UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS

Léo Amaro de Abreu Dias

Equi-atração e continuidade de atratores globais de semigrupos

FLORIANÓPOLIS
2020

Léo Amaro de Abreu Dias

Equi-atração e continuidade de atratores globais de semigrupos

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Matemática e Computação Científica

Florianópolis, dezembro de 2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dias, Léo
Equi-atração de atratores globais de semigrupos / Léo Dias ; orientador, Matheus Cheque Bortolan, 2020.
59 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática e Computação Científica, Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática e Computação Científica. 2. equi-atração. 3. semicontinuidade superior. 4. semicontinuidade inferior. 5. atratores globais. I. Cheque Bortolan, Matheus. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática e Computação Científica. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

LÉO AMARO DE ABREU DIAS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática e Computação Científica, sendo aprovado em sua forma final pelo Curso de Matemática.

Florianópolis, 11 de dezembro de 2020.

Documento assinado digitalmente
Silvia Martini de Holanda
Data: 11/12/2020 10:35:26-0300
CPF: 595.791.379-00

Profª. Silvia Martini de Holanda, Dr.ª

Coordenadora do Curso de Matemática

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
Matheus Cheque Bortolan
Data: 11/12/2020 10:26:24-0300
CPF: 337.007.338-28

Prof. Matheus Cheque Bortolan, Dr.

Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Documento assinado digitalmente
Paulo Mendes de Carvalho Neto
Data: 11/12/2020 10:45:03-0300
CPF: 326.211.858-35

Prof. Paulo Mendes de Carvalho Neto, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Rodolfo Collegari

Prof. Rodolfo Collegari, Dr.

Avaliador

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Agradecimentos

Primeiramente a toda a minha família, em especial minha mãe Maria Terezinha e as minhas irmãs Camila, Carine e Caroline, pelo apoio, força e compressão durante a trajetória da graduação.

A todos os colegas que fiz durante a graduação, que seguiram firmes nessa jornada. A todos os professores que tiveram participação direta na minha formação, destaque ao professor Fernando de Lacerda Mortari e ao professor Eliezer Batista, que me ensinaram a apreciar o rigor e a beleza da matemática. Agradeço também ao professor Gilles Gonçalves de Castro que me orientou por quase três anos em iniciações científicas, constituindo assim grande parte do meu compreendimento de matemática.

Aos amigos que fiz no Programa de Educação Tutorial, ambiente o qual cresci e prosperei durante a graduação. Aqueles que residiram comigo, Leonardo Borges Leão, Vinícius Douglas Cerutti e Yuri Farias Lima meu muito obrigado pelas conversas e risadas. Á minha namorada, Lívia Tudela Del Mastre, pela força e apoio, principalmente no meu último ano de graduação.

Por fim agradeço aos professores Paulo Mendes de Carvalho Neto e Rodolfo Collegari, por aceitarem constituir essa banca avaliadora, e ao meu orientador Matheus Cheque Bortolan, que me ensinou a pesquisa em matemática e tornou esse trabalho, do qual tenho orgulho, possível.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a teoria básica de semigrupos e seus atratores globais, além de encontrar condições para garantir a existência destes atratores. Estudamos também a continuidade dos atratores globais quando fazemos uma perturbações num dado semigrupo. Baseados em [Bortolan, Carvalho e Langa 2020] apresentamos resultados para garantir a semicontinuidade superior e inferior destes atratores, que juntas nos dão a *continuidade*. Além disso, baseados em [Li e Kloeden 2004] e [Caraballo et al. 2016], apresentamos um outro caminho para obter tal continuidade, usando a propriedade de *equi-atração*.

Palavras-chave: semigrupos, atratores globais, perturbações, semicontinuidade superior, semicontinuidade inferior, continuidade, equi-atração.

Abstract

In this work we present the basic theory of semigroups and their global attractors, and find conditions to ensure the existence of such attractors. We also study the continuity of global attractors when we perform a perturbation on a given semigroup. Based on [Bortolan, Carvalho e Langa 2020] we present results that ensure the upper and lower semicontinuity of these attractors, and together they give us the *continuity*. Moreover, based on [Li e Kloeden 2004] and [Caraballo et al. 2016], we present a different path to obtain this continuity, using the property of *equiattraction*.

Keywords: semigroups, global attractors, perturbations, upper semicontinuity, lower semicontinuity, continuity, equiattraction.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Sistemas Dinâmicos e Atratores

Na modelagem matemática de problemas do mundo real, sejam eles provenientes da Química, Física, Biologia, ou de outras áreas, é comum nos depararmos com regras de evolução que variam com o tempo. Tais regras são matematicamente conhecidas como *sistemas dinâmicos*. Mais especificamente, os sistemas dinâmicos são constituídos de um conjunto de variáveis x que representa quantidades físicas (como a posição de um objeto no espaço, sua temperatura, sua velocidade, etc.) e um conjunto de regras, denotadas por $S(t,s)x$, que calculam a evolução das varíaveis x ao longo do tempo, de um dado instante inicial s até um instante final t. Mais especificamente, neste trabalho, estaremos interessados em estudar os sistemas dinâmicos cujas regras de evolução não dependem explicitamente dos instantes inicial s e final t, mas sim do *tempo decorrido* $t-s$. Isto é, estudaremos sistemas que satisfazem $S(t,s)x = T(t-s)x$ para todos os instantes inicial s e final t, e toda variável x. Tais sistemas são chamados de *sistemas dinâmicos autônomos*, ou simplesmente *semigrupos*.

Dentre os sistemas dinâmicos, aparecem aqueles cujas regras são dadas por soluções de equações diferenciais, e apesar da teoria apresentada neste trabalho contemplar o caso geral de sistemas dinâmicos, nosso interesse está em estudar particularmente aqueles provenientes de equações diferenciais. Para tanto, a *teoria qualitativa* de equações diferenciais, que tem seu início com os trabalhos de Poincaré sobre mecânica celeste [Poincaré 1892,1893,1899, Poincaré 1890], é fundamental.

No estudo de sistemas dinâmicos autônomos, o *comportamento assintótico* tem sido o foco de muitos pesquisadores ao longo dos anos. O comportamento assintótico nada mais é do que estudar o que acontece com as *trajetórias* $[0,\infty) \ni t \mapsto T(t)x$ de um semigrupo para uma dada variável x quando o tempo decorrido t tende a infinito, isto é, é o estudo a longo prazo das soluções do sistema dinâmico. O objeto central deste estudo é o *atrator global*, um conjunto compacto que atrai para si todas as trajetórias de um semigrupo, de maneira uniforme para variáveis em conjuntos limitados, com a propriedade adicional de que qualquer trajetória que o intercepte deve estar inteiramente contida nele. Quando tal conjunto existe, ele é único, e podemos mostrar que ele é constituído de todas as trajetórias limitadas que estão definidas para todo tempo t real, as chamadas *soluções globais limitadas* do semigrupo. Tais soluções contém todas as informações relevantes do semigrupo, do ponto de vista prático. Portanto, estudar o atrator global de um semigrupo é uma tarefa importante, e não só do ponto de vista do comportamento assintótico, veja [Ladyzhenskaya 1991] e [Temam 1997], por exemplo.

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo dos *semigrupos* e dos *atratores globais*. Nele apresentamos a teoria básica de semigrupos e seus atratores globais, detalhando algumas de suas principais propriedades. Mostramos condições necessárias e suficiente que devem ser satisfeitas para um semigrupo para que este tenha um atrator global. Aplicamos a teoria apresentada em exemplos de semigrupos que surgem de equações diferenciais ordinárias em espaços euclidianos. Por fim, neste capítulo, apresentamos um resultado simples que garante a conexidade dos atratores globais.

Continuidade de Atratores

Ao modelarmos matematicamente um problema real é comum realizarmos aproximações, sejam elas por escassez de dados, uso de leis empíricas, simplificações do modelo ou o uso de discretizações para aplicação de métodos numéricos. Desta forma, o modelo matemático obtido é uma *aproximação* (ou *perturbação*) do real problema. Sendo assim, devemos ser capazes de obter resultados que nos permitam transportar algumas propriedades do problema limite (o modelo matemático obtido) para o problema real. Tais resultados englobam o estudo da *robusteza sob perturbações*, e para o nosso caso específico, estaremos interessados em estudar a robusteza dos atratores globais para semigrupos. Dito de outra maneira, queremos encontrar condições para que ao perturbar um semigrupo, o atrator global do semigrupo resultante esteja *perto* do atrator global do semigrupo inicial. O conceito de *proximidade* acima pode variar, dependendo do como a mediremos. Na literatura (veja [Bortolan, Carvalho e Langa 2020] e suas referências, por exemplo), são apresentados quatro níveis de crescente dificuldade para esta proximidade: a semicontinuidade superior, a semicontinuidade inferior, e estabilidade topológica e a estabilidade geométrica.

Neste trabalho estudaremos as duas primeiras: a semicontinuidade superior nos dá a *não-explosão* dos atratores, isto é, as soluções globais limitadas do semigrupo perturbado permanecem próximas às do semigrupo original. A semicontinuidade inferior nos dá a *não-implosão* dos atratores, isto é, a estrutura dos atratores perturbados é pelo menos tão complexa quanto à do atrator original. Juntas, a semicontinuidade superior e inferior nos dão a *continuidade* de atratores.

A semicontinuidade superior é bastante comum nas aplicações, e é obtida com hipóteses simples, que são amplamente satisfeitas. A semicontinuidade inferior já não é tão simples, apesar de ter definição muito semelhante à superior. Para obtê-la, é necessário o conhecimento das estruturas internas que compoõe o atrator limite e como estas se comportam sob perturbações.

No Capítulo 2, encontramos as condições para que, ao perturbarmos semigrupos, tenhamos uma família de atratores que seja semicontínua superiormente e inferiormente (e portanto, contínua).

Além disso, no Capítulo 3, exploramos uma maneira diferente de se obter a continuidade de atratores, que é usando o conceito de *equi-atração*. Nele, desenvolvemos resultados baseados em [Li e Kloeden 2004] (e também em [Caraballo et al. 2016]), para provar a continuidade de uma família de atratores. Vale ressaltar que as hipóteses apresentadas nos resultados deste capítulo são mais fracas do que as de [Li e Kloeden 2004], porém os resultados obtidos são ligeiramente mais fracos.

1 Semigrupos e Atratores Globais

Consideremos X um espaço métrico, com métrica d, e $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em X.

Definição 1.1. Um **semigrupo** em X é uma família $\{T(t)\colon t \geqslant 0\} \subseteq C(X)$ tal que

(i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$;

(ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$;

(iii) a aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,s) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Para simplificar a notação, daqui para frente utilizaremos simplesmente T para nos referirmos ao semigrupo $\{T(t)\colon t \geqslant 0\}$, quando não houver risco de confusão. Também, para a composição em (ii), a denotaremos simplesmente por $T(t)T(s)$. A condição (iii) nem sempre é pedida para semigrupos (como, por exemplo, em [Temam 1997]), e muitos resultados neste texto são provados sem a necessidade de utilizá-la. Entretanto, no próximo capítulo ela será crucial, e por este motivo escolhemos apresentá-la diretamente na definição de um semigrupo.

Os semigrupos são ferramentas essenciais no estudo da teoria de equações diferenciais, e surgem naturalmente como soluções de grande parte destas equações. Abaixo, apresentamos dois exemplos de semigrupos associados a equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 1.2. Considere o problema de valor inicial em $\mathbb{R}$, dado por uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + ax = b, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. Multiplicando a equação por e^{at} obtemos

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = e^{at}\frac{dx}{dt} + ae^{at}x = be^{at},$$

e integrando ambos os lados de 0 até t:

$$xe^{at} - x_0 = \frac{b}{a}(e^{at} - 1),$$

portanto:

$$x(t) = \tfrac{b}{a} + e^{-at}\big(x_0 - \tfrac{b}{a}\big) \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Denotando, para $t \geqslant 0$, $T(t)x_0 = x(t)$ notemos que $T(0)x_0 = \frac{b}{a} + \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) = x_0$, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Também

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x_0 &= \tfrac{b}{a} + e^{-at}\left(T(s)x_0 - \tfrac{b}{a}\right) = \tfrac{b}{a} + e^{-at}\left[\tfrac{b}{a} + e^{-as}\left(x_0 - \tfrac{b}{a}\right) - \tfrac{b}{a}\right] \\ &= \tfrac{b}{a} + e^{-a(t+s)}\left(x_0 - \tfrac{b}{a}\right) = T(t+s)x_0. \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação $[0,\infty) \times \mathbb{R} \ni (t, x_0) \mapsto T(t)x_0 \in \mathbb{R}$ é claramente contínua, logo $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ define um semigrupo em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função **localmente Lipschitz contínua**, isto é, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existem $\delta > 0$ e $L \geqslant 0$ tais que para $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|y - x_0\| < \delta$ temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

Sob estas hipóteses, vale o seguinte resultado, que é uma coleção dos resultados encontrados em [Hale 1980]:

Teorema 1.4. *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existem $\tau > 0$ e uma função continuamente diferenciável $[0,\tau) \ni t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi(0) = x_0$ e $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$ para todo $t \in (0,\tau)$. Esta função é chamada de **solução** do problema de valor inicial (1.1) e tem as seguintes propriedades:*

1. *se existem $\sigma > 0$ e uma função continuamente diferenciável $\eta \colon [0,\sigma) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta(0) = x_0$ e $\dot{\eta}(t) = f(\eta(t))$ para todo $t \in (0,\sigma)$, então $\xi(t) = \eta(t)$ para todo $t \in [0, \min\{\sigma,\tau\})$;*

2. *existem $\tau(x_0) > 0$ e uma solução $[0,\tau(x_0)) \ni t \mapsto x(t,x_0) \in \mathbb{R}^n$ de (1.1) tais que ou $\tau(x_0) = \infty$ ou $\limsup_{t \to \tau(x_0)^-} \|x(t,x_0)\| = \infty$;*

3. *se $E = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant t < \tau(x)\}$, então a função $E \ni (t,x_0) \mapsto x(t,x_0) \in \mathbb{R}^n$ é contínua.*

Denotaremos por $x(t,x_0)$ o valor da solução de (1.1) no tempo t, $t \in [0,\tau(x_0))$. Assumindo também que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$f(x) \cdot x < 0, \text{ para } \|x\| \geqslant M, \tag{1.2}$$

onde $\cdot$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, temos

$$\frac{d}{dt}\|x(t,x_0)\|^2 = 2f(x(t,x_0)) \cdot x(t,x_0). \tag{1.3}$$

Proposição 1.5. *Temos* $\tau(x_0) = \infty$ *para todo* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sejam $R \geqslant M$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_0\| \leqslant R$. Primeiro mostremos que $\|x(t, x_0)\| \leqslant R$ para todo $t \in [0, \tau(x_0))$.

Assuma que $\|x(t^*, x_0)\| > R$ para algum $t^* \in (0, \tau(x_0))$ e defina

$$F = \{t \in [0, \tau(x_0)) \colon \|x(s, x_0)\| \leqslant R \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant t\}.$$

Claramente $0 \in F$ e se $\alpha = \sup F$, devemos ter $\alpha < t^*$ (já que como $x(\cdot, x_0)$ é contínua, temos $\|x(s, x_0)\| > R$ para s suficientemente próximo de t^*). Além disso, $\|x(t, x_0)\| \leqslant R$ para $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ e $\|x(\alpha, x_0)\| = R \geqslant M$. Por (1.2) e (1.3) temos

$$\frac{d}{dt}\|x(\alpha, x_0)\|^2 = \dot{x}(\alpha, x_0) \cdot x(\alpha, x_0) < 0,$$

e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + \epsilon < t^*$ e $\|x(s, x_0)\| < \|x(\alpha, x_0)\| = R$ para $s \in (\alpha, \alpha + \epsilon]$, o que mostra que $\|x(t, x_0)\| \leqslant R$ para $0 \leqslant t \leqslant \alpha + \epsilon$, o que contradiz o fato de α ser o supremo de F. Portanto $\|x(t, x_0)\| \leqslant R$ para todo $t \in [0, \tau(x_0))$.

Isto que dizer que toda solução de (1.1) fica limitada para $t \in [0, \tau(x_0))$, e o item 2 do Teorema 1.4 nos garante que $\tau(x_0) = \infty$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$. □

Sob estas condições, definimos $T(t) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$T(t)x_0 = x(t, x_0) \qquad \text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geqslant 0.$$

É claro que, tendo em vista o Teorema 1.4, a única condição que precisamos verificar para concluir que $T = \{T(t) \colon t \geqslant 0\}$ é um semigrupo (com $X = \mathbb{R}^n$) é a condição (ii) da Definição 1.1. Para isso, fixemos $s \geqslant 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e para $t \geqslant 0$ definimos

$$\begin{aligned} \eta(t) &= T(t)T(s)x_0 = T(t)x(s, x_0) = x(t, x(s, x_0)), \\ \xi(t) &= T(t+s)x_0 = x(t+s, x_0). \end{aligned}$$

Veja que para $t > 0$ temos

$$\dot{\eta}(t) = \dot{x}(t, x(s, x_0)) = f(x(t, x(s, x_0)) = f(\eta(t)),$$

e

$$\dot{\xi}(t) = \dot{x}(t+s, x_0) = f(x(t+s, x_0)) = f(\xi(t)).$$

Além disso $\eta(0) = x(s, s_0) = \xi(0)$. Dessa forma η e ξ são ambas soluções, na variável t, do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x(s, x_0) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

e da unicidade de soluções de (1.1) dada no Teorema 1.4 concluímos que $T(t)T(s)x_0 = \eta(t) = \xi(t) = T(t+s)x_0$, para quaisquer $t, s \geqslant 0$ e qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Portanto $T(t+s) = T(t)T(s)$ para quaisquer $t, s \geqslant 0$.

Observação 1.6. Os semigrupos também aparecem como soluções de equações diferenciais parciais, e neste caso, o espaço X é um espaço de Banach (ou de Hilbert) de dimensão infinita (como em [Temam 1997] ou [Ladyzhenskaya 1991]). Entretanto, o estudo de semigrupos associados a estas equações é consideravelmente mais complicado do que o o estudo para equações diferenciais ordinárias, e requer muitos pré-requisitos. Por este motivo, não apresentaremos exemplos de equações diferenciais parciais neste trabalho.

Notamos que nem toda equação diferencial dá origem a um semigrupo. Vejamos exemplos (retirados de [Henry 1981]) em que as hipóteses do Teorema 1.4 ou a condição (1.2) não estão satisfeitas, e não é possível definir um semigrupo à partir da equação diferencial.

Exemplo 1.7 (Não-existência)**.** Considere o problema (1.1) com

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \geqslant 0, \\ 1 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Este problema não tem solução para $x_0 = 0$. De fato, suponha que existam $\tau > 0$ e função $\xi\colon [0,\tau) \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável com $\xi(0) = 0$ e $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$ para todo $t \in (0,\tau)$. Deste modo, como $\dot{\xi}$ é contínua, devemos ter $f(\xi(t))$ contínua em $(0,\tau)$. Portanto ou $f(\xi(t)) = -1$ para $t \in (0,\tau)$, ou $f(\xi(t)) = 1$ para $t \in (0,\tau)$.

Suponhamos que o primeiro caso acontece. Temos então $\xi(t) = -1$ para $t \in (0,\tau)$ e como $\xi(0) = 0$ devemos ter $\xi(t) = -t$. Mas assim $\xi(t) < 0$ para $t \in (0,\tau)$ o que implicaria que $f(\xi(t)) = 1$ para $t \in (0,\tau)$, o que é uma contradição.

Analogamente, o segundo caso nos dá uma contradição e mostra que tal solução não pode existir.

O problema aqui é que a função f dada não é contínua no ponto $x = 0$.

Exemplo 1.8 (Não-unicidade)**.** Considere o problema (1.1) com $f(x) = |x|^{1/2}$. Para $x_0 = 0$ vemos que $\xi(t) = 0$ para todo $t \geqslant 0$ é uma solução. Porém, para cada $\tau > 0$ a função

$$\xi_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant t < \tau, \\ \frac{1}{4}(t-\tau)^2 & \text{para } t \geqslant \tau, \end{cases}$$

também é uma solução deste problema[1].

Neste exemplo, o problema é que f não é Lipschitz contínua em nenhuma vizinhança de $x = 0$. De fato, se fosse, existiriam $\epsilon > 0$ e $L \geqslant 0$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y| \qquad \text{para } |x|, |y| < \epsilon.$$

[1] Não é difícil verificar que ξ_τ é continuamente diferenciável, que $\xi_\tau(0) = 0$ e que $\dot{\xi}_\tau(t) = |\xi_\tau(t)|^{1/2}$ para todo $t \geqslant 0$

Isto nos daria que $|f'(x)| \leqslant L$ para $0 < |x| < \epsilon$. Mas $f'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$ para todo $x > 0$, e fazendo $x \to 0^+$ obtemos $f'(x) \to \infty$, e chegamos a uma contradição.

Exemplo 1.9 (Existência não-global)**.** Considere o problema (1.1) com $f(x) = x^2$. Veja que esta função satisfaz as condições do Teorema 1.4. Para $x_0 > 0$, a solução é dada por

$$\xi(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0},$$

para $t \in [0, \frac{1}{x_0})$, já que ξ não está definida para $t = \frac{1}{x_0}$. Note que $\xi(t) \to \infty$ quando $t \to \frac{1}{x_0}^-$. Veja ainda que $f(x) = x^2$ não satisfaz a condição (1.2).

1.1 Atratores globais de semigrupos

Nesta seção, apresentaremos o conceito de *atrator global* para um semigrupo T num espaço métrico X, seguindo as ideias de [Ladyzhenskaya 1991]. Para isto, os conceitos de *atração* e *invariância* são essenciais.

Começaremos introduzindo o conceito de *atração*, que está ligado à seguinte noção de *proximidade*, dada pela *semidistância de Hausdorff*.

Definição 1.10 (Semidistância de Hausdorff)**.** Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de X, definimos a **semidistância de Hausdorff** entre A e B por

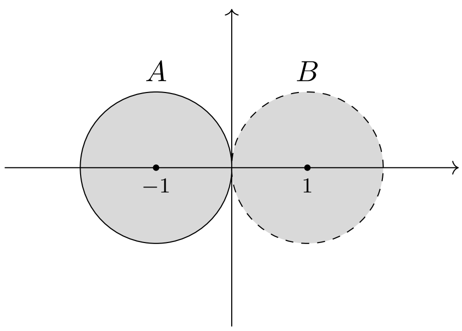
$$d_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Note que esta semidistância é diferente da *distância usual* entre dois conjuntos não-vazios A, B de X, dada por $d(A, B) = \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$.

Exemplo 1.11. Por exemplo, considere em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x - (-1, 0)\| \leqslant 1\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in X \colon \|x - (1, 0)\| < 1\},$$

dados na figura abaixo:



Veja que $d(A, B) = 0$ enquanto que $d_H(A, B) = 2$.

Grosseiramente falando, a semidistância de Hausdorff mede *o quanto A está longe de estar contido no fecho de B*. No exemplo acima, ao movimentarmos A por duas unidades para a direita, vemos que A fica contido no fecho de B. Para conjuntos A, B não-vazios de X, é simples notar que $d_H(A,B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Quando $A = \{a\}$, a semidistância de Hausdorff entre $A = \{a\}$ e B é equivalente à distância usual entre ponto e conjunto, e denotamos

$$d(a,B) = d_H(\{a\}, B) = \inf_{b\in B} d(a,b).$$

Apesar desta semidistância não ser uma distância, notamos que ela satisfaz a *desigualdade triangular.*

Proposição 1.12. *Sejam A, B, C subconjuntos não-vazios de X. Então*

$$d_H(A,B) \leqslant d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

Demonstração. Vejamos que para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, temos

$$d(a,B) \leqslant d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(c,b).$$

Tomando o ínfimo para $b \in B$ no lado direito, obtemos $d(a,B) \leqslant d(a,c) + d(c,B)$, e portanto $d(a,B) \leqslant d(a,c) + d_H(C,B)$. Tomando o ínfimo para $c \in C$ na direita, obtemos

$$d(a,B) \leqslant d(a,C) + d_H(C,B) \leqslant d_H(A,C) + d_H(C,B),$$

e o resultado segue tomando o supremo para $a \in A$ no lado esquerdo. □

1.1.1 Atração e absorção

Com a semidistância de Hausdorff definida, podemos definir o primeiro ingrediente para a definição de *atratores globais* para semigrupos, a noção de *atração*. Para isto, dado $B \subseteq X$ e T um semigrupo em X, denotamos $T(t)B = \{T(t)x \colon x \in B\}$ a **imagem** de B por $T(t)$, para cada $t \geqslant 0$.

Definição 1.13 (Atração)**.** Considere $A, B \subseteq X$ conjuntos não-vazios e T um semigrupo em X. Dizemos que A **atrai** B **sob a ação de** T se dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$d_H(T(t)B, A) < \epsilon \quad \text{para todo } t \geqslant t_0,$$

isto é, se

$$\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, A) = 0.$$

Podemos dizer também que A T-**atrai** B, ou simplesmente que A **atrai** B, quando não houver confusão com respeito ao semigrupo T.

Temos também a noção de *absorção*, definida a seguir:

Definição 1.14 (Absorção)**.** Considere $A, B \subseteq X$ conjuntos não-vazios e T um semigrupo. Dizemos que A **absorve** B **sob a ação de** T se existe $t_0 \geqslant 0$ tal que

$$T(t)B \subseteq A \quad \text{para todo } t \geqslant t_0.$$

Podemos dizer que A T**-absorve** B, ou simplesmente que A **absorve** B, quando não houver confusão com respeito ao semigrupo T.

As noções de atração e absorção se relacionam da seguinte maneira:

Proposição 1.15. *Considere $A, B \subseteq X$ conjuntos não-vazios e T um semigrupo. São válidas as seguintes afirmações:*

(i) se A absorve B então A atrai B;

*(ii) se A atrai B, então para cada $r > 0$ a r-*vizinhança *de A, definida por*

$$\mathcal{O}_r(A) = \{x \in X \colon d(x, A) < r\},$$

absorve B.

Demonstração. (i) Se A absorve B então existe $t_0 \in [0, \infty)$para todo $t > t_0$ temos

$$T(t)B \subseteq A.$$

Desta forma $d_H(T(t)B, A) = \sup_{x \in B} d(T(t)x, A) = 0$ para todo $t > t_0$, portanto A atrai B.

(ii) Seja $r > 0$. Como A atrai B então existe $t_0 \in [0, \infty)$ de forma que $d_H(T(t)B, A) < r$ para todo $t > t_0$. Portanto,

$$\sup_{x \in B} d(T(t)x, A) < r$$

e consequentemente $d(T(t)x, A) < r$, para todo $x \in B$, logo

$$T(t)B \subseteq \mathcal{O}_r(A)$$

para todo $t > t_0$. Logo $\mathcal{O}_r(A)$ absorve B.

□

O item (ii) não pode ser relaxado, isto é, existem exemplos onde A atrai B, mas A não absorve B, como veremos agora.

Exemplo 1.16. Considere $X = \mathbb{R}$ e o semigrupo T em $\mathbb{R}$ dado por $T(t)x_0 = x_0 e^{-t}$ para cada $t \geqslant 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Considere $A = \{0\}$ e $B = [-1, 1]$. Note que $T(t)B = [-e^{-t}, e^{-t}]$ para cada $t \geqslant 0$. Assim

$$d_H(T(t)B, A) = e^{-t} \to 0 \quad \text{quando } t \to \infty,$$

Mas $T(t)B$ não está contido em $A = \{0\}$ para nenhum $t \geqslant 0$. Assim A atrai B sob a ação de T, mas A não absorve B.

1.1.2 Invariância

Para definir *atratores globais* para semigrupos, só nos resta introduzir o conceito de *invariância*.

Definição 1.17 (Invariância)**.** Considere um conjunto não-vazio $A \subseteq X$ e um semigrupo T em X. Diremos que A é

(a) **positivamente invariante por** T se $T(t)A \subseteq A$ para todo $t \geqslant 0$;

(b) **negativemante invariante por** T se $T(t)A \supseteq A$ para todo $t \geqslant 0$.

(c) **invariante por** T se $T(t)A = A$ para todo $t \geqslant 0$, isto é, se A é positivamente e negativamente invariante por T.

Diremos equivalentemente que A é T**- positivamente invariante**/ T**-negativamente invariante**/ T**-invariante**, ou simplesmente **positivamente invariante**/ **negativamente invariante**/ **invariante**, quando não houver confusão com respeito ao semigrupo T.

Veja que para cada $B \subseteq X$, a sua **órbita positiva** $\gamma^+(B)$ dada por

$$\gamma^+(B) = \cup_{s \geqslant 0} T(s)B$$

é um conjunto positivamente invariante por T, já que

$$T(t)\gamma^+(B) = \cup_{s \geqslant 0} T(t)T(s)B = \cup_{s \geqslant 0} T(t+s)B = \cup_{s \geqslant t} T(s)B \subseteq \gamma^+(B).$$

O conceito de invariância está diretamente ligado à possibilidade de construção de *soluções globais*. Explicaremos esta afirmação em mais detalhes.

Definição 1.18 (Solução global)**.** Seja T um semigrupo num espaço métrico X. Uma **solução global** de T é uma função contínua $\xi\colon \mathbb{R} \to X$ tal que $T(t)\xi(s) = \xi(t+s)$ para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.19. *Considere um semigrupo T em X e ξ uma solução global de T. O conjunto $A = \{\xi(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ é invariante por T.*

Demonstração. Inicialmente mostraremos que $T(t)A \subseteq A$ para todo $t \geqslant 0$. Tome $T(t)y \in T(t)A$, então existe $s \in \mathbb{R}$ de forma que $y = \xi(s)$. Com isso, da definição de solução global, temos

$$T(t)y = T(t)\xi(s) = \xi(t+s) \in A.$$

Agora seja $\xi(s) \in A$ com $s \in \mathbb{R}$, basta escrevermos

$$\xi(s) = T(t)\xi(s-t) \in T(t)A.$$

Mostrando o desejado. □

Proposição 1.20. *Considere um semigrupo T em X e $A \subseteq X$ um conjunto não-vazio. Então A é invariante se, e somente se, para cada $x \in A$ existe uma solução global ξ de T satisfazendo $\xi(0) = x$ e $\xi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que A seja invariante. Tome $x \in A$. Primeiramente da invariância de A perceba que, para todo $y \in A$ existe $u \in A$ de forma que $T(1)u = y$. Defina a sequência $\{u_j\} \subseteq A$ dada por u_1 é um ponto tal que $T(1)u_1 = x$ e u_j, para $j > 1$, é um ponto tal que $T(1)u_j = u_{j-1}$. Dessa forma definimos a solução global ξ dada por

$$\xi(t) = \begin{cases} T(t)x & \text{para } t \geqslant 0, \\ T(t+j)u_j & \text{para } t \in [-j, -j+1),\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veja que $\xi(0) = T(0)x = x$, além disso se $t, s \geqslant 0$ temos $T(t)\xi(s) = T(t)T(s)x = T(t+s)x = \xi(t+s)$. No caso em que $t \geqslant 0$ e $s < 0$ temos $T(t)\xi(s) = T(t)T(s+j)u_j = T(t+s+j)u_j$ e ainda

$$T(t+s+j)u_j = T(t+s+j-1)T(1)u_j = \cdots = T(t+s+j-k)u_{j-k},$$

com $k \in \{1, \ldots, j\}$ o maior possível de forma que $t+s+j-k \geqslant 0$. No caso em que $t+s \geqslant 0$ temos simplesmente $k = j$ e portanto $T(t)\xi(s) = T(t+s)T(1)u_1 = T(t+s)x = \xi(t+s)$. Caso $t+s < 0$ então de $t+s+j-k \geqslant 0$ temos, $t+s \geqslant -j+k$ logo $t+s \in [-j+k, -j+k+1)$. Portanto $\xi(t+s) = T(t+s+j-k)u_{j-k} = T(t)\xi(s)$, concluindo o desejado.

Reciprocamente, sejam $x \in A$ e $t \geqslant 0$. Então existe uma solução global ξ de T satisfazendo $\xi(0) = x$ e $\xi(s) \in A$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Desta forma $T(t)x = T(t)\xi(0) = \xi(t) \in A$, e $x = \xi(0) = T(t)\xi(-t) \in T(t)A$. Portanto $T(t)A = A$ para cada $t \geqslant 0$, e A é invariante. □

Apresentaremos mais alguns exemplos envolvendo os conceitos de invariância.

Exemplo 1.21 (Soluções para trás)**.** Uma **solução para trás** de um semigrupo T é uma função contínua $\xi\colon (-\infty, 0] \to X$ tal que

$$\xi(t+s) = T(t)\xi(s) \quad \text{para } t \geqslant 0, s \leqslant 0 \text{ tais que } t+s \leqslant 0.$$

Se ξ é uma solução para trás de T, então $C = \{\xi(s)\colon s \leqslant 0\}$ é negativamente invariante para T, pois se $s \leqslant 0$ e $t \geqslant 0$ então $s - t \leqslant 0$ e $\xi(s) = T(t)\xi(s-t)$, isto é $C \subseteq T(t)C$.

Os conceitos de solução global e solução para trás se relacionam da seguinte maneira:

Proposição 1.22. *Seja T um semigrupo num espaço métrico X.*

(i) Se ξ é uma solução global de T, então sua restrição ao intervalo $(-\infty, 0]$ é uma solução para trás de T.

(ii) Se ξ é uma solução para trás de T então a função

$$\psi(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{para } t \leqslant 0, \\ T(t)\xi(0) & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

é uma solução global de T.

Demonstração. (i) Se ξ é solução global de T então $\xi(t+s) = T(t)\xi(s)$ para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$, em particular $\xi(t+s) = T(t)\xi(s)$ para todo $t \geqslant 0$ e $s \leqslant 0$ tais que $t+s \leqslant 0$.

(ii) Sejam $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Caso $s \geqslant 0$ temos $\psi(t+s) = T(t+s)\xi(0) = T(t)T(s)\xi(0) = T(t)\psi(s)$. Caso $s \leqslant 0$ e $t+s \geqslant 0$ obtemos que $\psi(t+s) = T(t+s)T(-s)\xi(s) = T(t+s)\xi(0) = T(t)\xi(s) = T(t)\psi(s)$. Por último, no caso em que $s \leqslant 0$ e $t+s \leqslant 0$ observamos que $\psi(t+s) = \xi(t+s) = T(t)\xi(s) = T(t)\psi(s)$. Demonstrando o desejado.

□

Exemplo 1.23 (Soluções periódicas)**.** Dizemos que uma solução global ξ de T é uma **solução periódica** se existe $p > 0$ tal que $\xi(t+p) = \xi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se ξ é uma solução periódica, o conjunto $\Xi = \{\xi(t) \colon t \in [0,p]\}$ é chamado de **órbita periódica** (que é um subconjunto compacto de X, já que ξ é contínua e $[0,p]$ é compacto).

Claramente, por ser uma solução global, toda órbita periódica é um conjunto invariante. Além disso, a construção de órbitas periódicas é bastante simples: se $x_0 \in X$ é tal que $T(p)x_0 = x_0$ para algum $p > 0$, então existe uma solução periódica ξ de T com $\xi(0) = x_0$. Basta, por exemplo, tomarmos a solução

$$\xi(t) = T(t-kp)x_0 \quad \text{para } t \in [kp, (k+1)p), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Perceba que ξ é solução global pois, supondo que $t+s \in [kp, kp+p)$, temos

$$\xi(t+s) = T(t)T(s-kp)x_0 = T(t)T(s-kp)T(p)x_0 = \cdots = T(t)T(s)x_0,$$

e supondo que $s \in [jp, (j+1)p)$ vemos que

$$T(t)T(s)x_0 = T(t)T(s-jp)T(jp)x_0 = T(t)T(s-jp)x_0 = T(t)\xi(s).$$

De fato ξ é solução periódica pois se $t+p \in [kp, (k+1)p)$ então $\xi(t+p) = T(t+p-kp)x_0 = T(t-(1-k)p)x_0 = \xi(t)$.

Vamos descrever agora alguns conjuntos invariantes menos triviais. Seja $E \subseteq X$ um conjunto invariante para T. Definimos o **variedade estável** de E por

$$W^s(E) = \{x \in X \colon d(T(t)x, E) \to 0,\ t \to \infty\}.$$

Definimos também o **variedade instável** de E por

$$\begin{aligned} W^u(E) = \{x \in X \colon \ &\text{existe uma solução global } \xi \text{ de } T \text{ com } \xi(0) = x \\ &\text{e } d(\xi(t), E) \to 0,\ t \to -\infty\}. \end{aligned}$$

Note que como E é invariante, temos $E \subseteq W^s(E)$ e $E \subseteq W^u(E)$.

Proposição 1.24. *Se $E \subseteq X$ é invariante para T, então $W^s(E)$ é positivamente invariante por T e $W^u(E)$ é invariante por T.*

Demonstração. Sejam $t \geqslant 0$ e $y = T(t)x \in T(t)W^s(E)$. Como $x \in W^s(E)$ então $d(T(s)x, E) \to 0$ quando $s \to \infty$. Portanto $d(T(s+t)x, E) \to 0$ quando $s \to \infty$, logo $d(T(s+t)x, E) = d(T(s)T(t)x, E) = d(T(s)y, E) \to 0$ quando $t \to \infty$ mostrando que $T(t)W^s(E) \subseteq W^s(E)$.

Sejam $x \in W^u(E)$ e $t \geqslant 0$. Existe ξ solução global de T com $\xi(0) = x$ e $d(\xi(s), W^u(E)) \to 0$, quando $s \to -\infty$. Defina $\psi(s) = \xi(t+s)$. Com isso ψ é solução global de T, $\psi(0) = \xi(t) = T(t)\xi(0) = T(t)x$ e $d(\psi(s), E) = d(\xi(t+s), E) \to 0$, quando $s \to \infty$. Portanto $T(t)x \in W^u(E)$.

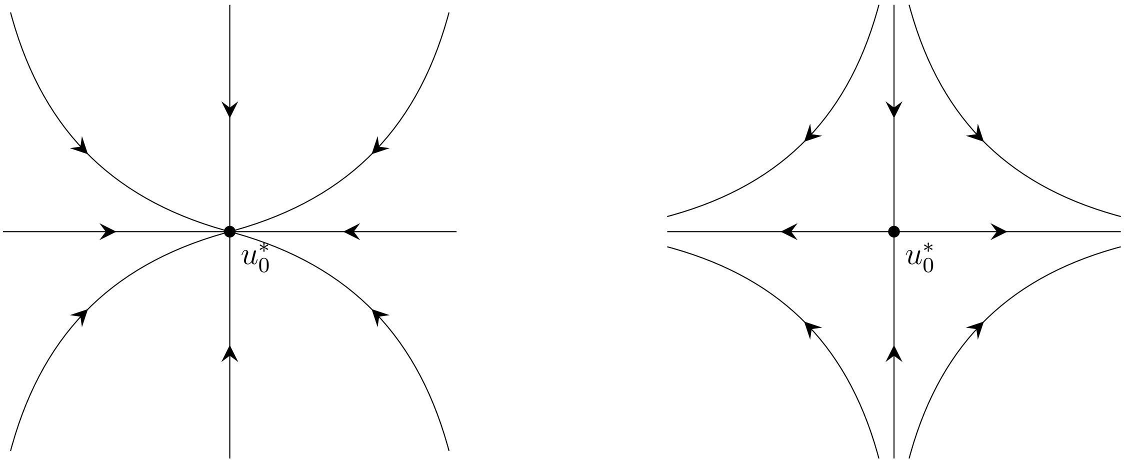
Reciprocamente, seja $x \in W^u(E)$ e $t \geqslant 0$. Logo, existe solução global ξ de T, tal que $\xi(0) = x$ e $d(\xi(s), W^u(E)) \to 0$ quando $s \to -\infty$. Seja $y = \xi(-t)$ e $\psi(s) = \xi(s-t)$. Então ψ é solução global de T, $\psi(0) = \xi(-t) = y$ e $d(\psi(s), E) = d(\xi(s-t), E) \to 0$, quando $s \to -\infty$. No que segue $y \in W^u(E)$ e $T(t)y = T(t)\xi(-t) = \xi(0) = x$, isto é, $x \in T(t)W^u(E)$. Portanto $W^u(E)$ é T-invariante. □

Um conjunto T-invariante $E \subseteq X$ é dito **estável** de $W^u(E) = E$, e **instável** caso contrário.

Exemplo 1.25. Alguns exemplos pictóricos são dados nos retratos de fase das Figuras 1,2 e 3 abaixo (onde o sentido das setas representam o caminho percorrido com o tempo crescente). No exemplo (a), u_0^* é chamado de **nó estável**. No exemplo (b) é chamado de **ponto de sela**. Em (c), a órbita que liga u_0^* é chamada de **homoclínica**. Cada órbita em (d) é chamada de **heteroclínica**. Em (e), u_0^* é chamado de **centro**.

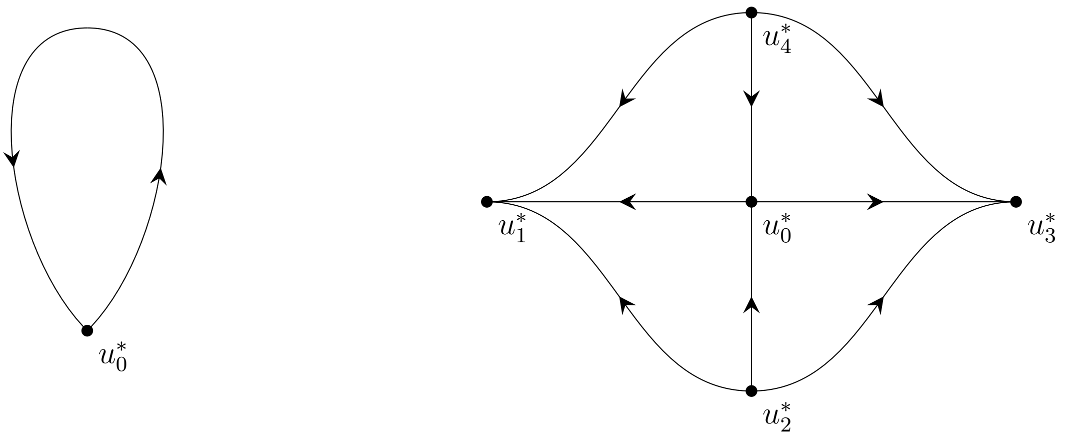
Exemplo 1.26 (Órbitas periódicas)**.** Considere a seguinte equação diferencial ordinária planar em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)(r-2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \tag{1.4}$$



(a) u_0^* é estável (b) u_0^* é instável

Figura 1 – Variedades instáveis e estáveis para pontos fixos - Parte 1



(c) u_0^* é instável (d) u_0^*, u_2^*, u_4^* são instáveis e u_1^*, u_3^* são estáveis.

Figura 2 – Variedades instáveis e estáveis para pontos fixos - Parte 2

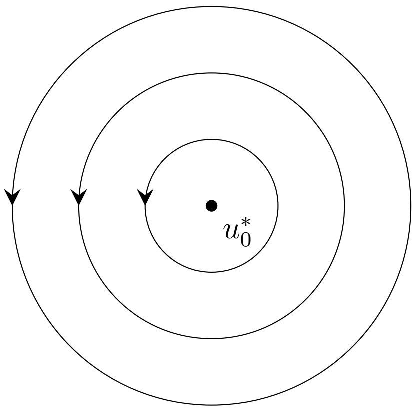
que possui, no plano cartesiano (x, y), o ponto fixo $P_0 = (0, 0)$ e duas órbitas periódicas

$$P_{r_0} = \{(r_0 \cos\theta, r_0 \sin\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]},$$

com $r_0 = 1$ ou 2. O retrato de fase para (1.4) é dado na Figura 4. Podemos ver que o ponto fixo $P_0 = (0, 0)$ é estável, a órbita periódica $P_1 = \{(\cos\theta, \sin\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ é instável e a órbita periódica $P_2 = \{(2\cos\theta, 2\sin\theta)\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ é estável.

1.1.3 Definição do atrator global e suas propriedades

Com estas definições, estamos prontos para definir o que é um *atrator global* para um semigrupo T.



(e) u_0^* é estável

Figura 3 – Variedades instáveis e estáveis para pontos fixos - Parte 3

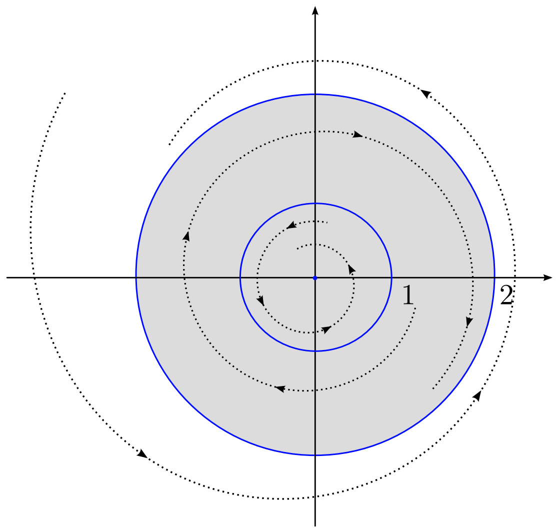


Figura 4 – Retrato de fase de (1.4).

Definição 1.27. Diremos que um conjunto $\mathcal{A} \subseteq X$ é um **atrator global** para o semigrupo T se $\mathcal{A}$ é compacto, T-invariante e T-atrai todos os subconjuntos limitados de X.

Na verdade, um atrator global para um semigrupo T, quando existe, é único.

Proposição 1.28. *Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ dois atratores globais para T, então $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Demonstração. De fato, temos

$$d_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = d_H(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

já que $\mathcal{A}_2$ é T-invariante. Além disso, como $\mathcal{A}_2$ é compacto e $\mathcal{A}_1$ T-atrai limitados, segue que

$$\lim_{t\to\infty} d_H(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = \lim_{t\to\infty} d_H(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0,$$

a portanto $\mathcal{A}_2 \subseteq \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$, já que $\mathcal{A}_1$ é compacto. Portanto $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_1$. Intercambiando $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, mostramos que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ e o resultado está provado. □

Exemplo 1.29. Considere o semigrupo $T = \{T(t)\colon t \geqslant 0\}$ dado no Exemplo 1.2, e defina $\mathcal{A} = \left\{\frac{b}{a}\right\}$. Claramente $\mathcal{A}$ é compacto, ademais $\mathcal{A}$ é T-invariante pois

$$T(t)\tfrac{b}{a} = \tfrac{b}{a} + e^{-at}\big(\tfrac{b}{a} - \tfrac{b}{a}\big) = \tfrac{b}{a} \qquad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Além disso se $B \subseteq \mathbb{R}$ é limitado temos:

$$\begin{aligned} d_H(T(t)B, \mathcal{A}) &= \sup_{x\in B} d\big(T(t)x, \tfrac{b}{a}\big) = \sup_{x\in B} \big|T(t)x - \tfrac{b}{a}\big| \\ &= \sup_{x\in B} \big|e^{-at}\left(x - \tfrac{b}{a}\right)\big| = e^{-at} \sup_{x\in B} \big|x - \tfrac{b}{a}\big| = Ce^{-at}, \end{aligned}$$

onde $C = \sup_{x\in B} |x - \frac{b}{a}| < \infty$, já que B é limitado. Assim

$$\lim_{t\to\infty} d_H(T(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

e $\mathcal{A}$ T-atrai subconjuntos limitados da reta. Com isso $\mathcal{A}$ é o atrator global de T.

O atrator global, quando existe, também é chamado de **atrator maximal**, pois ele tem a propriedade de ser o maior subconjunto limitado e invariante de X, como veremos no próximo resultado.

Lema 1.30. *Se T é um semigrupo em X com um atrator global $\mathcal{A}$ e $B \subseteq X$ é limitado e T-invariante, então $B \subseteq \mathcal{A}$.*

Demonstração. Como B é limitado então $\mathcal{A}$ T-atrai B. Utilizando que B é T-invariante, temos

$$d_H(B, \mathcal{A}) = d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \to 0 \qquad \text{quando } t \to \infty.$$

Portanto $d_H(B, \mathcal{A}) = 0$, logo $B \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Do fato que $\mathcal{A}$ é compacto (e portanto, fechado) segue que $B \subseteq \mathcal{A}$. □

Uma solução global ξ de T é dita **limitada** se $\xi(\mathbb{R})$ é um conjunto limitado de X. Com isto temos o seguinte resultado:

Proposição 1.31. *Seja T um semigrupo num espaço métrico X com um atrator global $\mathcal{A}$. Então*

$$\mathcal{A} = \{\xi(0)\colon \xi \text{ é uma solução global limitada de } T\},$$

ou seja $x \in \mathcal{A}$ se, e somente se, existe uma solução global limitada ξ de T tal que $\xi(0) = x$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{A}$, defina $\xi(t) = T(t)x$ para todo $t \geqslant 0$, e assim $\xi(t) \in \mathcal{A}$ para todo $t \geqslant 0$, já que $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Agora, como $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que

$T(1)x_{-1} = x$. Analogamente, $x_{-1} \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$ e existe $x_{-2} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-2} = x_{-1}$. Podemos assim realizar esse processo indutivamente para definir uma sequência $\{x_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, para $t < 0$, definimos $\xi(t) = T(t - \lfloor t \rfloor)x_{\lfloor t \rfloor}$, isto é,

$$\xi(t) = \begin{cases} T(t)x & \text{para } t \geqslant 0, \\ T(t+n)x_{-n} & \text{para } t \in [-n, -n+1),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Com isso ξ é solução global de T com $\xi(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Portanto ξ é uma solução global limitada de T com $x = \xi(0)$.

Reciprocamente, considere ξ uma solução global limitada de T. Do Lema 1.30 segue que $\xi(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Logo $\xi(0) \in \mathcal{A}$. □

Observação 1.32. Note que na demonstração da Proposição 1.31, a sequência $\{x_{-n}\}$ construída geralmente não é única. Entretanto isso não interfere na construção de *uma* solução global limitada passando por x.

A caracterização de $\mathcal{A}$ apresentada na Proposição 1.31 nos mostra que não só o atrator global é o conjunto onde todas as soluções do semigrupo T se acumulam quando $t \to \infty$, mas também ele é formado por todas as soluções globais limitadas. Dito grosseiramente, o atrator já contém dentro de si todas as soluções de T que são *fisicamente relevantes*, levando em consideração que vivemos em um mundo de quantidades limitadas. Desta forma, o estudo de atratores globais para semigrupos é fundamental para o entendimento não só do comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) mas também para o entendimento de todas as soluções limitadas de um dado problema.

1.2 Existência de atratores globais

É importante saber, dado um semigrupo T, quais são as condições necessárias (e/ou suficientes) que T deve satisfazer para que tenha um atrator global. No que segue, tentaremos encontrar tais condições. Uma das ferramentas mais importantes para isto é o ω-*limite*, que definimos a seguir.

Definição 1.33. Dado $B \subseteq X$, o **conjunto ω-limite** de B, com respeito ao semigrupo T, é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{\tau \geqslant t} T(\tau)B}.$$

Claramente $\omega(B)$ é fechado para qualquer $B \subseteq X$. Veremos uma caracterização deste conjunto que nos ajudará nas demonstrações a seguir.

Proposição 1.34. *Seja $B \subseteq X$ um conjunto não-vazio. Então $x \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B$ tais que $x = \lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x_n$.*

Demonstração. Se $x \in \omega(B)$ então dado $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \geqslant n$ e $x_n \in B$ tal que $d(x, T(t_n)x_n) < \frac{1}{n}$, e portanto $t_n \to \infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x_n = x$.

Reciprocamente, se $t_n \to \infty$, $\{x_n\} \subseteq B$ e $x = \lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x_n$ então dados $t \geqslant 0$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, T(t_n)x_n) < \epsilon$ e $t_n \geqslant t$ para todo $n \geqslant n_0$, e portanto $x \in \overline{\bigcup_{\tau \geqslant t} T(\tau)B}$. Como esta argumentação é válida para qualquer $t \geqslant 0$, segue que $x \in \omega(B)$. $\square$

O resultado topológico auxiliar a seguir nos será útil em algumas situações.

Proposição 1.35. *Se $K \subseteq X$ é compacto e $\{x_n\} \subseteq X$ é tal que $d(x_n, K) \to 0$ quando $n \to \infty$, então $\{x_n\}$ possui subsequência convergente.*

Demonstração. Como $d(x_n, K) \to 0$ quando $n \to \infty$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_m \in K$ tal que $d(x_{n_m}, y_m) < 1/m$. Do fato que K é compacto segue que $\{y_m\}$ possui subsequência convergente, denotada novamente por $\{y_m\}$, para algum $y_0 \in K$. Logo,

$$d(x_{n_m}, y_0) \leqslant d(x_{n_m}, y_m) + d(y_m, y_0) \to 0 \quad \text{quando } m \to \infty,$$

que garante o resultado. $\square$

Agora apresentaremos as duas propriedades cruciais para obter a existência de atratores globais para semigrupos.

Definição 1.36. Um semigrupo T é dito:

(i) **dissipativo** se existe $B_0 \subseteq X$ limitado tal que dado $B \subseteq X$ limitado existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que:
$$T(t)B \subseteq B_0, \quad \text{para } t \geqslant t_0$$
ou seja, B_0 T-absorve B. Um conjunto B_0 com esta propriedade é chamado de **conjunto dissipativo** para T;

(ii) **assintoticamente compacto** se para quaisquer sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq X$ limitada, a sequência $\{T(t_n)x_n\}$ possui subsequência convergente.

Facilmente vemos que estão condições são necessárias para a existência de atratores globais.

Proposição 1.37. *Se T possui um atrator global então T é assintoticamente compacto e dissipativo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ o atrator global de T e defina $B_0 = \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$. Então B_0 é limitado e dado $B \subseteq X$ limitado, como $\mathcal{A}$ T-atrai B, existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $d_H(T(t)B, \mathcal{A}) < 1$ para todo $t \geqslant t_0$, ou seja $T(t)B \subseteq \mathcal{O}_1(\mathcal{A}) = B_0$ para $t \geqslant t_0$, e T é dissipativo.

Agora, se $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq X$ limitada, defina $B = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, que é limitado. Assim, quando $n \to \infty$, temos $d_H(T(t_n)x_n, \mathcal{A}) \leqslant d_H(T(t_n)B, \mathcal{A}) \to 0$. Logo da Proposição 1.35, $\{T(t_n)x_n\}$ tem subsequência convergente e T é assintoticamente compacto. $\square$

Para mostrar que tais condições são também suficientes, começaremos com o seguinte resultado.

Proposição 1.38. *Seja T um semigrupo assintoticamente compacto e dissipativo. Então dado $B \subseteq X$ limitado e não-vazio temos $\omega(B) \neq \varnothing$, compacto, invariante, T-atrai B.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que $\omega(B) \neq \varnothing$. Sejam $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B$ sequências quaisquer. Temos $\{x_n\}$ limitada, e da compacidade assintótica de T, $\{T(t_n)x_n\}$ possui subsequência convergente, que denotamos novamente por $\{T(t_n)x_n\}$, para um ponto $x \in X$, ou seja, $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$ e então $x \in \omega(B)$. Portanto $\omega(B) \neq \varnothing$.

Agora, como $\omega(B)$ é fechado, para mostrar que $\omega(B)$ é compacto, basta mostrar que se $\{y_n\} \subseteq \omega(B)$ então ela tem subsequência convergente em X. Para cada $y_n \in \omega(B)$, existem sequências $\{x_k^n\} \subseteq B$ e $t_k^n \to \infty$ quando $k \to \infty$ tais que $y_n = \lim_{k\to\infty} T(t_k^n)x_k^n$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) > n$ tal que

$$d(T(t^n_{k(n)})x^n_{k(n)}, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Fazendo $z_n = x^n_{k(n)}$ e $t_n = t^n_{k(n)}$ temos $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ (uma vez que $t_n > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e $\{z_n\} \subseteq B$. Além disso, da compacidade assintótica de T, $\{T(t_n)z_n\}$ tem subsequência convergente, que denotamos novamente por $\{T(t_n)z_n\}$, para um ponto $y \in X$. Então

$$d(y, y_n) \leqslant d(y, T(t_n)z_n) + d(T(t_n)z_n, y_n) < d(y, T(t_n)z_n) + \tfrac{1}{n} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Portanto $\{y_n\}$ tem subsequência convergente em X e $\omega(B)$ é compacto.

Para a invariância de $\omega(B)$, se $x \in \omega(B)$ e $t \geqslant 0$ então, existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Logo, da continuidade de $T(t)$ em X segue que

$$T(t)x = T(t)\left(\lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(t)T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t+t_n)x_n,$$

e como $t+t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq \omega(B)$, $T(t)x \in \omega(B)$. Assim, mostramos que $T(t)\omega(B) \subseteq \omega(B)$. Agora, se $x \in \omega(B)$ e $t \geqslant 0$, então existem $\{x_n\} \subseteq X$ e $t_n \to \infty$ de forma que $t_n \geqslant t$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Então, da compacidade assintótica de T,

$\{T(t_n - t)x_n\}$ tem subsequência convergente, que denotamos igual, para um ponto $y \in X$. Claramente $y \in \omega(B)$ e

$$T(t)y = T(t) \lim_{n\to\infty} T(t_n - t)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t)T(t_n - t)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = x.$$

Portanto $\omega(B) \subseteq T(t)\omega(B)$ e então, para todo $t \geqslant 0$, temos $T(t)\omega(B) = \omega(B)$

Finalmente, para mostrar que $\omega(B)$ atrai B, suponhamos por absurdo que isso não ocorre. Dessa forma, existem $\varepsilon_0 > 0$, $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B$ tais que

$$d_H(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas $\{T(t_n)x_n\}$ possui uma subsequência que converge a um ponto $x \in \omega(B)$, e ao longo dessa subsequência, fazendo $n \to \infty$ obtemos $d_H(x, \omega(B)) \geqslant \varepsilon_0$, o que contradiz o fato de $x \in \omega(B)$, e conclui a demonstração. □

Proposição 1.39. *Seja T um semigrupo assintoticamente compacto e dissipativo, e B_0 um conjunto dissipativo para T. Se $B \subseteq X$ é não-vazio e limitado então $\omega(B) \subseteq \omega(B_0) \subseteq \overline{B_0}$.*

Demonstração. Se $x \in \omega(B)$, existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Como B_0 é um conjunto dissipativo para T, existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que se $t \geqslant t_0$ então $T(t)B \subseteq B_0$. Em particular $T(t_0)B \subseteq B_0$. Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t_0$ para todo $n \geqslant n_0$, e para $n \geqslant n_0$ temos

$$T(t_n)x_n = T(t_n - t_0)T(t_0)x_n \in T(t_n - t_0)T(t_0)B \subseteq T(t_n - t_0)B_0,$$

e assim, para $y_n = T(t_0)x_n$, temos,

$$x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)T(t_0)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t_0)y_n,$$

e $x \in \omega(B_0)$. Portanto $\omega(B) \subseteq \omega(B_0)$.

Agora, caso $x \in \omega(B_0)$, existem $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subseteq B_0$ tais que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Mas como B_0 é um conjunto dissipativo para T e B_0 é limitado, existe $t_0 = t_0(B_0) \geqslant 0$ tal que $T(t)B_0 \subseteq B_0$ para $t \geqslant t_0$. Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ temos $t_n \geqslant t_0$, e assim, para $n \geqslant n_0$, $T(t_n)x_n \in T(t_n)B_0 \subseteq B_0$. Portanto $x \in \overline{B_0}$ e $\omega(B_0) \subseteq \overline{B_0}$. □

Teorema 1.40. *Se T é um semigrupo assintoticamente compacto e dissipativo então T tem atrator global dado por $\mathcal{A} = \omega(B_0)$, em que B_0 é um conjunto dissipativo para T.*

Demonstração. Temos $\mathcal{A} = \omega(B_0) \neq \varnothing$, compacto, invariante e atrai B_0. Se $B \subseteq X$ é limitado e não-vazio então $\omega(B)$ atrai B e $\omega(B) \subseteq \omega(B_0) = \mathcal{A}$. Veja que quando $t \to \infty$, temos

$$d_H(T(t)B, \omega(B)) \to 0,$$

e como $d_H(T(t)B, \mathcal{A}) \leqslant d_H(T(t)B, \omega(B))$, $\mathcal{A}$ atrai B. □

Note que, em particular, se T é assintoticamente compacto e dissipativo, e B_0 é um conjunto dissipativo para T, então o atrator global $\mathcal{A}$ de T está contido em $\overline{B_0}$.

Assim, para verificarmos que um semigrupo T num espaço métrico X possui um atrator global, devemos ser capazes de verificar que T é dissipativo e assintoticamente compacto.

Porém, quando X é um espaço vetorial de dimensão finita, o problema é reduzido, pelo seguinte resultado:

Proposição 1.41. *Seja T um semigrupo num espaço normado X com $\dim X < \infty$. Se T é dissipativo então T é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Tome B_0 um conjunto dissipativo para T e considere uma sequência $\{T(t_n)x_n\}$ onde $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}$ é limitada. Para o conjunto limitado $B = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subseteq B_0$ para todo $t \geqslant t_0$.

Como $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant t_0$ para todo $n \geqslant n_0$, e assim

$$T(t_n)x_n \in T(t_n)B \subseteq B_0 \quad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Assim, a sequência $\{T(t_n)x_n\}_{n \geqslant n_0}$ é limitada num espaço normado de dimensão finita, e portanto é relativamente compacta, possuindo assim uma subsequência convergente. Logo T é assintoticamente compacto. $\square$

Assim, em espaços de dimensão finita, para encontrar um atrator global para um semigrupo T, basta verificar que T é dissipativo. Em espaços de dimensão infinita (para semigrupos provenientes de equações diferenciais parciais, por exemplo) a situação é completamente diferente, e a dissipatividade e a compacidade assintótica devem ser verificadas separadamente (sendo esta última bastante complicada de ser verificada, em boa parte dos exemplos).

Observação 1.42. Como não há aumento de dificuldade nas demonstrações dos resultados abstratos que garantem a existência de atratores, decidimos enunciá-los de maneira geral, com as hipóteses de compacidade assintótica e dissipatividade separadas, mesmo que os exemplos a serem apresentados serão todos em espaços vetoriais de dimensão finita.

Exemplo 1.43. Considere o Exemplo 1.3, e assuma que existam constantes $M > 0$ e $\theta > 0$ tais que

$$f(x) \cdot x \leqslant -\theta \|x\|^2 \quad \text{para } \|x\| \geqslant M. \tag{1.5}$$

Note que, em particular, (1.5) implica (1.2). Agora, seja $\gamma = \sup_{\|x\| \leqslant M} \|f(x)\|$. Temos $|f(x) \cdot x| \leqslant \|f(x)\|\|x\| \leqslant M\gamma$ se $\|x\| \leqslant M$ e $f(x) \cdot x \leqslant -\theta \|x\|^2$ para $\|x\| \geqslant M$, assim

$$f(x) \cdot x \leqslant -\theta \|x\|^2 + C \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $C = M^2\theta + M\gamma$, e por (1.3) obtemos

$$\frac{d}{dt}\|x(t,x_0)\|^2 \leqslant -2\theta\|x(t,x_0)\|^2 + 2C \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e portanto

$$\|x(t,x_0)\|^2 \leqslant e^{-2\theta t}\|x_0\|^2 + \frac{2C}{\theta} \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado e $\sup_{x\in B}\|x\|^2 = K < \infty$, temos

$$\sup_{x\in B}\|T(t)x\|^2 \leqslant Ke^{-2\theta t} + \frac{2C}{\theta} \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e tomando $t_0 \geqslant 0$ tal que $Ke^{-2\theta t_0} < \frac{2C}{\theta}$ obtemos

$$\sup_{x\in B}\|T(t)x\|^2 \leqslant \frac{4C}{\theta} \quad \text{para todo } t \geqslant t_0,$$

o que implica que $T(t)B \subseteq B_0$ para $t \geqslant t_0$, onde $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant \sqrt{4C\theta^{-1}}\}$, e T é dissipativo. Da Proposição 1.41, T é assintoticamente compacto. Do Teorema 1.40, T tem um atrator global $\mathcal{A} = \omega(B_0) \subseteq B_0$.

Exemplo 1.44. No Exemplo 1.26, o atrator global para o semigrupo gerado pela equação (1.4) é

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Note que a solução $(x(t),y(t))$ de (1.4) com dado inicial $(x_0,y_0) = (r_0\cos\theta_0, r_0\text{sen}\theta_0)$, $r_0 \geqslant 0$ e $\theta_0 \in (-\pi,\pi]$, é dada por

$$x(t) = r(t)\cos(t+\theta_0) \quad \text{e} \quad y(t) = r(t)\text{sen}(t+\theta_0),$$

onde $r(t)$ é solução de $\dot{r} = -r(r-1)(r-2)$ com $r(0) = r_0$ e $(x(t),y(t))$ está definida no intervalo aonde $r(t)$ está definida. Estudaremos então a equação

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)(r-2), \ t > 0 \\ r(0) = r_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

em $[0,\infty)$. Note que para $f(r) = -r(r-1)(r-2)$, temos f contínua e localmente Lipchitz contínua, e além disso temos

$$f(r)r = -r^2(r-1)(r-2) \leqslant -2r^2 \quad \text{para } r \geqslant 3.$$

Do exemplo anterior, com $M = 3$ e $\theta = 2$, (1.6) gera um semigrupo em $[0,\infty)$ que possui um atrator global. Além disso, este atrator global é conexo (veja Seção 1.3). Como o intervalo $[0,2]$ é invariante, ele deve estar contido no atrator, e como todas as soluções de (1.6) com $r_0 > 2$ têm derivada negativa (e portanto, convergem para 2 quanto $t \to \infty$) vemos que qualquer intervalo da forma $[0, 2+\delta)$, $\delta > 0$, absorve limitados de $[0,\infty)$. Portanto o intervalo $[0,2]$ é o atrator global do semigrupo gerado por (1.6).

Desta forma, o conjunto $\mathcal{A}$ acima descrito é o atrator global para o semigrupo gerado por (1.4).

1.3 Conexidade

Vejamos que com uma simples hipótese adicional, conseguimos a propriedade de conexidade para o atrator global de um semigrupo.

Teorema 1.45. *Considere um semigrupo dissipativo e assintoticamente compacto T em X, e assuma que T tem um conjunto dissipativo B_0 fechado e conexo. Então T tem um atrator global $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}$ é conexo.*

Demonstração. A existência do atrator global $\mathcal{A}$ é dada pelo Teorema 1.40. Agora, se $\mathcal{A}$ não é conexo, então $\mathcal{A} \subseteq U_1 \cup U_2$, com U_1, U_2 abertos em X, com $U_1 \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, $U_2 \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ e $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Temos $\mathcal{A} = T(t)\mathcal{A} \subseteq T(t)B_0$ para todo $t \geqslant 0$ (pois $\mathcal{A} \subseteq \overline{B_0} = B_0$). Mas B_0 é conexo e $T(t)$ é contínua, logo $T(t)B_0$ é conexo (para t suficientemente grande, temos $T(t)B_0 \subseteq B_0$). Assim $U_i \cap T(t)B_0 \neq \varnothing$ para $i = 1, 2$ e $U_1 \cup U_2$ não cobre $T(t)B_0$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) existe $x_n \in T(n)B_0$ com $x_n \notin U_1 \cup U_2$. Escrevemos $x_n = T(n)y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, e temos

$$d(x_n, \mathcal{A}) = d(T(n)y_n, \mathcal{A}) \leqslant d_H(T(n)B_0, \mathcal{A}),$$

o que mostra que $d(x_n, \mathcal{A}) \to 0$ quando $n \to \infty$. Da Proposição 1.35, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente para um ponto $x \in \mathcal{A}$. Necessariamente temos $x \notin U_1 \cup U_2$, já que $U_1 \cup U_2$ é aberto, o que nos dá uma contradição. $\square$

2 Continuidade de Atratores

Neste capítulo, encontraremos condições que garantam a *semicontinuidade superior*, a *semicontinuidade inferior*, e a *continuidade* de uma família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de atratores globais. Para isto, começaremos com a definição precisa destes conceitos.

Definição 2.1. Sejam X e Λ espaços métricos, $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de X e $\lambda_0 \in \Lambda$. Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é:

(a) **semicontínua superiormente** em λ_0 se $d_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$;

(b) **semicontínua inferiormente** em λ_0 se $d_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \lambda_0$;

(c) **contínua** em λ_0 se ela é semicontínua superiormente e inferiormente em λ_0, isto é, se

$$d_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) + d_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) \to 0 \quad \text{quando } \lambda \to \lambda_0.$$

2.1 Semicontinuidade superior

Vamos estudar as continuidades separadamente, e começaremos pela mais simples das duas, a semicontinuidade superior. Um resultado extremamente útil para o que provamos a seguir é a seguinte caracterização:

Proposição 2.2. *Sejam Λ um espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos compactos de X. Então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se, e somente se, dadas sequências $\lambda_n \to \lambda_0$ e $\{x_n\} \subseteq X$, com $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência convergente de $\{x_n\}$, com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.*

Demonstração. Suponha que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 e tome $\lambda_n \to \lambda_0$ em Λ e $x_n \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$d_H(x_n, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \leqslant d_H(\mathcal{A}_{\lambda_n}, \mathcal{A}_0) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty,$$

e da Proposição 1.35 segue que $\{x_n\}$ tem uma subsequência convergente, com limite em $\mathcal{A}_{\lambda_0}$.

Reciprocamente, suponha por absurdo que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não seja semicontínua superiormente em λ_0. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que $d_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) > \varepsilon$. Suponha que $\lambda_k \to \lambda_0$ quando $k \to \infty$ em Λ. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $d_H(\mathcal{A}_{\lambda_k}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in \mathcal{A}_{\lambda_k}$ satisfazendo $d(x_k, \mathcal{A}_{\lambda_0}) > \varepsilon$. Entretanto, por hipótese $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para um ponto de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, o que nos dá uma contradição e encerra a demonstração. $\square$

Proposição 2.3. *Seja T um semigrupo em X e $x_n \to x$ em X. Então para cada compacto $K \subseteq [0,\infty)$ temos*

$$\sup_{t\in K} d(T(t)x_n, T(t)x) \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existe um compacto $K \subseteq [0,\infty)$ de forma que $\{\sup_{t\in K} d(T(t)x_n, T(t)x)\}$ não converge a zero. Então existem $\varepsilon > 0$, uma subsequência de $\{x_n\}$, denotaremos novamente por $\{x_n\}$, e uma sequência $\{t_n\}$ em K tal que $d(T(t_n)x_n, T(t_n)x) \geqslant \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto então $\{t_n\}$ possui uma subsequência convergente, que novamente denotamos a mesma, digamos $t_n \to t^* \in K$. Da continuidade da aplicação $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$, segue que $T(t_n)x \to T(t^*)x$ e $T(t_n)x_n \to T(t^*)x$. Portanto, temos a contradição $\varepsilon \leqslant d(T(t_n)x_n, T(t_n)x) \to 0$. □

Definição 2.4. Diremos que uma família $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos é **contínua em** $\eta = 0$ se $d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \to 0$ quando $\eta \to 0$, uniformemente para (t,x) em subconjuntos compactos de $[0,\infty) \times X$, isto é, se dados $T > 0$ e $K \subseteq X$ compacto então

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in K} d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \to 0 \quad \text{quando } \eta \to 0.$$

Definição 2.5. Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos. Diremos que a família é **coletivamente assintoticamente compacta em** $\eta = 0$ se para quaisquer sequências $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\eta_k \to 0$, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em X com $\{u_k\}$ limitada e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $t_k \to \infty$, de forma que $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta.

Proposição 2.6. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$, tal que T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ com $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ limitada. Então dadas $\eta_k \to 0$ e $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência $\{x_k\}$ possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $\eta_k \to 0$ e $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veja que $\{x_k\}$ é limitada pois $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitada. Considere uma sequência $\{t_k\}$ qualquer tal que $t_k \to \infty$. Como $x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ e $\mathcal{A}_{\eta_k}$ é T_{η_k}-invariante, existe $y_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ satisfazendo $T_{\eta_k}(t_k)y_k = x_k$. Novamente do fato de $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ ser limitado segue que $\{y_k\}$ é uma sequência limitada. Utilizando que $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ segue que $\{T_{\eta_k}(t_k)y_k\} = \{x_k\}$ é relativamente compacta, provando o desejado. □

Teorema 2.7. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Se T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado, então a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.*

Demonstração. Considere uma sequência $\eta_k \to 0$ e $\{u_{\eta_k}\}$ tal que $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da Proposição 2.6 segue que, a menos de subsequência, $\{u_{\eta_k}\}$ converge para algum

$u_0 \in X$. Pela caracterização de semicontinuidade superior de atratores feita na Proposição 2.2, é suficiente mostrarmos que $u_0 \in \mathcal{A}_0$, e pela Proposição 1.31, é suficiente mostrarmos que existe uma solução global limitada de T_0 por u_0.

Da Proposição 1.31 para cada u_{η_k} existe uma solução global limitada de T_{η_k} por u_{η_k}, que denotaremos por $\psi^{(\eta_k)}$. Note que $\psi^{(\eta_k)}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}_{\eta_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Mostraremos primeiramente que

$$T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \to T_0(t)u_0$$

converge uniformemente para t em compactos de $[0,\infty)$. Sejam $I \subseteq [0,\infty)$ e $K = \{u_0\} \cup \{u_{\eta_k}\}$ compactos. Temos:

$$d(T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k}, T_0(t)u_0) \leqslant d(T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k}, T_0(t)u_{\eta_k}) + d(T_0(t)u_{\eta_k}, T_0(t)u_0).$$

No que segue, utilizando a continuidade da família de semigrupos em $\eta = 0$ e a Proposição 2.3, temos

$$d(T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k}, T_0(t)u_0) \leqslant \sup_{s\in I}\sup_{z\in K} d(T_{\eta_k}(s)z, T_0(s)z) + \sup_{s\in I} d(T_0(s)u_{\eta_k}, T_0(s)u_0) \to 0$$

quando $k \to \infty$. Agora construiremos uma solução global limitada passando por u_0. Denotando $\eta_k^0 = \eta_k$ para $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$, a sequência em k dada por $\psi^{(\eta_k^{j-1})}(-j)$ possui uma subsequência convergente (da Proposição 2.6), digamos $\psi^{(\eta_k^j)}(-j)$, que converge para u_{-j} quando $k \to \infty$. Veja que para $i \in [0,j]$ temos

$$\psi^{(\eta_k^j)}(-j) = T_{\eta_k^j}(i)\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i) \to u_{-j} = T_0(i)u_{-j-i},$$

observe que $\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i) \xrightarrow{k\to\infty} u_{-j-i}$ pois $\psi^{(\eta_k^j)}(-j-i)$ é subsequência de $\psi^{(\eta_k^{j+i})}(-j-i)$. Definindo

$$\psi^{(0)}(t) = \begin{cases} T_0(t)u_0 & \text{para } t \geqslant 0, \\ T_0(t+j)u_{-j} & \text{para } -j \leqslant t \leqslant -j+1, \ j \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

e portanto $\psi^{(0)} : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global de T_0 por u_0. Como $\psi^{(0)}(t) = T_0(t)u_0$ para $t \geqslant 0$ então existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\psi^{(0)}([t_0,\infty)) \subseteq \mathcal{O}_1(\mathcal{A}_0)$. Logo $\psi^{(0)}([t_0,\infty))$ é limitado. Além disso $\psi^{(0)}([0,t_0])$ é imagem do compacto $[0,t_0] \times \{u_0\}$ por uma aplicação contínua, e portanto limitado. Por fim, dado $t < 0$ e $j \in \mathbb{N}$ tal que $-j \leqslant t < -j+1$, temos $\psi^{(0)}(t) = T_0(t+j)u_{-j}$. Sabemos ainda que $\psi^{(\eta_k^j)}(-j) \to u_{-j}$, e como fizemos acima (para $T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k}$) podemos ver que

$$\psi^{(\eta_k^j)}(t) = T_{\eta_k^j}(t+j)\psi^{(\eta_k^j)}(-j) \to T_0(t+j)u_{-j} = \psi^{(0)}(t),$$

o que mostra que $\psi^{(0)}(t) \in \overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$. Portanto $\psi^{(0)}$ é limitada, e a prova está completa. $\square$

Lembremos que uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é **Lipschitz em limitados de** $\mathbb{R}^n$ se dado $U \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado existe $L = L(U) \geqslant 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \text{para todos } x, y \in U.$$

Antes de continuarmos com um exemplo, precisaremos da Desigualdade de Grönwall.

Lema 2.8 (Desigualdade de Gronwall)**.** *Sejam* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\phi, \beta\colon (a,b) \to [0,\infty)$ *funções contínuas com* $\beta(t) \geqslant 0$ *em* (a,b) *e* $t_0 \in (a,b)$ *tais que*

$$\phi(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \beta(s)\phi(s)ds + \alpha \quad \textit{para todo } t \in (a,b),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\beta \geqslant 0$. *Então*

$$\phi(t) \leqslant \alpha e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} \quad \textit{para todo } t \in (a,b).$$

Demonstração. Defina $V(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)\phi(s)ds$. Assim V é continuamente diferenciável pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, $V(t_0) = 0$ e

$$V'(t) = \beta(t)\phi(t) \leqslant \beta(t)V(t) + \beta(t)\alpha \quad \text{para todo } t \in (a,b),$$

isto é

$$V'(t) - \beta(t)V(t) \leqslant \beta(t)\alpha \quad \text{para todo } t \in (a,b).$$

Multiplicando esta expressão por $e^{-\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} V(t)\Big) \leqslant \alpha\beta(t)e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds},$$

e integrando ambos os lados de t_0 a t encontramos

$$e^{-\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} V(t) \leqslant \alpha(1 - e^{-\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}),$$

o que nos dá

$$V(t) \leqslant \alpha e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} - \alpha.$$

Como $\phi(t) \leqslant V(t) + \alpha$ segue que

$$\phi(t) \leqslant \alpha e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} \quad \text{para todo } t \in (a,b).$$

□

Corolário 2.9. *Se* β *é constante no Lema 2.8, então* $\phi(t) \leqslant \alpha e^{\beta(t-t_0)}$ *para todo* $t \in (a,b)$.

Exemplo 2.10. Para $\eta \in [0, \theta/2]$, considere a equação:

$$\dot{x} = f(x) + \eta x,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

onde f é Lipschitz em limitados de $\mathbb{R}^n$ e satisfaz (1.5). Se $f_\eta(x) = f(x) + \eta x$, então $f_\eta(x) \cdot x = f(x) \cdot x + \eta\|x\|^2$, e para $\|x\| \geqslant M$ vale

$$f_\eta(x) \cdot x \leqslant -\theta\|x\|^2 + \eta\|x\|^2 \leqslant -\frac{\theta}{2}\|x\|^2.$$

Seguindo os passos do Exemplo 1.43, podemos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado e $\sup_{x\in B} \|x\|^2 = K < \infty$ então

$$\sup_{\eta\in[0,\theta/2]} \sup_{x\in B} \|T_\eta(t)x\|^2 \leqslant Ke^{-\theta t} + \frac{2C}{\theta} \quad \text{para todo } t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Em particular, para cada η, (2.1) gera um semigrupo T_η em $\mathbb{R}^n$ com um atrator global $\mathcal{A}_\eta \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant \sqrt{4C\theta^{-1}}\}$. Assim

$$\bigcup_{0\leqslant\eta\leqslant\frac{\theta}{2}} \mathcal{A}_\eta \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant \sqrt{4C\theta^{-1}}\},$$

logo, $\overline{\bigcup_{0\leqslant\eta\leqslant\frac{\theta}{2}} \mathcal{A}_\eta}$ é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, compacto. Mostraremos agora que $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,\theta/2]}$ é uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$, isto é, que $\|T_\eta(t)x - T_0(t)x\| \to 0$ uniformemente para (t, x) em compactos de $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. De (2.1) temos

$$T_\eta(t)x = x + \int_0^t \big(f(T_\eta(s)x) + \eta T_\eta(s)x\big)ds,$$

e logo

$$T_\eta(t)x - T_0(t)x = \int_0^t \big(f(T_\eta(s)x) - f(T_0(s)x)\big)ds + \eta \int_0^t T_\eta(s)xds.$$

Sejam $t_0 > 0$ e $G \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. De (2.2), para $K = \sup_{x\in G} \|x\|^2$, segue que

$$\sup_{\eta\in[0,\theta/2]} \sup_{x\in G} \|T_\eta(t)x\|^2 \leqslant K + \frac{2C}{\theta} \quad \text{para todo } t \geqslant 0,$$

e portanto $H = \bigcup_{0\leqslant\eta\leqslant\frac{\theta}{2}} \bigcup_{x\in K} \bigcup_{t\geqslant 0} T_\eta(t)x$ é limitado. Como f é Lipschitz em limitados, existe $L = L(H) \geqslant 0$ tal que $\|f(z) - f(w)\| \leqslant L\|z - w\|$ para quaisquer $z, w \in H$, e para $(t, x) \in [0, t_0] \times G$ obtemos

$$\|T_\eta(t)x - T_0(t)x\| \leqslant L \int_0^t \|T_\eta(s)x - T_0(s)x\|ds + c\eta t_0,$$

onde $c = \sqrt{K + 2C\theta^{-1}}$. Utilizando a Desigualdade de Gronwall (Lema 2.8) segue que

$$\sup_{(t,x)\in[0,t_0]\times G} \|T_\eta(t)x - T_0(t)x\| \leqslant c\eta t_0 e^{Lt_0} \xrightarrow{\eta\to 0^+} 0.$$

Segue, do Teorema 2.7, que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,\theta/2]}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

2.2 Semicontinuidade inferior

A *semicontinuidade inferior*, embora tenha definição e caracterização parecida com a da semicontinuidade superior, é consideravelmente menos comum, e mais difícil de se obter. Ela requer o conhecimento da estrutura interna do atrator limite, e a capacidade de reproduzir esta estrutura nos atratores perturbados, a fim de que os atratores perturbados tenham, de certa maneira, a mesma *complexidade* do atrator limite. Veremos nesta seção como obter a semicontinuidade inferior para uma família de atratores globais.

Proposição 2.11. *Sejam Λ um espaço métrico e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos compactos de X. Então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se, e somente se, para cada $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e sequência $\lambda_n \to \lambda_0$ existe uma subsequência $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$ e uma sequência $\{x_k\} \subseteq X$ com $x_k \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x quando $k \to \infty$.*

Demonstração. Suponha que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de subconjuntos compactos semicontínua inferiormente em λ_0, e sejam $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e sequência $\lambda_n \to \lambda_0$. Da semicontinuidade inferior segue que

$$d_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) = \sup_{z\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} d(z, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \to 0.$$

Portanto $d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \to 0$. Com isso para cada $k \in \mathbb{N}$ existe λ_{n_k} tal que $d(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) < \frac{1}{k}$ e consequentemente existe $x_{n_k} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ tal que $d(x, x_{n_k}) \leqslant \frac{1}{k}$. Concluindo que $x_{n_k} \to x$ quando $k \to \infty$.

Para a recíproca, suponha por absurdo que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não seja semicontínua inferiormente em λ_0. Então existem sequência $\lambda_n \to \lambda_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $d_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) > 2\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ tal que $d(z_n, \mathcal{A}_{\lambda_n}) > 2\varepsilon$. Como $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $\{z_n\}$ converge para $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$. Agora

$$2\varepsilon < d(z_n, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \leqslant d(z_n, x) + d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}),$$

e se n é suficientemente grande $d(z_n, x) < \varepsilon$ e assim $d(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) > \varepsilon$. Da hipótese, existe uma subsequência $\{\lambda_{n_k}\}$ de $\{\lambda_n\}$ e sequência $\{x_k\}$, com $x_k \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$, tal que $x_k \to x$ quando $k \to \infty$. Mas então $\varepsilon < d(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) \leqslant d(x, x_k) \to 0$, o que nos leva a um absurdo. □

Podemos ver um exemplo pictórico simples no qual a semicontinuidade inferior de atratores pode falhar. Tal exemplo é retirado de [Bortolan, Carvalho e Langa 2020].

Exemplo 2.12. Considere a equação abaixo:

$$\dot{u} = f(u), \tag{2.3}$$

onde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(u) = -c(u+1)^2(u-1)$, $c > 0$ é um parâmetro fixado (veja Figura 5).

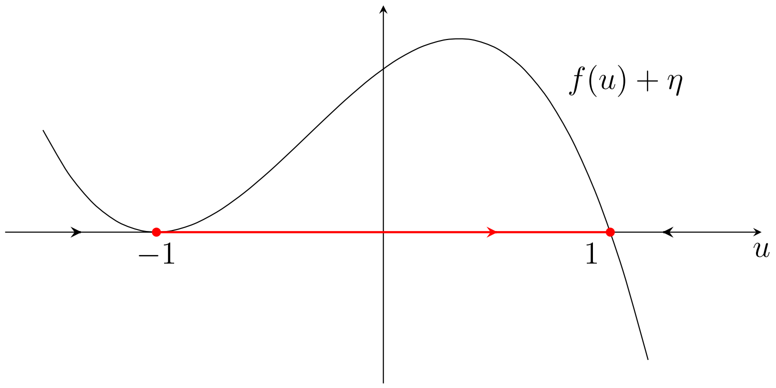


Figura 5 – Gráfico de f.

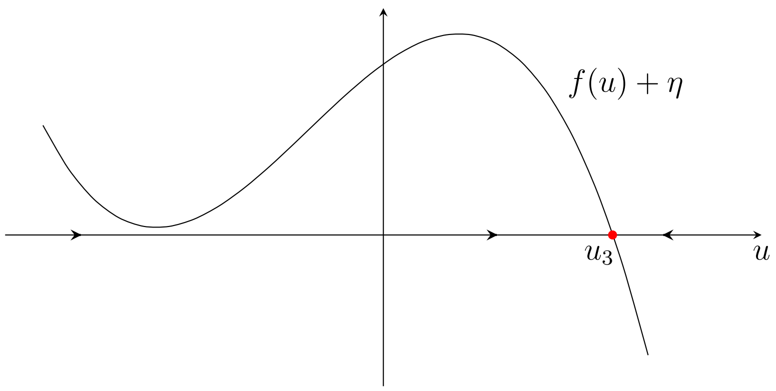


Figura 6 – Gráfico de $f + \eta$.

O atrator global do semigrupo gerado pela equação (2.3) consiste do intervalo fechado $\mathcal{A}_0 = [-1, 1]$. Consideramos uma pequena perturbação da equação (2.3) da forma

$$\dot{u} = f(u) + \eta, \tag{2.4}$$

para algum $\eta > 0$ pequeno (veja Figura 6).

O atrator global associado à equação (2.4) é o conjunto unitário dado por $\mathcal{A}_\eta = \{u_3\}$, onde $u_3 = u_3(\eta)$. Podemos mostrar que $u_3 \in (1, 1 + \eta/4)$. A família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ de atratores globais é semicontínua superiormente em $\eta = 0$, mas não é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Um exemplo pictórico, também retirado de [Bortolan, Carvalho e Langa 2020], no qual podemos observar a semicontinuidade inferior é o apresentado pelas Figuras 7 e 8.

Note que ao perturbar continuamente o atrator da Figura 7 para o atrator da Figura 8, obtemos uma família contínua em $\eta = 0$, isto é, semicontínua superiormente e inferiormente em $\eta = 0$.

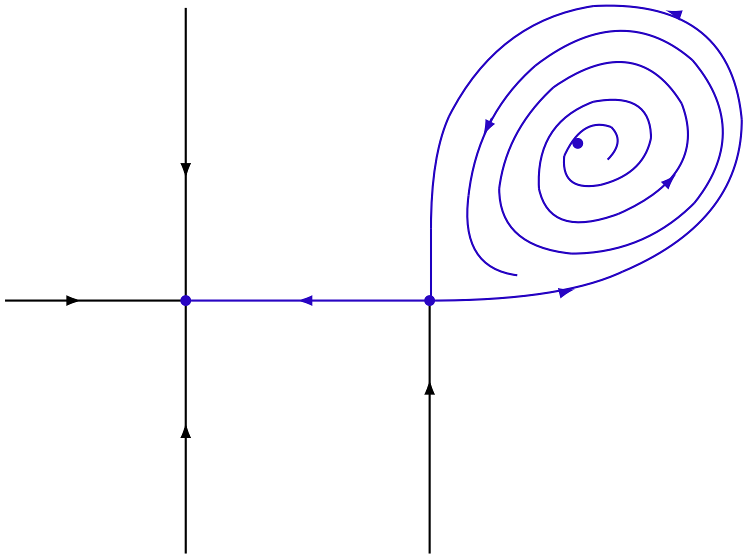


Figura 7 – Atrator global não-perturbado

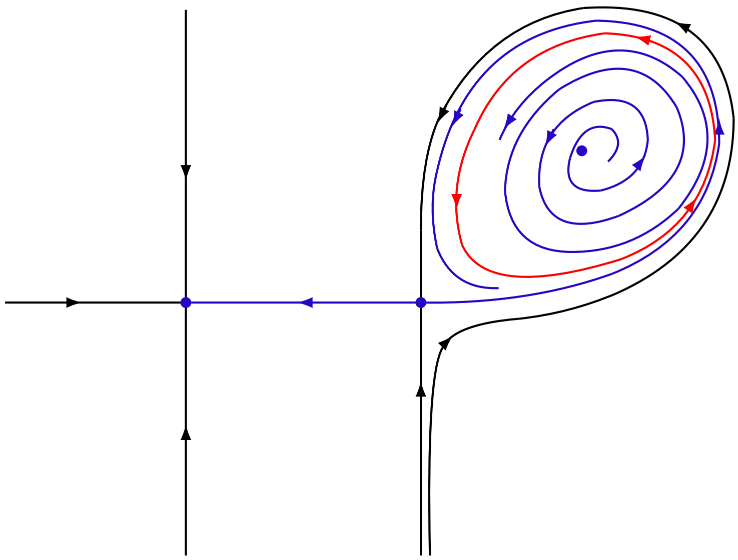


Figura 8 – Atrator global perturbado

Para obter a semicontinuidade inferior, precisaremos de algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 2.13. Seja $E \subseteq X$ limitado e T um semigrupo, diremos que E é **invariante isolado** de T se E é limitado e existe $\delta > 0$ tal que E é o conjunto T-invariante maximal em $\mathcal{O}_\delta(E)$, isto é, se $D \subseteq \mathcal{O}_\delta(E)$ é T-invariante então $D \subseteq E$.

Definição 2.14. Uma coleção $\mathcal{E} = \{E_1, ..., E_n\}$ é uma **família disjunta de invariantes isolados** se cada E_i é um invariante isolado e existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $i, j \in \{1, ..., n\}$ com $i \neq j$ vale

$$\mathcal{O}_\delta(E_i) \cap \mathcal{O}_\delta(E_j) = \varnothing.$$

Seja E um invariante isolado de T. Recordando que definimos a **variedade instável** de E por

$$W^u(E) = \{\xi(0)\colon \xi \text{ é uma solução global de } T \text{ com } \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), E) = 0\}.$$

Lembremos ainda que, da Proposição 1.24, se T é um semigrupo e E é invariante por T, então $W^u(E)$ é invariante por T.

Proposição 2.15. *Seja T um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}$. Se E é um invariante isolado de T então $W^u(E) \subseteq \mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $x \in W^u(E)$. Existe ξ solução global de T com $\xi(0) = x$, $d(\xi(t), E) \to 0$, $t \to -\infty$. No que segue, existe $t_0 \leqslant 0$ tal que $\xi(t) \in \mathcal{O}_1(E)$ para todo $t \leqslant t_0$ e existe $t_1 \geqslant 0$ tal que $\xi(t) = T(t)\xi(0) = T(t)x \in \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ para todo $t \geqslant t_1$.

Como ξ é contínua temos que $\xi([t_0, t_1])$ é compacto, e portanto limitado. Com isso ξ é solução global limitada de T, consequentemente $\xi(0) = x \in \mathcal{A}$. □

Definição 2.16. Sejam $\delta > 0$, T um semigrupo e E um invariante isolado de T. Definimos a **variedade instável local** de E e denotamos por $W^u_\delta(E)$ o subconjunto de X tal que, x pertence a $W^u_\delta(E)$ se, e somente se, existe solução global de T com $\xi(0) = x$, $d(\xi(t), E) \to 0$ quando $t \to -\infty$ e $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para todo $t \leqslant 0$.

Observação 2.17. Veja que a igualdade $W^u_\delta(E) = W^u(E) \cap \mathcal{O}_\delta(E)$ não é sempre verdadeira. Quando existe uma **órbita homoclínica de** T **em** E, isto é, uma solução global ξ de T com $d(\xi(t), E) \to 0$ para $t \to \pm\infty$ e $\sup_{t\in\mathbb{R}} d(\xi(t), E) > 0$, esta igualdade em geral não é válida, como na Figura 9. Porém é simples verificar que a inclusão abaixo sempre é válida

$$W^u_\delta(E) \subseteq W^u(E) \cap \mathcal{O}_\delta(E).$$

Lema 2.18. *Seja ξ solução global do semigrupo T e E um invariante isolado do semigrupo T. Suponha que $d(\xi(t), E) \to 0$, quando $t \to -\infty$, então dado $\delta > 0$ existe $\tau = \tau(\delta) \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(\tau) \in W^u_\delta(E)$.*

Demonstração. Sejam $\delta > 0$ e ξ solução global de T tal que $d(\xi(t), E) \to 0$, $t \to -\infty$. Assim, existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para todo $t \leqslant \tau$. Defina $\psi(t) = \xi(t + \tau)$. Então ψ é solução global de T com $d(\psi(t), E) = d(\xi(t + \tau), E) \to 0$, $t \to -\infty$, $\psi(t) \in \mathcal{O}_\delta(E)$ para todo $t \leqslant 0$ e $\psi(0) = \xi(\tau)$. Ou seja, $\xi(\tau) \in W^u_\delta(E)$. □

Teorema 2.19. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$ satisfazendo:*

(i) T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$;

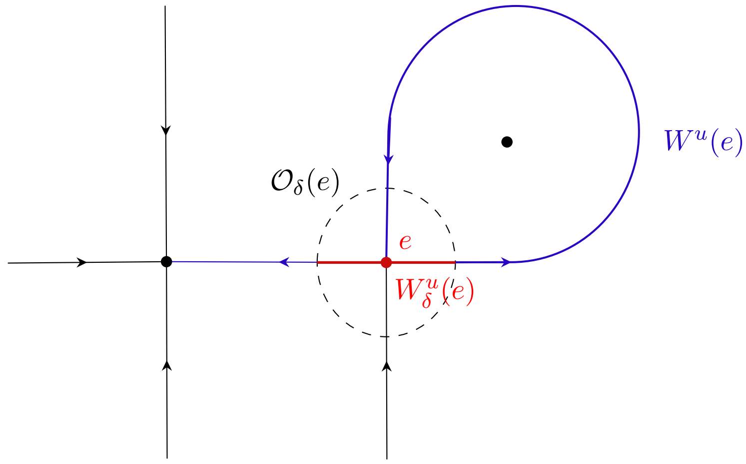


Figura 9 – Órbita homoclínica no ponto de equilíbrio e

(ii) *existe* $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ *tal que o conjunto de todos os invariantes isolados de* T_η *é dado por* $\mathcal{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, ..., E_{\mathfrak{p},\eta}\}$ *para cada* $\eta \in [0,1]$*;*

(iii) *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $j \in \{1, ..., \mathfrak{p}\}$ *a família* $\{W^u_\delta(E_{j,\eta})\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$*,*

(iv) $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(E_{i,0})$.

Então a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$*.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(E_{i,0})$. Com isso $x_0 \in W^u(E_{i,0})$ para algum $i \in \{1, ..., \mathfrak{p}\}$, logo existe ξ solução global de T_0 tal que $\xi(0) = x_0$ e $d(\xi(t), E_{i,0}) \to 0$, $t \to -\infty$. Do Lema 2.18 existe $\tau \geqslant 0$ tal que $\xi(-\tau) \in W^u_\delta(E_{i,0})$. De *(iii)*, para $\eta_k \to 0$, existe $x_k \in W^u_\delta(E_{i,\eta_k}) \subseteq W^u(E_{i,\eta_k}) \subseteq \mathcal{A}_{\eta_k}$ tal que, ao longo de subsequência, $x_k \to \xi(-\tau)$. Da continuidade em $\eta = 0$ sabemos que

$$T_{\eta_k}(\tau)x_k \to T_0(\tau)\xi(-\tau) = \xi(0) = x_0,$$

e, como $T_{\eta_k}(\tau)x_k \in \mathcal{A}_{\eta_k}$, segue da Proposição 2.11 que $\{\mathcal{A}_\eta\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$. $\square$

2.3 Continuidade

Utilizando os Teoremas 2.7 e 2.19, temos o seguinte resultado para a continuidade de uma família de atratores globais para semigrupos:

Teorema 2.20. *Seja* $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$*, satisfazendo:*

(i) T_η *possui um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$ *para cada* $\eta \in [0,1]$*;*

(ii) $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado;*

(iii) existe $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ *tal que o conjunto de todos os invariantes isolados de* T_η *é dado por* $\mathcal{E}_\eta = \{E_{1,\eta}, ..., E_{\mathfrak{p},\eta}\}$ *para cada* $\eta \in [0,1]$*;*

(iv) existe $\delta > 0$ *tal que para todo* $j \in \{1, ..., \mathfrak{p}\}$ *a família* $\{W^u_\delta(E_{j,\eta})\}_{\eta\in[0,1]}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$*,*

(v) $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(E_{i,0})$*.*

Então a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ *é contínua em* $\eta = 0$*.*

3 Equi-atração e Continuidade

Como vimos anteriormente, obter a continuidade de uma família de atratores globais, isso é, obter ambas as semicontinuidades superior e inferior, não é uma tarefa fácil, e requer um conhecimento abrangente não só das propriedades *externas* dos atratores como também de suas estruturas internas (e como elas se comportam). Porém, inspirados em [Li e Kloeden 2004] e [Caraballo et al. 2016], apresentamos uma maneira alternativa de se obter a continuidade: a *equi-atração*.

Definição 3.1. Sejam T_η um semigrupo com atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $J \subseteq [0,1]$. Diremos que a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in J}$ **equi-atrai** um subconjunto B de X se

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in J} d_H(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) = 0.$$

Diremos que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in J}$ **equi-atrai limitados** se ela equi-atrai cada subconjunto limitado de X.

3.1 Equi-atração implica em continuidade de atratores

Proposição 3.2. *Considere uma família $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos em X, tal que T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$. Se $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado então, para cada sequência $\eta_k \to 0^+$, $\cup_k \mathcal{A}_{\eta_k}$ é relativamente compacto em X.*

Demonstração. Considere uma sequência $\{x_n\} \subseteq \cup_k \mathcal{A}_{\eta_k}$, e mostremos que ela possui uma subsequência convergente em X. Separamos a demonstração em dois casos disjuntos:

Caso 1. Existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e uma subsequência de $\{x_n\}$ que está contida em $A_{\eta_{k_0}}$.

Neste caso, esta subsequência de $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente, já que $A_{\eta_{k_0}}$ é compacto.

Caso 2: Cada A_{η_k} possui, no máximo, um número finito de elementos da sequência $\{x_n\}$.

Defina, para $\delta \in (0,1]$, o conjunto

$$D_\delta = \bigcup_{\eta_k<\delta} \mathcal{A}_{\eta_k}.$$

Veja que para dado $\delta \in (0,1]$ existe um número finito de atratores da forma $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com $\eta_k \in [\delta, 1]$ pois $\eta_k \to 0$. Dessa forma, segue que D_δ possui infinitos elementos de $\{x_n\}$ caso contrário existiria um atrator $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com $\eta_k \in \{0\} \cup [\delta, 1]$ com infinitos elementos de $\{x_n\}$.

Agora defina $n_1 = 1$, e tome $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in D_{1/2}$, note que n_2 existe e não é necessariamente único pois $D_{1/2}$ possui infinitos elementos da sequência $\{x_n\}$. De modo recursivo temos uma sequência $\{n_i\}$ dada por $n_1 = 1$ e $n_i \in \mathbb{N}$ arbitrário que satisfaz $n_i > n_{i-1}$ e $x_{n_i} \in D_{1/i}$ para $i > 1$. Facilmente se percebe que $\{x_{n_i}\}$ é subsequência de $\{x_n\}$.

Agora precisamos construir uma sequência de semigrupos adequada para utilizarmos a hipótese da compacidade assintótico coletiva, a escolha mais óbvia é utilizar a sequência que é definida a partir dos atratores que contêm os elementos $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, defina a sequência $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dada por $\lambda_i = \max\{\eta_k : x_{n_i} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$ *com* $\eta_k < 1/i\}$. Em um primeiro momento a condição $\eta_k < 1/i$ pode parecer redundante pois $x_{n_i} \in \mathcal{A}_{\eta_k} \subseteq D_{1/i}$, entretanto veja que x_{n_i} pode também estar em algum atrator $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com $\eta_k > 1/i$, similarmente a necessidade do máximo é devido ao fato de que x_{n_i} pode pertencer a mais de um atrator. Observe ainda que $\{\lambda_i\}$ está bem definida e $\lambda_i \to 0$ pois $x_{n_i} \in D_{1/i}$ e consequentemente $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1/i$. Outra observação importante é que apesar de $\{\lambda_i\} \subseteq \{\eta_k\}$ a sequência $\{\lambda_i\}$ não é necessariamente subsequência de $\{\eta_k\}$. Por fim, da invariância dos atratores, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $y_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}$ tal que

$$x_{n_i} = T_{\lambda_i}(i)y_i.$$

Dessa forma $\{y_i\}$ e $\{T_{\lambda_i}(i)y_i\}$ são limitados pois $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado, $\lambda_i \to 0$ por construção e portanto pela compacidade coletiva da família de semigrupos segue que $\{x_{n_i}\}$ possui subsequência convergente. Provando o desejado. $\square$

Lema 3.3. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos, contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que T_η possui atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0, 1]$, e que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ seja limitada em X. Então para cada sequência $\eta_k \to 0$ temos*

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, T_0(t)\mathcal{A}_{\eta_k}) + d_H(\mathcal{A}_0, T_{\eta_k}(t)\mathcal{A}_0) \to 0 \quad \textit{quando } k \to \infty.$$

uniformemente para t em compactos de $\mathbb{R}^+$.

Demonstração. Como $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado então defina $K = \overline{\cup_k\mathcal{A}_{\eta_k}}$, que, utilizando a Proposição 3.2, é compacto em X. Da continuidade em $\eta = 0$ de $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$, dados $J \subseteq \mathbb{R}^+$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ temos

$$\sup_{x\in K} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $t \in J$. Assim, para todo $t \in J$ e todo $k \geqslant k_0$ obtemos

$$d_H(T_{\eta_k}(t)\mathcal{A}_{\eta_k}, T_0(t)\mathcal{A}_{\eta_k}) = \sup_{x\in\mathcal{A}_{\eta_k}} \inf_{y\in\mathcal{A}_{\eta_k}} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)y) \leqslant \sup_{x\in K} d(T_{\eta_k}(t)x, T_0(t)x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente

$$d_H(T_0(t)\mathcal{A}_0, T_{\eta_k}(t)\mathcal{A}_0) = \sup_{x\in\mathcal{A}_0} \inf_{y\in\mathcal{A}_0} d(T_0(t)x, T_{\eta_k}(t)y) \leqslant \sup_{x\in K} d(T_0(t)x, T_{\eta_k}(t)x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da invariância de $\mathcal{A}_{\eta_k}$ com respeito a T_{η_k} para cada $k \geqslant k_0$ obtemos

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, T_0(t)\mathcal{A}_{\eta_k}) + d_H(\mathcal{A}_0, T_{\eta_k}(t)\mathcal{A}_0) < \varepsilon,$$

para todo $t \in J$, e o resultado está demonstrado.

□

Teorema 3.4. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos, contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, e que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado. Considere uma sequência $\eta_k \to 0^+$. Se $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ equi-atrai limitados então*

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Demonstração. Considere $K = \overline{\cup_{k\in\mathbb{T}^+}\mathcal{A}_{\eta_k}}$, que é compacto (e portanto, limitado) em X pela Proposição 3.2. Da propriedade de equi-atração, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 = t_0(K,\varepsilon) \geqslant 0$ tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^+} d_H(T_{\eta_k}(t)K, \mathcal{A}_{\eta_k}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para todo } t \geqslant t_0. \tag{3.1}$$

Em particular, segue de (3.1) que para todo $k \in \mathbb{R}^+$ temos

$$d_H(T_0(t_0)\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Utilizando o Lema 3.3 existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_1$ temos

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) \leqslant d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, T_0(t_0)\mathcal{A}_{\eta_k}) + d_H(T_0(t_0)\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Novamente de (3.1) segue que, para todo $k \in \mathbb{T}^+$, temos

$$d_H(T_{\eta_k}(t_0)\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) < \frac{\varepsilon}{4},$$

e consequentemente, do Lema 3.3, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant k_2$ vale

$$d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) \leqslant d_H(\mathcal{A}_0, T_{\eta_k}(t_0)\mathcal{A}_0) + d_H(T_{\eta_k}(t_0)\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

tomando $k_0 = k_1 + k_2$ segue que, para todo $k \geqslant k_0$, temos

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) < \varepsilon$$

o que completa a demonstração.

□

Corolário 3.5. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos, contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que T_η possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$, e que $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta$ é limitado. Se $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai limitados então*

$$d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \to 0 \quad \text{quando } \eta \to 0.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que

$$d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \not\to 0 \quad \text{quando } \eta \to 0.$$

Logo existem $\varepsilon > 0$ e $\eta_k \to 0$ com $\eta_k \in [0, 1]$ de forma que

$$d_H(\mathcal{A}_{\eta_k}, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{\eta_k}) > \varepsilon \quad \text{para todo } k.$$

Tome $B \subseteq X$ limitado, da equi-atração de $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ temos

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\eta\in[0,1]} d_H(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) = 0.$$

Como $\{\eta_k\} \subseteq [0, 1]$ então, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} d_H(T_{\eta_k}(t)B, \mathcal{A}_{\eta_k}) \leqslant \sup_{\eta\in[0,1]} d_H(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta)$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} d_H(T_{\eta_k}(t)B, \mathcal{A}_{\eta_k}) = 0.$$

Portanto $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ equi-atrai limitados. Pelo Teorema 3.4 temos o absurdo, demonstrando o desejado. □

Exemplo 3.6. Considere o Exemplo 2.12. Segue diretamente do Corolário 3.5 que a família $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ não pode equi-atrair limitados, pois ela não é contínua em $\eta = 0$.

3.2 Continuidade de atratores implica em equi-atração

Esta seção está baseada em [Li e Kloeden 2004], onde os autores conseguem obter uma recíproca para o Corolário 3.5, porém utilizando hipóteses mais fortes do que as que usaremos aqui. Ressaltamos, todavia, que a nossa recíproca é parcial, e a equi-atração obtida só é válida ao longo de subsequências, ao invés de obter a equi-atração em todo o intervalo $[0, 1]$.

Definição 3.7. Diremos que uma família $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ de semigrupos é **uniformemente dissipativa** se existe um limitado $B_0 \subseteq X$ com a seguinte propriedade: dado $B \subseteq X$ limitado, existe $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que

$$T_\eta(t)B \subseteq B_0 \quad \text{para todos } t \geqslant t_0 \text{ e } \eta \in [0, 1]. \tag{3.2}$$

Um conjunto B_0 com essas propriedades é chamado de **conjunto uniformemente dissipativo** para $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$.

Temos o seguinte lema:

Lema 3.8. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos uniformemente dissipativa, com um conjunto uniformemente dissipativo B_0. Assuma que T_η tem um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$. Então $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai limitados se, e somente se, $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai B_0.*

Demonstração. Claramente se $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai limitados, então $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai B_0, já B_0 é limitado. Assuma agora que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai B_0. Dado $B \subseteq X$ limitado, seja $t_0 = t_0(B) \geqslant 0$ tal que (3.2) seja válida. Assim, para todo $t \geqslant t_0$ temos

$$T_\eta(t)B = T_\eta(t-t_0)T_\eta(t_0)B \subseteq T_\eta(t-t_0)B_0.$$

Como $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ equi-atrai B_0, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1 \geqslant 0$ tal que

$$\sup_{\eta\in[0,1]} d_H(T_\eta(t)B_0, \mathcal{A}_\eta) < \varepsilon \quad \text{para } t \geqslant t_1.$$

Assim, como $T_\eta(t)B \subseteq T_\eta(t-t_0)B_0$ para $t \geqslant t_0 + t_1$ temos

$$\sup_{\eta\in[0,1]} d_H(T_\eta(t)B, \mathcal{A}_\eta) \leqslant \sup_{\eta\in[0,1]} d_H(T_\eta(t-t_0)B_0, \mathcal{A}_\eta) < \varepsilon,$$

e o resultado está provado. □

Teorema 3.9. *Seja $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha ainda que $\{T_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$ seja uniformemente dissipativa e que*

$$d_H(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \to 0.$$

Então para cada sequência $\eta_k \to 0$, a família $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ equi-atrai limitados.

Demonstração. Pelo Lema 3.8, o resultado estará provado se mostrarmos que para cada sequência $\eta_k \to 0$, $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ equi-atrai B_0.

Tomemos então uma sequência $\eta_k \to 0$ e suponhamos por absurdo que $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ não equi-atrai B_0. Ou seja, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $t_k \to \infty$ e $\{x_k\} \subseteq B_0$ em X satisfazendo,

$$d(T_{\eta_k}(t_k)x_k, \mathcal{A}_{\eta_k}) > 2\varepsilon.$$

Como $d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \to 0$, existe k_0 suficientemente grande de forma que $d_H(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) < \varepsilon$ para todo $k \geqslant k_0$, o que implica em $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A}_\eta)$ e, portanto,

$$d(T_{\eta_k}(t_k)x_k, \mathcal{A}_0) > \varepsilon.$$

Como B_0 é um conjunto uniformemente dissipativo, existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $T_\eta(t)B_0 \subseteq B_0$ para todos $t \geqslant t_0$ e $\eta \in [0,1]$. Seja $t \geqslant 0$ e considere k suficientemente grande de forma que $t_k \geqslant t + t_0$. Logo a sequência $\{T_{\eta_k}(t_k - t)x_k\}$ está contida em B_0 (pois $t_k - t \geqslant t_0$)

para k suficientemente grande, e da compacidade assintótica coletiva em $\eta = 0$ segue que $\{T_{\eta_k}(t_k - t)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, digamos, para $y_t \in \overline{B_0}$. Agora,

$$d(T_{\eta_k}(t)T_{\eta_k}(t_k - t)x_k, \mathcal{A}_0) = d(T_{\eta_k}(t_k)x_k, \mathcal{A}_0) > \varepsilon.$$

Da continuidade em $\eta = 0$ temos

$$T_{\eta_k}(t_k)x_k = T_{\eta_k}(t)T_{\eta_k}(t_k - t)x_k \to T_0(t)y_t,$$

e portanto, para cada $t \geqslant 0$, obtemos

$$d(T_0(t)y_t, \mathcal{A}_0) \geqslant \varepsilon,$$

o que nos dá

$$d_H(T_0(t)\overline{B_0}, \mathcal{A}_0) \geqslant \varepsilon,$$

para cada $t \geqslant 0$, o que contradiz o fato de $\mathcal{A}_0$ atrair o limitado $\overline{B_0}$. Portanto a família $\{\mathcal{A}_{\eta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ equi-atrai B_0, e consequentemente, equi-atrai limitados. □

Conclusão

O estudo da robusteza dos atratores sob perturbações é fundamental para conseguirmos transportar as características do atrator limite nos atratores perturbados.

A semicontinuidade superior dos atratores é obtida com poucas hipóteses adicionais na família de semigrupos e nos seus atratores. Porém, a semicontinuidade inferior se mostra um desafio bem mais complicado de ser resolvido. Ela requer hipóteses fortes na estrutura interna do atrator limite e também em como essa estrutura interna se comporta sob perturbação. Uma via alternativa é a equi-atração. Dela obtemos a continuidade da família de atratores, e não temos a necessidade de utilizar a estrutura interna do atrator limite.

Ressaltamos finalmente que, apesar da equi-atração ser uma via alternativa para obtermos a continuidade de atratores, ela também não é simples de ser verificada em aplicações. É por esse motivo que o conhecimento de ambas as técnicas é tão importante no estudo da robusteza de atratores sob perturbações.

Referências

BORTOLAN, M. C.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. *Attractors Under Autonomous and Non-autonomous Perturbations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2020. v. 246. Citado 3 vezes nas páginas 7, 9 e 16.

BORTOLAN, M. C.; CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. *Attractors Under Autonomous and Non-autonomous Perturbations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2020. v. 246. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

CARABALLO, T. et al. Equi-attraction and continuity of attractors for skew-product semiflows. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, v. 21, n. 9, p. 2949–2967, 2016. ISSN 1531-3492. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016081>. Citado 4 vezes nas páginas 7, 9, 17 e 53.

HALE, J. K. *Ordinary differential equations*. Second. [S.l.]: Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y., 1980. 361 p. ISBN 0-89874-011-8. Citado na página 20.

HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. v. 840. iv+348 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 840). ISBN 3-540-10557-3. Citado na página 22.

LADYZHENSKAYA, O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. xii+73 p. (Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]). ISBN 0-521-39030-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569418>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 22 e 23.

LI, D.; KLOEDEN, P. E. Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters. *Glasg. Math. J.*, v. 46, n. 1, p. 131–141, 2004. ISSN 0017-0895. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0017089503001605>. Citado 5 vezes nas páginas 7, 9, 17, 53 e 56.

POINCARÉ, H. J. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, n. 13, p. 1–270, 1890. Citado na página 15.

POINCARÉ, H. J. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. [S.l.]: Gauthiers-Villars, Paris, 1892,1893,1899. v. 1-3. Citado na página 15.

TEMAM, R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Second. Springer-Verlag, New York, 1997. v. 68. xxii+648 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 68). ISBN 0-387-94866-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0645-3>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 19 e 22.

Índice