



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Franciele Manoel da Silva

Estrelas compactas rotacionando rapidamente na gravidade Rastall

Florianópolis
2020

Franciele Manoel da Silva

Estrelas compactas rotacionando rapidamente na gravidade Rastall

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutora em física. Orientador: Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

da Silva, Franciele Manoel

Estrelas compactas rotacionando rapidamente na
gravidade Rastall / Franciele Manoel da Silva ;
orientador, Celso de Camargo Barros Junior, 2020.
124 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. estrelas compactas. 3. rotação. 4. EoS
politrópica. 5. teoria de Rastall. I. de Camargo Barros
Junior, Celso . II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Franciele Manoel da Silva

Estrelas compactas rotacionando rapidamente na gravidade Rastall

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Sérgio José Barbosa Duarte, Dr.
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Sidney dos Santos Avancini, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Alexandre Magno Silva Santos, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutora em física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Celso de Camargo Barros Junior, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço muito aos meus pais, ao Luis e ao meu irmão por todo o apoio e incentivo que sempre me deram. Também agradeço ao Luis e ao Giovanni pelas discussões frutíferas que levaram a alguns dos principais desenvolvimentos deste trabalho. Agradeço ao professor Celso por todos os anos de orientação e incentivo, e pela paciência para me corrigir e ajudar sempre que preciso. Agradeço ao professor Sidney pela ajuda prestada a mim e ao professor Celso neste doutorado. Agradeço aos professores e funcionários do departamento de física por proporcionarem as condições para a realização deste trabalho.

Por fim, não posso deixar de mencionar que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES).

RESUMO

Neste trabalho vamos estudar estrelas compactas com rotação no contexto da teoria de gravidade modificada de Rastall. Iremos obter as equações de campo a partir da teoria da relatividade geral e então considerar a teoria de Rastall para uma métrica estacionária com simetria axial. Vamos assumir que a matéria estelar pode ser representada por um tensor de energia-momento de fluido perfeito que será descrito por uma equação de estado politrópica. As equações encontradas serão resolvidas numericamente, e quantidades de interesse como massa, raio e momento de inércia, por exemplo, serão calculadas e analisadas. Além disso, também estudaremos como as componentes do tensor métrico são afetadas pela teoria de Rastall e pela rotação estelar.

Palavras-chave: estrelas compactas. rotação. EoS politrópica. teoria de Rastall.

ABSTRACT

In this work we will study compact stars with rotation in the context of Rastall's modified theory of gravity. We will obtain the field equations from the general relativity theory and then to consider the Rastall's theory for a stationary metric with axial symmetry. We will assume that stellar matter can be represented by a perfect fluid energy-momentum tensor that will be described by a polytropic equation of state. The derived equations will be solved numerically, and quantities of interest such as mass, radius and moment of inertia, for example, will be calculated and analyzed. In addition, we will also study how the components of the metric tensor are affected by Rastall's theory and stellar rotation.

Keywords: compact stars. rotation. polytropic EoS. Rastall's theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esta figura representa um diagrama de Hertzsprung–Russell, em que são destacadas algumas estrelas próximas do Sol.	27
Figura 2 – Ciclo de vida das estrelas.	28
Figura 3 – Esta figura mostra um modelo para a estrutura de uma estrela de nêutrons. Fonte: NASA’s Goddard Space Flight Center	29
Figura 4 – Esta figura representa nossa região computacional. O ponto P representa o polo da estrela, o ponto Q representa o equador e o ponto W representa o ponto de energia máxima. Fonte:(KOMATSU <i>et al.</i> , 1989a).	59
Figura 5 – A relação massa-raio para sequências de estrelas sem rotação (curvas com traço-ponto) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curvas com linha sólida). As curvas com $\lambda = 0$ representam as sequências de soluções para a RG.	63
Figura 6 – A massa como uma função da densidade central de energia para sequências de estrelas sem rotação (curvas com traço-ponto) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curvas com linha sólida). As curvas com $\lambda = 0$ representam as sequências de soluções para a RG.	64
Figura 7 – A velocidade angular como uma função da densidade central de energia para sequência de estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> . As curvas com $\lambda = 0$ representam as sequências de soluções para a RG.	65
Figura 8 – O momento de inércia como uma função da massa sequências de estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> . As curvas com $\lambda = 0$ representam as sequências de soluções para a RG.	66
Figura 9 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.	68
Figura 10 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.	69
Figura 11 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.	70

Figura 12 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de <i>mass shedding</i> com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.	71
Figura 13 – A relação massa-raio para sequências de estrelas sem rotação (curva com traço-ponto), para estrelas rodando com $\Omega = 300\text{Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	73
Figura 14 – A relação massa-raio para sequências de estrelas sem rotação (curva com traço-ponto), para estrelas rodando com $\Omega = 300\text{Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	74
Figura 15 – O momento de inércia como uma função da massa para estrelas rodando com $\Omega = 300\text{Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	75
Figura 16 – O momento de inércia como uma função da massa para estrelas rodando com $\Omega = 300\text{Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	76
Figura 17 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	78
Figura 18 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	79
Figura 19 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	80
Figura 20 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	81

Figura 21 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	82
Figura 22 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	83
Figura 23 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	84
Figura 24 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall	85

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BI	Butterworth e Ipser
BS	Bonazzola e Schneider
EoS	equação de estado
KEH	Komatsu, Eriguchi e Hachisu
RG	Relatividade Geral
ZAMO	<i>Zero angular momentum observer</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DE ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	17
2.1	TENSORES	18
2.2	EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN	19
2.3	MÉTRICAS ESTACIONÁRIAS COM SIMETRIA AXIAL	21
2.4	TETRADAS	24
3	ESTRELAS	26
3.1	DIAGRAMA H-R	26
3.2	CICLO DE VIDA DAS ESTRELAS	27
3.3	ESTRELAS DE NÊUTRONS	30
3.4	ESTRELAS RELATIVÍSTICAS	32
3.5	EQUAÇÃO DE ESTADO POLITRÓPICA	34
4	ESTRELAS EM ROTAÇÃO	37
4.1	ELEMENTO DE LINHA	37
4.2	Tensor de energia-momento	38
4.3	EQUAÇÕES DE CAMPO PARA ESTRELA COM ROTAÇÃO RÁPIDA	38
4.3.1	Forma Integral das equações de campo	41
4.4	EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO	43
4.4.1	Lei de rotação	45
4.4.2	Equação de estado	45
5	TEORIA DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA DE RASTALL	47
5.1	LIMITE NEWTONIANO	48
5.2	APLICANDO O MÉTODO KEH PARA A GRAVIDADE DE RASTALL	49
6	MÉTODO NUMÉRICO	54
6.1	VISÃO GERAL DO MÉTODO KEH	54
6.2	MODELO INICIAL	55
6.3	PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL	57
6.3.1	Rotação diferencial	58
6.3.2	Rotação uniforme	59
7	RESULTADOS	61
7.1	EFEITOS DA TEORIA DE RASTALL	61
7.2	EFEITOS DA ROTAÇÃO	72
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	87
	ANEXO A – ARTIGO	90

1 INTRODUÇÃO

Em 1915, Albert Einstein alcançou seu objetivo de estender o princípio da relatividade para referenciais não inerciais. Para isso, se valeu da equivalência entre referenciais acelerados e referenciais inerciais sob ação de um campo gravitacional. Assim, originou-se a teoria da Relatividade Geral (RG) que apresentou uma visão totalmente nova sobre a estrutura do espaço, do tempo e da gravitação. Já no ano seguinte, em 1916, foi encontrada a primeira solução para as equações de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916, 1999), que representa um espaço-tempo estático com simetria esférica. Esse é o resultado exato que talvez possa ser considerado como o mais importante da RG, e é nele que se baseiam três testes clássicos da RG, que não possuem fundamentos sólidos se consideramos somente a gravitação de Newton: precessão do periélio de Mercúrio; deflexão da luz vinda de uma estrela, quando a luz passa perto do Sol; desvio de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional (red-shift).

Foi por volta dos anos 1950, quando foram descobertos objetos astronômicos altamente energéticos e compactos, principalmente quasares e fontes compactas de raios-X, onde os efeitos da RG poderiam ser significativos, que o interesse na área foi fortemente aumentado (WALD, R., 1984). Esses objetos sujeitos a fortes campos gravitacionais e até mesmo a colapsos gravitacionais não podiam ser completamente entendidos apenas com a utilização da gravitação Newtoniana. As estrelas de nêutrons são objetos desse tipo e a tentativa do seu entendimento vem gerando um grande esforço da comunidade científica. Apesar de nosso conhecimento tanto teórico quanto experimental sobre as estrelas de nêutrons e outros objetos astrofísicos compactos ter evoluído bastante nos últimos anos, ainda existem muitos fenômenos e questões em aberto a serem estudados. Uma questão fundamental é, por exemplo, saber qual equação de estado (EoS) melhor descreve o comportamento da matéria sob densidades extremas.

Até os dias atuais, a única forma de resolver o sistema de equações que descreve uma estrela relativística rotacionando em equilíbrio é através de métodos numéricos. Ao longo dos anos, muitos métodos foram desenvolvidos para a obtenção de modelos relativísticos de estrelas girando. As primeiras soluções numéricas foram obtidas por Wilson (WILSON, 1972, 1973) que generalizou o método desenvolvido por Bardeen e Wagoner (BARDEEN; WAGONER, 1969, 1971) para discos relativísticos e obteve soluções para estrelas com rotação diferencial mas, que não possuíam uma equação de estado explícita. Algum tempo depois, Bonazzola e Schneider (BS) (BONAZZOLA, Silvano; SCHNEIDER, 1974) estenderam o formalismo apresentado em (BONAZZOLA; MASCHIO, 1971) e encontraram soluções para rotação uniforme e com equação de estado explícita. O método desenvolvido por Wilson (WILSON, 1973)

também foi pioneiro em revelar que, da mesma forma que ocorre com buracos negros, estrelas rodando rapidamente também podem possuir uma ergosfera, ou seja, uma região onde $g_{tt} > 0$, no entanto, seu trabalho possui problemas quanto ao tratamento das condições de contorno. No caso do método de Bonazzola e Schneider (BONAZZOLA, Silvano; SCHNEIDER, 1974), as equações são resolvidas em uma forma integral de modo que as condições de contorno são satisfeitas automaticamente. Entretanto, este método também apresenta problemas, um dos potenciais da métrica, por exemplo, não possui garantia de ser assintoticamente plano. Outro esquema que também possibilitou a obtenção de soluções foi desenvolvido por Butterworth e Ipser (BI) (BUTTERWORTH; IPSE, 1976), neste método as equações diferenciais são resolvidas diretamente pelo método de Stoeckly (STOECKLY, 1965) e condições de contorno apropriadas são obtidas de uma expansão assintótica. Um parâmetro importante no estudo de estrelas rotacionando é a razão entre a pressão máxima e a densidade de energia máxima no centro da estrela $\kappa = \rho_{\max}/\varepsilon_{\max}c^2$, que pode ser interpretada como uma medida do quão relativística é a estrela. Com o método BI foi possível a obtenção de soluções para modelos homogêneos com rotação uniforme para até $\kappa \leq 4.45$, no entanto, para modelos com outras equações de estado só foi possível encontrar soluções para o caso pouco relativístico (κ pequeno).

Um procedimento numérico com o qual se obteve sucesso na solução das equações de campo da relatividade geral para estrelas girando rapidamente, foi desenvolvido por Komatsu, Eriguchi e Hachisu (KEH) (KOMATSU *et al.*, 1989a), e será neste método que nos basearemos neste trabalho. Komatsu, Eriguchi e Hachisu (KOMATSU *et al.*, 1989a) desenvolveram uma técnica de obtenção de soluções que alcançou sucesso para se encontrar soluções para equações de estado politrópicas e realistas com rotação uniforme e diferencial para até o caso altamente relativístico ($\kappa \sim 1$). Esta técnica se baseia no método de campo auto-consistente desenvolvido por Hachisu (HACHISU, 1986) para a gravitação Newtoniana e utiliza o mesmo sistema de equações de BI. No entanto, neste método as equações são resolvidas na forma integral, de forma similar à BS, de modo facilitar o trabalho com as condições de contorno.

Originalmente Komatsu, Eriguchi e Hachisu desenvolveram seu modelo para encontrar soluções relativísticas para estrelas em rotação. No entanto, a métrica usada por eles pode ser empregada de modo mais geral para representar esferoides girando, de modo que, não precisamos nos restringir a utilizar este método somente para estrelas. Uma possibilidade seria utilizá-lo para modelar o bojo de uma galáxia. Estas regiões possuem formato esferoidal e grande densidade de matéria de modo que poderíamos esperar algum efeito relativístico. Outra possibilidade seria fazer esferoides suficientemente achatados de modo a representarem um disco girando que serviria para modelar uma galáxia elíptica como um todo. Além disso, a inclusão de campos magnéticos também é possível.

A teoria da RG vem tendo sucesso em muitos testes experimentais, como nas recentes medições de ondas gravitacionais pela colaboração Virgo e LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) (ABBOTT, Benjamin P *et al.*, 2016; ABBOTT, B. *et al.*, 2019) e a ainda mais recente obtenção da primeira imagem de um buraco negro pelo projeto Event Horizon Telescope (AKIYAMA *et al.*, 2019). Apesar disso, existem problemas em aberto, como as curvas de rotação de galáxias espirais que levam à suposição de que exista uma matéria escura, a expansão acelerada do universo que leva à formulação do conceito de energia escura, além de outras questões ainda não respondidas como o problema do horizonte (ou da homogeneidade) que é uma das motivações para a teoria da inflação cósmica e o problema da constante cosmológica (catástrofe do vácuo), entre outros. Devido a essas aparentes limitações da RG em descrever certos fenômenos, se torna interessante o estudo de teorias de gravitação alternativas. Ademais, uma outra motivação para construção de teorias de gravidade modificada é a procura por uma teoria para a gravitação consonante com os princípios da mecânica quântica, ou seja, uma teoria de gravitação quântica.

Por serem sistemas em que encontramos a matéria submetida a densidades extremas, as estrelas compactas como estrelas de nêutrons e de quarks são um dos melhores candidatos astrofísicos para o teste de teorias de gravitação no regime de campo forte e, por isso, também são bons candidatos para testarmos as teorias de gravidade modificada. Atualmente existem muitos estudos de estrelas compactas em teorias de gravitação modificada, no entanto, a maior parte destes estudos é feito para estrelas sem rotação como em (HARADA, 1998; ORELLANA *et al.*, 2013; MOMENI; MYRZAKULOV, 2015; OLIVEIRA *et al.*, 2015; HENDI *et al.*, 2016; MOTA *et al.*, 2019a), por exemplo. Já existem alguns estudos de estrelas com rotação em teorias alternativas à RG, mas, eles ainda são poucos. Alguns exemplos desses estudos para o caso de estrelas rotacionando lentamente são (DAMOUR; ESPOSITO-FARESE, 1996; SOTANI, 2010; PANI *et al.*, 2011; ALI-HAIMOUD; CHEN, 2011; STAYKOV *et al.*, 2014) e para estrelas rotacionando rapidamente (DONEVA *et al.*, 2013, 2015; YAZADJIEV *et al.*, 2015; KLEIHAUS *et al.*, 2016; DONEVA; YAZADJIEV, 2016; ASTASHENOK; ODINTSOV, 2020). Apesar de muitas vezes ser deixada de lado a rotação está presente em todas as etapas da vida de uma estrela e, em algumas situações pode ter um papel dominante, de fato, existem evidências de que a evolução estelar é uma função não só da massa e da metalicidade mas, também do rotação estelar (MAEDER, André; MEYNET, 2000). Além disso, a primeira evidência observacional da existência da estrelas de nêutrons ocorreu devido a um fenômeno que só existe por causa da rotação estelar, que foi a descoberta dos pulsares por Jocelyn Bell Burnell e Antony Hewish, em 1967. Os pulsares são estrelas de nêutrons¹ com rotação e forte campo magnético, e que apresentam os eixos de rotação e do campo magnético desalinhados, o que faz

¹ Atualmente sabemos que também existem alguns pulsares que são anãs brancas.

com que emitam pulsos de radiação extremamente regulares pelos seus polos.

Falando um pouco a respeito de teorias que pretendem modificar a RG, uma dessas propostas que vem ganhando crescente interesse em anos recentes é que foi feita por Peter Rastall (RASTALL, 1972). Na teoria de Rastall a suposição de que o tensor de energia-momento deve ser conservado em espaços curvos da mesma forma que ocorre na relatividade restrita é deixada de lado. Ao invés disto, é proposto que a variação deste tensor deve estar associada a curvatura do espaço-tempo, em especial, Rastall sugere que a derivada covariante do tensor de energia-momento é proporcional a derivada do escalar de Ricci. Em (FABRIS, Júlio C. *et al.*, 2015), foi proposto que a teoria de Rastall pode ser interpretada com uma forma efetiva de implementar efeitos quânticos no cenário clássico e no contexto cosmológico foi possível obter resultados que são previstos na cosmologia Loop quantum. Atualmente, já foram feitos alguns estudos de estrelas compactas na teoria de gravidade modificada de Rastall (OLIVEIRA *et al.*, 2015; MOTA *et al.*, 2019a; HANSRAJ *et al.*, 2019; MOTA *et al.*, 2019b; ABBAS; SHAHZAD, 2018a; SALAKO *et al.*, 2018; ABBAS; SHAHZAD, 2018b, 2019). No entanto, todos esses estudos são para estrelas estáticas e ainda nos falta uma análise dos efeitos desta teoria em estrelas rotacionando. Desta forma, neste trabalho pretendemos utilizar o método KEH para fazer este estudo.

Pensando em termos destas questões propusemos o estudo presente nesta tese. O objetivo principal deste trabalho é analisar o efeito da teoria de Rastall no comportamento de estrelas politrópicas rotacionando, e para isso iremos utilizar uma métrica estacionária com simetria axial. No entanto, as equações de campo para estes sistemas são muito complexas para serem resolvidas analiticamente, de modo que iremos utilizar métodos numéricos conforme observamos anteriormente.

Esta tese irá apresentar o seguinte conteúdo: No Capítulo 2 faremos uma breve revisão de alguns conceitos que serão necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho, no Capítulo 3 apresentaremos alguns conceitos importantes no estudo de estrelas e as principais características de uma estrela relativística girando, no Capítulo 4 mostraremos as equações que descrevem esse sistema na RG e que serão usadas no método KEH, no Capítulo 5 apresentaremos a teoria de Rastall e as equações para uma estrela girando nesta teoria, no Capítulo 6 explicaremos como é feito o procedimento numérico para o método KEH, no Capítulo 7 veremos os resultados que foram obtidos até agora e, por fim, no Capítulo 8 apresentaremos nossas conclusões e perspectivas futuras. A partir do estudo apresentado nesta tese escrevemos um artigo que recentemente foi submetido e está em julgamento. Este artigo se encontra no Anexo.

2 REVISÃO DE ALGUNS ELEMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Esta tese tem como objetivo estudar estrelas com rotação no contexto da proposta de Rastall. Atualmente, o melhor modo que dispomos para fazer um estudo desse tipo é considerando a teoria da relatividade geral. Neste capítulo iremos apresentar rapidamente alguns elementos desta teoria que serão necessários no desenvolvimento desta tese. Não temos o objetivo de fazer um desenvolvimento completo da teoria, e sugerimos a consulta da bibliografia existente (WEINBERG, 1973; MISNER *et al.*, 1973; WALD, R., 1984), por exemplo, para a obtenção de tratamentos mais detalhados do assunto, bem como para mais informação e demonstrações.

Para construir a teoria da relatividade restrita Albert Einstein considerou dois postulados, um deles é o princípio da relatividade restrita que estabelece que as leis da física devem ser as mesmas para todos os referenciais inerciais (e o segundo postulado é o princípio da covariância da velocidade da luz). Mais tarde Einstein percebeu que poderia estender o princípio da relatividade para transformações gerais dos sistemas de coordenadas, o que acabou por possibilitar o estudo de campos gravitacionais. Essa interpretação foi possível devido a igualdade entre a massa inercial m_i , que é a massa que encontra-se na segunda lei de Newton, e a massa gravitacional m_g , que é a massa que encontra-se na sua lei da gravitação universal. Em consequência dessa igualdade temos o Princípio de Equivalência de Einstein, de acordo com o qual um observador em queda livre em um campo gravitacional observará as leis da física da mesma forma que um observador em um referencial inercial.

Ao construir a teoria da relatividade geral Einstein chegou à conclusão de que poderia explicar a gravidade em termos da curvatura do espaço-tempo, onde esta curvatura se deve ao conteúdo de matéria e energia presente na região considerada. Assim, para descrever a geometria próxima a uma estrela girando, que é o sistema físico que estudaremos neste trabalho, temos que construir uma métrica que descreva a deformação causada por este objeto no espaço-tempo, como veremos na seção 2.3.

Além disso, para obter mais facilmente as equações da RG podemos nos valer do princípio da covariância geral que é uma forma alternativa de expressar o princípio da equivalência. De acordo com o princípio da covariância geral, as equações da RG devem ser equações que obedecem às leis da relatividade restrita quando nenhum campo gravitacional está presente e que são invariantes por transformações de coordenadas gerais. Diferente do que ocorre na gravitação Newtoniana em que o campo gravitacional é expresso por um potencial escalar, para construir uma teoria que fosse invariante por transformações gerais de coordenadas Einstein concluiu que a RG teria que ser uma teoria tensorial. Por isso na seção 2.1, apresentaremos alguns tensores que são importantes para a compreensão das equações da teoria de Einstein. Na seção 2.2, discutiremos brevemente as equações de campo da RG. E por fim, na seção

2.4, faremos uma breve introdução ao formalismo das tetradas, que serão úteis para a obtenção das equações de campo com as quais iremos trabalhar no decorrer da tese.

2.1 TENSORES

Nesta seção nos limitaremos a apresentar tensores que serão usados neste texto. Para um tratamento mais completo do assunto, sugerimos que o leitor consulte a literatura (WEINBERG, 1973; MISNER *et al.*, 1973; WALD, R., 1984), onde muitos desenvolvimentos de interesse podem ser encontrados. Um tensor de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral é o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, que define a geometria do espaço-tempo. A “distância” infinitesimal invariante ds é definida em termos do intervalo infinitesimal entre dois pontos no espaço-tempo, ds^2 pode ser escrita em termos do tensor métrico como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1)$$

onde α e β variam de 0 a 3. Outro tensor importante na formulação da teoria da relatividade geral é o tensor de curvatura de Riemann–Christoffel $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, que como diz o seu nome fornece informações a respeito da curvatura do espaço-tempo. Se todas as componentes de $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ se anulam em todos os pontos e em todos os tempos de um dado espaço-tempo, então este espaço-tempo é plano. Como esta é uma relação tensorial, irá valer para qualquer sistema de coordenadas. Uma maneira de definir o tensor de Riemann é calculando o comutador da derivada covariante dupla de um vetor (WEINBERG, 1973):

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu &= \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu, \\ R^\mu_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde ∇_α é o símbolo que representa a derivada covariante, que é uma derivada invariante por transformações gerais de coordenadas, e é dada por

$$\nabla_\beta A^\mu_{\nu} = \frac{\partial A^\mu_{\nu}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} A^\mu_{\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha_{\nu}, \quad (3)$$

onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Christoffel, que podem ser escritos em função do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ da seguinte forma

$$\Gamma^\alpha_{\nu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right). \quad (4)$$

Vemos que no exemplo mostrado acima, para a derivada covariante de um tensor de segunda ordem A^μ_{ν} , ela difere da derivada parcial $\partial_\beta A^\mu_{\nu}$ por dois termos que contém símbolos de Christoffel, e isso ocorre essencialmente devido à geometria do espaço-tempo considerado. Supondo $\Gamma^\alpha_{\nu\beta} = 0$ teremos $\nabla_\beta A^\mu_{\nu} = \partial_\beta A^\mu_{\nu}$ e $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$,

ou seja, teremos um espaço plano, e essa conclusão vale para qualquer sistema de coordenadas utilizado para representar este espaço. A princípio, podemos contrair o tensor de Riemann de várias formas diferentes, no entanto, é possível mostrar que o tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ é antissimétrico em relação aos índices α e β e em relação a μ e ν , de modo que, todas as contrações serão ou zero ou iguais a $\pm R_{\alpha\beta}$, onde $R_{\alpha\beta}$ é o chamado tensor de Ricci, e é dado por (WEINBERG, 1973)

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (5)$$

De forma similar, efetuando mais uma contração podemos obter o escalar de Ricci, ou escalar de curvatura

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

que é mais uma quantidade importante no estudo da geometria do sistema. A partir dos tensores apresentados acima, podemos definir o tensor de Einstein, que é dado pela seguinte expressão

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (7)$$

e de acordo com essa definição, podemos ver que como o tensor métrico e o tensor de Ricci são tensores simétricos, o tensor de Einstein também será simétrico, além disso, é simples provar que (WEINBERG, 1973) esse tensor possui divergência nula

$$\nabla^{\alpha}G_{\alpha\beta} = 0. \quad (8)$$

Antes de finalizarmos esta rápida revisão, é interessante considerarmos o tensor de energia-momento $T_{\alpha\beta}$, que será definido na próxima seção. Diferentes sistemas físicos podem ser representados por diferentes formas de $T_{\alpha\beta}$. E deste modo distribuições de matéria e energia no espaço-tempo podem ser representadas por este tensor. No contexto da teoria da RG pode ser interpretado como a fonte do campo gravitacional. Na seção 4.2 iremos apresentar o tensor de energia-momento que descreve um fluido perfeito.

2.2 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Nesta seção iremos, de forma bastante simplificada, mostrar como as equações de Einstein, que possuem papel central na teoria da RG, podem ser obtidas. Para tratamentos mais aprofundados, assim como para se estudar mais interpretações e aplicações da teoria, recomendamos mais uma vez a consulta da vasta bibliografia do assunto (WEINBERG, 1973; MISNER *et al.*, 1973; WALD, R., 1984), por exemplo.

É possível chegar às equações de campo de Einstein de mais de uma forma como pode ser visto, por exemplo, em (WEINBERG, 1973). Uma maneira bastante interessante é utilizado o princípio da mínima ação. A principal vantagem desse método é que com ele fica mais fácil visualizar as relações entre os princípios de simetria e

as leis de conservação, bem como, com este método a formulação das equações é determinada a partir de princípios fundamentais. Para tanto, o primeiro passo é definir uma ação para esse sistema. Vamos considerar um sistema composto por algum tipo de matéria que gera um campo gravitacional. A ação irá então possuir duas contribuições, uma relativa à ação associada ao campo gravitacional, que é a chamada ação de Einstein-Hilbert e a segunda relativa à ação associada ao conteúdo de matéria e energia que compõe esse sistema

$$S = S_G + S_M, \quad (9)$$

onde,

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int R \sqrt{-g} dx^4, \quad (10)$$

é a ação associada ao campo gravitacional e

$$S_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} dx^4, \quad (11)$$

é a ação relativa ao conteúdo de matéria e energia desse sistema. \mathcal{L}_M é a densidade de lagrangiana, de forma que, a lagrangiana do sistema é dada por $L_M = \int d^3x \mathcal{L}_M$. Para implementar o princípio da mínima ação o que devemos fazer é efetuar uma pequena variação na ação da equação (9) e igualar a zero,

$$\delta S = 0, \quad (12)$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$. A ação S no contexto da relatividade geral é um funcional da métrica, de modo que a sua variação deve ser tomada em relação a $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} + R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{\delta (\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} dx^4 \quad (13)$$

que após algumas manipulações pode ser expresso como

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \left[\frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{T_{\mu\nu}}{2} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} dx^4, \quad (14)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\mathcal{L}_M \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (15)$$

desde que \mathcal{L}_M não possua dependência nas derivadas da métrica. É importante observar que ao considerarmos um tensor de energia-momento dado por esta expressão teremos a lei de conservação (WEINBERG, 1973)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (16)$$

Por fim, igualando a equação (14) a zero, iremos encontrar as equações de campo para a RG

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (17)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, dado pela equação (7). Estas equações são conhecidas como equações de campo de Einstein. E relacionam a geometria do sistema, dada por $G_{\mu\nu}$, que é determinado por $R_{\mu\nu}$ e R , com o seu conteúdo de matéria e energia, dado por $T_{\mu\nu}$. Note que tomando a divergência da equação (17) teremos um resultado consistente com os resultados mostrados na seção anterior, pois

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

Podemos utilizar a relação

$$R = -8\pi T, \quad (19)$$

onde $T = T^{\mu}_{\mu}$ é a contração de $T^{\mu\nu}$, para obter uma forma alternativa da equação (17) que é dada por

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (20)$$

A partir da equação acima, podemos observar que no vácuo as equações de campo se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (21)$$

que representa um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares para o campo gravitacional. As equações obtidas nesta seção, irão ser determinadas em sistemas físicos de interesse (estrelas em rotação) e então resolvidas por métodos numéricos em capítulos posteriores.

2.3 MÉTRICAS ESTACIONÁRIAS COM SIMETRIA AXIAL

Resolver as equações de Einstein implica encontrar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para um dado conteúdo energético do sistema, representado por $T^{\mu\nu}$. Estas equações não são simples, são um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, que o próprio Einstein concluiu que dificilmente poderiam ser resolvidas. Um modo de simplificar o problema é observar a simetria do sistema, e assim supor uma forma mais simples para $g_{\mu\nu}$, considerando essas simetrias. Nesta seção apresentaremos alguns resultados desse tipo, que possibilitam a geração de uma classe de soluções.

A métrica que corresponde a um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico é de fundamental importância para estudos no contexto da teoria da RG, pois pode ser utilizada para modelar diversos tipos de sistemas físicos com rotação, como estrelas, galáxias e buracos negros. Esta métrica é representada pelo seguinte elemento de linha (STEPHANI *et al.*, 2009):

$$ds^2 = e^{-2U} \left[e^{2k} \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right) + W^2 d\phi^2 \right] - e^{2U} (dt + A d\phi)^2, \quad (22)$$

onde as funções U , k , W e A dependem das coordenadas (x^1, x^2) , e ϕ é o ângulo azimutal, $\phi \in [0, 2\pi)$. Podemos observar que a métrica acima possui simetria de reflexão $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$. Além disso, é importante notar que, a função presente na métrica, A , está associada a algum tipo de rotação em torno do eixo $\rho = 0$. Assim, eliminando esta rotação ($A = 0$), iremos obter a métrica que representa um espaço-tempo estático com simetria axial, ou seja, a métrica de Weyl (WEYL, 2012).

No vácuo, podemos escrever (22) em coordenadas isotrópicas e fazer $W = x^1$, de modo que a métrica pode ser reescrita nas chamadas coordenadas canônicas de Weyl $(x^1 = \rho, x^2 = z, \sqrt{2}\zeta = \rho + iz)$ (LEWIS, 1932; LEVY; ROBINSON, 1964; PAPAPE-TROU, 1966)

$$ds^2 = -f(dt + Ad\phi)^2 + f^{-1} \left[e^{2k} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2 \right], \quad (23)$$

onde $\rho \in [0, \infty)$ e $z \in (-\infty, \infty)$, e $f = e^{2U}$. O elemento de linha acima é conhecido como forma de Weyl-Lewis-Papapetrou (GRIFFITHS; PODOLSK, 2009). As equações de campo para (23) podem ser escritas como dois conjuntos de equações não-lineares

$$f \left(f_{\rho\rho} + f_{zz} + \rho^{-1} f_{,\rho} \right) - f_{,\rho}^2 - f_{,\rho}^2 + \rho^{-2} f^4 \left(A_{,\rho}^2 + A_{,\rho}^2 \right) = 0, \quad (24)$$

$$\left(\rho^{-1} f^2 A_{,\rho} \right)_{,\rho} + \left(\rho^{-1} f^2 A_{,\rho} \right)_{,\rho} = 0 \quad (25)$$

e

$$k_{,\rho} = \frac{1}{4} \rho f^{-2} \left(f_{,\rho}^2 - f_{,\rho}^2 \right) - \frac{1}{4} \rho^{-1} f^2 \left(A_{,\rho}^2 - A_{,\rho}^2 \right), \quad (26)$$

$$k_{,\rho} = \frac{1}{2} \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,\rho} - \frac{1}{2} \rho^{-1} f^2 A_{,\rho} A_{,\rho}, \quad (27)$$

onde foi utilizada a notação

$$f_{,\rho z} = \frac{\partial f(\rho, z)}{\partial \rho \partial z}. \quad (28)$$

Apesar de não serem lineares, estas equações são conhecidas por serem integráveis. Isso ocorre porque uma vez que tenhamos resolvido as equações (24) e (25) para f e A , a função k sempre pode ser encontrada, em princípio, através de uma quadratura simples (ISLAM, 1985).

Podemos observar que a equação (25) implica na existência de uma função “potencial” $\varphi(\rho, z)$ (ERNST, 1968), dada por

$$\varphi_{,\rho} = -\rho^{-1} f^2 A_{,\rho}, \quad \varphi_{,\rho} = \rho^{-1} f^2 A_{,\rho}. \quad (29)$$

Além disso, podemos definir a função complexa \mathcal{E} como

$$\mathcal{E} = f + i\varphi, \quad (30)$$

Em termos dessa função, as equações (24) e (25) podem ser reescritas como

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \nabla^2 \mathcal{E} = 2 (\nabla \mathcal{E})^2, \quad (31)$$

e aqui $\nabla = \rho^{-1} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \partial_z^2$ é o operador Laplaciano bidimensional. A função \mathcal{E} é conhecida como função de Ernst e a equação (31) é chamada equação de Ernst. Na verdade esta equação é bastante geral, ela é independente do sistema de coordenadas e se aplica a qualquer espaço-tempo que tenha dois vetores de Killing que comutam. Uma forma alternativa da equação de Ernst pode ser obtida redefinindo a função \mathcal{E} como

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad (32)$$

e reescrevendo a métrica (23) em coordenadas esferoidais prolatas

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (R_+ + R_-), \\ y &= \frac{1}{2} (R_+ - R_-), \end{aligned} \quad (33)$$

onde $R_\pm^2 = \rho^2 + (z \pm 1)^2$, de modo que, a equação (31) ficará como

$$\begin{aligned} &(\xi \bar{\xi} - 1) \left[(x^2 - 1) \xi_{,xx} + 2x \xi_{,x} + (1 - y^2) \xi_{,yy} - 2y \xi_{,y} \right] \\ &= 2 \bar{\xi} \left[(x^2 - 1) \xi_{,x}^2 + (1 - y^2) \xi_{,y}^2 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Uma das soluções mais simples desta equação é dada por

$$\xi = \rho x + i q y, \quad (35)$$

onde p e q são parâmetros reais que satisfazem a condição $p^2 + q^2 = 1$. É possível mostrar que esta solução é equivalente à métrica de Kerr (GRIFFITHS; PODOLSK, 2009; ERNST, 1968), que descreve o espaço-tempo para um buraco negro em rotação.

Uma forma de simplificar (23) é introduzindo a simetria cilíndrica, ou seja, fazendo as funções métricas dependentes apenas de ρ . Neste caso, é conveniente reescrever $k = \mu + \frac{1}{2} \log f$, de modo, que nosso elemento de linha fica

$$ds^2 = -f (dt + A d\phi)^2 + e^{2\mu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 f^{-1} d\phi^2. \quad (36)$$

A família geral de soluções das equações de campo (eq. (21)) para esta métrica foi obtida independentemente por Lanczos (LANCZOS, 1924) e Lewis (LEWIS, 1932), e é dada por

$$f = \rho \left(a \rho^{-n} - \frac{c^2}{n^2 a} \rho^n \right), \quad (37)$$

$$e^{2\mu} = \kappa^2 \rho^{(n^2-1)/2}, \quad (38)$$

$$A = \frac{c}{na} \rho^{n+1} f^{-1} + b, \quad (39)$$

onde n , a , b , c e κ são parâmetros.

2.4 TETRADAS

Como podemos observar, os cálculos que aparecem na teoria da RG são quase sempre muito longos e podem apresentar muitas dificuldades, tanto técnicas como de interpretação. Assim, a introdução de métodos com o intuito de simplificar esses cálculos é bastante desejável. Um desses métodos é o chamado formalismo das tetradas, que nada mais é que um modo alternativo de escrever o tensor métrico, e assim também o tensor de curvatura.

Devido ao Princípio de Equivalência podemos estabelecer em cada ponto X do espaço-tempo um sistema de coordenadas $\xi_X^{(a)}$, onde $a = 0, \dots, 3$, que é localmente inercial em X . Além disso, também podemos construir em cada ponto X uma base de vetores ortogonais em 4-dimensões $\mathbf{e}^{(a)}$, que são chamados de tetradas, ou *vierbien*. A escolha desses vetores é feita com base nas simetrias do espaço-tempo e, além disso, três deles devem ser do tipo-espaço e um do tipo-tempo. A base de tetradas é construída de tal forma que a relação entre a métrica $g_{\mu\nu}$ em um sistema de coordenadas não-inercial geral x^μ e o tensor de Minkowski $\eta_{(a)(b)}$ pode ser dada pela seguinte expressão (WEINBERG, 1973)

$$g_{\mu\nu}(x) = \mathbf{e}^{(a)}_{\mu}(x) \mathbf{e}^{(b)}_{\nu}(x) \eta_{(a)(b)} \quad (40)$$

onde,

$$\mathbf{e}^{(a)}_{\mu}(x) = \left(\frac{\partial \xi_X^{(a)}(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=X} \quad (41)$$

As tetradas podem ser vistas como uma generalização do conjunto de vetores ortonormais \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} em R^3 (RYDER, 2009), onde

$$\mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{e}_{(3)} = \mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (42)$$

O formalismo das tetradas é bastante importante para o trabalho com espinores em espaço-tempos curvos, além disso, ao escolher um sistema de coordenadas inercial local conveniente, podemos utilizar este formalismo para simplificar significativamente um sistema de equações e visualizar mais claramente as propriedades de um espaço-tempo. Apesar de normalmente serem escritas com dois índices, as tetradas são vetores covariantes e não tensores, o índice entre parênteses nos indica a qual vetor

estamos nos referindo, já o índice sem parênteses nos indica a qual componente do tensor contravariante estamos nos referindo.

Algumas das propriedades das tetradas são:

$$\mathbf{e}_{(a)\mu} = \eta_{(a)(b)} \mathbf{e}^{(b)}_{\mu}, \quad \mathbf{e}_{(a)\mu} = g_{\mu\nu} \mathbf{e}_{(a)}^{\nu}, \quad (43)$$

$$\mathbf{e}^{(a)}_{\mu} = \eta^{(a)(b)} \mathbf{e}_{(b)\mu}, \quad \mathbf{e}_{(a)}^{\mu} = g^{\mu\nu} \mathbf{e}_{(a)\nu}, \quad (44)$$

$$\mathbf{e}_{(a)\mu} \mathbf{e}_{(b)}^{\mu} = \eta_{(a)(b)}, \quad \mathbf{e}_{(a)\mu} \mathbf{e}^{(a)}_{\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (45)$$

$$\mathbf{e}^{(a)}_{\mu} \mathbf{e}_{(b)}^{\mu} = \delta^{(a)}_{(b)}, \quad \mathbf{e}_{(a)}^{\mu} \mathbf{e}^{(a)}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (46)$$

Para projetar um tensor $A_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$ em uma base de tetradas $\mathbf{e}_{(m)}^{\mu}$, $\mathbf{e}_{(n)}^{\nu}$, ..., $\mathbf{e}_{\alpha}^{(a)}$, $\mathbf{e}_{\beta}^{(b)}$, ... devemos proceder da seguinte forma

$$A_{(m)(n)\dots}^{(a)(b)\dots} = \mathbf{e}_{(m)}^{\mu} \mathbf{e}_{(n)}^{\nu} \dots \mathbf{e}_{\alpha}^{(a)} \mathbf{e}_{\beta}^{(b)} \dots A_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}. \quad (47)$$

Este formalismo será utilizado na Seção 4.3 para facilitar a obtenção das equações de campo com as quais iremos trabalhar.

Neste capítulo, revisamos então algumas ideias básicas presentes na teoria da RG que serão utilizadas no desenvolvimento desta tese.

3 ESTRELAS

As estrelas podem ser definidas de forma bastante simplificada como grandes esferas de gás, com diâmetro variando de algumas dezenas de quilômetros até 1000 vezes o diâmetro do Sol, que se encontram em equilíbrio devido ao balanço entre a atração gravitacional e a pressão de radiação produzida pela fusão nuclear. As estrelas são compostas principalmente por hidrogênio, seguido por hélio e pequenas frações de elementos mais pesados, e estrelas com atmosferas externas mais frias como o Sol podem formar várias moléculas simples (RUSSELL, 1934; TSUJI, 1986). Quase todas as características de uma estrela, como luminosidade, tamanho e evolução, por exemplo, são determinadas por sua massa inicial e podem ter massas que variam de por volta de $0.08M_{\odot}$ (FILIPPAZZO *et al.*, 2015) até $150M_{\odot}$ (FIGER, 2005; WEIDNER; KROUPA, 2004). Em relação ao tempo de vida, as estrelas mais massivas queimam seu combustível rapidamente devido a grande pressão em seus núcleos, e por isso possuem um tempo de vida menor, da ordem de alguns poucos milhões de anos. Já as estrelas com massa pequena queimam lentamente e, por isso, podem durar de dezenas a centenas de bilhões de anos (LAUGHLIN *et al.*, 1997). O elemento chave para obtermos informações sobre as estrelas é o estudo da radiação eletromagnética emitida por elas. Esta radiação pode se encontrar em várias faixas do espectro como infravermelho, visível e ultravioleta, por exemplo. Atualmente, temos uma nova forma de estudo das estrelas que é através da análise de ondas gravitacionais (ABBOTT, Benjamin P *et al.*, 2016; ABBOTT, B. *et al.*, 2019).

Nas próximas seções vamos expor rapidamente algumas características gerais do estudo das estrelas, incluindo estrelas de nêutrons e então mostraremos como é possível estudá-las no contexto da teoria da relatividade geral. Finalizaremos este capítulo com a apresentação da equação de estado politrópica, que será utilizada nos próximos capítulos.

3.1 DIAGRAMA H-R

O diagrama de Hertzsprung–Russell, também chamado de diagrama H-R, mostrado na Figura 1, foi desenvolvido independentemente por Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell, por volta de 1910, e representa a relação entre a temperatura superficial e a luminosidade das estrelas. Podemos observar que a maioria das estrelas se encontram na região chamada de Sequência Principal, como o Sol. As estrelas que aparecem mais próximas do Sol têm todas aproximadamente a mesma temperatura e luminosidade, como Alpha Centauri, por exemplo, e se seguimos a sequência para a esquerda vamos encontrar estrelas mais luminosas e quentes como Spica. Se seguimos a sequência para a direita encontraremos estrelas mais frias e menos brilhantes como Próxima Centauri. Essas relações entre tamanho, temperatura e luminosidade

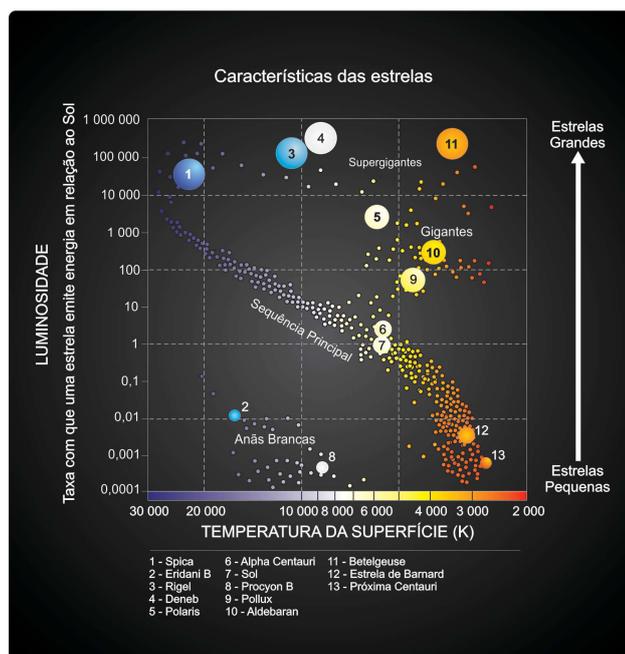


Figura 1 – Esta figura representa um diagrama de Hertzsprung–Russell, em que são destacadas algumas estrelas próximas do Sol.

Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/diagramaHR.jpg>

podem ser melhor entendidas quando analisamos a equação de Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (48)$$

onde L é a luminosidade, R é o raio da estrela, T é a temperatura e σ é a constante de Stefan-Boltzmann. A partir desta equação podemos ver que dadas duas estrelas com temperaturas semelhantes, como o Sol e Polaris, a estrela que tiver um raio maior terá também uma luminosidade maior. Se continuamos a analisar o diagrama H-R também podemos observar no canto superior direito as estrelas chamadas de Gigantes e Supergigantes, como Aldebaran e Betelgeuse respectivamente, essas estrelas são mais frias que o Sol mas possuem um raio muito maior, e por isso uma luminosidade maior. Já no canto inferior esquerdo estão as Anãs Brancas, como Eridani B, que são estrelas que são muito quentes mas também muito pequenas, e por isso possuem uma luminosidade baixa.

3.2 CICLO DE VIDA DAS ESTRELAS

As estrelas costumam se formar principalmente nas nuvens moleculares, também chamadas de berçários estelares. Estas nuvens são um tipo de nuvem interestelar onde existem condições favoráveis para a formação de moléculas, especialmente de hidrogênio (H_2), e elas se encontram principalmente nos braços espirais de galáxias. O início da vida de uma estrela é um período bastante turbulento em que podem ocorrer grandes mudanças em sua massa, temperatura e diâmetro. Quando uma estrela

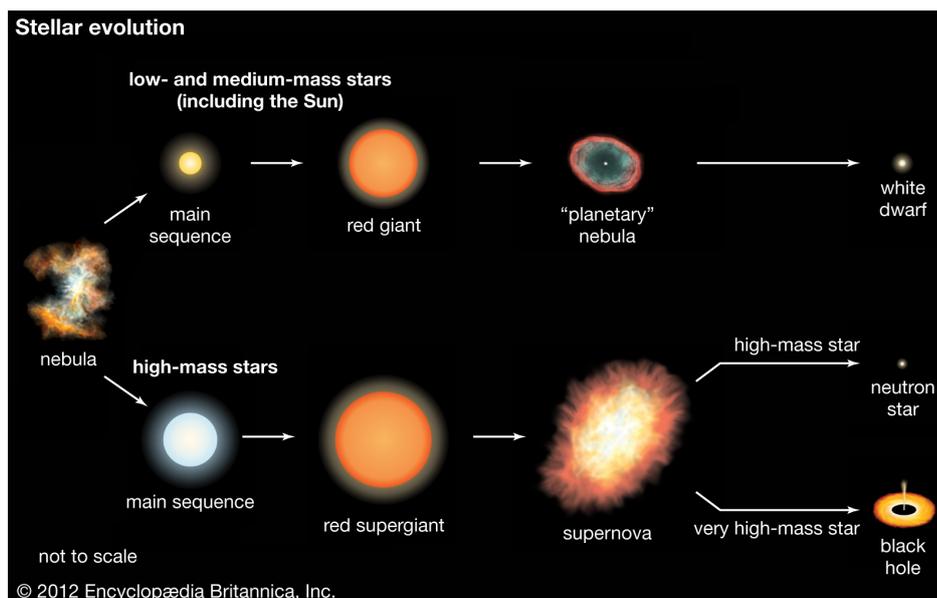


Figura 2 – Ciclo de vida das estrelas.

<https://www.britannica.com/science/star-astronomy/Star-formation-and-evolution>

[//www.britannica.com/science/star-astronomy/Star-formation-and-evolution](https://www.britannica.com/science/star-astronomy/Star-formation-and-evolution)

jovem se contrai, e conseqüentemente, se aquece o suficiente, o processo de fusão de hidrogênio se inicia em seu núcleo. Durante esse processo de fusão, quatro núcleos de hidrogênio se juntam para formar um núcleo de hélio e energia é liberada, isso ocorre porque a massa do núcleo de hélio é um pouco menor que a massa dos quatro núcleos de hidrogênio. E assim, essa energia liberada pelo processo de fusão começa a compensar a atração gravitacional. “Pouco tempo” após esse processo se iniciar as estrelas chegam à seqüência principal. O período em que as estrelas ficam na seqüência principal costuma ser relativamente estável e longo, no caso do Sol esse período é estimado para durar 11 bilhões de anos. Isso ocorre porque durante esse período as estrelas irão liberar energia devido à fusão termonuclear, e elas têm muito combustível para o processo de fusão porque cerca de 90% de sua composição é de hidrogênio. Na Figura 2 podemos observar o ciclo de vida das estrelas. Quando todo o hidrogênio do núcleo da estrela é consumido, a estrela fica com um núcleo de hélio e ao redor do núcleo uma casca de hidrogênio. Quando esse processo ocorre, as camadas mais externas da estrela se expandem e esfriam intensamente formando uma gigante vermelha, no caso das estrelas com massa até $8 - 9M_{\odot}$, e uma supergigante vermelha no caso das estrelas mais massivas. Nesta casca de hidrogênio o processo de fusão continua ocorrendo de modo que o núcleo de hélio continua aumentando, até que a temperatura é alta o suficiente e o processo de fusão do hélio começa, quando isso ocorre a estrela encolhe e aumenta de temperatura rapidamente. Se a estrela for massiva o suficiente um núcleo de carbono será formado devido a outras reações de fusão e quando houver temperatura suficiente a fusão de carbono começa. Esse processo pode continuar formando núcleos de elementos cada vez mais pesados até

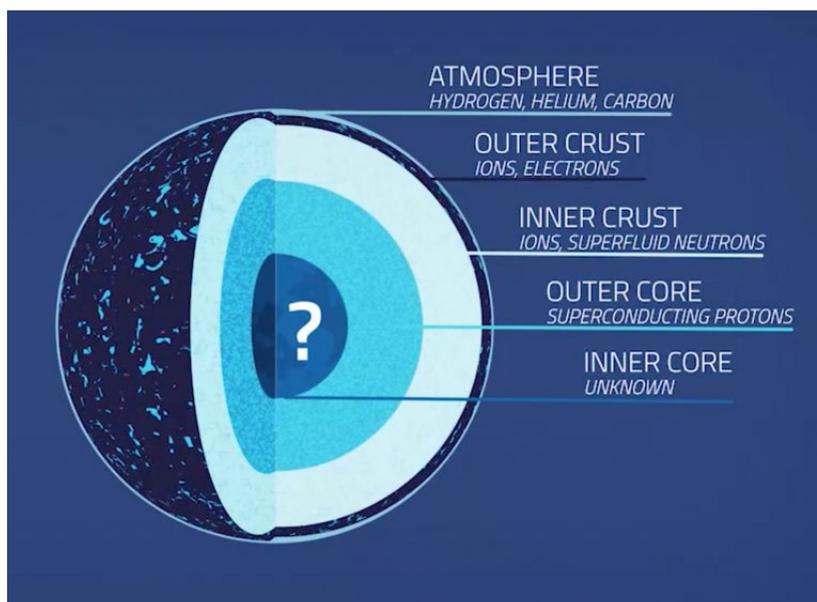


Figura 3 – Esta figura mostra um modelo para a estrutura de uma estrela de nêutrons.
Fonte: NASA's Goddard Space Flight Center

<https://svs.gsfc.nasa.gov/20267>

chegar ao ferro. Quando uma estrela começa a produzir ferro, ela se torna instável porque o núcleo de ferro é o que tem maior energia de ligação por núcleon, de forma que o processo de fusão do ferro é endotérmico, ou seja, ao invés de liberar ele absorve energia. De um modo geral, quando uma estrela já não consegue mais produzir energia capaz de contrabalançar a atração gravitacional ela começa a colapsar, e o fim da vida das estrelas também irá depender de sua massa, quanto menos massiva a estrela mais tranquilo será seu fim, e quanto mais massiva mais catastrófico. Nas estrelas menos massivas o seu núcleo irá se comprimir até atingir uma densidade de aproximadamente 10^{10}Kg m^{-3} (PICAZZIO, 2011), e as camadas mais externas serão expelidas lentamente, assim o núcleo dessa estrela irá se tornar uma anã-branca e as camadas expelidas formarão uma nebulosa planetária. Já no caso das estrelas mais massivas o processo de colapso irá ocorrer de forma muito mais violenta de modo que uma enorme onda de choque é formada e as camadas externas da estrela são expelidas de forma explosiva, e esse evento é chamado de explosão de supernova. Se a estrela tiver até por volta de $25 - 29 M_{\odot}$ (MAEDER, A., 2008) o produto do núcleo comprimido será uma estrela extremamente compacta e composta basicamente por nêutrons, que chamamos de estrela de nêutrons, que será discutida com um pouco mais de detalhes na próxima seção. Já se a estrela tiver uma massa ainda maior o resultado do colapso de seu núcleo será um buraco negro.

3.3 ESTRELAS DE NÊUTRONS

Como vimos na seção anterior, as estrelas de nêutrons surgem a partir do colapso de uma estrela super massiva. As estrelas de nêutrons possuem um raio da ordem de 10Km e uma massa de $1-2M_{\odot}$, de forma que podem ter uma densidade central de 5 – 10 vezes a densidade de saturação nuclear ρ_{sat} , onde $\rho_{sat} = 2.8 \times 10^{14}\text{g cm}^{-3}$. Devido à conservação de momento angular durante o processo de colapso, estas estrelas podem ter uma grande velocidade de rotação, sendo que a estrela de nêutrons mais rápida conhecida possui uma frequência de 716Hz (HESSELS *et al.*, 2006). Além disso, essas estrelas podem ter intensos campos magnéticos, da ordem de 10^{12}G (BLANDFORD *et al.*, 1983; ROMANI, 1990). Nestas estrelas a atração gravitacional é contrabalançada pela pressão de degenerescência dos nêutrons e por forças nucleares repulsivas (ÖZEL; FREIRE, 2016). O atual interesse no estudo de massas e raios de estrelas de nêutrons não se deve apenas ao interesse de testar a física em novos regimes mas, também devido ao papel importante que as estrelas de nêutrons desempenham em vários fenômenos explosivos, transitórios e não eletromagnéticos (HESSELS *et al.*, 2006).

Na Figura 3 podemos observar um modelo proposto para a estrutura de uma estrela de nêutrons, na parte mais externa se encontra uma atmosfera composta de uma fina camada de plasma, apesar de possuir apenas alguns centímetros de espessura essa parte da estrela de nêutrons é de fundamental importância. A partir da radiação emitida por esta camada podemos determinar propriedades importantes da superfície como a temperatura superficial efetiva e composição química bem como os valores de massa e raio da estrela. Quanto mais fria e magnetizada a estrela mais fina será sua atmosfera, de modo que há suposições que nos casos mais extremos a superfície da estrela de nêutrons seja líquida ou sólida (HAENSEL *et al.*, 2007). Abaixo da atmosfera está o envelope, também chamado de crosta externa porque uma grande parte desta camada está geralmente solidificada. O envelope se estende por algumas centenas de metros até atingir uma densidade de aproximadamente $\rho_{ND} \approx 4 \times 10^{11}\text{g cm}^{-3}$ na parte mais interna, e possui uma composição semelhante à de uma anã-branca, ou seja, núcleos e elétrons relativísticos degenerados. Abaixo do envelope está o manto, também chamado de crosta interna, esta camada pode ter por volta de 1Km de espessura, e sua densidade varia de ρ_{ND} na parte mais externa até aproximadamente $\approx 0.5\rho_{sat}$ na parte mais interna. Esta camada é composta de elétrons, nêutrons livres e núcleos atômicos ricos em nêutrons, acredita-se que a matéria desta camada pode estar em um estado de superfluido. Seguindo mais para dentro da estrela encontramos o núcleo externo, esta camada possui vários quilômetros de espessura e sua densidade vai de $\approx 0.5\rho_{sat}$ até $\approx 2\rho_{sat}$. Acredita-se que esta camada é composta principalmente por nêutrons, prótons, elétrons e múons fortemente degenerados e possivelmente em estado de superfluido. Na parte central

da estrela está o núcleo interno, que começa a partir de densidades $\approx 2\rho_{sat}$ e pode se estender por vários quilômetros. Ainda não há consenso a respeito da natureza da matéria que compõe esta região, e existem várias hipóteses sobre sua composição, sendo as principais: matéria de híperons, condensados de bósons, condensados de Bose-Einstein e matéria de quarks desconfinados.

Uma equação de estado muito utilizada para a descrição da matéria da crosta externa é dada pelo modelo BPS (BAYM *et al.*, 1971). Para a descrição da crosta interna, um modelo bem conhecido é o que foi desenvolvido por Negele e Vautherin (NEGELE; VAUTHERIN, 1973) mas, atualmente existem vários trabalhos que apresentam melhorias à este modelo. Para o caso do núcleo da estrela de nêutrons, ainda existem muitas incertezas quanto às equações de estado para densidades maiores que $2\rho_{sat}$, apesar de haver consenso em relação a algumas propriedades que estas equações devem possuir.

De modo geral, o estudo de uma estrela relativística pode incluir várias características, que tornam seu tratamento cada vez mais complexo, tais como a existência de uma crosta sólida, campo magnético, talvez um interior composto de superfluido ou até mesmo um núcleo de quarks, entre outros. No entanto, dependendo de qual fase da vida e sob qual ponto de vista queremos estudar a estrela, o problema pode ser consideravelmente simplificado. Pouco tempo após a sua formação, a temperatura de uma estrela de nêutrons se resfria para aproximadamente $10^{10}K \approx 1MeV$ (PASCHALIDIS; STERGIOULAS, 2016), este valor é muito menor que a energia de Fermi ($\approx 60MeV$) do seu interior. Assim, podemos dizer que uma estrela de nêutrons é uma estrela fria, e assumir que a temperatura será $0K$. Além disso, a matéria estelar pode ser modelada como um fluido perfeito pois, de acordo com (FU; LAI, 2012), se houverem desvios do equilíbrio de um fluido perfeito eles serão de ordem pequena. Por fim, existem vários modelos (FLOWERS, Elliott; ITOH, Naoki, 1976; FLOWERS; ITOH, 1979; CUTLER; LINDBLUM, 1987; HEGYI, 1977; SHAPIRO, 2000) que sugerem que estrelas de nêutrons só apresentam forte rotação diferencial na sua formação, após isso vários mecanismos podem agir de forma a favorecer uma rotação uniforme.

Considerando todos os argumentos acima, vemos que, em uma primeira aproximação, uma estrela de nêutrons pode ser tratada como uma estrela relativística fria rotacionando isoladamente. Um modelo inicial e simplificado pode ser elaborado considerando um fluido perfeito com rotação uniforme e com uma equação de estado barotrópica de um parâmetro:

$$\varepsilon = \varepsilon(p), \quad (49)$$

onde ε é a densidade de energia e p é a pressão. Salientamos que, a princípio utilizaremos uma equação de estado mais simples porque nosso foco é resolver as equações de campo para as funções da métrica e assim obter características gerais para o sistema estudado. Uma vez que tenhamos feito isso, é possível utilizar o nosso for-

malismo para obter soluções para equações de estado mais realistas. Considerando então estas hipóteses, pode-se obter as equações do modelo e os resultados, a partir de cálculos numéricos.

3.4 ESTRELAS RELATIVÍSTICAS

Podemos explicar de forma razoável o campo gravitacional da maioria das estrelas que observamos no céu com a gravitação Newtoniana (WEINBERG, 1973). No entanto, para descrever de modo adequado o campo gravitacional de estrelas compactas como a estrelas de nêutrons necessitamos da RG, uma vez que neste caso temos campos gravitacionais muito intensos. A forma mais comum de se modelar uma estrela de nêutrons é como um corpo esférico e estático, composto de fluido perfeito. Para descrever a geometria do espaço-tempo associado a esta estrela é utilizada uma métrica estática e esfericamente simétrica que pode ser dada pelo seguinte elemento de linha em coordenadas esféricas

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (50)$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são funções a serem determinadas. Para encontrar a solução dessa métrica no vácuo, que é uma solução na região externa à estrela, vamos utilizar as equações de campo de Einstein (21), ou seja, vamos calcular o tensor de Ricci e igualá-lo a zero, de modo que encontraremos as seguintes equações não triviais:

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} = 0, \quad (51)$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} = 0, \quad (52)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = 0. \quad (53)$$

A equação para $R_{\phi\phi}$ também é não trivial mas, não foi escrita porque é igual à equação para $R_{\theta\theta}$. A solução das equações (51), (52) e (53) é a famosa métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (54)$$

onde M é a massa total da estrela.

Para determinar $A(r)$ e $B(r)$ no interior estelar vamos utilizar as equações de campo (20), de forma que agora também precisamos de informação sobre a matéria que compõe a estrela. Como já mencionado, o modelo mais simples que podemos considerar para um estrela de nêutrons é supor que ela seja um corpo composto de

fluido perfeito, por isso, vamos utilizar o tensor de energia-momento para um fluido perfeito, dado por

$$T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (55)$$

onde ρ é a densidade de energia própria total, p é a pressão própria. Assim, calculando a equação (20) vamos obter:

$$\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{rA} = 4\pi(\rho + 3p)B, \quad (56)$$

$$-\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} = 4\pi(\rho - p)A, \quad (57)$$

$$1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = 4\pi(\rho - p)r^2. \quad (58)$$

Se manipularmos as equações (56), (57) e (58) podemos encontrar a seguinte expressão para $A(r)$ (WEINBERG, 1973)

$$\left(\frac{r}{A} \right)' = 1 - 8\pi\rho r^2. \quad (59)$$

Considerando a expressão acima, podemos redefinir a função $A(r)$ em termos de uma nova função $m(r)$ da seguinte forma:

$$A(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \quad (60)$$

onde,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (61)$$

A partir da equação acima podemos identificar a função $m(r)$ como sendo a massa da estrela no raio r . Assim, se definirmos o raio total da estrela como sendo $r = R$, teremos que $M = m(R)$.

Para encontrar a solução para (50) no interior estelar, além das equações de campo também precisamos da equação de equilíbrio hidrostático, que pode ser obtida a partir da lei de conservação do tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, que para esse sistema será dada por

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{\rho + p}. \quad (62)$$

Combinando a equação (62) com as equações (60) e (58), vamos encontrar a equação

$$p' = -\frac{m}{r^2} \rho \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \rho}{m} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad (63)$$

que é conhecida como a equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV).

Por fim, para poder resolver as equações apresentadas para a parte interna da estrela, é necessário fornecer uma equação de estado, ou seja, uma relação entre a pressão p e a densidade ρ . Uma vez que tenhamos estabelecido a relação entre p e ρ , vamos ficar com um sistema com três equações (61), (62) e (63) e três funções a serem determinadas $m(r)$, $B(r)$ e $p(r)$, de modo que, aplicando as condições de contorno adequadas podemos encontrar uma solução para a métrica (50) no interior estelar.

Neste trabalho iremos empregar uma EoS politrópica, por isso, na próxima seção iremos estudar como esta EoS é obtida.

3.5 EQUAÇÃO DE ESTADO POLITRÓPICA

Uma parte importante do estudo das estrelas de nêutrons é a construção de equações de estado com o intuito de descrever de forma realista a matéria no seu interior. No entanto, o principal interesse deste trabalho é estudar estrelas compactas em rotação para então aplicar estes estudos à teoria de Rastall. Contudo, é só observar as equações de Einstein para verificar que a não consideração de simetria esférica faz com que a solução das equações fique muito mais difícil, e praticamente impeça com que estas sejam resolvidas analiticamente. Desse modo, é razoável inicialmente formular a teoria em termos de uma equação de estado de fácil manipulação e tentar entender quais alterações uma teoria de gravidade modificada produz nas quantidades físicas e principalmente no espaço-tempo associado a esses objetos. Por isso, optamos por trabalhar com a EoS politrópica, que é dada por uma expressão analítica simples e, portanto, é de mais fácil manipulação.

Para obter a EoS que iremos utilizar, vamos começar lembrando que na teoria da relatividade restrita a energia total E devida ao movimento de translação de uma partícula pode ser dada em função da massa m dessa partícula pela seguinte expressão:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (64)$$

onde v é a velocidade relativa entre a partícula e o observador e m_0 é a massa de repouso da partícula. Também vamos lembrar que o volume V ocupado por um corpo depende da velocidade relativa entre o corpo e o observador

$$V = V_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad (65)$$

de modo que V_0 é o volume quando $v = 0$, ou seja, é o volume de repouso. Assim, podemos definir a densidade de energia translacional ε de um sistema como sendo a energia total por unidade de volume de repouso $\varepsilon = E/V_0$. De modo que podemos

reescrever a equação (64) da seguinte forma

$$\varepsilon = \rho c^2 = \frac{\rho_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (66)$$

onde, ρ é a densidade de massa, dada por $\rho = m/V$, e ρ_0 é a densidade de massa de repouso, dada por $\rho_0 = m_0/V_0$. As equações (64) e (66) são válidas tanto para sistemas macroscópicos quanto microscópicos.

Agora vamos considerar um gás ideal relativístico, ou seja, um sistema relativístico de partículas microscópicas não interagentes. Nesse caso a pressão p pode ser dada em função da densidade de massa de repouso ρ_0 pela seguinte expressão (LANDAU; LIFSHITZ, 2000):

$$p = \frac{\rho_0 v^2}{3(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (67)$$

na expressão acima a velocidade v é uma média da velocidade de translação das partículas do sistema. Combinando as equações (66) e (67), vamos obter

$$p = \frac{\varepsilon v^2}{3c^2}. \quad (68)$$

Para generalizar a equação (68) para um sistema de partículas interagentes podemos substituir a densidade de energia ε pela densidade de energia total ε_t do sistema. A densidade de energia total inclui todas as formas de energia do sistema como a energia de repouso E_0 , a energia cinética de translação $E^{(cin)}$, a energia de interação das partículas $E^{(int)}$ (com exceção da interação gravitacional), entre outras. Além disso, também vamos trocar o fator $1/3$ por uma constante arbitrária β , de forma que iremos obter (HOREDTE, 2006)

$$p = \frac{\beta \varepsilon_t v^2}{c^2} = \beta \rho v^2. \quad (69)$$

No limite relativístico extremo, ou seja, quando $v \rightarrow c$, vamos obter a seguinte EoS:

$$p = \beta \varepsilon_t = \beta c^2 \rho \quad (70)$$

O primeiro a estudar objetos politrópicos no contexto da RG foi Tooper em 1964 (TOOPER, 1964), neste trabalho ele utilizou uma EoS politrópica que generaliza a EoS da equação (70) da seguinte forma (TOOPER, 1964; HOREDTE, 2006)

$$p = K \rho^{1+1/N}, \quad (71)$$

onde K e N são constantes. Esta EoS politrópica dada pela equação (71) também foi utilizada em outros trabalhos como, por exemplo, em (KOMATSU *et al.*, 1989a, 1989b), e será a EoS que iremos utilizar neste estudo. A partir desses resultados, a generalização para EoSs relativísticas pode ser feita de modo direto.

Uma outra forma da EoS politrópica que também é bastante utilizada para o estudo de estrelas compactas (COOK *et al.*, 1992; DONEVA *et al.*, 2013; KLEIHAUS *et al.*, 2016) é dada pelas seguintes expressões:

$$\rho = K\rho_0^{1+1/N}, \quad \varepsilon = c^2\rho_0 + N\rho. \quad (72)$$

A derivação das expressões acima podem ser encontradas em (TOOPER, 1965; HORREDT, 2006).

Devido à sua grande densidade de massa, as estrelas de nêutrons podem ser objetos altamente relativísticos e, por isso, boas candidatas para o estudo de teorias de gravidade modificada. Atualmente, temos muitos estudos de estrelas sem movimento de rotação em teorias de gravidade modificada, como por exemplo em (HARADA, 1998; ORELLANA *et al.*, 2013; MOMENI; MYRZAKULOV, 2015; OLIVEIRA *et al.*, 2015; HENDI *et al.*, 2016; MOTA *et al.*, 2019a). No entanto, ainda existem poucos estudos desse tipo para estrelas com rotação lenta (DAMOURE; ESPOSITO-FARESE, 1996; SOTANI, 2010; PANI *et al.*, 2011; ALI-HAIMOUD; CHEN, 2011; STAYKOV *et al.*, 2014; SILVA *et al.*, 2015) e rotação rápida (DONEVA *et al.*, 2013, 2015; YAZADJIEV *et al.*, 2015; KLEIHAUS *et al.*, 2016; DONEVA; YAZADJIEV, 2016; DONEVA *et al.*, 2018; ASTASHENOK; ODINTSOV, 2020). Apesar de muitas vezes ser deixada de lado a rotação está presente desde a formação até os estágios finais da vida de uma estrela, e em algumas situações pode ter um papel dominante na sua evolução (MAEDER, A., 2008). Atualmente, quase todas as medidas precisas de massa de estrelas de nêutrons que possuímos são obtidas a partir de sistemas binários de pulsares rotação (ÖZEL; FREIRE, 2016), com frequências de até 716Hz (HESSELS *et al.*, 2006). Além disso, a rotação também tem um papel fundamental nas erupções de raios gama (MAEDER, A., 2008), que também são uma valiosa fonte de informações sobre objetos compactos. Por isso, neste trabalho iremos nos dedicar ao estudo de estrelas compactas com rotação rápida e no próximo capítulo iremos apresentar as equações que descrevem este tipo de sistema físico.

4 ESTRELAS EM ROTAÇÃO

Neste capítulo iremos estudar uma estrela relativística com rotação, a partir de um modelo simples baseado nas ideias do Capítulo 2. Começaremos apresentando a métrica para uma estrela relativística em rotação e a seguir introduziremos o tensor de energia-momento para um fluido perfeito. Na seção 4.3 obteremos as equações de campo e sua forma integral. Na última seção, encontraremos a equação de conservação do tensor de energia-momento e apresentaremos a lei de rotação e a equação de estado para nosso sistema. Estas são as equações consideradas em (KOMATSU *et al.*, 1989a).

4.1 ELEMENTO DE LINHA

Considerando as premissas apresentadas no Capítulo 2, podemos observar que a métrica $g_{\alpha\beta}$, que representa o espaço-tempo de uma estrela rotacionando em equilíbrio, pode ser considerada como estacionária e com simetria axial, ou seja, pode ser dada pela métrica da equação (22). Para obter a forma da métrica que iremos utilizar neste trabalho, devemos fazer as seguintes substituições na equação (22)

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta, \\ x^2 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (73)$$

e

$$U = \frac{1}{2} \log (1 - \zeta^2) + \nu, \quad (74)$$

$$k = \alpha + \frac{1}{2} \log (1 - \zeta^2) + \nu, \quad (75)$$

$$W = \frac{\zeta e^{2\nu}}{\omega}, \quad (76)$$

$$A = -\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \omega}, \quad (77)$$

onde $\zeta = r\omega e^{\beta-\nu} \sin \theta$. Uma vez feitas as substituições vamos encontrar o seguinte elemento de linha (KOMATSU *et al.*, 1989a)

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{2\beta} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (78)$$

onde α , β , ν e ω são os potenciais da métrica, e esses potenciais dependem somente de r e θ . Esta métrica é amplamente utilizada no estudo de estrelas em rotação (ERIGUCHI *et al.*, 1994; COOK *et al.*, 1994b, 1992, 1994a; STERGIOLAS, 1996; URYŪ; TSOKAROS, 2012). A função ω da métrica representa o arrastamento dos

referenciais inerciais locais (efeito Lense-Thirring), ou seja, a rotação da estrela faz com que a estrutura do espaço-tempo seja afetada por esta rotação. Desta forma, observadores localmente sem rotação (*Zero angular momentum observer* (ZAMO)) serão vistos por um observador estático no infinito com uma velocidade angular ω (HOREDT, 2006; PASCHALIDIS; STERGIOULAS, 2016).

Se $g_{tt} < 0$ em toda parte, dizemos que o espaço-tempo é estritamente estacionário. No entanto, da mesma forma que ocorre com buracos negros, em alguns modelos de estrelas com rotação rápida podem aparecer regiões, chamadas ergosferas, em que $g_{tt} > 0$. Neste trabalho vamos considerar que não há correntes meridionais no fluido, de modo que o espaço-tempo é circular. Além disso, o espaço-tempo é assintoticamente plano, ou seja, para regiões espaciais infinitamente distantes da estrela nossa métrica deve ter a métrica de Minkowski como limite.

4.2 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO

Como já mencionado, iremos modelar a matéria da estrela como um fluido perfeito, que é um fluido ou gás em que, se estivermos localmente em repouso em relação a um elemento do sistema, vamos observar apenas uma pressão isotrópica ao nosso redor. Um fluido perfeito não deve apresentar viscosidade, tensões tangenciais ou condução de calor, e pode ser representado pelo seguinte tensor de energia-momento:

$$T^{\alpha\beta} = pg^{\alpha\beta} + (\varepsilon + p) u^\alpha u^\beta, \quad (79)$$

onde ε é a densidade de energia, p é a pressão, $g^{\alpha\beta}$ é o tensor métrico, que no nosso caso é dado pela equação (78), e u^α é a quadrivelocidade que é dada por:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} (1, 0, 0, \Omega). \quad (80)$$

Na equação acima v é a velocidade usual em 3 dimensões no referencial ZAMO, e é dada em termos das funções da métrica (78) como (HOREDT, 2006; PASCHALIDIS; STERGIOULAS, 2016)

$$v = (\Omega - \omega) r \sin \theta e^{\beta-\nu}, \quad (81)$$

onde $\Omega = u^\phi/u^t$ é a velocidade angular de um elemento de massa da estrela com relação a um observador estático no infinito.

4.3 EQUAÇÕES DE CAMPO PARA ESTRELA COM ROTAÇÃO RÁPIDA

Vamos agora calcular as equações de campo utilizando a expressão dada pela equação (20), assumindo a métrica para um sistema com rotação (78) e o tensor de energia-momento da equação (79). Para obter mais facilmente as equações com as quais iremos trabalhar, vamos projetar as componentes das equações de campo no

conjunto de tetradas ortonormais do referencial ZAMO (BARDEEN; WAGONER, 1971; BUTTERWORTH; IPSE, 1976), que são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(t)}^t &= e^{-\nu}, & \mathbf{e}_{(t)}^\phi &= \omega e^{-\nu}, \\ \mathbf{e}_{(\phi)}^t &= 0, & \mathbf{e}_{(\phi)}^\phi &= (r \sin \theta)^{-1} e^{-\beta}, \\ \mathbf{e}_{(r)}^r &= e^{-\alpha}, & \mathbf{e}_{(\theta)}^\theta &= r^{-1} e^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (82)$$

É possível encontrar equações mais simples de serem resolvidas se efetuarmos combinações lineares das equações de Einstein. Se fizermos a combinação das componentes $(t)(t)$ e $(\phi)(\phi)$ das equações de campo na base de tetradas (82) teremos

$$x_1 R_{(t)(t)} + x_2 R_{(\phi)(\phi)} = 8\pi \left[x_1 \left(T_{(t)(t)} - \frac{1}{2} g_{(t)(t)} T \right) + x_2 \left(T_{(\phi)(\phi)} - \frac{1}{2} g_{(\phi)(\phi)} T \right) \right], \quad (83)$$

onde,

$$\begin{aligned} x_1 &= -e^{2\alpha+\gamma/2} \left(1 + \frac{\rho}{2} \right) \\ x_2 &= -e^{2\alpha+\gamma/2} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) \end{aligned} \quad (84)$$

e organizando os termos, iremos obter

$$\Delta \left[\rho e^{\gamma/2} \right] = S_\rho(r, \mu), \quad (85)$$

onde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (86)$$

$$\gamma = \beta + \nu, \quad (87)$$

$$\rho = \nu - \beta, \quad (88)$$

e

$$\begin{aligned} S_\rho(r, \mu) &= e^{\gamma/2} \left[8\pi e^{2\alpha} (\varepsilon + \rho) \frac{1 + \nu^2}{1 - \nu^2} \right. \\ &\quad + r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_r^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_\mu^2 \right] + \frac{1}{r} \gamma'_{,r} - \frac{1}{r^2} \mu \gamma'_{,\mu} \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} \rho - \gamma'_{,r} \left(\frac{1}{2} \gamma'_{,r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \gamma'_{,\mu} \left[\frac{1}{2} \gamma'_{,\mu} (1 - \mu^2) - \mu \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (89)$$

Fazendo a combinação

$$x_3 \left(R_{(t)(t)} - R_{(\phi)(\phi)} \right) = 8\pi x_3 \left[\left(T_{(t)(t)} - \frac{1}{2} g_{(t)(t)} T \right) - \left(T_{(\phi)(\phi)} - \frac{1}{2} g_{(\phi)(\phi)} T \right) \right], \quad (90)$$

onde,

$$x_3 = -e^{2\alpha+\gamma/2} \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \quad (91)$$

e a seguir reorganizando os termos da equação obtida, encontramos

$$\left(\Delta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right) \gamma e^{\gamma/2} = S_\gamma(r, \mu), \quad (92)$$

onde

$$S_\gamma(r, \mu) = e^{\gamma/2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} \rho + \frac{\gamma}{2} \left[16\pi e^{2\alpha} \rho - \frac{1}{2} \gamma_{r,r}^2 - \frac{1}{2r^2} (1 - \mu^2) \frac{1}{2} \gamma_{\mu,\mu}^2 \right] \right\}. \quad (93)$$

Para determinar nossa terceira equação devemos combinar as componentes $(t)(t)$, $(\phi)(\phi)$ e $(t)(\phi)$ das equações de campo na base de tetradas (82) da seguinte forma

$$x_4 \left(R_{(t)(t)} + 3R_{(\phi)(\phi)} \right) + x_5 R_{(t)(\phi)} = 8\pi \left\{ x_4 \left[\left(T_{(t)(t)} - \frac{1}{2} g_{(t)(t)} T \right) + 3 \left(T_{(\phi)(\phi)} - \frac{1}{2} g_{(\phi)(\phi)} T \right) \right] + x_5 \left(T_{(t)(\phi)} - \frac{1}{2} g_{(t)(\phi)} T \right) \right\}, \quad (94)$$

onde,

$$x_4 = \frac{\omega}{2} e^{2\alpha-\rho+\gamma/2} \quad (95)$$

$$x_5 = -\frac{2}{r \sin \theta} e^{2\alpha+\gamma/2}$$

e novamente, rearranjar os termos da equação encontrada, desta vez para obter:

$$\left(\Delta + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right) \omega e^{(\gamma-2\rho)/2} = S_\omega(r, \mu), \quad (96)$$

onde

$$S_\omega(r, \mu) = e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-16\pi e^{2\alpha} \frac{(\Omega - \omega)(\varepsilon + \rho)}{1 - v^2} + \omega \left\{ -8\pi e^{2\alpha} \left[\frac{(1 + v^2)\varepsilon + 2v^2\rho}{1 - v^2} \right] - \frac{1}{r} \left(2\rho_{,r} + \frac{1}{2}\gamma_{,r} \right) + \frac{1}{r^2} \mu \left(2\rho_{,\mu} + \frac{1}{2}\gamma_{,\mu} \right) + \frac{1}{4} (4\rho_{,r}^2 - \gamma_{,r}^2) + \frac{1}{4r^2} (1 - \mu^2) (4\rho_{,\mu}^2 - \gamma_{,\mu}^2) - r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right] \right\} \right]. \quad (97)$$

Também é possível encontrar uma equação para o potencial α em função dos outros potenciais da métrica, que é obtida combinando as componentes $(r)(r)$ e $(\theta)(\theta)$ das equações de campo na base de tetradas (82)

$$x_6 \left(R_{(r)(r)} - R_{(\theta)(\theta)} \right) = 8\pi x_6 \left[\left(T_{(r)(r)} - \frac{1}{2} g_{(r)(r)} T \right) - \left(T_{(\theta)(\theta)} - \frac{1}{2} g_{(\theta)(\theta)} T \right) \right], \quad (98)$$

onde,

$$x_6 = \frac{e^{2\alpha} r^2 [\mu - (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu}]}{2 \left\{ (1 - \mu^2) (1 + r B^{-1} B_{,r})^2 + [\mu - (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu}]^2 \right\}} \quad (99)$$

A partir da equação (98) obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_{,\mu} = & -\nu_{,\mu} - \left\{ (1 - \mu^2) (1 + r B^{-1} B_{,r})^2 + [\mu - (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu}]^2 \right\}^{-1} \\ & * \left[\frac{1}{2} B^{-1} \left\{ r^2 B_{,rr} - [(1 - \mu^2) B_{,\mu}]_{,\mu} - 2\mu B_{,\mu} \right\} \left\{ -\mu + (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right\} \right. \\ & + r B^{-1} B_{,r} \left[\frac{1}{2} \mu + \mu r B^{-1} B_{,r} + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right] \\ & + \frac{3}{2} B^{-1} B_{,\mu} \left[-\mu^2 + \mu (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right] - (1 - \mu^2) r B^{-1} B_{,\mu r} \\ & * (1 + r B^{-1} B_{,r}) - \mu r^2 (\nu_{,r})^2 - 2 (1 - \mu^2) r \nu_{,\mu} \nu_{,r} + \mu (1 - \mu^2) (\nu_{,\mu})^2 \\ & - 2 (1 - \mu^2) r^2 B^{-1} B_{,r} \nu_{,\mu} \nu_{,r} + (1 - \mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \left[r^2 (\nu_{,r})^2 \right. \\ & \left. - (1 - \mu^2) (\nu_{,\mu})^2 \right] + (1 - \mu^2) B^2 e^{-4\nu} \left\{ \frac{1}{4} \mu r^4 (\omega_{,r})^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) r^3 \omega_{,\mu} \omega_{,r} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \mu (1 - \mu^2) r^2 (\omega_{,\mu})^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) r^4 B^{-1} B_{,r} \omega_{,\mu} \omega_{,r} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} (1 - \mu^2) r^2 B^{-1} B_{,\mu} \left[r^2 (\omega_{,r})^2 - (1 - \mu^2) (\omega_{,\mu})^2 \right] \right\} \Bigg], \end{aligned} \quad (100)$$

onde $B = e^\gamma = e^{\beta+\nu}$, e nas equações acima repassamos $\mu = \cos \theta$. Também é possível determinar uma equação para α_r , mas ela é consistente com as equações acima e não precisa ser considerada (BUTTERWORTH; IPSER, 1976).

4.3.1 Forma Integral das equações de campo

Nesta subseção, iremos transformar as equações diferenciais (85),(92) e (96) em equações integrais usando funções de Green apropriadas a cada caso. Veremos que a vantagem de realizar esta transformação é que o processo de lidar com as condições de contorno se torna muito mais fácil.

A equação (85) é a mais simples, pois já se encontra na forma de uma equação de Poisson, portanto, sua representação integral em termos de uma função de Green em 3 dimensões será:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} e^{-\gamma/2} \int_0^\infty dr' \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^2 S_\rho(r', \mu') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (101)$$

No caso da equação (92), iremos reescrevê-la em termos de coordenadas

cilíndricas (BONAZZOLA, Silvano; SCHNEIDER, 1974)

$$\begin{aligned}\omega &= r \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{102}$$

de modo que ela ficará na forma

$$\frac{\partial^2 (\omega \gamma e^{\gamma/2})}{\partial \omega^2} + \frac{\partial (\omega \gamma e^{\gamma/2})}{\partial z^2} = \omega S_\gamma (r, \mu).\tag{103}$$

Desta maneira, sua representação integral será dada em termos de uma função de Green em 2 dimensões

$$\gamma = \frac{e^{-\gamma/2}}{2\pi r \sin \theta} \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\theta' r'^2 \sin \theta' S_\gamma (r', \theta') \log |\vec{r} - \vec{r}'|,\tag{104}$$

onde iremos definir a continuação analítica de $S_\gamma (r, \theta)$ na região $\pi < \theta \leq 2\pi$ como

$$S_\gamma (r, \theta) = S_\gamma (r, \theta - \pi).$$

Por último, no caso da equação (96) iremos multiplicar os dois lados da equação por $r \sin \theta \cos \phi$, de forma a obter

$$\Delta \left(r \sin \theta \cos \phi \omega e^{(\gamma-2\rho)/2} \right) = r \sin \theta \cos \phi S_\omega (r, \mu).\tag{105}$$

Desta forma, a equação (105) também pode ser escrita como uma equação integral em termos de uma função de Green em 3 dimensões de forma semelhante à equação (85),

$$\omega = -\frac{e^{(2\rho-\gamma)/2}}{4\pi r \sin \theta \cos \phi} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \sin^2 \theta' \cos \phi' S_\omega (r', \theta') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\tag{106}$$

Iremos empregar as seguintes expansões em séries das funções de Green:

$$\begin{aligned}\log |\vec{r} - \vec{r}'| &= \frac{1}{2} \log \left| r^2 + r'^2 - 2rr' \cos (\theta - \theta') \right| \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n^1 (r, r') (\cos n\theta \cos n\theta' + \sin n\theta \sin n\theta') + g (r, r'),\end{aligned}\tag{107}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 (r, r') [P_n (\cos \theta) P_n (\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m (\cos \theta) P_n^m (\cos \theta') \cos m (\phi - \phi')] ,\end{aligned}\tag{108}$$

onde P_n é o polinômio de Legendre, P_n^m é uma função associada de Legendre e

$$f_n^1 (r, r') = \begin{cases} (r'/r)^n, & \text{se } r' \leq r, \\ (r/r')^n, & \text{se } r' > r, \end{cases}\tag{109}$$

$$f_n^2(r, r') = \begin{cases} r'^n/r^{n+1}, & \text{se } r' \leq r, \\ r^n/r'^{n+1}, & \text{se } r' > r, \end{cases} \quad (110)$$

e

$$g(r, r') = \begin{cases} \log(r), & \text{se } r' \leq r, \\ \log(r'), & \text{se } r' > r. \end{cases} \quad (111)$$

Aplicando as expansões acima nas equações (101), (104) e (106), iremos obter:

$$\rho = -e^{-\gamma/2} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\mu) \int_0^{\infty} dr' r'^2 f_{2n}^2(r, r') \int_0^1 d\mu' P_{2n}(\mu') S_{\rho}(r', \mu'), \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{2e^{-\gamma/2}}{\pi r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \int_0^{\infty} dr' r'^2 f_{2n-1}^1(r, r') \\ & \cdot \int_0^1 d\mu' \sin(2n-1)\theta' S_{\gamma}(r', \mu'), \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{e^{(2\rho-\gamma)/2}}{r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2n-1}^1(\mu)}{2n(2n-1)} \int_0^{\infty} dr' r'^3 f_{2n-1}^2(r, r') \\ & \cdot \int_0^1 d\mu' P_{2n-1}^1(\mu') S_{\omega}(r', \mu'). \end{aligned} \quad (114)$$

Como mencionado anteriormente, uma vantagem importante de escrever nossas equações na forma integral é facilitar o trabalho com as condições de contorno, para que os potenciais ρ , γ e ω sejam assintoticamente planos, ou seja, para que $\rho \sim O(1/r)$, $\gamma \sim O(1/r^2)$ e $\omega \sim O(1/r^3)$ quando $r \rightarrow \infty$, basta que os termos fonte S_{ρ} , S_{γ} e S_{ω} sejam razoáveis e essas condições serão satisfeitas automaticamente. No caso do potencial α , que é calculado a partir da equação (100), a condição de que $\alpha \sim O(1/r)$ quando $r \rightarrow \infty$ também será automaticamente satisfeita, pois α é obtido a partir dos outros potenciais que já satisfazem suas condições assintóticas correspondentes. Como a equação (100) para o potencial α não foi transformada em uma equação integral, precisamos de uma condição de contorno para resolvê-la. Esta condição pode ser obtida utilizando o requerimento de planicidade no eixo de rotação (BUTTERWORTH; IPSER, 1976), e será dada por

$$\alpha(r, 1) = \beta(r, 1). \quad (115)$$

4.4 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO HIDROSTÁTICO

Para que possamos descrever o sistema de uma estrela compacta rotacionando, além das equações de campo, também precisamos da equação de conservação do tensor de energia-momento, que é dada pela expressão

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (116)$$

Se calcularmos a expressão acima assumindo a métrica da equação (78) e o tensor de energia-momento da equação (79) vamos obter:

$$\nabla p + (\varepsilon + p) \left[\nabla v + \frac{1}{1-v^2} \left(-v \nabla v + v^2 \frac{\nabla \Omega}{\Omega - \omega} \right) \right] = 0. \quad (117)$$

Para facilitar a análise das propriedades da equação acima, podemos reescrevê-la de uma forma equivalente (PASCHALIDIS; STERGIOULAS, 2016) que é dada por:

$$\frac{\nabla p}{(\varepsilon + p)} = \nabla \ln u^t - u^t u_\phi \nabla \Omega. \quad (118)$$

Como estamos considerando estrelas barotrópicas ($\varepsilon = \varepsilon(p)$), podemos definir a função

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\varepsilon(p') + p'}, \quad (119)$$

de modo que, a equação (118) fica

$$\nabla (h - \ln u^t) = -j \nabla \Omega, \quad (120)$$

onde $j = u^t u_\phi$ é chamado de momento angular específico. Para estrelas em que a distribuição de entropia é homogênea, encontramos que $h = \ln H$, onde H é a entalpia específica (HACHISU, 1986), assim a equação (119) fica:

$$\nabla \left(\ln \frac{H}{u^t} \right) = -j \nabla \Omega. \quad (121)$$

Por fim, tomando o rotacional ($\nabla \times$) da equação acima, encontramos

$$\nabla j \times \nabla \Omega = 0, \quad (122)$$

portanto, para equações de estado barotrópicas a condição de integrabilidade da equação (117) é que ou $\Omega = \text{constante}$, o que implica em rotação uniforme, ou $u^t u_\phi = j(\Omega)$, que implica em rotação diferencial. Considerando o caso da rotação diferencial, vamos integrar a equação (121) tomando o limite inferior de integração como sendo o polo da estrela, onde H e v são zero, de modo que encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\ln \frac{H}{u^t} |_{\text{polo}}}^{\ln \frac{H}{u^t}} d \left(\ln \frac{H}{u^t} \right)' &= - \int_{\Omega |_{\text{polo}}}^{\Omega} j(\Omega') d\Omega' \\ \implies \ln \frac{H}{u^t} + \int_{\Omega |_{\text{polo}}}^{\Omega} j(\Omega') d\Omega' &= v |_{\text{polo}}. \end{aligned} \quad (123)$$

No caso da rotação uniforme, a equação acima se reduz a

$$\frac{H}{u^t} = e^{v |_{\text{polo}}}. \quad (124)$$

4.4.1 Lei de rotação

Encontrar uma lei de rotação significa especificar a função $j(\Omega)$, e o caso mais simples é a rotação uniforme ($\Omega = \text{constante}$), que significa fazer $j(\Omega) = 0$. Não existe uma forma sistemática de determinar $j(\Omega)$, as únicas restrições que podemos impor são critérios de estabilidade. Assim, a escolha de uma lei de rotação costuma se basear nos seus resultados para o limite de campos fracos e baixas velocidades, chamado de limite Newtoniano. No trabalho de Komatsu, Eriguchi e Hachisu (KOMATSU *et al.*, 1989a), $j(\Omega)$ é escolhida para ser uma função bastante simples dependente de apenas de um parâmetro e dada por:

$$j(\Omega) = A^2 (\Omega_c - \Omega), \quad (125)$$

onde A e Ω_c são constantes. Como $j(\Omega) = u^t u_\phi$, temos que

$$A^2 (\Omega_c - \Omega) = \frac{(\Omega - \omega) r^2 \sin^2 \theta e^{2(\beta-\nu)}}{1 - (\Omega - \omega)^2 r^2 \sin^2 \theta e^{2(\beta-\nu)}}. \quad (126)$$

Analisando a equação acima concluímos que Ω_c é a velocidade angular no eixo de rotação da estrela. Também constatamos que $\Omega \rightarrow \Omega_c$ quando $A \rightarrow \infty$, ou seja, para A grande nos aproximamos do caso da rotação uniforme. Já para o caso de A pequeno ($A \rightarrow 0$) encontramos que $\Omega \rightarrow \omega$. Este resultado não faz sentido fisicamente porque implica que o potencial de arrastamento deve ser igual à velocidade angular da estrela mesmo se a gravidade for fraca. Por isso, assumimos que para $A \rightarrow 0$, a seguinte relação deve valer

$$(\Omega_c - \Omega) \sim 1/A^2, \quad (127)$$

de modo que o momento angular específico $j(\Omega)$ será constante para A pequeno. Tomando o limite Newtoniano para esta lei de rotação, ou seja, fazendo ω , β e $\nu \rightarrow 0$ e descartando termos de ordem maior que $O(\Omega^2)$, encontramos

$$A^2 (\Omega_c - \Omega) = \Omega \varpi^2, \quad (128)$$

onde $\varpi = r \sin \theta$. Novamente, constatamos que para A grande $\Omega \rightarrow \Omega_c$ e para A pequeno $j(\Omega) \rightarrow \text{constante}$. Por fim, é possível mostrar (KOMATSU *et al.*, 1989b; PASCHALIDIS; STERGIOULAS, 2016) que a lei de rotação da equação (125) satisfaz o critério generalizado de Rayleigh contra perturbações axissimétricas. No entanto, isto não exclui eventuais instabilidades não axissimétricas no limite Newtoniano (KOMATSU *et al.*, 1989b).

4.4.2 Equação de estado

Para descrever a matéria estelar precisamos de uma equação de estado (EoS), que nos dê a relação entre a pressão p e a densidade de energia ε da matéria estelar.

O processo de construção de uma EoS pode ser bastante complexo e levar em consideração a influência de vários fatores como temperatura e campos magnéticos. Bem como, se estivermos interessados em fazer um tratamento mais realista, considerar explicitamente a composição da matéria em termos de partículas, campos e possíveis interações. No entanto, como mencionamos anteriormente, neste trabalho, que pode ser considerado como uma etapa inicial de um estudo mais aprofundado, vamos assumir uma EoS barotrópica, ou seja, uma equação de estado em que a densidade de energia é uma função apenas da pressão $\varepsilon = \varepsilon(p)$. Vamos então incluir a matéria através de um modelo simples, considerando o tratamento proposto em (TOOPER, 1964; BUTTERWORTH; IPSER, 1976; KOMATSU *et al.*, 1989a), onde é considerada uma EoS politrópica do tipo

$$p = K\varepsilon^{1+1/N}, \quad (129)$$

onde K é uma constante e N é o índice politrópico. A equação acima é igual à equação (71) presente na Seção 3.5 pois, nas unidades que estamos utilizando, que são as unidades geometrizadas, $\varepsilon = \rho$.

Sabendo a equação de estado podemos integrar a equação (119), de modo a encontrar:

$$\begin{aligned} h(p) &= \int_0^p \frac{dp'}{(p'/K)^{N/(N+1)} + p'} \\ &= (N+1) \ln \left(p + \left(\frac{p}{K} \right)^{\frac{N}{N+1}} \right) - N \ln \left(\frac{p}{K} \right). \end{aligned} \quad (130)$$

Utilizando a equação (129) para reescrever a equação acima em termos de ε , e sabendo que $h = \ln H$, encontramos

$$H = \left(K\varepsilon^{1/N} + 1 \right)^{N+1}. \quad (131)$$

Substituindo a relação acima, para a entalpia H em função da densidade de energia ε , e a lei de rotação da equação (125), na equação de movimento (123), obtemos

$$(N+1) \ln \left(K\varepsilon^{1/N} + 1 \right) + \nu + \frac{1}{2} \ln \left(1 - v^2 \right) - \frac{A^2}{2} (\Omega_c - \Omega)^2 = C, \quad (132)$$

onde $C = \nu|_{polo} - \frac{A^2}{2} \left(\Omega_c - \Omega|_{polo} \right)^2$, no entanto, como Ω_c é o valor de Ω no eixo de rotação, então, $\Omega|_{polo} = \Omega_c$ e $C = \nu|_{polo}$. No caso de rotação uniforme a equação de movimento acima se reduz a

$$\left(K\varepsilon^{1/N} + 1 \right)^{(N+1)} e^{\nu \sqrt{1-v^2}} = C', \quad (133)$$

onde $C' = e^C = e^{\nu|_{polo}}$.

Desse modo, temos um modelo concluído e o objetivo agora é encontrar uma solução numérica para as equações obtidas. O próximo capítulo será dedicado a este estudo.

5 TEORIA DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA DE RASTALL

Em 1972, Peter Rastall (RASTALL, 1972) propôs uma generalização da teoria da gravitação de Einstein em que abandona a suposição da conservação do tensor de energia-momento dada pela equação (116), que pode ser interpretada como uma representação local da conservação do momento e da energia (WALD, R., 1984). O que Rastall argumenta em sua proposta de modificação de RG (RASTALL, 1972) é que o fato de esta lei de conservação ser válida na relatividade especial não implica necessariamente que ela também seja válida na RG. Além disso, afirma que as considerações que costumam ser utilizadas para a obtenção desta equação na RG, como a utilização de um princípio variacional, por exemplo, podem ser todas questionadas. Neste capítulo vamos então fazer uma breve apresentação da teoria de Rastall e determinar como as equações obtidas no capítulo anterior podem ser escritas nesta teoria. Em seu trabalho (RASTALL, 1972) Rastall fez a suposição que a equação (116) será escrita como

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = a_{,\mu}, \quad (134)$$

onde $a_{,\mu}$ são funções que se anulam no espaço-tempo plano e que não se anulam no espaço-tempo curvo, ou seja, é proposto que $T_{\mu\nu}$ pode ser dependente da curvatura do espaço-tempo, e na equação acima é utilizada a notação simplificada para a derivada covariante ∇_{ν} , $T^{\nu}_{\mu;\nu} = \nabla_{\nu} T^{\nu}_{\mu}$. Com base nas considerações apresentadas, Rastall propõe que se pode tomar $T^{\nu}_{\mu;\nu} \propto R_{,\mu}$ onde R é o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$, de acordo com:

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = \lambda' R_{,\mu}, \quad (135)$$

onde, λ' é uma constante. Por conveniência neste trabalho escolhemos $\lambda' = \lambda/(k(4\lambda - 1))$, onde k também é uma constante. Podemos rearranjar os termos na equação acima de forma a obter

$$\left(T^{\nu}_{\mu} - \frac{\lambda}{k(4\lambda - 1)} \delta^{\nu}_{\mu} R \right)_{;\nu} = 0. \quad (136)$$

Além disso, sabemos que:

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = 0. \quad (137)$$

Considerando as equações (136) e (137), podemos ver que a equação (135) é consistente com a equação de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k(4\lambda - 1)} g_{\mu\nu} R \right). \quad (138)$$

Tomando o traço da equação acima vamos encontrar a relação

$$R = k(4\lambda - 1) T, \quad (139)$$

e substituindo essa relação na equação (138), vamos encontrar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k(T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}T). \quad (140)$$

Podemos reescrever a equação acima em termos de um tensor de energia-momento efetivo $\tau_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k\tau_{\mu\nu}, \quad (141)$$

onde

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}T. \quad (142)$$

Podemos observar que a equação de campo obtida para a teoria de gravitação modificada de Rastall pode ser interpretada como uma equação de campo de Einstein com um tensor de energia-momento efetivo. Sabemos que no vácuo $T_{\mu\nu} = 0$ e $T = 0$, de forma que a equação de campo (140) será igual à equação de Einstein para o vácuo, ou seja:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (143)$$

A partir da equação (141) podemos observar que nesta teoria o tensor de energia-momento efetivo $\tau_{\mu\nu}$ será o tensor relacionado à lei de conservação, ou seja

$$\tau^{\nu}_{\mu;\nu} = 0. \quad (144)$$

Podemos observar que esta equação é equivalente a equação (135). Assim, as equações de campo para a teoria de Rastall são equivalentes às equações da teoria de Einstein com um tensor de energia-momento efetivo.

5.1 LIMITE NEWTONIANO

Nesta seção nosso objetivo é determinar o valor da constante k introduzida na formulação de Rastall e para isso vamos analisar a equação de campo (138) no regime de campo fraco e baixas velocidades, ou seja, no limite Newtoniano. Neste limite queremos recuperar a equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \quad (145)$$

que é a equação que descreve o potencial gravitacional ϕ de uma dada distribuição de massa ρ na gravitação Newtoniana. Neste limite o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ pode ser repassado pelo tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, de modo que a equação (138) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k(4\lambda - 1)}\eta_{\mu\nu}R\right). \quad (146)$$

Além disso, para a matéria não-relativística, a densidade de energia T_{tt} é igual a densidade de massa ρ , de modo que a componente tt da equação acima pode ser escrita como

$$R_{tt} + \frac{2\lambda - 1}{2(4\lambda - 1)} R = -k\rho. \quad (147)$$

Para encontrar a relação entre R e R_{tt} vamos começar calculando o traço da parte temporal da equação (138)

$$R^i_i = \frac{3(1 - 2\lambda)}{2(1 - 4\lambda)} R, \quad (148)$$

e a seguir utilizando a aproximação $R \approx R_{ii} - R_{tt}$, obtemos a relação

$$R = 2 \frac{4\lambda - 1}{2\lambda + 1} R_{tt}. \quad (149)$$

Substituindo a expressão acima na equação (147), encontramos

$$R_{tt} = -\frac{1}{2} (2\lambda + 1) k\rho, \quad (150)$$

e por fim, sabendo que $R_{tt} \approx -\nabla^2 \phi$ (WEINBERG, 1973), podemos encontrar que o valor de k será dado por

$$k = \frac{8\pi}{2\lambda + 1}. \quad (151)$$

Podemos então verificar que, como seria esperado, tomando o limite de $\lambda \rightarrow 0$, recuperamos o valor de k na RG, ou seja, $k = 8\pi$.

5.2 APLICANDO O MÉTODO KEH PARA A GRAVIDADE DE RASTALL

Nesta seção vamos mostrar como as equações de campo para uma estrela girando podem ser escritas na teoria de Rastall. Para começar vamos assumir que o tensor métrico e o tensor de energia-momento do fluido perfeito não são afetados pela modificação de Rastall, do modo que, as equações (78) e (79) ainda são válidas. O lado esquerdo da equação (141) relativo à geometria do espaço-tempo não se altera, e assim possui a mesma forma encontrada nas equações de campo de Einstein, de forma que não precisa ser calculado novamente. O que precisaremos calcular é o lado direito da equação (141), ou seja, temos que calcular o tensor de energia momento efetivo. Para começar, precisamos calcular o traço do tensor de energia-momento do fluido perfeito, que é dado por

$$T = 3p - \varepsilon. \quad (152)$$

Substituindo esta equação e o tensor de fluido perfeito na equação (142) vamos encontrar

$$\tau_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} + (p + \varepsilon) u_\mu u_\nu - \lambda g_{\mu\nu} (3p - \varepsilon). \quad (153)$$

Podemos rearranjar a equação acima da seguinte forma

$$\tau_{\mu\nu} = (\rho(1 - 3\lambda) + \lambda\varepsilon) g_{\mu\nu} + (p + \varepsilon) u_\mu u_\nu, \quad (154)$$

e por fim, podemos escrever

$$\tau_{\mu\nu} = \rho_{ef} g_{\mu\nu} + (\rho_{ef} + \varepsilon_{ef}) u_\mu u_\nu, \quad (155)$$

onde

$$\rho_{ef} = \rho(1 - 3\lambda) + \lambda\varepsilon, \quad (156)$$

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon(1 - \lambda) + 3\lambda\rho. \quad (157)$$

Desta forma, a única modificação que ocorrerá nas equações de campo de Einstein é que onde aparecer ρ e ε iremos repassar por ρ_{ef} e ε_{ef} . Onde aparecer uma soma de $\rho_{ef} + \varepsilon_{ef}$ não é necessário fazer nenhum repasse, porque $\rho_{ef} + \varepsilon_{ef} = \rho + \varepsilon$. Assim, as expressões para S_ρ , S_γ e S_ω vão ficar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_\rho(r, \mu) = & \left[e^{\gamma/2} k e^{2\alpha} (\varepsilon + \rho) \frac{1 + v^2}{1 - v^2} \right. \\ & + r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{r'}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{\mu'}^2 \right] + \frac{1}{r} \gamma_{r'} - \frac{1}{r^2} \mu \gamma_{\mu'} \\ & \left. + \frac{\rho}{2} \left\{ 2k e^{2\alpha} \rho_{ef} - \gamma_{r'} \left(\frac{1}{2} \gamma_{r'} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \gamma_{\mu'} \left[\frac{1}{2} \gamma_{\mu'} (1 - \mu^2) - \mu \right] \right\} \right], \end{aligned} \quad (158)$$

$$S_\gamma(r, \mu) = e^{\gamma/2} \left\{ 2k e^{2\alpha} \rho_{ef} + \frac{\gamma}{2} \left[2k e^{2\alpha} \rho_{ef} - \frac{1}{2} \gamma_{r'}^2 - \frac{1}{2r^2} (1 - \mu^2) \frac{1}{2} \gamma_{\mu'}^2 \right] \right\}, \quad (159)$$

$$\begin{aligned} S_\omega(r, \mu) = & e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-2k e^{2\alpha} \frac{(\Omega - \omega)(\varepsilon + \rho)}{1 - v^2} \right. \\ & + \omega \left\{ -k e^{2\alpha} \left[\frac{(1 + v^2)(\varepsilon + \rho)}{1 - v^2} - \rho_{ef} \right] - \frac{1}{r} \left(2\rho_{r'} + \frac{1}{2} \gamma_{r'} \right) \right. \\ & + \frac{1}{r^2} \mu \left(2\rho_{\mu'} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu'} \right) + \frac{1}{4} (4\rho_{r'}^2 - \gamma_{r'}^2) + \frac{1}{4r^2} (1 - \mu^2) (4\rho_{\mu'}^2 - \gamma_{\mu'}^2) \\ & \left. \left. - r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{r'}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{\mu'}^2 \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (160)$$

A equação para a função $\alpha(r, \mu)$ da métrica (100) não será alterada porque não é dependente de ρ e nem ε . A partir da equação (144) para a conservação do tensor de energia-momento efetivo, que é equivalente a equação (135) para o tensor usual, vamos obter

$$\frac{\nabla \rho_{ef}}{(\varepsilon + \rho)} = \nabla \ln u^t - u^t u_\phi \nabla \Omega \quad (161)$$

e escrevendo a expressão para ρ_{ef} explicitamente vamos encontrar

$$\frac{\nabla \rho}{(\varepsilon + \rho)} (1 - 3\lambda) + \lambda \frac{\nabla \varepsilon}{(\varepsilon + \rho)} = \nabla \ln u^t - u^t u_\phi \nabla \Omega. \quad (162)$$

De forma análoga ao que foi feito para a RG, podemos definir uma função “entalpia” h_{ef} , dada por:

$$h_{ef} = (1 - 3\lambda) \int \frac{dp'}{\varepsilon(p') + p'} + \lambda \int \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon' + p(\varepsilon')}, \quad (163)$$

de modo que a equação (162) poderá ser escrita como:

$$\nabla (h_{ef} - \ln u^t) = -j \nabla \Omega, \quad (164)$$

onde $j = u^t u_\phi$. Podemos observar que a equação acima possui a mesma forma da equação (120), por isso, vamos novamente definir uma função $h_{ef} = \ln H_{ef}$, de modo que a equação acima ficará

$$\nabla \left(\ln \frac{H_{ef}}{u^t} \right) = -j \nabla \Omega. \quad (165)$$

Vamos novamente assumir que a matéria estelar será descrita por uma EoS politrópica, dada pela equação (129). Para o caso de rotação variável, se assumirmos novamente a lei de rotação dada pela expressão (125), ao integrar a equação (165) vamos encontrar

$$(N(1 - 4\lambda) + (1 - 3\lambda)) \ln (K\varepsilon^{1/N} + 1) + \lambda \ln (\varepsilon) + \nu + \frac{1}{2} \ln (1 - v^2) - \frac{A^2}{2} (\Omega_c - \Omega)^2 = C_V, \quad (166)$$

onde C_V é uma constante de integração. Já para o caso de rotação uniforme, ou seja, para $\nabla j \times \nabla \Omega = 0$, integrando (165) vamos obter

$$(N(1 - 4\lambda) + (1 - 3\lambda)) \ln (K\varepsilon^{1/N} + 1) + \lambda \ln (\varepsilon) + \nu + \frac{1}{2} \ln (1 - v^2) = C, \quad (167)$$

onde C é uma constante de integração.

Neste trabalho iremos analisar algumas das propriedades físicas das soluções encontradas. Vamos começar com a análise da relação massa-raio, e para este propósito iremos calcular a massa de Komar (KOMAR, 1959; WALD, R. M., 2010), que para um espaço-tempo estacionário e assintoticamente plano é igual à massa ADM (ARNOWITT *et al.*, 1959, 1960; FRIEDMAN; STERGIIOULAS, 2013), que em alguns trabalhos também é chamada de massa total ou massa gravitacional (KOMATSU *et al.*, 1989a; COOK *et al.*, 1992). É possível mostrar que a massa de Komar para uma estrela pode ser calculada a partir da integração de R^t_t (WALD, R., 1984):

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int R^t_t \sqrt{-g} d^3x. \quad (168)$$

Considerando a equação de campo modificada de Rastall (140), a expressão acima pode ser dada por

$$M = \frac{1}{2\lambda + 1} \int (-2\tau^t_t + \tau^\sigma_\sigma) \sqrt{-g} d^3x, \quad (169)$$

e calculando a expressão acima para a métrica da equação (78) e o tensor de energia-momento efetivo da equação (155), vamos encontrar

$$M = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R_e} e^{2\alpha+\beta} \left[e^\nu \left(\frac{(\varepsilon + \rho)(1 + v^2)}{1 - v^2} + 2\rho_{ef} \right) + 2r \sin \theta \omega e^\beta \frac{(\varepsilon + \rho)v}{1 - v^2} \right] r^2 \sin \theta \, dr d\theta, \quad (170)$$

onde R_e é o raio equatorial. É importante notar que a coordenada radial da métrica que iremos considerar, dada pela equação (78) não é igual à coordenada radial da métrica de Schwarzschild (BUTTERWORTH; IPSE, 1976). O raio equatorial na métrica de Schwarzschild $R_e^{(Sch)}$ pode ser encontrado a partir do raio equatorial R_e da nossa métrica pela seguinte relação:

$$R_e^{(Sch)} = R_e \left(1 + \frac{M}{2R_e} \right)^2. \quad (171)$$

Esta relação é importante para que possamos comparar corretamente os resultados que estamos interessados em determinar para uma estrela girando, com os resultados obtidos a partir da métrica de Schwarzschild para uma estrela estática.

Nós também iremos analisar o momento de inércia I , que pode ser dado pela razão entre o momento angular J e a velocidade angular Ω

$$I = \frac{J}{\Omega}, \quad (172)$$

onde o momento angular J é dado por (WALD, R. M., 2010; FRIEDMAN; STERGIU-LAS, 2013)

$$J = \frac{1}{8\pi} \int R_\phi^t \sqrt{-g} \, d^3x, \quad (173)$$

e ao considerarmos a equação de campo (140), a expressão acima pode ser reescrita como

$$J = \frac{1}{2\lambda + 1} \int \tau_\phi^t \sqrt{-g} \, d^3x. \quad (174)$$

Se calculamos a expressão acima utilizando a métrica e o tensor efetivo que estamos considerando neste trabalho, vamos obter

$$J = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R_e} \frac{(\varepsilon + \rho)v}{1 - v^2} e^{2\alpha+2\beta} r^3 \sin^2 \theta \, dr d\theta. \quad (175)$$

Pretendemos formular nossas soluções para dois tipos de regimes relevantes, um para estrelas estáticas e outro para estrelas rotacionando no limite Kepleriano, também chamado limite de *mass shedding*. Este limite é alcançado quando a velocidade angular do fluido estelar no equador $\Omega(R_e, \pi/2)$ é igual a velocidade angular de uma partícula livre Ω_K em órbita circular neste ponto. Desta forma, se a estrela girar

mais rápido que Ω_K a sua massa começará a escapar. O limite Kepleriano é dado por (FRIEDMAN; STERGIOULAS, 2013):

$$\Omega_K = \left(\omega + \frac{r\partial_r\omega}{2(1+r\partial_r\beta)} + \sqrt{\left(\frac{r\partial_r\omega}{2(1+r\partial_r\beta)}\right)^2 + \frac{e^{2(\nu-\beta)}\partial_r\nu}{r(1+r\partial_r\beta)}} \right) \Bigg|_{r=R_e, \theta=\frac{\pi}{2}} \quad (176)$$

No capítulo 7 iremos apresentar os resultados encontrados para as equações obtidas neste capítulo, que descrevem uma estrela girando rapidamente na teoria de gravidade modificada de Rastall. Além disso, também iremos encontrar soluções para as equações do Capítulo 4 que descrevem uma estrela com rotação rápida na RG e para as equações apresentadas na Seção 3.4 para estrelas estáticas. Desta forma, poderemos visualizar como nossos resultados são alterados tanto pela inclusão de rotação como pela modificação na teoria gravitacional.

6 MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo iremos explicar com mais detalhes alguns dos procedimentos numéricos que serão adotados na solução das equações obtidas no capítulo anterior utilizando o método KEH. Iniciamos este capítulo expondo uma visão geral do método na Seção 6.1, seguida pela seção onde será apresentado um procedimento para encontrarmos uma solução aproximada que será utilizada como *input* inicial em nosso código na Seção 6.2. Já na Seção 6.3 iremos especificar algumas escolhas que precisam ser feitas na implementação do código numérico como, por exemplo, na discretização de derivadas.

6.1 VISÃO GERAL DO MÉTODO KEH

Tendo obtido as equações do modelo nos capítulos anteriores, equações (112), (113), (114), (100) e (126) e (132) ou (133), neste capítulo iremos apresentar os procedimentos numéricos adotados para a solução dessas equações de acordo com o método KEH (KOMATSU *et al.*, 1989a). O primeiro passo é encontrar uma aproximação inicial para o valor dos potenciais e das outras quantidades de interesse, e a seguir fazer sucessivas iterações nas equações até que haja uma convergência. Um modo razoável e relativamente simples é considerar uma esfera sem rotação e com simetria esférica. O procedimento para obter uma aproximação inicial com essas características será apresentado na próxima seção.

Assim, a primeira iteração deste método se inicia com uma solução aproximada para os potenciais da métrica ρ , γ , ω e α , para a densidade de energia ε , para o raio equatorial R_e da estrela, para a constante C e para a velocidade angular Ω . Também devemos determinar a região de integração que no nosso caso será dada por $\theta = \{0, \pi/2\}$ e $r = \{0, 2R_e\}$. Além disso, teremos quantidades que serão mantidas fixas, a velocidade angular Ω ou alternativamente o achatamento da estrela, que é dado pela razão entre o raio polar e o raio equatorial da estrela $q = R_q/R_e$, e a densidade de energia máxima ε_{\max} ou equivalentemente a constante κ , já que ε_{\max} e κ estão relacionados pela equação $\kappa = \rho_{\max}/\varepsilon_{\max}$. E por fim, para o caso de rotação diferencial a constante de rotação A também é mantida fixa.

Substituindo estes dados no lado direito das equações integrais (112), (113) e (114) encontramos novos valores para os potenciais ρ , γ e ω . A seguir, substituímos esses potenciais atualizados na equação (100) para α e resolvemos a equação diferencial de modo a obter um novo valor para este potencial também. Por fim, no caso da rotação diferencial, substituímos os novos valores para os potenciais da métrica nas equações (132) e (126) e calculamos novos valores para a densidade de energia ε e para a velocidade angular Ω . Já para a rotação uniforme, o novo valor para a densidade de energia ε é obtido a partir da equação (133), e o valor da velocidade angular

Ω é encontrado calculando-se esta mesma equação no raio equatorial da estrela. Uma vez que encontramos novos valores para ρ , γ , ω , α , ε e Ω a primeira iteração termina. A seguir, utilizamos esses novos valores para melhorar o modelo da segunda iteração, e assim sucessivamente até que o valor das quantidades físicas mude muito pouco de uma iteração para outra, quando isso ocorrer, teremos uma solução.

6.2 MODELO INICIAL

Nesta seção iremos mostrar como podemos obter uma aproximação para as quantidades que precisam ser determinadas como entradas no procedimento computacional. Faremos isso a partir de uma solução para uma estrela sem movimento de rotação, de acordo com o que foi apresentado por E.M. Butterworth em (BUTTERWORTH; IPSEY, 1976).

Para obter uma solução aproximada inicial iremos partir de uma estrela estática, esfericamente simétrica descrita pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -e^{-\xi(r')} dt'^2 + \left(1 - \frac{2m(r')}{r'}\right)^{-1} dr'^2 + r'^2 (d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi'^2), \quad (177)$$

onde $m(r')$ é a massa gravitacional contida em uma esfera de raio r' . Vamos assumir que a matéria que compõe essa estrela é um fluido perfeito dado pelo tensor de energia-momento da equação (79). Calculando as equações de campo para esta métrica iremos encontrar as seguintes equações para as componentes (t, t) e (r, r)

$$\frac{dm}{dr'} = 4\pi r'^2 \varepsilon, \quad (178)$$

e

$$\frac{d\xi}{dr'} = \frac{m + 4\pi r'^3 p}{r'(r' - 2m)}. \quad (179)$$

Calculando a equação de conservação do tensor de energia-momento (116) para este sistema iremos encontrar a conhecida equação de Oppenheimer e Volkoff, dada por

$$\frac{dp}{dr'} = -\frac{(\varepsilon + p)(m + 4\pi r'^3 p)}{r'(r' - 2m)}. \quad (180)$$

Considerando que em nosso caso a equação de estado é dada pela equação politrópica (129), e definindo a função

$$k = p/\varepsilon, \quad (181)$$

podemos reescrever as equações (180) e (178) da seguinte forma

$$\frac{dk}{dr'} = -\frac{(1+k)}{(1+N)} \frac{(m + 4\pi r'^3 K^{-N} k^{N+1})}{r'(r' - 2m)} \quad (182)$$

e

$$\frac{dm}{dr'} = 4\pi r'^2 K^{-N} k^N. \quad (183)$$

A seguir devemos integrar as equações acima em termos de r' , impondo como condições de contorno $m(0) = 0$ e $k(0) = \kappa$, onde κ é a constante, já mencionada anteriormente, que descreve quão relativístico é o sistema. Devemos observar que a coordenada radial r' que aparece na métrica de Schwarzschild não é a mesma que a coordenada r que aparece na métrica da equação (78). Comparando as equações (177) e (78) e impondo as relações

$$t' = t, \quad \theta' = \theta \quad \text{e} \quad \phi' = \phi, \quad (184)$$

e iremos encontrar a equação que relaciona as coordenadas r e r'

$$\frac{dr}{dr'} = \frac{r}{r' (1 - 2m/r')^{1/2}}. \quad (185)$$

Além disso, também iremos encontrar as relações entre os potenciais das métricas

$$\nu = \xi, \quad \alpha = \beta = \log(r/r') \quad \text{e} \quad \omega = 0. \quad (186)$$

Considerando que tanto a métrica da equação (177) quanto a da equação (78) devem ser assintoticamente planas, podemos impor a condição

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} r/r' = 1. \quad (187)$$

Sabemos que se tomarmos $r' > R_e^{(Sch)}$ a massa será constante e igual a $M = m(R_e^{(Sch)})$, onde $R_e^{(Sch)}$ é o raio da estrela nas coordenadas de Schwarzschild. Deste modo, na região externa da estrela podemos integrar diretamente a equação (185) tendo como condição de contorno a equação acima, de forma a obter

$$r = \frac{1}{4} r' \left[1 + (1 - 2m/r')^{1/2} \right]^2, \quad (188)$$

fora da estrela. Substituindo $r' = R_e^{(Sch)}$ na equação acima, podemos encontrar o raio R_e da estrela nas coordenadas da métrica da equação (78). Desta forma, podemos então reescrever as equações (182) e (183) em termos de r , de modo a obter

$$\frac{dk}{dr} = \frac{dk}{dr'} \frac{dr'}{dr} = -\frac{(1+k)}{(1+N)} \frac{(m + 4\pi r'^3 K^{-N} k^{N+1})}{r' r (1 - 2m/r')^{1/2}} \quad (189)$$

e

$$\frac{dm}{dr} = \frac{dm}{dr'} \frac{dr'}{dr} = \frac{4\pi r'^3}{r} K^{-N} k^N (1 - 2m/r')^{1/2}. \quad (190)$$

Estas equações podem ser resolvidas para m e k em função de r , na região interior à estrela $r = \{0, R_e\}$, utilizando como condições de contorno $m(R_e) = m(R_e^{(Sch)}) = M$

e $k(R_e) = 0$. Por fim, para encontrar o modelo inicial para o potencial ν da métrica (78), vamos lembrar que $\nu = \xi$. Assim, substituindo a definição da equação (181) na equação (179) e reescrevendo esta última equação em termos de r , vamos encontrar

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{d\nu}{dr'} \frac{dr'}{dr} = \frac{(m + 4\pi r'^3 K^{-N} k^{N+1})}{r' r (1 - 2m/r')^{1/2}}. \quad (191)$$

Utilizando a condição de que ν deve ser assintoticamente plano

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} \nu = 0, \quad (192)$$

podemos resolver a equação (191) na região externa à estrela, de modo a encontrar

$$e^\nu = (1 - 2M/r')^{1/2}, \quad (193)$$

fora da estrela. Finalmente, para encontrar o valor de ν na região interna à estrela utilizamos a equação acima como condição de contorno.

6.3 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Depois de encontrar nosso modelo inicial a partir do procedimento apresentado na seção anterior, podemos partir para a integração das equações (112), (113) e (114). No caso da RG o valor das funções S_ρ , S_γ e S_ω serão dados pelas equações (89), (93) e (97), respectivamente. E no caso da teoria de Rastall, estas funções serão dadas por (158), (159) e (160), respectivamente. Os somatórios que aparecem nessas equações serão expandidos até, respectivamente, $P_{18}(\mu)$, $\sin 19\theta$ e $P_{19}^1(\mu)$, contribuições para termos de ordens maiores podem ser considerados desprezíveis. Neste trabalho, todos os nossos cálculos serão efetivados na região $\mu = \cos \theta = \{0, 1\}$ e $r = \{0, 2R_e\}$, e essa região será discretizada em uma malha de 51×201 pontos, denotada por (μ_i, r_j) . As derivadas que aparecem nos termos S_γ , S_ρ e S_ω serão discretizadas utilizando diferenças finitas centradas, dadas por

$$f_{i,\mu} = \frac{f(\mu_{i+1}, r_j) - f(\mu_{i-1}, r_j)}{2\Delta\mu}, \quad (194)$$

$$f_{i,r} = \frac{f(\mu_i, r_{j+1}) - f(\mu_i, r_{j-1})}{2\Delta r}, \quad (195)$$

$$f_{i,\mu\mu} = \frac{f(\mu_{i+1}, r_j) - 2f(\mu_i, r_j) + f(\mu_{i-1}, r_j)}{\Delta\mu^2}, \quad (196)$$

$$f_{i,\mu r} = \frac{f(\mu_{i+1}, r_{j+1}) - f(\mu_{i+1}, r_{j-1}) - f(\mu_{i-1}, r_{j+1}) + f(\mu_{i-1}, r_{j-1})}{4\Delta\mu\Delta r}, \quad (197)$$

$$f_{,rr} = \frac{f(\mu_j, r_{j+1}) - 2f(\mu_j, r_j) + f(\mu_j, r_{j-1})}{\Delta r^2}. \quad (198)$$

No entanto, se utilizarmos a discretização (198) na equação (100) para o potencial α iremos obter oscilações na direção radial na região interna à estrela para este potencial, o que pode levar a um erro de até 2% nas propriedades da estrela. Por isso, implementamos o melhoramento que resolve este problema introduzido em (STERGIOULAS; FRIEDMAN, 1994; STERGIOULAS, 1996), onde a discretização (198) é substituída por outra com duplo espaçamento, da seguinte forma:

$$f_{,rr} = \frac{f(\mu_j, r_{j+2}) - 2f(\mu_j, r_j) + f(\mu_j, r_{j-2})}{4\Delta r^2}. \quad (199)$$

Depois de integrar as equações (112), (113) e (114), substituímos os valores atualizados das funções γ , ρ e ω na equação (100) para α , e resolvemos esta equação pelo método de Euler, utilizando como condição de contorno a equação (115). Para prosseguir com nossos cálculos, vamos definir um novo sistema de coordenadas, dado por

$$r = R_e \hat{r}. \quad (200)$$

Neste sistema de coordenadas os potenciais da métrica ficam

$$\alpha = R_e^2 \hat{\alpha}, \quad (201)$$

$$\beta = R_e^2 \hat{\beta}, \quad (202)$$

$$\nu = R_e^2 \hat{\nu}, \quad (203)$$

$$\omega = R_e^2 \hat{\omega}. \quad (204)$$

Nas próximas subseções discutiremos separadamente sobre como proceder no caso em que temos rotação diferencial e no caso de rotação uniforme.

6.3.1 Rotação diferencial

Reescrevendo as equações (126) e (132) nessas coordenadas, vamos encontrar

$$A^2 (\Omega_c - \Omega) = \frac{(\Omega - R_e^2 \hat{\omega}) R_e^2 \hat{r}^2 \sin^2 \theta e^{2R_e^2 (\hat{\beta} - \hat{\nu})}}{1 - (\Omega - R_e^2 \hat{\omega})^2 R_e^2 \hat{r}^2 \sin^2 \theta e^{2R_e^2 (\hat{\beta} - \hat{\nu})}} \quad (205)$$

e

$$(N+1) \ln \left(K \varepsilon^{1/N} + 1 \right) + R_e^2 \hat{\nu} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \left(\Omega - R_e^2 \hat{\omega} \right)^2 R_e^2 \hat{r}^2 \sin^2 \theta e^{2R_e^2 (\hat{\beta} - \hat{\nu})} \right) - \frac{A^2}{2} (\Omega_c - \Omega)^2 = C. \quad (206)$$

Calculando as equações acima nos pontos P , Q e W mostrados na Figura 4, vamos obter um sistema de seis equações com seis variáveis $\Omega(P)$, $\Omega(Q)$, $\Omega(W)$, Ω_c , C e R_e , que pode ser resolvido utilizando o método Newton-Raphson. Em seguida, podemos substituir os valores encontrados para Ω_c e R_e na equação (205) e, novamente, utilizar o método Newton-Raphson, agora para calcular o novo valor da função Ω . A seguir, substituímos os valores das constantes e da velocidade angular que acabamos de encontrar na equação (206) e calculamos um novo valor para a densidade de energia ε . Por fim, atualizamos os valores calculados no ponto W encontrando onde ε atinge seu valor máximo.

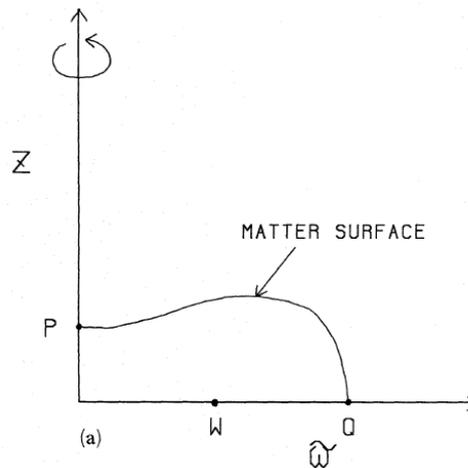


Figura 4 – Esta figura representa nossa região computacional. O ponto P representa o polo da estrela, o ponto Q representa o equador e o ponto W representa o ponto de energia máxima. Fonte:(KOMATSU *et al.*, 1989a).

6.3.2 Rotação uniforme

Se reescrevermos a equação (133) no sistema de coordenadas (200 – 204), vamos obter

$$\left(K \varepsilon^{1/N} + 1 \right)^{(N+1)} e^{R_e^2 \hat{\nu}} \sqrt{1 - \left(\Omega - R_e^2 \hat{\omega} \right)^2 R_e^2 \hat{r}^2 \sin^2 \theta e^{2R_e^2 (\hat{\beta} - \hat{\nu})}} = C'. \quad (207)$$

Substituindo a equação acima nos pontos P , Q e W vamos obter um sistema de três equações e três variáveis Ω , C' e R_e , que pode ser resolvido pelo método Newton-Raphson. O próximo passo é substituir o valor destas constantes na equação (207), e

calcular o novo valor de ε e, por último, encontraremos o ponto onde a nova função ε atinge seu máximo e atualizaremos o valor do ponto W .

Com o procedimento destacado neste capítulo, podemos resolver numericamente as equações propostas, e então calcular todas as quantidades de interesse consideradas neste estudo.

7 RESULTADOS

Neste capítulo vamos analisar os resultados numéricos de nossas equações para estrelas rotacionando na gravidade Rastall. Nós iremos trabalhar com duas equações de estado politrópicas representadas pela equação (129). Vamos nos referir a primeira como EoS_1 , e para este caso escolhemos $N_1 = 1.5$ como em (STOECKLY, 1965; RAY *et al.*, 2003) e $K_1 = 125269.51$, já a segunda EoS, que iremos chamar EoS_2 , terá $N_2 = 0.7463$ como em (DONEVA *et al.*, 2013; KLEIHAUS *et al.*, 2016) e $K_2 = 3.25 \times 10^{11}$, em ambos os casos a constante K é dada em unidades geometrizadas, ou seja, unidades em que $G = c = 1$. Em relação à gravidade de Rastall, vamos trabalhar com quatro valores diferentes para o parâmetro λ : 0, que é igual a RG, 5×10^{-4} , 1×10^{-3} e 5×10^{-3} . Também mostraremos resultados para alguns valores de velocidade angular Ω . Vamos dividir nossa análise dos resultados em duas seções, na primeira nosso foco será de analisar os desvios provocados pela teoria de Rastall, e na segunda parte iremos nos concentrar nos efeitos da rotação.

7.1 EFEITOS DA TEORIA DE RASTALL

Nas figuras analisadas nesta seção as curvas com linhas sólidas representam sequências de estrelas girando no limite Kepleriano Ω_K , que foi definido na equação (176), e as curvas com traço-ponto representam as sequências de estrelas sem rotação, que são obtidas a partir das equações apresentadas na Seção 3.4. Na Figura 5 mostramos a relação massa raio. Nesta figura a coordenada radial se refere à coordenada da métrica de Schwarzschild, conforme a equação (171). Podemos observar que em todas as sequências analisadas o parâmetro λ afeta mais intensamente o raio da estrela, aumentando o seu valor, enquanto as massas são afetadas mais fracamente. Da mesma forma que em (FABRIS, Júlio C *et al.*, 2012; MOTA *et al.*, 2019a), aqui também observamos que a massa máxima para as estrelas sem rotação é ligeiramente aumentada com o aumento do valor do parâmetro λ . No entanto, para as estrelas rotacionando no limite Kepleriano, o efeito é oposto, ou seja, se aumentamos o valor de λ o valor da massa máxima diminui ligeiramente. Também podemos observar que a gravidade modificada de Rastall afeta mais intensamente as estrelas com a EoS_1 , e que as estrelas estáticas são mais modificadas que as estrelas girando. Além disso, é interessante notar que a razão massa-raio para EoS_2 na RG produz curvas típicas de sequências de estrelas de quarks mas, para a teoria de Rastall a mesma EoS produz curvas típicas de estrelas de nêutrons.

Na Figura 6 podemos ver a relação entre a massa e a densidade central de energia, nesta figura também podemos observar que a gravidade de Rastall tem efeitos opostos em estrelas estáticas e estrelas com rotação no limite Kepleriano. Para as sequências de estrelas estáticas, se aumentamos o valor de λ o valor da massa

também aumenta para uma mesma densidade central de energia. Mas para o limite Kepleriano, a gravidade de Rastall produz estrelas com massas menores do que na RG, para uma mesma densidade central de energia. Isso pode ser melhor compreendido quando analisamos as curvas da Figura 7, onde apresentamos a relação entre a velocidade angular e a densidade central de energia para sequências de estrelas no *mass shedding*. Podemos observar que, para estrelas com uma mesma densidade central de energia, a velocidade máxima com a qual a estrela pode girar antes de começar a perder massa na RG é maior do que na gravidade de Rastall, de modo que, aumentando o valor de λ diminuimos o valor de Ω_K .

O momento de inércia de uma estrela é uma quantidade física importante de ser estudada, pois pode ser uma forma eficaz de averiguar a sua estrutura interna, ou seja, sua EoS (ÖZEL; FREIRE, 2016). Na Figura 8 podemos ver como esta quantidade é afetada pela teoria de Rastall. De um modo geral, podemos observar que ao aumentar o valor de λ diminuimos o valor de I , mas em alguns casos, para valores de massa pequenos o comportamento da curva $I \times M$ na teoria de Rastall diverge do comportamento para a RG. Aqui também podemos observar que o efeito da proposta de Rastall na EoS_1 é mais intenso que na EoS_2 .

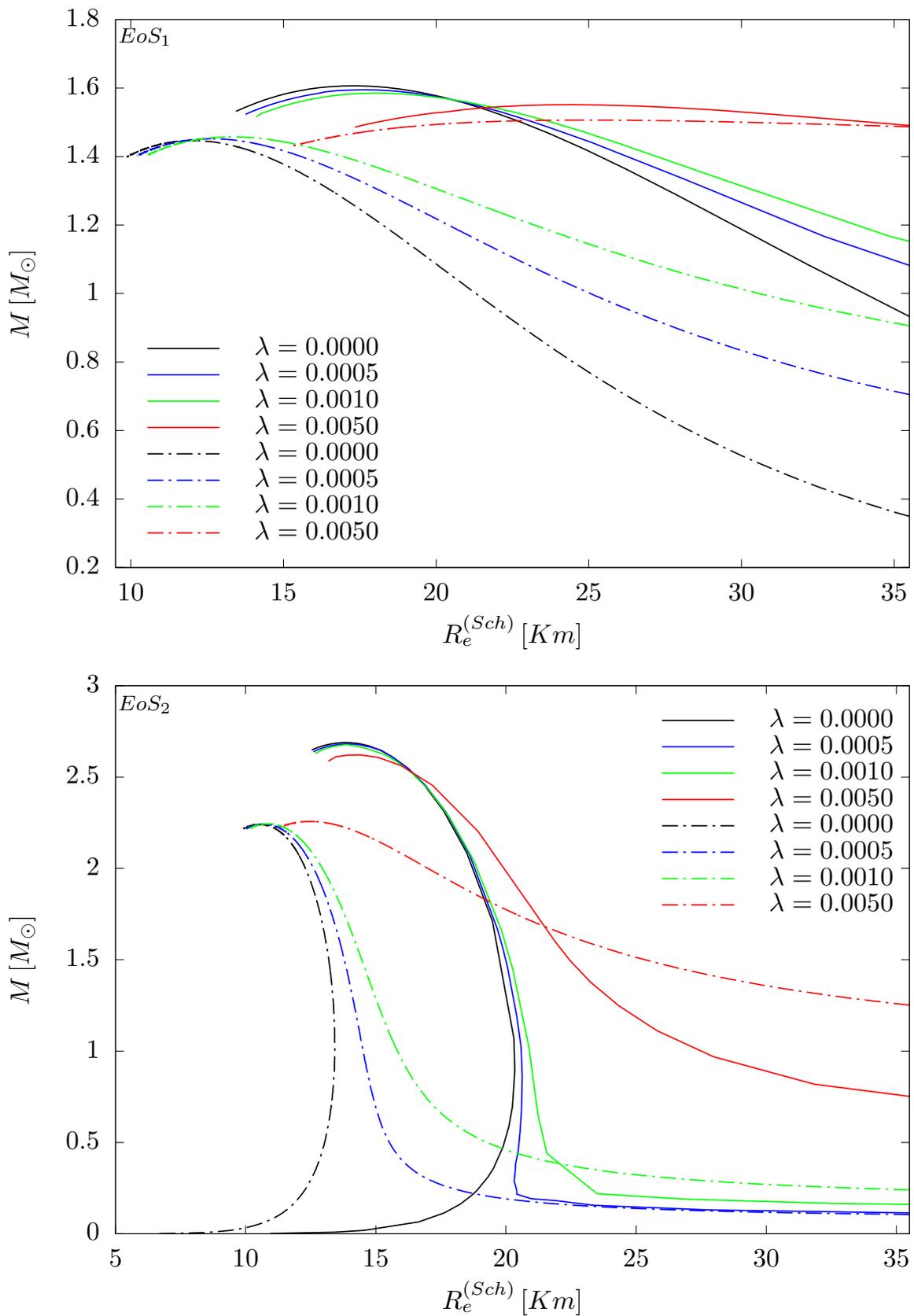


Figura 5 – A relação massa-raio para seqüências de estrelas sem rotação (curvas com traço-ponto) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curvas com linha sólida). As curvas com $\lambda = 0$ representam as seqüências de soluções para a RG.

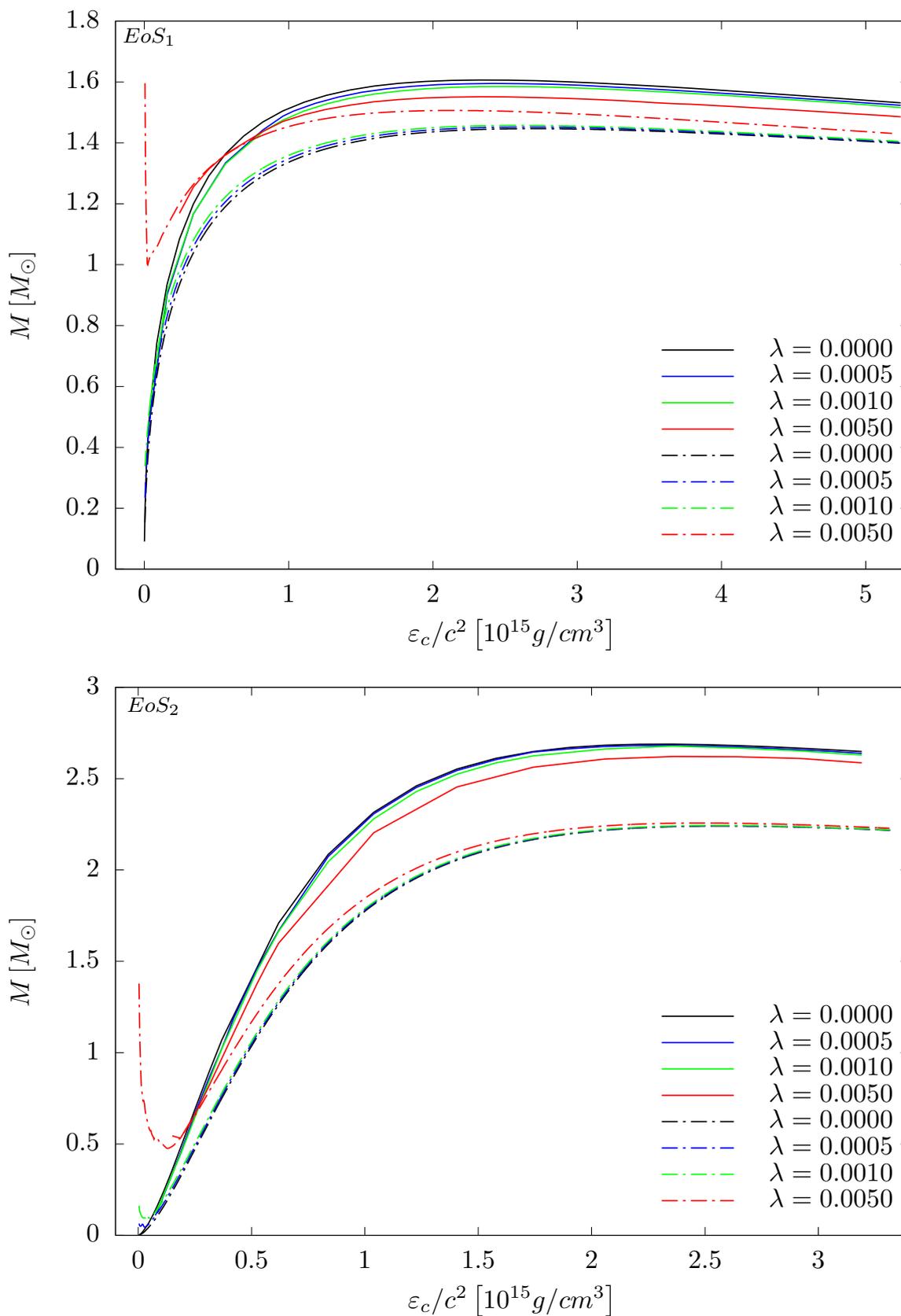


Figura 6 – A massa como uma função da densidade central de energia para sequências de estrelas sem rotação (curvas com traço-ponto) e para estrelas rotando no limite Kepleriano (curvas com linha sólida). As curvas com $\lambda = 0$ representam as sequências de soluções para a RG.

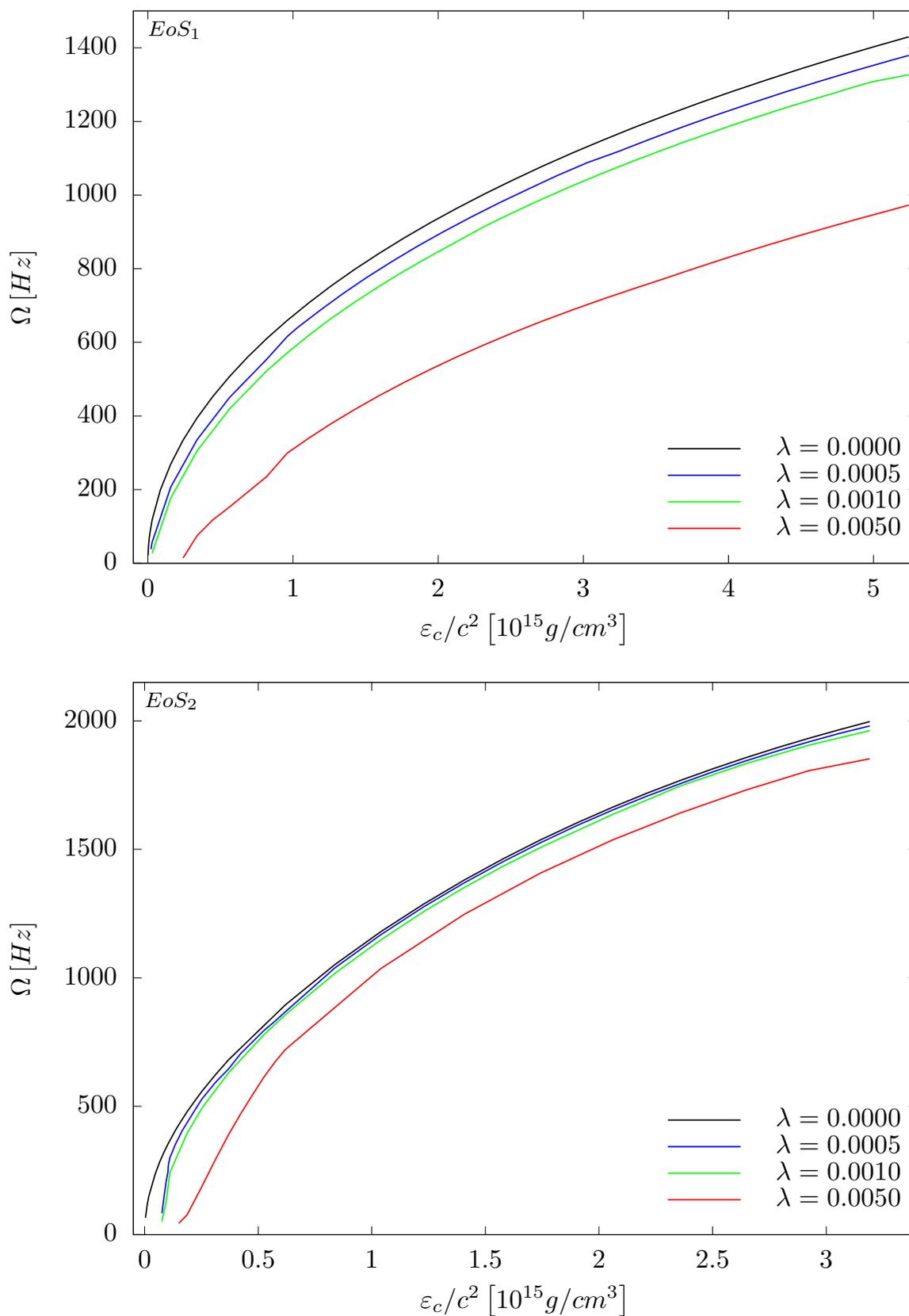


Figura 7 – A velocidade angular como uma função da densidade central de energia para seqüência de estrelas rodando no limite de *mass shedding*. As curvas com $\lambda = 0$ representam as seqüências de soluções para a RG.

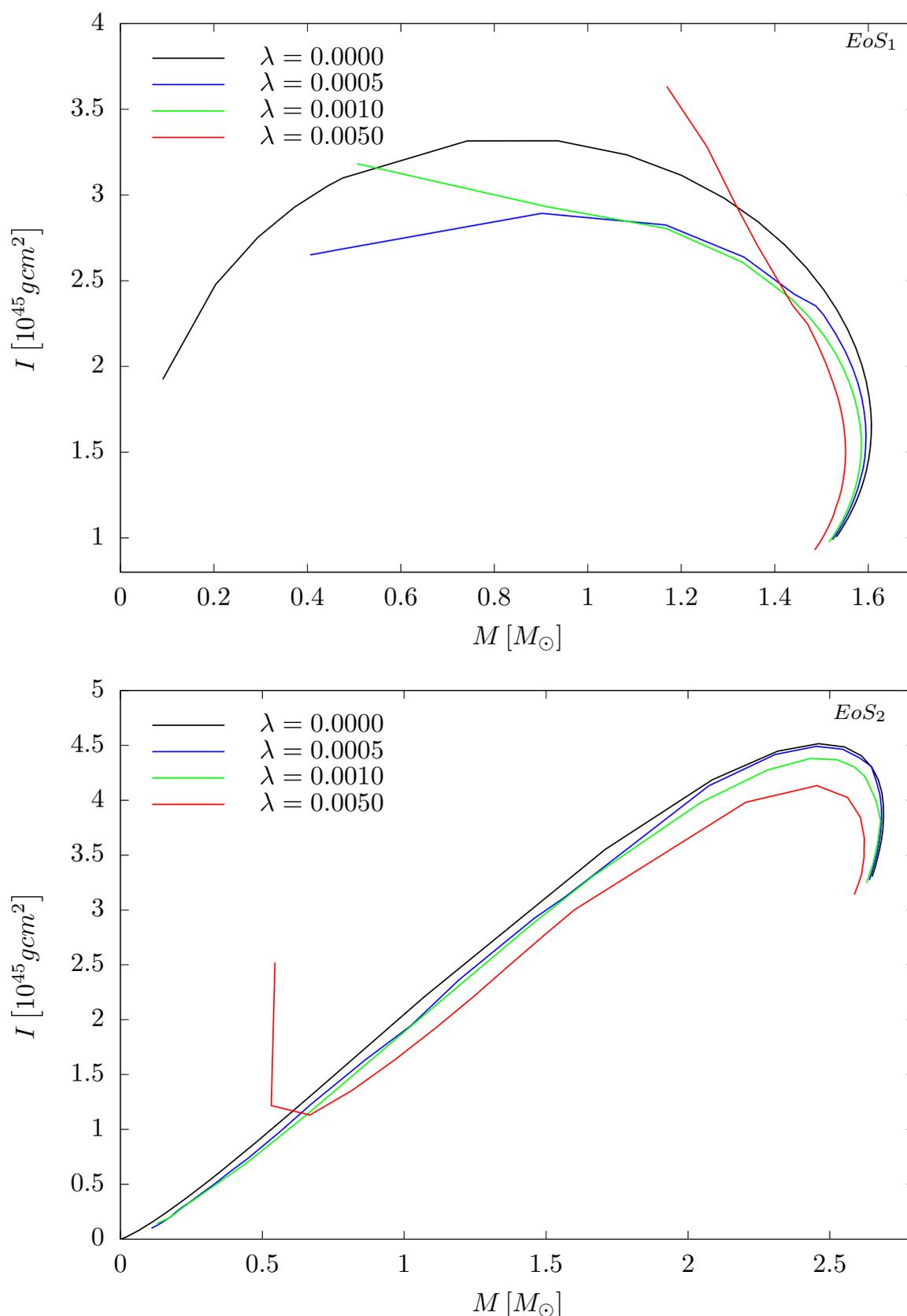


Figura 8 – O momento de inércia como uma função da massa seqüências de estrelas rodando no limite de *mass shedding*. As curvas com $\lambda = 0$ representam as seqüências de soluções para a RG.

Em todas as figuras para as componentes g_{tt} , g_{rr} e $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ da métrica e para a função ω , tanto nesta como na próxima seção, cada curva representa uma única estrela. E nessas curvas vemos como cada função varia com relação a coordenada r , da métrica com rotação, no equador ($\theta = \pi/2$) desde o centro das estrelas ($r = 0$) até $r = 2R_e$. Nos gráficos para EoS_1 todas as curvas são para estrelas com energia central $\varepsilon_c/c^2 = 2.3 \times 10^{15} g/cm^3$, e nos gráficos para EoS_2 todas as estrelas tem $\varepsilon_c/c^2 = 2.4 \times 10^{15} g/cm^3$.

Nas Figuras 9, 10 e 11 analisamos o efeito da modificação de Rastall nos termos g_{tt} , g_{rr} e $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ da métrica, respectivamente, para estrelas rodando no limite de *mass shedding*. Podemos ver que para todos os casos examinados o efeito de aumentar λ é de diminuir a deformação do espaço-tempo mas, como observado para as outras quantidade analisadas, o efeito da teoria de Rastall é mais intenso na EoS_1 do que na EoS_2 .

Por fim, na Figura 12 investigamos como a função ω , que representa o arrastamento do referencial ao redor da estrela devido à estrela estar rotacionando, se altera devido a teoria de Rastall. Podemos observar que se aumentamos o valor de λ os valores de ω são diminuídos. Podemos concluir que esses resultados são condizentes com o que observamos na Figura 7, onde vimos que a rotação da estrela também diminui com o aumento do parâmetro λ .

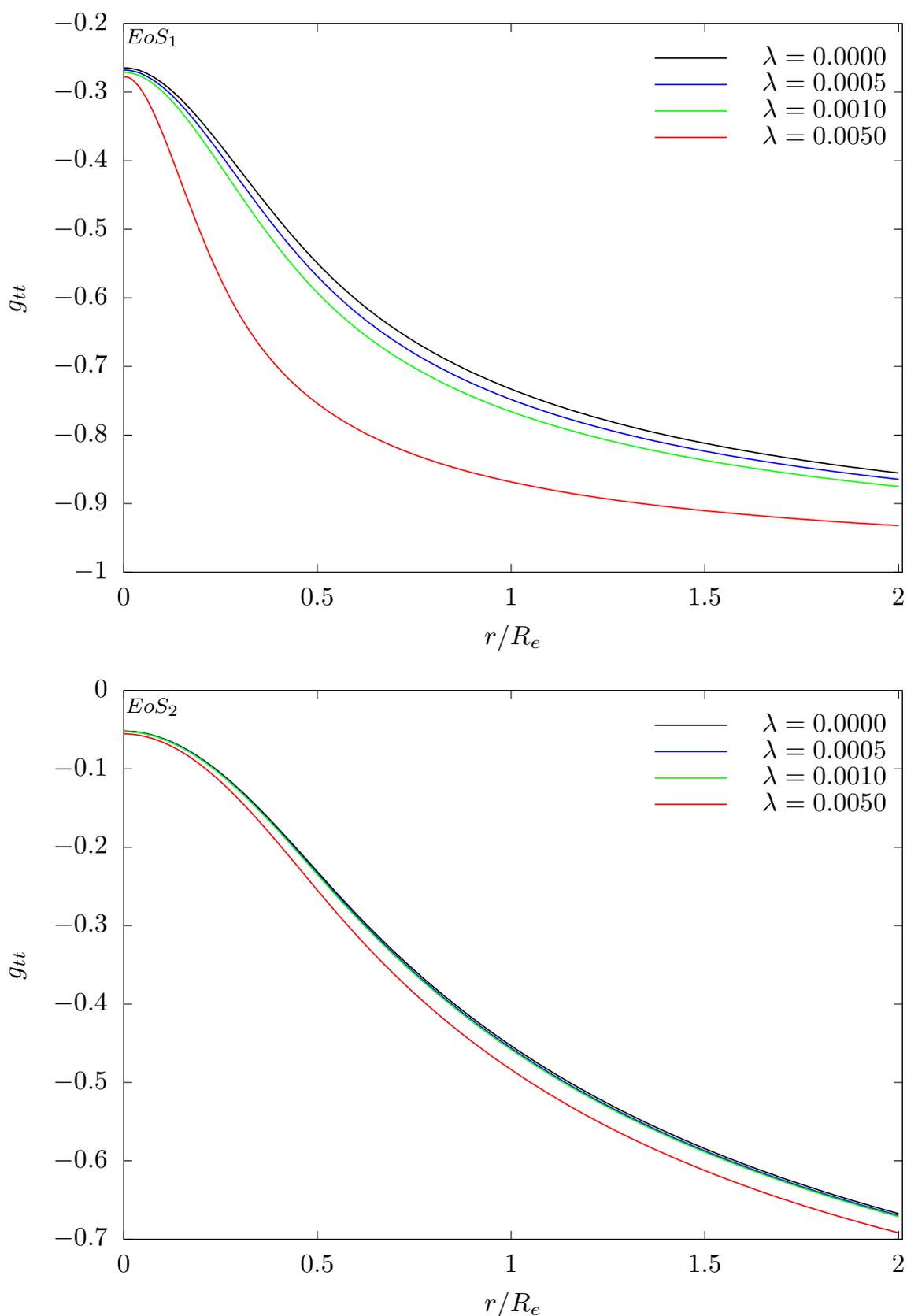


Figura 9 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de *mass shedding* com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.

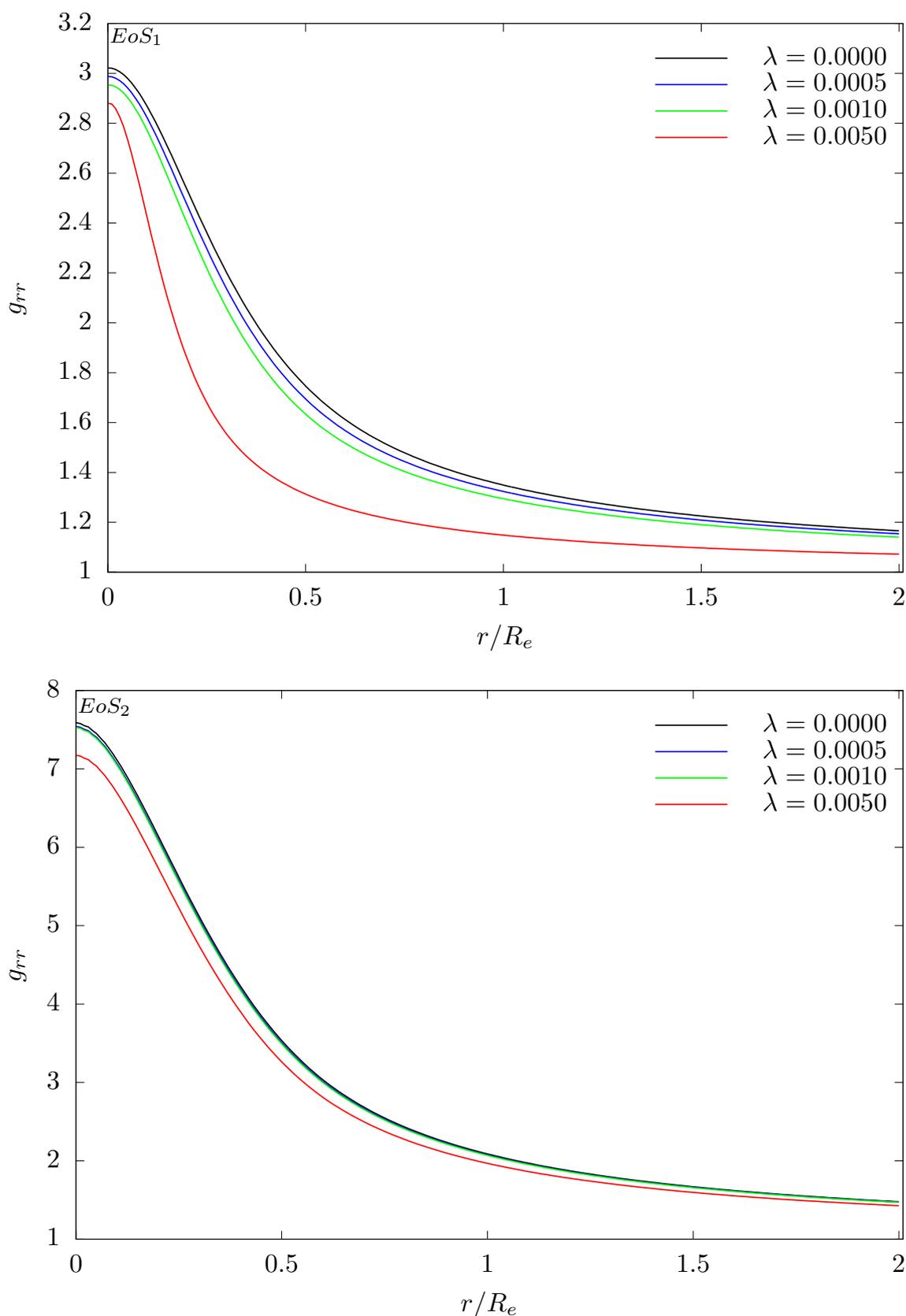


Figura 10 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de *mass shedding* com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.

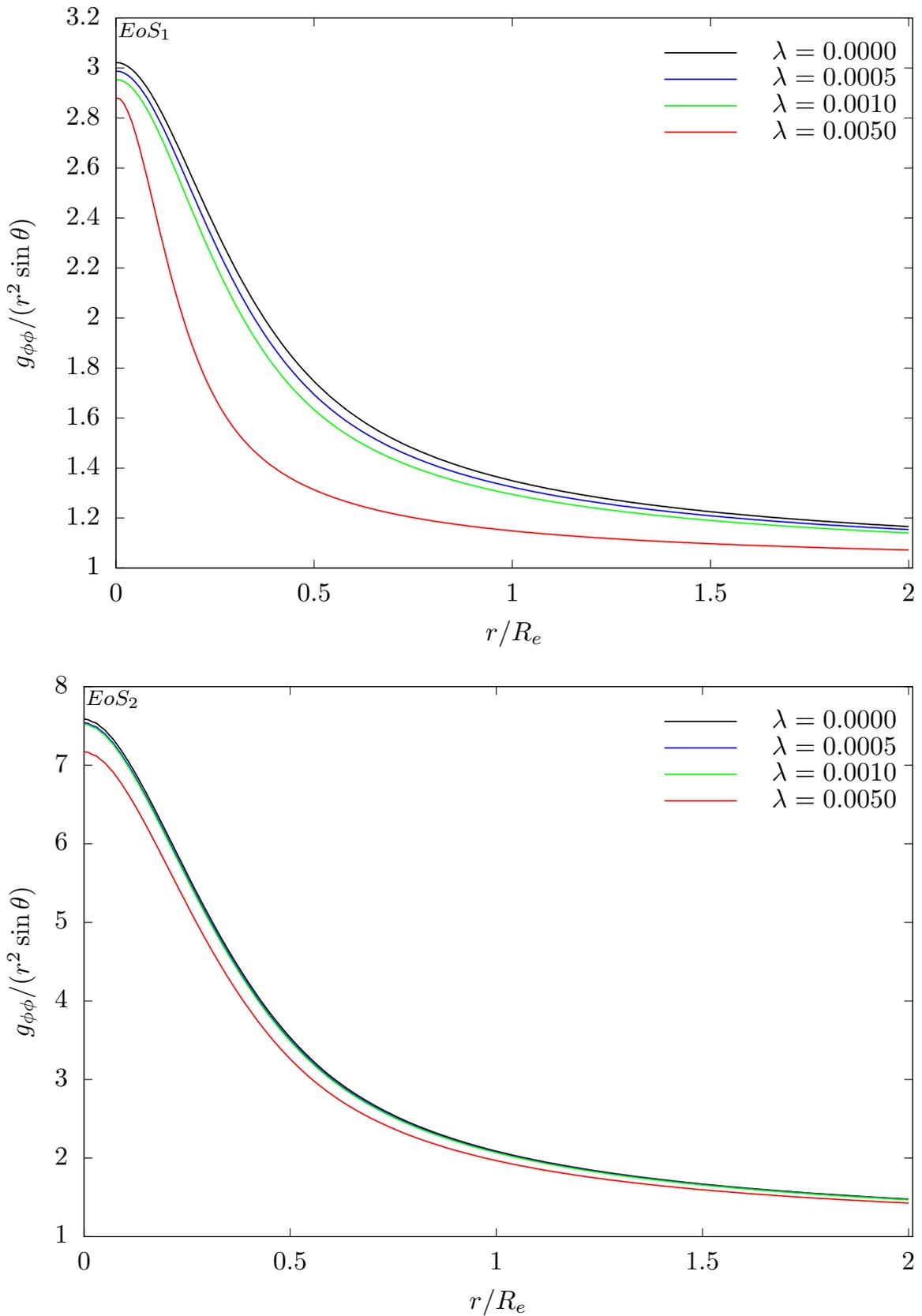


Figura 11 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de *mass shedding* com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.

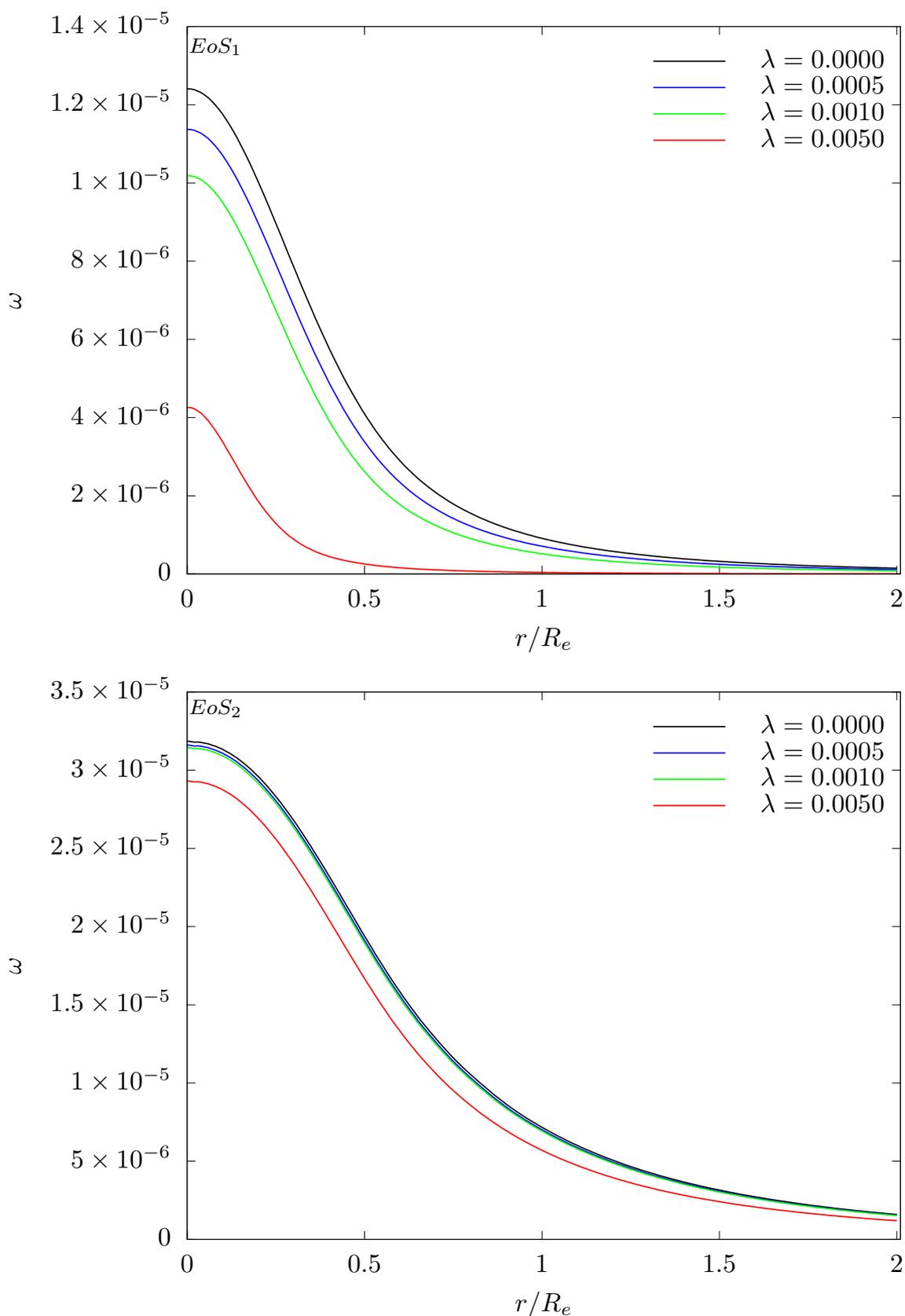


Figura 12 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$), para estrelas rodando no limite de *mass shedding* com uma densidade central de energia fixa. As curvas com $\lambda = 0$ representam soluções na RG.

7.2 EFEITOS DA ROTAÇÃO

Nas Figuras 13, 14, 15 e 16 as curvas para estrelas sem rotação são representadas pelas curvas traço-ponto, estrelas rodando com $\Omega = 300\text{Hz}$ são representadas pelas curvas tracejadas, estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ são representadas pelas curvas pontilhadas e estrelas no limite Kepleriano Ω_K são representadas pelas curvas de linha sólida. Nas Figuras 13, 14 analisamos a relação massa raio, podemos observar que em todas as sequências analisadas, tanto na RG quanto na teoria de Rastall, o efeito de aumentar a rotação é de aumentar a massa das estrelas.

Nas Figuras 15 e 16 analisamos como a relação do momento de inércia pela massa é afetada devido a rotação. Podemos observar que em todas as sequências analisadas, tanto na RG quanto na teoria de Rastall, o efeito de aumentar a rotação é de aumentar o momento de inércia das estrelas.

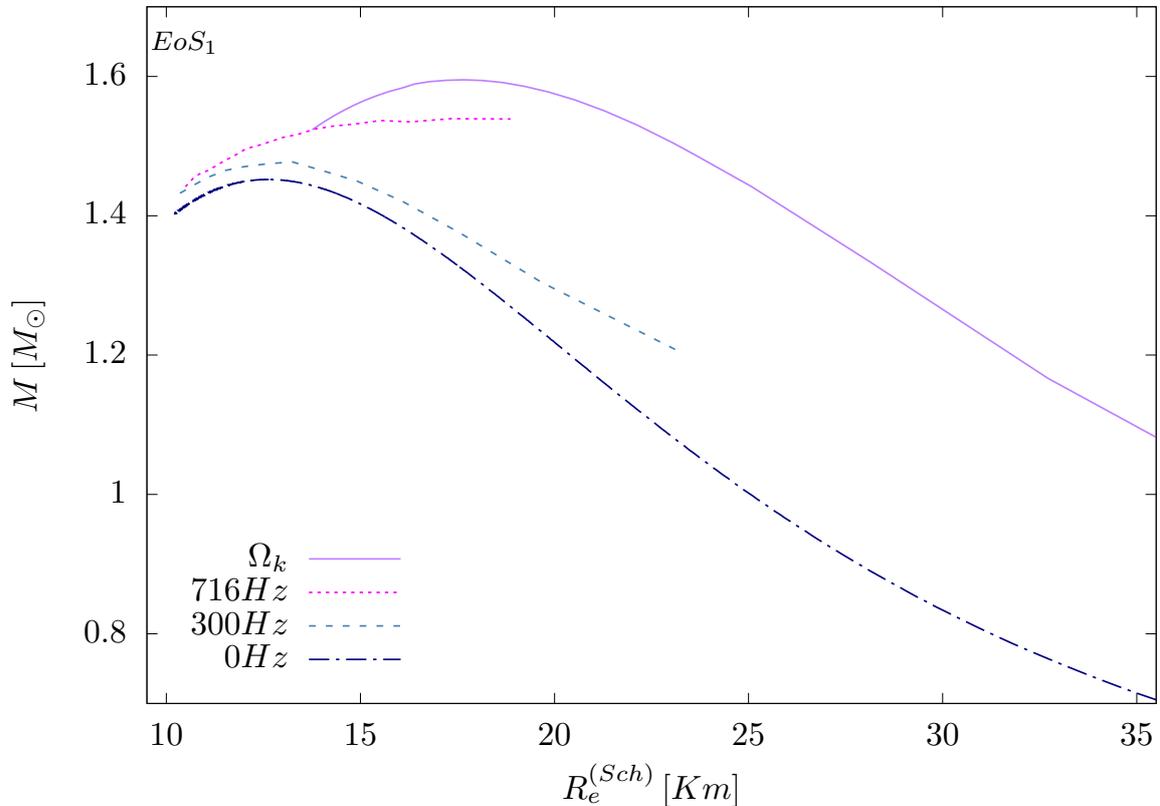
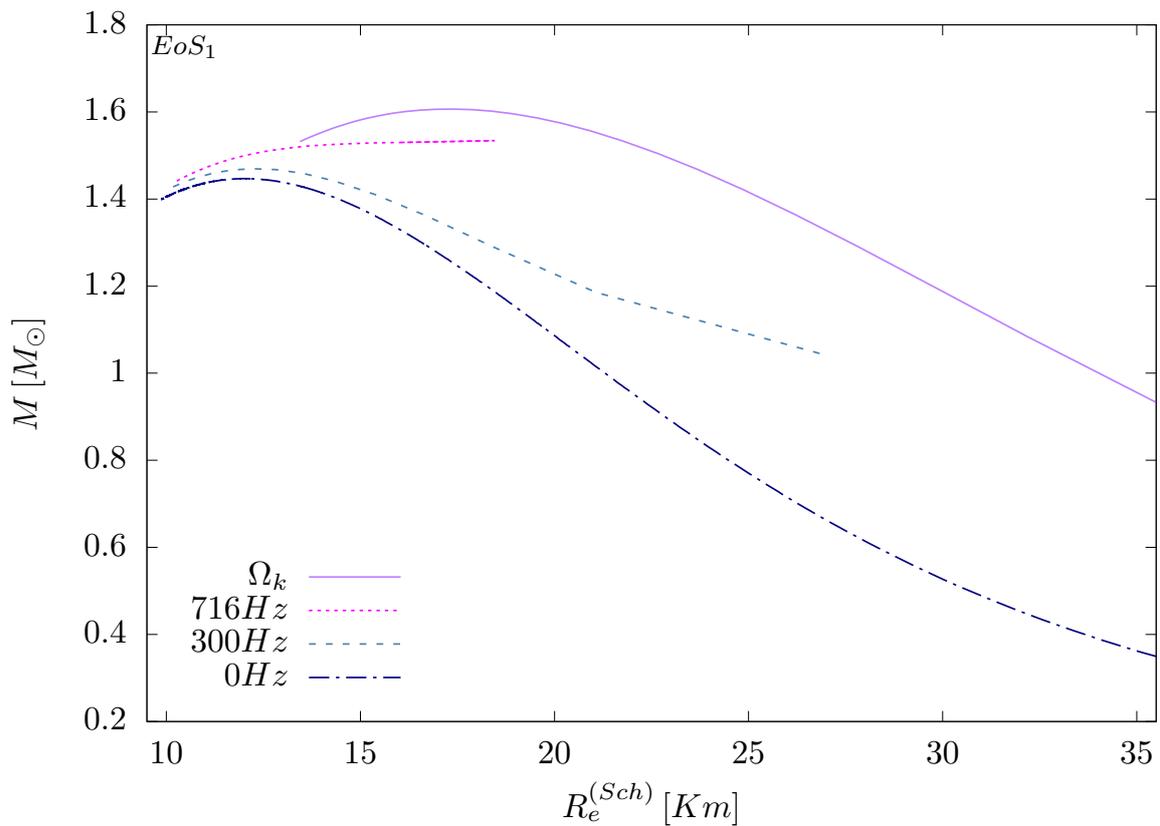


Figura 13 – A relação massa-raio para sequências de estrelas sem rotação (curva com traço-ponto), para estrelas rodando com $\Omega = 300Hz$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716Hz$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

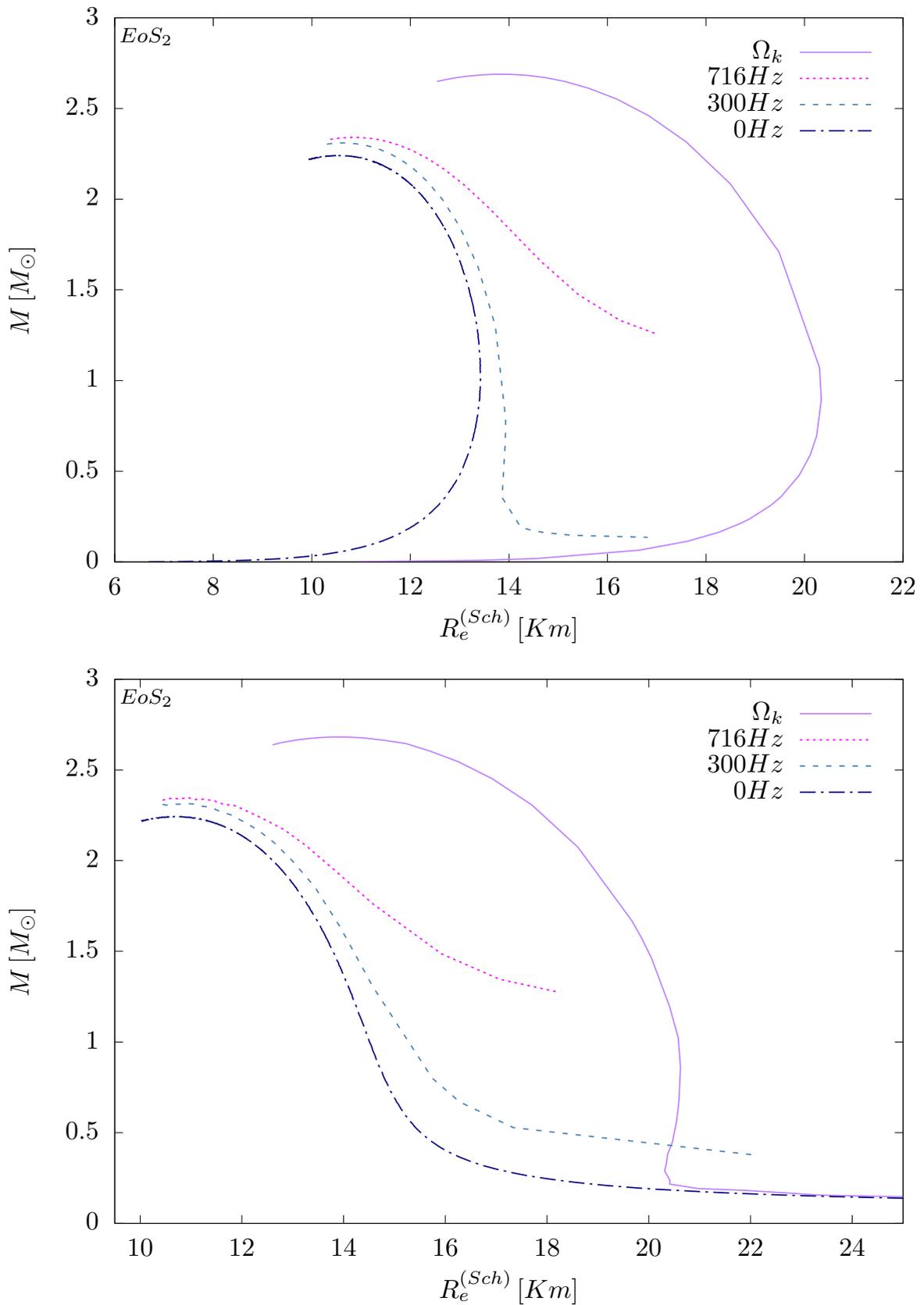


Figura 14 – A relação massa-raio para sequências de estrelas sem rotação (curva com traço-ponto), para estrelas rodando com $\Omega = 300Hz$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716Hz$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

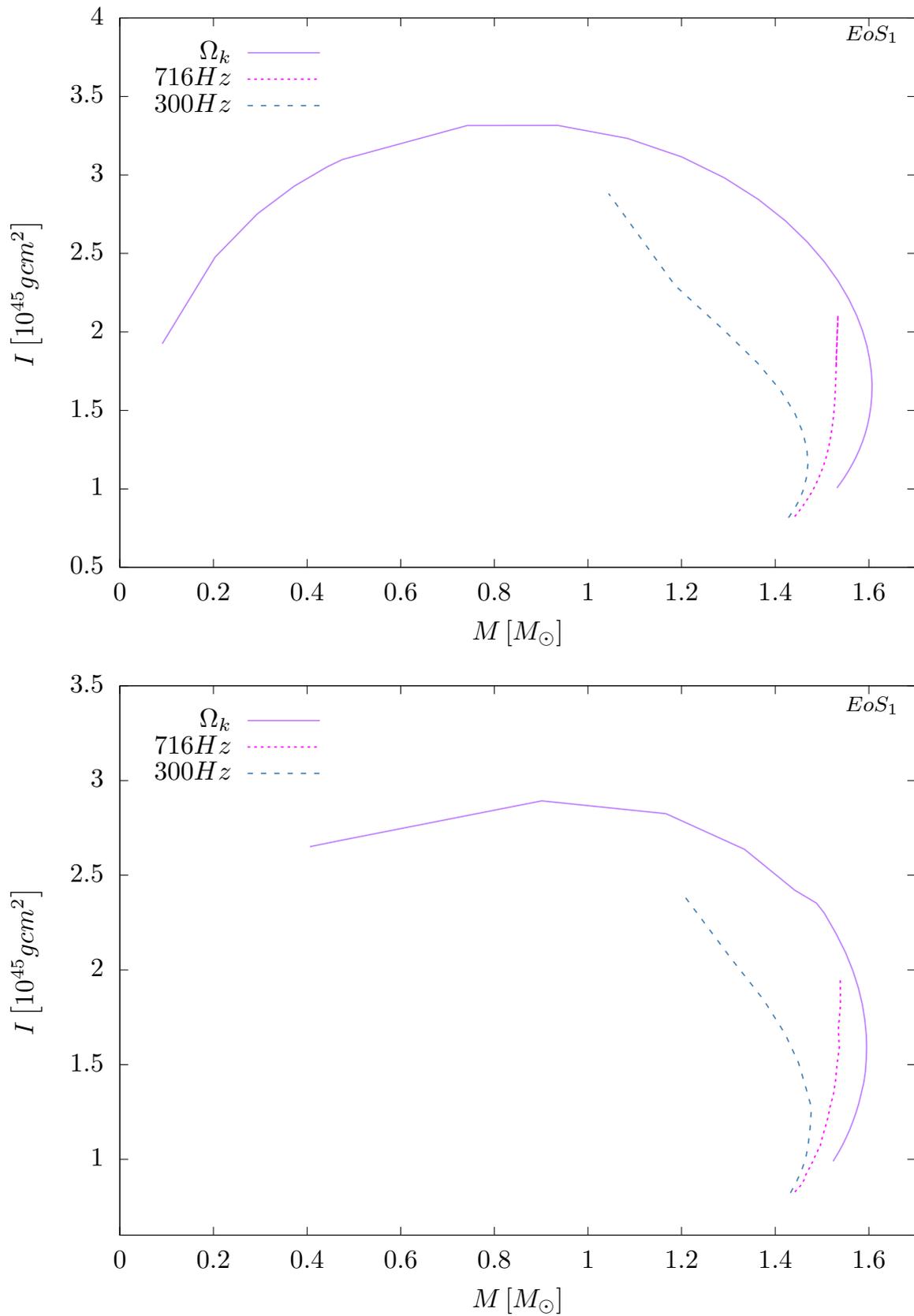


Figura 15 – O momento de inércia como uma função da massa para estrelas rodando com $\Omega = 300 \text{ Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716 \text{ Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

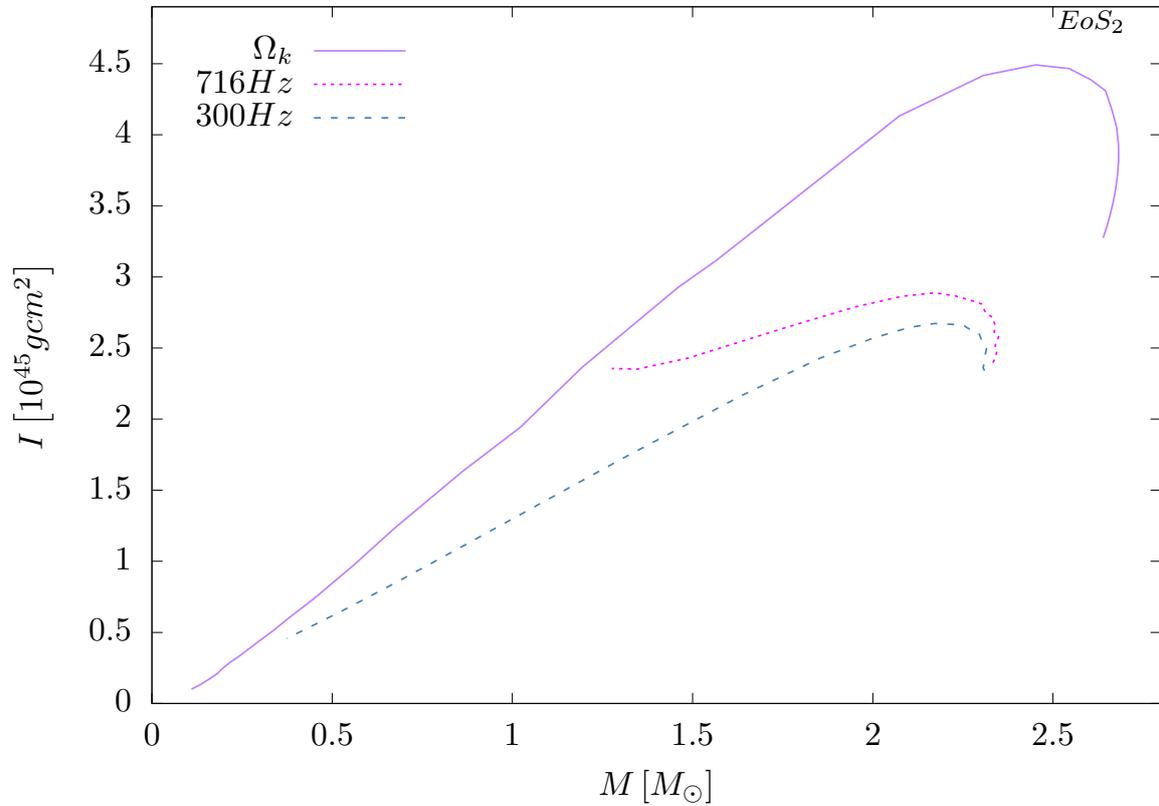
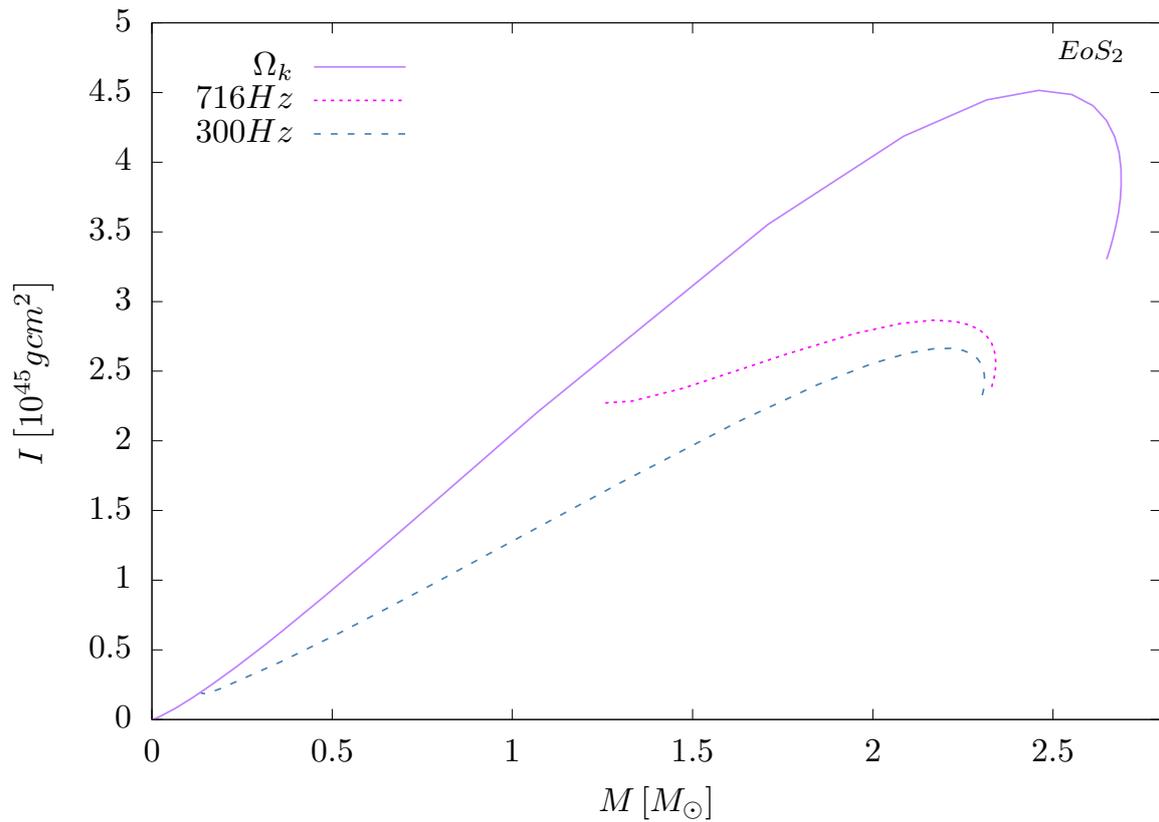


Figura 16 – O momento de inércia como uma função da massa para estrelas rodando com $\Omega = 300 \text{ Hz}$ (curva tracejada), para estrelas rodando com $\Omega = 716 \text{ Hz}$ (curva pontilhada) e para estrelas rodando no limite Kepleriano (curva com linha sólida). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

Nas Figuras 17, 18, 19, 20, 21 e 22 as curvas para estrelas rodando no limite de *mass shedding* são as curvas com linha sólida (em cada figura está indicado o valor de Ω_K), as curvas para estrelas rodando com $\Omega = 716\text{Hz}$ são as curvas pontilhadas e as curvas para estrelas rodando com $\Omega = 50\text{Hz}$ são as curvas traço-ponto. Além disso, nas figuras para EoS_1 todas as curvas são para estrelas com energia central $\varepsilon_c/c^2 = 2.3 \times 10^{15}\text{g/cm}^3$, e nas figuras para EoS_2 todas as estrelas têm $\varepsilon_c/c^2 = 2.4 \times 10^{15}\text{g/cm}^3$.

Nas Figuras 17 e 18 analisamos como a componente g_{tt} do tensor métrico é afetada pela rotação da estrela. Em todos os casos analisados, podemos observar que próximo ao centro da estrela os valores de g_{tt} para a estrela com rotação de 716Hz são mais baixos do que para a estrela com rotação Kepleriana. Também podemos notar que a função g_{tt} para estrela rodando com menor velocidade angular decresce mais lentamente.

Nas Figuras 19, 20, 21 e 22 analisamos como a componente g_{rr} e $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin^2 \theta)$ do tensor métrico, respectivamente, são afetadas pela rotação da estrela. Em todos os casos analisados, podemos observar que o comportamento destas componentes da métrica é bastante semelhante ao comportamento de g_{tt} . Ou seja, próximos ao centro da estrela os valores das funções para a estrela com rotação menor são mais baixos do que para a estrela com rotação Kepleriana. E as funções g_{rr} e $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin^2 \theta)$ também decrescem mais lentamente para estrelas rodando com menor velocidade angular.

Por fim, nas Figuras 23 e 24 investigamos como a função ω , que representa o arrastamento do referencial ao redor da estrela devido à estrela estar girando, se altera devido a rotação. Podemos observar que em todos os casos analisados o efeito de diminuir a rotação da estrela é de também diminuir os valores de ω , como seria de se esperar.

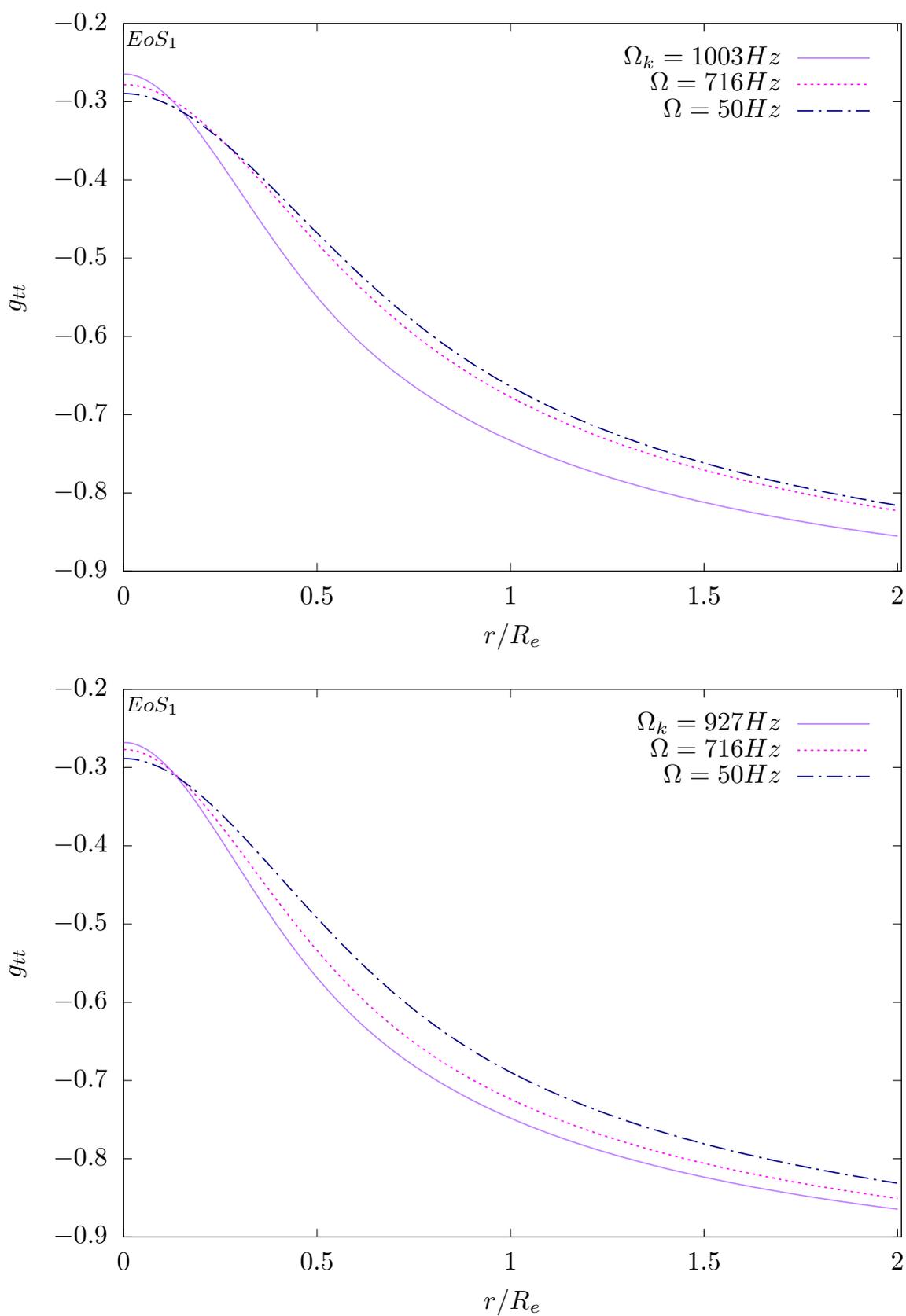


Figura 17 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

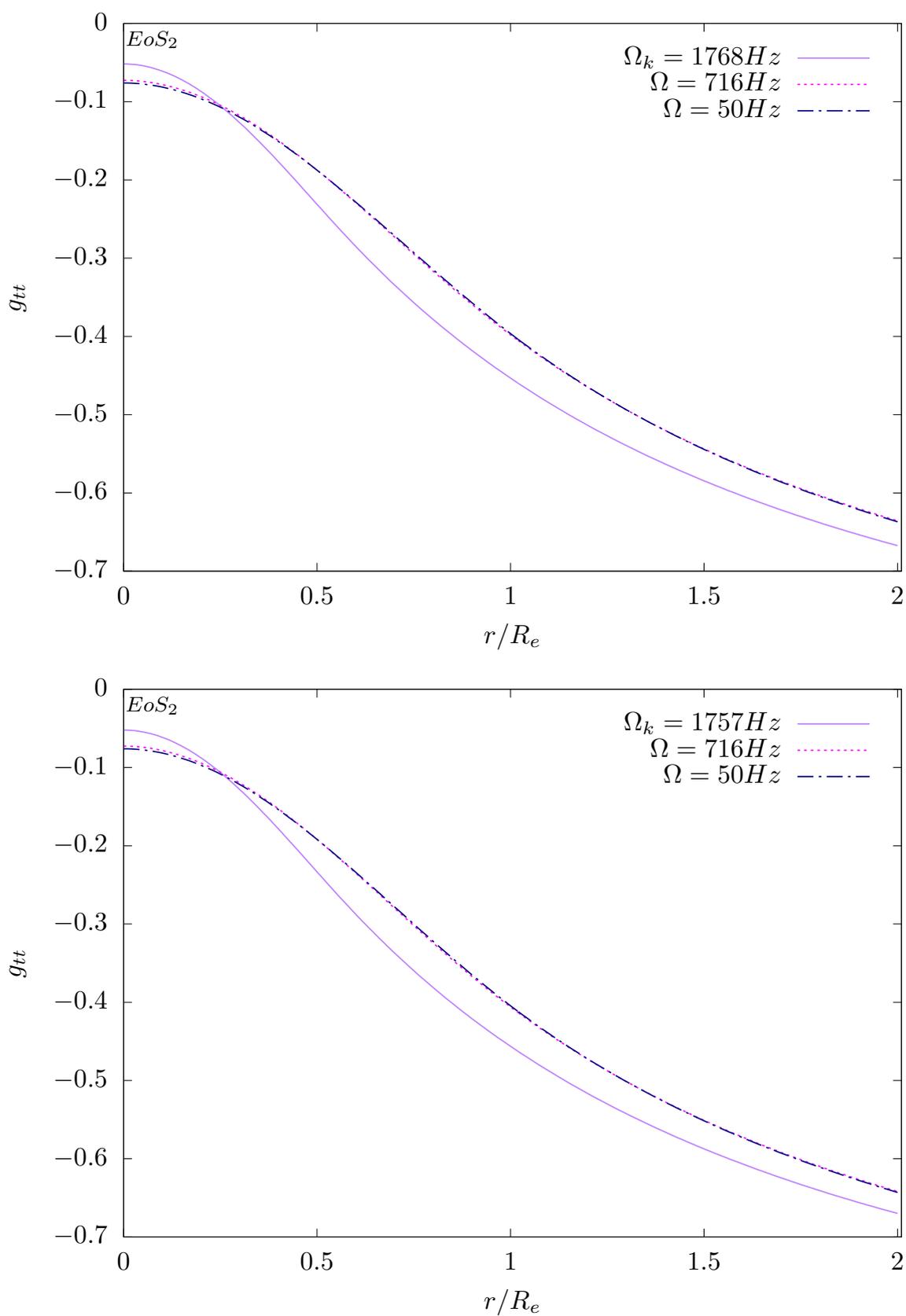


Figura 18 – A componente g_{tt} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

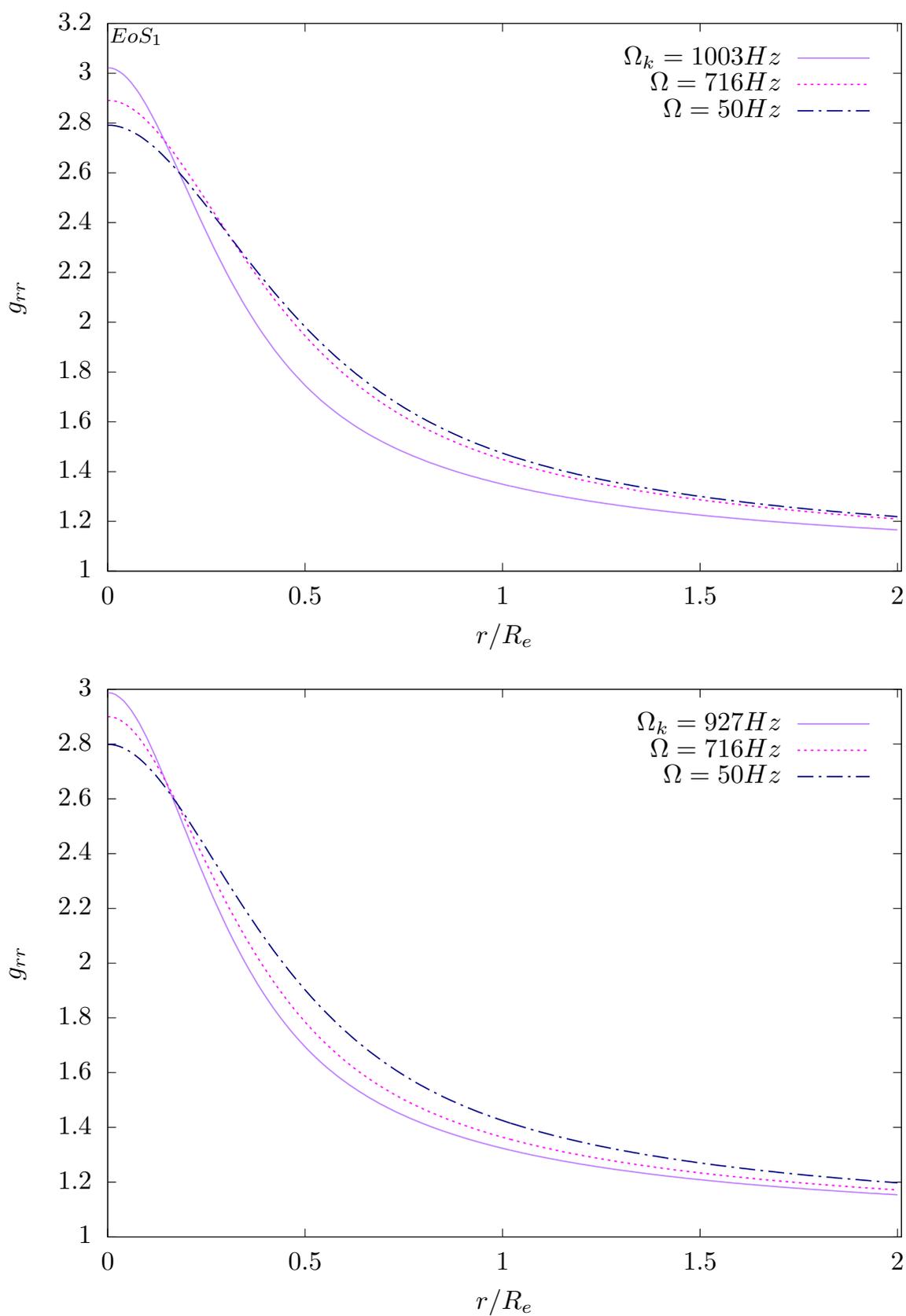


Figura 19 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

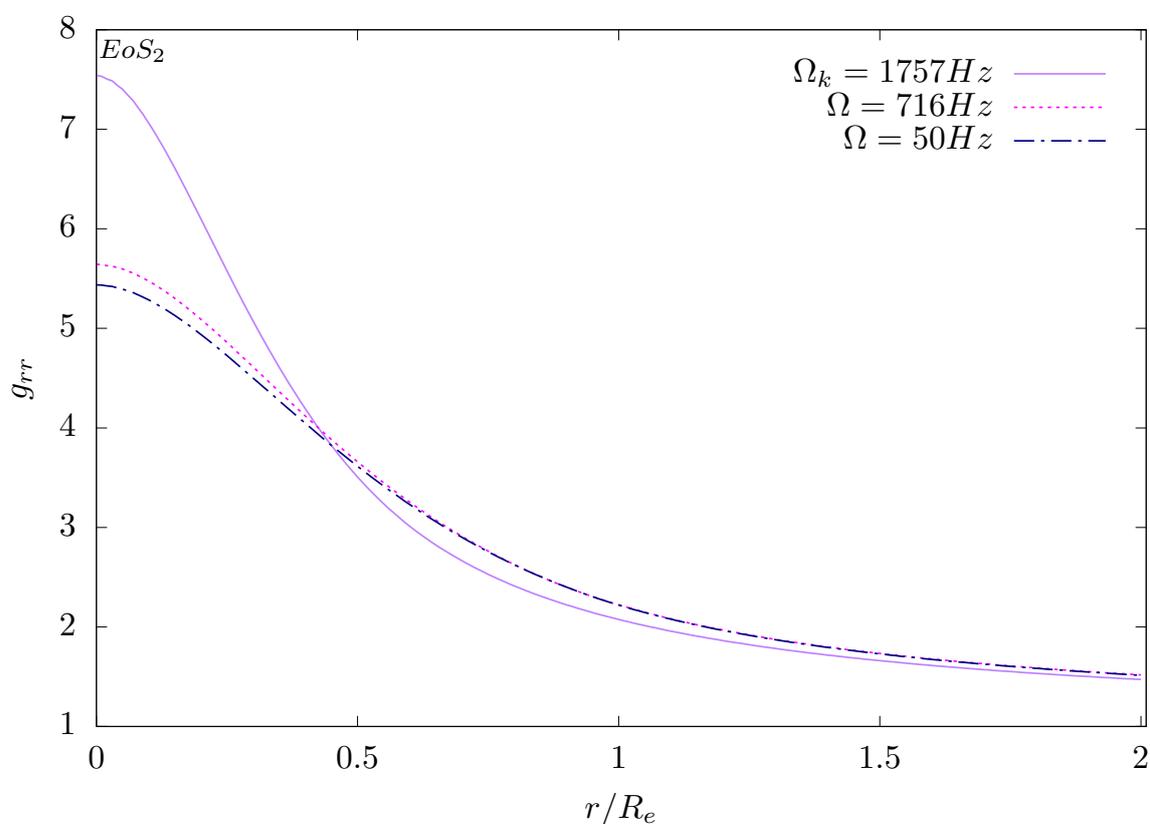
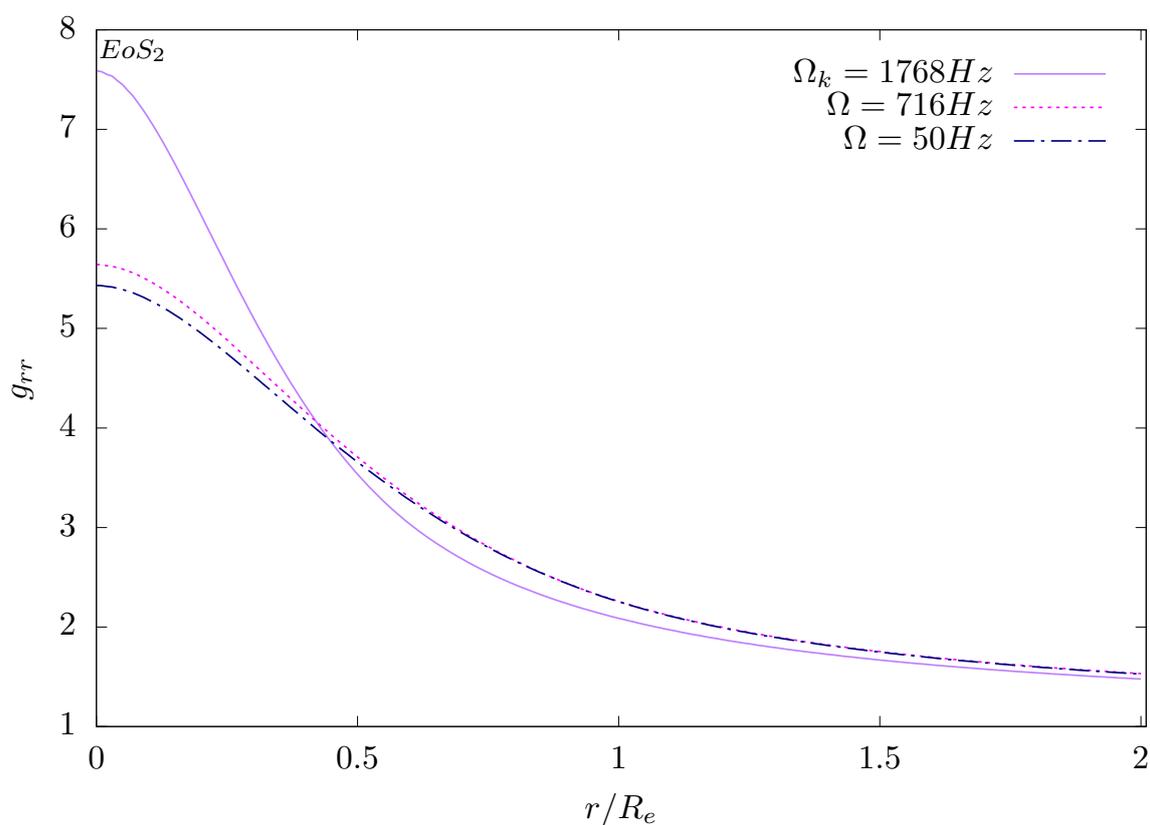


Figura 20 – A componente g_{rr} do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

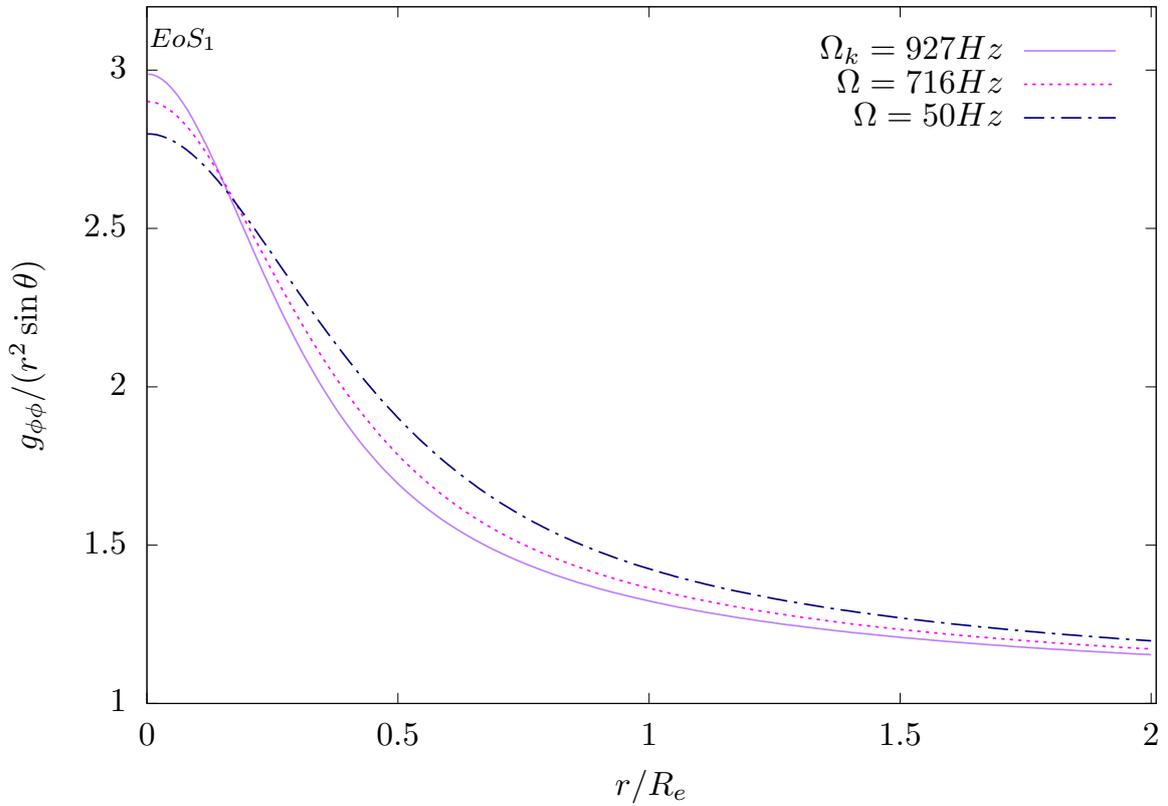
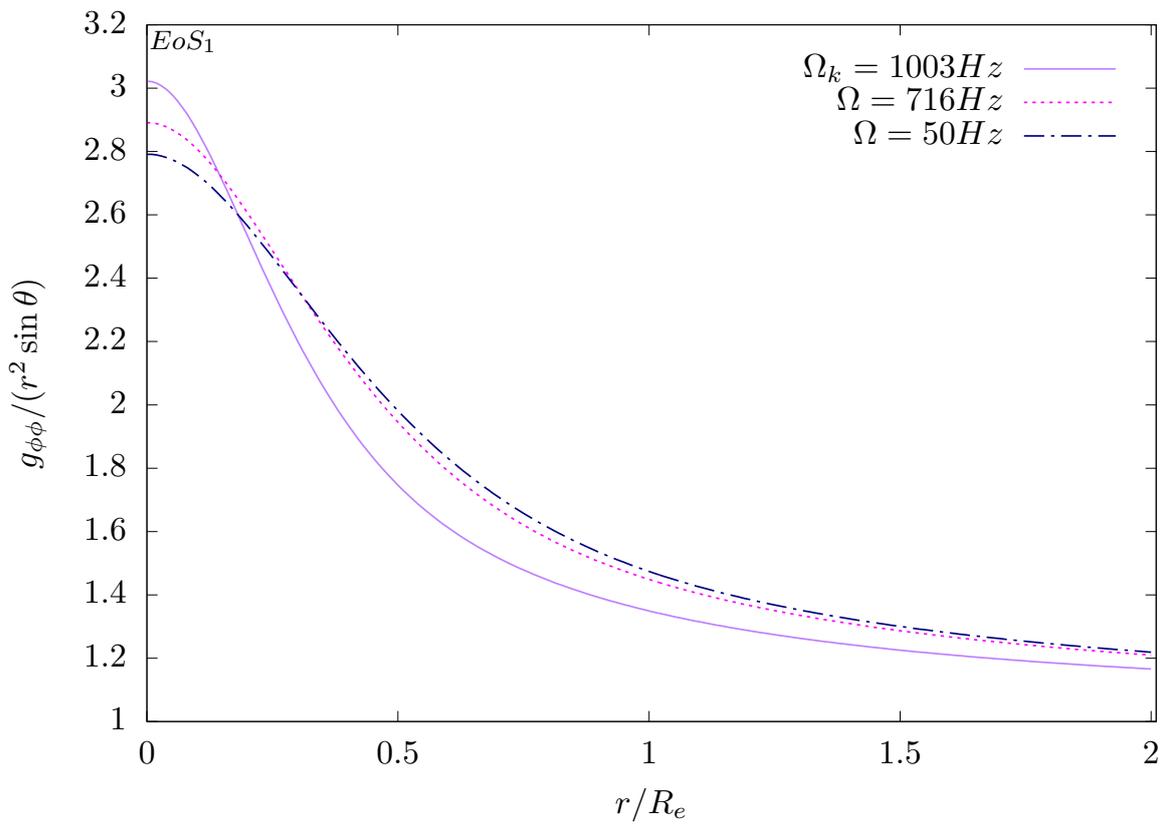


Figura 21 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

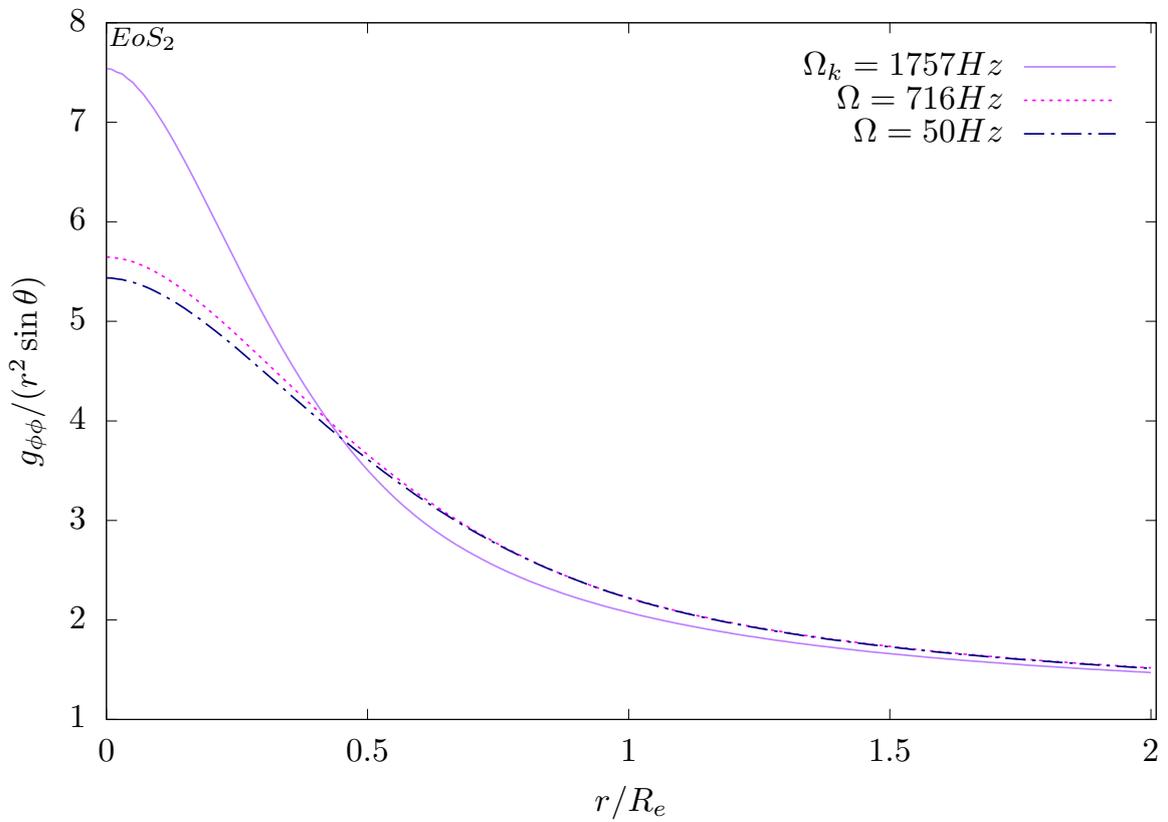
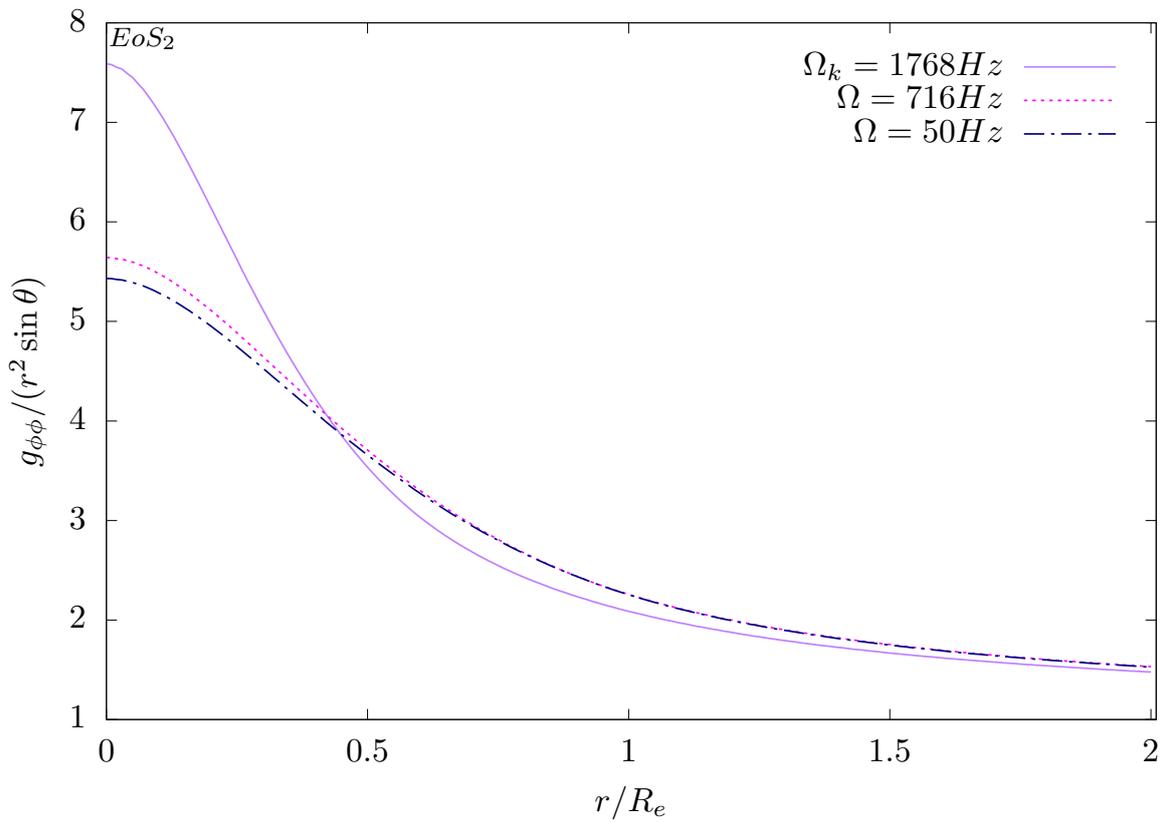


Figura 22 – A componente $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin \theta)$ do tensor métrico como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

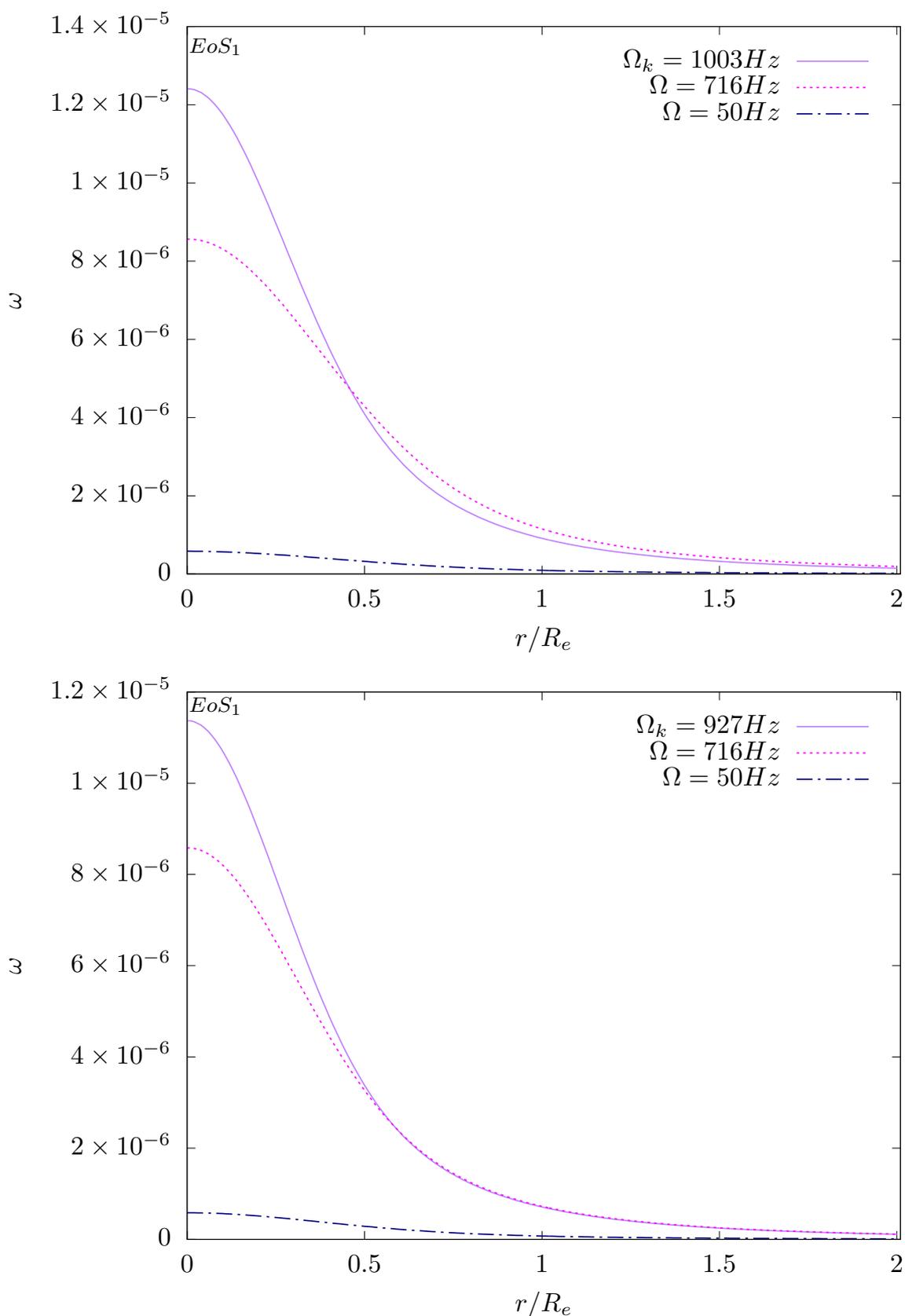


Figura 23 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

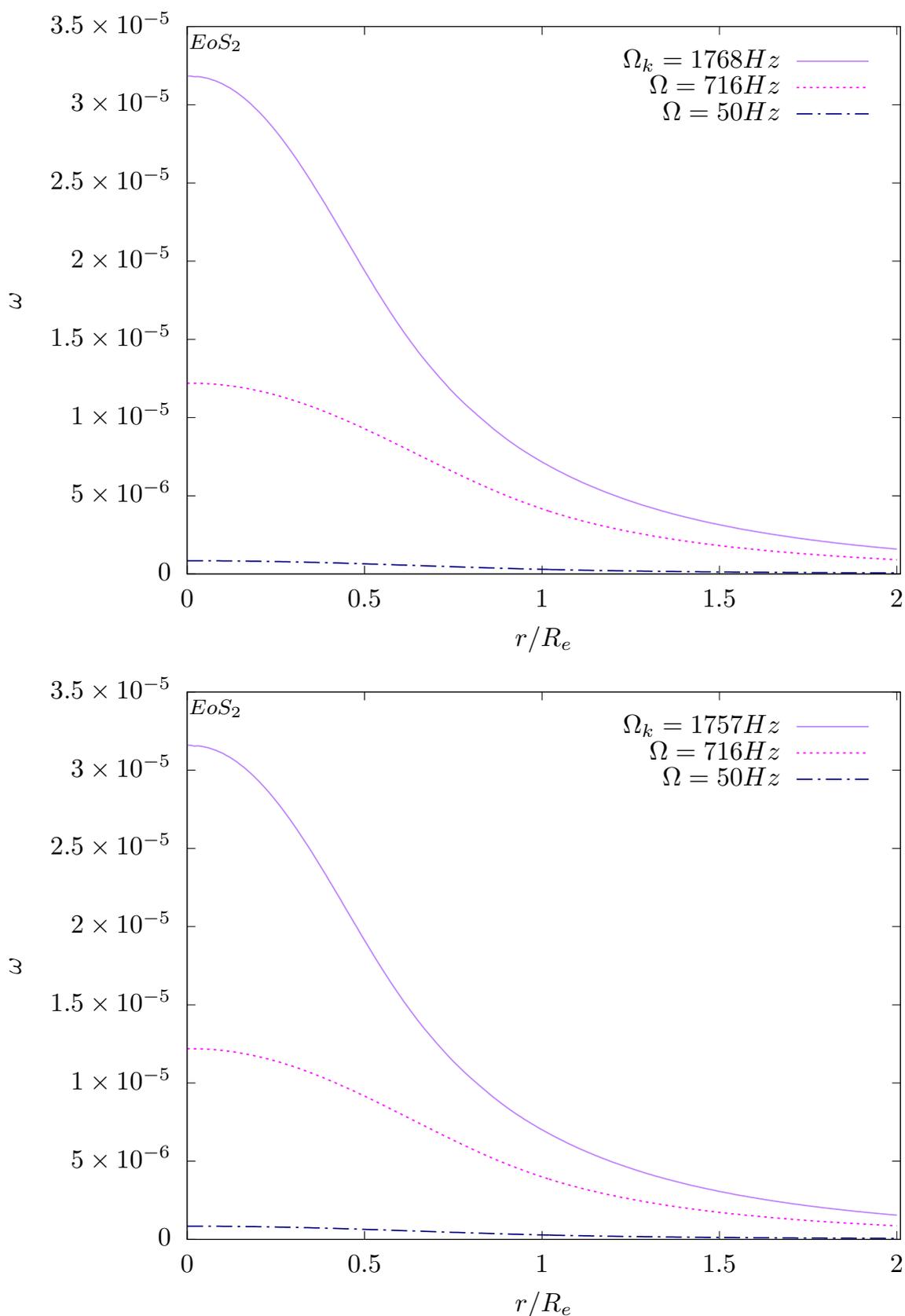


Figura 24 – A função ω , associada ao efeito Lense-Thirring, como uma função da razão r/R_e no equador da estrela ($\theta = \pi/2$). A Figura de cima é para a RG, e a de baixo é para $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, ou seja, para a teoria de Rastall

Podemos então concluir que observado os resultados apresentados nesta seção, obtivemos uma visão geral das estrelas e de como o espaço-tempo sofre o efeito de objetos com rotação e da teoria de Rastall.

No próximo capítulo apresentaremos as conclusões finais desta tese e as perspectivas futuras de continuação deste estudo.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho estudamos estrelas compactas rotacionando rapidamente na teoria de gravidade modificada de Rastall. O modelo foi formulado no contexto da teoria da relatividade geral e as equações de Einstein foram obtidas a partir de uma métrica com simetria axial (78), muito utilizada no estudo de sistemas com rotação. A matéria foi considerada como um fluido perfeito e as equações foram obtidas considerando a proposta de Rastall e desse modo, um parâmetro λ é introduzido. Para $\lambda = 0$ voltamos para a teoria da relatividade geral. Resolvemos as equações de campo encontradas numericamente usando o método KEH fazendo combinações lineares das equações de Einstein de modo a poder encontrar as soluções das equações diferenciais em termos de integrais das funções de Green. Aplicando as modificações necessárias e desenvolvendo o procedimento numérico conforme foi descrito no texto os resultados numéricos foram obtidos. Empregamos uma EoS politrópica com duas escolhas diferentes para os parâmetros da equação que são bastante usadas na literatura, a primeira EoS, que chamamos EoS_1 , pode ser considerada uma representante de uma EoS *soft* e gera massa máxima em torno de $1.4M_{\odot}$ no caso estático, e a segunda, que chamamos de EoS_2 , pode ser considerada uma EoS *stiff* e leva a uma massa máxima em torno de $2M_{\odot}$ no caso estático. Foi assumida uma rotação uniforme e utilizamos três valores para a constante λ : 5×10^{-4} , 1×10^{-3} e 5×10^{-3} . As propriedades das soluções encontradas foram calculadas e estudadas para os casos de interesse. Em todas as situações analisadas, as propriedades das estrelas com EoS_2 foram menos influenciadas pela teoria de Rastall do que as das estrelas com EoS_1 .

Nós estudamos a relação massa-raio associada a sequências de soluções para estrelas compactas rotacionando rapidamente e para estrelas estáticas. Em particular, nossos resultados para estrelas sem rotação coincidem com os resultados da literatura (FABRIS, Júlio C. *et al.*, 2015; MOTA *et al.*, 2019a). No caso das estrelas rotacionando no limite Kepleriano, observamos que a massa máxima diminuiu ligeiramente enquanto que no caso sem rotação ela aumenta ligeiramente, e em ambos os casos observamos que o raio das estrelas aumenta.

Também exploramos as relações entre a massa e a velocidade angular no limite Kepleriano com a densidade central de energia, e pudemos concluir que a medida que aumentamos o valor do parâmetro λ , tanto a massa como a velocidade angular diminuem para estrelas com a mesma densidade central de energia. Além disso, também examinamos o efeito da teoria de Rastall na relação entre o momento de inércia e a massa, e pudemos ver que em geral o efeito de aumentar o parâmetro λ foi deslocar as curvas $I \times M$ para baixo e para a esquerda. No entanto, em algumas situações este comportamento muda e o momento de inércia aumenta à medida que a massa diminui. Acreditamos que isto ocorre devido ao fato de que o efeito da teoria de Rastall de

aumentar o raio das estrelas é mais intenso quanto menor a massa da estrela, assim estrelas com massas baixas na teoria de Rastall podem ter raios muito maiores do que na RG.

Analizamos também o efeito da teoria de Rastall nas componentes do tensor métrico. A componente g_{tt} , por exemplo, sofre efeitos da gravidade de Rastall, e nós podemos inferir que o comportamento desta quantidade é uma consequência dos resultados prévios. Vimos que o efeito de aumentar o valor de λ é de diminuir a massa, aumentar o raio e diminuir a rotação das estrelas, de forma que, é esperado que a deformação do espaço-tempo será menor, como podemos observar na Figura 9. Também estudamos o efeito da rotação na métrica, e este efeito é bem importante conforme podemos observar nas figuras da Seção 7.2. A estrutura do espaço-tempo é bastante sensível à rotação da matéria presente no interior deste espaço.

Podemos concluir que o efeito da rotação sobre as curvas massa-raio e as curvas do momento de inércia como uma função da massa é igual na RG e na teoria de Rastall. No caso da relação massa-raio o efeito de aumentar a rotação é aumentar a massa da estrela. Já no caso do momento de inércia, como seria de esperar por esta quantidade estar associada à rotação, as curvas com rotação menor também possuem menor momento de inércia.

No caso das curvas analisadas para os termos da métrica na RG e na teoria de Rastall, podemos notar que estas são igualmente afetadas pela rotação, uma pequena diferença que podemos observar é que as curvas na teoria de Rastall decrescem de forma um pouco mais suave.

Podemos concluir que os termos da métrica g_{tt} , g_{rr} e $g_{\phi\phi}/(r^2 \sin^2 \theta)$ com EoS_2 são menos afetados pela rotação do que os casos com EoS_1 . No caso da função ω , associada ao efeito Lense-Thirring parece ocorrer o mesmo, as curvas com EoS_2 também se deformam menos devido a rotação do que as curvas com EoS_1 .

Visto que este é o primeiro estudo de estrelas compactas rotacionando na gravidade modificada de Rastall, ainda existem muitos outros aspectos desse sistema que podem ser estudados. Poderíamos, por exemplo, explorar também o cenário de rotação diferencial, além disso, seria interessante fazer estudos considerando análises atuais tais como as relações *I-Love Q* (YAGI; YUNES, 2013), entre muitas outras possibilidades.

Devemos ainda ressaltar que observando os desenvolvimentos atuais dos modelos de estrelas, muitas características mais realistas poderiam ser introduzidas neste estudo tais como equações de estado considerando campos e partículas (tais como teoria de campo médio ou outros modelos), pasta, e assim por diante. Contudo, observando a complexidade dos cálculos presentes nesta tese, com o tempo disponível para a elaboração deste estudo não foi possível introduzir estes importantes elementos. Mesmo assim, agora o aprimoramento do modelo proposto pode ser feito de forma

direta, e quaisquer elementos de interesse podem ser incluídos, e é isso que será feito em trabalhos futuros.

Deste modo, podemos observar que nesta tese desenvolvemos um modo de produzir modelos para estrelas com rotação, obtivemos vários resultados, mas o mais importante é que este método apresenta possibilidades bastante interessantes para estudos futuros.

REFERÊNCIAS

ABBAS, G; SHAHZAD, MR. A new model of quintessence compact stars in the Rastall theory of gravity. **The European Physical Journal A**, Springer, v. 54, n. 12, p. 211, 2018a.

ABBAS, G; SHAHZAD, MR. Isotropic compact stars model in Rastall theory admitting conformal motion. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 363, n. 12, p. 251, 2018b.

ABBAS, G; SHAHZAD, MR. Models of anisotropic compact stars in the Rastall theory of gravity. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 364, n. 3, p. 50, 2019.

ABBOTT, Benjamin P *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

ABBOTT, BP *et al.* GWTC-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by LIGO and Virgo during the first and second observing runs. **Physical Review X**, APS, v. 9, n. 3, p. 031040, 2019.

AKIYAMA, Kazunori *et al.* First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 875, n. 1, p. L4, 2019.

ALI-HAIMOUD, Yacine; CHEN, Yanbei. Slowly rotating stars and black holes in dynamical Chern-Simons gravity. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 12, p. 124033, 2011.

ARNOWITT, Richard; DESER, Stanley; MISNER, Charles W. Canonical variables for general relativity. **Physical Review**, APS, v. 117, n. 6, p. 1595, 1960.

ARNOWITT, Richard; DESER, Stanley; MISNER, Charles W. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. **Physical Review**, APS, v. 116, n. 5, p. 1322, 1959.

ASTASHENOK, Artyom V; ODINTSOV, Sergey D. Rotating neutron stars in $F(R)$ gravity with axions. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 498, n. 3, p. 3616–3623, 2020.

BARDEEN, James M; WAGONER, Robert V. Relativistic disks. I. Uniform rotation. **The Astrophysical Journal**, v. 167, p. 359, 1971.

BARDEEN, James M; WAGONER, Robert V. Uniformly rotating disks in general relativity. **The Astrophysical Journal**, v. 158, p. 165, 1969.

BAYM, Gordon; PETHICK, Christopher; SUTHERLAND, Peter. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299, 1971.

BLANDFORD, RD; APPEGATE, JH; HERNQUIST, L. Thermal origin of neutron star magnetic fields. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 204, n. 4, p. 1025–1048, 1983.

BONAZZOLA, S; MASCHIO, G. Models of rotating neutron stars in general relativity. *In*: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. SYMPOSIUM-INTERNATIONAL Astronomical Union. [S.l.: s.n.], 1971. P. 346–351.

BONAZZOLA, Silvano; SCHNEIDER, Jean. An exact study of rigidly and rapidly rotating stars in general relativity with application to the Crab pulsar. **The Astrophysical Journal**, v. 191, p. 273–290, 1974.

BUTTERWORTH, EM; IPSER, JR. On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. I-The numerical method for computing structure and its application to uniformly rotating homogeneous bodies. **The Astrophysical Journal**, v. 204, p. 200–223, 1976.

COOK, Gregory B; SHAPIRO, Stuart L; TEUKOLSKY, Saul A. Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state. **The Astrophysical Journal**, v. 424, p. 823–845, 1994a.

COOK, Gregory B; SHAPIRO, Stuart L; TEUKOLSKY, Saul A. Rapidly rotating polytropes in general relativity. **The Astrophysical Journal**, v. 422, p. 227–242, 1994b.

COOK, Gregory B; SHAPIRO, Stuart L; TEUKOLSKY, Saul A. Spin-up of a rapidly rotating star by angular momentum loss-Effects of general relativity. **The Astrophysical Journal**, v. 398, p. 203–223, 1992.

CUTLER, Curt; LINDBLOM, Lee. The effect of viscosity on neutron star oscillations. **The Astrophysical Journal**, v. 314, p. 234–241, 1987.

DAMOUR, Thibault; ESPOSITO-FARESE, Gilles. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. **Physical Review D**, APS, v. 54, n. 2, p. 1474, 1996.

DONEVA, Daniela D; YAZADJIEV, Stoytcho S. Rapidly rotating neutron stars with a massive scalar field—structure and universal relations. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 11, p. 019, 2016.

DONEVA, Daniela D; YAZADJIEV, Stoytcho S; KOKKOTAS, Kostas D. IQ relations for rapidly rotating neutron stars in $f(R)$ gravity. **Physical Review D**, APS, v. 92, n. 6, p. 064015, 2015.

DONEVA, Daniela D; YAZADJIEV, Stoytcho S; STERGIOULAS, Nikolaos; KOKKOTAS, Kostas D. Differentially rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. **Physical Review D**, APS, v. 98, n. 10, p. 104039, 2018.

DONEVA, Daniela D; YAZADJIEV, Stoytcho S; STERGIOULAS, Nikolaos; KOKKOTAS, Kostas D. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. **Physical Review D**, APS, v. 88, n. 8, p. 084060, 2013.

ERIGUCHI, Y; HACHISU, I; NOMOTO, K. Structure of rapidly rotating neutron stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press Oxford, UK, v. 266, n. 1, p. 179–185, 1994.

ERNST, Frederick J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. **Physical Review**, APS, v. 167, n. 5, p. 1175, 1968.

FABRIS, Júlio C; PIATTELLA, Oliver F; RODRIGUES, Davi C; BATISTA, Carlos EM; DAOUDA, Mahamadou H. Rastall cosmology. *In: WORLD SCIENTIFIC. INTERNATIONAL Journal of Modern Physics: Conference Series*. [S.l.: s.n.], 2012. P. 67–76.

FABRIS, Júlio C.; PIATTELLA, Oliver F.; RODRIGUES, Davi C.; DAOUDA, Mahamadou H. Rastall's cosmology and its observational constraints. *In: II CosmoSur: Cosmology and Gravitation of the Southern Cone*. Valparaíso, Chile: AIP, 2015. (AIP Conference Proceedings), p. 50–53. DOI: 10.1063/1.4913336.

FIGER, Donald F. An upper limit to the masses of stars. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 434, n. 7030, p. 192–194, 2005.

FILIPPAZZO, Joseph C; RICE, Emily L; FAHERTY, Jacqueline; CRUZ, Kelle L; VAN GORDON, Mollie M; LOOPER, Dagny L. Fundamental parameters and spectral energy distributions of young and field age objects with masses spanning the stellar to planetary regime. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 810, n. 2, p. 158, 2015.

FLOWERS, E; ITOH, N. Transport properties of dense matter. II. **The Astrophysical Journal**, v. 230, p. 847–858, 1979.

FLOWERS, Elliott; ITOH, Naoki. Transport properties of dense matter. **The Astrophysical Journal**, v. 206, p. 218–242, 1976.

FRIEDMAN, John L; STERGILOULAS, Nikolaos. **Rotating relativistic stars**. [S./]: Cambridge University Press, 2013.

FU, Wen; LAI, Dong. Dynamics of the innermost accretion flows around compact objects: magnetosphere–disc interface, global oscillations and instabilities. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 423, n. 1, p. 831–843, 2012.

GRIFFITHS, Jerry B; PODOLSK, Jiří. **Exact space-times in Einstein's general relativity**. [S./]: Cambridge University Press, 2009.

HACHISU, Izumi. A versatile method for obtaining structures of rapidly rotating stars. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 61, p. 479–507, 1986.

HAENSEL, Paweł; POTEKHIN, Aleksander Yu; YAKOVLEV, Dmitry G. **Neutron stars 1: Equation of state and structure**. [S./]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 326.

HANSRAJ, Sudan; BANERJEE, Ayan; CHANNUIE, Phongpichit. Impact of the Rastall parameter on perfect fluid spheres. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 400, p. 320–345, 2019.

HARADA, Tomohiro. Neutron stars in scalar-tensor theories of gravity and catastrophe theory. **Physical Review D**, APS, v. 57, n. 8, p. 4802, 1998.

HEGYI, DJ. The upper mass limit for neutron stars including differential rotation. **The Astrophysical Journal**, v. 217, p. 244–247, 1977.

HENDI, SH; BORDBAR, GH; PANAHA, B Eslam; PANAHIYAN, S. Modified TOV in gravity's rainbow: properties of neutron stars and dynamical stability conditions. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2016, n. 09, p. 013, 2016.

HESSELS, Jason WT; RANSOM, Scott M; STAIRS, Ingrid H; FREIRE, Paulo CC; KASPI, Victoria M; CAMILO, Fernando. A radio pulsar spinning at 716 Hz. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 311, n. 5769, p. 1901–1904, 2006.

HORED, G.P. **Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2006. (Astrophysics and Space Science Library). ISBN 9781402023514. Disponível em:
<https://books.google.com.br/books?id=Hm3rBwAAQBAJ>.

ISLAM, Jamal Nazrul. Rotating fields in general relativity. **Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1985, 127 p.**, 1985.

KLEIHAUS, Burkhard; KUNZ, Jutta; MOJICA, Sindy; ZAGERMANN, Marco. Rapidly rotating neutron stars in dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet theory. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 6, p. 064077, 2016.

KOMAR, Arthur. Covariant conservation laws in general relativity. **Physical Review**, APS, v. 113, n. 3, p. 934, 1959.

KOMATSU, Hidemi; ERIGUCHI, Yoshiharu; HACHISU, Izumi. Rapidly rotating general relativistic stars—I. Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 237, n. 2, p. 355–379, 1989a.

KOMATSU, Hidemi; ERIGUCHI, Yoshiharu; HACHISU, Izumi. Rapidly rotating general relativistic stars—II. Differentially rotating polytropes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 239, n. 1, p. 153–171, 1989b.

LANCZOS, Kornel. Über eine stationäre kosmologie im sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 21, n. 1, p. 73–110, 1924.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**. 4. ed. Oxford Boston: Butterworth Heinemann, 2000. v. v. 2. (Course of Theoretical Physics). ISBN 9780750627689.

LAUGHLIN, Gregory; BODENHEIMER, Peter; ADAMS, Fred C. The end of the main sequence. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 482, n. 1, p. 420, 1997.

LEVY, H; ROBINSON, WJ. The rotating body problem. *In*: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2. MATHEMATICAL Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. [S.l.: s.n.], 1964. P. 279–285.

LEWIS, T. Some special solutions of the equations of axially symmetric gravitational fields. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, JSTOR, v. 136, n. 829, p. 176–192, 1932.

MAEDER, A. **Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Astronomy and Astrophysics Library). ISBN 9783540769491. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=akDVteYDC1kC>.

MAEDER, André; MEYNET, Georges. The Evolution of Rotating Stars. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 38, n. 1, p. 143–190, 2000. DOI: 10.1146/annurev.astro.38.1.143.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Gravitation, pt. 3).

MOMENI, D; MYRZAKULOV, R. Tolman–oppenheimer–volkoff equations in modified gauss–bonnet gravity. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific, v. 12, n. 02, p. 1550014, 2015.

MOTA, Clésio E; SANTOS, Luis CN; GRAMS, Guilherme; SILVA, Franciele M da; MENEZES, Débora P. Combined Rastall and Rainbow theories of gravity with applications to neutron stars. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 2, p. 024043, 2019a.

MOTA, Clésio E; SANTOS, Luis CN; SILVA, Franciele M da; FLORES, Cesar V; SILVA, Tiago JN da; MENEZES, Débora P. Anisotropic Compact Stars in Rastall-Rainbow Gravity. **arXiv preprint arXiv:1911.03208**, 2019b.

NEGELE, John W; VAUTHERIN, D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. **Nuclear Physics A**, Elsevier, v. 207, n. 2, p. 298–320, 1973.

OLIVEIRA, AM; VELTEN, HES; FABRIS, JC; CASARINI, L. Neutron stars in Rastall gravity. **Physical Review D**, APS, v. 92, n. 4, p. 044020, 2015.

ORELLANA, Mariana; GARCIA, Federico; PANNIA, Florencia A Teppa; ROMERO, Gustavo E. Structure of neutron stars in R-squared gravity. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 45, n. 4, p. 771–783, 2013.

ÖZEL, Feryal; FREIRE, Paulo. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Annual Reviews, v. 54, p. 401–440, 2016.

PANI, Paolo; BERTI, Emanuele; CARDOSO, Vitor; READ, Jocelyn. Compact stars in alternative theories of gravity: Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet gravity. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 10, p. 104035, 2011.

PAPAPETROU, Achilles. Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale. **Ann. Inst. H. Poincaré A**, v. 4, n. 2, p. 83–105, 1966.

PASCHALIDIS, Vasileios; STERGILOULAS, Nikolaos. Rotating Stars in Relativity. **arXiv preprint arXiv:1612.03050**, 2016.

PICAZZIO, Enos. O céu que nos envolve: Introdução à astronomia para educadores e iniciantes, 2011.

RASTALL, Peter. Generalization of the Einstein theory. **Physical Review D**, APS, v. 6, n. 12, p. 3357, 1972.

RAY, Subharthi; ESPINDOLA, Aquino L; MALHEIRO, Manuel; LEMOS, Jose PS; ZANCHIN, Vilson T. Electrically charged compact stars and formation of charged black holes. **Physical Review D**, APS, v. 68, n. 8, p. 084004, 2003.

ROMANI, Roger W. A unified model of neutron-star magnetic fields. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 347, n. 6295, p. 741–743, 1990.

RUSSELL, Henry Norris. Molecules in the Sun and Stars. **The Astrophysical Journal**, v. 79, p. 317, 1934.

RYDER, Lewis. **Introduction to general relativity**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.

SALAKO, Ines G; JAWAD, Abdul; MORADPOUR, Hooman. Anisotropic compact stars in non-conservative theory of gravity. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, World Scientific, v. 15, n. 06, p. 1850093, 2018.

SCHWARZSCHILD, Karl. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. **arXiv preprint physics/9905030**, 1999. translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger.

SCHWARZSCHILD, Karl. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, 1916, Seite 189-196, v. 1, p. 189–196, 1916.

SHAPIRO, Stuart L. Differential rotation in neutron stars: Magnetic braking and viscous damping. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 544, n. 1, p. 397, 2000.

SILVA, Hector O; MACEDO, Caio FB; BERTI, Emanuele; CRISPINO, Luis CB. Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar–tensor theory. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 14, p. 145008, 2015.

SOTANI, Hajime. Slowly rotating relativistic stars in tensor-vector-scalar theory. **Physical Review D**, APS, v. 81, n. 8, p. 084006, 2010.

STAYKOV, Kalin V; DONEVA, Daniela D; YAZADJIEV, Stoytcho S; KOKKOTAS, Kostas D. Slowly rotating neutron and strange stars in R2 gravity. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 10, p. 006, 2014.

STEPHANI, Hans; KRAMER, Dietrich; MACCALLUM, Malcolm; HOENSELAERS, Cornelius; HERLT, Eduard. **Exact solutions of Einstein's field equations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.

STERGIOULAS, Nikolaos. **The Structure and Stability of Rotating Relativistic Stars**. 1996. Tese (Doutorado) – University of Wisconsin, Milwaukee.

STERGIOULAS, Nikolaos; FRIEDMAN, John L. Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods. **arXiv preprint astro-ph/9411032**, 1994.

STOECKLY, Robert. Polytropic models with fast, non-uniform rotation. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 208–228, 1965.

TOOPER, Robert F. Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity. **The Astrophysical Journal**, v. 142, p. 1541, 1965.

TOOPER, Robert F. General Relativistic Polytropic Fluid Spheres. **The Astrophysical Journal**, v. 140, p. 434, 1964.

TSUJI, T. Molecules in stars. **Annual review of astronomy and astrophysics**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 24, n. 1, p. 89–125, 1986.

URYŪ, Kōji; TSOKAROS, Antonios. New code for equilibriums and quasiequilibrium initial data of compact objects. **Physical Review D**, APS, v. 85, n. 6, p. 064014, 2012.

WALD, R.M. **General Relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. ISBN 9780226870335. Disponível em:
<https://books.google.com.br/books?id=FQgAmQEACAAJ>.

WALD, Robert M. **General relativity**. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.

WEIDNER, Carsten; KROUPA, Pavel. Evidence for a fundamental stellar upper mass limit from clustered star formation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 348, n. 1, p. 187–191, 2004.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. [S.l.]: Wiley New York, 1973.

WEYL, Hermann. Republication of: 3. On the theory of gravitation. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 44, n. 3, p. 779–810, 2012.

WILSON, James R. Models of Differentially Rotating Stars. **The Astrophysical Journal**, v. 176, p. 195, 1972.

WILSON, James R. Rapidly rotating neutron stars. **Physical Review Letters**, APS, v. 30, n. 21, p. 1082, 1973.

YAGI, Kent; YUNES, Nicolás. I-Love-Q: Unexpected universal relations for neutron stars and quark stars. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 341, n. 6144, p. 365–368, 2013. DOI: 10.1126/science.1236462.

YAZADJIEV, Stoytcho S; DONEVA, Daniela D; KOKKOTAS, Kostas D. Rapidly rotating neutron stars in R-squared gravity. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 8, p. 084018, 2015.

ANEXO A – ARTIGO

Rapidly rotating compact stars in Rastall's gravity

F. M. da Silva,^{1,*} L. C. N. Santos,^{1,†} and C. C. Barros Jr.^{1,‡}

¹*Departamento de Física, CFM - Universidade Federal de Santa Catarina; C.P. 476, CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brazil*

Abstract

In this work we study rapidly rotating stars by considering the Rastall theory of gravity. We obtain and solve the equations by numerical methods for two usual parametrization of polytropic stars. Then the mass-radius relations, moments of inertia and other results of interest are obtained and compared with the ones for non-rotating stars.

* franmdasilva@gmail.com

† luis.santos@ufsc.br

‡ barros.celso@ufsc.br

I. INTRODUCTION

Despite the success of General Relativity (GR) that may be considered a fundamental element in the formulation of physics and has been confirmed by many experimental tests, as for example in the recent measurements of gravitational waves by the collaborations Virgo and LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [1, 2], and the even more recent obtaining of the first image of a black hole by the project Event Horizon Telescope [3], there are still open questions that need to be understood. For instance, GR cannot account for the accelerating expansion of the universe and the rotation curves of galaxies without the introduction of unexplained elements, in this case: dark energy and dark matter, respectively. Due to these seeming limitations, it can be interesting to study if modified theories of gravitation may offer a solution to these questions or at least provide a way to improve our understanding of the theory.

Because of their very high mass density, compact stars can be highly relativistic objects and thus are good candidates for the study of the effects of modified theories of gravity. There are many studies of modified gravity theories for static stars like in [4–9], just to mention a few, but the studies of this theories on slowly [10–15] and rapidly rotating [16–22] stars are still few. From the astrophysical point of view it is important to study rotating stars, since almost all the precise mass measurements of neutron stars that we have nowadays comes from rotating pulsars in binary systems [23], that can rotate up to $716Hz$ [24], in addition, it have been theorized that magnetars can born rapidly rotating [25, 26]. Furthermore, the recent observation of gravitational waves from a compact binary coalescence involving a compact object with a mass within the mass gap of $2.5 - 5M_{\odot}$ [27], led to investigations about the role that rotation and modified theories of gravity combined with a variety of equations of state could play in this observation [28–35].

On the other hand, there are many important studies on rotating stars, as for example in [36, 37] where an useful method of solution of the equations is proposed and many results have been obtained for the considered stellar models, that are essentially based on polytropic equations of state.

In recent years, the theory of gravity proposed by Peter Rastall [38], has gained growing interest, with studies of the implications of this theory in the context of black holes [39–43], thermodynamic of black holes [44–46], wormholes [47, 48], for cosmological scenarios

[49–52] as well as some proposals of generalizations of the Rastall’s gravity [53, 54] and of combining this theory with others modifications of GR [9, 55, 56] and in particular in the study of compact objects [7, 9, 57–62], but we still lack a study of the effects of Rastall’s theory on rotating stars.

So, in this work, we will consider these elements in order to formulate a model for rotating stars in the Rastall theory. This paper has the following contents: In Sec. II the formulation of the equations for rotating stars in the GR is done, in Sec. III a brief review of the Rastall theory is shown and in Sec. IV, the formulation of the equations for rotating stars considering the Rastall theory. In Sec. V some aspects of the numerical method are discussed, in Sec. VI the results are presented and in Sec. VII we draft our conclusions.

II. ROTATING STARS IN GENERAL RELATIVITY

In this section we are going to present the equations that describe a rapidly rotating star in the framework of the GR and also how to solve them by considering the method developed by Komatsu, Eriguchi and Hachisu (KEH) [36].

In order to describe the space-time of a rotating star in equilibrium it is possible to consider a stationary axially symmetric metric $g_{\mu\nu}$ such as the one presented in [36, 63, 64]. The line element can be written in terms of spherical coordinates (t, r, θ, ϕ) , as follows:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{2\beta} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (1)$$

where α , β , ν and ω are the metric potentials which in the proposed formulation depend only on r and θ . The potential ω represents the dragging of local inertial frames, also called Lense-Thirring effect [65, 66]. All equations in this work are going to be presented in geometrized units, that is, $c = G = 1$.

The matter in the stellar interior will be supposed to be a perfect fluid that can be represented by the energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (\varepsilon + p) U^\mu U^\nu, \quad (2)$$

where ε and p are the energy density and the pressure, respectively, $g^{\mu\nu}$ is the metric tensor relative to equation (1) and U^μ is the four-velocity of the fluid that has the form [36]

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-v^2}} (1, 0, 0, \Omega), \quad (3)$$

where Ω is the angular velocity of an element of mass of the star with respect to a static observer at infinity, and v is the 3-velocity in the referential frame of an observer locally without rotation, usually called ZAMO (zero momentum angular observer), and is given by

$$v = (\Omega - \omega) r \sin \theta e^{\beta - \nu}. \quad (4)$$

By considering the line element in equation (1), the energy-momentum tensor in equation (2), and the usual Einstein field equations of GR

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

we obtain, after some algebra, the following expressions [36]

$$\nabla^2 (\rho e^{\gamma/2}) = S_\rho(r, \mu), \quad (6)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \gamma e^{\gamma/2} = S_\gamma(r, \mu), \quad (7)$$

and

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \omega e^{(\gamma - 2\rho)/2} = S_\omega(r, \mu), \quad (8)$$

where we considered the definitions

$$\mu = \cos \theta, \quad (9)$$

$$\gamma = \beta + \nu, \quad (10)$$

and

$$\rho = \nu - \beta, \quad (11)$$

then we have

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S_\rho(r, \mu) = & \left[e^{\gamma/2} 8\pi e^{2\alpha} (\varepsilon + p) \frac{1 + v^2}{1 - v^2} \right. \\ & + r^2(1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right] + \frac{1}{r} \gamma_{,r} - \frac{1}{r^2} \mu \gamma_{,\mu} \\ & \left. + \frac{\rho}{2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} p - \gamma_{,r} \left(\frac{1}{2} \gamma_{,r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \gamma_{,\mu} \left[\frac{1}{2} \gamma_{,\mu} (1 - \mu^2) - \mu \right] \right\} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$S_\gamma(r, \mu) = e^{\gamma/2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} p + \frac{\gamma}{2} \left[16\pi e^{2\alpha} p - \frac{1}{2} \gamma_{,r}^2 - \frac{1}{2r^2} (1 - \mu^2) \frac{1}{2} \gamma_{,\mu}^2 \right] \right\}, \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} S_\omega(r, \mu) = & e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-16\pi e^{2\alpha} \frac{(\Omega - \omega)(\varepsilon + p)}{1 - v^2} \right. \\ & + \omega \left\{ -8\pi e^{2\alpha} \frac{[(1 + v^2)\varepsilon + 2v^2 p]}{1 - v^2} - \frac{1}{r} \left(2\rho_{,r} + \frac{1}{2} \gamma_{,r} \right) \right. \\ & + \frac{1}{r^2} \mu \left(2\rho_{,\mu} + \frac{1}{2} \gamma_{,\mu} \right) + \frac{1}{4} (4\rho_{,r}^2 - \gamma_{,r}^2) + \frac{1}{4r^2} (1 - \mu^2) (4\rho_{,\mu}^2 - \gamma_{,\mu}^2) \\ & \left. \left. - r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

In this work, we are going to use the KEH method shown in [36] in order to solve these equations. This method consists mainly in using the appropriated Green functions to transform the equations (13), (14) and (15) into integral equations, in the following way:

$$\rho = -e^{-\gamma/2} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\mu) \int_0^\infty r'^2 f_{2n}^2(r, r') \int_0^1 P_{2n}(\mu') S_\rho(r', \mu') d\mu' dr', \quad (16)$$

$$\gamma = -\frac{2e^{-\gamma/2}}{\pi r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} \int_0^\infty r'^2 f_{2n-1}^1(r, r') \int_0^1 \sin(2n-1)\theta' S_\gamma(r', \mu') d\mu' dr', \quad (17)$$

$$\omega = -\frac{e^{(2\rho-\gamma)/2}}{r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{2n-1}^1(\mu)}{2n(2n-1)} \int_0^\infty r'^3 f_{2n-1}^2(r, r') \int_0^1 P_{2n-1}^1(\mu') S_\omega(r', \mu') d\mu' dr', \quad (18)$$

where P_n are the Legendre polynomials, P_n^m are the Associated Legendre functions and f_n^1 and f_n^2 are given by

$$f_n^1(r, r') = \begin{cases} (r'/r)^n, & \text{if } r' \leq r, \\ (r/r')^n, & \text{if } r' > r, \end{cases} \quad (19)$$

$$f_n^2(r, r') = \begin{cases} r'^n/r^{n+1}, & \text{if } r' \leq r, \\ r^n/r'^{n+1}, & \text{if } r' > r. \end{cases} \quad (20)$$

An useful feature of the KEH method is that the asymptotic flatness condition for the potentials ρ , γ and ω will be readily satisfied provided that the functions S_ρ , S_γ and S_ω be

well behaved. We also will have an equation for the α potential, that is given by

$$\begin{aligned}
\alpha_{,\mu} = & -\nu_{,\mu} - \left\{ (1 - \mu^2) (1 + rB^{-1}B_{,r})^2 + [\mu - (1 - \mu^2) B^{-1}B_{,\mu}]^2 \right\}^{-1} \\
& \left[\frac{1}{2} B^{-1} \left\{ r^2 B_{,rr} - [(1 - \mu^2) B_{,\mu}]_{,\mu} - 2\mu B_{,\mu} \right\} [-\mu + (1 - \mu^2) B^{-1}B_{,\mu}] \right. \\
& + rB^{-1}B_{,r} \left[\frac{1}{2}\mu + \mu rB^{-1}B_{,r} + \frac{1}{2}(1 - \mu^2) B^{-1}B_{,\mu} \right] \\
& + \frac{3}{2} B^{-1}B_{,\mu} [-\mu^2 + \mu(1 - \mu^2) B^{-1}B_{,\mu}] - (1 - \mu^2) rB^{-1}B_{,\mu r} \\
& (1 + rB^{-1}B_{,r}) - \mu r^2 (\nu_{,r})^2 - 2(1 - \mu^2) r\nu_{,\mu}\nu_{,r} + \mu(1 - \mu^2) (\nu_{,\mu})^2 \\
& - 2(1 - \mu^2) r^2 B^{-1}B_{,r}\nu_{,\mu}\nu_{,r} + (1 - \mu^2) B^{-1}B_{,\mu} [r^2 (\nu_{,r})^2 \\
& - (1 - \mu^2) (\nu_{,\mu})^2] + (1 - \mu^2) B^2 e^{-4\nu} \left\{ \frac{1}{4} \mu r^4 (\omega_{,r})^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) r^3 \omega_{,\mu}\omega_{,r} \right. \\
& - \frac{1}{4} \mu (1 - \mu^2) r^2 (\omega_{,\mu})^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) r^4 B^{-1}B_{,r}\omega_{,\mu}\omega_{,r} \\
& \left. - \frac{1}{4} (1 - \mu^2) r^2 B^{-1}B_{,\mu} [r^2 (\omega_{,r})^2 - (1 - \mu^2) (\omega_{,\mu})^2] \right\} \Big], \tag{21}
\end{aligned}$$

where

$$B = e^\gamma = e^{\beta+\nu}. \tag{22}$$

To integrate equation (21) we use the boundary condition

$$\alpha(r, 1) = \beta(r, 1), \tag{23}$$

that can be found by using the requirement of flatness on the axis of rotation. The function α will satisfy the asymptotic flatness condition because the other potentials already satisfy this condition [36]. In addition to the field equations, we also need the equation of hydrostatic equilibrium in order to have a complete set of expressions that describes our system. This equation is found by imposing the conservation of the energy-momentum tensor with

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0. \tag{24}$$

Computing the above equation with the energy-momentum tensor of equation (2) we encounter

$$\frac{\nabla p}{(\varepsilon + p)} = \nabla \ln U^t - U^t U_\phi \nabla \Omega. \tag{25}$$

To integrate this equation we need a law of rotation that tells us how the star behaves. With this purpose we are going to work with an uniform rotation that means a constant

value to the angular velocity Ω , so that, $\nabla\Omega = 0$. In order to describe the stellar matter we also need an equation of state (EoS), and in this paper we will employ a polytropic one of the same type of the one used in [36, 37, 67]

$$p = K\varepsilon^{1+1/N}, \quad (26)$$

where K is a constant and N is the polytropic index. With these considerations we can integrate equation (25) in order to find

$$(K\varepsilon^{1/N} + 1)^{(N+1)} e^\nu \sqrt{1 - v^2} = C, \quad (27)$$

where C is a constant.

So that we can solve numerically the set of equations obtained above we have to fix two parameters [36]. One of these parameters may be the central energy density ϵ_c , or alternatively, the ratio of the maximum pressure to the maximum energy density $\kappa = p_{max}/\epsilon_{max}$. The other parameter we may fix is the axis ratio $q = R_p/R_e$, where R_p is the polar radius and R_e is the equatorial radius, or alternatively, we may fix the angular velocity Ω .

In the next section we present the modification in GR that was proposed by Peter Rastall in 1972, that will be considered in the calculations of Sec. IV.

III. RASTALL GRAVITY

In his proposal of generalization of Einstein's theory of gravity [38], Rastall abandons the assumption of conservation of the energy-momentum tensor in curved space-times, equation (2), and proposes that this non-conservation is related to the space-time curvature, so that the following equation is suggested:

$$T^\nu_{\mu;\nu} = \lambda' R_{,\mu}, \quad (28)$$

here, for convenience, we chose $\lambda' = \lambda/(k(4\lambda - 1))$, where λ and k are constants, and R is the Ricci scalar. From the above equation we can see that λ cannot assume the value $\lambda = 1/4$, because at this point we have an divergence. It is straightforward to show that the above expression is consistent with the field equations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k \left(T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k(4\lambda - 1)}g_{\mu\nu}R \right), \quad (29)$$

and if we take the trace of this expression we find

$$R = k(4\lambda - 1)T. \quad (30)$$

Therefore, we can rewrite equation (28) in the following way

$$T^\nu_{\mu;\nu} = \lambda T_{,\mu}, \quad (31)$$

and after substituting the relation shown in (30) in eq. (29), we get

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k\tau_{\mu\nu}, \quad (32)$$

where

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}T. \quad (33)$$

We can notice that equation (32) is equivalent to Einstein field equations but with an effective energy-momentum tensor. It is also interesting to notice that the effective energy-momentum tensor is conserved, that is

$$\tau^\nu_{\mu;\nu} = 0. \quad (34)$$

In order to determine the value of the constant k , in the next section, we are going to take the Newtonian limit of Rastall field equations.

A. Newtonian Limit

In this section, we take the Newtonian limit of equation (29) and end up finding the value of the constant k . In this limit, we want to recover the Poisson equation, that is given by

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \quad (35)$$

where ϕ is the gravitational potential and ρ is the mass density. In the weak field and low velocity regime, the metric tensor $g_{\mu\nu}$ can be replaced by the Minkowski tensor $\eta_{\mu\nu}$. Also in this regime, the energy density T_{tt} is equal to the mass density ρ , so that the (tt) component of equation (29) will be written in the following way

$$R_{tt} + \frac{2\lambda - 1}{2(4\lambda - 1)}R = -k\rho. \quad (36)$$

Using the approximation $R \approx R_{ii} - R_{tt}$, we can find the relation

$$R = 2 \frac{4\lambda - 1}{2\lambda + 1} R_{tt}, \quad (37)$$

and replacing it in equation (36), we find

$$R_{tt} = -\frac{1}{2} (2\lambda + 1) k \rho. \quad (38)$$

Finally, knowing that $R_{tt} \approx -\nabla^2 \phi$ [68], we can find that the value of k will be given by

$$k = \frac{8\pi}{2\lambda + 1}. \quad (39)$$

We can verify that, as it would be expected, taking the limit of $\lambda \rightarrow 0$, we will recover the value of k in GR, that is, $k = 8\pi$. Equation (39) also show us that besides $\lambda = 1/4$, we also cannot have $\lambda = -1/2$ because at this point there is also a divergence.

In the next section, we are going to show how the equations for a rapidly rotating star presented in Section 2 are modified by Rastall's theory.

IV. ROTATING STARS IN RASTALL GRAVITY

In this section we show how the equations of the KEH method for a rotating star can be written in Rastall's theory. As we can see from equation (32), in order to find the field equations for Rastall's gravity we have to compute the effective energy-momentum tensor. Starting from equation (33) we can show that in this case the effective energy-momentum tensor will be given by

$$\tau_{\mu\nu} = p_{ef} g_{\mu\nu} + (p_{ef} + \varepsilon_{ef}) U_\mu U_\nu, \quad (40)$$

where

$$p_{ef} = p(1 - 3\lambda) + \lambda\varepsilon, \quad (41)$$

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon(1 - \lambda) + 3\lambda p, \quad (42)$$

and the metric tensor $g_{\mu\nu}$ and four-velocity U_μ are the same ones used in GR, given respectively by equations (1) and (3). Now if we calculate the equations (32) we are going to conclude that the equation (21), for the potential α , will still be the same because this equation does not depend on the energy-momentum tensor. On the other hand, the equations

(13), (14) and (15) for the potentials ρ , γ and ω will be almost the same, the only difference being that now the functions S_ρ , S_γ and S_ω are going to be modified in the following way:

$$S_\rho(r, \mu) = \left[e^{\gamma/2} k e^{2\alpha} (\varepsilon + p) \frac{1 + v^2}{1 - v^2} + r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right] + \frac{1}{r} \gamma_{,r} - \frac{1}{r^2} \mu \gamma_{,\mu} + \frac{\rho}{2} \left\{ 2k e^{2\alpha} p_{ef} - \gamma_{,r} \left(\frac{1}{2} \gamma_{,r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \gamma_{,\mu} \left[\frac{1}{2} \gamma_{,\mu} (1 - \mu^2) - \mu \right] \right\} \right], \quad (43)$$

$$S_\gamma(r, \mu) = e^{\gamma/2} \left\{ 2k e^{2\alpha} p_{ef} + \frac{\gamma}{2} \left[2k e^{2\alpha} p_{ef} - \frac{1}{2} \gamma_{,r}^2 - \frac{1}{2r^2} (1 - \mu^2) \frac{1}{2} \gamma_{,\mu}^2 \right] \right\}, \quad (44)$$

and

$$S_\omega(r, \mu) = e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-2k e^{2\alpha} \frac{(\Omega - \omega) (\varepsilon + p)}{1 - v^2} + \omega \left\{ -k e^{2\alpha} \left[\frac{(1 + v^2) (\varepsilon + p)}{1 - v^2} - p_{ef} \right] - \frac{1}{r} \left(2\rho_{,r} + \frac{1}{2} \gamma_{,r} \right) + \frac{1}{r^2} \mu \left(2\rho_{,\mu} + \frac{1}{2} \gamma_{,\mu} \right) + \frac{1}{4} (4\rho_{,r}^2 - \gamma_{,r}^2) + \frac{1}{4r^2} (1 - \mu^2) (4\rho_{,\mu}^2 - \gamma_{,\mu}^2) - r^2 (1 - \mu^2) e^{-2\rho} \left[\omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right] \right\} \right]. \quad (45)$$

Here it is interesting to notice that $p_{ef} + \varepsilon_{ef} = p + \varepsilon$, so that we can change from the sum of the effective functions to the sum of the usual ones when it is more convenient. Now we compute the law of conservation from equation (31), so that we obtain the relation

$$\frac{\nabla p_{ef}}{(\varepsilon + p)} = \nabla \ln u^t - u^t u_\phi \nabla \Omega. \quad (46)$$

If we once again assume uniform rotation and a polytropic EoS, the integration of the above equation will result in

$$(N(1 - 4\lambda) + (1 - 3\lambda)) \ln(K\varepsilon^{1/N} + 1) + \lambda \ln(\varepsilon) + \nu + \frac{1}{2} \ln(1 - v^2) = C. \quad (47)$$

In this work we will analyse the mass radius relation and for this purpose we are going to calculate the Komar mass [69, 70], that for stationary, asymptotically flat space-times is the same as the ADM mass [64, 71, 72] and that is also referred as the total mass or gravitational mass in some works [36, 73]. It is possible to show that the total mass of the star can be given by the following expression in our system:

$$M = \frac{1}{2\lambda + 1} \int (-2\tau_t^t + \tau_\sigma^\sigma) \sqrt{-g} d^3x. \quad (48)$$

If we compute the above expression for our equations, we obtain

$$M = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R_e} e^{2\alpha+\beta} \left[e^\nu \left(\frac{(\epsilon + p)(1 + v^2)}{1 - v^2} + 2p_{ef} \right) + 2r \sin \theta \omega e^\beta \frac{(\epsilon + p)v}{1 - v^2} \right] r^2 \sin \theta dr d\theta, \quad (49)$$

where R_e is the equatorial radius. It is important to notice that the radial coordinate of our metric, given by equation (1), is not the same as the radial coordinate of the Schwarzschild metric [37]. The equatorial radius in the Schwarzschild metric $R_e^{(Sch)}$ is related to the equatorial radius R_e of our metric by the expression

$$R_e^{(Sch)} = R_e \left(1 + \frac{M}{2R_e} \right)^2. \quad (50)$$

This relation is important so that we can correctly compare our results with those obtained for a static star. We will also analyse the moment of inertia I , that can be given by the ratio between the angular momentum J and the angular velocity Ω ,

$$I = \frac{J}{\Omega}, \quad (51)$$

where the angular momentum J in our case is given by

$$J = \frac{1}{2\lambda + 1} \int \tau_\phi^t \sqrt{-g} d^3x. \quad (52)$$

If we compute this expression with the equations given above we obtain

$$J = \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \int_0^{\pi/2} \int_0^{R_e} \frac{(\epsilon + p)v}{1 - v^2} e^{2\alpha+2\beta} r^3 \sin^2 \theta dr d\theta. \quad (53)$$

We have performed our calculations for two types of relevant sequences of solutions, one for the set of static stars and the other one for the set of stars rotating at the mass shedding limit, also called Kepler limit. This limit is reached when the angular velocity of an element of fluid at the star boundary at the equator $\Omega(R_e, \pi/2)$ is the same as the angular velocity of a free particle in circular orbit Ω_K in this same point. The Kepler limit Ω_K is given by the relation [64]

$$\Omega_K = \left(\omega + \frac{r\partial_r\omega}{2(1 + r\partial_r\beta)} + \sqrt{\left(\frac{r\partial_r\omega}{2(1 + r\partial_r\beta)} \right)^2 + \frac{e^{2(\nu-\beta)}\partial_r\nu}{r(1 + r\partial_r\beta)}} \right) \Bigg|_{r=R_e, \theta=\frac{\pi}{2}}. \quad (54)$$

V. NUMERICAL METHOD

We have constructed our numerical code following the method shown in [36], with the implementation of the equations modified by Rastall's gravity. We also implemented a modification suggested in [74, 75] that improves the solution of the potential α . The numerical procedure starts by providing an initial approximation for the potentials and the energy density, in order to obtain this approximation we have followed the approach presented in [37]. A more detailed description of the KEH method can be found in [36, 64, 73]. For obtaining the solutions for the static sequences we have implemented a modification of the same code used in [9], that is based on Runge-Kutta method.

We have checked our results for the GR limit by setting $\lambda = 0$ and comparing with the correspondent results, and we also checked the non-rotating limit by making $\Omega \rightarrow 0$ and comparing our results with the ones for static stars. In both cases we have encountered great agreement between the solutions.

VI. RESULTS

In this section we are going to analyse the numerical results of our equations for rotating stars in Rastall gravity. We will work with two polytropic equations of state, given by equation (26). In the first one, that we will refer to by EoS_1 , we have chosen $N_1 = 1.5$ as in [76, 77] and $K_1 = 125269.51$, and in the second one, EoS_2 , we choose $N_2 = 0.7463$ as in [16, 19] and $K_2 = 3.25 \times 10^{11}$, in both cases the constant K is in geometrized units. We have considered four different values of the parameter λ : 0, that is, the GR case, 5×10^{-4} , 1×10^{-3} and 5×10^{-3} . In our figures the curves with solid line represent the mass shedding sequences and the dash-dot curves represent the static sequences.

In Figure 1 we show the mass-radius relation, we can see that in all sequences analysed the parameter λ affects more intensely the radius of the stars, increasing its value, while the masses are changed more weakly. As already observed, for the non-rotating sequences [9, 50], the maximum mass is lightly increased, but for stars rotating at the mass shedding limit, the effect is the opposite, that is, the maximum mass is lightly diminished. It is possible to notice that the effect of Rastall's modification is more intense on the EoS_1 , that can be considered a more soft EoS, and also the effect of this parameter is more intense in the static

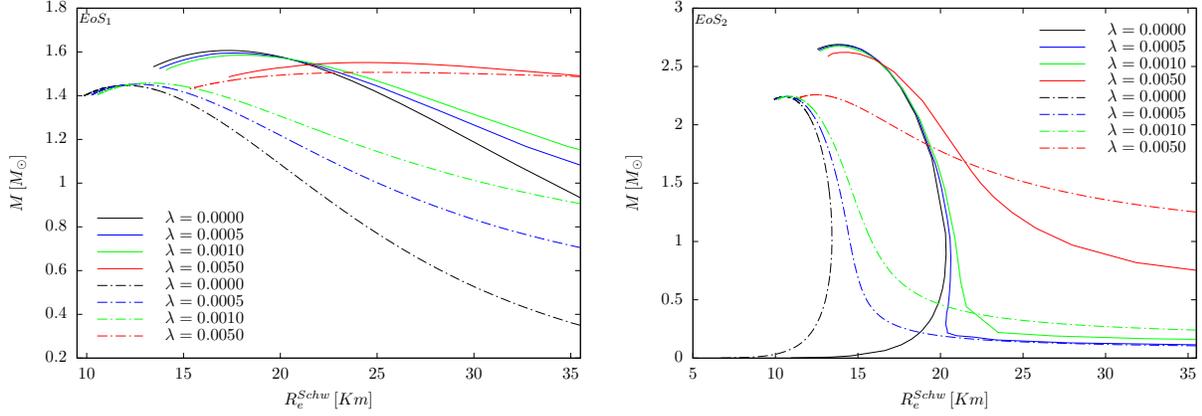


FIG. 1: The mass-radius relation for sequences of non-rotating stars (dash-dot curves) and for stars rotating at the mass-shedding limit (solid line curves). The curves for $\lambda = 0$ correspond to the GR case.

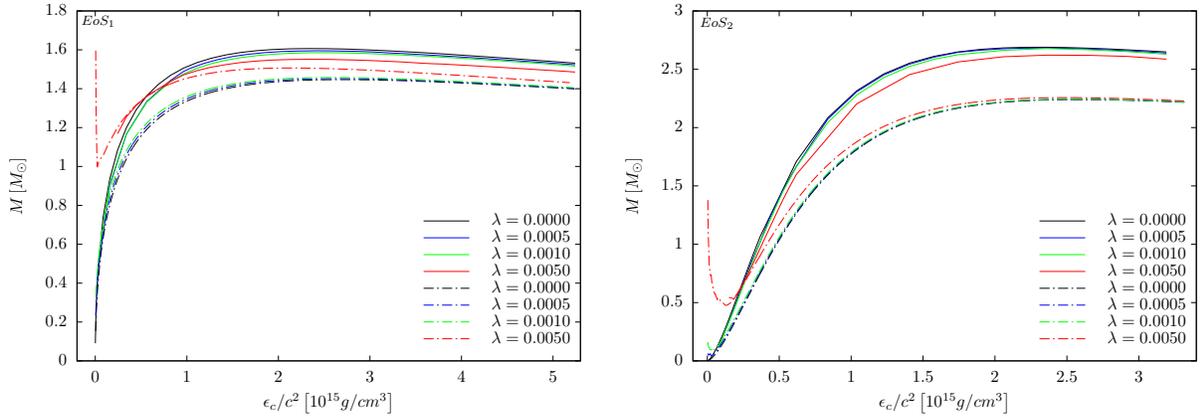


FIG. 2: The mass as a function of the central energy density for sequences of non-rotating stars (dash-dot curves) and for stars rotating at the mass-shedding limit (solid line curves). The curves for $\lambda = 0$ correspond to the GR case.

stars. It is also interesting to notice that EoS_2 produces a mass-radius curve similar to the curves for quark stars in the GR case, but this same EoS produces curves similar to neutron star mass-radius curves in Rastall's gravity for both the static and rotating stars.

In Figure 2 we can see the relation between mass and central energy density, this figure also shows that Rastall's gravity has opposite effects in the masses of the static stars and stars at the Kepler limit. For the static sequences an increase in the parameter λ produces also an increase in the mass of stars with the same central energy density. But for the mass shedding sequences Rastall's gravity produces stars with smaller masses than GR for

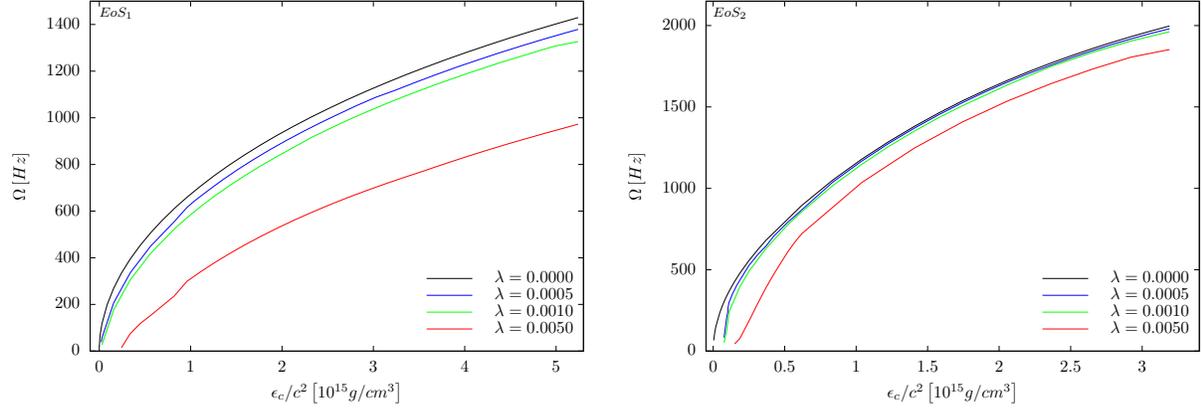


FIG. 3: The angular velocity as a function of the central energy density for sequences of stars rotating at the mass-shedding limit. The curves for $\lambda = 0$ correspond to the GR case.

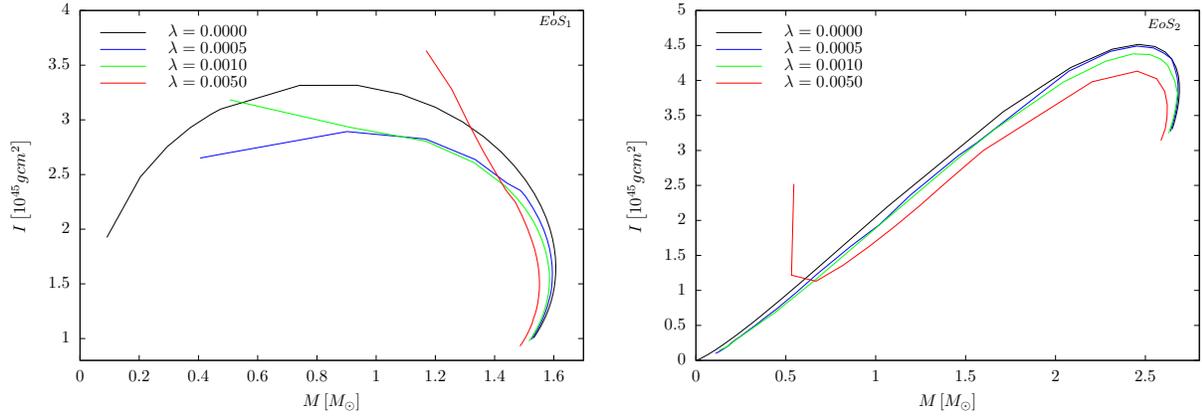


FIG. 4: The Moment of inertia as a function of the mass for sequences of stars rotating at the mass-shedding limit. The curves for $\lambda = 0$ correspond to the GR case.

the same central energy density. This can be better understood when we analyse the next figure, Figure 3, where we show the relation between Ω_K and the central energy density. It is possible to observe that the maximum angular velocity with which a star can rotate before starting to lose mass in GR is greater than in Rastall's gravity, for the same central energy density, and the higher the value of λ the lower the value of Ω_K .

The moment of inertia is an important physical quantity to be analyzed, as it can be an effective way of ascertaining the internal structure of the star, that is, its EoS [23]. In Figure 4 we can see how this quantity is affected by Rastall's gravity. In general, the theory of Rastall diminishes the value of I , but for some smaller masses the behaviour of the $I \times M$ curve in Rastall's gravity diverges from the one found in GR. Here we can also note that

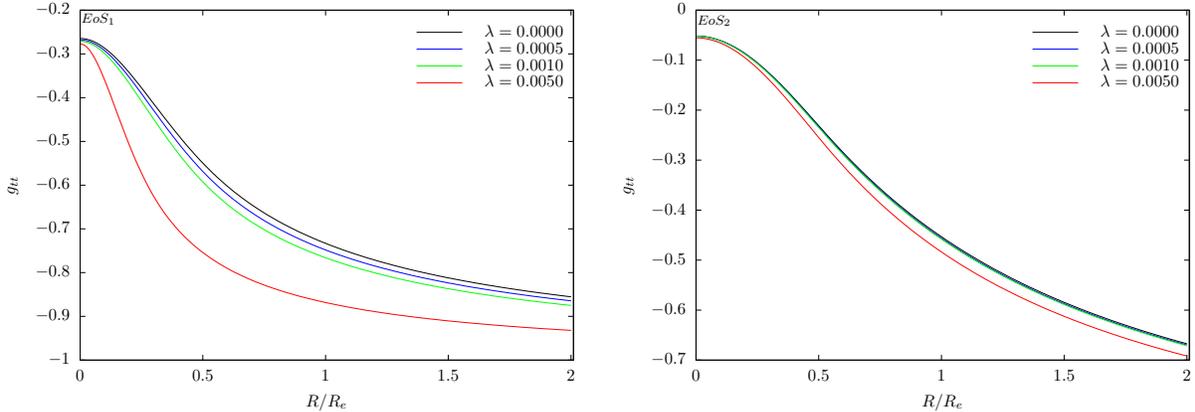


FIG. 5: The component g_{tt} of the metric tensor as a function of the ratio R/R_e at the equator ($\theta = \pi/2$), for stars rotating at the mass-shedding limit with a fixed central energy density. The curves for $\lambda = 0$ correspond to the GR case.

the modified theory of Rastall has a greater effect on EoS_1 than on EoS_2 .

Lastly we analyzed in Figure 5 the effect of Rastall's modification on the g_{tt} term of the metric for stars rotating at the mass shedding limit Ω_K . In the left panel, all four curves are for stars with central energy density of $\epsilon_c/c^2 = 2.3 \times 10^{15} g/cm^3$, and on the right side all curves have $\epsilon_c/c^2 = 2.4 \times 10^{15} g/cm^3$. We can observe that in both EoSs the effect of increasing the parameter λ is to decrease the deformation in space-time, but in the same way as in the other quantities analysed, the effect of Rastall's is smaller for the second EoS.

VII. CONCLUSIONS

In this work we have studied rapidly rotating compact stars in the Rastall modified theory of gravity. We solved numerically the field equations obtained using the KEH method, by applying the necessary modifications. We employed a polytropic EoS which two different choices of parameters that are widely used in the literature, the first EoS referred as EoS_1 can be considered a soft EoS and has maximum mass around $1.4M_\odot$ in the static case, the second one, EoS_2 , that can be considered a representative of a more stiff EoS, has maximum mass above $2M_\odot$ in the non-rotating case. Three values for the constant λ were implemented, $\lambda = 5 \times 10^{-4}$, 1×10^{-3} and 5×10^{-3} , beyond the value $\lambda = 0$ that correspond to GR case, and it was assumed an uniform rotation.

The properties of the solutions found were calculated and examined for the situations of

interest. In all cases the analysed properties of stars with EoS_2 were less affected by the increasing of the Rastall's parameter than the ones with EoS_1 .

We have investigated the mass-radius relation associated to rapidly rotating compact stars and static stars. In particular, our results for the static case coincided with the ones found in literature. In the case of stars rotating at the Kepler limit, we observed that the maximum mass slightly decreases while in the non-rotating case it slightly increases, and in both situations the radius of the stars is increased.

We also have explored the relations of the mass and the angular velocity at the Keplerian limit with the central energy density, and we concluded that as we increase the Rastall's parameter both the mass and the angular velocity at the Keplerian limit decrease for stars with the same central energy density. Moreover, we examined the effect of Rastall's theory on the relation between the moment of inertia and the mass, and we could see that in general the effect of increasing the parameter λ is shifting the $I \times M$ curves down and left. However, in some cases for the Rastall theory, there is a deviation in this behavior and the moment of inertia begins to increase as the mass decreases, we believe this behavior occurs because for stars with small masses the effect of Rastall's gravity to increase the radius can be quite intense.

Our last analysis was about how the component g_{tt} of the metric tensor changes due do Rastall's gravity, we can infer that the behavior of this quantity is a consequence of the previous results. Since the effect of increasing the parameter λ is to produce stars that have smaller masses, larger radius and that rotate more slowly, it is expected that the deformation in space-time is smaller, as we can see in Figure 5.

Since this is just a first study of the effects of Rastall's gravity on rapidly rotating compact stars, in the future it would be interesting to amplify the investigation of rotating stars in this modified theory of gravity. One way to do that is by applying more realistic EoSs, another possibility is analysing the scenario of differential rotation, a study of the I-Love Q relations in the context of Rastall's gravity would also be pertinent.

VIII. ACKNOWLEDGEMENTS

We thank Giovanni Formighieri for discussions and, F.M.S. would like to thank the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) for financial support.

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [2] B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. Adhikari, V. Adya, C. Affeldt, *et al.*, “Gwtc-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs,” *Physical Review X*, vol. 9, no. 3, p. 031040, 2019.
- [3] K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A.-K. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, D. Bintley, *et al.*, “First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, no. 1, p. L4, 2019.
- [4] T. Harada, “Neutron stars in scalar-tensor theories of gravity and catastrophe theory,” *Physical Review D*, vol. 57, no. 8, p. 4802, 1998.
- [5] M. Orellana, F. García, F. A. T. Pannia, and G. E. Romero, “Structure of neutron stars in R-squared gravity,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 45, no. 4, pp. 771–783, 2013.
- [6] D. Momeni and R. Myrzakulov, “Tolman–oppenheimer–volkoff equations in modified gauss–bonnet gravity,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 12, no. 02, p. 1550014, 2015.
- [7] A. Oliveira, H. Velten, J. Fabris, and L. Casarini, “Neutron stars in rastall gravity,” *Physical Review D*, vol. 92, no. 4, p. 044020, 2015.
- [8] S. Hendi, G. Bordbar, B. E. Panah, and S. Panahiyan, “Modified tov in gravity’s rainbow: properties of neutron stars and dynamical stability conditions,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 09, p. 013, 2016.
- [9] C. E. Mota, L. C. Santos, G. Grams, F. M. da Silva, and D. P. Menezes, “Combined rastall and rainbow theories of gravity with applications to neutron stars,” *Physical Review D*, vol. 100, no. 2, p. 024043, 2019.

- [10] T. Damour and G. Esposito-Farese, “Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments,” *Physical Review D*, vol. 54, no. 2, p. 1474, 1996.
- [11] H. Sotani, “Slowly rotating relativistic stars in tensor-vector-scalar theory,” *Physical Review D*, vol. 81, no. 8, p. 084006, 2010.
- [12] P. Pani, E. Berti, V. Cardoso, and J. Read, “Compact stars in alternative theories of gravity: Einstein-dilaton-gauss-bonnet gravity,” *Physical Review D*, vol. 84, no. 10, p. 104035, 2011.
- [13] Y. Ali-Haïmoud and Y. Chen, “Slowly rotating stars and black holes in dynamical chernsimons gravity,” *Physical Review D*, vol. 84, no. 12, p. 124033, 2011.
- [14] K. V. Staykov, D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas, “Slowly rotating neutron and strange stars in r^2 gravity,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, no. 10, p. 006, 2014.
- [15] H. O. Silva, C. F. Macedo, E. Berti, and L. C. Crispino, “Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar–tensor theory,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, no. 14, p. 145008, 2015.
- [16] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas, “Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity,” *Physical Review D*, vol. 88, no. 8, p. 084060, 2013.
- [17] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas, “ I - Q relations for rapidly rotating neutron stars in $f(r)$ gravity,” *Physical Review D*, vol. 92, no. 6, p. 064015, 2015.
- [18] S. S. Yazadjiev, D. D. Doneva, and K. D. Kokkotas, “Rapidly rotating neutron stars in r -squared gravity,” *Physical Review D*, vol. 91, no. 8, p. 084018, 2015.
- [19] B. Kleihaus, J. Kunz, S. Mojica, and M. Zagermann, “Rapidly rotating neutron stars in dilatonic einstein-gauss-bonnet theory,” *Physical Review D*, vol. 93, no. 6, p. 064077, 2016.
- [20] D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, “Rapidly rotating neutron stars with a massive scalar field—structure and universal relations,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 11, p. 019, 2016.
- [21] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas, “Differentially rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity,” *Physical Review D*, vol. 98, no. 10, p. 104039, 2018.
- [22] A. V. Astashenok and S. D. Odintsov, “Rotating neutron stars in $f(r)$ gravity with axions,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 498, no. 3, pp. 3616–3623, 2020.

- [23] F. Özel and P. Freire, “Masses, radii, and the equation of state of neutron stars,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 54, pp. 401–440, 2016.
- [24] J. W. Hessels, S. M. Ransom, I. H. Stairs, P. C. Freire, V. M. Kaspi, and F. Camilo, “A radio pulsar spinning at 716 hz,” *Science*, vol. 311, no. 5769, pp. 1901–1904, 2006.
- [25] B. Metzger, D. Giannios, T. Thompson, N. Bucciantini, and E. Quataert, “The protomagnetar model for gamma-ray bursts,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 413, no. 3, pp. 2031–2056, 2011.
- [26] B. Giacomazzo and R. Perna, “Formation of stable magnetars from binary neutron star mergers,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 771, no. 2, p. L26, 2013.
- [27] R. Abbott, T. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. Adhikari, V. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, *et al.*, “Gw190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 896, no. 2, p. L44, 2020.
- [28] A. Tsokaros, M. Ruiz, and S. L. Shapiro, “Gw190814: Spin and equation of state of a neutron star companion,” *arXiv preprint arXiv:2007.05526*, 2020.
- [29] R. C. Nunes, J. G. Coelho, and J. C. de Araujo, “Weighing massive neutron star with screening gravity: A look on psr j0740+ 6620 and gw190814 secondary component,” *arXiv preprint arXiv:2008.10395*, 2020.
- [30] A. V. Astashenok, S. Capozziello, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, “Extended gravity description for the gw190814 supermassive neutron star,” *arXiv preprint arXiv:2008.10884*, 2020.
- [31] T. Clifton, P. Carrilho, P. G. Fernandes, and D. J. Mulryne, “Observational constraints on the regularized 4d einstein-gauss-bonnet theory of gravity,” *arXiv preprint arXiv:2006.15017*, 2020.
- [32] V. Dexheimer, R. Gomes, T. Klähn, S. Han, and M. Salinas, “Gw190814 as a massive rapidly-rotating neutron star with exotic degrees of freedom,” *arXiv preprint arXiv:2007.08493*, 2020.
- [33] P. Koliogiannis and C. C. Moustakidis, “Thermodynamical description of hot rapidly rotating neutron stars and neutron stars merger remnant,” *arXiv preprint arXiv:2007.10424*, 2020.
- [34] T. Demircik, C. Ecker, and M. Järvinen, “Rapidly spinning compact stars with deconfinement phase transition,” *arXiv preprint arXiv:2009.10731*, 2020.

- [35] A. Sedrakian, F. Weber, and J. J. Li, “Confronting gw190814 with hyperonization in dense matter and hypernuclear compact stars,” *Physical Review D*, vol. 102, no. 4, p. 041301, 2020.
- [36] H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu, “Rapidly rotating general relativistic stars–i. numerical method and its application to uniformly rotating polytropes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 237, no. 2, pp. 355–379, 1989.
- [37] E. M. Butterworth, “On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. ii-the structure of uniformly rotating pseudopolytropes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 204, pp. 561–572, 1976.
- [38] P. Rastall, “Generalization of the einstein theory,” *Physical Review D*, vol. 6, no. 12, p. 3357, 1972.
- [39] Y. Heydarzade, H. Moradpour, and F. Darabi, “Black hole solutions in rastall theory,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 95, no. 12, pp. 1253–1256, 2017.
- [40] Y. Heydarzade and F. Darabi, “Black hole solutions surrounded by perfect fluid in rastall theory,” *Physics Letters B*, vol. 771, pp. 365–373, 2017.
- [41] M.-S. Ma and R. Zhao, “Noncommutative geometry inspired black holes in rastall gravity,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 9, p. 629, 2017.
- [42] R. Kumar and S. G. Ghosh, “Rotating black hole in rastall theory,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, no. 9, p. 750, 2018.
- [43] Z. Xu, X. Hou, X. Gong, and J. Wang, “Kerr–newman-ads black hole surrounded by perfect fluid matter in rastall gravity,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, no. 6, p. 513, 2018.
- [44] K. Bamba, A. Jawad, S. Rafique, and H. Moradpour, “Thermodynamics in rastall gravity with entropy corrections,” *The European Physical Journal C*, vol. 78, no. 12, p. 986, 2018.
- [45] I. P. Lobo, H. Moradpour, J. Morais Graca, and I. Salako, “Thermodynamics of black holes in rastall gravity,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 27, no. 07, p. 1850069, 2018.
- [46] S. Soroushfar, R. Saffari, and S. Upadhyay, “Thermodynamic geometry of a black hole surrounded by perfect fluid in rastall theory,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 51, no. 10, p. 130, 2019.
- [47] H. Moradpour, N. Sadeghnezhad, and S. Hendi, “Traversable asymptotically flat wormholes in rastall gravity,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 95, no. 12, pp. 1257–1266, 2017.

- [48] S. Halder, S. Bhattacharya, and S. Chakraborty, “Wormhole solutions in rastall gravity theory,” *Modern Physics Letters A*, vol. 34, no. 12, p. 1950095, 2019.
- [49] C. E. Batista, M. H. Daouda, J. C. Fabris, O. F. Piattella, and D. C. Rodrigues, “Rastall cosmology and the λ cdm model,” *Physical Review D*, vol. 85, no. 8, p. 084008, 2012.
- [50] J. C. Fabris, O. F. Piattella, D. C. Rodrigues, C. E. Batista, and M. H. Daouda, “Rastall cosmology,” in *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, vol. 18, pp. 67–76, World Scientific, 2012.
- [51] C. Batista, J. C. Fabris, O. F. Piattella, and A. Velasquez-Toribio, “Observational constraints on rastall’s cosmology,” *The European Physical Journal C*, vol. 73, no. 5, p. 2425, 2013.
- [52] H. Moradpour, “Thermodynamics of flat flrw universe in rastall theory,” *Physics Letters B*, vol. 757, pp. 187–191, 2016.
- [53] H. Moradpour, Y. Heydarzade, F. Darabi, and I. G. Salako, “A generalization to the rastall theory and cosmic eras,” *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 4, p. 259, 2017.
- [54] K. Lin and W.-L. Qian, “Cosmic evolution of dark energy in a generalized rastall gravity,” *arXiv preprint arXiv:2006.03229*, 2020.
- [55] C. Wolf, “Non-conservative gravitation and kaluza klein cosmology,” *Physica scripta*, vol. 34, no. 3, p. 193, 1986.
- [56] T. R. Caramês, M. H. Daouda, J. C. Fabris, A. M. Oliveira, O. F. Piattella, and V. Strokov, “The brans–dicke–rastall theory,” *The European Physical Journal C*, vol. 74, no. 11, p. 3145, 2014.
- [57] S. Hansraj, A. Banerjee, and P. Channuie, “Impact of the rastall parameter on perfect fluid spheres,” *Annals of Physics*, vol. 400, pp. 320–345, 2019.
- [58] C. E. Mota, L. C. Santos, F. M. da Silva, C. V. Flores, T. J. da Silva, and D. P. Menezes, “Anisotropic compact stars in rastall-rainbow gravity,” *arXiv preprint arXiv:1911.03208*, 2019.
- [59] G. Abbas and M. Shahzad, “A new model of quintessence compact stars in the rastall theory of gravity,” *The European Physical Journal A*, vol. 54, no. 12, p. 211, 2018.
- [60] I. G. Salako, A. Jawad, and H. Moradpour, “Anisotropic compact stars in non-conservative theory of gravity,” *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 15, no. 06, p. 1850093, 2018.

- [61] G. Abbas and M. Shahzad, “Isotropic compact stars model in rastall theory admitting conformal motion,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 363, no. 12, p. 251, 2018.
- [62] G. Abbas and M. Shahzad, “Models of anisotropic compact stars in the rastall theory of gravity,” *Astrophysics and Space Science*, vol. 364, no. 3, p. 50, 2019.
- [63] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [64] J. L. Friedman and N. Stergioulas, *Rotating relativistic stars*. Cambridge University Press, 2013.
- [65] H. Pfister, “On the history of the so-called lense-thirring effect,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 39, no. 11, pp. 1735–1748, 2007.
- [66] I. Ciufolini and E. C. Pavlis, “A confirmation of the general relativistic prediction of the lense–thirring effect,” *Nature*, vol. 431, no. 7011, pp. 958–960, 2004.
- [67] R. F. Tooper, “General relativistic polytropic fluid spheres.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 140, p. 434, 1964.
- [68] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1973.
- [69] A. Komar, “Covariant conservation laws in general relativity,” *Physical Review*, vol. 113, no. 3, p. 934, 1959.
- [70] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [71] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Dynamical structure and definition of energy in general relativity,” *Physical Review*, vol. 116, no. 5, p. 1322, 1959.
- [72] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Canonical variables for general relativity,” *Physical Review*, vol. 117, no. 6, p. 1595, 1960.
- [73] G. B. Cook, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, “Spin-up of a rapidly rotating star by angular momentum loss-effects of general relativity,” *The Astrophysical Journal*, vol. 398, pp. 203–223, 1992.
- [74] N. Stergioulas and J. L. Friedman, “Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods,” *arXiv preprint astro-ph/9411032*, 1994.
- [75] N. Stergioulas, *The Structure and Stability of Rotating Relativistic Stars*. PhD thesis, University of Wisconsin, Milwaukee, 1996.

- [76] R. Stoeckly, “Polytropic models with fast, non-uniform rotation,” *ApJ*, vol. 142, pp. 208–228, 1965.
- [77] S. Ray, A. L. Espindola, M. Malheiro, J. P. Lemos, and V. T. Zanchin, “Electrically charged compact stars and formation of charged black holes,” *Physical Review D*, vol. 68, no. 8, p. 084004, 2003.