



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tulio Eduardo Restrepo Medina

Dependência de Escala e Termodinâmica da Cromodinâmica Quântica

Florianópolis
2020

Tulio Eduardo Restrepo Medina

Dependência de Escala e Termodinâmica da Cromodinâmica Quântica

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em Física. Orientador: Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.

Florianópolis
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Restrepo Medina, Tulio Eduardo
Dependência de Escala e Termodinâmica da Cromodinâmica
Quântica / Tulio Eduardo Restrepo Medina ; orientador,
Marcus Emmanuel Benghi Pinto, 2020.
137 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Física. 2. Física. 3. Física nuclear. 4. Cromodinâmica
Quântica. I. Benghi Pinto, Marcus Emmanuel. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Tulio Eduardo Restrepo Medina

Dependência de Escala e Termodinâmica da Cromodinâmica Quântica

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Eduardo de Souza Fraga, Dr.
Universidade Federal de Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Rudnei de Oliveira Ramos, Dr.
Universidade Estadual de Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Tiago José Nunes da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Emmanuel Gräve de Oliveira, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em Física.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Marcus Emmanuel Benghi Pinto, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2020.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a meus pais e irmãos por seu apoio e compreensão durante meus estudos.

À minha tia Amália e ao meu primo Felipe por compartilhar seu lar enquanto fazia a minha graduação e por todos os bons momentos.

À minha namorada e companheira de vida Carolina, por todo o amor e apoio incondicional.

Agradeço Rodrigo, Bianca, Zeca, Sérgio, Moacir, Vanderlei, Patricia, Antonio, Lia, Cristian e Carol por me fazerem sentir em família e por todos os bons momentos aqui no Brasil.

Além disso, gostaria de agradecer ao meu orientador, Marcus Benghi Pinto, pela paciência e por todo o conhecimento transmitido durante estes anos.

Ao Jean Loïc Kneur pela colaboração neste trabalho e por todas as boas discussões de físicas.

Meus agradecimentos a Constança Providência, Pedro Costa e João Moreira pela gentileza, amizade e todos os conhecimentos compartilhados durante a minha estadia em Coimbra.

Gostaria de expressar minha gratidão ao Antonio pela amizade e por toda ajuda tanto na pós-graduação como na vida.

Agradeço também aos revisores desta tese, Professor Eduardo de Souza Fraga, Professor Rudnei de Oliveira Ramos, Professor Tiago José Nunes, Professor Pawel Klimas e Professor Emmanuel Grave de Oliveira.

Por fim, gostaria de agradecer ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro, ao programa de doutorado sanduíche no exterior (PDSE), CAPES, pela bolsa de doutorado sanduíche e ao programa de pós-graduação em física da Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade de fazer meu doutorado em esta linda cidade.

RESUMO

Neste trabalho, aplicamos a recentemente modificada teoria de perturbação otimizada (OPT), com propriedades do grupo de renormalização (RG), conhecida como OPT modificada pelo RG (RGOPT). Apresentamos e detalhamos o procedimento da OPT e da RGOPT no modelo de Gross–Neveu (GN) até a ordem de dois *loops*, para posteriormente aplicar o maquinário da RGOPT no setor fermiônico da cromodinâmica quântica (QCD) no nível de dois *loops*, considerando três sabores quarks sem massa. Fornecemos resultados para a matéria de quarks fria e densa, para a matéria de quarks quente e para a matéria de quarks quente e densa. Já na ordem dominante (α_s^0), que se baseia no termo de um *loop* simples, a técnica fornece uma aproximação não trivial e não perturbativa que é completamente invariante frente ao grupo de renormalização para todos os casos mencionados acima. No caso de matéria de quarks fria e densa, na ordem seguinte, a comparação entre as previsões da RGOPT e a QCD perturbativa (pQCD) mostra que o primeiro método fornece resultados que estão em melhor acordo com o estado da arte em resultados perturbativos de ordem superior, que incluem uma contribuição da ordem $\alpha_s^3 \ln^2 \alpha_s$. Ao mesmo tempo, também se observa que as previsões da RGOPT são menos sensíveis às variações da escala arbitrária de renormalização \overline{MS} do que aquelas obtidas com a pQCD. Esses resultados indicam que a RGOPT fornece um excelente esquema de ressonância que pode ser considerado uma alternativa aos cálculos de rede da QCD (LQCD) em regiões com altas densidades bariônicas. No caso de temperaturas finitas, encontramos novamente uma melhora na dependência da escala para a pressão de quarks, P_q e, para avaliar a pressão completa, simplesmente adicionamos a contribuição perturbativa padrão dos glúons sem massa na ordem de dois *loops* à pressão de quarks da RGOPT. Esta aproximação simples mostra uma concordância extraordinária com dados de LQCD para $T \gtrsim 0.25$ GeV. Isso sugere que, na ordem de dois *loops*, para temperaturas superiores a 1.5 vezes a temperatura pseudocrítica T_{pc} da transição de *cross-over*, a maior parte da informação não perturbativa está dentro da contribuição quarkiônica. A RGOPT também mostrou uma redução significativa da dependência de escala quando comparada com os resultados de *hard thermal loop* na ordem *next-to-next-leading order* (três *loops*). Para testar nossos resultados, usamos a versão termodinamicamente consistente da pressão da RGOPT para a matéria de quarks fria e densa para calcular propriedades de estrelas de quarks. Descobrimos que nossa equação de estado prediz massas de estrelas de quarks dentro das restrições observacionais mais recentes. Além disso, como esperado, nossos resultados são menos dependentes do valor da escala de regularização.

Palavras-chave: Teoria de perturbação otimizada, Grupo de renormalização, Cromodinâmica quântica.

ABSTRACT

In this work, we apply the recently modified optimised perturbation theory (OPT) to fulfill renormalization group (RG) properties, the renormalization group improved OPT (RGOPT). We introduce and detail the OPT and the RGOPT procedures in the Gross–Neveu (GN) model up to two-loop order to later apply the RGOPT machinery in the fermionic sector of quantum chromodynamics (QCD) at the two loop level considering three flavour massless quarks. We provide results for cold and dense quark matter, for hot quark matter and for hot and dense quark matter. Already at leading order (α_s^0), which builds on the simple one loop term, the technique provides a non-trivial non-perturbative approximation which is completely renormalization group invariant for all cases mentioned above. In the case of cold and dense quark matter, at the next-to-leading order the comparison between the RGOPT and the perturbative QCD (pQCD) predictions shows that the former method provides results which are in better agreement with the state-of-the-art *higher order* perturbative results, which include a contribution of order $\alpha_s^3 \ln^2 \alpha_s$. At the same time one also observes that the RGOPT predictions are less sensitive to variations of the arbitrary $\overline{\text{MS}}$ renormalization scale than those obtained with pQCD. These results indicate that the RGOPT provides an excellent resummation scheme which may be considered as an alternative to lattice QCD calculations at high baryonic densities. In the case of finite temperatures, we found similar results for the quark pressure P_q and to evaluate the complete pressure we simply added the standard perturbative two loop contribution from massless gluons to the RGOPT quark pressure. This simple approximation shows an extraordinary agreement with LQCD data for $T \gtrsim 0.25$ GeV. This suggests that, at the two loop order, for temperatures higher than 1.5 times the pseudocritical temperature T_{pc} of the cross-over transition, most of the non perturbative information is within the quarkyonic sector. The RGOPT also produced a significant reduction of the scale dependence when compared to the next-to-next-leading order hard thermal loop results. To test our results, we have used the thermodynamically consistent version of the RGOPT pressure for cold and dense quark matter to calculate properties of quark stars. We found that our equation of state predicts quark stars that lie within the more recent observational constraints. Also, as expected our results are less dependent of the regularization scale value.

Keywords: Optimised perturbation theory, Renormalization group, Quantum chromodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Acoplamento forte (α_s) em função da escala de energia Q comparado com diferentes dados experimentais. Os respectivos graus de teoria de perturbação da QCD são: NLO, NNLO, NNNLO.	15
Figura 2 – O possível diagrama de fases da QCD. A linha vermelha é o <i>freeze-out</i> empírico a partir de dados experimentais de colisões de íons pesados. A linha preta sólida é a possível transição de primeira ordem e o quadrado é o ponto crítico. Figura tomada da Ref. (LUO; XU, 2017).	17
Figura 3 – Expansão de acoplamento fraco da pressão da pQCD até a ordem $\alpha_s^3 \ln \alpha_s$ para $N_f = 3$. As bandas sombreadas são o resultado da variação da escala Λ por um fator de 2 em torno de $2\pi T$	18
Figura 4 – Limites conhecidos da EoS estelar. A pressão é plotada em função do potencial químico. A região com um ponto de interrogação corresponde a uma EoS interpolada que conecta a região da matéria nuclear com a matéria perturbativa da QCD. Figura tomada da Ref. (KURKELA <i>et al.</i> , 2014)	22
Figura 5 – O parâmetro de massa $\bar{\eta}$ normalizada, em $\mu = 0$, como uma função de T/Λ_0 , obtido com a RGOPT, a OPT padrão e a aproximação de LN para variações de escala $1 < \alpha < 4$, $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = \pi = g^{LN} = \pi$. Dentro da RGOPT e a OPT padrão na ordem de 2L, as faixas sombreadas têm a borda inferior para $\alpha = 1$ e a borda superior para $\alpha = 4$. A linha central dentro das faixas sombreadas corresponde a $\alpha = 2$	41
Figura 6 – A pressão normalizada, P/P_{SB} , em $\mu = 0$ em função de T/Λ_0 , obtida com a RGOPT, a OPT padrão e a aproximação do LN para $1 < \alpha < 4$, $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = \pi = g^{LN}$. Dentro da RGOPT e a OPT padrão na ordem de 2L, as faixas sombreadas têm a borda superior para $\alpha = 1$ e a borda inferior para $\alpha = 4$. A linha central dentro das faixas sombreadas corresponde a $\alpha = 2$	41
Figura 7 – A dependência da escala remanescente definida pela quantidade $\Delta P/P_{SB} \equiv (P(\Lambda = \Lambda_0) - P(\Lambda = 4\Lambda_0))/P_{SB}$ da pressão (normalizada), em $\mu = 0$ como uma função de T/Λ_0 . Os resultados de 2L da OPT e da RGOPT são comparados.	42
Figura 8 – f_{PMS} e f_{RG} Eqs. (117) no esquema \overline{MS} ($N_f = 3$) como função de $L_{1\eta}$ para α_s fixo ($4\pi g$).	52

Figura 9 – Soluções das equações do PMS e do RG em função de α_s para diferentes valores do parâmetro da RSC, B_2 (para $N_f = 3$). Linhas grossas: parte imaginária de L_η , $\text{Im}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ (linha sólida), $\text{Im}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, +)]$ (linha tracejada) e $\text{Im}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, -)]$ (linha ponto-tracejada). Linhas finas: parte real de L_η , $\text{Re}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ (linha sólida), $\text{Re}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, +)]$ (linha tracejada) e $\text{Re}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, -)]$ (linha ponto-tracejada).	54
Figura 10 – Massa da RGOPT otimizada (esquerda) e pressão (direita) em LO para $s_1 = 0$ e $s_1 \neq 0$	60
Figura 11 – A massa otimizada em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ em LO (ponto-tracejado) e NLO (contínuo). Para o último, a curva superior corresponde a $\Lambda = \mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = 4\mu$	62
Figura 12 – A quantidade otimizada da RSC, $\bar{B}_2(\mu)g^2(\mu)$, em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ	63
Figura 13 – A pressão normalizada em função do potencial químico na escala central $\Lambda = 2\mu$. Os resultados da pQCD na ordem g , g^2 e g^3 (termo LL) são comparados com os resultados da RGOPT em LO (ordem g^0) e NLO (ordem g).	64
Figura 14 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Os resultados da pQCD na ordem g , g^2 são comparados com a RGOPT em NLO (ordem g). Em cada caso, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$	65
Figura 15 – A dependência de escala remanescente definida pelas diferenças das pressões (normalizadas) $\Delta P/P_{fg} \equiv (P(\Lambda = 4\mu) - P(\Lambda = \mu))/P_{fg}$, como funções do potencial químico μ . Os resultados da pQCD na ordem g e na ordem g^2 são comparados com a NLO RGOPT.	66
Figura 16 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Resultados da pQCD a partir da Eq. (164) incluindo $g^3 \ln^2 g$ (curvas pontilhadas em violeta) em comparação com a alternativa mais simples da NLO RGOPT (curva preta contínua). Em cada caso, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$	68

- Figura 17 – A massa otimizada da RGOPT em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ em NLO para η otimizado a partir de $f_{RG} = 0$, $\bar{\eta}_{RG}$ (contínuo) com B_2 dado pela Eq. (166), e a partir de $f_{PMS} = 0$, $\bar{\eta}_{PMS}(\bar{B}_2)$ (ponto-tracejado) com \bar{B}_2 otimizado pelo determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132). Em ambas prescrições, a curva superior corresponde a $\Lambda = \mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = 4\mu$ 70
- Figura 18 – A quantidade RSC, $B_2(\mu)g^2(\mu)$, a partir da Eq. (166) (contínuo) e do determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132) (ponto-tracejado) em função do potencial químico em $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ 70
- Figura 19 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Os resultados da pQCD para a ordem g^2 (tracejado) são comparados com a RGOPT em NLO (ordem g) para duas prescrições de otimização: η otimizado a partir de $f_{RG} = 0$, $\bar{\eta}_{RG}$ (contínuo) com B_2 dado pela Eq. (166), e a partir de $f_{PMS} = 0$, $\bar{\eta}_{PMS}(\bar{B}_2)$ (ponto-tracejado) com \bar{B}_2 otimizado pelo determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132). Esquerda: Resultados para a escala central, $\Lambda = 2\mu$. Direita: Resultados para os valores extremos da escala, em todos os casos, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$ 71
- Figura 20 – A dependência de escala remanescente definida pela quantidade $\Delta P/P_{fg} \equiv (P(\Lambda = 4\mu) - P(\Lambda = \mu))/P_{fg}$ das pressões (normalizadas), como funções do potencial químico μ . Resultados da pQCD na ordem g^2 , da NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{RG}$) e da NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) são comparados. 72
- Figura 21 – Pressão da NLO RGOPT perturbativamente reexpandida (linha fina, vermelha) em comparação com a pressão perturbativa padrão na ordem g Eq. (174) (azul, tracejada) para $\mu_B = 0$, com dependência de escala $\Lambda = \pi T - 4\pi T$ 76
- Figura 22 – Pressão normalizada para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita) da NLO RGOPT, Eq. (167) ($B_2 = 0$) usando $\bar{\eta}(g^2)$ perturbativamente reexpandida usando as integrais térmicas exatas (faixa verde, linhas finas), em comparação com a pressão da pQCD na ordem g (faixa azul, linhas tracejadas) e a NLO HTLpt (faixa rosa, linhas pontilhadas), com dependência de escala $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$. 77

- Figura 23 – Parâmetro da RGOPT, $\bar{\eta}$, como função de temperatura, T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1, 2$ GeV (direita) calculado com 2 prescrições diferentes: $\bar{\eta}$ a partir de $f_{\text{PMS}} = 0$ (faixa marrom, linhas finas) e $\bar{\eta}$ a partir da Eq. (182) (faixa cinza, linhas tracejadas). Também comparamos com o resultado invariante da escala da LO RGOPT (linhas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$ 80
- Figura 24 – Parâmetro do RSC B_2g^2 como função da temperatura, T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita). Os valores de B_2g^2 foram obtidos com a Eq. (183) (faixa marrom, linhas finas) e com a Eq. (181) (faixa cinza, linhas tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$ 80
- Figura 25 – Pressão da NLO RGOPT como função de T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita), usando $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ (faixas cinza, linhas finas). Os resultados são comparados com os fornecidos pela NLO pQCD (faixas azuis, linhas tracejadas), a NLO HTLpt (faixa rosa, linhas ponto-tracejadas) e a LO RGOPT (linhas violetas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$. 81
- Figura 26 – Pressão da NLO RGOPT como função de T para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita), usando $\bar{\eta}_{\text{RG}}$ (faixas marrons, linhas finas). Os resultados são comparados com os fornecidos pela NLO pQCD (faixas azuis, linhas tracejadas), a NLO HTLpt (rosa, linhas ponto-tracejadas) e a LO RGOPT (linhas violetas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$. 81
- Figura 27 – A dependência de escala remanescente definida pelas diferenças $\Delta P_q/P_{SB} \equiv (P_q(\Lambda = 4\pi T) - P_q(\Lambda = \pi T))/P_{SB}$ das pressões (normalizadas), como funções da temperatura T . Os resultados de pQCD na ordem g (linha tracejada) são comparados com a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{\text{RG}}$) (linha fina), NLO RGOPT($\bar{\eta}_{\text{PMS}}$) (linha ponto-tracejada) e NLO RGOPT($\bar{\eta}(g^2)$) (linha pontilhada). 82
- Figura 28 – Pressão da NLO RGOPT, para $\mu_B = 0$, usando $\bar{\eta}(g^2)$ reexpandido perturbativamente da Eq. (180) (à esquerda) e o $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ exato obtido com Eq. (168) (direita) em comparação com o estado da arte para a pressão perturbativo na $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$ (faixa azul, linhas tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi T - 4\pi T$ 84
- Figura 29 – Pressão da NLO RGOPT obtida com $\bar{\eta}_{\text{RG}}$ (faixa marrom, linhas finas), em comparação com pQCD padrão $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$ (faixa azul, tracejado), NLO e NNLO HTLpt e com LQCD em $\mu_B = 0$. Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi T - 4\pi T$ 85

Figura 30 – Pressão da NLO RGOPT obtida com $\bar{\eta}_{RG}$ (faixa marrom, linhas finas), em comparação com NNLO HTLpt e com LQCD em $\mu_B = 0$	85
Figura 31 – Pressão termodinâmica consistente (esquerda) e densidade do número de quarks (direita) em função do potencial químico, fornecida pela NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) em comparação com pQCD na ordem g^2 (azul, tracejado), com dependência de escala $\Lambda = 2\mu, 4\mu$ e $B = 0$	90
Figura 32 – $b(\mu)$ da pressão da NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (esquerda) e da pressão da pQCD na ordem g^2 (direita), com valor da escala $\Lambda = 2\mu, 4\mu$	91
Figura 33 – Dependência funcional da pressão e da densidade de energia para a NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) e da pQCD na ordem g^2 (azul, tracejada) com $B = 0$. As linhas de P maiores correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e as menores a $\Lambda = 4\mu$	92
Figura 34 – Relação massa-raio dada pela EoS da Fig. 33, onde as curvas com massa máxima menor correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e a maior a $\Lambda = 4\mu$ para ambos, NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (linhas ponto-tracejadas) e pQCD na ordem g^2 (linhas tracejadas).	92
Figura 35 – Dependência funcional da pressão e da densidade de energia para a NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) e a pQCD na ordem g^2 (azul, tracejada) com $B \neq 0$. As linhas P maiores correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e as menores a $\Lambda = 4\mu$	93
Figura 36 – Relação massa-raio dada pela EoS da Fig. 35, onde as curvas com massa máxima menor correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e a maior a $\Lambda = 4\mu$ para ambos, NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (linhas ponto-tracejadas) e pQCD na ordem g^2 (linhas tracejadas).	93
Figura 37 – Função β em 1L e 2L para $N = 3$	131
Figura 38 – Constante de acoplamento, g , em 1L e 2L em função de Λ/Λ_0 para $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = 1$	131

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Regras de Feynman para a teoria interpolada na OPT	30
Tabela 2 – Soluções da RGOPT na ordem δ para diferentes valores N em $T =$ $\mu = 0$	39
Tabela 3 – Propriedades da massa máxima da estrela do quark predita pela NLO RGOPT e pQCD na ordem g^2 para dois valores de Λ/μ	94

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	MATÉRIA DE QUARKS FRIA E DENSA E APLICAÇÕES ASTROFÍSICAS	20
1.2	ESCOPO DA TESE	22
2	O MODELO GROSS–NEVEU	24
2.1	PRESSÃO PERTURBATIVA EM T E μ FINITOS	24
2.2	TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA PADRÃO	29
2.2.1	OPT Padrão no modelo GN sem massa	30
2.2.1.1	Resultados em $T = \mu = 0$	32
2.3	PRESSÃO PERTURBATIVA MODIFICADA PELO RG	33
2.4	A OPT MODIFICADA PELO RG	34
2.4.1	RGOPT, ordem δ^0	35
2.4.1.1	Resultados da RGOPT na ordem δ^0 para $T = \mu = 0$	36
2.4.2	RGOPT, ordem δ^1	37
2.4.2.1	Resultados da RGOPT na ordem δ^1 para $T = \mu = 0$	37
2.5	POSSÍVEIS PROBLEMAS E OUTRAS PRESCRIÇÕES DA RGOPT	39
2.6	RESULTADOS EM $T \neq 0$, $\mu = 0$ E COMPARAÇÃO ENTRE A OPT PADRÃO E A RGOPT	40
3	RGOPT APLICADA NA PRESSÃO DA QCD	44
3.1	ASPECTOS GERAIS DA QCD	44
3.2	PRESSÃO PERTURBATIVA DE QUARKS DA QCD	45
3.3	APLICANDO A RGOPT	47
3.3.1	Ordem δ^0	48
3.3.1.1	Resultados da RGOPT na ordem δ^0 em $T = \mu = 0$	49
3.3.2	Resultados da RGOPT na ordem δ em $T = \mu = 0$	49
3.3.3	Mudança do esquema de renormalização para soluções reais	51
3.3.3.1	A RSC mais próxima do esquema $\overline{\text{MS}}$ e outras opções possíveis de RSC	52
3.3.4	Condensado de quarks na RGOPT	55
3.4	MATÉRIA DE QUARKS FRIA E DENSA	56
3.4.1	Otimização de LO ordem δ^0	58
3.4.2	Otimização na ordem de 2L (δ)	60
3.4.3	Resultados para a RSC mais próximo do esquema $\overline{\text{MS}}$	61
3.4.4	Uma alternativa mais simples de prescrição da NLO RGOPT	67
3.4.5	Solução a partir da equação do RG reduzida	69
3.5	RESULTADOS PARA A MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E DENSA	72
3.5.1	Compatibilidade com a liberdade assintótica em NLO	73

3.5.2	Massa da RGOPT otimizada na ordem g na aproximação de T alta	74
3.5.3	Uma aproximação perturbativa simples, otimização na ordem g^2	76
3.5.4	Soluções reais exatas em NLO RGOPT	78
3.5.4.1	Soluções a partir do PMS	78
3.5.4.2	Soluções a partir do RG	78
3.5.5	Resultados numéricos para as soluções exatas em NLO	79
3.5.6	Efeitos da contribuição gluônica perturbativa	83
4	ESTRELAS DE QUARKS DENSAS E FRIAS	87
4.1	CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA	87
4.2	RELAÇÃO MASSA-RAIO	91
5	CONCLUSÕES	95
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A – NOTAÇÃO	119
A.1	NOTAÇÃO RELATIVÍSTICA	119
A.2	MATRIZES DE DIRAC	119
	APÊNDICE B – SOMAS DE MATSUBARA	121
	APÊNDICE C – REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL NO ESQUEMA	
	\overline{MS}	123
	APÊNDICE D – RENORMALIZAÇÃO DA PRESSÃO DO MODELO	
	DE GN	124
D.1	RENORMALIZAÇÃO DA MASSA	124
	APÊNDICE E – EQUAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO	
	NO MODELO DE GN	127
E.1	LIBERDADE ASSINTÓTICA NO MODELO DE GN	129
	APÊNDICE F – CÁLCULO DA PRESSÃO NA ORDEM DE DOIS	
	$LOOPS$	133
F.1	RENORMALIZAÇÃO	136

1 INTRODUÇÃO

Acredita-se que sistemas físicos como o universo primordial e o interior de estrelas compactas estavam/estejam em um estado de quarks e glúons puros chamado plasma de quarks e glúons (QGP) (SHURYAK, 1978; HEINZ; JACOB, 2000). Este estado da matéria seria encontrado naturalmente em temperaturas e/ou densidades bariônicas extremamente altas. Hoje em dia, existem vários experimentos onde o QGP é criado em um intervalo de tempo extremamente reduzido, os experimentos mais relevantes estão sendo realizados no *Relativistic Heavy-Ion Collider* (RHIC) (ARSENE *et al.*, 2005; ADAMS *et al.*, 2005; ADCOX *et al.*, 2005) e no *Large Hadron Collider* (LHC) (CARMINATI *et al.*, 2004; ALESSANDRO *et al.*, 2006).

Por outro lado, a teoria fundamental que temos hoje para descrever este estado da matéria é a **Cromodinâmica Quântica** (QCD). A QCD, que é uma teoria não abeli-ana, apresenta confinamento de quarks e glúons e um forte acoplamento para baixas energias, impossibilitando a aplicação de teoria de perturbação (PT). No entanto, a constante de acoplamento da QCD diminui com a energia e em energias muito altas ela é baixa o suficiente para usar a PT de maneira mas confiável. Este aspecto da QCD é conhecido como **liberdade assintótica** (AF). A figura 1 ilustra os diferentes dados experimentais para a constante de acoplamento forte e o resultado dado pela expressão perturbativa de $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$, em diferentes ordens, a saber: *Next-to-leading order* (NLO), *Next-to-next-to-leading order* (NNLO) e *Next-to-next-to-next-to-leading order* (NNNLO). Em altíssimas temperaturas e/ou densidades, temos a matéria de quarks

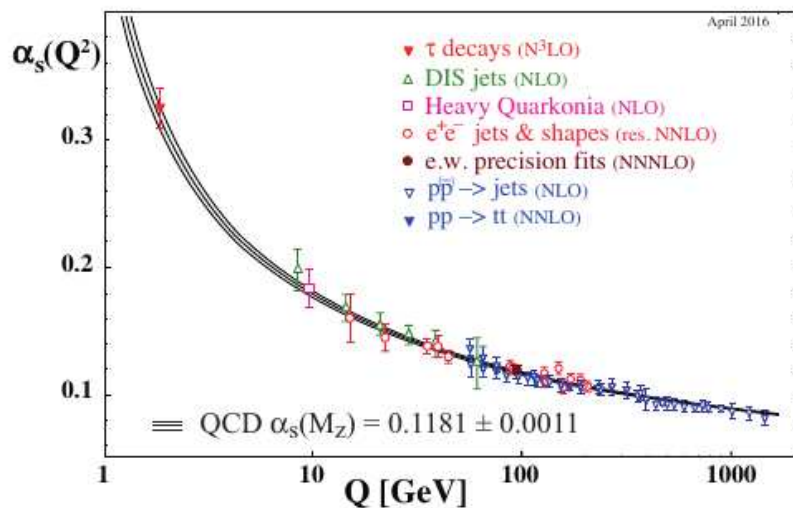


Figura 1 – Acoplamento forte perturbativo em função da escala de energia Q comparado com diferentes dados experimentais. Os respectivos graus de teoria de perturbação da QCD são: NLO, NNLO, NNNLO. Figura tomada da Ref. (PATRIGNANI *et al.*, 2016).

no estado de QGP, onde quarks e glúons são fracamente acoplados ou desconfinados. Conforme a temperatura/densidade baixa, o sistema atinge uma temperatura crítica (T_C) ou pseudocrítica (T_{pc}) no caso de baixas densidades, na qual quarks e glúons estão fortemente acoplados e o sistema sofre uma transição de fase de QGP para matéria hadrônica ou no caso de baixas densidades a passagem de QGP para matéria hadrônica ocorre de maneira suave via um *crossover*. Essa transição de fase (*crossover*) está relacionada ao confinamento/desconfinamento e à quebra/restauração da simetria quiral. As escalas de energia das transições de fase (*crossover*) podem ser alcançadas por experimentos de laboratório envolvendo as colisões de íons pesados como Au–Au, Pb–Pb e Xe–Xe, em energias relativísticas. Os valores de energia do centro de massa de 200 GeV e 2.76–5.44 TeV por núcleon foram atingidos no RHIC (ADAMCZYK; OTHERS., 2017) e no LHC (ACHARYA *et al.*, 2018, 2020, 2019) respectivamente. Nestes experimentos, diferentes valores do potencial químico bariônico, μ_B , são alcançados variando a energia do feixe, $\sqrt{s_{NN}}$, pois é bem sabido que a diminuição da energia de colisão resulta em um aumento do potencial químico bariônico (ANDRONIC *et al.*, 2018). Então, para as colisões mais energéticas no LHC, onde a densidade bariônica é quase zero, a temperatura associada ao congelamento químico ou *chemical freeze-out*, que é a temperatura na qual o sistema para de ter colisões inelásticas, foi relatada como ocorrendo em $T_{cf} \approx 155\text{--}158$ MeV (ANDRONIC *et al.*, 2018). Devido ao fato de que sob essas condições o acoplamento da QCD ainda é alto, $\alpha_s \approx 0.43$, a descrição teórica de tal transição requer o uso de técnicas não perturbativas. A este respeito, lattice QCD (LQCD), que é o método não perturbativo mais confiável hoje em dia, uma vez que usa a densidade lagrangiana completa da QCD, previu que a transição de desconfinamento observada em potencial químico bariônico zero coincide com a restauração da simetria quiral e é um *crossover* (AOKI Y. *et al.*, 2006), na temperatura pseudocrítica $T_{pc} \approx 145\text{--}165$ MeV (BAZAVOV, A. *et al.*, 2014; BORSANYI, Szabolcs *et al.*, 2010b; BORSANYI, Szabolcs *et al.*, 2014). Este acordo notável entre a temperatura de congelamento químico e a temperatura pseudocrítica obtida por LQCD sugere que o congelamento químico ocorre próximo à hadronização do QGP.

Avançando para densidades mais altas e temperaturas mais baixas, o possível diagrama de fases da QCD, mostrado na Fig. 2 da Ref (LUO; XU, 2017), exhibe duas regiões que são de grande interesse atual. O primeiro localizado nos valores intermediários de T e μ_B ($T \sim 100$ MeV, $\mu_B \sim 900$ MeV), está atualmente sendo explorado por experimentos como o *beam energy scan* no RHIC, cujo objetivo é confirmar a existência do ponto crítico (LUO; XU, 2017) que, de acordo com as aproximações do modelos efetivos, deve marcar o final de uma linha de transição de primeira ordem começando em $T = 0$. A segunda região, que cobre o intervalo $T \sim 0\text{--}30$ MeV e $\mu_B \gtrsim 1$ GeV, é essencial para a descrição de objetos estelares compactos, como estrelas de

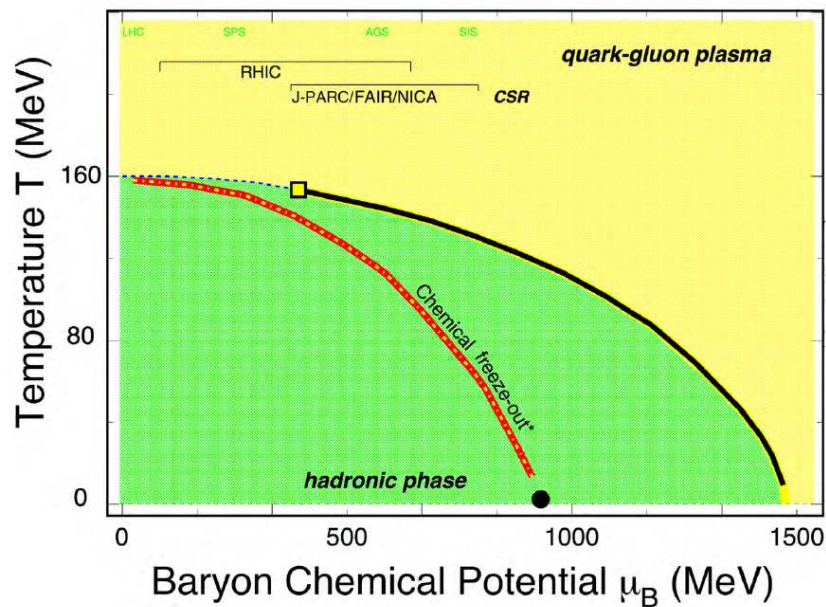


Figura 2 – O possível diagrama de fases da QCD. A linha vermelha é o *freeze-out* empírico a partir de dados experimentais de colisões de íons pesados. A linha preta sólida é a possível transição de primeira ordem e o quadrado é o ponto crítico. Figura tomada da Ref. (LUO; XU, 2017).

nêutrons e estrelas de quarks. Infelizmente, devido ao conhecido **problema do sinal** (DUMITRU *et al.*, 2005), a LQCD encontra um ambiente hostil dentro dessas duas regiões importantes onde os cálculos na rede ainda não podem ser implementadas de forma confiável.

Observe que o uso da PT é impensável nas faixas relevantes de temperatura e potencial químico discutidas aqui. Devido à propriedade de liberdade assintótica, a convergência só pode ser alcançada em temperaturas muitas ordens de magnitude maiores do que a crítica. Em relação ao objetivo principal do presente trabalho, vale a pena ressaltar um sério problema adicional encontrado em aplicações da PT que basicamente reflete a incompatibilidade desta aproximação com as propriedades do grupo de renormalização (RG). De fato, foi observado que a sensibilidade à escala **arbitrária** de energia, Λ , introduzida durante o processo de regularização, aumenta quando são considerados termos sucessivos na expansão de acoplamento fraco, o que não é um resultado ideal na medida em que observáveis termodinâmicos, como a pressão, estão envolvidos. Para tornar essa declaração mais clara, fornecemos a Fig. 3, que mostra a expansão de acoplamento fraco da pressão da QCD para $N_f = 3$ normalizado com a pressão do gás ideal, até a ordem $\alpha_s^3 \ln \alpha_s$ (VUORINEN, A., 2003). As bandas foram obtidas variando a escala de renormalização por um fator de 2 em torno de $2\pi T$, obtido com o “*running*” de α_s em três *loops* (3L) e $\Lambda_{\overline{MS}} = 335$ MeV. Nota-se que em geral os resultados são muito sensíveis às mudanças na escala de renormalização, e a situação piora para valores de temperatura mais baixos. Também

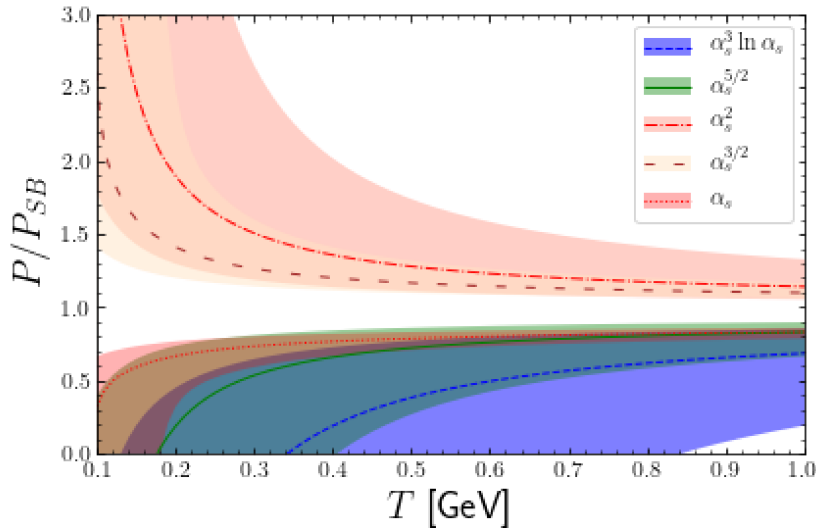


Figura 3 – Expansão de acoplamento fraco da pressão de QCD até a ordem $\alpha_s^3 \ln \alpha_s$ para $N_f = 3$. As bandas sombreadas são o resultado da variação da escala Λ por um fator de 2 em torno de $2\pi T$. Figura produzida pelo autor

é importante notar que, em ordem $\alpha_s^{3/2}$ e α_s^2 , a QCD perturbativa (pQCD) mostra um comportamento errado até do ponto de vista qualitativo.

Teorias efetivas como as descritas pelo modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961a, 1961b) e o modelo de Gross–Neveu (GN) (GROSS; NEVEU, 1974) entre outros, permitem, em princípio, mapear uma grande parte do diagrama de fases. Porém, muitos não têm confinamento e poucos deles são modelos renormalizáveis em $3 + 1$ dimensões e neste caso deve-se usar um valor finito para o momento na faixa do ultravioleta (*cutoff*) que limita a energia que pode ser estudada com o modelo. Além disso, a maior parte da literatura que lida com esse tipo de modelos efetivos, usa a tradicional aproximação de N grande (LN), que é similar à aproximação de Hartree e de campo médio. Esta é conhecida por falhar em vários casos como, por exemplo: violação do teorema de Landau (LANDAU, 1980) para a transição de fase em uma dimensão espacial (DASHEN *et al.*, 1975; ROSENSTEIN *et al.*, 1991) e na localização do ponto crítico na transição líquido-gás para teorias fermiônicas em $2 + 1$ dimensões (KNEUR, Jean-Loïc *et al.*, 2007) entre outros problemas. Então, é imperioso usar métodos que vão além da aproximação LN. Nesse sentido, uma abordagem não perturbativa importante é usar resultados perturbativos considerando *multi loops*, além de algum procedimento de ressonância, de modo que resultados não perturbativos sejam gerados. Existem várias maneiras de fazer esta ressonância (BLAIZOT *et al.*, 2003b; KRAEMMER; REBHAN, 2004; ANDERSEN; STRICKLAND, 2005). Uma maneira bem conhecida é reorganizar a série perturbativa adicionando e subtraindo um termo gaussiano que contém um parâmetro de massa arbitrário. Por exemplo, no caso do modelo escalar sem massa $\lambda\phi^4$, deforma-se a ação adicionando $(1 - \delta)\eta^2\phi^2$

enquanto redimensiona-se o acoplamento como $\lambda \rightarrow \delta\lambda$. Uma quantidade física, como a pressão, é então avaliada perturbativamente na ordem δ^k , e resultados não perturbativos otimizados são gerados aplicando-se um critério variacional especificado pela otimização de massa ou princípio de sensibilidade mínima (PMS) (STEVENSON, 1981): $\frac{\partial P^k}{\partial \eta} = 0$, em $\delta = 1$. Este tipo de técnica é frequentemente apresentado como teoria de perturbação otimizada (OPT) (STEVENSON, 1981), expansão delta linear (LDE) (BENDER *et al.*, 1987, 1988; DUNCAN; MOSHE, 1988) e também *screened perturbation theory* (SPT) (KARSCH *et al.*, 1997; ANDERSEN *et al.*, 2001). No entanto, devido à invariância de calibre, a implementação desse tipo de procedimento no setor gluônico puro da QCD não é óbvia. Felizmente, o problema de adicionar um termo gaussiano ao setor gluônico foi contornado por Braaten e Pisarski (BRAATEN; PISARSKI, 1992) que propuseram uma densidade Lagrangiana efetiva manifestamente invariante de calibre¹ descrevendo adequadamente um termo de massa térmica gluônica. Graças a esta conquista, uma generalização do OPT/SPT padrão foi feita adicionando e subtraindo uma ação efetiva de *hard-thermal-loop* (PISARSKI, 1989; BRAATEN; PISARSKI, 1990b, 1990c, 1990a) (HTL) que modifica sistematicamente os vértices e propagadores de forma que o resultado seja evidentemente invariante de calibre (BRAATEN; PISARSKI, 1992). Esta generalização é conhecida como teoria de perturbação HTL (HTLpt) (ANDERSEN *et al.*, 1999, 2000, 2002). Hoje em dia existem resultados até NNLO da pressão da QCD usando HTLpt (ANDERSEN *et al.*, 2010a, 2010b, 2011; MOGLIACCI *et al.*, 2013; HAQUE *et al.*, 2014a, 2014b), o que é impressionante, dadas as dificuldades técnicas para se calcular os muitos diagramas de Feynman de 3L para matéria de quarks quente e densa. Além disso, as referências mais recentes (MOGLIACCI *et al.*, 2013; HAQUE *et al.*, 2014a, 2014b) mostram resultados muito próximos aos dados da LQCD para temperaturas $T \gtrsim T_{pc}$ para uma escala central de renormalização $\Lambda = 2\pi T$ no esquema de renormalização \overline{MS} , que baseia-se no menor modo bosônico térmico finito de Matsubara. Contudo, similarmente ao que acontece na pQCD, mudanças moderadas na escala alteram drasticamente os resultados. Foi argumentado pelos autores, que esta sensibilidade às mudanças da escala poderia ser melhorada ressomando a dependência logarítmica dos resultados, mas esta sensibilidade pode ser melhor explicada pela falta de propriedades de invariância frente ao grupo de renormalização (RG) na abordagem da HTLpt, dado que, a HTLpt usa uma expansão de altas temperaturas em potências de m/T , onde $T \gg m$, de modo que não há informação em $T = 0$, e as propriedades do RG são impossíveis de serem incorporadas sem informações do vácuo.

Há alguns anos, foi proposta uma modificação da OPT **padrão**, com o objetivo de introduzir propriedades perturbativas do RG de maneira consistente. Esta alterna-

¹ Taylor e Wong (TAYLOR; WONG, 1990) já haviam escrito uma ação invariante de calibre, porém escrita de uma forma que a invariância de calibre não é manifesta.

tiva proposta na Ref. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010) sob a sigla RGOPT (*renormalisation group optimised perturbation theory*), estabelece que a equação do PMS deve ser resolvida simultaneamente com a equação do RG, $\Lambda \frac{dP^k}{d\Lambda} = 0$. A restrição é que, ao contrário da pQCD e HTLpt, onde pode-se concentrar no domínio de altas temperaturas, a RGOPT requer que toda a contribuição dos logaritmos dependentes da escala do vácuo ($T = \mu_B = 0$) seja conhecida para que a prescrição seja eficaz. Este fato representa um obstáculo técnico ao se aplicar a RGOPT no setor gluônico de QCD, uma vez que as avaliações perturbativas de termos de vácuo (contendo massas térmicas) tornam-se extremamente complicadas mesmo em LO. Por outro lado, uma avaliação perturbativa em NLO (2L) da pressão da QCD, incluindo a contribuição do vácuo, pode ser realizada de uma maneira mais fácil se considerarmos o caso da aplicação da RGOPT no setor de quarks enquanto o setor gluônico é descrito pela contribuição perturbativa padrão de glúons sem massa.

Na QCD, em $T = \mu_B = 0$, a RGOPT foi usada para calcular com excelente precisão a escala da QCD, $\Lambda_{\overline{MS}}$, no esquema \overline{MS} (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2012). Além disso, a constante de acoplamento forte foi calculada a partir da constante de decaimento do pión (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013), F_π , e foram obtidos resultados muito precisos para o condensado de quarks a partir do cálculo da função espectral, ρ , até a ordem de 6L (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015, 2020). Em aplicações posteriores, a RGOPT foi usada em teorias escalares em temperaturas finitas (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2015, 2016; FERRARI *et al.*, 2017), e comparada com SPT/HTLpt mostrando explicitamente como o método melhora consideravelmente a dependência de escala em teorias térmicas.

É importante observar que, com os métodos variacionais tradicionais, como SPT, HTLpt e OPT, o procedimento de otimização leva a várias soluções, incluindo soluções complexas, quando consideram-se ordens mais altas. Como discutido nas Refs. (ANDERSEN *et al.*, 2010a, 2010b, 2011; MOGLIACCI *et al.*, 2013; HAQUE *et al.*, 2014a, 2014b), em alguns casos, deve-se usar um critério alternativo, por exemplo, substituindo o termo de massa variacional por uma massa “blindada” perturbativa, processo que pode levar à perda de informações não perturbativas importantes. No contexto da RGOPT, esse grave problema pode ser evitado escolhendo-se apenas as soluções que reproduzem a liberdade assintótica para pequenos acoplamentos, como será discutido mais profundamente neste trabalho.

1.1 MATÉRIA DE QUARKS FRIA E DENSA E APLICAÇÕES ASTROFÍSICAS

O conhecimento da equação de estado (EoS) da matéria de quarks fria ($T = 0$) e densa ($\mu_B \neq 0$) é necessário para uma descrição precisa de objetos estelares compactos, como estrelas de nêutrons ou de quarks. Devido ao problema de sinal da LQCD, uma determinação não perturbativa completa da EoS permanece fora de alcance.

Em geral, este problema é parcialmente contornado de diferentes maneiras, como usando teorias quirais efetivas (CET) (EPELBAUM *et al.*, 2009; MACHLEIDT; ENTEM, 2011) em baixas densidades e pQCD (KRAEMMER; REBHAN, 2004) em densidades extremamente altas. Como alternativa a essas abordagens analíticas, pode-se usar modelos de quark efetivos, como o modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*, 1974), o modelo de NJL, bem como o modelo de quarks e mésons (QMM) (GELL-MANN, Murray; LEVY, 1960) entre outros. Um trabalho pioneiro em pQCD de Freedman e McLerran (FREEDMAN; MCLERRAN, 1977a, 1977b) forneceu a pressão de NNLO para quarks sem massa em temperatura zero e potenciais químicos finitos. O resultado foi então refinado para incluir massas de quark finitas (FRAGA; ROMATSCHKE, 2005; KURKELA *et al.*, 2010; FRAGA *et al.*, 2014). Depois de mais de quatro décadas, uma nova ordem perturbativa foi avaliada recentemente na Ref. (GORDA *et al.*, 2018), onde os autores determinaram o coeficiente da contribuição logarítmica dominante em N3LO: $\alpha_s^3 \ln^2 \alpha_s$. Uma vez que a contribuição suave do logaritmo principal em N3LO avaliada naquele trabalho dá uma correção desprezível para o NNLO, concluiu-se que o uso de pQCD em NNLO como ponto de partida em cálculos das propriedades de estrelas de nêutrons (KURKELA *et al.*, 2010, 2014; GORDA, 2016; ANNALA *et al.*, 2018; MOST *et al.*, 2018), bem como a simulação de sinais de ondas gravitacionais de fusões de estrelas de nêutrons é bem justificada.

Mesmo que modelos efetivos possam ser usados para descrever em baixas densidades, o regime perturbativo no núcleo da estrela provavelmente excede bastante a densidade de saturação nuclear. Logo, nesta região, a descrição de baixas energias claramente falha. Por muitos anos, a comunidade de estrelas compactas adotou amplamente o uso do modelo de sacola do MIT para descrever estrelas de quarks, estrelas híbridas e também o colapso do núcleo de supernovas (WITTEN, 1984; ALCOCK *et al.*, 1986; HAENSEL *et al.*, 1986; BEREZHIANI *et al.*, 2003; ALFORD *et al.*, 2005; DRAGO *et al.*, 2007; MINTZ *et al.*, 2010). Nesse modelo, todos os efeitos das interações estão contidos na constante da sacola, que é a diferença entre o estado fundamental perturbativo e o vácuo de quebra de simetria quiral da teoria. A EoS do modelo do MIT prediz que as massas das estrelas de quarks puros não chegam a $2M_\odot$, onde M_\odot é a massa do sol. Por outro lado, a EoS perturbativa da matéria de quarks em altas densidades na ordem de 2L prediz massas acima de $2M_\odot$ (FRAGA *et al.*, 2001, 2002; FRAGA; ROMATSCHKE, 2005) e a EoS perturbativa de 3L prediz massas que excedem $2.5M_\odot$ (KURKELA *et al.*, 2010). Estes valores das massas máximas previstas pela pQCD são obviamente altamente dependentes da escala Λ , e então apenas alguns valores de Λ/μ reproduzirão uma EoS razoável. Observações astronômicas recentes colocam restrições na massa máxima para estrelas de nêutrons e de quarks. Do ponto de vista observacional, o pulsar PSR J1614 – 2230 foi relatado como tendo uma massa de $1.97 \pm 0.04M_\odot$ (DEMOREST *et al.*, 2010) e o pulsar PSR J0348 + 0432

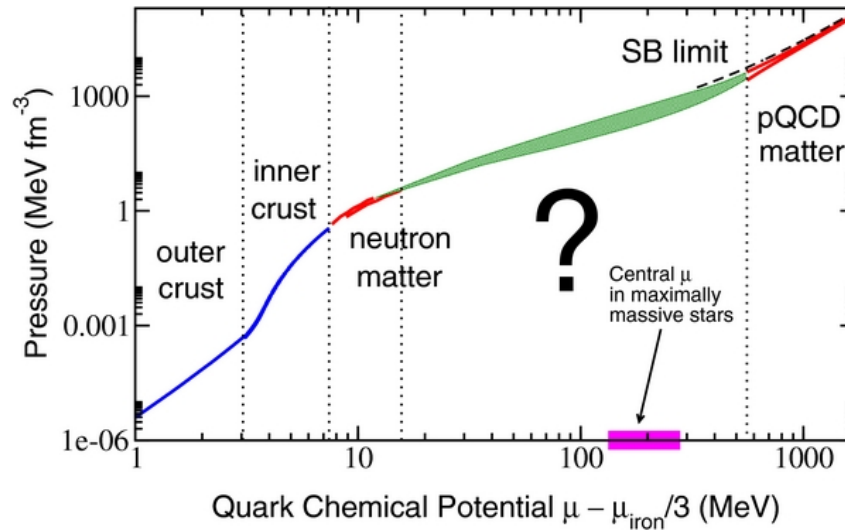


Figura 4 – Limites conhecidos da EoS estelar. A pressão é plotada em função do potencial químico. A região com um ponto de interrogação corresponde a uma EoS interpolada que conecta a região da matéria nuclear com a matéria perturbativa da QCD. Figura tomada da Ref. (KURKELA *et al.*, 2014)

uma massa $2.01 \pm 0.04 M_{\odot}$ (ANTONIADIS *et al.*, 2013) e mais recentemente os dados observacionais do pulsar de milissegundos MPS J074 + 6620 preveem uma massa de $2.14^{+0.20}_{-0.18} M_{\odot}$ (CROMARTIE *et al.*, 2019). Isto sugere que, uma descrição não perturbativa é importante na descrição de estrelas de quarks e de estrelas de nêutrons. Na Ref. (KURKELA *et al.*, 2014), a EoS é construída usando a EoS da CET da Ref. (TEWS *et al.*, 2013) para densidades bariônicas abaixo de $1.1\rho_0$ ($\rho_0 \sim 0.16\text{fm}^{-3}$ é a densidade da matéria nuclear), já para potenciais químicos bariônicos acima de 2.6 GeV, a EoS perturbativa é usada, e as duas regiões são ligadas por uma função interpolada como ilustrado na Fig. 4. Uma vez que o mecanismo de ressonância da RGOPT captura informações não perturbativas importantes, pode-se especular que a RGOPT pode eventualmente preencher, pelo menos em parte, a região que os modelos de baixa energia e pQCD não conseguiram descrever.

1.2 ESCOPO DA TESE

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, o procedimento da RGOPT é explicado no contexto do modelo de GN, uma vez que este modelo compartilha algumas características da QCD como a liberdade assintótica e a simetria quiral, mas sem as dificuldades desta teoria fundamental, facilitando desta maneira a introdução da técnica. Além disso, nesse capítulo, contrastamos os resultados da RGOPT com os da OPT padrão para mostrar como a inclusão de propriedades do RG melhora significativamente os resultados. No capítulo 3, aplicaremos o maquinário da RGOPT no setor fermiônico da QCD em NLO, para $N_f = 3$ quarks sem massa. O setor glúônico será dado por sua expressão perturbativa pura. Apresentaremos resultados

para três regimes: $T = \mu = 0$, $T = 0, \mu \neq 0$, e $T \neq 0, \mu \neq 0$ e compararemos nossos resultados com resultados do estado da arte para pQCD e HTLpt. Os resultados para $T = 0, \mu \neq 0$ foram publicados em Phys. Rev. D 100, 114006 e os resultados para $T \neq 0, \mu \neq 0$ estão em preparação para publicação. No capítulo 4, usaremos uma versão termodinamicamente consistente da EoS do capítulo 3 para a matéria de quarks densa e fria ($T = 0, \mu \neq 0$) para calcular a relação massa-raio para estrelas de quarks. Finalmente no capítulo 5 as conclusões e as perspectivas futuras são apresentadas.

2 O MODELO GROSS–NEVEU

O modelo de Gross–Neveu foi proposto em 1974 por David Gross e André Neveu (GROSS; NEVEU, 1974) com o objetivo de estudar a quebra da simetria quiral em modelos assintoticamente livres. A densidade Lagrangiana deste modelo é dado por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_k (i\partial - m) \psi_k + \frac{g}{2N} (\bar{\psi}_k \psi_k)^2, \quad (1)$$

onde k representa os diferentes sabores variando de 1 até N . Definimos a interação fermiônica como $g = g_{\text{GN}}^2 N$, com o propósito de, quando conveniente, tomar o limite de LN , assim como foi feito na Ref. (GROSS; NEVEU, 1974). Quando, $m = 0$, este modelo é invariante sob a simetria quiral discreta $\psi_k \rightarrow \gamma_5 \psi_k$. Outra característica importante desta teoria é que, em $1 + 1$ dimensões, ele representa uma teoria renormalizável que apresenta liberdade assintótica. Portanto, seu estudo nos possibilitará compreender muitos aspectos da QCD sem ter que afrontar as dificuldades inerentes à mesma. Sendo assim, neste trabalho, nosso estudo se concentrará inicialmente no modelo GN.

Primeiramente estudaremos os aspectos perturbativos do modelo GN, e então, a OPT e a RGOPT serão apresentadas para estudar o comportamento não perturbativo da teoria, com o objetivo primário de calcular a pressão.

2.1 PRESSÃO PERTURBATIVA EM T E μ FINITOS

Vamos agora escrever a pressão perturbativa até 2L ou ordem g , que diagramaticamente é dada por:

$$P^{\text{PT}} = \text{Diagrama 1L} + \text{Diagrama 2L} + P_{\text{c.,t.}} + \mathcal{O}(g^2), \quad (2)$$

onde $P_{\text{c.,t.}}$ é dado por todos os contratermos que cancelam as divergências dos dois primeiros diagramas, como veremos mais adiante.

A primeira contribuição para a pressão perturbativa,

$$P_0 = \text{Diagrama 1L} = -i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \ln(\not{p} - m), \quad (3)$$

é o gás livre de férmions ou diagrama de 1L ou de ordem g^0 , e

$$P_1 = \text{Diagrama 2L} = -\frac{g}{2N} \mathcal{G} \left\{ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right] \right\}^2 \quad (4)$$

é o diagrama de 2L ou ordem g . O termo \mathcal{G} é dado por (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2006):

$$\mathcal{G} = 1 - \frac{1}{2N}, \quad (5)$$

que vem das transformações de Fierz, que são usadas para o vértices de quatro férmions, a fim de ter em conta o rearranjo dos campos férmions que ocorrem no vértice (KLEVANSKY, 1992), separando assim o vértice em dois canais. Consequentemente, tem-se como regra de Feynman para cada vértice o termo, $\frac{g}{2N}\mathcal{G}$. Permita-nos observar que, $\mathcal{G} \rightarrow 1$, quando se toma o limite de LN.

Tomando-se o traço em índices de sabor e índices de espinores de Dirac, encontra-se

$$\frac{P_0}{N} = -i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln(-p^2 + m^2), \quad (6)$$

e

$$\frac{P_1}{N} = -2g\mathcal{G} \left\{ m^2 \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{-p^2 + m^2} \right]^2 + \left[\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_0}{-p^2 + m^2} \right]^2 \right\}. \quad (7)$$

Para escrever estas expressões em termos da temperatura T e do potencial químico μ , devemos usar o formalismo do tempo imaginário de Matsubara, onde se faz a substituição, $p \rightarrow (i\omega_n + \mu, \mathbf{p})$, e

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad (8)$$

são as frequências de Matsubara para férmions, onde $n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm \infty$. Substituindo p_0 podemos fazer a substituição,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \rightarrow i \int d\omega_n \frac{dp}{(2\pi)^2}. \quad (9)$$

Essa substituição é válida para $T \rightarrow 0$, já que $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ quando $2\pi T\Delta n \rightarrow 0$. No entanto, para T finito, a integral em ω_n na Eq. (9) torna-se discretizado na medida que $T\Delta n$ torna-se finito (GJESTLAND, 2007), e então se obtém,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \rightarrow iT \int \frac{dp}{(2\pi)} \sum_{n=0}^{\infty}, \quad (10)$$

e a pressão torna-se

$$\frac{P_0}{N} = T \int \frac{dp}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln [(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2] \quad (11a)$$

e

$$\frac{P_1}{N} = 2gT^2\mathcal{G} \left\{ m^2 \left[\int \frac{dp}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2} \right]^2 + \left[\int \frac{dp}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega_n + \mu}{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2} \right]^2 \right\}, \quad (11b)$$

onde

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (12)$$

Avaliando as somas de Matsubara (Apêndice B), obtemos:

$$\frac{P_0}{N} = \int \frac{d\rho}{2\pi} E_p + \frac{T^2}{\pi} I_1(\hat{m}, \hat{\mu}), \quad (13a)$$

e

$$\frac{P_1}{N} = \frac{g}{2} \mathcal{G} \left\{ m^2 \left[\int \frac{d\rho}{2\pi} \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\pi} I_2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right]^2 - \frac{T^2}{\pi^2} \mathcal{J}_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\}, \quad (13b)$$

onde os integrais térmicos adimensionais são

$$I_1(\hat{m}, \hat{\mu}) = \int_0^\infty d\hat{\rho} \left\{ \ln \left[1 + e^{-(\hat{E}_p + \hat{\mu})} \right] + \ln \left[1 + e^{-(\hat{E}_p - \hat{\mu})} \right] \right\}, \quad (14)$$

$$I_2(\hat{m}, \hat{\mu}) = \int_0^\infty d\hat{\rho} \frac{1}{\hat{E}_p} \left[f^+(\hat{E}_p) - f^-(\hat{E}_p) \right], \quad (15)$$

e

$$\mathcal{J}_2(\hat{m}, \hat{\mu}) = \int_0^\infty d\hat{\rho} \frac{1}{\hat{E}_p} \left[f^+ - f^- \right], \quad (16)$$

onde $\hat{m} = m/T$, $\hat{\mu} = \mu/T$, $\hat{\rho} = \rho/T$, $\hat{E}_p = E_p/T$ e f^\pm são as distribuições Fermi–Dirac dadas por

$$f^\pm(\hat{E}_p) = \frac{1}{1 + e^{(\hat{E}_p \pm \hat{\mu})}}. \quad (17)$$

A primeira integral na Eq. (13a) e a primeira integral na Eq. (13b) são integrais divergentes quando $p \rightarrow \infty$. Esse tipo de divergência é conhecido como divergência ultravioleta (UV). Na teoria sem massa ($m = 0$), as integrais também divergem quando $p \rightarrow 0$, e esse tipo de divergência é conhecido como divergências infravermelhas (IR). As divergências UV podem ser eliminadas pelo uso de esquemas de regularização dimensional e renormalização. Em nosso caso, onde temos uma teoria massiva, utilizamos a regularização dimensional para identificar as divergências de UV no modelo e, após isso, renormalizamos a teoria para eliminar as divergências.

A regularização dimensional foi proposta por 't Hooft e Veltman em 1972 (HO-OFT; VELTMAN, 1972), onde a dimensão da integral é alterada para $D - \epsilon$, e no final, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado. O objetivo da regularização é isolar as divergências que aparecem nas integrais do vácuo. Por outro lado a renormalização é a técnica mediante a qual se eliminam as divergências que já foram isoladas na regularização. Existem vários esquemas de renormalização, o mais usado na teoria quântica de campos (QFT)

é o esquema de renormalização de subtração mínima (MS) inventado por 't Hooft (HOOFT, 1973) e Weinberg (WEINBERG, 1973a). Usaremos uma versão moderna do esquema MS, o $\overline{\text{MS}}$ (BARDEEN *et al.*, 1978), que evita alguns termos constantes finitos que aparecem ao implementarmos a técnica de regularização dimensional. Neste esquema nós temos a substituição

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E} \Lambda^2}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^{D-\epsilon}}{(2\pi)^{D-\epsilon}}, \quad (18)$$

onde γ_E é a constante de Euler–Mascheroni e Λ é a escala de energia de regularização arbitrária $\overline{\text{MS}}$, que deve ser introduzida para manter as dimensões corretas. No Apêndice C, aplicamos a substituição (18) nas integrais divergentes (13). Usando os resultados (238) obtemos,

$$\frac{P_0}{N} = \frac{1}{2\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - L_m \right] + 2T^2 I_1(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\}, \quad (19a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{N} &= \frac{g}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon} - L_m + \left(\frac{24L_m + \pi^2}{48} \right) \epsilon \right] - I_2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. - T^2 \mathcal{J}_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\} \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} [L_m - I_2(\hat{m}, \hat{\mu})] + \left[\frac{24L_m + \pi^2}{24} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [L_m + I_2(\hat{m}, \hat{\mu})]^2 \right\} - T^2 \mathcal{J}_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\}, \end{aligned} \quad (19b)$$

onde $L_m = \ln\left(\frac{m}{\Lambda}\right)$. Agora, podemos ver claramente os termos divergentes nas Eqs. (19) quando $\epsilon \rightarrow 0$, que é o objetivo da regularização dimensional. Nosso próximo passo é eliminar essas divergências, já que não há sentido, do ponto de vista experimental, em ter-se pressão infinita. Para fazer isso, devemos renormalizar a densidade Lagrangiana adicionando termos extras chamados **contratermos**, que são construídos para cancelar as divergências geradas pela densidade Lagrangiana original, de modo que a nova densidade Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{ren} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{c.,t.}, \quad (20)$$

onde \mathcal{L} é a densidade Lagrangiana (1) e $\mathcal{L}_{c.,t.}$ é a densidade Lagrangiana de contratermos dada por:

$$\mathcal{L}_{c.,t.} = \bar{\Psi}_K (iA\partial - Bm) \Psi_K + \frac{Cg}{2N} (\bar{\Psi}_K \Psi_K)^2 + X. \quad (21)$$

onde X é conhecida como a constante cosmológica, a qual elimina as divergências de ponto zero (veja apêndice B). Agora, escrevemos a densidade Lagrangiana renormalizada em termos de constantes de renormalização, e seguindo Ref. (GRACEY, 1990), temos que

$$\mathcal{L}_{ren} = Z_\psi \bar{\psi}_k i \not{\partial} \psi_k - Z_m Z_\psi m \bar{\psi}_k \psi_k + \frac{g \Lambda^\epsilon}{2N} Z_g Z_\psi^2 (\bar{\psi}_k \psi_k)^2 + X, \quad (22)$$

onde a escala de renormalização Λ foi introduzida para garantir que g se mantenha adimensional. As constantes de renormalização Z_ψ , Z_m e Z_g são dadas por:

$$Z_\psi = 1 + A, \quad Z_\psi Z_m = 1 + B \quad \text{e} \quad Z_g Z_\psi^2 = 1 + C, \quad (23)$$

e então podemos definir novos campos, massa e constante de acoplamento de acordo com as expressões:

$$\psi_0 = Z_\psi^{1/2} \psi_k, \quad m_0 = Z_m m \quad \text{e} \quad g_0 = \Lambda^\epsilon Z_g g, \quad (24)$$

chamadas o campo **nú**, massa **nua** e constante de acoplamento **nú**, respectivamente. Logo, a densidade Lagrangiana renormalizada,

$$\mathcal{L}_{ren} = \bar{\psi}_0 (i \not{\partial} - m_0) \psi_0 + \frac{g_0}{2N} (\bar{\psi}_0 \psi_0)^2 + X, \quad (25)$$

levará a quantidades físicas finitas. Vamos ressaltar que as divergências são agora inseridas em ψ_0 , m_0 , g_0 e X . Estas divergências serão absorvidas pela renormalização e as quantidades renormalizadas ψ , m e g são portanto quantidades finitas. Notemos que as quantidades nuas são, por construção, independentes da escala de regularização Λ .

A fim de encontrar os contratermos, primeiro vamos expressá-los como uma expansão em g como

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(g, m/\Lambda, \epsilon) g^n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(g, m/\Lambda, \epsilon) g^n \quad \text{e} \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(g, m/\Lambda, \epsilon) g^n. \quad (26)$$

Muitos anos atrás, J.A. Gracey calculou os contratermos para o modelo GN até 3L (GRACEY, 1990), listamos-lhes abaixo em nossa notação:

$$Z_m = 1 - \frac{g}{\pi\epsilon} + \frac{g}{8\pi^2} \left(\frac{2(4N-3)}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{g^2}{N} - \frac{g}{48\pi^3} \left(\frac{2(4N-3)(6N-5)}{\epsilon^3} + \frac{3(6N-5)}{\epsilon^2} - \frac{(4N-3)}{\epsilon} \right) \frac{g^3}{N^2} + \mathcal{O}(g^4), \quad (27)$$

$$Z_\psi = 1 - \frac{g}{8\pi^2\epsilon} \frac{g^2}{N} + \frac{g(N-1)}{24\pi^3} \left(\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{g^3}{N^2} + \mathcal{O}(g^4), \quad (28)$$

$$Z_g = 1 - \frac{N-1}{\pi\epsilon} \frac{g}{N} + \left(\frac{(N-1)^2}{\pi^2\epsilon^2} + \frac{N-1}{4\pi^2\epsilon} \right) \frac{g^2}{N^2} + \mathcal{O}(g^3). \quad (29)$$

No Apêndice D mostra-se explicitamente a renormalização da pressão, que elimina as divergências nas Eqs. (19). A expressão final para a pressão perturbativa renormalizada é:

$$\begin{aligned} \frac{P^{\text{PT}}}{N} &= \frac{P_{0,\text{ren}}}{N} + \frac{P_{1,\text{ren}}}{N} + \mathcal{O}(g^2); \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - L_m \right] + 2T^2 I_1(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\} + \frac{g}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 [L_m + I_2(\hat{m}, \hat{\mu})]^2 \right. \\ &\quad \left. - T^2 \mathcal{J}_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\} + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (30)$$

2.2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA PADRÃO

Antes de aplicar a RGOPT vamos lembrar como a OPT padrão é aplicada na pressão e como ela leva a resultados altamente dependentes da escala Λ .

A teoria da perturbação otimizada (OPT), também conhecida como expansão delta linear (LDE), é um método não perturbativo usado pela primeira vez em uma versão logarítmica (BENDER *et al.*, 1988) subsequentemente colocado numa versão linear mais simples (DUNCAN; MOSHE, 1988). Ela consiste basicamente em modificar a Lagrangiana de uma teoria particular introduzindo um parâmetro de expansão δ . Digamos que \mathcal{L} é a densidade lagrangiana que queremos resolver, e \mathcal{L}_0 é a densidade lagrangiana da teoria livre, a qual sabemos resolver. A densidade Lagrangiana pode ser escrita em termos de δ como

$$\mathcal{L}(\delta) = (1 - \delta) \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0). \quad (31)$$

Notemos que a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}(\delta)$ interpola entre a teoria livre ($\delta = 0$) e a teoria original ($\delta = 1$). Em seguida, as quantidades físicas relevantes são expandidas como uma série em δ , que é tratado como um número pequeno, mas definido como 1 no final. A convergência da OPT no caso das teorias críticas foi provada na Ref. (BUCKLEY *et al.*, 1993).

Para manter o equilíbrio dimensional, um parâmetro de massa arbitrário, η , deve ser adicionado na densidade Lagrangiana \mathcal{L}_0 . Esse parâmetro atuará como um regulador infravermelho no caso de uma teoria sem massa, e pode-se então fixá-lo exigindo que uma quantidade física relevante, $\mathcal{P}(\equiv)$, seja pelo menos localmente independente de η . Este critério de otimização é matematicamente escrito como

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\bar{\eta}} = 0, \quad (32)$$

e é conhecido como o **princípio da sensibilidade mínima** (PMS) (STEVENSON, 1981).

A OPT provou ser um poderoso método não perturbativo em teorias críticas. Por exemplo, na matéria condensada, fornece uma avaliação precisa da densidade

crítica do poli-acetileno (CALDAS *et al.*, 2008). Antes disso, ela forneceu um dos resultados analíticos mais precisos para a mudança na temperatura crítica para o gás de Bose fracamente interagente (SOUZA CRUZ *et al.*, 2001; KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2004). Foi usada para estudar a teoria renormalizável de Yukawa, mostrando resultados bastante confiáveis em todos os regimes de energia (FRAGA *et al.*, 2009). Produziu resultados muito bons para as suscetibilidades de quarks no modelo NJL (RESTREPO *et al.*, 2015). Além disso, quando estendida para HTL, prevê com mais sucesso as propriedades térmicas da QCD no nível de 3L (ANDERSEN *et al.*, 2011).

2.2.1 OPT Padrão no modelo GN sem massa

Uma das vantagens da OPT é que ela pode ser usada para estudar mais facilmente o caso acadêmico do limite quiral ($m = 0$), já que, como dito anteriormente, o parâmetro de massa η age como um regulador infravermelho. Dito isto, vamos aplicar o método ao modelo de Gross-Neveu sem massa. Primeiro, vamos escrever a densidade Lagrangiana livre

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_k (i\partial - \eta) \psi_k.$$

Então, seguindo a prescrição da Eq. (31), obtém-se





$$\mathcal{L}(\delta) = \bar{\psi}_k (i\partial - \eta) \psi_k + \delta \left[\eta \bar{\psi}_k \psi_k + \frac{g}{N} (\bar{\psi}_k \psi_k)^2 \right].$$

Podemos reescrever a teoria interpola de maneira mais clara como

$$\mathcal{L}(\delta) = \bar{\psi}_k [i\partial - \eta(1 - \delta)] \psi_k + \frac{\delta g}{N} (\bar{\psi}_k \psi_k)^2, \quad (33)$$

onde as novas regras de Feynman são dadas na tabela 1 sendo que o ponto cinza

Tabela 1 – Regras de Feynman para a teoria interpolada na OPT

Nome	Representação	Regra de Feynman
Propagador Fermiônico Vestido		$i \frac{p + \hat{\eta}}{p^2 - \hat{\eta}^2}$
Propagador Fermiônico		$i \frac{p + \eta}{p^2 - \eta^2}$
Vértice		$-i\delta \frac{g}{N}$
Inserção δ		$i\delta\eta$

caracteriza a inserção de δ , que aparecerá ao se expandir em δ , e neste caso sem massa temos

$$\hat{\eta} = \eta(1 - \delta). \quad (34)$$

É claro que a densidade Lagrangiana (31) levará a resultados divergentes, como discutido nas seções anteriores. Então, é preciso adicionar contratermos na densidade Lagrangiana, em outras palavras

$$\mathcal{L}_{ren}(\delta) = \mathcal{L}(\delta) + \mathcal{L}_{c.t.}(\delta). \quad (35)$$

A teoria interpolada dada pela Eq. (31) pode ser obtida substituindo

$$m \rightarrow \eta(1 - \delta) \quad \text{e} \quad g \rightarrow \delta g \quad (36)$$

na densidade Lagrangiana (1). Então, na prática, para aplicar a OPT no limite quiral, pode-se simplesmente fazer as substituições (36) na quantidade física relevante já calculada de forma perturbativa, expandir até a ordem desejada em δ fixando $\delta = 1$ no final, e finalmente aplicar a equação do PMS, Eq. (32) para obter o valor otimizado $\bar{\eta}$. Logo, para ser rigoroso, é preciso fazer isso também nos contratermos, então é fácil ver que não precisamos repetir o procedimento de renormalização, dado que exatamente a mesma substituição também é aplicada na densidade Lagrangiana do contratermo, e portanto, pode-se apenas aplicar o procedimento que acabamos de descrever na quantidade já renormalizada. Para ilustrar isso, vamos usar as regras de Feynman para a pressão obtida da densidade Lagrangiana (35) até 2L (ordem δ),

$$\begin{aligned} P^{\text{OPT}} &= \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + P_{c.t.}^{\text{OPT}} + \mathcal{O}(\delta^2), \\ &= -i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \ln(\not{p} - \hat{\eta}) - \frac{\delta g}{2N} \mathcal{G} \left\{ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \eta}{p^2 - \eta^2} \right] \right\}^2 \\ &\quad + P_{c.t.}^{\text{OPT}} + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned} \quad (37)$$

onde $P_{c.t.}^{\text{OPT}}$ é obtido aplicando-se a OPT ao contratermo (253) e à constante cosmológica (255). Os cálculos para o contratermo de massa até a ordem δ^2 foram feitos em (PINTO; RAMOS, 1999) para o modelo $\lambda\phi^4$, e em (CHIKU; HATSUDA, 1998) foi provado que a renormalização pode ser realizada em qualquer ordem δ^k , mostrando explicitamente nosso argumento dado acima. Note que, a expressão de 2L não tem propagadores vestidos, pois, o vértice já é de ordem δ .

Agora, o segundo passo é expandir até a ordem δ , então o diagrama de 1L é

$$\text{Diagrama 1} = \text{Diagrama 1a} + \text{Diagrama 1b} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (38)$$

e a pressão da OPT é então

$$\begin{aligned} P^{\text{OPT}} &= -i \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \ln(\not{p} - \eta) + i\delta\eta \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \eta}{p^2 - \eta^2} \right] \\ &\quad - \frac{\delta g}{2N} \pi\gamma_0 \left\{ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + \eta}{p^2 - \eta^2} \right] \right\}^2 + P_{c.t.}^{\text{OPT}} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \quad (39)$$

Usando os resultados das seções 2.1 e do Apêndice D, obtemos

$$\begin{aligned}
P^{\text{OPT}} = & \frac{N}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2Tl_1(\eta, T, \mu) \right\} - \frac{\delta N \eta^2}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - L_\eta - l_2(\eta, T, \mu) \right] \\
& + \frac{\delta g N}{2\pi} \gamma_0 \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} [L_\eta - l_2(\eta, T, \mu)] + \left[\frac{24L_\eta + \pi^2}{24} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)]^2 \right\} - T^2 \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\} + P_{\text{c.t.}}^{\text{OPT}} + \mathcal{O}(\delta^2).
\end{aligned} \tag{40}$$

A expressão explícita para $P_{\text{c.t.}}^{\text{OPT}}$ até ordem δ é:

$$P_{\text{c.t.}}^{\text{OPT}} = -\frac{\delta g N}{\pi} \gamma_0 \eta^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} [L_\eta - l_2(\eta, T, \mu)] + \left[\frac{24L_\eta + \pi^2}{24} \right] \right\} + X^{\text{OPT}}, \tag{41}$$

com

$$X^{\text{OPT}} = -\frac{N \eta^2}{2\pi \epsilon} (1 - 2\delta) + \frac{\delta g N}{2\pi} \gamma_0 \frac{\eta^2}{\epsilon^2}. \tag{42}$$

Vemos que todas as divergências são canceladas e finalmente conseguimos

$$\begin{aligned}
\frac{P^{\text{OPT}}}{N} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2Tl_1(\eta, T, \mu) \right\} + \frac{\delta N \eta^2}{\pi} [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)] \\
& + \frac{\delta g}{2\pi} \gamma_0 \left\{ \eta^2 [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)]^2 - T^2 \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\} + \mathcal{O}(\delta^2).
\end{aligned} \tag{43}$$

Este resultado mostra que podemos aplicar o procedimento da OPT diretamente no resultado perturbativo renormalizado como discutido anteriormente.

O último passo é fixar $\delta \rightarrow 1$ e encontrar $\bar{\eta}$ usando a equação do PMS, Eq. (32), para a pressão, onde encontramos depois de uma razoável manipulação algébrica

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} = & \Sigma_{\delta^1}^{\text{OPT}}(\bar{\eta}, T, \mu), \\
= & -\bar{\eta} g \gamma_0 [L_{\bar{\eta}} + l_2(\bar{\eta}, T, \mu)],
\end{aligned} \tag{44}$$

equação que é resolvida numericamente.

No caso do modelo GN, $\bar{\eta}$ é a massa efetiva da OPT, veremos que isso é uma característica deste tipo de modelos efetivos, na QCD $\bar{\eta}$ não tem uma interpretação física direta como neste caso do GN.

2.2.1.1 Resultados em $T = \mu = 0$

Primeiramente, notemos que na ordem δ^0 a OPT padrão não fornece resultados não perturbativos, portanto devemos considerar no mínimo até $2L$ ou ordem δ^1 .

Tomando a Eq. (44) em $T = \mu = 0$, obtém-se a solução

$$\bar{\eta}_{\delta^1} = m_{\text{eff}}^{\text{OPT}} = \Lambda \exp\left(-\frac{1}{g\gamma_0}\right). \tag{45}$$

Este resultado está de acordo com o já relatado em (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2006). Embora altamente não perturbativo, este resultado não é invariante do RG como esperado pela OPT padrão. Tomando o limite de LN, onde $\gamma_0 = b_0 = 1/\pi$ encontra-se

$$\bar{\eta}^{\text{LN}} = m_{\text{eff}}^{\text{LN}} = \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{g}\right) = \Lambda_{\text{GN}}(N \rightarrow \infty), \quad (46)$$

onde $\Lambda_{\text{GN}}(N \rightarrow \infty)$ é a escala do GN invariante frente ao RG na aproximação de LN. O resultado (46) concordando com os resultados relatados nas Refs. (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2006; KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010). Em contraste com o resultado da OPT, Eq. (45), o resultado de LN, Eq. (46), é invariante frente ao RG como ficara mais claro uma vez seja introduzido o grupo de renormalização.

Até agora, mostramos o poder da OPT padrão como uma abordagem não perturbativa. No entanto, a OPT padrão fornece resultados que não são invariantes frente ao RG e dependem altamente do valor de Λ . Assim, na seção 2.4, veremos como a OPT padrão modificada pelo RG, fornece resultados independentes da escala de regularização.

2.3 PRESSÃO PERTURBATIVA MODIFICADA PELO RG

Até agora nós calculamos a pressão perturbativa renormalizada até a ordem g no modelo GN em duas dimensões. No entanto, vamos examinar as propriedades do RG na pressão perturbativa (30), onde o operador do RG é dado por (detalhes sobre o RG e a liberdade assintótica no apêndice E)

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - m\gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m}. \quad (47)$$

Os valores explícitos das funções β e γ_m são dados nas Eqs. (274), (275) do apêndice E. Agora, aplicando o operador do RG (47) na pressão perturbativa de 1L, encontramos que

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] P_{0,ren} = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} P_{0,ren} = \frac{m^2}{2\pi}. \quad (48)$$

Como estamos na ordem g^0 as funções β e γ_m não contribuem. Claramente, temos um termo remanescente e, portanto, concluímos que a pressão como escrita na Eq (30) não é invariante frente ao RG. Tais termos remanescentes aparecem em qualquer modelo massivo e são o resultado da energia do vácuo não ter uma dimensão anômala trivial. Em outras palavras, quando a pressão do vácuo é redefinida para cancelar as divergências do vácuo puro (ver Apêndice D), a invariância RG é estragada (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2015). Portanto, a fim de restaurar a invariância frente ao RG, é necessário introduzir uma contribuição finita adicional (neste caso, na pressão), mas de tal forma que a invariância frente ao RG seja alcançada. Na temperatura zero,

considerações similares foram feitas, por exemplo em (KASTENING, 1992; BANDO *et al.*, 1993), e recentemente em temperaturas finitas (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2016, 2015).

Seguindo-se (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2016, 2015), o termo adicional X_0^{RG} deve ser adicionado na pressão perturbativa para cancelar o termo remanescente que aparece ao aplicar o operador RG. Assim, a pressão perturbativa modificada pelo RG é

$$P^{\text{RGI}} = P^{\text{PT}} + X_0^{\text{RG}}, \quad (49)$$

onde

$$\frac{X_0^{\text{RG}}}{N} = m^2 \sum_{k \geq 0} s_k g^{k-1}. \quad (50)$$

Os coeficientes s_k são encontrados aplicando o operador RG em P^{RGI} para que

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] P^{\text{RGI}} = 0. \quad (51)$$

Esta equação deve ser satisfeita ordem a ordem, e até a ordem g nós encontramos que

$$s_0 = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{b_0 - 2\gamma_0}, \quad (52)$$

e

$$s_1 = -\frac{1}{4\pi\gamma_0} \frac{b_1 - 2\gamma_1}{b_0 - 2\gamma_0}. \quad (53)$$

Finalmente a expressão para a pressão perturbativa modificada pelo RG e portanto invariante frente ao RG

$$\begin{aligned} \frac{P^{\text{RGI}}}{N} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - L_m \right] + 2T I_1(m, T, \mu) \right\} + \frac{g}{2\pi} \gamma_0 \left\{ m^2 [L_m + I_2(m, T, \mu)]^2 \right. \\ & \left. + T^2 \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\} + \frac{m^2 s_0}{g} + m^2 s_1 + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (54)$$

2.4 A OPT MODIFICADA PELO RG

Nesta seção, vamos estudar uma extensão da OPT padrão proposta há poucos anos por Kneur e Neveu (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010), chamada RGOPT, onde algumas mudanças importantes são feitas na OPT padrão. Primeiro, para implementar a RGOPT fazemos as substituições,

$$m \rightarrow \eta(1 - \delta)^a \quad \text{e} \quad g \rightarrow \delta g, \quad (55)$$

onde o parâmetro a foi introduzido pela primeira vez na OPT padrão em um artigo anterior de Kneur et al, (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2004), com o objetivo de diminuir o número de soluções para $\bar{\eta}$ e, para encontrar este novo parâmetro, o critério do PMS foi generalizado, de modo que a segunda derivada em relação a η também é definida como zero. Isto pode levar a várias soluções para o coeficiente a , não obstante, na abordagem da RGOPT a pode ser fixada inequivocamente pelos coeficientes do RG na primeira ordem, de modo que seja universal e satisfaça a equação RG em qualquer ordem δ (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013). Em segundo lugar, as substituições (55) são feitas na quantidade física modificada pelo RG, no nosso caso na P^{RG^1} , Eq. (54). Finalmente, a equação do RG e do PMS são resolvidas simultaneamente para encontrar $\bar{\eta}_{\delta^0}$ e a em ordem δ^0 , e $\bar{\eta}_{\delta^k}$ e \bar{g}_{δ^k} na ordem δ^k , para $k > 0$.

A equação do RG no caso sem massa toma então a forma reduzida

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} \right] P = 0. \quad (56)$$

Neste trabalho quando uma quantidade é escrita sem superíndice se entenderá como se tivesse o superíndice RGOPT. É importante observar que, como η é um parâmetro dinâmico, um termo do tipo $\eta \gamma_\eta \frac{\partial P}{\partial \eta}$ deveria aparecer na equação RG. No entanto, esse termo é a equação do PMS que é zero por definição.

2.4.1 RGOPT, ordem δ^0

Vamos aplicar as substituições (55) na pressão perturbativa de 1L (ordem g^0) modificada pelo RG¹ e expandir até ordem δ^0 , obtendo

$$\frac{P_{\delta^0}}{N} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2Tl_1(\eta, T, \mu) \right\} + \frac{\eta^2 s_0}{\delta g} (1 - 2a\delta). \quad (57)$$

Para encontrar a expressão para a , depois de definir $\delta = 1$, aplicamos a equação de RG reduzida (56) na Eq. (57), tomando cuidado que na ordem δ^0 , devemos apenas considerar o primeiro termo da função β , fazendo isto obtemos

$$f_{\text{RG}} = \frac{1}{2\pi} + b_0 s_0 (1 - 2a) = 0, \quad (58)$$

logo, usando o valor para s_0 dado na Eq. (52), a última expressão inequivocamente estabelece

$$a = \frac{\gamma_0}{b_0}, \quad (59)$$

em concordância com aplicações anteriores (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013; KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2015; KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015; KNEUR, Jean-Loc; PINTO,

¹ Isto é, a Eq. (54) sem o segundo e quarto termos, sendo que, quando aplicar a OPT até a ordem δ^0 , implica considerar termos da ordem g^0 , de modo que o segundo termo não contribui, e o quarto termo aparece na próxima ordem perturbativa g^1 .

2016; FERRARI *et al.*, 2017), de modo que a pressão pode ser escrita como

$$\frac{P_{\delta^0}}{N} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2T I_1(\eta, T, \mu) \right\} - \frac{\eta^2}{2\pi g b_0} \quad (60)$$

e usando a equação do PMS (32) obtemos

$$f_{\text{PMS}} = L_{\bar{\eta}} + I_2(\eta, T, \mu) + \frac{1}{g b_0} = 0. \quad (61)$$

Logo, a solução para $\bar{\eta}$ é

$$\bar{\eta}_{\delta^0} = m_{\text{eff}} = \Lambda \exp \left(-I_2(\bar{\eta}, T, \mu) - \frac{1}{g(\Lambda) b_0} \right). \quad (62)$$

Dado que nesta ordem usamos a equação RG para fixar a , deve-se usar o resultado de 1L para g , (ver apêndice E)

$$g_{1\text{L}} = \frac{1}{b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{GN}}} \right)}, \quad (63)$$

onde Λ_{GN} é a escala invariante de 1L no esquema $\overline{\text{MS}}$, dado por

$$\Lambda_{\text{GN}} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{b_0 g} \right). \quad (64)$$

O termo proporcional a $1/(g b_0)$, cancela automaticamente qualquer alteração causada por uma variação na escala Λ , de forma que as Eqs. (62) e (60) são completamente invariantes de escala. Esta é uma característica notável do RGOPT, uma vez que na ordem 1L a maioria das aproximações falham em fornecer um resultado não trivial.

2.4.1.1 Resultados da RGOPT na ordem δ^0 para $T = \mu = 0$

Em $T = \mu = 0$ obtemos a solução simples

$$\bar{\eta}_{\delta^0} = m_{\text{eff}} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{g(\Lambda) b_0} \right) = \Lambda_{\text{GN}}^{1\text{L}}. \quad (65)$$

que é um resultado não perturbativo e invariante frente ao RG como discutido anteriormente. Observe também que a diferença entre este resultado e o resultado da OPT na ordem δ , Eq. (45), é o termo γ_0 no exponencial em vez de b_0 que torna o resultado completamente invariante de escala. Para ver isto de uma maneira mais clara, basta fazer $\Lambda \rightarrow \alpha\Lambda$ na Eq. (65) usando $g_{1\text{L}}(\alpha\Lambda)$, Eq. (63), vemos que α é cancelado e obtemos sempre o resultado Λ_{GN} . Por outro lado, fazendo o mesmo procedimento na solução da OPT, Eq. (45) o termo γ_0 impede o cancelamento de b_0 e a solução

$$\bar{\eta}^{\text{OPT}}(\alpha\Lambda) = (\Lambda_{\text{GN}})^{b_0/\gamma_0} (\alpha\Lambda)^{1-b_0/\gamma_0}, \quad (66)$$

é claramente dependente de α a menos que, se tome o limite de LN onde $b_0 = \gamma_0$. Esse resultado simples mostra explicitamente as vantagens da RGOPT sobre a OPT padrão, já que a primeira fornece resultados não perturbativos em 1L e, é claro, recupera a solução de LN ($N \rightarrow \infty$), dado que $b_0 \rightarrow 1/\pi$, reproduzindo a Eq. (46). Nesta ordem de 1L, a pressão também assume um valor invariante de escala

$$P_{\delta_0}(T = \mu = 0) = \frac{(\Lambda_{\text{GN}})^2}{4\pi}. \quad (67)$$

2.4.2 RGOPT, ordem δ^1

Nesta ordem de 2L, o coeficiente a já foi fixado, portanto, com a equação do RG, Eq. (56) e o PMS, Eq. (32), é possível encontrar $\bar{\eta}_{\delta^1}$ e \bar{g}_{δ^1} . Seguindo o procedimento da RGOPT já discutido, obtém-se a pressão da RGOPT na ordem δ^1 sendo

$$\begin{aligned} \frac{P_{\delta^1}}{N} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2Tl_1(\eta, T, \mu) \right\} + \frac{\delta a \eta^2}{\pi} [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)] \\ & + \frac{\delta g}{2\pi} \gamma_0 \left\{ \eta^2 [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)]^2 + T^2 \mathcal{J}_2^2(\eta, T, \mu) \right\} \\ & + \frac{\eta^2 s_0}{\delta g} \left[1 - 2a\delta + (2a^2 - a) \delta^2 \right] + \eta^2 s_1 (1 - 2a\delta). \end{aligned}$$

Definindo $\delta = 1$ e substituindo as expressões para a , s_0 e s_1 , temos

$$\begin{aligned} \frac{P_{\delta^1}}{N} = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2Tl_1(\eta, T, \mu) \right\} + \frac{\gamma_0 \eta^2}{\pi b_0} [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)] \\ & + \frac{g}{2\pi} \gamma_0 \left\{ \eta^2 [L_\eta + l_2(\eta, T, \mu)]^2 + T^2 \mathcal{J}_2^2(\eta, T, \mu) \right\} \\ & - \frac{\eta^2}{2\pi b_0} \left[\frac{1}{g} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) + \frac{1}{2\gamma_0} (b_1 - 2\gamma_1) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Agora, usando a equação de RG reduzida e o PMS em ordem arbitrária δ^k se obtém várias soluções, então, para discriminar qual solução é correta, escolhe-se a solução que é compatível com a liberdade assintótica para $g \rightarrow 0$, em outras palavras $\bar{g}(\Lambda \gg \bar{\eta}) \sim -[b_0 L_{\bar{\eta}}]^{-1}$ (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013).

2.4.2.1 Resultados da RGOPT na ordem δ^1 para $T = \mu = 0$

Nessa ordem de 2L, o PMS e a equação do RG reduzida aplicada na Eq. (68) fornecem no caso $T = \mu = 0$

$$\begin{aligned} f_{\text{PMS}} = & g\gamma_0 L_{\bar{\eta}}^2 + \left[g\gamma_0 + 2\frac{\gamma_0}{b_0} - 1 \right] L_{\bar{\eta}} \\ & + \frac{1}{b_0} \left[\gamma_0 - \frac{1}{g} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) - \frac{1}{2\gamma_0} (b_1 - 2\gamma_1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (69a)$$

e

$$f_{\text{RG}} = 1 - 2\frac{\gamma_0}{b_0} - 2g\gamma_0 L_{\bar{\eta}} + (-b_0 g^2 - b_1 g^3) \left[\gamma_0 L_{\bar{\eta}}^2 + \frac{1}{g^2 b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) \right] = 0. \quad (69b)$$

Vamos primeiro abordar o limite do LN, onde temos que $b_1 = \gamma_1 = (1 - \gamma_0/b_0) = 0$, $a = 1$, $b_0 = \gamma_0 = 1/\pi$ e $\beta = -g^2/\pi$ e Eqs. (69) toma a forma simples,

$$f_{\text{PMS}}^{\text{LN}} = g\gamma_0 L_{\bar{\eta}}^2 + [g\gamma_0 + 1] L_{\bar{\eta}} + 1 = 0 \quad (70a)$$

e

$$f_{\text{RG}}^{\text{LN}} = \frac{g^2}{\pi^2} L_{\bar{\eta}}^2 + 2g\gamma_0 L_{\bar{\eta}} + 1 = 0, \quad (70b)$$

que dá as soluções

$$\ln(\bar{\eta}^{\text{LN}}/\Lambda) = -1 \quad \text{e} \quad \bar{g}^{\text{LN}} = \pi. \quad (71)$$

Por outro lado, resolvendo as Eqs. (69) para N arbitrários, encontramos três soluções. Conforme explicado em (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010, 2012, 2013), é preciso escolher as soluções compatíveis com a liberdade assintótica (AF), $L_{\bar{\eta}} \sim -[b_0 g]^{-1}$, para $g \rightarrow 0$. Agora, para fazer isso, é possível resolver as Eqs. (69) para $L_{\bar{\eta}}$. Depois, identifica-se a solução que reproduz o comportamento assintótico do RG sendo

$$L_{\bar{\eta}}^{\text{PMS}}(g) = -\frac{1}{b_0 g} + \frac{1}{2\gamma_0 g} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{b_0(\gamma_0 g - 1)^2 + 2g(b_1 - 2\gamma_1)}{b_0}}}{2b_0 \gamma_0 g}, \quad (72)$$

enquanto que, para f_{RG} , ambas as soluções reproduzem o comportamento assintótico do RG. No entanto, apenas uma das soluções fornece soluções quando resolve-se simultaneamente com a Eq. (72), que é

$$L_{\bar{\eta}}^{\text{RG}}(g) = -\frac{\gamma_0 g + \sqrt{\frac{b_1 \gamma_0 g^3 (b_1 \gamma_0 g - b_0^2 - b_0 b_1 g)}{b_0^2}}}{b_0 \gamma_0 g^2 + b_1 \gamma_0 g^3} \quad (73)$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (72) e (73), obtém-se duas soluções. Em seguida, escolhe-se aquele que reproduz o limite do LN. Na tabela 2, mostramos os valores da solução das Eqs (69) que reproduz o comportamento assintótico do RG e também o limite de LN para diferentes valores de N e o respectivo valor da pressão. Esta solução fornece valores reais para $N \geq 5$. Notemos também como os valores convergem para o limite do LN. Pode-se mostrar que a RGOPT recupera o limite de LN em qualquer ordem em δ (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010).

Até esse ponto, mostramos como a RGOPT fornece soluções reais que reproduzem o resultado de LN quando se toma o limite $N \rightarrow \infty$. Esta aplicação fácil é uma introdução muito boa para o complexo caso da QCD, onde, como veremos no capítulo 3, a RGOPT produz apenas soluções imaginárias e seremos forçados a fazer algumas modificações no esquema apresentado aqui no modelo GN.

Tabela 2 – Soluções da RGOPT na ordem δ para diferentes valores N em $T = \mu = 0$

N	$L_{\bar{\eta}}$	\bar{g}	$\frac{4\pi}{N\Lambda^2} P_{\delta^1}$
3	$-1.0732 - 0.0778i$	$7.0486 - 6.9453i$	$0.2569 - 0.4738i$
4	$-1.0582 - 0.0159i$	$10.5824 - 2.7606i$	$0.5876 - 0.2035i$
5	-1.0724	6.71395	0.3367
10	-1.0442	4.5496	0.2183
100	-1.0049	3.4086	0.1554
1000	-1.0005	3.2159	0.1415
$N \rightarrow \infty$	-1	$\pi = 3.1416$	0.1353

2.5 POSSÍVEIS PROBLEMAS E OUTRAS PRESCRIÇÕES DA RGOPT

Nesse ponto, a RGOPT funciona muito bem para o modelo GN em 2D em $T = \mu = 0$ e fornece soluções reais para $N \geq 5$ ao resolver a equação do PMS (32) e a equação do RG (56), como também relatado em Ref (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010) e em Refs. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010; KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2016) para a teoria térmica de campos $\lambda\phi^4$. No entanto, esse nem sempre é o caso. Por exemplo, na Ref.(KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2012) apenas soluções imaginárias foram encontradas quando aplicadas à constante de decaimento pión na QCD. Isso geralmente acontece na QCD, exceto quando se aplica as Eqs (32) e (56) na função espectral (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015). Quando isso acontece, somos forçados a fazer uma alteração na prescrição, mas tentando manter as informações relevantes de RG e o comportamento de liberdade assintótica das soluções.

Na Ref. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013), uma mudança de esquema de renormalização perturbativa (RSC) foi proposta para recuperar soluções reais. A ideia básica é alterar os coeficientes da série perturbativa para obter soluções reais o mais próximo possível do esquema original $\overline{\text{MS}}$. No próximo capítulo, usaremos essa alteração de esquema na QCD e forneceremos os detalhes lá.

No nosso caso do modelo GN em temperatura finita, ao resolver o PMS e a equação do RG reduzida para encontrar $\bar{\eta}$ e \bar{g} , encontramos um comportamento muito ruim de soluções à medida que T aumenta e não encontramos soluções para todos os valores relevantes de T . Nesse caso, é melhor usar uma prescrição mais simples, como feito em (FERRARI *et al.*, 2017), que consiste em resolver a equação do RG completa,

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{\eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] P = 0, \quad (74)$$

para encontrar $\bar{\eta}(g)$, e a constante de acoplamento, g , é dada pela equação perturba-

tiva de 2L,

$$g_{2L}(\Lambda) = -\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{1 + W_0(z)}, \quad (75)$$

onde

$$z = -\frac{b_0^2}{b_1} \frac{1}{e} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{GN}^{2L}} \right)^{-\frac{b_0^2}{b_1}}, \quad (76)$$

$$\Lambda_{GN}^{2L} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{b_0 g(\Lambda)} \right) \left(\frac{b_0 g(\Lambda)}{1 + \frac{b_1}{b_0} g(\Lambda)} \right)^{-\frac{b_1}{b_0^2}}, \quad (77)$$

e $W(z)$ é a função W de Lambert (veja o apêndice E para detalhes). Essa prescrição simples é recomendada como primeira alternativa, pois você evita a introdução de novos parâmetros, como no caso do RSC e, no caso do modelo 2D GN, existem soluções reais para $T = 0$ e $T \neq 0$.

2.6 RESULTADOS EM $T \neq 0$, $\mu = 0$ E COMPARAÇÃO ENTRE A OPT PADRÃO E A RGOPT

Nesta seção, comparamos os resultados obtidos com a RGOPT, a OPT padrão e a aproximação de LN para mostrar explicitamente como a RGOPT melhora a dependência da escala no caso $T \neq 0$ e $\mu = 0$. Para ver a dependência da escala das diferentes quantidades, consideramos $\Lambda = \alpha \Lambda_0$, onde Λ_0 é arbitrário e usamos $g(\Lambda_0) = \pi$. Para os resultados RGOPT na ordem de 2L, resolvemos a equação do RG completa (74) para obter $\bar{\eta}$. Para ambos os casos da RGOPT e a OPT padrão, usamos a expressão perturbativa de 2L da constante de acoplamento, Eq (75), e a de 1L, Eq (63), para a RGOPT na ordem de 1L.

Na Fig. 5, a massa variacional $\bar{\eta}$ normalizada é plotada em função de T/Λ_0 para $N = 3$. É interessante notar que conforme esperado em 1L, a RGOPT fornece um resultado completamente invariante frente a mudanças na escala de regularização. Mesmo que, em ordem de 2L, apareça uma dependência na escala remanescente, ela é bastante pequena quando comparada com os resultados da OPT padrão na ordem de 2L que são altamente dependentes. Vemos que no modelo GN em $1 + 1$ dimensões, uma transição de fase em valores finitos da temperatura viola o teorema de Landau (LANDAU, 1980), que afirma que qualquer sistema em uma dimensão no espaço não apresenta transição de fase. Espera-se, então, que uma aproximação mais precisa dê uma temperatura crítica, T_c , mais próxima de zero. Como podemos ver aqui o resultado RGOPT dá uma redução evidente de T_c quando comparado com OPT e o limite LN. O resultado de LN invariante frente ao RG fornece uma temperatura crítica de $T_c \approx 0.21 \Lambda_0$, enquanto no caso do resultado da OPT padrão em 2L, a temperatura

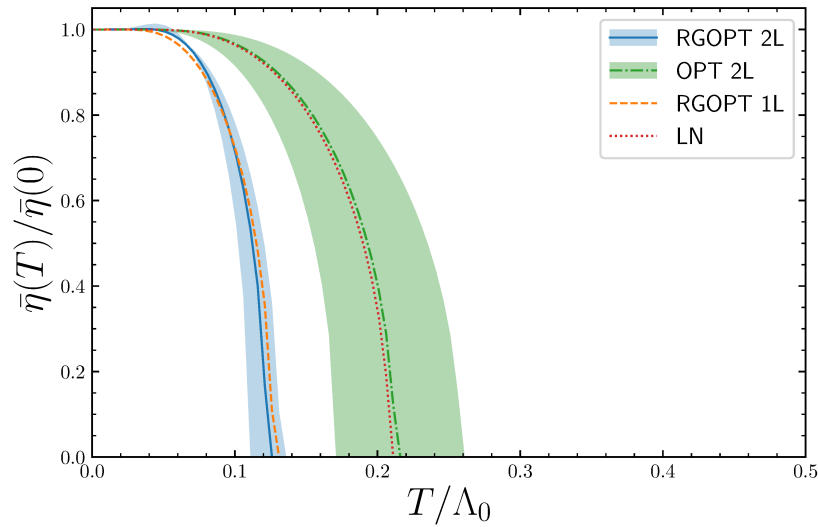


Figura 5 – O parâmetro de massa $\bar{\eta}$ normalizada, em $\mu = 0$, como uma função de T/Λ_0 , obtido com a RGOPT, a OPT padrão e a aproximação de LN para variações de escala $1 < \alpha < 4$, $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = \pi = g^{\text{LN}} = \pi$. Dentro da RGOPT e a OPT padrão na ordem de 2L, as faixas sombreadas têm a borda inferior para $\alpha = 1$ e a borda superior para $\alpha = 4$. A linha central dentro das faixas sombreadas corresponde a $\alpha = 2$.

crítica, T_c , depende do valor de Λ e $T_c(\Lambda = 4\Lambda_0) - T_c(\Lambda = \Lambda_0) \approx 0.095\Lambda_0$, enquanto a RGOPT fornece, $T_c(\Lambda = 4\Lambda_0) - T_c(\Lambda = \Lambda_0) \approx 0.025\Lambda_0$. Por outro lado, a RGOPT em ordem de 1L fornece o resultado invariante, $T_c \approx 0.13\Lambda_0$, muito próximo ao resultado da RGOPT no caso $\alpha = 2$.

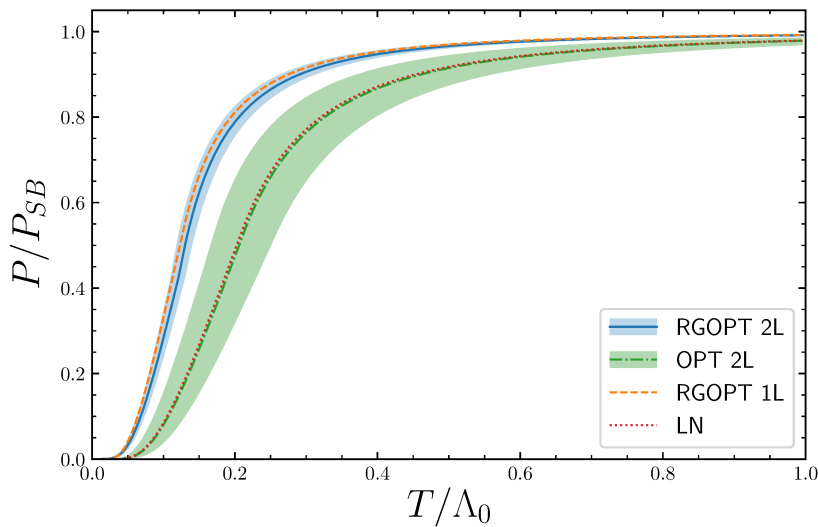


Figura 6 – A pressão normalizada, P/P_{SB} , em $\mu = 0$ em função de T/Λ_0 , obtida com a RGOPT, a OPT padrão e a aproximação do LN para $1 < \alpha < 4$, $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = \pi = g^{\text{LN}}$. Dentro da RGOPT e a OPT padrão na orden de 2L, as faixas sombreadas têm a borda superior para $\alpha = 1$ e a borda inferior para $\alpha = 4$. A linha central dentro das faixas sombreadas corresponde a $\alpha = 2$.

A figura 6 mostra a pressão normalizada P/P_{SB} , onde P_{SB} é a pressão no limite de Stefan-Boltzmann, que é fornecida por

$$\frac{P_{SB}}{N} = \frac{\pi T^2}{6}. \quad (78)$$

Por conveniência a pressão P também foi previamente normalizada por $P = P(\bar{\eta}(T), T, \mu)$ –

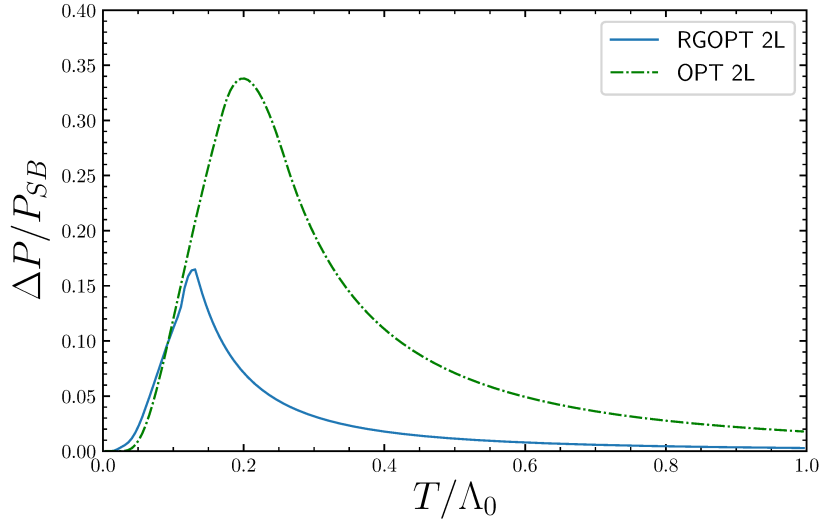


Figura 7 – A dependência da escala remanescente definida pela quantidade $\Delta P/P_{SB} \equiv (P(\Lambda = \Lambda_0) - P(\Lambda = 4\Lambda_0))/P_{SB}$ da pressão (normalizada), em $\mu = 0$ como uma função de T/Λ_0 . Os resultados de 2L da OPT e da RGOPT são comparados.

$P(\bar{\eta}(0), 0, 0)$. Como esperado pelo comportamento da massa efetiva, a pressão da RGOPT tem um formato mais duro, indo mais rápido para o limite de Stefan-Boltzmann conforme a temperatura aumenta. Interessante que para este modelo o resultado de 1L é bastante próximo ao de 2L, sendo que ambos concordam muito bem em altas temperaturas. Em geral, não observamos que o resultado 1L dá bons resultados qualitativos, pois, excetuando o termo $\eta^4/(gb_0)$, a estrutura matemática é a mesma que o gás de férmions livres. Por exemplo, em Ref (FERRARI *et al.*, 2017), a pressão 1L do modelo sigma não linear mostrou uma convergência lenta para o limite de Stefan-Boltzmann. A respeito de a dependência de escala de regularização, a OPT padrão mostra novamente uma alta dependência, enquanto a RGOPT fornece resultados independentes de escala na ordem de 1L além de apresentar uma leve dependência de escala na ordem de 2L.

Para comparar facilmente a dependência da escala, mostramos a figura 7, na qual podemos ver que a OPT e a RGOPT mostram seu valor máximo de dependência em torno do valor de T_c da escala central, $\alpha = 2$. Esse valor máximo da RGOPT é aproximadamente 1/2 do valor fornecido pela OPT. Além disso, em $T \gtrsim 0.8\Lambda_0$, a RGOPT na ordem de 2L é quase independente da escala de regularização, Λ , enquanto a OPT mostra uma dependência mais acentuada.

Todos esses resultados deixam claro como a adição de propriedades do RG em aproximações não perturbativas, não apenas melhora a dependência de escala, mas também inclui termos de ordem superior a partir do RG.

3 RGOPT APLICADA NA PRESSÃO DA QCD

Neste capítulo, aplicaremos a RGOPT na pressão da QCD em NLO ou ordem de 2L. Investigaremos primeiramente os resultados da RGOPT no vácuo ($T = \mu = 0$), no caso da matéria de quarks fria e densa ($T = 0, \mu \neq 0$) e no caso da matéria de quarks quente e densa ($T \neq 0, \mu \neq 0$). Notemos que a RGOPT sera aplicada apenas ao setor de quarks pois conforme explicado na introdução, a aplicação do método ao setor gluônico é bastante complicada do ponto de vista técnico. Então, nossa estratégia é adicionar a contribuição puramente perturbativa de glúons sem massa na pressão de quarks da RGOPT, de modo que nossa pressão da QCD é,

$$P(T, \mu) = P_{q,\delta} + P_g^{\text{PT}}, \quad (79)$$

onde $P_g^{\text{PT}} \sim T^4$. Em seguida, confrontaremos nosso resultado com o estado da arte da pQCD e da HTLpt.

3.1 ASPECTOS GERAIS DA QCD

A QCD é a teoria de calibre de quarks e glúons com carga de cor (FRITZSCH *et al.*, 1973; GROSS; WILCZEK, 1973a; WEINBERG, 1973b), a qual é descrita pela densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m_c) \psi - \frac{1}{4} \text{Tr} [G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}], \quad (80)$$

onde a derivada covariante, D^μ e o tensor de força de campo, $G^{\mu\nu}$ são dados por (DISSERTORI *et al.*, 2003)

$$D^\mu = \partial^\mu + iA^\mu \quad (81)$$

e

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g_s f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad (82)$$

com a constante de acoplamento de calibre $SU(N)$, g_s , absorvida em $A^\mu(x) = g_s \mathcal{A}_a^\mu(x) T_a$. Onde $\mathcal{A}_a^\mu(x)$ é o campo de calibre $SU(3)$, $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ são os geradores do grupo de Lie o qual define a simetria de calibre e λ_a representa as matrizes de Gell-Mann (GELL-MANN, Murray, 1962). Os termos $f_{abc} = f^{abc}$ são a estrutura definida pela relação de comutação

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (83)$$

O terceiro termo da Eq. (82) faz da QCD uma teoria não abeliana onde os bósons de calibre (glúons) carregam a carga da interação (cor), acoplando-se diretamente com eles mesmos em acoplamento de três glúons que é proporcional a g_s e em acoplamento de

quatro glúons que é proporcional a g_s^2 . Outra implicação é o confinamento de quarks e glúons e a liberdade assintótica. Essas características da QCD tornam a teoria impossível de ser resolvida completamente com métodos convencionais como a teoria de perturbação. Atualmente, a abordagem teórica mais promissória é LQCD, onde os cálculos são feitos usando a densidade Lagrangiana (80) em um espaço-tempo discretizado.

3.2 PRESSÃO PERTURBATIVA DE QUARKS DA QCD

Antes de aplicarmos a RGOPT, devemos conhecer a expressão da pressão perturbativa massiva. Os cálculos são realizados no calibre (*gauge*) de Feynman.

A pressão perturbativa de quarks até a ordem de 2L é dada por

$$P_q^{\text{PT}} = \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2} + P_{q,c.,t.} + \mathcal{O}(g_s^3) \quad (84)$$

O primeiro diagrama é a conhecida pressão de quarks livres, que é dada por

$$\begin{aligned} P_{q,0} &= \text{Diagrama 1} = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln(\not{p} - m), \\ &= -i N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(-p^2 + m^2). \end{aligned} \quad (85)$$

Agora usamos o formalismo de Matsubara da mesma maneira que no capítulo 2 para obter

$$\frac{P_{q,0}}{N_f N_c} = 2 \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} E_p + 2T^4 J_1(\hat{m}, \hat{\mu}) \quad (86)$$

onde E_p é o mesmo que na Eq. (12), $\hat{m} = m/T$ and $\hat{\mu} = \mu/T$. Os efeitos do meio e do banho térmico estão incluídos na integral adimensional,

$$J_1(\hat{m}, \hat{\mu}) = \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}^3}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[1 + e^{-(\hat{E}_p + \hat{\mu})} \right] + \ln \left[1 + e^{-(\hat{E}_p - \hat{\mu})} \right] \right\}, \quad (87)$$

sendo $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/T$ e $\hat{E}_p = \sqrt{\hat{p}^2 + \hat{m}^2}$. A primeira integral da Eq. (86) é divergente e a sua versão regularizada é dada na Eq. (239),

$$\frac{P_{q,0}}{N_f N_c} = -\frac{2m^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{4} - L_m \right] + 2T^4 J_1(\hat{m}, \hat{\mu}). \quad (88)$$

A divergência que aparece na pressão de 1L é cancelada completamente pela constante cosmológica,

$$\frac{X_0}{N_f N_c} = \frac{2m^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad (89)$$

já que como discutido no Apêndice D, esta divergência é do ponto zero. Finalmente a pressão de 1L fica,

$$\frac{P_{q,0}}{N_f N_c} = -\frac{2m^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_m \right] + 2T^4 J_1(\hat{m}, \hat{\mu}). \quad (90)$$

Vamos agora calcular e gráfico de 2L da pressão (segundo gráfico da Eq. (84)) usando a regras de Feynman, para obter (KAPUSTA, Joseph I., 1979; KAPUSTA, J. I.; GALE, 2011; LAINE; SCHRÖDER, 2006; PALHARES; FRAGA, 2008; PALHARES, 2008, 2012; GRAF *et al.*, 2016),

$$P_{q,1} = \text{Diagrama} = -\frac{1}{2} g (4\pi)^2 N_c C_F \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{dk^4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k-p+q) \times \text{tr} \left[\frac{\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma_\mu (\not{q} + m)}{k^2 (p^2 - m^2) (q^2 - m^2)} \right] \quad (91)$$

onde $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ e usaremos a notação $g = g_s^2/(4\pi)^2 = \alpha_s/(4\pi)$. Isso significa que, em nossa convenção, todo vértice é proporcional a \sqrt{g} .

Tomando o traço e usando o formalismo do tempo imaginário de Matsubara temos

$$P_{q,1} = -\frac{1}{2} g (4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} + \mathbf{q}) \times 8T^3 \sum_{n_p, n_q, n_k} \frac{\delta_{n_p, n_q + n_k}}{T} \left[\frac{2m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{k^2 (p^2 - m^2) (q^2 - m^2)} \right]. \quad (92)$$

Para obter a expressão final é necessário um cálculo de regularização muito longo e fastidioso. Detalhes dos cálculos da parte térmica podem ser encontrados nas Refs. (KAPUSTA, Joseph I., 1979; TOIMELA, 1985; KAPUSTA, J. I.; GALE, 2011; LAINE; SCHRÖDER, 2006; PALHARES; FRAGA, 2008; PALHARES, 2008, 2012; GRAF *et al.*, 2016) e no apêndice F nós resumimos os principais passos. A parte do vácuo ($T = \mu = 0$) deste diagrama pode ser calculada a partir dos resultados do condensado de quarks em 2L que podem ser encontrados nas Refs. (KNEUR, Jean-Loc, 1998; KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015; CHETYRKIN, K.; KÜHN, 1994; CHETYRKIN, K. G.; MAIER, 2010). Também nas Refs. (PALHARES, 2008, 2012), a expressão de vácuo é calculada no contexto do modelo de Yukawa que compartilha a mesma estrutura de vácuo.

Em seguida, colocando tudo junto encontramos,

$$\begin{aligned} \frac{P_{q,1}}{N_f N_c} = & -3g \frac{m^4}{2\pi^2} C_F \left[L_m^2 - \frac{4}{3} L_m + \frac{3}{4} \right] \\ & - g (4\pi)^2 C_F \left\{ \left[\frac{m^2}{4\pi^2} (2 - 3L_m) + \frac{T^2}{6} \right] T^2 J_2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{T^4}{2} J_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) + m^2 T^2 J_3(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\}, \end{aligned} \quad (93)$$

onde

$$J_2(\hat{m}, \hat{\mu}) = \int \frac{d^3\hat{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\hat{E}_p} [f^+(E_p) + f^-(E_p)], \quad (94)$$

$$J_3(\hat{m}, \hat{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\hat{p} \hat{p} d\hat{q} \hat{q}}{\hat{E}_p \hat{E}_q} \left\{ \Sigma_+ \ln \left[\frac{\hat{E}_p \hat{E}_q - \hat{m}^2 - \hat{p}\hat{q}}{\hat{E}_p \hat{E}_q - \hat{m}^2 + \hat{p}\hat{q}} \right] \right. \\ \left. + \Sigma_- \ln \left[\frac{\hat{E}_p \hat{E}_q + \hat{m}^2 + \hat{p}\hat{q}}{\hat{E}_p \hat{E}_q + \hat{m}^2 - \hat{p}\hat{q}} \right] \right\}, \quad (95)$$

e

$$\Sigma_\pm = f^+(E_p) f^\pm(E_q) + f^-(E_p) f^\mp(E_q), \quad (96)$$

Então a pressão perturbativa completa de 2L é¹

$$\frac{P_q^{\text{PT}}}{N_f N_c} = -\frac{m^4}{8\pi^2} \left(\frac{3}{4} - L_m \right) + 2T^4 J_1(\hat{m}, \hat{\mu}) - 3g \frac{m^4}{2\pi^2} C_F \left(L_m^2 - \frac{4}{3} L_m + \frac{3}{4} \right) \\ - g (4\pi)^2 C_F \left\{ \left[\frac{m^2}{4\pi^2} (2 - 3L_m) + \frac{T^2}{6} \right] T^2 J_2(\hat{m}, \hat{\mu}) \right. \\ \left. + \frac{T^4}{2} J_2^2(\hat{m}, \hat{\mu}) + m^2 T^2 J_3(\hat{m}, \hat{\mu}) \right\} \quad (97)$$

3.3 APLICANDO A RGOPT

Igual que no modelo de GN, a pressão perturbativa da QCD, Eq (97), não é invariante frente ao RG, por tanto, precisamos adicionar na pressão os termos

$$\frac{\chi^{\text{RG}}}{N_f N_c} = m^4 (s_0/g + s_1). \quad (98)$$

A pressão perturbativa modificada pelo RG é então

$$\frac{P^{\text{RGI}}}{N_f N_c} = \frac{P_q^{\text{PT}}}{N_f N_c} + m^4 \left(\frac{s_0}{g} + s_1 \right). \quad (99)$$

Antes de encontrar as expressões para s_0 e s_1 , listamos as funções β e γ_m da QCD até a ordem de 2L, que foram calculadas até quatro loops nas Refs. (VERMASEREN *et al.*, 1997; CHETYRKIN, K., 2005; CZAKON, 2005) e em nossa notação ficam

$$\beta(g) = -2b_0 g^2 - 2b_1 g^3 + \mathcal{O}(g^4) \quad (100)$$

e

$$\gamma_m(g) = \gamma_0 g + \gamma_1 g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (101)$$

¹ Os termos térmicos concordam com o relatado na Ref. (BLAIZOT *et al.*, 2013) exceto por um termo global N_c , provavelmente devido a um erro de digitação em seu manuscrito.

onde

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f, \quad (102)$$

$$b_1 = 102 - \frac{38}{3} N_f, \quad (103)$$

$$\gamma_0 = 8, \quad (104)$$

e

$$\gamma_1 = 2 \left[\frac{202}{3} - \frac{20}{9} N_f \right]. \quad (105)$$

Aplicando o operador do RG, Eq. (47) em P^{RGI} , Eq. (99), encontramos s_0 e s_1

$$s_0 = \frac{(b_0 - 2\gamma_0)^{-1}}{(4\pi)^2} \quad (106)$$

e

$$s_1 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{16} \frac{b_1 - 2\gamma_1}{b_0 - 2\gamma_0} \right). \quad (107)$$

Agora, para aplicar a RGOPT, apenas fazemos as substituições $m \rightarrow \eta(1 - \delta)^a$ e $g \rightarrow \delta g$ na Eq. (99). Então expandindo até ordem δ , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{P_{q,\delta}}{N_f N_c} = & -\frac{2\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_\eta \right] + 2T^4 J_1(\hat{\eta}, \hat{\mu}) + \frac{8a\delta\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + 2a\delta\eta^2 T^2 J_2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \\ & - 3\delta g \frac{\eta^4}{2\pi^2} C_F \left[L_\eta^2 - \frac{4}{3} L_\eta + \frac{3}{4} \right] - \delta g (4\pi)^2 C_F \left\{ \left[\frac{\eta^2}{4\pi^2} (2 - 3L_\eta) + \frac{T^2}{6} \right] T^2 J_2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{T^4}{2} J_2^2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) + \eta^2 T^2 J_3(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \right\} \\ & + \eta^4 \left(\frac{s_0}{\delta g} \left[1 - 4a\delta + (-2a + 8a^2) \delta \right] + s_1 [1 - 4a\delta] \right). \end{aligned} \quad (108)$$

3.3.1 Ordem δ^0

Em LO, a pressão é dada pela expressão simples

$$\frac{P_{q,\delta^0}}{N_f N_c} = -\frac{2\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_\eta \right] + 2T^4 J_1(\hat{\eta}, \hat{\mu}) + \eta^4 \frac{s_0}{g} (1 - 4a). \quad (109)$$

Se aplicarmos a equação do RG reduzida, Eq. (56), encontraremos novamente, $a = \frac{\gamma_0}{2b_0}$, como em todas as outras aplicações da RGOPT² (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2010, 2012, 2013; KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2015, 2016; FERRARI *et al.*, 2017). Portanto,

² Lembre-se que no caso do modelo do GN $\beta = -b_0 g^2 - b_1 g^3 + \dots$ e por isto a diferença de 1/2.

a sempre tem mesma expressão, pois depende apenas das propriedades do RG em 1L, mas é claro que seu valor depende do modelo via b_0 e γ_0 .

Substituindo a e s_0 na Eq.(109) obtém-se

$$\frac{P_{q,\delta^0}}{N_f N_c} = -\frac{2\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_\eta \right] + 2T^4 J_1(\hat{\eta}, \hat{\mu}) + \frac{\eta^4}{(4\pi)^2 g b_0}. \quad (110)$$

Nesta ordem, usa-se a expressão de 1L para a constante de acoplamento, que, na nossa notação é

$$g_{1L}(\Lambda) = \frac{1}{2b_0 \ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}}\right)}, \quad (111)$$

onde a escala da QCD na ordem de 1L no esquema $\overline{\text{MS}}$ é dada por

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = \Lambda \exp\left(-\frac{1}{2b_0 g}\right). \quad (112)$$

Finalmente, aplicando a equação do PMS, obtém-se

$$\frac{1}{2} - L_\eta - \frac{1}{2gb_0} + 4\pi^2 \frac{T^2}{\eta^2} J_2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) = 0. \quad (113)$$

que deve ser resolvido numericamente para η .

3.3.1.1 Resultados da RGOPT na ordem δ^0 em $T = \mu = 0$

Em $T = \mu = 0$, Eq. (113) dá a solução simples,

$$\bar{\eta}_{\delta^0} = \Lambda e^{-\frac{1}{2gb_0}} \sqrt{e} = \Lambda_{\overline{\text{MS}}} \sqrt{e}, \quad (114)$$

onde $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ é a escala invariante no esquema $\overline{\text{MS}}$ na ordem de 1L. Substituindo na pressão de quarks na ordem δ^0 , Eq.(110) em $T = \mu = 0$, obtém-se o resultado simples, independente da escala.

$$P_{q,\delta^0}(T = \mu = 0) = -\frac{3 \left(\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \sqrt{e} \right)^4}{32\pi^2}. \quad (115)$$

3.3.2 Resultados da RGOPT na ordem δ em $T = \mu = 0$

A pressão em NLO, Eq.(108) em $T = \mu = 0$ após definir $\delta = 1$, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{P_{q,\delta}}{N_f N_c} = & -\frac{2\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_\eta \right] + \frac{4\eta^4 \gamma_0}{(4\pi)^2 b_0} \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] - 3g \frac{\eta^4}{2\pi^2} C_F \left[L_\eta^2 - \frac{4}{3} L_\eta + \frac{3}{4} \right] \\ & + \frac{\eta^4}{(4\pi)^2 g b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} + \frac{s_1}{s_0} g \right) \end{aligned} \quad (116)$$

A equação do PMS e o operador do RG reduzido aplicados na pressão (116) adquirem a forma

$$f_{\text{PMS}}(L_{\eta}, g) = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma_0}{2b_0} + \left[1 - 2\frac{\gamma_0}{b_0}\right] L_{\eta} - 12gC_F \left[L_{\eta}^2 - \frac{5}{6}L_{\eta} + \frac{5}{12}\right] + \frac{1}{2gb_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} + \frac{s_1}{s_0}g\right) = 0 \quad (117a)$$

e

$$f_{\text{RG}}(L_{\eta}, g) = -1 + 2\frac{\gamma_0}{b_0} + 24gC_F \left[L_{\eta} - \frac{2}{3}\right] - \beta \left\{ 12C_F \left[L_{\eta}^2 - \frac{4}{3}L_{\eta} + \frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2g^2b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0}\right) \right\} = 0, \quad (117b)$$

onde deve ser usada a função de 2L completa da função β . Como feito no modelo GN no capítulo anterior, podemos resolver as Eqs. (117) para L_{η} . As duas equações acima, Eqs. (117), são quadráticas em L_{η} , e portanto temos duas soluções para cada uma delas. As duas soluções de $f_{\text{PMS}} = 0$ para os valores $N_f = N_c = 3$ são,

$$L_{\eta}^{\text{PMS}}(g, \pm) = -\frac{7}{288g} + \frac{5}{12} \pm \frac{1}{6g} \sqrt{\frac{9}{256} - \frac{47}{24}g - \frac{35}{4}g^2}. \quad (118)$$

Para identificar a solução compatível com a liberdade assintótica, expande-se perturbativamente esta última equação para $g \rightarrow 0$, obtendo-se

$$L_{\eta}^{\text{PMS}}(-) \simeq -\frac{1}{18g} + \frac{139}{108} + O(g) \quad (119a)$$

$$L_{\eta}^{\text{PMS}}(+) \simeq \frac{1}{144g} - \frac{49}{108} + O(g) \quad (119b)$$

onde (\pm) representa o sinal da raiz quadrada na Eq (118). Pode-se reconhecer imediatamente que o termo principal para $g \rightarrow 0$ em $L_{\eta}^{\text{PMS}}(-)$ tem o comportamento esperado pela liberdade assintótica $L_{\eta} \sim [-2b_0g]^{-1}$, observando que $b_0 = 9$ (para $N_f = 3$), enquanto a outra solução $(+)$ tem o sinal e coeficiente incorretos, em contradição com a liberdade assintótica, que é um requisito crucial da RGOPT, e conseqüentemente essa solução é completamente descartada. É também importante observar que essas soluções são complexas se $g > 0.0167052$ ($\alpha_s > 0.209924$). Por outro lado, as soluções de $f_{\text{RG}} = 0$,

$$L_{\eta}^{\text{RG}}(g, \pm) = -\frac{1}{18g} + \frac{2}{3} + \frac{32}{9(64g+9)} \pm \frac{1}{6g} \sqrt{-11g^2 - \frac{8g(81+64g)}{9(9+64g)^2}}, \quad (120)$$

são ambas compatíveis com a liberdade assintótica. No entanto, apenas $(-)$ fornece solução simultânea com as soluções compatíveis com liberdade assintótica $(-)$ da Eq. (118). Podemos ver que as soluções RG, Eq. (120), são complexas para qualquer

valor de g . Resolvendo simultaneamente a solução (–) da Eq. (118) e a (–) da Eq. (120), encontra-se as soluções independentes de escala:

$$L_{\bar{\eta}} \approx 0.0284 \pm 1.2260i, \quad (121a)$$

$$\bar{g} \approx 0.0427 \pm 0.02021i. \quad (121b)$$

Os resultados (121) são claramente inválidos, pois suas partes imaginárias não são desprezíveis e claramente levarão a quantidades físicas complexas. Por isto, a seguir estudaremos a maneira na qual, soluções reais podem ser obtidas através de uma mudança no esquema de regularização.

3.3.3 Mudança do esquema de renormalização para soluções reais

A ocorrência de soluções imaginárias é uma consequência da ordem das equações polinomiais e, claro, dos valores dos parâmetros da teoria em questão. O valor deste parâmetro depende do esquema de renormalização escolhido, que no nosso caso é o $\overline{\text{MS}}$. Este esquema é bastante conveniente e amplamente utilizado em cálculos de ordem superior em QCD. No entanto, como vemos aqui, neste esquema específico, encontramos soluções complexas já na ordem δ . É claro que isso também acontece com outros esquemas em alguma ordem superior.

Para ilustrar o quão longe está o $\overline{\text{MS}}$ de soluções reais, fornecemos a Fig. 8, onde as Eqs. (117) são plotados como função dos valores reais de L_{η} para dois valores reais fixos de α_s ³. Podemos ver que o mínimo das curvas f_{PMS} e f_{RG} não estão longe do eixo L_{η} real. Pode-se então esperar que uma pequena modificação dos coeficientes, faria com que as duas curvas se cruzassem com o eixo real, ou seja, que as soluções (121) se tornassem reais. Com este propósito, nas Refs (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013), uma mudança no esquema de renormalização perturbativa (RSC) foi proposta para recuperar soluções reais. A RSC é definida como

$$g \rightarrow g' \equiv f_g(g) = g \left(1 + A_1 g + A_2 g^2 + \dots \right), \quad (122)$$

$$m \rightarrow m' \equiv f_m(g) = m \left(1 + B_1 g + B_2 g^2 + \dots \right). \quad (123)$$

Esta mudança de esquema afetará os coeficientes de pressão abrindo a possibilidade de encontrar soluções reais. O preço a pagar é a introdução de mais parâmetros arbitrários à teoria. Em princípio, para um valor específico dos coeficientes em (122) e (123), tem-se apenas uma mudança de variável que não afeta o resultado físico. Sem embargo, como estamos truncando em certa ordem perturbativa g^k , o valor físico diferirá do esquema inicial por um termo remanescente de ordem g^{k+1} (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013). Essa diferença então diminuirá quando se passar para uma ordem superior se o acoplamento α_s for suficientemente pequeno.

³ Vamos a partir de agora analisar os resultados para α_s uma vez que é comumente usado em teoria e experimentos como o acoplamento da QCD, e é facilmente relacionado à nossa notação por $\alpha_s = 4\pi g$

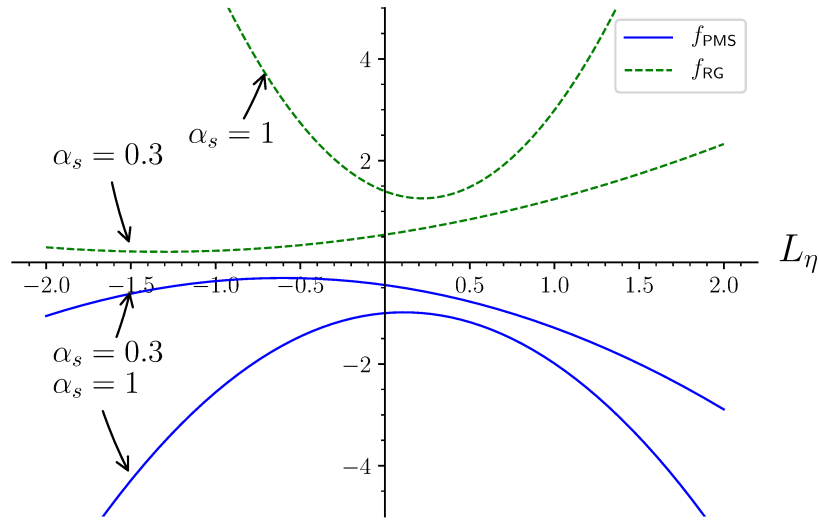


Figura 8 – f_{PMS} e f_{RG} Eqs. (117) no esquema $\overline{\text{MS}}$ ($N_f = 3$) como função de L_η para α_s fixo ($4\pi g$).

A RSC deve ser mínima no sentido de introduzir o mínimo de parâmetros possível. Então seguindo a Ref. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013), nós apenas vamos considerar uma mudança na massa, Eq. (123). Isso é motivado pelo fato de que os valores de $\bar{\eta}$ no esquema $\overline{\text{MS}}$ tendem a ter uma parte imaginária maior do que \bar{g} . Outra vantagem de aplicar apenas a RSC à massa é que os coeficientes da função β e a escala invariante $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ permanecem inalterados, uma vez que dependem apenas dos coeficientes A_i (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013; CELMASTER; GONSALVES, 1979). A RSC também deve ser mínima no número de parâmetros na Eq. (123). Uma coisa sensata a fazer seria escolher B_k na ordem g^k , uma vez que os coeficientes de ordem inferior afetarão muitos termos da expansão, produzindo ordens quadráticas ou superiores em B_{k-j} , provavelmente levando a soluções espúrias. Por outro lado, uma vez que nossa pressão perturbativa invariante frente ao RG, Eq. (99), começa com $m^4 s_0/g$, $m \rightarrow m(1 + B_k g^k)$ induz uma dependência quadrática na ordem g^k , enquanto $m \rightarrow m(1 + B_{k+1} g^{k+1})$ induz uma dependência linear. Mesmo que B_{k+1} seja arbitrário em princípio, a RSC deve permanecer razoavelmente perturbativa, ou seja, o desvio do esquema $\overline{\text{MS}}$ deve ser pequeno ou seja $B_{k+1} g^{k+1} \ll 1$. Então, em nosso caso, a forma relevante de (123) é $m \rightarrow m(1 + B_2 g^2)$. Assim, ao expandir novamente até a ordem g , a modificação RSC líquida para a pressão perturbativa é adicionar o termo extra $4gm^4 s_0 B_2$ ($4g\eta^4 s_0 B_2$ na pressão da RGOPT).

3.3.3.1 A RSC mais próxima do esquema $\overline{\text{MS}}$ e outras opções possíveis de RSC

Vamos investigar agora as soluções das equações PMS e RG dependendo do parâmetro da RSC, B_2 . Depois de adicionar o termo RSC, $4g\eta^4 s_0 B_2$, à pressão da RGOPT de ordem δ , Eq. (116), as equações do PMS e do RG reduzido assumem a

forma

$$f_{\text{PMS}}(L_{\bar{\eta}}, g, B_2) = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma_0}{2b_0} + \left[1 - 2\frac{\gamma_0}{b_0}\right] L_{\bar{\eta}} - 12gC_F \left[L_{\bar{\eta}}^2 - \frac{5}{6}L_{\bar{\eta}} + \frac{5}{12}\right] + \frac{1}{2gb_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} + \frac{s_1}{s_0}g\right) + \frac{2B_2g}{b_0 - 2\gamma_0} = 0, \quad (124)$$

$$f_{\text{RG}}(L_{\bar{\eta}}, g, B_2) = -1 + 2\frac{\gamma_0}{b_0} + 24gC_F \left[L_{\bar{\eta}} - \frac{2}{3}\right] - \beta \left\{ 12C_F \left[L_{\bar{\eta}}^2 - \frac{4}{3}L_{\bar{\eta}} + \frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2g^2b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0}\right) + \frac{2B_2}{b_0 - 2\gamma_0} \right\} = 0, \quad (125)$$

onde $f_{\text{PMS}}(L_{\bar{\eta}}, g, B_2) = 0$ e $f_{\text{RG}}(L_{\bar{\eta}}, g, B_2) = 0$ têm as soluções para $L_{\bar{\eta}}(g, B_2)$:

$$L_{\bar{\eta}}^{\text{PMS}}(g, B_2, \pm) = B_{\text{PMS}}(g) \pm \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{PMS}}(g, B_2)}, \quad (126)$$

$$L_{\bar{\eta}}^{\text{RG}}(g, B_2, \pm) = B_{\text{RG}}(g) \pm \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{RG}}(g, B_2)}, \quad (127)$$

onde

$$B_{\text{PMS}}(g) = -\frac{7}{288g} + \frac{5}{12}, \quad (128)$$

$$D_{\text{PMS}}(g, B_2) = \frac{9}{256} - \frac{47}{24}g - \frac{35}{4}g^2 - \frac{9}{14}B_2g^2, \quad (129)$$

$$B_{\text{RG}}(g) = -\frac{1}{18g} + \frac{2}{3} + \frac{32}{9(64g + 9)}, \quad (130)$$

$$D_{\text{RG}}(g, B_2) = -11g^2 - \frac{8g(81 + 64g)}{9(9 + 64g)^2} - \frac{9}{14}B_2g^2. \quad (131)$$

Na Fig. 9 mostramos a parte real e imaginária das Eqs. (126) e (127) como funções da constante de acoplamento α_s (ou $4\pi g$) para diferentes valores do parâmetro da RSC, B_2 . No caso do esquema $\overline{\text{MS}}$ ($B_2 = 0$), onde recuperamos as Eqs. (118) e (120), podemos ver que as soluções têm uma parte imaginária bastante grande na faixa de valores relevantes de α_s . Na medida que se aumenta o valor de B_2 , os valores imaginários começam a diminuir. Por exemplo, para $B_2 = -27.621$, $\text{Im}[L_{\bar{\eta}}^{\text{RG}}(g, B_2, \pm)]$ torna-se 0 para $\alpha_s \gtrsim 0,81$, mas este valor de B_2 ainda não é grande o suficiente para recuperar soluções reais⁴, pois $\text{Im}[L_{\bar{\eta}}^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ ainda é muito grande. Por isso, devemos buscar um valor mínimo de B_2 no qual as soluções reais são recuperadas. O valor mínimo de B_2 no qual se recupera soluções reais é encontrado procurando o contato mais próximo ao esquema $\overline{\text{MS}}$ entre as soluções do RG e do PMS. Isso pode ser determinado analiticamente pela colinearidade dos vetores tangentes entre as duas curvas que é ditada pelo determinante (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013).

$$f_{\text{RSC}} = \frac{\partial}{\partial g} f_{\text{RG}} \frac{\partial}{\partial \eta} f_{\text{PMS}} - \frac{\partial}{\partial \eta} f_{\text{RG}} \frac{\partial}{\partial g} f_{\text{PMS}} \equiv 0. \quad (132)$$

⁴ Este valor de B_2 parece bastante alto, mas lembre-se que em nossa notação $g = \alpha_s/(4\pi)$ de modo que o desvio do esquema $\overline{\text{MS}}$, B_2g^2 , permanece muito pequeno.

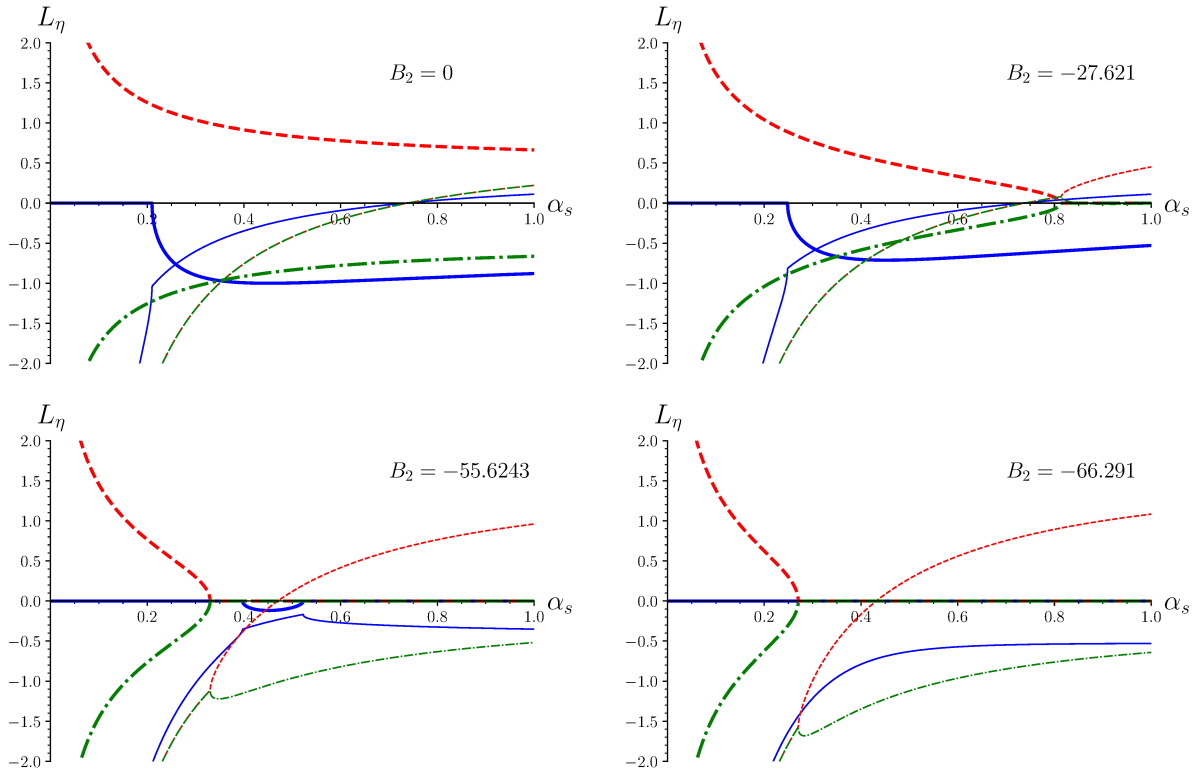


Figura 9 – Soluções das equações do PMS e do RG em função de α_s para diferentes valores do parâmetro da RSC, B_2 (para $N_f = 3$). Linhas grossas: parte imaginária de L_η , $\text{Im}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ (linha sólida), $\text{Im}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, +)]$ (linha tracejada) e $\text{Im}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, -)]$ (linha ponto-tracejada). Linhas finas: parte real de L_η , $\text{Re}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ (linha sólida), $\text{Re}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, +)]$ (linha tracejada) e $\text{Re}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, -)]$ (linha ponto-tracejada).

Logo, resolvendo simultaneamente a solução AF da Eq. (124) com a Eq. (125) e o determinante (132) encontram-se o valor mínimo de B_2 no qual se recupera soluções reais, sendo

$$L_{\bar{\eta}} = -0.439, \quad \bar{\alpha}_s = 0.389, \quad \bar{B}_2 = -55.243, \quad (133)$$

o que dá um valor bastante razoável da constante de acoplamento α_s . Como podemos ver na Fig. 9, para o valor de B_2 dado pelo determinante (132), as linhas de $\text{Re}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, +)]$ e $\text{Re}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)]$ interceptam-se para um valor de α_s onde $\text{Im}[L_\eta^{\text{RG}}(g, B_2, \pm)] = \text{Im}[L_\eta^{\text{PMS}}(g, B_2, -)] = 0$. O desvio do esquema $\overline{\text{MS}}$ é bastante pequeno para o valor de contato mais próximo do esquema $\overline{\text{MS}}$, sendo $|\bar{B}_2 \bar{g}^2| \simeq 0.053$. Notemos que também se pode escolher um valor maior de B_2 do que aquele dado resolvendo o determinante (132), recuperando também soluções reais como para o caso $B_2 = -66.291$ ilustrado na Fig. 9, onde vemos que a solução para $\alpha_s = 0.2747$ diminui e ao mesmo tempo aumenta o valor de $L_\eta = -1.3989$.

3.3.4 Condensado de quarks na RGOPT

O condensado de quarks é uma quantidade muito importante na QCD, pois é o parâmetro de ordem para a quebra espontânea de simetria quiral na QCD e por tanto é usado para calcular a temperatura crítica da transição quiral. Ele desempenha um papel crucial na QCD não perturbativa, dado que, na teoria de perturbação, ele é zero em qualquer ordem finita no limite quiral. A relação mais conhecida para o condensado de quarks é a relação de Gell-Mann–Oakes–Renner (GELL-MANN, Murray *et al.*, 1968) para o caso degenerado de dois sabores:

$$F_\pi^2 m_\pi^2 = -(m_u + m_d) \langle \bar{u}u \rangle + \mathcal{O}(m_q^2), \quad (134)$$

onde F_π^2 é a constante de decaimento de píons, m_π a massa de pión e $m_{u,d}$ as massas de quarks leves, comumente tomadas como iguais.

O condensado de quarks é definido a partir da pressão por sabor pela relação:

$$\langle \bar{q}q \rangle^{\text{PT}} = -\frac{\partial P_q^{\text{PT}}}{\partial m}. \quad (135)$$

Na ordem de 2L o condensado de quarks para $T = \mu = 0$, é dado por

$$\langle \bar{q}q \rangle^{\text{PT}} = N_c \frac{m^3}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2} - L_m + 12gC_F \left(L_m^2 - \frac{5}{6}L_m + \frac{5}{12} \right) \right]. \quad (136)$$

O condensado de quarks da RGOPT é obtido aplicando o procedimento da RGOPT, $m \rightarrow \eta(1 - \delta)^a$ e $g \rightarrow \delta g$ no condensado e depois expandindo para δ . Fazendo isto na ordem de 1L, obtém-se o resultado

$$\langle \bar{q}q \rangle_{\delta^0}(\bar{\eta}_{\delta^0}, 0, 0) = N_c \frac{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^3 e^{3/2}}{4\pi^2 g b_0} = (240.003 \text{ MeV})^3. \quad (137)$$

onde $\bar{\eta}$ é a solução de 1L (114). Para obter o valor numérico usamos o valor de $\alpha_s(\Lambda = 1.5 \text{ GeV}) = 0.326$ (BAZAVOV, Alexei *et al.*, 2012) que quando substituído na Eq. (112) reproduz o valor da escala de 1L, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 176.216 \text{ MeV}$. Vemos que, embora o valor absoluto seja razoável, o condensado tem sinal positivo em contradição com a relação (134). Conforme verificamos, em NLO a situação não muda. No caso das soluções da RSC (133) quando substituídas no condensado de 2L, também produzem um condensado positivo. Como discutido na Ref. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015), este sinal errado é devido, em quatro dimensões, a contribuição de 1L do condensado que é quadraticamente divergente. Essa divergência tem o sinal correto para o condensado em modelos não renormalizáveis, como o modelo de NJL, onde a divergência é tratada com um *cutoff*. Na Ref. (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015) a alternativa para contornar este problema foi aplicar a RGOPT na densidade espectral, e depois com a relação de Banks–Casher (BANKS; CASHER, 1980), obter o condensado de quarks

no limite quiral. Por outro lado, nosso objetivo é aplicar a RGOPT em $T \neq 0$ e $\mu \neq 0$, e a densidade espectral tem um aspecto matemático muito difícil de se lidar quando utilizado na QCD em temperaturas finitas. Além disso, uma das extensões deste trabalho é aplicar a RGOPT no caso massivo e a relação de Banks–Casher relaciona a densidade espectral e o condensado de quarks apenas no limite quiral ($m = 0$). É por isso que não consideramos essa abordagem neste trabalho. É importante salientar que, o fato da RGOPT não produzir o sinal correto do condensado de quarks, embora desafortunado, não é uma desvantagem com respeito aos outros métodos de ressonância aplicados na QCD como a HTLpt, já que HTLpt carece da estrutura do vácuo e portanto também não fornece informação sobre o condensado e a transição quiral. Neste trabalho então, renunciamos ao propósito de calcular as temperaturas críticas para a transição quiral, e vamos nos concentrar no estudo da redução da dependência da escala de regularização no regime de temperaturas e potenciais químicos finitos. É importante salientar que, acima dos valores críticos, por exemplo, em $\mu = 0$, nossos resultados serão confiáveis para valores acima de $1.5T_{pc} \sim 300$ MeV.

3.4 MATÉRIA DE QUARKS FRIA E DENSA

Nesta seção, mostraremos os resultados da RGOPT no caso $T = 0$ e $\mu \neq 0$. Parte dos resultados relatados nesta seção encontrassem publicados na Ref. (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2019).

Notemos que neste caso de temperatura zero, a pressão perturbativa dos glúons é zero, pois esta depende unicamente da temperatura e portanto $P = P_q$.

Antes de tomar o limite $T \rightarrow 0$ para todas as integrais térmicas na expressão perturbativa para a pressão, vamos primeiro analisar a distribuição de Fermi-Dirac,

$$f^\pm(\hat{E}_p) = \frac{1}{1 + e^{(\hat{E}_p \pm \hat{\mu})}}. \quad (138)$$

Para $T \rightarrow 0$, $(\hat{E}_p + \hat{\mu}) \rightarrow \infty$ e $f^+(\hat{E}_p) \rightarrow 0$ para qualquer valor de \hat{E}_p . Por outro lado, se $E_p < \mu$ então $(\hat{E}_p - \hat{\mu}) \rightarrow -\infty$ e como consequência $f^-(\hat{E}_p) \rightarrow 1$, mas se $E_p > \mu$, então $f^-(\hat{E}_p) \rightarrow 0$, e se $E_p = \mu$ se conclui automaticamente que $f^\pm(\hat{E}_p) = 1$. Portanto, vemos que a distribuição de Fermi-Dirac para antipartículas é 0 e para partículas é 1 quando $E_p \leq \mu$ e é sempre 0 no caso $E_p > \mu$, como esperado em um sistema fermiônico a temperatura zero onde o sistema de N partículas está no estado fundamental. Uma vez que o princípio de exclusão requer que haja uma partícula por estado, as partículas ocupam o estado mais baixo disponível até que todas as partículas sejam acomodadas. De modo que, a partícula no nível de energia mais alto tem uma energia $E_F = \mu$, ou equivalentemente um momento $p_F = \sqrt{\mu^2 - m^2}$, conhecidos respectivamente como energia e momento de Fermi. Desta forma, na temperatura zero, temos um corte natural nas integrais, dado pelo momento (ou energia) de Fermi. Pela análise dada

acima, a distribuição de Fermi-Dirac tem a expressão matemática simples no limite $T \rightarrow 0$ em termos da função Θ de Heaviside:

$$\lim_{T \rightarrow 0} f^+(E_p) = \Theta(\mu - E_p), \quad (139a)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} f^-(E_p) = 0, \quad (139b)$$

onde $\Theta(\mu - E_p) = 1$ se $\mu \geq E_p$ e 0 caso contrário.

Agora podemos facilmente tomar o limite de $T \rightarrow 0$ em nossas integrais J_1 , J_2 e J_3 . Primeiro, vamos notar que

$$\frac{\partial \ln(1 + e^{-x})}{\partial x} = \frac{1}{1 + e^x}. \quad (140)$$

com $x = \hat{E}_p - \hat{\mu}$ conclue-se que

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \ln \left(1 + e^{-\left(\hat{E}_p - \hat{\mu}\right)} \right) = (E_p - \mu) \Theta(\mu - E_p), \quad (141)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \ln \left(1 + e^{-\left(\hat{E}_p + \hat{\mu}\right)} \right) = 0. \quad (142)$$

logo

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} T^4 J_1 &= \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} (E_p - \mu) \Theta(\mu - E_p), \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dp p^2 (E_p - \mu), \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \left[\mu p_F \left(\mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \ln \left(\frac{\mu + p_F}{m} \right) \right], \end{aligned} \quad (143)$$

da mesma forma, para J_2 pode-se encontrar facilmente o limite $T \rightarrow 0$ usando as Eqs. (139)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} T^2 J_2 &= \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \Theta(\mu - E_p), \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_F} dp \frac{p^2}{E_p}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\mu p_F - m^2 \ln \left(\frac{\mu + p_F}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (144)$$

Finalmente para J_3 ,

$$\lim_{T \rightarrow 0} T^2 J_3 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{p_F} \int_0^{p_F} \frac{dp dq}{E_p E_q} \ln \left[\frac{E_p E_q - m^2 - pq}{E_p E_q - m^2 + pq} \right]. \quad (145)$$

Esta última equação é menos direta e requer várias manipulações e mudança de variável antes de obter o resultado (ver Refs. (PALHARES; FRAGA, 2008; PALHARES, 2008))

$$\lim_{T \rightarrow 0} T^2 J_3 = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2} \left\{ \left[\mu \rho_F - m^2 \ln\left(\frac{\mu + \rho_F}{m}\right) \right]^2 - \rho_F^4 \right\}. \quad (146)$$

Substituindo as Eqs. (143), (144) e (146) na pressão perturbativa, Eq. (97) encontra-se a expressão já conhecida (AKHIEZER; PELETMINSKII, 1960; FARHI; JAFFE, 1984; FRAGA; ROMATSCHKE, 2005)

$$\begin{aligned} \frac{P^{\text{PT}}(\mu)}{N_f N_c} = & -\frac{m^4}{8\pi^2} \left(\frac{3}{4} - L_m \right) + \Theta(\mu^2 - m^2) \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu \rho_F \left(\mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \ln\left(\frac{\mu + \rho_F}{m}\right) \right] \\ & - 3g \frac{m^4}{2\pi^2} C_F \left(L_m^2 - \frac{4}{3} L_m + \frac{3}{4} \right) - \Theta(\mu^2 - m^2) \frac{g C_F}{2\pi^2} \left\{ 3 \left[m^2 \ln\left(\frac{\mu + \rho_F}{m}\right) - \mu \rho_F \right]^2 \right. \\ & \left. - 2\rho_F^4 + m^2 (4 - 6L_m) \left[\mu \rho_F - m^2 \ln\left(\frac{\mu + \rho_F}{m}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (147)$$

Esta expressão pode ser ainda mais simplificada usando as propriedades da função logarítmica:

$$\begin{aligned} \frac{P^{\text{PT}}(\mu)}{N_f N_c} = & \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu \rho_F \left(\mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \left(L_\mu - \frac{3}{4} \right) \right] \\ & - \frac{g C_F}{2\pi^2} \left[3m^4 \left(L_\mu^2 - \frac{4}{3} L_\mu + \frac{1}{12} \right) + \mu^2 (\mu^2 + m^2) + m^2 \mu \rho_F (4 - 6L_\mu) \right], \end{aligned} \quad (148)$$

onde $L_\mu \equiv \ln[(\mu + \rho_F)/\Lambda]$.

Conforme explicado antes, a pressão invariante RG vale

$$P^{\text{RG}}(\mu) = P^{\text{PT}}(\mu) + m^4 \left(\frac{s_0}{g} + s_1 \right). \quad (149)$$

3.4.1 Otimização de LO ordem δ^0

A pressão de LO da RGOPT é obtida aplicando-se a prescrição da RGOPT até a ordem δ^0 à pressão perturbativa invariante frente ao RG em LO, $P^{\text{RG}}(\mu)$ (e negligenciando por enquanto o termo $m^4 s_1$), assumindo $\mu > \eta$, obtém-se

$$\frac{P_{\delta^0}(\mu)}{N_f N_c} = \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu \rho_F \left(\mu^2 - \frac{5}{2} \eta^2 \right) + \frac{3}{2} \eta^4 \left(L_\mu - \frac{3}{4} \right) \right] + \frac{\eta^4}{(4\pi)^2 b_0 g}, \quad (150)$$

onde já substituímos $a = \gamma_0/(2b_0)^5$, e o parâmetro arbitrário da OPT, η , deve ser fixado com a equação do PMS, Eq. (32). Em densidades finitas, a Eq. (32) é um pouco mais

⁵ Vamos enfatizar que o valor de a fixado em LO independente de parâmetros externos, como a temperatura ou o potencial químico

complexa do que no caso de vácuo ($T = \mu = 0$) devido à dependência não linear de η a partir de $p_F(\eta) = \sqrt{\mu^2 - \eta^2}$ na Eq. (150). No entanto, após uma manipulação algébrica simples, a solução formal pode ser escrita em uma forma compacta:

$$\bar{\eta}^2 = \mu^2 \left(\frac{\sqrt{1 + 4c(\bar{\eta}, \mu, g)} - 1}{2c(\bar{\eta}, \mu, g)} \right), \quad (151)$$

sendo⁶

$$c(\eta, \mu, g) = \left(\frac{1}{2b_0g} - \frac{1}{2} + L_\mu \right)^2. \quad (152)$$

A Eq. (151) pode ser facilmente resolvida numericamente, mas antes de fazer isso é instrutivo examinar algumas de suas propriedades em mais detalhe. Pode-se ver primeiro que o acoplamento $g \equiv g(\Lambda)$ e a escala de regularização Λ só aparecem na combinação $1/(2b_0g) + L_\mu \simeq 1/(2b_0g) + \ln(\mu/\Lambda) + \dots$, onde os pontos designam termos independentes de Λ . Dessa forma, lembrando o acoplamento (exato) de 1L Eq. (111), é imediato que a Eq. (151) não depende de Λ . Da mesma forma, é fácil ver que a equação de pressão da RGOPT em ordem de 1L (150) é ela mesma exatamente invariante frente ao RG nesta ordem: substituindo formalmente $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ em sua expressão, $\bar{\eta}$ é invariante frente ao RG, independentemente de seu valor numérico, e $g(\Lambda)$ e Λ aparecem de forma explícita na Eq. (150) na mesma combinação independente de Λ , $1/(2b_0g(\Lambda)) + L_\mu$.

Para um acoplamento pequeno, a massa otimizada $\bar{\eta}$ admite uma expansão perturbativa $\bar{\eta}^2 \sim \mu^2(\text{constante} \times g + \mathcal{O}(g^2))$, que tem a forma esperada de uma massa de Debye (no meio). No entanto, insistimos neste ponto que $\bar{\eta}$ não é uma massa física, (e não está diretamente relacionada com a definição padrão de massa de Debye (KAPUSTA, J. I.; GALE, 2011)), mas representa uma quantidade variacional intermediária cujo único objetivo é otimizar $P(\bar{\eta}, g, \mu)$, que define a pressão física em uma determinada ordem. De fato, exceto para acoplamentos muito fracos, a expansão de primeira ordem de $\bar{\eta}^2$ não dá uma boa aproximação do $\bar{\eta}(\mu)$ exato: na verdade, em vez de crescer sem limites para um acoplamento arbitrário grande, como a aproximação puramente perturbativa sugeriria ingenuamente, a solução exata na Eq. (151) tem a propriedade de ser limitada, com $\bar{\eta}^2(g(\Lambda)) < \mu^2$ mesmo para $g(\Lambda)$ grande (portanto, consistente com os pressupostos básicos das contribuições do meio).

Neste ponto, observamos que a subtração de NLO s_1 nas Eqs. (149), (107), embora seja estritamente necessária para a invariância perturbativa do RG apenas na ordem de 2L, é formalmente uma contribuição de 1L $\mathcal{O}(g^0)$. Parece, portanto, sensato incluir esta informação conhecida da próxima ordem RG, que é direta e fornece, não surpreendentemente, uma aproximação 1L melhorada um pouco mais realista. Assim,

⁶ A Eq. (151) sugere que $\bar{\eta}$ seria a solução de uma equação quadrática simples se não fosse pela dependência η não linear entrando em $L_\mu = \ln[(\mu + p_F)/\Lambda]$. Selecionamos a solução $\eta^2 > 0$, enquanto a outra solução com $\sqrt{\dots} \rightarrow -\sqrt{\dots}$ não é física, dando sempre $\eta^2 < 0$.

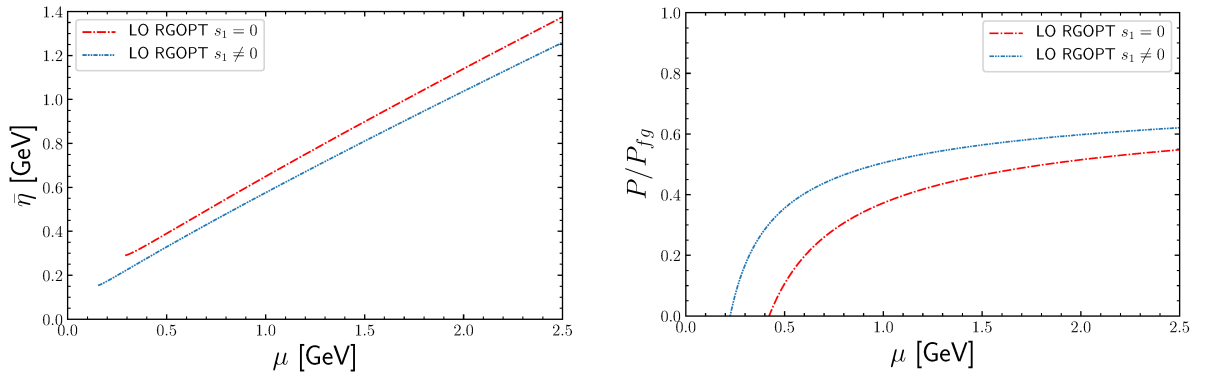


Figura 10 – Massa da RGOPT otimizada (esquerda) e pressão (direita) em LO para $s_1 = 0$ e $s_1 \neq 0$.

para $s_1 \neq 0$, o termo $-1/2$ na Eq. (152) acima é simplesmente substituído por $-1/2 - 8\pi^2 s_1 = 11/84$ (para $N_f = 3$). A solução numérica de $\bar{\eta}$ em 1L da RGOPT da Eq. (151) como uma função de μ bem como a pressão para ambos os casos $s_1 = 0$ e $s_1 \neq 0$ são ilustrados na Fig. 10, que entre outras características evidentemente confirma suas propriedades de invariância de escala exata de ambas as quantidades. Além disso, a pressão na Fig 10 ilustra que em LO o termo $s_1 \neq 0$ fornece uma melhoria importante da aproximação básica de 1L já que para $s_1 = 0$ a pressão está bem longe do gás livre em valores altos de μ .

3.4.2 Otimização na ordem de 2L (δ)

A pressão da NLO RGOPT, em densidades finitas pode ser escrita como (novamente, assumindo $\mu > \eta$)

$$\begin{aligned} \frac{P_\delta(\mu)}{N_f N_C} = & \frac{P_{\delta 0}(\mu)}{N_f N_C} - \frac{\eta^4}{(4\pi)^2} \left(\frac{\gamma_0}{b_0} \right) \left(\frac{1}{b_0 g} \right) + \eta^4 \left(2 \frac{\gamma_0}{b_0} - 1 \right) s_1 \\ & + \frac{\eta^2}{8\pi^2} \left(\frac{\gamma_0}{b_0} \right) \left[\eta^2 (1 - 2L_\mu) + 2\mu \rho_F \right] \\ & - \frac{g C_F}{2\pi^2} \left[3\eta^4 \left(L_\mu^2 - \frac{4}{3} L_\mu + \frac{1}{12} \right) + \mu^2 (\mu^2 + \eta^2) + \eta^2 \mu \rho_F (4 - 6L_\mu) \right], \end{aligned} \quad (153)$$

onde $P_{\delta 0}(\mu)$ é dado pela Eq. (150). Em NLO $\mathcal{O}(g)$, verifica-se que o PMS, Eq. (32), e a RG reduzida, Eq. (56), não tem soluções reais para valores de potenciais químicos arbitrários. Conforme já discutido acima nas seções anteriores, espera-se que isso aconteça em geral, a partir da NLO, se insistirmos em resolver exatamente essas equações, devido a dependências não lineares na massa. Portanto, pode-se tentar resolver com menos rigidez a única equação RG completa, Eq. (74), para $\bar{\eta}(g)$, tomando então para g mais conservadoramente o acoplamento de 2L puramente perturbativo como feito para o modelo de Gross-Neveu na seção 2.6. Infelizmente, apenas soluções não

reais aparecem também neste caso, se a equação for resolvida para $\eta(g)$ exato. Então, pode-se fazer uma mudança no esquema de renormalização conforme explicado na seção 3.3.3, onde já encontramos resultados bastante bons em $T = \mu = 0$. Vamos escrever as soluções da PMS, Eq. (32) e da RG reduzida Eq. (56) para L_μ após aplicar a RSC $\eta \rightarrow \eta(1 + B_2 g^2)$ na Eq. (153) e re-expandindo até a ordem g conforme explicado na seção 3.3.3 (que afetam a Eq. (153) por um termo extra $4g\eta^4 s_0 B_2$), as soluções compatíveis com a AF são:

$$f_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, \mu) = -L_\mu + B_{\text{PMS}}(\eta, g, \mu) - \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, \mu)} \equiv 0, \quad (154)$$

$$f_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, \mu) = -L_\mu + B_{\text{RG}}(\eta, g, \mu) \pm \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, \mu)} \equiv 0, \quad (155)$$

com

$$B_{\text{PMS}}(\eta, g, \mu) = -\frac{7}{288g} + \frac{5}{12} + \frac{\mu\rho_F}{2\eta^2} \quad (156)$$

$$D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, \mu) = \frac{9}{256} - \frac{47g}{24} + \frac{61g^2}{4} - \frac{9B_2g^2}{14} + 3g^2 \frac{\mu^2}{\eta^2} \left(11 - 3\frac{\mu^2}{\eta^2} \right) + 9g \left(g - \frac{1}{8} \right) \frac{\mu\rho_F}{\eta^2}, \quad (157)$$

$$B_{\text{RG}}(\eta, g, \mu) = -\frac{1}{18g} + \frac{2}{3} + \frac{32}{9(64g+9)} + \frac{\mu\rho_F}{\eta^2}, \quad (158)$$

$$D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, \mu) = g^2 \left(13 - \frac{9B_2}{14} \right) - \frac{8g(64g+81)}{9(64g+9)^2} + 24g^2 \frac{\mu^2}{\eta^2} \left(\frac{\mu^2}{\eta^2} - 2 \right). \quad (159)$$

3.4.3 Resultados para a RSC mais próximo do esquema $\overline{\text{MS}}$

Se resolvermos simultaneamente as Eqs. (154), (155) e o determinante para encontrar a solução mais próxima do esquema $\overline{\text{MS}}$, Eq. (132), encontramos novamente soluções imaginárias e espúrias, uma vez que o parâmetro externo μ é introduzido. Como uma primeira ilustração simples, vamos considerar apenas a contribuição do vácuo ($\mu = 0$). Aplicando a Eq. (132), em conjunto com a Eq. PMS (154) e tomando por g a equação perturbativa de 2L em termos da função W de Lambert (GARDI *et al.*, 1998)

$$g_{2L}(\Lambda) = -\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{1 + W_{-1}(z)}, \quad (160)$$

onde

$$z = -\frac{b_0^2}{b_1} \frac{1}{e} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}} \right)^{-\frac{2b_0^2}{b_1}}, \quad (161)$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{2b_0g(\Lambda)} \right) \left(\frac{b_0g(\Lambda)}{1 + \frac{b_1}{b_0}g(\Lambda)} \right)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}}, \quad (162)$$

para um valor típico de $\Lambda \simeq 1 \text{ GeV}$, então obtém-se $\bar{B}_2 \simeq -55.8583$, $L_{\bar{\eta}} \simeq -0.331$, dando $\bar{\eta} \simeq 700 \text{ MeV} \simeq 2.1 \Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, que pode ser comparado ao resultado da RGOPT na ordem de 1L Eq. (114). Observe que $\alpha_s(\Lambda = 1 \text{ GeV}) \simeq 0.42$, mas $|\bar{B}_2 g^2| \sim 0.06$ é um desvio muito moderado do esquema original $\overline{\text{MS}}$. Podemos agora otimizar numericamente a pressão da RGOPT na ordem de 2L, Eq. (153) incluindo a contribuição do meio com $\mu \neq 0$, adotando a prescrição adicional da RSC para recuperar soluções reais de $\bar{\eta}(\mu)$ para valores arbitrários de μ . De fato, em vez de resolver a equação de RG completa, como uma variante numericamente mais simples, resolvemos o ramo compatível com a AF da equação de PMS (154) na ordem de 2L para $\bar{\eta}(g)$, considerando para g o acoplamento puramente perturbativo, junto com a equação do RSC (132) para fixar $\bar{B}_2(\mu)$ em NLO (claramente o parâmetro RSC otimizado \bar{B}_2 agora é uma função não trivial do potencial químico μ , consistentemente determinado pelo procedimento de otimização). A fim de comparar com os resultados de pQCD fornecidos nas Refs. (KURKELA *et al.*, 2010; GORDA *et al.*, 2018), vamos considerar a variação de escala $\mu \leq \Lambda \leq 4\mu$ além da escala central, $\Lambda = 2\mu$. Aqui, escolhemos $\alpha_s(\Lambda_0 = 1.5 \text{ GeV}) = 0.326$ (BAZAVOV, Alexei *et al.*, 2012) para comparar precisamente com os valores adotados na Ref. (GORDA *et al.*, 2018): usando a Eq. (162), encontramos a escala invariante na ordem de 2L, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \simeq 0.335 \text{ GeV}$, um valor realmente muito próximo à média mundial atual (TANABASHI *et al.*, 2018).

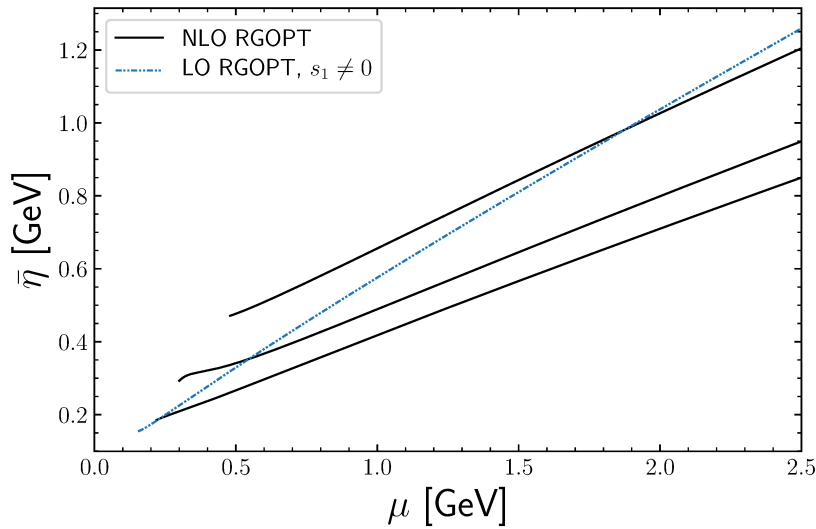


Figura 11 – A massa otimizada em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ em LO (ponto-tracejado) e NLO (contínuo). Para o último, a curva superior corresponde a $\Lambda = \mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = 4\mu$.

Os resultados para a massa otimizada de NLO $\bar{\eta}$ como funções de μ e para diferentes escolhas de escala de renormalização são mostrados na Fig. 11, onde também são comparados com o valor de $\bar{\eta}$ em LO. Pode-se ver que, como já explicado acima, $\bar{\eta}(\mu)$ em LO, é exatamente invariante frente ao RG, pois envolve apenas a

combinação invariante de escala $[2b_0g(\Lambda)]^{-1} + \ln(\mu/\Lambda)$. Em contraste, o $\bar{\eta}(\mu)$ em NLO definitivamente exibe uma dependência de escala residual: mesmo para o acoplamento de 2L exato, Eq. (160). Ilustraremos a seguir que a pressão da RGOPT, que representa o observável físico real, mostra uma dependência de escala residual mais moderada. De forma mais geral, a construção da RGOPT apenas garante que a otimização não estrague a invariância perturbativa frente ao RG da quantidade física considerada, o que significa, até termos dependentes de escala remanescentes de ordem superior $\mathcal{O}(g^{k+1})$, se a expressão perturbativa original estiver disponível na ordem g^k .

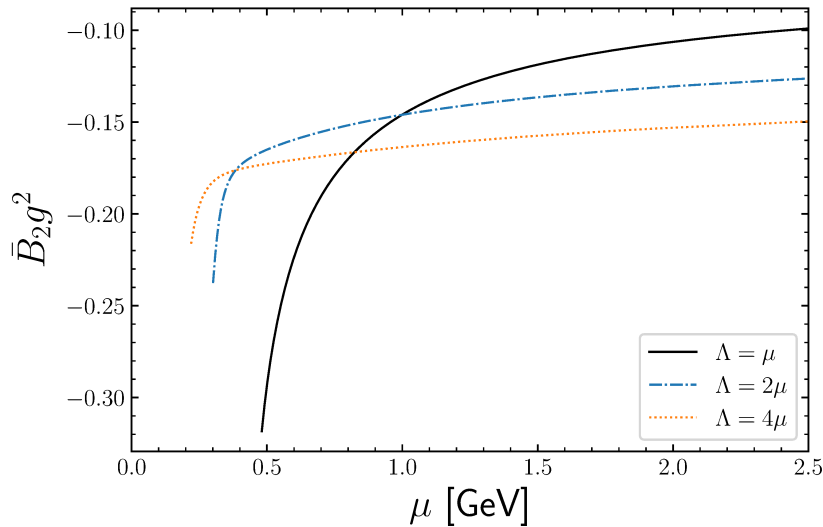


Figura 12 – A quantidade otimizada da RSC, $\bar{B}_2(\mu)g^2(\mu)$, em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ .

A Fig. 12 ilustra os valores correspondentes da combinação de parâmetros da RSC $\bar{B}_2(\mu)g^2(\mu)$, quantificando assim o afastamento do esquema $\overline{\text{MS}}$. Pode-se ver que a RSC permanece razoavelmente perturbativa, embora o valor de $|\bar{B}_2(\mu)|$ necessário para recuperar soluções reais esteja aumentando rapidamente para valores de μ menores da escala de renormalização inferior $\Lambda = \mu$ (isto não surpreende, já que nesta região o acoplamento $g(\Lambda)$ torna-se perigosamente grande).

Estamos agora em posição de calcular observáveis termodinâmicos, como a pressão, que aqui será respectivamente normalizada pelo gás livre sem massa, P_{fg} , que é dado por

$$\frac{P_{fg}}{N_f N_c} = \frac{\mu^4}{12\pi^2}. \quad (163)$$

Vamos então comparar os resultados da RGOPT em LO e NLO com as previsões de pQCD em $\mathcal{O}(g)$, $\mathcal{O}(g^2)$ (KURKELA *et al.*, 2010), bem com o mais recente

$\mathcal{O}(g^3 \ln^2 g)$ (GORDA *et al.*, 2018)

$$\frac{P_{pQCD}}{P_{fg}} = 1 - \frac{2}{\pi} \alpha_s(\Lambda) - \alpha_s^2(\Lambda) \left\{ 0.303964 \ln \alpha_s(\Lambda) + \left[0.874355 + 0.911891 \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right] \right\} - 0.266075 \alpha_s^3(\Lambda) \ln^2 \alpha_s. \quad (164)$$

Na Fig. 13, mostramos a pressão normalizada prevista pelas diferentes aproximações

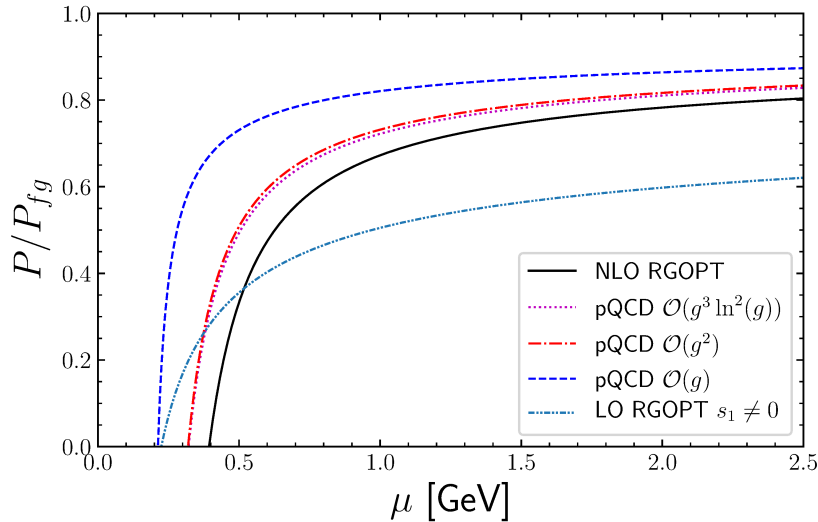


Figura 13 – A pressão normalizada em função do potencial químico na escala central $\Lambda = 2\mu$. Os resultados da pQCD na ordem g , g^2 e g^3 (termo LL) são comparados com os resultados da RGOPT em LO (ordem g^0) e NLO (ordem g).

em ordens diferentes, para a escala central $\Lambda = 2\mu$, conforme adotada na Ref. (GORDA *et al.*, 2018). A primeira coisa a se observar é que a RGOPT produz um resultado não trivial já na ordem $\delta^0 g^0$, mas convergindo muito lentamente para o resultado de gás livre conforme o potencial químico dos quarks aumenta. No entanto, isso já pode ser visto como uma melhoria, uma vez que nesta mesma ordem g^0 o resultado pQCD para a pressão normalizada seria trivialmente igual à unidade, ou seja, o limite de gás livre. Na realidade, não se pode esperar que a RGOPT na ordem mais baixa seja uma aproximação muito realista em geral, porque ela depende apenas de quantidades do RG de ordem mais baixa, enquanto a dependência da pressão é essencialmente como a do gás livre. As propriedades de ressonância da RGOPT tornam-se mais evidentes quando se compara seu resultado em NLO, ordem g , com os da pQCD da mesma ordem NLO, uma vez que a figura mostra que a pressão da NLO RGOPT, na verdade, aparece em melhor acordo com as previsões dadas pela teoria de perturbação em ordens superiores g^2 e $g^3 \ln^2 g$. A seguir, também analisamos como ambas as aproximações funcionam quando a escala de renormalização arbitrária varia no intervalo $\mu \leq \Lambda \leq 4\mu$, como na Ref. (KURKELA *et al.*, 2010), onde a dependência de escala

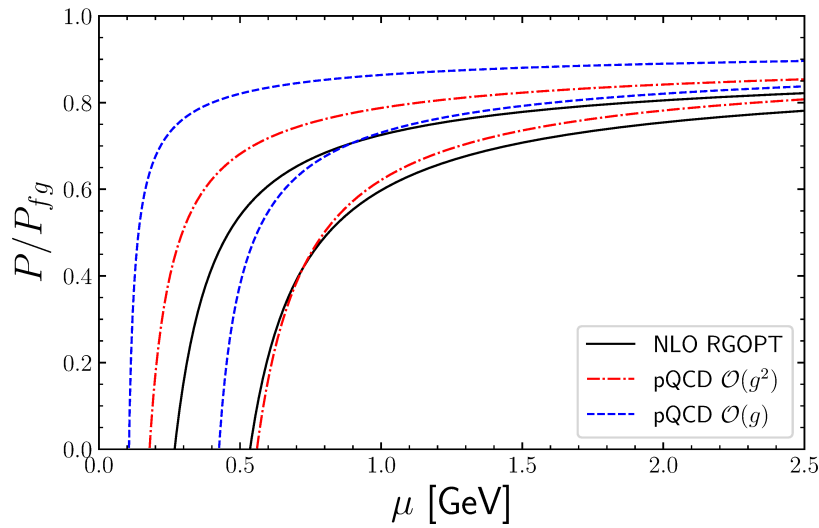


Figura 14 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Os resultados da pQCD na ordem g , g^2 são comparados com a RGOPT em NLO (ordem g). Em cada caso, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$.

dos resultados da pQCD nas ordens g e g^2 foram analisados. Os resultados são comparados na Fig. 14, que mostra que a RGOPT melhora sensivelmente a incerteza de escala em comparação com a mesma ordem perturbativa g , especialmente na região não perturbativa de densidades bariônicas baixas a moderadas. Mesmo quando comparados com os resultados perturbativos completos na NNLO, g^2 , que exibem uma dependência de escala reduzida em relação ao NLO perturbativo, a incerteza de escala da NLO RGOPT ainda é consideravelmente melhor.⁷ Observamos também que a melhoria da dependência da escala da RGOPT ilustrada aqui em $T = 0$, $\mu \neq 0$ com relação a pQCD é menos espetacular do que para outros modelos em $T \neq 0$, $\mu = 0$ em comparação com a teoria de perturbação padrão e com HTLpt (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, 2015, 2016; FERRARI *et al.*, 2017). Mas isso se deve principalmente ao fato de que em altas temperaturas e $\mu = 0$, as dependências da escala da teoria de perturbação padrão em NLO ou da HTLpt tendem a ser substancialmente piores, enquanto a RGOPT permanece mais razoável. Para avaliar mais precisamente a dependência da escala remanescente, plotamos na Fig. 15 a diferença das pressões (normalizadas), $\Delta P/P_{fg} \equiv (P(\Lambda = 4\mu) - P(\Lambda = \mu))/P_{fg}$ em função de μ , para as três aproximações ilustradas na Fig. 14. A dependência de escala remanescente da NLO RGOPT é moderadamente, mas claramente melhorada em comparação com NLO pQCD para $\mu \gtrsim 0.9$ GeV (dando $\approx 25\%$ de melhoria, por exemplo, para $\mu \simeq 2$ GeV),

⁷ No estudo original (KURKELA *et al.*, 2010) uma forma aproximada bastante comum de (160) foi usada, truncando termos além da $\mathcal{O}(\ln L/L^2)$, com $L \equiv \ln(\Lambda^2/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^2)$. Aqui, comparamos a dependência de escala adotando o mesmo acoplamento exato de $2L$ (160) para todas as aproximações, que tende a diminuir ligeiramente a incerteza de escala para todos os casos.

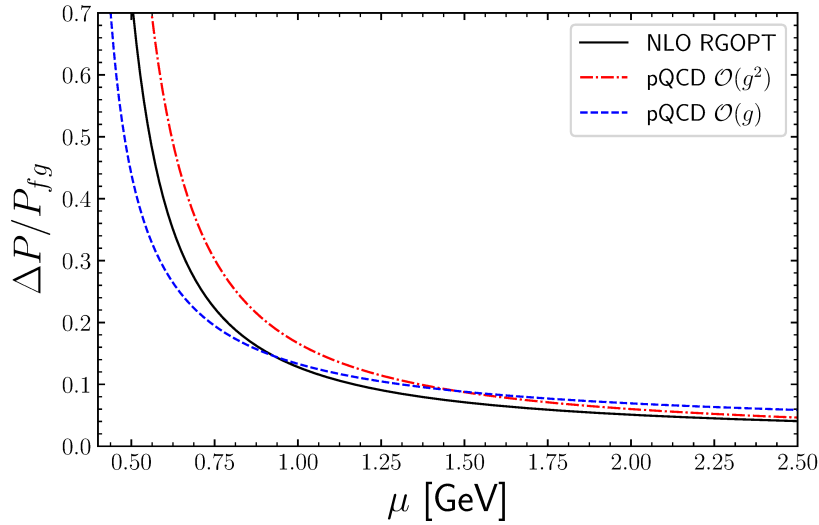


Figura 15 – A dependência de escala remanescente definida pelas diferenças das pressões (normalizadas) $\Delta P/P_{fg} \equiv (P(\Lambda = 4\mu) - P(\Lambda = \mu))/P_{fg}$, como funções do potencial químico μ . Os resultados da pQCD na ordem g e na ordem g^2 são comparados com a NLO RGOPT.

enquanto a dependência de escala da NLO pQCD parece ser um pouco menor na faixa inferior $\mu \lesssim 0.5 \lesssim \mu \lesssim 0.9$ GeV. Observe também que a pressão da NLO pQCD tem uma dependência de escala menor do que em NLO da pQCD em um intervalo mais estreito e perturbativo $\mu \gtrsim 1.5$ GeV. Em contraste, a incerteza da escala da RGOPT é claramente melhor do que na NNLO da pQCD em toda a faixa relevante de μ . Percebemos, no entanto, que a menor dependência remanescente da NLO pQCD dentro da janela baixa de μ ($0.5 \lesssim \mu \lesssim 0.9$ GeV) é meramente um efeito colateral da pressão da NLO pQCD caindo para zero em valores de μ inferiores as duas outras aproximações, como fica claro na Fig. 14. De fato, não é de surpreender que todas as três aproximações exibam um crescimento rápido na dependência de escala para valores de μ que se aproximam da região onde $P(\Lambda \simeq \mu)$ cai rapidamente para zero.⁸ Mas a Fig. 15 também mostra que a dependência remanescente máxima alcançada nos respectivos valores μ_{min} é menor para a RGOPT do que para NLO e NNLO pQCD. Em todo caso, deve-se ter em mente que, devido à escolha da escala de renormalização comum adotada $g(\Lambda = \mathcal{O}(\mu))$, nenhuma das aproximações é muito confiável na região não perturbativa onde $P/P_{fg}(\Lambda \simeq \mu) \ll 1$, isto devido ao grande acoplamento.⁹ Concluimos, portanto, que, dentro da faixa de μ onde todas as aproximações são confiáveis perturbativamente, a incerteza da escala remanescente da NLO RGOPT é moderada, mas claramente melhorada em comparação com ambos NLO e NNLO pQCD (considerando também que pQCD padrão em $T = 0$, $\mu \neq 0$ tem problemas de dependência de escala

⁸ Na Fig. 15 as três curvas começam em seus respectivos valores mínimos μ_{min} , de modo que $P(\Lambda \geq \mu_{min}) \geq 0$, compare Fig. 14

⁹ veja, por exemplo, que $\mu < 0.8$ já corresponde a $\alpha_s(\Lambda = \mu) > 0.5$ usando a Eq.(160)

menos severos do que no regime de T alto). Em princípio, também poderíamos incluir em nossa análise da NLO RGOPT o termo de subtração da ordem NNLO, $g m^4 s_2$ da Eq. (149), uma vez que é formalmente da ordem g , semelhante ao que foi feito em LO RGOPT (veja a discussão após Eq. (152)). A expressão para s_2 está disponível em (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2015) e claramente incorpora dependência do RG adicional da próxima ordem (3L) do RG. No entanto, verificamos que considerar $s_2 \neq 0$ na ordem NLO dificilmente muda os nossos resultados (em contraste com a pressão da LO onde $s_1 \neq 0$ tem um impacto considerável). Em particular, a dependência de escala não é visivelmente afetada, que indica que uma estabilidade razoável foi alcançada na ordem NLO.

3.4.4 Uma alternativa mais simples de prescrição da NLO RGOPT

Enquanto os resultados nas Figs. 13 e 14 mostram claramente uma melhor concordância da NLO RGOPT com os resultados do estado da arte da teoria de perturbação, pode ser considerado bastante insatisfatório ter que lidar com a prescrição da NLO RGOPT um tanto mais laboriosa, implicando que a restrição adicional da RSC Eq. (132) seja resolvida numericamente para restaurar as soluções reais. Poderíamos encontrar uma prescrição mais simples e transparente, enquanto ainda capturamos as principais características da abordagem da RGOPT? De fato, uma alternativa muito mais simples que certamente recupera uma solução real para $\bar{\eta}$ é simplesmente renunciar a resolver as equações do RG ou PMS exatamente, aproximando-as de uma forma mais perturbativa. Isso, no entanto, certamente leva a uma perda de parte das propriedades de ressonância embutidas na solução “exata”, de modo que uma leve degradação da dependência de escala remanescente é esperada. Para explorar esta alternativa, consideramos a equação do RG completa (74), a fim de incorporar o conteúdo do RG na ordem de 2L mais completo e consistente, mas aproximamos grosseiramente sua solução de primeira ordem da (re)expansão perturbativa. Da mesma forma como no caso na ordem LO, observando primeiro que a Eq. (74) daria uma equação simplesmente quadrática para η^2 na ausência de dependência extra de η não linear a partir de p_F , esta solução perturbativa é simplesmente:¹⁰

$$\bar{\eta}^2 = \frac{144}{7} \mu p_F \left(1 - \sqrt{1 - \frac{21 \mu^2}{64 p_F^2}} \right) g + \mathcal{O}(g^2) = \frac{144}{7} \left(1 - \frac{\sqrt{43}}{8} \right) g \mu^2 + \mathcal{O}(g^2). \quad (165)$$

Agora, substituir esta expressão de $\bar{\eta}$ na expressão de pressão da NLO RGOPT Eq. (153), com o acoplamento $g \rightarrow g(\Lambda)$ como anteriormente a partir da Eq. (160),

¹⁰ Na Eq. (165) os fatores $144/7$, $21/64$, $\sqrt{43}$ são simplesmente valores das combinações específicas de coeficientes RG b_i , γ_i para $N_f = 3$, que aparecem nesta expressão. O termo explicitamente dependente de escala L_μ só aparece na próxima ordem g^2 . Observe também que eliminamos a outra solução, com $+\sqrt{\dots}$, pois ela viola a consistência necessária $\bar{\eta}^2 \leq \mu^2$ mesmo para g moderado, e também não cumpre a correspondência perturbativa, $\ln \mu/\bar{\eta} \sim 1/(2b_0 g)$, para $\mu \gg \bar{\eta}$.

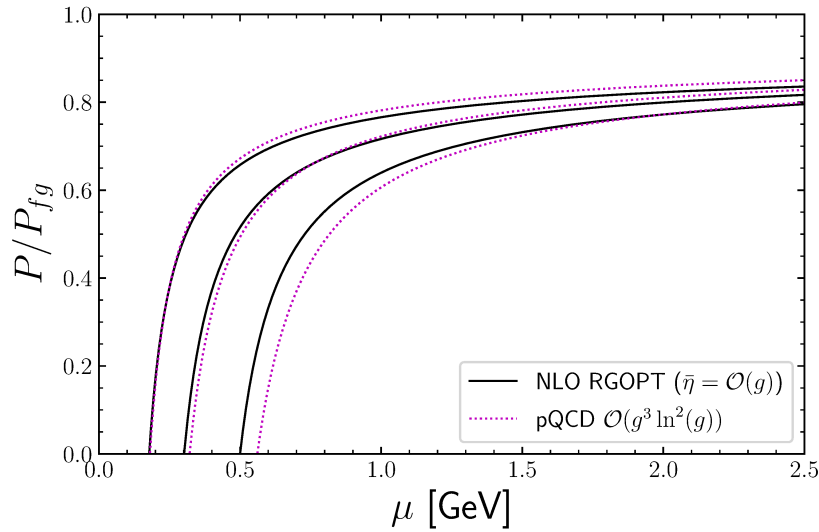


Figura 16 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Resultados da pQCD a partir da Eq. (164) incluindo $g^3 \ln^2 g$ (curvas pontilhadas em violeta) em comparação com a alternativa mais simples da NLO RGOPT (curva preta contínua). Em cada caso, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$.

fornece os resultados mostrados na Fig. 16, que são comparados com pQCD em NNLO incluindo o termo logarítmico de $4L$ da Eq. (164) (originalmente obtido na Ref. (GORDA *et al.*, 2018)). Ilustramos também a dependência de escala para o intervalo $\mu \leq \Lambda \leq 4\mu$ para as duas expressões. Vê-se a concordância bastante notável para a escolha da escala central $\Lambda = 2\mu$ (mais precisamente com diferenças inferiores a $\sim 1.5\%$ para quaisquer $\mu > 0.6$ GeV), enquanto a extensão da “incerteza” na escala da RGOPT ainda é ligeiramente melhor, mesmo para esta aproximação um tanto grosseira. Com relação à banda da dependência de escala da pQCD, incluindo o resultado de ordem perturbativa mais alto disponível, Eq. (164), dificilmente exibe uma diferença visível com a pressão perturbativa em NNLO, ordem g^2 , como estudado na Ref. (KURKELA *et al.*, 2010). Mas o efeito líquido do último termo de ordem mais alta da Eq. (164), sendo negativo, é deslocar para baixo (muito ligeiramente) os valores da pressão para valores dados de μ e Λ . Examinando a Fig. 13, observamos ainda que indo da NLO para a NNLO da pQCD há uma diminuição mais pronunciada da pressão para valores dados de μ (que é claro a partir dos termos globalmente negativos da NNLO $\mathcal{O}(g^2)$ na Eq. (164)). Agora, na Fig. 13 os valores exatos da pressão da NLO RGOPT são sensivelmente mais baixos do que as outras aproximações, enquanto em contraste a pressão da NLO RGOPT aproximada, obtida com o $\bar{\eta}$ perturbativo Eq. (165), concorda perfeitamente bem com a Eq. (164). Consequentemente, pode-se sugerir a partir dessas comparações que o resultado “exato” da NLO RGOPT pode ser uma aproximação mais precisa do que a Eq. (164) para os valores de pressão perturbativa de ordem ainda mais alta.

3.4.5 Solução a partir da equação do RG reduzida

Como discutimos na seção 3.3.3, o valor de B_2 é em princípio arbitrário, uma vez garantido que é pequeno o suficiente para que a expansão (123) seja válida. Vamos agora explorar outra prescrição possível onde consideramos $f_{RG} = 0$, Eq. (155) (vindo da RG reduzida, Eq. (56)), em vez de $f_{PMS} = 0$ Eq. (154) (vindo da PMS, Eq. (32)) para determinar o $\bar{\eta}(g, \mu)$ otimizado e o termo da RSC B_2 que em vez de ser fixado pelo determinante, $f_{RSC} = 0$ (132), agora é fixado por uma expressão mais simples escolhida de modo que $-9B_2/14$ cancela o termo negativo superior¹¹ $-8g/9$ de $D_{RG}(\eta, g, B_2, \mu)$, Eq. (159), em particular:

$$B_2(g) = -\frac{112}{81g}. \quad (166)$$

Este B_2 mais simples, e a princípio independente¹² de μ quando substituído em f_{RG} , Eq. (155), recupera-se soluções reais para todos os valores relevantes de μ . Como no estudo do RSC mais próximo do esquema \overline{MS} na seção 3.4.3, a constante de acoplamento é dada pela expressão perturbativa de 2L, Eq. (160). Outras prescrições semelhantes, mas ligeiramente diferentes para fixar B_2 são possíveis em geral para T e μ finitos. Normalmente, pode-se modificar a Eq. (166) para absorver uma parte das contribuições também dependentes de T e μ , mas a Eq. (166) tem a vantagem de ser universalmente válida também para o vácuo $T = \mu = 0$. Além disso, uma propriedade notável é que, para a maioria das escolhas de B_2 (e, portanto dos diferentes $\bar{\eta}(B_2)$ resultantes), desde que as soluções permaneçam reais, a pressão física resultante passa a ser quase invariante em relação a aquelas escolhas de parâmetros não físicos.

Para ilustrar o impacto desta nova prescrição no parâmetro de massa otimizado, $\bar{\eta}$, fornecemos a Fig. 17, onde a nova prescrição mais simples dá uma redução substancial da dependência de escala em comparação com a prescrição da seção 3.4.3. Também na maior parte da faixa de valores relevantes de μ , a massa otimizada com a equação do RG reduzida, $\bar{\eta}_{RG}$, é menor do que a massa otimizada com a equação do PMS dada na seção 3.4.3, $\bar{\eta}_{PMS}(\bar{B}_2)$, exceto para valores baixos de μ ($\mu \lesssim 0.9$ GeV) para $\Lambda = 2\mu, 4\mu$. Esta redução impressionante na dependência de escala também é evidente na Fig. 18, onde fornecemos o comportamento do desvio do esquema \overline{MS} , dado pela Eq. (166) comparado com aquele dado pelo determinante, Eq. (132). Ainda mais curioso é o fato de que, a Eq. (166) fornece valores ainda mais baixos para $|B_2 g^2|$ do que o determinante, $f_{RSC} = 0$. Então, uma pergunta justa é: por que definimos \bar{B}_2 dado pela Eq. (132) como o mais próximo do esquema \overline{MS} ? A resposta é dada pelo fato de que B_2 otimizado pela equação para o determinante (132) dá o esquema mais

¹¹ Este termo vem da expansão do termo $-\frac{8g(64g+81)}{9(64g+9)^2}$ da Eq. (159)

¹² A dependência com μ entra uma vez que escolhe-se arbitrariamente Λ dependente de μ

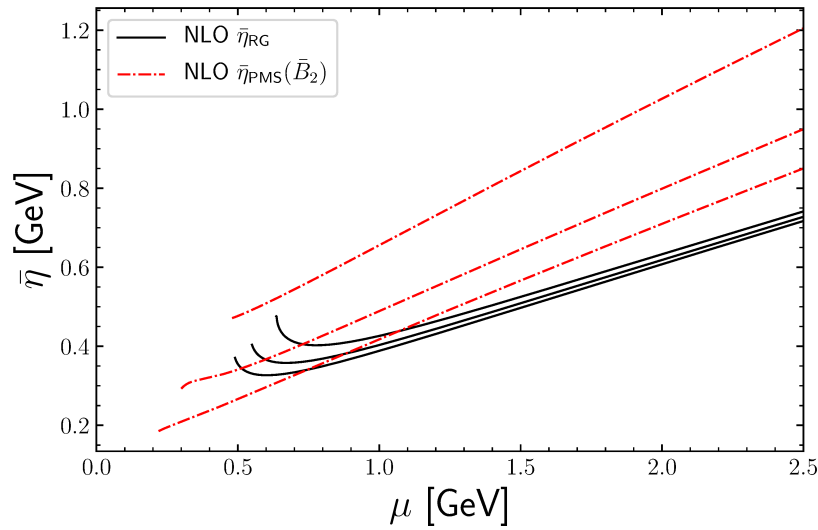


Figura 17 – A massa otimizada da RGOPT em função do potencial químico para $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ em NLO para η otimizado a partir de $f_{RG} = 0$, $\bar{\eta}_{RG}$ (contínuo) com B_2 dado pela Eq. (166), e a partir de $f_{PMS} = 0$, $\bar{\eta}_{PMS}(\bar{B}_2)$ (ponto-tracejado) com \bar{B}_2 otimizado pelo determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132). Em ambas prescrições, a curva superior corresponde a $\Lambda = \mu$, a curva central a $\Lambda = 2\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = 4\mu$.

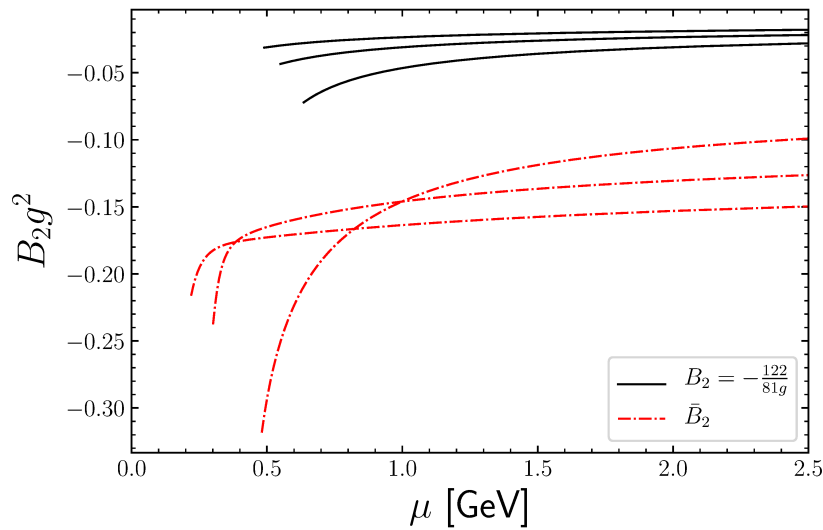


Figura 18 – A quantidade RSC, $B_2(\mu)g^2(\mu)$, a partir da Eq. (166) (contínuo) e do determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132) (ponto-tracejado) em função do potencial químico em $\Lambda = \mu, 2\mu$ e 4μ .

próximo de \overline{MS} onde se encontra simultaneamente soluções reais de $\bar{\eta}$ e \bar{g} a partir das equações do RG e de PMS. Então, quando renunciamos a otimizar \bar{g} e consequentemente a resolver estas duas equações simultaneamente, o uso do determinante (132) não é mais obrigatório e podemos escolher B_2 arbitrariamente enquanto forneça soluções reais para $\bar{\eta}$. Então, embora na seção 3.4.3 também renunciamos a resolver

simultaneamente as equações do RG e de PMS, o determinante (132) dá um valor de B_2 que em princípio permite que as soluções de PMS e do RG “toquem” ou, pelo menos, fiquem muito próximas do eixo real, e este valor não é necessariamente o menor valor que fornece solução real do PMS ou da equação RG separadamente como aqui constatado. Como veremos, no caso de temperaturas finitas, também podemos escolher uma expressão arbitrária para B_2 enquanto otimizamos η com a equação de PMS. Vamos observar que a Eq. (166) não necessariamente fornecerá soluções reais para o caso de temperaturas finitas.

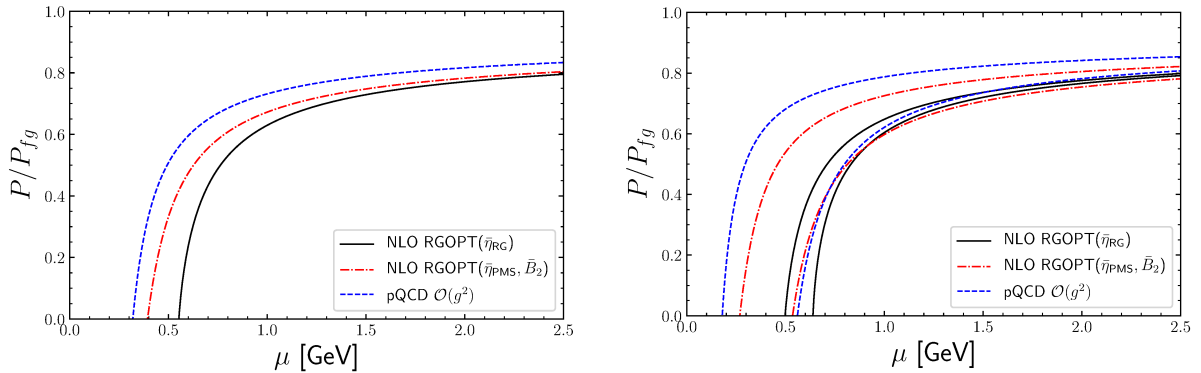


Figura 19 – A pressão normalizada em função do potencial químico. Os resultados da pQCD para a ordem g^2 (tracejado) são comparados com a RGOPT em NLO (ordem g) para duas prescrições de otimização: η otimizado a partir de $f_{RG} = 0$, $\bar{\eta}_{RG}$ (contínuo) com B_2 dado pela Eq. (166), e a partir de $f_{PMS} = 0$, $\bar{\eta}_{PMS}(\bar{B}_2)$ (ponto-tracejado) com B_2 otimizado pelo determinante $f_{RSC} = 0$, Eq. (132). Esquerda: Resultados para a escala central, $\Lambda = 2\mu$. Direita: Resultados para os valores extremos da escala, em todos os casos, a curva superior corresponde a $\Lambda = 4\mu$ e a curva inferior a $\Lambda = \mu$.

Na Fig. 19 comparamos a pressão dada pelas duas prescrições da RGOPT apresentadas aqui e com pQCD na ordem g^2 . Quando consideramos os resultados para a escala central, a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) e a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) dão resultados muito semelhantes para $\mu \gtrsim 1$ GeV e são quase iguais ao caso $\mu \gtrsim 1.5$ GeV. Por outro lado, quando comparamos os resultados para os valores extremos da escala considerada aqui, a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) é superior no que se refere à dependência de escala quando comparado com as outras duas aproximações. Para o valor de escala mais baixo $\Lambda = \mu$ que fornece valores mais altos da constante de acoplamento g , todas as três aproximações fornecem valores numéricos semelhantes para $\mu \gtrsim 0.8$ GeV. Em contraste, para o valor de escala mais alto $\Lambda = 4\mu$, nos potenciais químicos baixos, a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) está longe da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) e ainda mais longe dos valores da pQCD na ordem g^2 . Notemos também que o valor de μ no qual P é zero, μ_{min} é bastante alto em NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$), mesmo para $\Lambda = 4\mu$, $\mu_{min} \approx 0.5$ GeV. Isso é problemático se quisera-se usar essa pressão em aplicações astronômicas, como

por exemplo a determinação das relações massa-raio para estrelas de quarks, onde se espera que em $\mu \sim 0.3$ GeV uma densidade positiva seja obtida enquanto $P \gtrsim 0$.

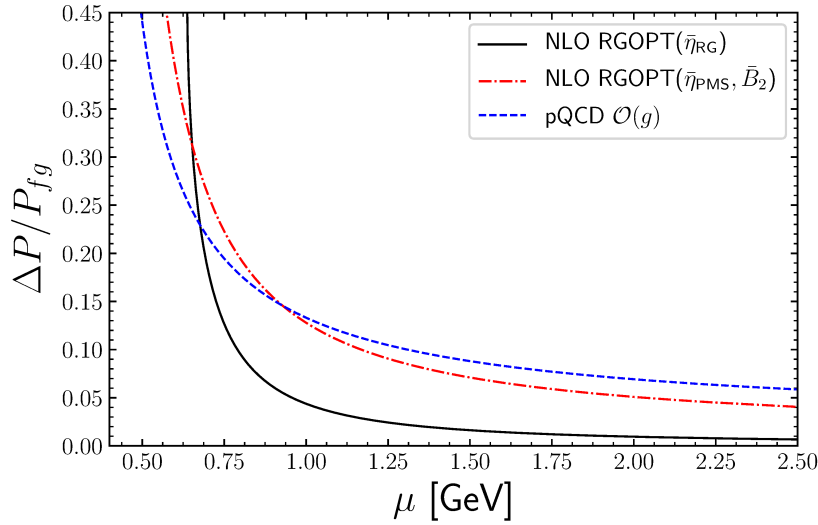


Figura 20 – A dependência de escala remanescente definida pela quantidade $\Delta P/P_{fg} \equiv (P(\Lambda = 4\mu) - P(\Lambda = \mu))/P_{fg}$ das pressões (normalizadas), como funções do potencial químico μ . Resultados da pQCD na ordem g^2 , da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) e da NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) são comparados.

Para deixar mais clara a superioridade na melhoria da dependência de escala da prescrição NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$), plotamos na Fig 20 a dependência de escala remanescente, $\Delta P/P_{fg}$. Para $\mu \gtrsim 1$ GeV, a dependência de escala remanescente da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) já é inferior a 0.05, um valor que a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) atinge em $\mu \gtrsim 2$ GeV e pQCD nunca atinge para os valores de μ considerados aqui. Para valores elevados de μ , $\mu \gtrsim 1.5$ GeV, a dependência de escala remanescente da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) é ainda menor, $\Delta P/P_{fg} \lesssim 0.02$, do que a escala de remanescente mais baixa da NLO RGOPT ≈ 0.04 e da pQCD ≈ 0.06 .

3.5 RESULTADOS PARA A MATÉRIA DE QUARKS QUENTE E DENSA

Nesta seção avaliaremos os resultados da RGOPT para o caso mais genérico de temperaturas finitas, e potenciais químicos finitos (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, s.d.), onde a expressão da pressão nesta aproximação foi apresentada na seção 3.3, Eq. (108). Como já discutido anteriormente, esta expressão mais complicada produzirá soluções imaginárias se as equações do PMS e do RG forem resolvidas simultaneamente. Isso já acontece para o caso mais simples, $T = \mu = 0$, como mostramos na seção 3.3.2 e foi relatado anteriormente em (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2012, 2013, 2015). Na seção 3.4.3, ao considerar o caso mais simples $T = 0$, $\mu \neq 0$, o problema foi contornado através de uma mudança (perturbativa) do esquema de renormalização (RSC) (primeiro usado no vácuo em (KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, 2013) e explicado também

aqui na seção 3.3.3), para recuperar soluções reais de uma maneira consistente com o RG. O parâmetro da RSC relevante, arbitrário a princípio, foi fixado de forma única exigindo colinearidade das curvas da PMS e do RG reduzida no plano η, g , que expressa precisamente a recuperação de soluções reais. Mas, tecnicamente, isso implica em se anular o determinante das derivadas parciais das equações do RG reduzida e do PMS, Eq. (132), e para resolver o último junto com a Eq. (32) para $(B_2, \eta(B_2, g))$. Embora a solução desse sistema seja bastante gerenciável para $T = 0, \mu \neq 0$, torna-se numericamente mais desafiador para o caso geral $T, \mu \neq 0$ uma vez que as equações combinadas resultantes são altamente não lineares. Portanto, neste caso geral de $T, \mu \neq 0$, vamos explorar a RSC com uma prescrição muito mais simples para recuperar soluções reais, enquanto ainda mantemos as propriedades esperadas de ressonância da RGOPT, que essencialmente acabam sendo numericamente equivalentes ao método de colinearidade mais elaborado usado anteriormente nos casos $T = 0, \mu = 0$ e $T = 0, \mu \neq 0$. Nesta seção, primeiramente vamos analisar a pressão dos quarks, onde a RGOPT é aplicada, para por último analisar a pressão da QCD considerando, como primeira aproximação, a pressão gluônica perturbativa.

3.5.1 Compatibilidade com a liberdade assintótica em NLO

Após definir $\delta = 1$, tomando a por seu valor obtido em LO, $a = \frac{\gamma_0}{2b_0}$ e após adicionar o termo da RSC $4g\eta^4 s_0 B_2$ a Eq. (108) é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{P_{q,\delta}(\hat{\eta}, \hat{\mu})}{N_f N_c} = & -\frac{2\eta^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{3}{4} - L_\eta \right] + 2T^4 J_1(\hat{\eta}, \hat{\mu}) + \frac{4\eta^4}{(4\pi)^2} \frac{\gamma_0}{b_0} \left[\frac{1}{2} - L_\eta \right] + \eta^2 \frac{\gamma_0}{b_0} T^2 J_2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \\ & - 3g \frac{\eta^4}{2\pi^2} C_F \left[L_\eta^2 - \frac{4}{3} L_\eta + \frac{3}{4} \right] - g(4\pi)^2 C_F \left\{ \left[\frac{\eta^2}{4\pi^2} (2 - 3L_\eta) + \frac{T^2}{6} \right] T^2 J_2(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{T^4}{2} J_2^2(\eta, \hat{\mu}) + \eta^2 T^2 J_3(\eta, \hat{\mu}) \right\} \\ & + \frac{\eta^4}{(4\pi)^2 g b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} + \frac{s_1}{s_0} g \right) + 4g\eta^4 s_0 B_2. \end{aligned} \quad (167)$$

Vamos agora aplicar a PMS e a equação do RG reduzida na Eq. (167) e resolvê-las para L_η a fim de identificar a solução compatível com a AF da equação do PMS e as duas soluções AF da equação do RG reduzida, de modo que tenhamos a forma já conhecida

$$f_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu) = -L_\eta + B_{\text{PMS}}(\eta, g, T, \mu) - \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu)} \equiv 0, \quad (168)$$

$$f_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, \mu) = -L_\eta + B_{\text{RG}}(\eta, g, T, \mu) \pm \frac{1}{6g} \sqrt{D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu)} \equiv 0, \quad (169)$$

com

$$B_{\text{PMS}}(\eta, g, T, \mu) = -\frac{7}{288g} + \frac{5}{12} + 2\pi^2 \left(J'_2 + \frac{T^2}{\eta^2} J_2 \right) \quad (170)$$

$$D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu) = \frac{9}{256} - \frac{47g}{24} - \frac{35g^2}{4} - \frac{9B_2g^2}{14} \\ + 144\pi^4 g^2 \left(J_2'^2 + \frac{T^4}{\eta^4} J_2^2 \right) + 36\pi^2 g \left(g - \frac{1}{8} \right) \left(\frac{T^2}{\eta^2} J_2 - J_2' \right) \\ + 32\pi^4 g^2 \frac{T^2}{\eta^2} (3J_2 - 1) J_2' - 192\pi^4 g^2 \left(J_3' + \frac{T^2}{\eta^2} J_3 \right), \quad (171)$$

$$B_{\text{RG}}(\eta, g, T, \mu) = -\frac{1}{18g} + \frac{2}{3} + \frac{32}{9(64g+9)} + 4\pi^2 \frac{T^2}{\eta^2} J_2, \quad (172)$$

$$D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu) = -11g^2 - \frac{8g(81+64g)}{9(9+64g)^2} - \frac{9}{14} B_2 g^2 \\ + 64\pi^4 g^2 \left[\frac{T^4}{\eta^4} J_2 (6J_2 - 1) - 6 \frac{T^2}{\eta^2} J_3 \right], \quad (173)$$

onde $J_i \equiv J_i(\eta^2/T^2, \mu/T)$, $J'_i \equiv \partial_x J_i(x)$, ($x = \eta^2/T^2$), e separamos explicitamente a parte independente de T, μ em $D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu)$ e $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu)$ na primeira linha para facilmente ver seu limite $T, \mu \rightarrow 0$ (recuperando Eqs. (128), (129), (130) e (131)).

Também relevante para o nosso propósito e comparações é a expressão da pressão perturbativa resultante, Eq. (97), para quarks estritamente sem massa,

$$\frac{P_{q,1}^{PT}(m \rightarrow 0)}{P_{SB}(T, \mu)} = 1 - \frac{N_f}{3} \frac{200g}{21} \left[\frac{1 + \frac{72}{5} \frac{\hat{\mu}^2}{(2\pi)^2} + \frac{144}{5} \frac{\hat{\mu}^4}{(2\pi)^4}}{1 + \frac{120}{7} \frac{\hat{\mu}^2}{(2\pi)^2} + \frac{240}{7} \frac{\hat{\mu}^4}{(2\pi)^4}} \right], \quad (174)$$

e o limite de Stefan-Boltzmann para o gás de quarks ideal

$$\frac{P_{SB}(T, \mu)}{N_f N_c} = T^4 \left(\frac{7\pi^2}{180} \right) \left[1 + \frac{120}{7} \frac{\hat{\mu}^2}{(2\pi)^2} + \frac{240}{7} \frac{\hat{\mu}^4}{(2\pi)^4} \right]. \quad (175)$$

3.5.2 Massa da RGOPT otimizada na ordem g na aproximação de T alta

Antes de considerar soluções mais completas (exatas), também é instrutivo investigar o comportamento da solução AF relevante do PMS Eq. (168) para $T \neq 0$ (mas com $\mu = 0$), tomando entretanto a aproximação de altas temperaturas, tal que J_1 e J_2 são expressões analíticas simples de η/T (e as contribuições de J_3 sendo de ordem superior podem ser desprezadas nesta aproximação), dadas por (LAINE;

VUORINEN, Aleks, 2016).

$$2TJ_1(T, 0) \approx T^4 \frac{7\pi^2}{180} - T^2 \frac{\eta^2}{12} + \eta^4 \frac{2}{(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{\pi T}{\eta e^{\gamma_E}} \right) + \frac{3}{4} \right], \quad (176)$$

$$J_2(T, 0) \approx \frac{T^2}{12} + \frac{\eta^2}{4\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\eta e^{\gamma_E}}{\pi T} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (177)$$

$$J_3(T, 0) \approx 0. \quad (178)$$

Depois de fazer algo de álgebra, obtém-se facilmente, para os primeiros termos perturbativos:

$$\frac{\bar{\eta}^2}{T^2} \simeq 6\pi^2 g \left(1 - 6g(3L_T + \frac{85}{36}) \right)^{-1} + 256\pi^2 g^2 \left(\frac{67}{288} + 6\pi^2 J_3 \right) + \mathcal{O}(g^3); \quad (179)$$

onde definimos $L_T \equiv \ln[\Lambda/(\pi T)]$. Observe que esta solução é independente de B_2 , em outras palavras, nesta aproximação bruta temos soluções reais de $\bar{\eta}$ no esquema $\overline{\text{MS}}$, então podemos definir $B_2 = 0$ na Eq. (167) para esta aproximação. Como se pode ver, a solução compatível com a AF de $\bar{\eta}$ tem o comportamento típico da massa de quark térmica perturbativa $\eta \sim \sqrt{g} T$ (LAINE; VUORINEN, Aleks, 2016), com um coeficiente aqui inteiramente determinado pela consistência com o RG¹³. No entanto, não se espera que a expansão de altas temperaturas (e puramente perturbativa), Eq. (179) forneça uma boa aproximação para temperaturas mais baixas¹⁴, além de não ser útil para $\mu \neq 0$. Contudo, antes de prosseguir com uma análise mais elaborada, é instrutivo ilustrar os resultados do uso da Eq. (179) inserida na pressão da NLO RGOPT, Eq. (167), mas com a expressão resultante sendo simplesmente truncado em ordem g . Isso é mostrado na Fig. 21, onde é feita uma comparação com a pressão perturbativa padrão de quarks sem massa em ordem g , Eq. (174). As duas pressões não coincidem exatamente (não têm razão para serem idênticas, pois a RGOPT envolve uma massa não trivial), mas são muito próximas, o que é uma boa verificação de consistência de nosso procedimento, já que a RGOPT é suposto aproximar uma teoria sem massa. Consequentemente, isto indica que há cancelamentos não triviais dos termos dependentes de η na Eq. (167) ao usar a Eq. (179), como acontece com m na equação aproximada (174) em primeira ordem. Em contraste, substituir, por exemplo, η da Eq. (167) pela massa térmica de Debye padrão daria resultados mais distantes da pressão perturbativa sem massa. Contudo, o objetivo principal da construção da RGOPT é fornecer desvios de ordem superior mais interessantes da expansão térmica perturbativa pura, que abordamos agora, uma vez que por construção induz termos de ordem superior não triviais em consistência com propriedades do RG.

¹³ Resultado semelhante é obtido para os primeiros termos perturbativos se substituirmos a Eq. (177) em (113) e então, resolva-se para $\frac{\eta^2}{T^2}$.

¹⁴ Em particular, visto que a $\bar{\eta}$ exata em NLO que examinamos abaixo tem a propriedade $\bar{\eta}/T > 1$, o que de alguma forma contradiz o intervalo de validade da aproximação de T alta.

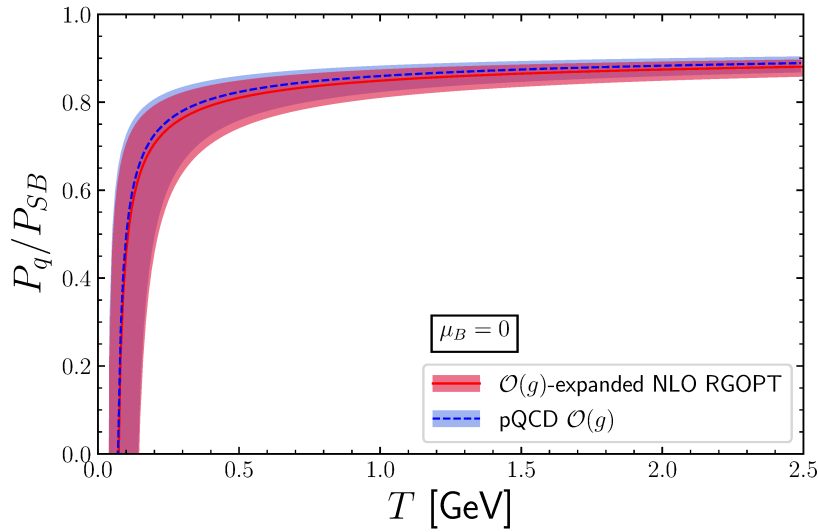


Figura 21 – Pressão da NLO RGOPT perturbativamente reexpandida (linha fina, vermelha) em comparação com a pressão perturbativa padrão na ordem g Eq. (174) (azul, tracejada) para $\mu_B = 0$, com dependência de escala $\Lambda = \pi T - 4\pi T$.

3.5.3 Uma aproximação perturbativa simples, otimização na ordem g^2

Para valores arbitrários intermediários ou moderados de T (e μ), as soluções compatíveis com a AF não se comportam tão simplesmente quanto a Eq. (179) visto que a Eq. (171) tem uma dependência de T envolvida, como esperado das integrais térmicas padrão. Entretanto, guiado por seus limites em temperaturas altas e nulas, não é difícil seguir as respectivas soluções (numéricas), selecionando a correspondência AF correta sem ambiguidade. A coisa mais simples que podemos fazer para evitar o problema das soluções complexas, enquanto capturamos ao mesmo tempo propriedades de dependência de T , μ mais exatas além da Eq. (179), é reexpandir a Eq. (168) perturbativamente até $\mathcal{O}(g^2)$, mas mantendo as integrais térmicas exatas nos coeficientes (a serem avaliados numericamente). Após algumas manipulações algébricas obtemos¹⁵

$$\frac{\eta^2}{T^2} = 72\pi^2 g J_2 + g^2 \left[\frac{4352}{9} \pi^4 J_2' (1 - 12J_2) + \frac{8704}{3} \pi^4 J_3 + J_2 \left(\frac{81484}{27} \pi^2 - 1296\pi^2 \ln \frac{\eta}{\Lambda} \right) \right], \quad (180)$$

que deve ser resolvida numericamente como função implícita de $\bar{\eta}$. A expressão acima fornece prontamente uma solução real de $\bar{\eta}$, e tem a vantagem de permitir considerar $\mu \neq 0$ dentro das integrais térmicas (e dentro do acoplamento) enquanto mantém uma expressão perturbativa relativamente simples. Inserindo a solução da Eq. (180)

¹⁵ Como uma sutileza, é importante primeiro expandir perturbativamente a Eq. (168) antes de resolvê-la (formalmente) para η^2/T^2 e depois de resolver para η^2/T^2 expandir novamente até a ordem g^2 , caso contrário, perder-se-á as últimas propriedades da compatibilidade com a AF. Observe que a Eq. (180) não depende do parâmetro RSC B_2 , que apareceria apenas na próxima ordem g^3 .

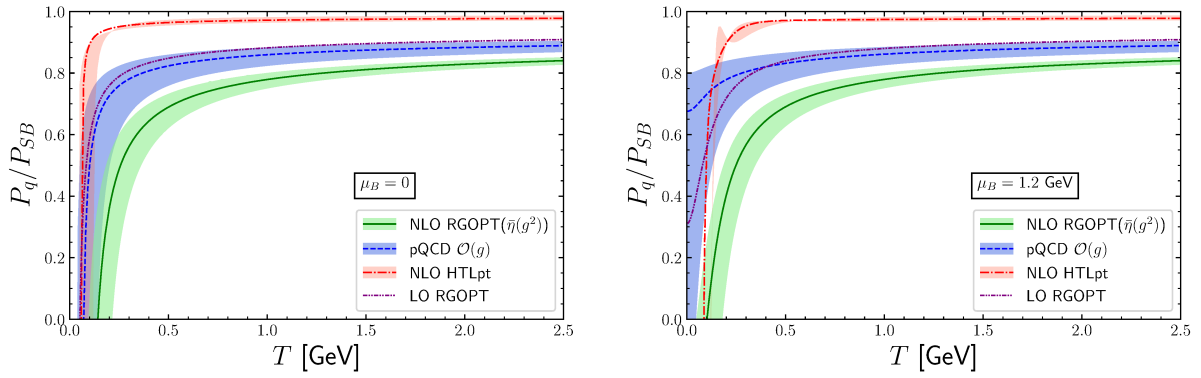


Figura 22 – Pressão normalizada para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita) da NLO RGOPT, Eq. (167) ($B_2 = 0$) usando $\bar{\eta}(g^2)$ perturbativamente reexpandida usando as integrais térmicas exatas (faixa verde, linhas finas), em comparação com a pressão da pQCD na ordem g (faixa azul, linhas tracejadas) e a NLO HTLpt (faixa rosa, linhas pontilhadas), com dependência de escala $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$.

dentro da pressão da NLO RGOPT, Eq. (167) (mantendo as integrais térmicas exatas e tomando $B_2 = 0$), fornece os resultados ilustrados na Fig. 22, onde comparamos com a pressão de quarks perturbativa sem massa em NLO (ordem g), Eq (174), e com a pressão da NLO HTLpt puramente de quarks (ANDERSEN *et al.*, 2004)¹⁶, e também com a pressão da LO RGOPT com¹⁷ $s_1 \neq 0$. Se apresentam resultados para dois valores do potencial químico bariônico, $\mu_B = 0$ e $\mu_B = 1.2$, onde o potencial químico bariônico é simplesmente $\mu_B = 3\mu$. Primeiramente, deve se notar que, na ordem trivial de LO (ordem g^0), a RGOPT já dá um resultado interessante e de fato muito próximo da pressão da pQCD na ordem g para a escala central, $\Lambda = 2\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$, com a vantagem da LO RGOPT ser totalmente independente do valor da escala Λ . Como pode ser visto, a pressão resultante da NLO RGOPT tem uma diminuição e um afastamento do limite de SB mais pronunciada do que a pressão da PT para valores de T moderados e baixos, que é principalmente atribuída às contribuições da ordem superior g^2 na Eq. (180). Em particular, além de evitar o notório comportamento de oscilação das pressões da pQCD padrão em ordens NNLO intermediárias (VUORINEN, A., 2003), a RGOPT também tem uma melhor dependência de escala de renormalização (pelo menos para $T > 1$ GeV, moderadamente em comparação com NLO pQCD), que é uma das propriedades esperadas da RGOPT. Embora a HTLpt tenha uma melhor dependência de escala para a maioria dos valores de T , nessa ordem os resultados convergem muito rapidamente para o limite de Stefan-Boltzmann (isso deveria acontecer apenas

¹⁶ Deve-se ter cuidado em apenas aceitar a contribuição puramente de quarks nas expressões dadas na Ref. (ANDERSEN *et al.*, 2004)

¹⁷ Conforme discutido no caso $T = 0$, $\mu \neq 0$, isso implica adicionar o termo de ordem g^0 , $m^4 s_1$ na Eq. (109), e $8\pi^2 s_1$ na Eq. (113)

em temperaturas muito altas).

3.5.4 Soluções reais exatas em NLO RGOPT

Depois de explorar a solução aproximada da NLO $\bar{\eta}$ que fornece soluções no esquema $\overline{\text{MS}}$, finalmente chegamos a prescrições mais elaboradas que incorporam as propriedades completas da RGOPT e recuperam soluções reais ao implementarmos a RSC.

3.5.4.1 Soluções a partir do PMS

A maneira mais simples de explorar a liberdade de escolha da RSC, é fixar em um primeiro estágio B_2 de modo que seja recuperada uma solução real da solução AF do PMS Eq. (168), ou seja, $D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu) > 0$ para os valores de g mais relevantes na Eq. (171). A última não é uma prescrição única, mas é bastante restrita, uma vez que, se $D_{\text{PMS}}(\eta, g, B_2, T, \mu) > 0$ torna-se muito grande, a equação compatível com a AF, Eq. (168), assume valores muito negativos e não fornece mais uma solução real. Por exemplo, se tentarmos resolver B_2 com o determinante Eq. (132), como feito para o caso $T = 0, \mu \neq 0$, não se encontram soluções reais para todos os valores relevantes de T . Por inspeção, uma prescrição sensata é fixar B_2 de forma a cancelar o maior termo negativo (em magnitude), $-47g/24$ (como feito na seção 3.4.5), ou explicitamente:

$$B_2 = -\frac{329}{108g} \quad (181)$$

A vantagem disso é que B_2 é o mais simples possível, enquanto a solução resultante de $\bar{\eta}$ tem correções de ordens superiores arbitrárias não triviais, provenientes de todos os termos remanescentes da Eq. (171). Além disso, as soluções de $\bar{\eta}$ permanecem reais para praticamente todos os valores relevantes de $g(T, \mu)$. Seguir a solução de $\bar{\eta}$ compatível com a AF, Eq. (168) a partir de $T = 0$ até um T arbitrário é em princípio possível, mas apenas para uma escala Λ fixa (assim também um $g(\Lambda)$ fixo) não relacionado a T , caso contrário, obviamente, em algum $\Lambda \sim \pi T$ pequeno, obteríamos $\Lambda \sim \Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ onde o acoplamento perturbativo diverge.

3.5.4.2 Soluções a partir do RG

Como feito na seção 3.4.5 no caso $T = 0, \mu \neq 0$, outra prescrição possível é considerar as soluções da equação do RG reduzida, Eq. (169), em vez da equação do PMS, Eq. (168), para determinar $\bar{\eta}(g, B_2, T, \mu)$ otimizado. Como anteriormente com a equação do PMS, para $B_2 = 0$ obtém-se geralmente apenas solução complexa devido ao fato de $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu) < 0$. Em comparação com o caso $T = 0, \mu \neq 0$, em que apenas cancelamos o termo mais negativo em $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu)$, neste caso as

integrais térmicas tornam novamente $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu) < 0$ então somos forçados a usar uma prescrição mais drástica e ao mesmo tempo simples. Assim, a ideia é usar o parâmetro do RSC B_2 , inserindo-o somente dentro de $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu)$, para cancelar completamente $D_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu) = 0$ levando assim a uma solução real única compatível com a AF para $\ln(\eta/\Lambda)$ (mas ainda uma equação implícita para η quando $T, \mu \neq 0$):

$$\ln \frac{\eta}{\Lambda} = B_{\text{RG}}(\eta, g, B_2, T, \mu). \quad (182)$$

A expressão para B_2 necessária é obtida trivialmente a partir de uma equação de primeira ordem:

$$B_2 = -\frac{154}{9} - \frac{112}{81} \frac{64g + 81}{g(64g + 9)^2} + \frac{1792\pi^4}{18} \frac{T^4}{\eta^4} J_2(6J_2 - 1) - \frac{1792\pi^4}{3} \frac{T^2}{\eta^2} J_3. \quad (183)$$

Esta prescrição, além de ser muito simples, fornece soluções reais para todos os valores de temperatura e potencial químico relevantes e como veremos mas adiante, e também uma redução significativa da dependência da escala de regularização. Pode-se pensar que ao fazer $D_{\text{RG}} = 0$, essa redução drástica cortará muitas das informações de ordem superior. No entanto, esta informação de ordem superior está contida na expressão do parâmetro RSC B_2 .

3.5.5 Resultados numéricos para as soluções exatas em NLO

Aqui, vamos dar os resultados numéricos para a RGOPT em LO e NLO com as duas prescrições apresentadas acima para fixar $\bar{\eta}$ e o parâmetro da RSC, B_2 . Além disso, para completar, apresentamos todas as quantidades para dois valores do potencial químico bariônico $\mu_B = 0$ e 1.2 GeV que serão aqui considerados.

Na Fig. 23 traçamos o parâmetro de massa da RGOPT otimizado, $\bar{\eta}$, como função da temperatura onde apresentamos as duas prescrições para otimizar o parâmetro η . $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ foi otimizado com a solução compatível com a AF da PMS, Eq. (168), enquanto B_2 foi fixado com a Eq. (181). Por outro lado, $\bar{\eta}_{\text{RG}}$ foi otimizado com a solução da forma simples da equação do RG reduzida Eq. (182) enquanto B_2 sendo corrigido pela Eq. (183) que impõe $D_{\text{RG}} = 0$. Além de $\bar{\eta}_{\text{RG}}$ ser menos dependente da escala de regularização, possui valores mais altos do que $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ em todo o intervalo de T . Aliás, é importante ver que $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$, em NLO, é bastante semelhante ao resultado de LO em $T \gtrsim 1$ GeV. Isso é facilmente compreendido, pois ambas são soluções da equação do PMS. Novamente, o parâmetro de massa está se comportando de maneira bastante semelhante a uma massa de Debye $\bar{\eta} \sim T$ para todas as prescrições apresentadas. Para os valores de T mais baixos, esse comportamento linear muda, mas isso é facilmente explicado, uma vez que a constante de acoplamento assume valores muito altos e os termos de ordem superior se tornam mais relevantes. Apesar da semelhança de

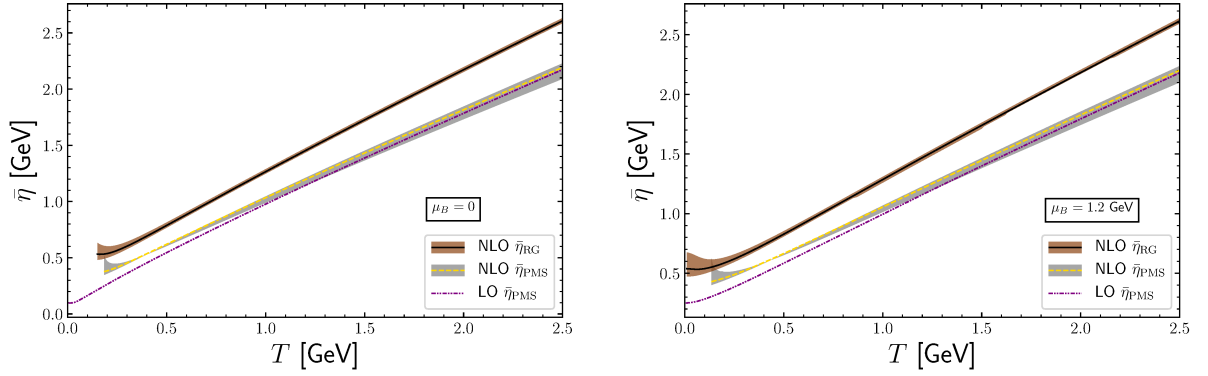


Figura 23 – Parâmetro da RGOPT, $\bar{\eta}$, como função de temperatura, T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1, 2$ GeV (direita) calculado com 2 prescrições diferentes: $\bar{\eta}$ a partir de $f_{\text{PMS}} = 0$ (faixa marrom, linhas finas) e $\bar{\eta}$ a partir da Eq. (182) (faixa cinza, linhas tracejadas). Também comparamos com o resultado invariante da escala da LO RGOPT (linhas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$.

$\bar{\eta}$ e da massa de Debye, lembramos que $\bar{\eta}$ é usado apenas para otimizar a pressão e não representa uma quantidade física conforme já mencionado.

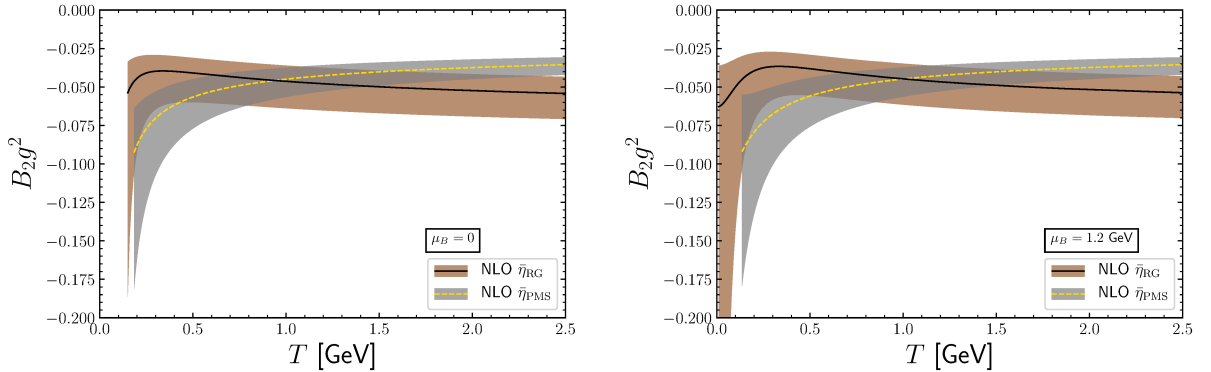


Figura 24 – Parâmetro do RSC $B_2 g^2$ como função da temperatura, T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita). Os valores de $B_2 g^2$ foram obtidos com a Eq. (183) (faixa marrom, linhas finas) e com a Eq. (181) (faixa cinza, linhas tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$.

O desvio do esquema $\overline{\text{MS}}$, $B_2 g^2$, é plotado na Fig. 24 como função de T . Em baixas temperaturas, $T \lesssim 0.8$ GeV o valor absoluto, $|B_2 g^2|$, quando fixado com a Eq. (183) é menor do que quando é fixado com a Eq. (181), já para $T \gtrsim 1.1$ GeV isso é invertido. Também é importante notar que, quando se renuncia a otimizar B_2 usando o determinante Eq. (132), e usa-se as expressões mais simples, Eqs. (183), (181) (e Eq. (166) para o caso $T = 0$, $\mu \neq 0$), obtém-se um desvio menor do esquema $\overline{\text{MS}}$. É

importante deixar claro que, quando desistimos de encontrar $\bar{\eta}$ e \bar{g} simultaneamente, não há mais necessidade de usar a Eq. (132), e fica-se livre de escolher uma prescrição mais simples como feito aqui.

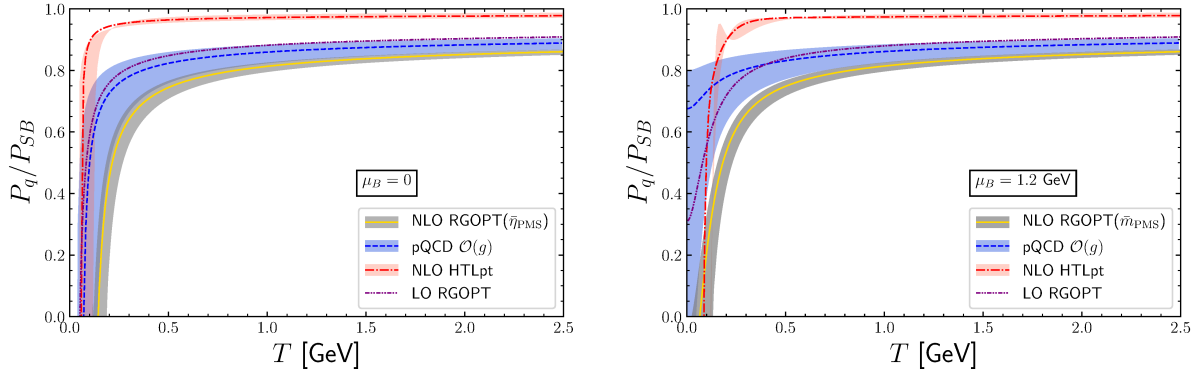


Figura 25 – Pressão da NLO RGOPT como função de T , para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita), usando $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ (faixas cinza, linhas finas). Os resultados são comparados com os fornecidos pela NLO pQCD (faixas azuis, linhas tracejadas), a NLO HTLpt (faixa rosa, linhas ponto-tracejadas) e a LO RGOPT (linhas violetas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$.

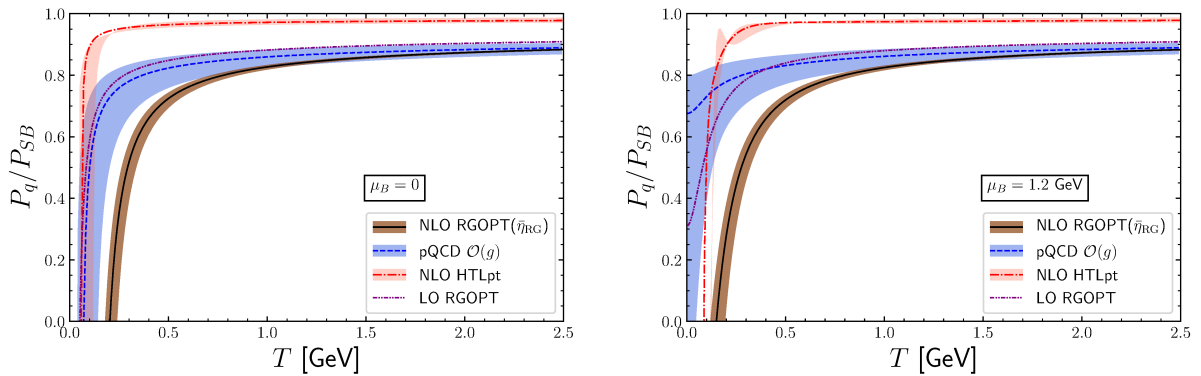


Figura 26 – Pressão da NLO RGOPT como função de T para $\mu_B = 0$ (esquerda) e $\mu_B = 1.2$ GeV (direita), usando $\bar{\eta}_{\text{RG}}$ (faixas marrons, linhas finas). Os resultados são comparados com os fornecidos pela NLO pQCD (faixas azuis, linhas tracejadas), a NLO HTLpt (rosa, linhas ponto-tracejadas) e a LO RGOPT (linhas violetas ponto-ponto-tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}} - 4\pi\sqrt{T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2}}$.

A pressão resultante após substituir na Eq. (167) os valores otimizados de $\bar{\eta}$ e os valores de B_2 plotados nas Figs. 23 e 24 respectivamente, é apresentada nas Figs. 25 e 26. Na Fig. 25 a pressão dada pela Eq. (167) usando $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ e B_2 da Eq. (181) é confrontado com a pQCD na ordem g e NLO HTLpt, bem como com a

LO RGOPT. Podemos ver que a solução exata do PMS possibilita uma melhora na dependência de escala quando comparamos com a pressão da Fig 22 onde foi usado $\bar{\eta}(g^2)$ reexpandido da Eq. (180). No entanto, a melhora na dependência da escala na pressão é bastante impressionante quando usamos $\bar{\eta}_{RG}$ otimizado pelo RG Eq. (182) como mostra claramente a Fig. 26. Também podemos ver que, para $T \gtrsim 1.5$ GeV a dependência de escala remanescente da pressão da NLO RGOPT da Fig. 26 é quase imperceptível, o que é uma grande característica, e o propósito de usar-se propriedades do RG. Outra mudança visível é que a temperatura em que $P = 0$, T_{min} , é um pouco mais alta quando usamos $\bar{\eta}_{RG}$. Este comportamento também foi obtido no caso $T = 0$, $\mu \neq 0$, onde o aumento de μ_{min} foi bem mais drástico, tornando o EoS difícil de usar em aplicações de astronomia sem fazer alguma modificação. Felizmente, no caso de temperaturas finitas, ambas as prescrições produzem valores de pressão semelhantes.

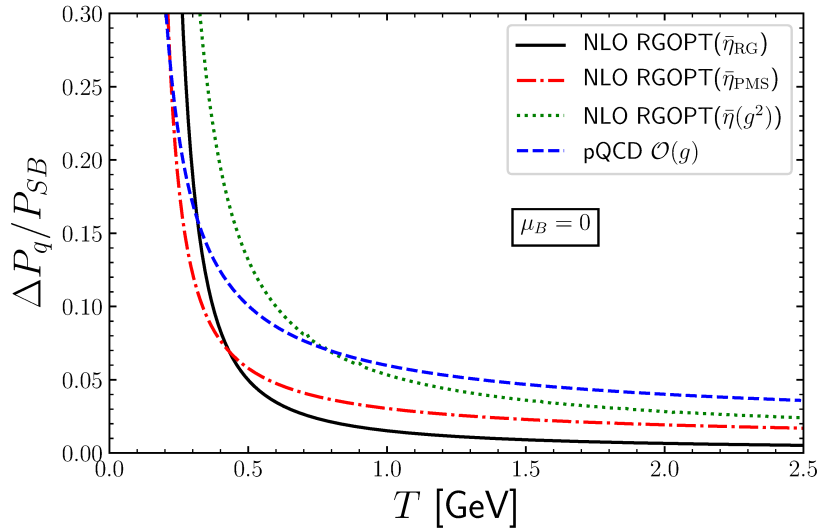


Figura 27 – A dependência de escala remanescente definida pelas diferenças $\Delta P_q/P_{SB} \equiv (P_q(\Lambda = 4\pi T) - P_q(\Lambda = \pi T))/P_{SB}$ das pressões (normalizadas), como funções da temperatura T . Os resultados de pQCD na ordem g (linha tracejada) são comparados com a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$) (linha fina), NLO RGOPT($\bar{\eta}_{PMS}$) (linha ponto-tracejada) e NLO RGOPT($\bar{\eta}(g^2)$) (linha pontilhada).

Para uma comparação clara da dependência de escala, fornecemos a Fig. 27, onde comparamos as diferentes aproximações dadas aqui para a NLO RGOPT, exceto aquela da seção 3.5.2, com a pQCD na ordem g . O fato que a dependência de escala remanescente da pQCD seja menor em $T \lesssim 0.4$ GeV do que a dependência de escala remanescente da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{RG}$), é apenas o resultado da temperatura T_{min} seja diferente para todas as aproximações. Assim, quando a NLO RGOPT tem uma dependência de escala considerável, a pQCD já apresenta a diminuição da dependência de escala, pois todas as aproximações mostram uma diminuição da dependência de

escala remanescente conforme T aumenta. Como esperado, truncamentos na ordem de $\bar{\eta}$ produzem um incremento na dependência de escala como podemos ver do resultado de $\eta(g^2)$ truncado na ordem g^2 . Isso mostra que termos de ordem superior são fundamentais para compensar a dependência de escala.

3.5.6 Efeitos da contribuição gluônica perturbativa

Já foi mencionado que estamos aplicando o formalismo RGOPT somente ao setor de quarks, posto que implementar a RGOPT para o setor gluônico da QCD é bem mais complicado. Este é um tema de pesquisa em andamento (KNEUR, Jean-Loc; PINTO, s.d.). Enquanto isso, podemos simplesmente adicionar a pressão perturbativa gluônica à contribuição não perturbativa de quarks, Eq. (167). A expressão de 2L da pressão de glúons na temperatura finita é bem conhecida (KAPUSTA, Joseph I., 1979; KAPUSTA, J. I.; GALE, 2011) e dada por:

$$P_g^{\text{PT}} = \left(N_c^2 - 1\right) \frac{\pi^2 T^4}{45} (1 - 5N_c g). \quad (184)$$

Então nossa pressão completa para a QCD em 2L é dada pela Eq. (184) mais a Eq. (167):

$$P = P_g^{\text{PT}} + P_{q,\delta}. \quad (185)$$

Para efeitos de normalização devemos também considerar a contribuição dos glúons ao limite de Stefan–Boltzmann, obtendo

$$P_{SB} = \left(N_c^2 - 1\right) \frac{\pi^2 T^4}{45} + T^4 \left(\frac{7\pi^2}{180}\right) \left[1 + \frac{120}{7} \frac{\hat{\mu}^2}{(2\pi)^2} + \frac{240}{7} \frac{\hat{\mu}^4}{(2\pi)^4}\right]. \quad (186)$$

Vamos agora comparar a pressão (185) com o estado da arte da pQCD $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$ (VUORINEN, A., 2003), NNLO HTLpt (HAQUE *et al.*, 2014a, 2014b), NLO HTLpt (HAQUE *et al.*, 2013) e também com os dados da LQCD da Ref. (BORSANYI, Szabolcs *et al.*, 2010a), onde para o último usamos o resultado com $N_f = 8$. Por uma questão de simplicidade, apenas analisamos aqui o caso do potencial químico bariônico zero. Os resultados para a pQCD $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$ e a NNLO HTLpt são calculados usando o acoplamento aproximado de 3L usado na Ref. (HAQUE *et al.*, 2014b).

Na Fig. 28 nós mostramos a pressão da NLO RGOPT normalizada por P_{SB} com contribuição gluônica perturbativa, usando $\bar{\eta}(g^2)$ reexpandida perturbativamente e o exato $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ obtido com a Eq. (168) e comparado com o resultado do estado da arte da pQCD na $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$. Como podemos ver aqui, os resultados da pQCD tendem a aumentar a dependência de escala à medida que se vai para ordens perturbativas mais altas. Além disso, a pressão gluônica adiciona uma dependência remanescente de escala extra, proveniente da dependência de escala da constante de acoplamento

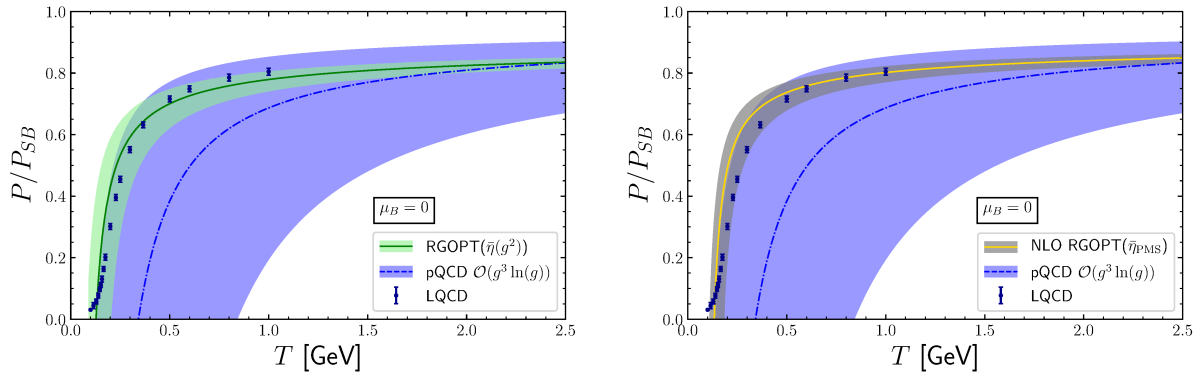


Figura 28 – Pressão da NLO RGOPT, para $\mu_B = 0$, usando $\bar{\eta}(g^2)$ reexpandido perturbativamente da Eq. (180) (à esquerda) e o $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ exato obtido com Eq. (168) (direita) em comparação com o estado da arte para a pressão perturbativo na $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$ (faixa azul, linhas tracejadas). Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi T - 4\pi T$.

g . Além da dependência de escala imensa, o resultado da pQCD para a escala central $\Lambda = 2\pi T$ está longe dos resultados fornecidos por LQCD. O resultado da pressão para a escala central, $\Lambda = 2\pi T$, usando $\bar{\eta}(g^2)$ é bastante satisfatório e está muito próximo dos dados da LQCD. Por outro lado, o resultado usando $\bar{\eta}_{\text{PMS}}$ exato é ainda menos dependente da escala e o resultado da escala central concorda muito bem com LQCD em $T \gtrsim 0.5$ GeV. O fato de ambos, o $\bar{\eta}$ truncado e o exato fornecerem resultados tão próximos aos dados da LQCD, mostra a boa convergência dada pelo método. Em contraste, pQCD e HTLpt têm mudanças drásticas quando vamos de uma ordem perturbativa para outra. A Fig 29 mostra a pressão da NLO RGOPT usando $\bar{\eta}_{\text{RG}}$, e é comparada com a pQCD $\mathcal{O}(g^3 \ln g)$, NNLO e NNLO HTLpt e dados da LQCD. A figura mostra claramente como os resultados da RGOPT na escala central observam uma melhor concordância com o LQCD do que com a NNLO HTLpt. Em particular, nota-se que para $T \gtrsim 0.25$ GeV nossos resultados mostram uma concordância surpreendente com os dados da LQCD até $T = 1$ GeV, que representa o maior valor considerado nos cálculos na rede da Ref. (BORSANYI, Szabolcs *et al.*, 2010a). Por outro lado, apesar de mostrar uma boa concordância para a faixa $T \approx 0.25 - 0.5$ GeV, os resultados do NNLO HTLpt já começam a divergir dos dados da LQCD em $T \simeq 0.5$ GeV. Além de serem superiores na escala central, os resultados da RGOPT desta figura são significativamente menos dependentes da escala do que os fornecidos pela NNLO HTLpt. A partir desta mesma figura, nota-se imediatamente que a NLO HTLpt não apresenta um desempenho satisfatório tendo um comportamento físico incorreto em temperaturas intermediárias e baixas. Então, para melhor comparar a NLO RGOPT obtida usando $(\bar{\eta}_{\text{RG}})$, com a NNLO HTLpt e os dados da LQCD no intervalo $T = 0 - 1$ GeV, a Fig 30 nos permite melhor apreciar a melhoria adicional fornecida pelo RGOPT.

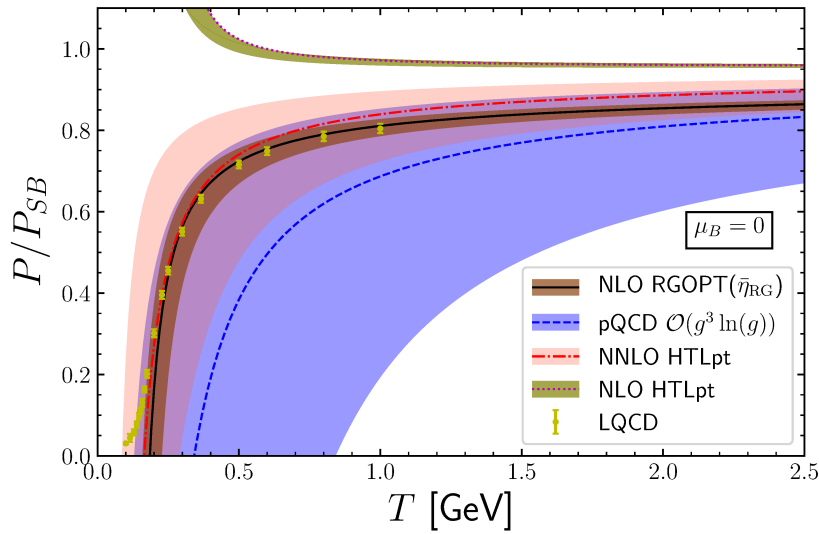


Figura 29 – Pressão da NLO RGOPT obtida com $\bar{\eta}_{RG}$ (faixa marrom, linhas finas), em comparação com pQCD padrão $\mathcal{O}(g^3 \ln(g))$ (faixa azul, tracejado), NLO e NNLO HTLpt e com LQCD em $\mu_B = 0$. Os valores da escala estão no intervalo $\Lambda = \pi T - 4\pi T$.

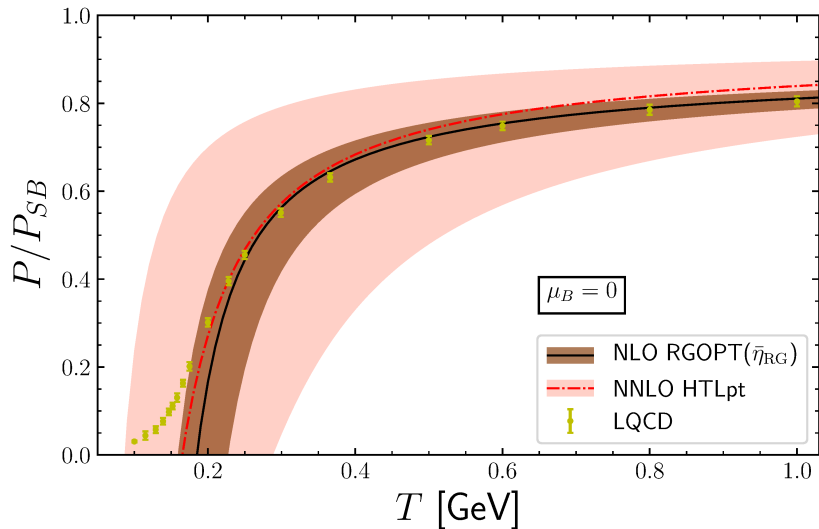


Figura 30 – Pressão da NLO RGOPT obtida com $\bar{\eta}_{RG}$ (faixa marrom, linhas finas), em comparação com NNLO HTLpt e com LQCD em $\mu_B = 0$.

Uma característica muito boa é que, em $T = 1$ GeV, a largura de banda RGOPT é quase da mesma largura do erro dos dados da LQCD. O fato desta excelente concordância com os dados da LQCD para $T \gtrsim 0.25$ GeV nesta aproximação onde os glúons contribuem apenas perturbativamente na ordem g , sugere que, nessas temperaturas a maior parte da informação não perturbativa está dentro do setor de quarks.

Todos os dados apresentados aqui, leva-nos concluir que a RGOPT é uma técnica não perturbativa que deve ser levada em consideração para a descrição da QCD em regimes de energia onde uma descrição não perturbativa é necessária, pois con-

forme visto aqui, mesmo nas duas ordens mais baixas, além de mostrar uma pequena dependência remanescente da escala, também apresentou uma melhor concordância com os dados da LQCD do que pQCD e HTLpt.

4 ESTRELAS DE QUARKS DENSAS E FRIAS

Estrelas de quarks densas e frias Até este ponto, apresentamos equações de estado (EoS) para a matéria de quarks com uma dependência de escala bastante razoável no capítulo 3. Neste capítulo, apresentamos uma aplicação a um sistema mais realista onde se pode ter matéria de quarks em condições de equilíbrio, por exemplo, objetos estelares densos e frios, como estrelas de quarks e o interior de estrelas de nêutrons. Nesse sentido, calcularemos a relação massa-raio usando a EoS para matéria de quark fria e densa ($T = 0$, $\mu \neq 0$) obtida no capítulo 3 e comparada com os resultados completos da NNLO pQCD.

4.1 CONSISTÊNCIA TERMODINÂMICA

Antes de aplicar a EoS dada pela NLO RGOPT para calcular a relação massa-raio, vamos primeiro notar que uma vez que se escolhe $\Lambda \propto T, \mu$ a consistência termodinâmica da EoS é danificada uma vez que a relação termodinâmica (LANDAU, 1980),

$$\mathcal{E} = T \frac{dP}{dT} + \mu \frac{dP}{d\mu} - P, \quad (187)$$

não é mais satisfeita. Para ver isso mais claramente, temos que lembrar alguns conceitos termodinâmicos e estatísticos. Para um sistema com uma Hamiltoniana H , a pressão, a densidade de energia e a densidade de número de partículas carregadas são dadas pelas relações.

$$P = \frac{T}{V} \ln Z = \frac{T}{V} \ln \text{tr} \left(e^{-(H-\mu N)/T} \right), \quad (188)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{V} \frac{1}{Z} \text{tr} \left(H e^{-(H-\mu N)/T} \right) \quad (189)$$

e

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{1}{Z} \text{tr} \left(N e^{-(H-\mu N)/T} \right), \quad (190)$$

sendo que Z representa a função de partição do sistema e V é o volume. As relações termodinâmicas são então dadas por

$$\mathcal{E} = TS + \mu\rho - P, \quad (191)$$

$$S = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\mu} \quad (192)$$

e

$$\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T. \quad (193)$$

Conforme explicado na Ref. (GORENSTEIN; YANG, 1995), se a Hamiltoniana tiver dependência em T ou μ através de algum parâmetro $w(T, \mu)$, as definições termodinâmicas (192) e (193) estarão em contradição com as definições (189) e (190) devido aos termos extras dados por $\frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T}$ ou $\frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \mu}$. Em outras palavras, a densidade de energia e a densidade deixam de representar o valor esperado da energia e o número de partículas respectivamente. Em conclusão, a Hamiltoniana do sistema deve permanecer independente dos parâmetros externos. Para remediar este problema, deve-se definir uma Hamiltoniana efetiva como sendo

$$H_{\text{eff}} = H + E(T, \mu) \quad (194)$$

onde $E(T, \mu)$ tem a propriedade,

$$\frac{\partial E}{\partial T} = - \frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial T}, \quad (195)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = - \frac{\partial H}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \mu}, \quad (196)$$

$$(197)$$

de forma que as Eqs. (192) e (193) não estão mais em conflito com (189) e (190). Este procedimento é claramente equivalente a fazer uma redefinição semelhante na pressão¹. No nosso caso específico, onde $T = 0$ e a dependência dos parâmetros com μ está aparecendo através de $\bar{\eta}$, Λ , e $g(\Lambda)$, uma vez que se escolhe $\Lambda \propto \mu$. Então, a pressão termodinamicamente consistente tem a forma geral

$$P_b(\mu) = P(\mu) + b[\eta(\mu), \Lambda(\mu), g(\Lambda)]. \quad (198)$$

É importante ressaltar que, dependendo da prescrição utilizada para otimizar η , a forma do termo b será afetada. Por exemplo, se escolhermos Λ como constante e fixamos $\bar{\eta}$ com a equação de PMS, em uma aproximação onde encontramos soluções reais para o esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$ ($B_2 = 0$), nossa pressão é de fato termodinamicamente consistente pois $\frac{\partial P}{\partial \bar{\eta}} \equiv 0$, e todos os outros parâmetros serão independentes de μ . Por outro lado, se $\bar{\eta}$ é fixado com a equação do RG reduzida, b é tal que cancela as contribuições provenientes de $\frac{\partial P}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \mu}$.

Vamos agora encontrar as expressões para as pressões termodinamicamente consistentes da NLO RGOPT e da pQCD na ordem g^2 . Vamos começar com a pressão da pQCD, Eq. (164) até a ordem α_s^2 , onde a pressão termodinamicamente consistente é escrita (GORENSTEIN; YANG, 1995):

$$P_b^{\text{pQCD}}(\mu) = P^{\text{pQCD}}(\mu) + b^{\text{pQCD}}(\mu), \quad (199)$$

¹ É importante ter em mente que este procedimento se aplica à pressão avaliada com as quantidades otimizadas, $P(\bar{\eta}(\mu), g(\Lambda), B_2(\mu), \mu)$

onde

$$b^{\text{pQCD}}(\mu) = -B_{\text{pQCD}} - \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \frac{\partial \Lambda(\mu')}{\partial \mu'} \left(\frac{\partial P^{\text{pQCD}}(\mu')}{\partial \Lambda} + \frac{\partial P^{\text{pQCD}}(\mu')}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right), \quad (200)$$

e B é uma constante de integração que desempenha um papel semelhante à constante da sacola no modelo do MIT (CHODOS *et al.*, 1974). Agora, a densidade de número de quarks da Eq. (193) é:

$$\frac{\rho^{\text{pQCD}}(\mu)}{\rho_{fg}} = 1 - \frac{2}{\pi} \alpha_s(\Lambda) - \alpha_s^2(\Lambda) \left\{ 0.303964 \ln \alpha_s(\Lambda) + \left[0.646382 + 0.911891 \ln \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \right] \right\}, \quad (201)$$

que é exatamente a mesma expressão da Ref. (KURKELA *et al.*, 2010) após definir $N_f = 3$, e ρ_{fg} a densidade do número de quarks do gás livre, dada por

$$\frac{\rho_{fg}}{N_c N_f} = \frac{\mu^3}{3\pi^2}. \quad (202)$$

Da mesma forma em NLO RGOPT, no caso em que $\bar{\eta}$ é otimizado com a equação do PMS, Eq. (154) e o parâmetro da RSC com a Eq. (132), temos²

$$P_{b,\delta}(\bar{\eta}_{\text{PMS}}, g, \bar{B}_2, \mu) = P_{\delta}(\bar{\eta}_{\text{PMS}}, g, \bar{B}_2, \mu) + b^{\text{PMS}}(\mu), \quad (203)$$

$$b^{\text{PMS}}(\mu) = -B - \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu' \left[\frac{\partial \Lambda(\mu')}{\partial \mu'} \left(\frac{\partial P_{\delta}}{\partial \Lambda} + \frac{\beta(g)}{\Lambda} \frac{\partial P_{\delta}}{\partial g} \right) + 4\bar{\eta}_{\text{PMS}}^4 g s_0 \frac{\partial \bar{B}_2(\mu')}{\partial \mu'} \right]. \quad (204)$$

Usando Eq (190) na pressão da NLO RGOPT obtém-se a expressão geral para a densidade do número de quarks

$$\frac{\rho_{\delta}}{N_c N_f} = \frac{\partial P_{b,\delta}}{\partial \mu} = \frac{\rho_F^3}{3\pi^2} + \bar{\eta}^2 \frac{\gamma_0}{2b_0} \frac{\rho_F}{\pi^2} - \frac{2gC_F}{\pi^2} \rho_F \left(2\bar{\eta}^2 + \mu \rho_F - 3\bar{\eta}^2 L_{\mu} \right). \quad (205)$$

Aqui excluimos a pressão da NLO RGOPT($\bar{\eta}_{\text{RG}}, \bar{B}_2$) dado que μ_{min} é bastante alto mesmo para $\Lambda = 4\mu$, como pode se apreciar na Fig. 19, e para obter matéria de quarks estranha estável, devemos usar escalas muito altas para obter valores razoáveis de μ_{min} .

Deixe-nos apontar que aqui estamos considerando o caso onde o equilíbrio químico é realizado definindo $\mu_u = \mu_d = \mu_s = \mu$ e temos automaticamente a neutralidade da carga, pois $q_u = +\frac{2}{3}e$, $q_d = -1/3e$ e $q_s = -1/3e$, onde e é a carga elétrica do elétron. Na Fig. 31, plotamos a pressão e densidade termodinamicamente consistentes

² Note que a expressão entre parêntesis nas Eqs. (200) e (204) é a equação do RG vezes $1/\Lambda$ para $m = 0$.

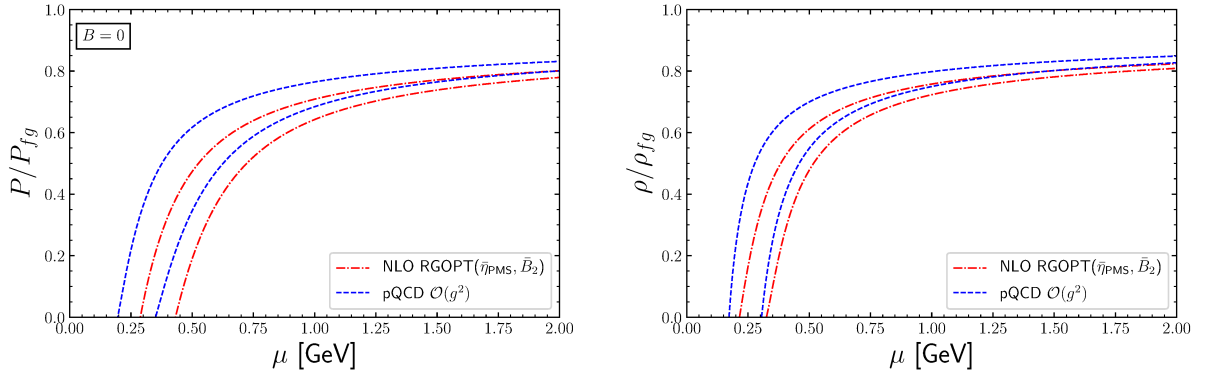


Figura 31 – Pressão termodinâmica consistente (esquerda) e densidade do número de quarks (direita) em função do potencial químico, fornecida pela NLO RGOPT ($\bar{n}_{\text{PMS}}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) em comparação com pQCD na ordem g^2 (azul, tracejado), com dependência de escala $\Lambda = 2\mu, 4\mu$ e $B = 0$.

para $B = 0$, onde excluimos o caso $\Lambda = \mu$ já que, no caso da pQCD, P é zero em $\mu_{\min} \approx 0.619$ GeV, e dá um μ_{\min} ainda mais alto para a NLO RGOPT correspondendo a densidades muito altas quando $\mu = \mu_{\min}$, onde essas densidades corresponderão às densidades na superfície das estrelas.

Para $\Lambda = 2\mu$, $\mu_{\min} = 0.432(0.351)$ GeV para o NLO RGOPT(NNLO pQCD), onde $\alpha_s \sim 0.5(0.6)$ e a densidade bariônica é $\rho_B \sim 2.4(0.9)\rho_0$ onde $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ é a densidade da matéria nuclear³.

Agora, para $\Lambda = 4\mu$, $\mu_{\min} = 0.2881(0.196)$ GeV, onde $\alpha_s \sim 0.4(0.5)$ e a densidade bariônica é $\rho_B \sim 0.5(0.12)\rho_0$. Como podemos ver, para descrever matéria de quarks estranha realista dentro das estrelas de quarks, deve-se restringir o valor de Λ/μ . Também notamos que podemos modificar o valor de B de forma que se obtenha $\rho_B(\mu_{\min}) \geq \rho_0$. No entanto, no momento estamos interessados em quão sensível é a relação de massa-raio resultante das mudanças na escala de regularização Λ .

Na Fig. 32 mostramos o valor de $b(\mu)$ como uma função de μ . A NLO RGOPT fornece valores mais baixos em geral do que a pQCD na ordem g^2 , o valor máximo de b^{PMS} da NLO RGOPT é aproximadamente 66 vezes menor do que o valor máximo de b^{pQCD} . Se considerarmos b como uma medida de quão longe nossa EoS está de ser termodinamicamente consistente, a RGOPT está novamente mostrando uma melhoria bastante grande. Melhor ainda, em $\mu \gtrsim 0.9$ GeV o valor de b^{PMS} é significativamente baixo, de modo que a EoS original dada na seção 3.4.3 é termodinamicamente inconsistente apenas para valores baixos de μ .

³ $1 \text{ fm}^{-1} = 0.1973 \text{ GeV}$

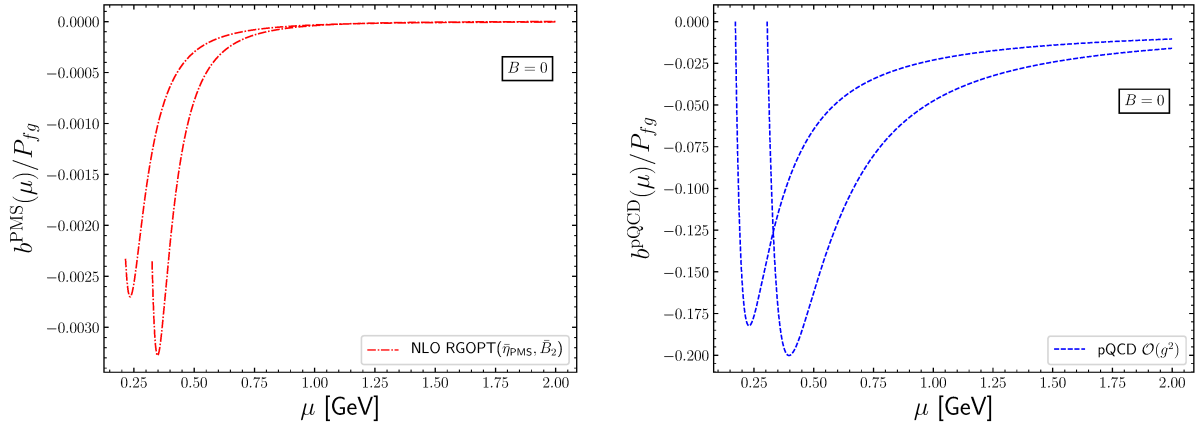


Figura 32 – $b(\mu)$ da pressão da NLO RGOP ($\bar{\eta}_{\text{PMS}}, \bar{B}_2$) (esquerda) e da pressão da pQCD na ordem g^2 (direita), com valor da escala $\Lambda = 2\mu, 4\mu$.

4.2 RELAÇÃO MASSA-RAIO

A relação massa-raio de uma estrela compacta hidrostática não rotativa é determinada na relatividade geral resolvendo as conhecidas equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939)

$$dP(r) = - \frac{G(P(r) + \mathcal{E}(r)) (M(r) + 4\pi r^3 P(r))}{r(r - 2GM(r))} dr, \quad (206a)$$

$$dM(r) = 4\pi r^2 \mathcal{E}(r) dr, \quad (206b)$$

onde $G = (1.22 \times 10^{19})^{-2} \text{ GeV}^{-2}$ é a constante gravitacional de Newton e r é a coordenada radial da estrela. A EoS então entra através de $\mathcal{E}(P)$ (ver Fig. 33) e as equações (206) são resolvidas escolhendo um valor de pressão no centro da estrela $P(r=0)$ e, em seguida, integrando-se até a superfície onde a pressão é zero. Antes de encontrar os valores de B e Λ/μ que fornecem uma EoS realista para descrever estrelas de quark estranhas, vamos primeiro usar a EoS plotada na Fig. 33, para primeiro investigar o quão sensível é a RGOP às mudanças na escala em comparação com a pQCD padrão. Essas EoS fornecem as relações massa-raio da Fig. 34. Claramente, a RGOP mostra uma grande melhoria quando comparado com a pQCD. No caso da pQCD, temos uma massa máxima das estrelas, $M_{\text{max}}(\Lambda = 2\mu) \approx 1.6M_{\odot}$ e $M_{\text{max}}(\Lambda = 4\mu) \approx 5.4M_{\odot}$ enquanto a RGOP dá $M_{\text{max}}(\Lambda = 2\mu) \approx 1M_{\odot}$ e $M_{\text{max}}(\Lambda = 4\mu) \approx 2.4M_{\odot}$, onde M_{\odot} é a massa do sol. Então, dobrando a escala de 2μ para 4μ , obtemos para a pQCD um incremento em M_{max} de quase 4 massas solares, enquanto a RGOP tem um incremento de apenas 1.4 massas solares. Essa sensibilidade às mudanças de escala na relação massa-raio da pQCD é esperada, uma vez que a dependência da escala é ainda mais espalhada nas equações TOV através da pressão e da densidade de energia.

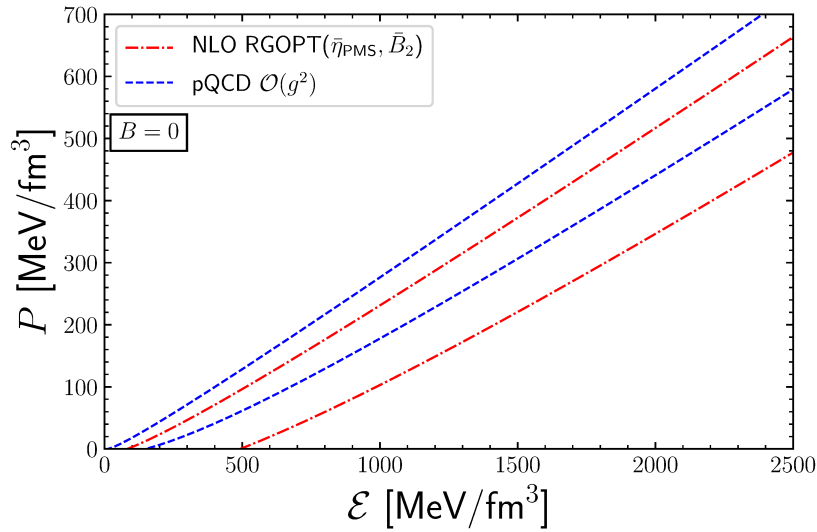


Figura 33 – Dependência funcional da pressão e da densidade de energia para a NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{\text{PMS}}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) e da pQCD na ordem g^2 (azul, tracejada) com $B = 0$. As linhas de P maiores correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e as menores a $\Lambda = 4\mu$.

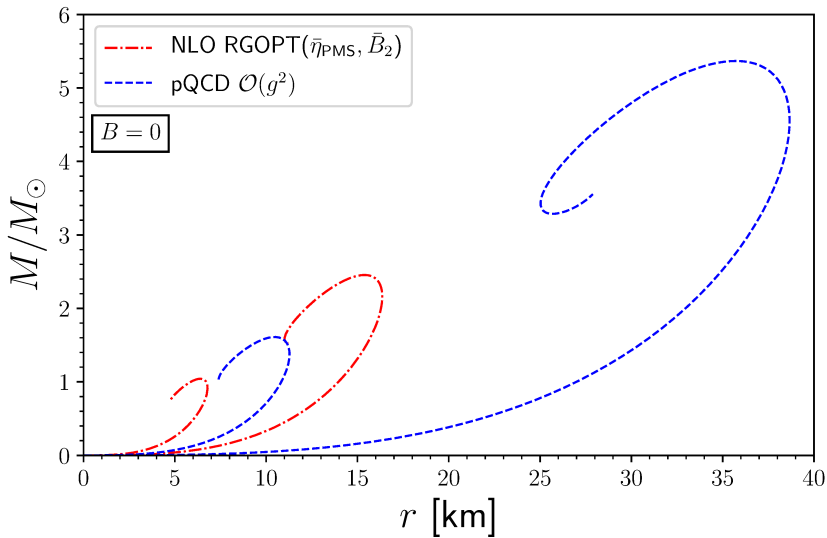


Figura 34 – Relação massa-raio dada pela EoS da Fig. 33, onde as curvas com massa máxima menor correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e a maior a $\Lambda = 4\mu$ para ambos, NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{\text{PMS}}, \bar{B}_2$) (linhas ponto-tracejadas) e pQCD na ordem g^2 (linhas tracejadas).

Por outro lado, para encontrar uma equação de estado mais realista, pode-se usar o valor de Λ tal que $3\mu_{\text{min}}$ esteja próximo de 0.9 GeV. Por exemplo, na Ref. (FRAGA *et al.*, 2001) encontraram, usando a EoS da pQCD $\mathcal{O}(g^2)$ com $\Lambda = 3\mu$ uma massa máxima, $M_{\text{max}} = 2.14M_\odot$, com um raio, $R_{\text{max}} = 12$ km. Porém, vamos enfatizar que na Ref. (FRAGA *et al.*, 2001) não há menção de tornar a EoS termodinamicamente consistente. Aqui, usaremos uma abordagem diferente, aproveitando a vantagem de

que a constante de integração B é, em princípio, arbitrária. Fixaremos B de modo que $P(\mu_{min}) = 0$ quando $\rho_B(\mu_{min}) = \rho_0$. Fazendo isso, encontra-se a EoS do gráfico da

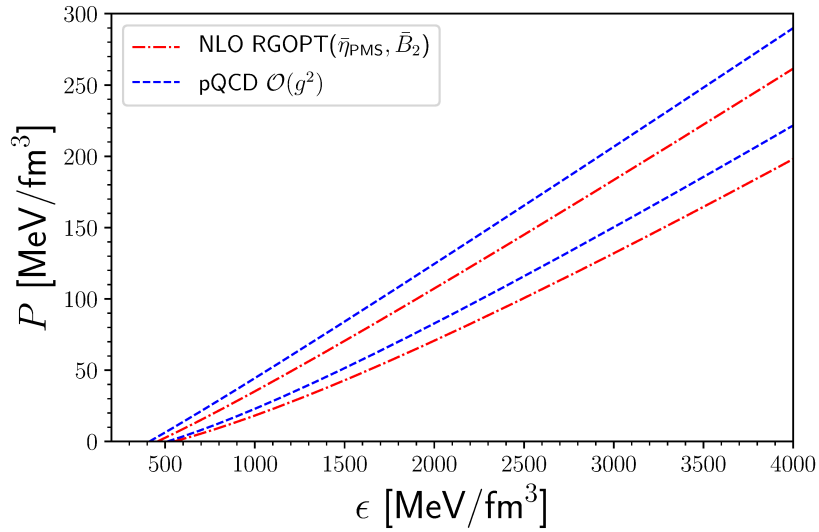


Figura 35 – Dependência funcional da pressão e da densidade de energia para a NLO RGOPT($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (vermelho, ponto-tracejado) e a pQCD na ordem g^2 (azul, tracejada) com $B \neq 0$. As linhas P maiores correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e as menores a $\Lambda = 4\mu$.

Fig. 35 onde, devido à imposição feita, todas as EoS têm uma densidade de energia semelhante na superfície da estrela (onde $P = 0$). Essas EoS produzem a relação

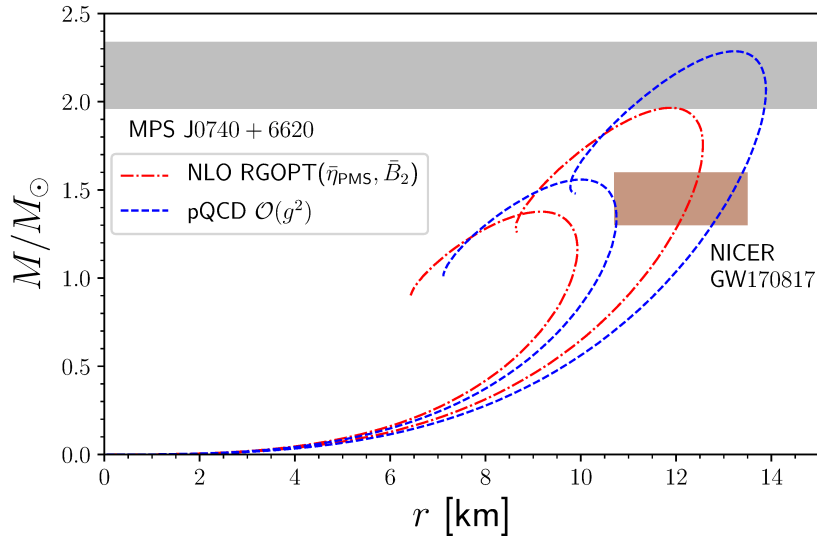


Figura 36 – Relação massa-raio dada pela EoS da Fig. 35, onde as curvas com massa máxima menor correspondem a $\Lambda = 2\mu$ e a maior a $\Lambda = 4\mu$ para ambos, NLO RGOPT ($\bar{\eta}_{PMS}, \bar{B}_2$) (linhas ponto-tracejadas) e pQCD na ordem g^2 (linhas tracejadas).

massa-raio da Fig. 36, onde confrontamos nossos resultados com as restrições recentes para $M_{max} = 2.14^{+0.20}_{-0.18} M_{\odot}$ dadas pelos dados observacionais do pulsar de

milissegundos (MSP) MPS J0740 + 6620 (CROMARTIE *et al.*, 2019) e o raio de uma estrela de nêutrons de massa $1.6M_{\odot}$, $R_{1.6}$, é restrito a ser $R_{1.6} \gtrsim 10.7$ obtido da medida de ondas gravitacionais da estrela de nêutrons binária GW170817 (BAUSWEIN *et al.*, 2017; ABBOTT *et al.*, 2018), enquanto $R_{1.4} \lesssim 13.02$ é obtido de dados observacionais do NICER do pulsar de milissegundos PSR J0030 + 451 (MILLER *et al.*, 2019; RILEY *et al.*, 2019). Além disso, vários estudos encontraram $R_{1.4} \lesssim 13.5$ (ZHOU *et al.*, 2018; FATTOYEV *et al.*, 2018; ANNALA *et al.*, 2018; MOST *et al.*, 2018).

Tabela 3 – Propriedades da massa máxima da estrela do quark predita pela NLO RGOPT e pQCD na ordem g^2 para dois valores de Λ/μ .

	Λ/μ	M_{\max}/M_{\odot}	R_{\max} [km]	$R_{1.6}$ [km]	$R_{1.4}$ [km]	$\rho_{c,\max}$	B [GeV ⁴]
NLO RGOPT	2	1.38	9.15			$7.4\rho_0$	$-(0.100)^4$
	4	1.97	11.8	12.5	12.2	$5.2\rho_0$	$(0.072)^4$
pQCD $\mathcal{O}(g^2)$	2	1.56	10.1			$6.4\rho_0$	$(0.050)^4$
	4	2.29	13.2	13.4	13.0	$4.5\rho_0$	$(0.086)^4$

Para $\Lambda = 2\mu$, a EoS resultante dá uma massa máxima de estrelas bem abaixo da restrição dada por MPS J0740 + 6620 e ainda menor que $1.6M_{\odot}$ em ambas as aproximações (os resultados estão resumidos na tabela 3). Interessante notar que a constante de integração B da NLO RGOPT é negativa neste caso. Isso é bastante razoável, visto que valores positivos de B resultam em um valor ρ_B mais alto na superfície da estrela, enquanto valores negativos de B resultam em um valor de ρ_B mais baixo. Uma vez que fixamos B de forma que $\rho_B = \rho_0$ na superfície da estrela, B tem que ser negativo para diminuir $\rho = 2.4\rho_0$ em $B = 0$ para $\rho_B = \rho_0$ em $B \neq 0$. Por outro lado, em $B = 0$, a pQCD previu $\rho_B < \rho_0$ para $\Lambda/\mu \geq 2$ e para obter $\rho_B = \rho_0$ então B assume valores positivos.

Já, para $\Lambda = 4\mu$ encontramos bons resultados para ambas as aproximações. No entanto, a EoS da NLO RGOPT prevê M_{\max} no limite inferior dado na Ref. (CROMARTIE *et al.*, 2019), enquanto a EoS da pQCD na ordem g^2 prevê M_{\max} perto do limite superior.

Um trabalho recente sugere que o raio de uma estrela de nêutrons de $1.4M_{\odot}$ é $R_{1.4} = 11.0^{+0.9}_{-0.6}$ km (CAPANO *et al.*, 2020). Mesmo que nosso resultado esteja fora deste intervalo, nossa EoS prevê um $R_{1.4}$ apenas 0.3 km de distância do limite superior. É claro que a EoS pode ser ajustada modificando B e Λ/μ , de modo a obter uma massa máxima mais perto de $2.14M_{\odot}$. Mas o nosso objetivo é mostrar como a RGOPT em NLO já fornece uma EoS bastante razoável, descrevendo massas dentro das restrições observacionais, além de ter a importante propriedade de que a relação massa-raio apresenta uma dependência de escala bastante menor do que as reproduzidas com a aproximação NNLO pQCD.

5 CONCLUSÕES

Nesta tese, estudamos a recente proposta de modificação do OPT aprimorado com propriedades do RG, a RGOPT, no vácuo e na presença de parâmetros de controle.

No capítulo 2, apresentamos a técnica no modelo GN com o objetivo de fazer uma demonstração clara da melhoria que a RGOPT oferece em comparação com a OPT padrão, mostrando a importância de considerar propriedades do RG em teorias renormalizáveis. Mostramos que já em LO a RGOPT fornece resultados não triviais e não perturbativos, enquanto a OPT só dá resultados na ordem seguinte NLO. Além disso, a NLO RGOPT mostrou uma redução significativa na dependência de escala remanescente quando comparado com os resultados da OPT.

No capítulo 3, aplicamos a RGOPT no caso mais complicado da QCD. Aplicamos pela primeira vez o método de ressonância da RGOPT na QCD quando parâmetros de controle como a temperatura e o potencial químico estão presentes. Neste capítulo, analisamos os problemas relacionados com a solução complexa encontrada no esquema \overline{MS} , e como superar esses problemas usando diferentes prescrições que recuperam a solução real quando uma mudança de esquema é realizada. Conforme explicado no texto, no momento pudemos aplicar a RGOPT apenas no setor de quarks, e consideramos apenas a contribuição gluônica puramente perturbativa.

No caso de temperatura zero e potencial químico finito, onde a pressão gluônica perturbativa não contribui, comparamos nossos resultados com o estado da arte da pQCD, que inclui uma contribuição $\alpha_S^3 \ln^2 \alpha_S$. Confirmamos nesta aplicação em um meio denso a propriedade genérica de que na ordem mais baixa de 1L (LO), esta técnica já captura resultados para a pressão não triviais e invariantes frente ao RG. Embora numericamente esses resultados de ordem inferior sejam uma aproximação pobre em geral, convergindo muito lentamente para o resultado de gás livre à medida que μ aumenta, eles exibem como a ressonância da RGOPT é mais eficiente, pois, nesta mesma ordem, a previsão de pQCD é trivial. Na ordem g NLO (nível de 2L) e $\Lambda = 2\mu$ os resultados da RGOPT parecem ser uma aproximação muito boa, pois mostram uma concordância muito melhor com as ordens superiores perturbativas $\mathcal{O}(\alpha_S^3 \ln^2 \alpha_S)$ do que a pQCD na mesma ordem g . Variações de escala no intervalo $\Lambda = \mu - 4\mu$ também mostram que o método reduz as incertezas de escala produzidas pela pQCD na região mais fortemente acoplada, o que é importante no que diz respeito a EoS adequada para descrever estrelas de nêutrons e de quarks. Em relação à presente aplicação, onde apenas quarks sem massa foram considerados, nossos resultados indicam que este método de ressonância consistente com o RG é adequado para tratar a matéria fortemente interagente densa e fria. Também mostramos que, ao usar a equação RG reduzida em vez do PMS para otimizar o parâmetro de massa da OPT, η ,

encontramos uma dependência remanescente ainda menor da escala na pressão da QCD. No entanto, a forma desta EoS é problemática para descrever matéria estranha realista na superfície de estrelas de quarks.

No caso de temperatura finita e potencial químico, a RGOPT também mostrou uma melhora muito boa da dependência de escala da pressão dos quarks quando comparado com a mesma ordem NLO pQCD para todas as aproximações e prescrições utilizadas. No entanto, os resultados mais impressionantes são obtidos com a adição da pressão perturbativa de glúons à pressão de quarks. Devido às dificuldades técnicas para aplicar o maquinário da RGOPT ao setor gluônico, adotamos a estratégia em que apenas as avaliações não perturbativas foram realizadas apenas no setor de quarks, que foi adicionado à contribuição gluônica perturbativa pura. No entanto, a robustez dos resultados obtidos desta forma, permite concluir que esta prescrição simples parece apropriada para descrever regimes de T elevados a partir de $T \simeq 0.25$ GeV $\sim 1.5T_{pc}$. Nossas previsões em NLO para a escala central, $\Lambda = 2\pi T$, ao usar a equação RG reduzida para otimizar η , revelaram-se extremamente precisas para temperaturas começando em $T \simeq 0.25$ GeV e continua assim até o valor mais alto fornecido por LQCD, $T = 1$ GeV. Então, esses resultados sugerem que, na nossa aproximação, a maioria das informações não perturbativas está contida no setor de quarks. Quando comparado com a NNLO HTLpt, que para o valor da escala central também mostra uma boa concordância com LQCD, percebe-se imediatamente que as propriedades do RG inerentes à RGOPT são capazes de atenuar drasticamente o problema de dependência de escala. Ao usar a equação do PMS para otimizar η , mesmo que os resultados não sejam tão impressionantes quanto os fornecidos pela equação do RG reduzida, para $T \gtrsim 0.5$ GeV observa-se uma boa concordância com os dados de LQCD. A similaridade na pressão para as duas diferentes otimizações mostra a robustez do método, mas em termos de custo-benefício, observamos que a otimização utilizando a equação RG reduzida é superior, pois é matematicamente simples e reduz significativamente a dependência de escala remanescente.

Finalmente, no capítulo 4, discutimos como modificar a EoS dada no capítulo 3, de forma que a consistência termodinâmica seja alcançada. Então, usamos esta EoS para calcular a relação massa-raio para estrelas de quarks estranhas na aproximação $m_u = m_d = m_s = 0$ ($N_f = 3$). Descobrimos que nossa EoS prevê massas de estrelas de quarks dentro das restrições observacionais e uma relação massa-raio menos sensível a mudanças no valor da escala Λ do que aquele obtido por pQCD $\mathcal{O}(g^2)$. Portanto a RGOPT produz massas de estrelas dentro das restrições observacionais para uma faixa maior de valores da escala.

O trabalho desenvolvido nesta tese é uma primeira aproximação que pode ser aprimorada em uma futura aplicação da RGOPT na QCD e por isto existem muitas possíveis extensões do trabalho desenvolvido aqui. A primeira extensão natural é aplicar

o RGOPT na próxima ordem perturbativa g^2 da pressão, cuja expressão está disponível na Ref. (KURKELA *et al.*, 2010). Além disso, um próximo passo seria investigar o caso com massas de corrente finitas, uma vez que a massa do quark estranho é muito importante para descrever corretamente estrelas estranhas e até estrelas de nêutrons. Nessa mesma linha, pode-se investigar a utilização de EoS híbridas, utilizando a RGOPT em sua respectiva faixa de validade e modelos hadrônicos para baixas densidades. Estes são apenas alguns exemplos das muitas aplicações que podem ser investigadas com o estudo da técnica estudada neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B.P. *et al.* GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 121, p. 161101, 16 out. 2018.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.161101>.

ACHARYA, Shreyasi *et al.* Measurement of the (anti-)³He elliptic flow in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **Phys. Lett.**, B805, p. 135414, 2020. DOI:

10.1016/j.physletb.2020.135414.

ACHARYA, Shreyasi *et al.* Production of ⁴He and ⁴ $\bar{\text{He}}$ in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV at the LHC. **Nucl. Phys.**, A971, p. 1–20, 2018. DOI:

10.1016/j.nuclphysa.2017.12.004.

ACHARYA, Shreyasi *et al.* Transverse momentum spectra and nuclear modification factors of charged particles in Xe-Xe collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.44$ TeV. **Phys. Lett. B**, v. 788, p. 166–179, 2019. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.10.052.

ADAMCZYK, L.; OTHERS. Bulk properties of the medium produced in relativistic heavy-ion collisions from the beam energy scan program. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 96, p. 044904, 4 out. 2017. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044904. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.96.044904>.

ADAMS, J. *et al.* Experimental and theoretical challenges in the search for the quarkgluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. **Nucl. Phys.**, A757, n. 1, p. 102–183, 2005. First Three Years of Operation of RHIC. ISSN 0375-9474. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.03.085>. Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405005294>.

ADCOX, K. *et al.* Formation of dense partonic matter in relativistic nucleusnucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration. **Nucl. Phys.**, A757, n. 1, p. 184–283, 2005. First Three Years of Operation of RHIC. ISSN 0375-9474. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.03.086>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405005300>.

AKHIEZER, I A; PELETMINSKII, S V. Use of the methods of quantum field theory for the investigation of the thermodynamical properties of a gas of electrons and photons.

Zh. Eksp. Teor. Fiz., v. 38, n. 6, p. 1829–1839, 1960. Disponível em:

<http://cds.cern.ch/record/444287>.

ALCOCK, Charles; FARHI, Edward; OLINTO, Angela. Strange stars. **Astrophys. J.**, v. 310, p. 261–272, 1986. DOI: 10.1086/164679.

ALESSANDRO, B *et al.* ALICE: Physics Performance Report, Volume II. **J. Phys.**, G32, n. 10, p. 1295, 2006. Disponível em:

<http://stacks.iop.org/0954-3899/32/i=10/a=001>.

ALFORD, Mark; BRABY, Matt; PARIS, M.W.; REDDY, Sanjay. Hybrid stars that masquerade as neutron stars. **Astrophys. J.**, v. 629, p. 969–978, 2005. DOI: 10.1086/430902.

ANDERSEN, Jens O.; BRAATEN, Eric; PETITGIRARD, Emmanuel; STRICKLAND, Michael. Hard-thermal-loop perturbation theory to two loops. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 66, p. 085016, 8 out. 2002. DOI:

10.1103/PhysRevD.66.085016. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.085016>.

ANDERSEN, Jens O.; BRAATEN, Eric; STRICKLAND, Michael. Hard-Thermal-Loop Resummation of the Free Energy of a Hot Gluon Plasma. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 83, p. 2139–2142, 11 set. 1999. DOI:

10.1103/PhysRevLett.83.2139. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.2139>.

ANDERSEN, Jens O.; BRAATEN, Eric; STRICKLAND, Michael. Hard-thermal-loop resummation of the free energy of a quark-gluon plasma. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 61, p. 074016, 7 mar. 2000. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.074016.

Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.074016>.

ANDERSEN, Jens O.; BRAATEN, Eric; STRICKLAND, Michael. Screened perturbation theory to three loops. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 63, p. 105008, 10 abr. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.105008. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.105008>.

ANDERSEN, Jens O.; LEGANGER, Lars E.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan. Three-loop HTL QCD thermodynamics. **JHEP**, v. 08, n. 8, p. 053, ago. 2011. ISSN

1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP08(2011)053. Disponível em:

[https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2011\)053](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2011)053).

ANDERSEN, Jens O.; PETITGIRARD, Emmanuel; STRICKLAND, Michael. Two-loop hard-thermal-loop thermodynamics with quarks. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 70, p. 045001, 4 ago. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.045001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.045001>.

ANDERSEN, Jens O.; STRICKLAND, Michael. Resummation in hot field theories.

Annals Phys., v. 317, n. 2, p. 281–353, 2005. ISSN 0003-4916. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.aop.2004.09.017>. Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491604001939>.

ANDERSEN, Jens O.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan. Gluon Thermodynamics at Intermediate Coupling. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 104, p. 122003, 12 mar. 2010a. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.122003. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.122003>.

ANDERSEN, Jens O.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan. Three-loop HTL gluon thermodynamics at intermediate coupling. **JHEP**, v. 08, n. 8, p. 113, ago. 2010b. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP08(2010)113. Disponível em:

[https://doi.org/10.1007/JHEP08\(2010\)113](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2010)113).

ANDRONIC, Anton; BRAUN-MUNZINGER, Peter; REDLICH, Krzysztof;

STACHEL, Johanna. Decoding the phase structure of QCD via particle production at high energy. **Nature**, v. 561, n. 7723, p. 321–330, set. 2018. ISSN 1476-4687.

Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0491-6>.

ANNALA, Eemeli; GORDA, Tyler; KURKELA, Aleksj; VUORINEN, Aleksj.

Gravitational-Wave Constraints on the Neutron-Star-Matter Equation of State. **Phys.**

Rev. Lett., American Physical Society, v. 120, p. 172703, 17 abr. 2018. DOI:

10.1103/PhysRevLett.120.172703. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.172703>.

ANTONIADIS, John *et al.* A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. **Science**, v. 340, p. 6131, 2013. DOI: 10.1126/science.1233232.

AOKI Y.; ENDRDI G.; FODOR Z.; KATZ S. D.; SZABO K. K. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics.

Nature, v. 443, n. 7112, p. 675–678, out. 2006. ISSN 0028-0836. DOI:

<http://dx.doi.org/10.1038/nature05120>.

ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J.; HARRIS, F.E. **Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide**. [S.l.]: Elsevier Science, 2013. ISBN 9780123846549.

Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=qLFo%5C_Z-PoGIC.

ARSENE, I. *et al.* Quarkgluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment. **Nucl. Phys.**, A757, n. 1, p. 1–27, 2005.

First Three Years of Operation of RHIC. ISSN 0375-9474. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130>. Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947405002770>.

BANDO, Masako; KUGO, Taichiro; MAEKAWA, Nobuhiro; NAKANO, Hiroaki.

Improving the effective potential. **Phys. Lett.**, B301, n. 1, p. 83–89, 1993. ISSN

0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90725-W](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90725-W). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939390725W>.

BANKS, T.; CASHER, A. Chiral symmetry breaking in confining theories. **Nucl. Phys.**, B169, n. 1, p. 103–125, 1980. ISSN 0550-3213. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(80\)90255-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(80)90255-2). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380902552>.

BARDEEN, William A.; BURAS, A. J.; DUKE, D. W.; MUTA, T. Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 18, p. 3998–4017, 11 dez. 1978. DOI:

10.1103/PhysRevD.18.3998. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.18.3998>.

BAUSWEIN, Andreas; JUST, Oliver; JANKA, Hans-Thomas; STERGIOULAS, Nikolaos.

Neutron-star radius constraints from GW170817 and future detections. **Astrophys. J. Lett.**, v. 850, n. 2, p. l34, 2017. DOI: 10.3847/2041-8213/aa9994.

BAZAVOV, A. *et al.* Equation of state in (2 + 1)-flavor QCD. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 90, p. 094503, 9 nov. 2014. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.094503.

Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.094503>.

BAZAVOV, Alexei; BRAMBILLA, Nora; GARCIA I TORMO, Xavier;

PETRECZKY, Péter; SOTO, Joan; VAIRO, Antonio. Determination of α_s from the QCD

static energy. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 86, p. 114031, 11 dez. 2012.

DOI: 10.1103/PhysRevD.86.114031. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.114031>.

BENDER, Carl M.; MILTON, Kimball A.; MOSHE, Moshe; PINSKY, Stephen S.; SIMMONS, L. M. Logarithmic approximations to polynomial Lagrangians. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 58, p. 2615–2618, 25 jun. 1987. DOI:

10.1103/PhysRevLett.58.2615. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2615>.

BENDER, Carl M.; MILTON, Kimball A.; MOSHE, Moshe; PINSKY, Stephen S.; SIMMONS, L. M. Novel perturbative scheme in quantum field theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 37, p. 1472–1484, 6 mar. 1988. DOI:

10.1103/PhysRevD.37.1472. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.1472>.

BEREZHIANI, Z.; BOMBACI, I.; DRAGO, Alessandro; FRONTERA, F.; LAVAGNO, A. Gamma-ray bursts from delayed collapse of neutron stars to quark matter stars.

Astrophys. J., v. 586, p. 1250–1253, 2003. DOI: 10.1086/367756.

BLAIZOT, Jean-Paul; FRAGA, Eduardo S.; PALHARES, Letícia F. Effect of quark masses on the QCD pressure in a strong magnetic background. **Phys. Lett.**, B722, n. 1, p. 167–171, 2013. ISSN 0370-2693. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.04.004>. Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269313002839>.

BLAIZOT, Jean-Paul; GALAIN, Ramón Méndez; WSCHEBOR, Nicolás. The GrossNeveu model at finite temperature at next-to-leading order in the $1/N$ expansion. **Annals Phys.**, v. 307, n. 2, p. 209–271, 2003a. ISSN 0003-4916. DOI:

[https://doi.org/10.1016/S0003-4916\(03\)00072-1](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(03)00072-1). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491603000721>.

BLAIZOT, Jean-Paul; IANCU, Edmond; REBHAN, Anton. Thermodynamics of the high temperature quark gluon plasma. *In*: QUARK-GLUON PLASMA 3. [S.l.: s.n.], 2003b. p. 60–122. DOI: 10.1142/9789812795533_0002. arXiv: hep-ph/0303185 [hep-ph].

Disponível em: <http://link.aip.org/link/?APC/739/63>.

BORSANYI, Szabolcs; FODOR, Zoltan; HOELBLING, Christian; KATZ, Sandor D.; KRIEG, Stefan; SZABO, Kalman K. Full result for the QCD equation of state with $2+1$

flavors. **Phys. Lett. B**, v. 730, p. 99–104, 2014. DOI:

[10.1016/j.physletb.2014.01.007](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.01.007).

BORSANYI, Szabolcs; ENDRDI, Gergely; FODOR, Zoltan; JAKOVAC, Antal; KATZ, Sandor D.; KRIEG, Stefan; RATTI, Claudia; SZABO, Kalman K. The QCD equation of state with dynamical quarks. **JHEP**, v. 11, p. 077, 2010a. DOI:

[10.1007/JHEP11\(2010\)077](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2010)077).

BORSANYI, Szabolcs; FODOR, Zoltan; HOELBLING, Christian; KATZ, Sandor D; KRIEG, Stefan; RATTI, Claudia; SZABO, Kalman K. Is there still any T_c mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III. **JHEP**, v. 09, p. 073, 2010b. DOI: [10.1007/JHEP09\(2010\)073](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2010)073).

BRAATEN, Eric; PISARSKI, Robert D. Deducing Hard Thermal Loops From Ward Identities. **Nucl. Phys.**, B339, p. 310–324, 1990a. DOI:

[10.1016/0550-3213\(90\)90351-D](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90351-D).

BRAATEN, Eric; PISARSKI, Robert D. Resummation and gauge invariance of the gluon damping rate in hot QCD. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, p. 1338–1341, 12 mar. 1990b. DOI: [10.1103/PhysRevLett.64.1338](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1338). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1338>.

BRAATEN, Eric; PISARSKI, Robert D. Simple effective Lagrangian for hard thermal loops. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 45, r1827–r1830, 6 mar. 1992. DOI: [10.1103/PhysRevD.45.R1827](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.45.R1827). Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.R1827>.

BRAATEN, Eric; PISARSKI, Robert D. Soft amplitudes in hot gauge theories: A general analysis. **Nucl. Phys.**, B337, n. 3, p. 569–634, 1990c. ISSN 0550-3213. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90508-B](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90508-B). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090508B>.

BROWN, L.S. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994. ISBN 9780521469463. Disponível em:

<https://books.google.com.br/books?id=mKsRAVX1910C>.

BUCKLEY, I. R. C.; DUNCAN, A.; JONES, H. F. Proof of the convergence of the linear δ expansion: Zero dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 47,

p. 2554–2559, 6 mar. 1993. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.2554. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.2554>.

CALDAS, Heron; KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei. Critical dopant concentration in polyacetylene and phase diagram from a continuous four-Fermi model. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 77, p. 205109, 20 mai. 2008. DOI: 10.1103/PhysRevB.77.205109. Disponível em:
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.205109>.

CAPANO, Collin D.; TEWS, Ingo; BROWN, Stephanie M.; MARGALIT, Ben; DE, Soumi; KUMAR, Sumit; BROWN, Duncan A.; KRISHNAN, Badri; REDDY, Sanjay. Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory. **Nature Astron.**, v. 4, n. 6, p. 625–632, 2020. DOI: 10.1038/s41550-020-1014-6.

CARMINATI, F *et al.* ALICE: Physics Performance Report, Volume I. **J. Phys.**, G30, n. 11, p. 1517, 2004. Disponível em:
<http://stacks.iop.org/0954-3899/30/i=11/a=001>.

CELMASER, William; GONSALVES, Richard J. Renormalization-prescription dependence of the quantum-chromodynamic coupling constant. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 20, p. 1420–1434, 6 set. 1979. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.1420. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.1420>.

CHETYRKIN, K. G.; MAIER, A. Wilson expansion of QCD propagators at three loops: operators of dimension two and three. **JHEP**, v. 01, n. 1, p. 092, jan. 2010. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP01(2010)092. Disponível em:
[https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2010\)092](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2010)092).

CHETYRKIN, K.G. Four-loop renormalization of QCD: full set of renormalization constants and anomalous dimensions. **Nucl. Phys.**, B710, n. 1, p. 499–510, 2005. ISSN 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.01.011>. Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321305000337>.

CHETYRKIN, K.G.; KÜHN, J.H. Quartic mass corrections to Rhad. **Nucl. Phys.**, B432, n. 1, p. 337–350, 1994. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(94\)90605-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90605-X). Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139490605X>.

- CHIKU, S.; HATSUDA, T. Optimized perturbation theory at finite temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 58, p. 076001, 7 ago. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.076001. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.076001>.
- CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B. Baryon structure in the bag theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 2599–2604, 8 out. 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.2599. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2599>.
- CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the LambertW function. **Adv. Comput. Math.**, v. 5, n. 1, p. 329–359, dez. 1996. ISSN 1572-9044. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02124750>.
- CROMARTIE, H. Thankful *et al.* Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. **Nature Astron.**, v. 4, n. 1, p. 72–76, 2019. DOI: 10.1038/s41550-019-0880-2.
- CZAKON, M. The four-loop QCD β -function and anomalous dimensions. **Nucl. Phys.**, B710, n. 1, p. 485–498, 2005. ISSN 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.01.012>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321305000349>.
- DASHEN, Roger F.; MA, Shang-Keng; RAJARAMAN, R. Finite-temperature behavior of a relativistic field theory with dynamical symmetry breaking. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 11, p. 1499–1508, 6 mar. 1975. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.1499. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.11.1499>.
- DEMOREST, Paul; PENNUCCI, Tim; RANSOM, Scott; ROBERTS, Mallory; HESSELS, Jason. Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star. **Nature**, v. 467, p. 1081–1083, 2010. DOI: 10.1038/nature09466.
- DISSERTORI, G.; KNOWLES, I.G.; SPENCE, J.C.H.; SCHMELLING, M. **Quantum Chromodynamics: High Energy Experiments and Theory**. [S.l.]: Clarendon Press, 2003. (International series of monographs on physics). ISBN 9780198505723. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=%5C_rqDQgAACAAJ.

DRAGO, Alessandro; LAVAGNO, Andrea; PARENTI, Irene. Burning of an hadronic star into a quark or a hybrid star. **Astrophys. J.**, v. 659, p. 1519–1535, 2007. DOI: 10.1086/512112.

DUMITRU, Adrian; PISARSKI, Robert D.; ZSCHIESCHE, Detlef. Dense quarks, and the fermion sign problem, in a $SU(N)$ matrix model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 72, p. 065008, 6 set. 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.065008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.065008>.

DUNCAN, Anthony; MOSHE, Moshe. Nonperturbative physics from interpolating actions. **Phys. Lett. B**, v. 215, n. 2, p. 352–358, 1988. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91447-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91447-5). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269388914475>.

EPELBAUM, E.; HAMMER, H.-W.; MEISSNER, Ulf-G. Modern theory of nuclear forces. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 81, p. 1773–1825, 4 dez. 2009. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1773. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1773>.

FARHI, Edward; JAFFE, R. L. Strange matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 2379–2390, 11 dez. 1984. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.2379. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.2379>.

FATTOYEV, F. J.; PIEKAREWICZ, J.; HOROWITZ, C. J. Neutron Skins and Neutron Stars in the Multimessenger Era. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 120, p. 172702, 17 abr. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.172702. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.172702>.

FERRARI, Gabriel N.; KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O. Asymptotically free theory with scale invariant thermodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 96, p. 116009, 11 dez. 2017. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.116009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.116009>.

FRAGA, Eduardo S.; KURKELA, Aleksj; VUORINEN, Aleksj. Interacting quark matter equation of state for compact stars. **Astrophys. J. Lett.**, v. 781, n. 2, p. L25, 2014. DOI: 10.1088/2041-8205/781/2/L25.

FRAGA, Eduardo S.; PALHARES, Letcia F.; PINTO, Marcus Benghi. Nonperturbative Yukawa theory at finite density and temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 79, p. 065026, 6 mar. 2009. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.065026. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.065026>.

FRAGA, Eduardo S.; PISARSKI, Robert D.; SCHAFFNER-BIELICH, Jurgen. New class of compact stars at high density. Edição: F. Karsch e H. Satz. **Nucl. Phys.**, A702, p. 217–223, 2002. DOI: 10.1016/S0375-9474(02)00709-1.

FRAGA, Eduardo S.; PISARSKI, Robert D.; SCHAFFNER-BIELICH, Jürgen. Small, dense quark stars from perturbative QCD. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 63, p. 121702, 12 mai. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.121702. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.121702>.

FRAGA, Eduardo S.; ROMATSCHKE, Paul. Role of quark mass in cold and dense perturbative QCD. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 71, p. 105014, 10 mai. 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.105014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.105014>.

FREEDMAN, Barry A.; MCLERRAN, Larry D. Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. II. The ground-state energy of a relativistic electron gas. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 16, p. 1147–1168, 4 ago. 1977a. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1147. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1147>.

FREEDMAN, Barry A.; MCLERRAN, Larry D. Fermions and gauge vector mesons at finite temperature and density. III. The ground-state energy of a relativistic quark gas. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 16, p. 1169–1185, 4 ago. 1977b. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1169. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1169>.

FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet gluon picture. **Phys. Lett.**, B47, n. 4, p. 365–368, 1973. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(73\)90625-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90625-4). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269373906254>.

GARDI, Einan; KARLINER, Marek; GRUNBERG, Georges. Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure? **JHEP**, Springer Science e Business Media LLC, v. 1998, n. 07, p. 007–007, jul. 1998. DOI:

10.1088/1126-6708/1998/07/007. Disponível em:
<https://doi.org/10.1088%2F1126-6708%2F1998%2F07%2F007>.

GELL-MANN, M.; LOW, F. E. Quantum Electrodynamics at Small Distances. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 95, p. 1300–1312, 5 set. 1954. DOI: 10.1103/PhysRev.95.1300. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.1300>.

GELL-MANN, Murray. Symmetries of Baryons and Mesons. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 125, p. 1067–1084, 3 fev. 1962. DOI: 10.1103/PhysRev.125.1067. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.125.1067>.

GELL-MANN, Murray; LEVY, M. The axial vector current in beta decay. **Nuovo Cim.**, v. 16, p. 705, 1960. DOI: 10.1007/BF02859738.

GELL-MANN, Murray; OAKES, R. J.; RENNER, B. Behavior of Current Divergences under $SU_3 \times SU_3$. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 175, p. 2195–2199, 5 nov. 1968. DOI: 10.1103/PhysRev.175.2195. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.2195>.

GJESTLAND, Tormond. **Gauge Theories at Finite Temperature**. 2007. Diss. (Mestrado) – NTNU. Disponível em:
<http://web.phys.ntnu.no/~mika/gjestland.pdf>.

GORDA, Tyler. Global properties of rotating neutron stars with QCD equations of state. **Astrophys. J.**, v. 832, n. 1, p. 28, 2016. DOI: 10.3847/0004-637X/832/1/28.

GORDA, Tyler; KURKELA, Aleks; ROMATSCHKE, Paul; SÄPPI, Matias; VUORINEN, Aleks. Next-to-Next-to-Next-to-Leading Order Pressure of Cold Quark Matter: Leading Logarithm. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 121, p. 202701, 20 nov. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.202701. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.202701>.

GORENSTEIN, Mark I.; YANG, Shin Nan. Gluon plasma with a medium-dependent dispersion relation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 52, p. 5206–5212, 9 nov. 1995. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.5206. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.5206>.

GRACEY, J.A. Three-loop calculations in the $O(N)$ gross-neveu model. **Nucl. Phys.**, B341, n. 2, p. 403–418, 1990. ISSN 0550-3213. DOI:

[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90186-H](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90186-H). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139090186H>.

GRAF, Thorben; SCHAFFNER-BIELICH, Juergen; FRAGA, Eduardo S. The impact of quark masses on pQCD thermodynamics. **Eur. Phys. J. A**, v. 52, n. 7, p. 208, 2016.

DOI: 10.1140/epja/i2016-16208-9.

GROSS, David J.; NEVEU, André. Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 10, p. 3235–3253, 10 nov. 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.3235. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.3235>.

GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Asymptotically Free Gauge Theories. I. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 8, p. 3633–3652, 10 nov. 1973a. DOI:

10.1103/PhysRevD.8.3633. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.3633>.

GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, 26 jun. 1973b. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.

HAENSEL, P.; ZDUNIK, J.L.; SCHAEFFER, R. Strange quark stars. **Astron. Astrophys.**, v. 160, p. 121–128, 1986. Disponível em:

<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986A&A...160..121H>.

HAQUE, Najmul; ANDERSEN, Jens O.; MUSTAFA, Munshi G.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan. Three-loop pressure and susceptibility at finite temperature and density from hard-thermal-loop perturbation theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 89, p. 061701, 6 mar. 2014a. DOI:

10.1103/PhysRevD.89.061701. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.061701>.

HAQUE, Najmul; BANDYOPADHYAY, Aritra; ANDERSEN, Jens O.; MUSTAFA, Munshi G.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan. Three-loop HTLpt thermodynamics at finite temperature and chemical potential. **JHEP**, v. 05, n. 5, p. 027,

mai. 2014b. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP05(2014)027. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP05\(2014\)027](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2014)027).

HAQUE, Najmul; MUSTAFA, Munshi G.; STRICKLAND, Michael. Two-loop hard thermal loop pressure at finite temperature and chemical potential. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 87, p. 105007, 10 mai. 2013. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.105007. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.105007>.

HEINZ, Ulrich W.; JACOB, Maurice. Evidence for a new state of matter: An Assessment of the results from the CERN lead beam program, 2000. arXiv: nucl-th/0002042 [nucl-th].

HIDDING, M. **Methods for the renormalization of the top quark**. 2016. Diss. (Mestrado) – Utrecht University. Disponível em: <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/337540>.

HOOFT, G. 't. Dimensional regularization and the renormalization group. **Nucl. Phys.**, B61, p. 455–468, 1973. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(73\)90376-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90376-3). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321373903763>.

HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. **Nucl. Phys.**, B44, n. 1, p. 189–213, 1972. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(72\)90279-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(72)90279-9). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321372902799>.

KAPUSTA, J. I.; GALE, Charles. **Finite-temperature field theory: Principles and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521173223, 9780521820820, 9780511222801. DOI: 10.1017/CB09780511535130.

KAPUSTA, Joseph I. Quantum chromodynamics at high temperature. **Nucl. Phys.**, B148, n. 3, p. 461–498, 1979. ISSN 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90146-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90146-9). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321379901469>.

KARSCH, F.; PATKÓS, A.; PETRECZKY, P. Screened perturbation theory. **Phys. Lett. B**, v. 401, n. 1, p. 69–73, 1997. ISSN 0370-2693. DOI:

[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00392-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00392-4). Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397003924>.

KASTENING, Boris. Renormalization group improvement of the effective potential in massive ϕ^4 theory. **Phys. Lett.**, B283, n. 3, p. 287–292, 1992. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(92\)90021-U](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90021-U). Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939290021U>.

KISLINGER, M. B.; MORLEY, P. D. Collective phenomena in gauge theories. II. Renormalization in finite-temperature field theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 13, p. 2771–2777, 10 mai. 1976. DOI: [10.1103/PhysRevD.13.2771](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.2771). Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.2771>.

KLEVANSKY, S. P. The NambuJona-Lasinio model of quantum chromodynamics. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 64, p. 649–708, 3 jul. 1992. DOI: [10.1103/RevModPhys.64.649](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.64.649). Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.64.649>.

KNEUR, Jean-Loïc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O.; STAUDT, Ederson. Updating the phase diagram of the GrossNeveu model in 2+1 dimensions. **Phys Lett.**, B657, n. 1, p. 136–142, 2007. ISSN 0370-2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.10.013>. Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269307012373>.

KNEUR, Jean-Loc. Variational quark mass expansion and the order parameters of chiral symmetry breaking. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 57, p. 2785–2805, 5 mar. 1998. DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2785](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2785). Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.57.2785>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André. $\Lambda_{\overline{MS}}^{\text{QCD}}$ from renormalization group optimized perturbation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 85, p. 014005, 1 jan. 2012. DOI: [10.1103/PhysRevD.85.014005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.014005). Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.014005>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André. α_S from F_π and renormalization group optimized perturbation theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 88, p. 074025, 7 out. 2013. DOI: [10.1103/PhysRevD.88.074025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.074025). Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.074025>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André. Chiral condensate and spectral density at full five-loop and partial six-loop orders of renormalization group optimized perturbation theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 101, p. 074009, 7 abr. 2020. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.074009. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.101.074009>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André. Chiral condensate from renormalization group optimized perturbation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 074027, 7 out. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.074027. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.074027>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André. Renormalization group improved optimized perturbation theory: Revisiting the mass gap of the $O(2N)$ Gross-Neveu model. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 125012, 12 jun. 2010. DOI:

10.1103/PhysRevD.81.125012. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.125012>.

KNEUR, Jean-Loc; NEVEU, André; PINTO, Marcus B. Improved optimization of perturbation theory: Applications to the oscillator energy levels and Bose-Einstein condensate critical temperature. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 69, p. 053624, 5 mai. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevA.69.053624. Disponível em:

<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.053624>.

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus B. in preparation. [S./].

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus B. Renormalization group optimized perturbation theory at finite temperatures. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 92, p. 116008, 11 dez. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.116008. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.116008>.

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus B. Scale-Invariant Resummed Perturbation at Finite Temperatures. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 031601, 3 jan. 2016. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.031601. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.031601>.

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus B.; RESTREPO, Tulio E. in preparation. [S./].

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus Benghi; RAMOS, Rudnei O. Critical and tricritical points for the massless 2D Gross-Neveu model beyond large N . **Phys. Rev. D**,

American Physical Society, v. 74, p. 125020, 12 dez. 2006. DOI:

10.1103/PhysRevD.74.125020. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.125020>.

KNEUR, Jean-Loc; PINTO, Marcus Benghi; RESTREPO, Tulio Eduardo.

Renormalization group improved pressure for cold and dense QCD. **Phys. Rev. D**,

American Physical Society, v. 100, p. 114006, 11 dez. 2019. DOI:

10.1103/PhysRevD.100.114006. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.114006>.

KRAEMMER, U; REBHAN, A. Advances in perturbative thermal field theory. **Rept.**

Prog. Phys., v. 67, n. 3, p. 351, 2004. Disponível em:

<http://stacks.iop.org/0034-4885/67/i=3/a=R05>.

KURKELA, Aleks; FRAGA, Eduardo S.; SCHAFFNER-BIELICH, Jürgen;

VUORINEN, Aleks. Constraining neutron star matter with Quantum Chromodynamics.

Astrophys. J., v. 789, p. 127, 2014. DOI: 10.1088/0004-637X/789/2/127.

KURKELA, Aleks; ROMATSCHKE, Paul; VUORINEN, Aleks. Cold quark matter.

Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 81, p. 105021, 10 mai. 2010. DOI:

10.1103/PhysRevD.81.105021. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.105021>.

LAINÉ, Mikko; SCHRÖDER, York. Quark mass thresholds in QCD thermodynamics.

Phys. Rev. D, American Physical Society, v. 73, p. 085009, 8 abr. 2006. DOI:

10.1103/PhysRevD.73.085009. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.085009>.

LAINÉ, Mikko; VUORINEN, Aleks. **Basics of Thermal Field Theory**. [S.l.]: Springer,

2016. v. 925. DOI: 10.1007/978-3-319-31933-9. arXiv: 1701.01554 [hep-ph].

LANDAU, L. D. **Statistical physics**. Amsterdam London: Elsevier Butterworth
Heinemann, 1980. ISBN 9780080570464.

LUO, Xiaofeng; XU, Nu. Search for the QCD Critical Point with Fluctuations of

Conserved Quantities in Relativistic Heavy-Ion Collisions at RHIC : An Overview. **Nucl.**

Sci. Tech., v. 28, n. 8, p. 112, 2017. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

- LUPERINI, Cristina; ROSSI, Paolo. Three-loop function(s) and effective potential in the Gross-Neveu model. **Annals Phys.**, v. 212, n. 2, p. 371–401, 1991. ISSN 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(91\)90120-W](https://doi.org/10.1016/0003-4916(91)90120-W). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349169190120W>.
- MACHLEIDT, R.; ENTEM, D.R. Chiral effective field theory and nuclear forces. **Phys. Rept.**, v. 503, p. 1–75, 2011. DOI: 10.1016/j.physrep.2011.02.001. eprint: 1105.2919.
- MILLER, M. C. *et al.* PSR J00300451 Mass and Radius from NICER Data and Implications for the Properties of Neutron Star Matter. **Astrophys. J. Lett.**, American Astronomical Society, v. 887, n. 1, p. l24, dez. 2019. DOI: 10.3847/2041-8213/ab50c5. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab50c5>.
- MINTZ, B. W.; FRAGA, E. S.; PAGLIARA, G.; SCHAFFNER-BIELICH, J. Nucleation of quark matter in protoneutron star matter. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 81, p. 123012, 12 jun. 2010. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.123012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.123012>.
- MOGLIACCI, Sylvain; ANDERSEN, Jens O.; STRICKLAND, Michael; SU, Nan; VUORINEN, Aleks. Equation of state of hot and dense QCD: resummed perturbation theory confronts lattice data. **JHEP**, v. 12, n. 12, p. 055, dez. 2013. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP12(2013)055. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/JHEP12\(2013\)055](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2013)055).
- MORLEY, P. D. Thermodynamic potential in quantum electrodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 17, p. 598–610, 2 jan. 1978. DOI: 10.1103/PhysRevD.17.598. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.598>.
- MOST, Elias R.; WEIH, Lukas R.; REZZOLLA, Luciano; SCHAFFNER-BIELICH, Jürgen. New Constraints on Radii and Tidal Deformabilities of Neutron Stars from GW170817. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 120, p. 261103, 26 jun. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.261103. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.261103>.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 122,

p. 345–358, 1 abr. 1961a. DOI: 10.1103/PhysRev.122.345. Disponível em:
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 124, p. 246–254, 1 out. 1961b. DOI: 10.1103/PhysRev.124.246. Disponível em:
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.246>.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, 4 fev. 1939. DOI: 10.1103/PhysRev.55.374. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>.

PALHARES, Letcia F. **Exploring the different phase diagrams of Strong Interactions**. 2012. Tese (Doutorado) – Rio de Janeiro Federal U. arXiv: 1208.0574 [hep-ph]. Disponível em:
<http://inspirehep.net/record/1125581/files/arXiv:1208.0574.pdf>.

PALHARES, Letcia F. **Matéria densa e fria: Termodinâmica, transição de fase e renormalização**. 2008. Diss. (Mestrado) – Rio de Janeiro Federal U. Disponível em:
https://minerva.ufrj.br/F/916HJT34YH85F41H23D8PIVU1SVDQI7HV5ERX8178SX16MHCIN-00556?func=service&doc_library=UFR01&doc_number=000810630&line_number=0001&func_code=WEB-BRIEF&service_type=MEDIA.

PALHARES, Letcia F.; FRAGA, Eduardo S. Perturbative Yukawa theory at finite density: The role of masses and renormalization group flow at two loops. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 78, p. 025013, 2 jul. 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.025013. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.025013>.

PATRIGNANI, C. *et al.* Review of Particle Physics. **Chin. Phys.**, v. C40, n. 10, p. 100001, 2016. Disponível em:
<http://stacks.iop.org/1674-1137/40/i=10/a=100001>.

PINTO, Marcus B.; RAMOS, Rudnei O. High temperature resummation in the linear δ expansion. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 60, p. 105005, 10 out. 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.105005. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.105005>.

- PISARSKI, Robert D. Scattering amplitudes in hot gauge theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 63, p. 1129–1132, 11 set. 1989. DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.1129. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.63.1129>.
- POLITZER, H. David. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, 26 jun. 1973. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.
- RAMOND, P. **Field Theory: a moder primer**. [S.l.]: Avalon Publishing, 1997. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813346564. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ctr9K61fY4kC>.
- RESTREPO, Tulio E.; MACIAS, Juan Camilo; PINTO, Marcus Benghi; FERRARI, Gabriel N. Dynamical generation of a repulsive vector contribution to the quark pressure. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 91, p. 065017, 6 mar. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.065017. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.065017>.
- RILEY, T. E. *et al.* A NICER View of PSR J00300451: Millisecond Pulsar Parameter Estimation. **Astrophys. J. Lett.**, American Astronomical Society, v. 887, n. 1, p. l21, dez. 2019. DOI: 10.3847/2041-8213/ab481c. Disponível em: <https://doi.org/10.3847%2F2041-8213%2Fab481c>.
- ROSENSTEIN, Baruch; WARR, Brian J.; PARK, Seon H. Dynamical symmetry breaking in four-fermion interaction models. **Phys. Rept.**, v. 205, n. 2, p. 59–108, 1991. ISSN 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90129-A](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90129-A). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739190129A>.
- SHURYAK, E.V. Quark-gluon plasma and hadronic production of leptons, photons and psions. **Phys. Lett. B**, v. 78, n. 1, p. 150–153, 1978. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(78\)90370-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90370-2). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269378903702>.
- SOUZA CRUZ, Frederico F. de; PINTO, Marcus B.; RAMOS, Rudnei O. Transition temperature for weakly interacting homogeneous Bose gases. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 64, p. 014515, 1 jun. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevB.64.014515. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.014515>.

STEVENSON, P. M. Optimized perturbation theory. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 23, p. 2916–2944, 12 jun. 1981. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.2916.

Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.2916>.

TANABASHI, M. *et al.* Review of Particle Physics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 98, p. 030001, 3 ago. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001. Disponível

em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>.

TAYLOR, J.C.; WONG, S.M.H. The Effective Action of Hard Thermal Loops in QCD.

Nucl. Phys., B346, p. 115–128, 1990. DOI: 10.1016/0550-3213(90)90240-E.

TEWS, I.; KRÜGER, T.; HEBELER, K.; SCHWENK, A. Neutron Matter at Next-to-Next-to-Next-to-Leading Order in Chiral Effective Field Theory. **Phys. Rev. Lett.**,

American Physical Society, v. 110, p. 032504, 3 jan. 2013. DOI:

10.1103/PhysRevLett.110.032504. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.032504>.

TOIMELA, T. Perturbative QED and QCD at finite temperatures and densities. **Int. J. Theor. Phys.**,

v. 24, n. 9, p. 901–949, set. 1985. ISSN 1572-9575. Disponível em:

<https://doi.org/10.1007/BF00671334>.

TOLMAN, Richard C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid.

Phys. Rev., American Physical Society, v. 55, p. 364–373, 4 fev. 1939. DOI:

10.1103/PhysRev.55.364. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>.

VERMASEREN, J.A.M; LARIN, S.A; RITBERGEN, T van. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass. **Phys. Lett. B**, v. 405, n. 3,

p. 327–333, 1997. ISSN 0370-2693. DOI:

[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00660-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00660-6). Disponível em:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269397006606>.

VUORINEN, A. Pressure of QCD at finite temperatures and chemical potentials. **Phys. Rev. D**,

American Physical Society, v. 68, p. 054017, 5 set. 2003. DOI:

10.1103/PhysRevD.68.054017. Disponível em:

<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.054017>.

WEINBERG, Steven. High-Energy Behavior in Quantum Field Theory. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 118, p. 838–849, 3 mai. 1960. DOI:

10.1103/PhysRev.118.838. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.118.838>.

WEINBERG, Steven. New Approach to the Renormalization Group. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 8, p. 3497–3509, 10 nov. 1973a. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3497. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.8.3497>.

WEINBERG, Steven. Non-Abelian Gauge Theories of the Strong Interactions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 31, p. 494–497, 7 ago. 1973b. DOI: 10.1103/PhysRevLett.31.494. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.31.494>.

WITTEN, Edward. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 30, p. 272–285, 2 jul. 1984. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.272. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.272>.

ZHOU, En-Ping; ZHOU, Xia; LI, Ang. Constraints on interquark interaction parameters with GW170817 in a binary strange star scenario. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 97, p. 083015, 8 abr. 2018. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.083015. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.083015>.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO

A.1 NOTAÇÃO RELATIVÍSTICA

Neste trabalho adotamos o sistema de unidades naturais, usado em física de partículas moderna, onde $c = \hbar = k = 1$, onde c é a velocidade da luz, \hbar é a constante do Planck e k representa a constante de Boltzmann. Então,

$$[\text{massa}] = [\text{energia}] = [\text{tempo}]^{-1} = [\text{comprimento}]^{-1} \quad (207)$$

No espaço de Minkowski a posição contravariante de quatro vetores é denotada por

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}), \quad (208)$$

e sua forma covariante é

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x}). \quad (209)$$

Usamos a seguinte métrica

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (210)$$

de modo que Eq. (209) pode ser escrita como

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (211)$$

O produto escalar em quatro dimensões de dois vetores, $a.b$, é definido como

$$a.b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu, \quad (212)$$

e é invariante nas transformações de Lorentz. Por esse motivo, é chamado de escalar de Lorentz.

A.2 MATRIZES DE DIRAC

As matrizes de Dirac são definidas pela seguinte relação de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (213)$$

Estes objetos matemáticos podem ser representados na representação padrão por matrizes 4×4 como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \tau_i \\ -\tau_i & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (214)$$

onde $\mathbf{1}_2$ é a matriz identidade 2×2 enquanto τ_i são as matrizes de Pauli dadas por

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (215)$$

As matrizes Pauli satisfazem a álgebra $SU(2)$

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k, \quad (216)$$

onde ϵ é o símbolo anti-simétrico de Levi-Civita.

O produto de traço zero, γ^5 , é dado por

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (217)$$

e satisfaz

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (218)$$

Algumas relações importantes das matrizes de Dirac são:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \quad (219)$$

$$\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma_\lambda = 4g^{\mu\nu}, \quad (220)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (221)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}). \quad (222)$$

No caso do modelo GN, onde temos duas dimensões, as matrizes de Dirac são simplesmente

$$\gamma^0 = \tau_3, \quad \gamma^1 = \tau_1. \quad (223)$$

APÊNDICE B – SOMAS DE MATSUBARA

Neste apêndice, fazemos a soma das frequências de Matsubara para bósons e férmions. Com este objetivo, consideramos as somas de Matsubara em termos de integrais de contorno (KISLINGER; MORLEY, 1976; MORLEY, 1978). Para bósons temos,

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(k^0 = 2\pi n iT) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk^0 [G(k^0) + G(-k^0)] g(k^0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk^0 G(k^0), \quad (224)$$

e para férmions

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p^0 = (2n+1)\pi iT + \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp^0 [F(p^0)f^-(p^0) + F(-p^0)f^+(p^0)] + \oint_C dp^0 F(p^0) + \int_{-i\infty}^{i\infty} dp^0 F(p^0), \quad (225)$$

onde $g(p^0)$ e $f^{\pm}(p^0)$ são as distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac respectivamente e $\epsilon > 0$ é um infinitesimal. O contorno C é o caminho fechado no plano complexo dado pelos vértices $(0, -i\infty) \rightarrow (\mu, -i\infty) \rightarrow (\mu, i\infty) \rightarrow (0, i\infty) \rightarrow (0, -i\infty)$. Observamos que os primeiros termos das Eqs. (224) e (225) são zero para $T = 0$ e o terceiro termo de (225) é zero para $\mu = 0$. Estes termos são conhecidos como contornos de massa, enquanto os termos restantes são conhecidos como contornos de vácuo. Vamos agora avaliar o termo de soma típico que aparece na pressão, que em geral tem a forma

$$G(k^0) = \frac{I(k^0)}{k^2} = -\frac{I(p^0)}{2\omega} \left[\frac{1}{k^0 + \omega} - \frac{1}{k^0 - \omega} \right] \quad (226)$$

e

$$F(p^0) = \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2} = -\frac{I(p^0)}{2E_p} \left[\frac{1}{p^0 + E_p} - \frac{1}{p^0 - E_p} \right] \quad (227)$$

onde $\omega = \mathbf{k}^2$ e $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Podemos ver que essas equações têm pólos em $k^0 = \pm\omega$ e $p^0 = \pm E_p$. Então, usando o teorema do resíduo (ARFKEN *et al.*, 2013) obtém-se

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(k^0) = -\frac{1}{2\omega} I(\omega)g(\omega) - \frac{1}{2\omega} I(-\omega) (g(\omega) + 1) \quad (228)$$

e

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p^0) = \frac{1}{2E_p} I(E_p)f^-(E_p) + \frac{1}{2E_p} I(-E_p) (f^+(E_p) - 1). \quad (229)$$

No caso $l(E_p) = 1$ e com $p^0 = i\omega_n + \mu$ obtemos

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-(\omega_n - i\mu)^2 - E_p^2} = \frac{1}{2E_p} f^-(E_p) + \frac{1}{2E_p} (f^+(E_p) - 1) \quad (230)$$

ou

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2} = \frac{1}{2E_p} \left[1 - \frac{1}{e^{(E_p + \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/T} + 1} \right]. \quad (231)$$

Notando que

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2} = \frac{T}{2E_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial E_p} \ln [(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2], \quad (232)$$

obtemos

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln [(\omega_n - i\mu)^2 + E_p^2] = E_p + T \ln [1 + e^{-(E_p + \mu)/T}] + T \ln [1 + e^{-(E_p - \mu)/T}], \quad (233)$$

APÊNDICE C – REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL NO ESQUEMA \overline{MS}

No esquema \overline{MS} , vamos de D dimensões para $D - \epsilon$ dimensões, fazendo a substituição

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^{D-\epsilon}}{(2\pi)^{D-\epsilon}}, \quad (234)$$

Então, as integrais divergentes que nos interessam, tomam a forma

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^{D-\epsilon} p}{(2\pi)^{D-\epsilon}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{-1/2}}, \quad (235a)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}} \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^{D-\epsilon} p}{(2\pi)^{D-\epsilon}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}}. \quad (235b)$$

Usando as fórmulas fornecidas na Ref. (RAMOND, 1997):

$$\int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^A} = \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2)^{A-\omega}} \quad (236)$$

e identificando A e ω para cada uma das integrais (235), chegamos a

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} &= \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma[(\epsilon - D - 1)/2]}{(4\pi)^{(D-\epsilon)/2} \Gamma(-1/2)} \frac{1}{(m^2)^{(\epsilon-D-1)/2}} \\ &= (e^{\gamma_E})^{\epsilon/2} \exp\left(\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^\epsilon\right) \frac{\Gamma[(\epsilon - D - 1)/2]}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(-1/2)} m^{D+1}, \end{aligned} \quad (237a)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}} &= \left(\frac{e^{\gamma_E \Lambda^2}}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma[(\epsilon - D + 1)/2]}{(4\pi)^{(D-\epsilon)/2} \Gamma(1/2)} \frac{1}{(m^2)^{(\epsilon-D+1)/2}} \\ &= (e^{\gamma_E})^{\epsilon/2} \exp\left(\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^\epsilon\right) \frac{\Gamma[(\epsilon - D + 1)/2]}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(1/2)} m^{D-1}. \end{aligned} \quad (237b)$$

No caso do GN temos $D = 1$, então substituindo na Eq. (237), e expandindo até a ordem ϵ obtemos

$$\int \frac{dp}{2\pi} (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = \frac{m^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - L_m + \frac{(2L_m^2 + 2L_m + \pi^2 + 1)\epsilon}{4} \right], \quad (238a)$$


$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - L_m + \left(\frac{24L_m + \pi^2}{48} \right) \epsilon \right]. \quad (238b)$$

No caso da QCD $D = 3$ e

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = -\frac{m^4}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{4} - L_m + \frac{1}{2} \left(L_m^2 + \frac{9}{6} L_m + \frac{\pi^2}{24} + \frac{7}{8} \right) \epsilon \right], \quad (239a)$$

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}} = -\frac{m^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} - L_m + \frac{1}{2} \left(L_m^2 + L_m + \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} \right) \epsilon \right]. \quad (239b)$$

APÊNDICE D – RENORMALIZAÇÃO DA PRESSÃO DO MODELO DE GN

Na ordem g^0 , temos apenas a contribuição do gráfico de 1L (gás livre, ) na pressão não renormalizada. A divergência deste gráfico é uma divergência puramente de vácuo e então é absorvida adicionando o contratermo de vácuo de ponto zero ou **constante cosmológica** à pressão (BROWN, 1994), que é uma série em g de todos contribuições de vácuo puro, ou seja,

$$X = \sum_{i=0} X_i g^i, \quad (240)$$

onde, na ordem g^0 é dada por:

$$X_0 = -\frac{N m^2}{2\pi \epsilon}, \quad (241)$$

e a pressão de quark livre renormalizada é

$$\frac{P_{0,ren}}{N} = \frac{P_0}{N} + \frac{X_0}{N} = \frac{1}{2\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - L_m \right] + 2Tl_1(m, T) \right\}. \quad (242)$$

Para renormalizar a pressão de 2L é preciso renormalizar a massa, ou em outras palavras, achar B na ordem g .

D.1 RENORMALIZAÇÃO DA MASSA

Para renormalizar a massa, precisamos nos concentrar no propagador **vestido** ou função de Green conectada de dois pontos (BROWN, 1994), que é dada por uma série em g como

$$S(p) = \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (243)$$

onde

$$\text{---} = i \frac{p + m}{p^2 - m^2} \quad (244)$$

é o propagador, e cada bolha é conhecida como a auto-energia, que é a soma de todas as funções de Green irreduzíveis de dois pontos:

$$\Sigma = \text{---} \quad (245)$$

e na ordem de 1L é na camada de massa, pode ser escrito como: (KNEUR, Jean-Loc *et al.*, 2006; KLEVANSKY, 1992; LUPERINI; ROSSI, 1991)

$$\begin{aligned} \Sigma_{1L}(p=m) &= \text{---} = -i \frac{g}{N} \mathcal{G} \int \frac{dq^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{q+m}{q^2-m^2} \right] \\ &= \frac{g}{\pi} \mathcal{G} m \left[\frac{1}{\epsilon} - L_m + \left(\frac{24L_m + \pi^2}{48} \right) \epsilon - l_2(m, T, \mu) \right] \end{aligned} \quad (246)$$

onde usamos o resultado da Eq. (238b).

Para obter uma auto-energia finita, devemos adicionar um contratermo de massa ao Lagrangiano dado por:

$$-Bm\bar{\psi}_k\psi_k = -B_1gm\bar{\psi}_k\psi_k = \frac{gm}{\pi\epsilon}\mathcal{G}\bar{\psi}_k\psi_k. \quad (247)$$

que tem a regra de Feynman para o auto-energia,

$$\otimes = -\frac{gm}{\pi\epsilon}\mathcal{G}, \quad (248)$$

e obtemos a auto-energia renormalizada:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ren}(m, T, \mu) &= \text{diagrama} + \otimes + \mathcal{O}(g^2) \\ &= \frac{m}{\pi}g\mathcal{G}[-L_m - I_2(m, T, \mu)] + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (249)$$

O propagador vestido renormalizado S^{ren} na ordem g é então expressado como

$$\begin{aligned} S_{ren}(p) &= i \frac{\not{p} + m + \Sigma_{ren}}{p^2 - (m + \Sigma_{ren})^2} \\ &= i \frac{\not{p} + m_{eff}}{p^2 - (m_{eff})^2} \end{aligned} \quad (250)$$

Esta última equação mostra a importância da auto-energia, uma vez que, é a auto-energia a que veste a massa dos férmions através de correções radiativas, onde $m_{eff} = m + \Sigma_{ren}$ é de fato a massa física, também conhecido como a massa *efetiva*.

Como nosso objetivo é renormalizar a pressão, e nós já renormalizamos o gráfico (3), ficamos com a renormalização da Eq. (4) que é renormalizado com a ajuda do contratermo de massa. Notando que

$$P_1 = i \int \frac{dp^2}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \Sigma_{1L} \right] \quad (251)$$

Assim, a contribuição do contratermo de massa à pressão é

$$\text{diagrama} = i \int \frac{dp^2}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \frac{gm}{\pi\epsilon} \mathcal{G} \right]. \quad (252)$$

Obtemos apos um pouco de álgebra:

$$\text{diagrama} = -\frac{gN}{\pi^2} \mathcal{G} m^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} [L_m - I_2(m, T, \mu)] + \left[\frac{24L_m + \pi^2}{48} \right] \right\}. \quad (253)$$

Adicionando este resultado à Eq. (19b) encontramos:

$$P_1 + \text{diagrama} = \frac{gN}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 \left\{ -\frac{1}{\epsilon^2} + [L_m + I_2(m, T, \mu)]^2 \right\} - \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\}. \quad (254)$$

O termo divergente restante é uma divergência puramente de ponto zero, que é cancelada pela constante cosmológica. Em ordem g ela é dada por:

$$X = \textcircled{X} = X_0 + X_1 g = -\frac{N}{2\pi} \frac{m^2}{\epsilon} + \frac{gN}{2\pi^2} \mathcal{G} \frac{m^2}{\epsilon^2}. \quad (255)$$

Então

$$P_{1,ren} = P_1 + \textcircled{\otimes} + X_1 g = \frac{gN}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 [L_m + I_2(m, T, \mu)]^2 - \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\}. \quad (256)$$

Finalmente, temos uma pressão perturbativa renormalizada (finita) na ordem g ,

$$\begin{aligned} P^{\text{PT}} &= P_0 + P_1 + \textcircled{\otimes} + X + \mathcal{O}(g^2) \\ \frac{P^{\text{PT}}}{N} &= \frac{P_{0,ren}}{N} + \frac{P_{1,ren}}{N} + \mathcal{O}(g^2); \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - L_m \right] + 2T I_1(m, T, \mu) \right\} + \frac{g}{2\pi^2} \mathcal{G} \left\{ m^2 [L_m + I_2(m, T, \mu)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{J}_2^2(m, T, \mu) \right\} + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \quad (257)$$

Até agora, calculamos o contratermo de massa a 1L, B_1 , a fim de encontrar os outros contratermos, devemos renormalizar as correções para o vértice (funções de Green de quatro pontos) e a auto-energia (funções de Green de dois pontos) até a ordem g^2 . É importante notar que, embora nossa renormalização foi feita levando em conta efeitos da temperatura finita, os contratermos encontrados aqui são os mesmos que os encontrados em temperatura zero, como relatado em (BLAIZOT *et al.*, 2003a), o que concorda com o teorema de Weinberg (WEINBERG, 1960).

APÊNDICE E – EQUAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO NO MODELO DE GN

O Lagrangiano renormalizado, Eq. (25), leva a um gerador funcional, $Z(j_0(p); m_0, g_0)$, que é independente da escala de regularização, mas é função das quantidades nuas e de uma fonte nua $j_0(p)$. Substituindo as quantidades nuas em termos das físicas (finitas) e do contratermo, devemos obter as mesmas quantidades físicas, em outras palavras

$$Z(j_0(p); m_0, g_0) = Z(j(p); m, g, \Lambda). \quad (258)$$

O gerador funcional gera todas as funções de Green conectadas através da derivação funcional em relação a j e, em seguida, definindo $j = 0$, ou seja

$$\left. \frac{\delta^n Z(j_0(p); m_0, g_0)}{\delta j_0(p_1) \dots \delta j_0(p_n)} \right|_{j_0=0} = Z_j^{-n/2} \left. \frac{\delta^n Z(j(p); m, g, \Lambda)}{\delta j(p_1) \dots \delta j(p_n)} \right|_{j=0}, \quad (259)$$

ou

$$G^{(n)}(m_0, g_0) = Z_j^{-n/2} G^{(n)}(m, g, \Lambda), \quad (260)$$

onde $Z_j^{-n/2}$ vem das derivadas de $Z_j^{1/2} j$ em relação a j_0 . Dado que $G^{(n)}(m_0, g_0)$ é independente de Λ , temos que

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} G^{(n)}(m_0, g_0) &= \Lambda \frac{d}{d\Lambda} Z_j^{-n/2} G^{(n)}(m, g, \Lambda), \\ &= \left[\Lambda \frac{d}{d\Lambda} Z_j^{-n/2} + Z_j^{-n/2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \right] G^{(n)}(m, g, \Lambda), \\ &= \left[-\frac{n}{2} Z_j^{-n/2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln(Z_j) \right. \\ &\quad \left. + Z_j^{-n/2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \right] G^{(n)}(m, g, \Lambda) \\ &= \left[-\frac{n}{2} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln(Z_j) + \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \right] G^{(n)}(m, g, \Lambda) = 0. \end{aligned} \quad (261)$$

Definindo o coeficiente

$$\zeta = \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln(Z_j), \quad (262)$$

a Eq. (261) fica da forma

$$\left[\Lambda \frac{d}{d\Lambda} - \frac{n}{2} \zeta \right] G^{(n)}(m, g, \Lambda) = 0. \quad (263)$$

Usando a definição da derivada total, obtemos

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} \zeta \right] G^{(n)}(m, g, \Lambda) = 0. \quad (264)$$

Esta é a equação do grupo de renormalização, que contém o princípio da renormalização. Esta equação envolve apenas as funções de Green conectadas e renormalizadas, e basicamente afirma que, embora uma escala de regularização arbitrária tenha sido introduzida na regularização, as grandezas físicas devem ser invariantes quando a mesma é variada. As quantidades que obedecem à Eq. (264) são consideradas invariantes frente ao RG. Uma equação desse tipo foi obtida inicialmente quando aplicada na Electrodinâmica Quântica (QED), por Gell-Mann e Low (GELL-MANN, M.; LOW, 1954).

Neste trabalho, não estamos interessados em calcular a função ζ , visto que, estamos interessados na pressão e em outras quantidades derivadas dela. Já que a pressão é derivada das funções de Green de ponto zero, temos portanto que $n = 0$. Entretanto, as funções γ_m e β são

$$\beta = \Lambda \frac{dg}{d\Lambda}, \quad (265)$$

e

$$\gamma_m = -\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln m, \quad (266)$$

que podem ser calculadas ordem por ordem na teoria da perturbação, de modo que elas são expressas como

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \beta_3 g^3 + \mathcal{O}(g^4) \quad (267)$$

e

$$\gamma_m = d_0 + d_1 g + d_2 g^2 + d_3 g^3 + \mathcal{O}(g^4). \quad (268)$$

Afim de encontrar os coeficientes, vamos nos respaldar nas identidades

$$\Lambda \frac{dg_0}{d\Lambda} = \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \Lambda^\epsilon Z_g g = 0, \quad \text{e} \quad \Lambda \frac{dm_0}{d\Lambda} = \Lambda \frac{d}{d\Lambda} Z_m m = 0, \quad (269)$$

então

$$\epsilon Z_g g + \beta \frac{d}{dg} (Z_g g) = 0, \quad (270)$$

e

$$\beta \frac{dZ_m}{dg} - Z_m \gamma_m = 0. \quad (271)$$

Essas equações são válidas para todas as ordens em g , então tomando os valores para Z_g e Z_m da seção 2.1, encontramos a partir da Eq. (270) que

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = -\epsilon, \quad \beta_2 = -b_0 = -\frac{N-1}{\pi N} \quad \text{e} \quad \beta_3 = -b_1 = \frac{N-1}{2\pi^2 N^2} \quad (272)$$

Usando estes resultados na Eq. (271) nós obtemos,

$$d_0 = 0, \quad d_1 = \gamma_0 = \frac{g}{\pi}, \quad d_2 = \gamma_1 = -\frac{g}{4\pi^2 N} \quad \text{e} \quad d_3 = \gamma_2 = -\frac{g(4N-3)}{16\pi^3 N^2}. \quad (273)$$

Finalmente para $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\beta(g) = -b_0 g^2 - b_1 g^3 + \mathcal{O}(g^4) = -\frac{N-1}{\pi} \frac{g^2}{N} + \frac{N-1}{2\pi^2} \frac{g^3}{N^2} + \mathcal{O}(g^4), \quad (274)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m(g) &= \gamma_0 g + \gamma_1 g^2 + \gamma_2 g^3 + \mathcal{O}(g^4), \\ &= \frac{g}{\pi} - \frac{g}{4\pi^2} \frac{g^2}{N} - \frac{g(4N-3)}{16\pi^3} \frac{g^3}{N^2} + \mathcal{O}(g^4). \end{aligned} \quad (275)$$

Estas são a função γ_m ou dimensão de massa anômala e a função β para o modelo de GN em 1 + 1 dimensões, até 3L, e temos todo o maquinário do RG na teoria de perturbação. Permita-nos agora analisar as propriedades da função β , que é por definição relacionada com a constante de acoplamento e seu comportamento.

E.1 LIBERDADE ASSINTÓTICA NO MODELO DE GN

Pode-se observar da Eq. (274) que para $N > 1$, a função β é negativa, o quê significa que em 1 + 1 dimensões o modelo GN é uma teoria assintoticamente livre (GROSS; NEVEU, 1974), já que, como consequência, $g \rightarrow 0$, quando $\Lambda \rightarrow \infty$. Podemos ver mais claramente o comportamento da constante de acoplamento da Eq. (265), que pode ser escrita como

$$\int_{g(\Lambda_0)}^{g(\Lambda)} dg \frac{1}{\beta(g)} = \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right). \quad (276)$$

O conhecido resultado de 1L para a constante de acoplamento é facilmente obtido tomando β até a ordem g^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\Lambda)} &= \frac{1}{g(\Lambda_0)} + b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right), \\ g_{1L}(\Lambda) &= \frac{g(\Lambda_0)}{1 + g(\Lambda_0) b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)}. \end{aligned} \quad (277)$$

Usando a definição da escala invariante $\overline{M_S}$ do modelo de GN na ordem de 1L

$$\Lambda_{GN} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{b_0 g} \right), \quad (278)$$

a Eq. (277) pode ser escrita como

$$g_{1L} = \frac{1}{b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{GN}} \right)}. \quad (279)$$

O resultado de 2L é obtido usando a função β até a ordem g^3 , resolvendo a integral (276) chega-se ao resultado

$$\frac{1}{g(\Lambda)} = \frac{1}{g(\Lambda_0)} + \frac{b_1}{b_0} \left[\ln \left(\frac{b_1 g(\Lambda) + b_0}{b_1 g(\Lambda_0) + b_0} \right) - \ln \left(\frac{g(\Lambda)}{g(\Lambda_0)} \right) \right] + b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right),$$

$$g_{2L}(\Lambda) = \frac{g(\Lambda_0)}{1 + g(\Lambda_0) \frac{b_1}{b_0} \left[\ln \left(\frac{b_1 g(\Lambda) + b_0}{b_1 g(\Lambda_0) + b_0} \right) - \ln \left(\frac{g(\Lambda)}{g(\Lambda_0)} \right) \right] + g(\Lambda_0) b_0 \ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)}. \quad (280)$$

Após poucas manipulações, pode-se escrever a Eq. (280) como

$$\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{GN}} \right) = \frac{1}{b_0 g(\Lambda)} + \frac{b_1}{b_0^2} \ln \left(\frac{b_0 g(\Lambda)}{1 + \frac{b_1}{b_0} g(\Lambda)} \right) \quad (281)$$

onde a escala \overline{MS} de 2L do modelo do GN é dada por

$$\Lambda_{GN} = \Lambda \exp \left(-\frac{1}{b_0 g(\Lambda)} \right) \left(\frac{b_0 g(\Lambda)}{1 + \frac{b_1}{b_0} g(\Lambda)} \right)^{-\frac{b_1}{b_0^2}} \quad (282)$$

Uma solução explícita da Eq (281) pode ser escrita em termos da função de Lambert W (CORLESS *et al.*, 1996), definida como

$$W(z) e^{W(z)} = z. \quad (283)$$

Manipulação da Eq. (281) e aplicando a definição da função de Lambert W , Eq (E.1), o acoplamento é dado por (GARDI *et al.*, 1998)

$$g_{2L}(\Lambda) = -\frac{b_0}{b_1} \frac{1}{1 + W_0(z)} \quad (284)$$

onde

$$z = -\frac{b_0^2}{b_1} \frac{1}{e} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{GN}} \right)^{-\frac{b_0^2}{b_1}}. \quad (285)$$

A função $W(z)$ é uma função com ramificações infinitas. Como g é positivo e real, é possível identificar o ramo físico, dependendo do sinal de z . Neste caso do modelo GN $z > 0$, para que o ramo físico seja $W_0(z)$. Essa ramificação é real e monotonicamente aumenta para funcionar em $z \in (-e^{-1}, \infty)$ com $W_0(z) \in (-1, \infty)$, em que $z \rightarrow \infty$, $W_0(z) \rightarrow \infty$ e $g \rightarrow 0$. O limite de infravermelho $z \rightarrow 0$, $W_0(z) \rightarrow 0$ e $g \rightarrow -b_0/b_1 = 2\pi N$. O comportamento da constante de acoplamento diminuindo quando Λ aumenta, foi descoberto pela primeira vez por David Gross e Frank Wilczek (GROSS; WILCZEK, 1973b), e por David Politzer (POLITZER, 1973) (ambos publicados simultaneamente), conhecido como liberdade assintótica. Este comportamento basicamente significa que em altas escalas de energia ($\Lambda \gg \Lambda_0$) ou curtas distâncias ($\Lambda^{-1} \ll \Lambda_0^{-1}$), a constante

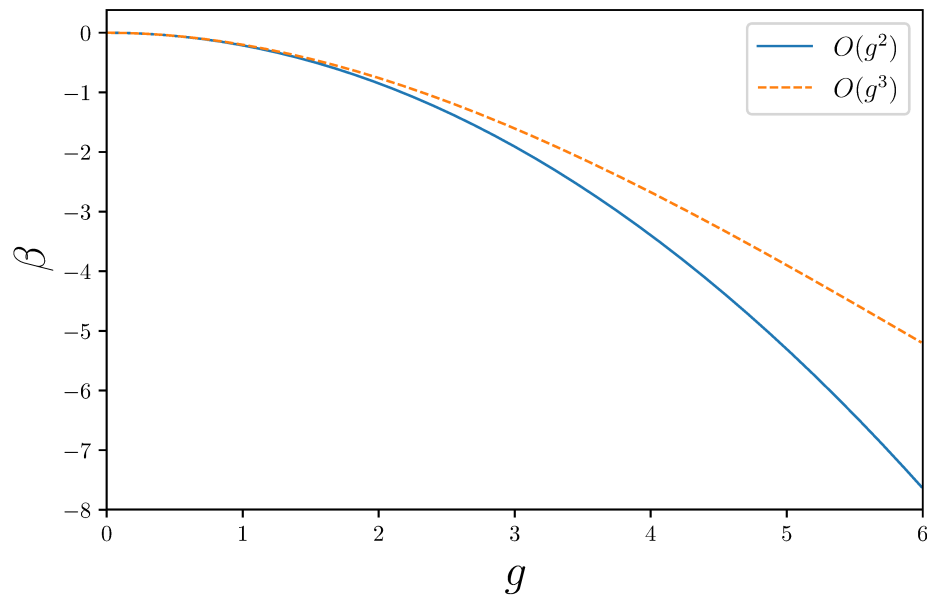


Figura 37 – Função β em 1L e 2L para $N = 3$

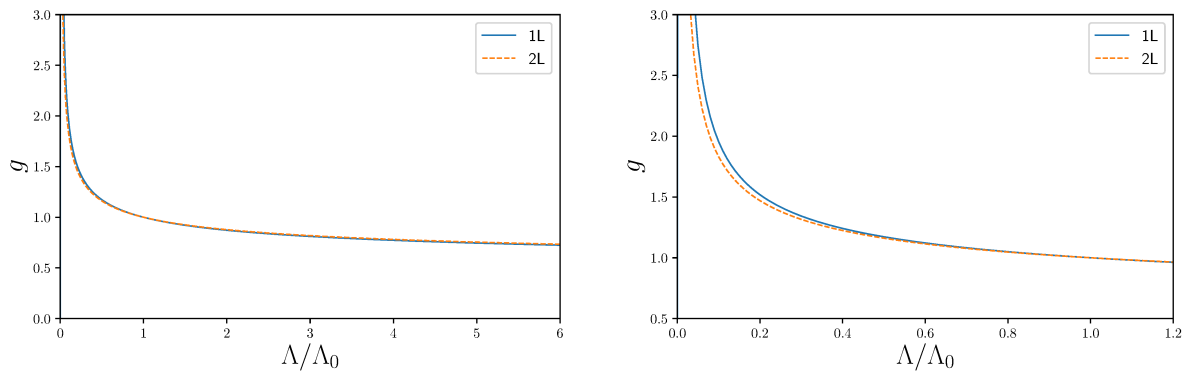


Figura 38 – Constante de acoplamento, g , em 1L e 2L em função de Λ/Λ_0 para $N = 3$ e $g(\Lambda_0) = 1$

de acoplamento é suficientemente pequena como para poder usar a teoria da perturbação. Por outro lado, para longas distâncias, a teoria da perturbação não pode ser usada e, portanto, vê-se necessário o uso de algum método não-perturbativo.

Nas figuras 37 e 38 ilustramos para o modelo de GN, a função β e a constante de acoplamento, g , respectivamente, onde escolhemos $g(\Lambda_0) = 1$ arbitrariamente, considerando que não há como saber um valor experimental, pelo menos para este modelo em duas dimensões (em QCD existem valores experimentais para a constante de acoplamento). Observamos na figura 37 que para $g < 1$ a função β de 1L (ordem g^2), sobrepõe a função β dos 2L (ordem g^3), isso é esperado, uma vez que para esses valores de g , um comportamento perturbativo está previsto e $\beta_1 \approx 0$.

A Figura 38 ilustra que para $\Lambda \gg \Lambda_0$, $g \ll 1$, e o resultado a 1L é uma boa

aproximação. Por outro lado, para $\Lambda \ll \Lambda_0$, notamos uma diferença entre o resultado de 1L e o resultado de 2L, mostrando que, para esses valores de Λ , a teoria de perturbação não pode ser aplicada.

APÊNDICE F – CÁLCULO DA PRESSÃO NA ORDEM DE DOIS *LOOPS*

Neste apêndice, retomamos as etapas para obter a pressão do quark 2L (93) a partir da Eq. (92). Vamos escrever novamente a Eq. (92):

$$P_{q,1} = -\frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} + \mathbf{q})$$

$$\times 8T^3 \sum_{n_p, n_q, n_k} \frac{\delta_{n_p, n_q + n_k}}{T} \left[\frac{2m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{k^2 (p^2 - m^2) (q^2 - m^2)} \right]. \quad (286)$$

Primeiro nos concentramos nas somas de Matsubara,

$$8T^3 \sum_{n_p, n_q, n_k} \frac{\delta_{n_p, n_q + n_k}}{T} \left[\frac{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 2m^2}{k^2 (p^2 - m^2) (q^2 - m^2)} \right]. \quad (287)$$

Seguindo a Ref (KAPUSTA, Joseph I., 1979), o delta de Kronecker pode ser escrito como:

$$\frac{\delta_{n_p, n_q + n_k}}{T} = \frac{\exp((q^0 - \mu + k^0)/T) - \exp((p^0 - \mu)/T)}{p^0 - q^0 - k^0}. \quad (288)$$

Então definindo

$$I(p^0, q^0, k^0) = \frac{2m^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{p^0 - q^0 - k^0} \left[\exp((q^0 - \mu + k^0)/T) - \exp((p^0 - \mu)/T) \right], \quad (289)$$

a expressão (287) assume a forma

$$8T^3 \sum_{n_p, n_q, n_k} \frac{I(p^0, q^0, k^0)}{k^2 (p^2 - m^2) (q^2 - m^2)}. \quad (290)$$

Usando os resultados do Apêndice B, Eqs. (228) e (229), para cada soma na Eq. (290), obtém-se a expressão para (290) relatada em (KAPUSTA, Joseph I., 1979),

$$\frac{1}{E_p E_q \omega} \left\{ f^-(E_p) f^-(E_q) [g(\omega) I(E_p, E_q, \omega) + (g(\omega) + 1) I(E_p, E_q, -\omega)] \right.$$

$$+ f^-(E_p) (f^+(E_q) - 1) [g(\omega) I(E_p, -E_q, \omega) + (g(\omega) + 1) I(E_p, -E_q, -\omega)]$$

$$+ f^-(E_q) (f^+(E_p) - 1) [g(\omega) I(-E_p, E_q, \omega) + (g(\omega) + 1) I(-E_p, E_q, -\omega)]$$

$$\left. + (f^+(E_p) - 1) (f^+(E_q) - 1) [g(\omega) I(-E_p, -E_q, \omega) + (g(\omega) + 1) I(-E_p, -E_q, -\omega)] \right\}. \quad (291)$$

Para escrever a função I em termos da distribuição de Fermi–Dirac e Bose–Einstein, usamos

$$\exp((E_p \pm \mu)/T) = \frac{1 - f^\pm(E_p)}{f^\pm(E_p)}, \quad \exp(\omega/T) = \frac{1 + g(\omega)}{g(\omega)}. \quad (292)$$

Depois de alguma álgebra e usando o fato de que,

$$\int d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{k}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}+\mathbf{q})\frac{g(\omega)}{E_pE_q\omega}\left[\frac{E_+}{E_+^2-\omega^2}-\frac{E_-}{E_-^2-\omega^2}\right]=0, \quad (293)$$

chega-se ao resultado (GRAF *et al.*, 2016):

$$\begin{aligned} P_{q,1} = & -\frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p E_q \omega} \left\{ J_+ \omega \Sigma_+ + J_- \omega \Sigma_- \right. \\ & \left. - [J_+(E_- + \omega) - J_-(E_+ - \omega)] f(E_p) + J_- \omega - 2J_- E_+ g(\omega) - J_- E_+ \right\} \\ & - g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \frac{T^2}{6} \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{f(E_p)}{E_p}, \end{aligned} \quad (294)$$

onde

$$J_{\pm} = \frac{2m^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \mp E_p E_q}{E_{\mp}^2 - \omega^2} = 1 + \frac{2m^2}{E_{\mp}^2 - \omega^2}, \quad (295)$$

$$f(E_p) = f^+(E_p) + f^-(E_p), \quad (296)$$

$$\Sigma_{\pm} = f^+(E_p) f^{\pm}(E_q) + f^-(E_p) f^{\mp}(E_q), \quad (297)$$

$$E_{\mp} = E_p \mp E_q \quad (298)$$

Os primeiros dois termos e o último termo da Eq. (294) são integrais térmicas finitas, os outros termos, afetados por contribuições de flutuações de vácuo, são divergentes e requerem renormalização. Esses termos, no entanto, darão contribuições finitas importantes para a pressão após a renormalização. Podemos identificar que os termos relacionados à auto-energia do vácuo de quarks são,

$$\begin{aligned} L_f \equiv & \frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p E_q \omega} \left\{ [J_+(E_- + \omega) \right. \\ & \left. - J_-(E_+ - \omega)] f(E_p) \right\}, \end{aligned} \quad (299)$$

e os relacionados com a auto-energia do vácuo de glúons são

$$L_b \equiv \frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p E_q \omega} (2J_- E_+ g(\omega)). \quad (300)$$

Enquanto as integrais divergentes de vácuo puro são

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{J_-}{E_p E_q \omega} (E_+ - \omega), \quad (301)$$

A última integral de vácuo puro é comumente subtraída nas aplicações em temperatura finita, com o argumento de que elas afetam apenas o ponto zero do potencial. Porém, como já mencionado, a estrutura de vácuo é crucial em nosso método e por tanto devemos considerá-lo.

Para tornar mais clara a relação entre as integrais divergentes (299) e (300) com as auto-energias do vácuo, esboçamos a prova dada em Refs. (PALHARES, 2008; PALHARES; FRAGA, 2008; GRAF *et al.*, 2016). Considere primeiro as funções auxiliares

$$\mathcal{M}_f(p^4) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg^4 dk^4}{(2\pi)^2} \frac{2m^2 - p \cdot q}{\left((q^4)^2 + E_q^2\right) \left((k^4)^2 + \omega^2\right)} 2\pi\delta(p^4 - q^4 - k^2), \quad (302)$$

$$\mathcal{M}_b(k^4) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg^4 dk^4}{(2\pi)^2} \frac{2m^2 - p \cdot q}{\left((p^4)^2 + E_p^2\right) \left((q^4)^2 + E_q^2\right)} 2\pi\delta(p^4 - q^4 - k^2), \quad (303)$$

onde $p^4 = -ip^0$ e $q^4 = -iq^0$. Em seguida, escrevendo a função delta de Dirac em termos de integrais da função exponencial e depois de alguma álgebra obtém-se (ver detalhes na Ref. (PALHARES, 2008))

$$\mathcal{M}_f(p^4) = \frac{1}{4E_q\omega} \left(\frac{2m^2 + ip^4 E_q + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{ip^4 + E_q + \omega} + \frac{2m^2 - ip^4 E_q + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{-ip^4 + E_q + \omega} \right), \quad (304)$$

$$\mathcal{M}_b(k^4) = \frac{2m^2 + E_p E_q + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{4E_p E_q} \left(\frac{2E_+}{E_+^2 - (ik^4)^2} \right), \quad (305)$$

assim as Eqs (299) e (300) podem ser escritas como

$$L_f = -\frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} + \mathbf{q}) \times 4 \frac{f(E_p)}{E_p} \mathcal{M}_f(-iE_p), \quad (306)$$

$$L_b = \frac{1}{2}g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}^3}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p} + \mathbf{q}) 4 \frac{g(\omega)}{\omega} \mathcal{M}_b(-i\omega). \quad (307)$$

Usando as expressões para \mathcal{M}_f , \mathcal{M}_b e as definições $k^0 = -ip^4$ finalmente obtém-se

$$L_f = -2g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{f(E_p)}{E_p} \left\{ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} (-1)(2\pi)^4 \times i\delta^4(p - q - k) \frac{2m^2 - p \cdot q}{k^2(q^2 - m^2)} \right\} \Big|_{p^0 = E_p}, \quad (308)$$

$$L_b = 2g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} \frac{g(\omega)}{\omega} \left\{ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} (-1)(2\pi)^4 \times i\delta^4(p - q - k) \frac{2m^2 - p \cdot q}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \right\} \Big|_{k^0 = \omega}. \quad (309)$$

As expressões entre colchetes são os diagramas de auto-energia de vácuo de quark e glúons com seu momento na camada de massa e são fornecidas por (PALHARES,

2008; PALHARES; FRAGA, 2008; GRAF *et al.*, 2016)

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)_{\text{M.S.}} = \left\{ -2g(4\pi)^2 C_F \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} (2\pi)^4 \delta^4(p-q-k) \right. \\ \left. \times \frac{2m^2 - p \cdot q}{k^2(q^2 - m^2)m} \right\} \Big|_{p=m}, \quad (310)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)_{\text{M.S.}} = \left\{ -2g(4\pi)^2 N_f N_c C_F \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} (2\pi)^4 \delta^4(p-q-k) \right. \\ \left. \times 4 \frac{2m^2 - p \cdot q}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \right\} \Big|_{k^2=0}. \quad (311)$$

Finalmente encontramos que

$$L_f = -N_f N_c i \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{f(E_p)}{E_p} m \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)_{\text{M.S.}} \right\} \quad (312)$$

$$L_b = \frac{i}{4} \int \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu} g(\omega)}{\omega} \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right)_{\text{M.S.}} \right\}. \quad (313)$$

Conforme argumentado na Ref. (GRAF *et al.*, 2016), uma vez que a auto-energia do glúon é avaliada na camada de massa e dado que os glúons têm massa de corrente zero, temos que L_b é zero, uma vez que a auto-energia do glúon é proporcional a k^2 . Portanto, os únicos termos a serem renormalizados são L_f e \mathcal{V} .

F.1 RENORMALIZAÇÃO

Antes de renormalizar a expressão divergente L_f , devemos regularizar para separar as partes divergentes da parte finita contida nesse termo. Para fazer isso, vamos escrever a auto-energia do quark regularizada no esquema $\overline{\text{MS}}$ (detalhes podem ser encontrados nas Refs. (RAMOND, 1997; HIDDING, 2016))

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = -i2gC_F \int_0^1 dx (p(1-x)A + mB) \quad (314)$$

onde x é um parâmetro de Feynman e

$$A = -\frac{4}{\epsilon} + 2 + 2 \ln \left(\frac{\Delta_f}{\Lambda^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (315)$$

$$B = \frac{8}{\epsilon} - 2 - 4 \ln \left(\frac{\Delta_f}{\Lambda^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (316)$$

com $\Delta_f^2 = m^2 x - x(1-x)p^2$. Então, a auto-energia do quark renormalizada é obtida adicionando-se os contratermos

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = -i2gC_F \left(\frac{2p}{\epsilon} - \frac{8m}{\epsilon} \right) \quad (317)$$

Colocando a Eq. (314) na camada de massa, $p = m$, resolvendo a integral para x e substituindo na Eq. (312) obtém-se

$$L_f = -4gN_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{f(E_p)}{E_p} m^2 \left\{ \frac{3}{\epsilon} + 2 - 3L_m \right\}. \quad (318)$$

Logo, para renormalizar a pressão, devemos adicionar o termo contra-termo

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} &= N_c N_f i \left\{ \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} T \sum_{n_p} \text{tr} \left[\frac{(p-m)}{p^2 - m^2} \left(-igC_F \left(\frac{2p}{\epsilon} - \frac{8m}{\epsilon} \right) \right) \right] \right\} \\ &= gN_c N_f C_F \left\{ \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} T \sum_{n_p} \frac{4}{p^2 - m^2} \left(\frac{3m^2}{\epsilon} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (319)$$

Usando os resultados do apêndice B, finalmente obtemos

$$\text{Diagrama} = 4gN_c N_f C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{F(E_p) - 1}{E_p} \left(\frac{3m^2}{\epsilon} \right) \quad (320)$$

Podemos ver que a parte térmica da Eq. (320) renormaliza a Eq. (318), logo

$$L_{f,ren} = -4gN_f N_c C_F \int \frac{d\mathbf{p}^3}{(2\pi)^3} \frac{f(E_p)}{E_p} m^2 \left\{ 2 - 3L_m \right\}. \quad (321)$$

Usando a notação $\hat{E}_p = E_p/T$, $\hat{p} = p/T$ e assim por diante, podemos escrever a última equação como

$$\frac{L_{f,ren}}{N_c N_f} = -g(4\pi) \frac{m^2}{4\pi^2} (2 - 3L_m) T^2 J_2(\hat{m}, \hat{\mu}), \quad (322)$$

que é o primeiro termo da segunda linha da Eq. (93).

O termo divergente restante na Eq. (320) renormalizará parte do termo de vácuo \mathcal{V} . A renormalização das integrais de vácuo é realizada de maneira semelhante e envolve muitas etapas demoradas. Nas Refs. (PALHARES, 2008, 2012) detalhes da renormalização do vácuo são feitos no contexto do modelo massivo de Yukawa, que tem a mesma estrutura de vácuo do QCD. Tomando cuidado com a mudança na notação e nos fatores globais, podemos a partir das expressões dadas nas Refs (PALHARES, 2008, 2012) encontrar a pressão de vácuo renormalizada da Eq. (93).