

PREFEITURA MUNICIPAL DE CURITIBA  
DEPARTAMENTO DO BEM ESTAR SOCIAL  
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO  
DIVISÃO DE ENSINO FUNDAMENTAL

DOCUMENTO 02 - A APRENDIZAGEM DA DIVISÃO

ELABORAÇÃO: HENRIETA D. AFUDA  
COORDENADORA DE MATEMÁTICA

DE 1ª a 4ª Séries do 1º grau

(PROIBIDA REPRODUÇÃO SEM CITAR A FONTE)

JUNHO/ 1974

## A APRENDIZAGEM DA DIVISÃO

Conceito da Divisão: Divisão é a operação que reparte os elementos de  $\mathcal{L}$  um conjunto em subconjuntos equipotentes, de maneira que cada subconjunto receba a mesma quantidade de elementos e a maior possível. (ideia re-partitiva).

A divisão exata é a operação inversa da multiplicação.

A divisão é considerada como uma das operações aritméticas fundamentais das mais difíceis.

### RAZÕES DESTA DIFICULDADE:

1. A divisão não é um processo direto como a adição e a multiplicação pois envolve o cálculo de estimativa e correção do cociente mesmo nos casos mais simples.
2. Cada cociente parcial deve ser estimado e se em alguma etapa a estimativa não for correta, será preciso corrigi-la ou mesmo fazer nova estimativa antes que o processo possa ser continuado.
3. A divisão com divisor de um algarismo e a divisão com divisor de dois algarismos foram ensinados por muitos anos como se / fossem dois processos bastante diferentes, sem nenhuma relação um com o outro, apresentando apenas um ponto em comum: as palavras dividendo, divisor e cociente.
4. O processo comumente usado na divisão obriga a criança a um desperdício de trabalho do experimentar e abandonar algarismos, como cocientes parciais.
5. Não tem havido nenhuma preocupação em ajudar a criança a compreender o processo da divisão, mostrando que também pode se apresentar como um processo de subtrações sucessivas (ideia - subtrativa)

Essa compreensão geral de que a divisão pode também realizar-se por subtrações sucessivas deve ser desenvolvido com cuidado para que a criança compreenda o processo.

De início, compreender o processo é mais importante do que fazer as melhores estimativas de cálculo do cociente.

### IDÉIAS DA DIVISÃO

A divisão pode ser trabalhada com duas idéias:

- 1- Repartitiva (inicialmente)
- 2- Subtrativa

DIVISÃO COM IDÉIA REPARTITIVA:

É o processo de repartir os elementos de um conjunto em sub-conjuntos equipatentes de modo que cada subconjunto receba a mesma quantidade de elementos e a maior quantidade possível.

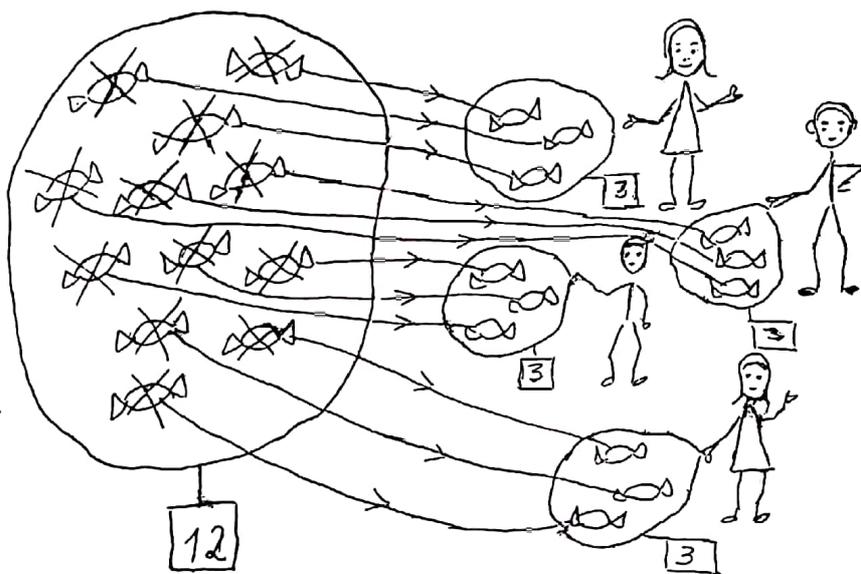
Quando trabalhamos com a idéia repartitiva, sempre em forma de problemas orais, o dividendo e o divisor são de natureza diferente.

Quando isto ocorre, o cociente é da mesma natureza do dividendo.

Exemplo: Tenho 12 bombons e quero repartir entre 4 crianças. Quantos bombons receberá cada criança?

Dividendo = 12 bombons	bombons ≠ crianças
Divisor = 4 crianças	12       4
Cociente = 3 bombons	<u>-12</u> 3 bombons
	00

Dividendo e divisor de natureza diferente: bombons e crianças. Cociente da mesma natureza do dividendo: bombons.



(bombons) ≠ (crianças)

12	4 )
<u>-12</u>	3 (bombons)
00	

4 X 3 = 12

4 conjuntos com 3 elementos cada um

Quando usamos a idéia repartitiva, onde o dividendo e o divisor são de natureza diferente (bombons e crianças) ao efetuarmos a multiplicação do divisor com o cociente, devemos ter o cuidado de fazermos na ordem com que se apresentam concretamente, ou seja  $4 \times 3 = 12$  e não  $3 \times 4$ , pois o que a criança vê na realidade, são quatro conjuntos com tres elementos cada um (ver desenho)

Relaciona-se dessa forma as operações multiplicação e divisão ; em face dessa relação, a divisão exata e a multiplicação, podem ser consideradas como operações inversas, podendo se estabelecer relações também com os termos dessas operações: produto com dividendo; fatores, com divisor e cociente.

### DIVISÃO COM IDÉIA SUBTRATIVA

É o processo de achar quantos subconjuntos equipotentes podem ser retirados ou subtraídos de um determinado conjunto.

A divisão com idéia subtrativa é também conhecida como idéia de medição ou idéia de medir.

Quando trabalhamos com a idéia subtrativa, o dividendo e o divisor são da mesma natureza, o cociente será sempre de natureza diferente.

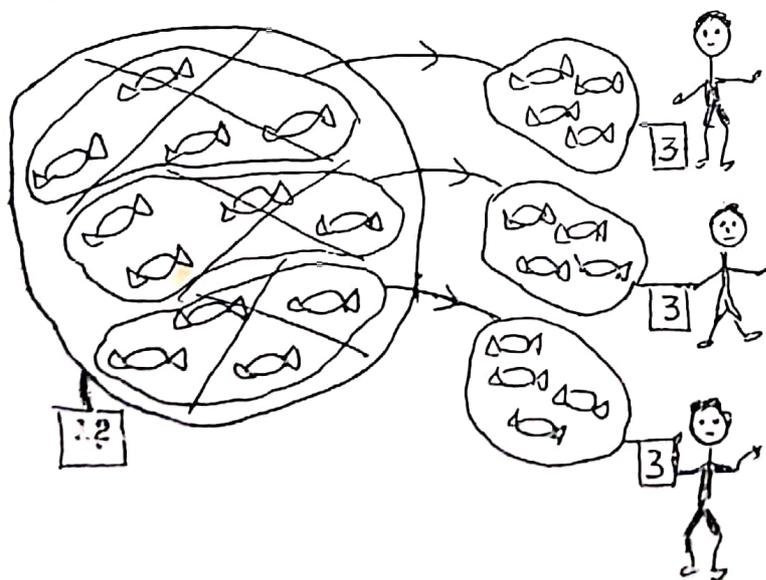
Devemos propor as divisões sempre em forma de situações problema, enunciando corretamente a ação que ocorre, e realizando-a concretamente.

Exemplo: Ganhei 12 bombons e quero dar 4 bombons a cada amigo. Quantos amigos vão ganhar (bombons)?

Dividendo = 12 bombons  
 Divisor = 4 bombons  
 Cociente = 3 amigos

$$\begin{array}{r}
 \text{(bombons)} = \text{(bombons)} \\
 12 \quad | \quad 4 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 -12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Dividendo e divisor da mesma natureza: bombons  
 Cociente de natureza diferente : amigos



$$\begin{array}{r}
 \text{(bombons)} = \text{(bombons)} \\
 12 \quad | \quad 4 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\
 -12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$3 \times 4 = 12$$

3 conjuntos com  
 4 elementos cada  
 um

Fica evidenciado nesta operação a relação existente entre a divisão e a subtração, se o professor cuidar para que o número de elementos do conjunto seja múltiplo em relação aos subconjuntos a serem retirados.

Assim como a multiplicação está relacionada com a adição de parcelas iguais, a divisão (idéia subtrativa) está relacionada com a subtração repetida: Ex:  $12-4=8-4=4-4=0$

Quando usamos a idéia subtrativa, onde o dividendo e o divisor / são de mesma natureza (bombons e bombons) ao efetuarmos a multiplicação do cociente pelo divisor, devemos ter o cuidado de o fazermos na ordem com que se apresentam concretamente, ou seja  $3 \times 4$  pois o que a criança vê na realidade, são três conjuntos com quatro elementos cada um / (ver desenhos).

#### RECOMENDAÇÕES:

Sempre que apresentarmos uma situação problema que envolva divisão, devemos habituar o aluno a analisar a natureza do dividendo e do divisor e verificar qual das idéias está envolvida: a repartitiva ou a subtrativa, pois a resposta do problema depende da / idéia que foi aplicada ou vice versa

#### PROCESSO LONGO DA DIVISÃO

O processo longo da divisão, torna a aprendizagem mais suave, dando maior segurança de cálculo e evitando a fadiga mental.

Recomendamos que mesmo seja adotado desde as primeiras operações efetuadas, pois além de facilitar a aprendizagem é menos sujeito a erros no momento em que se efetua a subtração para encontrar a diferença entre o produto e o dividendo.

Usando-se o processo longo da divisão, é possível graduar as etapas de sua aprendizagem, quando se efetuam operações de divisão por um ou dois algarismos no divisor.

#### PRÉ-REQUISITOS PARA APRENDIZAGEM DA DIVISÃO

Antes de iniciar a aprendizagem da divisão, é necessário que o aluno apresente os seguintes pré-requisitos.

- Conhecimentos dos fatores fundamentais da multiplicação até 5 e depois até 9
- Aplicação da propriedade comutativa na multiplicação.
- Aplicação de propriedades do elemento absorvente na multiplicação  
(multiplicação por zero)
- Conhecimento do Sistema de Numeração Base Dez, com suas classes e ordens.
- Subtração com e sem recurso.

GRADUAÇÃO DA APRENDIZAGEM DA DIVISÃO  
Divisor Expresso por um algarismo

- 1º passo: Divisão exata dos fatos fundamentais com divisores até 5  
 Ex:  $6 \div 3$  ;  $8 \div 2$  ;  $14 \div 2$  ;  $12 \div 4$  ;  $15 \div 5$  ;  $20 \div 5$  , etc...
- 2º passo: Divisões inexatas com divisores até 5:  
 Ex:  $12 \div 5$  ;  $14 \div 3$  ;  $11 \div 2$  ;  $17 \div 4$  ;  $22 \div 5$  ;  $19 \div 5$  , etc..
- 3º passo: Divisões exatas com divisores até 5 números até 100 e cociente de dois algarismos.  
 Ex:  $24 \div 2$  ;  $96 \div 3$  ;  $46 \div 4$  ;  $55 \div 5$  , etc....
- 4º passo: Divisão inexatas com divisores até 5 números até 100 e cocientes de dois algarismos.  
 Ex:  $92 \div 5$  ;  $62 \div 4$  ;  $54 \div 3$  ;  $43 \div 2$  ;  $96 \div 5$  ; etc:..
- 5º passo: Divisões exatas com números acima de 100 e divisores até 5  
 Ex:  $486 \div 2$  ;  $693 \div 3$  ;  $844 \div 4$  ;  $826 \div 2$  ; etc...
- 6º passo: Divisões exatas com números acima de 100, divisores até 9 e utilização da ordem das centenas e dezenas para o primeiro cálculo do cociente parcial.  
 Ex:  $124 \div 2$  ;  $219 \div 3$  ;  $305 \div 5$  ;  $328 \div 4$  ;  $164 \div 4$  ;  
 $255 \div 5$  ;  $305 \div 5$  ;  $246 \div 6$  ;  $546 \div 6$  ;  $287 \div 7$  ;  
 $568 \div 8$  ;  $639 \div 9$  ;  $549 \div 9$  ;  $819 \div 9$  ;  $819 \div 9$  ; etc...
- 7º passo: Divisões exatas e inexatas com números acima de 1000, divisores até 9 e cociente de três algarismos.  
 Ex:  $1124 \div 2$  ;  $1653 \div 3$  ;  $3306 \div 6$  ;  $1686 \div 6$  ;  $2856 \div 3$  ;  
 $1727 \div 4$  ;  $2043 \div 3$  ;  $3966 \div 6$  ;  $3605 \div 5$  ;  $5586 \div 6$  ; etc..
- 8º passo: Divisões com juro final no cociente  
 Ex:  $750 \div 5$  ;  $320 \div 6$  ;  $3480 \div 6$  ;  $3000 \div 6$   
 $5400 \div 6$  ;  $1400 \div 7$  ;  $8100 \div 9$  ;  $3200 \div 5$  ; etc...
- 9º. passo: Divisão com zero intercalado no cociente  
 Ex:  $3036 \div 6$  ;  $1045 \div 9$  ;  $4905 \div 7$  ;  $4206 \div 6$  ;  
 $4949 \div 7$  ;  $2701 \div 9$  ;  $5658 \div 8$  ;  $5407 \div 9$  ; etc...

A aprendizagem da divisão pelo processo longo, com registro do produto do cociente pelo divisor abaixo do dividendo para que se efetue a respectiva subtração, deve seguir estes passos pois cada um deles trata de uma dificuldade específica, sendo pré-requisito do passo seguinte:

### DIVISÃO POR DOIS ALGARISMOS NO DIVISOR:

No processo longa da divisão por dois algarismos parcelamento / do dividendo e cálculo correto do cociente, há duas etapas a vencer.

1ª. O aluno vai operar a divisão por dois algarismos, com a experiência que tem da divisão por um algarismo.

O cálculo do cociente depende apenas do conhecimento sobre os pares que compõe a tábua da divisão e dos casos de "resto".

Ex:  $15 \div 5 = 3$ ;  $16 \div 5 = 3$ ;  $17 \div 5 = 3$ ;  $18 \div 5 = 3$ ;  $19 \div 5 = 3$ ;  
Estas divisões dão 3 no cociente, deixando restos diferentes.

2ª. Na 2ª etapa, os cocientes estimados como anteriormente não são os corretos e há necessidade de refazer o cálculo.

Mesmo os adultos nem sempre corseguem o cociente correto na primeira tentativa, necessitando abandonar e corrigir a primeira estimativa efetuada.

Ex:  $164 \div 23$ ;  $79 \div 17$ ;  $148 \div 29$ ;  $681 \div 38$ ; etc...

Nas divisões com divisores expressos por numeral de dois algarismos, podemos usar a idéia repartitiva ou idéia subtrativa da divisão, dependendo da situação problema em que ela se apresenta.

As operações matemáticas devem sempre ser comentados em linguagem matemática, paralelamente ao que se faz concretamente, analisando a natureza dos termos da divisão para verificar qual idéia que vai ser aplicada.

### GRADUAÇÃO DA APRENDILAGEM DA DIVISÃO

#### Divisor expresso por numeral de dois algarismos.

1ª ETAPA: Cálculo fácil do cociente: 1ª ao 5ª passo

1ª passo: Divisões exatas.

Objetivo: Dividir o número de dezenas do dividendo pelo número de dezenas do divisor, como recurso para achar o cociente.

Ex:  $39 \div 13$ ;  $64 \div 32$ ;  $24 \div 12$ ;  $93 \div 31$ ;  $84 \div 42$ ;  $77 \div 11$ ;  
 $147 \div 21$ ;  $217 \div 31$ ;  $244 \div 61$ ;  $729 \div 81$ ;  $497 \div 71$ ; etc..

2ª passo: Cálculo fácil do cociente e divisões inexatas

Objetivo: Análise o resto para se certificar se o cálculo do cociente está correto.

Na divisão, o resto é sempre menor que o divisor:

Ex:  $67 \div 32$ ;  $45 \div 21$ ;  $129 \div 42$ ;  $179 \div 73$ ;  $248 \div 81$ , etc..

3ª passo:

3º passo: A) Divisões com simplificação de cálculo.

"Multiplicando ou dividindo ambos os termos da divisão pelo mesmo número, o cociente não se altera".

Objetivo: Efetuar o cálculo abreviado quando o dividendo e o divisor terminarem em zero, não esquecendo de devolver o zero no resto.

Ex:  $20 \div 10$ ;  $70 \div 10$ ;  $120 \div 10$ ;  $220 \div 10$ ;  $150 \div 10$ ; etc..

b) Divisões inexatas com zero no divisor, sem simplificação de cálculo.

Ex:  $63 \div 30$ ;  $202 \div 60$ ;  $582 \div 70$ ;  $109 \div 30$ ;  $190 \div 60$ , etc..

Observação: Até aqui, as divisões constituíram-se em treino de cálculo do cociente, possibilitando ao professor recuperar muitos alunos, fazendo uma análise das dificuldades que apresentaram. As alunas erram as divisões, por não apresentarem os seguintes pré-requisitos:

- Compreensão do Sistema de Numeração Base Dez
- Composição de Números em ordens e classes.
- Conceito da Divisão
- Subtração sem e com recurso
- Tábua da multiplicação.
- Multiplicação com reserva
- Tábua da divisão e sua relação com multiplicação:
- Relação entre os termos da divisão e multiplicação.

4º passo: Divisão com cocientes de dois e três algarismos

Objetivo: Mostrar o desenvolvimento da divisão em operações relativamente fáceis.

Ex:  $586 \div 11$ ;  $1138 \div 31$ ;  $2369 \div 81$ ;  $16998 \div 73$ ;  $2099 \div 63$ ;  
 $1657 \div 31$ ;  $4098 \div 92$ ;  $6998 \div 71$ ;  $1759 \div 72$ ; etc...

5º passo: Divisões exatas e inexatas com reserva nas multiplicações; é o caso do "vai um", "vão dois", etc... É preciso muita atenção do aluno para não esquecer as reservas.

Ex: Divisões exatas:  $132 \div 44$ ;  $324 \div 54$ ;  $672 \div 84$ ;  $729 \div 81$ ;  
Divisões inexatas:  $816 \div 34$ ;  $2082 \div 73$ ;  $1020 \div 77$ ; ...  
 $889 \div 59$ ;  $497 \div 38$ ;  $319 \div 24$ ; .....  
 $518 \div 37$ ;  $1519 \div 89$ ; etc...

2ª ETAPA: Cálculo Difícil do Cociente:

5º, 6º, e 7º passos

6º passo: A primeira tentativa de calcular o cociente nem sempre é a correta.

As reservas do produto do cociente pelo divisor, sendo altas, dificultam o cálculo do cociente. Fazer a primeira estimativa do cociente, pensando na reserva da multiplicação para evitar erros.

Ex: Cálculo relativamente fácil com um algarismo no cociente:

21 ÷ 12; 61 ÷ 31; 91 ÷ 32; 64 ÷ 39; 122 ÷ 37  
543 ÷ 66; 661 ÷ 84; 590 ÷ 76; 811 ÷ 93; etc...

Cálculo mais difícil do cociente.

69 ÷ 17; 110 ÷ 28; 481 ÷ 69; 180 ÷ 28; 370 ÷ 47;  
352 ÷ 59; 270 ÷ 39; 183 ÷ 26; 111 ÷ 29; 212 ÷ 38; etc...

Divisões que dão 9 no cociente:

106 ÷ 11; 109 ÷ 11; 305 ÷ 33; 407 ÷ 42;  
602 ÷ 66; 701 ÷ 73; 700 ÷ 73; 909 ÷ 94. etc...

Divisões com cociente acima de 10

762 ÷ 12; 892 ÷ 45; 2114 ÷ 73; 4225 ÷ 65 ;

7º passo: Divisões que apresentam zero no cociente, quer final, quer intercalado, constituindo recapitulação de conceitos já dominados na divisão por um algarismo.

Ex: 31992 ÷ 68; 65531 ÷ 84; 46800 ÷ 65; 16300 ÷ 65;  
33600 ÷ 40; 2000 ÷ 45; 43417 ÷ 62; etc...

DIVISÃO COM PARCELAMENTO DO COCIENTE:

Sabendo que a divisão por numeral de dois algarismos é um processo difícil, é aconselhável que o professor estude os diversos processos que existem, para se servir deles nos momentos oportunos ou para atender / um ou outro aluno em particular.

Há diversas maneiras de se fazer a estimativa do cociente.

HARTUNG, tem apregoado o processo onde se faz mentalmente o arredondamento do divisor para a dezena, centena, etc... imediatamente / superior e se efetua a divisão. Se o cociente não foi o correto na primeira estimativa, não se apaga o cociente, continuando-se a operação , considerando-se o resto como um novo dividendo parcial.

Uma das maiores dificuldades na aprendizagem da divisão vem da insistência em se exigir que o aluno obtenha o cociente parcial máximo, logo na primeira tentativa.

Mesmo os adultos não encontram o cociente correto na primeira tentativa. Apagam o algarismo errado e começam tudo de novo.

O PROCESSO DE HARTUNG, também conhecido como PROCESSO DA DIVISÃO COM O COCIENTE PARCELADO é mais simples, possibilitando aos alunos a / compreensão da operação.

Ex: 416 ÷ 6

Utilizar a ideia subtrativa da divisão, em forma de situações / problemas por exemplo:

Colhi 416 laranjas e quero colocar 6 em cada pacote. Quantos pacotes terei que fazer?

Perguntar: Quantas vezes <sup>devo</sup> retirar 6 laranjas de 416?

$$\begin{array}{r|l}
 416 & 6 \\
 -60 & 10 \\
 \hline
 346 & 20 + \\
 -120 & 30 \\
 \hline
 236 & 9 \\
 -180 & 69 \\
 \hline
 56 & \\
 -54 & \\
 \hline
 2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 416 & 6 \\
 -180 & 30 \\
 \hline
 236 & 30 + \\
 -180 & 9 \\
 \hline
 56 & 69 \\
 -54 & \\
 \hline
 2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 416 & 6 \\
 360 & 60 \\
 \hline
 56 & 9 + \\
 -54 & 69 \\
 \hline
 2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 416 & 6 \\
 -414 & 69 \\
 \hline
 2 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 416 & 6 \\
 36 & 69 \\
 \hline
 56 & \\
 -54 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Para que o algarismo do cociente parcelado não seja grande demais logo na primeira tentativa, devemos ter o cuidado de efetuar a estimativa do cociente à parte, arredondando o divisor para a dezena imediatamente superior.

$$\begin{array}{r|l}
 278 & 43 \\
 -215 & 5 \\
 \hline
 63 & 1 + \\
 -43 & 6 \\
 \hline
 20 & 
 \end{array}$$

43 → 5 x 50 = 250  
250 é menor que 278 logo, 5 x 43 = 215

VANTAGENS DO PROCESSO DA DIVISÃO COM O COCIENTE PARCELADO

1. Evidencia o aspecto subtrativo da divisão.
2. Não exige o cálculo exato do cociente numa só tentativa.

3. Não há necessidade de recomeçar todo o trabalho quando o cociente estimado não é o exato; basta continuar o que já está sendo feito.
4. A comparação dos produtos já obtidos com o resto, ajuda a calcular o cociente.
5. Há maior facilidade de estimativa de cálculo quando aproximamos o divisor para a dezena, centena, etc... imediatamente superior.
6. Há maior compreensão do que é o resto.
7. Não há diferença entre dividir por numeral de 1,2 ou mais algarismos no divisor.
8. A graduação de dificuldades é mínima, pois os passos seguidos são / sempre os mesmos. quer o divisor tenha um ou mais algarismos.
9. Há maior correspondência com o que se faz na prática com os cálculos escritos.
10. Não existe a dificuldade dos zeros intercalados no dividendo ao se usar este processo.

#### DIFICULDADES QUE SÃO EVITADAS.

1. Colocação de numerais "abaixados do dividendo"
2. Casos típicos de "dificuldades com zero"
3. As dificuldades surgem quando a divisão é ensinada através de um conjunto de regras memorizadas, sem nenhuma compreensão: "divide, multiplica, subtrai, abaixa o algarismo seguinte; divide, multiplica, subtrai, etc. etc..."

#### PRÉ-REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A APRENDIZAGEM DA DIVISÃO COM O COCIENTE PARCELADO.

- Saber subtrair com rapidez e segurança
- Executar o arredondamento de numerais para a dezena, centena, etc, imediatamente superior.
- Saber multiplicar por 10, 20, 30, etc; 100, 200, 300, etc; sem se atrapalhar com os zeros.
- Comparar os restos obtidos e os produtos, tentando chegar mais rapidamente ao cálculo do cociente.

1. N.E.D.E.M : Ensino moderno de Matemática  
5ª série - 1º grau - Edit. do Brasil
2. N.E.D.E.M : Ensino moderno de Matemática  
2ª e 3ª série do 1º grau - Edit. do Brasil
3. MARTINS, Clelia Tavares: Como Dividir -  
Divisor expresso por numeral de dois algarismos - APOSTILA  
NEDEM
4. OSÓRIO NORMA CUNHA e PORTO, RIZZA DE ARAUJO:- Matemática da Escola  
Moderna - Edit. Ao livro Técnico S/A.
5. Manual do Professor Primário do Paraná - 2ª série - Volume II -  
SEC. nº 18

Para maior embasamento de trabalho com o processo de divisão com o cociente parcelado e com a graduação dos passos da divisão por dois algarismos, recomendamos ao professor a apostila da Professora Clélia Tavares Martins do NEDEM, intitulada: como DIVIDIR - DIVISOR EXPRESSO POR NUMERAL DE DOIS ALGARISMOS - pedidos - Fone 24- 0051  
cr\$ 5.00 cada.

HA/aah.