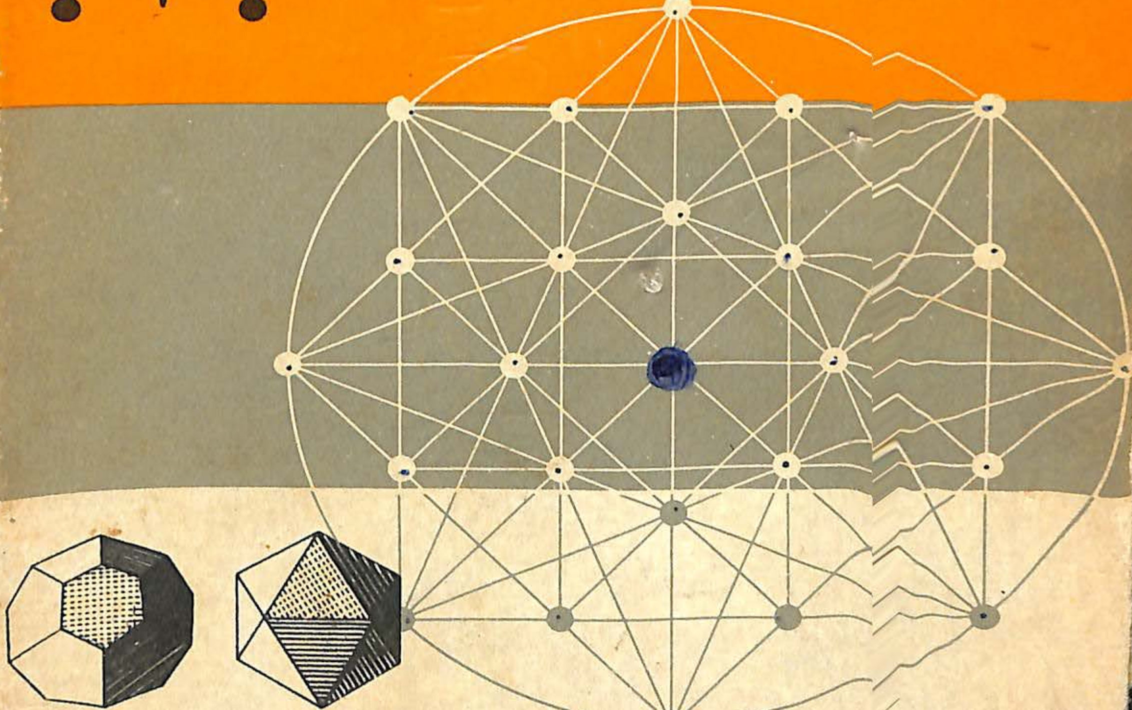
OSVALDO SANGIORGI

# Matemática

CURSO GINASIAL + 1.ª SÉRIE



COMPANHIA EDITORA NACIONAL + SÃO PAULO

# MATEMÁTICA

*para a*

PRIMEIRA SÉRIE GINASIAL

De acôrdo com os novos programas, conforme portarias n.º 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51, e de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registro n.º 2.728

*Exemplar* № 34431

1960

*Obra executada nas oficinas da*
São Paulo Editora S. A. — São Paulo, Brasil

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas, pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Ex-professor do Ginásio do Estado da Capital. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie.

★

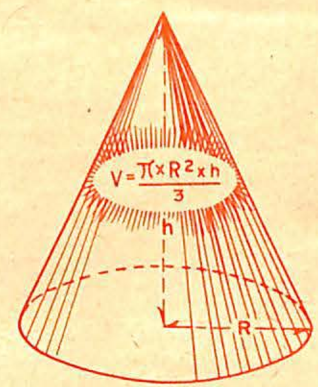
# MATEMÁTICA

*para a*

PRIMEIRA SÉRIE GINASIAL

**70.ª EDIÇÃO**

**Revista e ampliada**
***(Leitura e problemas curiosos)***




COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

*Matemática*, 2.ª série ginasial.
*Matemática*, 3.ª série ginasial.
*Matemática*, 4.ª série ginasial.
*Matemática e Estatística*, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.
*Programa de Admissão* (em colaboração).

*

EDIÇÃO DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo

# ÍNDICE

## CAPÍTULO IV

**Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais; sistema métrico decimal; sistema de medidas não decimais.**







## EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO

### I. Expressões Numéricas



### II. Problemas

# PROGRAMA DE MATEMÁTICA

## Primeira Série Ginasial

Portarias Ministeriais: 966, 2/10/51 e 1045, 14/12/51

### I) Números inteiros; operações fundamentais; números relativos

1. Noção de número natural, grandeza, unidade, medida. Numeração; numeração falada; numeração escrita. Sistema decimal. Valor absoluto e valor relativo dos algarismos.
2. Adição. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.
3. Subtração. Propriedades. Prova. Complemento aritmético de um número.
4. Multiplicação. Propriedades. Processos de abreviação. Prova. Potência de um número. Produto e quociente de potências de mesma base.
5. Divisão. Divisão aproximada. Propriedades. Processos de abreviação. Prova.
6. Números relativos; interpretações. Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação dos números relativos; regras práticas.

### II) Divisibilidade aritmética

1. Múltiplos e divisores. Divisibilidade. Princípios fundamentais. Caracteres de divisibilidade por 10 e suas potências; por 2, 4 e 8; por 5 e 25; por 3 e 9; por 11. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor.
2. Números primos e números compostos; números primos entre si. Crivo de Eratóstenes. Reconhecimento de um número primo. Decomposição de um número em fatôres primos. Número divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois; aplicação à divisibilidade.
3. Máximo divisor comum. Algoritmo de Euclides. Simplificação. Propriedades.
4. Mínimo múltiplo comum. Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Propriedades.

### III) Números fracionários

1. Fração. Fração ordinária e fração decimal. Comparação de frações; simplificação, redução ao mesmo denominador. Operações com frações ordinárias.
2. Frações decimais; números decimais. Propriedades dos números decimais; operações. Conversão de fração ordinária em número decimal e vice-versa. Número decimal periódico.

### IV) Sistema legal de unidades de medir; unidades de medidas usuais

1. Unidade legal de comprimento; múltiplos e submúltiplos usuais. Área; unidade de área; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Área do retângulo, do paralelogramo, do triângulo, do trapézio e do círculo; fórmulas. Volume: unidade de volume; unidades legais; múltiplos e submúltiplos usuais. Volume do paralelepípedo, do prisma, da pirâmide, do cilindro, do cone e da esfera; fórmulas. Pêso e massa; unidade legal; múltiplos e submúltiplos usuais. Densidade; aplicações.
2. Unidades de ângulo e de tempo. Unidades inglêsas e norte-americanas mais conhecidas no Brasil. Números complexos; operações.
3. Unidade de velocidade. Velocidade angular.

# PREFÁCIO

INICIAMOS COM ÊSTE VOLUME a publicação de uma série de livros de Matemática que oferecemos aos ilustres colegas e aos jovens estudiosos do curso secundário de nosso País.

Procuramos aproveitar ao máximo aquilo que a prática nos ensinou em mais de uma década de exercício de magistério. Pensamos ter elaborado, de acôrdo com a última reforma dos programas (Portaria 966, de 2/10/51), onde constam 3 aulas semanais de Matemática, um compêndio que auxilie os alunos da Primeira Série Ginasial sob a orientação indispensável de seus professôres. Seguimos, nêste livro, as instruções metodológicas constantes da Portaria 1 045, de 14/12/51. No estudo das operações fundamentais com os números inteiros (Cap. I), preferimos que a operação potenciação sucedesse a divisão, no sentido da clássica ordem das 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), a que o aluno já está iniciado desde o curso primário.

A mudança dessa ordem foi motivada pelas seguintes razões:

1.ª) *Não seria possível estudar o quociente de potências de mesma base, antes do estudo da divisão, como consta das instruções metodológicas ;*

2.ª) *Facilita a compreensão do cálculo de expressões aritméticas, contendo tôdas essas operações e que é feito na seguinte ordem:* a) as potências; b) as multiplicações e divisões; c) as adições e subtrações.

3.ª) *No estudo dos números relativos, a potenciação sucede a divisão, de acôrdo com as instruções já citadas.*

Embora seja facultado aos estabelecimentos de ensino secundário elevar o número de horas de aulas semanais, continuamos partidários de, pelo menos, 4 aulas semanais obrigatórias de Matemática, em tôdas as séries do curso secundário, com pequenas restrições apenas no curso clássico.

Aos prezados colegas que queiram apresentar sugestões no interêsse do aprimoramento de nosso ensino, o agradecimento sincero do

AUTOR

**Observação à 9.ª edição:**

Esta edição não difere substancialmente das primeiras, senão pelo enriquecimento de sugestões apresentadas por prezados colegas. Assim, acrescentamos no final uma boa série de exercícios sôbre *expressões numéricas* (números inteiros; números fracionários; números decimais; números relativos) e *problemas* (numeração; quatro operações; frações).

Oxalá continuem merecendo os nossos livros a mesma acolhida que até êsse instante, felizmente, têm recebido.

A todos o nosso agradecimento.

**Observação à 47.ª edição:**

Dando cumprimento ao programa que nos propuzemos, de contribuir — juntamente com o apôio inestimável de brilhantes colegas — para o aprimoramento do ensino da Matemática no curso secundário, acrescentamos nesta nova edição um pequeno *Apêndice*, relativo a leituras e problemas curiosos da aritmética.

O escopo é familiarizar o aluno sôbre o conteúdo das verdades eternas da Matemática, que têm chegado até os nossos dias pelos dois veículos principais: o *número* e a *forma*. Algumas ligeiras biografias (que pretendemos ampliar em futuras edições) apresentam célebres matemáticos e suas obras.

Outrossim, atualizamos, tanto quanto possível, os preços relativos aos dados de certos problemas, bem como algumas datas, a fim de que o aluno não se sinta fora da realidade presente.

Não temos palavras para exprimir o nosso reconhecimento e agradecimento aos professôres de nossa terra pela magnífica colaboração que nos têm dado, mediante, cartas e mesas redondas de que, convites amáveis fizeram-nos participar.

OSVALDO SANGIORGI

Rua Macapá, 17
SÃO PAULO

**Observação à 60.ª edição:**

Com a sincera preocupação de sempre propiciar aos distintos colegas de magistério, bem como aos jovens alunos do ginásio, as últimas conquistas que dizem respeito à didática da Matemática, vem a presente edição acrescida de alguns elementos com êstes objetivos. Graças à colaboração da Cia. Editora Nacional — que já tem prestado à parte gráfica dos livros inestimáveis serviços, que se equivalem aos melhores que se conhecem — o atual compêndio da 1.ª Série, tornou-se mais atraente.

Acompanhando as instruções baixadas, em boa hora, pelo Ministério de Educação, no sentido de serem estabelecidas *classes experimentais* no curso secundário de todo o país, cuidamos de provocar (como fizemos, por enquanto com os sistemas de numeração) assuntos onde possam prevalecer noções importantíssimas aos futuros estudos que os ginasianos farão. Por outro lado, o início de um *Laboratório de Matemática*, tão em voga em outros países, viria *completar* a efetivação de um eficiente aprendizado.

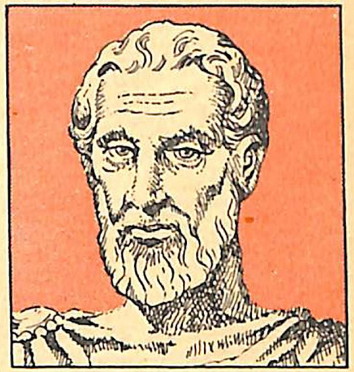
Se cada aluno puder "fabricar", de início, a sua "*caixinha de numeração*" (vide figs.: a e b, pág. 32 a seguir" "*tábuas de operações*", depois estudar as figuras geométricas a partir de "modêlos" por êle manufaturado, então, ao lado dos conhecimentos de Matemática que adquiriu nas aulas, terá no Laboratório uma constante fonte de emulação artística.

Continuaremos profundamente gratos aos professôres que nos honrarem com as suas valiosas apreciações sôbre êste livro.

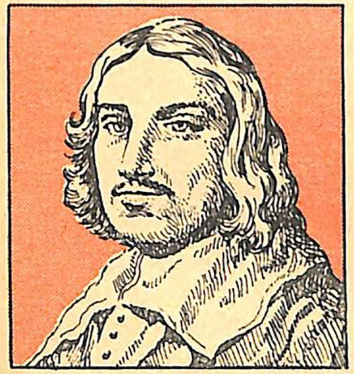
O. SANGIORGI

Rua Macapá, 17
SÃO PAULO

## *Dois grandes estudiosos dos números*



**PITÁGORAS.** Viveu 500 anos antes de Cristo. Matemático, filósofo e místico. Fundou uma irmandade secreta em Crotona (sul da Itália), onde ensinava Matemática. Segundo, lenda a respeito, Pitágoras morreu queimado na sua própria escola pelos fanáticos que se revoltaram contra a instrução que se pretendia dar-lhes. As suas maiores contribuições foram: estabeleceu a *prova* em Matemática e descobriu que os números naturais 1, 2, 3, 4, . . . não eram suficientes para a construção da Matemática. Daí o seu dizer famoso: *tôdas as coisas* são construidas de *números . . . Deus*, declara Pitágoras, é um *número*.



**FERMAT.** (1601-1665) — Um dos maiores matemáticos do século XVII. Contribuiu decisivamente no desenvolvimento da Matemática moderna com grandes criações no cálculo e na geometria. Dedicou tôda a sua vida à Matemática pura e realizou uma monumental obra: *teoria dos números*. Foi o primeiro matemático a aplicar a Geometria Analítica a três dimensões.

CAPÍTULO I

# Números inteiros. Operações fundamentais. Números relativos.

## § 1. Números inteiros.

**1. Sucessão dos números naturais.** Sempre que se considera um conjunto de objetos da mesma espécie, como, por exemplo, uma coleção de figurinhas, uma coleção de livros, um grupo de pessoas ou de animais, surge espontâneamente a idéia de *contá-los*. Recordemos que a *operação de contar* os objetos de uma coleção ou os indivíduos de um grupo, deu origem aos números

*um, dois, três, quatro, cinco, seis* . . . .

que se representam, no *sistema de numeração decimal*, respectivamente, com os símbolos (arábicos):

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

que constituem, nessa ordem, a *sucessão dos números naturais*.

Cada objeto isolado, recebe, na operação de contar, o nome de *unidade*.

Chama-se *sucessivo de um número*, o número que contém uma unidade a mais do que êsse outro. Por exemplo: 5 é sucessivo de 4; 6 é sucessivo de 5.

Como cada número da sucessão natural tem um sucessivo, diz-se que essa sucessão é *infinita*, ou também, que existem *infinitos números naturais*.

É por êsse motivo que ao se representar a sucessão dos números naturais, escrevemos reticências à direita do último número escrito para indicar que existem outros números que o seguem.

**2. Sucessão dos números inteiros.** No caso de não se possuir figurinhas, livros ou não existirem mais pessoas ou animais num determinado lugar, o nome usado para indicar essas ausências de objetos ou indivíduos é *zero*, e o símbolo correspondente 0. Acrescentando aos números naturais o número 0, obtém-se a sucessão:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

denominada *sucessão dos números inteiros.*

**3. Igualdade e desigualdade.** É imediato que:

1.º) Dois números são *iguais* quando ocupam a *mesma posição* na sucessão dos números inteiros. Exemplo:

cinco é *igual* a cinco

Indicação:

$5 = 5$ O sinal $=$ lê-se: "igual a"

2.º) Um número é *maior* do que outro quando *segue* êste outro na sucessão dos números inteiros. Caso contrário diz-se *menor*. Exemplos:

sete é *maior* que quatro (sete *vem depois* do quatro na sucessão);

três é *menor* que oito (três *vem antes* do oito).

Indicações:

$7 > 4$ O sinal $>$ lê-se: "maior que"
$3 < 8$ O sinal $<$ lê-se: "menor que"

Quando um número é *maior* ou *menor* que outro, costuma-se também dizer que êles são *desiguais* ou *diferentes* usando-se a indicação $\neq$. Exemplo:

$7 \neq 4$ (7 "diferente de" 4)

**4. Numeração.** Do fato de existirem infinitos números inteiros (que são o zero e os números naturais) não se pode dar a cada número um *nome especial*, nem representar cada um dêles com um *símbolo especial* diferente, pois, seria impossível imaginar e recordar infinitas palavras e infinitos símbolos. Daí a necessidade de certas regras fixas que permitam ler e escrever um número qualquer com poucas palavras e símbolos.

Chama-se ***sistema de numeração*** *ao conjunto de regras baseadas na reunião de unidades em grupos especiais, denominados ordens, que permitem ler (numeração falada) e representar (numeração escrita) com poucas palavras e símbolos todos os números.*

*Base* de um sistema de numeração é o número de unidades necessárias para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.



**5. Sistema de numeração decimal: escrito e falado.** É aquêle onde os grupos de unidades são formados tomando por *base* o número *dez*. Emprega dez símbolos (*) diferentes para a representação dos números e é o mais usado. Obedece as seguintes regras:

PRIMEIRA REGRA: *Representa-se por um símbolo e atribui-se um nome diferente a cada um dos dez primeiros números inteiros.*

Êstes símbolos e nomes (na língua portuguêsa) são, respectivamente:

**0 (zero); 1 (um); 2 (dois); 3 (três); 4 (quatro); 5 (cinco); 6 (seis); 7 (sete); 8 (oito); 9 (nove);**

chamados *algarismos significativos*, com exceção do 0 (zero) que é denominado *não significativo.*

SEGUNDA REGRA: *Denominam-se:* ***unidade simples*** *ao número* ***um;*** ***dezena*** *ao grupo de dez unidades simples;* ***centena*** *ao grupo de dez dezenas;* ***unidade de milhar*** *ao grupo de dez centenas;* ***dezena de milhar*** *ao grupo de dez unidades de milhar e assim por diante atribuindo-se* ***novo nome*** *tôda vez que se tenha* ***dez unidades*** *de uma* ***ordem imediatamente anterior.*** *As várias ordens se reagrupam por sua vez de três em três e cada grupo é denominado* ***classe.*** *Tem-se assim a* ***classe das unidades simples*** (que compreende as unidades simples, dezenas e centenas), *a* ***classe dos milhares, a classe dos milhões,*** etc.

TERCEIRA REGRA: *Para se escrever um número superior a nove, conhecidas as unidades de cada ordem, escrevem-se de modo que figurem, a partir da direita, em primeiro lugar as*

(*) Tendo sido divulgados pelos *árabes* os símbolos empregados na representação dêsses algarismos, costuma-se usar a designação *arábico* quando nos referimos a êles.

*unidades simples, a seguir as dezenas, depois as centenas, e assim por diante. Caso o número não contenha unidades de uma determinada ordem, escreve-se no lugar correspondente das mesmas o algarismo zero.*

O princípio fundamental da numeração escrita no sistema de numeração decimal é:

**Todo algarismo (arábico) escrito à esquerda de outro representa unidades *dez* vêzes maiores que as dêsse outro.**

Cada algarismo significativo de um número tem dois valores: o *valor absoluto*; que é o valor atribuído ao algarismo isolado do número; e, o *valor relativo*, que é o valor recebido pelo algarismo de acôrdo com o lugar que ocupa no número. Exemplo:

Representar, no sistema de numeração decimal, o número que contenha 4 unidades de milhar, 6 centenas, nenhuma dezena; 2 unidades simples.

Segundo as regras estudadas, temos: 4 6 0 2, onde

| | | |
|---|---|---|
| 2 | — representa as *unidades simples* | valor absoluto: 2<br>valor relativo: 2 |
| 0 | — representa as *dezenas* | |
| 6 | — representa as *centenas* ......... | valor absoluto: 6<br>valor relativo: 600 |
| 4 | — representa as *unidades de milhar* | valor absoluto: 4<br>valor relativo: 4 000 |

Em nossa numeração falada o número 10 chama-se *dez*(*).

Outros nomes usados na *numeração falada*, do sistema de numeração decimal,são:

*onze* (ao invés de se dizer dez e um)
*doze* (ao invés de se dizer dez e dois) e a seguir:
*treze, quatorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove;*
*vinte* (ao invés de se dizer *dois dez* ou duas dezenas)
*trinta* (ao invés de se dizer três dezenas), e a seguir.

(*) Os números de *um* a *dez*, que podem ser contados nos dedos, são chamados *dígitos*.



*quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa;*
*cem* ou *cento* (ao invés de se dizer uma centena).
*duzentos* (ao invés de se dizer duas centenas), e a seguir: *trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos* e *novecentos;*
*mil* (no lugar de se dizer uma unidade de milhar), e a seguir *dois mil*, *três mil*, etc. até *mil mil* que é substituído pela palavra *milhão;*
*bilhão, trilhão, quatrilhão*, . . . são os nomes seguintes, atribuídos às classes que se seguem.

O princípio fundamental da numeração falada no sistema decimal é:

**Decompõe-se o número em grupos de três algarismos (se o número possuir mais de três algarismos) e, em seguida, a partir da esquerda LÊ-SE cada grupo acrescentando-lhe o NOME da classe a que pertence.**

A decomposição de um número em classes de três algarismos é feita com um pequeno intervalo entre os algarismos que separam as classes, não se devendo usar qualquer sinal como o ponto ou a vírgula. Exemplos:

| | |
|---|---|
| 85 307 | que se lê: oitenta e cinco mil, trezentos e sete (unidades). |
| 9 666 201 | que se lê: nove milhões, seiscentos e sessenta e seis mil, duzentos e um (unidades). |
| 3 567 908 315 | que se lê: três bilhões, quinhentos e sessenta e sete milhões, novecentos e oito mil, trezentos e quinze (unidades) (*). |

**6. Numeração escrita romana.** Um outro modo de representar os números, hoje de emprêgo limitadíssimo (paginação de livros, mostradores de relógios, etc.) é o que foi

(*) Não se deve confundir o bilhão português que vale mil milhões com o bilhão espanhol que vale um milhão de milhões. Assim, no exemplo citado, o número 3 567 908 315 seria lido como três mil e quinhentos e sessenta e sete milhões novecentos e oito mil e trezentos e quinze unidades. Êste modo de ler já é resolução aprovada no III Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Rio de Janeiro — Julho 1959) introduzido pelos romanos. Os símbolos usados são letras maiúsculas do alfabeto latino. Valem, respectivamente:

I (um); V (cinco); X (dez); L (cinqüenta); C (cem); D (quinhentos); M (mil).

As *regras* para se escrever (nesse sistema) são:

1.ª) As letras I, X, C e M podem ser repetidas no máximo três vêzes consecutivamente e são as únicas que se repetem.

2.ª) Se uma letra (ou mais) está escrita à direita de outra de maior ou igual valor, *somam-se* os seus valores e se fôr (com exceção de V, L, D, M) escrita à esquerda de outra de valor imediatamente superior, *subtraem-se*.

3.ª) Para aumentar o número mil vêzes o seu valor, coloca-se um traço sôbre a letra, para aumentar um milhão de vêzes colocam-se dois traços e assim sucessivamente. Exemplos:

| | | |
|---|---|---|
| XX vale 20 | IX vale 9 | $\overline{\text{IV}}$DVII vale 4 507 |
| CCC vale 300 | XI vale 11 | MCMLIX vale 1 959 |

**7. Representação geométrica dos números.** É de muita conveniência associar a cada número um *segmento de reta*. Para isso considera-se um segmento qualquer $\overline{AB}$ como *unidade* para representar o número 1; o número 2 será representado por um segmento $\overline{CD}$, *duplo* da unidade $\overline{AB}$; o número 3 por um segumento $\overline{EF}$, *triplo* da unidade, e, assim por diante (fig. 1).


Fig. 1

**8. Representação literal dos números.** Sempre é possível, para facilidade de cálculos futuros, usar *símbolos* que possam representar *números quaisquer*. Assim podemos representar por *a* (ou qualquer outra letra) um número (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . .)

Observação: No *Apêndice* encontra-se *leituras curiosas sôbre os números.*



## EXERCÍCIOS SÔBRE NUMERAÇÃO

1. Determinar os sucessivos dos números: 69; 8 000 000; 5 009 e 443.
2. Escrever com os algarismos arábicos, no sistema de numeração decimal, os seguintes números: três mil e trinta; quatro milhões, duzentos e cinqüenta e seis mil e trezentos e trinta e oito; três bilhões e uma unidade.
3. Qual é o maior e o menor número que se pode escrever com os algarismos 5, 3, 2 e 8, sem repetir nenhum algarismo?
4. Quantos números da sucessão dos números inteiros estão compreendidos entre 13 e 39?
5. Com os algarismos 7, 1 e 3, (sem repetí-los) escrever seis números dispostos em ordem decrescente.
6. O que acontece com o valor relativo de 6, no número 639, quando entre os algarismos da centena e o das dezenas se intercala um zero?
7. Representar geomètricamente os números 3, 4 e 5.
8. Qual é o maior número de cinco algarismos significativos diferentes que se pode escrever no sistema de numeração decimal? Qual o menor?
9. Quando é que trocando a ordem de todos os algarismos de um número êste não muda de valor?
10. Escrever em algarismos romanos os números: 732, 1 409, 8 913, e 6 632 000.
11. Escrever em algarismos arábicos: DCCCIX, $\overline{\text{XI}}$CXXVIII, $\overline{\overline{\text{IV}}}\overline{\text{CCC}}$LX e MMCCII.
12. Qual é o sucessivo do maior número de sete algarismos no sistema de numeração decimal?

(Nota: Ver outros exercícios sôbre numeração, que envolvem as quatro operações fundamentais, no fim do livro, pág. 255)

Respostas:

1. 70; 8 000 001; 5 010 e 444.
2. 3 030; 4 256 338; 3 000 000 001.
3. 8 532 e 2 358.
4. 25.
5. 731, 713, 371, 317, 173 e 137.
6. Fica dez vêzes maior.
7. fig. 2.
8. 98 765 e 12 345.
9. Quando os algarismos forem todos iguais entre si.
10. DCCXXXII, MCDIX, $\overline{\text{VIII}}$CMXIII e $\overline{\overline{\text{VI}}}\overline{\text{DCXXXII}}$
11. 809, 11 128, 4 300 060 e 2 202.
12. 10 000 000 (9 999 999 + 1)

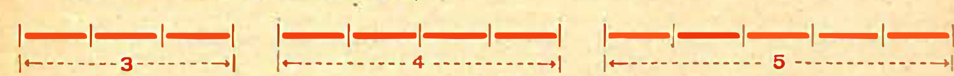



Fig. 2

## Curiosidades históricas sôbre numeração

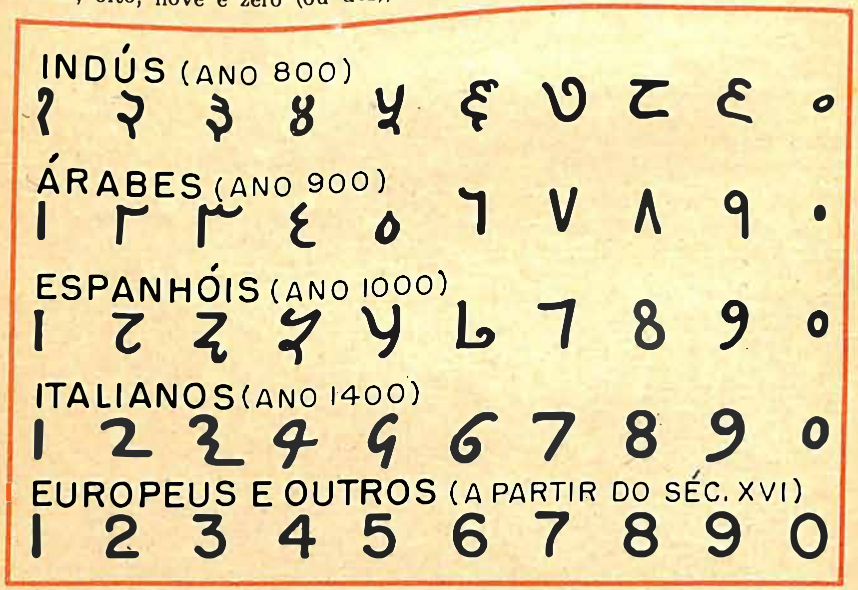
Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, impròpriamente denominados *arábicos*, são de origem *indiana* e foram inventados cêrca de 500 anos depois de Cristo juntamente com o *zero* e com o *sistema de numeração decimal*. Basta lembrar que os símbolos 4, 5, 6, 7 e 8 têm sua origem das letras iniciais das palavras correspondentes ao alfabeto indú. Todavia, foram os *árabes* que os introduziram na Europa, a partir do século VIII d. C.

Os *gregos* e os *romanos* representavam os números servindo-se também de letras dos respectivos alfabetos. Assim, os gregos usavam as letras minúsculas:

α (um) ; β (dois) ; γ (três) ; δ (quatro) .......... χ (dez)
(lê-se: *alfa*) (lê-se: *bêta*) (lê-se: *gama*) (lê-se: *delta*) (lê-se: *capa*)

Os romanos, como já foi visto à pág. 28, usavam as letras maiúsculas:
*I* (um) ; *V* (cinco) ; *X* (dez) ; *C* (cem) ; *D* (quinhentos) ; *M* (mil)

Vejamos, agora, como escrevem: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e zero (ou dez), a maioria dos povos civilizados:




Observemos que o algarismo *sete* (7) nunca apareceu cortado (7̶) como muitos costumam fazer.



Japoneses, Chineses(*): 一, 二, 三, 四, 五, 六, 七, 八, 九, 十

Como curiosidade vamos escrever o número três mil quinhentos e setenta e nove, da maneira como o fazem atualmente os diversos povos civilizados:

3 579 (Europeus, americanos, etc. . . . . . )

٣،٥٧٩ (Árabes) — NOTA: embora a escrita árabe seja feita da direita para a esquerda os algarismos, são escritos da esquerda para à direita, sendo separados em grupos de três por uma vírgula (invertida).

三、五七九 (Japoneses) — NOTA: Os japoneses (chineses) escrevem os números de cima para baixo em coluna vertical e, modernamente, separam em grupos de três, mediante um *ponto* (**).

Como exercício escrevam: mil novecentos e sessenta; trinta e oito; quatrocentos e quinze. Qual é o número escrito: ٣٦،٥٨٨ ?

## Classes Experimentais — Laboratório de Matemática

Com relação à *numeração* seria útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª série ginasial a possibilidade de *outros* sistemas de numeração. A finalidade é propiciar um contacto com as primeiras idéias de *grupo* e de *ordem* que, sem dúvida, constituem tôda a base da matemática moderna.

Já foi estudado o sistema de numeração decimal (base 10). Se em lugar de 10 tomarmos por base *outro número* qualquer, de 2 em diante (por ex.: 2, 3, 4, 5, . . . . .) obteremos *outros sistemas de numeração*, denominados respectivamente, *binário*, *ternário*, *quaternário*, . . . . , para os quais valem princípios semelhantes aos estabelecidos para o sistema decimal. Assim, por exemplo, no caso do sistema ser *quaternário* (base 4), os princípios seriam os seguintes:

1) *Quatro* unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior;

(*) Chineses com pequiníssimas variações.

(**) Atualmente no Japão, já prevalece o uso dos caracteres de algarismos arábicos para o sistema de numeração (idêntico ao nosso) bem como os caracteres latinos para as letras em substituição aos ideogramas japoneses que passariam a ter sòmente valor tradicional. (Informação do Instituto de Cultura e Pesquisa Hokusai — 1959).

2) Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes* maiores que as representadas por aquele;

3) Com *quatro* algarismos (0, 1, 2, 3) são escritos todos os números.

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que veria despertar novo interêsse pelo conhecimento das ciências exatas, poderia ser feita através da contagem, em qualquer sistema de numeração, dos elementos de um grupo, respeitadas as *ordens* correspondentes a tal contagem. Provàvelmente estaríamos empregando processo semelhante ao que o homem primitivo usou para contar seus rebanhos ou os elementos de sua tribo.

Vamos, pois, contar fazendo a seguinte "experiência": tomemos uma caixa (pode ser de papelão, madeira, . . . ou uma série de caixas de fósforos ligadas entre si) que conste de repartições iguais (conforme fig. *a*) e que chamaremos de "*casas*", na seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª *casa*, 2.ª *casa*, 3.ª *casa*, . . . . . .

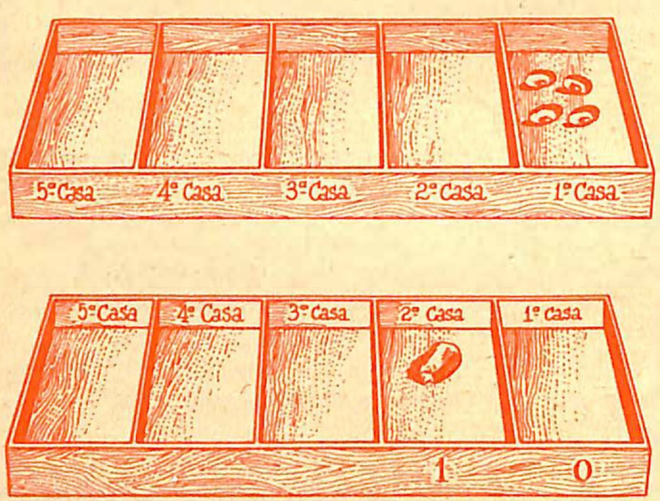



FIG. a



Suponhamos que possuímos um conjunto de *feijões* os quais desejamos contar no sistema de base *quatro*. Procedemos da seguinte maneira: Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixa, até o máximo de 4; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramo-los a todos e colocamos apenas um feijão na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por ex.), a fim de melhor caracterizar que agora são unidades de ordem imediatamente superior. Para representar que a 1.ª casa (ou qualquer outra) não possui *nenhum* elemento, isto é, que representa um conjunto "vazio" de elementos, usaremos o símbolo 0 (zero). Nestas condições, as duas representações (fig. *a*) se equivalem: e se tivéssemos contando sòmente 4 feijões o número que, no sistema de base 4, representaria êste fato seria:

**10** (lê-se "um-zero" e não "dez" que é leitura para o sistema decimal)

Caso tenhamos mais feijões para contar continuamos a proceder da mesma maneira, isto é, colocamos feijões outra vez na 1.ª casa até o máximo de 4, quando então os retiramos para colocar mais um grão de milho na 2.ª casa. E assim fazemos sucessivamente até que a 2.ª casa tenha atingido também um máximo de 4 grãos de milho. Neste instante os retiraremos da 2.ª casa para colocar apenas um "grão de bico" (ou outro qualquer, de preferência maior que o de milho) na casa seguinte, ou seja, a 3.ª casa. Caso tenhamos ainda feijões para contar (sempre no sistema de base 4) procederemos de modo análogo.

O grupo de feijões (fig. *b*, que são 39 no sistema decimal), contado no sistema *quaternário* dá, com o método ensinado (*) o número 213 (lê-se "dois-um-três", ou um outro nome que se queira convencionar)

Cada aluno, portanto, pode "fabricar" a sua *caixinha de numeração*, para o Laboratório de Matemática que se

(*) Método que está sendo usado na *Classe experimental* (1.ª Série Ginasial, do Prof. Scipione Di Pierro Netto) do Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia, da Universidade de São Paulo).

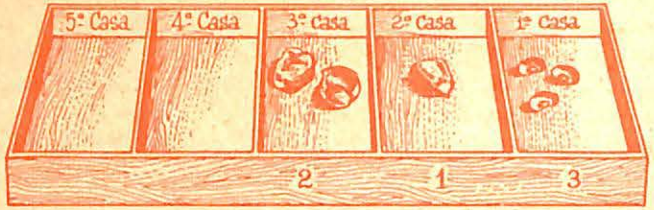



FIG. b

inicia, e aplicá-la na contagem dos elementos de qualquer grupo. Como exemplo de aplicação sugerimos que cada aluno conte, com a sua *caixinha de numeração*, os colegas de sua classe, nos diversos sistemas de numeração que achar conveniente.

## § 2. Operações fundamentais com os números inteiros.

### ADIÇÃO

1. **Definição.** *Adição é a operação que tem por fim reunir em um só número tôdas as unidades de dois ou mais números dados.*

O resultado da operação chama-se *soma* ou *total* e os números que se somam, *parcelas* ou *têrmos*. A indicação da adição é feita com o sinal + que se lê: *mais*. Exemplos:

$$\underbrace{3 + 5 + 2}_{\text{(parcelas)}} = 10 \quad \text{(soma ou total)}$$

$a + b + c = s$ (onde $a$, $b$ e $c$ representam números quaisquer e $s$ a soma dêles.)

2. **Propriedades.** 1.ª) Uniforme. — *A adição conduz sempre a um só resultado.* Exemplo:

4 + 9 apresenta só um resultado que é 13.



2.ª) Comutativa. — *A ordem das parcelas não altera a soma.* Exemplos:

$$5 + 3 = 3 + 5$$
$$6 + 8 + 1 = 8 + 6 + 1 = 1 + 8 + 6$$

e de um modo geral:

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b$$

3.ª) Associativa. — *A soma de vários números não se altera se se substituem algumas de suas parcelas pela sua soma efetuada.*

Os sinais empregados para as associações das parcelas de uma adição são:

( ) denominado *parêntese.*

[ ] denominado *colchete.*

{ } denominado *chave.*

Exemplos: $8 + 3 + 5 = (8+3) + 5 = 11 + 5$

$13 + 5 + 2 + 7 = (13+5) + (2+7) = 18 + 9$

e de um modo geral: $a + b + c = (a+b) + c$

4.ª) Dissociativa. — *Em tôda soma pode-se substituir uma parcela por outras cuja soma seja igual a ela.* Esta propriedade é de sentido contrário da anterior. Exemplos:

$$9 + 3 + 8 = (5+4) + 3 + 8$$
$$(a+b) + c = a + b + c$$

Observações:

1.ª) Os parênteses são colocados numa adição graças à propriedade associativa e retirados pela propriedade dissociativa.

2.ª) O zero como parcela não altera a soma e por isso pode ser retirado. Exemplo:

$$20 + 7 + 0 + 3 = 20 + 7 + 3$$

3. **Cálculo mental.** É o que permite efetuar as operações sem necessidade de se escrever. No caso da adição usam-se as propriedades estudadas. Exemplo:

Efetuar a soma: 315 + 23

Pela propriedade dissociativa, calcula-se mentalmente pela decomposição:

310 + 5 + 20 + 3

ou 310 + 20 + 5 + 3 (propriedade comutativa)

ou 330 + 8 (propriedade associativa)

isto é 338

4. **Regra prática para efetuar a adição.** Para somar diversos números inteiros, escrevem-se uns em baixo dos outros, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos de mesma ordem; somam-se em seguida os algarismos da última coluna, à direita, escrevendo-se em baixo desta coluna o algarismo que representa as unidades simples desta soma e as dezenas, caso existam, somam-se com os algarismos da coluna das dezenas. Procede-se da mesma forma até à última coluna à esquerda quando se obtém o resultado total. Exemplo:

Efetuar a soma:

3 415 + 817 + 28 012

*Disposição do cálculo.*

$$\begin{array}{r} 3\,415 \\ 817 \; + \\ \underline{28\,012} \\ 32\,244 \end{array}$$

5. **Prova.** Consiste em verificar a possível exatidão da operação. A prova da adição está baseada na propriedade comutativa, por meio da qual se refaz a operação, depois de se ter trocado a ordem das parcelas (na prática isto equivale



a fazer a adição debaixo para cima). Se a adição estiver certa, deve-se encontrar o mesmo resultado. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\,024 \\ 20\,132 \; + \\ \underline{89} \\ 21\,245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89 \\ 20\,132 \; + \\ \underline{1\,024} \\ 21\,245 \end{array}$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE A ADIÇÃO

1. Aplicar as três primeiras propriedades da adição na soma: 218+34+13.
2. Usando a propriedade comutativa, de quantos modos se pode somar os números $x$, $y$ e $z$?
3. O que acontece a uma adição de três parcelas quando se soma 2 à primeira parcela, 3 à segunda e 4 à terceira?
4. Somando-se um certo número a um outro obtém-se como soma êsse outro. Qual foi o número somado?
5. Dada uma adição de cinco parcelas, de quanto aumenta a soma acrescentando-se 6 a cada parcela?
6. Calcular a soma dos cinco primeiros números sucessivos de 18.
7. De quanto aumenta uma soma de três números adicionando-se 5 aos algarismos das unidades e 4 aos algarismos das dezenas de cada parcela?
8. Calcular a soma de quatro números, sabendo-se que o primeiro é 13 e os seguintes valem o dôbro do antreior.
9. Um homem aos 28 anos torna-se pai. Quantos anos terá o pai quando o seu filho tiver 31?
10. Qual é o número que tem 483 unidades a mais do que o número 26?
11. Uma loja foi adquirida por Cr$ 380 000,00. Gastou-se em consertos Cr$ 36 000,00 e a loja foi revendida com um lucro de Cr$ 52 000,00. Por quanto foi vendida a loja?
12. Quantos dias existem entre 10 de março e 15 de junho, inclusive os dias extremos?
13. Sabendo-se que foram lançados em: 1957 — 2 satélites artificiais, com o pêso total de 591,900 kg; 1958 — 5 satélites artificiais com o pêso total de 4 019,400 kg e 1 foguete de sondagem lunar; 1959 — 1 foguete de sondagem extra lunar e 2 planetas artificiais (sistema solar), pergunta-se o total de astros artificiaisis lançados de 1957 a 1959 e o pêso total dos satélites artificiais.
14. Tenho dois colegas que possuem, cada um dêles, um rádio de pilhas de 6 "transistores". Eu possúo um rádio de pilhas, com faixa de

ondas curtas, que possui um "transistor" a mais que o de meus colegas. Qual o total de "transístores" de nossos rádios?

15. Na cadeira de Matemática de minha classe experimental somos obrigados a entregar, cada um, 2 trabalhos escritos na primeira semana; 3 na segunda semana e assim sucessivamente até terminar o mês. Quantos trabalhos escritos precisarei entregar em dois meses?

RESPOSTAS:

1. Uniforme: $218 + 34 + 13 = 265$ (resultado único);
   Comutativa: $218+34+13=34+13+218=13+218+34=13+34+$ $+218$ etc...
   Associativa: $218+34+13=(218+34)+13$
2. 6 modos.
3. Aumenta de 9.
4. 0 (zero)
5. Aumenta de 30
6. 105
7. 135
8. 195
9. 59 anos.
10. 509
11. Cr$ 468 000,00
12. 98 dias.
13. 9 astros art. (não se contam os foguetes); 4 611,300 kg
14. 13
15. 28

## SUBTRAÇÃO

1. **Definição.** *Chama-se* ***diferença*** *de dois números, dados numa certa ordem, um terceiro número que, somado ao segundo, dá para resultado o primeiro.*

O primeiro número chama-se *minuendo*, o segundo *subtraendo*, e a operação que permite encontrar a diferença dos dois, *subtração;* e é *inversa* da adição.

O minuendo e o subtraendo dizem-se também *têrmos* da subtração, e a diferença também é chamada *resto* ou *excesso*. A subtração é indicada com o sinal – que se lê: *menos*. Exemplos:

$$8 - 5 = 3 \quad \text{pois} \quad 3 + 5 = 8$$
$$a - b = c \quad \text{quando} \quad c + b = a$$

2. **Condição de possibilidade.** Como o minuendo é a soma do subtraendo com a diferença, segue-se que o minuendo



deve ser maior ou igual ao subtraendo. Logo: *a subtração de dois números só é possível se o minuendo fôr igual ou maior que o subtraendo.*

3. **Propriedades.** 1.ª) UNIFORME. *A subtração conduz a um único resultado.*

2.ª) *Somando, ou subtraindo, um mesmo número aos têrmos de uma subtração, a diferença não se altera.* Exemplo:

Seja a diferença: $15 - 8 = 7$

Somando 4 aos seus dois têrmos, teremos:

$$(15+4) - (8+4) = 19 - 12 = 7$$

ou subtraindo 5 aos dois têrmos:

$$(15 - 5) - (8 - 5) = 10 - 3 = 7$$

Em ambos os casos, notamos que a *diferença não se alterou*

3.ª) *A subtração não é comutativa.* Exemplo:

$$7 - 4 \neq 4 - 7$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se o minuendo fôr igual ao subtraendo a diferença é zero. Exemplo:

$$6 - 6 = 0$$

2.ª) Se o subtraendo fôr zero, a diferença é igual ao minuendo. Exemplo:

$$8 - 0 = 8$$

4. **Regra prática para efetuar a subtração.** Para efetuar a subtração de dois números, escreve-se o subtraendo por baixo do minuendo, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos de mesma ordem. Em seguida subtrai-se de cada algarismo do minuendo, a partir da direita, o algarismo correspondente do subtraendo. Se o algarismo do minuendo fôr menor que o do subtraendo tomamos uma unidade de ordem imediatamente superior e juntamô-la ao algarismo da ordem em questão, podendo assim continuar a operação. Exemplo:

Efetuar a subtração:

8 563 – 3 928

*Disposição do cálculo:*

| 8 563 |
|---|
| 3 928 |
| 4 635 |

*Operações:*

13 – 8 = *5* (tomando 1 de 6 que se reduz a 5), logo 5 – 2 = 3

15 – 9 = *6* (tomando 1 de 8 que se reduz a 7), logo 7 – 3 = *4*

e o resultado será: 4 635

**5. Prova.** É feita somando-se o *resto* ao *subtraendo*. Se a operação estiver certa, deve-se obter o *minuendo*.

**6. Complemento aritmético de um número.** APLICAÇÃO. Chama-se *complemento aritmético de um dado número* à diferença entre a unidade de ordem decimal imediatamente superior a êsse número e o número dado. Exemplos:

O complemento aritmético de: 3 é 7 (10 – 3 = 7)
O complemento aritmético de: 49 é 51 (100 – 49 = 51)
O complemento aritmético de: 694 é 306 (1 000 – 694 = 306)

Para se obter o complemento aritmético de um número, basta subtrair, a partir da esquerda, todos os algarismos de 9 com exceção do último significativo que se subtrai de 10. Exemplo:

Determinar o complemento aritmético de 4 217.

| 9 | 9 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 | 7 |
| 5 | 7 | 8 | 3 |

Dada a facilidade da operação, essa subtração é sempre feita *mentalmente*. O complemento aritmético de 4 217 é 5 783.

O conhecimento do complemento aritmético de um número traz a seguinte *aplicação* no cálculo (*): *pode-se efetuar a subtração de dois números, dados numa certa ordem,* ***somando-se*** *o primeiro dos números com o complemento aritmético do segundo,*

(*) Na Matemática, as primeiras operações, eram efetuadas com pequenas pedras que, em latim, denominavam-se *cálculi*. Daí o nome *cálculo* que se emprega atualmente. Os médicos chamam *cálculos* a certas pedras que se encontram em organismos enfermos.



*e, subtraindo-se do total a unidade decimal que se utilizou para determinação dêsse complemento.* Exemplos:

1. Efetuar a diferença: 392 – 287

Temos:

$$\begin{array}{r} 392 \\ -\ \underline{287} \end{array} \quad \text{ou} \quad + \begin{array}{r} 392 \\ \underline{713} \\ 1\ \mathbf{105} \end{array} \ \text{(complemento de 287)}$$

A diferença é igual a 105.

2. Efetuar a diferença:

4 317 – 2 935

Temos:

$$+ \begin{array}{r} 4317 \\ \underline{7065} \\ 1\ \mathbf{1382} \end{array} \ \text{(complemento de 2935)}$$

A diferença é igual a 1382.

## EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

**Definição.** *Expressão aritmética é um conjunto de números reunidos entre si por sinais de operações.*

O cálculo de uma expressão aritmética, que envolve adições e subtrações, é feito efetuando-se as várias operações na ordem em que são indicadas, (desde que a subtração seja possível), devendo-se notar que são *feitas primeiramente* as operações indicadas entreparênteses, em seguida as operações indicadas entre colchetes, depois as indicadas entre chaves e assim por diante. Exemplos:

1. Calcular o valor da expressão aritmética:

35 – [4+(5 – 3)]

Temos: 35 – [4+2] = (efetuando-se 5 – 3 = 2).
= 35 – 6 = (efetuando-se 4+2 = 6).
= 29.

2. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$86 - \{26 - [8 - (2+5)]\}$$

Temos:

$86 - \{26 - [8 - 7]\} =$ (efetuando-se $2+5 = 7$)

$= 86 - \{26 - 1\} =$ (efetuando-se $8 - 7 = 1$)

$= 86 - 25 =$ (efetuando-se $26 - 1 = 25$)

$= 61.$

3. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$53 - \{[48+(7-3)] - [(27-2) - (7+8+10)]\}$$

Temos:

$53 - \{[48+4] - [25 - 25]\} =$

$= 53 - \{52 - 0\} =$

$= 53 - 52 =$

$= 1.$

(NOTA: Ver outras expressões numéricas no fim do livro, pág. 245)

## EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

1. Que número representam as expressões:
   1.º) $a - b$ se $a = 40$ e $b = 12$
   2.º) $a - [(b + c) + d]$ se $a = 52$. $b = 12$, $c = 8$ e $d = 5$
   3.º) $[m + (n + p)] - [(p + m) - n]$ se $m = 4$, $n = 3$, e $p = 10$
2. Nas subtrações que se seguem colocar no lugar das letras um número tal que o resultado indicado seja verdadeiro:
   1.º) $a - 326 = 154$  3.º) $0 = y - 32$
   2.º) $10\,001 - x = 839$  4.º) $x - 5 = 12 - 5$

   Calcular o valor das seguintes expressões aritméticas:
   1.º) $(12 + 3) - (4 + 8)$
   2.º) $14 + \{8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)]\} - 1$
   3.º) $\{213 - [(14 + 7) - (11 - 3)]\} - [(8 + 5) - [6 - (10 - 9)]]$
4. Qual é o número que somado com 1 836 resulta 18 001 003?
5. Em que ano completou 32 anos uma pessoa que tem 75 anos atualmente (1960)?
6. Se Antônio der a João Cr$ 28,00, ambos ficam com Cr$ 70,00. Quanto tinha cada um?



7. Se Pedro der a Rubens Cr$ 50,00, ambos ficam com a mesma quantia. Se Rubens der a Pedro Cr$ 50,00 acaba ficando sem nada. Quanto possuía cada um?
8. Deve-se repartir Cr$ 14 030,00 por três pessoas. A primeira recebe Cr$ 4 315,00, a segunda recebe Cr$ 2 400,00 mais que a primeira. Quanto deve receber a terceira?
9. Em uma adição se subtrai 8 de duas parcelas e se soma 5 a uma outra parcela. Que alteração sofre a adição?
10. Exprimir por meio de símbolos os dois primeiros números inteiros sucessivos de um número inteiro quaquer $a$. Qual é a diferença entre êles?
11. Que alteração sofre o *resto* de uma subtração quando se somam 15 unidades ao minuendo?
12. Qual a *diferença* entre o maior número e o menor número escritos com 3 algarismos arábicos?
13. O satélite artificial "Sputnik" pesou 83,600 kg e atingiu a altura máxima de 900 km, enquanto que o satélite artificial "Explorer I" pesou 13,800 kg e atingiu a altura máxima de 2 415,800 km. Quais as diferenças entre os pesos dêsses satélites e entre as altitudes máximas atingidas?
14. Determinar os complementos aritméticos respectivos dos números: 12, 317, 683, 1 813 e 25 400.
15. Efetuar as seguintes subtrações, aplicando os complementos:
    1.ª) 2 312 − 987;  2.ª) 45 568 − 32 700.

RESPOSTAS:

1. 1.º) 28;  2.º) 27;  3.º) 6
2. 1.º) $a = 480$;  2.º) $x = 9\,162$;  3.º) $y = 32$;  4.º) $x = 12$
3. 1.º) 3;  2.º) 20;  3.º) 192
4. 17 999 167
5. 1917
6. Antônio Cr$ 98,00 e João Cr$ 42,00.
7. Pedro Cr$ 150,00 e Rubens Cr$ 50,00.
8. Cr$ 3 000,00.
9. Diminui de 11.
10. $a + 1$ e $a + 2$. A diferença entre êles é 1.
11. Aumenta 15 unidades.
12. 899
13. 69,800 kg e 1 515,800 km.
14. 88; 683; 317; 8 187; 74 600.
15. 1.ª) 1 325;  2.ª) 12 868.

## MULTIPLICAÇÃO

1. *Multiplicar é somar parcelas iguais.* Seja por exemplo:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Nessa adição a parcela que se repete ou multiplica (4) é chamada *multiplicando*, o número de vêzes que aparece (3) é chamado *multiplicador* e o resultado *produto* (12 no exemplo).

2. **Definição.** *Multiplicação é a operação que tem por fim, dados dois números, um chamado multiplicando e outro multiplicador, formar um terceiro somando o primeiro tantas vêzes quantas forem as unidades do segundo.*

A multiplicação é indicada com o sinal $\times$ que se coloca entre os dois números, que se dizem *fatôres*, e se lê: *multiplicado por.* Exemplo:

$4 \times 3$ que se lê: "quatro multiplicado por três".

Costuma-se, também, indicar a multiplicação de dois números por um ponto colocado entre os fatôres. Assim, no exemplo acima, temos: $4 \,.\, 3$.

3. **Observações:** 1.ª) Quando o multiplicando é 0 o produto é nulo. Exemplo:

$$0 \times 5 = 0, \text{ pois } 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

2.ª) Quando o multiplicando é 1 o produto é igual ao multiplicador. Exemplo:

$$1 \times 4 = 4, \text{ pois } 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

4. **Propriedades.** 1.ª) Uniforme. *A multiplicação conduz a um só resultado.*

2.ª) Comutativa. *A ordem dos fatôres não altera o produto.*

De fato: $4 \times 3 = 12$ e $3 \times 4 = 12$

e portanto, sendo iguais os dois resultados, temos:

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$



Nota: Em virtude dos números 1 e 0 não terem sentido como *multiplicadores*, pois, não podemos *repetir* o multiplicando "uma vez" ou "zero vez", usaremos a propriedade comutativa para justificar a convenção que atribui a êsses produtos, respectivamente, o valor do próprio multiplicando e zero. Assim, por exemplo:

$$4 \times 1 = 1 \times 4 = 4$$
$$5 \times 0 = 0 \times 5 = 0$$

3.ª) Distributiva em relação à soma e à diferença. *Para multiplicar uma soma, ou uma diferença indicada, por um número, multiplica-se cada uma de suas parcelas ou têrmos por êsse número, e em seguida somam-se, ou subtraem-se, os resultados.* Exemplos:

1) $(4+5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3$

2) $(7-4) \times 5 = 7 \times 5 - 4 \times 5$

Esta propriedade é chamada *distributiva* porque o multiplicador se *distribui* por todos os têrmos.

4.ª) *Para multiplicar uma soma por outra, pode-se multiplicar cada parcela da primeira, respectivamente, pelas parcelas da segunda e somar os produtos obtidos.* Exemplo:

$$(6+3) \times (2+5) = 6 \times 2 + 6 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 5$$

Nota: Anàlogamente se poderá dizer da multiplicação de uma *soma* por uma *diferença* e de uma *diferença* por uma *diferença*.

5. **Regras práticas para se efetuar a multiplicação.**

1.ª) A multiplicação de dois números de um só algarismo é feita de memória. Os resultados destas multiplicações encontram-se na *Tábua de multiplicar de Pitágoras* (fig. 3).

2.ª) A multiplicação de um número qualquer por um outro de um só algarismo é feita multiplicando-se o valor absoluto dêsse algarismo pelo de cada algarismo daquele, a partir da direita. De cada produto parcial escreve-se o algarismo das unidades enquanto que as dezenas se juntam ao produto parcial sucessivo. O último produto obtido escreve-se por completo.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Fig. 3

*Disposição prática:*

$$\begin{array}{r} 8\,329 \\ \times\ 7 \\ \hline 58\,303 \end{array}$$

3.ª) A multiplicação de um número por 10, 100, 1 000, etc. é feita escrevendo-se à sua direita 1, 2, 3, etc. zeros. Exemplos:

$$5 \times 10 = 50$$
$$5 \times 100 = 500$$
$$5 \times 1\,000 = 5\,000$$

4.ª) A multiplicação de um número por outro representado por um algarismo acompanhado de zeros é feita multiplicando-se o número pelo valor absoluto do algarismo e escrevendo-se os zeros à direita do resultado.
Exemplo:

$218 \times 400 = 87\,200$ $(218 \times 4$ e colocam-se dois zeros)



5.ª) A multiplicação de dois números quaisquer é feita multiplicando-se um dêles pelo valor absoluto de cada algarismo do outro, a partir da direita, (de acôrdo com a segunda regra) e dispondo-se os vários produtos parciais em colunas de modo que cada algarismo das unidades dêsses produtos parciais esteja debaixo do algarismo das dezenas do produto precedente. Em seguida somam-se os resultados dos vários produtos parciais obtidos.

*Disposição prática:*

$$\begin{array}{r} 56\,387 \\ \times\ 158 \\ \hline 451\,096 \\ 2\,819\,35\phantom{0} \\ 5\,638\,7\phantom{00} \\ \hline 89\,091\,46 \end{array}$$

6. **Prova.** A prova da multiplicação é feita refazendo-se a operação depois de trocada a ordem dos fatôres. Pela propriedade comutativa, deve-se encontrar o mesmo resultado se a operação estiver certa.

7. **Produto de vários fatôres.** Dados vários números reunidos entre si pelos sinais de multiplicação, chama-se *produto de vários fatôres* o resultado que se obtém multiplicando-se o primeiro fator pelo segundo, o resultado pelo terceiro e assim por diante. Exemplo:

$$5 \times 3 \times 2 \times 6 = 15 \times 2 \times 6 = 30 \times 6 = 180$$

Num produto de vários fatôres, temos as seguintes *propriedades:*

1.ª) A ordem com que os fatôres figuram no produto não altera o resultado. (Propriedade *comutativa*) Exemplo:

$$8 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 3 \times 8 \times 7 = 7 \times 5 \times 3 \times 8$$

2.ª) Pode-se substituir dois ou mais fatôres pelo seu produto. (Propriedade *associativa*). Exemplo:

$$3 \times \mathit{5} \times \mathit{4} \times 7 = 3 \times \mathit{20} \times 7$$

3.ª) Se um dos fatôres é zero, o produto será nulo. (Propriedade do *anulamento*). Exemplo:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 0$$

De fato:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 35 \times 0 \times 8 = 0 \times 8 = 0$$

4.ª) Se um dos fatôres é 1, pode-se desprezá-lo no produto. Exemplo:

$$8 \times 5 \times 1 \times 4 = 8 \times 5 \times 4$$

**8. Múltiplos de um número.** Chama-se *múltiplo de um número* o produto dêste número por outro número inteiro qualquer. Exemplo:

$5 \times 4 = 20$ e portanto 20 é múltiplo de 5 (ou de 4).

Todos os múltiplos de um número são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem a sucessão dos números inteiros. Assim, por exemplo, os múltiplos de 5 são:

$5 \times 0 = 0$; $5 \times 1 = 5$; $5 \times 2 = 10$; $5 \times 3 = 15$; .... .... e de um modo geral $5 \times m$, onde $m$ é um número inteiro qualquer. Dessa forma, é fácil ver, que qualquer número tem uma *infinidade de múltiplos*.

Os múltiplos de 2:

$2 \times 0 = 0$; $2 \times 1 = 2$; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 6$; ..... e de um modo geral $2 \times m$, são chamados *pares*, e os demais múltiplos que, necessàriamente terminam em:

1, 3, 5, 7 e 9

são denominados *ímpares*.

Observando-se que cada um dos números ímpares é o *sucessivo* de um número par na *sucessão dos números inteiros*, conclui-se que a forma geral dos números ímpares é $2 \times m + 1$.

Notamos ainda que:

1.º) *O zero é múltiplo de todos os números.*

De fato: 0 é múltiplo de 2 $(2 \times 0 = 0)$.
0 é múltiplo de 3 $(3 \times 0 = 0)$.
etc.



2.º) *Todo número é múltiplo de si próprio e da unidade.*

De fato: 2 é múltiplo de 2 $(2 \times 1 = 2)$.
2 é múltiplo de 1 $(2 \times 1 = 2)$.
etc.

**9. Expressões aritméticas contendo adições, subtrações e multiplicações.** O cálculo dessas expressões é feito efetuando-se, *primeiramente*, as *multiplicações*, *depois* as *adições* e *subtrações*.

Assim, na expressão:

$$4 + 7 \times 3$$

efetua-se primeiramente a multiplicação $(7 \times 3 = 21)$, e, em seguida, a adição $(4 + 21 = 25)$.

Logo: $4 + 7 \times 3 = 25$

No caso da expressão conter operações indicadas entre parênteses, colchetes ou chaves, efetuam-se inicialmente, as operações indicadas nos parênteses mais internos, em seguida as contidas entre colchetes e depois as que estiverem entre chaves. Exemplos:

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$5 \times (8+3) + 4 \times 2$$

Temos:
$$\begin{aligned} & 5 \times 11 + 8 = \\ =\; & 55 + 8 = \\ =\; & 63 \end{aligned}$$

2) *Calcular o valor da expressão:*

$$51 - [(7-3) \times 4 + 5 \times (4+3)]$$

Temos:
$$\begin{aligned} & 51 - [4 \times 4 + 5 \times 7] = \\ =\; & 51 - [16 + 35] = \\ =\; & 51 - 51 = \\ =\; & 0. \end{aligned}$$

3) *Calcular o valor da expressão:*

$$18 - \{6 + [9\times(5-2) - (10-3)\times3]\}$$

Temos:
$$18 - \{6 + [9\times3 - 7\times3]\} =$$
$$= 18 - \{6 + [27 - 21]\} =$$
$$= 18 - \{6 + 6\} =$$
$$= 18 - 12 =$$
$$= 6.$$

4) *Calcular o valor da expressão:*

$$26 + 5 \times [14 + 7\times(8 - 2\times3) - (3+5-2)\times4]$$

Temos:
$$26 + 5 \times [14 + 7\times(8-6) - (8-2)\times4] =$$
$$= 26 + 5 \times [14 + 7\times2 - 6\times4] =$$
$$= 26 + 5 \times [14 + 14 - 24] =$$
$$= 26 + 5 \times [28 - 24] =$$
$$= 26 + 5 \times 4 =$$
$$= 26 + 20 =$$
$$= 46.$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

1. Aplicando as propriedades da multiplicação, efetuar, *mentalmente*, as multiplicações:
   1.ª) $150 \times 40$ 3.ª) $9 \times 2 \times 5 \times 7$
   2.ª) $20 \times 32\,000$ 4.ª) $12 \times 50 \times 2$
2. Aplicar a propriedade distributiva no cáculo das seguintes expressões:
   1.ª) $(18 + 3) \times 7$ 3.ª) $(9 + 6) \times (3 + 2)$
   2.ª) $(7 + 11 - 6) \times 5$ 4.ª) $(2 + 3 + 5) \times (4 + 2 + 1)$
3. Calcular o valor das seguintes expressões:
   1.ª) $(25 - 3 \times 8) + 5 \times 2$
   2.ª) $36 + 3 \times [15 + 7 \times (3 + 2) - 12 \times (9 - 7)] + 4 \times (5 + 1 \times 4)$
   3.ª) $(25 - 3 \times 7) \times [14 + 3 \times (12 - 3 \times 3) - 4 \times 2] - 4 \times (12 - 2 \times 6)$
   4.ª) $5 + 3 \times \{11 + 6 \times [11 + 4 \times (8 - 3)] - 2 \times (7 - 5)\} - 7 \times 2$
   5.ª) $(8 + 5 \times 3) \times \{103 + 5 \times [37 - 3 \times (5 + 4)] - 53 \times (7 - 3 \times 2)\}$



4. Num produto de dois fatôres um dêles é 12. Aumentando-se o outro fator de 6 unidades, que alteração sofre o produto?
5. A soma de dois números é 15. Multiplicando-se êsses números por 4, o que acontece a essa soma?
6. Num produto de vários fatôres multiplicando-se um dêles por 3 e outro por 5, por quanto vem multiplicado o produto?
7. Qual é o número que se deve somar a 69 para se ter 10 vêzes o valor de 69?
8. Quantos segundos tem um ano, sabendo-se que um ano tem 365 dias, o dia tem 24 horas, a horas tem 60 minutos e o minuto 60 segundos?
9. Um comerciante comprou 85 metros de fazenda a Cr$ 48,00 o metro. Revende 30 metros dessa fazenda ao preço de Cr$ 62,00 o metro e o restante a Cr$ 65,00 o metro. Quanto ganhou o comerciante nesse negócio?
10. Cai um raio e dèpois de 6 segundos ouve-se o estrondo. A que distância caiu o raio, sabendo-se que o som percorre 340 metros por segundo?
11. Tem o mesmo número de letras uma página de 38 linhas de 60 letras cada linha e outra de 60 linhas de 38 letras cada linha? Por quê?
12. Um recipiente tem a capacidade de 10 000 litros. Uma torneira despeja 30 litros de água por minuto e uma outra 28 litros. Pergunta-se quantos litros de água faltam para encher êsse reservatório, se a primeira torneira ficou aberta 120 minutos e a segunda 150?
13. Sendo a . b = 60 e usando a propriedade *associativa*, dar o resultado do produto: (3a)b
14. Qual é a distância (em km) que separa a Terra ao Sol, sabendo-se que um raio de luz proveniente do Sol leva cêrca de 8 minutos e 20 segundos para atingir o nosso planeta e que a luz percorre 300 000 km por segundo?
15. 11,2 km por segundo é a velocidade com que um foguete escapa da ação da gravidade terrestre tornando-se cósmico. Depois de 20 minutos com essa velocidade a que distância encontra-se da Terra tal foguete?

RESPOSTAS:

2. 1.ª) $18\times7+3\times7$; 2.ª) $7\times5+11\times5-6\times5$; 3.ª) $9\times3+9\times2+6\times3+6\times2$; 4.ª) $2\times4+2\times2+2\times1+3\times4+3\times2+3\times1+5\times4+5\times2+5\times1$.
3. 1.ª) 11; 2.ª) 150; 3.ª) 60; 4.ª) 570; 5.ª) 2 300.
4. Aumenta de 6 × 12 = 72.
5. Passa a valer 60.
6. Por 15.
7. 621.
8. 31 536 000 segundos.

9. Cr$ 1 355,00.
10. 2 040 metros.
11. Sim. Porque $38 \times 60 = 60 \times 38$.
12. 2 200 litros.
13. 180
14. 150 000 000 km
15. 13 440 km

## DIVISÃO

**1. Divisão exata. Definição.** — *Divisão exata é a operação que tem por fim, dados dois números, numa certa ordem determinar o* ***maior*** *número que, multiplicado pelo segundo, dê o primeiro.*

A indicação dessa operação é feita com os sinais : ou ÷ que se lê: *dividido por*. O primeiro número chama-se *dividendo*, o segundo *divisor* e o resultado da operação, *quociente*. Exemplo:

$$15 : 3 = 5 \quad \text{pois} \quad 5 \times 3 = 15 \quad \text{onde:} \begin{cases} 15 \text{ é o dividendo} \\ 3 \text{ é o divisor.} \\ 5 \text{ é o quociente.} \end{cases}$$

Para a *divisão exata*, temos, portanto, a seguinte *relação fundamental*.

**dividendo = quociente × divisor**

**2. Condições de possibilidade.** 1.ª) Sendo o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, segue-se que *o dividendo deve ser múltiplo do divisor;*

2.ª) O *divisor* deve ser *maior que zero*, em virtude de não ter sentido dividir-se um número dado por 0, pois, não existe nenhum número (portanto quociente) que, multiplicado por 0, reproduza o número dado. Assim, por exemplo: $7 : 0 = ?$ (*impossível*), pois, não existe número algum que multiplicado por 0 dê 7. No caso de $0 : 0$, qualquer número, poderia figurar como quociente, em virtude de ser nulo o produto de qualquer número por zero.



Observações:

1.ª) Quando o dividendo é zero, o quociente será zero. Exemplo

$$0 : 5 = 0 \qquad \text{pois} \qquad 0 \times 5 = 0$$

2.ª) Quando o dividendo e o divisor são iguais entre si, o quociente será igual a 1. Exemplo:

$$7 : 7 = 1 \qquad \text{pois} \qquad 1 \times 7 = 7$$

3.ª) Quando o divisor é igual a 1, o quociente será igual ao dividendo. Exemplo:

$$9 : 1 = 9 \qquad \text{pois} \qquad 9 \times 1 = 9$$

**3. Propriedades da divisão exata.** 1.ª) Uniforme. Isto é, a divisão conduz sempre a um único resultado.

2.ª) Não é comutativa. De fato, $15 : 3 = 5$; trocando o dividendo pelo divisor vemos $3 : 15$, que não tem sentido com os números inteiros, pois, *3 não é múltiplo de 15*. Logo:

$$15 : 3 \neq 3 : 15$$

3.ª) Distributiva. Para dividir uma *soma* ou *diferença* por um *número*, pode-se dividir cada um dos têrmos pelo número, e, em seguida, somar ou subtrair os quocientes obtidos, desde que cada um dêsses termos seja *múltiplo do divisor*. Exemplos:

$$(18 + 12 + 15) : 3 = 18 : 3 + 12 : 3 + 15 : 3$$
$$(42 - 14) : 7 = 42 : 7 - 14 : 7$$

**4. Divisão aproximada.** — No caso de se querer dividir, por exemplo, 53 por 6, observa-se que não se encontra um número inteiro que, multiplicado por 6, reproduza 53, pois,

$$8 \times 6 = 48 \qquad \text{é } \textit{menor} \text{ que } 53$$
$$9 \times 6 = 54 \qquad \text{é } \textit{maior} \text{ que } 53$$

O número 8, que é o *maior* número que multiplicado por 6 não ultrapassa o dividendo 53, é denominado *quociente aproximado a menos de uma unidade por falta*, porque o êrro que se comete, quando se toma o número 8 para quociente, é *menor* que *uma unidade*. Temos, assim, a seguinte *definição:*

**Divisão aproximada de um número por outro, dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.**

Chama-se *resto* de uma *divisão aproximada* a diferença entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado.

A indicação dessa operação é feita:

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \text{resto} & \text{quociente} \end{array} \qquad \text{e o exemplo acima} \qquad \begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$$

onde:

**dividendo = quociente × divisor + resto**

$$\boxed{53 = 8 \times 6 + 5}$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, divisor e resto para as *divisões aproximadas*.

Do estudo feito, observemos que:

1.°) *O resto de uma divisão aproximada é sempre menor que o divisor.*

2.°) *O resto de uma divisão exata é zero.* Exemplos:

$$\begin{array}{r|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array}\ ; \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\ ; \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\ .$$

**5. Regras práticas para cálculo das divisões.** 1.ª) Lembrando a tábua de multiplicar de Pitágoras, pode-se fazer de memória as divisões em que *o divisor tem um só algarismo e o quociente é menor que 10*. Assim, por exemplo, na divisão de 30 por 4 o quociente é 7 e o resto 2, porque $30 = 7 \times 4 + 2$.



2.ª) Para dividir um *número qualquer* por *outro*, separa-se no dividendo, a partir da esquerda, um número que contenha o divisor no mínimo uma vez, e, no máximo, nove vêzes. A parte separada é o *primeiro dividendo parcial*. Divide-se êste pelo divisor, obtendo-se o primeiro algarismo do quociente. A seguir multiplica-se o valor absoluto dêsse algarismo pelo divisor e subtrai-se o produto do primeiro dividendo parcial. À direita do resto obtido escreve-se (ou se abaixa) o algarismo seguinte do dividendo e obtém-se assim o *segundo dividendo parcial*. Divide-se êste pelo divisor e encontra-se o segundo algarismo do quociente que de novo se multiplica pelo divisor, subtraindo-se a seguir o produto do segundo dividendo parcial. Procede-se a seguir da mesma forma até baixar todos os algarismos do dividendo. O último resto obtido é o resto da divisão. Exemplo:

Dividir 5 639 por 15.

*A disposição prática é a seguinte:*

$$\begin{array}{r|l} 5\,639 & 15 \\ \cline{2-2} \underline{4\,5\phantom{39}} & 375 \text{ (quociente)} \\ 1\,13\phantom{9} & \\ \underline{1\,05\phantom{9}} & \\ 0\,089 & \\ \underline{75} & \\ 14 & \text{(resto)} \end{array}$$

**6. Prova.** A prova da divisão é feita multiplicando-se o quociente pelo divisor e somando-se êste produto com o resto. Se a operação estiver certa, deve-se encontrar o dividendo. Exemplo:

Prova da divisão do exemplo acima:

$$375 \times 15 = 5\,625$$

$$5\,625 + 14 = \mathbf{5\,639} \text{ (dividendo)}$$

**7. Expressões aritméticas contendo as quatro operações.** O cálculo das expressões aritméticas contendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) é feito obedecendo-se à seguinte ordem:

Em *primeiro lugar* as *multiplicações e divisões*, e, em seguida, as *adições* e *subtrações*, respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses mais internos, a seguir os colchetes e depois as chaves, se os houver. Exemplo:

Calcular o valor das seguintes expressões:

1.ª) $54 - 3 \times [(7+6 : 2) - (4 \times 3 - 5)]$

Temos:

$54 - 3 \times [(7+3) - (12 - 5)]$
$= 54 - 3 \times [10 - 7] =$
$= 54 - 9 =$
$= 45.$

2.ª) $[36 : 2 \times (3+3 \times 5)] : \{27 - [3+(8-4 : 2)]\}$

$[18 \times (3+15)] : \{27 - [3+(8-2)]\} =$
$= [18 \times 18] : \{27 - [3+6]\} =$
$= 324 : \{27 - 9\} =$
$= 324 : 18 =$
$= 18.$

3.ª) $\{[(8 \times 4+3) : 7+(3+15 : 5) \times 3] \times 2 - (19 - 7) : 6\} \times 2+12$

$\{[(32+3) : 7+(3+3) \times 3] \times 2 - 12 : 6\} \times 2+12 =$
$= \{[35 : 7+6 \times 3] \times 2 - 2\} \times 2+12 =$
$= \{[5+18] \times 2 - 2\} \times 2+12 =$
$= \{23 \times 2 - 2\} \times 2+12 =$
$= \{46 - 2\} \times 2+12 =$
$= 44 \times 2+12 =$
$= 88+12 =$
$= 100.$

NOTA: Outras expressões, no fim do livro, pág. 245.

## EXERCÍCIOS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

1. Efetuar mentalmente as divisões:
   1.ª) 37 000 : 500
   2.ª) 420 000 : 70 000



2. Aplicar a propriedade distributiva nas expressões aritméticas:
   1.ª) $(36 + 52 - 54) : 6$
   2.ª) $(99 - 55) : 11$
3. Calcular o valor das expressões aritméticas:
   1.ª) $(1 + 3 \times 5) \times (15 - 6 : 2)$
   2.ª) $\{[32 - (11 - 5) \times 2] + 12\} : [4 + 4 \times (7 - 2 \times 3)]$
   3.ª) $[3 \times (7 - 5) \times (1 + 3 \times 8)] : [25 \times 3 \times (17 - 3 \times 5)]$
   4.ª) $\{130 - 2 \times [24 - 6 \times (10 - 2 \times 3)] : (15 \times 2 - 3)\} - 130$
   5.ª) $\{18 + 7 \times [28 - (4 \times 3) : (1 + 5)] - 48 : 6\} : [28 - 4 \times 5]$
4. Determinar o número que, dividido por 213, dá para quociente 401 e resto 127.
5. Numa divisão o dividendo é 16 748, o quociente 82 e o resto 8. Determinar o valor do divisor.
6. Pensei em um certo número. Multipliquei-o por 72 e resultou 1 080. Qual foi o número pensado?
7. Ao triplo de um número somei 120 e obtive o quintuplo dêsse mesmo número. Qual é êsse número?
8. Numa divisão o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível (isto é, igual ao divisor menos uma unidade). Se o divisor é 15, qual o valor do dividendo?
9. Qual o número que dividido por 18 dá 25 para quociente e o resto é o maior possível?
10. Qual o número que dividido por 4 dá um quociente exato que lhe é inferior de 48 unidades.
11. Numa divisão o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Determinar o dividendo sabendo-se que a soma do divisor com o quociente é 24.
12. João e seu pai fizeram um trato: cada vez que João acertasse um problema receberia de seu pai Cr$ 3,00 e cada vez que errasse daria Cr$ 2,00. Tendo João recebido Cr$ 21,00, depois de resolver 12 problemas, pergunta-se quantos acertou.
13. Uma lesma sobe, durante o dia, 3 metros duma parede e, durante a noite, o seu próprio pêso faz descer 1,20 metros. Quanto tempo levará para fixar-se nos 5,4 metros dessa parede?
14. Um comerciante comprou 180 pares de sandálias. Vendeu 60 pares por Cr$ 9 000,00 ganhando Cr$ 35,00 em cada par. Quando lhe custaram os pares de sandálias?
15. Sabendo-se que um corredor vai de um lugar à outro em 9 horas fazendo 16 quilômetros por hora, quer-se conhecer quantas horas empregaria para percorrer o mesmo caminho se fizesse 18 quilômetros por hora.

RESPOSTAS:

2. 1.ª) 36 : 6 + 42 : 6 − 54 : 6;
   2.ª) 99 : 11 − 55 : 11
3. 1.ª) 192;
   2.ª) 4;
   3.ª) 1;
   4.ª) 0;
   5.ª) 24
4. 85 540
5. 215
6. 15
7. 60
8. 239
9. 467
10. 64
11. 155
12. 9
13. 3 dias.
14. Cr$ 20 700,00
15. 8 horas.

## PROBLEMAS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

Estudaremos alguns processos de resolução de problemas de aritmética que envolvam as quatro operações. São êsses problemas que dão aos estudantes a ginástica mental indispensável aos estudos que se seguem. Existem uma série do problemas, chamados *típicos*, cujos processos de resolução se aplicam para a solução de outros problemas de aritmética.

Vejamos alguns dêles:

PRIMEIRO TIPO: A soma de dois números é 76 e o maior dêles é 18 vêzes o outro. Quais são os dois números?

Representando o *menor* dos números por 1 (uma vez)
o *maior* dêles será representado por. . 18 (18 vêzes o menor)
e a *soma* dêsses números será representada por. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19 (19 vêzes o menor)

Valendo a soma 76 (que representa 19 vêzes o menor), o menor dêsses números será obtido dividindo-se 76 por 19. Logo:

76 : 19 = 4 (menor) e o maior será: 18 × 4 = 72.

SEGUNDO TIPO: Dois chapéus custaram Cr$ 366,00. Um dêles custou Cr$ 36,00 mais que o outro. Qual é o preço de cada um?



Se, do total de 366,00 subtrairmos 36,00, que é a diferença entre os preços, obteremos 330,00 que representaria o valor dos dois chapéus, caso custassem o mesmo preço, isto é, 330,00 : 2 = 165,00 cada um. Logo: um chapéu custa. . . . . . . . . . . . . . . Cr$ 165,00
e o outro. . . . . . . . . . . . Cr$ 165,00 + Cr$ 36,00 = Cr$ 201,00

TERCEIRO TIPO: Repartir Cr$ 4 317,00 entre três pessoas de modo que a segunda receba Cr$ 528,00 mais que a primeira e a terceira Cr$ 315,00 mais do que a segunda.

Faremos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} &1.^a \rightarrow 1.^a \\ &2.^a \rightarrow 1.^a + 528{,}00 \\ &3.^a \rightarrow \underbrace{1.^a + 528{,}00}_{2.^a} + 315{,}00 \end{aligned}$$

Logo:

$$1.^a + \underbrace{1.^a + 528{,}00}_{2.^a} + \underbrace{1.^a + 528{,}00 + 315{,}00}_{3.^a}$$

equivale à importância de 4 317,00 que deve ser repartida. Essa distribuição equivale também à seguinte:

$$1.^a + 1.^a + 1.^a + \underbrace{528{,}00 + 528{,}00 + 315{,}00}_{1\,371{,}00} \rightarrow 4\,317{,}00$$

ou 3 vêzes a 1.ª + 1 371,00. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . → 4 317,00
e 3 vêzes a 1.ª. . . . . . . . . . . (4 317,00 − 1 371,00) → 2 946,00
e portanto a 1.ª. . . . . . . . . . (2 946,00 : 3) . . . . . → 982,00

Logo:

1.ª → Cr$ 982,00
2.ª → Cr$ 982,00 + Cr$ 528,00 = Cr$ 1 510,00
3.ª → Cr$ 1 510,00 + Cr$ 315,00 = Cr$ 1 825,00

QUARTO TIPO: Um aluno recebe Cr$ 3,00 por problema que acerta e paga Cr$ 2,00 por problema que erra. Fêz 50 problemas e recebeu Cr$ 85,00. Quantos acertou?

Se o aluno acertasse todos os 50 problemas receberia Cr$ 150,00 (50×3,00). Como só recebeu Cr$ 85,00, a diferença: 150,00 – 85,00 = 65,00 representa a quantia que o aluno deixou de ganhar por ter errado alguns problemas. Cada problema errado acarreta um prejuízo de: Cr$ 5,00

pois.

| | |
|---|---|
| 3,00 | (que deixou de ganhar) |
| 2,00 | (que deve pagar) |
| 5,00 | |

Logo, dividindo-se Cr$ 65,00 por Cr$ 5,00 teremos o número dos problemas errados, isto é, Cr$ 65,00 : Cr$ 5,00 = 13.

Portanto: o aluno errou *13* problemas e acertou *37* (50 – 13).

*Prova:*

| | | |
|---|---|---|
| Acertando 37 problemas recebeu | Cr$ 111,00 | (37×Cr$ 3,00) |
| Errando 13 problemas pagou | Cr$ 26,00 | (13×Cr$ 2,00) |
| *Quantia recebida* ............ | Cr$ 85,00 | |

Quinto tipo: Um negociante pouco escrupuloso compra 450 litros de vinho a Cr$ 25,00 o litro. Junta ao vinho 50 litros de água e quer ganhar na venda Cr$ 4 750,00. Por quanto deve vender o litro?

O vinho custou para êsse negociante: 450 × 25,00 = = 11 250,00. Para ter um lucro de Cr$ 4 750,00 o cálculo será feito sôbre:

11 250,00 + 4 750,00 = 16 000,00

Tendo acrescentado 50 litros de água, para se saber o preço do litro da mistura (500 litros), basta dividir Cr$ 16 000,00 por 500, isto é,

Cr$ 16 000,00 : 500 = Cr$ 32,00

Logo: o negociante deve vender o litro por Cr$ 32,00 para lucrar Cr$ 4 750,00.



Sexto tipo: Tenho que distribuir entre alguns meninos uma certa quantia. Se der Cr$ 2,00 a cada menino ficarei com Cr$ 25,00 e se der Cr$ 3,00 faltam-me Cr$ 15,00. Quantos são os meninos e qual a quantia que tenho?

Dando Cr$ 2,00 a cada menino *sobram* → Cr$ 25,00

Dando Cr$ 3,00 a cada menino *faltam* → Cr$ 15,00

Logo: uma diferença de 1,00 (3,00 – 2,00) acarreta uma despesa de 40,00 (25,00+15,00), pois, deixá de sobrar 25,00 e ainda faltam 15,00. Portanto, o número de meninos será dado pela divisão:

40,00 : 1,00 = 40

A quantia que tenho será dada pelo produto:

número de meninos × 2,00 + 25,00 (sobra)
ou 40×2,00+25,00 = 80,00+25,00 = **105,00**

*Prova:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 40 × Cr$ 2,00 = | Cr$ 80,00 | 40 × Cr$ 3,00 = | Cr$ 120,00 |
| sobram...... | Cr$ 25,00 | faltam ...... | Cr$ 15,00 |
| tenho ....... | Cr$ 105,00 | tenho ....... | Cr$ 105,00 |

Sétimo tipo: Uma pessoa tem Cr$ 4 679,00 e outra ..... Cr$ 3 415,00. A primeira economiza Cr$ 438,00 e a segunda Cr$ 754,00 por mês. No fim de quantos meses terão, essas pessoas, quantias iguais?

Diferença das quantias:

4 679,00 – 3 415,00 = 1 264,00

Diferença das economias:

754,00 – 438,00 = 316,00

Dividindo-se 1 264,00 por 316,00 obteremos o quociente **4**, que representa o número de meses necessários para que as quantias sejam iguais.

OITAVO TIPO: Pensei em um certo número, a seguir acrescentei 7 a êsse número e multipliquei o resultado por 4. Subtraí depois 6 e obtive o número 310. Que número pensei?

Basta, para resolver o problema, partir do resultado encontrado 310 e fazer as operações inversas das que foram indicadas.

Assim: $310 + 6 = 316$; $316 : 4 = 79$; $79 - 7 = 72$

Logo: O número pensado foi 72.

*Prova:* 72; $72 + 7 = 79$; $79 \times 4 = 316$; $316 - 6 = $ **310**

## PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS

1.º) Dois números têm por soma 120 e o maior vale 11 vêzes o menor. Quais são os números?

2.º) Determinar dois números, sabendo-se que a sua diferença é 128 e que o maior é 5 vêzes o menor.

3.º) Uma pessoa tem Cr$ 6 800,00 e outra Cr$ 4 200,00. A primeira economiza Cr$ 4 500,00 por ano e a segunda Cr$ 5 800,00. No fim de quantos anos terão quantias iguais?

4.º) Um operário ganha Cr$ 288,00 por dia de trabalho e paga a multa de Cr$ 72,00 por dia de falta injustificada. Depois de 25 dias recebe Cr$ 6 120,00. Quantos dias trabalhou?

5.º) Se eu tivesse Cr$ 9 804,00 mais do que tenho no momento, poderia *comprar* um terreno que custa Cr$ 32 154,00 e me sobrariam ainda Cr$ 3 491,00. Quanto possuo?

6.º) Achar três números tais que: a soma do primeiro com o segundo seja 200, a do primeiro com o terceiro seja 208 e a do segundo com o terceiro 216.

7.º) A soma de dois números é 366 e a sua diferença é 86. Determinar êsses números.

8.º) Antônio comprou dois franguinhos pagando pelo primeiro Cr$ 18,00 mais que pelo segundo. Dizer quanto custou cada frango, sabendo-se que duas vêzes o preço do segundo menos uma vez o preço do primeiro é igual a Cr$ 66,00.

9.º) Uma herança de Cr$ 132 000,00 foi dividida entre três pessoas, de modo que a segunda e a terceira receberam, respectifvamente, o dôbro e o triplo do que recebeu a primeira. Quanto recebeu cada pessoa?



10.º) Dois recipientes podem conter juntos 3 415 litros de água. Qual é a capacidade de cada um dêles, sabendo-se que a capacidade do primeiro é quatro vêzes a do segundo?

11.º) Uma pessoa comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 10 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou?

12.º) Pensei em um número, multipliquei-o por 2 e subtraí 13 dêsse resultado obtendo 45. Qual foi o número pensado?

13.º) A soma das idades de três pessoas é 75 anos. Juntando-se 6 anos à idade da primeira, 12 anos à idade da terceira e tirando-se 3 anos da idade da segunda obtém-se três números iguais. Qual é a idade de cada pessoa?

14.º) De uma estação parte um trem que faz 50 quilômetros por hora. Depois de duas horas parte um outro trem no mesmo sentido e alcança o primeiro depois de 5 horas. Quantos quilômetros por hora faz o segundo trem?

15.º) Um negociante comprou um certo número de metros de fazenda contando revendê-la a Cr$ 156,00 o metro, a fim de ganhar Cr$ 6 120,00. Como foi possível revender sòmente a Cr$ 138,00 o metro, ficou ganhando nessa transação Cr$ 3 960,00. Quantos metros comprou êsse negociante?

16.º) Multiplicando-se um número por 8 e aumentando-se êsse produto de 1 215, obtém-se 1 575. Qual é êsse número?

17.º) A diferença entre dois números é 144 e o maior dêles vale 7 vêzes o menor. Determinar êsses números.

18.º) A soma de dois números é 242 e a sua diferença contém 9 vêzes o menor. Qual é o maior?

19.º) A soma de dois números é 392 e o quociente entre êles 13. Determinar êsses números.

20.º) Dividir 12 em duas partes tais que uma seja o triplo da outra.

21.º) Tem-se quatro números: a soma dos três primeiros é 843; a soma dos três últimos é 1 217; a soma dos dois primeiros e o último 941 e a do primeiro e os dois últimos 1 028. Quais são os números?

22.º) Dividir Cr$ 1 300,00 entre três pessoas de modo que a primeira tenha Cr$ 10,00 mais do que a segunda e esta Cr$ 120,00 mais do que a terceira.

23.º) Repartir Cr$ 63 000,00 entre três pessoas de modo que a segunda tenha quatro vêzes mais que a primeira e a terceira quatro vêzes mais que a segunda.

24.º) Uma pessoa dá esmolas a um certo número de pobres. Dando Cr$ 5,00 a cada um sobram-lhe Cr$ 12,00 e dando Cr$ 8,00 falta-lhe Cr$ 6,00. Quanto tem a pessoa e quantos são os pobres?

25.º) Um negociante comprou 20 metros de linho e 30 metros de casimira, pagando por tudo Cr$ 25 600,00. Um metro de casimira custa o dôbro do custo do metro de linho. Qual é o preço do metro de cada espécie de tecido?

26.º) A idade de um pai e a de seu filho somam 90 anos. Tirando-se 15 anos de idade do pai e acrescentando-os à idade do filho, ambas as idades ficam iguais. Qual é a idade de cada um?

27.º) Dois entregadores ganham juntos Cr$ 240,00 por dia. No fim de 18 dias o primeiro recebe Cr$ 1 620,00 e o segundo Cr$ 2 700,00. Quanto recebe cada um dêles por dia?

28.º) Com vinho de Cr$ 20,00 o litro e vinho de Cr$ 30,00 o litro, encheu-se uma pipa que contém 50 litros. Quantos litros há de cada espécie, se a pipa cheia de vinho vale Cr$ 1 200,00?

29.º) Um ciclista persegue outro ciclista. A distância que os separa é de 6 km. Pergunta-se em quanto tempo o segundo alcança o primeiro, sabendo-se que o segundo corre 48 quilômetros por hora e o outro 36 quilômetros por hora.

30.º) Um barbeiro cortou 13 cabelos e fêz 21 barbas num dia. Cada barba custou Cr$ 20,00 e sabe-se que êle recebeu ainda, nêsse dia, Cr$ 120,00 de gorgeta. Tendo ganho no fim do dia a quantia total de Cr$ 1 190,00, pergunta-se o preço do corte de cabelo.

Respostas:

1.º) 110 e 10.
2.º) 160 e 32.
3.º) 2 anos.
4.º) 22 dias.
5.º) Cr$ 25 841,00.
6.º) 96, 104 e 112.
7.º) 226 e 140.
8.º) Cr$ 102,00 e Cr$ 84,00.
9.º) Cr$ 22 000,00; Cr$ 44 000,00 e Cr$ 66 000,00.
10.º) 683 litros e 2 732 litros.
11.º) 31 galinhas e 17 coelhos.
12.º) 29.
13.º) 24, 33 e 18 anos.
14.º) 70 quilômetros por hora.
15.º) 120 metros.
16.º) 45;
17.º) 168 e 24;
18.º) 220.
19.º) 364 e 28.
20.º) 3 e 9.
21.º) 126, 315, 402 e 500.
22.º) Cr$ 350,00; Cr$ 470,00 e Cr$ 480,00.
23.º) 1.ª) Cr$ 3 000,00;
2.ª) Cr$ 12 000,00 e
3.ª) Cr$ 48 000,00.
24.º) Cr$ 42,00 e 6 pobres.
25.º) Cr$ 320,00 e Cr$ 640,00.
26.º) 60 anos e 30 anos.
27.º) Cr$ 90,00 e Cr$ 150,00.
28.º) 30 *l* e 20 *l*.
29.º) 30 minutos.
30.º) Cr$ 50,00.

(Nota: Outros exercícios no fim do livro, pág. 256 e problemas curiosos no *Apêndice*).



## POTENCIAÇÃO

1. Se uma multiplicação, todos os fatôres são iguais, como por exemplo em $3 \times 3 \times 3 \times 3$ pode-se indicar êste produto, abreviadamente, escrevendo o fator igual *uma só vez*, e, a seguir, um pouco mais acima, em *tamanho menor*, o número de fatôres que se toma, e que se denomina *expoente*. Assim:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

que se lê: "3 elevado à quarta potência".

Êstes produtos especiais dão lugar a uma nova operação denominada *potenciação* e cujo resultado se chama *potência*. O fator que se repete é chamado *base;* e o número de vêzes *que a base é escrita*, como fator, chama-se *grau da potência* que é representado pelo *expoente*.

2. **Definição.** *Chama-se potência de um número um produto de fatôres iguais a êsse número.*

A segunda potência de um número é também denominada *quadrado* e a terceira, *cubo*. Exemplos:

$4^2$ que se lê: "quatro ao quadrado" e se calcula $4^2 = 4 \times 4 = 16$
$2^3$ que se lê: "dois ao cubo" e se calcular $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Em particular: $5^1 = 5$
isto é, *um número pode ser considerado como potência de expoente 1.*

Chama-se *potência zero* de um número qualquer, (diferente de zero), o número 1. Exemplo:

$8^0 = 1$ e de um modo geral: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Observações:

1.ª) *As potências de 0 são tôdas iguais a zero.* Exemplo:

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

2.ª) *As potências de 1 são tôdas iguais a 1.* Exemplo.

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3.ª) *As potências de 10 são iguais à unidade seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.* Exemplos:

$10^2 = 100;$ $10^3 = 1\,000;$ $10^4 = 10\,000$

**3. Tábua das primeiras potências sucessivas dos números dígitos.** É muito útil, para os cálculos, que se seguem, guardar de memória as primeiras potências sucessivas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Assim: | $2^2 = 4$; | $2^3 = 8$; | $2^4 = 16$; | $2^5 = 32; \ldots$ |
| | $3^2 = 9$; | $3^3 = 27$; | $3^4 = 81; \ldots$ | |
| | $4^2 = 16$; | $4^3 = 64$; | $\ldots$ | |
| | $5^2 = 25$; | $5^3 = 125; \ldots$ | | |
| | $6^2 = 36$; | $6^3 = 216; \ldots$ | | |
| | $7^2 = 49$; | $7^3 = 343; \ldots$ | | |
| | $8^2 = 64$; | $8^3 = 512; \ldots$ | | |
| | $9^2 = 81$; | $9^3 = 729; \ldots$ | | |
| | $10^2 = 100$; | $10^3 = 1000; \ldots$ | | |

**4. Propriedades.** 1.ª) UNIFORME. Conduz, a potenciação, a um só resultado.

2.ª) NÃO É COMUTATIVA, isto é, $2^3 \neq 3^2$, pois $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$.

3.ª) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO AO PRODUTO. Para se elevar um produto indicado a uma potência, pode-se elevar cada um dos fatôres a essa potência e depois efetuar o produto das potências obtidas. Exemplo:

$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$ que, efetuado, é igual a $9 \times 16 = 144$.

Êsse mesmo resultado pode ser obtido, efetuando-se primeiramente o produto indicado entre parênteses. Assim:

$$(3 \times 4)^2 = (12)^2 = 144$$

Com relação à soma (ou diferença) *não vale* a propriedade distributiva. Assim:

$(4+3)^2$ *não é igual* a $4^2+3^2$

pois, enquanto

$(4+3)^2 = 7^2 = 49$ temos que $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$.



**5. Regras das operações sôbre potências da mesma base.**

1.ª) *O produto de potências da mesma base é uma potência de mesma base que tem por expoente a soma dos expoentes.* Exemplo:

$$4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

2.ª) *O quociente de duas potências da mesma base (suposto o expoente do dividendo maior ou igual ao do divisor) é uma potência de mesma base que tem por expoente a diferença dos expoentes.* Exemplo:

$$4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$$

Se as potências têm o mesmo expoente, temos:

$3^2 : 3^2 = 3^0 = 1$ (como já vimos)

3.ª) *Para se elevar uma potência a uma potência multiplicam-se entre si os expoentes.* Exemplos:

$(5^2)^3 = 5^6$; $\qquad (2^4)^2 = 2^8$

**6. Cálculo de expressões aritméticas contendo potências.**

É feito na seguinte ordem:

1.º) as potências;

2.º) as multiplicações e divisões;

3.º) as adições e subtrações.

respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses, a seguir os colchetes e depois as chaves. Exemplos:

1.º) $[3^2+(5-2)^3] : (4-1)^2$

Temos: $[9+3^3] : 3^2 =$
$= [9+27] : 9 =$
$= 36 : 9 =$
$= 4.$

2.°) $7 + (2^3 \times 3 + 4^2 : 8) : 13 - 3^2$

$$\begin{aligned}
\text{Temos:}\quad & 7 + (8 \times 3 + 16 : 8) : 13 - 9 = \\
&= 7 + (24 + 2) : 13 - 9 = \\
&= 7 + 26 : 13 - 9 = \\
&= 7 + 2 - 9 = \\
&= 9 - 9 = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.°) $\{5 + [4^3 : (3^2 - 1) + 1^5 \times 3]\} : (6 - 2)^2$

$$\begin{aligned}
\text{Temos:}\quad & \{5 + [64 : (9 - 1) + 1 \times 3]\} : 4^2 = \\
&= \{5 + [64 : 8 + 3]\} : 16 = \\
&= \{5 + [8 + 3]\} : 16 = \\
&= \{5 + 11\} : 16 = \\
&= 16 : 16 = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE POTÊNCIAS

1. Escrever, sob a forma de multiplicação, as seguintes potências:
   1.°) $2^3$; 2.°) $8^2$; 3.°) $1^5$; 4.°) $10^4$; 5.°) $100^3$
2. Escrever sob forma de potências os produtos seguintes:
   1.°) $5 \times 5 \times 5$; 2.°) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$; 3.°) $1 \times 1$;
   4.°) $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$; 5.°) $8 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 11 \times 11$
3. Calcular as potências: $1^8$; $2^3$; $3^2$; $4^5$; $6^2$; $7^1$; $8^0$; $9^2$; $10^6$
4. Calcular os quadrados e os cubos dos números compreendidos entre 5 e 10.
5. Qual é a diferença entre o cubo de 12 e o quadrado de 13?
6. Qual é o resultado de:
   1.°) $(5 + 3)^2$; 2.°) $(12 - 8)^3$; 3.°) $(4 + 3 + 5)^2)$;
   4.°) $(5 + 2)^2 - (9 - 7)^4$?
7. Escrever as quatro primeiras potências de 5.
8. Efetuar: 1.°) $2^3 \times 2^2$; 2.°) $3 \times 3^2 \times 3^5$; 3.°) $6^3 \times 6 \times 6^2$);
   4.°) $a^m \times a^n$; 5.°) $8^3 : 8^2$; 6.°) $5^4 : 5^2$



9. Aplicar as propriedades da potenciação em:
   1.°) $(2 \times 3 \times 4)^2$; 2.°) $(3^2 \times 2^3 \times 4)^3$; 3.°) $(4^3 \times 2^2)^2 : (4^5 \times 2^4)$;
10. Calcular o valor das expressões aritméticas:
    1.°) $2^3 + 5 \times (4 \times 3^2 - 6^2 : 12)$
    2.°) $\{3^4 : (5 - 2)^3 \times [15 - 2 \times (9 - 2^3)] - 6^2\} : 3^0$
    3.°) $\{(7^2 - 5 \times 3^2 + 1)^3 : [(2^3 - 6)^2 + 7 \times 3]\}^2 : [2^2 + (5 - 4)^3]$

RESPOSTAS:

1. 1.°) $2 \times 2 \times 2$; 2.°) $8 \times 8$; 3.°) $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$;
   4.°) $10 \times 10 \times 10 \times 10$; 5.°) $100 \times 100 \times 100$
2. 1.°) $5^3$; 2.°) $9^7$; 3.°) $1^2$; 4.°) $3^2 \times 2^3$; 5.°) $8^2 \times 5^3 \times 11^2$.
3. 1; 8; 9; 1 024; 36; 7; 1; 81; 1 000 000.
4. Quadrados: 36, 49, 64, 81; Cubos: 216, 343, 512, 729.
5. 1 559
6. 1.°) 64; 2.°) 64; 3.°) 144; 4.°) 33.
7. 5, $5^2$, $5^3$, $5^4$
8. 1.°) $2^5$; 2.°) $3^8$; 3.°) $6^6$; 4.°) $a^{m+n}$; 5.°) 8; 6.°) $5^2$.
9. 1.°) $2^2 \times 3^2 \times 4^2$; 2.°) $3^6 \times 2^9 \times 4^3$; 3.°) 4.
10. 1.°) 173; 2.°) 3; 3.°) 5.

(NOTA: Outros exercícios sôbre expressões numéricas no fim do livro, pág. 245).

## "*Caprichos*" *das Operações*

(Adição, subtração, multiplicação,
divisão e potenciação)

1. **Todos os números são iguais** (Será possível? Não pode ser, não é verdade?). Mostremos (por um instante) que 5 é igual, por exemplo, a 8. Temos:

$$5 - 5 = 8 - 8 \text{ (ambas as diferenças são nulas)}$$

ou

$$5 \times (1 - 1) = 8 \times (1 - 1) \text{ (pela propriedade distributiva).}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $(1 - 1)$ (?) vem:

$$5 = 8 \ (?)$$

Por que êsse absurdo? (Ora, não podemos dividir por *zero*, e, $1 - 1 = 0$).

2. **O caminho da lêsma** (que não conhecia muito matemática!). Uma lêsma quer chegar ao cimo de uma árvore de 14 metros de altura. Cada dia a lêsma sobe 5m e de noite o seu próprio pêso a faz descer 4m (caprichos de lêsma!). Depois de quantos dias atingirá a lêsma o seu destino?

(Atenção para a resposta: não são 14 dias e sim ... 10).

3. **Adivinhação.** Diga ao papai que você é capaz de adivinhar o resultado de umas operações com números que êle mesmo irá propor. Coloque dentro de um envelope um papel com o número 1 089 escrito. Peça-lhe que pense um número de três algarismos com a condição de que os algarismos das extremidades sejam diferentes. A seguir convide-o a escrever o número pensado, que o inverta e ache a diferença entre os dois. Depois, que some o número achado com o mesmo, invertido. Então é só pedir para abrir o envelope e receber ... o prêmio combinado. (Que tal a entrada do cinema?)

Você não duvida? De qualquer forma vamos verificar:

Seja o número 725; invertido, 527

$$725 - 527 = 198, \text{ que invertido dá } 891$$
$$198 + 891 = 1\,089$$

4. **Como adivinhar um número pensado por uma pessoa.** Peça a uma pessoa para pensar em um número qualquer. Mande multiplicá-lo por 3, somar a seu prazer um dos números 1, 2 ou 3; multiplicá-lo ainda por 3 e juntar depois o número pensado. Dividindo êsse resultado por 10 (que é o mesmo que suprimir do resultado a última cifra) o resultado obtido é o número pensado pela pessoa. Experimente com o seu colega (depois da aula ...).

5. **O poder das potências.** São notáveis alguns números "astronômicos" que se obtém graças a potenciação. Citaremos alguns:

a) *Potência da base 9 tendo por expoente $9^9$.*

Êste número é composto de 369 693 100 algarismos. Escrito com caracteres comuns sôbre uma só linha teria o "comprimento" de 924 quilômetros!

Escrevendo êsse número com dez horas de trabalho por dia (pensando um ano com 365 dias de trabalho) à razão de um algarismo por segundo, seriam necessários 28 anos e 49 dias.

b) *Potência de base 10 tendo por expoente $10^{10}$.*

Escrita esta potência com algarismos ocupando 4mm cada um, teríamos um "comprimento" equivalente ao equador terrestre!



c) *Quanto trigo!*

Desejando um príncipe recompensar um modesto, mas inteligente homem do campo, propôs-lhe que fizesse o pedido que entendesse. O homem, observando a existência dum tabuleiro de jôgo de xadrez entre êles, respondeu-lhe que se contentaria em receber grãos de trigo, com a condição de ser 1 grão para a 1.ª casa, 2 para a 2.ª, 4 para a 3.ª, 8 para a 4.ª, e assim por diante, duplicando sempre os grãos de trigo até a 64.ª casa. O príncipe, achou a princípio ser um pedido muito simples, mas ... quando fêz as contas para dar ao homem o trigo pedido verificou que jamais poderia pagar, pois, necessitaria de

18 446 744 073 709 551 615

grãos de trigo (correspondente ao número $2^{24} - 1$) que equivale a uma produção oito vêzes maior do que tôda a Terra produziria num ano, se fôsse totalmente plantada com trigo ...

d) *Esperteza com potência ...*

Para você que gosta de achar o resultado mais depressa que os seus colegas: quando quiser elevar ao quadrado um número terminado em 5, bastará multiplicar o número que figurar antes do 5 pelo seu consecutivo e pôr em seguida do produto o número 25. Exemplos:

Efetuar: $75^2$ Temos: $7 \times 8 = 56$ o resultado será: 5 625

Efetuar: $115^2$ Temos: $11 \times 12 = 132$ o resultado será: 13 225

## § 3. Números relativos.

### NÚMEROS NEGATIVOS E NÚMEROS POSITIVOS

1. **Necessidade da criação dos números negativos. Números positivos.** No estudo da *subtração* de dois números inteiros, vimos que a condição de sua possibilidade exigia que o minuendo fôsse *maior*, ou no mínimo *igual*, que o subtraendo. Dêsse modo, a operação:

$$3 - 5$$

deixa de ter sentido até o presente momento, pois, não existe nenhum número inteiro que somado ao 5 dê 3.

A fim de tornar *sempre possível* a subtração, foi necessário *criar* uma nova classe de números denominados *negativos*. A representação dos números negativos é feita da mesma maneira que os números naturais, porém, precedidos do sinal − (menos). Exemplos:

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots \quad -a, \ldots$$

que se lêem: *menos um*, *menos dois*, *menos três*, *menos quatro*, ... *menos a*, respectivamente.

Com a criação dos números negativos, já ficamos conhecendo os números:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{naturais} \\ 2)\ \text{zero} \end{array}\right\} \rightarrow \text{inteiros}$$
$$3)\ \text{negativos}$$

Em oposição aos números negativos, os números naturais são chamados, de agora em diante, de *números positivos* e são representados pelos mesmos símbolos com que foram estudados, porém, precedidos do sinal + (mais). Exemplos:

$$+1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots +a, \ldots$$

que se lêem: *mais um*, *mais dois*, *mais três*, *mais quatro*, ... *mais a*, ... respectivamente.

O *zero*, que *nunca* vem precedido de sinal, não é negativo e nem positivo.

**2. Números relativos.** (*) **Definição.** *Número relativo é qualquer número negativo ou positivo.*

Assim, os números: $+5, -3, +8, -21, -107, +13, \ldots$ são relativos. Nas operações entre os números relativos, como iremos ver mas adiante, costuma-se também representá-los entre parênteses. Exemplos:

$$(-4),\ (+7),\ (-135),\ (+412),\ \ldots$$

A *sucessão fundamental dos números relativos* é representada por:

$$\ldots -a, \ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, \mathbf{0}, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots +a \ldots$$

onde: 1.º) $-a$ e $+a$ representam um número relativo qualquer; 2.º) o zero (0) separa o conjunto dos números negativos do conjunto dos números positivos.

(*) Nesse primeiro contato, com novos números, o aluno deve sentir o *número relativo* em "relação" a um elemento fundamental, nesse caso o zero. Posteriormente se construirá o *campo dos números relativos*.



**3. Valor absoluto de um número relativo.** Chamaremos *valor absoluto* (*) ou *módulo* de um número relativo o número natural que faz parte da sua representação. Exemplos:

o valor absoluto de $-3$ é 3
o valor absoluto de $+8$ é 8
o valor absoluto de $+a$ é $a$
o valor absoluto de $-a$ é $a$

Notação: $|-3| = 3$ que se lê: *valor absoluto de* − 3 é igual a 3.
$|+9| = 9$ que se lê: *valor absoluto de* +9 é igual a 9.

Dois números que possuem o mesmo valor absoluto e sinais diferentes dizem-se *simétricos*. Assim, por exemplo: $-3$ e $+3$ que têm 3 por valor absoluto, são simétricos.

**4. Interpretações diversas dos números relativos.** Todos os conjuntos que podem ser contados em dois sentidos opostos, empregam para distinguir os seus elementos pares de palavras ou sinais, que desempenham a mesma função que os sinais + e − usados no conjunto dos números relativos para distinguir os números positivos dos números negativos. Assim, por exemplo, as temperaturas são dadas comumente em expressões da forma: *acima* de zero ou *abaixo* de zero, isto é, são tomadas em relação à temperatura de 0 graus. Os acontecimentos históricos, costumam também, ser destacados tomando por referência o nascimento de Cristo. Diz-se, por exemplo, que Pitágoras nasceu no VI século a. C. (*antes* de Cristo) ou que a Revolução Francêsa se iniciou 1789 anos d. C. (*depois* de Cristo). As importâncias em dinheiro, com as quais se efetuam operações comerciais, se contam em *débito* (quantidades negativas de dinheiro) e *crédito* (quantidades positivas de dinheiro).

Em qualquer dos casos citados, usa-se freqüentemente os sinais + e −, para caracterizar o sentido que se quer dar. Assim:

(1) Não confundir valor absoluto de um número relativo com o valor absoluto de um algarismo estudado no § 1, n.º 5.

a temperatura de 22 graus *acima* de zero é representada por ................................ + 22 graus;

a temperatura de 3 graus *abaixo* de zero é representada por ................................ – 3 graus;

300 anos *antes* de Cristo é representado por ...... Ano: – 300;

1960 anos *depois* de Cristo é representado por ..... Ano: + 1960,

*Crédito* de Cr$ 100 000,00 é representado por ...... + Cr$ 100 000,00;

*Débito* de Cr$ 35 000,00 é representado por ...... – Cr$ 35 000,00.

**5. Representação geométrica dos números relativos.** Sôbre uma reta associemos a cada número relativo, a partir de 0, nos dois sentidos, os pontos: A, B, C, D. . . e A′, B′, C′, D′, . . . tais que:

$$OA = AB = BC = CD = DE = \ldots = O'A' = A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = \ldots$$

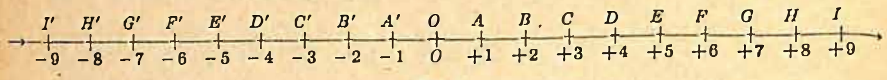



Fig. 4

teremos assim que:

| | |
|---|---|
| O ponto *O* (denominado origem), | representa geomèt. o número 0 (zero). |
| O ponto *A* | representa geomèt. o número + 1. |
| O ponto *B* | representa geomèt. o número + 2. |
| O ponto *C* | representa geomèt. o número + 3. |
| ................................ | ................................ |
| O ponto *A′* | representa geomèt. o número – 1. |
| O ponto *B′* | representa geomèt. o número – 2. |
| O ponto *C′* | representa geomèt. o número – 3. |
| ................................ | ................................ |

ou seja, os *números positivos* estão situados *à direita* da origem e os números *negativos à esquerda*. Dois números ***simétricos*** estão situados a igual distância da origem 0, nas duas semi-retas em que a mesma divide a reta. Exemplos:

$$-1 \quad \text{e} \quad +1$$
$$-2 \quad \text{e} \quad +2$$

**6. Igualdade e desigualdade de números relativos.** Na representação geométrica dos números relativos, os números positivos *crescem* à medida que se *afastam* da origem, pela



direita, e, *decrescem* ao contrário; os números negativos *decrescem* à medida que se *afastam* da origem, pela esquerda, e *crescem* em caso contrário. Observamos, assim, que:

1.º) *O zero é* ***maior*** *que qualquer número negativo e* ***menor*** *que qualquer número positivo;* Exemplos:

$$0 > -5; \qquad 0 > -179; \qquad 0 < +1; \qquad 0 < +18$$

2.º) *Qualquer número positivo é* ***maior*** *que qualquer número negativo.* Exemplos:

$$+3 > -15; \qquad +12 > -4$$

3.º) *De dois números positivos o* ***maior*** *é o que mais se afasta da origem.* Exemplo:

$$+8 > +5 \quad (+8 \text{ vem depois de } +5)$$

4.º) *De dois números negativos o* ***maior*** *é o que menos se afasta da origem.* Exemplo:

$$-4 > -9 \quad (-4 \text{ vem antes de } -9)$$

Não dispondo da representação geométrica, o *confronto* entre números relativos pode também ser feito mediante os respectivos *valores absolutos* e *sinais*.

Assim, temos:

1.º) *Dois números relativos são* ***iguais*** *quando têm o mesmo valor absoluto e mesmo sinal.* Exemplos:

$$+5 = +5 \qquad -7 = -7$$

Se uma destas condições não se verificar, os números relativos são *diferentes*. Exemplos:

$$+5 \neq +7 \qquad -3 \neq +3 \qquad -8 \neq +9$$

2.º) *De dois números positivos o* ***maior*** *é o que tiver* ***maior valor absoluto.*** Exemplos:

$$+12 > +5 \qquad +176 > +39$$

3.º) *De dois números negativos o* ***maior*** *é o que tiver* ***menor valor absoluto.*** Exemplos:

$$-5 > -21 \qquad -1 > -2$$

## EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Representar, usando os sinais + e – :

1.º) Um crédito de Cr$ 45 000,00 e um débito de Cr$ 136 000,00;

2.º) A temperatura de 38 graus acima de zero (à sombra) e a de 6 graus abaixo de zero;

3.º) 810 anos antes de Cristo e 1 200 anos depois de Cristo.

Devemos ter:

| | | |
|---|---|---|
| 1.º) + Cr$ 45 000,00 | e | – Cr$ 136 000,00; |
| 2.º) + 38 graus | e | – 6 graus; |
| 3.º) Ano: – 810 | e | Ano: + 1 200 |

2. Ordenar, do menor para o maior, os seguintes números

$+15, \quad -345, \quad +262, \quad -9, \quad 0, \quad -1, \quad +3$

Ordenado, do menor para o maior, temos:

$-345 < -9 < -1 < 0 < +3 < +15 < +262$

3. Que números relativos estão compreendidos entre – 5 e + 5. Incluir o 0 na representação.

Entre – 5 e + 5 estão incluídos os seguintes números relativos, conhecidos, e mais o zero:

$-4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2, \quad +3, \quad +4$

## EXERCÍCIOS SÔBRE OS NÚMEROS RELATIVOS

1. Representar, usando os sinais + e –:

1.º) as temperaturas de 39 graus à sombra e 9 graus abaixo de zero;

2.º) o século III antes de Cristo e o ano da Independência do Brasil (tomando por origem o nascimento de Cristo);

3.º) as importâncias de Cr$ 8 000,00 e Cr$ 8 500,00, que foram respectivamente ganhas e perdidas.

2. Com a criação dos números relativos como se classificam os números até agora estudados?

3. Quais são os valores absolutos dos números: +12, 0, – 5, – 12, – 315, + 24.

4. Ordenar, de modo crescente, os números: +13, –18, –2, 0, –321, +1, –1.

5. Formar todos os números relativos possíveis com os algarismos 3 e 4, sem repetir êsses algarismos e ordená-los do menor para o maior.



RESPOSTAS:

1. 1.º) + 39 e – 9 graus; 2.º) Século: – III e + 1 822; 3.º) + Cr$ 8 000,00 e – Cr$ 8 500,00
2. Negativos, zero e positivos.
3. 12, 0, 5, 12, 315, 24.
4. $-321 < -18 < -2 < -1 < 0 < +1 < +13$
5. – 43, – 34, + 34, + 43.

## OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS RELATIVOS

**1. Adição.** a) *De dois números relativos.*

REGRA: Se os números tiverem o *mesmo* sinal, *somam-se* os valores absolutos e ao resultado atribui-se o *sinal comum;* se os dois números tiverem sinais *diferentes*, *subtraem-se* os valores absolutos e ao resultado atribui-se o *sinal* do número relativo de *maior valor absoluto.* Exemplos:

1.º) Os números relativos têm o *mesmo sinal:*

$(+8) + (+3) = +11$ pois, $8 + 3 = 11$ e o sinal comum é +

$(-7) + (-5) = -12$ pois, $7 + 5 = 12$ e o sinal comum é –

2.º) Os números relativos têm *sinais diferentes:*

$(+6) + (-4) = +2$ pois, $6 - 4 = 2$ e o sinal é + porque +6 é o de maior valor absoluto.

$(-5) + (+2) = -3$ pois, $5 - 2 = 3$ e o sinal é – porque – 5 é o de maior valor absoluto.

NOTA: Se os números relativos forem *simétricos* a sua soma é *igual a zero.* Exemplo:

$(+5) + (-5) = 0$

b) *De vários números relativos.*

REGRA: Somam-se, dois a dois, os números relativos positivos e os números relativos negativos, e em seguida somam-se os dois resultados encontrados. Exemplo:

Efetuar a adição: $(+5)+(-8)+(-11)+(+1)$

*Somam-se* os positivos: $(+5)+(+1) = +6$ (regra anterior)

*Somam-se* os negativos: $(-8)+(-11) = -19$ (regra anterior)

A soma final será: $(+6)+(-19) = -13$ (regra anterior)

Nota: É imediato que se pode chegar ao mesmo resultado somando-se o primeiro número relativo com o segundo, pela regra anterior, em seguida o resultado com o terceiro, e assim por diante.

**2. Subtração.** A subtração de dois números relativos, dados numa certa ordem, se transforma numa *adição*, mediante a seguinte

Regra: Soma-se ao minuendo o *simétrico* do subtraendo.

Exemplos:

$(+8)-(+5) = (+8)+(-5) = +3$ (o simétrico de $+5$ é $-5$)

$(-6)-(-4) = (-6)+(+4) = -2$ (o simétrico de $-4$ é $+4$)

$(-2)-(+26) = (-2)+(-26) = -28$ (o simétrico de $+26$ é $-26$)

$(+5)-(-6) = (+5)+(+6) = +11$ (o simétrico de $-6$ é $+6$)

$(-3)-(+3) = (-3)+(-3) = -6$ (o simétrico de $+3$ é $-3$)

Nota: Com a criação dos números relativos a *subtração entre dois números inteiros quaisquer é agora* ***sempre possível***, pois dados dois números inteiros, existe sempre um terceiro número, positivo ou negativo, que, somado ao segundo, resulta o primeiro. Exemplo:

$3-5$ é o mesmo que $(+3)-(+5)$, cujo cáculo dá:

$(+3)-(+5) = -2$ *(pela regra da subtração)*

Logo: $3-5 = -2$

**3. Expressões numéricas contendo adições e subtrações de números relativos.** O cálculo dessas expressões pode ser feito substituindo-se cada diferença entre números relativos pela adição entre êles, segundo a regra já estudada na subtração. A expressão fica assim reduzida a uma adição de vários números relativos. Exemplo:



Calcular o valor da expressão:

$(+5) + (-12) - (+13) + (-1) - (-5) - (+8)$

Temos:

$(+5) + (-12) + (-13) + (-1) + (+5) + (-8) =$

$= (+5) + (+5) + (-12) + (-13) + (-1) + (-8) =$

$= (+10) + (-34) = -24.$

Na prática, os números relativos que entram na expressões numéricas, deixam de figurar com os parênteses. Quando, em conjunto, estão submetidos às operações de adição e subtração, vale a seguinte

Regra: *"Quando o parêntese estiver precedido do sinal +, retira-se o mesmo* ***conservando-se*** *os sinais dos números relativos contidos dentro dêle. Quando o parêntese estiver precedido do sinal −, retira-se o parêntese* ***trocando-se*** *os sinais dos números relativos contidos nêle".*

Nota: Os números positivos podem, numa expressão numérica, deixar de possuir o sinal +, que será empregado sòmente para a indicação da operação de adição. Exemplo:

Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $5 + (-3 - 18 + 1)$

Retirando-se os parênteses, segundo a regra enunciada:

$5 - 3 - 18 + 1 =$
$= 5 + 1 - 3 - 18 =$
$= 6 - 21 =$
$= -15.$

2.ª) $-13 - (4 + 5 - 12) + 9$

$-13 - 4 - 5 + 12 + 9 =$
$= 12 + 9 - 13 - 4 - 5 =$
$= 21 - 22 =$
$= -1.$

3.ª) $18 - (-3 + 1) + (8 - 11)$

$18 + 3 - 1 + 8 - 11 =$
$= 18 + 3 + 8 - 1 - 11 =$
$= 29 - 12 =$
$= 17.$

4.ª) $8 - [-4 + (-3+5) - (8-18)]$ retirando os parênteses
$8 - [-4 - 3+5-8+18] =$ retirando os colchetes
$= 8 + 4 + 3 - 5 + 8 - 18 =$
$= 8 + 4 + 3 + 8 - 5 - 18 = 23 - 23 = 0.$

## EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RELATIVOS

1. Efetuar as adições:

1.º) $(+12) + (+7)$
2.º) $(-6) + (-5)$
3.º) $(-8) + (+14)$
4.º) $(+5) + (-9)$
5.º) $(+13) + (-13)$
6.º) $(-21) + (-1)$
7.º) $(-1\,318) + (+9)$
8.º) $(+1\,000) + (-1\,001)$
9.º) $(-145) + (+145)$

2. Efetuar as adições:

1.º) $(+11) + (-2) + (-19)$
2.º) $(-3) + (-8) + (+1) + (-26) + (+35)$
3.º) $(+15) + (-15) + (-3) + (-1) + (+3) + (+1)$

3. Efetuar as subtrações:

1.º) $(+8) - (+3)$
2.º) $(-11) - (-15)$
3.º) $(+10) - (+1)$
4.º) $(-1) - (+12)$
5.º) $(-3) - (-8)$
6.º) $(+6) - (-6)$
7.º) $(-2\,004) - (+18)$
8.º) $(-101) - (+101)$
9.º) $(+4) - (+4)$

4. Calcular o valor das expressões numéricas:

1.º) $(-2) + (+5) - (-1) + (-9) - (+2) - (-16) + (+7)$
2.º) $(-100) - (+1\,000) + (+10) + (-1)$
3.º) $-7 + (-3+5-8)$
4.º) $12 - [8 - (13 - 29 + 1)]$
5.º) $5 - [4 - [-6 - (131+3-218)]]$
6.º) $1 - [1 - [1 - (1-1)]]$
7.º) $a - 5 - (-8+3+a)$

Respostas:

1. 1.º) +19; 2.º) −11; 3.º) +6; 4.º) −4; 5.º) 0; 6.º) −22; 7.º) −1 309; 8.º) −1; 9.º) 0
2. 1.º) −10; 2.º) −1; 3.º) 0
3. 1.º) +5; 2.º) +4; 3.º) +9; 4.º) −13; 5.º) +5; 6.º) +12; 7.º) −2 022; 8.º) −202; 9.º) 0.
4. 1.º) +16; 2.º −1 091; 3.º) −13; 4.º) −11; 5.º) +79; 6.º) +1; 7.º) 0.



### 4. Multiplicação. a) *De dois números relativos.*

Regra: *Multiplicam-se os valores absolutos e atribui-se ao produto o sinal + ou −, conforme os dois fatôres sejam do mesmo sinal ou de sinais diferentes.* Exemplos:

$(+3) \times (+2) = +6$ sinal do produto: + (os fatôres têm o mesmo sinal).
$(-8) \times (-5) = +40$ sinal do produto: + (os fatôres têm o mesmo sinal).
$(+9) \times (-4) = -36$ sinal do produto: − (os fatôres têm sinais diferentes).
$(-7) \times (+10) = -70$ sinal do produto: − (os fatôres têm sinais diferentes).

Observando os sinais dêstes resultados, deduzimos a seguinte regra denominada *Regra dos sinais:*

$+ \cdot + = +$ que se lê: *mais por mais dá mais.* (*)
$- \cdot - = +$ que se lê: *menos por menos dá mais.*
$+ \cdot - = -$ que se lê: *mais por menos dá menos.*
$- \cdot + = -$ que se lê: *menos por mais dá menos.*

Nota: Dê ao sinal + o significado de "*amigo*" e ao sinal − o de "*inimigo*". Observe como vem satisfeita a *Regra dos Sinais* da multiplicação(**):

o "amigo" (+) de meu "amigo" (+) é meu "amigo" (+)
o "amigo" (+) de meu "inimigo" (−) é meu "inimigo" (−)
o "inimigo" (−) de meu "amigo" (+) é meu "inimigo" (−)
o "inimigo" (−) de meu "inimigo" (−) é meu "amigo" (+)

b) *De vários números relativos.*

Regra: *Multiplicam-se os valores absolutos e atribui-se ao produto o sinal + ou −, conforme o número de fatôres negativos seja par ou ímpar.* Exemplos:

(*) Convém lembrar que a multiplicação entre dois números pode ser indicada pelos sinais: × ou ·.

(**) Êste interessante exemplo consta do livro *Curso de Matemática* — 3.ª Série — Ed. 1944, pág. 21 de Algacyr M. Naeder.

$(+3) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (+4) \cdot (-2) = -120$ o produto é *negativo* porque tem 3 (n.° ímpar) fatôres negativos.

$(-10) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (+4) = +240$ o produto é *positivo*, porque tem 2 (n.° par) fatôres negativos.

5. **Divisão.** A divisão entre dois números relativos, dados numa certa ordem, sendo o valor absoluto do primeiro *múltiplo* do valor absoluto do segundo (que é diferente de zero) obedece à seguinte

REGRA: *Dividem-se os valores absolutos e atribui-se ao quociente o sinal + ou −, conforme os números dados sejam do mesmo sinal ou de sinais diferentes.* Exemplos:

$(+8) : (+4) = +2$ sinal do quociente: + (os números têm o mesmo sinal).

$(-12) : (-3) = +4$ sinal do quociente: + (os números têm o mesmo sinal).

$(+20) : (-2) = -10$ sinal do quociente: − (os números têm sinais diferentes).

$(-42) : (+7) = -6$ sinal do quociente: − (os números têm sinais diferentes).

Observamos que a *Regra dos Sinais* para a divisão de dois números relativos é idêntica à da multiplicação, isto é,

$+ : + = +$ que se lê: *mais dividido por mais dá mais.*

$- : - = +$ que se lê: *menos dividido por menos dá menos.*

$+ : - = -$ que se lê: *mais dividido por menos dá menos.*

$- : + = -$ que se lê: *menos dividido por mais dá menos.*

6. **Potenciação.** A potenciação de números relativos, tendo por expoentes números inteiros, obedece à seguinte

REGRA: *O valor absoluto de uma potência é igual à potência do valor absoluto de sua base.*



O sinal da potência de *expoente par* de um número relativo é *sempre* +

O sinal da potência de *expoente ímpar* de um número relativo é + ou −, conforme o número relativo seja *positivo* ou *negativo.* Exemplos:

$(+5)^2 = +25$ (o sinal da potência é + porque o expoente é par).

$(-2)^3 = -8$ (o sinal da potência é − porque o expoente é ímpar e a base é um número relativo negativo).

$(-1)^2 = +1$ (o sinal da potência é + porque o expoente é par).

$(-3)^3 = -27$ (o sinal da potência é − porque o expoente é ímpar e a base é um número relativo negativo).

$(+1)^5 = +1$ (o sinal da potência é + porque o expoente é ímpar e a base é um número relativo positivo.

7. **Observação.** As propriedades da adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de números relativos são as mesmas já estudadas com os números inteiros.

## EXERCÍCIOS SÔBRE MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO E POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS RELATIVOS

1. Efetuar os produtos:

1.°) $(+3) \cdot (+7)$
2.°) $(-5) \cdot (-4)$
3.°) $(+6) \cdot (-3)$
4.°) $(-8) \cdot (+9)$
5.°) $(+300) \cdot (-1)$
6.°) $(-20) \cdot (-2)$
7.°) $(-3) \cdot (-1) \cdot (+4) \cdot (-5)$
8.°) $(+10) \cdot (-8) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (-3)$
9.°) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-7) \cdot (-8)$

2. Calcular o valor das expressões:

   1.º) $(+3) + (-5) \times (+7)$
   2.º) $(-2) \times (-1) + [(+3) - (+5)]$

3. Efetuar as divisões:

   1.º) $(+9) : (+3)$
   2.º) $(-21) : (-7)$
   3.º) $(+12) : (-4)$
   4.º) $(-16) : (+8)$
   5.º) $(-1) : (-1)$
   6.º) $(-182) : (+14)$

4. Calcular o valor das expressões:

   1.º) $[(-48) + (+36)] : (-3)$
   2.º) $[4 \cdot (-3) - 8] : [(1 - 3 \cdot 2]$
   3.º) $[5 - (3 - 4)] : (-2)$

5. Calcular o valor das seguintes potências:

   1.º) $(+4)^3$ 2.º) $(-3)^2$ 3.º) $(-5)^4$ 4.º) $(-1)^7$ 5.º) $(+8)^4$
   6.º) $(-6)^4$ 7.º) $(-10)^5$ 8.º) $(+4)^2$ 9.º) $(+1)^{12}$ 10.º) $(+3)^3$

6. Calcular o valor das expressões:

   1.º) $(-6)^2 - [4 - (-2)^3 \cdot 6]$
   2.º) $(-1)^4 + [(-3)^2 - (+5)^2] \times (-2)$
   3.º) $[(-3)^3 - (-1)^5 \times (+4)^2] : [(-8)^1 + (-3)]$
   4.º) $12 - \{(-1)^3 - [5 - (+3)^2 + 1]\}$

RESPOSTAS:

1. 1.º) +21; 2.º) +20; 3.º) −18; 4.º) −72; 5.º) −300; 6.º) +40; 7.º) −60; 8.º) −240; 9.º) +20 160.
2. 1.º) −32; 2.º) 0
3. 1.º) +3; 2.º) +3; 3.º) −3; 4.º) −2; 5.º) +1; 6.º) −13.
4. 1.º) +4; 2.º) +4; 3.º) −3.
5. 1.º) +64; 2.º) +9; 3.º) +625; 4.º) −1; 5.º) +4 096; 6.º) +1 296; 7.º) −100 000; 8.º) +16; 9.º) +1; 10.º) +27.
6. 1.º) −16; 2.º) +33; 3.º) +1; 4.º) +10.

NOTA: Existem mais exercícios sôbre números relativos constantes nos *Exercícios de Recapitulação*, pág. 252.

CAPÍTULO II

# Divisibilidade aritmética. Números primos. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum

## § 1. Divisibilidade aritmética.

1. **Definição.** *Um número é **divisível** por outro quando a sua divisão por êsse outro é exata, isto é, o resto é zero.*

Quando um número é divisível por outro, diz-se também que êle é *múltiplo* dêsse outro que passa a ser seu *divisor* ou *submúltiplo.*

Assim, por exemplo, o número 20 é *divisível* por 5, pois

$$20 : 5 = 4$$

5 é *divisor* de 20 ou *divide* 20.

2. **Critérios de divisibilidade**(*). A verificação de que um número é divisível por outro é feita, geralmente, efetuando-se a divisão para se ter conhecimento de sua exatidão ou não. Existem, porém, alguns *divisores especiais*, conhecidos desde o curso primário, que permitem reconhecer se um número é divisível por outro *sem efetuar a divisão*, bem como determinar o valor do *resto*, caso contrário. Para isso temos diversas regras que constituem os *critérios* ou *caracteres de divisibilidade.*

1.º) ***Divisibilidade por 2.*** Um número é divisível por 2 quando é *par*. Exemplos:

324 é divisível por 2 porque é par.
84 105 não é divisível por 2 porque não é par.

NOTA: O resto da divisão de um número por 2, pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 2. Exemplo:

3 853 que não é divisível por 2, deixa na divisão por 2, o resto 1. que é o mesmo resto da divisão por 2 do último algarismo (3).

(*) A justificação dos *critérios* mais usuais é feita em NOTAS das págs. 90 e 95.

2.º) **Divisibilidade por 3.** Um número é divisível por 3 quando a *soma* dos valôres absolutos dos seus algarismos fôr divisível por 3. Exemplos:

7 536 é divisível por 3 porque a soma 7 + 5 + 3 + 6 = 21 é divisível por 3.

893 não é divisível por 3 porque a soma 8+9+3 = 20 não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 3, pode ser obtido dividindo a soma dos valores absolutos dos seus algarismos por 3. Exemplo:

893 que não é divisível por , deixa na sua divisão por 3 o resto 2 (resto da divisão da soma 20 por 3).

3.º) **Divisibilidade por 4.** Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 4. Exemplos:

1 916 é divisível por 4 porque 16, que é o número formado pelos dois últimos algarismos da direita, é divisível por 4.

46 335 não é divisível por 4, pois, *35* não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 4, pode ser obtido dividindo o número formado pelos seus *dois últimos algarismos* da direita por 4. Exemplo:

46 335 que não é divisível por 4, deixa na sua divisão por 4, o resto 3 (resto da divisão de 35 por 4).

4.º) **Divisibilidade por 5(*).** Um número é divisível por 5 quando termina em *zero* ou *cinco*. Exemplos:

12 385 é divisível por 5 porque termina em 5.
218 430 é divisível por 5 porque termina em 0.
723 não é divisível por 5 porque não termina em 5 ou 0.

NOTA: O resto da divisão de um número por 5 pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 5. Exemplo:

723 que não é divisível por 5 deixa, na sua divisão por 5, o resto 3 (resto da divisão do último algarismo por 5).

(*) *Divisibilidade por 25:* Um número é divisível por 25 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 25. Exemplos:

4 275 é divisível por 25 (pois, 75 é divisível por 25);
12 315 não é divisível por 25 (pois, 15 não é divisível por 25)



5.º) **Divisibilidade por 6.** Um número é divisível por 6 quando fôr divisível por 2 e por 3. Exemplos:

384 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma 15).

1 412 não é divisível por 6, porque apesar de par não é divisível por 3 (soma 8).

6.º) **Divisibilidade por 7.** Destacamos três casos:

1) *O número é formado sòmente de dois algarismos.* O número é divisível por 7 se o número formado pelo algarismo das unidades mais três vêzes o algarismo das dezenas fôr divisível por 7. Exemplos:

84 é divisível por 7, pois,
4 (alg. das unidades).
24 (3 vêzes alg. dezenas).
28 que é divisível por 7.

95 não é divisível por 7, pois
5 (unidades).
27 (3×9)
32 que não é divisível.

2) *O número é formado sòmente de três algarismos.* O número é divisível por 7 se o número formado pelo algarismo das unidades, mais três vêzes o algarismo das dezenas e mais duas vêzes o algarismo das centenas fôr divisível por 7. Exemplos:

504 é divisível por 7, pois,
4 (unidades)
0 (3×0)
10 (2×5)
14 que é divisível por 7.

817 não é divisível por 7, pois,
7 (unidades)
3 (3×1)
16 (2×8)
26 que não é divisível.

3) *O número é formado por mais de três algarismos.* O número é divisível por 7 se, separando-o em classes de três algarismos, a partir da direita, o número formado pela diferença

entre as somas das classes de ordem ímpar e as das de classe par fôr divisível por 7. São de classe ímpar o 1.º, 3.º, 5.º, . . . grupos e de classe par o 2.º, 4.º, 6.º, . . . grupos, a partir da direita. Exemplos:

10 451 é divisível por 7, pois,

451 (classe ímpar – 1.º grupo).
– 10 (classe par – 2.º grupo).
441 que é divisível por 7.

(regra anterior)
1 (unidade)
12 (3×4)
8 (2×4)
21 (é divisível por 7)

12 345 678 não é divisível por 7, pois,

678
12
690 (soma das classes ímpares); 345 (classe par).

690
– 345
345 que não é divisível por 7 (regra anterior).

Nota: No caso da primeira soma (classes de ordem ímpar) ser menor que a segunda (classes de ordem par), acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 7 oportuno, a fim de tornar possível a subtração.

7.º) ***Divisibilidade por 8.*** Um número é divisível por 8, quando o número formado pelos seus *três últimos algarismos* da direita fôr divisível por 8. Exemplos:

6 104 é divisível por 8 porque 104, que é o número formado pelos seus *três últimos algarismos*, é divisível por 8.

21 417 não é divisível por 8 porque 417 não é.

Nota: O resto da divisão de um número por 8 pode ser obtido dividindo por 8 o número formado pelos seus três últimos algarismos. Exemplo:

21 417 que não é divisível por 8, deixa na sua divisão por 8 o resto 1 (resto da divisão de 417 por 8).



8.º) ***Divisibilidade por 9.*** Um número é divisível por 9 quando a *soma* dos valores absolutos dos seus algarismos fôr divisível por 9. Exemplos:

738 é divisível por 9 porque a soma $7+3+8=18$ é divisível por 9.

44 319 não é divisível por 9 porque a soma $4+4+3+1+9=21$ não é.

Nota: O resto da divisão de um número por 9 pode ser obtido dividindo por 9, a soma dos valores absolutos dos seus algarismos. Exemplo:

44 319 que não é divisível por 9, deixa na sua divisão por 8 o resto 3 (resto da divisão da soma 21 por 9).

9.º) ***Divisibilidade por 10.*** Um número é divisível por 10 quando *termina* em *zero*. Exemplos:

8 530 é divisível por 10 porque termina em 0.

39 726 não é divisível por 10.

Nota: O resto da divisão de um número por 10 é igual ao algarismo das unidades dêsse número. Exemplo:

39 726 que não é divisível por 10, deixa na sua divisão por 10 o resto 6 (que representa o algarismo das unidades).

*Generalização:* Um número é divisível por 100 quando *termina* em *dois zeros;* por 1 000 quando *termina* em *três zeros;* etc.

10.º) ***Divisibilidade por 11.*** Um número é divisível por 11 quando a *diferença* entre as *somas* dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, fôr divisível por 11.

Os algarismos de ordem ímpar são os que ocupam o 1.º, 3.º, 5.º, . . . lugares e os de ordem par o 2.º, 4.º, 6.º, . . . lugares, a partir da direita. Exemplos:

95 568 é divisível por 11, pois, a soma dos algarismos de ordem ímpar (1.º, 3.º, 5.º) vale: $8+5+9=22$; a soma dos algarismos de ordem par (2.º, 4.º), vale $6+5=11$

e a *diferença* entre essas somas:

$22 - 11 = 11$, que é divisível por 11.

735 não é divisível por 11 porque:

soma dos algar. de ordem ímpar: $5+7=12$

soma dos algar. de ordem par: 3

diferença: 9 que não é divisível por 11.

NOTAS: 1.ª) O resto da divisão de um número por 11 pode ser obtido dividindo por 11 a diferença entre aquelas duas somas. Exemplo:

735 que não é divisível por 11, deixa na sua divisão por 11 o resto 9 (resto da divisão da diferença entre as somas por 11).

2.ª) No caso da primeira soma (algarismos de ordem ímpar) ser menor do que segunda (algarismos de ordem par) acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 11 conveniente, a fim de tornar possível a subtração (aritmética) entre elas. Exemplos:

419 085 não é divisível por 11 porque resta 7 da divisão.

De fato: soma dos algarismos ordem ímpar: $5 + 0 + 1 = 6$
soma dos algarismos ordem par: $8 + 9 + 4 = 21$
diferença entre as somas: $6 - 21 = ?$
acrescentando-se um conveniente múltiplo de 11 à primeira soma (22 por exemplo), temos:

$$6 + 22 = 28$$

e a diferença: $28 - 21 = 7$ já é possível.

11.º) ***Divisibilidade por 12.*** Um número é divisível por 12 quando *fôr divisível* por 3 e por 4. Exemplo:

324 é divisível por 12 porque é divisível por 3 (soma 9) e por 4 (os dois últimos algarismos formam o número 24).

4 618 não é divisível por 12 porque não é divisível por 3 (e nem por 4).

NOTA: Alguns dos critérios de divisibilidade estudados podem ser fàcilmente *justificados* pelas duas relações seguintes, decorrentes das propriedades estudadas na divisão:



1.ª) Se dois, ou mais, números são divisíveis por um mesmo número, então a *soma* (ou diferença) será também divisível por êsse número.

Ex.: sendo $12 : 3$ e $18 : 3$, então a soma $(12+18) : 3$

2.ª) Todo número divisível por um número, que é múltiplo de outros, também é divisível por êsses outros.

Ex.: $72 : 8$; 8 é múltiplo de 2 e 4, então $72 : 2$ e $72 : 4$

Nestas condições, poderemos justificar os critérios enunciados por 2, 5 e 10, da seguinte maneira: consideremos um número qualquer, por ex.: 8 324. Êsse número pode *sempre* ser decomposto numa *soma* de duas parcelas, isto é:

$$8\,324 = 8\,320 + 4$$

ou

$$8\,324 = 832 \times 10 + 4$$

Ora a 1.ª parcela ($832 \times 10$) é: por 10 e portanto por 2 e 5 (2.ª Rel.). Resta saber se a outra parcela (4), que representa o *último algarismo* da direita do número dado, também é divisível por 2 ou 5, pois, no caso de ser, a *soma* (que representa o número dado) também será (1.ª Rel.). Logo, os critérios de divisibilidade enunciados separadamente por 2, 5 e 10 podem ser sintetizados num único: *um número é divisível por* 2, 5 *ou* 10 *se o último algarismo da direita* (*o das unidades*) *fôr divisível por* 2, 5 *ou* 10.

O mesmo se poderá fazer com relação os critérios por 4, 25 e 100, pois agora a decomposição será:

$$8\,324 = 8\,300 + 24$$

onde a 1.ª parcela é sempre divisível por 4, 25 e 100 restando saber sòmente acêrca da 2.ª (constituida pelos *dois últimos* algarismos da direita) que caracteriza justamente o respectivo critério.

Os critérios por 3 e por 9 podem ser justificados da seguinte forma: Seja ainda o número 8 324, que agora pode ser decomposto na soma:

$$8\,324 = 8\,000 + 300 + 20 + 4$$

ou

$$8\,324 = 8 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$$

ou

$$8\,324 = 8 \times (999+1) + 3 \times (99+1) + 2 \times (9+1) + 4$$

e pela *propriedade distributiva do produto em relação à soma*, vem:

$$8\,324 = 8 \times 999 + 8 + 3 \times 99 + 3 + 2 \times 9 + 2 + 4$$

e aplicando a *propriedade associativa da soma*, podemos sempre escrever:

$$8\,324 = (8 \times 999 + 3 \times 99 + 2 \times 9) + (8 + 3 + 2 + 4)$$

Logo, o número 8 324 (ou outro qualquer) pode ser sempre decomposto numa soma de duas parcelas, das quais a 1.ª é sempre divisível por 9 (e, portanto, por 3) e a 2.ª é constituída pela *soma dos valores absolutos*

(8+3+2+4) de seus algarismos. Daí o critério: *um número é divisível por 9 (ou 3) quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos fôr divisível por 9 (ou 3).*

Anàlogamente os alunos poderão justificar o critério de divisibilidade por 11, lembrando que: "tôda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais 1 ou menos1; *mais* quando o n.º de zeros for *par* e *menos* quando n.º de zeros for *ímpar*", ou seja:

$$\begin{aligned} 10 &= 11 - 1 = \text{m. } 11 - 1 \\ 100 &= 99 + 1 = \text{m. } 11 + 1 \\ 1000 &= 1001 - 1 = \text{m. } 11 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

**3. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor.** Podemos resumir as propriedades elementares dos restos nas seguintes:

1.ª) *O resto que se obtém na divisão de uma soma por um número é igual ao resto que se obtém na divisão da soma dos restos das parcelas pelo mesmo número.*

2.ª) *O resto que se obtém na divisão de um produto por um número é igual ao resto que se obtém na divisão do produto dos restos dos fatôres pelo mesmo número.*

Como aplicação dessas propriedades, costuma-se verificar a exatidão das operações fundamentais mediante as *provas por um divisor*, de critério de divisibilidade já estudado. Pelas vantagens que oferecem, os divisores mais empregados são 9 e 11.

Deve-se, contudo, notar que estas provas oferecem uma *probabilidade de acerto* das operações, sem todavia garantir que estejam absolutamente certas, como veremos adiante. Exemplos:

1. Prova da *adição* usando o divisor 9 (Prova dos nove).

$$\left.\begin{array}{rl} 4\,318 & (\text{soma } 16 : 9) \rightarrow \text{resto } 7 \\ 2\,593 & (\text{soma } 19 : 9) \rightarrow \text{resto } 1 \\ 1\,876 & (\text{soma } 22 : 9) \rightarrow \text{resto } 4 \end{array}\right\} \rightarrow (\text{soma } 12 : 9) \rightarrow \textit{resto } \mathbf{3}$$

$$\begin{array}{rl} 8\,787 & (\text{soma } 30 : 9) \rightarrow \textit{resto } \mathbf{3} \end{array}$$

Nota: Não podemos com essa prova garantir que a operação esteja absolutamente certa, pois, caso no resultado da soma figurasse, por engano, 7 887, ainda assim a prova pelo divisor 9 daria certa (a ordem das parcelas não altera a soma).



2. Prova da *subtração*, usando o divisor 11. (Prova dos 11)

$$\begin{array}{rl} 4\,531 & \text{o resto da divisão por 11 é } \mathbf{10} \\ 2\,982 & \text{o resto da divisão por 11 é } 1 \\ \hline 1\,549 & \text{o resto da divisão por 11 é } 9 \end{array} \quad \rightarrow 9 + 1 = \mathbf{10}$$

3. Prova da *multiplicação* usando o divisor 9.

$$\begin{array}{rl} 5\,713 & \text{o resto da divisão por 9 é } 7 \\ \times 32 & \text{o resto da divisão por 9 é } 5\ \times \\ \hline 11\,426 & \qquad\qquad 35 \text{ o resto por 9 é } \mathbf{8} \\ 17139\phantom{0} & \\ \hline 182\,816 & \text{o resto da divisão por 9 é } \mathbf{8} \end{array}$$

4. Prova da *divisão* usando o divisor 11.

$$\begin{array}{r|l} 62\,452 & 29 \\ \cline{2-2} 04\,4 & 2\,153 \\ 1\,55 & \\ 102 & \\ 15 & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccccc} 62\,452 & = & 29 \times 2\,153 & + & 15 \\ \text{resto por 11} & & \text{resto por 11} & & \text{resto por 11} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & = & 1 & + & 4 \\ \mathbf{5} & = & \mathbf{5} & & \end{array}$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE A DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA

1. Verificar se são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os números: 21 540; 8 433; 7 777; 194 180; 1 001; 397; 3 600; 12 349.
2. Que restos pode dar na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?
3. Escrever à direita de 36 um algarismo tal que o número formado seja divisível por 3 e por 11.
4. Indicar quais os algarismos de menor valor absoluto que devem ser colocados no lugar dos pontos para que:

| | |
|---|---|
| 532. seja divisível por 3 e por 9; | 1.89 seja divisível por 11; |
| 143.5 seja divisível por 3 e por 5; | 892.6 seja divisível por 4; |
| 512. seja divissível por 8; | 6.724 seja divisível por 2 e por 11. |

5. Qual é o menor número que se deve somar a 4 831 para que resulte um número divisível por 3?

6. Qual é o menor número que se deve somar a 12 318 para que resulte um número divisível por 5?

7. Sem efetuar a divisão, escrever os restos das divisões dos números:

   1.º) 81 345 786 por 9 e por 11;
   2.º) 18 315 por 4, 5 e 8;
   3.º) 303 171 por 2, 3 e 10.

8. Verificar que a diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos, mas escritos em ordem inversa é divisível por 9.

9. Verificar que a soma de dois números pares é um número par, que a soma de dois números ímpares é um número par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

10. Numa caixa existem menos de 60 bolinhas. Se elas forem contadas de 9 em 9 não sobra nenhuma e se forem contadas de 11 em 11 sobra uma. Quantas são as bolinhas?

11. Verificar a exatidão, usando os divisores 9 e 11, das seguintes operações;

    1.ª) $8\,503 + 7\,128 + 564 = 16\,387$; 2.ª) $4\,018 - 3\,297 = 721$;
    3.ª) $4\,301 \times 45 = 192\,145$; 4.ª) $11\,414 : 26 = 439$.

RESPOSTAS:

1. 21 540 é por 2, 3, 4, 5, 6, 10 e 12; 8 433 é por 3 e 9; 7 777 é por 7 e 11 194 180 é por 2, 4, 5, 7, 10; 1 001 é por 7 e 11; 397 por nenhum; 3 600 é por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12; 12 349 por nenhum.
2. Os restos podem ser: 1, 2, 3 e 4.
3. Deve ser escrito o algarismo 3.
4. Os números, depois de colocados os algarismos, são: 5 328; 1 089; 14 325; 89 216; 5 120; 64 724.
5. O menor número é 2.
6. O menor número é 2.
7. 1.º) O resto por 9 é 6 e por 11, 5. 2.º) O resto por 4 é 3, por 5 é 0 e por 8, 3. 3.º) O resto por 2 é 1, por 3 é 0 e por 10 é 1.
10. São 45 bolinhas.
11. 1.ª) Errada; 2.ª) Certa; 3.ª) Errada; 4.ª) Certa.



## § 2. Números primos.

**1. Definição.** *Um número diz-se **primo**, quando é divisível sòmente por si e pela unidade. Caso contrário diz-se composto.*

Assim, por exemplo, o número 13 é **primo** porque só é divisível por 13 e por 1 enquanto que os números 4, 6, 8, 9, 10, 12 . . . . . são *compostos*, pois, admitem outros divisores além da unidade e do próprio número considerado.

Os primeiros números primos dispostos em ordem crescente, isto é:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, . . . . . . . .

constituem a *sucessão dos números primos*(*) que é ***infinita***, ou seja é sempre possível encontrar ***novos***, números primos.

Quando dois ou mais números admitem *sòmente a unidade* para divisor comum, êles são chamados de ***primos entre si.*** Exemplo: 12 e 7, cujo único divisor comum é 1, são *primos entre si.*

NOTA: É oportuno, neste instante, lembrar a possibilidade de justificar outros critérios de divisibilidade a partir, agora, da seguinte propriedade: *"Se um n.º é divisível por dois ou mais números primos entre si, êle será também divisível pelo produto dêles".*

Assim, um número divisível por 2 e por 3 é por 6 (*critério por* 6); por 3 e por 4 é por 12 (*critério por* 12); por 2 e por 7 e por 14; por 3 e por 5 é por 15, etc . . .

**2. Tábua de números primos.** Como não é possível conhecer *todos* os números primos, procura-se, pelo menos, construir tabelas — denominadas comumente por *tábuas* —

(*) Poderíamos. conforme faz *M. Cipolla*, nos seus "Elementi de Aritmetica Razionale — Ed. 1950, pág. 75" — deixar de considerar o número 1 como primo. Todavia o tradicionalismo histórico ressaltado por ilustres tratadistas da Aritmética, onde o 1 (que satisfaz a definição dada para número primo) figura no *Crivo de Eratóstenes* — que é a mais antiga tábua de números primos registrada pela História — como o *primeiro número primo*, permite-nos considerá-lo ainda como tal. Uma das maiores tábuas que se conhece, a de *Burckhardt*, registra todos os números primos *desde* 1 até 3 036 000. Outrossim, estudos famosos, tais como a *Proposição de Golbach* (*"Todo número par é uma soma de dois números primos"*), bem como a *Memória de Riemann* (*"Número de números primos"*) dão ao número 1 personalidade de número primo. Posteriormente, num curso de Aritmética Racional (2.º ciclo) seria precisado o conceito dos números que admitem sòmente dois divisores *distintos*.

que possam fornecer, ordenadamente, todos os números primos *menores* que um certo número prefixado. A primeira tábua conhecida recebeu o nome de *Crivo de Eratóstenes*, que resulta de um processo atribuído a Eratóstenes insigne matemático grego da antiguidade (séc. III a. C.).

OBSERVAÇÃO. *Crivo*, significa *peneiro* e o seu nome decorre do fato da tábua primitiva apresentar êsse aspecto quando lhes *furavam* os números múltiplos.

Apliquemos êsse processo na construção da tábua dos números primos até 50.

Riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;

Riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;

Riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5;

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |

e assim por diante até o número 29 (que não foi riscado) e cujo primeiro múltiplo 58 ultrapassa 50. Ou também são primos todos os números não riscados menores do quadrado do último número primo do qual foram cancelados os múltiplos. No exemplo, como foram riscados os múltiplos de 7, serão *primos*, todos os números não riscados menores que $7^2 = 49$.

Os números que não foram riscados:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

são os números primos existentes até 50. No fim dêste parágrafo encontra-se uma *tábua* dos números primos menores que 1 000.

**3. Reconhecimento de um número primo.** É sempre possível saber se um dado número é primo com a seguinte

REGRA: *Divide-se o número dado, sucessivamente, pelos números primos* 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . *até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma dessas divisões fôr exata, o número dado é primo.* Exemplos:



1) Reconhecer se o número 173 é primo.

Divide-se 173, respectivamente, pelos números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, . . . Algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, pois, é fácil reconhecer que 173 não é divisível por êles. As outras divisões serão:

$$\begin{array}{r|l} 173 & 13 \\ \cline{2-2} 43 & 13 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 173 & 17 \\ \cline{2-2} 03 & 10 \end{array}$$

Como já foi encontrado um quociente (13) *igual* ao divisor, e a divisão não é *exata* (resto 4) conclui-se que 173 *é primo*.

2) Reconhecer se o número 641 é primo.

$$\begin{array}{r|l} 641 & 13 \\ \cline{2-2} 121 & 49 \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 17 \\ \cline{2-2} 131 & 37 \\ 12 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 19 \\ \cline{2-2} 71 & 33 \\ 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 23 \\ \cline{2-2} 181 & 27 \\ 20 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 29 \\ \cline{2-2} 61 & 22 \\ 3 & \end{array}$$

Observamos, nessas divisões, que enquanto os divisores vão aumentando (13, 17, 19, 23 e 29) os quocientes vão diminuindo (49, 37, 33, 27 e 22). Como foi encontrado um quociente (22) *menor* que o divisor (29) e a divisão *não é exata*, concluímos ser 641 um número primo.

3). Reconhecer se 5 277 é primo.

Sendo êsse número divisível por 3, segue-se que não é primo.

4) Reconhecer se 1 027 é primo.

Por 2, 3, 5, 7 e 11 não é divisível. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1\,027 & 13 \\ \cline{2-2} 117 & 79 \\ 00 & \end{array}$$

isto é, 1 027 é múltiplo de 13, portanto não é primo.

**4. Decomposição de um número em fatôres primos.** Todo número, que não é primo, pode ser *decomposto* num produto de fatôres primos. Assim, por exemplo, o número 60, que não é primo, pode ser decomposto primeiramente em

$$60 = 2 \times 30(*)$$

Por sua vez o número 30, que não é primo, pode ser decomposto em $2 \times 15$.

Logo: $$60 = 2 \times 2 \times 15$$

O número 15 pode ser ainda decomposto em $3 \times 5$ e teremos assim a decomposição final:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ (todos os fatôres são primos)}$$

ou pelas propriedades da potenciação (produto de potências de mesma base):

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

A decomposição de um número em fatôres primos, obedece à seguinte

REGRA: *Divide-se o número pelo seu menor divisor primo, diferente da unidade, em seguida divide-se o quociente pelo seu menor divisor e assim por diante até se encontrar o quociente 1. O número dado será igual ao produto de todos os divisores encontrados, que são números primos.*

Na prática dispõem-se os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical. Dêsse modo a decomposição de 60 em seus fatôres primos terá a seguinte disposição:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Escrevendo-se a seguir: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
ou $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

(*) Não colocamos o fator primo 1, de acôrdo com a 4.ª Regra do produto de vários fatôres (pág. 48).



Exemplos:

1) Decompor os números 1 144 e 2 532 em seus fatôres primos.

$$\begin{array}{r|l} 1\,144 & 2 \\ 572 & 2 \\ 286 & 2 \\ 143 & 11 \text{ (Ver nota)} \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,532 & 2 \\ 1\,266 & 2 \\ 633 & 3 \\ 211 & 211 \text{ (Ver nota)} \\ 1 & \end{array}$$

$$1\,144 = 2^3 \times 11 \times 13 \qquad 2\,532 = 2^2 \times 3 \times 211$$

NOTA: É necessário verificar, com as regras já estudadas, se os números 143 ou 211 são ou não primos, pois, à primeira vista podem enganar.

**5. Determinação de todos os divisores de um número.** A decomposição de um número em seus fatôres primos permitiu que se determinassem alguns de seus divisores. Assim: o número 60 que, decomposto em seus fatôres primos, apresentou como seus divisores sòmente os fatôres primos 2, 3 e 5 (e 1 como é óbvio), *admite outros divisores* tais como 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Todos os divisores de um número, que são em *número limitado*, pois, devem ser *menores* que o número dado e o maior dêles é o próprio número, podem ser obtidos com a seguinte

REGRA: *Decompõe-se o número em fatôres primos e faz-se à direita dêsses fatôres um traço vertical. A seguir o traço escreve-se a unidade um pouco acima da direção do primeiro fator primo escrito do número dado. Os demais divisores do número são obtidos a partir da unidade, multiplicando-se cada um dos fatôres primos* (que estão à esquerda do traço) *pelos números que vêm à direita do traço e situados acima dêle. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.*

Exemplos:

1) Determinar os divisores de 60.

$$\begin{array}{r|r|l} & & 1 \\ 60 & 2 & 2 - \\ 30 & 2 & 4 - \\ 15 & 3 & 3 - \;\; 6 - 12 \\ 5 & 5 & 5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60 \end{array}$$

Os cálculos efetuados para obter os divisores do quadro acima foram feitos na seguinte ordem:

| | |
|---|---|
| Produto do fator primo 2 com o único número que vem à direita e acima dêle (1). . . . . . . . . . . . . . . | $2 \times 1 = 2$ |
| Produtos do fator primo 2 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1 e 2. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $2 \times 1 = 2$ (já obtido)<br>$2 \times 2 = 4$ |
| Produtos do fator primo 3 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2 e 4. . . . . . . . . . . . . . . . . . | $3 \times 1 = 3$<br>$3 \times 2 = 6$<br>$3 \times 4 = 12$ |
| Produtos do fator primo 5 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2, 4, 3, 6 e 12. . . . . . . . | $5 \times 1 = 5$<br>$5 \times 2 = 10$<br>$5 \times 4 = 20$<br>$5 \times 3 = 15$<br>$5 \times 6 = 30$<br>$5 \times 12 = 60$ |

Logo, os divisores de 60 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

2) Determinar os divisores de 144.

| | | |
|---|---|---|
| | | 1 |
| 144 | 2 | 2 |
| 72 | 2 | 4 |
| 36 | 2 | 8 |
| 18 | 2 | 16 |
| 9 | 3 | 3 - 6 - 12 - 24 - 48 |
| 3 | 3 | 9 - 18 - 36 - 72 - 144 |

Os divisores de 144 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 e 144.



**6. Número de divisores de um número.** Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, pode-se determinar o **número** dêles com a seguinte

Regra: *O número total de divisores de um número é igual ao produto dos expoentes dos seus fatôres primos, aumentados cada expoente de* 1. Exemplos:

1) Determinar o total dos divisores de 60.

Temos: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Os expoentes de seus fatôres primos são, respectivamente:

2, 1, 1

aumentando-se 1 em cada um dêles temos:

3, 2, 2

e, efetuando-se o produto dêsses números:

$3 \times 2 \times 2 = 12$

que é o *total* de divisores de 60.

(Êsses divisores já foram determinados em exercícios anteriores).

2) Determinar o total dos divisores de 180.

Decompondo primeiramente em fatôres primos, temos:

| | | |
|---|---|---|
| 180 | 2 | $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ |
| 90 | 2 | expoentes: 2, 2, 1 |
| 45 | 3 | aumentando 1: 3, 3, 2 |
| 15 | 3 | n.º de divisores: $3 \times 3 \times 2 = 18$ |
| 5 | 5 | |
| 1 | | |

**7. Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatôres primos.** Dados dois números é possível saber se um dêles é divisível pelo outro usando as decomposições dêsses números em seus fatôres primos. Basta aplicar o seguinte

Critério: *Decompostos dois números em seus fatôres primos, o primeiro é divisível pelo segundo se contiver, pelo menos, os fatôres primos do segundo com expoentes iguais ou maiores.*

Exemplos:

1) Verificar se 1 008 é divisível por 24.

Decompondo êsse números em seus fatôres primos, temos:

$$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \qquad 24 = 2^3 \times 3$$

Logo, 1 008 é *divisível* por 24, pois, contém todos os fatôres primos de 24 com expoentes maiores.

2) Verificar se 360 é divisível por 108.

Como: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $108 = 2^2 \times 3^3$

segue-se que 360 *não é divisível* por 108, pois, embora 360 contenha todos os fatôres primos de 108, possui um dêles (3) com expoente menor ($3^2$).

3) Determinar qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 540 para se obter um número divisível por 126.

Decompondo êsses números em seus fatôres primos:

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Como o único fator que consta de 126 e não consta de 540 é o 7, basta multiplicar 540 por 7 para se obter um número divisível por 126.



TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1 000

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 43 | 107 | 181 | 263 | 349 | 433 | 521 | 613 | 701 | 809 | 887 |
| 2 | 47 | 109 | 191 | 269 | 353 | 439 | 533 | 617 | 709 | 811 | 907 |
| 3 | 53 | 113 | 193 | 271 | 359 | 443 | 541 | 619 | 719 | 821 | 911 |
| 5 | 59 | 127 | 197 | 277 | 367 | 449 | 547 | 631 | 727 | 823 | 919 |
| 7 | 61 | 131 | 199 | 281 | 373 | 457 | 557 | 641 | 733 | 728 | 929 |
| 11 | 67 | 137 | 211 | 283 | 379 | 461 | 563 | 643 | 739 | 829 | 937 |
| 13 | 71 | 139 | 223 | 293 | 383 | 463 | 569 | 647 | 743 | 839 | 941 |
| 17 | 73 | 149 | 227 | 307 | 389 | 467 | 571 | 653 | 751 | 853 | 947 |
| 19 | 79 | 151 | 229 | 311 | 397 | 479 | 577 | 659 | 757 | 857 | 953 |
| 23 | 83 | 157 | 233 | 313 | 401 | 487 | 587 | 661 | 761 | 859 | 967 |
| 29 | 89 | 163 | 239 | 317 | 409 | 491 | 593 | 673 | 769 | 863 | 971 |
| 31 | 97 | 167 | 241 | 331 | 419 | 499 | 599 | 677 | 773 | 877 | 977 |
| 37 | 101 | 173 | 251 | 337 | 421 | 503 | 601 | 683 | 787 | 881 | 983 |
| 41 | 103 | 179 | 257 | 347 | 431 | 509 | 607 | 691 | 797 | 883 | 991 |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 997 |

EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS PRIMOS

1. Constuir uma tábua dos números primos até 100.
2. Sem usar a tábua dos números primos, dizer entre os números 109, 197, 243, 267, 373, 641, 761, 863, 957, 1 181, 4 313 e 12 349 quais os primos.
3. Decompor em fatôres primos os seguintes números: 210, 312, 540, 750, 1 001, 1 331, 5 250, 7 007, 14 157, 28 413, 256 000 e 12 349.
4. Decompor $144^2$ em fatôres primos, sem efetuar a potência.

5. Usando a decomposição em fatôres primos efetuar a divisão de 1 280 por 32.

6. Determinar todos os divisores (e o total) dos números: 68, 114, 148, 306, 581, 1 200, 1 331 e 4 332.

7. Achar todos os divisores comuns aos números 630 e 990 (são os divisores ao mesmo tempo de 630 e 990).

8. Mediante a decomposição em fatôres primos, verificar se: 2 016 é divisível por 48; 360 é divisível por 54; 1 890 é divisível por 108; 5 250 é divisível por 1 320.

9. Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 1 080 para se obter um número divisível por 252?

10. Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 2 205 para se obter um número divisível por 1 050?

RESPOSTAS:

1. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

2. São primos: 109, 197, 373, 641, 761, 863, e 1 181.

3. $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$; $312 = 2^3 \times 3 \times 13$; $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$; $750 = 2 \times 3 \times 5^3$;
$1\,331 = 11^3$; $5\,250 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 7$; $7\,007 = 7^2 \times 11 \times 13$;
$14\,157 = 3^2 \times 11^2 \times 13$; $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$;
$28\,413 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 41$; $256\,000 = 2^{11} \times 5^3$; $12\,349 = 53 \times 233$

4. $144^2 = (2^4 \times 3^2)^2 = 2^8 \times 3^4$

5. $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$

6. 68 – 6 divisores (1, 2, 4, 17, 34, 68); 114 – 8 divisores (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114); 148 – 6 divisores (1, 2, 4, 37, 74, 148); 306 – 12 divisores (1, 2, 3, 6, 9, 17, 18, 34, 51, 102, 153, 306); 581 – 4 divisores (1, 7, 83, 581); 1 200 – 30 divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 100, 120, 150, 200, 240, 300, 400, 600, 1 200); 1 331 – 4 divisores (1, 11, 121, 1 331); 4 332 – 18 divisores (1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, 38, 57, 76, 114, 228, 361, 722, 1 083, 1 444, 2 166 e 4 332).

7. Os divisores comuns são: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90.

8. Sòmente 2 016 é divisível por 48.

9. O número é 7.

10. O número é $10 = 2 \times 5$.



### *Curiosidades sôbre divisibilidade*

1. **Números amigos e números perfeitos.** Você conhece os *números primos*; você conhece os *números primos entre si*. Sabe que existem também os *números amigos* e os *números perfeitos?*

Dois números são *amigos*, quando a soma de todos os divisores de um dêles, com a exclusão do próprio número, der o outro e vice-versa. Exemplo:

*220* e *284* são *amigos* (experimentem!)

Um número é *perfeito* quando fôr igual à soma de seus divisores, com exclusão dêle próprio. Exemplo: $6 = 1 + 2 + 3$.

Seja você agora "amigo" descobrindo um outro número. Por ex.: 28, 496.

2. **Exercício proposto.** Decomponha em fatôres primos 111 111 e depois, *sem repetir o processo*, decompanha 222 222, 333 333, 444 444, 555 555, . . . . . . . . . . . 999 999.

3. **Uma questão sôbre o calendário.** Observem o calendário de um ano qualquer comum (isto é, não bissexto): os meses de *janeiro* e *outubro*, começam *num mesmo dia da semana*; também os meses de *fevereiro, março* e *novembro*, se iniciam num mesmo dia da semana, bem como os meses de *abril* e *julho*.

Sabem por quê? E se o ano fôr bissexto? (Não se esqueçam que neste caso fevereiro tem 29 dias).

## § 3. Máximo divisor comum.

1. **Divisor comum de dois ou mais números.** Já estudamos como *divisor comum* de dois ou mais números aquele que é *divisor, ao **mesmo tempo*** de todos os números dados. Exemplo:

Determinar os divisores comuns dos números 42 e 70.

Os divisores de 42 são: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 e 42.

Os divisores de 70 são: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 e 70.

Os *divisores comuns* de 42 e 70 são os que figuram ao mesmo tempo em 42 e 70, isto é: 1, 2, 7 e 14.

É evidente que a *unidade* é divisor comum de todos os números. Por essa razão na consideração dos fatôres comuns de dados números, nos estudos seguintes, não a incluiremos na representação.

**2. Máximo divisor comum de dois ou mais números.** Chama-se *máximo divisor comum de dois ou mais números ao* MAIOR *dos divisores comuns a êsses números.*

No exemplo anterior, o número 14, que é o maior dos divisores comuns de 42 e 70, é o seu máximo divisor comum.

*Indicação:* m.d.c. (42, 70) = **14**

**3. Determinação do m.d.c. de dois ou mais números.** Temos dois métodos:

1.º) Método da decomposição em fatôres primos;

2.º) Método das divisões sucessivas.

***Método da decomposição em fatôres primos:*** *O m.d.c. de dois ou mais números, decompostos em seus fatôres primos, é dado pelo produto dos fatôres primos* COMUNS *tomados com seus* MENORES *expoentes.* Exemplo:

Determinar o m.d.c. dos números 168, 180 e 300.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 168 | 2 | 180 | 2 | 300 | 2 |
| 84 | 2 | 90 | 2 | 150 | 2 |
| 42 | 2 | 45 | 3 | 75 | 3 |
| 21 | 3 | 15 | 3 | 25 | 5 |
| 7 | 7 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | | 1 | | 1 | |

Temos:

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

Os fatôres primos *comuns*, isto é, que entram ao mesmo tempo nos três números, são: 2 e 3.

Êsses fatôres com seus menores expoentes são: $2^2$ e 3.

Logo: m.d.c. (168, 180, 300) = $2^2 \times 3 = 4 \times 3 =$ **12**.

***Método das divisões sucessivas:*** *Divide-se o maior número pelo menor, em seguida o menor pelo resto, depois o o resto pelo novo resto e assim por diante até chegar a uma divisão exata. O último divisor será o m.d.c. procurado.* Exemplo



Determinar o m.d.c. dos números 216 e 624.

Efetuam-se as seguintes divisões:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 624 | 216 | 216 | 192 | 192 | 24 |
| 192 | 2 | 24 | 1 | 00 | 8 |

O último divisor *24* é o m.d.c. procurado.

Costuma-se usar a seguinte disposição prática, denominada *algorítimo de Euclides:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 8 |
| 624 | 216 | 192 | 24 |
| 192 | 24 | 00 | |

m.d.c. (216, 624) = **24**

Para o caso de *mais de dois números*, determina-se, inicialmente, o m.d.c. dos dois primeiros, depois o m.d.c. entre o terceiro e o resultado que já foi encontrado e assim sucessivamente. Exemplo:

Determinar o m.d.c. dos números 168, 216 e 372.

Primeiramente determina-se o m.d.c. dos dois primeiros:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 2 |
| 216 | 168 | 48 | 24 |
| 48 | 24 | 00 | |

m.d.c. (168, 216) = **24**

em seguida determina-se o m.d.c. entre 372 e 24:

| | | |
|---|---|---|
| | 15 | 2 |
| 372 | 24 | 12 |
| 12 | 00 | |

Logo: m.d.c. (168, 216, 372) = **12**

**4. Propriedades do m.d.c. de dois números.**

1.ª) O m.d.c. de dois números primos entre si é a unidade. Exemplo:

m.d.c. (12,7) = **1**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 12 | 7 | 5 | 2 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 0 | |

2.ª) O m.d.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor, é o menor dêles. Exemplos:

m.d.c. (8, 4) = 4

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 8 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

m.d.c. (3486,2) = 2

$$\begin{array}{r|l} & 1\,743 \\ 3\,486 & 2 \\ \hline 0\,000 & \end{array}$$

3.ª) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.d.c. dos dois primeiros aparece multiplicado ou dividido por êsse outro. Exemplo:

Sendo o m.d.c. (18, 12) = 6

*Multiplicando* 18 e 12 por 2, tem-se:

m.d.c. (18×2, 12×2) = 6×2.

No caso de se *dividir* os dois números pelo seu próprio m.d.c., os quocientes obtidos são *primos entre si*. Exemplo:

Sendo o m.d.c. (18, 12) = 6

*Dividindo* 18 e 12 por 6 (que é o m.d.c.), tem-se:

m.d.c. (18 : 6, 12 : 6) = 6 : 6

ou m.d.c. (3, 2) = 1

isto é, os quocientes obtidos 3 e 2 são primos entre si.

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.D.C.

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais devemos dividir 144 e 160, a fim de obter quocientes iguais.

Primeiramente, determina-se o m.d.c. (144, 160) = 16.

Como 144 : 16 = 9 e sendo 16 o *maior* divisor de 144 o *menor* quociente será 9.

160 : 16 = 10 também 16 é o *maior* divisor de 160 e 10 o *menor* quociente.



Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois,

144 : 9 = 16

160 : 10 = 16

2. Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 2 e 6 e os restos 432, 72, 0. Determinar os dois números.

Do problema, tem-se o seguinte quadro:

| | 1 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|
| ? | ? | 432 | 72 |
| 432 | 72 | 0 | |

Procedendo inversamente na ordem que se emprega no método das divisões sucessivas, temos que 72, por ser o penúltimo resto (o último é 0), é o m.d.c. dos dois números procurados.

Logo:

2 × 432 + 72 = **736** (segundo número procurado).

1 × 936 + 432 = **1 368** (primeiro número procurado).

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24 metros de frente e 56 metros de fundo. Qual deve ser o comprimento do *maior cordel* que sirva para medir *exatamente* as duas dimensões?

Determinando-se o m.d.c. (56,24) = 8, segue-se que o maior cordel que pode ser usado na medida das dimensões do terreno deve ter 8 metros de comprimento, pois, 8 é o *maior* dos divisores comuns de 56 e 24.

## EXERCÍCIOS SÔBRE O M.D.C.

1. Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar; 1.º) o maior dêles (m.d.c.); 2.º) os pares: 3.º) os que são divisíveis por 3.

2. Calcular: 1.º) m.d.c. (120, 384); 2.º) m.d.c. (3 600), 4 050); 3.º) m.d.c. (185, 222, 259); 4.º) m.d.c. (128, 136, 256, 440); 5.º) m.d.c. (3 234, 4 158); 6.º) m.d.c. (504, 672, 882, 546); 7.º) m.d.c. (6 804, 47 952, 228 456).

3. Usando as propriedades do m.d.c., calcular; 1.°) m.d.c. (7, 9, 12); 2.°) m.d.c. (2, 48 384); 3.°) m.d.c. (36, 18, 6); 4.°) m.d.c. (13, 26, 29).

4. Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por m.d.c.

5. Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 3 e 2 e os restos 48, 4 e 20. Determinar os dois números.

6. Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.

7. Determinar os divisores comuns aos números 80 e 130 múltiplos de 5.

8. Dados os dois números: 182 e 238, verificar que o m.d.c. entre êles é também o m.d.c. entre o menor (182) e a sua diferença (238 − 182 = 56).

9. Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do *máximo tamanho possível.* Determinar o número das partes de cada peça e os comprimentos de cada uma.

10. Quer-se circundar de árvores, plantadas à *máxima distância comum*, um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno têm 3 150, 1 980, 1 512 e 1 890 metros?

RESPOSTAS:

1. 1.°) 24 (m.d.c.); 2.°) 2, 4, 6, 8, 12, 24; 3.°) 3, 6, 12, 24.
2. 1.°) 24; 2.°) 450; 3.°) 37; 4.°) 8; 5.°) 462; 6.°) 42; 7.°) 36.
3. 1.°) 1; 2.°) 2; 3.°) 6; 4.°) 1.
4. 102 (102×1), 204 (102×2), 306 (102×3) e 408 (102×4).
5. 216 e 168.
6. 15 e 17.
7. 5 e 10.
8. O m.d.c. (14) é o mesmo.
9. 8, 6 e 5 partes, valendo cada uma 18 metros.
10. São necessárias 474 árvores, distanciando-se 18 metros uma da outra.



## § 4. Mínimo múltiplo comum.

**1. Múltiplo comum de dois ou mais números.** Chama-se *múltiplo comum* de dois ou mais números a um número que seja *divisível*, ao ***mesmo tempo*** por todos os números dados. Exemplo:

Determinar os múltiplos comuns dos números 2 e 3.

Excluindo-se o zero, que é múltiplo de todos os números, temos:

múltiplos de 2: 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, . . .

múltiplos de 3: 3, **6**, 9, **12**, 15, **18**, 21, 24, 27, . . .

Os *múltiplos comuns* de 2 e 3 são;

**6, 12, 18,** . . .

isto é, êsses números são *divisíveis* tanto por 2 como por 3. Os demais múltiplos são denominados *não comuns.*

Os múltiplos comuns de dois ou mais números são *infinitos*. Daí o fato de não existir o máximo múltiplo comum. Existe, porém, o *menor* dos múltiplos comuns denominado *mínimo múltiplo comum.*

**2. Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números.** Chama-se *mínimo múltiplo comum de dois ou mais números ao menor dos múltiplos* (diferente de zero) *comuns dêsses números.*

No exemplo dado, o número 6 é o menor dos múltiplos comuns dos números 2 e 3.

*Indicação:* m.m.c. (2, 3) = 6

**3. Determinação do m.m.c. de dois ou mais números.** O m.m.c. de dois ou mais número, decompostos em seus fatôres primos, é dado pelo produto dos fatôres primos *comuns* e *não comuns* tomados com os seus *maiores* expoentes. Exemplo:

Determinar o m.m.c. dos números 90, 150 e 168.

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Temos::

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

Os fatôres primos *comuns*, tomados com os seus *maiores expoentes* são: $2^3$ e $3^2$

Os fatôres primos *não comuns*, tomados com os seus *maiores expoentes* são: $5^2$ e 7

Multiplicando êsses fatôres, temos:

$$\text{m.m.c.}\ (90, 150, 168) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = \mathbf{12\,600}$$

Êsse cálculo pode ser feito ràpidamente com a seguinte disposição prática, onde os fatôres primos comuns e não comuns são dispostos à direita de um traço vertical até à obtenção de quocientes iguais a 1.

Assim, para o exemplo que está sendo estudado, a disposição prática é:

$$\begin{array}{rrr|l} 90, & 150, & 168 & 2 \\ 45, & 75, & 84 & 2 \\ 45, & 75, & 42 & 2 \\ 45, & 75, & 21 & 3 \\ 15, & 25, & 7 & 3 \\ 5, & 25, & 7 & 5 \\ 1, & 5, & 7 & 5 \\ 1, & 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

e o

$$\text{m.m.c.}\ (90, 150, 168) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = \mathbf{12\,600}$$

**4. Propriedades do m.m.c. de dois números.** 1.ª) O m.m.c. de dois números primos entre si é o produto dêles. Exemplo:



m.m.c. (6, 11) = 66

$$\begin{array}{rr|l} 6, & 11 & 2 \\ 3, & 11 & 3 \\ 1, & 11 & 11 \\ 1, & 1 & 2 \times 3 \times 11 = 66 \end{array}$$

2.ª) O m.m.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o maior dêles. Exemplo:

m.m.c. (8, 4) = 8

$$\begin{array}{rr|l} 8, & 4 & 2 \\ 4, & 2 & 2 \\ 2, & 1 & 2 \\ 1, & 1 & 2^3 = 8 \end{array}$$

3.ª) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.m.c. aparece multiplicado ou dividido por êsse outro. Exemplo:

Sendo o m.m.c. (12, 18) = 36

*Multiplicando* 12 e 18 por 2, tem-se:

$$\text{m.m.c.}\ (12 \times 2,\ 18 \times 2) = 36 \times 2$$

**5. Propriedade entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números.** *Multiplicando o m.d.c. de dois números dados pelo m.m.c. dêsses dois números, obtém-se o produto dos números dados.*

Assim, dados os números 18 e 90, onde

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 18 = 2 \times 3^2 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array}$$

temos:

$$\text{m.d.c.}\ (18, 90) = 2 \times 3^2$$
$$\text{m.m.c.}\ (18, 90) = 2 \times 3^2 \times 5$$

e o produto:

$$18 \times 90 = 2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$$

como:

$$\text{m.d.c.}\ (18, 90) \times \text{m.m.c.}\ (18, 90) = 2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$$

segue-se que os produtos são iguais, isto é:

$$\mathbf{m.d.c.\ (18, 90) \times m.m.c.\ (18, 90) = 18 \times 90}$$

APLICAÇÕES:

1.ª) Sabendo-se que o produto de dois números é 120 e que o m.d.c. entre êles é 4, pergunta-se qual é o valor do m.m.c. dêsses números.

Como: m.d.c. × m.m.c. = 120

e sendo o m.d.c. igual a 4, segue-se que: m.m.c. = 120 : 4 = *30*

2.ª) Determinar o m.m.c. dos números 12 e 18, usando o m.d.c. entre êles.

Como: m.d.c. × m.m.c. = 12 × 18 = 216

e sendo o m.d.c. (12, 18) = 6 segue-se que: m.m.c. = 216 : 6 = *36*.

## PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.M.C.

1. Determinar os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter produtos iguais.
   Sendo o m.m.c. (24, 36) = 72, e as divisões 72 : 24 = 3 e 72 : 36 = 2, segue-se que 2 e 3 são os menores números que, multiplicados, respectivamente, por 24 e 36, dão produtos iguais (72).
2. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 3 000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.
   O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é 720 (que é o m.m.c.) e portanto o problema estará resolvido procurando-se os múltiplos de 720 compreendidos entre 1 000 e 3 000, isto é, 720×2 = 1 440; 720×3 = 2 160; 720×4 = = 2 880. (Os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3 000).
3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Tendo êsses navios partido juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos novamente?
   O primeiro múltiplo dêsses números 4, 6 e 9, é 36 (que é o m.m.c.). Logo, depois de 36 dias êsses navios partirão juntos novamente.



## EXERCÍCIOS SÔBRE O M.M.C.

1. Calcular: 1.º) m.m.c. (45, 12); 2.º) m.m.c. (96, 144); 3.º) m.m.c. (36, 96, 112); 4.º) m.m.c. (4 320, 6 480); 5.º) m.m.c. (48, 120, 96, 144); 6.º) m.m.c. (123, 205, 287); 7.º) m.m.c. (61, 306, 189, 252).
2. Usando as propriedades do m.m.c., determinar; 1.º) m.m.c. (4, 5); 2.º) m.m.c. (12, 3); 3.º) m.m.c. (4, 1 853 916); 4.º) m.m.c. (6, 11, 12).
3. Qual é a diferença entre o m.m.c. e o m.d.c. dos números 101 e 337?
4. O m.m.c. de dois números é 11 352 e o m.d.c. é 6. Se um dos números é 264 qual é o outro?
5. Qual é o produto de dois números se o m.d.c. é 8 e o m.m.c. é 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 4 000 que sejam divisíveis ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa República o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 3. Se em 1929 houve eleições para os três cargos, em que ano realizou-se novamente as eleições para êsses cargos?
9. Duas rodas de uma engrenagem têm 14 e 21 dentes respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contato os dois dentes estragados, depois de quantas voltas repete-se novamente êsse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem uma pista circular no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30 segundos. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se depois de quanto tempo se encontrarão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.

RESPOSTAS:

1. 1.º) 180; 2.º) 288; 3.º) 2 016; 4.º) 12 960; 5.º) 1 440; 6.º) 4 305; 7.º) 783 972.
2. 1.º) 20; 2.º) 12; 3.º) 1 853 916; 4.º) 132.
3. A diferença é 34 036.
4. 258.
5. 384.
6. 1 800, 2 700 e 3 600.
7. 10 e 13.
8. 1941.
9. 2 voltas da maior ou 3 voltas da menor.
10. Encontrar-se-ão depois de 180 segundos. O primeiro ciclista dará 5 voltas e o segundo 6 voltas.

CAPÍTULO III

# Números fracionários. Operações fundamentais. Números decimais

## § 1. Números fracionários

**1. Noção intuitiva de fração.** A primeira idéia de fração nos é dada quando dividimos um objeto (que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e consideramos uma ou algumas dessas partes.

Assim por exemplo, dividindo-se um tablete de chocolate (fig. 5) em três partes iguais, temos que:

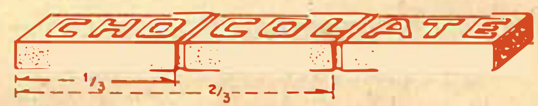



Fig. 5

1) uma dessas partes representa uma fração do chocolate que chamaremos *um têrço* e indicamos por $\frac{1}{3}$.

2) duas dessas partes representam outra fração que chamaremos *dois terços* e indicamos por $\frac{2}{3}$.

**2. Definição**

**Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais**

Essa representação é feita mediante dois números inteiros numa certa ordem, sendo o segundo diferente de zero, chamados respectivamente de *numerador* e *denominador*.

O *denominador* indica em quantas partes foi dividida a unidade e o *numerador* quantas dessas partes foram tomadas.

Numerador e denominador constituem os *termos* da fração e são escritos o primeiro por cima do segundo separados por um traço horizontal.

**3. Leitura de um número fracionário.** Em geral, lê-se primeiramente o numerador e em seguida o denominador acrescido da palavra *avo* (no plural *avos*). Exemplos:

$\frac{5}{12}$ lê-se: "cinco doze avos";

$\frac{1}{13}$ lê-se: "um treze avo".

Se o denominador for: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, lê-se o numerador e em seguida, na mesma ordem, as palavras: *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *sétimos*, *oitavos* e *nonos*. Exemplos:

$\frac{2}{3}$ lê-se: "dois terços".

$\frac{4}{5}$ lê-se: "quatro quintos".

$\frac{1}{2}$ lê-se: "um meio" ou simplesmente "meio".

Se o denominador fôr uma potência de 10, isto é, 10, 100, 1 000, . . . lê-se o numerador acompanhado das palavras: *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, . . . Exemplos:

$\frac{3}{10}$ lê-se: "três décimos".

$\frac{7}{100}$ lê-se "sete centésimos".



A essas frações, cujos denominadores são potências de 10, chamamos de *frações decimais* e as demais frações de *frações ordinárias*. Exemplos:

$\frac{2}{19}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{5}$ . . . são *frações ordinárias*.

$\frac{3}{10}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$ . . . *são frações decimais*.

**4. Frações próprias, impróprias e aparentes.** Se no exemplo que demos do chocolate considerarmos *tôdas* as 3 partes da divisão obteremos o chocolate inteiro (unidade). Êsse fato poderá também ser representado pelo símbolo: $\frac{3}{3}$.

Se além dêsse chocolate considerarmos *mais a terça parte* de um outro chocolate que lhe seja igual (fig. 6), representaremos êsse total de 4 partes (3 do primeiro e uma do segundo) com o símbolo: $\frac{4}{3}$.


Fig. 6

Podemos, por extensão, chamar também aos símbolos $\frac{3}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ também de frações ou números fracionários, acrescentando-lhes porém o qualificativo de *impróprios*, visto não terem aquêle primeiro significado dado na definição (que era o de dividir a unidade e considerar sòmente partes que, reunidas, não a ultrapassem). Acrescentaremos o qualificativo de *própria* às frações que têm o sentido dado na definição, isto é, o numerador sempre menor que o denominador.

Logo, destacamos para as frações os dois casos:

1.º) O numerador se apresenta *menor* que o denominador.

Nesse caso a fração é *menor* que a *unidade* e é chamada *fração própria*. Exemplos:

$$\frac{2}{3} < 1 \qquad \frac{4}{7} < 1 \qquad \frac{122}{453} < 1$$

2.º) O numerador se apresenta *igual* ou *maior* que o denominador.

Nesse caso a fração é *igual* ou *maior* que a unidade e é chamada de *fração imprópria*. Exemplos:

$$\frac{3}{3} = 1 \qquad \frac{4}{3} > 1 \qquad \frac{217}{12} > 1$$

Entre as frações impróprias existem aquelas que têm o numerador *divisível* pelo denominador e que são chamadas de *frações aparentes* porque são iguais aos números inteiros que se obtêm dividindo o numerador pelo denominador. Exemplos:

$$\frac{14}{7} = 2 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{196}{28} = 7$$

**5. Extração de inteiros. Números mistos.** Pode-se sempre *extrair os inteiros* de uma fração imprópria, bastando para isso dividir o numerador pelo denominador. O quociente obtido é a parte inteira da fração imprópria, enquanto que a parte fracionária, menor do que 1, tem o mesmo denominador e para numerador o resto da divisão.

O número composto de um número inteiro e de uma fração própria é chamado *número misto*. Exemplos:

1) A fração imprópria $\frac{19}{5}$ dá origem ao número misto $3\frac{4}{5}$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \qquad \text{pois} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

2) A fração imprópria $\frac{7}{3}$ dá origem ao número misto $2\frac{1}{3}$

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \qquad \text{pois} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$



Inversamente, pode-se transformar um *número misto* numa *fração imprópria*, construindo-se para isso uma fração de mesmo denominador e de numerador igual ao produto do inteiro pelo denominador somado com o numerador. Exemplo:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3} \qquad \begin{array}{ll} \text{numerador: } 3 \times 4 + 2 = & 14 \\ \text{denominador:} & 3 \end{array}$$

**6. Propriedades das frações.** 1.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o *numerador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o valor da fração fica *multiplicado* (ou dividido) por êsse número. Exemplo:

Seja a fração $\frac{4}{9}$

Multiplicando o numerador por 2, temos a fração $\frac{8}{9}$

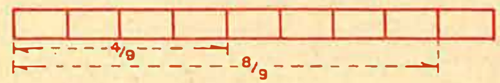



Fig. 7

Ora, $\frac{8}{9}$ é uma *fração duas vêzes maior que* $\frac{4}{9}$, pois, enquanto em $\frac{8}{9}$ tomam-se 8 das 9 divisões da unidade, em $\frac{4}{9}$ tomam-se sòmente 4 (fig. 7).

Por essa propriedade as operações efetuadas com o numerador de uma fração refletem *diretamente* no valor da fração, isto é, *aumentando* o valor do numerador, o valor da fração *aumenta* (ou diminuindo o valor do numerador, o valor da fração diminui).

2.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) o *denominador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o *valor* da fração fica *dividido* (ou multiplicado) por êsse número. Exemplo:

Seja a fração $\frac{3}{4}$

Multiplicando o denominador por 2, temos a fração $\frac{3}{8}$.

Ora, $\frac{3}{8}$ é uma *fração duas vêzes menor* que $\frac{3}{4}$, pois, em $\frac{3}{4}$ dividimos a unidade em 4 partes iguais e tomamos 3 e em $\frac{3}{8}$ dividimos a *mesma unidade* em 8 partes iguais e tomamos *também* 3 partes (fig. 8).

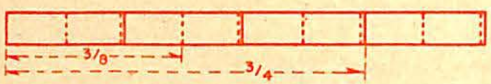



Fig. 8

Por essa propriedade as operações efetuadas com o denominador de uma fração refletem *inversamente* no valor da fração isto é, *aumentando* o valor do denominador, o valor da fração *diminui* (ou diminuindo o valor do denominador o valor da fração aumenta).

3.ª) *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) *ambos os têrmos* de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, o valor da fração *não se altera*. Exemplo:

Seja a fração $\frac{2}{7}$

Multiplicando o numerador e o denominador por 3, temos:

$$\frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{21}$$

Essas frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ têm o mesmo valor, pois, quando multiplicamos o numerador da fração $\frac{2}{7}$ por 3, o valor da fração ficou multiplicado por 3 (pela primeira propriedade) e quando multiplicamos o denominador por 3, o valor da fração ficou dividido por 3 (segunda propriedade). Logo, tendo sido o valor da fração multiplicado e dividido por 3, êle *não se alterou*.



As frações de igual valor, como $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$, dizem-se *equivalentes* e podem ser igualadas $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

**7. Simplificação de frações.** *Simplificar* uma fração significa dividir ambos os termos por um divisor comum. Assim, dada a fração:

$$\frac{48}{56}$$

dividindo-se os dois têrmos por 2 (que é um divisor comum), teremos

$$\frac{24}{28};$$

dividindo-se os dois têrmos ainda por 2, teremos:

$$\frac{12}{14};$$

dividindo-se finalmente, ambos os têrmos por 2 (que continua sendo fator comum), obteremos:

$$\frac{6}{7}$$

As frações $\frac{24}{28}$, $\frac{12}{14}$ e $\frac{6}{7}$ são *equivalentes* à fração $\frac{48}{56}$ e evidentemente mais simples.

Na prática, a simplificação de frações é disposta da seguinte maneira:

$$\frac{48}{56} = \frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

ou

$$\begin{array}{c} 6 \\ \cancel{12} \\ \cancel{24} \\ \cancel{48} \\ \hline \cancel{56} \\ \cancel{28} \\ \cancel{14} \\ 7 \end{array} = \frac{6}{7}$$

**8. Frações irredutíveis.** Caso uma fração não possa ser mais simplificada, diz-se que ela é *irredutível* ou está reduzida à sua *forma mais simples.*

Como nesse caso os dois têrmos devem ser *primos entre si,* isto é, não têm mais nenhum divisor comum, a não ser a unidade, a redução de uma fração à sua forma mais simples é feita dividindo-se os seus têrmos pelo seu m.d.c. (terceira propriedade do m.d.c. de dois números: § 3. Cap. II). Exemplo:

Reduzir à forma mais simples a fração

$$\frac{36}{54}$$

Como o m.d.c. (36, 54) = 18

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 2 \\ 54 & 36 & 18 \\ \hline 18 & 0 & \end{array}$$

temos: $\dfrac{36 : 18}{54 : 18} = \dfrac{2}{3}$ que é uma fração *irredutível.*

É lógico que se pode chegar a êsse mesmo resultado, simplificando-se sucessivamente os fatôres comuns aos termos da fração: Assim:

$$\underset{(:2)}{\frac{36}{54}} = \underset{(:3)}{\frac{18}{27}} = \underset{(:3)}{\frac{6}{9}} = \frac{2}{3}.$$

**9. Redução de frações ao mesmo denominador.** Reduzir frações ao mesmo denominador é transformá-las em outras equivalentes do mesmo denominador. Temos a seguinte

REGRA: *Para se reduzir frações ao mesmo denominador basta multiplicar os dois têrmos de cada fração pelos denominadores de tôdas as outras.* Exemplo:



Seja reduzir ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

Multiplicando os dois têrmos de $\frac{2}{3}$ por 5 e 6 (denominadores das outras);

multiplicando os dois têrmos de $\frac{4}{5}$ por 3 e 6;

e, multiplicando os dois têrmos de $\frac{1}{6}$ por 3 e 5;

obteremos:

$$\frac{2 \times 5 \times 6}{3 \times 5 \times 6}, \quad \frac{4 \times 3 \times 6}{5 \times 3 \times 6}, \quad \frac{1 \times 3 \times 5}{6 \times 3 \times 5}$$

ou

$$\frac{60}{90}, \quad \frac{72}{90}, \quad \frac{15}{90}$$

NOTA: Embora não tendo a mesma aplicação, pode-se, da mesma maneira, reduzir frações ao mesmo numerador.

**10. Redução de frações ao mínimo denominador comum.** A fim de se evitar frações com têrmos muito grandes, procura-se nas reduções usar o denominador *menor possível,* e em tais casos diz-se que *reduzimos as frações ao mínimo denominador comum.*

Para essa redução procede-se do seguinte modo:

1.º) reduzem-se as frações à forma irredutível;

2.º) determina-se o m.m.c. dos denominadores dessas frações;

3.º) multiplica-se cada numerador pelo quociente da divisão do m.m.c. pelo denominador e dá-se para denominador o m.m.c. Exemplo:

Reduzir ao *mínimo denominador comum* as frações:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

Como as frações já estão sob a forma irredutível, podemos determinar o m.m.c. (3, 5, 6) que é igual a 30.

Dividimos 30 pelo denominador 3 e o quociente, que é 10, multiplicamos pelo numerador 2. Ou seja

$$\frac{2 \times 10}{30}$$

Procedendo da mesma maneira com as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{6}$, teremos:

$$\frac{4 \times 6}{30}, \quad \frac{1 \times 5}{30}$$

e finalmente:

$$\frac{20}{30}, \quad \frac{24}{30}, \quad \frac{5}{30}$$

**11. Comparação de frações.** Dadas duas frações, para se saber qual é a maior ou menor, é necessário ter conhecimento de que:

1.º) Quando duas frações têm o *mesmo denominador*, a *maior* é a que tem o *maior numerador*. Exemplo:

Sejam as frações: $\frac{2}{7}$ e $\frac{5}{7}$

Devemos ter: $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$

2.º) Quando duas frações têm o *mesmo numerador*, a *maior* é a que tem o *menor denominador*. Exemplo:



Sejam as frações: $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{5}$

Devemos ter: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

3.º) Quando duas frações têm *numeradores e denominadores diferentes*, a comparação é feita *reduzindo-as ao mesmo denominador* (ou ao mesmo numerador). Exemplo:

$$\frac{4}{5} \text{ e } \frac{2}{3}$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador:

m.m.c. (5, 3) = 15 $\quad \frac{12}{15}, \ \frac{10}{15}$ onde

$\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Reduzindo-as ao mesmo numerador:

m.m.c. (4, 2) = 4 $\quad \frac{4}{5}, \ \frac{4}{6}$ onde

$\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

APLICAÇÕES:

1.ª) Dispor em ordem de *valor decrescente* as frações:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}$$

Essa disposição significa que em primeiro lugar deve vir a maior fração, em seguida a que lhe é logo menor e assim sucessivamente.

Reduzindo-se as frações ao mesmo denominador:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{6}{12}$$

Em ordem decrescente será:

$$\frac{9}{12} > \frac{7}{12} > \frac{6}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} > \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$$

2.ª) Transformar a fração $\frac{15}{20}$ em uma outra equivalente tendo por denominador 28.

Reduz-se, primeiramente, a fração $\frac{15}{20}$ à forma mais simples:

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Tôdas as frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ devem ser obtidas a partir desta multiplicando os dois têrmos por um mesmo número e portanto devem ter o denominador múltiplo de 4. Como 28 é múltiplo de 4, *existe* a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ e que tem para denominador 28. Essa fração será:

$$28 \;\underline{|\;4\;} \qquad \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$
$$0 \quad 7$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE FRAÇÕES

1. Nas frações que se seguem, dizer quais são as próprias, as impróprias, as aparentes e as decimais:

$$\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{14}{2}, \frac{95}{94}, \frac{100}{9}, \frac{6}{6}, \frac{9}{100}, \frac{8}{20}, \frac{36}{12}$$

2. Escrever sob forma de frações aparentes os números: 3, 5, 12 e 18
3. Que fração do ano (12 meses) representam 7 meses?
4. Que fração do mês (30 dias) representam 3 dias?



5. Um pacote de balas foi dividido para 3 meninos cabendo ao primeiro 5 balas, ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que fração do pacote de balas recebeu cada menino?

6. Extrair os inteiros das frações:

1.º) $\frac{18}{7}$, 2.º) $\frac{12}{4}$, 3.º) $\frac{8}{5}$ 4.º) $\frac{179}{21}$,

5.º) $\frac{4\,315}{2\,716}$, 6.º) $\frac{10\,039}{8}$, 7.º) $\frac{381}{3}$

7. Transformar em frações impróprias os números mistos:

1.º) $4\frac{1}{3}$; 2.º) $21\frac{2}{3}$; 3.º) $7\frac{1}{2}$; 4.º) $8\frac{4}{5}$;

5.º) $43\frac{11}{13}$; 6.º) $83\frac{1}{9}$; 7.º) $4\,315\frac{2\,012}{2\,115}$

8. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 3? E quando se divide o numerador por 2?

9. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu denominador por 5? E quando se divide o denominador por 3?

10. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o numerador por 2 e se divide o denominador por 3?

11. Qual é a alteração que sofre uma fração quando se multiplicam ambos os têrmos por 3? E quando se dividem ambos por 2?

12. Simplificar as seguintes frações, reduzindo-as às suas formas mais simples:

1.º) $\frac{18}{24}$; 2.º) $\frac{80}{104}$; 3.º) $\frac{189}{243}$; 4.º) $\frac{150}{100}$; 5.º) $\frac{81}{729}$; 6.º) $\frac{1\,512}{1\,620}$;

4.º) $\frac{504}{672}$; 8.º) $\frac{1\,200}{1\,680}$; 9.º) $\frac{105}{147}$; 10.º) $\frac{3\,456}{5\,400}$; 11.º) $\frac{11\,760}{20\,169}$; 12.º) $\frac{192\,843}{835\,653}$

13. Reduzir ao mesmo denominador as frações:

1.º) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 3.º) $\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}$

2.º) $\frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$ 4.º) $\frac{11}{24}, \frac{3}{11}$,

14. Reduzir ao mínimo denominador comum as frações:

1.º) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$

2.º) $\frac{16}{48}, \frac{30}{15}, \frac{1}{30}, \frac{7}{96}$

3.º) $\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, \frac{2}{9}$

4.º) $\frac{2}{13}, \frac{1}{39}, 4$

5.º) $\frac{1}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}$

6.º) $\frac{16}{25}, \frac{1}{7}, \frac{4}{14}, \frac{3}{5}, 4$

7.º) $\frac{28}{18}, \frac{4}{15}, \frac{36}{225}$

8.º) $\frac{1}{12\,315}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$

15. Qual é a maior das duas frações:

1.º) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$

2.º) $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{7}$

3.º) $\frac{12}{6}$ ou $\frac{12}{3}$

4.º) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$

5.º) $\frac{12}{17}$ ou $\frac{5}{8}$

6.º) $\frac{1\,234}{4\,567}$ ou $\frac{3\,456}{6\,789}$

16. Dispor em ordem de valor decrescente as frações:

1.º) $\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$

2.º) $\frac{4}{7}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$

3.º) $\frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{2}{4}$

4.º) $\frac{5}{2}, \frac{14}{5}, \frac{7}{4}, \frac{11}{3}$

5.º) $\frac{12}{14}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{13}{28}$

6.º) $3, \frac{15}{3}, \frac{7}{2}$

17. Dispor em ordem de valor crescente as frações:

1.º) $\frac{4}{9}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}$

2.º) $\frac{132}{144}, \frac{34}{72}, \frac{12}{63}, \frac{1}{3}$

18. Transformar as seguintes frações:

1.º) $\frac{5}{6}$ numa equivalente de denominador 12;

2.º) $\frac{30}{40}$ numa equivalente de denominador 24;

3.º) $3\frac{4}{5}$ numa equivalente de denominador 15.



19. Considerando o número inteiro como fração de denominador 1, transformar:

1.º) 7 em fração equivalente de denominador 15;
2.º) 4 em fração equivalente de denominador 9;
3.º) 11 em fração equivalente de denominador 12.

20. Colocar no lugar da letra $x$ um número de modo que resulte duas frações equivalentes:

1.º) $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$

2.º) $\frac{x}{3} = \frac{9}{27}$

3.º) $\frac{108}{144} = \frac{6}{x}$

4.º) $\frac{4}{x} = \frac{76}{95}$

Respostas:

1. Impróprias: $\frac{4}{3}, \frac{95}{94}, \frac{100}{9}; \frac{14}{2}, \frac{6}{6}, \frac{36}{12}$ Próprias: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{8}{20}, \frac{9}{100}$;
Decimais: $\frac{7}{10}, \frac{9}{100}$ Aparentes: $\frac{14}{2}, \frac{6}{6}, \frac{36}{12}$

2. $3 = \frac{12}{4}$; $5 = \frac{10}{2}$; $12 = \frac{24}{2}$; $18 = \frac{54}{3}$ (uma das maneiras de se escrever).

3. $\frac{7}{12}$

4. $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

5. 1.º) $\frac{5}{16}$; 2.º) $\frac{7}{16}$; 3.º) $\frac{4}{16}$

6. 1.º) $2\frac{4}{7}$; 2.º) 3; 3.º) $1\frac{3}{5}$; 4.º) $8\frac{11}{21}$; 5.º) $1\frac{1\,599}{2\,716}$; 6.º) $1\,254\frac{7}{8}$; 7.º) 127.

7. 1.º) $\frac{13}{3}$; 2.º) $\frac{65}{3}$; 3.º) $\frac{15}{2}$; 4.º) $\frac{44}{5}$; 5.º) $\frac{570}{13}$; 6.º) $\frac{748}{9}$; 7.º) $\frac{9\,128\,237}{2\,115}$

8. O valor da fração fica multiplicado por 3. O seu valor fica dividido por 2.

9. O valor da fração fica dividido por 5. O seu valor fica multiplicado por 3.

10. O valor da fração fica multiplicado por 6 (primeiro por 2 e depois por 3).

11. O valor da fração não se altera em nenhum dos casos.

12. 1.º) $\frac{3}{4}$; 2.º) $\frac{10}{13}$; 3.º) $\frac{7}{9}$; 4.º) $\frac{3}{2}$; 5.º) $\frac{1}{9}$; 6.º) $\frac{14}{15}$; 7.º) $\frac{3}{4}$; 8.º) $\frac{5}{7}$;
9.º) $\frac{5}{7}$; 10.º) $\frac{16}{25}$; 11.º) $\frac{7}{12}$ 12.º) $\frac{3}{13}$;

13. 1.º) $\frac{16}{40}, \frac{30}{40}, \frac{20}{40}$; 3.º) $\frac{90}{810}, \frac{486}{810}, \frac{540}{810}, \frac{540}{810}$;
2.º) $\frac{120}{210}, \frac{175}{210}, \frac{84}{210}$; 4.º) $\frac{121}{264}, \frac{72}{264}, \frac{528}{264}$

14. 1.º) $\frac{9}{12}, \frac{10}{12}$; 5.º) $\frac{1}{36}, \frac{4}{36}, \frac{12}{36}, \frac{2}{36}$;
2.º) $\frac{160}{480}, \frac{960}{480}, \frac{16}{480}, \frac{35}{480}$, 6.º) $\frac{224}{350}, \frac{50}{350}, \frac{100}{350}, \frac{210}{350}, \frac{1\,400}{350}$;
3.º) $\frac{3}{18}, \frac{42}{18}, \frac{4}{18}$; 7.º) $\frac{700}{450}, \frac{120}{450}, \frac{72}{450}$
4.º) $\frac{6}{39}, \frac{1}{39}, \frac{156}{39}$; 8.º) $\frac{1}{12\,315}, \frac{2\,463}{12\,315}, \frac{4\,105}{12\,315}$

15. 1.º) $\frac{4}{5}$; 2.º) $\frac{1}{5}$; 3.º) $\frac{12}{3}$; 4.º) $\frac{4}{5}$; 5.º) $\frac{12}{17}$; 6.º) $\frac{3\,456}{6\,789}$

16. 1.º) $\frac{8}{5} > \frac{4}{5} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$; 2.º) $\frac{4}{2} > \frac{4}{3} > \frac{4}{7} > \frac{4}{9}$; 3.º) $\frac{4}{5} > \frac{2}{4} > \frac{5}{11} > \frac{3}{8}$;
4.º) $\frac{11}{3} > \frac{14}{5} > \frac{5}{2} > \frac{7}{4}$ 5.º) $\frac{12}{14} > \frac{1}{2} > \frac{13}{28} > \frac{3}{7}$; 6.º) $\frac{15}{3} > \frac{7}{2} > 3$

17. 1.º) $\frac{1}{10} < \frac{2}{5} < \frac{4}{9} < \frac{3}{4}$; 2.º) $\frac{1}{3} = \frac{12}{36} < \frac{34}{72} < \frac{132}{144}$

18. 1.º) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; 2.º) $\frac{30}{40} = \frac{18}{24}$; 3.º) $3\frac{4}{5} = \frac{57}{15}$

19. 1.º) $7 = \frac{105}{15}$; 2.º) $4 = \frac{36}{9}$; 3.º) $11 = \frac{132}{12}$

20. 1.º) $x = 6$; 2.º) $x = 1$; 3.º) $x = 8$; 4.º) $x = 5$



## § 2. Operações fundamentais com as frações.

São possíveis com as frações as mesmas operações estudadas com os números inteiros. Valem, também, as respectivas propriedades.

**1. Adição.** Temos os seguintes casos:

1.º) ***As frações têm o mesmo denominador.***

REGRA: *Somam-se os numeradores e conserva-se o denominador comum.* Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9}$

Temos: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4+1+3}{9} = \frac{8}{9}$

2.º) ***As frações têm denominadores diferentes.***

REGRA: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso.* Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

reduzindo ao mesmo denominador, m.m.c. (5, 3, 6) = 30

$$\frac{24}{30} + \frac{20}{30} + \frac{5}{30} = \frac{24+20+5}{30} = \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}$$

No caso da adição envolver números mistos ou números inteiros, a operação pode ser feita transformando-se os números mistos em frações impróprias e os números inteiros em frações aparentes de denominador 1. Exemplo:

Efetuar: $\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5} + 6$

Temos: $\frac{3}{4} + \frac{11}{5} + \frac{6}{1} = \frac{15+44+120}{20} = \frac{179}{20} = 8\frac{19}{20}$

Ou também, pode-se reduzir as frações ao mesmo denominador sem transformar os números mistos em frações impróprias. Assim:

$$\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5} + 6 = \frac{15}{20} + 2\frac{4}{20} + 6 = 8\frac{19}{20}$$

**2. Subtração.** Temos os seguintes casos:

1.º) ***As frações têm o mesmo denominador.***

Regra: *Subtraem-se os numeradores e conserva-se o denominador comum.* Exemplo:

Efetuar: $\frac{13}{21} - \frac{5}{21}$

Temos: $\frac{13}{21} - \frac{5}{21} = \frac{8}{21}$

2.º) ***As frações têm denominadores diferentes.***

Regra: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso:* Exemplo.

Efetuar: $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$

reduzindo ao mesmo denominador, m.m.c. (7,4) = 28

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$$

Caso a subtração contenha números mistos ou números inteiros, valem as mesmas observações feitas para a adição. Exemplos:

1) Efetuar: $3\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

Temos: $\frac{17}{5} - \frac{3}{10} = \frac{34}{10} - \frac{3}{10} = \frac{31}{10} = 3\frac{1}{10}$

2) Efetuar: $1 - \frac{3}{4}$

Temos: $\frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$



3) Efetuar: $\frac{11}{3} - 2$

Temos: $\frac{11}{3} - \frac{2}{1} = \frac{11}{3} - \frac{6}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

4) Efetuar: $5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8}$

Temos: $\frac{23}{4} - \frac{17}{8} = \frac{46}{8} - \frac{17}{8} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$

Da mesma forma, pode-se como na adição, efetuar também da seguinte maneira:

$$5\frac{3}{4} - 2\frac{1}{8} = 5\frac{6}{8} - 2\frac{1}{8} = 3\frac{5}{8}$$

Observação: Quando num conjunto de adições e subtrações figuram parênteses, deve-se efetuar primeiramente as operações indicadas entre os parênteses, a partir dos mais internos. Exemplos:

1) Efetuar: $\left(6 + \frac{2}{3}\right) - \left(3 - \frac{2}{5}\right)$

Temos: $\left(\frac{18+2}{3}\right) - \left(\frac{15-2}{5}\right) =$

$= \frac{20}{3} - \frac{13}{5} = \frac{100-39}{15} = \frac{61}{15} = 4\frac{1}{15}$

2) Efetuar: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right)\right]$

Temos: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{12+14}{21}\right)\right] =$

$= \frac{23}{5} - \left[3 - \frac{26}{21}\right] =$

$= \frac{23}{5} - \left[\frac{63-26}{21}\right] = \frac{23}{5} - \frac{37}{21} = \frac{384-185}{105} = \frac{298}{105} = 2\frac{88}{105}$

**3. Multiplicação.** Para a multiplicação de duas ou mais frações, temos a seguinte

REGRA: *Multiplicam-se os numeradores das frações entre si, assim como os seus denominadores.* Exemplos:

1) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

2) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} \times 10 = \frac{120}{40} = 3$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Sempre que possível, deve-se simplificar as frações que figuram num produto, eliminando-se para isso os fatôres comuns a qualquer numerador e a qualquer denominador.

No exemplo acima temos:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{3}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{10}} = \boxed{3}$$

2.ª) No caso de figurarem números mistos no produto efetua-se a operação transformando-os em frações impróprias. Exemplo:

Efetuar: $4\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{4}$

$$\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{7 \times 1 \times 5}{3 \times 8 \times 2} = \frac{35}{48}$$

3.ª) Não se deve confundir um número misto com o produto de um número inteiro por uma fração.

Assim não se deve confundir, por exemplo, o número misto $8\frac{3}{7}$ com o produto $8 \times \frac{3}{7}$, pois,

$$8\frac{3}{7} = \frac{59}{7} \quad \text{e} \quad 8 \times \frac{3}{7} = \frac{24}{7}$$

4.ª) Quando se multiplica uma fração por outra fração, costuma-se também usar a expressão *fração de fração.*

Assim para se obter os $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{7}$ basta efetuar o produto dessas frações, ou seja:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$



**4. Potenciação.** Temos a seguinte

REGRA: *Para se elevar uma fração a uma potência elevam-se os seus dois têrmos a essa potência.*

OBSERVAÇÃO: Se a base fôr um *número misto* reduz-se primeiramente a uma fração imprópria. Exemplos:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

3) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

4) $\left(4\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{21}{5}\right)^3 = \frac{9\,261}{125}$

**5. Divisão.** Inicialmente, diz-se que uma fração é *inversa* ou *recíproca* de outra fração, quando os seus têrmos figuram trocados em relação aos têrmos dessa outra, isto é, o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa. Assim:

$\frac{3}{4}$ é a fração inversa de $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{5}$ é a fração inversa de $\frac{5}{1}$ ou 5

REGRA: *Multiplica-se a primeira fração pela inversa da segunda.* Exemplos:

1) Efetuar: $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

Temos: $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$

2) Efetuar: $8 : \frac{3}{4}$

Temos: $8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

3) Efetuar: $\frac{2}{7} : 3$

Temos: $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Caso se dividam números mistos, reduzímo-los primeiramente a frações impróprias. Exemplo:

Efetuar: $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{7}$

Temos: $\frac{19}{5} : \frac{15}{7} = \frac{19}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{133}{75}$

2.ª) Pode-se também indicar o quociente de duas frações com uma nova fração a têrmos fracionários. Exemplo:

A divisão de $\frac{2}{5}$ por $\frac{4}{7}$ pode ser indicada

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}$$

Vice-versa temos: $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

**6. Expressões aritméticas fracionárias.** O cálculo de expressões aritméticas fracionárias, que são conjuntos de frações ligadas por sinais de operações, é feito na seguinte ordem:

1.ª) as potências;

2.ª) as multiplicações e as divisões, e

3.ª) as adições e subtrações respeitadas as ordens dos parênteses, colchetes e chaves. Exemplos:

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$\left[\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{6} : 3\right] \times \frac{4}{5} + 2$$

Efetuando:

$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$$\left[\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$$



Efetuando:

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$$\left[\frac{7}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$$

Efetuando:

$\frac{7}{4} + \frac{1}{18} = \frac{63 + 2}{36} = \frac{65}{36}$

$$\frac{65}{36} \times \frac{4}{5} + 2 =$$

Efetuando:

$\frac{\overset{13}{\cancel{65}}}{\underset{9}{\cancel{36}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{13}{9}$

$$\frac{13}{9} + 2 =$$

Efetuando:

$\frac{13}{9} + 2 = \frac{13 + 18}{9} = \frac{31}{9}$

$$\frac{31}{9} = 3\frac{4}{9}$$

2) *Calcular o valor da expressão:*

$$\left\{2 \times \left[\frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{4}{5}\right)\right] + \frac{3}{4} : 2\right\} \times \frac{40}{19}$$

Efetuando:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$$\left\{2 \times \left[\frac{9}{4} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{5}\right] + \frac{3}{4} : 2\right\} \times \frac{40}{19} =$$

Efetuando:

$\frac{\cancel{9}}{4} \times \frac{1}{\cancel{9}} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$$\left\{2 \times \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$$

$$\left\{2 \times \frac{1}{20} + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$$

Efetuando:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

$$\left\{\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$$

Efetuando:

$\overset{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\underset{10}{\cancel{20}}} = \frac{1}{10}$

$$\frac{19}{40} \times \frac{40}{19} = 1$$

Efetuando:

$\frac{1}{10} + \frac{3}{8} = \frac{19}{40}$

Efetuando:

$\frac{\overset{1}{\cancel{19}}}{\underset{1}{\cancel{40}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{19}}} = 1$

Observação: No caso de uma fração ter os seus têrmos indicando operações, efetuam-se primeiramente as operações indicadas no numerador e as indicadas no denominador e em seguida faz-se a divisão entre as duas frações obtidas. Exemplos:

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{1 - \frac{2}{3}}{4 \times \frac{2}{5}}$$

Efetuando:

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

$$\frac{1 - \frac{2}{3}}{4 \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{3} : \frac{8}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$



2) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4 + \frac{3}{4} : \frac{1}{6}}{\left(\frac{2}{3} + 5\right) \times \left(4 - \frac{1}{3}\right)}$$

Efetuando:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{1} = \frac{9}{2}$

temos para o numerador:

$$\frac{1}{\cancel{8}} \times \overset{1}{\cancel{4}} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Efetuando:

$\frac{2}{3} + 5 = \frac{17}{3}$

$4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

temos para o denominador:

$$\frac{17}{3} \times \frac{11}{3} = \frac{187}{9}$$

e para o valor da expresssão:

$$5 : \frac{187}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{9}{187} = \frac{45}{187}$$

3) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{4 \times \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2 \times \frac{1}{4}}}$$

Efetuando o numerador:

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Efetuando o denominador:

$$1+\frac{3}{\frac{1}{2}} = 1+3:\frac{1}{2} =$$

$$= 1+3\times\frac{2}{1} =$$

$$= 1+6 =$$

$$= 7$$

e para o valor da expressão:

$$\frac{\frac{8}{3}}{7} = \frac{8}{3}\times\frac{1}{7} = \frac{8}{21}$$

4) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{\dfrac{5-\frac{2}{3}:\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}+\frac{7}{10}}}{2-\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{3}+1\right)}$$

Efetuando o numerador:

$$\frac{5-\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}}{\frac{10}{10}} = \frac{5-\frac{4}{3}}{1} = \frac{\frac{11}{3}}{1} = \frac{11}{3}$$

Efetuando o denominador:

$$2-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 2-1 = 1$$

e o valor da expressão:

$$\frac{\frac{11}{3}}{1} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$



## EXERCÍCIOS SÔBRE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

1. Efetuar as seguintes *adições:*

1.°) $\frac{5}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}$

2.°) $2\frac{1}{3}+\frac{4}{6}+5$

3.°) $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{9}{8}+\frac{3}{8}$

4.°) $\frac{19}{24}+\frac{11}{15}+\frac{13}{18}+\frac{7}{12}$

5.°) $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}$

6.°) $8+7\frac{12}{13}+9\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}$

2. Efetuar as seguintes *subtrações:*

1.°) $\frac{8}{11}-\frac{3}{11}$

2.°) $3\frac{4}{5}-\frac{1}{8}$

3.°) $\frac{1}{12}-\frac{1}{13}$

4.°) $8-\frac{4}{7}$

5.°) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$

6.°) $\frac{114}{216}-\frac{11}{264}$

3. Efetuar as seguintes *somas* e *subtrações:*

1.°) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$

2.°) $12-\frac{8}{5}+3\frac{1}{4}$

4. Calcular o valor das expressões aritméticas:

1.°) $\left(4+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\right)$

2.°) $4-\left[\left(\frac{21}{10}+\frac{7}{12}\right)-\left(\frac{5}{3}-\frac{8}{12}\right)\right]$

3.°) $\left(3\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}\right)$

4.°) $\frac{12}{5}-\left(\frac{61}{40}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$

5. Efetuar os produtos:

1.°) $3\times\frac{4}{5}$

2.°) $\frac{3}{8}\times 16\times\frac{2}{2}$

3.°) $\frac{1}{8}\times 8$

4.°) $2\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$

5.°) $\frac{21}{12}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{6}$

6.°) $\frac{126}{324}\times 243\times\frac{17}{21}$

6. Calcular:

1.º) Os $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

2.º) Os $\frac{3}{4}$ dos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$

3.º) Os $\frac{3}{4}$ de $1\frac{3}{5}$

4.º) O $\frac{1}{3}$ dos $\frac{4}{5}$ de $3\frac{1}{4}$

5.º) O $\frac{1}{5}$ de 10

6.º) Os $\frac{3}{5}$ dos $\frac{2}{3}$ de 5

7. Calcular o valor de:

1.º) $\left(5+\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{17}$

2.º) $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)$

3.º) $\left(4-\frac{5}{8}\right)\times\frac{2}{9}$

4.º) $\left(3\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{7}\right)$

8. Calcular o valor de:

1.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 2.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ 3.º) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$ 4.º) $\left(\frac{11}{12}\right)^2$

5.º) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\times\frac{11}{16}$

6.º) $\left[4+\left(2\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{25}{121}\right]+\left[1^5-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$

9. Quais são as frações inversas das frações:

1.º) $\frac{4}{5}$ 2.º) $3\frac{1}{4}$ 3.º) $\frac{1}{8}$ 4.º) 3

10. Efetuar as divisões:

1.º) $\frac{4}{7}:\frac{2}{3}$

2.º) $3\frac{1}{5}:\frac{3}{4}$

3.º) $\frac{3}{5}:4$

4.º) $2\frac{1}{7}:4\frac{2}{5}$

5.º) $8:\frac{1}{2}$

6.º) $316:1\frac{1}{3}$

11. Calcular o valor de:

1.º) $\left(3+\frac{4}{5}\right):\frac{2}{3}$

2.º) $\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{5}-\frac{1}{12}\right):\left(2+\frac{1}{3}\right)$

3.º) $\left(\frac{14}{30}-\frac{3}{10}\right):\frac{10}{24}$

4.º) $\left(3-\frac{12}{10}\right):\left(\frac{3}{5}\right)^2$



12. Calcular o valor das expressões:

1.º) $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}\right)\times\left(1-\frac{1}{79}\right)$

2.º) $\left[\left(3+\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{11}+3:\frac{1}{2}\right]\times\frac{3}{22}+5$

3.º) $\left\{3\frac{74}{120}-\left[\left(4-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]+\frac{3}{8}:\frac{1}{16}\right\}:6\frac{7}{120}$

4.º) $\dfrac{3\times\frac{2}{5}+1}{2-\frac{3}{4}:2}$

5.º) $\dfrac{\left(7+\frac{1}{2}\right):\left(2-\frac{27}{81}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{35}{10}\right)+\frac{15}{7}}:\left(\frac{111}{23}-4\right)$

6.º) $\dfrac{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2+1\frac{1}{8}:\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3-\dfrac{1}{\frac{4}{7}+\frac{1}{5}}}:\dfrac{\frac{228}{23}-3}{\frac{1}{2}}$

7.º) $5\times\left[\dfrac{\left(4-\frac{1}{3}\right)^2\times1\frac{1}{11}+\left(\frac{3}{5}\right)^2:\frac{1}{25}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:9\right)\times1\frac{25}{29}}\right]:\frac{71}{3}$

8.º) $\left(1-\dfrac{\frac{1}{3}:4}{1+\frac{1}{6}}\right)^2\times\dfrac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3}{\frac{66}{125}-\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}$

9.º) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{8}:2}{1+\dfrac{1}{2-\frac{1}{3}}}-\left(\frac{611}{192}-3\right)$

10.º) $\dfrac{5-\left[\frac{1}{5}+\left(2\frac{1}{5}-1\right)^2\right]}{4+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times9}$

RESPOSTAS:

1. 1.º) $\frac{5}{6}$; 2.º) 8; 3.º) $2\frac{1}{4}$; 4.º) $2\frac{299}{360}$; 5.º) $1\frac{23}{24}$; 6.º) $28\frac{131}{156}$.

2. 1.º) $\frac{5}{11}$; 2.º) $3\frac{27}{40}$; 3.º) $\frac{1}{156}$; 4.º) $7\frac{3}{7}$; 5.º) $\frac{7}{20}$; 6.º) $\frac{35}{72}$.

3. 1.º) $\frac{5}{24}$; 2.º) $13\frac{13}{20}$;

4. 1.º) $3\frac{19}{24}$; 2.º) $2\frac{19}{60}$; 3.º) $\frac{19}{24}$; 4.º) 0.

5. 1.º) $2\frac{2}{5}$; 2.º) 6; 3.º) 1; 4.º) $1\frac{1}{10}$; 5.º) 1; 6.º) $76\frac{1}{2}$.

6. 1.º) $\frac{8}{15}$; 2.º) $\frac{1}{4}$; 3.º) $\frac{6}{5}$; 4.º) $\frac{13}{15}$; 5.º) 2; 6.º) 2

7. 1.º) 1; 2.º) $\frac{11}{15}$; 3.º) $\frac{3}{4}$; 4.º) $\frac{949}{560} = \frac{389}{560}$.

8. 1.º) $\frac{1}{4}$; 2.º) $\frac{8}{27}$; 3.º) $\frac{256}{81}$; 4.º) $\frac{121}{144}$; 5.º) $\frac{121}{256}$; 6.º) $\frac{161}{27} = 4\frac{13}{27}$.

9. 1.º) $\frac{5}{4}$; 2.º) $\frac{4}{13}$; 3.º) 8; 4.º) $\frac{1}{3}$.

10. 1.º) $\frac{6}{7}$; 2.º) $\frac{64}{15}$; 3.º) $\frac{3}{20}$; 4.º) $\frac{75}{154}$; 5.º) 16; 6.º) 237.

11. 1.º) $\frac{57}{10}$; 2.º) $\frac{137}{280}$; 3.º) $\frac{2}{5}$; 4.º) 5.

12. 1.º) $\frac{78}{160}$; 2.º) 6; 3.º) 1; 4.º) $1\frac{23}{65}$; 5.º) $2\frac{40}{141}$; 6.º) $\frac{1}{2}$;
7.º) 5; 8.º) $\frac{169}{196}$; 9.º) $\frac{35}{128}$; 10.º) $\frac{84}{125}$.

(NOTA: Outros exercícios no fim do livro, pág. 247).



## *Curiosidades sôbre frações*

Com o conhecimento que vocês já tiveram de fração podem agora ver certas ilustrações relativas às *várias maneiras de se exprimir alguns números inteiros.* Assim, por exemplo, exprimir:

1) *14 com cinco 1.* Temos: $14 = 11 + 1 + 1 + 1$

2) *34 com quatro 3.* Vem: $34 = 33 + \frac{3}{3}$

3) *31 com cinco 3.* Temos: $31 = 3 + \frac{3}{3} + 3^3$

4) *20 com quatro 9.* Temos: $20 = 9 + \frac{99}{9}$

5) *120 com cinco 9.* Vem: $120 = 9 + \frac{999}{9}$

6) *100 com quatro 9.* Temos: $100 = 99 + \frac{9}{9}$

7) *1 000 com cinco 9.* Vem: $1\,000 = 999 + \frac{9}{9}$

8) *100 repetindo cinco vêzes o mesmo algarismo.* Temos:

$$100 = 111 - 11; \quad 100 = 3 \times 33 + \frac{3}{3}$$

$$100 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5; \quad 100 = 5 \times (5 + 5 + 5 + 5)$$

9) *100 usando os algarismos de 0 a 9.* Temos:

$$100 = \frac{1}{2} + \frac{38}{76} + 49 + 50$$

10) *100 usando os algarismos de 1 a 9.* Existem, pelo menos, seis maneiras de se escrever 100 usando os algarismos de 1 a 9. Escreveremos uma delas, deixando as demais com exercício.

$$100 = 1 + \frac{27}{54} + \frac{3}{6} + 98$$

## § 3. Métodos de resolução de problemas típicos sôbre frações.

Daremos nos exemplos que se seguem, os raciocínios que devem prevalecer para a resolução de problemas que envolvam números fracionários. Devemos sempre, nos problemas, efetuar as operações com as frações entre si, assim como efetuar as operações com os seus valores correspondentes e sòmente entre êsses valores. Não podemos, por exemplo num problema, "somar" fração (número) com dinheiro, ou "subtrair" vinho de fração (número) etc. e sim, somar *fração* com *fração*, *dinheiro* com *dinheiro*, etc. estabelecendo em seguida a equivalência entre as frações de um lado e dinheiro de outro lado, por exemplo.

1) Um objeto custa Cr$ 18,00. Quanto custa $\frac{1}{3}$ dêsse objeto?

*Raciocínio:* Como queremos saber o preço de $\frac{1}{3}$ do objeto, êste objeto poderá ser representado por $\frac{3}{3}$ (unidade). Logo $\frac{1}{3}$ deverá ser equivalente à têrça parte de Cr$ 18,00, isto é, Cr$ 6,00.

*Representação prática:*

$$\frac{3}{3} \to 18,00$$

$$\frac{1}{3} \to \frac{18,00}{3} = 6,00$$

*Resposta:* $\frac{1}{3}$ do objeto custa Cr$ 6,00.

*Prova:* Se a têrça parte de um objeto custa 6,00, o objeto todo custará três vêzes mais, isto é,

$$3 \times 6,00 = 18,00$$



2) No problema anterior, quanto custam $\frac{2}{3}$ do objeto?

*Raciocínio:* Conhecido o preço de $\frac{1}{3}$, que é Cr$ 6,00 o preço de $\frac{2}{3}$ será o dôbro, isto é, Cr$ 12,00.

*Representação prática:*

$$\frac{3}{3} \to 18,00$$

$$\frac{1}{3} \to \frac{18,00}{3} = 6,00$$

$$\frac{2}{3} \to 2 \times 6,00 = 12,00$$

*Resposta:* $\frac{2}{3}$ do objeto custa Cr$ 12,00.

3) No problema 1), quanto custam $\frac{4}{5}$ do objeto?

*Raciocínio:* Sendo Cr$ 18,00 o preço de todo o objeto e como queremos o valor de seus $\frac{4}{5}$, segue-se que Cr$ 18,00 representa $\frac{5}{5}$ do objeto. Determinamos primeiramente o valor de $\frac{1}{5}$ (quinta parte) e em seguida os $\frac{4}{5}$.

*Representação prática:*

$$\frac{5}{5} \to 18,00$$

$$\frac{1}{5} \to \frac{18,00}{5} = 3,60$$

$$\frac{4}{5} \to 4 \times 3,60 = 14,40$$

*Resposta:* $\frac{4}{5}$ do objeto custa Cr$ 14,40.

4) Se $\frac{2}{3}$ do pêso de uma pessoa é igual a 60 kg quanto pesará esta pessoa?

Ora, se: $\frac{2}{3} \to 60 \text{ kg}$

$\frac{1}{3}$ será a metade: $\frac{1}{3} \to \frac{60 \text{ kg}}{2} = 30 \text{ kg}$

e $\frac{3}{3}$ serão o triplo: $\frac{3}{3} \to 3 \times 30 \text{ kg} = 90 \text{ kg}$

*Resposta:* A pessoa pesa 90 kg.

5) Uma fortuna de Cr$ 360 000,00 foi repartida entre dois herdeiros cabendo ao primeiro a importância equivalente a $\frac{3}{4}$ da fortuna. Quanto recebeu cada um?

Fortuna tôda: $\frac{4}{4} \to 360\,000{,}00$

Fração correspondente ao 1.º: $\frac{3}{4}$

Fração correspondente ao 2.º: $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Logo: $\frac{4}{4} \to 360\,000{,}00$

$\frac{1}{4} \to \frac{360\,000{,}00}{4} = 90\,000{,}00$

$\frac{3}{4} \to 3 \times 90\,000{,}00 = 270\,000{,}00$

*Resposta:* O primeiro herdeiro recebeu Cr$ 270 000,00 e o segundo Cr$ 90 000,00.

6) Um barril com a capacidade de 42 litros está cheio de vinho, que deve ser repartido entre três pessoas. A primeira



pessoa deve receber a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ do vinho contido no barril, a segunda a fração equivalente a $\frac{1}{7}$ e a terceira o restante. Quanto deve receber cada pessoa?

$$\left.\begin{array}{l} 1.^\circ \to \frac{2}{3} \\ 2.^\circ \to \frac{1}{7} \end{array}\right\rangle \text{logo: } 1.^\circ + 2.^\circ \to \frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{14+3}{21} = \frac{17}{21}$$

vinho todo: $\to \frac{21}{21}$

parte do 3.º $\to \frac{21}{21} - \frac{17}{21} = \frac{4}{21}$

Portanto:

$\frac{21}{21} \to 42$ litros

$\frac{1}{21} \to 2$ litros

$\frac{4}{21} \to 8$ litros (parte que cabe à 3.ª pessoa);

e, $\frac{3}{3}$

$\frac{1}{3} \to 14$ litros

$\frac{2}{3} \to 28$ litros (parte que cabe à 1.ª pessoa);

e, $\frac{7}{7} \to 42$ litros

$\frac{1}{7} \to 6$ litros (parte que cabe à 2.ª pessoa).

*Resposta:* A primeira pessoa recebe 28 litros de vinho, a segunda 6 litros e a terceira pessoa 8 litros.

7) A diferença entre os $\frac{4}{5}$ e os $\frac{2}{3}$ do preço de um automóvel é de Cr\$ 48 000,00. Qual é o preço do automóvel?

A diferença $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$

corresponde à importância de Cr\$ 12 000,00.

Logo:

$$\frac{2}{15} \rightarrow 48\,000{,}00$$

$$\frac{1}{15} \rightarrow 24\,000{,}00$$

$$\frac{15}{15} \rightarrow 360\,000{,}00$$

*Resposta:* O automóvel custa Cr\$ 360 000,00

8) Qual é o número cujos $\frac{2}{3}$ mais os $\frac{3}{4}$ dão 51.

A soma $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$

corresponde ao valor 51.

Logo:

$$\frac{17}{12} \rightarrow 51$$

$$\frac{1}{12} \rightarrow \frac{51}{17} = 3$$

$$\frac{12}{12} \rightarrow 12 \times 3 = 36$$

*Resposta:* O número procurado é 36

*Prova:*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} \text{ de } 36 = \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \overset{12}{\cancel{36}} = 24 \\[2ex] \frac{3}{4} \text{ de } 36 = \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{9}{\cancel{36}} = 27 \end{array}\right\} \textit{Soma: } 51$$



9) Duas torneiras despejam água num mesmo tanque. A primeira sòzinha o enche em $\frac{1}{5}$ de hora e a segunda sòzinha em $\frac{1}{6}$ de hora. Em quanto tempo encherão o tanque as duas torneiras juntas?

$$\begin{array}{c} 1.^{a} \\ \textit{torneira} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Enche o tanque em } \frac{1}{5} \text{ de hora ou } \frac{60}{5} \text{ min.} = 12 \text{ min.} \\[1ex] 12 \text{ min.} \rightarrow 1 \text{ tanque} \\[1ex] 1 \text{ min.} \rightarrow \frac{1}{12} \text{ do tanque} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} 2.^{a} \\ \textit{torneira} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Enche o tanque em } \frac{1}{6} \text{ de hora ou } \frac{60}{6} \text{ min.} = 10 \text{ min.} \\[1ex] 10 \text{ min.} \rightarrow 1 \text{ tanque} \\[1ex] 1 \text{ min.} \rightarrow \frac{1}{10} \text{ do tanque} \end{array} \right.$$

$$1.^{a} + 2.^{a} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ min.} \rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{5 + 6}{60} = \frac{11}{60} \\[1ex] \text{Logo:} \\[1ex] \quad \frac{11}{60} \text{ do tanque} \rightarrow 1 \text{ min.} \\[1ex] \quad \frac{1}{60} \text{ do tanque} \rightarrow \frac{1}{11} \text{ do min.} \\[1ex] \quad \frac{60}{60} \text{ do tanque} \rightarrow \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \text{ min.} \end{array} \right.$$

*Resposta:* As duas torneiras enchem o tanque em $5\frac{5}{11}$ minutos.

## PROBLEMAS SÔBRE FRAÇÕES

1. Quanto valem $\frac{3}{4}$ do preço de um objeto que custou Cr$ 56,00?
2. Um avião percorre 850 quilômetros em 2 horas. Quantos quilômetros percorrerá em $3\frac{1}{5}$ horas?
3. Qual é o número que multiplicado por $\frac{1}{5}$ dá $7\frac{3}{4}$?
4. Um operário pode fazer num dia $\frac{3}{4}$ de um trabalho. Quanto tempo levará para fazer todo trabalho?
5. Quantas vêzes está contido exatamente $\frac{1}{4}$ em 4?
6. Quando se obtém mais: tomando os $\frac{5}{13}$ de uma coisa ou os $\frac{3}{8}$ dos $\frac{7}{12}$ da mesma?
7. A metade de um número mais os seus $\frac{2}{3}$ valem 14. Qual é êsse número?
8. Uma senhora gasta Cr$ 900,00 do que possui e ainda lhe restam 1/4. Quanto possuia inicialmente?
9. Um alpinista percorre 2/7 de uma montanha e em seguida mais 3/5. Quanto falta para atingir o cume?
10. Qual é o número que aumenta 1/8 de seu valor quando se acrescentam 3 unidades?
11. São decorridos 4/5 do dia, que horas são?
12. Um trem percorre 1/6 do caminho entre duas cidades em 1 hora e 30 minutos. Quanto tempo leva de uma cidade a outra uma viagem de trem?
13. Lia comeu 21/42 de uma maçã e Léa comeu os 37/74 dessa mesma maçã. Qual das duas comeu mais e quanto sobrou?
14. Dividindo os 2/5 de certo número por 2/7 dá para quociente 49. Qual é êsse número?
15. A soma de dois números é 143 e o menor é 2/11 do maior. Quais são êsses números?
16. Um pacote com 27 balas é dividido igualmente entre três meninos. Quantas balas coube a cada um, se o primeiro deu 1/3 do que recebeu ao segundo e o segundo deu 1/2 do que possuia ao terceiro?
17. Uma herança de Cr$ 70.000,00 é distribuída entre três herdeiros. O primeiro recebe 1/2, o segundo 1/5 e o 3.º o restante. Qual recebeu a maior quantia?



18. Uma torneira leva 7 horas para encher um tanque. Em quanto tempo enche 3/7 dêsse tanque?
19. Os 4/7 de uma caixa de frutas é igual a 100 frutas. Quantas frutas têm a caixa tôda?
20. Quais os $1\frac{1}{4}$ de ujm número cujos 2/3 valem 168.
21. Uma criada gasta três pedaços de sapólio para lavar uma escada com 22 degraus. Com um sapólio, que parte da escada poderá lavar?
22. Cr$ 120,00 são distribuídos entre 5 pobres. O primeiro recebe ½, o segundo 1/5 do que recebeu o primeiro e os restantes recebem partes iguais. Quanto recebeu cada pobre?
23. Em um combate morrem 2/9 de um exército, em novo combate morrem mais 1/7 do que restou e ainda sobram 30 000 homens. Quantos soldados estavam lutando?
24. Um carroceiro transporta em dois dias 539 sacas de arroz de um armazem para outro. No primeiro dia transporta 2/7. Quantas sacas deve transportar no dia seguinte?
25. 2/5 dos 3/7 de um pomar são laranjeiras; 4/5 dos 3/4 são pereiras; há ainda mais 24 árvores diversas. Quantas árvores há no pomar?
26. Determinar uma fração equivalente a 2/5, cuja soma dos têrmos seja igual a 217.
27. Determinar uma fração equivalente a 280/210, cuja diferença entre os têrmos seja igual a 5.
28. João possuía 75 laranjas. Deu a seu irmão $\frac{1}{3}$ delas, à irmã $\frac{2}{5}$ do resto e ao primo $\frac{1}{6}$ do segundo resto. Com quantas laranjas ficaram João e essas pessoas?
29. Uma bola pula cada vez que bate no chão $\frac{2}{3}$ da altura de onde caiu. Deixando-a cair da altura de 12 metros, pergunta-se: 1.º) qual será a altura do terceiro pulo?; 2.º) quanto percorreu ao bater no chão pela terceira vez?
30. Um negociante pagou $\frac{3}{5}$ de sua dívida e ainda ficou devendo Cr$ 2 400,00. Quanto devia êsse negociante?
31. Para construir os $\frac{3}{7}$ de uma estrada gastou-se Cr$ 285 300,00. Quanto custará uma estrada que é os $\frac{2}{5}$ daquela?
32. Os $\frac{3}{4}$ de um número aumentados de seus $\frac{5}{8}$ dão para resultado 121. Qual é o número?
33. Por $3\frac{2}{9}$ metros de uma peça de fazenda de 12 metros, pagou-se Cr$ 58,00. Qual é o preço da peça?

34. Um operário depois de receber o seu ordenado pagou no empório uma quantia igual a $\frac{1}{4}$ do que recebeu, no açougue uma quantia igual a $\frac{1}{9}$ do resto e ainda ficou com Cr$ 6 400,00. Qual é o seu ordenado?

35. Um corredor depois de ter percorrido os $\frac{3}{7}$ de uma estrada faz mais 5 quilômetros e assim corre $\frac{2}{3}$ do percurso que deve fazer. Quanto percorreu o corredor e qual o total do percurso, em quilômetros?

36. Do vinho contido numa pipa, vendeu-se os $\frac{3}{7}$, a seguir $\frac{1}{4}$ do resto e finalmente os $\frac{2}{3}$ dos 120 litros que sobram. Quantos litros de vinho continha a pipa e quantos ficaram depois da venda?

37. Sabendo-se que de uma herança no valor de Cr$ 420 000,00, $\frac{1}{3}$ coube ao primeiro filho; $\frac{1}{4}$ ao segundo e que o resto foi distribuído a hospitais, determinar as quantias recebidas por cada filho, hospitais e a fração da herança que coube a êstes últimos.

38. Se um menino gasta por dia $\frac{2}{7}$ de um lápis, quantos dias durará meia dúzia de lápis?

39. Três rádios de cabeceira custaram Cr$ 37 245,00. Sabendo-se que o preço da segunda é os $\frac{2}{3}$ da primeira e os $\frac{4}{5}$ da terceira, qual é o preço de cada uma das vitrolas?

40. Um fazendeiro comprou gado no valor de Cr$ 900 000,00, pagando $\frac{1}{3}$ dêles a Cr$ 9 000,00 por cabeça; $\frac{1}{4}$ a Cr$ 8 000,00 e o resto a Cr$ 6 000,00. Quantas cabeças de gado comprou o fazendeiro?

RESPOSTAS:

1. Cr$ 42,00.
2. 1 360 quilômetros.
3. $\frac{155}{4}$.
4. 1 dia e $\frac{1}{3}$ de dia.
5. 16.
6. Ao tomar $\frac{5}{13}$.
7. 12.
8. Cr$ 1.200,00
9. 4/35.
10. 24.
11. 19 h 12 min.
12. 9 h.
13. Cada uma comeu ½. Não sobrou nada.
14. 35.



15. 121 e 22.
16. 6, 6 e 15.
17. O 1.º) Cr$ 35 000,00.
18. 3 h
19. 175.
20. 315.
21. 7 1/3 degraus.
22. 1.º) Cr$ 60,00.
    2.º) Cr$ 12,00.
    3.º), 4.º) e 5.º) Cr$ 16,00.
23. 45 000
24. 385.
25. 105.
26. 62/155
27. 20/15
28. João ficou com 25; o irmão com 25, a irmã com 20 e o primo com 5.
29. 1.º) $3\frac{5}{9}$ metros; 2.º) $38\frac{2}{3}$ metros.
30. Cr$ 6 000,00.
31. Cr$ 266 280,00.
32. 88.
33. Cr$ 216,00.
34. Cr$ 9 600,00.
35. 14 quilômetros e 21 quilômetros.
36. 280 e 40 litros.
37. Cr$ 140 000,00 – 1.º filho; Cr$ 105 000,00 – 2.º filho; Cr$ 175 000,00 $\left(\frac{5}{12}\right)$ – Hospitais.
38. 21 dias.
39. Cr$ 14 898,00 (1.ª); Cr$ 9 932,00 (2.ª); Cr$ 12 415,00 (3.ª).
40. 120 cabeças.

(NOTA: Outros exercícios no fim do livro, pág. 258).

## § 4. Frações decimais como números decimais.

### NOÇÃO INTUITIVA E OPERAÇÕES

**1. Noção intuitiva.** Já vimos que *fração decimal é tôda fração cujo denominador é uma potência de* 10. Assim por exemplo:

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{17}{100}, \quad \frac{3\,856}{1\,000}, \ldots$$

são *frações decimais*.

O fato do denominador dessas frações ser uma potência de 10 (base do sistema de numeração que empregamos) facilita uma representação análoga à usada para os números inteiros.

Dêsse modo, chamando:

a fração $\frac{1}{10}$ (um décimo) de *unidade decimal de 1.ª ordem;*

a fração $\frac{1}{100}$ (um centésimo) de *unidade decimal de 2.ª ordem;*

a fração $\frac{1}{1\,000}$ (um milésimo) de *unidade decimal de 3.ª ordem;*

a fração $\frac{1}{10\,000}$ (um décimo milésimo) de *unidade decimal de 4.ª ordem;*

e assim por diante, podemos representar uma fração decimal de outra forma.

Seja, por exemplo, a fração decimal

$$\frac{3\,856}{1\,000}$$

que pode ser decomposta em:

$$\frac{3\,856}{1\,000} = \frac{3000+800+50+6}{1\,000} = \frac{3\,000}{1\,000} + \frac{800}{1\,000} + \frac{50}{1\,000} + \frac{6}{1\,000}$$

$$\frac{3\,856}{1\,000} = 3 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1\,000}$$

Fixando-se a posição que deve ocupar o algarismo que representa as unidades simples da parte inteira mediante uma *vírgula* e a seguir os décimos, centésimos e milésimos, teremos:

$$\frac{3\,856}{1\,000} = 3{,}856$$

e dizemos que a fração decimal $\frac{3\,856}{1\,000}$ está escrita sob forma de *número decimal.*



Os algarismos que vêm depois da vírgula chamam-se algarismos decimais (ou casas decimais) e o seu conjunto constitui a *parte decimal* do número decimal. Logo, temos a definição:

**Número decimal é um conjunto de unidades inteiras e decimais.**

**2. Leitura de um número decimal.** Lê-se primeiramente a parte inteira seguida do nome de *unidades* e depois a parte decimal dando-se a designação da unidade representada pelo *último algarismo da direita.* Se a parte inteira fôr nula, lê-se sòmente a parte decimal. Exemplos:

4,87 lê-se: *quatro unidades e oitenta e sete centésimos.*

(4 — unidades; 8 — décimos; 7 — centésimos)

0,00312 lê-se: *trezentos e doze centésimos milésimos.*

(0 — unidades; 0 — décimos; 0 — centésimos; 3 — milésimos; 1 — décimos milésimos; 2 — centésimos milésimos)

32,010939 lê-se: *trinta e duas unidades e dez mil novecentos e trinta e nove milionésimos.*

(2 — unidades; 0 — décimos; 1 — centésimos; 0 — milésimos; 9 — décimos milésimos; 3 — centésimos milésimos; 9 — milionésimos)

**3. Transformação de uma fração decimal em um número decimal e vice-versa.**

PRIMEIRA REGRA: *Uma fração decimal é igual ao número decimal que se obtém escrevendo o numerador e separando com uma* *vírgula* (a partir da direita), *tantas casas decimais quantos são zeros do denominador. No caso do número de algarismos do numerador ser inferior ao número de algarismos do denominador, pode-se escrever à sua esquerda o número de zeros necessários para igualá-los.* Exemplos:

$$\frac{487}{100} = 4{,}87$$

$$\frac{32}{10\,000} = \frac{00\,032}{10\,000} = 0{,}0032$$

$$\frac{9}{1\,000} = \frac{0\,009}{1\,000} = 0{,}009$$

SEGUNDA REGRA: *Um número decimal é igual à fração decimal que obtém escrevendo para numerador o número sem a vírgula e dando para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.* Exemplos:

$$0{,}0389 = \frac{389}{10\,000}$$

$$12{,}05 = \frac{1\,205}{100}$$

$$0{,}0001 = \frac{1}{10\,000}$$

**4. Propriedades dos números decimais.** 1.ª) Um número decimal não se altera quando se colocam ou se retiram zeros à sua direita. Exemplos:

0,3 = 0,30 (três décimos é o mesmo que trinta centésimos, pois, cada décimo vale dez centésimos).

12,02 = 12,020

2.ª) Deslocando-se a vírgula para à *direita* de um, dois, três, etc. algarismos, o número decimal fica *multiplicado* por 10, 100, 1 000, etc. Exemplos:



0,623×10=6,23 (a mudança da vírgula para uma casa da direita fêz com que o algarismo dos décimos se transformasse no algarismo das unidades).

718,005 × 100 = 71800,5

3.ª) Deslocando-se a vírgula para a *esquerda* de um, dois, três, etc. algarismos, o número decimal fica *dividido* por 10, 100, 1 000, etc. Exemplos:

456,38 : 10 = 45,638
0,028 : 1 000 = 0,000028

**5. Operações com os números decimais.**

## Adição

REGRA: *Escrevem-se os números decimais uns sob os outros de modo que as vírgulas se correspondam; somam-se os números como se fôssem inteiros, e, coloca-se a vírgula na soma, em correspondência com as das parcelas.* Exemplo:

13,8 + 0,052 + 2,9

| | | |
|---|---|---|
| 13,8 | ou | 13,800 |
| 0,052 | | 0,052 |
| 2,9 | | 2,900 |
| 16,752 | | 16,752 |

## Subtração

REGRA: *Escreve-se o subtraendo sob o minuendo de modo que as vírgulas se correspondam; subtraem-se os números como se fôssem inteiros, e, coloca-se a vírgula no resultado em correspondência com as dos têrmos.* Exemplo:

Efetuar: 5,08 − 3,4852

| | | |
|---|---|---|
| 5,08 | − ou | 5,0800 |
| 3,4852 | | 3,4852 |
| 1,5948 | | 1,5948 |

## Multiplicação

Regra: *Multiplicam-se dois números decimais como se fôssem inteiros e separam-se no resultado, a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os algarismos decimais dos números dados.* Exemplo:

Efetuar: $5{,}32 \times 3{,}8$

$$\begin{array}{r} 5{,}32 \\ 3{,}8 \\ \hline 4\,256 \\ 1\,596\phantom{0} \\ \hline 20{,}216 \end{array}$$

Observação: O cálculo da potência de um número decimal, que é um caso particular de produto, pode ser também efetuado transformando-o em fração decimal. Exemplo:

$$0{,}9^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1\,000} = 0{,}729$$

$$3{,}01^2 = \left(\frac{301}{1\,00}\right)^2 = \frac{90\,601}{1\,0000} = 9{,}0601$$

## Divisão

Regra: *Reduzem-se o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais; desprezam-se as vírgulas de ambos, e, efetua-se a divisão como se fôssem inteiros. Obtido o quociente, coloca-se, ao mesmo tempo, uma vírgula à sua direita e um zero à direita do resto, a fim de continuar a divisão. Os demais algarismos do quociente serão sempre obtidos colocando-se um zero à direita de cada resto.* Exemplo:

Efetuar $72{,}2379 : 5{,}873$

Igualando-se as casas decimais do dividendo e do divisor, temos

$72{,}2379 : 5{,}8730$

Efetua-se a divisão como se fôssem inteiros:

$$\begin{array}{r|l} 722\,379 & 587\,30 \\ \cline{2-2} 135\,079 & 12{,}3 \\ 17\,6190 & \\ 0\,0000 & \end{array}$$



Observações:

1.ª) Se depois de reduzidos o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais, o dividendo fôr *menor* que o divisor, coloca-se no quociente um zero, seguido de uma vírgula e ao mesmo tempo um zero no dividendo e efetua-se, a seguir, a divisão de acôrdo com a regra enunciada. Exemplo:

1) Efetuar: $4{,}3 : 12{,}153$

Igualando-se as casas decimais:

$4{,}300 : 12{,}153$

e dividindo-se como se fôsse inteiros, depois de acrescentar um zero no dividendo e, um zero seguido de vírgula no quociente, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4\,300\,0 & 12\,153 \\ \cline{2-2} 0\,654\,1\,0 & 0{,}353 \\ 046\,450 & \\ 09\,991 & \end{array}$$

Nota: A continuação das divisões vai depender da aproximação desejada, assunto êsse que será estudado no próximo item.

2) Efetuar: $3 : 25$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 25 \\ \cline{2-2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}1\,2 \\ 00 & \end{array}$$

3) Efetuar: $0{,}056 : 8$

$0{,}056 : 8{,}000$ (desprezando-se as vírgulas).

ou $56 : 8\,000$

$$\begin{array}{r|l} 56\,000 & 8\,000 \\ \cline{2-2} 0\,000 & 0{,}007 \end{array}$$

***Quocientes aproximados.*** Pode-se sempre, ampliando o estudo das divisões, quer de números inteiros, quer de números decimais, determinar o quociente da divisão com uma aproximação desejada. Essa aproximação, pode ser *por falta* ou *por excesso*.

Seja, por exemplo, a divisão de 73 por 14. Tomando-se por quociente o número 5, temos que êsse *quociente é por falta* ($5 \times 14 = 70$). Tomando-se o número 6, temos que êsse *quociente é por excesso* ($6 \times 14 = 84$). Quer se tome o quociente por falta 5 ou por excesso 6, comete-se um *êrro menor que uma unidade*, pois, o quociente verdadeiro está entre 5 e 6.

Logo, podemos escrever:

$$5 < \frac{73}{14} < 6$$

e dizemos:

5 é o *quociente por falta* a menos de uma unidade.
6 é o *quociente por excesso* a menos de uma unidade.

Seja agora a divisão de 730 por 14, temos:

$$52 < \frac{730}{14} < 53$$

Ou dividindo todos os números por 10:

$$5{,}2 < \frac{73}{14} < 5{,}3$$

isto é, 5,2 e 5,3 são os *quocientes aproximados* por falta e por excesso, agora a menos de $\frac{1}{10}$ (ou seja o êrro cometido é menor que um décimo). Temos a seguinte regra para a obtenção de quocientes aproximados:

REGRA: *Para se obter o quociente de dois números inteiros aproximados por falta a menos de* $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}$, etc. *acrescenta-se ao dividendo, um, dois, três, etc. zeros e faz-se a divisão. No quociente obtido separa-se com uma vírgula respectivamente uma, duas, três, etc. casas decimais.* Exemplos:

1) Calcular a menos de $\frac{1}{100}$ por falta, o quociente de 43 por 15.

Como a aproximação é de $\frac{1}{100}$ acrescentamos ao dividendo dois zeros

$$\begin{array}{r|l} 4\,300 & 15 \\ \cline{2-2} 1\,30 & 286 \\ 100 & \end{array}$$

e o quociente será: 2,86

*Resposta:* O *quociente aproximado* a menos de $\frac{1}{100}$, por falta, é 2,86.



2) Calcular a menos de 0,001, por falta, o quociente de 3 por 7.

Acrescentam-se agora três zeros à direita do dividendo, isto é,

$$\begin{array}{r|l} 3\,000 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & 428 \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

e o quociente será: 0,428.

*Resposta:* O *quociente aproximado* a menos de 0,001, por falta, é 0,428.

NOTA: No caso da divisão de dois números decimais, reduzem-se antes o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais e procede-se como na divisão de dois inteiros. Exemplos:

1) Calcular a menos de $\frac{1}{10}$, por falta, o quociente de 4,3 por 8,25.

Reduzindo-se as casas decimais, temos: 4,30 e 8,25, e efetuando-se a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 4\,300 & 825 \\ \cline{2-2} 175 & 5 \end{array}$$

(acrescenta-se um zero no dividendo por causa da aproximação que é $\frac{1}{10}$)

segue-se que o quociente será 0,5.

*Resposta:* O *quociente aproximado* a menos de $\frac{1}{10}$, por falta, é 0,5.

2) Calcular a menos de $\frac{1}{100}$, por falta, o quociente de 52,18 por 0,859.

Reduzindo-se as casas decimais:

52,180 : 0,859 e

$$\begin{array}{r|l} 5\,218\,000 & 859 \\ \cline{2-2} 064\,00 & 6\,074 \\ 3\,870 & \\ 434 & \end{array}$$

(acrescentam-se dois zeros no dividendo por causa da aproximação de $\frac{1}{100}$)

e o quociente será: 60,74.

*Resposta:* O *quociente aproximado* a menos de $\frac{1}{100}$, por falta, de 52,18 por 0,759 é 60,74.

## CONVERSÃO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA A UM NÚMERO DECIMAL E VICE-VERSA

**1. Conversão de fração ordinária em um número decimal.** Para se converter uma fração ordinária em um número decimal divide-se o numerador pelo denominador da fração.

Dois casos podem ocorrer:

1.º) *a divisão é exata, isto é, o resto é igual a zero;*

2.º) *a divisão não é exata, isto é, o resto não é zero e o quociente vai tendo um número ilimitado de algarismos.*

Do primeiro caso dizemos que a fração ordinária se converteu em um *número decimal exato* ou numa *decimal exata*, e, no segundo caso, que, a fração ordinária se converteu em um *número decimal periódico* ou numa *dízima periódica*. Exemplos:

Converter as frações: $\frac{3}{25}$, $\frac{47}{20}$, $\frac{8}{11}$ e $\frac{308}{90}$ em números decimais.

1) $\frac{3}{25} = 0{,}12 \rightarrow$ *decimal exata*

$$\begin{array}{r|l} 30 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}12 \\ 00 & \end{array}$$

2) $\frac{47}{20} = 2{,}35 \rightarrow$ *decimal exata*

$$\begin{array}{r|l} 47 & 20 \\ \cline{2-2} 70 & 2{,}35 \\ 100 & \\ 000 & \end{array}$$

3) $\frac{8}{11} = 0{,}7272\ldots \rightarrow$ *dízima periódica*

$$\begin{array}{r|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}7272\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 80 & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$



4) $\frac{308}{90} = 3{,}4222\ldots \rightarrow$ *dízima periódica*

$$\begin{array}{r|l} 308 & 90 \\ \cline{2-2} 380 & 3{,}4222\ldots \\ 200 & \\ 200 & \\ 200 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

**2. Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata.** Como a fração decimal é aquela cujo denominador é uma potência de 10, segue que tôda fração cujo denominador possa ser transformado numa potência de 10, resulta na conversão numa decimal exata. Sendo 2 e 5, com determinados expoentes, os únicos fatôres das potências de 10, temos a seguinte regra que permite saber a espécie da conversão sem efetuar a divisão.

Regra: *Uma fração ordinária se converte numa* ***decimal exata*** *quando, reduzida à sua forma mais simples, o denominador contém sòmente os fatôres 2 e 5. O número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes de 2 e 5.* Exemplos:

1) Converter a fração: $\frac{27}{120}$

Reduzindo-se à sua forma mais simples, temos:

$$\frac{27}{120} = \frac{9}{40}$$

e como o denominador $40 = 2^2 \times 5$ só contém fatôres 2 e 5, segue-se que a fração $\frac{9}{40}$ se converte numa *decimal exata* com 3 casas decimais (que é o expoente de 2).

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo:

$$\frac{27}{120} \rightarrow \textit{decimal exata com 3 casas.}$$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 270 & 120 \\ \cline{2-2} 300 & 0{,}225 \\ 600 & \\ 000 & \end{array} \quad (\textit{decimal exata com 3 casas}).$$

2) Converter a fração $\frac{13}{4}$.

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{logo: } \frac{13}{4} \rightarrow \textit{decimal exata com 2 casas.}$$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 3{,}25 \\ 20 & \\ 00 & \end{array} \quad (\textit{decimal exata com 2 casas}).$$

NOTA: O fato de aparecer no denominador sòmente o fator 2 ou 5, a regra ainda é válida, pois, a ausência de um dêles significa que no produto êsse fator figura com o expoente zero, que como sabemos (§ 2. Potências), vale 1. Em nosso exemplo temos:

$$4 = 2^2 \times 5^0$$

3) Converter a fração $\frac{1}{100}$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 100 = 2^2 \times 5^2, \text{ logo: } \quad \frac{1}{100} \rightarrow \textit{decimal exata com 2 casas.}$$

Verificação: $\begin{array}{l|l} \mathbf{100} & 100 \\ \cline{2-2} 000 & 0{,}01 \end{array}$

**3. Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica.** Seja a fração $\frac{8}{11}$. Dividindo-se 8 por 11, observaremos que o resto nunca é zero. Como os restos que se vão obtendo devem ser menores que 11, depois de um certo número de vêzes êles se repetirão, provocando no quociente os mesmos algarismos sempre na mesma ordem.



Assim:

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}727272\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 80 & \\ 30 & \\ 80 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Obtém-se, dêsse modo, um número decimal ilimitado, que se diz *dízima periódica*, porque existe um grupo de algarismos, chamado *período*, que se repete indefinidamente.

Se o período vier *logo depois da vírgula*, a dízima periódica diz-se *simples* e em caso contrário *dízima periódica composta*. A parte decimal entre a vírgula e o período, existente nas dízimas periódicas compostas, é denominada *parte não periódica*. Exemplos:

1) 0,727272...... que também se representa por $0{,}\overline{72}$ é uma dízima periódica simples de período 72.

2) 8,513513513... ou $8{,}\overline{513}$ é uma dízima periódica simples de período 513.

3) 0,82646464.... ou $0{,}82\overline{64}$ é uma dízima periódica composta de período 64 e parte não periódica 82.

4) 67,0333........ ou $67{,}0\dot{3}$ é uma dízima periódica composta de período 3 e parte não periódica 0.

É possível prever-se a espécie da dízima periódica, quando se divide o numerador pelo denominador de uma fração ordinária, com a seguinte

REGRA: *Uma fração ordinária se converte numa* ***dízima periódica simples****, quando, reduzida à sua forma mais simples,* *o denominador não contém os fatôres primos 2 e 5; caso contenha um dêsses fatôres e outros, a dízima periódica será* ***composta.*** Exemplos:

1) Seja a fração $\frac{4}{11}$

Como o denominador 11 não contém os fatôres 2 e 5, esta fração se converterá numa *dízima periódica simples.*

Logo: $\frac{4}{11} \rightarrow$ dízima periódica simples.

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 40 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;70 & 0{,}3636\ldots \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;70 & \\ \;\;\;\;40 & \end{array}$$

.

.

.

2) Seja a fração $\frac{21}{45}$

Simplificando-se, antes, a fração: $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como o denominador $15 = 3 \times 5$, contém o fator 5, além do fator 3, a fração se converterá numa *dízima periódica composta.*

Logo: $\frac{21}{45} \rightarrow$ dízima periódica composta.

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 210 & 45 \\ \cline{2-2} \;\;300 & 0{,}4666\ldots \\ \;\;\;300 & \\ \;\;\;\;300 & \\ \;\;\;\;300 & \end{array}$$

.

.



3) Seja a fração $\frac{191}{60}$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ além dos fatôres 2 e 5, ainda entra o fator 3, logo:

$\frac{191}{60} \rightarrow$ *dízima periódica composta.*

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 191 & 60 \\ \cline{2-2} \;\;110 & 3{,}18333\ldots \\ \;\;\;500 & \\ \;\;\;\;200 & \\ \;\;\;\;\;200 & \end{array}$$

.

.

.

**4. Geratrizes.** Chama-se *geratriz* de uma dízima periódica a fração ordinária que *gera* essa dízima.

A geratriz de uma dízima periódica simples é determinada pela seguinte

REGRA: *Escreve-se uma fração que tenha para numerador o período e para denominador um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.* Exemplos:

Construir a geratriz da dízima periódica 0,525252...

Devemos ter: $0{,}525252\ldots = \frac{52}{99}$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 520 & 99 \\ \cline{2-2} \;\;250 & 0{,}525252\ldots \\ \;\;\;520 & \\ \;\;\;\;250 & \end{array}$$

.

.

$$\text{De fato notando-se que: } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{9} = 0{,}1111\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{99} = 0{,}01\,0101\ldots \\ \dfrac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

uma dízima periódica simples qualquer, por exemplo: 0,525252...... pode ser sempre escrita sob a forma:

$$0{,}525252\ldots\ldots = 52 \times 0{,}010101\ldots\ldots = 52 \times \frac{1}{99} = \frac{52}{99}$$

NOTA: No caso da dízima apresentar parte inteira diferente de zero soma-se a parte inteira com a geratriz da dízima periódica. Exemplo:

Construir a geratriz da dízima periódica 3,444 .......

$$\text{Devemos ter: } 3{,}444\ldots\ldots = 3 + 0{,}444\ldots\ldots = 3 + \frac{4}{9} = = 3\frac{4}{9}$$

A geratriz de uma dízima periódica composta é determinada pela seguinte

REGRA: *Escreve-se uma fração que tenha para numerador a diferença entre o número formado pela parte não periódica acompanhada de um período e a parte não periódica, e, para denominador, um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

Exemplos:

Construir a geratriz da dízima 0,34848484 . . .

$$\text{Devemos ter: } 0{,}3484848\ldots = \frac{348-3}{990} = \frac{345}{990}$$

Verificação:

```
3450    | 990
 4800   |____________
 8400    0,3484848 . . .
 4800
  8400
```

Anàlogamente, podemos agora escrever uma dízima periódica composta, por exemplo: 0,3484848...... sob a forma:



$$0{,}3484848\ldots\ldots = \frac{3{,}484848\ldots.}{10} = \frac{3 + 0{,}484848\ldots.}{10} = \frac{3 + \dfrac{48}{99}}{10} =$$

$$= \frac{\dfrac{3\times 99+48}{99}}{10} = \frac{3\times 99+48}{990} = \frac{3\times(100-1)+48}{990} = \frac{300-3+48}{990} = \frac{348-3}{990}$$

NOTA: Caso exista a parte inteira, procede-se como no caso anterior. Exemplo:

Construir a geratriz da dízima 5,27333 .......

$$\text{Devemos ter: } 5{,}27333\ldots. = 5\,\frac{273-27}{900} = 5\,\frac{246}{900}$$

OBSERVAÇÃO: As dízimas periódicas de período 9, como por exemplo 0,9999...... e 17,34999...... denominadas *puras* e *mista*, respectivamente, *não têm geratrizes* no sentido até agora estudado.

**5. Expressões aritméticas envolvendo dízimas periódicas.** O cálculo dessas expressões é feito substituindo-se as dízimas pelas respectivas geratrizes. Exemplos:

1) Efetuar $0{,}\overline{42} + 3{,}2\dot{1}$

Construindo as respectivas geratrizes, temos:

$$0{,}\overline{42} = \frac{42}{99} \quad \text{e} \quad 3{,}2\dot{1} = 3\,\frac{21-2}{90} = 3\,\frac{19}{90} = \frac{289}{90}$$

$$0{,}\overline{42} + 3{,}2\dot{1} = \frac{42}{99} + \frac{289}{90} =$$

$$= \frac{420 + 3\,179}{990} = 3\,\frac{629}{990}$$

2) Efetuar: $5{,}\overline{34} : 0{,}\dot{8}$

$$\text{Como: } 5{,}34 = 5\,\frac{34}{99} \quad \text{temos: } 5\,\frac{34}{99} : 0{,}\dot{8} = \frac{529}{99} : \frac{8}{9} =$$

$$= \frac{529}{99} \times \frac{9}{8} = 6\,\frac{1}{88}.$$

3) Efetuar: $1{,}21 + 0{,}\dot{3} \times \dfrac{1}{0{,}\dot{1}}$

$$\text{Temos: } 1\,\frac{21}{99} + \frac{1}{3} \times 9 = \frac{120}{99} + 3 = \frac{120 + 297}{99} = 4\,\frac{21}{99}.$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS DECIMAIS

1. Representar com algarismos arábicos os seguintes números decimais:
   1.º) três unidades e cinqüenta e oito centésimos;
   2.º) duzentos e trinta e seis centésimos milésimos;
   3.º) quarenta e uma unidades e duzentos e vinte mil e treze milionésimos.

2. Fazer a leitura dos seguintes números decimais;
   1.º) 0,0101; 2.º) 32,53; 3.º) 0,00050001.

3. Transformar em números decimais as frações:
   1.º) $\frac{541}{1\,000}$; 2.º) $\frac{832}{100}$; 3.º) $\frac{23}{10\,000\,000}$ 4.º) $\frac{8}{100\,000}$.

4. Multiplicar por 10, 100 e 1 000, respectivamente, os seguintes números decimais;
   1.º) 2,43; 2.º) 0,0391; 3.º) 1,21.

5. Dividir por 10, 100 e 1 000, respectivamente, os seguintes números decimais:
   1.º) 398,251; 2.º) 0,0391; 3.º) 2,39.

6. Efetuar as seguintes *adições:*
   1.º) $12{,}1 + 0{,}0039 + 1{,}98$;
   2.º) $432{,}391 + 0{,}01 + 8 + 22{,}39$;
   3.º) $0{,}003 + 101{,}6 + 0{,}5$.

7. Efetuar as seguintes *subtrações:*
   1.º) $6{,}03 - 2{,}9456$; 2.º) $1 - 0{,}34781$; 3.º) $142{,}2 - 0{,}9988765$.

8. Calcular o valor das *expressões:*
   1.º) $(4{,}3 + 0{,}912) - (10 - 9{,}813)$;
   2.º) $\left(3{,}069 + \frac{32}{1\,000}\right) - \left(3\frac{1}{10} + 0{,}001\right)$.

9. Efetuar as seguintes *multiplicações:*
   1.º) $4{,}31 \times 0{,}012$; 2.º) $1{,}2 \times 0{,}021 \times 4$; 3.º) $\frac{41}{100} \times 3{,}01$.

10. Calcular o valor das *potências:*
   1.º) $(0{,}04)^3$; 2.º) $(2{,}31)^2$; 3.º) $(0{,}001)^4$; 4.º) $\left(\frac{11}{100}\right)^2$.





11. Calcular os seguintes *quocientes aproximados por falta:*
   1.º) 56 por 17 a menos de $\frac{1}{100}$;
   2.º) 3,9 por 2,5 a menos de $\frac{1}{10}$;
   3.º) 5 por 7 a menos de 0,001;
   4.º) 42,7 por 0,315 a menos de 0,01;
   5.º) 0,0321 por 1,27 a menos de 0,001.

12. Converter em números decimais exatos ou periódicos, as seguintes frações:
   1.º) $\frac{3}{4}$; 3.º) $\frac{5}{11}$; 5.º) $\frac{27}{75}$; 7.º) $\frac{13}{125}$; 9.º) $\frac{7}{6}$;
   2.º) $\frac{8}{3}$; 4.º) $\frac{11}{200}$; 6.º) $\frac{50}{99}$; 8.º) $\frac{1}{50}$; 10.º) $\frac{18}{74}$.

13. Indicar, sem efetuar as operações, quais são entre as seguintes frações ordinárias, as redutíveis a decimais exatas ou periódicas:
   1.º) $\frac{10}{24}$; 2.º) $\frac{7}{15}$; 3.º) $\frac{36}{48}$; 4.º) $\frac{9}{64}$; 5.º) $\frac{4}{50}$; 6.º) $\frac{3}{11}$.

14. Escrever as *geratrizes* das seguintes dízimas periódicas:
   1.º) $0{,}\dot{7}$; 3.º) $0{,}85\overline{34}$; 5.º) $5{,}143\overline{21}$; 7.º) $22{,}3\overline{001}$; 9.º) 1,202;
   2.º) $3{,}\overline{45}$; 4.º) 2,03; 6.º) $0{,}00\overline{16}$; 8.º) $0{,}01001\overline{002}$; 10.º) $0{,}0\overline{415}$.

15. Calcular o valor das *expressões:*
   1.º) $0{,}\overline{31} + 0{,}0\dot{1}$;
   2.º) $0{,}\overline{345} + 3{,}\dot{2} \times \frac{4}{0{,}3\dot{1}}$
   3.º) $\left[(0{,}\overline{30} - 0{,}\overline{16}) : 0{,}\dot{7} + 1{,}\dot{4} \times \frac{9}{13}\right] : \frac{13}{11}$;
   4.º) $\dfrac{3{,}\overline{25} - 2{,}0\dot{1}}{5{,}6\overline{23} - 0{,}\overline{32} \times \frac{99}{16}}$

RESPOSTAS:

1. 1.º) 3,58; 2.º) 0,00236; 3.º) 41,220013.

2. 1.º) cento e um décimos milésimos; 2.º) 32 unidades e 53 centésimos; 3.º) 500 mil e 1 centésimo milionésimo.

3. 1.º) 0,541; 2.º) 8,32; 3.º) 0,0000023; 4.º) 0,00008.

4. 1.º) 432; 2.º) 3,91; 3.º) 1,210.

5. 1.º) 39,8251; 2.º) 0,000391; 3.º) 0,00239.

6. 1.º) 14,0839; 2.º) 462,791; 3.º) 102,103.

7. 1.º) 3,0844; 2.º) 0,65219; 3.º) 141,2011235:

8. 1.º) 5,025; 2.º) 0.

9. 1.º) 0,05172; 2.º) 0,1008; 3.º) 1,2341.

10. 1.º) 0,000064; 2.º) 5,3361; 2.º) 0,000000000001; 4.º) 0,0121.

11. 1.º) 3,29; 2.º) 1,5; 3.º) 0,714; 4.º) 135,55; 5.º) 0,025.

12. 1.º) 0,75; 3.º) $0,\overline{45}$; 5.º) $0,3\overline{6}$; 7.º) 0,104; 9.º) $1,1\dot{6}$;
2.º) $2,\dot{6}$; 4.º) 0,055; 6.º) $\underline{0,50}$; 8.º) 0,02; 10.º) $0,\overline{243}$

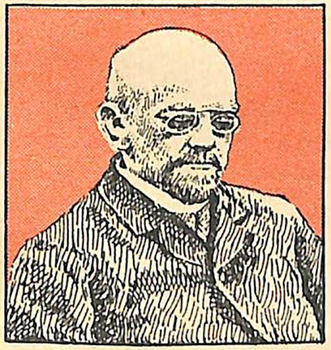
13. 1.º) periódica; 2.º) periódica; 3.º) exata; 4.º) exata; 5.º) exata; 6.º) periódica.

14. 1.º) $\frac{7}{9}$; 3.º) $\frac{8\,449}{9\,900}$; 5.º) $5\frac{14\,178}{99\,000}$; 7.º) $22\frac{1\,499}{4\,995}$; 9.º) $1\frac{91}{450}$;
2.º) $3\frac{45}{99}$; 4.º) $2\frac{1}{30}$; 6.º) $\frac{4}{2\,475}$; 8.º) $\frac{1\,000\,001}{99\,900\,000}$; 10.º) $\frac{83}{1\,998}$.

15. 1.º) $\frac{107}{330}$; 2.º) $41\frac{1804}{2331}$; 3.º) 1; 4.º) $\frac{1\,229}{3\,587}$.

## *Dois grandes estudiosos da Geometria.*

**EUCLIDES.** Viveu 300 anos antes de Cristo. Cognominado o *príncipe dos geômetras* foi, sem favor algum, o responsável por todo êsse esquema da geometria que, ainda hoje, estudamos no ginásio sob o nome de *Geometria Euclideana*. Reuniu tôda a maravilhosa Matemática grega (de Tales, Pitágoras, Eudoxio, . . . ) num dos maiores livros de todos os tempos: "*Os Elementos*" superado em edições sòmente pela Bíblia.



**HILBERT.** (1862-1943) — Construiu a geometria sôbre um sistema completo de *axiomas* (proposições que se aceitam como verdadeiras), os mais simples possíveis, deduzindo importantes *teoremas* sem se apegar aos elementos físicos que nos rodeiam. Assim, um *cego* pode perfeitamente estudar a maravilhosa geometria partindo desta sensacional frase de Hilbert: *pensemos em três coisas diferentes; chamemos a primeira de* PONTO, *a segunda de* RETA *e a terceira de* PLANO.

CAPÍTULO IV

# Sistema legal de unidades de medir
# Unidades e medidas usuais

## SISTEMA MÉTRICO DECIMAL. SISTEMA DE MEDIDAS NÃO DECIMAIS

**1. Grandezas.** Todos sabemos o que seja uma grandeza. Desde o curso primário estamos lidando com grandezas como, os comprimentos, as áreas, os volumes, um grupo de objetos, etc.

As grandezas de mesma espécie são chamadas *homogêneas* e as de espécies diferentes *heterogêneas*. Exemplos:

Dois *comprimentos* constituem grandezas homogêneas.

Um *comprimento* e uma *área* constituem grandezas heterogêneas.

Para se ter uma idéia precisa de uma dada grandeza costumamos compará-la com uma outra grandeza conhecida, *da mesma espécie*, denominada *unidade de medida*. Entre as unidades de medidas são escolhidas algumas como principais, das quais derivam outras maiores ou menores.

As unidades de medidas tomadas como principais são chamadas *unidades fundamentais* ou *padrões* e os seus múltiplos e submúltiplos são denominados *unidades secundárias* ou *derivadas*.

**2. Medida de uma grandeza.** *Medir* uma grandeza significa procurar *quantas vêzes* a unidade de medida escolhida como fundamental está contida na grandeza dada. Caso essa unidade não esteja contida exatamente na grandeza que se quer medir, a medida diz-se *aproximada*. A medição de uma grandeza pode ser *direta* ou *indireta*, conforme se compare a grandeza, que se quer medir, direta ou indiretamente com a grandeza escolhida como unidade.

**3. Sistema de unidades de medir.** O conjunto de unidades fundamentais e de suas unidades secundárias constitui um *sistema de unidades de medir.*

**4. Sistema métrico decimal.** Entre os sistemas de unidades de medir destaca-se pela importância e facilidade de uso o *sistema métrico decimal*, que tem para unidade fundamental de comprimento o *metro* e para unidades secundárias os múltiplos e submúltiplos do metro em *relações decimais.*

Desse sistema, as unidades de superfície, volume e massa (pêso) estão em relações com o metro. Daí o seu uso quase universal, adotado, inicialmente na França, em 1799, e, no Brasil, a partir de 20 junho de 1862 (*).

O sistema métrico decimal é o único legal e de uso obrigatório entre nós, devido aos graves inconvenientes decorrentes do uso dos velhos sistemas de medidas que escolhiam arbitràriamente os múltiplos e submúltiplos das unidades tomadas como fundamentais.

Escolhendo múltiplos e submúltiplos nas relações 10, 100, 1 000, etc. o sistema métrico decimal facilitou enormemente os cálculos que assim se enquadraram no mesmo critério decimal usado na própria representação dos números.

São consideradas legais, no Brasil (**), as unidades baseadas no sistema métrico decimal e nas resoluções das Conferências Gerais de Pesos e Medidas, reunidas por fôrça da Convenção Internacional do Metro, de 20 de Maio de 1875, bem como as que se derivem das referidas unidades.

Para as grandezas, adiante indicadas, são legais as seguintes unidades fundamentais:

Para *comprimento:* o ***metro;***
Para *massa:* o ***quilograma;***
Para *tempo:* o ***segundo.***

(*) Legislação Metrológica. I.P.T. — São Paulo — 1949 — Pág. II.

(**) Regulamento do sistema legal de unidades de medir. Decreto n.º 4257, de 16 de Junho de 1939.



## § 1. Unidades de comprimento.

**1.** A unidade fundamental de comprimento é o *metro.*

*Metro é o comprimento aproximadamente igual à fração* $\frac{1}{10\,000\,000}$ *da distância do equador ao pólo* (fig. 9).

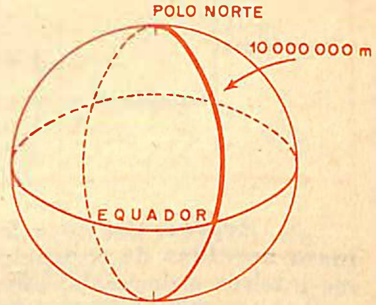



Fig. 9

A fim de servir como modêlo para todos os países que o adotaram como unidade, foi construído um *metro de platina iridiada*, (liga com 90% de platina e 10% de irídio), com bastante precisão, e depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, em Paris.(*)

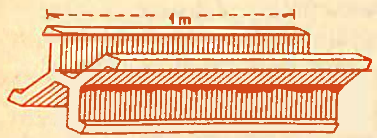



Fig. 10

No Rio de Janeiro, a Universidade do Brasil possui uma cópia fiel dêsse metro modêlo (fig. 10).

Símbolo do metro: *m.*

Coloquemos num quadro as *unidades secundárias de comprimento*, que são os múltiplos e submúltiplos do metro que variam de 10 em 10, isto é, cada unidade vale 10 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.

Para a medida de comprimentos marítimos emprega-se a *milha marítima* (**) (*M*) cujo valor é de 1 852 m.

(*) O Conselho Consultivo para *Definição do Metro*, recentemente (10/3/1959) baixou resolução, segundo a qual o padrão internacional de comprimento não seria mais a barra de platina iridiada e sim um *comprimento de onda* emitido por um isótopo de *Krypton*, de pêso atômico 86, que é cêrca de 100 vêzes mais preciso.

(**) Milha marítima (M) é o comprimento de um arco de 1' (um minuto ângulo do meridiano terrestre).

| UNIDADES | | NOMENCLATURA | SÍMBOLOS | VALORES EM METRO |
|---|---|---|---|---|
| *Fundamental*........... | | metro (*) | *m* | 1 |
| *Secundárias* | Múltiplos... | decâmetro | *dam* | 10 |
| | | hectômetro | *hm* | 100 |
| | | quilômetro | *km* | 1 000 |
| | Submúltiplos | decímetro | *dm* | 0,1 |
| | | centímetro | *cm* | 0,01 |
| | | milímetro | *mm* | 0,001 |
| | | mícron | $\mu$ | 0,000001 |
| | | milimícron | $m\mu$ | 0,000000001 |

**2. Representação e leitura dos números que exprimem medidas de comprimento.** Representam-se os números inteiros e decimais, escrevendo-se à direita o símbolo da unidade correspondente. A leitura da medida é completada acrescentando o nome relativo ao símbolo usado. Exemplos:

8 m lê-se: 8 metros.

13,25 hm lê-se: 13 hectômetros e 25 centésimos de hectômetro ou 13 hectômetros e 25 metros.

0,03 dm lê-se: 3 centésimos de decímetro ou 3 milímetros.

**3. Mudança de unidade.** Para se passar de uma certa unidade para outra que lhe seja menor, desloca-se a vírgula para à direita de tantas casas quantos são os espaços que separam as duas unidades na série:

*km, hm, dam, m, dm, cm, mm.*

usando *zeros* para as posições vagas.

(*) *Definição legal do metro:* é a distância, à temperatura de 0ºC, dos eixos dos dois traços médios, gravados sôbre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro pela primeira Conferência Geral de Pêso e Medida, estando submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de 1 cm, situados simètricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro.

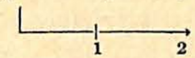
NOTA: É visível a dificuldade encontrada pelos alunos na definição legal do metro, pois, nessa definição faz-se alusão a uma distância entre os rolos suportes de 571 milímetros ou seja 571 milésimos do *metro*, que é precisamente a medida que se quer definir. Também na referência à pressão atmosférica normal, que corresponde à pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 760 milímetros de altura a 0ºC, já se pressupõe conhecido o metro.



A passagem para uma unidade maior é feita com o deslocamento da vírgula para à esquerda. Exemplos:

1.º) Reduzir 256,385 hm a metros.

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm

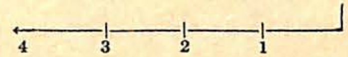



devemos deslocar a vírgula duas casas para à direita.

Logo: 256,385 hm = 25638,5 m.

2.º) Reduzir 4832,6 dm a quilômetros.

Como: km, hm, dam, m, dm, cm, mm




devemos deslocar a vírgula quatro casas para a esquerda.

Logo: 4832,6 dm = 0,48326 km.

3.º) Dizer quantos metros existem em 8 cm.

Como: 1 cm = 0,01 m
temos: 8 cm = 0,08 m.

4.º) Exprimir 3,459 dam em m, dm, cm, mm e $\mu$.

Temos: 3,459 dam = 34,59 m = 345,9 dm = 3 459 cm = = 34 590 mm = 34 590 000 $\mu$.

**4. Medida dos comprimentos de linhas poligonais e da circunferência.** Já é do conhecimento dos alunos, de acôrdo com os programas oficiais estudados nos cursos primários, o conceito intuitivo de *semi-retas, segmentos de retas* e das *principais figuras geométricas planas e do espaço.*

Chama-se *linha poligonal* ou simplesmente *poligonal* (fig. 11) ao conjunto de segmentos de reta consecutivos, não pertencentes à mesma reta, tais que a extremidade do primeiro coincida com a origem do segundo, a extremidade do segundo com a origem do terceiro e assim por diante.

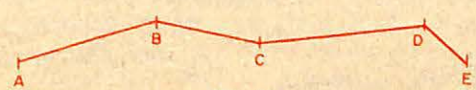



Fig. 11

a) *Determinação do comprimento de uma linha poligonal.*

Chama-se *perímetro* de uma linha poligonal a *soma dos comprimentos* de todos os segmentos que a compõem. O comprimento de uma linha poligonal é dado pelo seu perímetro Exemplo: Calcular o perímetro da poligonal, cujos segmentos componentes, medem respectivamente:

$\overline{AB} = 6$ cm; $\overline{BC} = 4$ cm; $\overline{CD} = 7$ cm; $\overline{ED} = 9$ cm

Temos:

$$\text{perímetro} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{ED}$$

ou
$$\text{perímetro} = 6\text{ cm} + 4\text{ cm} + 7\text{ cm} + 9\text{ cm}$$

$$\text{perímetro} = 26\text{ cm.}$$

*Resposta:* O perímetro da poligonal é igual a 26 cm.

Se a poligonal fôr *fechada*, isto é, a extremidade do último segmento coincide com a origem do primeiro, a figura geométrica plana limitada por essa poligonal é denominada *polígono* (fig. 12).

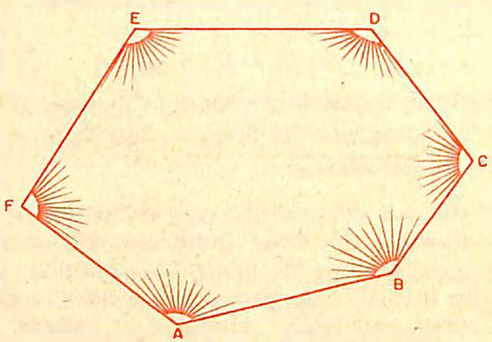


Fig. 12

O polígono recebe denominações especiais de acôrdo com o número de lados que possui (figuras: 13, 14 e 15).

Assim, o polígono de 3 lados recebe o nome de *triângulo;* de 4 lados *quadrilátero;* de 5 lados *pentágono;* de 6, *hexágono;* de 7, *heptágono;* de 8, *octógono;* de 9, *eneágono;* de 10, *decágono;* de 11, *undecágono;* de 12, *dodecágono;* de 15, *pentadecágono;* de 20, *icoságono.*



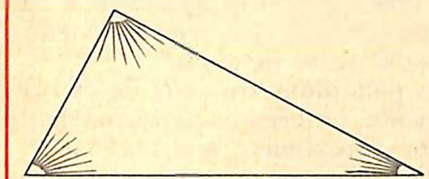


Fig 13

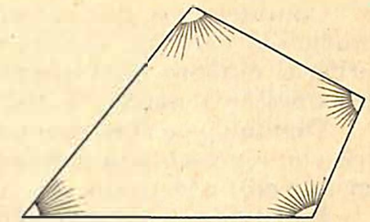


Fig. 14

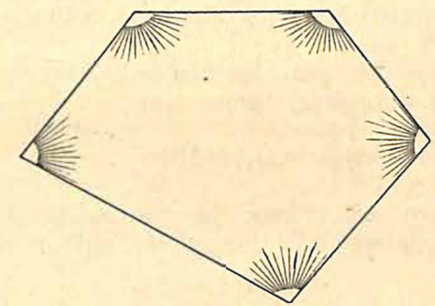


Fig. 15

Chama-se *diagonal* de um polígono o segmento de reta cujos extremos são vértices, não consecutivos, do polígono.

Diz-se que um polígono é *regular* quando possui *todos* os seus *lados iguais* assim como *todos* os seus *ângulos.*

Chama-se *apótema* de um polígono regular a distância do centro do polígono a um de seus lados (fig. 16).

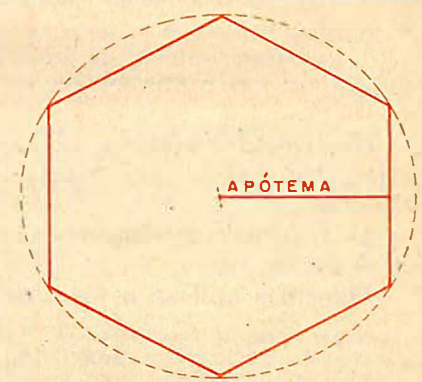


Fig. 16

b) *Determinação do comprimento de uma circunferência.*

Consideremos, por exemplo, uma roda de bicicleta. Contornêmo-la com um barbante que fique bem ajustado à sua periferia e sôbre uma régua procuremos ler, com a melhor aproximação possível, o resultado dessa medida.

Dividindo-se êsse resultado pelo diâmetro ($2R$) da circunferência, representada por essa roda, obteremos para quociente um número, não exato, de valor aproximado a 3,1415926 . . .

Repetindo-se a experiência com outras circunferências representadas por outras rodas, ou arcos de barris, notaremos que os quocientes entre as medidas de seus contornos e dos respectivos diâmetros é *sempre o mesmo*, valendo aproximadamente 3,1415926 . . .

Indicando por $C$ o comprimento de qualquer circunferência e por $2R$ o seu diâmetro, temos que

$$\frac{C}{2R} = 3{,}1415926\ldots$$

Êsse número *não exato*, já conhecido dos antigos, é indicado com a letra "$\pi$", que se lê "pi", e pertencente ao alfabeto grego.

Logo: $$\frac{C}{2R} = \pi$$

ou $\quad C = 2R \times \pi \quad$ ou $\quad C = 2 \cdot \pi \cdot R \quad$ isto é:

**o comprimento de uma circunferência é dado pelo produto de seu diâmetro por $\pi$**

Nos cálculos práticos, o valor de $\pi$ é tomado com um êrro menor que 0,000 1 por excesso, isto é, com o valor 3,1416.

Exemplos:

1) Calcular o comprimento de uma circunferência que tem 5 cm de raio.

Devemos aplicar a fórmula:

$$C = 2 \times \pi \times R$$

ou $$C = 2 \times 3{,}1416 \times 5 \text{ cm}$$

Logo: $$C = 31{,}416 \text{ cm.}$$



2) Determinar o valor do raio de uma circunferência, cujo comprimento é 12,5664 cm.

Como $C = 2 \cdot \pi \cdot R$, segue-se que dividindo-se o valor do comprimento (C = 12,5664 cm) por $\pi$ (3,1416) encontramos o diâmetro ($2R$). Dividindo-se o diâmetro por 2 encontramos o raio ($R$).

Cálculos: 12,5664 cm : 3,1416 = 4 cm
4 cm : 2 = 2 cm

*Resposta:* O raio vale 2 cm.

## EXERCÍCIOS SÔBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO

1. Escrever sob a forma decimal, exprimindo em *hm* e *dm*, as seguintes medidas:
   1.º) 9 km e 12 cm; 3.º) 35 hm 42 m e 5 dm;
   2.º) 58 m e 8 mm; 4.º) 12 dam 5 dm e 2 cm.
2. Reduzir:
   1.º) 132,38 km a dm; 3.º) 12,25 km a m;
   2.º) 0,032 m a hm; 4.º) 4,392 dam a cm.
3. Dizer:
   1.º) Quantos metros existem em 5 decímetros?
   2.º) Um decâmetro quantos milímetros tem?
   3.º) Quantos centímetros existem num hectômetro?
4. Exprimir, em número decimais de *metros*, as seguintes medidas:
   1.º) $\frac{1}{4}$ km; 2.º) $\frac{3}{8}$ hm; 3.º) $7\frac{5}{8}$ cm; 4.º) $\frac{216}{625}$ m;
5. Efetuar as operações seguintes, exprimindo os resultados em *km* e *cm*;
   1.º) 21,32 hm + 309 dm + 0,0152 km + 432,52 m + 1 235 dam
   2.º) (48,392 km − 832 dam) + [3,568 km − (8,01 hm − 223 m)]
   3.º) 4,32 cm × 12
   4.º) 131,89 hm + (8,32 km − 5,2 dam) × 10
   5.º) 85,256 hm : 2,1314
   6.º) 0,3 × (89,5 km − 125 hm) + 12 km
6. O comprimento de uma estrada é de 38,41 km, de uma segunda é 256,15 hm e de uma terceira tanto quanto as duas primeiras juntas. Exprimir em *metros*, o comprimento das três estradas juntas.

7. Quanto dista, em *quilômetros*, a Terra da Lua, sabendo-se que essa distância equivale, em média, 60 raios terrestres? (Raio da Terra = = 6 370 000 m).

8. Um viajante percorreu em 7 horas, 33 600 metros. Quantos quilômetros fêz, em média, por hora?

9. O passo de um homem é cêrca de 0,80 m. Quanto tempo empregará êsse homem para percorrer 4,240 km de uma estrada, sabendo-se que anda à razão de 100 passos por minuto?

10. Uma senhora comprou 20 metros de fazenda à razão de Cr$ 84,00 o metro. Se esta fazenda foi medida com uma régua que era 1 cm mais curta que o metro verdadeiro, pergunta-se: 1.º) Quanto de fazenda a senhora recebeu? 2.º) Quanto pagou a mais?

11. Calcular o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 20 cm. (Usar $\pi$ com o valor 3,14).

12. Determinar o valor do raio de uma circunferência cujo comprimento é de 31,4 cm.

13. Calcular, em quilômetros, o percurso efetuado por uma carroça numa estrada, sabendo-se que as suas rodas (sòmente duas), que possuem 40 cm de raio, deram 4 300 voltas.

RESPOSTAS:

1. 1.º) 90,0012 hm = 90001,2 dm;
   2.º) 0,58008 hm = 580,08 dm;
   3.º) 35,425 hm = 35425 dm;
   4.º) 1,2052 hm = 1205,2 dm.

2. 1.º) 1323800 dm;
   2.º) 0,00032 hm;
   3.º) 12250 m;
   4.º) 4392 cm.

3. 1.º) 0,5 m;
   2.º) 10000 mm;
   3.º) 10000 cm.

4. 1.º) 250 m;
   2.º) 37,5 m;
   3.º) 0,07625 m;
   4.º) 0,3456 m.

5. 1.º) 14,96062 km = 1496062 cm;
   2.º) 43,072 km = 4307200 cm;
   3.º) 51,84 cm = 0,0005184 km;
   4.º) 95,869 km = 9586900 cm;
   5.º) 4 km = 400000 cm;
   6.º) 35,1 km = 3510000 cm.

6. 128 050 metros.

7. 382 200 quilômetros.

8. 4,8 quilômetros.

9. 53 minutos.

10. 1.º) 19,80 m;
    2.º) Cr$ 16,80.

11. 62,8 cm.

12. 5 cm.

13. 10,8016 quilômetros.



## § 2. Unidades de superfície.

**1. Área de uma superfície.** Chama-se *área* de uma superfície ao número que exprime a sua medida. A unidade legal de medida das superfícies é o *metro quadrado* que é a *área* de um quadrado de 1 m de lado.

Símbolo do metro quadrado: $m^2$.

Os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado são as *áreas dos quadrados que têm para lado os múltiplos e submúltiplos do metro*.

Assim, por exemplo, um decímetro quadrado, que se indica por 1 dm², é a área do quadrado que tem para lado 1 dm (fig. 17).

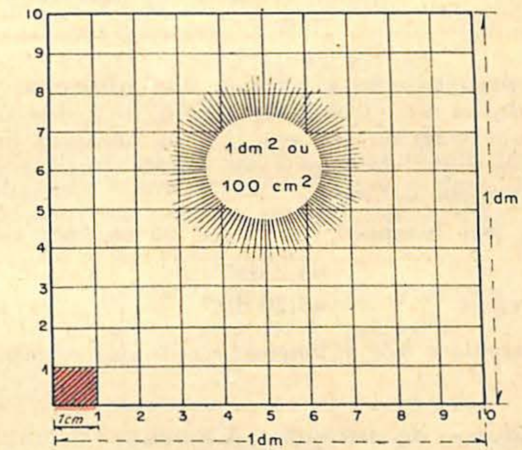



Fig. 17

Como: 1 dm = 10 cm, dividindo-se dois lados consecutivos de um quadrado em 10 partes iguais e traçando-se paralelas aos lados, obteremos 100 quadrados menores cada um dêles tendo 1 cm de lado e portanto 1 cm² de área.

Logo: $1\ dm^2 = 100\ cm^2$ e dizemos que

**as unidades de superfície variam de 100 em 100, isto é, cada unidade vale 100 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.**

O quadro correspondente às unidades de superfície é:

| UNIDADES | | NOMENCLATURA | SÍMBOLOS | VALORES EM $m^2$ |
|---|---|---|---|---|
| *Fundamental* | | metro quadrado | $m^2$ | 1 |
| *Secundárias* | Múltiplos | decâm. quadrado | $dam^2$ | 100 |
| | | hectôm. quadrado | $hm^2$ | 10000 |
| | | quilôm. quadrado | $km^2$ | 1 000 000 |
| | Submúltiplos | decím. quadrado | $dm^2$ | 0,01 |
| | | centím. quadrado | $cm^2$ | 0,0001 |
| | | milím. quadrado | $mm^2$ | 0,000001 |

**2. Representação e leitura dos números que exprimem medidas de superfície.** Pelo fato das unidades de superfície variarem de 100 em 100, os números decimais que exprimem medidas de superfície devem possuir um *número par de algarismos decimais.*

Assim, por exemplo, ao invés de se escrever

$$43{,}2 \text{ dm}^2,$$

deve-se escrever $43{,}20 \text{ dm}^2$

e lê-se: *quarenta e três decímetros quadrados e vinte centímetros quadrados.*

**3. Mudança de unidade.** A mudança de unidade é feita agora deslocando-se a vírgula ***duas casas***, para a direita ou para a esquerda, segundo a redução seja feita para uma unidade de ordem imediatamente menor ou maior e suprindo de zeros, caso faltem algarismos. Exemplos:

1) Reduzir 34,5697 $dam^2$ a metros quadrados.

Como nessa redução devemos passar para *uma* unidade imediatamente inferior ($m^2$), basta deslocar a vírgula sòmente *duas* casas para a direita.

Logo: $34{,}5697 \text{ dam}^2 = 3456{,}97 \text{ m}^2$



2) Reduzir 126,80 $dm^2$ a decâmetros quadrados.

Dessa redução devemos passar para *duas* unidades imediatamente superiores ($m^2$ e $dam^2$) e portanto a vírgula deve ser deslocada de ***quatro*** casas para a esquerda.

Logo: $126{,}80 \text{ dm}^2 = 0{,}012680 \text{ dam}^2$.

3) Exprimir 19,0130 $m^2$ em $cm^2$, $dm^2$, $dam^2$, $hm^2$ e $km^2$

Devemos ter:

$$19{,}0130 \text{ m}^2 = 190130 \text{ cm}^2$$
$$19{,}0130 \text{ m}^2 = 1901{,}30 \text{ dm}^2$$
$$19{,}0130 \text{ m}^2 = 0{,}190130 \text{ dam}^2$$
$$19{,}0130 \text{ m}^2 = 0{,}00190130 \text{ hm}^2$$
$$19{,}0130 \text{ m}^2 = 0{,}0000190130 \text{ km}^2$$

**4. Medidas agrárias.** Para as medidas de superfícies de campos, utilizamos como unidades o $hm^2$, o $dam^2$ e o $m^2$ com os nomes respectivamente de *hectare, are, centiare.*

Os símbolos e os valores são:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| hectare......... | (ha) | = hectômetro quadrado | = | 10 000 $m^2$. |
| are............. | ( a ) | = decâmetro quadrado | = | 100 $m^2$. |
| centiare........ | (ca) | metro quadrado | = | 1 $m^2$. |

É lógico que:

1 hectare = 100 ares ou 1 ha = 100 a
1 centiare = 0,01 ares ou 1 ca = 0,01 a

A mudança de unidade é feita da mesma forma que nas medidas de superfície: Exemplos:

1) Reduzir 32,5 *a* a centiares.

Devemos ter: 32,5 a = 3 250 ca.

2) Reduzir 0,689 ca a hectares.

Temos: 0,689 ca = 0,0000689 ha.

### EXERCÍCIOS SÔBRE MEDIDAS DE SUPERFÍCIES

1. Escrever sob forma decimal, exprimindo em $dam^2$ e $dm^2$, as seguintes medidas:
   1.°) 5 $hm^2$ e 18 $dm^2$; 3.°) 4 $km^2$, 35 $dam^2$ e 12 $cm^2$.
   2.°) 39 $m^2$ e 15 $mm^2$. 4.°) 56 ha, 8a e 13 ca.
2. Reduzir:
   1.°) 4,32 $km^2$ a $m^2$; 3.°) 121,01 $cm^2$ a $dam^2$.
   2.°) 2534,20 $dm^2$ a $hm^2$. 4.°) 42 ca a ha.
3. Exprimir, em números decimais de *metros quadrados*, as seguintes medidas:
   1.°) $\frac{3}{4}$ $dam^2$; 2.°) $5\frac{1}{2}$ $km^2$; 3.°) $\frac{7}{8}$ $m^2$; 4.°) $\frac{432}{400}$ $hm^2$.
4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em $m^2$:
   1.°) 42,35 $dam^2$ + 0,0181 $km^2$ + 4 351 $m^2$ + 2,01 $hm^2$.
   2.°) 131,25 $dam^2$ − 9 835, 10 $m^2$.
   3.°) 8 400 $km^2$ × 10.
   4.°) 3 525,21 $m^2$ + 3,815 $hm^2$ × 0,5.
   5.°) 12,30 $km^2$ : 300.
   6.°) 1,90 × (3,21 $m^2$ − 15,35 $dm^2$).
5. Dizer:
   1.°) Quantos decímetros quadrados existem em um quilômetro quadrado?
   2.°) Um decâmetro quadrado quantos quilômetros quadrados têm?
6. Num país de superfície igual a 8 500 000 $km^2$ tem uma população de 51 milhões de habitantes. Qual é a população dêsse país por $km^2$?
7. A superfície de 5 $mm^2$ da pele humana contém cêrca de 1 440 000 poros. Quantos poros contém a pele de um homem de mediana estatura, cuja superfície se aproxima de 1,50 $m^2$?
8. Um terreno tem uma superfície de 39,68*a*. A quarta parte dêsse terreno foi vendida à razão de Cr$ 50,00 o $m^2$ e o restante a Cr$ 45,00 o $m^2$. Qual foi o preço total da venda?
9. Um sítio de área a 10 *ha* de superfície tem $\frac{1}{5}$ dessa área destinada a pomar, $\frac{1}{4}$ para plantar cereais, $\frac{1}{25}$ para horta e a parte restante da área é destinada para a instalação de uma granja. Qual é em $m^2$ a área destinada à granja?
10. Um Estado tem uma população de 5 550 000 habitantes e uma média de 50 habitantes por $km^2$. Qual é a sua superfície?



RESPOSTAS:

1. 1.°) 500,0018 $dam^2$ = 5000018 $dm^2$;
   2.°) 0,39000015 $dam^2$ = 3900,0015 $dm^2$;
   3.°) 40035,000012 $dam^2$ = 400350000,12 $dm^2$;
   4.°) 5608,13 $dam^2$ = 56081300 $dm^2$.
2. 1.°) 4320000 $m^2$; 3.°) 0,00012101 $dam^2$;
   2.°) 0,00253420 $hm^2$; 4.°) 0,0042 ha.
3. 1.°) 75 $m^2$; 2.°) 5500000 $m^2$; 3.°) 0,8750 $m^2$; 4.°) 10800 $m^2$.
4. 1.°) 4,6786 $hm^2$; 4.°) 2,260021 $hm^2$;
   2.°) 0,328990 $hm^2$; 5.°) 4,10 $hm^2$;
   3.°) 8400000 $hm^2$; 6.°) 0,0005807350 $hm^2$.
5. 1.°) 100000000; 2.°) 0,0001.
6. 6 habitantes.
7. 432 × $10^9$.
8. Cr$ 183 520,00.
9. 51000 $m^2$.
10. 111000 $km^2$.

## § 3. Áreas das principais figuras geométricas planas.

**1. Retângulo.** *A área do retângulo é igual ao produto da base pela altura* (fig. 18).

***Área do retângulo = base × altura***

*Base* de um retângulo é qualquer um de seus lados;

*Altura* de um retângulo é a distância entre a base e o lado oposto.

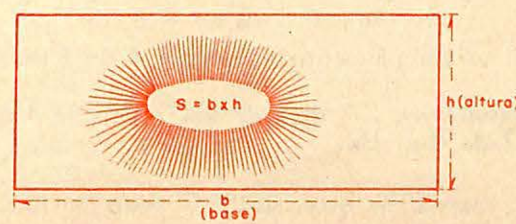



Fig. 18

Indicando a base por $b$; a altura por $h$ e a área por $S$, temos a seguinte igualdade:

$$\boxed{S = b \times h}$$

denominada *fórmula da área do retângulo.*

APLICAÇÕES:

1) Calcular a área de um retângulo que tem 3,56 dm de base e 22 cm de altura.

Reduzem-se, primeiramente, a base e a altura na mesma unidade de medida, isto é,

base = 3,56 dm
altura = 22 cm = 2,2 dm

Aplicando a fórmula

$$S = b \times h$$

temos:

$$S = 3{,}56 \text{ dm} \times 2{,}2 \text{ dm}$$
$$S = 7{,}8320 \text{ dm}^2$$

2) Um retângulo tem 96 cm² de área. Sabendo-se que a base mede 12 cm, calcular o comprimento da altura.

Como:

$$\begin{array}{ccccc} S & = & b & \times & h \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 96 \text{ cm}^2 & = & 12 \text{ cm} & \times & h \end{array}$$

segue-se que a altura $h$ é obtida dividindo-se a área 96 cm² pela base 12 cm, isto é,

$$96 \text{ cm}^2 : 12 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Logo: o comprimento da altura é de 8 cm.

**2. Quadrado.** *A área de um quadrado é igual ao quadrado do lado* (fig. 19).

***Área do quadrado = lado × lado***



No quadrado a *base* é igual a *altura.*

Fórmula:

$$\boxed{S = l^2}$$

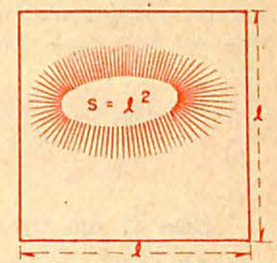



Fig. 19

APLICAÇÃO:

Calcular a área de um quadrado que tem 15 cm de lado.

Aplicando-se a formula:

$$S = l^2$$

temos:

$$S = (15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$$

**3. Paralelogramo.** *A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura* (fig. 20).

***Área do paralelogramo = base × altura***

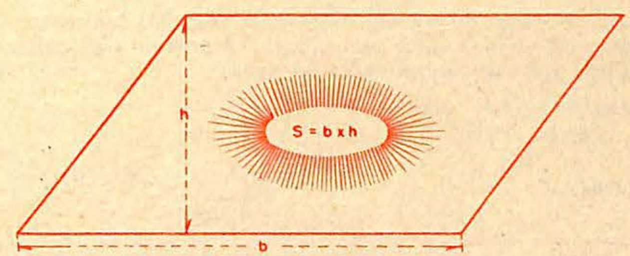



Fig. 20

Fórmula:

$$\boxed{S = b \times h}$$

**4. Triângulo.** *A área do triângulo é igual ao semi-produto da base pela altura* (fig. 21).

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

*Base* de um triângulo é qualquer um de seus lados;

*Altura* de um triângulo é a distância entre a base e o vértice oposto.

Fórmula:

$$\boxed{S = \frac{b \times h}{2}}$$

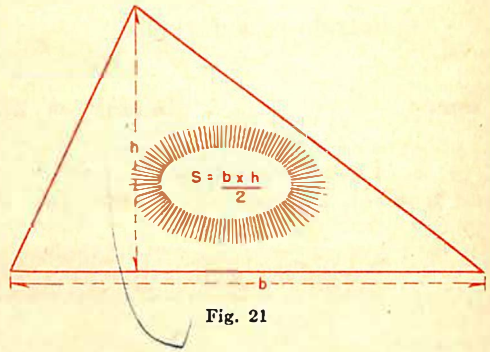



Fig. 21

NOTA: No caso do *triângulo retângulo*, (fig. 22) um cateto pode ser considerado como base e outro como altura. A área do triângulo retângulo será portanto igual ao *semi-produto dos catetos*.

Fórmula:

$$\boxed{S = \frac{b \times c}{2}}$$

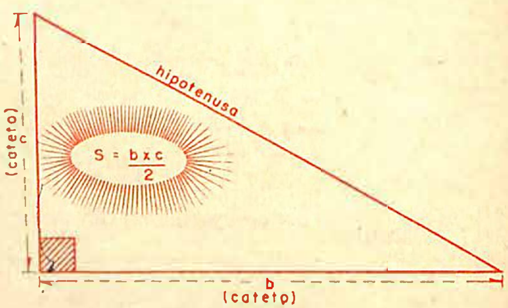



Fig. 22



**5. Trapézio.** *A área de um trapézio é igual ao produto da semi-soma das bases pela altura* (fig. 23).

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

Fórmula:

$$\boxed{S = \frac{b + b'}{2} \times h}$$

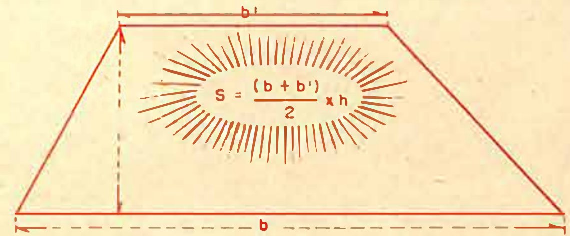



Fig. 23

APLICAÇÃO.

Calcular a área de um trapézio, cujas bases medem, respectivamente 16 cm e 12 cm e a altura 8 cm.

Aplicando-se a fórmula:

$$S = \frac{b + b'}{2} \times h$$

temos:

$$S = \frac{16\text{ cm} + 12\text{ cm}}{2} \times 8\text{ cm}$$

$$S = \frac{28\text{ cm}}{2} \times 8\text{ cm} = 14\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 112\text{ cm}^2$$

**6. Losango.** *A área do losango é igual ao semi-produto das diagonais* (fig. 24).

$$\text{Área do losango} = \frac{\text{diagonal maior} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

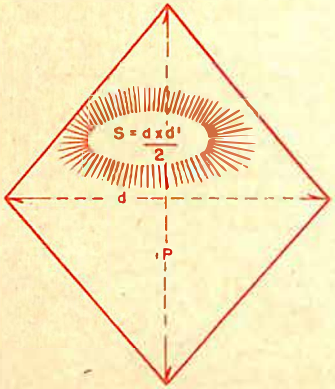



**Fig. 24**

Indicando as *diagonais* do losango, respectivamente, por $d$ e $d'$; a fórmula que dá a sua área é:

$$\boxed{S = \frac{d \times d'}{2}}$$

APLICAÇÃO:

As diagonais de um losango são, respectivamente, 14 dm e 6 dm. Determinar a sua área.

Com a fórmula:

$S = \dfrac{d \times d'}{2}$, temos: $S = \dfrac{14 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}}{2} = 42 \text{ dm}^2.$



**7. Área de um polígono qualquer.** Determina-se a área de um polígono qualquer decompondo-o em figuras de áreas conhecidas. A soma dessas áreas representa a área do polígono procurado.

APLICAÇÕES:

1.ª) Calcular a área do polígono abaixo (fig. 25).

Êsse polígono pode ser decomposto nas seguintes figuras geometricas de áreas conhecidas:

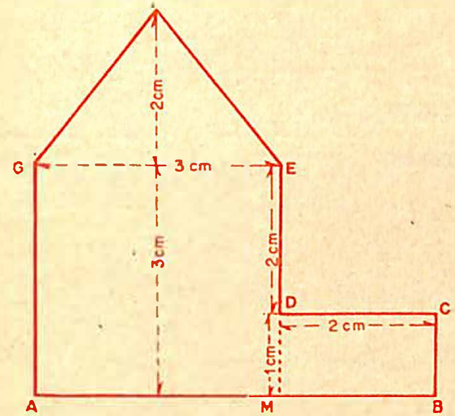



**Fig. 25**

QUADRADO *AMEG*:

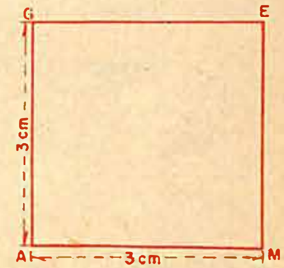



**Fig. 26**

TRIÂNGULO *FGE*:

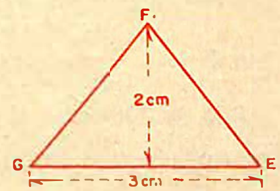



**Fig. 27**

RETÂNGULO *MBCD*:

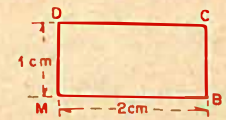



**Fig. 28**

$S_{\square} = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$  $S_{\triangle} = \dfrac{3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}^2$  $S_{\square} = 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$

*Área da figura tôda* $= 9 \text{ cm}^2 + 3 \text{ cm}^2 + 2 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$

2.ª) Calcular a área do polígono: *ABCDE* (fig. 29).

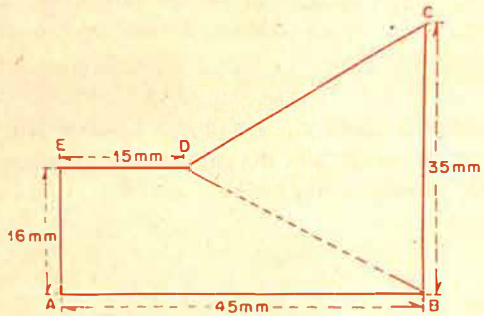



Fig. 29

Podemos decompô-lo nas figuras:

TRAPÉZIO *ABCD*:

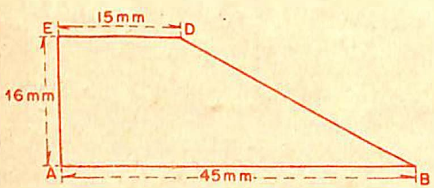



Fig. 30

TRIÂNGULO *BCD*:

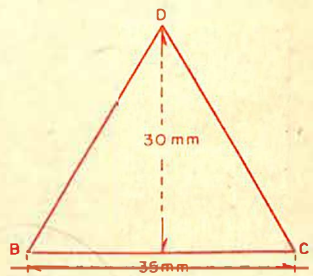



Fig. 31

$$S_{⏢} = \frac{45 \text{ mm} + 15 \text{ mm}}{2} \times 16 \text{ mm} \qquad S_{\triangle} = \frac{35 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}}{2}$$

$$S_{⏢} = 480 \text{ mm}^2 \qquad S_{\triangle} = 525 \text{ mm}^2$$

*Área da figura* ABCDE $= 480 \text{ mm}^2 + 525 \text{ mm}^2 = 1\,005 \text{ mm}^2$

OBSERVAÇÃO: A área de um *polígono regular* é igual ao semi-produto do perímetro pelo apótema.

$$\textbf{Área do polígono regular} = \frac{\textbf{perímetro} \times \textbf{apótema}}{2}$$



**8. Círculo.** *A área do círculo é igual ao produto de $\pi$ (pi) pelo quadrado do raio* (fig. 32).

***Área do círculo = "pi" × (raio)²***

Fórmula:

$$\boxed{S = \pi \times R^2}$$

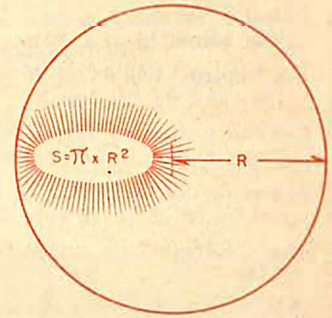



Fig. 32

APLICAÇÃO.

Calcular a área de um círculo de raio igual a 3 cm.

Usando a fórmula:

$S = \pi \times R^2$ e tomando $\pi$ com o valor: 3,1416

$S = 3{,}1416 \times (3 \text{ cm})^2$

$S = 3{,}1416 \times 9 \text{ cm}^2 = 28{,}2744 \text{ cm}^2$.

## EXERCÍCIOS SÔBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

1. Calcular a área do retângulo cujas dimensões são: base 4,5 m; altura 2,3 m.
2. O perímetro de um retângulo é igual a 32 dm e a base vale o triplo da altura. Qual é a sua área?
3. Calcular, em dam², a área das seguintes figuras:
   1.º) retângulo (base: 12,32dam; altura: 8dam).
   2.º) quadrado (lado: 4,21 dm).
   3.º) paralelogramo (base: 18,36 m; altura $= \frac{1}{3}$ do valor da base).
4. A área de um retângulo é igual a 12 dm². O dôbro de sua base vale 8 dm. Qual é o valor de sua altura?
5. Um quadrado tem 36 dm por perímetro. Qual é o valor de sua área?

6. Calcular a base de um retângulo sabendo-se que sua altura mede 9 m e sua área é a *mesma* que a de um quadrado de 12 m de lado.
7. Um losango tem as suas diagonais medindo respectivamente 12,35 dm e 8,4 dm. Calcular o valor de sua área em cm².
8. A área de um losango é igual a 72 dm² e uma de suas diagonais mede 60 cm. Quanto mede a outra?
9. Calcular, em dam², a área de um triângulo de base igual a 48,30 m e de altura igual a 12 m.
10. Um triângulo tem 64 m² de área e a sua altura é igual a 80 dm. Qual é o valor de sua base?
11. Calcular a área de um trapézio, sabendo-se que a base maior mede 3,8 m, a base menor 2,6 m e a altura 3,2 m.
12. A área de um trapézio, é de 150 cm² e as suas bases são, respectivamente, 18 cm e 12 cm. Calcular o valor de sua altura.
13. Qual é a área de um círculo de raio igual a 6 cm? (usar $\pi$ com o valor 3,14).
14. Calcular a área de um semi-círculo pertencente a uma circunferência de 20 dm de diâmetro.
15. Quanto se gastou para ladrilhar uma sala de 7,5 m de comprimento por 4,8 m de largura, sabendo-se que os ladrilhos usados são de forma quadrada, de 0,20 m de lado, e custaram Cr$ 300,00 o cento.
16. João tem uma propriedade em forma de trapézio, medindo as bases 718 m e 484 m, respectivamente, e a altura 520 m. No centro do terreno há um tanque de forma circular de 5 m de raio. A residência de João e um bosque ocupam nesse terreno uma área igual a 11 500m². Qual é a área do terreno disponível para se plantar?
17. Calcular a área das seguintes figuras, (33, 34 e 35), que se compõem de figuras planas de áreas conhecidas:

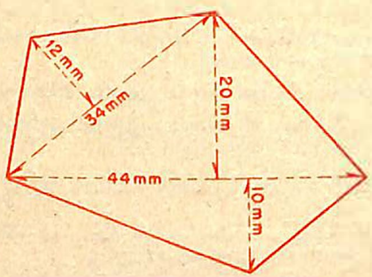



Fig 33



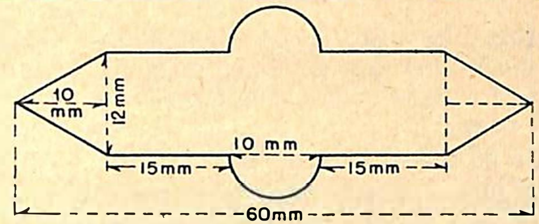



Fig. 34

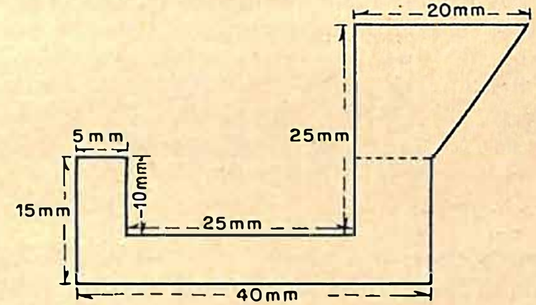



Fig. 35

RESPOSTAS:

1. 10,35 m².
2. 48 dm².
3. 1.º) 98,56 dam²;
   2.º) 0,00177241 dam²;
   3.º) 1,123632 dam².
4. 3 dm.
5. 81 dm².
6. 16 m.
7. 5187 cm².
8. 24 dm.
9. 2,8980 dam².
10. 16 m.
11. 10,24 m².
12. 10 cm.
13. 113,04 cm².
14. 157 dm².
15. Cr$ 2 700,00.
16. 300941,50 m².
17. Fig. — 864 mm²;
    Fig. 34 — 678,50 mm²
    Fig. 35 — 575 mm².

## § 4. Unidades de volume.

**1. Volume de um corpo.** Denomina-se *volume* de um corpo ao número que exprime a sua medida. A unidade legal dos volumes é o *metro cúbico*, que é o *volume de um cubo que tem 1 m de aresta.*

Símbolo do metro cúbico: $m^3$.

Os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico são *os volumes dos cubos que têm por arestas os múltiplos e submúltiplos do metro.*

Assim, por exemplo um decímetro cúbico, que se indica por 1 $dm^3$, é o volume de um cubo que tem por aresta 1 dm (fig. 36).

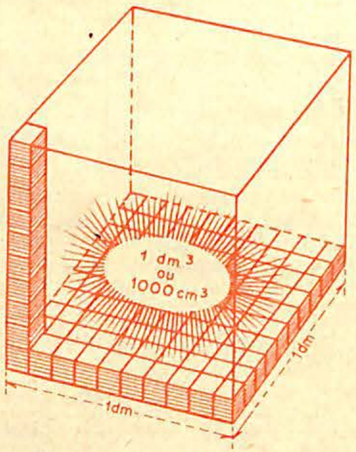



Fig. 36

Consideremos um cubo com a aresta de 1 dm e dividamos a altura em 10 partes iguais (1 cm cada). Pelos pontos de divisão tracemos planos paralelos à base. Fazendo-se a mesma operação com os lados da base (lados de um quadrado), obteremos 1 000 cubos de 1 cm de aresta, ou seja, 1 000 $cm^3$.

Logo: $1\ dm^3 = 1\ 000\ cm^3$



Dêsse modo podemos dizer que:

**as unidades de volume variam de 1 000 em 1 000, isto é, cada unidade vale 1 000 vêzes a que lhe é imediatamente inferior.**

O quadro correspondente às unidades de volume é:

| UNIDADES | | NOMENCLATURA | SÍMBOLOS | VALORES EM $m^3$ |
|---|---|---|---|---|
| *Fundamental* | | metro cúbico | $m^3$ | 1 |
| *Secundárias* | Múltiplos | decâmetro cúbico | $dam^3$ | 1 000 |
| | | hectômetro cúbico | $hm^3$ | 1 000 000 |
| | | quilômetro cúbico | $km^3$ | 1 000 000 000 |
| | Submúltiplos | decímetro cúbico | $dm^3$ | 0,001 |
| | | centímetro cúbico | $cm^3$ | 0,000001 |
| | | milímetro cúbico | $mm^3$ | 0,000000001 |

**2. Representação e leitura dos números que exprimem medidas de volumes.** Do fato das unidades de volume variarem de 1 000 em 1 000, os números decimais que exprimem medidas de volumes devem possuir um *número de algarismos decimais múltiplo de* 3.

Assim, por exemplo, ao invés de se escrever

$$35{,}24\ dm^3$$

deve-se escrever: $35{,}240\ dm^3$

e lê-se: 35 decímetros cúbicos e 240 centímetros cúbicos.

**3. Mudança de unidade.** A mudança de unidade é feita, deslocando-se a vírgula 3 casas para a direita ou para a esquerda segundo se passa para uma unidade de ordem imediatamente menor ou maior e suprindo de zeros caso faltem algarismos. Exemplos:

1) Exprimir 65,300 $dm^3$ em centímetros cúbicos.

Deslocamos a vírgula três casas para a direita:

$$65{,}300 \text{ dm}^3; = 65\,300 \text{ cm}^3$$

2) Reduzir 12 mm³ a metros cúbicos.

Como $\quad 1 \text{ mm}^3 = 0{,}000\,000\,001$

temos: $\quad 12 \text{ mm}^3 = 0{,}000\,000\,012 \text{ m}^3$

3) Exprimir 82,011 m³ em cm³, dm³, dam³ e hm³.

Devemos ter:

$$82{,}011 \text{ m}^3 = 82011000 \text{ cm}^3$$
$$82{,}011 \text{ m}^3 = 82011 \text{ dm}^3$$
$$82{,}011 \text{ m}^3 = 0{,}082011 \text{ dam}^3$$
$$82{,}011 \text{ m}^3 = 0{,}000082011 \text{ hm}^3$$

**4. Medidas de lenha.** Para medir os volumes de lenha usa-se como unidade o m³ com o nome de *estéreo* e cujo símbolo é *st.* (fig. 37)

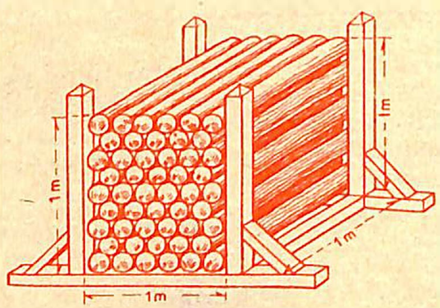



Fig. 37

As unidades secundárias são:

Múltiplo.......... *decastéreo*......... dast......... 10 *st*
Submúltiplo....... *decistéreo*.......... dst.......... 0,1 *st*

**5. Medidas de capacidade.** Para medir os *volumes dos recepientes* que contém líquidos e gases (outrora também



grãos, como arroz, feijão, etc . . .), usamos como unidade de medida o *litro* (*) *que é o volume pràticamente igual a 1 dm³.*

Símbolo do litro: *l*

As unidades secundárias estão no quadro:

| UNIDADES | | NOMENCLATURA | SÍMBOLOS | VALORES EM LITRO |
|---|---|---|---|---|
| *Fundamental*.......... | | litro | *l* | 1 |
| *Secun-dárias* | Múltiplos..... | decalitro | *dal* | 10 |
| | | hectolitro | *hl* | 100 |
| | | quilolitro | *kl* | 1 000 |
| | Submúltiplos. | decilitro | *dl* | 0,1 |
| | | centilitro | *cl* | 0,01 |
| | | mililitro | *ml* | 0,001 |

As unidades de capacidade, que simplificam as medidas dos volumes dos recipientes, variam de 10 em 10, isto é, cada unidade vale 10 vêzes a unidade que lhe é imediatamente inferior.

A mudança de unidade é feita como nas medidas de comprimento. Exemplos:

1) Exprimir 5,284 dal em *l*, dl, cl e ml.

Devemos ter: $5{,}284 \text{ dal} = 52{,}84\ l$
$5{,}284 \text{ dal} = 528{,}4 \text{ dl}$
$5{,}284 \text{ dal} = 5284 \text{ cl}$
$5{,}284 \text{ dal} = 52840 \text{ dml}$

2) Reduzir 32,51 *l* a hectolitros.

Temos: $\quad 32{,}51\ l = 0{,}3251 \text{ hl}$

(*) Definição legal de *litro:* é o volume de 1 quilograma de água destilada e isenta de ar, a temperatura de 4°C e sob a pressão atmosférica normal.

Os recipientes usados como medidas efetivas de capacidade são vasos cilíndricos de *estanho* ou *cobre*, com alças especiais, de *vidro*, com as capacidades de 1 litro, ½ litro e ¼ litro construídos de acôrdo a legislação vigente (*) (fig. 38).


Fig. 38

**6. Relações entre as unidades de volumes.** Entre as unidade de volumes estudadas, valem pràticamente (**), as relações:

$$
\begin{aligned}
&& 1\,l &= 1\text{ dm}^3 \\
1\text{ dal} &= & 10\,l &= 10\text{ dm}^3 \\
1\text{ hl} &= & 100\,l &= 100\text{ dm}^3 \\
1\text{ kl} &= & 1\,000\,l &= 1\,000\text{ dm}^3 = 1\text{ m}^3 \\
1\text{ dl} &= & 0{,}1\,l &= 0{,}1\text{ dm}^3 \\
1\text{ cl} &= & 0{,}01\,l &= 0{,}01\text{ dm}^3 \\
1\text{ ml} &= & 0{,}001\,l &= 0{,}001\text{ dm}^3 = 1\text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIOS SÔBRE MEDIDAS DE VOLUME
E DE CAPACIDADE

1. Escrever sob forma decimal, exprimindo em m³ as seguintes medidas:
   1.º) 3 dam³ e 25 dm³. 4.º) 5 dast e 6 dst.
   2.º) 42 m³ e 101 cm³. 5.º) 41 hl, 8*l* e 3 dl.
   3.º) 15 hm³, 210 m³ e 39 cm³. 6.º) 4 dl e 5 ml.

2. Reduzir:
   1.º) 52,151 km³ a dam³. 3.º) 25,3 st a dast.
   2.º) 0,001523 hm³ a dm³. 4.º) 24,39 dal a *l*.

(*) Portaria n.º 33, de 12/4/1946, do Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio.
(**) 1 litro equivale, rigorosamente, a 1,00002 7 dm³.



3. Exprimir em números decimais, de *litro*, as seguintes medidas:
   1.º) $\frac{1}{4}$ *dal*; 2.º) $\frac{3}{8}$ *l*; 3.º) $4\frac{1}{25}$ *dl*; 4.º) $\frac{61}{50}$ m³ 5.º) $1\frac{1}{16}$ cm³.

4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em dam³;
   1.º) 0,315251 hm³ + 423856 m³ + 12,035 km³
   2.º) 24,391 dam³ + 0,219 km³ × 0,002
   3.º) 42,3 *l* + 212,25 dl + 0,31 kl
   4.º) 39,25 dal − (6,18 l + 21,31 dl)

5. É a mesma coisa dizer: um centímetro cúbico e um centésimo do metro cúbico?

6. Um decímetro cúbico de certa substância custa Cr$ 18,00. Qual é o preço de 2 m³ dessa substância?

7. Um negociante recebeu 1,015 m³ de vinho pagando Cr$ 2 500,00 o hectolitro de vinho. Por quanto êsse negociante deve vender o litro de vinho, para ganhar Cr$ 10 150,00 na venda de todo o vinho?

8. Quantos hl de água contém uma caixa de 1 m³ de volume?

9. Valendo 1 dast de lenha Cr$ 1000,00, qual é o preço de 1 m³ de lenha?

10. Se 1 cm³ de uma certa substância custa Cr$ 58,00, quanto custarão 2 dl dessa substância?

11. Uma pessoa vendeu 45,30 *l* de leite à razão deCr$ 150,00 o dal. Quanto recebeu?

12. Pedro comprou 46 dal de vinho e vendeu 2,3 hl. Quantos litros sobraram?

13. Quantos vasilhames de 5 dl são necessários para engarrafar a bebida que está num barril de capacidade igual a 8,4 hl?

14. Sabendo-se que 20 cl de uma certa substância custa Cr$ 20,00, qual é o preço de uma lata de capacidade igual a 1,5 dal?

15. Qual é o preço de $\frac{3}{8}$ de 4 hl de uma bebida se $\frac{1}{2}$ litro dela custa Cr$ 15,00?

Respostas:

1. 1.º) 3000,025 m³; 4.º) 5,60 dast = 50,6 m³;
   2.º) 42,000101 m³; 5.º) 4,1083 kl = 4,1083 m³;
   3.º) 15000210,000039 m³; 6.º) 0,000405 kl = 0,000405 m³.
2. 1.º) 52151000 dam³; 2.º) 1523000 dm³; 3.º) 2,53 dast; 4.º) 243,9 l.
3. 1.º) 2,5 *l*; 2.º) 0,375 *l*; 3.º) 0,404 *l*; 4.º) 1220 dm³ = 1220 *l*;
   5.º) 0,0010625 dm³ = 0,0010625 *l*

4. 1.º) 12035739107 $dam^3$;
   2.º) 462,391 $dam^3$;
   3.º) 373,525 $l$ = 373,525 $dm^3$ = 0,000373525 $dam^3$;
   4.º) 384,189 $l$ = 384,189 $dm^3$ = 0,000384189 $dam^3$.
5. Não, porque 1 $cm^3$ é igual a 1 milionésimo de $m^3$ (0,000001 $m^3$)
6. Cr$ 36 000,00.
7. Cr$ 350,0.
8. 10 hl.
9. Cr$ 100,00.
10. Cr$ 11 600,00.
11. Cr$ 679,50.
12. 230 l.
13. 1680.
14. Cr$ 500,00.
15. Cr$ 4 500,00.

## § 5. Volumes dos principais sólidos geométricos.

**1. Paralelepípedo retângulo.** *O volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto de suas três dimensões* (fig. 39).

***Volume do paralelepípedo* = *comprimento × largura × altura***

Indicando as dimensões de um paralelepípedo retângulo, respectivamente por:

$a$ = comprimento
$b$ = largura
$c$ = altura

temos a fórmula:

$$\boxed{V = a \times b \times c}$$



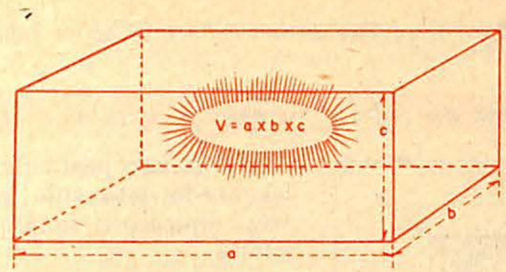



Fig. 39

Substituindo o produto $a \times b$, que indica a área do retângulo da base do paralelepípedo, por $B$, e a outra dimensão $c$ (altura) por $h$, o volume do paralelepípedo também pode ser dado pela fórmula:

$$\boxed{V = B \times h}$$

APLICAÇÕES:

1) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo que tem 12 cm de comprimento, 8 cm de largura e 9 cm de altura.

O volume será igual ao produto das três dimensões:

$V$ = 12 cm × 8 cm × 9 cm
$V$ = 864 $cm^3$

2) O volume de um paralelepípedo retângulo é igual a 448 $dm^3$. Sabendo-se que a área da base dêsse paralelepípedo é de 56 $dm^3$, calcular o valor de sua altura.

Dividindo-se o valor do volume do paralelepípedo pela área da base iremos, necessàriamente, encontrar o valor da altura.

Logo: 448 $dm^3$ : 56 $dm^2$ = 8 dm

e 8 dm é o valor da altura do paralelepípedo.

**2. Cubo.** *O volume de um cubo é igual ao cubo da aresta* (fig. 40).

***Volume do cubo = aresta × aresta × aresta***

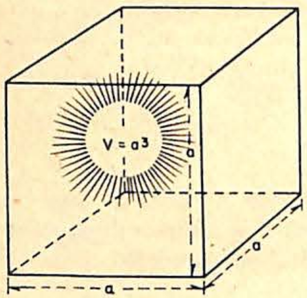



Fig. 40

É o caso particular do paralelepípedo retângulo que possui três dimensões iguais entre si, isto é,

$$a = b = c$$

Temos assim a fórmula:

$$\boxed{V = a \times a \times a = a^3}$$

**3. Prisma.** *O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura* (fig. 41).

***Volume do prisma = área da base × altura***

Indicando por:

$B$ = a área da base do prisma,
$h$ = a altura do prisma,

a fórmula que dá o volume do prisma é:

$$\boxed{V = B \times h}$$

Notemos que $B$ representa a área de um *polígono qualquer*, isto é, a área de um triângulo, quadrilátero, pentágono, etc.

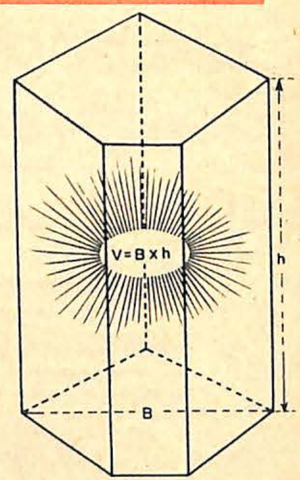



Fig. 41

Aplicações:

1) Sabendo-se que a *altura* de um prisma quadrangular é igual a 9 dm



e que a *base* é um retângulo de dimensões: 4 dm para o comprimento e 3 dm para a largura, calcular o volume dêsse prisma.

Apliquemos a fórmula:

$$V = B \times h$$

onde: $B = 4 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} = 12 \text{ dm}^2$

e $h = 9 \text{ dm}$

temos: $V = 12 \text{ dm}^2 \times 9 \text{ dm}$

$V = 108 \text{ dm}^3$

2) Um prisma tem 336 $\text{dm}^3$ de volume e 60 cm de altura. Qual é a área da base?

Da fórmula $V = B \times h$, concluímos que a área da base ($B$) é obtida dividindo-se o volume ($V$) pela altura ($h$).

Efetuamos a divisão reduzindo a altura à mesma unidade em que é dado o volume.

Logo: $336 \text{ dm}^3 : 6 \text{ dm} = 56 \text{ dm}^2$

e a área da base do prisma é igual a 56 $\text{dm}^2$.

**4. Pirâmide.** *O volume de uma pirâmide é igual a um têrço do produto da área da base pela altura* (fig. 42).

$$\textit{Volume da pirâmide} = \frac{\textit{área da base} \times \textit{altura}}{3}$$

Indicando por:

$B$ = área da base da pirâmide,
$h$ = altura da pirâmide,

temos a fórmula:

$$\boxed{V = \frac{B \times h}{3}}$$

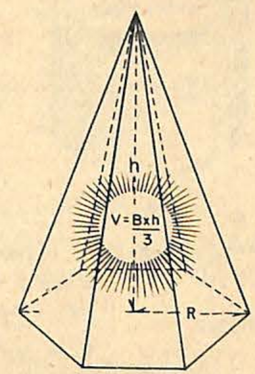



Fig. 42

Aplicação:

Calcular o volume de uma pirâmide de 12 dm de altura, cuja base é um quadrado de perímetro igual a 16 dm.

Apliquemos a fórmula:

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

Sendo o perímetro do quadrado da base igual a 16 dm, segue-se que cada lado dêsse quadrado vale

$$16 \text{ dm} : 4 = 4 \text{ dm}$$

e a área igual a $(4 \text{ dm})^2 = 16 \text{ dm}^2$.

O volume será:

$$V = \frac{16 \text{ dm}^2 \times 12 \text{ dm}}{3} = 64 \text{ dm}^3.$$

**5. Cilindro.** *O volume de um cilindro é igual ao produto da área de base pela altura* (fig. 43).

**Volume do cilindro = área da base × altura**

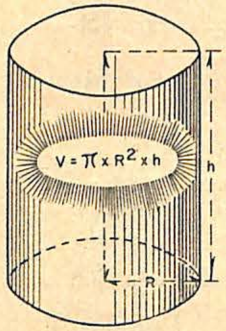



Fig. 43

Como a *base B* do cilindro é um *círculo*, cuja área é $\pi \times R^2$ (§3 n.º 8), a fórmula ficará:

$$\boxed{V = \pi \times R^2 \times h}$$

Aplicação.

Calcular o volume de um cilindro de altura igual a 10 cm e raio da base igual a 5 cm.

Aplicando a fórmula:

$$V = \pi \times R^2 \times h$$

temos:

$$V = 3{,}1416 \times (5 \text{ cm})^2 \times 10 \text{ cm}$$
$$V = 3{,}1416 \times 25 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm}$$
$$V = 785{,}400 \text{ cm}^3.$$



**6. Cone.** *O volume de um cone é igual a um têrço do produto da área da base pela altura* (fig. 44).

$$\textbf{Volume do cone} = \frac{\textbf{área da base} \times \textbf{altura}}{3}$$

Como a área da base, que é um círculo, é $\pi \cdot R^2$

Temos a fórmula:

$$\boxed{V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}}$$

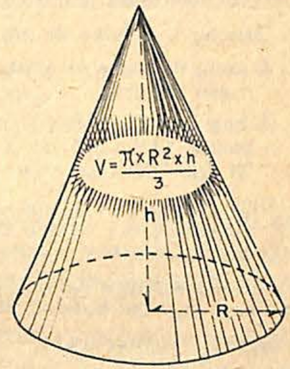



Fig. 44

**7. Esfera.** *O volume de uma esfera é igual a* $\frac{4}{3}$ *do produto de* $\pi$ *por* $R^3$. (fig. 45).

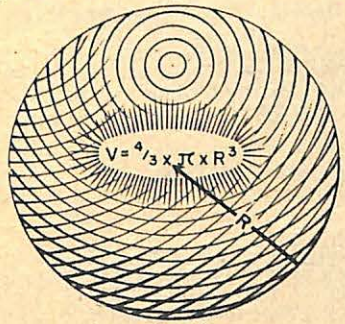



Fig. 45

A fórmula será:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3}$$

Aplicação.

Calcular o volume de uma esfera cujo diâmetro é igual a 8 dm.

O raio é igual a 8 dm : 2 = 4 dm

O volume será:

$$V = \frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times (4 \text{ dm})^3 = 268{,}083200 \text{ dm}^3$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE VOLUMES DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1. Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensõesl são: comprimento 6 dm, altura 5 dm e largura 4 dm.
2. Conhecendo-se de um paralelepípedo retângulo o seu volume que é de 144 $dm^3$ e a sua altura que mede 9 dm, calcular o valor da área da base dêsse paralelepípedo.
3. Calcular o volume de um cubo de 4 dm de aresta.
4. A soma de tôdas as arestas de um cubo é 36 m. Calcular, em $dm^3$, o seu volume.
5. A base de um prisma é um trapézio cujas bases medem, respectivamente, 12 dm e 8 dm e a altura 5 dm. A altura do prisma é igual 28 dm. Calcular o seu volume.
6. Uma pirâmide de 12 dm de altura tem por base um retângulo cujas dimensões são 5dm e 3dm, respectivamente. Calcular o volume desta pirâmide.
7. Calcular a altura de uma pirâmide de volume igual a 93 $dm^3$ e cuja área da base é de 31 $dm^2$.
8. Qual é o volume de um cilindro de 2 dm de raio e 14 dm de altura? ($\pi = 3,14$).
9. O raio de uma esfera é igual a 6 cm. Calcular o volume dessa esfera.
10. Determinar o volume de um cone de 10 dm de altura, sabendo-se que a circunferência de sua base mede 28,26 dm.
11. Pagaram-se Cr$ 40 500,00 pela construção de um muro de 3 m de altura por 0,30 m de espessura. Qual é o seu comprimento, se o preço do $m^3$ foi de Cr$ 900,00?
12. As dimensões de uma árvore Jequitibá, de forma cilíndrica, são altura 15 m e raio da base 0,70 m. Sabendo-se que o $m^3$ dessa árvore, foi vendido à razão de Cr$ 900,00, pergunta-se quanto rendeu tôda a árvore.
13. Antão tem um sapo de borracha que cheio de ar ocupa um volume igual ao volume de uma esfera de 3 dm de raio. Qual é o volume do sapo?
14. Um vagão de estrada de ferro medindo 18 m de comprimento por 3 m de largura e 2,5 m de altura está cheio de areia. Qual é o preço total do transporte dessa areia se o preço do transporte de $\frac{1}{3}$ de $m^3$ de areia custa Cr$ 30,00?
15. Um reservatório de forma cilíndrica, cujas dimensões são: raio 2 m e altura 10 m está cheio de uma certa substância. Qual é o valor dessa substância, sabendo-se que 10 $m^3$ valem Cr$ 12 000,00?



RESPOSTAS:

1. 120 $dm^3$.
2. 16 $dm^2$.
3. 64 $dm^3$.
4. 27000 $dm^3$.
5. 1400 $dm^3$.
6. 60 $dm^3$.
7. 9 dm.
8. 175,840 $dm^3$.
9. 904,320 $cm^3$.
10. 211,950 $dm^3$.
11. 50 m.
12. Cr$ 20 771,10.
13. 113,040 $dm^3$.
14. Cr$ 12 150,00.
15. Cr$ 150 720,00.

## § 6. **Unidades de pêso** (massa).

### PÊSO E MASSA DE UM CORPO

**1.** *Pêso* de um corpo é a *fôrça* com que a Terra o atrai pare o seu centro. Como essa fôrça de atração *não é a mesma* para todos os lugares da Terra porque esta não se apresenta rigorosamente esférica (achatada nos polos), um mesmo corpo poda ter *diferentes pesos* conforme a posição que ocupa na Terra.

*Massa* de um corpo é a quantidade de matéria que êsse corpo contém. Como a quantidade de matéria de um certo corpo é *sempre a mesma* para qualquer lugar na Terra, a *massa* de um corpo *não varia* qualquer que seja a posição que esteja ocupando. Na prática, a *medida* da *massa* é obtida pelas *balanças*.

A unidade fundamental de *massa*, vulgarmente denominada pêso, é o *quilograma* (*). Abreviatura: *kg*.

**Quilograma é a massa aproximada de um decímetro cúbico de água destilada (**) à temperatura de 4 graus Celsius.**

Toma-se a temperatura de 4 graus Celsius porque é nesta temperatura que a água tem o máximo pêso com um dado volume.

(*) Definição legal de *quilograma:* é a massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela primeira Conferência Geral de Pêsos e Medidas.

(**) Água destilada: água pura.

A *unidade principal* usada na prática é o *grama*, que é a milésima parte do quilograma, a partir do qual se constroem os múltiplos que constam do seguinte quadro:

| UNIDADES DE MASSA | NOMENCLATURA | SÍMBOLOS | VALORES EM GRAMA |
|---|---|---|---|
| *Principal*........... | grama | *g* | 1 |
| *Secundárias* — Múltiplos... | decagrama | *dag* | 10 |
| | hectograma | *hg* | 100 |
| | quilograma | *kg* | 1 000 |
| | quintal | *q* | 100 000 ou 100kg |
| | tonelada | *t* | 1 000 000 ou 1 000kg |
| *Secundárias* — Submúltiplos | decigrama | *dg* | 0,1 |
| | centigrama | *cg* | 0,01 |
| | miligrama | *mg* | 0,001 |

As medidas relativas à pedras preciosas e metais preciosos são avaliadas em *quilates*, sendo 1 quilate equivalente à massa de 2 dg.

As unidades de massa *variam de* 10 *em* 10, isto é, cada unidade vale 10 vêzes a unidade que lhe é imediatamente inferior. Na fig. 46, temos as formas mais comuns dos pesos efetivos aprovados pelas nossas leis (*).

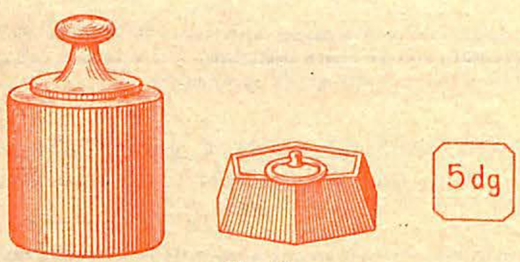



Fig. 46

(*) Portaria n.º 62, de 18/10/1946.



**2. Mudança de unidade.** A mudança de unidade é feita como nas unidades de comprimento. Exemplos:

1) Reduzir 3,825 kg a gramas.

Devemos ter: 3,825 kg = 3 825 g

2) Exprimir 703,02 hg em dag, g, cg e t.

Temos: 703,02 hg = 7030,2 dag
703,02 hg = 70302 g
703,02 hg = 7030200 cg
703,02 hg = 0,070302 t

**3. Correspondência entre as unidades de volume, de capacidade e de massa para a água distilada a 4 graus Celsius.**

| *Volume* | *Capacidade* | *Massa* |
|---|---|---|
| 1 $m^3$ | 1 *kl* | 1 t |
| 1 $dm^3$ | 1*l* | 1 kg |
| 1 $cm^3$ | 1 *ml* | 1 g |

APLICAÇÕES:

1.ª) Quantos litros contém uma caixa de água de 2 m de comprimento, 1 m de largura e 0,80 m de altura?

O volume da caixa de água é dado pelo produto:

2 m × 1 m × 0,80 m = 1,60 $m^3$ = 1 600 $dm^3$. Como cada $dm^3$ é o volume equivalente a 1 litro, segue-se que a caixa de água tem a capacidade para 1 600 litros.

2.ª) Qual será, em litros, a capacidade de uma caldeira que cheia de água pura pesa 68 kg e vazia 14 kg?

A diferença 68 kg − 14 kg = 54 kg, representa o pêso da água que enche tôda a caldeira. Como 1 kg de água pura ocupa o volume de 1 litro, conclui-se que a capacidade da caldeira é de 54 litros.

3.ª) Uma piscina com a forma de paralelepípedo retângulo, tem 25 m de comprimento e 15 m de largura. Qual é a profundidade dessa piscina, sabendo-se que a sua capacidade é para 1 125 kl de água.

Volume da piscina = 1 125 kl = 1 125 m³

Produto de duas dimensões (conhecidas):

$$25 \text{ m} \times 15 \text{ m} = 375 \text{ m}^2$$

Logo a outra dimensão, que é a profundidade procurada, será:

$$1\,125 \text{ m}^3 : 375 \text{ m}^2 = 3 \text{ m}$$

## MASSA ESPECÍFICA OU DENSIDADE ABSOLUTA

4. Tomando-se volumes iguais de corpos diferentes, como por exemplo, 1 $dm^3$ de água distilada e 1 $dm^3$ de ferro, notamos que 1 $dm^3$ de ferro pesa quase 8 vêzes mais que 1 $dm^3$ de água. Por essa razão costuma-se dizer que o ferro é mais *denso* que a água.

Chama-se *massa específica* ou *densidade absoluta* de um corpo *a massa, em gramas, da unidade de volume dêsse corpo* (*).

A *unidade legal* de densidade absoluta é o *grama por centímetro cúbico*, que é a densidade de um corpo homogêneo no qual cada centímetro cúbico tem o pêso de 1 grama.

Abreviatura: *g/cm³*.

Outras unidades de massa específica ou densidade absoluta podem ser obtidas substituindo-se o grama por qualquer unidade legal de pêso e o centímetro cúbico por qualquer unidade legal de volume.

Assim, temos mais as unidades:

| | | |
|---|---|---|
| *quilograma por decímetro cúbico*.... | kg/dm³ | corresponde: 1 g/cm³. |
| *tonelada por metro cúbico*......... | t/m³ | corresponde: 1 g/cm³. |
| *quilograma por metro cúbico*....... | kg/m³ | corresponde: 0,001 g/cm³. |
| *grama por metro cúbico*........... | g/m³ | corresponde: 0,000001 g/cm³. |

Indicando por:

D = a densidade absoluta de um corpo;
M = a massa, em gramas;
$V$ = o volume em centímetros cúbicos;

(*) Para corpos *sólidos* e *líquidos* a unidade de volume usada é o centímetro cúbico e para os corpos gasosos a unidade de volume empregada é o decímetro cúbico.



temos as seguintes fórmulas que permitem resolver todos os problemas relativos à densidade absoluta de um corpo.

$$\textit{Densidade absoluta} = \frac{\textit{Massa}}{\textit{Volume}} \quad \text{ou} \quad \boxed{D = \frac{M}{V}}$$

$$\textit{Massa} = \textit{Densidade absoluta} \times \textit{Volume}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{M = D \times V}$$

$$\textit{Volume} = \frac{\textit{Massa}}{\textit{Densidade absoluta}} \quad \text{ou} \quad \boxed{V = \frac{M}{D}}$$

APLICAÇÕES:

1. *Mudança de unidade.* Exemplos:

1) Reduzir 0,5 t/dm³ a g/cm³.

Como: 1 t = 1 000 000 g

e 1 dm³ = 1 000 cm³

temos:

$$0{,}5 \text{ t/dm}^3 = \frac{5}{10} \times \frac{\text{t}}{\text{dm}^3} = \frac{5}{10} \times \frac{1\,000\,000 \text{ g}}{10\,000 \text{ cm}^3} = \frac{5\,000\,000}{10\,000} \times \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

logo:

$$0{,}5 \text{ t/dm}^3 = 500 \text{ g/cm}^3$$

2) Exprimir 12 g/cm³ a kg/m³.

Como: 1 g = 0,001 kg

e 1 cm³ = 0,000001 m³

temos:

$$12 \text{ g/cm}^3 = 12 \times \frac{0{,}001}{0{,}000001} \times \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{0{,}012}{0{,}000001} \times \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

ou

$$12 \text{ g/cm}^3 = 12\,000 \text{ kg/m}^3$$

2. *Problemas sôbre densidade absoluta, pêso e volume.* Exemplos:

1) Qual é a densidade absoluta da manteiga, sabendo-se que 300 $cm^3$ de manteiga pesam 282 g.

Devemos usar a fórmula: $D = \frac{M}{V}$

onde: $M = 282\text{ g}$ e $V = 300\text{ cm}^3$

Temos: $D = \frac{282\text{ g}}{300\text{ cm}^3} = 0{,}94\text{ g/cm}^3$.

2) Calcular, em quilogramas, o pêso de 3 $l$ de leite, cuja densidade é 1,032 g/$cm^3$.

A formula agora é:

$$M = D \times V$$

$$M = 1{,}032 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times 3\ l \quad \text{e como: } 1\ l = 1\text{ dm}^3$$

$$M = 1{,}032 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times 3\text{ dm}^3$$

e 1 $dm^3$ = 1 000 $cm^3$:

$$M = 1{,}032 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times 3\,000\text{ cm}^3$$

$$M = 1{,}032\text{ g} \times 3\,000 = 3\,096\text{ g}$$

$$M = 3{,}096\text{ kg}$$

3) Sabendo-se que a densidade absoluta da glicerina é 1,28 g/$cm^3$, calcular, em litros, o volume ocupado por 2,56 kg.

Empregamos a fórmula:

$$V = \frac{M}{D}$$

$$V = \frac{2{,}56\text{ kg}}{\frac{1{,}28\text{ g}}{\text{cm}^3}}$$



$$V = \frac{2\,560\text{ g}}{1} \times \frac{\text{cm}^3}{1{,}28\text{ g}} = \frac{2\,560\text{ g}}{1{,}28\text{ g}} \times \text{cm}^3$$

$$V = 2\,000\text{ cm}^3 = 2\text{ dm}^3$$

$$V = 2\ l$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE MEDIDAS DE PÊSO (MASSA) E DE DENSIDADE ABSOLUTA

1. Exprimir, sob forma decimal, em *kg* e *dg*, as seguintes medidas:
   1.º) 8 315 g — 2.º) 14 hg e 12 cg — 3.º) 2 t, 285 kg e 12 g — 4.º) 3 kg, 45 dag e 3 g
2. Reduzir:
   1.º) 43,85 g a hg; — 2.º) 0,048 kg a g; — 3.º) 5,392 dag a cg; — 4.º) 4,018 t a q.
3. Exprimir em número decimais, de *gramas*, as seguintes medidas:
   1.º) $\frac{3}{4}$ dag — 2.º) $\frac{20}{8}$ g — 3.º) $\frac{121}{50}$ kg — 4.º) $\frac{3}{16}$ t
4. Efetuar as seguintes operações, exprimindo os resultados em *dag*:
   1.º) 32,55 hg + 48,01 dag + 3,81 kg + 69 dg
   2.º) 4,039 t − 21,05 q
   3.º) 8,01 hg − (20,01 g + 3,1 dag) × 4
5. Sabendo-se que 4 kg de um certo produto custam Cr$ 60,00, qual é o preço de 450 g dêsse produto?
6. Comprei 300 $l$ de azeite a Cr$ 75,00 o kg. Quanto gastei, supondo que o $cm^3$ pesa 939 mg?
7. Uma lata vazia pesa 1,40 kg e cheia de água pura pesa 11,40 kg. Qual é a capacidade dessa lata em litros?
8. Qual é o pêso, em kg, de 432118 $cm^3$ de certa madeira, que pesa 80 dag por $dm^3$?
9. Sabendo-se que 500 $cm^3$ de uma certa substância pesam 0,439 kg, quanto custarão 4 $dm^3$ dessa substância se 1 grama da mesma custam 10 centavos?
10. Se $\frac{2}{3}$ do $dm^3$ de um líquido pesam 2 g, quanto pesarão 3 $m^3$?
11. Reduzir:
    1.º) 1,8 g/$cm^3$ a kg/$m^3$; — 2.º) 3 g/$cm^3$ a t/$dm^3$.
12. Calcular a densidade absoluta de um corpo na qual 7,2 kg ocupam um volume de 0,036 $m^3$?

13. Calcular, em toneladas, o pêso de 500 dm³ de aço, cuja densidade absoluta é igual a 7,6 g/cm³.
14. Sabendo-se que a densidade absoluta do ouro é igual a 19,3 g/cm³, calcular em cm³, o volume ocupado por 1,351 kg de ouro.
15. Conhecida a densidade absoluta do álcool, que é de 0,8 g/cm³, qual é o melhor negócio; vender o álcool a Cr$ 14,40 o litro ou a Cr$ 17,60 o quilograma?

RESPOSTAS:

1. 1.º) 8,315 kg = 83150 dg; 3.º) 2285,012 kg = 22850120 dg.
   2.º) 1,40012 kg = 14001,2 dg; 4.º) 3,453 kg = 34530 dg.
2. 1.º) 0,4385hg; 2.º) 48 g; 3.º) 5392 cg; 4.º) 40,18 q.
3. 1.º) 7,5 g; 2.º) 2,5 g; 3.º) 2420 g; 4.º) 187500 g.
4. 1.º) 755,2 dag; 2.º) 193400 dag; 3.º) 59,696 dag.
5. Cr$ 6,75.
6. Cr$ 21 127,50.
7. 10 l.
8. 345,6944 kg.
9. Cr$ 351,20.
10. 9 kg.
11. 1.º) 1 800 kg/m³; 2.º) 0,003 t/dm³.
12. 0,2 g/cm³.
13. 3,8 t.
14. 70 cm³.
15. Vender o álcool a litro.

### *Curiosidades sôbre os sistemas de medidas*

Até fins do século XVIII, cada país adotava um sistema de medidas próprio. No Brasil as unidades de medidas antigas (hoje proibidas por lei) eram: linha, polegada, palmo, pé, braça, légua, alqueire, etc . . . que variavam por sua vez de um Estado para outro. Ainda temos, por exemplo, a medida agrária *alqueire*, que corresponde em Minas Gerais, Rio de Janeiro e Goiás, a 48 400m², em São Paulo a 24 200m² e nos Estados do Norte a 27 225m², como amostra da variedade que caracterizava as nossas medidas.

Sempre houve, na verdade, uma tendência natural de tomar como unidades de medidas as dimensões corporais do homem (palmo, pé, braço, . . .), embora essas unidades variassem de povo para povo. Conta-se que, em 1324, o rei Eduardo III, da Inglaterra, decretou que a unidade de comprimento a ser adotada em todo o império seria exatamente expressa pela medida de seu "real pé". Assim, um portentoso calculista mediu com tôda a solenidade o pé de sua majestade e a medida encontrada foi tornada oficial.



Em 1790 a Assembléia Constituinte Francesa resolveu criar um sistema de pesos e medidas, nomeando para tal uma comissão composta pelos ilustres matemáticos: Laplace, Lagrange, Monge, Borda e Condorcet, indicando-lhes que o novo sistema deveria satisfazer as seguintes condições:

1. A unidade fundamental que serviria de comparação, deveria ser tal que caso fôsse destruída poder-se-ia reconstruir outra idêntica;
2. O sistema teria que ser *internacional*, isto é, a unidade não deveria estar ligada a nenhum país em particular, a fim de que pudesse ser adotada por todos os países:
3. A relação entre os múltiplos e submúltiplos das unidades fundamentais deveria ser *decimal*, semelhante ao sistema de numeração decimal usado em quase todos os países.

A comissão propôs que a unidade fundamental, da qual se poderia deduzir tôdas as demais, fôsse um comprimento equivalente a uma fração do meridiano terrestre (décima milionésima parte de um quarto de meridiano) e que se chamaria *metro* (do grego *metron*). Feita a medida foi construída uma régua de platina considerada como *metro padrão*, conservada em gêlo, para não se registrarem variações (dilatação, por exemplo) e dela retiradas cópias fiéis para todos os povos que o adotaram. A partir de 1799 novas medidas de arcos de meridiano foram feitas, com instrumentos e métodos mais precisos, revelando que o metro tomado como padrão era dois décimos de milímetros mais curto que a décima milionésima parte do quarto do meridiano terrestre. Todavia, o metro padrão (o da platina) foi conservado como *unidade legal*, já que o comprimento de um quadrante de meridiano terrestre será sempre conhecido por aproximação.

## § 7. Sistemas de medidas não decimais.

### NÚMERO COMPLEXO

**1.** Quando num sistema de medir, a unidade fundamental e as unidades secundárias *não estão em relação decimal*, o sistema é denominado *não decimal* ou *complexo*.

Chama-se *número complexo* ao número que representa a medida de uma grandeza aferida num sistema complexo.

Assim, por exemplo, o *sistema inglês de medidas é complexo*, pois, a relação entre a unidade fundamental de comprimento (jarda) e as unidades secundárias (pé, polegada, etc.) *não* *são decimais.* Nas *medidas de tempo*, como iremos ver adiante, (minuto, hora, dia, etc.) constituem também um sistema complexo e os números que exprimem essas medidas são *complexos.*

**2. Unidades de tempo.** A unidade fundamental do tempo é o *segundo.*

**Segundo (*) é o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86400}$ do dia solar médio, definido de acôrdo com as convenções de Astronomia.**

Símbolo do segundo: *s* ou *seg.*

As unidades secundárias, que se apresentam sòmente como múltiplos, constam do quadro:

| NOMES | SÍMBOLOS | VALORES EM SEGUNDOS |
|---|---|---|
| segundo........... | *s* ou *seg* | 1 |
| minuto............ | *m* ou *min* | 60 |
| hora.............. | *h* | 3 600 |
| dia............... | *d* ou *da* | 86 400 |

Relações entre essas unidades:

1 h = 60 min

1 d = 24 h = 14 400 min

Outras unidades, usadas na prática, são:

semana (se).......... 7 dias
mês (me)............ 30, 31 ou 29 ou 28 dias
ano (a).............. 360, 365 ou 366 dias

O ano compõe-se de 12 meses. O *ano comercial* tem 360 dias, o *ano civil* tem 365 dias e o *ano bissexto* 366 dias.

(*) Legislação metrológica — I.P.T. — São Paulo.



Os meses de janeiro, março, maio, julho, agôsto, outubro e dezembro têm 31 dias; os meses de abril, junho, setembro e novembro têm 30 dias.

O mês de fevereiro tem 28 dias nos anos comuns (civil) e 29 dias nos anos bissextos.

Todo ano que fôr divisível por 4, com exceção dos terminados por 00, *são bissextos.* Assim, por exemplo:

1940, 1952, 1964.......... são bissextos
e 1910, 1953, 1965.......... não são bissextos

| | | |
|---|---|---|
| O período de | 2 anos chama-se: | biênio |
| | 3 anos chama-se: | triênio |
| | 4 anos chama-se: | quadriênio |
| | 5 anos chama-se: | quinquênio ou lustro |
| | 10 anos chama-se: | decênio ou década |
| | 100 anos chama-se: | século |
| | 1 000 anos chama-se: | milênio |

| | | |
|---|---|---|
| O período de | 2 mêses chama-se: | bimestre |
| | 3 meses chama-se: | trimestre |
| | 6 meses chama-se: | semestre |

A *representação* do número complexo que indica unidades de tempo, é feita escrevendo-se, em ordem decrescente de valor, os números correspondentes às diversas unidades acompanhados dos respectivos símbolos. Exemplo:

21 d 12 h 35 m que se lê: 21 dias, 12 horas e 35 minutos

**3. Unidades de ângulo plano.** Para a medida de *ângulos planos* (fig. 47) tomamos como unidade fundamental o *ângulo reto* (*) (fig. 48).

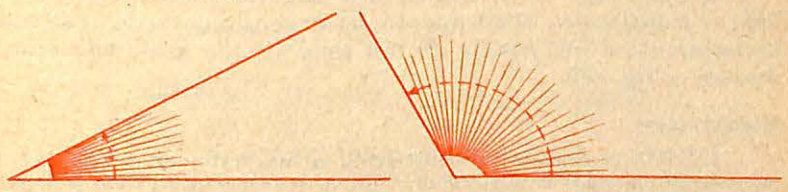


Fig. 47

(*) Definição legal de *ângulo reto:* qualquer dos menores ângulos formados por duas retas concorrentes, que formam entre si ângulos adjacentes iguais.

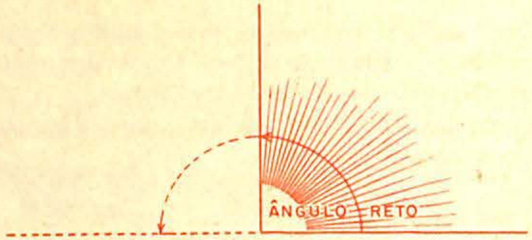



Fig. 48

Como submúltiplos do ângulo reto derivam as seguintes unidades:

| NOMES | SÍMBOLOS | VALORES |
|---|---|---|
| grau sexagesimal ou grau......... | ° | $\frac{1}{90}{}^{r}$ |
| minuto de ângulo ou minuto...... | ′ | $\frac{1}{60}{}^{\circ}$ |
| segundo de ângulo ou segundo.... | ″ | $\frac{1}{60}{}'$ |

A *representação* de número complexo que exprime uma medida de ângulo obedece à regra anterior. Exemplo:

36° 18′ 32″ que se lê: 36 graus, 18 minutos e 32 segundos.

A construção e a medida dos ângulos planos são feitas com o *transferidor*, instrumento feito geralmente de material transparente e que consta de um semi-círculo graduado como mostra a fig. 49.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Não se deve, como comumente se faz, confundir o *minuto* e o *segundo* das unidades de tempo com o *minuto de ângulo* ou *segundo de ângulo* e muito menos usá-las simultâneamente na representação do mesmo número complexo.

Assim 8 h 15 m 23 s *não pode ser representada* por 8 h 15′ 23″



Também *não se pode* representar, como é muito comum, as unidades de tempo usando a vírgula da *representação decimal*.

Dêsse modo *nunca se deve*, para representar 8 horas e 10 minutos escrever: 8, 10 h, pois, na realidade estaríamos representando 8 horas e 6 minutos (um décimo da hora). Deve-se escrever 8 h 10m.

2.ª) Existe para as medidas de ângulos uma outra unidade, o *grado*, cujos submúltiplos estão em *relações decimais*.

O *grado* é o ângulo equivalente a $\frac{1}{100}$ do ângulo reto.

Símbolo: *gr*

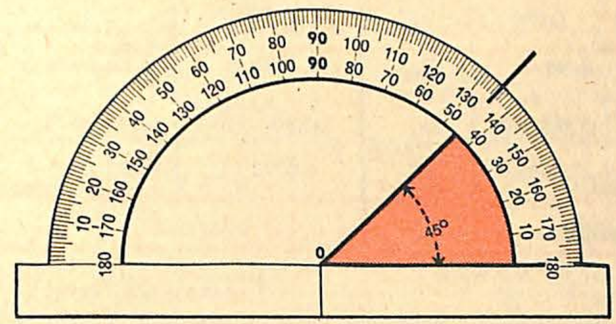


Fig. 49

Os submúltiplos do grado são:

| | | |
|---|---|---|
| decigrado...... | *dgr* ............ | $\frac{1}{10}$ gr |
| centigrado...... | *cgr* ............ | $\frac{1}{100}$ gr |
| miligrado....... | *mgr* ............ | $\frac{1}{1\,000}$ gr |

*Exemplo de representação:* 36,28 gr

que se lê: 36 grados e 28 centigrados. A *mudança de unidade*, agora, se faz deslocando a vírgula como já estudamos nas unidades de comprimento. (sistema decimal).

**4. Unidades inglêsas e norte-americanas mais conhecidas no Brasil.**

## Unidades inglêsas (Imperiais) (*)

a) **Comprimento:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLESA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS | VALORES CORRESPONDENTES |
|---|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | | |
| 1 yard | jarda | yd. | 0,9143 m | |
| 1 foot | 1 pé | ft. | 0,3048 m | $\frac{1}{3}$ da jarda = 12 inch |
| 1 inch | 1 polegada | in. | 25,400 mm | $\frac{1}{36}$ da jarda = $\frac{1}{12}$ foot |
| 1 mile | 1 milha | mi. | 1,6093 km | 1 760 jardas |

b) **Área:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 square yard | 1 jarda quadrada | sq. yd. | 0,83612 m² |
| 1 square foot | 1 pé quadrado | sq. ft. | 9,2903 dm² |
| 1 square inch | 1 polegada quadrada | sq. in. | 6,4516 cm² |
| 1 square mile | 1 milha quadrada | sq. mi. | 259,00 ha |

c) **Volume:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEIGAS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 cubic yard | 1 jarda cúbica | cu. yd. | 0,764553 m³ |
| 1 cubic foot | 1 pé cúbico | cu. ft. | 0,028317 m³ |
| 1 cubic inch | 1 polegada cúbica | cu. in. | 16,387 cm³ |

(*) Legislação metrológica I.P.T. — São Paulo.



d) **Capacidade:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 quart | 1 quarta | qt. | 1,136 *l* |
| 1 gallon | 1 galão | gal. | 4,545 *l* |

e) **Massa:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 ounce | 1 onça | oz. | 28,350 g |
| 1 pound | 1 libra | lb. | 453,592 g |
| 1 ton | 1 tonelada | tn. | 1 016 kg |

## Unidades Norte-Americanas

a) **Comprimento:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 yard | 1 jarda | yd. | 91,440 18 cm |
| 1 foot | 1 pé | ft. | 30,480 06 cm |
| 1 inch | 1 polegada | in. | 2,540 005 cm |
| 1 mile | 1 milha | mi. | 1 609,347 2 m |

b) **Área:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 square yard | 1 jarda quadrada | sq. yd. | 0,836 130 7 $m^2$ |
| 1 square foot | 1 pé quadrado | sq. ft. | 929,034 1 $cm^2$ |
| 1 square inch | 1 polegada quadrada | sq. in. | 6,451 626 $cm^2$ |
| 1 square mile | 1 milha quadrada | sq. mi. | 2,589 998 $km^2$ |

c) **Volume:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 cubic yard | 1 jarda cúbica | cu. yd. | 0,764 559 4 $m^3$ |
| 1 cubic foot | 1 pé cúbico | cu. ft. | 28,317 016 $dm^3$ |
| 1 cubic inch | 1 polegada cúbica | cu. in. | 16,387 162 $cm^3$ |

d) **Capacidade:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 liquid quart | 1 quarta | liq. qt. | 0,946 333 *l* |
| 1 gallon | 1 galão | gal. | 3,785 332 *l* |

e) **Massa:**

| NOMES | | ABREVIAÇÃO INGLÊSA | VALOR CONVERTIDO EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS |
|---|---|---|---|
| *Inglês* | *Português* | | |
| 1 avoir ounce | 1 onça | oz. avdp. | 28,349 527 g |
| 1 avoir pound | 1 libra | lb. avdp. | 453,592 427 7 g |
| 1 short ton | 1 tonelada | tn. sh. | 907,184 86 kg |
| 1 long ton | 1 tonelada | tn. l. | 1 016,047 04 kg |



**5. Moeda inglêsa.** — Unidade: *Libra esterlina.* Símbolo: £

A libra esterlina tem 20 *shillings* (sh) e o shilling tem 12 *pence* (d). Pence é o plural de *penny*. Logo a libra esterlina tem 240 pence.

A representação de 8 libras, 12 shillings e 9 pence é feita do seguinte modo:

£ 8 — 12 — 9

O quadro das unidades de moeda inglêsa é, portanto:

| NOME | SÍMBOLO | VALOR |
|---|---|---|
| libra esterlina............ | £ | 1 |
| shilling.................... | *sh* | $\frac{1}{20}$ |
| penny...................... | *d* | $\frac{1}{240} = \frac{1}{12}$ sh |

**6. Mudança de unidade com os números complexos.** Temos dois tipos de problemas:

1.º) Transformar um número complexo em unidades inferiores. Exemplos:

1) Exprimir 3 d 8 h e 13 m em minutos.

Como 1 dia vale 24 horas, temos.......... que 3 dias valerão 72 horas (3×24), que como mais 8 horas, dá o total de 80 h.

Valendo 1 hora, 60 minutos, temos........ que 80 h valerão 4 800 m (80×60) que com mais 13 minutos, dá o total de 4 813 minutos.

Os cálculos obedecem à disposição ao lado.

$$\begin{array}{r} 24\text{ h}\\ \times\ 3\\ \hline 72\text{ h}\\ +\ 8\text{ h}\\ \hline 80\text{ h}\\ \times\ 60\\ \hline 4\,800\text{ m}\\ +\ 13\text{ m}\\ \hline 4\,813\text{ m}\end{array}$$

2) Exprimir £ 3–16–7 em pence.

1 libra vale 20 sh, logo 3 libras............. valerão 60 sh (3×20) que com mais 16 sh resultam: 76 sh.

Como 1 sh vale 12 pence, segue-se que...... 76 sh valerão 912 pence que com mais 7 pence, dá o total de 919 d.

$$\begin{array}{r} 20\ \text{sh} \\ \times\ 3 \\ \hline 60\ \text{sh} \\ +\ 16\ \text{sh} \\ \hline 76\ \text{sh} \\ \times\ 12 \\ \hline 752 \\ 76\phantom{0} \\ \hline 912\ \text{d} \\ +7 \\ \hline 919\ \text{d} \end{array}$$

2.º) Transformar um número expresso em unidades inferiores em um número complexo. Exemplos:

1) Determinar quantos *graus, minutos ângulos* e *segundos ângulos* se acham contidos em 130 362″.

O raciocínio a ser feito agora, conduz-nos às operações inversas do problema anterior.

O dispositivo prático é o seguinte:

$$\begin{array}{l|l} 130\,362'' & 60 \\ 10\,3 & 2\,172' \mid 60' \\ \ \ 4\,36 & 3\,72 \quad\ 36^\circ \\ \quad 162 & \ \ 1\,2' \\ \quad\ 42'' & \end{array}$$

Logo: em 130 362″ existem 36º 12′ 42″

2) Converter em um número complexo 1 067 d (pence).

Devemos ter:

$$\begin{array}{l|l} 1\,067\ \text{d} & 12 \\ \ \ 107 & 88\ \text{sh} \mid 20 \\ \quad 11\ \text{d} & \ \ 8\ \text{sh} \quad 4£ \end{array}$$

Logo: 1 067 d é o mesmo que £ 4–8–11.



## OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS COMPLEXOS

a) **Adição.** 1) Seja efetuar a adição:

$$\begin{array}{r} 12\ \text{d}\ 15\ \text{h}\ 35\ \text{m} \\ +\ 13\ \text{d}\ 18\ \text{h}\ 44\ \text{m} \\ \hline \end{array}$$

Calculam-se as somas parciais:

$$\begin{array}{r} 35\ \text{m} \\ +\ 44\ \text{m} \\ \hline 79\ \text{m} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{l|l} 79\ \text{m} & 60 \\ \hline 19\ \text{m} & 1\text{h} \end{array}$$

Disposição prática:

$$\begin{array}{r} 1\ \text{d}\quad 1\ \text{h}\qquad\quad \\ 12\ \text{d}\ 15\ \text{h}\ 35\ \text{m} \\ 13\ \text{d}\ 18\ \text{h}\ 44\ \text{m} \\ \hline 26\ \text{d}\ 10\ \text{h}\ 19\ \text{m} \end{array}$$

Escreve-se 19 m e soma-se 1 h com as horas da segunda coluna, isto é,

$$\begin{array}{r} 1\ \text{h} \\ 15\ \text{h} \\ 18\ \text{h} \\ \hline 34\ \text{h} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{l|l} 34\ \text{h} & 24 \\ \hline 10\ \text{h} & 1\ \text{d} \end{array}$$

Escreve-se 10 h e soma-se 1 d com os dias da segunda coluna, isto é,

$$\begin{array}{r} 1\ \text{d} \\ 12\ \text{d} \\ 13\ \text{d} \\ \hline 26\ \text{d} \end{array}$$

2) Efetuar a adição:

$$\begin{array}{r} £\,32 - 15 - 8 \\ £\,24 - 11 - 7 \\ £\ \ 3 - 18 - 10 \\ \hline \end{array}$$

Disposição prática:

$$\begin{array}{r} 2\quad\ 2\quad\ \\ £\,32 - 15 - 8 \\ £\,24 - 11 - 7 \\ £\ \ 3 - 18 - 10 \\ \hline £\,61 -\ \ 6 - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 25\ \text{d} & 12 \\ \hline 1\ \text{d} & 2\ \text{sh} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 46\ \text{sh} & 20 \\ \hline 06\ \text{sh} & 2\ £ \end{array}$$

b) **Subtração.** 1) Efetuar a subtração:

$$\begin{array}{r} 18\ \text{h}\ \ 45\ \text{m}\ \ 12\ \text{s} \\ -\ 11\ \text{h}\ \ 23\ \text{m}\ \ 38\ \text{s} \\ \hline \end{array}$$

Não se podendo subtrair 38 s de 12 s, junta-se aos 12 s da terceira coluna, 1 m = 60 s da segunda coluna (que passa a ter 44 m) e efetua-se a subtração.

Disposição prática:

$$\begin{array}{r}
44\text{ m } 72\text{ s} \\
18\text{ h } \cancel{45}\text{ m } \cancel{12}\text{ s} \\
11\text{ h } 23\text{ m } 38\text{ s} \\
\hline
7\text{ h } 23\text{ m } 34\text{ s}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
12\text{ s} + 60\text{ s} = \\
-\,38\text{ s} \\
\hline
?
\end{array}
\begin{array}{r}
72\text{ s} \\
38\text{ s} \\
\hline
34\text{ s}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
44\text{ m} \\
-\,23\text{ m} \\
\hline
21\text{ m}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
18\text{ h} \\
-\,11\text{ h} \\
\hline
7\text{ h}
\end{array}$$

2) Efetuar a subtração: $48^\circ\ 12'\ 25'' - 35^\circ\ 43'\ 36''$

Disposição prática:

$$\begin{array}{l}
\qquad 71' \\
47^\circ\ \cancel{11}'\ 85'' \\
\left.\begin{array}{l}\cancel{48}^\circ\ \cancel{12}'\ \cancel{25}'' \\ 35^\circ\ 43'\ 36''\end{array}\right\} \\
\hline
12^\circ\ 28'\ 49''
\end{array}$$

c) **Multiplicação e Divisão.** Estudaremos os casos da *multiplicação* ou da *divisão* de um número complexo por um número inteiro. Para êsses casos, multiplica-se ou divide-se o número inteiro por cada uma das unidades do complexo, efetuando-se as *reduções* sempre que se fizerem necessárias. Exemplos:

1) Efetuar o produto de 5 por 25 d 30 h 12 m.

*Produtos especiais:*

$$\begin{array}{r}
25\text{ d } 30\text{ h } 12\text{ m} \\
\times 5 \\
\hline
4\text{ me } 11\text{ d } \ 7\text{ h } \ 0\text{ m}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
12\text{ m} \\
\times 5 \\
\hline
60\text{ m} \,\underline{|\ 60\ } \\
\ \ 0\,m \quad 1\text{ h}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
30\text{ h} \\
\times 5 \\
\hline
150\text{ h} \\
+1\text{ h} \\
\hline
151\text{ h}\,\underline{|\ 24\ } \\
\ \ 7\,h \quad 6\text{d}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
25\text{ d} \\
\times 5 \\
\hline
125\text{ d} \\
\quad 6\text{ d} \\
\hline
131\text{ d}\,\underline{|\ 30\ } \\
\ \ 11\,d \quad 4\,me
\end{array}$$

2) Efetuar a divisão de £ 144 – 19 – 2 por 7.

$$\begin{array}{r}
£\ 144 \\
04 \\
\times\ 20\text{ sh} \\
\hline
80\text{ sh}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
-\,19 \\
80 \\
\hline
99\text{ sh} \\
29 \\
1 \\
\times\ 12\text{ d} \\
\hline
12\text{ d}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
-\ \ 2 \\
12 \\
\hline
14\text{ d} \\
0
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
\ 7 \\
\hline
£\ 20 - 14 - 2
\end{array}$$



## PROBLEMAS DE APLICAÇÕES SÔBRE NÚMEROS COMPLEXOS

*a)* Determinar o valor da quinta parte de um ângulo cuja medida é de $23^\circ\ 18'\ 45''$.

Basta dividir por 5 o valor da medida do ângulo. Devemos ter:

$$\begin{array}{r}
23^\circ \\
3^\circ \\
\times\ 60 \\
\hline
180'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
18' \\
180' \\
\hline
198' \\
48' \\
3' \\
\times 60 \\
\hline
180''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
45'' \\
180'' \\
\hline
225'' \\
25'' \\
0
\end{array}
\quad
\begin{array}{|l}
\ 5 \\
\hline
4^\circ\ 39'\ 45''
\end{array}$$

O valor da quinta parte do ângulo é de $4^\circ\ 39'\ 45''$.

*b)* Exprimir quantos meses e dias contém a fração $\frac{3}{8}$ do ano.

Substituindo-se o *ano* por 12 meses e a fração de mês, caso exista, por 30 dias, temos resolvido o problema.

$$\frac{3}{8}\text{ a} = \frac{3}{8} \times 12\text{ me} = \frac{36}{8}\text{ me} = 4\,\frac{4}{8}\text{ me}$$

como: $$\frac{4}{8}\text{ me} = \frac{4}{8} \times 30\text{ d} = \frac{120}{8}\text{ d} = 15\text{ d}$$

Logo: $$\frac{3}{8}\text{ a} = 4\text{ me } 15\text{ d}$$

*c)* Converter 5 yd 2 ft em polegadas.

Como:

1 yd = 36 in, temos: 5 yd = 5 × 36 in = 180 in

1 ft = 12 in, temos: 2 ft = 2 × 12 in = 24 in total 204 in.

Logo: 5 yd 3 ft = 204 in.

*d*) Calcular $\frac{2}{3}$ de £ 180–16–9.

Basta multiplicar por 2 o número complexo £ 180–16–9 e dividir por 3 o resultado.

$$\begin{array}{r} \text{£ } 180-16-9 \\ \times 2 \\ \hline \text{£ } 361-13-6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} \text{£ } 361 & -13 & -6 & \;3 \\ \cline{4-4} 001 & -20 & 0 & \text{£ } 120-11-2 \\ & +20 & \overline{33} & \\ \cline{2-2} & 20 & 0 & \end{array}$$

Logo: $\frac{2}{3}$ de £ 180–16–9 = £ 120–11–2

*e*) Um operário ganha Cr$ 480,00 por 8 horas de trabalho. Quanto ganhou êsse operário por 25 d 13 h de trabalho?

Reduzindo o complexo 25 d 13 h à horas, temos: 613 h.

Por hora o operário ganha: Cr$ 60,00

Logo: em 24 d 13 h ganhará 613 × Cr$ 30,00 = Cr$ 3 678,00

## EXERCÍCIOS SÔBRE MEDIDAS NÃO DECIMAIS

1. Dizer:
   1.º) Quantos minutos há numa semana?
   2.º) Quantas horas há em duas semanas?
   3.º) Quantos segundos (ângulos) possui um arco de 42.º?
   4.º) Quantos minutos valem os 150 milésimos de um dia?
   5.º) Quantos pences há em £–30–12–5?
   6.º) Quantas polegadas há em 8 yd 1 ft 7 in?

2. Converter:
   1.º) 2 d 12 h 15 m em minutos;
   2.º) 4 a 8 me 12 d em dias;
   3.º) £ 14–0–8 em pence;
   4.º) 36° 12′ 30″ em segundos (ângulo).

3. Converter em número complexo:
   1.º) 116045″ — 3.º) 18540 minutos
   2.º) 1318 d (pence) — 4.º) 500 in



4. Efetuar as operações:
   1.º) 13 d 55 h 42 m + 8 d 34 h 39 m
   2.º) 28° 52′ 55″ + 36° 45′ 24″ + 8° 30′ 4″
   3.º) £ 54–12–4 – £ 18–19–10
   4.º) 5 yd 4 ft 2 in + 18 ft 3 in + 8 yd 7 in
   5.º) 68° 19′ 36″ – 12° 25′ 52″
   6.º) 90° – 36° 15′ 54″

5. Efetuar:
   1.º) (27 d 21 h 13 m) × 6
   2.º) (£ 171–1–2) : 13
   3.º) (3 a 6 me 20 d) : 5
   4.º) (30° 13′ 5″) × $\frac{2}{5}$
   5.º) $\frac{1}{3}$ × (180° – 53° 17′)

6. Exprimir quantos meses e dias contém a fração $\frac{5}{8}$ do ano.

7. Numa certa fábrica um operário trabalhou durante 2 a 10 me 15 d e outro durante 11 me 29 d. Qual é a diferença entre os tempos de trabalho dos dois empregados?

8. Uma pessoa nasceu em 18 de agôsto de 1930. Qual será a sua idade em 28 de Novembro de 1952?

9. As 9 horas da manhã acertou-se um relógio que atrasa 6 minutos em 24 horas. Que horas serão, na verdade, quando o relógio marcar 5 horas da tarde?

10. Um operário ganha por um serviço $\frac{2}{3}$ do que ganha um outro operário. Tendo o segundo operário recebido £ 310–19, quanto deverá receber o primeiro?

Respostas:

1. 1.º) 10 080 min; 2.º) 336 h; 3.º) 151 200″; 4.º) 216 min.; 5.º) 7 349 d (pences); 6.º) 307 in.
2. 1.º) 3 615 min.; 2.º) 1 692 dias; 3.º) 3 368 d (pence); 4.º) 130 350″;
3. 1.º) 32° 14′ 5″; 2.º) £ 5–9–10; 3.º) 12 d 21 h; 4.º) 13 yd 2 ft 8 in.
4. 1.º) 24 d 18 h 21 m; 3.º) £ 35–12–6; 5.º) 55° 53′ 44″; 2.º) 74° 8′ 23″; 4.º) 20 yd 2 ft 0 in; 6.º) 53° 44′ 6″.

5. 1.º) 5 me 17 d 7 h 18 m; 2.º) £ 13-3-2; 3.º) 8 me 16 d; 4.º) 12º 5′ 14″; 5.º) 42º 14′ 20″.
6. 7 me 15 d.
7. 1 a 10 me 16 d.
8. 22 a 3 m 10 d.
9. 4 h 58 m.
10. £ 207-6.

## UNIDADES DE VELOCIDADE. VELOCIDADE ANGULAR

Para a medida de velocidade (*) a unidade é o *metro por segundo*.

*Metro por segundo* é a velocidade de um móvel que, animado de um movimento retilíneo uniforme (**), percorre uma distância de 1 metro durante 1 segundo.

Indicação: *m/s*

UNIDADE, MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS

| NOMES | SÍMBOLOS | VALORES |
|---|---|---|
| metro por segundo......... | *m/s* | 1 *m/s* |
| metro por segundo......... | *m/min* | $\frac{1}{60}$ m/s |
| centímetro por segundo..... | *cm/s* | $\frac{1}{100}$ m/s |
| quilômetro por hora........ | *km/h* | $\frac{1}{3,6}$ m/s |

Outras unidades (***) de velocidade podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo acima

(*) *Velocidade de um movimento:* é o quociente entre o espaço percorrido e o tempo empregado em percorrê-lo. Indicação: $v = e/t$ sendo $e$ = espaço e $t$ = tempo.

(**) *Movimento retilíneo:* é aquêle no qual o móvel percorre espaços iguais em tempos iguais, tendo por trajetória uma reta.

(***) Legislação metrológica. I.P.T. — São Paulo. Pág. 60 — 1.º quadro.



mencionados, o metro por qualquer unidade legal de comprimento e o segundo por qualquer unidade legal de tempo.

Para medir a velocidade de embarcações pode ser utilizado o *nó*, considerado como equivalente a 1 milha marítima internacional (1 852 m) por hora.

Logo: nó = 1 852 m/h. Indicação: M/h

A *mudança de unidades* é feita mediante operações que levem as antigas unidades de comprimento e tempo nas novas unidades. Exemplos:

1.º) Reduzir 90 km/h em m/s.

Como:

1 km = 1 000 m

1 h = 3 600 s segue-se que 90k m/h = $\frac{90\,000}{3\,600}$ m/s = 25 m/s

2.º) Exprimir 180 m/min em km/h.

$$180 \text{ m/min} = \frac{0{,}180}{\frac{1}{60}} \text{ km/h} = 0{,}180 \times 60 \text{ km/h} = 10{,}8 \text{ km/h}$$

3.º) Converter a velocidade de 28 nós em km/h.

Sendo: 1 nó = 1 852 m/h

temos: 28 nós = 28 × 1 852 m/h = 51 856 m/h = 51,856 km/h

### Velocidade angular (*)

Unidade legal: *radiano por segundo.*

*Radiano por segundo* é a velocidade angular de um móvel que, animado de um movimento de rotação uniforme, gira de 1 ângulo de 1 *radiano* (**) durante 1 segundo.

(*) *Velocidade angular* de um movimento de rotação uniforme é um ângulo descrito pelo móvel na unidade de tempo. (Êste ângulo é medido pelo arco descrito com o raio igual à unidade.)

(**) *Radiano:* é um arco de comprimento igual ao raio.

Indicação: *rd/s*.

| UNIDADE, MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS | | |
|---|---|---|
| NOMES | SÍMBOLOS | VALORES |
| radiano por segundo........ | *rd/s* | 1 rd/s |
| rotação por segundo (ou volta por segundo)....... | *r. p. s.* | $2\pi$ rd/s |
| rotação por minuto (ou volta por minuto ............. | *r. p. m.* | $\frac{2\pi}{60}$ rd/s |

A *mudança de unidades* é feita do mesmo modo que a das unidades de velocidade. Exemplos:

1.°) Exprimir uma velocidade angular de 10 rotações por segundo (r. p. s.) em rd/s.

Como: 1 r. p. s. = $2\pi$rd/s

segue-se que:

$$\frac{10 \times 2\pi \text{rd}}{1 \text{ s}} = \frac{20\pi \text{rd}}{1 \text{ s}} = \frac{20 \times 3{,}14 \text{ rd}}{1 \text{ s}} = 62{,}8 \text{ rd/s}$$

*Resposta:* 10 r. p. s. = 62,8 rd/s

2.°) Converter 125, 6 rd em r. p. s.

Sendo: $2\pi$rd/s = 1 r. p. s.

segue-se que: $1 \text{ rd/s} = \frac{1}{2\pi} \text{ r. p. s.}$

e $$125{,}6 \text{ rd/s} = \frac{125{,}6 \text{ r. p. s.}}{2\pi} = \frac{62{,}8 \text{ r. p. s.}}{3{,}14} = 20 \text{ r. p. s.}$$

*Resposta:* 125,6 rd = 20 r. p. s.



## EXERCÍCIOS SÔBRE UNIDADES DE VELOCIDADE

1. Quantos m/s existem em 108 km/h?
2. Quantos m/min existem em 30 nós?
3. Converter:
   1.°) 30 m/s em km/h;
   2.°) 18 km/min em dam/s.
4. Um trem percorre 1 482 metros em um minuto. Quantos quilômetros terá percorrido em duas horas e meia?
5. Um automóvel vai de uma cidade à outra, que distam entre si 256 km, em 4 horas. Determinar, em km/h, a velocidade dêsse automóvel.
6. Qual é a velocidade, em m/s, de uma lancha, cujo motor desenvolve 12 nós?
7. Qual é a velocidade, em km/h, de um transatlântico que desenvolve 33 nós?
8. A velocidade com que um automóvel vai de São Paulo ao Rio de Janeiro é de 71 km/h. Sabendo-se que levou 6 horas para efetuar essa viagem, qual foi a distância percorrida?
9. Exprimir uma velocidade angular de 1 200 r. p. m. em rd/s.
10. Converter 188,40 rd/s em r. p. s.

RESPOSTAS:

1. 30 m/s
2. 926 m/min
3. 1.°) 108 km/h;
   2.°) 30 dam/s
4. 222,300 km
5. 64 km/h
6. 370,4 m/min = $6\frac{13}{75}$ m/s
7. 61,116 km/h
8. 426 km
9. 125,6 rd/s
10. 30 r. p. s.

# EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO

## SÔBRE EXPRESSÕES NUMÉRICAS E PROBLEMAS

### I. Expressões numéricas

#### a) NÚMEROS INTEIROS

1. $(5 + 3) + (7 - 5)$
2. $(8 + 1 + 3) + (19 - 10)$
3. $(14 + 3 + 5) - (34 - 20)$
4. $(17 + 2 - 6) - (6 + 3)$
5. $8 + (12 - 2) - (45 - 40)$
6. $44 - (28 - 13) - (16 - 12)$
7. $20 - (8 + 2 + 7)$
8. $7 + (3 + 2) - (6 + 4 + 1)$
9. $5 + (20 + 14) - (21 - 13)$
10. $35 - (20 - 16) - (9 + 7 + 3)$
11. $47 + (10 - 4) - (29 - 14) - (8 + 7 + 8 + 10)$
12. $5 - [7 - (6 - 4)]$
13. $13 - [5 + (5 - 2)]$
14. $(33 - 8) - [(21 + 5) - (13 - 8)]$
15. $(6 + 9 + 5) - [7 + (6 - 4) - (13 - 6)]$
16. $130 - \{15 + (11 - 7) - [9 - (7 - 3)]\}$
17. $21 - [22 - (4 + 5 + 2)] - \{15 - [(19 - 4) - (7 - 3)]\}$
18. $133 - [(35 + 8) - (12 - 3)] - \{(17 + 4) - [15 - (11 - 9)]\}$
19. $[(18 + 6) : (4 \times 2) + 5 \times 3] : 6 + (125 \times 5 - 11 \times 5) : 10$
20. $[3 \times (7 - 2) - (4 \times 2) : (14 - 10)] \times 3 + (2 + 15 \times 2) : 8$
21. $(16 + 4) : 5 + (3 \times 8) : [12 - (1 + 4 \times 2)] - 15 : (2 + 6 : 2)$
22. $(21 - 7) : 7 + 25 : [10 + (7 + 4 \times 2)] - 3 : (9 - 2 \times 4)$
23. $(3 + 4 \times 5) . (20 - 32 : 4) - 3 \times [17 - (6 + 2 \times 3) : 4] : (9 - 4 \times 2)$
24. $(20 - 7 \times 2) : (21 - 5 \times 3) + [1 + (6 + 2 \times 6) : 6] . (8 + 10 : 5)$
25. $[60 - (31 - 6) \times 2 + 15] : [3 + (12 - 5 \times 2)]$

26. $[25 \times 3 \times (17 - 5 \times 3)] : [3 \times (7 - 5) . (1 + 3 \times 8)]$
27. $[(29 - 14) \times 5 \times (15 + 3 \times 7)] : [5 \times (16 - 7 \times 2) . (15 - 5 \times 2)]$
28. $[(39 : 3) . (9 + 5 \times 2)] : [(1 + 3 \times 6) . (31 - 6 \times 5)] + 14 : (2 \times 5 - 3)$
29. $[74 - 12 : (11 - 4 \times 2)] : 7 + 120 : [15 + (17 - 4 \times 3) \times 3]$
30. $[260 \times (18 - 27 : 3) - 180 : (15 + 10 : 2)] : 3 - 60 : 5$
31. $[150 : (20 - 3 \times 5) + 15 \times (9 + 4 \times 5)] : 5 + 12 \times 2$
32. $200 \times (15 + 3 \times 9) - 40 : [15 \times (6 \times 2 - 10) - 80 : (12 - 4 \times 2)]$
33. $60 : (28 - 8 \times 2) + 3 \times [18 : (1 + 4 \times 2) - 17 : (3 \times 2 + 11)]$
34. $[18 : 6 + 2 \times (7 + 14) : 7] . [6 + 4 \times 2 - 24 : 4] + 15 : 3$
35. $[400 : 10 + 50 \times (11 - 5) : 3] : [7 + 5 \times 7 - 84 : 3] + 3 \times 4$
36. $[(5 - 8 : 4) . (5 + 18 : 6 + 7 \times 3) + 35 : 7] : 2 - 6 : (7 - 4)$
37. $[(21 - 6 \times 3 + 36 : 4) : (17 - 3 \times 2 - 16 : 2) + 3] \times 3 + 5 \times (3 + 4)$
38. $\{240 - 3 \times [24 - (2 + 5) . (9 - 6)] - 180 : 9\} . (2 + 3 \times 4)$
39. $\{16 + 8 \times [28 - (15 - 3) : (5 + 1)] - 24 : 3\} : [14 - 3 \times (5 - 3)]$
40. $\{230 - 3 \times [24 - 6 \times (13 - 5 \times 2) : 3^2] : 11\} \times 3 + 4$
41. $\{[2^3 \times 5 \times 7] : (2 \times 7) + 5 \times [3+6\times(4+5\times2) : (3\times5 - 2^3)] : 3\} :$
$: [(2^2 \times 3 \times 5) : 4]$
42. $3^4 \times 2 + 150 : (9 - 4)^2 - 3^2 \times 5 + 24 : (2^4 - 10)$
43. $4^3 : 2^4 + (50 \times 2^2) : (1 + 3 \times 2^3) + 2 \times 5^2 - 36 : (2^2 + 5)$
44. $6^2 + 5 \times (2^3 \times 3 - 20 : 2^2 + 1^0) - (3^2 + 2^2 \times 5 + 1^8) : (21 - 4^2)$
45. $3^1 \times 2^2 + 2^3 \times (3^2 - 2 \times 5^2 : 5^2) : (2 \times 5 - 3) - 2 \times 3^3 : (17 - 2^3)$
46. $\{2 + 4^2 : (2 \times 5 - 3^2) . [3 + 2^2 \times (17 + 2^3)] + 5^3\} : 5^2$
47. $\{3^3 : (4^2 - 7) . [19 - 2 \times (11 - 3^2)] - 3^2\} : 3^2$
48. $5^3 + 2^2 \times (2^2 \times 3 - 2^3)^3 - (5 + 2^2) : (2^3 - 5) + (3^2 + 1)^2 : (2^2 + 2^4)$
49. $11^2 + 5^1 \times 3 : (2^2 \times 7 - 3^3) + (7 - 2^2) : (9 - 8)^6 + (2^4 + 5)^2 : (5^2 - 2^2)$
50. $(15 - 5)^3 + 2^5 : (3^3 - 2^2 \times 3 - 11)^2 - 3 \times (3^3 - 2^3 \times 3 + 1^8)$

*Respostas:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. 10 | 11. 5 | 21. 9 | 31. 117 | 41. 3 |
| 2. 21 | 12. 0 | 22. 0 | 32. 8 396 | 42. 127 |
| 3. 8 | 13. 5 | 23. 234 | 33. 8 | 43. 58 |
| 4. 4 | 14. 4 | 24. 41 | 34. 77 | 44. 130 |
| 5. 13 | 15. 18 | 25. 5 | 35. 22 | 45. 14 |
| 6. 25 | 16. 116 | 26. 1 | 36. 44 | 46. 71 |
| 7. 3 | 17. 6 | 27. 54 | 37. 56 | 47. 4 |
| 8. 1 | 18. 91 | 28. 15 | 38. 2 954 | 48. 383 |
| 9. 31 | 19. 60 | 29. 14 | 39. 27 | 49. 130 |
| 10. 12 | 20. 43 | 30. 765 | 40. 676 | 50. 990 |



## b) NÚMEROS INTEIROS E FRACIONÁRIOS

51. $\left(3 + \frac{1}{7}\right) : 11$

52. $25 : \left(4 + \frac{7}{2}\right)$

53. $\left(5 + \frac{5}{8}\right) : \left(4 + \frac{7}{12}\right)$

54. $\dfrac{3 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{4}} : \dfrac{14}{9}$

55. $\left(\frac{33}{21} - \frac{44}{28} + \frac{55}{35}\right) : \frac{11}{7}$

56. $\left[1 : \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] - \left[1 : \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right]$

57. $\left(5 + \frac{1}{4}\right) : \left[\left(7 + \frac{2}{9}\right) : \left(9 + \frac{2}{7}\right)\right]$

58. $\left[\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{5} : \frac{12}{25}\right] \times \frac{5}{2} - \frac{1}{8}$

59. $\left[\left(\frac{2}{3} + 2 : \frac{12}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right] : \left(1 + \frac{3}{20}\right) + \frac{3}{5}$

60. $\left[\left(5 - \frac{5}{9}\right) : \left(6 - \frac{4}{9}\right)\right] . \left[\left(3 + \frac{1}{4}\right) : \frac{26}{5}\right] : \left(\frac{42}{30} : \frac{14}{20}\right)$

61. $\left(\frac{4}{7} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) : \left(\frac{45}{21} : \frac{24}{10}\right)$

62. $\left[\left(4 + \frac{4}{5}\right) : \frac{32}{10}\right] : \left[\left(5 + \frac{5}{8}\right) : \left(6 + \frac{3}{7}\right)\right] : \left(\frac{40}{42} : \frac{5}{4}\right)$

63. $\left[\left(33 + \frac{1}{3}\right) : \left(11 - \frac{1}{11}\right)\right] : \left[\left(4 - \frac{4}{7}\right) : \frac{27}{35}\right]$

64. $\left\{\frac{16}{18} - \left[\frac{4}{6} + \frac{7}{15} - \left(\frac{1}{12} + \frac{8}{10}\right) + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right]\right\} \times 10$

65. $\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\left[\left(2+\frac{2}{3}\right):\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]\right\}:\frac{9}{4}$

66. $\left(1-\frac{5}{8}\right)\cdot\left[\left(4+\frac{1}{6}\right):\left(4-\frac{1}{4}\right)\right]:\frac{5}{12}$

67. $\left[\left(\frac{2}{5}\times\frac{6}{8}+3\right)-\frac{2}{7}:\frac{8}{42}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}\right]\times\left(1+\frac{1}{4}:2\right)$

68. $\frac{3}{20}:\left\{\frac{7}{12}-\left[\frac{14}{15}+\frac{6}{9}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{12}-\frac{4}{5}\right]:\frac{9}{12}\right\}$

69. $\frac{20}{11}+\frac{5}{4}-\left[\frac{11}{8}:\frac{3}{4}-\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)\times 9+\left(3+\frac{1}{4}\right):\left(3+\frac{2}{3}\right)\right]:\frac{9}{11}$

70. $\left\{\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)+\left[\left(\frac{6}{5}-\frac{2}{3}\right):\frac{5}{6}+\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{4}\right)\right]\right\}:\frac{243}{200}-1$

71. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^3\right];\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+2+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]$

72. $\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^3:\left(3+\frac{1}{3}\right)^3\right]:\left(1-\frac{1}{5}\right)^2$

73. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{5}{8}+\frac{1}{12}}$

74. $\dfrac{\left(3+\frac{2}{5}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)}{5-\frac{1}{10}}$

75. $\dfrac{\left(3+\frac{1}{4}\right):\left(5-\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{1}{4}}$

76. $\dfrac{\left(2\frac{3}{1}-1\frac{4}{5}\right):\left(1\frac{3}{4}\right)}{\left(3+\frac{4}{5}\times 10\right)-\left(\frac{1}{2}\times 2-1\right)}:\frac{32}{165}$



77. $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{3}{16}:\frac{9}{4}}{\frac{11}{16}-\frac{1}{4}\times\frac{9}{4}}-\dfrac{\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}}{\frac{7}{12}-\frac{1}{4}:\frac{3}{4}}$

78. $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}:4}{\frac{3}{8}-\frac{1}{6}+\frac{5}{12}}\times\left(2-\frac{1}{3}\right)$

79. $\dfrac{\dfrac{\frac{9}{2}}{3}+\dfrac{6-\frac{4}{3}}{7}}{\dfrac{5}{24}}+\dfrac{\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{10}+\dfrac{1}{8}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}}$

80. $\dfrac{4-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\frac{1}{8}+\frac{139}{40}}-1$

81. $\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{4}}{4}}{\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}}$

82. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}$

83. $\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{4}}{4}}{\dfrac{21}{16}}$

84. $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}}{2}}{1-\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

85. $$\frac{\left[\left(5+\frac{3}{4}\right)-\left(4+\frac{3}{5}\right)\right] : \left[\left(6+\frac{2}{3}\right)-\left(4+\frac{1}{6}\right)\right]}{\left[\left(5+\frac{3}{4}\right) : \left(4+\frac{3}{5}\right)\right] \times \left[\left(6+\frac{2}{3}\right) : \left(4+\frac{1}{6}\right)\right]}$$

86. $$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

87. $$\frac{\frac{3}{2^3}+\frac{3}{4^2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{11}{4^2}-\frac{1}{4}:\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{3}\right)^2:\frac{2^3}{3}}{\frac{7}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^2:\frac{3}{2^2}}$$

88. $$\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}:\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}{3-\frac{2}{3}:\left(3-\frac{5}{3}\right)^2}-\frac{1-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{6}}\times\frac{5}{4}$$

89. $$1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}}$$

90. $$\frac{\frac{3}{4}\times\left\{\frac{1}{6}+\frac{5}{2}\times\left[\frac{5}{9}-\frac{\frac{1}{4}\times\left(2-\frac{2}{5}\right)}{\frac{3}{2}-\frac{3}{8}}\right]\right\}}{\left[\frac{2}{3}+3\times\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]\times\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

*Respostas:*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51. | 2/7 | 61. | 1/2 | 71. | 1/6 | 81. | 21/10 |
| 52. | 10/3 | 62. | 9/4 | 72. | 1/10 | 82. | 9/10 |
| 53. | 27/22 | 63. | 11/16 | 73. | 6/5 | 83. | 1 |
| 53. | 1 | 64. | 8/9 | 74. | 1 | 84. | 45/4 |
| 54. | 1 | 65. | 2/3 | 75. | 1 | 85. | 23/100 |
| 56. | 0 | 66. | 1 | 76. | 1 | 86. | 1/12 |
| 57. | 27/4 | 67. | 27/20 | 77. | 3 | 87. | 19/6 |
| 58. | 3 | 68. | 9/11 | 78. | 4/3 | 88. | 0 |
| 59. | 1 | 69. | 287/297 | 79. | 54/5 | 89. | 5/2 |
| 60. | 1/4 | 70. | 0 | 80. | 0 | 90. | 4 |



## c) NÚMEROS DECIMAIS

91. $5{,}41 \times 0{,}2 + 3{,}4 : 0{,}25$

92. $(4{,}3 + 0{,}912) - (10 - 9{,}813)$

93. $(3{,}069 + 0{,}032) - (3{,}1 + 0{,}001)$

94. $3{,}1 + 3 \times 0{,}21 - 0{,}2 \times 0{,}5 + 7 \times (0{,}021 - 0{,}008)$

95. $(5 - 3{,}41) \times 0{,}2^3 + (2{,}1 - 0{,}9)^2 \times 5{,}1 - 0{,}03^4$

96. $(1 - 0{,}2 \times 3)^3 \times 5{,}2 - 0{,}21) + 3{,}4 \times (2 + 0{,}3 \times 0{,}4)^2$

97. $\dfrac{1{,}25 + 2{,}5 + 7}{1{,}6 \times 0{,}5 - 0{,}3} \times 2{,}4 + 3 : 0{,}001$

98. $\dfrac{0{,}8 \times 0{,}09 + (2{,}8 - 0{,}08) : 3{,}4 - 0{,}022}{(0{,}07 + 7{,}9507 : 18{,}49) : 0{,}25}$

99. $\dfrac{0{,}5625 - 0{,}16}{0{,}225 + 0{,}12} \times \left(\dfrac{0{,}75 \times 0{,}5 \times 0{,}1}{0{,}075 - 0{,}04} - \dfrac{0{,}3}{0{,}5 \times 0{,}69}\right) : \dfrac{0{,}2}{0{,}23}$

100. $\left(\dfrac{0{,}45}{0{,}75 \times 0{,}3 - 0{,}12} - \dfrac{0{,}105}{0{,}0805}\right) \times \dfrac{0{,}4025}{0{,}75 : 6{,}25 + 0{,}225}$

101. $0{,}\overline{36} + 0{,}0\overline{18} + 0{,}0\overline{423}$

102. $0{,}\overline{536} - 0{,}\overline{27}$

103. $0{,}0\overline{45} \times 0{,}\overline{990} \times 0{,}\dot{1}$

104. $2{,}5 + 0{,}0\overline{84} : 0{,}\overline{42}$

105. $(3{,}5 + 0{,}\dot{4}) : [2{,}1\dot{6} \times (4{,}5 - 1{,}\dot{6}) - 0{,}\dot{7} - 2{,}5]$

106. $\left[\left(1\frac{1}{4} \times 1{,}8 - 1{,}\dot{6} \times 1\frac{1}{5}\right) : \left(3{,}5 : 2 + 4\frac{1}{4} : 11{,}\dot{3}\right)\right] \times (0{,}28\dot{3} \times 60)$

107. $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{3} \times 0{,}6 - \dfrac{0{,}0\dot{3} \times 0{,}9}{1 - 0{,}88}$

108. $\dfrac{1{,}1\dot{3} - 0{,}\dot{6}}{0{,}2325 : 0{,}31} : \dfrac{5\frac{3}{4} + 1{,}25}{0{,}09 \times 1\,000}$

109. $\dfrac{16{,}\overline{36} + 0{,}09 \times 3{,}\dot{3}}{0{,}\overline{69} \times 6{,}5 - 2{,}8\overline{63}}$

110. $\dfrac{0{,}11}{(1{,}\dot{3} - 0{,}5\dot{3}) \times 0{,}4} : \dfrac{0{,}4}{2 \times \left(0{,}\dot{3} + \frac{2}{3}\right)}$

*Respostas:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 91. | 14,682 | 101. | 5 179/12210 |
| 92. | 5,025 | 102. | 29/110 |
| 93. | 0 | 103. | 5/999 |
| 94. | 3,721 | 104. | 2,7 |
| 95. | 7,35671919 | 105. | 142/103 |
| 96. | 15,60032 | 106. | 2 |
| 97. | 3 051,60 | 107. | 0,7 |
| 98. | 0,425 | 108. | 8 |
| 99. | 13/48 | 109. | 5 499/550 |
| 100. | 80/23 | 110. | 275/16 |

## *d*) NÚMEROS RELATIVOS

### Adição e subtração

111. ( + 3) + ( + 5)
112. ( − 4) + ( − 11)
113. ( + 8) + ( − 12)
114. ( − 7) + ( + 16)
115. ( − 2 009) + ( − 1)
116. ( − 300) + ( + 300)
117. ( − 12) + 0
118. ( + 1 000) + ( − 1 001)
119. 0 + ( + 215)
120. ( − 26) + ( − 26)
121. ( + 15) − ( + 19)
122. ( + 12) − ( − 20)
123. ( − 7) − ( + 8 )
124. ( − 11) − ( + 14)
125. ( − 13) − ( − 2 )
126. ( − 15) − ( + 18)
127. 0 − ( + 7)
128. 0 − ( − 13)
129. ( + 12) − ( + 12)
130. ( − 1) − ( − 1)

### Expressões

131. ( − 5) + ( + 6) − ( − 2) + ( − 11) + ( − 4) − ( − 3) − ( + 7) + + ( − 11) + ( + 5) − ( + 13)
132. ( + 3) + ( − 10) + ( − 4) − ( − 17) + ( − 5) + ( − 18) − ( − 5) + ( + 17) − ( + 25)
133. 11 + [ − 7 − (3 − 5 − 7)]
134. − 5 − [ + 8 − ( − 2 + 5)]
135. − 12 − [8 + ( − 11 − 4 + 8)]
136. − 4 + { − 3 − [ − 4 + ( − 8 + 3)]}
137. − 4 − {11 − [ − 6 − 12 + ( − 4 + 6 − 11) − 7] − 4}
138. − (4 − 15) − { + 10 − [ − 8 − ( − 11 + 2) + ( − 2 + 10)] − 7 }



### Multiplicação e divisão

139. ( + 7) . ( + 9)
140. ( − 4) . ( + 6)
141. ( + 8) . ( − 11)
142. ( − 7) . ( − 5)
143. ( − 12) . 0
144. 0 . ( − 9)
145. ( + 3) . ( − 2) . ( − 5)
146. ( − 4) . ( + 2) . 0
147. ( − 8) . ( + 2) . ( − 3) . ( + 4)
148. ( − 5) . ( + 6) . ( − 2) . ( − 7)
149. ( − 6) . 0 . ( + 3) . ( − 2) . ( − 5)
150. (4 − 7 − 6) . ( − 2)
151. ( − 10 − 7 + 2) . ( + 5)
152. ( − 6) . ( − 11 + 5 − 6)
153. ( − 6 + 5) . ( − 2 + 3)
154. ( − 2 + 3 − 4) . ( − 5 − 2 + 3)
155. ( − 15) : ( + 5)
156. ( + 8) : ( − 2)
157. ( − 18) : ( − 6)
158. ( − 4) : ( − 2)
159. ( − 3) : ( + 3)
160. 0 : ( − 8)

### Expressões

161. ( − 7 + 9 − 15 − 3 + 43) : ( − 9)
162. ( − 20 + 32 − 5 + 78) : ( − 9 + 5 − 13)
163. ( − 264) : ( − 8 − 3 − 1 + 23)
164. [5 . ( − 12) − ( − 15) . 7] : ( − 3)
165. [3 . 14 + 6 . ( − 21)] : ( + 7)
166. [4 . ( − 9) + ( − 5) . 6 − 2 . ( − 12)] : ( − 3)
167. 4 . [( − 3) . 15 − 10 . ( − 7) + ( − 5) . ( − 13)] : 5

### Potência

168. $(-2)^3$
169. $(-3)^6$
170. $(+1)^8$
171. $(+3)^2$
172. $(-2)^4$
173. $(-1)^5$
174. $(-11)^2$
175. $(-10)^5$

### Expressões

176. $(-6)^2 + (-5)^3 + (-4)^4 + (-3)^5 + (-2)^6$
177. $(-2) + (-2)^2 - (-2)^3 + (-2)^4$
178. $(-7)^2 . (-2)^3 - (-5)^2 . (-2)^4 - (-1) . (-2)^3 . (-3)^3 + (-5)^2$
179. $(-5)^2 - [6 - (-2)^3 . 2]$
180. $(-1)^5 + [(-2)^3 - (+5)^3] \times (-3)$
181. $[(-2)^4 - (-1)^6 \times (+4)^3] : [(-8) + (-4)]$
182. $15 - \{(-1)^4 - [7 - (+3)^2 + 1]\}$
183. $120 - \{(-2)^3 - [(-2)^2 - (+5)^2 - 3]^2\} - (-2)^2$
184. $70 - \{(-5)^2 - [(-1)^7 - (+2)^3 - 8] + (-5)^2\}$
185. $(-2)^2 . (-2)^3 + [(-2)^3 + (-1)^2 . (-3) . (-1)^7] \times (-1)^{12}$
186. $[(-5)^2 . (-1)]^2 . (-1)^7 - \{(-2)^3 - (-7)^2 - [(-2) \ (-3) . (-1) (-3)^2 . (-1)]\}$
187. $(-3) . (-2) . (-1) - [(-3)^2 - (-2)^3] \times (-2) . (-1)^8$
188. $(-3)^2 . (-2)^3 . (-1) - \{[(-3)^3 . (-2)]^2 : [(-2)^4 - (+2)^3 + (-2)^2]\}$
189. $(-7) . (-5) - [(-2)^2 . (-3)^3 + (-5)^2 . (-1)^{12}]$
190. $(-2)^6 . (-1)^{16} - [(-5)^2 . (-2) - (-2)^5 . (-1)^8]$

*Respostas:*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111. | + 8 | 131. | − 35 | 151. | − 75 | 171. | + 9 |
| 112. | − 15 | 132. | − 20 | 152. | + 72 | 172. | + 16 |
| 113. | − 4 | 133. | + 13 | 153. | − 1 | 173. | − 1 |
| 114. | + 9 | 134. | − 10 | 154. | + 12 | 174. | + 121 |
| 115. | − 2 010 | 135. | − 13 | 155. | − 3 | 175. | − 100 000 |
| 116. | 0 | 136. | + 2 | 156. | − 4 | 176. | − 12 |
| 117. | − 12 | 137. | − 45 | 157. | + 3 | 177. | + 26 |
| 118. | − 1 | 138. | + 17 | 158. | + 2 | 178. | − 551 |
| 119. | + 215 | 139. | + 63 | 159. | − 1 | 179. | + 3 |
| 120. | − 52 | 140. | − 24 | 160. | 0 | 180. | + 398 |
| 121. | − 4 | 141. | − 88 | 161. | − 3 | 181. | + 4 |
| 122. | + 32 | 142. | + 35 | 162. | − 5 | 182. | + 13 |
| 123. | − 15 | 143. | 0 | 163. | − 24 | 183. | + 700 |
| 124. | − 25 | 144. | 0 | 164. | − 15 | 184. | + 3 |
| 125. | − 11 | 145. | + 30 | 165. | − 12 | 185. | − 37 |
| 126. | − 33 | 146. | 0 | 166. | + 14 | 186. | − 514 |
| 127. | − 7 | 147. | + 192 | 167. | + 72 | 187. | + 28 |
| 128. | + 13 | 148. | − 420 | 168. | − 8 | 188. | + 81 |
| 129. | 0 | 149. | 0 | 169. | + 729 | 189. | + 118 |
| 130. | 0 | 150. | + 18 | 170. | + 1 | 190. | + 82 |



## II. Problemas

### a) SÔBRE NUMERAÇÃO

191. Qual dos números de dois algarismos é o maior? Qual é o menor?

192. Quais são os números compreendidos entre 40 e 50 que contém mais dezenas do que unidades?

193. Quais são os números compreendidos entre 70 e 80 que possuem mais unidades do que dezenas?

194. Quantos números existem de um algarismo? Quantos existem de dois?

195. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os números inteiros de 1 a 68.

NOTA: de 1 a 9 temos 9 n.os de 1 alg. ou $9 \times 1 = 9$ (alg.)
de 10 a 68 temos 59 n.os de 2 alg. ou $59 \times 2 = 118$ (alg.)
*Total*. . . . . 127 (alg.)

196. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os números inteiros de 32 a 176.

NOTA: de 32 a 99 temos 68 n.os de 2 alg. ou $68 \times 2 = 136$ (alg.)
de 100 a 176 temos 77 n.os de 3 alg. ou $77 \times 3 = 231$ (alg.)
*Total*. . . . . 367 (alg.)

197. Para numerar as páginas de um livro foram necessários 258 tipos. Quantas páginas tem êsse livro?

NOTA: para paginar as 9 primeiras usaram-se $9 \times 1 = 9$ (tipos)
para paginar as 90 seguintes usaram-se $90 \times 2 = 180$ (tipos)
Logo, as 99 primeiras páginas usaram. . . . . . . . 189 (tipos)

Os tipos restantes: $258 - 189 = 69$ foram empregados para numerar as páginas de 3 algarismos, ou seja $69 : 3 = 23$ páginas. O livro conterá assim 99 pág. + 23 pág. = ***122 pág.***

198. Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 78, de 1 a 756, de 1 a 2 507, de 50 a 2 000.

199. Um livro tem 187 páginas. Quantos algarismos são necessários para numerá-las?

200. Para numerar as páginas de um livro usaram-se 171 tipos. Quantas páginas tem o livro?

201. Certa pessoa, escrevendo a sucessão dos números inteiros, interrompeu seu trabalho em um certo número. Em que número parou, se, até êsse número, empregou 1 506 algarismos?

202. Escreva o maior número de três algarismos todos diferentes. Idem para quatro e cinco algarismos.

203. Escreva o menor número de três algarismos todos diferentes. Idem para quatro e cinco algarismos.

204. Escreva o maior número de quatro algarismos todos diferentes que comece por 7. Idem de três algarismos que comece por 28. Idem de dois que comece por 3.

205. Escreva, em ordem de grandeza crescente, todos os números que se possam formar com os algarismos 3, 7 e 4.

206. Escreva, em ordem de grandeza decrescente, todos os números que se possam formar com os algarismos 1, 7 e 2.

207. Entre os algarismos do número 54, coloca-se um zero. Estudando a mudança do valor relativo de cada algarismo, que alteração sofre o número?

*Respostas:*

191. 99; 10
192. 40, 41, 42, 43
193. 78, 79
194. 9; 90
195. 127
196. 367
197. 122
198. 147; 2 160; 8 921; 6 804
199. 453
200. 90
201. 538
202. 987; 9 876; 98 765
203. 102; 1 023; 10 234
204. 7 986; 289; 39
205. 347; 374; 437; 473; 734; 743
206. 721; 712; 271; 217; 172; 127
207. Aumenta de 450 unid.

## b) SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

208. O produto de dois números é 156 e um dêles é 12. Calcular o outro.

209. De quanto aumenta o quociente de uma divisão, se o dividendo aumenta do divisor?

210. Um correio vai de uma cidade a outra em 12 h percorrendo 16 km por hora. Quanto tempo levaria, se a sua velocidade fôsse de 24 km por hora?

211. Distribuir Cr$ 2 200,00 entre quatro pessoas, de modo que a primeira e a quarta recebam Cr$ 1 320,00, as três primeiras juntas Cr$ 1 580,00 e a primeira, a terceira e a quarta Cr$ 1 700,00.

212. Um atirador combinou pagar Cr$ 20,00 por tiro que errasse, recebendo Cr$ 50,00 por tiro que acertasse. Depois de 13 tiros, recebeu Cr$ 300,00. Quantos tiros acertou?

213. Dois operários ganham juntos Cr$ 45,00 por hora. No fim de 18 horas o primeiro recebe Cr$ 450,00 Quanto recebeu cada um dêles por hora?



214. Um avô tem 74 anos e seus quatro netos, 5, 7, 11 e 12 anos, respectivamente. No fim de quantos anos será a idade do avô igual a soma das idades dos netos?

215. Repartir Cr$ 7 488,00 entre três pessoas de modo que a parte da primeira seja o triplo da segunda e a desta o dôbro do da terceira.

216. A diferença entre dois números é 240. Somando 50 a cada um o maior torna-se o quadruplo do menor. Determinar êsses números.

217. Um livreiro comprou oito caixas devendo conter cada uma, 12 caixinhas de penas a razão de Cr$ 6,00 a caixinha. Em cada caixa houve extravio de duas caixinhas. Por quanto o livreiro deve vender cada caixinha de penas para ter um lucro total de Cr$ 64,00?

218. Quando os gêmeos Osvaldo e Dorina nasceram, Zelinda tinha 7 anos. Atualmente a soma das idades dos três é 76 anos. Calcule a idade atual de Zelinda.

219. Meu irmão nasceu 2 anos antes de mim e minha irmã é mais moça 4 anos do que eu. Quando a soma das idades dêsses dois irmãos fôr 30 anos, que idade terei?

220. Nelson tomou 48 livros de 200 fôlhas cada um e fez com êles 9 pilhas iguais, sobrando apenas 3 livros. Quantos livros colocou em cada pilha?

221. Maria saiu de casa com a quantia exata para comprar 5,40 m de um certo tecido, ao preço de Cr$ 102,50 o metro. Já na loja, escolheu outro tecido, êste de Cr$ 61,50 por metro e gastou na compra do mesmo todo o dinheiro que levou. Quantos metros dêsse tecido comprou?

222. Um tanque possui 3 torneiras que fornecem, respectivamente, 24,5 litros, 12 litros e 18 litros de água por minuto. Que quantidade de água haverá no tanque no fim de 15 minutos, sabendo-se que uma válvula dêle retira 22 litros por minuto?

223. Um viajante percorreu em 8 horas, 428 hm. Quantos 100 m percorreu em 4 horas?

*Respostas:*

208. 13
209. uma
210. 8 h
211. Cr$ 700,00; Cr$ 500,00
Cr$ 380,00; Cr$ 620,00
212. 8
213. Cr$ 25,00 e Cr$ 20,00
214. 13 anos
215. Cr$ 4 992,00; Cr$ 1 664,00;
Cr$ 832,00.
216. 30 e 270
217. Cr$ 8,00
218. 30 anos
219. 12 anos
220. 5
221. 9
222. 487,5 $l$
223. 214

## c) SÔBRE FRAÇÕES

224. Um ciclista percorreu os $\frac{2}{5}$ de uma estrada; em seguida $\frac{1}{10}$ depois os $\frac{3}{8}$. Que parte da estrada foi percorrida?

225. Ademar perdeu num jogo os $\frac{3}{10}$ de quanto possuia. Quanto lhe resta ainda?

226. Um operário efetua um certo trabalho em 3 dias; um segundo leva 4 dias, e um terceiro 5 dias. Se êstes três operários trabalham juntos num dia quanto do trabalho restará ainda por fazer?

227. Numa soma de duas frações a primeira delas é igual a $13\frac{7}{8}$ e a outra é quatro vêzes o valor da primeira. Quanto vale a soma?

228. Calcular os $\frac{5}{7}$ dos $\frac{4}{5}$ dos $\frac{7}{8}$ do número 2.

229. Determinar um número que aumentado de seus $\frac{2}{3}$ é igual a 35.

230. Os $\frac{3}{4}$ dos $\frac{5}{7}$ de um número valém 45. Qual é êsse número?

231. Os $\frac{3}{8}$ da soma de dois números equivalem a 45. Um dos números é 56. Qual é o outro?

232. De quanto aumenta a fração $\frac{2}{3}$ aumentando de 2 os seus dois têrmos?

233. De quanto diminui a fração $\frac{59}{17}$ aumentando de 2 os seus dois têrmos?

234. Mário pode fazer um certo trabalho em 15 dias e Luís pode fazer o mesmo trabalho em 10 dias. Trabalhando juntos em quantos dias farão o trabalho?

235. Um operário efetuou em um dia os $\frac{2}{15}$ de um certo trabalho e no dia seguinte os $\frac{3}{10}$. Realizou *mais*, ou *menos*, da metade de todo o trabalho?

236. Um jovem leu os $\frac{5}{8}$ de um livro de 432 páginas. Quantas páginas do livro ficaram para ser lidas?

237. Um vasilhame de 32 litros de capacidade contém leite sòmente até os seus $\frac{3}{4}$. Tirando os $\frac{2}{3}$ do leite, quantos litros restam?



238 Um automobilista percorre inicialmente $\frac{1}{4}$ de uma estrada, depois mais $\frac{1}{3}$ do que resta da estrada e ainda restam para serem percorridos 90 km. Qual era o comprimento da estrada?

239. A torneira de um barril despeja $\frac{1}{4}$ do vinho que contem; em seguida $\frac{1}{8}$, depois $\frac{5}{12}$ e finalmente $\frac{1}{24}$ restando ainda 7,0 litros. Qual a capacidade dêsse barril?

240. Quantas garrafas de $\frac{3}{4}$ de litro podem ser enchidas com uma partida de $55\frac{1}{2}$ litros?

241. Uma partida de café já beneficiado custou Cr$ 5 600,00. Na torrefação dêsse café perdeu-se os seus $\frac{4}{7}$, isto é, 80 kg. Quanto custou o kg de café comprado?

242. Um homem perdeu num jogo, primeiramente, os $\frac{2}{3}$ da soma que possuia e em seguida Cr$ 1 200,00, isto é, $\frac{4}{5}$ do que sobrara. Quanto possuia antes do jogo e quanto perdeu no total?

243. No início de um negócio Orlando perde $\frac{2}{3}$ do que possuia. A seguir ganha Cr$ 9 300,00 e assim fica de posse dos $\frac{3}{4}$ da soma inicia que possuia. De quanto era essa soma?

244. Arminda usa, de uma peça de sêda, $\frac{3}{7}$ para confeccionar blusa; $\frac{2}{5}$ para saias e ainda restam 9,6 m. Qual o comprimento da peça?

245. Na festa da uva dividiram-se 920 kg de uvas em pequenos sacos de $\frac{5}{6}$ kg cada um e que foram vendidos a razão de Cr$ 10,00 cada. Quanto foi apurado na venda da uva?

246. Sòmente os $\frac{3}{5}$ dos eleitores de uma certa cidade apresentaram-se às urnas por ocasião das últimas eleições. Se a população era de 18 440 pessoas dos quais a quarta parte são menores, quantos eleitores (maiores) abstiveram-se de votar?

247. Se dos $\frac{9}{5}$ de uma certa quantia subtrairmos Cr$ 371,00 obteremos os $\frac{2}{7}$ dela. Qual é essa quantia?

248. Para realizar os dois têrços de um trabalho foram empregados 2h 30 m. Quanto tempo se levará ainda para terminar tal trabalho?

249. Uma certa importância em dinheiro foi repartida entre três herdeiros. O primeiro recebeu os $\frac{2}{7}$ da importância, o segundo os $\frac{3}{5}$ e o terceiro o resto. Determinar a importância de cada herdeiro sabendo que um quinto da importância que coube ao primeiro foi de Cr$ 16 900,00.

250. Perguntaram a um homem a sua idade e a de sua espôsa. Êle respondeu: os $\frac{3}{8}$ de minha idade representam 15 anos e a idade de minha espôsa é os $\frac{3}{4}$ da minha. Calcular as idades.

251. Uma estante de livros tem 3 prateleiras. A altura da primeira é os $\frac{3}{7}$ da altura da estante e a da segunda, os $\frac{2}{5}$. Qual é a altura da terceira prateleira sabendo que a da primeira é 0,60 m?

252. Para encher os três quintos de um tanque são necessárias 7,5 hl de água. Quantos litros de água são necessários para encher a metade do tanque?

253 Uma vara foi fincada numa lagoa de maneira tal que os seus $\frac{3}{7}$ ficaram fora da água e os seus $\frac{2}{5}$ ficaram dentro da água. Pede-se o comprimento da parte da vara que está fincada no fundo da lagoa, sabendo-se que a parte que ficou fora da água mede 1,35 m.

*Respostas:*

| | | |
|---|---|---|
| 224. 7/8 | 230. 84 | 236. 162 |
| 225. 7/10 | 231. 64 | 237. 8 |
| 226. 13/60 | 232. 2/15 | 238. 180 km |
| 227. 555/8 | 233. 84/323 | 239. 420 *l* |
| 228. 1 | 234. 6 | 240. 74 |
| 229. 21 | 235. menos | 241. Cr$40,00 |

| | |
|---|---|
| 242. Cr$ 4 500,00 | 248. 1h 15m |
| Cr$ 4 200,00 | 249. Cr$ 84 500,00; Cr$ 177 450,00 |
| 243. Cr$ 22 320,00 | e Cr$ 33 800,00 |
| 244. 56m | 250. 40 e 30 anos |
| 245. Cr$ 11 040,00 | 251. 0,24m |
| 246. 5 532 | 252. 625 |
| 247. Cr$ 245,00 | 253. 0,54m |

# APÊNDICE

## LEITURA SÔBRE CURIOSIDADES ARITMÉTICAS PROBLEMAS CURIOSOS

**Sentido do número no homem e nos animais.** Em tôdas as épocas da evolução humana, mesmo nas mais remotas, encontra-se no homem uma qualidade que se poderia, exagerando um pouco, chamar até de *sexto sentido*. Vamos, porém, chamar de *sentido do número*. O *sentido do número* não deve ser confundido com a faculdade de *contar* que é, provàvelmente, muito mais recente e que implica numa série de convenções, como foi visto quando estudamos a contagem no sistema decimal (pág. 25). Enquanto o *contar* é um atributo exclusivamente humano o *sentido do número* também pertence a algumas espécies de animais.

Muitos pássaros, por exemplo, o possuem. Se um ninho contém quatro ovos, pode-se retirar um sem que nada ocorra, porém retirados dois o pássaro em geral o abandona. O corvo, principalmente, tem o sentido do número *até cinco*.

Conta-se (*) que um senhor estava decidido a matar um corvo que tinha feito o ninho no sotão de sua casa. Repetidas vêzes tentara surpreender o pássaro, mas em vão: quando o homem se aproximava o corvo abandonava célere o seu ninho e se punha vigilante sôbre uma árvore vizinha e só voltava ao sotão quando o homem já a havia deixado. Um dia o senhor recorreu a um estratagema: fez dois homens entrarem no sotão (naturalmente sob o olhar astuto do corvo que tudo via da árvore) ordenando que um dêles permanecesse e o outro se retirasse. O pássaro, todavia, não se deixou ludibriar e esperou até que o segundo homem saísse para voltar ao ninho. A experiência foi repetida nos dias seguintes, agora com três, quatro e cinco homens, respectivamente e da mesma forma sem êxito. Finalmente, seis homens entraram no sotão e sairam sòmente cinco, um após o outro, enquanto que o sexto permanecia dentro armado. Então o corvo perdeu a conta . . . incapaz de distinguir entre *cinco* e *seis* voltou todo satisfeito e . . . *pum* foi morto!

Um chimpanzé do zoológico de Londres, além de ter o *sentido do número* até *seis* tinha o ouvido disciplinado para destacar a contagem até

(*) Consultar para maiores conhecimentos *Matemática Dilettevole e Curiosa* de I. Ghersi (Manuel Hoepli); *Número*, de Tobias Dantzig.

seis, pois, trazia a quem pedisse um número de pequenos galhos secos correspondente ao número pronunciado. Com os melhores amigos do homem — os cachorros — obtém-se resultados extraordinários conhecidos por todos, graças à qualidade de disciplina aliada ao *sentido do número* que os caracterizam.

Com as galinhas pode ser feita esta prova: sôbre um cartão que dispõe de furos dispostos em linhas horizontais, coloca-se na primeira linha um grão de milho sòmente no 1.°, 3.°, 5.°, 7.° . . . furos; na segunda linha no 1.°, 4.°, 7.°, 10.°, . . . e assim por diante nas demais linhas. Na primeira linha a galinha apreenderá ràpidamente que deverá bicar sòmente (para sua felicidade!) os furos de ordem ímpar; na segunda linha a coisa já piora um pouco para a galinha, pois, deve bicar o primeiro furo, pular dois, depois bicar o quarto, etc. e contudo ela faz o trabalho com relativa rapidez. Emfim, vamos convir que as demais linhas seria exigir muito da galinha . . .

2. **A numeração dos selvagens. Sistemas de numeração.** Os selvagens contam sôbre os dedos das *mãos* e dos *pés*, naturalmente dentro de certos limites. Assim, a maneira de contar dos selvagens australianos é a seguinte:

*1 — um dedo* (indicador); *2 — dois dedos* (indicador e médio); *3 — três dedos* (indicador médio e anular); *4 — duas vêzes dois dedos*; *5 — uma mão*; *6 — uma mão e um dedo*; *7 — uma mão e dois dedos*; *10* (base) natural) — *duas mãos*; *15 — duas mãos e um pé*; *20 — as mãos e os pés*; *21 — um dedo sôbre a mão de outro*; etc.

A tribu dos Zulús, afamada por possuir exímios calculadores, valia-se inclusive do fato de cada dedo possuir (com exceção do polegar) três falanges; assim contavam 15 usando sòmente u'a mão (14 falanges e a própria mão).

O *sistema decimal* de numeração deve ter sido o primeiro a ser usado pela humanidade em virtude mais de um fato fisiológico (dez dedos) do que pròpriamente das vantagens que pode apresentar em relação a qualquer outro número tomado como base (com exceção do nove talvêz). A contagem de ovos, por exemplo, é feita em grupos de *doze* ou dúzias; neste caso o sistema é de base *doze* ou *duodecimal*. Os matemáticos têm se dividido entre bases que tivessem maior número de divisores (12 por ex.) ou nenhum, isto é, um número primo. *Lagrange*(*) justifica a vantagem de se

(*) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) — O maior e o mais modesto matemático do sec. XVIII.



aceitar por bases um número primo, mostrando que tôda fração obtida com tal sistema seria irredutível e por conseguinte se representaria o número de um só modo e não como no sistema decimal, onde por ex., 0,36 representa realmente muitas frações: 36/100, 18/50, 9/25. Talvez, o *dez* tenha sido eleito pela maioria como base, por não possuir muitos divisores e nem ser primo . . . Além disso, pelo fato das máquinas de calcular de hoje em dia superarem amplamente o cálculo mental, nada aconselharia uma troca de base. As vantagens que se ganhariam com tal troca seriam mínimas e a tradição de se contar por dezenas faz o homem recordar constantemente de seus dez dedos, de sua origem humana e alertá-lo que é a *medida de tôdas as coisas.*

Quanto aos símbolos usados na antigüidade para a representação dos algarismos são conhecidos os empregados pelos *babilônios* (3500 anos antes de Cristo) retirados da escrita *cuneiforme:*

1 , 10 , 100

O sistema *sexagesimal*, que estudamos no capítulo relativo às medidas não decimais (tempo e ângulo — pág. 226), também é de origem babilônica.

Os *gregos* possuiam uma tábua chamada *ábaco*, introduzida por *Pitágoras* onde se dispunha de pedrinhas em várias linhas verticais. As pedras da primeira linha representavam as unidades simples; as da segunda, dezenas; as da terceira, centenas e assim, por diante caracterizando um sistema decimal. Hoje em dia, ainda com êxito, usa-se o ábaco (agora as linhas são dispostas horziontalmente) nos jardins de infância para iniciar as crianças no estudo das posições dos algarismos em um número, bem como para operar. Os japoneses mantém ainda em uso instrumento *soruban* baseado nos mesmos princípios do ábaco e com os quais operam com relativa facilidade.

A numeração dos *romanos* (pág. 27) era baseada sôbre a adição e subtração dos símbolos e pouca utilidade apresenta para a prática.

O conhecimento do valor posicional dos algarismos é bem antigo. Na realidade o princípio decimal foi usado primeiramente na Índia. É mérito dos indianos terem inventado o valor de posição na numeração escrita e um sinal para indicar o *zero*. Os algarismos que usamos, denominados *árabes* (e que já sofreram grandes modificações), foram trazidos pelos árabes da Índia e introduzidos na Europa nos meados do século X.

*Leonardo Fibonacci*, também chamado Leonardo de Pisa, foi o responsável pela adoção sistemática dêsses algarismos, dentro do sistema de numeração decimal, que têm os símbolos por todos conhecida: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9.

Convêm notar que o algarismo 7 não tem a representação que muitos querem dar pelo símbolo: 7 (não se deve *cortar o sete*!)

3. **Sôbre as quatro operações.** As operações sôbre números inteiros são de origem antiqüíssima e sofreram notáveis transformações através dos tempos. Os babilônios e os egípcios indicavam a adição e a subtração com abreviações especiais. Os gregos não possuiam sinais especiais para indicar as operações, porém possuiam uma tábua de mutliplicar, atribuida a Pitágoras (estudada na pág. 46) de grande valor prático. A maturidade da aritmética grega (conceito de número, número primo, etc.) é encontrada na grandiosa obra do matemático grego *Euclides* (que viveu 300 anos antes de Cristo) e denominada *"Os Elementos"*. Outro grego que se destacou na aritmética foi *Eratóstenes* (275 anos antes de Cristo) conhecido pelo seu *Crivo* na determinação dos números primos (pág. 96).

Os sinais +, −, ×, :, tão usados por nós, são produtos dos séculos XVI e XVII, períodos de grandes matemáticos. Atribui-se a *Leonardo da Vinci* os sinais + e −; o sinal × a *Oughtred;* o sinal de divisão : ao grande *Leibnitz*. O sinal de proporção : : é de *Wallis* e os sinais de > (maior de) de < (menor de) é de *Harriot*.

Os parênteses ( ) foram usados pela primeira vez por *Girad* e se difundiram ràpidamente dando ainda ensejo para que se criassem os colchetes [ ] e as chaves { }

Hoje, mais que em outros tempos, prevalece uma simbologia formal verdadeiramente admirável para a matemática *moderna*. Atualmente, os matemáticos chegam a maravilhosos resultados, que honram e dignificam o racional, graças ao poder de *abstração* que apresentam traduzido genèricamente por *símbolos*.

## PROBLEMAS CURIOSOS

1.º) Carlos quer atravessar um rio levando um lobo, uma cabra e uma grande couve-flor. Sendo a barca muito pequena êsse transporte só pode ser feito com Carlos e uma daquelas unidades. Como deverá fazer para evitar que o lobo coma a cabra e essa a couve-flor?

(Transporta-se a cabra, depois o lobo e traz-se a cabra; depois a couve-flor e, finalmente, a cabra. O. K.?)



2.º) Dois gatos comem dois ratos em dois minutos. Quantos gatos são necessários para comer 60 ratos em 30 minutos?

(Nota: mais que 3, menos que 5 . . . e não vale meio gato!)

3.º) Uma corda tem 28m de comprimento. Cortando 2m por dia, no fim de quantos dias se terminará de cortá-la? (Nota: não são 14!)

4.º) Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa tijo e meio?

(Nota: 3 000g!)

5.º) Um árabe ao morrer deixou 17 camelos aos seus três filhos de modo que ao primeiro deveria caber metade dêsse número, ao segundo um têrço e ao terceiro um nono. Quantos camelos coube a cada um?

(Nota: como a partilha apresentava-se difícil, pois, a divisão deveria ser feita com animais "inteiros", recorreram os herderos ao juiz do local que resolveu a questão de um modo muito inteligente. Primeiramente emprestou o seu camelo aos herdeiros que passaram a ter então 18 camelos. Em seguida deu metade dêsse número ao primeiro filho, isto é, 9 ao segundo um têrço, ou seja 6 e ao terceiro um nono, isto é, 2. Como o total distribuido soma 17 o juiz poude ainda retirar o camelo que emprestara e satisfazer totalmente os herdeiros. Descubram como foi possível essa divisão, lembrando que a soma 17/2 + 17/3 + 17/9 = 16 1/18, é *menor* que a herança (17) deixada).

6.º) Uma lesma, por negócios seus particulares, foi transferida de uma horta para outra separadas por um muro de 7m de altura. A lesma sobe o muro (sempre verticalmente) percorrendo cada dia 4m em ascensão e descendo (caprichos da lesma!) 3m por noite, percorrendo efetivamente por dia 1m de sua viagem. Em quantos dias a lesma chegará em cima do muro?

(Nota: Não responda prontamente: 7 dias porque . . . ela chega sòmente em 4).

7.º) Entre duas cidades marítimas A e B, relativamente distantes, existe um serviço regular de barcos à vapor. Sabe-se que o trajeto requer oito dias para ser percorrido e que à mesma hora parte um vapor das duas cidades. Pergunta-se: um dos barcos partindo de A, por ex., quantos barcos encontrará no seu percurso?

(Nota: A resposta "oito" que apressadamente fôsse dada não seria exata, pois, o barco não encontrará sòmente os barcos que partiram ao mesmo tempo que êle e depois dêle mais *também* aqueles que partiram na semana que precedeu a sua partida. Logo, o total encontrado é 16 e não 8).

8.º) Um esperto que conduzia uma imagem que dizia ser milagrosa disse a um ingênuo: essa imagem faz consecutivamente três milagres de duplicar o dinheiro que alguém leva no bolso, desde que sejam proferidas tais palavras (e disse algumas palavras difíceis . . .) e pagos 10,00 de cada vez pelo meu trabalho. O ingênuo proferiu as palavras uma primeira vez e recebeu em duplicata o dinheiro que trazia no bolso dando a seguir ao homem os 10,00 combinados; profere uma segunda vez, recebe em dôbro o que tinha no bolso e dá mais uma vez os 10,00. Ao proferir as palavras a terceira vez continua recebendo o dôbro do que tinha no bolso e vê com espanto que ao dar o homem os 10,00 prometidos fica sem nenhum dinheiro . . . Por que?

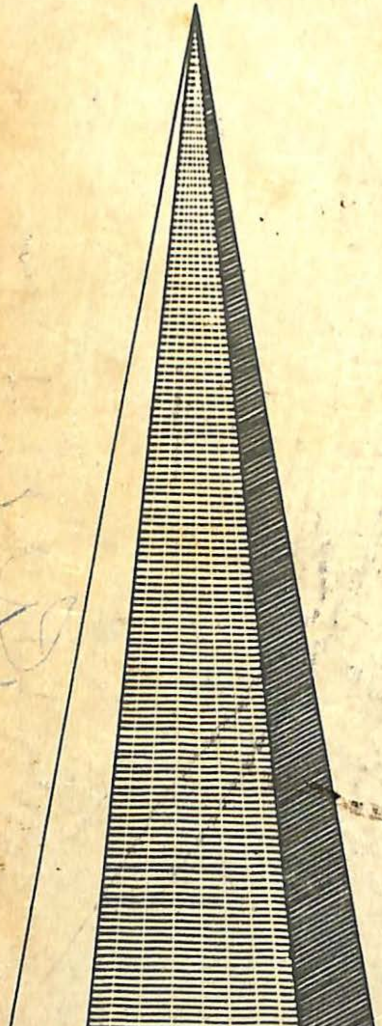
(Muito simples: o esperto sabia que o ingênuo levava Cr$ 8,75 no bolso; experimente agora os três milagres possuindo Cr$ 8,75 no bolso e verá . . .)

9.º) Duas senhoras, cada uma com uma criança nos braços, interrogadas de quem eram as crianças responderam: são filhos dos nossos filhos e irmãos de nossos maridos. Pode ser?

(Nota: as duas senhoras tinham se casado tendo cada uma delas um menino; êsses meninos cresceram, tornaram-se adultos enquanto que as senhoras ficaram viuvas. A seguir essas senhoras casaram-se cada uma com o filho da outra e tiveram cada uma um filho que eram precisamente aquelas crianças que traziam nos braços . . .)

10.º) É possível demonstrar que existem sôbre a Terra, pelo menos, dois homens que tenham na cabeça o mesmo número de cabelos?

(Nota: Basta verificar que existe, na certa, mais homens na Terra do que fios de cabelo numa cabeça supostamente bem servida. Tomando em média 150 000 fios de cabelo numa cabeça, podemos formar grupos de 150 000 homens, desde o que tenha um fio até 150 000 fios de cabelo. Ora em cada novos grupos de 150 000 homens deverá necessàriamente repetir-se cabeças com o mesmo número de fios de cabelo. O. K.?).



$$35 + \frac{4}{9}$$

$0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$

*São Paulo Editora S.A. imprimiu.*