



Sofia Abelha Meirelles

PLURALISMO LÓGICO E RELAÇÕES COM A LÓGICA ATUAL

Florianópolis
2020

Sofia Abelha Meirelles

PLURALISMO LÓGICO E RELAÇÕES COM A LÓGICA ATUAL

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Filosofia pelo Curso de Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Décio Krause

Florianópolis

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Meirelles, Sofia Abelha
Pluralismo Lógico e Relações com a Lógica Atual / Sofia
Abelha Meirelles ; orientador, Décio Krause, 2020.
56 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Filosofia e Ciências Humanas, Graduação em Filosofia,
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Filosofia. 2. Pluralismo lógico. 3. Filosofia da
lógica. 4. Lógicas não-clássicas. I. Krause, Décio. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Filosofia. III. Título.

Sofia Abelha Meirelles

PLURALISMO LÓGICO E RELAÇÕES COM A LÓGICA ATUAL

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Filosofia pelo Curso de Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 8 de outubro de 2020.

Prof. Dr. Décio Krause (orientador)

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Cezar Augusto Mortari

Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Christian de Ronde

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas

Prof. Dr. Jonas Rafael Becker Arenhart

Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho aos meus avós maternos Nair e Zico, e avós paternos Hebe e Geraldo
in memoriam.

AGRADECIMENTOS

Ao pensar nestes agradecimentos me perguntei a partir de qual ponto em minha história eu deveria começar. Para não cair numa regressão muito longa, começo pelo meu nascimento. Então, primeiramente agradeço profundamente os meus pais, Terezina e Guilherme. Sou muitíssimo grata por me nutrirem de amor, por sempre terem incentivado o questionamento e autonomia em mim, por investirem em minha educação desde pequena e por possibilitarem que eu me dedicasse integralmente aos estudos, privilégio que foi crucial em meu desenvolvimento. Agradeço por me oferecerem suporte e confiança em minhas escolhas. Graças à vocês eu pude aproveitar esse importante período de minha vida e realizar conquistas que hoje são nossas, compartilhadas. À minha irmã, Isis, sou extremamente grata pelo precioso companheirismo, por me fazer rir de qualquer coisa, por apoiar minhas decisões e ter uma paciência e amor que são admiráveis.

A todos professores e professoras que participaram de minha jornada pelo saber, agradeço de todo coração. Do primário ao fim da graduação, tive diversas fontes de inspiração e aprendizado. Ao professor Décio Krause, que me orientou neste trabalho, agradeço por ter me proporcionado a liberdade de fazer uma iniciação científica com tema da minha escolha, por trazer para perto o mundo acadêmico da filosofia, por cativar minha curiosidade, por explicar apaixonadamente os conteúdos e por valorizar minhas ideias. Agradeço também ao professor Cezar Mortari por ter sido sempre muito atencioso e paciente ao me auxiliar nos estudos, por oferecer conteúdos de excepcional qualidade e lecionar de maneira inspiradora. Sou também muito grata ao Centro de Filosofia e Ciências Humanas, em especial ao Departamento de Filosofia e seu corpo docente, do qual tive o prazer de ser aluna e construir conhecimento e valores inestimáveis.

Aos meus amigos de Florianópolis, meus mais sinceros agradecimentos por terem sido uma fortaleza num lugar tão longe de casa, pelas suas palavras doces e estimulantes, por me acolherem de braços abertos e compartilharem comigo muitos dos melhores momentos de minha vida: Ana Luiza, o tal do Arthur, Brunna, Bruninho, Cristian, Inácio, Italo, Kherian, Renan, Sara, Tulio e todo “Jorge Sumiu”. Aos meus amigos reais e virtuais espalhados pelo país, agradeço por estarem sempre disponíveis para conversar, pela amizade duradoura, por me impulsionar e por todo carinho envolvido: Beatriz, Caio, Iago, Isabella e Marília. Aos meus familiares queridos que me fortaleceram e estiveram sempre dispostos a me ouvir e apoiar, agradeço imensamente.

Agradeço também pelo privilégio e experiência ímpar que a Universidade Federal de Santa Catarina me proporcionou, com seu espaço acolhedor e de natureza exuberante, pela acessibilidade dos recursos, por sua riqueza cultural, pelas oportunidades de bolsas de estudo e por proporcionar que eu tenha conhecido pessoas fascinantes. Também sou muito grata pelas equipes responsáveis pela organização do campus e seus serviços diários, como o restaurante

universitário e as bibliotecas, pelos setores administrativos, que providenciam as indispensáveis bases legais que permitem a atividade universitária, e pela excelência no ensino gratuito, público e de qualidade. Posso dizer, seguramente, que nossas universidades públicas merecem toda admiração e devem ser adequadamente valorizadas por exercer papel essencial na formação intelectual da população.

A filosofia, embora incapaz de nos dizer com certeza qual é a resposta verdadeira para as dúvidas que ela própria suscita, é capaz de sugerir diversas possibilidades que ampliam os nossos pensamentos, livrando-os da tirania do hábito. Desta maneira, embora diminua nosso sentimento de certeza sobre o que as coisas são, aumenta muito nosso conhecimento sobre o que as coisas podem ser; ela remove o dogmatismo um tanto arrogante daqueles que nunca ingressaram na região da dúvida libertadora e mantém vivo o nosso senso de espanto ao mostrar coisas familiares num aspecto não familiar.

– Os Problemas da Filosofia, Bertrand Russell

RESUMO

O recente e significativo desenvolvimento da lógica, em especial a caracterização de sistemas não-clássicos, colocou em xeque tanto a perspectiva até então majoritariamente clássica, como também a própria natureza da lógica. A principal questão colocada aqui é: podemos afirmar que diferentes sistemas lógicos, por vezes mutuamente incompatíveis, oferecem noções de consequência lógica e validade igualmente legítimas? Pluralistas respondem positivamente, e não só toleram o estudo de lógicas alternativas, como também defendem que várias delas podem ser consideradas satisfatórias para determinados domínios. Ao contrário, monistas sustentam que há apenas uma Única Lógica Verdadeira, seja ela clássica ou não. Em ambos os casos, a pergunta leva à diferentes vertentes tanto do pluralismo quanto do monismo lógico. Primeiramente, oferecemos um panorama do que se entende por lógica atualmente, ao abordar lógicas clássicas, intuicionista e paraconsistentes. Depois, apresentamos o pluralismo lógico ao destacar seus aspectos mais fundamentais e articulações mais populares.

Palavras-chave: Pluralismo lógico; Filosofia da lógica; Lógicas não-clássicas.

ABSTRACT

The recent and remarkable development of logic, especially the characterization of non-classical systems, put into question both the perspective that was mostly classical until then, as well as the very nature of logic. The main question here is: can we say that different logical systems, sometimes mutually incompatible, offer equally legitimate notions of logical consequence and validity? Logical pluralists answer positively, and not only tolerate the study of alternative logics, but they also argue that several of them can be considered satisfactory for certain domains. Conversely, monists maintain that there is only One True Logic, be it classic or not. In both cases, the question leads to different aspects of both pluralism and logical monism. First, we offer an overview of what is understood by logic at the present time, by approaching classical, intuitionist and paraconsistent logics. Then, we present logical pluralism by highlighting its most fundamental aspects and popular articulations.

Keywords: Logical pluralism; Philosophy of logic; Non-classical logics.

NOTAÇÃO E ABREVIações

sse	Se e somente se
PNC	Princípio da Não Contradição
\neg	Negação
\wedge	Conjunção
\forall	Quantificador Universal
\leftrightarrow	Bi-implicação
\vee	Disjunção
\models	Consequência semântica
\rightarrow	Implicação
$=_{def}$	Igual por definição
\vdash	Consequência sintática
ω	Letra grega 'ômega' em minúsculo: representa o menor número ordinal infinito
\leq	Menor que ou igual a
TGT	Tese Generalizada de Tarski
\nVdash	Negação da Consequência Sintática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	A NATUREZA DA LÓGICA	23
2.1	LONGA HISTÓRIA CURTA	23
2.2	O QUE É LÓGICA?	26
3	AS MÚLTIPLAS LÓGICAS	30
3.1	LÓGICAS CLÁSSICAS	30
3.1.1	PRINCÍPIOS LÓGICOS FUNDAMENTAIS	30
3.1.2	APLICAÇÕES	33
3.2	LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS	34
3.2.1	LÓGICA INTUICIONISTA	35
3.2.2	LÓGICA PARACONSISTENTE	36
4	PLURALISMO LÓGICO	41
4.1	PRELÚDIO	41
4.1.1	CONSEQUÊNCIA LÓGICA E VALIDADE	41
4.1.2	RELATIVISMO E TOLERÂNCIA	42
4.2	VERTENTES PLURALISTAS	44
4.2.1	PLURALISMO BASEADO EM CASOS	44
4.2.2	A PROPOSTA DE S. SHAPIRO	46
4.2.2.1	MUDANÇA DE SIGNIFICADO	47
4.2.3	MODALISMO	48
5	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	54

1 INTRODUÇÃO

É costumeiro o uso de expressões como “Qual a lógica disso?” ou “Isso não tem lógica nenhuma!”, mas de que lógica estamos falando? O senso comum pode nos dar a ideia imprecisa de que lógica é uma coisa só, e que se resume a uma ciência do bom raciocínio. Realmente, a disciplina engloba o estudo das inferências válidas e do que pode se chamar de “teoria da argumentação”, sendo essa inclusive uma das razões de seu nascimento. Porém, a lógica como área do conhecimento é muito mais ampla e rica do que vulgarmente se imagina.

A extensão de seus tópicos de estudo está em constante transformação, de tal modo que ora delega parte de suas questões às outras áreas, ora concebe novos campos de investigação. Alguns desses campos são: teoria da recursão e computabilidade, teoria de modelos e de provas (*model-theory* e *proof-theory*), teoria de conjuntos, lógica algébrica, entre outras.¹

Ainda outra noção incauta de lógica é a associação direta com a lógica clássica, quando na verdade poderíamos falar em “as lógicas”, sejam elas clássicas ou não, pois são muitas. Vale lembrar que, por vezes, a fim de evitar confusão entre o uso da palavra, é feita uma distinção entre “Lógica”, para se referir ao campo de conhecimento, e “lógica”, para referência aos sistemas lógicos.

O advento de uma multiplicidade de diferentes sistemas lógicos é bastante recente e nos faz repensar os princípios e fundamentos da lógica clássica. Tais sistemas alternativos, como os modais, epistêmicos, deônticos, paraconsistentes e tantos outros, trouxeram questões inevitáveis sobre a natureza da lógica: qual sua relação com o mundo externo? Qual seu propósito? Quais são seus limites de prova? O que se pode pressupor com segurança? Qual sua legitimidade?

As lógicas não-clássicas muitas vezes questionam princípios sólidos da concepção clássica, tais como o *ex falso quodlibet* (Princípio da Explosão), o Princípio da Identidade e o Princípio da Não-Contradição (PNC), os quais veremos com mais detalhes na seção 3.1.1. Porém, considerando que tais princípios estavam calcados em alguma noção de verdade – ou estão, no caso de assumir uma posição filosófica realista sobre a lógica – ou mesmo de adequabilidade, como seria possível conciliar esses sistemas divergentes? Isto é, dada a incompatibilidade entre os sistemas lógicos, de modo que não provam as mesmas coisas ou provam coisas contrárias, como escolher entre eles? Temos então um primeiro passo em direção ao tema que pretendemos discutir neste trabalho, o pluralismo lógico.

O debate veio à tona com publicações pelos pluralistas Beall & Restall (2000) e S. Shapiro (2014), contrariando a tradição monista e questionando a concepção de que a lógica é universal e *a priori*. A perspectiva monista alega haver apenas Uma Lógica Verdadeira, seja um monismo sobre lógicas clássicas, paraconsistentes ou outras; nada impede uma monista de escolher o sistema lógico que mais lhe satisfaz.² Pluralistas, por sua vez, alegam haver mais de uma lógica

¹ American Mathematical Society. **Mathscinet**, 2020. Mathematical Reviews. Disponível em: <<https://mathscinet.ams.org/msc/msc2020.html?t=03-XXbtn=Current>>.

² Graham Priest, por exemplo, é um monista lógico que defende uma lógica paraconsistente, já Stephen Read é monista sobre uma lógica de relevância (*relevant logic*).

verdadeira, ou ainda correta, adequada ou legítima; veremos que esses atributos precisam de elucidação.

O eixo da discussão, tradicionalmente voltado à noção de verdade lógica, e de considerável cunho metafísico, passa a se direcionar para as concepções de consequência lógica e validade. Assim, reformulamos a questão inicial para algo como: é possível que distintos sistemas lógicos, até quando mutuamente incompatíveis, possam fornecer noções de consequência lógica e validade, por vezes intercambiáveis, de forma igualmente adequada para diferentes domínios?

Entram em jogo conceitos como compatibilidade, domínios e adequação. Do ponto de vista de lógica como teoria da validade, a discordância se daria, principalmente, pelo conflito entre quais *formas* de argumentos são válidas ou não nos diferentes sistemas. Quanto aos domínios, queremos dizer algo análogo ao que ocorre na Física, em que para corpos celestes, como planetas e galáxias, a teoria da relatividade geral é utilizada, já para objetos como átomos opta-se pela mecânica quântica.³ O cenário que nos interessa aqui é que essas teorias físicas possuem incompatibilidades entre si, mas isoladamente não dariam conta de explicar satisfatoriamente os mesmos fenômenos que a outra explica.

A fim de expor uma compreensão razoável do que se entende por sistemas lógicos, será elementar explanar como e por que são construídos, o que os compõem e caracterizam como tal, como as técnicas e métodos modernos foram obtidos e qual a influência da lógica clássica no modo como enxergamos até mesmo as lógicas alternativas. Nisto, decidimos dar foco às lógicas intuicionista e paraconsistente. A intuicionista porque representa uma maior ruptura com a lógica clássica, baseada numa filosofia da matemática incomum. Quanto à paraconsistente, por seus recursos que nos auxiliam a pensar em inconsistências e também por suas abundantes aplicações.

Oferecer esse panorama é vital para abordagem das questões de multiplicidade lógica. Isto significa esclarecer alguns fundamentos lógicos, delimitar o que é passível de formalização, analisar que critérios temos à disposição, bem como quais são os propósitos e motivações dos variados sistemas lógicos e por que é relevante estudá-los. Nesse sentido, uma pitada histórica auxiliará a contextualização dos debates levantados e da origem das lógicas não-clássicas.

Ademais, é desejável promover uma desmistificação tanto da disciplina lógica quanto de suas partes clássicas e princípios, muitas vezes tomados como imprescindíveis. Vale notar, contudo, que não há de forma alguma uma recusa ou desprezo pelas lógicas clássicas, cujo valor é inegável. Nosso parecer é apenas de que, além destes sistemas clássicos, existem outros que são tão válidos quanto e, por vezes, melhor capacitados para acomodar as necessidades de diferentes domínios.

Por fim, o pluralismo lógico será explorado por meio de diferentes lentes. Primeiro, ao estabelecer algumas bases da discussão a partir da explicação das relações de consequência lógica e validade, e depois ao investigar as sutilezas envolvidas em sua concepção, relacionando-o

³ Apesar de ser possível usar mecânica quântica em âmbitos macroscópicos, e relatividade geral em âmbitos microscópicos.

com as noções de tolerância e de relativismo. Apresentamos também algumas subdivisões do pluralismo: no que concerne seu escopo, restritivista ou não; seu teor, seja puro, teórico ou canônico; e seus tipos, seja pela abordagem linguística, por estudo de casos, por referência aos termos lógicos, por modelos e outras. Escolhemos abordar as concepções pluralistas de J.C. Beall e G. Restall, com o pluralismo baseado em casos; as análises de S. Shapiro e as relações que estabelece com as linguagens formais; e, para encerrar, apresentamos o modalismo proposto por O. Bueno e S. Shalkowski, tratamento alternativo às anteriores.

2 A NATUREZA DA LÓGICA

2.1 LONGA HISTÓRIA CURTA

Usualmente, o surgimento da lógica como grande área do conhecimento é atribuído a Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), até onde sabemos, em seu conjunto de obras, o *Organon*, em especial nos livros *Primeiros Analíticos* e *Tópicos*. As condições para demonstrações lógicas, de premissas verdadeiras e argumentos válidos, já aparecem bem formadas nos *Primeiros Analíticos* de Aristóteles, com a distinção entre raciocínio apodítico (ou demonstrativo) e raciocínio dialético. O primeiro trata as premissas como verdadeiras e necessárias, e seria um argumento didático para Aristóteles, usado como um meio educacional. Foi estabelecido por Zenão na filosofia e muito empregado em discussões metafísicas; faz uso do *reductio ad impossibile*¹ como método de argumentação, e exerceu importante função no progresso da lógica como conhecemos hoje. Já o raciocínio dialético se apresenta mais como uma discussão das premissas, para só então verificar quais conclusões se seguem, de tal modo que as premissas não são dadas como necessárias nem verdadeiras de início, e o argumento é discutido como um todo.

A palavra ‘dialética’ é de grande relevância histórica, tendo em vista que foi um dos primeiros termos técnicos usados para se falar em lógica. Seu significado vem do verbo grego *dialektiké* (dialogar), e são tipos de exposição muito presentes nas obras de Platão. Poderíamos dizer, nesse sentido, que a dialética é um processo de inferências, onde se considera uma ou mais hipóteses e delas se tiram conclusões.

É preciso notar que estamos olhando o desenvolvimento da lógica com foco no Ocidente.² Contudo, podemos supor que o estudo inicial de lógica no Oriente, especialmente pelos árabes e indianos, foram significativos, mas as fontes disponíveis dos séculos XII ao IX – respectivos ao período da Grécia Antiga – são em geral escassas e dependem de traduções, ou seja, não temos os trabalhos originais.

Ademais, além de Aristóteles e sua escola peripatética, houverem outras influências na Antiguidade. Os poucos registros históricos que restaram sugerem que havia forte presença da lógica estoico-megárica, que contribuiu para descoberta de diferentes tipos de paradoxos, como o Paradoxo do Mentiroso³, deu o pontapé na discussão sobre condicionais (se isto, então aquilo) e ampliou o estudo de conceitos modais sobre o que seria possível ou necessário. Segundo Kneale & Kneale (1962), tanto Diógenes Laércio (século III) quanto Clemente de Alexandria (150 d.C. – 215 d.C) apontam Crísipo de Solos (280 a.C. — 208 a.C.) como principal expoente da lógica na Antiguidade. Esses registros podem indicar que a doutrina peripatética não foi a única, nem a principal, forma de se pensar, na Antiguidade, o que hoje chamamos de lógica.

O interesse pelo estudo da lógica na Idade Média ocidental (séculos V – XV), especial-

¹ Método de supor como hipótese a negação do que queremos provar, não-A, até encontrarmos uma contradição, B e não-B, que permite concluirmos o que inicialmente queríamos provar, A.

² Ainda que essa divisão do mundo entre Oriente e Ocidente seja historiograficamente questionável.

³ O paradoxo surge com frases do tipo “Esta frase é falsa”, que se for mesmo falsa, então diz a verdade e, logo, seria verdadeira; ao contrário, se fosse verdadeira, então estaria dizendo uma mentira e, logo, seria falsa.

mente em seus estágios iniciais, decaiu significativamente em comparação com a Antiguidade Clássica. As obras filosóficas gregas consideradas pagãs pelos cristãos, particularmente de Aristóteles e dos estoicos, demoraram a circular em sua totalidade, visto que muitas não possuíam tradução. Assim, ainda na fase de transição do fim da Antiguidade para Alta Idade Média, o valor da lógica era dado principalmente pela retórica e dialética, enfatizada nas traduções — em especial de lógica estoica — e obras de Cícero (106—43 a.C.). Já a influência de Aristóteles no início da Idade Média foi graças às traduções das *Categorias* e do *De Interpretatione* feitas por Boécio (477 – 524 d.C.), que foi considerado um notável transmissor da cultura antiga clássica.

É importante expor que o rótulo renascentista “Idade das Trevas” é bastante problemático por evocar uma visão estigmatizada do medievo, numa tentativa de apagar um longo período histórico e “reativar” outra época, no caso a Antiguidade Clássica, considerada próspera. Ademais, evoca uma noção defeituosa evolutiva da história, de que é linear e deve caminhar sempre para o progresso. Isto posto, houve o esquecimento de importantes obras e avanços da lógica medieval, como por Boécio, Cláudio Galeno (129 – 210 d.C.), Pedro Abelardo (1079 – 1142), Anselmo de Cantuária (1033 – 1109 d.C.), Guilherme de Sherwood (1200 – 1272), Tomás de Aquino (1225 – 1274 d.C.), Pseudo-Scotus (1265 – 1308 d.C.), Guilherme de Ockham (1285 – 1347 d.C.), entre outros.

A transição para Idade Moderna não foi explícita, e o estudo da lógica tomou um rumo diferente, como aponta Kneale & Kneale:

Quem, a não ser uma pessoa insensível, dedicaria a sua vida às *proprietates terminorum* quando podia ler o poema recém descoberto de Lucrécio *De Rerum Natura* ou aprender Grego e estudar Platão? [...] os homens do Renascimento adquiriram a atitude Romana perante a investigação acadêmica, com o resultado que a lógica genuína foi desprezada e substituída pela retórica e os livros que pretendiam ser acerca de lógica tinham muitas vezes tantas citações de Cícero como de Aristóteles. (KNEALE *et al.*, 1962, p. 305)

O lado formal da lógica, que foi muito presente em suas origens, ficou de lado. A matemática seguia uma via alternativa como ciência independente, e seu desenvolvimento foi marcante na filosofia, por exemplo, dentre tantos, a influência no racionalismo de René Descartes (1596 – 1650). Veremos na seção seguinte outros filósofos imprescindíveis desse período, como Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716) e Immanuel Kant (1724 – 1804).

Ao adotar uma perspectiva mais abrangente da lógica como estudo dos princípios de inferências válidas, podemos dizer que esta disciplina surgiu muito antes de Aristóteles, já que a importância de fazer tais inferências pertence também ao campo da linguagem natural. Com efeito, existe um desafio histórico em dizer quando a lógica surgiu propriamente, e quais desenvolvimentos vieram primeiro, dada a falta de evidência histórica e a evolução do entendimento do que é lógica. Usualmente, é dito que a lógica tradicional se originou de motivações sobretudo metafísicas, oriundas de Platão (428/427 a.C. – 348/347 a.C.), e teria sido melhor organizada por Aristóteles, especialmente com sua teoria do silogismo.

Ainda assim, mesmo a concepção aristotélica sobre a lógica está intimamente relacionada com elementos metafísicos. O início de uma formalização mais próxima do que se tem hoje se

deu apenas em 1854, com a obra de George Boole (1815 – 1864) intitulada *Investigação sobre as leis do pensamento*. Depois disso, o desenvolvimento da lógica contemporânea foi mais intenso, com obras como a *Conceitografia {Begriffsschrift}* de Gottlob Frege (1848 – 1925) que, com o seu projeto de reduzir a aritmética à lógica (Logicismo), influenciou a difusão de uma lógica simbólica muito mais próxima da matemática do que da lógica tradicional aristotélica.

Józef M. Bochenski (1902 – 1995) divide a lógica matemática em quatro principais períodos: (1) Pré-histórico, que vai de Leibniz até desenvolvimentos pontuais sem o surgimento de uma escola; (2) Período Booleano, onde os métodos matemáticos deixam de ser objeto de estudo e passam a ser aplicados na lógica; (3) De *Begriffsschrift* até o *Principia Mathematica* de Alfred N. Whitehead (1861 – 1947) e Bertrand Russell (1872 – 1970), onde houve uma busca pelos fundamentos da matemática, com contribuições notórias também de Charles S. Peirce (1838-1914) e Giuseppe Peano (1858 – 1932); e por fim (4) o atual período pós *Principia Mathematica*, em que há progresso da metalógica, com avanços pela metodologia de Alfred Tarski (1901 – 1983) e sua contribuição com Kurt Gödel (1906 – 1978) para uma teoria semântica da verdade, e com o *The Logical Syntax of Language* de Rudolf Carnap (1891 – 1970). (BOCHENSKI, 1961)

Uma certa independência da lógica em relação à metafísica se deu mais notoriamente entre o final do século XIX e começo do século XX, com o surgimento das lógicas não clássicas, como as lógicas modais estudadas por Ruth Barcan (1921-2012) e Clarence Irving Lewis (1883-1964). Pouco antes disso, no início do século XIX, o desenvolvimento da matemática também passou por uma transformação profunda: a criação de geometrias não-euclidianas, que derogavam os princípios clássicos euclidianos, em grande parte como um exercício conceitual, e foi uma grande influência para criação dos sistemas lógicos alternativos. Essas transformações não se deram da noite para o dia, é claro. Sobre a própria lógica modal é possível dizer que já havia indícios em Aristóteles em *Sobre a Interpretação e Primeiros Analíticos*, e na matemática os questionamentos já existiam desde a publicação de *Os Elementos*, por Euclides de Alexandria (300 a.C.).

Essa tendência abriu espaço para discussão de uma pluralidade de lógicas, sem grandes preocupações em incluir metafísica e, por vezes, uma tentativa de eliminá-la, como o positivismo lógico oriundo do Círculo de Viena. Em suma, houve um aumento do escopo da lógica e uma nova compreensão acerca do que são sistemas lógicos, e essa mudança é constante. Podemos relacionar essa compreensão com os aspectos da racionalidade científica apontados por Da Costa:

[...] ela é histórica: o que hoje é racional aceitar, amanhã talvez não o seja. A razão e a racionalidade (científica) se organizam na medida em que sua história se desenrola. [...] ela é dialética: dialetizar suas conquistas e seus princípios, eis um dos traços marcantes da razão, quando cientificamente orientada. Finalmente, na história da razão se depara, com toda clareza, com determinado progresso. Essa história não é apenas encadeamento de fatos, mas sucessão de etapas, cada uma das quais se afigura mais rica do que as precedentes [...]. Isto quer dizer, simplesmente, que a razão não é estática e que na sua dinâmica se encontra o germe do aperfeiçoamento. (DA COSTA, 1980, p. 15-16)

E por que fazer lógica? Por um lado, o esforço parece ser motivado pela vontade de evitar a ambiguidade e imprecisão da linguagem natural, de formalizar o pensamento a fim de facilitar a identificação de inferências corretas, de identificar padrões de validade, uma idealização da razão. Porém, isso tem um custo: nem tudo pode ser expressado pela lógica. Em geral, tratam-se apenas de sentenças declarativas como “Coelhos não são roedores”, deixando de lado sentenças imperativas do tipo “Vá beber água!”, e interrogativas, do tipo “Por que há algo em vez de nada?”, visto que seria estranho atribuir verdade ou falsidade a sentenças assim. Assim, a lógica nesse sentido seria o estudo do que se chama de proposições⁴, declarações que podem ser valoradas, daí o nome lógica proposicional. Entretanto, vale mencionar que existem tentativas de adequar esses outros tipos de sentença, como com as lógicas imperativas e erotéticas (análise lógica de perguntas).

As motivações ficaram mais rebuscadas ao longo do tempo, e temos hoje, por exemplo: lógicas *fuzzy*, booleanas e PROLOG (Programação Lógica) aplicadas na computação, com utilidade também em inteligência artificial; lógicas epistêmicas, para tratar questões relativas ao conhecimento, que abordam conjuntos de crenças e saberes; lógicas temporais, para melhor compreender como tratar proposições indexadas num tempo, e que também tem aplicações na computação; entre outras⁵. Para além do mérito de aplicação, também se estudam sistemas sem uma utilidade aparente ou atual, como por vezes ocorre na matemática, em que se faz uma aposta no valor intrínseco do conhecimento.

2.2 O QUE É LÓGICA?

Tradicionalmente, uma lógica é concebida como uma linguagem artificial, ou formal. Essa é uma proposta feita inicialmente pelo filósofo matemático alemão Gottfried W. Leibniz, que a princípio almejava a ambiciosa construção de uma *characteristica universalis*, linguagem formal universal para expressar conceitos não só da filosofia, como também da matemática e outras ciências. Apesar do termo “lógica formal” ser muito associado à lógica contemporânea, este foi cunhado por Kant e atualmente é utilizado em diversos contextos para significar coisas diferentes. (SCHOLZ, 1931)

Então, como se obtém uma linguagem formal? Primeiramente, é preciso definir quais símbolos utilizar e como combiná-los da forma correta, ou seja, indicar um **alfabeto** e uma **gramática** que permitirá a criação de *expressões bem formadas* pelos termos léxicos. Mesmo linguagens naturais, como o português, necessitam dessas prescrições, apesar de haver um maior grau de liberdade na criação de palavras. Por exemplo, “Adoro batata” é uma expressão bem formada do português, enquanto “Aoodr atabtta” não é.

Porém, só isso não é suficiente. É preciso também elaborar um aparato dedutivo: **axiomas**, que são expressões consideradas verdadeiras de antemão, sem necessitar de demonstração, e

⁴ O termo ‘proposições’ é muito disputado, mas aqui adotamos a ideia de que é o conteúdo das sentenças, aquilo do qual se pode afirmar coisas sobre, como dizer se é verdadeiro ou falso.

⁵ Ver Banerjee, Mohua, and Shankara Narayanan Krishna. “Logic and Its Applications”, 2011.

regras de inferência, que irão dar origem, através de demonstrações, aos teoremas. Essa parte sintática também pode ser bem representada de outras formas, como pela álgebra, como sugere Newton da Costa (2015), em que o sistema lógico seria um par ordenado de um conjunto das fórmulas bem formadas e de outro conjunto de teorias que é subconjunto do primeiro.

Outro componente fundamental de uma lógica é sua semântica, grosso modo, como interpretar as fórmulas analisadas e estabelecer relações de significado para as expressões da linguagem. Uma das mais populares abordagens semânticas é pela teoria de modelos usando as condições de verdade de Tarski com o chamado Esquema T:

“A” é verdade se e somente se A

sendo A uma sentença da linguagem escolhida, como (no exemplo habitual): “a neve é branca” sse (se e somente se) a neve é branca. Essa noção requer o uso de diferentes níveis linguísticos, a fim de evitar paradoxos semânticos indesejáveis, são eles: linguagem objeto, da qual se fala sobre, e metalinguagem, usada para falar sobre a linguagem objeto. Os símbolos lógicos, como operadores de negação, implicação, conjunção e disjunção já possuem significado convencional, de modo que a interpretação faltante é em relação aos símbolos não-lógicos, letras sentenciais. A noção de validade nesses casos demanda que se examinem todos os casos possíveis em que premissas são verdadeiras, e isso vai além dos fatos de nosso mundo, de modo que torna-se necessário o uso de uma interpretação formal, a qual geralmente pressupõe teoria dos conjuntos como metateoria. A metateoria também será um sistema formal, mas não necessariamente o mesmo sistema da teoria, a não ser que se adote uma concepção monista.

Vale mencionar que existem muitas outras abordagens semânticas. Apesar de essencialmente sintática, uma alternativa é a teoria de provas (*proof-theoretic*), em que o significado de um termo léxico (que inclui os símbolos da linguagem, tanto lógicos como não-lógicos) é dado pelo seu papel inferencial, em vez de noções de verdade. Uma das coisas em comum em ambas é que a noção de validade está ligada ao significado da terminologia lógica. Também há a semântica de Kripke, ou semântica relacional, que se adequa a algumas lógicas não-clássicas, primeiramente formulada para lógicas modais e depois adaptada para lógica intuicionista. Sua criação, por volta da década de 60, foi muito bem recebida, dado que havia pouco fundamento para uma semântica formal de lógicas não-clássicas até então.

Uma noção muito utilizada em semânticas é a de mundos possíveis: são formas de pensar nos diferentes jeitos em como o mundo poderia ser, estabelecendo relações de acessibilidade entre estas diferentes configurações possíveis e usando estas para definir os operadores de necessidade e possibilidade, que funcionam como quantificadores restritos ao domínio de mundos.

Dado o aspecto sintático e semântico das lógicas, conceitos importantes que aparecem são de consistência, completude, correção e trivialidade. A correção ocorre quando um conjunto de fórmulas qualquer, Δ , deriva apenas suas fórmulas válidas, ou tautologias. Já a trivialidade se dá quando toda e qualquer fórmula do conjunto é derivada. E quando Δ não deriva fórmulas contraditórias, então é consistente.

Podemos formular essa noção utilizando (1) termos semânticos: é consistente (ou satisfatível) sse possui um modelo ou interpretação em que todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras; ou (2) sintáticos: é consistente sse para qualquer fórmula α do conjunto, isto é, temos uma dedução apenas para α ou para $\neg\alpha$, mas não para as duas. Quando (1) e (2) são equivalentes, como no cálculo proposicional clássico, temos a completude. Ou seja, um sistema é completo quando as consequências semânticas também são consequências sintáticas. Um importante resultado sobre essas definições é o Teorema de Correção e Completude da lógica proposicional, considerando Δ um conjunto de fórmulas:

$$\Delta \vdash \alpha \text{ sse } \Delta \models \alpha$$

Assim, todas tautologias são válidas e apenas elas são provadas.

A seguir, abordaremos alguns dos mais importantes princípios das lógicas clássicas, intuicionista e paraconsistentes. A escolha dessas três, além das razões citadas na Introdução, também se dá pela tentativa de expor os três tipos de lógica que o pluralismo de Beall & Restall (2006) tratam: (1) completos e consistentes, (2) incompletos e consistentes e (3) completos e inconsistentes, em que as lógicas mencionadas se encaixam respectivamente.

3 AS MÚLTIPLAS LÓGICAS

Frank:

Mas obviamente eu sei que [o livro] ou é vermelho ou não é, logo se eu não acredito que seja, então devo acreditar que não seja.

Epistemologista:

De jeito nenhum. Eu acredito que ou Júpiter tem vida ou não tem. Mas eu não acredito que sim, nem acredito que não. Não tenho evidências nem de uma nem da outra. (SMULLYAN, 1981, tradução nossa)

3.1 LÓGICAS CLÁSSICAS

As lógicas clássicas são bastante reconhecidas por seu papel como boa guia em inferências argumentativas, uma das razões pelas quais muitos autores atualmente ainda a defendam como a Única Lógica Verdadeira. Podemos caracteriza-la como o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais ($CQC_f^=$), que engloba os cálculos proposicionais, de predicados monádicos e predicados gerais de primeira ordem, cálculos de primeira ordem com identidade e de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais. Quanto aos cálculos clássicos de segunda ordem e de ordens superiores, há certa polêmica, visto que deixam de ser completos. Uma lógica de segunda ordem seria quantificar, além dos indivíduos, predicados dos indivíduos e, conforme a ordem da lógica aumenta, se quantifica sobre os predicados dos predicados de indivíduos e assim por diante.

3.1.1 PRINCÍPIOS LÓGICOS FUNDAMENTAIS

A seguir apresentamos alguns dos princípios lógicos fundamentais da LPC (Lógica Proposicional Clássica), dos quais precisaremos ter mente ao longo deste trabalho.

Princípio da Não Contradição (PNC): a noção semântica é de que uma proposição não pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa. A formulação usa “ α ” como uma variável metalinguística que faz parte de nossa metalinguagem, e pode ser substituída por qualquer fórmula bem formada da linguagem. Inclusive essa é a diferença entre provar¹ teoremas de um sistema, os quais utilizam os símbolos do sistema em questão, e provar metateoremas, os quais utilizam outros símbolos que generalizam o que pode ser substituído, e geralmente uma formulação metalinguística é chamada de esquema, ao invés de teorema. Sendo assim:

$$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \quad (1)$$

Esse foi considerado por Aristóteles o mais seguro dos princípios, verdadeiro e indemonstrável, mas tal ideia recebeu e ainda recebe contestações, além que há indícios, levando

¹ “Prova” é uma sequência finita de fórmulas, em que são ou axiomas do sistema ou consequências da(s) fórmula(s) anterior(es) da sequência a partir de uma regra de inferência.

em conta o cenário político da Grécia no fim da Antiguidade e o desejo de alavancar uma nova ciência, de que mesmo Aristóteles tivesse repensado sobre tal condição, dada suas tentativas em tentar demonstrar tal princípio, chamadas demonstrações elênticas e apagógicas, que podem ser encontradas na sua obra *Metafísica*. Para mérito de exemplo, eis a primeira delas que esboça o PNC:

Portanto, se existe algo do qual se pode dizer verdadeiramente que é “homem”, é necessário que esse algo seja “animal bípede” (de fato, estabelecemos que esse era o significado de homem); e se isso é necessário, não é possível que esse algo não seja um animal bípede (com efeito, necessário significa não poder ser). Portanto, não é possível que seja verdade, ao mesmo tempo, dizer de algo que é “homem” e que “não é homem”. (REALE, 2002, Livro Γ, 1006b28-35)

Jan Łukasiewicz (1878-1956) foi um desses críticos ao entendimento aristotélico do PNC, mas mesmo assim reconheceu a efetiva importância que tal defesa de Aristóteles exerceu em tempos posteriores:

A negação da lei da contradição teria escancarado as portas à toda falsidade e asfixiado a jovem e florescente ciência no seu primeiro germe de vida. (LUKASIEWICZ, 2005, p. 22)

Fica então propício dizer aqui que as críticas aos sistemas clássicos e a perspectiva pluralista não pretendem destruir nem enfraquecer os fundamentos da lógica clássica, mas pode aceitá-la como uma das lógicas legítimas, e também tais críticas fazem parte da construção de novos conhecimentos, contribuindo para o progresso do estudo da lógica.

Princípio de Identidade: garante que todo elemento seja idêntico a si mesmo. Geralmente se faz essa afirmação com base nas propriedades dos elementos, de modo que não é possível que dois elementos sejam diferentes se possuem as mesmas propriedades, isto é, se são idênticos devem ser um só.

$$\alpha \rightarrow \alpha \tag{2}$$

$$\forall x (x = x)^2$$

Vale notar que esses princípios possuem diversas formulações, até mesmo não equivalentes, seja utilizando quantificadores, propriedades ou proposições, mas a ideia central é a de uma relação que cada elemento tem apenas consigo mesmo, e com nada mais.

A relação que o Princípio da Identidade exprime é binária, e cumpre algumas propriedades: **reflexividade**, isto é, o elemento deve se relacionar com si mesmo; **transitiva**, se α é idêntico a β , e β é idêntico a γ , então α é idêntico a γ ; e **simétrica**, se α se relaciona com β , β se relaciona com α .³ É comum a confusão de associar identidade apenas à uma relação reflexiva, o

² Considere x uma metavariable para variáveis individuais.

³ Considere α , β e γ metavariables para fórmulas.

que apesar de necessário, não é suficiente. Assim também essas três propriedades podem não ser suficientes, apesar de necessárias.

Uma célebre formulação é a lei de Leibniz do Princípio de Indiscernibilidade dos Idênticos: se dois elementos x e y são idênticos, então tudo que vale para x deve valer para y , e vice-versa, logo possuem as mesmas propriedades. A lei conversas, da identidade dos indiscerníveis, diz que se tudo que vale para x também vale para y , então x é igual a y . Entretanto, a lei de Leibniz provoca certa controvérsia, seja pela circularidade, pela simetria ou pelo confusão com substitutividade. Esta última é a ideia de que considerando que x é igual a y , então caso y seja substituído por qualquer coisa, a verdade será mantida, isto é, seria *salva veritate*, o que é geralmente considerado falso, vide *Sentido e Referência* de G. Frege, e *Da Denotação* de B. Russell, onde são dados alguns contraexemplos para noção de substitutividade, considerando que o significado de uma proposição não é sua extensão.

Uma definição mais rigorosa dessa lei pode ser feita em lógica de segunda ordem, “em que a quantificação de todas as propriedades (não só aquelas para as quais a linguagem contém predicados) é possível” (NOONAN; CURTIS, 2018, tradução nossa), de modo que teríamos:

$$\forall x \forall y \forall P ((P(x) \leftrightarrow P(y)) \leftrightarrow x = y) \quad (3)$$

considerando P uma variável para propriedades de indivíduos, e x, y como variáveis individuais. Essa fórmula expressa que se todas as propriedades de x são também de y , e todas as propriedades de y são também de x , logo, x e y são idênticos, e vice-versa.

Princípio do Terceiro Excluído: garante que considerando uma proposição e sua negação, uma das duas deve ser verdadeira.

$$\alpha \vee \neg \alpha \quad (4)$$

Um dos grandes desafios enfrentados por essa lei é a de sentenças das quais não sabemos sobre a verdade ou falsidade, como a hipótese de Riemann, ou mesmo proposições de futuros contingentes. Em geral, esta lei está associada à provas por redução ao absurdo, em que ao pressupor a negação de uma proposição e encontrar uma falsidade, se deriva a negação da negação da proposição que, de acordo com o Princípio da Dupla Negação se infere a verdade da proposição inicial.

$$\text{Dupla Negação} : \alpha \leftrightarrow \neg \neg \alpha \quad (5)$$

É importante não confundi-la com o Princípio da Bivalência, em que toda proposição é verdadeira ou falsa. Basicamente, o que conta nesse caso é como a valoração da lógica é feita, isto é, se existem ou não valores de verdade além do verdadeiro e falso.

Os princípios acima expostos são considerados os mais fundamentais e os quais geralmente recebem mais atenção, porém a lógica clássica ainda assume muitas outras tautologias

importantes. Ao longo desse trabalho também faremos referência ao **Princípio da Explosão ou Lei de Scotus**:

$$\alpha, \neg\alpha \models \beta \quad (6)$$

$$\text{OU } \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\text{OU } (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$$

etc

em que de duas fórmulas contraditórias, o sistema trivializa / colapsa, de modo a derivar qualquer outra fórmula da linguagem.

3.1.2 APLICAÇÕES

A lógica clássica tem um escopo de aplicação muito vasto e, em geral, seu sucesso como teoria normativa (sobre como devemos raciocinar) é usado em sua defesa. As falácias informais, como *ad hominem*, petição de princípio, generalizações apressadas, entre muitas outras, podem ser úteis para identificarmos falhas de argumentação em nosso cotidiano e, com um estudo aprofundado do direito, também se mostram valiosas para raciocínios jurídicos e questões éticas. Entretanto, se esses usos correspondem ou não a uma realidade ou verdade *per se* não é sabido e, para tal discussão, precisaríamos esclarecer o que é verdade ou realidade. Assim, por mais popular que a lógica clássica seja, nada garante que é certo assumi-la em *todas* as circunstâncias.

O uso da lógica para computação é bastante disseminado, sendo inclusive uma disciplina obrigatória para estudantes da área, o que faz sentido ao lembrarmos que as origens da lógica clássica como entendemos hoje remete a G. Boole e sua lógica booleana. Nesse sistema, temos dois valores de verdade: falso ou verdadeiro, ou 0 e 1, que representam os bits (dígitos binários, *binary digits*), unidades básicas de informação utilizadas também em teoria da informação. Vale mencionar também a linguagem de programação PROLOG, embasada na lógica de primeira ordem, que hoje em dia é comercializável, sendo muito utilizada em análise de dados, prova de teoremas, criação de interfaces gráficas, etc, além de ter um importante papel em inteligência artificial.

No caso de considerar a Teoria de Conjuntos como parte da lógica clássica, tem-se ainda mais aplicações para citar, principalmente sobre sua fundamentação em sistemas matemáticos, como é o caso da teoria de Zermelo-Fraenkel (ZF) com ou sem o Axioma da Escolha (+C do inglês *choice*). Nesse sentido, a filosofia da ciência também encontra diversos usos para lógica, clássica ou não, pelo uso do método axiomático, o qual busca estabelecer (i) conceitos primitivos, (ii) conceitos derivados, (iii) proposições primitivas (axiomas/postulados, quando essa distinção fizer sentido) e (iv) proposições derivadas ou teoremas obtidos por dedução (demonstração). A caracterização desse método se deu a partir do século XX e aplica-se, via de regra, a uma disciplina ou a um campo do conhecimento já desenvolvido, apesar de poder ser utilizado de modo heurístico (como processo de criação). Busca-se pelo destaque de alguns conceitos

considerados básicos (i) para a disciplina a ser axiomatizada e outros conceitos que podem ser introduzidos por (ii) definição a partir dos primitivos.

Por exemplo, a geometria euclidiana pode ser formulada por (i) conceitos primitivos como ponto, reta, plano e (ii) derivados como ângulo, retas paralelas, etc. Vale citar que, em 1899, David Hilbert (1862-1943) fornece a primeira axiomatização moderna da geometria euclidiana. Ainda outra formulação poderia ser (i) conceitos primitivos como ponto e movimento e (ii) conceitos derivados como reta e plano. Aristóteles destacou os papéis lógicos e epistemológicos dos axiomas: quanto aos aspectos lógicos, os axiomas devem nos fornecer (via de demonstração) os teoremas da teoria. Já quanto aos aspectos epistemológicos, os axiomas devem ser verdadeiros (evidência). Por fim, a disciplina axiomatizada progride dedutivamente (precisa de uma lógica) obtendo-se os seus teoremas, que são proposições que podem ser demonstradas a partir dos axiomas ou de outros teoremas já demonstrados. Importante notar, porém, que a cientista não pratica inferências unicamente de forma dedutiva. Por exemplo, há inferências indutivas relevantes, tais como inferência estatística, por analogia, por enumeração simples, raciocínios não monotônicos em geral, abdução, entre outros.

Para encerrar esta seção, gostaríamos de notar que, apesar das aplicações do conhecimento serem fascinantes, não devem nos servir como limite. Isto é, devemos buscar conhecimento pelo conhecimento, independentemente de uma aplicação. Como exposto por Henri Poincaré (1854 – 1912):

[...]

*et proper vitam vivendi perdere causas.*⁴*

Aliás, uma ciência unicamente feita tendo em vista aplicações é impossível; as verdades só são fecundas se forem ligadas umas às outras. Se nos prendemos somente àquelas das quais se espera um resultado imediato, faltarão os elos intermediários, e não haverá mais cadeia. (POINCARÉ; MARTINS, 2021, p. 89)

3.2 LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS

Para fins educativos, usualmente se divide as lógicas clássicas entre complementares (extraclássica ou ampliadas) e anticlássicas (heterodoxas ou rivais). O primeiro tipo inclui aqueles sistemas que buscam ampliar a lógica clássica ao adicionar novos operadores e/ou princípios; é o caso da lógica deôntica que adiciona os operadores intensionais (que não são funções de verdade) de obrigatoriedade. Inclui também lógicas temporais, epistêmicas, modais e outras. Já o segundo grupo parece colocar uma objeção mais forte à lógica clássica, pois é caracterizado por negá-la ao recusar certos princípios, como é o caso de lógicas polivalentes, que adicionam valores de verdade, ou a lógica intuicionista ou paraconsistente (que veremos com mais detalhes), ou ainda lógicas relevantes (*relevant logic*) e muitas outras. Entretanto, essa distinção não é absoluta, pode ser o caso de um novo sistema tanto adicionar como excluir princípios da lógica clássica, tudo dependerá de seus objetivos.

⁴ * E por causa da vida perdem-se as razões de viver. (N. da T.) (2021)

A seguir, apresentaremos com mais detalhes apenas as lógicas intuicionista e paraconsistente, visto que não é o propósito se alongar em vários sistemas lógicos específicos. As motivações para sistemas não-clássicos são muitas, para citar algumas: acomodar futuros contingentes, melhor interpretar as noções de identidade e indistinguibilidade em mecânica quântica, evitar e/ou solucionar paradoxos semânticos, impedir termos sem denotação, acomodar visões dialeteístas, a descoberta de geometrias não-euclidianas, entre outras que serão citadas ao longo do trabalho.

3.2.1 LÓGICA INTUICIONISTA

A lógica intuicionista propõe uma forte ruptura com a lógica clássica não apenas em termos de princípios e teoremas válidos, mas em toda sua concepção e interpretação das ligações proposicionais e quantificadores. Foi introduzida por Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) no início do século XX e formalizada por Arend Heyting (1898-1980). É por vezes considerada como fundamentação para a matemática construtiva, já que a ideia central é de falar de objetos matemáticos que possuem um método para serem “construídos”. Assim, considera a matemática como anterior e independente da lógica, ao invés de ser fundamentada nela, como pretendia o Logicismo. De modo simples, intuicionistas pressupõem que a matemática é inventada e, logo, é uma atividade de pensamento de modo que suas construções são mentais. Desse modo, as linguagens, mesmo as formais, são vistas como mera ferramenta de comunicação. Nas palavras de Heyting:

Se realmente a formalização da linguagem é a tendência da ciência, então a matemática intuicionista não pertence à ciência neste sentido da palavra. É antes um fenômeno da vida, uma atividade natural do homem, que por sua vez está aberta ao estudo por métodos científicos. (HEYTING, 1966, p. 9, tradução nossa)

Também, é claro, difere do platonismo, corrente que alega que a matemática tem existência independente e suas propriedades e princípios estão sendo descobertos. Então, os objetos da lógica intuicionista, sendo “construções mentais”, modificam drasticamente o significado dos símbolos lógicos e métodos de prova. A negação intuicionista passa a significar que existe uma forma para negar uma dada proposição e, caso não tenha, nada se diz sobre: não é verdadeira, nem falsa. Por essa razão, o Princípio do Terceiro Excluído e o Princípio da Dupla Negação não valem. Dizer que de duas proposições quaisquer contraditórias, uma é verdadeira, seria dizer que todas proposições possuem método de construção, visto que para afirmar ou negar uma proposição é necessário apresentar uma construção.

Colocado de outra forma, se tais princípios fossem válidos teria de haver uma solução para todo problema matemático, ideia rejeitada por Brouwer e que, inclusive, foi considerada uma antecipação do teorema da incompletude de K. Gödel formalizado anos depois, na década de 30. Posteriores desenvolvimentos influenciados pela lógica intuicionista foram feitos também

por Gödel, I. Johansson (1904-1987), G. Griss (1898-1953) e G. Gentzen (1909-1945). Este último possibilitou o método de tablôs semânticos ao formular seu cálculo de seqüentes.

As provas por redução ao absurdo são adaptadas para reduções intuicionistas, já que não é possível oferecer uma construção da proposição que se quer provar, visto que a eliminação da dupla negação ($\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$) deixa de valer. Já o PNC e a Lei de Scotus são válidos, de modo que contradições como $\alpha \wedge \neg\alpha$ tornam o sistema trivial, e essa é também uma das razões pelas quais a lógica intuicionista não é consensualmente considerada precursora da lógica paraconsistente. Vale citar a tradução de Gödel–Gentzen com quantificação da lógica clássica (LC) para a lógica intuicionista (LI), que evoca a ideia de incluir a LC na LI, em especial a tradução da Dupla Negação, mas apenas formalmente, visto que o significado dos termos ainda permanece diferente.

Sobre essa inclusão, a filósofa da ciência Susan Haack aponta para uma falha na distinção das lógicas não-clássicas entre complementares e heterodoxas. De um lado se fala sobre a lógica intuicionista negar princípios da lógica clássica, restringindo-a. Porém, segundo ela,

Se tomarmos a negação e a conjunção intuicionistas como primitivas, e definirmos a disjunção ($p \vee q =_{def} \neg(\neg p \wedge \neg q)$), a implicação e a equivalência da maneira clássica usual, com base nelas, então todos os teoremas clássicos podem ser derivados na lógica de Heyting.

logo,

A possibilidade de representar o cálculo de Heyting como uma extensão da lógica clássica levanta a questão se os conectivos intuicionistas diferem em significado de seus ‘análogos’ clássicos. De minha parte, estou inclinada a pensar que o fato de que há mais de uma maneira para representar a lógica de Heyting como uma lógica ampliada justificaria o cuidado a respeito da ideia de que a crítica dos intuicionistas à lógica clássica possa ser inteiramente explicada como resultado de uma variação de significado. (HAACK, 2002, p. 286-287)

Essa questão voltará a tona com a objeção ao pluralismo sobre mudança de significado, na Seção 4.2.2.1.

3.2.2 LÓGICA PARACONSISTENTE

– Não se pode fazer duas afirmações contraditórias sobre a mesma coisa – disse Dearri, com a calma do conhecimento superior. – Em outras palavras, um desses “aspectos” é real, ou outro é simples ilusão.
– Muitos físicos já disseram isso - Shevek reconheceu.
– Mas o que o senhor diz? - perguntou o que queria saber.
– Bem, acho que é uma saída fácil de uma dificuldade... Pode-se descartar o ser ou o vir a ser como uma ilusão? Vir a ser sem ser não faz sentido. Ser sem vir a ser é um grande tédio [...]
– Mas para que serve esse tipo de “compreensão” – perguntou Dearri –, se não resulta em aplicações práticas, tecnológicas? É só um jogo de palavras, não é?
– Você faz perguntas como um verdadeiro explorador – disse Shevek, e nenhuma alma ali sabia que ele insultara Dearri com a palavra mais desprezível em seu vocabulário; na verdade, Dearri até assentiu com a cabeça, aceitando o elogio com satisfação. (LE GUIN, 2019, p. 221)

No começo do século XX, o lógico russo Nicolai Vasiliev (1880-1940) e o polonês Stanisław Jaśkowski (1906-1965) começaram a pensar, separadamente, em sistemas formais que recusam o PNC: a lógica imaginária e a lógica discursiva, respectivamente para cada um. Em 1948, Jaśkowski, aluno de Łukasiewicz, constrói o primeiro sistema formal paraconsistente, com interesse em teorias envolvendo contradições, como a dialética. Vale mencionar que é difícil dizer com clareza quem foram todos os precursores da lógica paraconsistente, visto que lógicos como Andrei Kolmogorov (1903-1987), I. Johansson e David Nelson (1918-2003) fizeram contribuições nesse sentido, talvez mesmo sem notarem o teor não-clássico em suas obras. (GOMES; D’OTTAVIANO, 2017)

Independentemente, em 1958, Newton Da Costa passa a estudar sistemas inconsistentes (no sentido clássico) e contribuir fortemente para o avanço da lógica paraconsistente, tendo o mérito de adequá-la à matemática usual e lógicas de ordem superior, bem como estendê-la para uma teoria dos conjuntos e contribuir para o entendimento dos domínios científicos com a noção de quase-verdade. É sobre seu sistemas que iremos focar nesta seção.

Dentre suas variadas aplicações, nota-se forte uso na ciência da computação, em especial em inteligência artificial, como na construção de modelos de raciocínio cotidiano, lidando com inconsistência epistêmica, e por vezes utilizando a lógica paraconsistente anotada, que por sua vez também é usada em circuitos digitais. (ABE *et al.*, 2019) Além disso, a lógica paraconsistente foi adaptada à programação com ParaLog e sistemas paraconsistentes *fuzzy*; se aplica também na medicina em diagnósticos de doenças como câncer (COSTA, N. C. da; SUBRAHMANIAN, 1989), no controle de tráfego aéreo, em processos de tomada de decisão (SANCHES *et al.*, 2010) e mesmo em antropologia (JENNINGS, 1989; DA COSTA *et al.*, 1998), entre outras funções (COSTA, N. C. da; KRAUSE, 2003).

N. da Costa apresenta suas ideias acerca da filosofia da lógica a começar pela razão, tratada como uma postura cientificamente orientada, histórica e que questiona seus resultados e princípios, o que ele irá chamar mais tarde de “dialetriz”. Essa é uma concepção de razão não estática e não absoluta, que se encontra sempre num processo de aprimoramento e progresso. Assim, a razão deve ser passível de mudança, não-dogmática, mas ao mesmo tempo não deve ser arbitrária.

[...] dialetizar determinada concepção significa apenas questioná-la, reformulá-la, negá-la mesmo, demonstrando que os pressupostos a ela subjacentes são por demais ingênuos, devendo ser, ou já tendo sido, substituídos por outros novos, mais finos e melhor adaptados aos fatos [...] Assim, para exemplificar, a teoria da relatividade nasceu de uma dialetização da física newtoniana [...] (DA COSTA, 1980, p.18)

A dialética inclusive foi uma das motivações da criação de sistemas paraconsistentes, que pretendia trabalhar com as estruturas lógicas implícitas nas teorias hegel-marxista (DA COSTA; WOLF, 1980). Podemos citar ainda outras motivações: o estudo de tais sistemas destacam aspectos da lógica clássica como a independência e compatibilidade de axiomas, a natureza de operadores como a negação ou implicação; dessa perspectiva se fazem comparações com as descobertas que as geometrias não-euclidianas proporcionaram para as geometrias euclidianas.

Com isso, foi pretendido estudar os limites entre trivialidade e inconsistência, como com o esquema da separação na teoria dos conjuntos, e também para uma melhor compreensão do que é uma contradição, desmistificando o medo por elas. Há ainda a intenção de olhar sob uma nova perspectiva as teorias antigas que contêm contradições em algum nível e, por isso, foram abandonadas, tais como a teoria de objetos de Alexius Meinong (1853-1920) ou dos infinitamente pequenos de Guillaume l’Hôpital (1661-1704). Ou ainda teorias recentes, como a do átomo de Bohr, que utiliza tanto mecânica clássica (newtoniana e leis de Maxwell), quanto mecânica quântica.

A lógica paraconsistente assume duas principais ideias: (1) tolerância a algumas (não todas!) contradições e (2) não-trivialidade. De (1) temos que o PNC não é válido em geral, já que é possível que $\alpha \wedge \neg\alpha$; e de (2) o Princípio da Explosão (ou Lei de Scotus) também cai por terra, pois duas fórmulas contraditórias $\alpha \wedge \neg\alpha$ nem sempre trivializam o sistema. Assim, é possível lidar com inconsistências sem que o sistema trivialize, isto é, sem que colapse ao derivar toda e qualquer fórmula (como ocorre em sistemas onde o PNC vale), perdendo seu significado. Esta manobra vai contra a ideia de Karl Popper (1902-1994) sobre a recusa de contradições, apontada como mais uma de tantas motivações de Da Costa:

Pode-se demonstrar facilmente que se aceitássemos as contradições, teríamos que abandonar toda a atividade científica: chegaríamos a uma desarticulação completa da ciência. É o que se prova demonstrando que, se admitimos duas afirmativas contraditórias, precisamos admitir também qualquer outra afirmativa; de duas afirmativas contraditórias, podemos inferir validamente qualquer outra afirmativa. (POPPER, 2008, p. 348)

Para que seja possível lidar com contradições é feita uma distinção entre fórmulas bem-comportadas *{well-behaved}* e fórmulas mal-comportadas *{ill-behaved}*, bem como a criação de um operador de negação forte (*strong negation*), definidos num primeiro momento como (COSTA, N. C. da *et al.*, 2007):

$$\alpha^\circ =_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \quad (7)$$

$$\neg_*\alpha =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha^\circ \quad (8)$$

As fórmulas bem-comportadas e a negação forte obedecem à lógica clássica, de modo que uma contradição trivializaria o sistema, como:

$$\vdash \alpha \rightarrow (\neg_*\alpha \rightarrow \beta) \quad (9)$$

O Princípio do Terceiro Excluído é um axioma de \mathcal{C}_1 , pois quando uma proposição é verdadeira, a negação paraconsistente pode ser tanto verdadeira como falsa, mas de qualquer modo uma das duas proposições será verdadeira. Assim também a bivalência é conservada, já que de uma proposição α ou ela é verdadeira ou falsa, apesar da tabela paraconsistente ter dois valores de verdade designados (1 e 2) e um falso (3).

Assim também podemos ver que a Dupla Negação não vale para ambas direções, apenas $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$, já que toda valoração verdadeira de $\neg\neg\alpha$ é verdadeira também para α , mas nem toda valoração verdadeira de α é verdadeira em $\neg\neg\alpha$.

Quadro 1 – Tabela de verdade paraconsistente para α , sua negação e sua dupla negação.

α	$\neg\alpha$	$\neg\neg\alpha$
1	3	1
2	1	3
3	1	3

Quadro 2 – Tabela de verdade paraconsistente para o Princípio do Terceiro Excluído.

α	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \neg\alpha$
1	3	1
2	1	1 ou 2
3	1	1

As definições de fórmula bem-comportada e negação forte foram dadas em função do cálculo \mathcal{C}_1 , mas Da Costa construiu uma hierarquia de cálculos \mathcal{C}_n , em que $0 \leq n \leq \omega$. Cada cálculo contém estritamente o seguinte, de modo que \mathcal{C}_0 é o cálculo proposicional clássico e, ao adicionar fórmulas mal-comportadas, obtemos os sistemas paraconsistentes. A definição de α° também muda para cada cálculo, considerando o grau n de cada cálculo \mathcal{C}_n :

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} \wedge (\alpha^{(n-1)})^\circ, 2 \leq n \leq \omega \quad (10)$$

Uma observação sobre a hierarquia de cálculos paraconsistentes é em relação à capacidade de ser trivializável, ou seja, se é possível que o sistema colapse ao adicionar a ele um número finito de fórmulas como axioma(s). Assim, quanto maior o grau do cálculo, menor é o seu conjunto de teoremas e, também, menor a possibilidade que seja finitamente trivializável. No caso limite, \mathcal{C}_ω , o sistema deixa de ser finitamente trivializável.

Por fim, para encerrarmos esse capítulo, vale a menção à Lógica Minimal de Ingebrigt Johansson (1904–1987), que é uma lógica intuicionista onde o *ex falso quodlibet* e o Princípio do Terceiro Excluído são questionados, de modo que essa lógica é considerada também paraconsistente. (MOLEN, 2016)

A ideia foi de elaborar uma versão fraca da lógica intuicionista de Heyting. Apesar de adotar muito da filosofia da matemática intuicionista, parece que Johansson também recebeu forte influência de D. Hilbert, ao ser simpático à ideia de que a matemática é fundada em alguma axiomatização da aritmética, ainda que pautada pela intuição.

4 PLURALISMO LÓGICO

4.1 PRELÚDIO

Quando se fala em pluralismo associamos, num primeiro momento, a ideia de que existe mais de uma lógica correta, verdadeira, coerente ou adequada. Vimos que essa noção precisa ser apurada: o que queremos dizer por correta (e pelos outros atributos citados)? Pode ser o caso de lógicas incompatíveis serem ambas legítimas? O que é consequência lógica e validade? O que significa ser adequada para um domínio? O que caracteriza uma lógica como legítima? Essas perguntas comovem tanto monistas quanto pluralistas, e a forma como irão respondê-las originam diversas articulações do pluralismo e do monismo lógico.

No caso do pluralismo, existem algumas subdivisões. Para começar, é possível que tenhamos um pluralismo irrestritivista ao aceitar todas lógicas como corretas, ou um pluralismo restritivista, onde apenas algumas delas são vistas como genuínas. Essa distinção é questionável porque um pluralismo do primeiro tipo é, por vezes, considerado como espécie de relativismo indesejável, no sentido de aceitar que qualquer lógica pode ser adequada para algum domínio. Veremos, todavia, que o relativismo lógico também tem suas ramificações e pode ser muito proveitoso.

Uma outra distinção dentro do pluralismo se dá por três tipos: (1) o pluralismo puro, que sustenta a existência de sistemas lógicos puros, abstratos, independentes de qualquer relação extralógica; (2) pluralismo teórico, o mais recorrente nesse trabalho, que trata a pluralidade de lógicas sobre a perspectiva de sua aplicação e formalização de domínios teóricos. Por exemplo, uma lógica não-reflexiva é considerada a mais adequada do que a lógica clássica às teorias da mecânica quântica. Pode ser considerado um relativismo ao delegar a adequação das lógicas a certos domínios; e (3) pluralismo canônico, que defende que existe mais de uma lógica adequada para raciocinar sobre os cânones de inferência da linguagem natural, ou seja, evoca um aspecto normativo da lógica.

4.1.1 CONSEQUÊNCIA LÓGICA E VALIDADE

Como sugerido anteriormente, a discussão pluralista muitas vezes paira em torno dos conceitos de validade e consequência lógica, seja por interpretá-los como vagos, por diferenciá-los em diferentes sistemas lógicos, ao fazer uma distinção do limite entre terminologia lógica e não-lógica, ao relativizá-los a linguagem ou domínio, etc. A concepção padrão de consequência lógica é como a relação entre um conjunto de sentenças, as premissas, e uma sentença como conclusão, de modo que a validade seria uma propriedade dos argumentos quando sempre que as premissas forem verdadeiras, necessariamente, a conclusão também será verdadeira. Vale mencionar, porém, que existem outras formas de definir um argumento, como ao considerar múltiplas conclusões, sequências de premissas e multi-conjuntos.

Apesar de considerar apenas uma questão terminológica, S. Shapiro oferece uma alterna-

tiva para uma noção de consequência lógica que não seja vaga, que valha tanto para contextos clássicos quanto intuicionista quanto paraconsistentes e por aí vai, a *super-validade*, que capta um argumento válido em qualquer estrutura ou contexto legítimo:

Uma comida é “super-saborosa” se é saborosa para todo mundo; um objeto está “super-à-esquerda” se está à esquerda de acordo com todos os referenciais [...] Em muitos casos, é claro, o termo cunhado será completamente inútil. (SHAPIRO, 2014, p.114, tradução nossa)

Para um monista como Priest isso não faz diferença, já que a noção de validade é única. Já para uma pluralista pode ser útil ao discutir o significado de validade, apesar de que dificilmente algo pode recair sobre esse conceito. Num segundo momento podemos pensar sobre o *relatum* da consequência lógica e da validade, isto é, ao que essas noções se referem no mundo? À uma linguagem natural ou regimentada? A um mundo platônico de proposições?

Shapiro sugere que se refiram à sentenças em linguagens interpretadas, com o propósito de se livrar de problemas semânticos, como a vaguidade. Tendo isso estabelecido, iremos pensar nas relações que esses conceitos estabelecem, ou seja, como se inserem numa estrutura. Ainda neste capítulo veremos mais definições de consequência lógica, dadas em função das diferentes vertentes.

4.1.2 RELATIVISMO E TOLERÂNCIA

O relativismo é um conceito guarda-chuva utilizado em diversas áreas da filosofia, sendo portanto polissêmico e sem uma definição única e consensual. Segundo Maria Baghramian e J. Adam Carter (2020), existem três principais formas de compreendê-lo. Primeiramente (1) pela covariância:

[...] um fenômeno X (e.g., valores, norma epistêmicas, estéticas e ética, experiências, julgamentos, e mesmo o mundo) é de alguma forma dependente de e co-varia com alguma variável subjacente independente Y (e.g., paradigmas, culturas, esquemas conceituais, sistemas de crença, linguagem). (BAGHRAMIAN; CARTER, 2019, tradução nossa)

Assim, basta analisarmos o que é relativizado (X) e em relação a que é feita a relativização (Y). O segundo modo, que se afasta consideravelmente da abordagem analítica, é (2) por contraste (*malgré eux*), isto é, a definição é dada a partir do que o relativismo rejeita: absolutismo, objetivismo, monismo e realismo. Por fim, temos a (3) abordagem do parâmetro oculto: os fatos de um dado domínio envolvem e dependem de uma relação inesperada com um dado parâmetro. Assim, quando se diz que algo é errado, está implícito que é errado necessariamente em relação a algum outro fator. O resultado é que não há algo como ser *simplesmente* ou independentemente errado (ou verdadeiro). A validade do fenômeno *sempre* estará sujeita a um parâmetro subjacente.

Vale notar que endossar algum tipo de relativismo lógico não necessita que se defenda o relativismo aplicado a outros campos – como à moral ou estética –, a isso se chama relativismo local, em contraste com o global. Há também uma distinção sobre a força do relativismo: forte,

quando tudo é passível de relativização; e fraco, quando se presume que alguns conceitos não se aplicam a mais de um contexto e, portanto, não podem ser relativizados por qualquer parâmetro.

Quando aplicado à lógica, seguindo R. Cook (2010), o relativismo propõe que uma noção correta de um dado fenômeno X seja dependente, ou mesmo um função de fatos de Y. Um exemplo didático comum ao introduzir esta noção é sobre etiqueta social relativa a uma cultura – o que é considerado educado fazer num país pode ser considerado rude em outro. No caso de um mundo possível onde exista apenas uma única cultura, qual a etiqueta fosse relativa, teríamos um monismo sobre etiqueta social, ainda que se assuma uma posição relativista.

É possível interpretar a descrição de covariância a fim de defender diferentes formulações igualmente legítimas e corretas de Y, sem que haja uma variável X dependente. Por exemplo, ao discutir várias concepções independentes de consequência lógica: modal, utilizando noções de mundos possíveis; linguística, ao tratar do significado das terminologias; epistêmica, ao defender uma abordagem pela racionalidade; de relevância, ao impor critérios do que é relevante; etc. Além disso, não é necessário restringir consequência lógica a apenas uma dessas abordagens. Dada essa variedade, Shapiro defende que consequência lógica seja um conceito “agregado” (*cluster concept*), isto é, com vários significados atribuídos ao termo.

Sabendo que existem diferentes tipos de relativismo, podemos ter uma compreensão melhor dessa proposta. Em lógica, A. Varzi (2002) aponta, por exemplo, para um Relativismo Tarskiano (*Tarskian Relativism*) e um Carnapiano (*Carnapian Relativism*):

Tarski sugeriu certa vez que todo termo pode, em princípio, ser tratado como um termo lógico ou não lógico, conforme o caso, então o relativismo decorrente dessa visão pode ser denominado Relativismo Tarskiano. [...] Por outro lado, o “princípio da tolerância” de Carnap notoriamente implicava que todos têm a liberdade de construir sua própria teoria lógica, mesmo que isso signifique afastar o navio da lógica da terra firme das formas clássicas. Portanto, podemos rotular essa visão de Relativismo Carnapiano. (VARZI, 2002, p. 3, tradução nossa)

O autor sugere ainda uma forma mais forte de relativismo, onde além dos símbolos lógicos e das teorias lógicas estarem no mesmo nível de quaisquer outros símbolos e teorias, nenhum princípio seria absoluto, mesmo na metalinguagem:

[...] nenhum fato lógico específico seria atendido pela classe de todos os modelos admitidos por uma dada língua, o que significa que a postura relativista estaria completamente livre de interferências metalógicas. (ibid, p. 20, tradução nossa)

Nesse sentido, a noção correta de consequência lógica seria dada relativamente à divisão dos termos lógicos e não lógicos e à forma de interpretá-los, que podem ser diversas e dão origem às diferentes noções de validade. Essa concepção é conflitante com outras vertentes pluralistas como, por exemplo, de R. Cook, em que a linguagem formal tem uma divisão fixa de termos lógicos e não-lógicos.

Outro aspecto diretamente relacionado ao pluralismo é a tolerância: suportar o desenvolvimento de novos sistemas lógicos. É comum a referência a R. Carnap nesse sentido, pela

sua defesa da tolerância à diferentes (apesar de nem todos e não igualmente) enquadramentos linguísticos (*linguistic frameworks*):

Na lógica não há moral. Todo mundo tem a liberdade de construir sua própria lógica, i.e., sua própria linguagem, como desejar. Tudo o que é exigido é que, se quiser discuti-la, deve declarar claramente seus métodos e dar regras sintáticas ao invés vez de argumentos filosóficos. (CARNAP, 2002, p.52, tradução nossa)

Porém, não se pode dar por certo se realmente há uma defesa de um pluralismo lógico, dentre outras razões, dada sua visão analítica sobre objetos matemáticos, como aponta Gillian Russell:

[...] é estranho chamar Carnap de pluralista lógico, visto que, de certa forma, sua opinião não é que existe mais de uma lógica correta, mas que não há nada do qual a lógica deva ser correta (Cook 2010, 498). Talvez fosse mais esclarecedor chamar Carnap de construtivista lógico. (RUSSELL, 2019, tradução nossa)

Uma pluralista é inevitavelmente tolerante, mas da tolerância não se pode deduzir mais nada, de modo que mesmo uma monista pode ser tolerante em relação a outras lógicas, ainda que acredite haver apenas uma lógica verdadeira. Uma analogia é com pessoas religiosas que acreditem apenas em seu deus, mas respeitam que existam outras crenças com entidades diferentes. A tolerância então reside no benefício da dúvida de que talvez a lógica defendida possa vir a estar errada, fazendo-se necessário dar uma chance para que outros sistemas se desenvolvam, tendência popular na matemática. É sobre a postura em relação a outras lógicas, por isso tolerância por si só não nos diz muito, já que para ser tolerante não é preciso que se concorde que diferentes lógicas sejam igualmente boas, nem que as noções de validade e consequência lógica sejam relativas a certos casos.

4.2 VERTENTES PLURALISTAS

4.2.1 PLURALISMO BASEADO EM CASOS

O pluralismo de Beall & Restall se baseia no que eles chamam de Tese Generalizada de Tarski (TGT), apresentada primeiramente como:

Um argumento é válido_x se e somente em todo caso_x em que as premissas são verdadeiras, também é a conclusão. (BEALL, J. C.; RESTALL, 2006, p. 29, tradução nossa)

Para Shapiro, essa ideia pode se encaixar num tipo de pluralismo chamado ‘relativismo popular’ (*folk relativism*), em que a validade de um argumento, por exemplo, é sempre relativa a alguma teoria. Analogamente aos exemplos anteriores, é como se a etiqueta fosse correta sempre em relação a uma determinada cultura. Nesse tipo de pluralismo, validade e consequência lógica assumem vários significados igualmente legítimos, mesmo que incompatíveis entre si. Então, por

mais que a dupla não se considere relativista, S. Shapiro encaixa Beall & Restall num relativismo popular restrito a casos.

A noção de *casos* oferecida por Beall & Restall se dá quando as premissas são verdadeiras num argumento e, logo, a conclusão necessariamente também deve ser. Isso permite tanto abordagens clássicas como não-clássicas. Assim, teríamos a seguinte noção intuitiva de consequência lógica, onde A é uma asserção e Σ é um conjunto de asserções:

(V) Uma conclusão A se segue das premissas Σ se e somente se qualquer caso em que cada premissa de Σ é verdadeira é também o caso em que A é verdadeira. Ou, equivalentemente, não há nenhum caso em que cada premissa de Σ é verdadeira, no qual A falha em ser verdadeira. (BEALL, Jeffrey C.; RESTALL, 2000, p. 2, tradução nossa)

Todavia, a dupla aponta que essa formulação é ainda incompleta, pois é preciso delimitar o que seriam esses casos: mundos possíveis, modelos de Tarski, situações incompletas e/ou até mesmo inconsistentes, etc. Quanto à validade dos argumentos, será relativa à forma como se especifica (V) e quais casos quantifica. Considere um argumento do tipo:

α é vermelho, logo α é colorido

Se validade é entendida como preservação necessária de verdade, teríamos um argumento válido, visto que em todos os mundos possíveis onde algo é vermelho, é também colorido. Já ao usar a noção de validade de Tarski, pela forma do argumento, $V_a \rightarrow C_a$, sendo V e C predicados para ser vermelho e ser colorido, respectivamente, seria inválido. Segundo Beall e Restall é possível dizer qual das duas concepções é melhor, no caso, escolhem a Tarskiana, visto que um dos requisitos da noção de consequência lógica é a formalidade e, segundo eles, a versão clássica também cumpre com o requisito da necessidade, de que num argumento válido a verdade das premissas necessita da verdade da conclusão. O outro requisito é a normatividade, quer dizer, há algum nível de racionalidade normativa implícito na validade de um argumento.

Vale notar que eles consideram todas as inferências da lógica clássica de primeira ordem como válidas, daí o desacordo com *algumas* ramificações da lógica intuicionista (como quando envolve a tese de Church) e paraconsistentes que aceitam fórmulas do tipo $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, consideradas por eles como necessariamente falsas (*necessary falsehoods*), daí também se caracteriza um pluralismo restritivo, que desconsidera algumas lógicas. Nesse ponto, a dupla ressalta que pluralismo não é sobre concordar com tudo, mas usar os mesmos pressupostos para as discussões: "Há espaço para rivalidade e desacordo quando o significado do léxico básico é estabelecido." (BEALL, Jeffrey C.; RESTALL, 2000, p. 15, tradução nossa)

Beall e Restall sustentam uma abordagem da lógica por teoria de modelos (*model-theoretic*), de tal modo que pode haver diferentes modelos de linguagens formais. A interpretação na abordagem de Beall & Restall considera a validade dos argumentos dada em virtude da *forma*, de tal modo que para refutar um argumento se exige um contra-exemplo, isto é, um argumento que mantém a *forma* original, mas com uma conclusão falsa. Diferentemente, a abordagem por

teoria da prova (*proof-theoretic*) determina a validade dos argumentos em função de seu papel inferencial (e não pelas condições de verdade), i.e., as regras de inferência irão dar significado para os conectivos lógicos, então no caso de usar alguma dedução natural como método de prova, o argumento será válido se sua conclusão for dedutível das premissas utilizando uma sequência das regras disponíveis.

No caso específico de Beall e Restall, o pluralismo emerge a partir do momento em que “[...] pelo menos duas instâncias diferentes do TGT oferecem precisões admissíveis de consequência lógica.” (BEALL, J. C.; RESTALL, 2006, p. 29, tradução nossa). Esse tipo de pluralismo, por vezes chamado de pluralismo baseado em casos, parte da ideia de que consequência lógica é polissêmica, ambígua e precisa de melhor esclarecimento. Para a dupla, podemos ter diferentes noções de validade e consequência lógica, de modo que diferentes lógicas estão tratando de concepções diferentes, e isso explicaria o desacordo entre elas sobre quais são os argumentos válidos. Ainda nesse sentido, uma objeção que surge é sobre se essa concepção de consequência lógica (V) não seria análise conceitual, porém para eles a proposta é apenas de oferecer uma noção intuitiva para guiar a discussão, inspirados em Tarski, e não um novo conceito,.

Vale notar, porém, que Beall e Restall defendem que todas as lógicas se referem a uma única linguagem (às mesmas proposições), o que varia é a classe de fundo das interpretações (*background class of interpretations*). Essa ideia difere do pluralismo que coloca consequência lógica e validade relativa à terminologia lógica, porque o que muda para dupla não é a linguagem, mas a interpretação dessas noções. Por exemplo, se usarmos situações como casos, obtemos lógica relevante e, como vimos, ao usar modelos de Tarski obtemos lógica clássica. O que importa é que o significado do léxico básico – como o símbolo de negação – seja o mesmo em todos sistemas, de modo que o que o diferencia são as interpretações. Nas palavras dos autores:

Colocando de forma gráfica, como pluralista, eu quero dizer que

$A, \neg A \vdash_C B$; mas A e $\neg A \not\vdash_R B$

A e $\neg A$ juntas, implicam *classicamente* B , mas A e $\neg A$ juntas não implicam *relevantemente* B . Por outro lado, Carnap queria dizer que

$A, \neg_C A \vdash B$, mas A e $\neg_R A \not\vdash B$

A junto com sua negação *clássica* implica B , mas A junto com sua negação *relevante* não precisa implicar B . (RESTALL, 2002, p. 432, tradução nossa)

Simplificando, o pluralismo de Beall e Restall se dá quando duas (ou mais) lógicas L_1 e L_2 oferecem diferentes, mas igualmente legítimas, caracterizações de consequência lógica.

4.2.2 A PROPOSTA DE S. SHAPIRO

A formulação pluralista dada por Shapiro difere em alguns aspectos da de Beall & Restall. Primeiramente porque para ele o pluralismo se dá também em relação ao significado dos conectivos, de modo que em diferentes lógicas não necessariamente (pode ser o caso

que sim) utilizam as mesmas linguagens. Sua abordagem se aproxima de um contextualismo, corrente que delega ou o conteúdo (contextualismo indexical) ou a extensão (contextualismo não-indexical) dos termos ao contexto em que se encontram. Ele cita como exemplo o desacordo entre um professor e uma aluna sobre um refrigerante ser saboroso ou péssimo: no caso de um contextualismo não-indexical, o conteúdo de “saboroso” e “péssimo” continua o mesmo, o que muda é que o refrigerante, para a aluna, se encontra na extensão de coisas saborosas e, para o professor, na extensão de coisas péssimas. Já no contextualismo indexical, o que muda é o conteúdo dessas qualidades, de modo que em ambas as formas de contextualismo os dois estão certos relativos ao contexto, isto é, é verdade que o refrigerante é “péssimo-para-o-professor” e “saboroso-para-a-aluna”. O que acontece se compararmos defensoras de lógicas clássicas *versus* intuicionista é que quando elas falam que o Princípio do Terceiro Excluído é ou não válido, estão ambas corretas respectivamente aos seus contextos e, além do mais, estão falando sobre o mesmo princípio.

O pluralismo lógico defendido por Shapiro é inspirado na perspectiva matemática de D. Hilbert, de que para um sistema ser legítimo, ou digno de ser estudado, basta ser consistente, relacionando pluralismo matemático como indutor do pluralismo lógico.¹ Segundo ele,

[...] uma linguagem formal é um modelo matemático da linguagem natural aproximadamente no mesmo sentido que, digamos, uma coleção de massas pontuais [*point masses*] é o modelo de um sistema de objetos físicos, e uma máquina de Turing é o modelo matemático de uma pessoa seguindo um algoritmo, ou talvez um dispositivo computacional. Em outras palavras, uma linguagem formal exibe certas características das linguagens naturais, enquanto ignora, simplifica ou idealiza outras características. (SHAPIRO, 2014, p. 42, tradução nossa)

Graham Priest, ao contrário, é um monista lógico e pluralista matemático; ou seja, para ele existe uma pluralidade de matemáticas que são independentes entre si, por mais que algumas sejam mais elegantes ou possuam melhores aplicações no cotidiano que outras, cada uma com suas peculiaridades. Entretanto, segundo ele (PRIEST *et al.*, 2006), consequência lógica concerne à preservação de verdade, diferentemente da verdade em sistemas matemáticos, que é relativa à estrutura em questão. Ainda nessa linha, poderia haver um tipo de pluralismo com a ideia de lógica como modelo, em que ao comparar modelos matemáticos teríamos diferentes “custos”: talvez um modelo mais simples seja menos realista, ou o contrário, ou ainda fossem bastante aproximados; de qualquer modo, não haveria um julgamento de qual seria mais correto.

4.2.2.1 MUDANÇA DE SIGNIFICADO

Uma das objeções que surgem quando se fala em diferentes noções de validade é sobre a mudança de significado; como garantir que lógicos rivais estão discutindo sobre os mesmos conectivos e proposições? Vimos que Beall & Restall resolvem essa questão ao sustentar que todos

¹ Para Da Costa, diferentemente, o que existe em matemática deve ser não trivial.

os sistemas possuem uma única linguagem. Essa objeção, entretanto, parece ter se popularizado quando Quine afirmou:

Minha posição sobre esse diálogo é que nenhuma das partes sabe do que está falando. Eles pensam que estão falando sobre negação, '¬', 'não'; mas certamente a notação deixou de ser reconhecida como negação quando eles consideraram verdadeiras algumas conjunções da forma ' $\alpha \wedge \neg\alpha$ ' e pararam de considerar tais sentenças como implicando todas as outras. Aqui está, evidentemente, a situação do lógico desviante: quando ele tenta negar a doutrina, apenas muda de assunto. (QUINE, 1986, p. 81, tradução nossa)

Vale ressaltar, porém, que Quine pode melhor se encaixar num monismo sobre a lógica clássica, visto que desconsidera que outras negações “desviantes”, como a negação paraconsistente, sejam satisfatórias. Essa concepção vai contra o entendimento de Carnap, como vimos ao final da Seção 4.2.1. Newton da Costa, por sua vez, considera que essa seria uma disputa verbal, de acordo com um pluralismo onde temos diferentes e genuínas acepções de validade para diferentes domínios:

Na realidade, só existiria uma negação propriamente dita: a clássica; nem mesmo a negação intuicionista seria uma negação. No entanto, uma argumentação dessa categoria é apenas verbal. Seria o mesmo que afirmar que as retas, nas geometrias não-euclidianas, não são realmente retas: que só existe uma espécie de reta, que é a reta euclidiana. (DA COSTA, 1980, p. 33)

Uma outra estratégia para se livrar desse problema, como sugere (RUSSELL, 2019), seria postular um monismo sobre uma grande lógica que abarcasse todos os sistemas lógicos considerados legítimos. de modo que os diferentes conectivos, como a negação clássica e paraconsistente, fossem válidos relativamente a domínios específicos dessa lógica. Uma situação que pode nos auxiliar a imaginar essa situação é o modo como o sistema paraconsistente C_1 de Da Costa inclui o cálculo proposicional clássico, tal que eles são ambos adequados para domínios consistentes, mas apenas o paraconsistente se adequa aos domínios inconsistentes. Entretanto, essa tentativa não é de todo bem recebida, visto que evoca a ideia de que o pluralismo lógico colapsa em monismo, o que na verdade depende da acepção pluralista que temos.

4.2.3 MODALISMO

O. Bueno e S. Shalkowski propõem um pluralismo utilizando uma noção modal de consequência lógica como primitiva: “ B é consequência de A se, e somente se, a conjunção de A e não- B é impossível.” (BUENO; SHALKOWSKI, 2009, p. 307, tradução nossa). Essa abordagem se afasta tanto da teoria de modelos quanto da teoria de prova. Primeiro, eles buscam analisar a forma como Beall e Restall entendem o TGT, considerando-a inapropriada para uma defesa forte do pluralismo, e que o pluralismo com quantificação sobre casos colapsa num nihilismo lógico ou num universalismo lógico. Um dos principais pontos da crítica é que Beall e Restall tentam pegar carona na lógica clássica para defender o pluralismo, mas essa não seria

uma boa ideia, visto que as inferências clássicas são limitadas, por exemplo, não servem para contextos intensionais, onde se trabalha com *graus* de certeza epistêmica.

A começar pelos requisitos da consequência lógica exigidos por Beall e Restall – necessidade, formalidade e normatividade – eles adotam tanto a abordagem pela preservação necessária de verdade como por modelos de Tarski, aliando possibilidades com a existência de modelos. O problema, segundo Bueno e Shalkowski, é que não há argumentos para mostrar que a noção de consequência lógica clássica cumpre os requisitos da abordagem por preservação necessária de verdade e, mais ainda, Beall e Restall não mostram como para toda possibilidade existe um modelo correspondente. Então, para haver um pluralismo lógico que não seja trivial, seria preciso que de fato houvesse várias noções de consequência lógica que cumprissem os requisitos impostos, não apenas aquelas compatíveis com a noção clássica.

O que acontece é que ao quantificar sobre todos os casos, incompletos ou não, consistentes ou não, não sobra uma relação de consequência lógica, já que esta teria de ser a interseção das inferências válidas de todos os casos. Se essa expansão do domínio de quantificação dos casos for feita no nível da metateoria, não sobraria uma relação de consequência que cumprisse todos requisitos exigidos, daí o niilismo lógico. Uma alternativa seria alterar o domínio de quantificação para cada caso, dando uma atenção seletiva, isto é, em sistemas completos ignorar os casos incompletos, e por aí vai. Porém, essa estratégia não é uma defesa do pluralismo, pois poderíamos ser tão seletivos a ponto de qualquer inferência satisfazer as exigências de uma consequência lógica genuína, fechando os olhos para todos casos que invalidam tal inferência e, assim, teríamos algo próximo de universalismo lógico.

Ou seja, se de fato quantificarmos sobre todos casos de todos os tipos (incompletos ou não, inconsistentes ou não), não sobraria uma lógica, pois as inferências válidas em cada caso iriam anular as inferências válidas em outros:

Situações inconsistentes e completas irão invalidar inferências clássicas; situações incompletas e consistentes irão invalidar inferências paraconsistentes; [...] Se algo sobreviver a um ataque tão massivo, não fica claro se isso merece ser considerado uma lógica. (BUENO; SHALKOWSKI, 2009, p. 304, tradução nossa)

Ao considerar todos os casos como todos os casos *possíveis*, se assume como primitiva a noção modal supracitada². Uma das vantagens apontadas pelos autores de usar noções modais é permanecer na linguagem objeto ao discutir os fundamentos teóricos do sistemas, lembrando que as sentenças são portadoras de verdade no sentido de estarem comunicando algo externo à linguagem-objeto. Além disso, a adequação dos diferentes sistemas lógicos não se dá por casos e interpretação, mas pelos assuntos e domínios que tratam, dos quais em geral também tratam de objetos diferentes, como o caso dos elétrons na mecânica quântica, que são objetos indistinguíveis, mas não idênticos, para os quais a noção clássica de identidade não é satisfatória.

Ao defender o uso de lógicas paraconsistentes, não se está falando sobre a natureza do mundo conter ou não inconsistências, não há um comprometimento metafísico nesse sentido,

² S. Shapiro (2014) questiona o caráter primitivo da modalidade proposta pela dupla, exigindo que se especifique o que isso significa, dado que existem diversas noções modais.

que poderia levar até a um dialeteísmo. O que é preciso considerar é que as afirmações sobre o que há no mundo podem ser inconsistentes, e é com elas que se trabalha na linguagem lógica. Eles citam como exemplo disso discursos políticos, crenças contraditórias, trabalhos filosóficos, banco de dados inconsistentes, etc. Nas palavras deles:

Novamente, quando se considera a descrição de objetos aos quais a identidade não se aplica, simplesmente se considera uma descrição particular de tais objetos, baseada em uma interpretação particular da mecânica quântica. Nenhum compromisso com a existência de tais objetos é necessário. (Ibid., p. 313, tradução nossa)

Assim se defende o uso de sistemas paraconsistentes, por exemplo, pois mesmo se o mundo não contiver contradições, nós lidamos com elas na forma de asserções, informações, etc, de modo que faz sentido ter um sistema que não trivialize ao receber informações contraditórias. Indo nessa direção é interessante citar um apelo de Newton da Costa para assumir o pluralismo que considera a ideia de que lógicas não tradicionais possuem utilidades, aplicações efetivas e, com isso, há a visão dialética da lógica:

No fundo, a experiência parece sugerir que os esquemas lógicos variam no decurso do tempo e são suscetíveis de dialetização, analogamente ao que se dá com as próprias teorias físicas. (DA COSTA, 1980, p. 45)

Segundo Bueno e Shalkowski, a proposta evita tanto o nihilismo lógico quando o universalismo. O primeiro porque o pluralismo permite que diferentes lógicas se apliquem num mesmo domínio, como é o caso das lógicas clássicas e paraconsistentes que funcionam para domínios consistentes e completos. Ou ainda que a mesma lógica se aplique em diferentes domínios, caso da lógica paraconsistente que se aplica tanto a domínios consistentes como inconsistentes. E o segundo porque nem todos sistemas satisfazem a restrição de necessidade, mesmo quando preservam verdade (como no exemplo dado sobre ser vermelho e ser colorido), então nem tudo vale.

A intenção não é simplesmente defender a ideia, nada controversa segundo eles, de que existem diferentes lógicas que discordam sobre que argumentos são válidos meramente segundo a visão de diferentes defensoras desses sistemas. Por esse ângulo, mesmo uma monista concede esse fato, apesar de discordar das defensoras das lógicas que diferem da sua escolhida. O pluralismo residiria então em defender que diferentes, mas não todos, sistemas lógicos existem e podem ser considerados igualmente corretos, mesmo quando incompatíveis entre si, e independentemente de suas defensoras.

5 CONCLUSÃO

A conclusão deste trabalho é relativamente simples. Vimos que nossa compreensão da lógica como disciplina deve ser muito mais ampla, então apresentamos um pouco de sua história a fim de provar o ponto de que essa área passa por grandes transformações. Depois, apresentamos alguns aspectos teóricos da lógica clássica em contraste com dois sistemas lógicos alternativos – intuicionista e paraconsistente. Por fim, perguntamos: o que fazer com a pluralidade de lógicas? E, para responder, apresentamos uma parcela básica da enorme discussão sobre pluralismo lógico.

De forma mais destrinchada, nosso intuito foi de buscar uma melhor compreensão da lógica ao abordá-la por diversas lentes. Ao olhar seus aspectos históricos, de como foi seu desenvolvimento e como ocorreram as mudanças que nos trouxeram hoje esses questionamentos; os aspectos de sua aplicação, a saber quais são as motivações para construção dos sistemas lógicos e como viemos utilizando esses recursos até obtermos novas ferramentas com novas lógicas; seus aspectos teóricos, ao refletir acerca do que constitui uma lógica e quais requisitos buscamos cumprir; e, finalmente, analisamos como podemos interpretar a presente multiplicidade de lógicas.

Para isso, expusemos três tipos de sistemas lógicos: clássico, intuicionista e paraconsistente, ressaltando alguns de seus princípios e regras válidas, para então refletir sobre a adequação aos diferentes domínios, sejam eles consistentes e completos, como na lógica clássica de primeira ordem, consistentes e incompletos, como na lógica intuicionista, ou ainda inconsistentes e completos, como na lógica paraconsistente. Articulamos as ideias de Beall e Restall, notórios expoentes do pluralismo lógico, apresentando críticas e perspectivas pluralistas alternativas a deles, como de Shapiro (2014). Também buscamos apresentar uma perspectiva pluralista alternativa às teorias semânticas padrões de modelo e de prova, a saber o modalismo proposto por Bueno & Shalkowski (2009). Entre essas exposições, a intenção foi de contrapor alguns conceitos com a perspectiva monista – a qual não coube explorar devidamente no escopo deste trabalho. Ao mostrar que a adequação das lógicas pode variar por domínios e que pode até ser o caso de que lógicas incompatíveis entre si se adequem a um mesmo domínio, parece razoável reconhecer esses diferentes sistemas como igualmente legítimos.

Essas reflexões, ainda que não-consensuais, levantam questões relativas ao conhecimento que estamos construindo, e se fazem necessárias para a comunidade de filósofos e filólogas que quiserem adentrar a esse campo tão vasto que é a lógica atual, bem como se relaciona com a comunidade matemática e âmbitos da ciência e tecnologia no que tange às aplicações que mencionamos ao longo do trabalho. Oferecemos também recursos para pensar outros âmbitos da filosofia, como filosofia da ciência, da matemática e da linguagem, ao envolver teoria de significado, quando falamos sobre o significado dos conectivos e das noções lógicas; adequação de domínios teóricos, quando falamos sobre axiomatizar teorias do conhecimento, como as científicas; e limites da formalização, ao destacarmos que tipo de proposições, linguagem e

interpretações são usualmente adotadas na formulação de sistemas lógicos.

O seguinte trecho do livro *Varieties of Logic* é interessante porque resume um pouco dessa história de como podemos lidar com a pluralidade de lógicas:

Contudo, na atual orientação eclética à lógica, nada impede uma teórica comprometida com uma lógica substancial de estudar uma gama de outras lógicas e aprender como elas se relacionam entre si e com a sua própria. Nem impede outro lógico de realizar um estudo semelhante; usando uma lógica diferente. Nem impede um terceiro lógico de estudar como os dois primeiros projetos metateóricos se relacionam. Os três podem não ser capazes de compartilhar todos os seus resultados uns com os outros, de uma maneira homofônica direta, mas isso é a vida. (SHAPIRO, 2014, p. 204, tradução nossa)

Para encerrar, tendo em vista a complexidade do debate sobre pluralismo lógico, fizemos apenas um passeio nas discussões disponíveis e mais populares. Há ainda muito espaço a ser explorado: seja ao aprofundar os argumentos e objeções; ao procurar perspectivas pragmáticas do pluralismo; ao analisar as diversas aplicações das várias lógicas; ao investigar como o papel normativo da lógica pode se encaixar no pluralismo; ao buscar por novas formulações pluralistas e tudo o mais que a nossa imaginação, guiada pelo conhecimento e criticidade, permitir.

REFERÊNCIAS

- ABE, Jair M.; NAKAMATSU, Kazumi; SILVA FILHO, João I. da. Three decades of paraconsistent annotated logics: a review paper on some applications. **Procedia Computer Science**, Elsevier, v. 159, p. 1175–1181, 2019. Citado na p. 37.
- BAGHRAMIAN, Maria; CARTER, J. Adam. Relativism. *In*: ZALTA, Edward N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Winter 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/relativism/>. Acesso em: 10 ago. 2020. Citado na p. 42.
- BEALL, J. C.; RESTALL, Greg. **Logical Pluralism**. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado nas pp. 44, 46.
- BEALL, Jeffrey C.; RESTALL, Greg. Logical pluralism. **Australasian journal of philosophy**, v. 78, n. 4, p. 475–493, 2000. Publisher: Taylor & Francis. Citado nas pp. 19, 45.
- BOCHEŃSKI, Józef M. **A history of formal logic**. [S.l.: s.n.], 1961. Citado na p. 25.
- BUENO, Otávio; SHALKOWSKI, Scott A. Modalism and logical pluralism. **Mind**, v. 118, n. 470, p. 295–321, 2009. Publisher: Oxford University Press. Citado nas pp. 48, 49, 52.
- CARNAP, Rudolf. **The logical syntax of language**. [S.l.]: Open Court Publishing, 2002. Citado na p. 44.
- COSTA, Newton CA da; KRAUSE, Décio. Remarks on the applications of paraconsistent logic to physics, 2003. Citado na p. 37.
- COSTA, Newton CA da; KRAUSE, Décio; BUENO, Otávio. Paraconsistent logics and paraconsistency. *In*: **PHILOSOPHY of logic**. [S.l.]: Elsevier, 2007. P. 791–911. Citado na p. 38.
- COSTA, Newton CA da; SUBRAHMANIAN, V. S. Paraconsistent logics as a formalism for reasoning about inconsistent knowledge bases. **Artificial Intelligence in Medicine**, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 167–174, 1989. Citado na p. 37.
- COSTA, Newton GA da. O que é uma lógica? **Fundamento**, n. 10, 2015. Citado na p. 27.

DA COSTA, Newton CA. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. [S.l.]: Editora Hucitec, 1980. Citado nas pp. 25, 37, 48, 50.

DA COSTA, Newton CA; BUENO, Otávio; FRENCH, Steven. Is there a Zande logic? **History and Philosophy of Logic**, Taylor & Francis, v. 19, n. 1, p. 41–54, 1998. Citado na p. 37.

DA COSTA, Newton CA; WOLF, Robert G. Studies in paraconsistent logic I: The dialectical principle of the unity of opposites. **Philosophia**, Springer, v. 9, n. 2, p. 189–217, 1980. Citado na p. 37.

GOMES, Evandro Luis; D'OTTAVIANO, Itala M Loffredo. **Para além das Colunas de Hércules, uma história da paraconsistência: de Heráclito a Newton da Costa**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2017. Citado na p. 37.

HAACK, Susan. **Filosofia das lógicas**. [S.l.]: Unesp, 2002. Citado na p. 36.

HEYTING, Arend. **Intuitionism: an introduction**. [S.l.]: Elsevier, 1966. v. 41, p. 1–30. Citado na p. 35.

JENNINGS, Richard C. Zande logic and Western logic. **The British journal for the philosophy of science**, v. 40, n. 2, p. 275–285, 1989. Publisher: Oxford University Press. Citado na p. 37.

KNEALE, William; KNEALE, William Calvert; KNEALE, Martha. **The development of logic**. [S.l.]: Oxford University Press, 1962. Citado nas pp. 23, 24.

LE GUIN, Ursula. **Os Despossuídos**. [S.l.]: Aleph, 2019. Citado na p. 36.

LUKASIEWICZ, Jan. Sobre a lei da contradição em Aristóteles. **Sobre a Metafísica de Aristóteles—Textos selecionados. Trad. Raphael Zillig. São Paulo: Odysseus**, p. 1–24, 2005. Citado na p. 31.

MOLEN, Tim van der. The Johansson/Heyting letters and the birth of minimal logic, 2016. Citado na p. 39.

NOONAN, Harold; CURTIS, Ben. Identity. *In*: ZALTA, Edward N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018. Citado na p. 32.

POINCARÉ, Henri; MARTINS, Maria Helena Franco. **O valor da ciência**. [S.l.]: Contraponto Editora, 2021. Citado na p. 34.

POPPER, Karl. **Conjecturas e Refutações**. 5ª edição. [S.l.: s.n.], 2008. P. 343–367. Citado na p. 38.

PRIEST, Graham *et al.* **Doubt Truth to be a Liar**. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado na p. 47.

QUINE, Willard V. **Philosophy of logic**. [S.l.]: Harvard University Press, 1986. P. 96–108. Citado na p. 48.

REALE, Giovanni. **Metafísica de Aristóteles I**. [S.l.]: Edicoes Loyola, 2002. Citado na p. 31.

RESTALL, Greg. Carnap's tolerance, meaning, and logical pluralism. **The Journal of Philosophy**, JSTOR, v. 99, n. 8, p. 426–443, 2002. Citado na p. 46.

RUSSELL, Gillian. Logical Pluralism. In: ZALTA, Edward N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/logical-pluralism/>. Acesso em: 10 ago. 2020. Citado nas pp. 44, 48.

SANCHES, Cida; MEIRELES, Manuel; MARIETTO, Marcio Luiz; SILVA, Orlando Roque da; DE SORDI, José Osvaldo. Utilização da lógica paraconsistente em processos de tomada de decisão: um caso prático. **Revista Pensamento Contemporâneo em Administração**, Universidade Federal Fluminense, v. 4, n. 3, p. 62–77, 2010. Citado na p. 37.

SCHOLZ, Heinrich. **Geschichte der Logik - Concise History of Logic**. [S.l.: s.n.], 1931. Citado na p. 26.

SHAPIRO, Stewart. **Varieties of logic**. [S.l.]: Oxford University Press, 2014. Citado nas pp. 19, 42, 47, 49, 52, 53.

SMULLYAN, Raymond. An epistemological nightmare. **1981**, p. 381–394, 1981. Citado na p. 30.

VARZI, Achille C. On logical relativity. **Philosophical issues**, JSTOR, v. 12, p. 197–219, 2002. Citado na p. 43.