \\ & \leq & |x_j - x_j^{(n_0+1)}| + |x_j^{(n_0)+1}| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{array}$$

temos que $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0$.

**Exemplo 3.7.** Sejam $X$ um conjunto não vazio e $(\mathscr{B}(X, \mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.8. Temos que $(\mathscr{B}(X, \mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ é um espaço de Banach. De fato, seja $(f_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$. Assim, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$, então

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f_m(x)| & \leq & \sup \{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} \\ & = & \|f_n - f_m\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} < \varepsilon, \end{array}$$

para todo $x \in X$. Daí, para todo $x \in X$ temos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, existe limite em $\mathbb{R}$ no qual definimos da forma $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) := L_x$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = L_x$, para todo $x \in X$. Mostremos que $f_n \to f$. Fazendo $m \to \infty$, tem-se que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

para todo $x \in X$ e todo $n > n_0$. Logo,

$$\|f_n - f\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

Portanto, $(f - f_n) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$, para todo $n > n_0$. Assim, $f = f_n + (f - f_n) \in \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ e $\|f_n - f\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} \to 0$ como queríamos.

**Exemplo 3.8.** Sejam $X$ é um espaço topológico compacto e $(\mathscr{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ o espaço normado apresentado no Exemplo 2.9. Temos que $(\mathscr{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})})$ é um espaço de Banach. De fato, notemos que $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$. Então, sendo $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ um espaço de Banach e pela Proposição 3.1, é suficiente mostrar que $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ é fechado em $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$.

Seja $f \in \overline{\mathscr{C}(X,\mathbb{R})}$. Então, existe $(f_n)$ em $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ em $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$. Desta forma, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup|f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

para todo $x \in X$. Como $(f_{n_0+1}) \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, temos que dado $p \in X$, existe um aberto $V_p$ de $X$ tal que $p \in V_p$ e se $x \in V_p$, então

$$\|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(p)\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, se $x \in V_p$, então

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(p)\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} &\leq \|f(x) - f_{n_0+1}(x)\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} \\
&\quad + \|f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(p)\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} \\
&\quad + \|f_{n_0+1}(p) - f(p)\|_{\mathscr{B}(X,\mathbb{R})} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $f \in \mathscr{C}(X,\mathbb{R})$, e portanto, $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$ é fechado.

Agora, vejamos um exemplo de um espaço que não é um espaço de Banach.

**Exemplo 3.9.** Sejam $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas de valores reais definidas em $[0,1]$ e a norma definida em $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ como

$$\|f\|_{\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})} = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

O espaço normado $(\mathscr{C}([0,1]), \|.\|_{\mathscr{C}([0,1])})$ não é um espaço de Banach. De fato, seja $(x_n)$ uma sequência de em $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right), & \text{se } t \in \left(\frac{1}{2}, a_n\right) \\ 1, & \text{se } t \in [a_n, 1] \end{cases}$$

em que $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Mostraremos que a sequência $(x_n)$ é de Cauchy. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, uma observação interessante é a de que $\|x_m - x_n\|_{\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})}$ pode ser representado geometricamente pela área do triângulo cinza na figura 3.1.

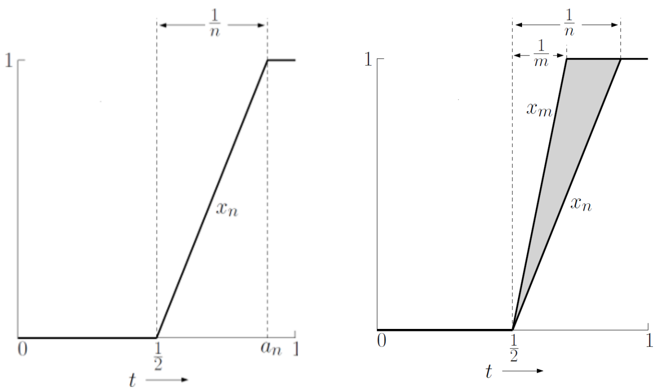


Figura 3.1 – Representação geométrica do n-ésimo termo da sequência $(x_n)$ e da $\|x_m - x_n\|_{\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})}$, respectivamente.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Notemos que se $\frac{1}{2} \leq t \leq a_n$, então $0 \leq n\left(t - \frac{1}{2}\right) \leq 1$, ou seja, $|x_n(t)| = x_n(t) \leq 1$, para todo $t \in \left(\frac{1}{2}, a_n\right)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que se $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$, então $|x_n(t)| = x_n(t) \leq 1$, para todo $t \in \left(\frac{1}{2}, a_m\right)$. Desta forma, se $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_n(t) - x_m(t)|dt &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_n(t)| + |x_m(t)|dt \\ &\leq 2\int_{\frac{1}{2}}^{a_m} dt = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

De forma bastante parecida, demonstra-se que se $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$, temos

$$\int_{a_m}^{a_n} |x_n(t) - x_m(t)|dt \leq 2\int_{a_m}^{a_n} dt = \frac{1}{n} - \frac{2}{m}.$$

Daí, se $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$, $n < m$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_{\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})} &= \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &\quad + \int_{a_m}^{a_n} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &\quad + \int_{a_n}^{1} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{a_m} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &\quad + \int_{a_m}^{a_n} |x_n(t) - x_m(t)|dt \\ &\leq \frac{2}{m} + \frac{2}{n} - \frac{2}{m} = \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. Dado arbitrariamente $x \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, temos que

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n| + |x(t)| \leq 1 + \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

e, portanto

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} 1 + \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|dt \\ &= \left(1 + \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|\right)\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt = 0. \tag{3.4}$$

Além disso, considerando a função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_x^1 |1 - x(t)|dt$, temos que $F$ é Lipschitziana, e assim, $F$ é contínua. Portanto, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - x(t)|dt. \tag{3.5}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})} &= \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{a_n} |x_n(t) - x(t)|dt \\ &\quad + \int_{a_n}^{1} |1 - x(t)|dt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Desta forma, se tivéssemos $x_n \to x$ em $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, seguiria de (3.4), (3.5) e (3.6) que

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)|dt + 0 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - x(t)|dt.$$

Consequentemente, $x(t) = 0$, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $x(t) = 1$, para todo $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, o que é um absurdo devido ao fato que $x \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

**Proposição 3.2.** *Se $F$ é um espaço de Banach, então $\mathscr{L}(E,F)$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $(T_n)$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{L}(E,F)$. Assim, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$, temos

$$\|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \varepsilon.$$

Disto segue que para todos $n, m > n_0$ e para todo $x \in E$, temos

$$\|T_n x - T_m x\|_F \leq \|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E < \varepsilon \|x\|_E . \tag{3.7}$$

Segue que $(T_n x)$ é uma sequência de Cauchy em $F$ para cada $x \in E$. Sendo $F$ um espaço de Banach, existe $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ para cada $x \in E$. Definamos

$$\begin{aligned} T : E &\to F \\ x &\mapsto Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x. \end{aligned}$$

Mostraremos que $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e que $T_n \to T$. Dados arbitrariamente $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + T_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y \\ &= \alpha Tx + Ty. \end{aligned}$$

Logo, $T$ é linear. Agora, fazendo $m \to \infty$ em (3.7), temos para todo $n > n_0$ que

$$\|(T_n - T)x\|_F = \|T_n x - Tx\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E ,$$

para todo $x \in E$, ou seja, $T_n - T \in \mathscr{L}(E,F)$ para todo $n > n_0$. Além disso, para todo $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|(T_n - T)x\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Desta forma, temos que $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \varepsilon$, para todo $n > n_0$, ou seja, $T_n \to T$, o que conclui a demonstração. ∎

**Corolário 3.3.** *O dual $E'$ de um espaço normado $E$ é espaço de Banach.*

*Demonstração.* Notemos que $E' := \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Sabendo que $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach e pela Proposição 3.2, concluímos que $E'$ é espaço de Banach. ■

**Definição 3.5 (Série convergente).** Dada uma sequência $(x_n)$ em $(E, \|.\|_E)$, consideremos a partir dela uma sequência $(s_n)$ em que

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Dizemos que $s_n$ é a soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Se $(s_n)$ converge, isto é, se existe $s \in E$ tal que

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge e escrevemos $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

**Definição 3.6 (Série absolutamente convergente).** Seja a sequência $(x_n)$ em $(E, \|.\|_E)$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita *absolutamente convergente* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E$ converge em $\mathbb{R}$.

**Proposição 3.4.** *Um espaço normado $E$ é Banach se, e somente se, cada série absolutamente convergente em $E$ é convergente.*

*Demonstração.* Suponhamos que $E$ seja um espaço de Banach e seja $(x_n)$ uma sequência em $E$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E < +\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$, sejam $s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $t_n := \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_E$. Notemos que se $m < n$, então

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|_E = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j \right\|_E &= \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j \right\|_E \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|_E . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E < +\infty$, então a sequência $(t_n)$ em $\mathbb{R}$ é convergente. Portanto, $(t_n)$ é uma sequência de Cauchy, ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_0 < m < n$ então

$$\sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|_E = |t_n - t_m| < \varepsilon.$$

Daí, da desigualdade (3.8) temos, se $n_0 < m < n$, então

$$\|s_n - s_m\|_E \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|_E < \varepsilon,$$

ou seja, $(s_n)$ é uma sequência de Cauchy em $E$. Sendo $E$ um espaço de Banach, concluímos que a sequência de Cauchy $(s_n)$ é convergente. Portanto, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é convergente.

Reciprocamente, suponhamos que cada série absolutamente convergente em $E$ é convergente em $E$ e seja $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $E$. Então, existe uma subsequência $(x_{n_j})$ de $(x_n)$ tal que

$$\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|_E < \frac{1}{2^j},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1 < +\infty.$$

Logo, por hipótese, $\sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$ é convergente em $E$. Como

$$x_{n_k+1} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, concluímos que a sequência $(x_{n_k})$ é convergente em $E$. Sendo assim, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $E$ que admite uma subsequência convergente. Logo, $(x_n)$ é convergente e portanto $E$ é um espaço de Banach. ■

**Proposição 3.5.** *Sejam $E$ um espaço normado, e $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ normas definidas em $E$. Se $\|.\|_1$ é equivalente a $\|.\|_2$, então $(E, \|.\|_1)$ é Banach se, e somente se, $(E, \|.\|_2)$ é Banach.*

*Demonstração.* Suponhamos que $(E, \|.\|_1)$ é um espaço de Banach e que as normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ definidas em $E$ são equivalentes. Assim, existem constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

para todo $x \in E$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $(E, \|.\|_2)$. Então, para $c_1\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$, então

$$\|x_n - x_m\|_2 < c_1\varepsilon.$$

Logo,

$$c_1 \|x_n - x_m\|_1 \leq \|x_n - x_m\|_2 < c_1\varepsilon,$$

ou seja, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $(E, \|.\|_1)$. Sendo assim, existe $x \in E$ tal que para $\frac{\varepsilon}{c_2} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$ então

$$\|x_n - x\|_1 < \frac{\varepsilon}{c_2}.$$

Logo,

$$\|x_n - x\|_2 \leq c_2 \|x_n - x\|_1 < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n \to x$ em $(E, \|.\|_2)$ demonstrando o que queríamos. ■

**Teorema 3.6.** *Sejam $E$ um espaço normado e $M$ um subespaço fechado de $E$. Se $E$ é um espaço de Banach, então $E/M$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Suponha que $E$ é um espaço de Banach. Seja $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} [x_j]$ uma série absolutamente convergente em $E/M$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $x_j \in [x_j]$ tal que

$$\|x_j\|_E < \|[x_j]\|_{E/M} + \frac{1}{2^j}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|_E &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \|[x_j]\|_{E/M} + \frac{1}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \|[x_j]\|_{E/M} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \|[x_j]\|_{E/M} + 1\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{j=1}^{+\infty} \|x_j\|_E < +\infty$ e, pela Proposição 3.4, $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ é convergente em $E$.

Sejam $s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$, $s := \sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ e $S_n := \sum_{j=1}^{n} [x_j] = \left[ \sum_{j=1}^{n} x_j \right] = [s_n]$. Temos que $s_n \in S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como a aplicação quociente $\pi : E \to E/M$ é contínua, segue que $S_n = [s_n] \to [s]$ em $E/M$. Logo, $\sum_{j=1}^{+\infty} [x_j]$ é convergente. Pela Proposição 3.4, concluímos que $E/M$ é um espaço de Banach.

■

## 3.1 ESPAÇOS NORMADOS DE DIMENSÃO FINITA

Nessa seção, veremos que os espaços normados de dimensão finita possuem propriedades bem interessantes. Por exemplo, que esses espaços normados de dimensão finita são exemplos particulares de espaços de Banach e que todo funcional linear definido nesses espaços é contínuo.

**Proposição 3.7.** *Dado $E$ um espaço normado, $E$ tem dimensão finita se, e somente se, cada funcional linear em $E$ é contínuo.*

Reservamos a demonstração da Proposição 3.7 no Apêndice B (Proposição B.2) já que para tal prova é necessária a utilização do Lema de Zorn que apresentaremos no próximo capítulo.

**Proposição 3.8.** *As normas $\|.\|_E$ e $\|.\|_b$ em um espaço vetorial $E$ de dimensão finita são equivalentes.*

*Demonstração.* Suponhamos que $E$ seja um espaço vetorial de dimensão finita, digamos $N$, e seja $(x_1, \ldots, x_N)$ uma base ordenada de $E$. Considere a transformação $I : (E, \|.\|_b) \to (E, \|.\|_E)$ em que $\|.\|_b$ é a norma apresentada no Exemplo 2.3. Seja $x \in E$ arbitrário com $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i$, então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.2) temos que

$$\|Ix\|_E \leq \sum_{i=1}^{N} (|\lambda_i| \, \|x_i\|_E) \leq \sum_{i=1}^{N} \left(|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{N} \left((\|x_i\|_E)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definindo $c := \sum_{i=1}^{N} \left((\|x_i\|_E)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\|Ix\|_E \leq c \, \|x\|_b \,.$$

Logo, a transformação é contínua. Agora, considere a composição $\|.\|_E \circ I : S_E[0,1] \to E$, sendo $S_E[0,1] = \{x \in E : \|x\|_b = 1\}$. Como $S_E[0,1]$ é compacta, pelo Teorema de Weierstrass, existem $c_2 \geq c_1 > 0$ tais que

$$c_1 \leq \|x\|_E \leq c_2$$

para todo $x \in S_E[0,1]$. Assim,

$$c_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_b} \right\|_E \leq c_2$$

para todo $x \in E$, $x \neq 0$. Logo,

$$c_1 \|x\|_b \leq \|x\|_E \leq c_2 \|x\|_b$$

para todo $x \in E$. Portanto, pela Corolário 2.5, a norma $\|x\|_E$ é equivalente a norma $\|x\|_b$. ■

**Corolário 3.9.** *Todas as normas definidas em um mesmo espaço vetorial $E$ de dimensão finita são equivalentes.*

*Demonstração.* Basta mostrarmos que duas normas quaisquer $\|.\|_E^{(1)}$ e $\|.\|_E^{(2)}$ definidas em um espaço vetorial $E$ de dimensão finita são equivalentes. Pela Proposição 3.8, temos que existem $\hat{c_2} \geq \hat{c_1} > 0$ e $\tilde{c_2} \geq \tilde{c_1} > 0$ tais que

$$\hat{c_1} \|x\|_b \leq \|x\|_E^{(1)} \leq \hat{c_2} \|x\|_b$$

e

$$\tilde{c_1} \|x\|_b \leq \|x\|_E^{(2)} \leq \tilde{c_2} \|x\|_b .$$

Assim, temos

$$\frac{\hat{c_1}}{\tilde{c_2}} \|x\|_E^{(2)} \leq \hat{c_1} \|x\|_b \leq \|x\|_E^{(1)} \leq \hat{c_2} \|x\|_b \leq \frac{\hat{c_2}}{\tilde{c_1}} \|x\|_E^{(2)} .$$

Definindo $c_1 := \frac{\hat{c_1}}{\tilde{c_2}}$ e $c_2 := \frac{\hat{c_2}}{\tilde{c_1}}$ e pelo Corolário 2.5, temos que $\|.\|_E^{(1)}$ e $\|.\|_E^{(2)}$ são normas equivalentes. ■

**Teorema 3.10.** *Todo espaço normado de dimensão finita $N$ sobre $\mathbb{R}$ é topologicamente isomorfo a $(\mathbb{R}^N, \|.\|_2)$.*

*Demonstração.* Sejam $(e_1, e_2, \ldots, e_N)$ base ordenada de $E$ e

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\to E \\ x &\mapsto Tx = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i, \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Temos que $T$ é linear e bijetiva. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema A.2), temos

$$\|Tx\|_E \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, \|e_i\|_E \leq \left( \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, fazendo $c_2 = \left( \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, temos que $\|Tx\|_E \leq c_2 \|x\|_2$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, T é contínua. Por outro lado, consideremos

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \|x\|_2 = 1 \right\}.$$

Temos que $S$ é fechado e limitado e, portanto, é compacto. Notemos que $\|Tx\|_E > 0$, para todo $x \in S$. Sendo $T$ contínua e $S$ compacto, temos que existe $x_0 \in S$ tal que

$$0 < \|Tx_0\|_E \leq \|Tx\|_E \,,$$

para todo $x \in S$, e portanto

$$\|Tx_0\|_E \|x\|_2 \leq \|Tx\|_E \,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, fazendo $c_1 = \|Tx_0\|_E$, temos que $c_1 \|x\|_2 \leq \|Tx\|_E$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como

$$c_1 \|x\|_2 < \|Tx\|_E \leq c_2 \|x\|_2 \,,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e $T$ é bijetiva, pelo Corolário 2.6, temos que $T : \mathbb{R}^N \to E$ é um isomorfismo topológico. ■

**Corolário 3.11.** *Todos os espaços normados sobre $\mathbb{R}$ com dimensão finita $N$ são topologicamente isomorfos entre si.*

*Demonstração.* Sejam $E$ e $F$ espaços normados de dimensão $N$ sobre $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema 3.10, existem $T : E \to \mathbb{R}^N$ e $U : F \to \mathbb{R}^N$ isomorfismos topológicos. Temos que $U^{-1} : \mathbb{R}^N \to F$ também é um isomorfismos topológico. Assim, $U^{-1} \circ T : E \to F$ é um isomorfismo topológico. ■

**Corolário 3.12.** *Cada espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $E$ um espaço normado de dimensão $N$. Logo, pelo Teorema 3.10 existe $T : E \to \mathbb{R}^N$ um isomorfismo topológico. Considere $(x_n)$ uma sequência de Cauchy em $E$. Temos que $(Tx_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^N$. Logo, existe $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $Tx_n \to y$ em $\mathbb{R}^N$. Ademais, existe $x_0 \in E$ tal que $y = Tx_0$ e $Tx_n \to Tx_0$ em $\mathbb{R}^N$. Logo, usando a continuidade de $T^{-1} : \mathbb{R}^N \to E$, temos $x_n \to x_0 \in E$ e, portanto, $E$ é um espaço de Banach. ■

**Corolário 3.13.** *Cada subespaço de dimensão finita de um espaço normado $E$ é fechado em $E$.*

*Demonstração.* Sejam $E$ um espaço normado e $M$ um subespaço de dimensão finita de $E$. Seja arbitrariamente $x \in \overline{M}$. Temos que existe $(x_n)$ sequência em $M$ tal que $x_n \to x$ em $E$. Então, $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em $M$. Pelo Corolário 3.12, temos que $M$ é um espaço de Banach. Portanto, existe $y \in M$ tal que $x_n \to y$ em $M$. Pela unicidade do limite, $y = x$ e $x \in M$. Portanto, $M$ é fechado. ∎

Da Análise Real, temos que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Esse famoso resultado é conhecido como Teorema de Bolzado-Weierstrass. Será que esse resultado é válido para espaços normados de dimensão infinita? Para conseguirmos responder a essa pergunta, vejamos primeiramente um lema.

**Lema 3.1 (Lema de Riesz).** *Sejam $E$ um espaço normado e $M$ um subespaço fechado próprio de $E$ e $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in S_E[0,1]$ tal que $\|y - x\|_E \geq \theta$ para todo $x \in M$.*

*Demonstração.* Sejam $y_0 \in E \setminus M$ e

$$d := d(y_0, M) = \inf\{\|y_0 - x\|_E : x \in M\}.$$

Como $M$ é fechado, $y_0 \notin \overline{M}$ e, assim, $d > 0$. Agora, como $0 < d < \frac{d}{\theta}$ e pela definição de $d$, existe $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\|_E < \frac{d}{\theta}$$

e seja, ainda,

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|_E}$$

Logo, $y \in S_E[0,1]$ e para cada $x \in M$ temos:

$$\begin{aligned} \|y - x\|_E &= \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|_E} - x \right\|_E \\ &= \left\| \frac{y_0 - x_0 - x\,\|y_0 - x_0\|_E}{\|y_0 - x_0\|_E} \right\|_E . \end{aligned}$$

Note que $x_1 := x_0 + x\,\|y_0 - x_0\|_E \in M$. Então

$$\|y - x\|_E = \frac{\|y_0 - x_1\|_E}{\|y_0 - x_0\|_E} \geq \frac{d\theta}{d} = \theta.$$

■

Para enunciarmos o próximo resultado, precisamos definir o que significa um conjunto ser sequencialmente compacto.

**Definição 3.7 (Sequencialmente compacto).** Seja $X$ um espaço topológico. Se toda sequência em $X$ possui uma subsequência convergente dizemos que $X$ é sequencialmente compacto.

**Teorema 3.14.** *Seja $E$ um espaço normado. São equivalentes as seguintes afirmações:*

*(a) $E$ tem dimensão finita*

*(b) $S_E[0,1] \subset E$ é sequencialmente compacta.*

*Demonstração.* Suponhamos que $E$ tenha dimensão finita, digamos $N$, e seja $T : E \to \mathbb{R}^N$ um isomorfismo topológico. Se $(x_n)$ é uma sequência arbitrária em $S_E[0,1] \subset E$, temos que $(Tx_n)$ é sequência limitada em $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(Tx_n)$ admite uma subsequência $(Tx_{n_k})$ tal que $Tx_{n_k} \to x$, com $x \in \mathbb{R}^N$. Então, pela continuidade de $T^{-1} : \mathbb{R}^N \to E$, $x_{n_k} \to T^{-1}x$, com $T^{-1}x \in E$. Como $S_E[0,1]$ é fechada, temos que $x_{n_k} \to T^{-1}x$ em $S_E[0,1]$. Portanto, $S_E[0,1] \subset E$ é sequencialmente compacta.

Agora, suponhamos por contrapositiva que o espaço normado $E$ tenha dimensão infinita. Sejam $x_1 \in S_E[0,1]$ e $M_1 = [x_1]$. Notemos que $M_1$ é subespaço próprio de $E$ e é fechado pelo Corolário 3.13. Sendo assim, pelo Lema de Riesz (3.1), existe $x_2 \in S_E[0,1]$ tal que

$$\|x_2 - x\|_E \geq \frac{1}{2},$$

para todo $x \in M_1$. Em particular,

$$\|x_2 - x_1\|_E \geq \frac{1}{2}.$$

Seja $M_2 = [x_1, x_2]$, sendo este um subespaço próprio de $E$ e é fechado pelo Corolário 3.13. Então, pelo Lema de Riesz (3.1) existe $x_3 \in S_E[0,1]$ tal que

$$\|x_3 - x\|_E \geq \frac{1}{2},$$

para todo $x \in M_2$. Em particular,

$$\|x_3 - x_j\|_E \geq \frac{1}{2},$$

para $j = 1, 2$. Indutivamente, construímos $(x_n)$ em $S_E[0,1] \subset E$ tal que

$$\|x_m - x_n\|_E \geq \frac{1}{2},$$

para $m \neq n$. Logo, a sequência $(x_n)$ não admite nenhuma subsequência convergente. Portanto, $E$ tem dimensão finita. ■

Assim, concluímos que o Teorema de Bolzano-Weierstrass em espaços normados de dimensão infinita não vale, ou seja, nem toda sequência limitada possui uma subsequência convergente em espaços normados de dimensão infinita.

# 4 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste capítulo, abordaremos o Teorema de Hahn-Banach que explora a existência de uma extensão para funcionais lineares e no qual tem como ponto principal que o funcional linear a ser estendido e a extensão são majorados pelo mesmo funcional sublinear. Existem diferentes versões do Teorema de Hahn-Banach no qual se diferenciam no espaço em que é definido funcional linear e, também, quanto a generalidade do teorema. Algumas dessas versões serão estudadas ao longo desse capítulo, mais especificamente nas seções 4.2 e 4.3. Indo para uma dimensão mais histórica, de acordo com [1], temos que as versões menos gerais do Teorema de Hahn-Banach foram demonstradas por Helley e Hahn nos anos de 1912 e 1922, respectivamente. Em 1927, Hahn publicou uma versão do teorema para espaços de Banach. E no ano de 1929, Banach publicou uma versão do teorema para espaços normados, evidenciando a justificativa para a intitulação do teorema.

As primeiras demonstrações para as versões do Teorema de Hahn-Banach publicadas eram demonstradas utilizando a indução transfinita. Isso mudou após uma publicação de Zorn, em 1933, no qual apresentava o Lema de Zorn. Desde então, utilizamos esse lema para demonstrar o Teorema de Hahn-Banach e, com esse objetivo, estudaremos Lema de Zorn na primeira seção deste capítulo.

## 4.1 LEMA DE ZORN

O matemático e professor Max Zorn, em meados de 1933, apresentou um princípio maximal como conhecemos hoje e que, posteriormente, foi nomeado de Lema de Zorn. Apesar da nomenclatura de lema, temos que o Lema de Zorn é um axioma da teoria de conjuntos que é equivalente ao Axioma da Escolha e o Princípio da Boa Ordenação.

**Definição 4.1 (Relação de ordem parcial).** Dado um conjunto

$X$, uma *relação de ordem parcial* $\preccurlyeq$ é uma relação binária tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

**(i)** $a \preccurlyeq a$ para todo $x \in X$; (Reflexiva)

**(ii)** Se $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq a$, então $a = b$; (Antissimétrica)

**(iii)** Se $a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq c$, então $a \preccurlyeq c$, (Transitiva)

para $a, b$ e $c \in X$.

**Definição 4.2** (**Conjunto parcialmente ordenado**)**.** Um *conjunto parcialmente ordenado* $X$ um conjunto com uma relação de ordem parcial definida nele.

**Definição 4.3** (**Cadeia**)**.** Uma *cadeia* (ou um conjunto totalmente ordenado) é um conjunto parcialmente ordenado em que para todos $a, b \in X$, então $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$.

**Definição 4.4** (**Cota superior**)**.** Sejam $X$ um conjunto parcialmente ordenado e um subconjunto $W$ de $X$. Dizemos que $s$ é *cota superior* para $W$ se $x \preccurlyeq s$, para todo $x \in W$.

Vale lembrar que nem todo conjunto possui uma cota superior. A definição para cota inferior é similar.

**Definição 4.5** (**Elemento maximal**)**.** Dado um conjunto $X$ parcialmente ordenado, um *elemento maximal* de $X$ é um elemento $m \in X$ tal que se $m \preccurlyeq x$, então $m = x$.

A definição para elemento minimal é similar. Observemos que nem todo elemento maximal é uma cota superior do conjunto. Para elucidar essa afirmação consideremos a inclusão de conjuntos como relação de ordem, o conjunto

$$X = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$

e o subconjunto

$$W = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$$

Assim, no conjunto $W$ temos três elementos maximais, mas nenhum deles é uma cota superior para $W$. Em contrapartida, no conjunto $X$ temos que o elemento $\{a, b, c\}$ é o único elemento maximal para $X$ e, ainda, esse elemento é uma conta superior para $X$.

**Lema 4.1** (**Lema de Zorn**). *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia $C \subset M$ tem uma cota superior, então $M$ tem um elemento maximal.*

## 4.2 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Neste teorema de extensão, consideramos que o objeto a ser estendido é um funcional linear $f$ o qual é definido em um subespaço $Z$ de $X$ e, ainda, deve satisfazer uma limitação estabelecida em termos de um funcional sublinear. Para isso vejamos, primeiramente, a seguinte definição:

**Definição 4.6** (**Funcional sublinear**). Um funcional sublinear no espaço vetorial $X$ é uma aplicação $p : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

e

$$p(\alpha x) = \alpha p(x),$$

para todo $\alpha \geq 0$ real e para todos $x, y \in X$.

**Teorema 4.1** (**Teorema de Hahn-Banach**). *Sejam $X$ um espaço vetorial, $Z$ um subespaço de $X$ e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Se $f : Z \to \mathbb{R}$ é um funcional linear satisfazendo*

$$f(x) \leq p(x),$$

*para todo $x \in Z$, então existe um funcional linear $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\tilde{f}(x) = f(x),$$

*para todo $x \in Z$, e*

$$\tilde{f}(x) \leq p(x),$$

*para todo $x \in X$.*

Dizemos que $\tilde{f}$ é a extensão de $f$.

*Demonstração.* Seja

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{array}{c} g_t : Z_t \to \mathbb{R} \text{ linear com } Z \subset Z_t \subset X; \\ g_t(x) = f(x) \text{ para todo } x \in Z \quad \text{e} \\ g_t(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in Z_t \end{array} \right\}.$$

Como $f \in \mathscr{F}$, temos que $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Além disso, podemos estabelecer em $\mathscr{F}$ a seguinte relação de ordem parcial:

$$g_t \prec g_s \Leftrightarrow Z_t \subset Z_s \text{ e } g_t(x) = g_s(x)$$

para todo $x \in Z_t$.

Para toda cadeia $\{g_t\}_{t \in J}$ em $\mathscr{F}$, consideremos o funcional

$$\begin{aligned} g : \bigcup_{t \in J} Z_t &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto g(z) = g_t(z). \end{aligned}$$

Notemos que $g$ está bem definido e $g_t \prec g$ para todo $t \in J$, ou seja, $g$ é uma cota superior para a cadeia $\{g_t\}_{t \in J}$. Logo, pelo Lema de Zorn (Lema 4.1), $\mathscr{F}$ possui um elemento maximal $\tilde{f} : X_0 \to \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $X_0 = X$. Suponhamos por contradição que $X_0 \subsetneq X$. Então, existe $x_0 \in X \setminus X_0$. Sejam $W := X_0 \oplus [x_0]$ e

$$\begin{aligned} \hat{g} : W &\to \mathbb{R} \\ x + \lambda x_0 &\mapsto \hat{g}(x + \lambda x_0) = \tilde{f}(x) + \theta \lambda, \end{aligned}$$

para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Notemos que $\hat{g}$ é um funcional linear. De fato, dados arbitrariamente $y_1 = x_1 + \lambda_1 x_0, y_2 = x_2 + \lambda_2 x_0 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \hat{g}(y_1 + \alpha y_2) &= \tilde{f}(x_1 + \alpha x_2) + \theta(\lambda_1 + \alpha \lambda_2) \\ &= \tilde{f}(x_1) + \alpha \tilde{f}(x_2) + \theta \lambda_1 + \theta \alpha \lambda_2 \\ &= \tilde{f}(x_1) + \theta \lambda_1 + \alpha(\tilde{f}(x_2) + \theta \lambda_2) \\ &= \hat{g}(y_1) + \alpha \hat{g}(y_2). \end{aligned}$$

Temos que $Z \subset W \subset X$ e $\hat{g}(x) = \tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in Z$. Para chegarmos em uma contradição precisamos mostrar ainda que

$$\hat{g}(y) \leq p(y),$$

para todo $y \in W$, ou seja,

$$\tilde{f}(x) + \theta\lambda \leq p(x + \lambda x_0) \tag{4.1}$$

para todo $x \in X_0$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para isto devemos mostrar, primeiramente, que existe $\theta \in \mathbb{R}$ que satisfaça a desigualdade (4.1) implicando também na boa definição de $\hat{g}$.

Uma condição necessária para que (4.1) ocorra é termos

$$\tilde{f}(x) + \theta \leq p(x + x_0)$$

e

$$\tilde{f}(x) - \theta \leq p(x - x_0),$$

para todo $x \in X_0$, ou ainda, $\theta \in \mathbb{R}$ deve satisfazer

$$\tilde{f}(x) - p(x - x_0) \leq \theta \leq p(x + x_0) - \tilde{f}(x) \tag{4.2}$$

para todo $x \in X_0$. Agora, notemos que como $\tilde{f} \in \mathscr{F}$, para quaisquer $x, y \in X_0$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) = \tilde{f}(x + y) \leq p(x + y) &\leq p(x - x_0 + y + x_0) \\ &\leq p(x - x_0) + p(y + x_0), \end{aligned}$$

ou seja, para $x, y \in X_0$,

$$\tilde{f}(x) - p(x - x_0) \leq p(y + x_0) - \tilde{f}(y).$$

Logo,

$$\sup_{x \in X_0} \left(\tilde{f}(x) - p(x - x_0)\right) \leq \inf_{y \in X_0} \left(p(y - x_0) - \tilde{f}(y)\right).$$

Portanto, se considerarmos

$$\sup_{x \in X_0} \left(\tilde{f}(x) - p(x - x_0)\right) \leq \theta \leq \inf_{y \in X_0} \left(p(y - x_0) - \tilde{f}(y)\right),$$

temos que a desigualdade (4.2) é satisfeita. Vamos agora mostrar que a desigualdade (4.2) também implica na desigualdade (4.1). De fato, seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x) - p(x - x_0) \leq \theta \leq p(x + x_0) - \tilde{f}(x),$$

para todo $x \in X_0$. Para $\lambda = 0$, temos

$$\tilde{f}(x) + \theta\lambda = \tilde{f}(x) \leq p(x) = p(x + \lambda x_0),$$

para todo $x \in X_0$, visto que $\tilde{f} \in \mathscr{F}$. Agora, se $\lambda > 0$, então

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) + \lambda\theta = \lambda\left(\tilde{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \theta\right) &\leq \lambda p\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right) + x_0\right) \\ &= p(x + \lambda x_0), \end{aligned}$$

para todo $x \in X_0$. Por fim, se $\lambda < 0$, então

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) + \lambda\theta = (-\lambda)\left(\tilde{f}\left(\frac{x}{-\lambda}\right) - \theta\right) &\leq (-\lambda)p\left(\left(\frac{x}{-\lambda}\right) - x_0\right) \\ &= p(x + \lambda x_0), \end{aligned}$$

para todo $x \in X_0$. Assim,

$$\hat{g}(y) \leq p(y)$$

para todo $y \in W$. Logo, por construção, $\hat{g} \in \mathscr{F}$, $\tilde{f} \prec \hat{g}$, mas $\tilde{f} \neq \hat{g}$ uma vez que o domínio de $\tilde{f}$ está estritamente contido no domínio de $\hat{g}$. Isto é uma contradição, pois $\tilde{f}$ é um elemento maximal de $\mathscr{F}$. Portanto, $X_0 = X$ concluindo a demonstração. ■

Do teorema anterior, podemos obter uma generalização que apresentaremos a seguir.

**Teorema 4.2** (**Teorema de Hahn-Banach Generalizado**). *Seja $X$ um espaço vetorial real e $Z$ um subespaço de $X$. Seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação que satisfaz, para todos $x, y \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \tag{4.3}$$

*e*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{4.4}$$

*Seja* $f : Z \to \mathbb{R}$ *um funcional linear tal que*

$$|f(x)| \leq p(x),$$

*para todo* $x \in Z$*. Então, existe um funcional linear* $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\tilde{f}(x) = f(x),$$

*para todo* $x \in Z$*, e*

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$$

*para todo* $x \in E$*.*

*Demonstração.* Notemos que $p : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (4.3) e (4.4) é um funcional sublinear. Além disso, veja que

$$f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$$

para todo $x \in Z$. Desta forma, pelo Teorema de Hahn-Banach (4.1), temos que existe $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ o qual é uma extensão de $f$ e

$$\tilde{f}(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$. Agora, se $x \in X$ é tal que $\tilde{f}(x) \geq 0$, então $\left|\tilde{f}(x)\right| = \tilde{f}(x)$. Daí,

$$\left|\tilde{f}(x)\right| = \tilde{f}(x) \leq p(x).$$

Por outro lado, se $x \in X$ é tal que $\tilde{f}(x) < 0$, então $\left|\tilde{f}(x)\right| = -\tilde{f}(x)$. Logo,

$$\left|\tilde{f}(x)\right| = -\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Portanto,

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x)$$

para todo $x \in X$, o que conclui a demonstração. ■

A partir desta última versão do Teorema de Hahn-Banach podemos mostrar algumas aplicações.

## 4.3 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

De acordo com [4], o Teorema de Hahn-Banach é considerado uma das maiores conexões entre a teoria de transformações lineares e limitadas e o estudo dos duais. Na versão do Teorema de Hahn-Banach para espaços normados, temos que os funcionais lineares e limitados definidos em um subespaço $M$ de um espaço normado $E$ podem ser estendidos para o espaço $E$ mantendo a linearidade, a continuidade e o valor na norma.

**Teorema 4.3** (**Teorema de Hahn-Banach para espaços normados**)**.** *Sejam $E$ um espaço normado e $M$ um subespaço de $E$. Se $f \in M'$, então existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\tilde{f}|_M = f$ e*

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = \|f\|_{M'}.$$

*Demonstração.* Se $M = \{0\}$, então a solução é trivial. Sejam $M \neq \{0\}$ e $f \in M'$. Uma vez que $f$ é limitada, vale

$$|f(x)| \leq \|f\|_{M'} \|x\|_E,$$

para todo $x \in M$. Definiremos $p(x) := \|f\|_{M'} \|x\|_E$. Observemos que $p(x)$ está definida em $E$ e que satisfaz as condições (4.3) e (4.4). De fato, dados $x_1, x_2 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} p(x_1 + x_2) &= \|f\|_{M'} \|x_1 + x_2\|_E \\ &\leq \|f\|_{M'} (\|x_1\|_E + \|x_2\|_E) \\ &= \|f\|_{M'} \|x_1\|_E + \|f\|_{M'} \|x_2\|_E \\ &= p(x_1) + p(x_2) \end{aligned}$$

e

$$p(\alpha x_1) = \|f\|_{M'} \|\alpha x_1\|_E = |\alpha| \|f\|_{M'} \|x_1\|_E = |\alpha| p(x_1).$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach Generalizado (Teorema 4.2), temos que existe um funcional linear $\tilde{f} : E \to R$ tal que $\tilde{f}|_M = f$ e

$$\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) = \|f\|_{M'} \|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Daí, $\left\|\tilde{f}\right\|_E \leq \|f\|_{M'}$. Por outro lado, como $\tilde{f}|_M = f$, temos

$$\{|f(x)| : x \in M, \|x\|_E = 1\} \subset \left\{|\tilde{f}(x)| : x \in E, \|x\|_E = 1\right\}.$$

Logo, $\|f\|_{M'} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'}$, e portanto, $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = \|f\|_{M'}$. ∎

**Proposição 4.4.** *Dado $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\|\tilde{f}\|_{E'} = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|_E$.*

*Demonstração.* Seja $M = [x_0]$ o subespaço de $E$ gerado por $x_0$ e $f \in M'$ definido por $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|_E$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se considerarmos $p : E \to \mathbb{R}$ definido por $p(x) = \|x\|_E$, então

$$f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_E \leq |\lambda| \|x_0\|_E = \|\lambda x_0\|_E = p(\lambda x_0),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Agora, sejam arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in [x_0]$ tais que $x = \lambda_1 x_0$ e $y = \lambda_2 x_0$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, logo,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y) = f(\alpha\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0) &= f([\alpha\lambda_1 + \lambda_2]x_0) \\ &= (\alpha\lambda_1 + \lambda_2) \|x_0\|_E \\ &= \alpha(\lambda_1 \|x_0\|_E) + \lambda_2 \|x_0\|_E \\ &= \alpha f(\lambda_1 x_0) + f(\lambda_2 x_0) \\ &= \alpha f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Portanto, $f$ é linear. Dado arbitrariamente $x \in M, x \neq 0$, temos que $x = \lambda x_0$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e daí

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \frac{|\lambda| \|x_0\|_E}{\|\lambda x_0\|_E} = 1.$$

Então,

$$\|f\|_{M'} = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} : x \in M, x \neq 0\right\} = 1.$$

Assim, pelo Teorema de Hanh-Banach (4.2), existe $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ linear tal que $\tilde{f}|_M = f$ e $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Logo, temos $\tilde{f} \in E'$ já que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Mostremos, agora, que $\left\|\tilde{f}(x)\right\|_{E'} = 1$. Temos que se $x \in M, x \neq 0$, então

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_M} = \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|_E} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'}$$

implicando em $\|f\|_{M'} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'}$. Por outro lado, se $x \in E, x \neq 0$, como $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|_E$, temos

$$\frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|_E} \leq 1$$

implicando em $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} \leq 1 = \|f\|_{M'}$. Com isso concluímos que $\|f\|_{M'} = \left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$. Por fim, como $x_0 = 1.x_0 \in [x_0]$, então

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1.\|x_0\|_E = \|x_0\|_E .$$

■

**Corolário 4.5.** *Se $E \neq \{0\}$, então $E' \neq \{0\}$.*

*Demonstração.* Supondo que $E \neq \{0\}$, então existe $x_0 \in E$ em que $x_0 \neq 0$. Logo, pela Proposição 4.4, existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|_E$. Concluímos que $\tilde{f} \neq 0$. Portanto, $E' \neq \{0\}$. ■

**Corolário 4.6.** *Para cada $x \in E$, temos que*

$$\|x\|_E = \sup\left\{|\tilde{f}(x)| : \tilde{f} \in E', \left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1\right\}.$$

*Demonstração.* O caso em que $E = \{0\}$ é trivial. Supondo que $E \neq \{0\}$, temos pela Proposição 4.4 que, para cada $x \in E, x \neq 0$, existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$ e $\tilde{f}(x) = \|x\|_E$. Daí,

$$\|x\|_E = |\tilde{f}(x)| \leq \sup\left\{|\tilde{f}(x)| : \tilde{f} \in E', \left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1\right\}.$$

Por outro lado, dado arbitrariamente $\tilde{f} \in E'$ com $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$, vale

$$|\tilde{f}(x)| \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'} \|x\|_E = \|x\|_E$$

para todo $x \in E$. Então,

$$\sup \left\{ |\tilde{f}(x)| : \tilde{f} \in E', \left\| \tilde{f} \right\|_{E'} = 1 \right\} \leq \|x\|_E$$

Portanto,

$$\|x\|_E = \sup \left\{ |\tilde{f}(x)| : \tilde{f} \in E', \left\| \tilde{f} \right\|_{E'} = 1 \right\}.$$

■

**Proposição 4.7.** *Sejam $M$ um fechado de $E$, $y_0 \in E \setminus M$ e $d := d(y_0, M)$. Então, existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\left\| \tilde{f} \right\|_{E'} = 1$, $\tilde{f}(y_0) = d$ e $\tilde{f}(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

*Demonstração.* Seja $N = M + [y_0]$. Assim, cada $z \in N$ pode ser escrito de maneira única como $z = x + \lambda y_0$, com $x \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos $f : N \to \mathbb{R}$ definida por $f(z) = \lambda d$. Sejam arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z_1, z_2 \in N$ tais que $z_1 = x_1 + \lambda_1 y_0$ e $z_2 = x_2 + \lambda_2 y_0$. Como $\alpha z_1 + z_2 = (\alpha x_1 + x_2) + [\alpha\lambda_1 + \lambda_2]y_0 \in N$, temos

$$\begin{aligned}
f(\alpha z_1 + z_2) &= f(\alpha x_1 + \alpha\lambda_1 y_0 + x_2 + \lambda_2 y_0) \\
&= f((\alpha x_1 + x_2) + [\alpha\lambda_1 + \lambda_2]y_0) \\
&= (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)d \\
&= \alpha(\lambda_1 d) + \lambda_2 d \\
&= \alpha f(x_1 + \lambda_1 y_0) + f(x_2 + \lambda_2 y_0) \\
&= \alpha f(z_1) + f(z_2)
\end{aligned}$$

Portanto, $f$ é linear. Agora, seja arbitrariamente $z \in N$, com $z = x + \lambda y_0$. Como $d = \inf \{\|y_0 - x\|_E : x \in N\}$, para $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|z\|_E = \|x + \lambda y_0\|_E = |\lambda| \left\| y_0 - \left(-\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_E &\geq |\lambda| d \\
&= |f(x + \lambda y_0)| \\
&= |f(z)|
\end{aligned}$$

A desigualdade é trivial para $\lambda = 0$. Portanto, $f$ é limitada. Além disso, $f(y_0) = d$ e $f(x) = 0$, para todo $x \in M$. Provaremos que $\|f\|_{E'} = 1$. Dado arbitrariamente $z \in N$, $\|z\|_E = 1$, do fato de que

$f$ é limitada segue que

$$|f(z)| \leq \|z\|_E = 1$$

e daí,

$$1 \geq \sup\{|f(z)| : z \in N, \|z\|_E = 1\} = \|f\|_{E'}.$$

Por outro lado, se $c < 1$, existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$c < \frac{d}{d+\varepsilon} < 1.$$

Além disso, pela definição de ínfimo, existe $x_0 \in M$ tal que $\|y_0 - x_0\|_E < d + \varepsilon$. Seja $z_0 = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$. Então como $z_0 \in N, \|z_0\| = 1$ e $f(z_0) = \frac{d}{\|y_0 - x_0\|_E}$, temos

$$c < \frac{d}{d+\varepsilon} < f(z_0) \leq |f(z_0)| \leq 1.$$

Concluímos, assim, que 1 é a menor das cotas superiores do conjunto $\{|f(z)| : z \in N, \|z\|_E = 1\}$, e consequentemente $\|f\|_{E'} = 1$. Definindo $p : E \to \mathbb{R}$ por $p(x) = \|x\|_E$, temos que

$$|f(x)| \leq \|x\|_E = p(x),$$

para todo $x \in M$. Então, pelo Teorema de Hahn-Banach (4.2), existe $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ linear tal que $\tilde{f}|_N = f$ e $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Daí, temos que $\tilde{f} \in E'$ já que

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|x\|_E,$$

para todo $x \in E$. Além disso, temos também que $\tilde{f}(y_0) = f(y_0) = d$, $\tilde{f}(x) = f(x) = 0$, para todo $x \in M$. Vamos mostrar que $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$. De fato, se $z \in N, z \neq 0$, e

$$\frac{|f(z)|}{\|z\|_E} = \frac{|\tilde{f}(z)|}{\|z\|_E} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'}$$

e daí, $\|f\|_{E'} \leq \left\|\tilde{f}\right\|_{E'}$. Por outro lado, dado arbitrariamente $x \in E, x \neq 0$, temos $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|_E$, e assim

$$\frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|_E} \leq 1,$$

implicando que $\left\|\tilde{f}\right\|_{E'} \leq 1 = \|f\|_{E'}$. Concluímos assim, que $\|f\|_{E'} = \left\|\tilde{f}\right\|_{E'} = 1$.

∎

**Corolário 4.8.** *Sejam $M$ um subespaço de $E$ e $y_0 \in E$. Temos que $y_0 \in \overline{M}$ se, e somente se, $f(y_0) = 0$ para cada $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

*Demonstração.* Se $y_0 \in \overline{M}$, então existe uma sequência $(x_n)$ em $M$ tal que $\lim x_n = y_0$. Seja $f \in E'$ arbitrário tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$. Pela continuidade de $f$, $f(y_0) = \lim f(x_n) = 0$. Portanto, $f(y_0) = 0$. Agora, suponhamos que $y_0 \notin \overline{M}$. Como $\overline{M}$ é fechado, pela Proposição 4.7, existe $\tilde{f} \in E'$ tal que $\tilde{f}(x) = 0$ para todo $x \in \overline{M}$ com $\tilde{f}(y_0) \neq 0$. Isto contradiz a hipótese de que para cada $f \in E'$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in M$, temos que $f(y_0) = 0$. ∎

## 4.4 ESPAÇOS DE BANACH REFLEXIVOS

**Definição 4.7.** O dual de $E'$, denotado por $E''$, é chamado de bidual de E.

**Proposição 4.9.** *Seja*

$$
\begin{aligned}
J^{(E)} : E &\to E'' \\
x &\mapsto J_x^{(E)},
\end{aligned}
$$

*em que $J_x^{(E)} : E' \to \mathbb{R}$ é definida por $J_x^{(E)}(f) = f(x)$ para todo $x \in E$. Então, $J^{(E)}$ é um mergulho isométrico.*

*Demonstração.* Dado $x \in E$ arbitrário, seja $J_x^{(E)} : E' \to \mathbb{R}$ definida por $J_x^{(E)}(f) = f(x)$ para todo $f \in E'$. Para concluirmos que o funcional $J^{(E)}$ está bem definido, devemos mostrar $J_x^{(E)}$ é linear e limitado. De fato, sejam arbitrariamente $f, g \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$$
\begin{aligned}
J_x^{(E)}(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(x) &= \alpha f(x) + g(x) \\
&= \alpha J_x^{(E)}(f) + J_x^{(E)}(g)
\end{aligned}
$$

Portanto, $J_x^{(E)}$ é linear. Além disso, temos que

$$J_x^{(E)}(f) = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \,, \tag{4.5}$$

para todo $f \in E'$. Vejamos que $J^{(E)}$ é linear. De fato, dado arbitrariamente $z \in E$ tal que $z = \alpha x + y$, então

$$\begin{aligned} J_z^{(E)}(f) = J_{\alpha x+y}^{(E)}(f) = f(\alpha x + y) &= \alpha f x + f y \\ &= \alpha J_x^{(E)}(f) + J_y^{(E)}(f). \end{aligned}$$

Portanto, $J^{(E)}$ é linear. Agora, da equação (4.5), temos que

$$\tfrac{|J_x^{(E)}(f)|}{\|f\|_{E'}} \leq \|x\|_E$$

para todo $f \in E', f \neq 0$, implicando em $\left\| J_x^{(E)} \right\|_{E''} \leq \|x\|_E$, para todo $x \in E$. Portanto, $J^{(E)}$ é limitada. Para mostrarmos que

$$\left\| J_x^{(E)} \right\|_{E''} = \|x\|_E \,. \tag{4.6}$$

De fato, pelo Corolário 4.6, temos

$$\begin{aligned} \left\| J_x^{(E)} \right\|_{E''} &= \sup \left\{ |J_x^{(E)}(f)| : f \in E', ||f||_{E'} = 1 \right\} \\ &= \sup \{ |f(x)| : f \in E', ||f||_{E'} = 1 \} \\ &= \|x\|_E \,. \end{aligned}$$

Além disso, $J^{(E)}$ é injetora. De fato, sejam $x_1, x_2 \in E$ e suponhamos que $J_{x_1}^{(E)} = J_{x_2}^{(E)}$. Da linearidade de $J^{(E)}$, temos que $J_{x_1-x_2}^{(E)} = 0$. Agora, decorre de (4.6) que $\|x_1 - x_2\| = 0$ e, portanto, $x_1 = x_2$

Portanto, $J^{(E)} : E \to J(E)$ é um mergulho isométrico. ■

**Definição 4.8.** Seja

$$\begin{aligned} J^{(E)} : E &\to E'' \\ x &\mapsto J_x^{(E)}, \end{aligned}$$

em que $J_x^{(E)} : E' \to \mathbb{R}$ é definida por $J_x^{(E)}(f) = f(x)$ para todo $x \in E$. Então, chamaremos $J^{(E)}$ de mergulho canônico.

Considerando o mergulho canônico $J^{(E)}$ é verdadeiro o fato de que $J^{(E)}(E) \subset E''$. Ao adicionarmos hipótese de sobrejetividade, o mergulho canônico passa a ser um isomorfismo isométrico e, assim, temos uma nova classe de espaços.

**Definição 4.9.** O espaço normado E é dito reflexivo se $J^{(E)}(E) = E''$.

A partir de um caso particular estudado por Helly, em 1921, Hahn publicou, em 1927, os primeiros estudos voltados para a classe de espaços no qual o mergulho canônico é sobrejetor. Ele nomeou essa classe de espaços regulares, entretanto o termo reflexivo utilizado atualmente, foi proposto por Lorch em 1939. Essa classe de espaços se difundiu fortemente por ser importantíssima para o estudo dos biduais.

É válido ressaltarmos que dado um espaço reflexivo $E$, então $J^{(E)} : E \to E''$ é um isomorfismo isométrico. Contudo, não é verdade que se há um isomorfismo isométrico (sem ser por meio do mergulho canônico) entre $E$ e $E''$, então $E$ é reflexivo. Ou seja, $E$ ser isomorfo isometricamente a $E''$ não implica que $J^{(E)} : E \to E''$ é sobrejetiva.

Vejamos alguns resultados relativo aos biduais.

**Proposição 4.10.** *Cada espaço normado reflexivo é Banach.*

*Demonstração.* Suponhamos que $E$ é reflexivo. Temos então que $J^{(E)}(E) = E''$ e a aplicação $J^{(E)} : E \to E''$ é um isomorfismo isométrico entre $E$ e $E''$. Pelo Corolário 3.3, temos $E''$ é Banach. ∎

**Corolário 4.11.** *Se $T \in \mathscr{L}(E, F)$, então $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')}$ em que $T'$ é o operador dual de $T$ definido no Corolário 2.8.*

*Demonstração.* Suponhamos que $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Do Corolário 2.8, temos que $\|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)}$. Por outro lado, pelo Corolário

4.6, para cada $x \in E, ||x|| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_F &= \sup\{|f(Tx)| : f \in E', \|f\|_{E'} = 1\} \\
&= \sup\left\{|T'_f(x)| : f \in E', \|f\|_{E'} = 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\|T'_f\|_{E'}\|x\|_E : f \in E', \|f\|_{E'} = 1\right\} \\
&= \|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')}\|x\|_E \\
&= \|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')}.
\end{aligned}$$

Logo, $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')}$ e, portanto,

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \|T'\|_{\mathscr{L}(F',E')}.$$

■

Na demonstração do próximo resultado, faremos uso da definição de operador dual de uma transformação linear e limitada, definição apresentada no Corolário 2.8.

**Proposição 4.12.** *Se $E$ é reflexivo, então $E'$ é reflexivo.*

*Demonstração.* Sejam $J^{(E)} : E \to E''$ e $J^{(E')} : E' \to E'''$ os mergulhos canônicos de $E$ e $E'$, respectivamente. Suponhamos que $J^{(E)}(E) = E''$. Queremos concluir que $J^{(E')}(E') = E'''$. Dado $f''' \in E'''$ arbitrário, consideremos $f' := \left(J^{(E)}\right)'_{f'''}$ em que $\left(J^{(E)}\right)' : E''' \to E'$ denota o operador dual de $J^{(E)}$. Provemos que $J^{(E')}_{f'} = f'''$. Para cada $g'' \in E''$, sendo $J^{(E)}$ sobrejetiva, temos que existe $x \in E$ tal que $g'' = J^{(E)}_x$. Daí,

$$\begin{aligned}
J^{(E')}_{f'}(g'') = J^{(E')}_{f'}(J^{(E)}_x) = J^{(E)}_x(f') &= f'(x) \\
&= \left(J^{(E)}\right)'_{f'''}(x) \\
&= f'''(J^{(E)}_x) \\
&= f'''(g''),
\end{aligned}$$

concluindo o que queríamos. ■

**Proposição 4.13.** *Seja $E$ espaço normado reflexivo. Se $M$ é um subespaço fechado de $E$, então $M$ é reflexivo.*

*Demonstração.* Sejam $J^{(E)} : E \to E''$ e $J^{(M)} : M \to M''$ os mergulhos canônicos de $E$ e $M$, respectivamente. Suponhamos que $J^{(E)}(E) = E''$. Seja $R : E' \to M'$ a aplicação restrição, ou seja, $R_{f'} = f'|_M$, para todo $f' \in E'$. Além disso, seja $R' : M'' \to E''$ o dual de $R$. Dado arbitrariamente $f'' \in M''$, temos que $R'_f \in E''$ e, visto que $J^{(E)}(E) = E''$, existe $x \in E$ tal que $J^{(E)}_x = R'_f$. Vejamos que $x \in M$. De fato, suponhamos $x \notin M$. Pela Proposição 4.8, existe $g' \in E'$ tal que $g'(y) = 0$, para todo $y \in M$, e $g'(x) \neq 0$. Ou seja, $R_{g'} = 0$ e $g'(x) \neq 0$, o que é uma contradição, pois

$$g'(x) = J^{(E)}_x(g') = R'_f(g') = (f \circ R)(g) = f(R_{g'}) = f(0) = 0.$$

Agora, provemos que $J^{(M)}_x = f$. De fato, dado $\phi' \in M'$, pelo teorema (4.3), existe $\rho' \in E'$ tal que $R_{\rho'} = \phi'$. Daí,

$$\begin{aligned} J^{(M)}_x(\phi') = J^{(M)}_x(R_{\rho'}) = R_{\rho'}(x) = \rho'(x) &= J^{(E)}_x(\rho') \\ &= R'_f(\rho') \\ &= (f \circ R)(\rho') \\ &= f(R_{\rho'}) \\ &= f(\phi'). \end{aligned}$$

Visto que $\phi'$ é arbitrário, temos que $J^{(M)}_x = f$, como queríamos demonstrar. ■

# 5 TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS, TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA E TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

Nesse capítulo, temos como objetivo estudar outros teoremas fundamentais da Análise Funcional, sendo eles o Teorema de Banach-Steinhaus, Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado. Esses teoremas compartilham da necessidade de que os domínios das transformações lineares e limitadas consideradas sejam espaços de Banach.

## 5.1 TEOREMA DE BAIRE

Nesta seção, estudaremos alguns resultados da Topologia Geral que nos auxiliarão na demonstração do Teorema da Banach-Steinhaus.

**Definição 5.1.** Seja $X$ um espaço topológico. Diremos que

(i) X é um *espaço de Baire* se a interseção de cada sequência de subconjuntos abertos e densos de X é um subconjunto denso de X.

(ii) um conjunto $A \subset X$ é de *primeira categoria* em X se é possível escrever

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ com } \overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset \text{ para cada n} \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário diremos que A é de *segunda categoria* em X.

**Proposição 5.1.** *Cada espaço de Baire não vazio é de segunda categoria em si mesmo.*

*Demonstração.* Suponhamos por contrapositiva que $X$ seja de primeira categoria em si mesmo. Então, podemos escrever

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

em que $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset X,$$

e portanto,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Notemos agora que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \setminus \overline{A_n}$ é um aberto de $X$,

$$\overline{X \setminus \overline{A_n}} = X \setminus \overset{\circ}{\overline{A_n}} = X \setminus \emptyset = X$$

e

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \right) = X \setminus X = \emptyset,$$

ou seja, X não é um espaço de Baire. Concluímos desta forma que $X$ é um espaço de Baire, então é de segunda categoria em si mesmo. ■

**Teorema 5.2** (**Teorema de Baire**). *Cada espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

*Demonstração.* Seja $(U_n)$ uma sequência de conjuntos abertos e densos em $X$. Para provar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ é denso em $X$, basta provar que $B(a,r) \cap \left( \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \neq \emptyset$, para qualquer bola $B(a,r) \subset X$. Dado arbitrariamente $B(a,r)$ em X, sendo $\overline{U_1} = X$, temos que $B(a,r) \cap U_1 \neq \emptyset$. Seja $x_1 \in U_1 \cap B(a,r)$. Sendo $B(a,r) \cap U_1$ aberto, temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B(x_1, \varepsilon_0) \subset U_1 \cap B(a,r).$$

Fazendo $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, temos $\varepsilon_1 < 1$ e

$$B[x_1, \varepsilon_1] \subset B(x_1, \varepsilon_0) \subset U_1 \cap B(a,r).$$

Como $\overline{U_2} = X$, temos que $B(x_1, \varepsilon_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Seja $x_2 \in U_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1)$. Sendo $B(x_1, \varepsilon_1) \cap U_2$ aberto, temos que existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$B(x_2, \varepsilon_1) \subset U_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1).$$

Fazendo $\varepsilon_3 = \min\left\{\frac{\varepsilon_2}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, temos que $\varepsilon_3 < \frac{1}{2}$ e

$$B[x_2, \varepsilon_3] \subset B(x_2, \varepsilon_1) \subset U_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1).$$

Procedendo por indução, temos que existe $(x_n)$ em $X$ e $(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}$ tais que $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$B[x_n, \varepsilon_n] \subset U_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}), \tag{5.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Da inclusão (5.1), podemos concluir que

$$B[x_1, \varepsilon_1] \supset B[x_2, \varepsilon_2] \supset \cdots \supset B[x_n, \varepsilon_n] \supset \ldots \tag{5.2}$$

para $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Notemos que $(x_n)$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Logo, se $m, n > n_0$, por (5.2), temos que $x_n \in B[x_n, \varepsilon_n] \subset B[x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}]$ e $x_m \in B[x_m, \varepsilon_m] \subset B[x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}]$. Portanto, se $m, n > n_0$, $x_n, x_m \in B[x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}]$ e

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_m, x_{n_0}) \leq 2\varepsilon_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Sendo $X$ completo, temos que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ em $X$. Uma vez que, se $m \geq n$, $x_m \in B[x_m, \varepsilon_m] \subset B[x_n, \varepsilon_n]$ implica que $x$ é um ponto aderente de $B[x_n, \varepsilon_n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. E como $B[x_n, \varepsilon_n]$ é fechado, temos $x \in B[x_n, \varepsilon_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x_n, \varepsilon_n] \subset \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \cap B(a, r).$$

Portanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é denso em $X$.

■

**Definição 5.2.** Sejam $E$ um espaço normado e $A \subset E$. Então,

$(i)$ $A$ é dito simétrico se $-x \in A$, para todo $x \in A$.

$(ii)$ $A$ é dito convexo se $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$, para todo $x, y \in A$, e $\lambda \in [0, 1]$.

**Exemplo 5.1.** Dado um espaço normado $E$, temos que

*(i)* A bola $B_E(0,r)$ é simétrica e convexa.

*(ii)* A esfera $S_E(0,r)$ é simétrica e não é convexa.

*(iii)* A bola $B_E(a,r)$, $a \neq 0$, é convexa e não é simétrica.

Uma das aplicações do Teorema de Baire é demonstrar o teorema que será apresentado a seguir.

## 5.2 TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

No ano de 1927, os matemáticos Banach e Steinhaus publicaram um artigo no qual demonstravam que uma família de transformações lineares e limitadas é uniformemente limitada sempre que for pontualmente limitada. Na literatura, esse teorema é conhecido como Teorema de Banach-Steinhaus ou Teorema da Limitação Uniforme.

**Teorema 5.3 (Teorema de Banach-Steinhaus).** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $F$ espaço normado. Seja $\{T_i : i \in I\} \subset \mathscr{L}(E,F)$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty$$

*para todo $x \in E$. Então, $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < +\infty$.*

*Demonstração.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$A_n := \left\{ x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F \leq n \right\}.$$

Para cada $i \in I$ e cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$B_{i,n} := \{x \in E : \|T_i x\|_F \leq n\}.$$

Notemos que

$$A_n = \bigcap_{i\in I} B_{i,n}. \tag{5.3}$$

De fato, seja $x \in A_n$, então

$$\|T_i x\|_F \leq \sup_{i \in X} \|T_i x\|_F \leq n$$

para todo $i \in I$. Portanto, $x \in B_{i,n}$ para todo $i \in I$ e, consequentemente, $x \in \bigcap_{i \in I} B_{i,n}$. Por outro lado, se $x \in B_{i,n}$, então $\|T_i x\|_F \leq n$, para todo $i \in I$ e, consequentemente, $\sup_{i \in X} \|T_i x\|_F \leq n$. Logo, $x \in A_n$. Notemos também que

$$B_{i,n} = \{x \in E : \|T_i x\|_F \leq n\} = (\|.\|_F \circ T_i)^{-1}(-\infty, n] \tag{5.4}$$

é fechado. De fato, temos que $(-\infty, n]$ é fechado em $\mathbb{R}$ e $\|.\|_F \circ T_i : E \to \mathbb{R}$ é contínua. De (5.3) e (5.4), temos então que $A_n$ é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pode-se concluir da hipótese que todo $x \in E$ pertence a $A_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como $E$ é um espaço de Banach, pelo Teorema de Baire (5.2), temos que $E$ é um espaço de Baire e assim, pela Proposição 5.1, é de segunda categoria em si mesmo. Isto significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overset{\circ}{A}_{n_0} = \overset{\circ}{\overline{A_{n_0}}} \neq \emptyset$. Então, existe $a \in \overset{\circ}{A}_{n_0}$ e consequentemente, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_{n_0}$. Como $A_{n_0}$ é simétrico, segue que $B(-a, r) \subset A_{n_0}$. Notemos que $B(0, r) \subset A_{n_0}$. De fato, se $t \in B(0, r)$, então

$$a + t \in B(a, r) \subset A_{n_0} \quad \text{e} \quad -a + t \in B(-a, r) \subset A_{n_0}.$$

Como $A_{n_0}$ é convexo, segue que $t = \frac{1}{2}(a + t) + \frac{1}{2}(-a + t) \in A_{n_0}$. Portanto, $B(0, r) \subset A_{n_0} = \bigcap_{i \in I} B_{i,n_0}$. Para cada $i \in I$, temos então que

$$\|T_i x\|_F \leq n_0,$$

para todo $i \in I$, e para todo $x \in B(0, r)$. Logo, para cada $i \in I$,

$$\|T_i x\|_F \leq \frac{n_0}{r},$$

para todo $x \in B(0,1)$. Assim,

$$\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \frac{n_0}{r}$$

para todo $i \in I$. Portanto,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \frac{n_0}{r} < +\infty$$

■

**Corolário 5.4.** *Seja $E$ um espaço normado. Se $A$ um subconjunto de $E$ é tal que $\phi(A)$ é limitado em $\mathbb{R}$ para cada $\phi \in E'$, então $A$ é limitado em $E$.*

*Demonstração.* Seja $J^{(E)} : E \to E''$ o mergulho canônico. Sendo $\phi(A)$ limitada em $\mathbb{R}$ para cada $\phi \in E'$, temos que

$$\sup_{x\in A} |J_x^{(E)}(\phi)| = \sup_{x\in A} |\phi(x)| \leq +\infty.$$

Como $\left\{J^{(E)}x : x \in A\right\} \subset E'' = \mathscr{L}(E', R)$ e $E'$ é um espaço de Banach, concluímos Teorema de Banach-Steinhaus (5.3), que

$$\sup_{x\in A} \|x\| = \sup_{x\in A} \left\|J_x^{(E)}\right\|_{E''} < +\infty,$$

ou seja, $A$ é limitada. ■

Da Análise Real, temos que o limite uniforme de funções contínuas definidas em um intervalo da reta é uma função contínua. Agora, quando analisamos o limite pontual de funções contínuas ele não é necessariamente uma função contínua, para exemplificar esse fato podemos observar o que acontece no Exemplo 3.9.

No mesmo artigo em que foi publicado o Teorema de Banach-Steinhaus foi demonstrado que é preciso adicionarmos a hipótese de que o domínio e o contradomínio das funções sejam um espaço de Banach e um espaço normado, respectivamente, e que elas satisfaçam a linearidade para que o limite pontual seja necessariamente uma função contínua. Dito isso, observemos o corolário abaixo.

**Corolário 5.5.** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $F$ um espaço normado. Seja $(T_n)$ uma sequência em $\mathscr{L}(E,F)$ tal que $(T_n x)$ converge em $F$ para cada $x \in E$. Se $T : E \to F$ definida por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ para cada $x \in E$, então $T \in \mathscr{L}(E,F)$.*

*Demonstração.* Vamos mostrar primeiramente que $T : E \to F$ é linear. De fato, dados arbitrariamente $x, y, \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) = T(\alpha x + y).$$

Daí,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x + T_n y) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \alpha T x + T y. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $T : E \to F$ é limitada. De fato, para cada $x \in E$, temos que $(T_n x)$ é uma sequência convergente, e portanto limitada, ou seja,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_F < +\infty,$$

para todo $x \in E$. Como $E$ é um espaço de Banach, temos pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 5.3) que

$$\|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq +\infty.$$

Para cada $x \in E$, temos

$$\|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E \leq \left( \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} \right) \|x\|_E \,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|Tx\|_F = \left\| \lim_{n\to+\infty} T_n x \right\|_F = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_F \leq \left( \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} \right) \|x\|_E \,,$$

para cada $x \in E$, ou seja, $T : E \to F$ é limitada. ∎

## 5.3 TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA E TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

De acordo com [1], o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado foram publicados por Stefan Banach em 1932 no livro *Théorie des Opérations Linéaires*. Para finalizar o estudo, mostraremos que os teoremas citados anteriormente são equivalentes.

**Teorema 5.6.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear limitada. São equivalentes as condições:*

*(i)* *$T$ é sobrejetiva;*

*(ii)* *Existe $\delta > 0$ tal que $B_F(0,\delta) \subset \overline{T\left(B_E(0,1)\right)}$;*

*(iii)* *Existe $\eta > 0$ tal que $B_F(0,\eta) \subset T\left(B_E(0,1)\right)$;*

*(iv)* *$T$ é aberta.*

*Demonstração.* Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear limitada.

Vamos primeiramente mostrar que $(i)$ implica em $(ii)$. De fato, suponhamos que $T$ é sobrejetiva. Assim, temos que

$$\begin{aligned} F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0,n)\right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T\left(B_E(0,n)\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T\left(B_E(0,n)\right)} \end{aligned}$$

Como $F$ é um espaço de Banach, pelo Teorema de Baire (5.2), temos que $F$ é um espaço de Baire. Daí, pela Proposição 5.1 é de segunda categoria em si mesmo. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$ tem interior não-vazio, ou seja, existem $b \in \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$ e $r > 0$ tal que $B_F(b,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$. Como $\overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$ é simétrico, temos também que $B_F(-b,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$. Notemos que

$$B_F(0,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}. \tag{5.5}$$

De fato, seja $y \in B_F(0,r)$, então

$$b + y \in B_F(b,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$$

e

$$-b + y \in B_F(-b,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$$

Como $\overline{T\left(B_E(0,n)\right)}$ é convexo, segue que

$$y = \frac{1}{2}(b+y) + \frac{1}{2}(-b+y) \in \overline{T\left(B_E(0,n)\right)},$$

ou seja, concluímos (5.5). De (5.5), obtemos

$$B_F\left(0, \frac{r}{n}\right) \subset \overline{T\left(B_E(0,1)\right)}.$$

Desta forma, fazendo $\delta := \frac{r}{n}$, temos a afirmação $(ii)$, como queríamos.

Vamos agora mostrar que $(ii)$ implica em $(iii)$. Suponhamos então que existe $\delta > 0$ tal que $B_F\left(0,\delta\right) \subset \overline{T\left(B_E(0,1)\right)}$. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$B_F\left(0, \frac{\delta}{2^n}\right) \subset \overline{T\left(B_E(0, \frac{1}{2^n})\right)}.$$

Afirmamos que

$$B_F\left(0, \frac{\delta}{2^2}\right) \subset T(B_E(0,1)) \tag{5.6}$$

De fato, se $y \in B_F\left(0, \frac{\delta}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B_E(0, \frac{1}{2^2})\right)}$, então existe $x_1 \in B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$ tal que

$$y - Tx_1 \in B_F\left(0, \frac{\delta}{2^3}\right) \subset \overline{T\left(B_E(0, \frac{1}{2^3})\right)}.$$

Consequentemente, existe $x_2 \in B\left(0, \frac{1}{2^3}\right)$ tal que

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B_F\left(0, \frac{\delta}{2^4}\right) \subset \overline{T\left(B_E(0, \frac{1}{2^4})\right)}.$$

Procedendo por indução, obtemos uma sequência $(x_n)$ em $E$ tal que

$$\|x_n\|_E < \frac{1}{2^{n+1}}$$

e

$$\left\| y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \right\|_F < \frac{1}{2^{n+2}}, \tag{5.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^{k} \|x_n\|_E < \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}. \tag{5.8}$$

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente. Sendo $E$ espaço de Banach, pela Proposição 3.4, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Fazendo $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, temos de (5.8), que

$$\|x\|_E = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right\|_E \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_E \leq \frac{1}{2} < 1,$$

ou seja, $x \in B_E(0,1)$. Por outro lado, de (5.7), temos

$$\begin{aligned} \|y - Tx\|_F = \left\| y - \sum_{j=1}^{+\infty} Tx_j \right\|_F &= \lim_{n\to+\infty} \left\| y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \right\|_F \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta}{2^{n+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e consequentemente, $y = Tx \in T\left(B_E(0,1)\right)$, concluímos assim (5.6). Desta forma, fazendo $\eta = \frac{\delta}{2^2}$ em (5.6), temos a afirmação $(iii)$, como queríamos.

Vamos mostrar que $(iii)$ implica em $(iv)$. Suponhamos então que existe $\eta > 0$ tal que $B_F(0,\eta) \subset T\left(B_E(0,1)\right)$ e seja $U$ um conjunto aberto não-vazio em $E$. Vamos mostrar que $T(U)$ é um conjunto aberto de $F$. Se $b \in T(U)$, então existe $a \in U$ tal que $b = Ta$.

Sendo $U$ aberto, temos que existe $r > 0$ tal que $B_E(a, r) \subset U$. Daí,

$$\begin{aligned} B_F(b, r\eta) = b + rB_F(0, \eta) &\subset Ta + rT(B_E(0,1) \\ &= T(a + rB_E(0,1)) \\ &= T(B_E(a,r)) \\ &\subset T(U). \end{aligned}$$

Logo, $T(U)$ é um conjunto aberto, e com isso concluímos, $T$ é aberta.

Vamos agora mostrar que $(iv)$ implica em $(i)$. Suponhamos por contrapositiva que $T(E) \subsetneq F$. Então, como $T(E)$ é um subespaço de $F$ segue, pela Proposição 2.1, que $T(E)$ não é um subconjunto aberto de $F$, o que contradiz o fato de que $T$ é uma transformação aberta. Concluímos com isto que se $T$ é uma transformação aberta, então $T$ é sobrejetiva. ■

Com relação ao Teorema 5.7, vale observar que as implicações $(iii) \Rightarrow (iv)$ e $(iv) \Rightarrow (i)$ são verdadeiras mesmo que $E$ e $F$ sejam espaços normados e $T : E \to F$ seja apenas uma transformação linear. Além disso, a implicação $(i) \Rightarrow (iv)$ é conhecida na literatura como o Teorema da Aplicação Aberta. Mais precisamente, temos o seguinte:

**Teorema 5.7** (**Teorema da Aplicação Aberta**). *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear limitada. Se $T$ é sobrejetiva, então $T$ é aberta.*

Por meio do Teorema da Aplicação Aberta, podemos demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 5.8** (**Teorema da Inversa Limitada**). *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear limitada. Se $T$ é bijetiva, então $T$ é um isomorfismo topológico.*

*Demonstração.* Suponhamos que $T : E \to F$ é bijetiva. Em particular, temos que é sobrejetiva e segue do Teorema da Aplicação Aberta (5.7), temos que $T$ é aberta. Além disso, sendo $T$ bijetiva, também, existe $T^{-1} : F \to E$.

Dado arbitrariamente o conjunto aberto $U$ em $E$, temos que $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ é aberto em $F$. Pela Proposição A.7, temos então que $T^{-1}$ é contínua. Portanto, $T$ é um isomorfismo topológico. ■

**Proposição 5.9.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Se $T : E \to F$ uma aplicação contínua, então o gráfico*

$$G_T = \{(x, y) \in E \times F : y = Tx\}$$

*é fechado em $E \times F$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $T : E \to F$ contínua e $(x_n, T(x_n))$ uma sequência em $G_f$ que converge para $(x, y) \in E \times F$. Pela Proposição A.3, temos que $x_n \to x$ em $E$ e $T(x_n) \to y$ em $F$. Como $T$ é contínua, temos que $T(x_n) \to T(x)$. Pela unicidade do limite, $y = T(x)$ e, assim, $(x, y) \in G_f$. Portanto, $G_f$ é fechado em $E \times F$. ■

Para obtermos a recíproca da Proposição 5.9 precisamos adicionar as hipóteses de que $E$ e $F$ são espaços de Banach e que $T : E \to F$ é uma transformação linear. Desta forma, teremos:

**Teorema 5.10 (Teorema do Gráfico Fechado).** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear. Se o gráfico*

$$G_T = \{(x, y) \in E \times F : y = Ty\}$$

*é fechado em $E \times F$, então $T$ é contínua.*

*Demonstração.* Suponhamos que

$$G_T := \{(x, y) \in E \times F : y = Ty\}$$

é fechado em $E \times F$. Observemos que, pela Proposição A.4, $E \times F$ é um espaço de Banach. Sendo $G_T$ um subespaço fechado de $E \times F$ e pela Proposição 3.1, então $G_T$ é um espaço de Banach. Consideremos as projeções canônicas

$$\begin{aligned} \pi_1 : E \times F &\to E \\ (x, y) &\mapsto \pi_1(x, y) = x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_2 : E \times F &\to F\\ (x,y) &\mapsto \pi_2(x,y) = y.\end{aligned}$$

Vejamos que $\pi_1 \in \mathscr{L}(E \times F, E)$. De fato, sejam arbitrariamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}\pi_1(\alpha(x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= \pi_1(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2)\\ &= \alpha x_1 + x_2\\ &= \alpha\pi_1(x_1,y_1) + \pi_1(x_2,y_2).\end{aligned}$$

Logo, $\pi_1$ é linear. Além disso, para todo $x \in E$, temos

$$\|\pi_1(x, Tx)\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_F = \|(x,y)\|_{E\times F},$$

ou seja, $\pi_1$ é limitada. De maneira análoga, é possível mostrar que $\pi_2 \in \mathscr{L}(E, F)$.

Agora, seja $\sigma_1 = \pi_1|_{G_T}$. Pela Proposição A.6, temos $\sigma_1 \in \mathscr{L}(G_T, E)$. Além disso, temos que $\sigma_1$ é bijetiva. Portanto, pelo Teorema da Inversa Limitada (Teorema 5.8), temos que $\sigma_1$ é um isomorfismo topológico e, daí, a função

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-1} : E &\to G_T\\ x &\mapsto \sigma_1^{-1}(x) = (x, Tx)\end{aligned}$$

é linear e limitada. Logo, $T = \pi_2 \circ \sigma_1^{-1}$ é contínua. ■

**Teorema 5.11.** *Os seguintes teoremas são equivalentes:*

*(i) Teorema da Aplicação Aberta*

*(ii) Teorema da Inversa Limitada*

*(iii) Teorema do Gráfico Fechado*

*Demonstração.* O fato de que $(i)$ implica em $(ii)$ já foi demonstrado na demonstração do Teorema da Inversa Limitada (Teorema 5.8).

Além disso, o fato que $(ii)$ implica em $(iii)$ também já foi provado na demonstração do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 5.10).

Vamos provar que $(iii)$ implica em $(i)$. Suponhamos que o Teorema do Gráfico Fechado seja verdadeiro e sejam $E$ e $F$ espaços de Banach e $T : E \to F$ uma transformação linear e limitada. Suponhamos que $T$ seja sobrejetiva. Pelo Lema 2.1, existe uma transformação linear limitada injetiva $\tilde{T} : E/KerT \to F$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$ em que $\pi : E \to E/KerT$ é a transformação quociente. Se $T = \tilde{T} \circ \pi$ é sobrejetiva, temos que $\tilde{T}$ é sobrejetiva e, consequentemente, $\tilde{T}$ é bijetiva. Notemos que, pelo Teorema 3.6, $E/KerT$ é um espaço de Banach e que $\tilde{T}^{-1} : F \to E/KerT$ é linear.

Vejamos que

$$G_{\tilde{T}^{-1}} := \left\{(y, [x]) \in F \times E/KerT : [x] = T^{-1}y\right\}$$

é fechado em $F \times (E/KerT)$. De fato, se que $(y, [x]) \in \overline{G_{\tilde{T}^{-1}}}$, então existe uma sequência $(y_n, [x_n])$ em $G_{\tilde{T}^{-1}}$ tal que $(y_n, [x_n]) \to (y, [x])$ em $F \times (E/KerT)$. Logo, pela Proposição A.3, $y_n \to y$ em $F$ e $[x_n] \to [x]$ em $E/KerT$. Sendo $\tilde{T}$ é contínua e $[x_n] = \tilde{T}^{-1}y_n$, segue que

$$y_n = \tilde{T}[x_n] \to \tilde{T}[x]$$

em $F$. Então, pela unicidade do limite, $y = \tilde{T}[x]$, ou seja, $[x] = \tilde{T}^{-1}y$. Assim, $(y, [x]) \in G_{\tilde{T}^{-1}}$ e, portanto, $G_{\tilde{T}^{-1}}$ é fechado em $F \times (E/KerT)$.

Pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 5.10), concluímos que $\tilde{T}^{-1}$ é contínua e, consequentemente, $\tilde{T}$ é aberta. Sendo $\pi : E \to E/KerT$ uma aplicação aberta, temos que $T = \tilde{T} \circ \pi$ é uma aplicação aberta.

■

# 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse estudo, podemos solidificar e ressignificar os conceitos estudados durante o curso de graduação. Além disso, estudamos conceitos e resultados não explorados em diversos cursos de graduação e nos quais são vistos majoritariamente em cursos de mestrado e doutorado.

Este trabalho abre diversas possibilidades de estudos futuros. Primeiramente, é possível seguir estudando as várias versões do Teorema de Hahn-Banach, dentre elas para o espaço dos números complexos ou suas versões geométricas. Ainda, podemos estudar mais aplicações do Teorema de Hahn-Banach, do Teorema de Banach-Steinhaus, do Teorema da Aplicação Aberta e do Teorema do Gráfico Fechado, como por exemplo, nos espaços separáveis, no espaço normado dos polinômios, nas séries de Fourier, e outros. Além disso, é possível continuarmos os estudos na área da Análise Funcional se aprofundando na Teoria dos espaços de Banach ou abordando novos conceitos, como a Topologia Fraca, os Espaços de Hilbert e a Teoria Espectral.

# REFERÊNCIAS


[1] BOTELHO, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. **Fundamentos de Análise Funcional.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Textos Universitário).

[2] CAMPBELL, Paul J. The origin of "Zorn's Lemma". **Historia Mathematica**, [S.L.], v. 5, n. 1, p. 77-89, fev. 1978. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/0315-0860(78)90136-2. Acessado em 31 out. 2020.

[3] CIESIELSKI, Krzysztof; MOSLEHIAN, MohammadS. **Some Remarks on the History of Functional Analysis.** Annals of Functional Analysis. 1, 2010, no. 1, 1–12. Disponível em: https://www.emis.de/journals/AFA/AFA-tex_v1_n1_a1.pdf. Acessado em 31 out. 2020.

[4] KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications.** New York: John Wiley Sons, 1978. (Wiley Classic Library).

[5] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear.** 9. ed. Coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: Impa, 2016. 357 p.

[6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real.** Vol. 1, 12. ed. Coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: Impa, 2017. 198 p.

[7] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** 5. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 299 p.

[8] MUJICA, Jorge. **Notas de Análise Funcional I.** Notas de aula, IMECC - UNICAMP, 2010.

[9] MUNKRES, James. **Topology.** 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2017.

[10] PIETSCH, Albrecht. **History of Banach Spacesand Linear Operators.** Boston: Birkhäuser, 2007.

# Apêndices

# APÊNDICE A – RESULTADOS AUXILIARES

Neste apêndice, abordaremos alguns resultados que são utilizados ao longo de todo o trabalho. Discutiremos duas famosas desigualdades, proposições da teoria dos espaços de Banach e outros resultados auxiliares.

**Teorema A.1** (**Desigualdade de Minkowski para somas**). *Seja $1 \leq p < +\infty$ e sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_N), (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

**Teorema A.2** (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz para somas**). *Seja $1 \leq p < +\infty$ e sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_N), (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$\sum_{j=1}^{N} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

**Exemplo A.1.** Sejam $E$ e $F$ espaços normados e $\|.\|_{E\times F} : E \times F \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

para $(x, y) \in E \times F$. Temos que $(E \times F, \|.\|_{\|(x,y)\|_{E\times F}})$ é um espaço normado.

**Proposição A.3.** *Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Então $x_n \to x$ e $y_n \to y$ se, e somente se, $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

*Demonstração.* Sejam $E$ e $F$ espaços normados. Suponhamos que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $n_1, n_2 \in N$ tal que se $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, então

$$\|x_n - x\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$$

e para $n > n_2$, então

$$\|y_n - y\|_F < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Façamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Assim, se $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{E\times F} &= \|(x_n - x, y_n - y)\|_{E\times F} \\
&= \|x_n - x\|_E + \|y_n - y\|_F \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Agora, suponhamos que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Logo, dado dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, então

$$\|x_n - x\|_E + \|y_n - y\|_F = \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{E\times F} < \varepsilon.$$

Logo, para $n > n_0$, temos

$$\|x_n - x\|_E < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \|x_n - x\|_F < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n \to x$ e $y_n \to y$. ∎

**Proposição A.4.** *Se $E$ e $F$ são espaços de Banach, então $E \times F$ é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* Seja $(z_n)$ uma sequência de Cauchy em $E \times F$ em que $z_n = (x_n, y_n)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_0$, então

$$\|x_n - x_m\|_E + \|y_n - y_m\|_F = \|z_n - z_m\|_{E\times F} < \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequência de Cauchy em $E$ e $F$, respectivamente. Como $E$ e $F$ são espaços de Banach, $(x_n)$ e $(y_n)$ convergem em $E$ e $F$, respectivamente. Pela Proposição A.1, temos que $(z_n)$ converge em $E \times F$ e, portanto, $E \times F$ é um espaço de Banach. ∎

**Proposição A.5.** *Sejam $E, F$ e $G$ espaços normados. Se $U : E \to F$ e $V : U(E) \to G$ são aplicações abertas, então $V \circ U : E \to G$ é uma aplicação aberta.*

*Demonstração.* Sejam $U : E \to F$ e $V : U(E) \to G$ são aplicações abertas. Suponhamos $X \subset E$ é um conjunto aberto. Por $U$ ser uma aplicação aberta, $U(X)$ é um conjunto aberto de $U(E)$. Agora, como $V$ ser uma aplicação aberta, $V(U(X)) = (V \circ U)(X)$ é um conjunto aberto de $G$. Pela definição de aplicação aberta, temos que $V \circ U : E \to G$ é uma aplicação aberta. ■

**Proposição A.6.** *Seja $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e $M \subset E$ subespaço. Então a restrição $\hat{T} : M \to F$ é linear e limitada.*

*Demonstração.* Consideremos a função restrição $\hat{T} : M \to F$. Notemos que $\hat{T}$ é linear. De fato, dados arbitrariamente $x_1, x_2 \in M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\hat{T}(\alpha x_1 + x_2) = T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T x_1 + T x_2 = \alpha \hat{T} x_1 + \hat{T} x_2.$$

Observemos que $\hat{T}$ é limitada. De fato, sendo $T$ limitada, temos

$$\left\| \hat{T}x \right\|_F = \|Tx\|_F \leq \|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \|x\|_E ,$$

para todo $x \in M$, concluindo nossa demonstração.

■

**Proposição A.7.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos e $f : X \to Y$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

*(i) $f$ é contínua;*

*(ii) Se $A \subset Y$aberto, então $f^{-1}(A) \subset X$ aberto;*

*(iii) Se $F \subset Y$ fechado, então $f^{-1}(F) \subset X$ fechado.*

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente que $(i)$ implica em $(ii)$. Sejam $A \subset Y$ aberto e $a \in f^{-1}(A)$. temos que $f(a) \in A$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a), \varepsilon) \subset A$. Sendo $f$ contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \|x - a\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y$$

Ou seja, se $x \in B(a, \delta)$, então $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset A$. Portanto, $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$.

Mostremos que $(ii)$ implica em $(i)$. Seja $a \in X$. Temos que $f(a) \in Y$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos que $B(f(a), \varepsilon) \subset$

$Y$ é aberto. Portanto, $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon)) \subset X$ é aberto. Notemos que $a \in f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$; logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, ou seja,

$$x \in X, \|x-a\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Portanto, $f$ é contínua.

Por fim, mostraremos que $(iii)$ implica em $(i)$. Seja $F \subset Y$ fechado. Então, $Y \subset F$ é aberto. Logo, $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F) \subset X$ é aberto. Portanto, $f^{-1}(F)$ é fechado. ■

# APÊNDICE B – RESULTADOS COMPLEMENTARES

Apesar de não apresentarmos a demonstração da Proposição seguinte, temos que esse resultado é uma consequência do Lema de Zorn.

**Proposição B.1.** *Seja $E$ um espaço vetorial. Se $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é um subconjunto de $E$ linearmente independente, então existe uma base $B$ de $E$ tal que $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset B$.*

**Proposição B.2.** *Dado $E$ um espaço normado, $E$ tem dimensão finita se, e somente se, cada funcional linear em $E$ é contínuo.*

*Demonstração.* Vamos primeiramente mostrar que cada funcional linear $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua. De fato, seja $\{e_1, \ldots, e_N\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Daí,

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)| = \left| \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(e_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \, |\phi(e_j)| \\
&\leq \left( \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{1/2} \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{N} |\phi(e_j)|^{1/2} \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{j=1}^{N} |\phi(e_j)|^{1/2} \right)^{1/2} \|x\|_b \,,
\end{aligned}
$$

para todo $x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \in \mathbb{R}^N$. Portanto, $\phi$ é contínua.

Suponhamos que $E$ é um espaço normado de dimensão finita $N$. Então, existe um isomorfismo topológico $T : \mathbb{R}^N \to E$. Dado um funcional linear $\psi : E \to \mathbb{R}$, temos que $\psi \circ T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é linear. Pelo que provamos anteriormente, temos que $\psi \circ T$ é contínua. Desde que $T : \mathbb{R}^N \to E$ é um isomorfismo topológico, temos que $T^{-1} : E \to \mathbb{R}^N$ é contínua. Portanto, $(\psi \circ T) \circ T^{-1} = \psi$ é contínua.

Agora, suponhamos que $E$ é um espaço normado de dimensão infinita. Então, existe em $E$ um conjunto enumerável $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$

linearmente independente e, daí, $A_0 = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, com $e_k = \frac{y_k}{\|y_n\|}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, é um conjunto enumerável linearmente independente tal que $\|e_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Proposição B.1), temos que existe uma base $\{e_i\}_{i \in I}$ de $E$ tal que $A_0 \subset B$. Agora, definimos

$$\phi : E \to \mathbb{R}$$
$$x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_{i_j} \mapsto \phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(e_{i_j})$$

em que

$$\phi(e_i) = \begin{cases} k, & \text{se } e_{i_j} \in A_0 \\ 0, & \text{se } e_{i_j} \notin A_0 \end{cases}.$$

É imediato que $\phi$ está bem definida e é linear. Notemos agora que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $\|e_k\| = 1$ e $|\phi(x)| = k$. Consequentemente, o conjunto $\{|\phi(x)| : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$ não é limitado e, portanto, não é contínuo, o que é uma contradição.

Portanto se cada funcional linear em $E$ é contínuo, então $E$ tem dimensão finita. ∎

# APÊNDICE C – BREVE APRESENTAÇÃO SOBRE CONVERGÊNCIA FRACA

Nesse apêndice, estudaremos brevemente sobre o conceito de convergência Fraca.

**Definição C.1.** Seja $(x_n)$ uma sequência em um espaço normado $E$. Dizemos que $(x_n)$ converge fracamente para $x \in E$ se $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, para todo $f \in E'$. Neste caso, escrevemos $(x_n) \rightharpoonup x$ e $x$ é chamado de limite fraco. Uma sequência que possui limite fraco é dita fracamente convergente.

**Proposição C.1 (Unicidade do limite fraco).** *Seja $(x_n)$ uma sequência em um espaço normado $E$. Se $(x_n)$ converge fracamente para $x$, então o limite fraco é único.*

*Demonstração.* Suponhamos que $(x_n)$ converge fracamente para $x_1 \in E$ e para $x_2 \in E$ simultaneamente. Então,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_1) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_2),$$

para todo $f \in E'$. Pela unicidade do limite de uma sequência de números reais, temos que $f(x_1) = f(x_2)$, para todo $f \in E'$. Logo,

$$f(x_1 - x_2) = 0, \tag{C.1}$$

para todo $f \in E'$.

Afirmamos que $x_1 = x_2$. De fato, caso ao contrário, se $x_1 = x_2$, teríamos $x - y \neq 0$. Então, pela Proposição 4.4, teríamos a existência de $f \in E'$ tal que $\|f\|_{E'} = 1$ e

$$f(x - y) = \|x - y\|_E \neq 0,$$

o que contradiz (C.1).

■

**Proposição C.2.** *Seja $(x_n)$ uma sequência em um espaço normado $E$. Se $(x_n)$ converge fracamente para $x$, então $(x_n)$ é limitada.*

*Demonstração.* Suponhamos que $(x_n)$ converge fracamente para $x \in E$. Isto significa que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, para todo $f \in e'$. Consequentemente, a sequência $(f(x_n)$ é limitada para cada $f \in E'$.

Considerando $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos que $A$ é um subconjunto de $E$. Além disso, temos que $f(A) = \{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$, para cada $f \in E'$. Assim, pelo Corolário 5.4, temos que $A$ é limitado em $E$, ou seja, $(x_n)$ é limitada. ■

**Proposição C.3.** *Seja $(x_n)$ uma sequência em um espaço normado $E$ tal que $\dim E < +\infty$. Temos que $(x_n)$ converge para $x \in E$ se, e somente se, $(x_n)$ converge fracamente para $x \in E$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $(x_n)$ converge para $x \in E$. Então, para cada $f \in E'$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

já que $f$ é contínua. Portanto, $(x_n)$ converge fracamente para $x$.

Suponhamos que $(x_n)$ converge fracamente para $x \in E$ e, por absurdo, que $(x_n)$ não converge para $x$ em $E$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ e existe uma subsequência $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ tal que

$$\|x_{n_k} - x\|_E \geq \varepsilon_0, \tag{C.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos que $x_{n_{k_j}} \rightharpoonup x$. Logo, $(x_{n_k})$ é limitada e, sendo $\dim E < +\infty$, temos que existe uma subsequência $(x_{n_{k_j}})$ de $(x_{n_k})$ tal que $x_{n_{k_j}} \to x$, o que um absurdo devido a desigualdade (C.2). Concluímos com isto que, $(x_n)$ converge para $x$ em $E$. ■

Visto que é possível enfraquecer alguns conceitos matemáticos, é interessante comentarmos que a partir do Teorema 3.14 no qual mostramos que a bola unitária fechada não é compacta num espaço de dimensão infinita surge um novo olhar sobre os espaços de dimensão infinita. Isso porquê ao estudarmos os espaços de dimensão infinita os resultados envolvendo compacidade são bem delicados. Para conseguir contornar esse fato, enfraquecemos a topologia para que haja ganhos quanto a compacidade. Um estudo aprofundado da Topologia Fraca e envolvendo o conceito de compacidade está disponível na referência [1].