OSVALDO SANGIORGI

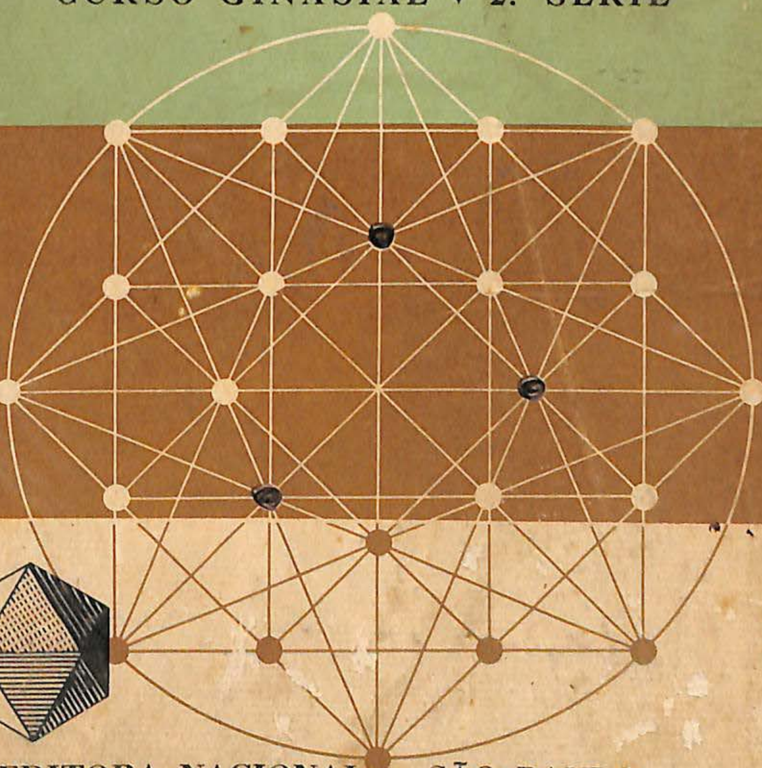
Regina Pohlmann

2ª série.

2 30'

Matemática

CURSO GINASIAL ✦ 2.ª SÉRIE



COMPANHIA EDITORA NACIONAL ✦ SÃO PAULO

Regina Pedroso Pohlmann

2ª série T. 21.

MATEMÁTICA

para a

SEGUNDA SÉRIE GINASIAL

Regina

Regina
Regina

Elita

De acôrdo com os programas em vigor, conforme portarias n.^{os} 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51, e de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 2 730.

Exemplar **Nº** 6882

1 9 6 1

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S. A. — São Paulo, Brasil

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas, pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Ex-professor do Ginásio do Estado da Capital. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie.

MATEMÁTICA

para a

SEGUNDA SÉRIE GINASIAL

60.ª EDIÇÃO

Revista e *Ampliada* (tabela de quadrados, cubos, raízes quadadas e raízes cúbicas; método dos Determinantes — Fórmulas de Cramer; sistemas de três equações lineares com três incógnitas; curiosidades matemáticas).

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO AUTOR

Matemática, primeira série ginasial.
Matemática, terceira série ginasial.
Matemática, quarta série ginasial.
Matemática e Estatística, Curso Normal.

★

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo

ÍNDICE

CAPÍTULO II

Cálculo literal. Polinômios.

CAPÍTULO III

Binômio linear. Equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas lineares com duas incógnitas. Aplicações.

"Eu quisera ser uma lágrima para em teus olhos nascer, em teu rosto rolar, e em tua bôca morrer."

"É mais fácil um barco resistir a uma tempestade, que um amor a uma saudade."

"Uma juventude sem amor é um corpo sem motor."

"Amar é viver, e quem ama jamais esquece."

PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Segunda Série Ginasial (*)

I) Potências e raízes; expressões irracionais

1. Potência de um número; quadrado e cubo. Operações com potências; potências de mesma base e potências semelhantes. Expoente zero; expoente negativo. Potência das frações. Potência de um número decimal.
2. Expressão do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números; interpretação geométrica. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos.
3. Raiz quadrada. Regra prática para a extração da raiz quadrada dos números inteiros. Limite do resto na extração da raiz quadrada. Prova. Raiz quadrada de um produto. Aproximação decimal no cálculo da raiz quadrada. Raiz quadrada dos números decimais. Raiz quadrada das frações.
4. Raiz cúbica. Regra prática para a extração da raiz cúbica dos números inteiros. Prova. Raiz cúbica de um produto. Aproximação decimal no cálculo da raiz cúbica. Raiz cúbica dos números decimais. Raiz cúbica das frações.
5. Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais. Valor aritmético de um radical. Transformação do índice e do expoente; redução de radicais ao mesmo índice; comparação de radicais; redução de um radical à expressão mais simples. Operações com radicais. Potenciação e radiciação de potências; expoentes fracionários. Exemplos simples de racionalização de denominadores.

II) Cálculo literal; polinômios

1. Expressão algébrica. Valor numérico. Classificação das expressões algébricas. Monômios e polinômios; ordenação.
2. Adição. Redução de têrmos semelhantes. Adição e subtração de polinômios.

(*) (Portarias Ministeriais: 966, 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51 (3 aulas semanais no mínimo).

3. Multiplicação de monômios e polinômios. Produtos notáveis.
4. Divisão de monômios; divisão de polinômios com uma variável.
5. Casos simples de fatoração; identidades.
6. Frações literais; propriedades; operações fundamentais.

III) Binômio linear; equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita; sistemas lineares com duas incógnitas

1. Igualdade, identidade, equação, classificação das equações. Equações equivalentes. Resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita; equações literais. Discussão de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Binômio linear; decomposição em fatôres; variação do sinal e do valor.
2. Desigualdade. Comparação de números relativos. Propriedades das desigualdades; operações. Inequação. Resolução das inequações do primeiro grau com uma incógnita.
3. Equações do primeiro grau com duas incógnitas; sistemas de equações simultâneas. Resolução de um sistema linear com duas incógnitas pelos métodos de eliminação por substituição, por adição e por comparação. Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas.
4. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas; generalização; discussão.

PREFÁCIO À 1.ª EDIÇÃO

Apresentando o segundo volume da série de livros de Matemática que nos propusemos escrever, queremos acentuar que conservamos a diretriz dada ao primeiro: *auxiliar o aluno sob a orientação indispensável de seus professôres.*

A parte de Álgebra mereceu especial atenção, tendo sido excluído tudo aquilo considerado por demais abstrato e teórico para os que se iniciam nesse setor e feitas, com abundância, aplicações numéricas que possam interessar ao jovem estudante.

Além dos exercícios sôbre as várias unidades, que se encontram no fim de cada exposição, conta o livro na sua *parte final com uma coleção de 500 exercícios de recapitulação* relativos a todo o programa de Álgebra da segunda série ginasial

Acataremos, com prazer, as críticas e sugestões que os prezados colegas queiram apresentar.

O. S.

Fevereiro de 1953

Rua Macapá, 17
SÃO PAULO

"Dos olhares ardentes que se trocam, são duas almas, em silêncio que se beijam!"

"A felicidade é como cristal, quanto mais brilha, mais fàcilmente quebra."

"Amar-te é possuir um mundo e meu mundo é você."

"Amor sem ciúmes é uma rosa sem perfume."

Observação à 59.ª Edição

A presente edição aparece enriquecida de valiosas sugestões de prezados colegas que, efetivamente, militam no Ensino Secundário.

Com o propósito de melhorar contìnuamente o livro didático, que no dizer do ilustre matemático Prof. Severi deve ser "um organismo vivo na mão do aluno", a atual edição revista da 2.ª série foi *ampliada* de:

1. *novos exercícios* (no texto), *atualizados*, sôbre potências e raízes; uma *tabela* de quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas (dos números 1 a 200); algumas *curiosidades matemáticas;*
2. *mais* 315 *exercícios de recapitulação* sôbre potências e raízes (constantes da parte final do livro);
3. *apêndice de Álgebra,* contendo:
   a) *método dos Determinantes* (Fórmulas de Cramer) para a resolução de sistemas de equações lineares;
   b) métodos de resolução, *por artifícios de cálculo,* de sistemas de equações (formas especiais), redutíveis ao 1.º grau;
   c) métodos de resolução de *sistemas de três equações lineares com três incógnitas.*

O Apêndice de Álgebra contém exercícios de aplicação e ainda 35 exercícios de recapitulação.

Decorrem essas inovações da experiência e do uso prático do livro que, assim, procura atender, gradativamente, aos anseios dos alunos da atual geração. Continuamos sensibilizados com a acolhida que os nossos trabalhos têm tido junto ao magistério brasileiro — que é dos mais esclarecidos das Américas — e sempre ao dispor do professorado que, conosco, participa do aprimoramento do ensino em nossa terra. O nosso sincero agradecimento ao Prof. Luís Magalhães de Araújo pela eficiente ajuda na revisão dos originais desta nova edição.

O. S.

Janeiro de 1961

Rua Macapá, 17
SÃO PAULO

"O amor é como uma rosa; cada pétala uma ilusão, cada espinho uma realidade."

"A vida é feita de felicidade, a felicidade de muito amor."

CAPÍTULO I

Potências e raízes. Expressões irracionais

§1. Potências

1. Potência de um número; quadrado e cubo. *Potência* (*) *de um número é um produto de fatôres iguais a êsse número.* O número considerado como fator é denominado *base* e o número dêles, *grau* da potência. O grau da potência é indicado por um número menor escrito à direita da base, um pouco acima, e que é chamado *expoente*.

Assim, por exemplo, o produto

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

representa a *quarta potência* de 3, onde 3 é a *base* e 4, o expoente.

A *segunda potência* de um número também é denominada *quadrado*, pelo fato de a área de um quadrado ser dada pela segunda potência da medida de seu lado (**). Exemplo:

5^2 que se lê: *cinco ao quadrado.*

A terceira potência de um número é também denominada *cubo*, porque o volume de um cubo é obtido elevando-se a medida de sua aresta à terceira potência (***). Exemplo:

4^3 que se lê: *quatro ao cubo.*

De um modo geral, se a representa um número qualquer tomado como base e n um número inteiro, maior que 1, tomado como expoente, podemos agora definir:

Potência n-ésima de um número a é o produto de n fatôres iguais a a.

(*) Já foram dadas noções sôbre *potência de um número* no primeiro ano ginasial.

(**) Ver *Matemática* — Curso Ginasial — 1.ª série ,capítulo IV, § 3, 2, do mesmo autor.

(***) Ver *Matemática* — Curso Ginasial — 3.ª Série, Capítulo V, § 5, 2, do mesmo autor.

Êstes produtos especiais dão lugar à operação chamada *potenciação*. Às potências de mesmo expoente pode-se atribuir o nome de *potências semelhantes*. Exemplo: 2^3, 5^3, 12^3, 49^3.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) O expoente, indicando o número de vêzes que a base é tomada como fator, *deve ser maior que* 1, isto é, no mínimo 2, pois não se compreendem produtos com menos de dois fatôres. Para facilidade do cálculo, convencionou-se, porém, que, escrito por expoente o número 1, a potência terá por valor a própria base. Exemplos:

$$4^1 = 4$$
$$32^1 = 32$$

2.ª) As potências de 0 são tôdas iguais a zero. Exemplo:

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

3.ª) As potências de 1 são tôdas iguais a um. Exemplo:

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

4.ª) As potências de 10 são iguais à unidade seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente. Exemplos:

$$10^2 = 100$$
$$10^5 = 100\,000$$

2. Operações com potências

1.ª) O *produto* de potências de *mesma base* é uma potência de mesma base tendo por expoente a *soma* dos expoentes.

Isto é: $3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$

De fato:

$3^2 \times 3^4$ é o mesmo que $\underbrace{3 \times 3}_{\text{2 fatôres}} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{4 fatôres}} = 3^6$

Exemplos:

$$4^3 \times 4^5 \times 4 = 4^9$$
$$12^2 \times 12^2 \times 12^2 = 12^6$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$y^p \times y^q \times y = y^{p+q+1}$$

2.ª) O *quociente* de duas potências de *mesma base*, consideradas numa certa ordem, é uma potência de mesma base tendo por expoente a *diferença* dos expoentes.

Isto é: $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$

Com efeito, levando-se em conta a operação anterior, temos:

$$2^3 \times 2^2 = 2^5$$

o que nos permite concluir ser 2^3 o quociente de 2^5 por 2^2, pois o produto do quociente (2^3) pelo divisor (2^2) resulta o dividendo (2^5). Exemplos:

$$7^6 : 7^3 = 7^3$$
$$48^5 : 48^4 = 48$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$b^n : b = b^{n-1}$$

NOTA: Os casos em que as diferenças dos expoentes são *zero* ou um *número negativo* (*) serão estudados logo a seguir às operações.

3.ª) Para se elevar uma potência a uma *potência*, multiplicam-se os expoentes.

Assim: $(5^2)^3 = 5^6$

De fato:

$(5^2)^3$ é o mesmo que $\underbrace{5^2 \times 5^2 \times 5^2}_{\text{3 fatôres}} = 5^6$

Exemplos:

$$(4^3)^3 = 4^9$$
$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

NOTA: Não confundir, por exemplo, a notação $(4^3)^2$ que é igual a 4^6 com 4^{3^2} que é igual a 4^9.

4.ª) Para se elevar um *produto* ou um *quociente* indicado a *uma potência*, eleva-se cada um de seus têrmos a essa potência.

Assim, devemos ter:

$$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2, \text{ pois}$$
$$(3 \times 4)^2 = (3 \times 4) \times (3 \times 4) = 3 \times 3 \times 4 \times 4 = 3^2 \times 4^2$$

Exemplos:

$$(2^3 \times 5^2 \times 3)^4 = 2^{12} \times 5^8 \times 3^4$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$$

(*) *Número negativo:* estudado com os números relativos na primeira série ginasial.

Observação: As operações de adição e *subtração* de potências quaisquer não obedecem a regras especiais. Deve-se calcular cada uma por vez e efetuar, a seguir, as operações que estiverem indicadas. Exemplo:

Calcular o valor da expressão: $3^2 + 2^3 - 4^2$.

Calculando o valor de cada uma das potências, temos:

$$9 + 8 - 16 = 17 - 16 = 1$$

3. Expoente zero. (*) Consideremos o caso da divisão de duas potências de mesma base que tenham também o mesmo expoente. Seja, por exemplo:

$$4^3 : 4^3$$

Pela operação estudada, devemos ter:

$$4^3 : 4^3 = 4^{3-3} = 4^0$$

resultado que deixa de ter significado diante da definição dada para a potência de um número. Mas, como o dividendo ($4^3 = 64$) é igual ao divisor ($4^3 = 64$) e tal quociente é 1, segue que:

$$4^0 = 1$$

Dêsse modo, podemos dar um *significado* ao expoente zero, dizendo que:

Uma potência de expoente zero é sempre igual à unidade.

Exemplos: $2^0 = 1$

$48^0 = 1$

$a^0 = 1$ (quando a representa um número diferente de zero).

Nota: O símbolo 0^0 não tem significado algum.

4. Expoente negativo. Seja agora o quociente das potências de mesma base:

$$2^5 : 2^8$$

(*) Sugerimos a leitura do Cap. IV de *A Pedagogia das Matemáticas*, de André Fouché, publicação da Cia. Editora Nacional.

Pela operação estudada, devemos subtrair os expoentes na ordem em que foram dadas as potências, isto é:

$$2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$$

Do fato de não se poder considerar produtos com um número negativo de fatôres, a interpretação das potências *de expoente inteiro e negativo* pode ser feita da seguinte maneira

$$2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2\times 2} = \frac{1}{2\times 2\times 2} = \frac{1}{2^3}$$

e como a divisão é *uniforme*(*), os resultados 2^{-3} e $\frac{1}{2^3}$ se equivalem. Dêsse modo concluímos:

Potência de expoente inteiro e negativo de um número é uma fração cujo numerador é a unidade e o denominador é o próprio número com o expoente positivo.

Exemplos: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; $15^{-2} = \frac{1}{15^2}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Observações:

1.ª) O caso de a base de uma potência ser um *número relativo*, já foi estudado na 1.ª série ginasial e foi visto que:

1) Tôda potência de expoente *par* de um número positivo ou negativo é sempre *positiva*;

2) Tôda potência de expoente *ímpar* de um número positivo ou negativo tem o *sinal dêsse número*. Exemplos:

$(-3)^2 = +9$; $(+1)^8 = +1$ $(-5)^4 = +625$

$(-3)^3 = -27$; $(+4)^5 = +1\,024$; $(-3)^1 = -3$

2.ª) O estudo das potências de números relativos de expoente negativo, exige que se estenda o conceito de número relativo às frações. Assim, diremos:

Número fracionário relativo é a fração cujos têrmos são números relativos.

(*) Ver na *Matemática*, Curso Ginasial, 1.ª série, do mesmo autor, *propriedades da divisão* (Cap. I, § 1).

Exemplos:
$$\frac{-3}{+4};\ \frac{+2}{-5};\ \frac{+4}{-7};\ \frac{-13}{-10}$$

Valor absoluto de um número fracionário relativo é o número fracionário que faz parte da sua representação. Assim, por exemplo:

o valor absoluto de $\frac{-3}{+7}$ é $\frac{3}{7}$

o valor absoluto de $\frac{+5}{-4}$ é $\frac{5}{4}$.

É sempre conveniente, quando se opera com números fracionários relativos, fazer os denominadores figurarem como *positivos*, podendo-se na representação desprezar o sinal +. Para isso, basta aplicar as propriedades estudadas com os números relativos. Exemplo:

Seja o número fracionário relativo $\frac{+3}{-7}$.

Multiplicando ambos os têrmos por -1 e aplicando a regra do produto de dois números relativos, temos:
$$\frac{+3}{-7} = \frac{(+3)\times(-1)}{(-7)\times(-1)} = \frac{-3}{+7} = \frac{-3}{7} \text{ ou } -\frac{3}{7}.$$

Da mesma forma: $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$; $\frac{-10}{13} = -\frac{10}{13}$.

O mesmo poderemos dizer quanto aos *números decimais relativos*, que são os números decimais precedidos dos sinais + ou −. Exemplos:

−0,325 (valor absoluto: 0,325)
+19,007 (valor absoluto: 19,007)
−0,000 01 (valor absoluto: 0,000 01)
+6,333... (valor absoluto: 6,333....)

Depois destas *observações*, podemos considerar mais exemplos de potências de expoente inteiro e negativo tendo como base números relativos:

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$
$$(+3)^{-4} = \frac{1}{(+3)^4} = \frac{1}{+81} = +\frac{1}{81}$$

Devemos *notar* que *tôdas* as operações estudadas com as potências também são verdadeiras para o caso do expoente inteiro e negativo.

Assim, temos:

$$5^{-2}\times 5^{-1} = 5^{-2-1} = 5^{-3}$$
$$(-4)^{-3} : (-4)^{-5} = (-4)^{-3-(-5)} = (-4)^{-3+5} = (-4)^2$$
$$[(-3)^4]^{-2} = (-3)^{-8}$$
$$(3^{-2}\times 2^{-3})^4 = 3^{-8}\times 2^{-12}$$

5. Potência das frações. Para se elevar uma fração a uma potência elevam-se ambos os têrmos da fração a essa potência. Dêsse modo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

De fato: $$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Nota: No caso da potência de um *número misto*, transforma-se primeiramente o número misto em fração imprópria. Exemplos:

$$\left(1\,\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$
$$\left(2\,\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

Também agora *dizemos* que:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1 \text{ (ou qualquer outra fração elevada a } zero)$$

e, levando em conta a interpretação dada ao *expoente negativo* (n.º 4), temos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^1}$$

Outros exemplos:

$$\left(2\,\frac{1}{5}\right)^0 = 1,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2};\quad \left(1\,\frac{3}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{10}{7}\right)^4}$$

Combinando todos os resultados apresentados até agora sôbre potências, destaquemos mais alguns exemplos:

1. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$; 2. $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$

3. $\left(-2\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{11}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{11}{4}\right)^3} = \frac{1}{-\left(\frac{11}{4}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{11^3}{4^3}} = -\frac{4^3}{11^3} = -\frac{64}{1331}$

4. $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = +\frac{1}{3^6} = +\frac{1}{729}$;

5. $\left[\left(1\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{-3} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^{-3} = \frac{1}{\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3} =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{1}{5}\right)^6} = \frac{1}{\frac{5^{12}}{3^{12}} \times \frac{1}{5^6}} = \frac{3^{12} \times 5^6}{5^{12} \times 1} = \frac{3^{12}}{5^6}$$

6. Potência de um número decimal. Para se elevar um número decimal a uma potência, calcula-se a potência do número sem a vírgula, isto é, como se fôsse inteiro e, a seguir, separa-se do resultado um número de casas decimais igual ao produto do número de casas decimais pelo expoente da potência.

Assim, o cubo do número decimal 2,12 é dado da seguinte maneira:

$$212^3 = 9\,528\,128$$

e, portanto: $2{,}12^3 = 9{,}528\,128$, pois, $2{,}12^3 = 2{,}12 \times 2{,}12 \times 2{,}12$ que é um produto com 6 casas decimais (2×3). Exemplos:

$$(0{,}01)^2 = 0{,}000\,1$$
$$(3{,}1)^4 = 92{,}352\,1$$

É óbvio, que é sempre possível conduzir as potências de números decimais ao cálculo das frações que lhes são equivalentes. Exemplos:

$(3{,}1)^4 = \left(\frac{31}{10}\right)^4$; $(-1{,}02)^3 = \left(-\frac{102}{100}\right)^3$; $(0{,}001)^{-2} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-2}$

$(0{,}5555\ldots)^3 = \left(\frac{5}{9}\right)^3$ (o cálculo da potência de uma *dízima periódica*, reduz-se ao da *fração geratriz* correspondente).

$(2{,}583333\ldots)^2 = \left(2\frac{583-58}{900}\right)^2 = \left(2\,\frac{525}{900}\right)^2$ (a dízima periódica agora é *composta*).

NOTA: Frequentemente indicamos números muito grandes (ou muito pequenos) empregando potências de 10 com expoentes inteiros e positivos (ou negativos).

Assim,
$3\,000\,000\,0000\,000\,000 = 3 \,.\, 10^{15}$
$1 \text{ micron} = 0{,}000\,001 \text{ m} = 10^{-6} m$
$\therefore\ 13 \text{ micra} = 13 . 10^{-6} m$

EXERCÍCIOS

1. Calcular o valor das seguintes potências:

64

4^3; $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; $(0{,}01)^3$; 9^0; 1^{12}; 0^8; $(1{,}21)^2$; $\left(3\frac{1}{2}\right)^3$; 1259^1.

2. Quantos fatôres iguais a a possui a potência m-ésima do número a?

3. Sabendo-se que $3^5 = 243$ e $3^3 = 27$, calcular o valor de 3^8 com uma multiplicação e 3^3 com uma divisão.

4. Calcular: 1.º) $5^3 \times 5^4 \times 5^1$; 4.º) $3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4$
2.º) $a^3 \times a^5 \times a$; 5.º) $b^p \times b^q$
3.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$; 6.º) $(0{,}5)^8 \times (0{,}5)^2$

5. Calcular: 1.º) $8^3 : 8^2$; 3.º) $7^4 : 7^4$; 5.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^2$
2.º) $x^5 : x^2$; 4.º) $a^m : a^n$; 6.º) $b^p : b^q$

6. Dizer se $(3^2)^3$ é a mesma coisa que 3^{2^3}.

7. Calcular o valor da expressão: $4^3 + 6^2 : 3^2 + 1^8$.

8. Calcular o valor das expressões seguintes:
1.º) $(3^2)^4$; 3.º) $(5^2 \times 3)^3$
2.º) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$; 4.º) $(2^2 \times 4^3 \times 3^4)^3 : (2^3 \times 4 \times 3^2)^2$

9. Quantos zeros possui o quadrado de 100? E o cubo de 1 000?

10. Calcular o valor das seguintes potências:
3^{-2}; 4^{-4}; 12^{-1}; 8^{-3}; $(-5)^3$; $(-1)^{-8}$; $(-1)^5$; $(+3)^{-4}$

11. Determinar o valor absoluto dos números relativos que se seguem:

$\frac{-3}{+8}$; $\frac{+5}{-3}$; $-2\frac{1}{5}$; $+0{,}71$; $-0{,}000\,1$; -8; $+100$

12. Determinar o valor das seguintes potências:

$(-3)^{-2}$; $\left(+\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-1}$; $(-0{,}5)^{-4}$; $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-2}$

13. Efetuar as operações que se seguem:

1.º) $3^{-4} \times 3^{-2}$; 3.º) $(-5)^{-3} : (-5)^{-4}$;
2.º) $[(-4)^2]^{-3}$; 4.º) $(3^{-2} \times 3^{-4})^{-3}$

14. Calcular: $(a^{-m})^n$ 15. Calcular: $\left(\frac{a^{-n}}{a^{-m}}\right)^p$

NOTA: Ver exercícios de recapitulação no fim do livro, pág. 191

RESPOSTAS:

1. 64; $\frac{1}{16}$; $0{,}000\,001$; 1; 1; 0; $1{,}464\,1$; $\frac{343}{8}$; $1\,259$
2. m fatôres
3. $3^8 = 3^5 \times 3^3 = 243 \times 27 = 6\,561$; $3^2 = 3^5 : 3^3 = 243 : 27 = 9$
4. 1.º) 5^8; 2.º) a^9; 3.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; 4.º) 3^{10}; 5.º) b^{p+q}; 6.º) $(0{,}5)^{10}$
5. 1.º) 8; 2.º) x^3; 3.º) $7^0 = 1$; 4.º) a^{m-n}; 5.º) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; 6.º) b^{p-q}
6. Não, pois, $(3^2)^3 = 3^6$ e $3^{2^3} = 3^8$
7. 69
8. 1.º) 3^8; 2.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$; 3.º) $5^6 \times 3^3$; 4.º) $4^7 \times 3^8$
9. 4 zeros e 9 zeros, respectivamente.
10. $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{512}$; -125; 1; -1; $\frac{1}{81}$
11. $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{3}$; $2\frac{1}{5}$; $0{,}71$; $0{,}000\,1$; 8; 100
12. $\frac{1}{9}$; 8; $\frac{-5}{4}$; 16; $\frac{4}{49}$
13. 1.º) 3^{-6}; 2.º) $(-4)^{-6}$; 3.º) -5; 4.º) $3^{+6} \times 3^{+12} = 3^{18}$
14. a^{-mn} 15. $\frac{a^{-np}}{a^{-mn}} = \frac{a^{mp}}{a^{np}}$

§ 2. Expressões do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números. Interpretações geométricas respectivas

7. Quadrado da soma indicada de dois números. Aplicações. Querendo achar a expressão do quadrado da *soma indicada* de dois números, por exemplo,

$$4 + 3$$

procedemos da seguinte maneira:

Marcamos sôbre uma reta um segmento AB de medida igual a $4 + 3 = 7$ (centímetros, por exemplo), e formamos o quadrado que tenha essa medida por lado e que é representado pela figura $ABCD$ (fig. 1). Essa figura, cuja área é igual a $(4 + 3)^2$, é formada de:

1. Um quadrado de área igual a 4^2;
2. Um retângulo de área igual a 4×3;
3. Um retângulo de área igual a 3×4;
4. Um quadrado de área igual a 3^2.

Teremos, assim, por via geométrica, justificado a seguinte igualdade:

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 4 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2$$

ou

$$\boxed{(4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 3 + 3^2}$$

que nos permite dizer:

O quadrado da soma indicada de dois números é igual ao quadrado do primeiro número mais duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo número, mais o quadrado do segundo número.

Exemplos: $(2 + 6)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 6 + 6^2$

$(40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2$

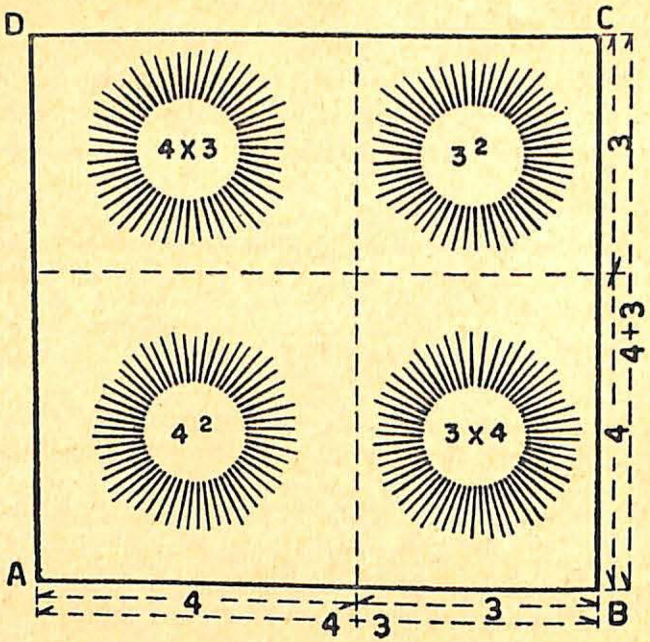


FIG. 1

De um modo geral, temos:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2}$$

onde a e b representam dois números quaisquer.

APLICAÇÕES.

1.ª) ***Determinação do quadrado de um número decompondo-o nas suas dezenas e unidades.*** Seja determinar o quadrado do número 37. Decompondo 37 em 30+7, temos:

$$\begin{aligned} 37^2 &= (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2 = \\ &= 900 + 420 + 49 = \\ &= 1\,369 \end{aligned}$$

O resultado:

$$\boxed{(30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2}$$

permite dizer que:

> **O quadrado de um número é igual ao quadrado das dezenas mais duas vêzes o produto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.**

2.ª) ***Terminação dos quadrados perfeitos.*** Chamam-se *quadrados perfeitos* os números que se obtêm elevando ao quadrado outros números. Assim, por exemplo, como:

$9^2 = 81$, diz-se que 81 é um quadrado perfeito.

Da aplicação anterior, podemos dizer que o quadrado de um número é *uma soma de três parcelas*, das quais as duas primeiras sempre terminam em zero. Por essa razão a *terminação da terceira parcela* (que representa o quadrado das unidades) é necessàriamente a terminação do quadrado perfeito.

Assim sendo, a terminação de um quadrado perfeito só pode ser um dos números: 1, 4, 5, 6, 9, 00.

De fato, basta observar o seguinte quadro:

Terminação do número	*Quadrado perfeito*	*Terminação do quadrado perfeito*
1	1	$\boxed{1}$
2	4	$\boxed{4}$
3	9	$\boxed{9}$
4	16	$\boxed{6}$
5	25	$\boxed{5}$
6	36	6
7	49	9
8	64	4
9	81	1
10	100	$\boxed{00}$

Logo, um quadrado perfeito não pode terminar em 2, 3, 7 e 8 ou em um número ímpar de zeros. Por exemplo, os números:

12, 5 513, 7, 68, 9 000

não são quadrados perfeitos.

Devemos, porém, observar que, se um número terminar em 1, 4, 5, 6, 9, 00, *não podemos* garantir que êsse número seja quadrado perfeito. Assim, dos números, por exemplo, 36 e 26, que terminam em 6 (terminação de quadrado perfeito) sòmente o 36 é quadrado perfeito ($36 = 6^2$).

A condição que obriga a um número ser quadrado perfeito é a seguinte:

Decomposto o número em seus fatôres primos, os expoentes dêsses fatôres devem ser pares.

Exemplos:

1.º) Verificar se o número 144 é quadrado perfeito.

A terminação 4 é de quadrado perfeito e como:

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

isto é, os expoentes dos fatôres primos são *todos pares*, segue que o número 144 é um quadrado perfeito.

2.º) Verificar se o número 1 356 é quadrado perfeito.

A terminação 6 é de quadrado perfeito e como:

$$1\,356 = 2^2 \times 3 \times 113$$

isto é, os expoentes dos fatôres primos *não são todos pares*, concluímos que 1 356 não é um quadrado perfeito.

8. Produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números. A expressão do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números, pode ser obtida, geomètricamente, do seguinte modo:

Seja o produto: $(5 + 2) \times (5 - 2)$

Construímos o quadrado *ABCD*, cujo lado *AB* tenha por medida 5 (centímetros, por exemplo). Sôbre o lado *AB*

consideremos o segmento *MB* que tenha por medida 2 (cm) (fig. 2). Temos, assim:

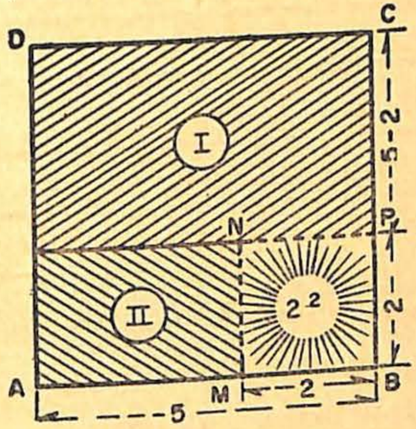


FIG. 2

O quadrado *ABCD* de área igual 5^2 e o quadrado *MBPN* de área igual a 2^2. Observemos, agora, que a soma das partes assinaladas (I e II) representa a área da figura tôda (5^2) menos a área do quadrado de lado 2 (2^2), isto é

$$5^2 - 2^2$$

Como essas partes (I e II) podem ser dispostas de outra maneira (fig. 2-A), ou seja:

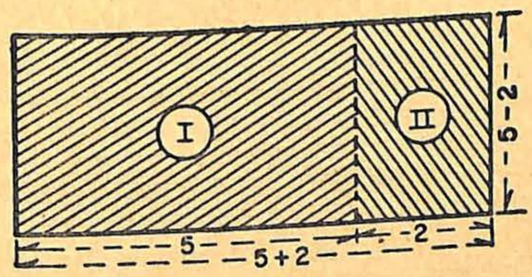


FIG. 2-A

segue que:

$$\text{parte I} + \text{parte II} = (5+2) \times (5-2)$$

isto é,

$$\boxed{(5+2) \times (5-2) = 5^2 - 2^2}$$

De um modo geral, temos:

$$\boxed{(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2}$$

Logo:

> **O produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números é igual ao quadrado do primeiro número menos o quadrado do segundo.**

9. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos.

Aplicações. *A diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é igual ao dôbro do menor, mais um.*

Assim, por exemplo:

$$15^2 - 14^2 = 2 \times 14 + 1$$

De fato, como:

$15 = 14 + 1$ e $15^2 = (14+1)^2 = 14^2 + 2 \times 14 \times 1 + 1^2$

ou $15^2 = 14^2 + 2 \times 14 + 1$

segue que, $15^2 - 14^2 = 2 \times 14 + 1$

De um modo geral, temos:

$$\boxed{(a+1)^2 - a^2 = 2 \times a + 1}$$

onde a e $a + 1$ representam dois números consecutivos.

A construção das *tabelas de quadrados* é baseada nessa propriedade. Daremos, como exercício, a construção da tabela dos quadrados dos primeiros dez números inteiros.

Assim, se $1^2 = 1$

temos:

$$\begin{aligned}
2^2 - 1^2 &= 2\times1+1 = 3\\
3^2 - 2^2 &= 2\times2+1 = 5\\
4^2 - 3^2 &= 2\times3+1 = 7\\
5^2 - 4^2 &= 2\times4+1 = 9\\
6^2 - 5^2 &= 2\times5+1 = 11\\
7^2 - 6^2 &= 2\times6+1 = 13\\
8^2 - 7^2 &= 2\times7+1 = 15\\
9^2 - 8^2 &= 2\times8+1 = 17\\
10^2 - 9^2 &= 2\times9+1 = 19
\end{aligned}$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}
2^2 &= 1^2 + 3 = 4\\
3^2 &= 2^2 + 5 = 9\\
4^2 &= 3^2 + 7 = 16\\
5^2 &= 4^2 + 9 = 25\\
6^2 &= 5^2 + 11 = 36\\
7^2 &= 6^2 + 13 = 49\\
8^2 &= 7^2 + 15 = 64\\
9^2 &= 8^2 + 17 = 81\\
10^2 &= 9^2 + 19 = 100
\end{aligned}$$

Aplicação. Sabendo-se que a diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é 29, dizer quais são êsses números.

Pela propriedade estudada, temos que 29 representa o dôbro do menor + 1 e, portanto:

28 é o dôbro do menor

14 é o menor

e $15 = (14 + 1)$ é o maior.

Nota: Ver tabela de quadrados na pág. 78.

EXERCÍCIOS

1. Aplicar a expressão do quadrado da soma indicada de dois números, nos seguintes exemplos:
   1.º) $(3+2)^2$ 3.º) $(10+1)^2$ 5.º) $(5+4)^2$
   2.º) $(20+1)^2$ 4.º) $(c+d)^2$ 6.º) $(x+y)^2$
2. Determinar o quadrado dos seguintes números, decompondo-os nas suas dezenas e unidades:
   1.º) 32 ; 2.º) 43 ; 3.º) 15 ; 4.º) 24 ; 5.º) 159 ; 6.º) 211
3. Determinar, pela decomposição em fatôres primos, quais dos números são *quadrados perfeitos*:
   900 ; 123 ; 1 296 ; 5 625 ; 624 ; 1 000
4. Aplicar a expressão do produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números, nos seguintes exemplos:
   1.º) $(4+3) . (4-3)$; 2.º) $(6+4) . (6-4)$; 3.º) $(13+10) . (13-10)$
   4.º) $(8+5) . (8-5)$; 5.º) $(c+d) . (c-d)$; 6.º) $(x+y) . (x-y)$

5. Dizer o valor das *diferenças* que se seguem, aplicando a propriedade da diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos
1.ª) $9^2 - 8^2$; 2.ª) $10^2 - 9^2$; 3.ª) $46^2 - 45^2$
4.ª) $21^2 - 20^2$; 5.ª) $(c+1)^2 - c^2$; 6.ª) $(x+1)^2 - x^2$
6. Sabendo-se que a diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos é 49, dizer quais são êsses números.
7. Um número aumentado de 1 faz o seu quadrado aumentar de 21. Qual é êsse número?
8. Qual o número que se deve somar a $3^2 + 4^2$ para se obter o quadrado de $(3 + 4)$?
9. Qual o número que se deve somar a $a^2 + b^2$ para se obter o quadrado de $(a + b)$?
10. Construir uma tabela de quadrados dos números de 10 a 15, usando a propriedade da diferença dos quadrados de dois números consecutivos.
11. Quanto se deve acrescentar a $5^2 + 8^2$ para se obter um quadrado?
12. Achar a diferença entre os quadrados de 19 e 18, sem elevá-los ao quadrado.
13. Determinar a diferença entre os quadrados de 15 e 12, sem elevá-los ao quadrado. (Nota: Lembrar que $(15+12)\ (15-12) = 15^2 - 12^2$)
14. Sabendo-se que a soma de dois números é 21 e que a diferença entre os quadrados dêsses números é 63, determinar êsses dois números. (Nota: Lembrar que: $(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$, onde são conhecidos $a+b$ e $a^2 - b^2$).
15. Qual é o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar os seguintes produtos, a fim de obter um quadrado:
1.º) $3^2 \times 5^3$; 2.º) $2\times3^2\times5\times7^3$; 3.º) $5^2\times7^4$; 4.º) $3^3\times11\times13^2$

(NOTA: Ver outros exercícios de recapitulação no fim do livro, pág. 193)

RESPOSTAS:

1. 1.º) $3^2 + 2\times3\times2 + 2^2$; 4.º) $c^2 + 2\times c\times d + d^2$
2.º) $20^2 + 2\times20\times1 + 1^2$; 5.º) $5^2 + 2\times5\times3 + 4^2$
3.º) $10^2 + 2\times10\times1 + 1^2$; 6.º) $x^2 + 2\ .\ x\ .\ y + y^2$
2. 1.º) $30^2 + 2\times30\times2 + 2^2$; 4.º) $20^2 + 2\times20\times4 + 4^2$;
2.º) $40^2 + 2\times40\times3 + 3^2$; 5.º) $150^2+2\times150\times9+9^2$
3.º) $10^2 + 2\times10\times5 + 5^2$; 6.º) $210^2+2\times210\times1+1^2$
3. São quadrados perfeitos: 900, 1 296, 5 625.
4. 1.º) $4^2 - 3^2$; 2.º) $6^2 - 4^2$; 3.º) $13^2 - 10^2$
4.º) $8^2 - 5^2$; 5.º) $c^2 - d^2$; 6.º) $x^2 - y^2$

5. 1.ª) $2 \times 8 + 1$; 3.ª) $2 \times 45 + 1$; 5.ª) $2 \times c + 1$
2.ª) $2 \times 9 + 1$; 4.ª) $2 \times 20 + 1$; 6.ª) $2\ .\ x + 1$
6. 24 e 25 7. 10 8. $2 \times 3 \times 4$ 9. $2 \times a \times b$
10. $11^2 = 10^2 + 21$; $12^2 = 11^2 + 23$; $13^2 = 12^2 + 25$; $14^2 = 13^2 + 27$; $15^2 = 14^2 + 29$.
11. $80 = 2 \times 5 \times 8$
12. $37 = 2 \times 18 + 1$
13. $81 = 3 \times 27$
14. 12 e 9
15. 1.º) 5 ; 2.º) $70 = 2 \times 5 \times 7$; 3.º) 1 ; 4.º) $33 = 3 \times 11$

Curiosidades sôbre potências

1. **Um problema de mais de 2 000 anos que envolve potências.** No mais famoso papiro egípcio (Papiro de Rhind) consta o seguinte problema.

Havia um patrimônio composto de 7 casas, cada casa possuia 7 gatos, cada gato matava 7 camundongos, cada camundongo comia 7 espigas de cevada, cada espiga de cevada teria produzido 7 "hekat" de grãos. Quantos grãos haveria no total?

É um problema que envolve potências consecutivas de 7, pois:

7 casas	$7^1 =$	7
7^2 gatos	$7^2 =$	49
7^3 camundongos	$7^3 =$	343
7^4 espigas	$7^4 =$	2 401
7^5 "hekat"	$7^5 =$	16 807

Logo, haveria no total 16 807 grãos de cevada!

2. **Resultados que "se podem esperar".** Multiplique as potências sucessivas de 2:

$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$ ....

ordenadamente, pelas sucessivas potências de 5:

$5^1,\ 5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5$ ....

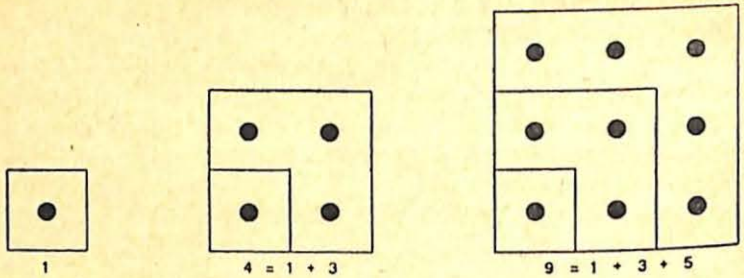
Você obterá as sucessivas potências de ....

3. **Acêrca de "quadrados".** Um "quadrado" curioso é o quadrado do número:

111 111 111

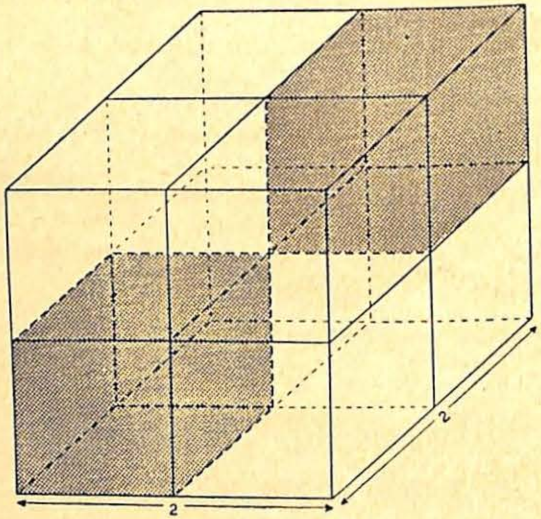
Experimente e você obterá para resultado um número composto da sucessão dos números inteiros de 1 a 9, crescendo e de 8 a 1, decrescendo!

Observe, agora, como podemos representar os seguintes números quadrados, mediante "quadrados", e construa o 16.



4. **Acêrca de "cubos":** Qual é maior: $(3^3)^3$ ou $(3)^{3^3}$? Verifique primeiramente que: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Será que: $4^3 + 5^3 + 6^3 = 7^3$?(!!)

Observe o "cubo" de 2 (é um dado dêsses de jogos, de aresta 2) e construa o cubo de 3.



§ 3. Raiz quadrada

10. Raiz quadrada exata. Quando se tem um quadrado perfeito, como, por exemplo:

$$64 = 8^2$$

diz-se que o número 8 é a *raiz quadrada exata* ou a *raiz quadrada* de 64 e se indica:

$$\sqrt{64} = 8 \ (*)$$

O sinal $\sqrt{\ }$ é chamado *radical* ou *sinal de raiz* e o número que está sob êsse sinal (64, no exemplo) é denominado *radicando*.

Daí a *definição:*

> **Raiz quadrada exata de um número (quadrado perfeito) é o número cujo quadrado é igual ao número dado.**

Exemplos:

$$\sqrt{36} = 6, \text{ pois } 6^2 = 36$$

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}, \text{ pois } \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ pois } 1^2 = 1$$

$$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9, \text{ pois } (0{,}9)^2 = 0{,}81$$

A operação que permite encontrar a raiz quadrada de um número é chamada *extração de raiz quadrada*, sendo inversa da operação de *elevar ao quadrado*. Por essa razão só tem sentido procurar raiz quadrada exata dos números que são *quadrados perfeitos*.

Nestas condições, as *operações inversas: extração de raiz quadrada* e *elevar ao quadrado*, permitem dizer:

1.º) *a raiz quadrada do quadrado de um número é o próprio número.* Ex.: $\sqrt{5^2} = 5$

2.º) *o quadrado da raiz quadrada de um número é o próprio número.* Ex.: $(\sqrt{8})^2 = 8$

11. Raiz quadrada aproximada a menos de uma unidade. Consideremos o caso de um número que não seja

(*) Com o conhecimento dos números relativos deveríamos, à rigor, escrever $\sqrt{64} = \pm 8$, pois, tanto $(+8)^2 = 64$ como $(-8)^2 = 64$. Porém, no tratamento aritmético que estamos dando à raiz quadrada, tomaremos sempre o *valor aritmético* (isto é, sem sinal) da raiz quadrada.

quadrado perfeito, como, por exemplo, o número 54. Podemos dizer que a raiz quadrada de 54 está compreendida entre 7 e 8, pois,

$$7^2 = 49 \text{ é menor que } 54,$$
$$\text{e} \quad 8^2 = 64 \text{ é maior que } 54.$$

Diremos, então, que:

7 é a *raiz quadrada aproximada, por falta,* de 54, *a menos de uma unidade;*

e 8 é a *raiz quadrada aproximada, por excesso,* de 54, *a menos de uma unidade.*

A expressão *a menos de uma unidade por falta ou por excesso* é justificada pelo fato de se cometer um *êrro menor do que* 1, quando se toma o 7 ou o 8 para a raiz quadrada de 54.

Logo, para um número que não seja quadrado perfeito, chama-se:

1.º) *Raiz quadrada aproximada,* ***por falta,*** *a menos de uma unidade, ao maior número cujo quadrado esteja contido em o número dado.*

2.º) *Raiz quadrada aproximada,* ***por excesso,*** *a menos de uma unidade, ao menor número cujo quadrado contém o número dado.*

Exemplos:

$\sqrt{38} \sim 6$ (aproximada,(*) por falta, a menos de uma unidade).

$\sqrt{38} \sim 7$ (aproximada, por excesso, a menos de uma unidade).

12. Resto da raiz quadrada. Nas raízes quadradas aproximadas, por falta, chama-se *resto da raiz quadrada* a diferença entre o número dado e o maior quadrado nêle contido. Assim, como $\sqrt{54} \sim 7$ (aproximada, por falta, a menos de uma unidade), o *resto* dessa extração será:

$$54 - 49 = 5$$

pois 49 é o maior quadrado contido em 54.

(*) O sinal $\sim$ lê-se: "*aproximadamente igual*".

Na $\sqrt{38} \sim 6$ (aproximada, por falta, a menos de uma unidade), o *resto* é igual a $38 - 36 = 2$.

13. Limite do resto na extração da raiz quadrada. Para o *resto* da raiz quadrada aproximada de um número, vale a seguinte *propriedade:*

O resto da raiz quadrada de um número não pode ser maior que o dôbro da raiz.

De fato, o resto da $\sqrt{54}$ não pode ser maior que 14 que é o dôbro da raiz aproximada 7), pois, caso fôsse 15, por exemplo, a diferença $54 - 15 = 39$, estaria indicando que não foi tomado, como deveria ser, o maior quadrado contido em 54 (que é 49).

É evidente que para as *raízes quadradas exatas* o resto é *nulo.*

14. Regras práticas para a extração da raiz quadrada exata ou aproximada, por falta, de um número inteiro, a menos de uma unidade.

a) ***O número não ultrapassa 100.*** Neste caso, a extração deve ser feita de *memória,* pois basta lembrar que os quadrados dos números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 são respectivamente:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Exemplos:

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{71} \sim 8$ (por falta); $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{81} = 9$.

$\sqrt{13} \sim 3$ (por falta); $\sqrt{65} \sim 8$ (por falta);

b) ***O número é maior que 100.*** Para êste caso, vale a seguinte regra que será exposta em partes, num exemplo, a fim de facilitar o seu conhecimento. Seja extrair a raiz quadrada do número 79 956.

Procederemos da seguinte forma (etapas):

1.ª) Decompomos o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo conter um único algarismo. A *cada grupo separado corresponde um algarismo na raiz.*

Assim, temos:

$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56} \rightarrow$ a raiz deve possuir três algarismos (um para cada grupo)

2.ª) Extraímos a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade, do último grupo (no exemplo é 7, que se compõe só de um algarismo), obtendo-se assim o primeiro algarismo da raiz.

Logo,

$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}$	2

3.ª) Subtraímos do primeiro grupo o quadrado do algarismo encontrado ($2^2 = 4$) e, à direita do resto (3), escrevemos o segundo grupo (99), separando com um ponto o *último* algarismo da direita.

Portanto:	$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}$	2
	4	
Primeiro resto:	39 . 9	

4.ª) *Duplicamos* o algarismo da raiz ($2 \times 2 = 4$), escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por êsse número, o número que permaneceu à esquerda do ponto (39). O quociente aproximado obtido (9) escreve-se à *direita* daquêle dôbro e, a seguir, multiplicamos o número assim formado (49) pelo mesmo quociente (9).

Temos, assim:

$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}$	2
4	$2 \times 2 = 4$; 39 | 4 ; 9 ; $\mathbf{49 \times 9} = 441$
39 . 9	

NOTA: Se o quociente fôr igual ou maior que 10, escreve-se 9; se fôr menor que 1, escreve-se 0.

5.ª) Se fôr possível subtrair o produto obtido (441) do número formado pelo primeiro resto e o segundo grupo (399), o quociente encontrado será o segundo algarismo da raiz. Caso contrário, diminuímos o quociente de uma unidade até que se encontre um produto que torne possível tal subtração. No exemplo considerado, o produto obtido (441) não pode ser subtraído de 399, e por isso, ao invés do algarismo 9, usamos como quociente aproximado o algarismo 8. Temos agora: $\mathbf{48 \times 8} = 384$, produto que pode ser subtraído de 399. Logo, **8** é o segundo algarismo da raiz, que, escrito ao lado do primeiro algarismo da raiz (2) origina 28 para a raiz

Disposição prática:	$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}$	28
	4	$\mathbf{48 \times 8} = 384$
	39 . 9	
	38 4	
Segundo resto: 15	1 5	

6.ª) A seguir fazemos um traço horizontal separando êsses cálculos dos que ainda se vão efetuar. Ao lado do segundo resto (15) escrevemos o terceiro grupo (56, que é o último), e calculamos o terceiro algarismo da raiz da mesma forma que foi calculado o segundo.

	$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}$	28
	4	$\mathbf{48 \times 8} = 384$
	39 . 9	$28 \times 2 = 56$; 155 | 56 ; 2 ; $562 \times 2 = 1\,124$
	38 4	
	1 55 . 6	
resto	1 12 4	
final:	43 2	

O produto 1 124 pode ser subtraído, e, portanto, 2 é o terceiro algarismo da raiz que passa a ser 282. O último resto (432) é o resto da raiz quadrada. Se o *último* *resto* fôr *zero* a raiz encontrada é *exata* e o número proposto é um *quadrado perfeito.*

Logo: a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade, do número 79 956 é 282 e o resto, 432.

Indicação: $\sqrt{79\,956} \sim 282$ (por falta); resto: 432

Disposição prática:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{7.99.56} & 282 \\
4 & 48 \times 8 = 384 \\
39.9 & 562 \times 2 = 1\,124 \\
38\ 4 & \\
1\ 55.6 & \\
1\ 12\ 4 & \\
43\ 2 &
\end{array}
$$

15. Prova. A prova da extração da raiz quadrada de um número é feita em duas partes:

1.ª) Verificando se o resto *não é maior que o dôbro da raiz;*

2.ª) Verificando se a *soma do quadrado da raiz com o resto é igual ao número dado.*

Para o nosso exemplo, temos:

1) O resto 432 é menor que $2 \times 282 = 564$ (dôbro da raiz)

2) $282^2 + 432 = 79\,524 + 432 = 79\,956$ (número dado), isto é, foram verificadas as duas condições e concluímos que a operação está certa.

Nota: Não se pode, na prova da extração da raiz quadrada de um número, prescindir da primeira parte da prova, pois, mesmo para os números cujos restos na extração da raiz quadrada não verificam a primeira parte, verificam necessàriamente a segunda. Assim, no exemplo acima, se ao invés de 282 tivéssemos, por engano, encontrado 281, o resto seria 995, que apesar de satisfazer a segunda parte da prova, isto é,

$$281^2 + 995 = 78\,961 + 995 = 79\,956$$

não satisfaz à 1.ª parte, pois 995 *não é menor* que o dôbro da raiz ($2 \times 281 = 562$).

Outros exemplos: Extrair, a menos de uma unidade, por falta, a raiz quadrada dos números: 497 025 e 1 081.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{49.70.25} & 705 \\
49 & 140 \times 0 = 0 \\
07.0 & 1\,405 \times 5 = 7\,025 \\
702.5 & \\
702\ 5 & \\
000\ 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10.81} & 32 \\
9 & 62 \times 2 = 124 \\
18.1 & \\
12\ 4 & \\
5\ 7 &
\end{array}
$$

Prova: 1.º) O resto é nulo.
2.º) $705^2 = 497\,025$
(quadrado perfeito)

Prova: $57 < 64$ (dôbro da raiz)
$32^2 + 57 = 1\,081$

16. Raiz quadrada de um produto. Aplicação. No cálculo com as raízes quadradas convém frisar que:

> **A raiz quadrada de um produto é igual ao produto das raízes quadradas de seus fatôres.**

Exemplo: $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$

O uso dessa propriedade tem importância quando os fatôres são *quadrados perfeitos.* De fato, lembrando a condição para que um número inteiro seja quadrado perfeito (*), a raiz quadrada dêsses números pode ser obtida *dividindo-se por 2 os expoentes dos fatôres primos que compõe o número dado* (que devem ser pares) e, *efetuando-se o produto dos novos fatôres.* Exemplos:

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

$$\sqrt{18\,225} = \sqrt{3^6 \times 5^2} = \sqrt{3^6} \times \sqrt{5^2} = 3^3 \times 5 = 27 \times 5 = 135$$

17. Aproximação decimal no cálculo da raiz quadrada. Dado um número, que não seja quadrado perfeito,

(*) Ver § 2, número 7, segunda aplicação.

chama-se *raiz quadrada aproximada por falta, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; ......, ao maior número com uma, duas, três, ... casas decimais, cujo quadrado esteja contido em o número dado.*

Acrescentando-se à raiz, as unidades decimais 0,1; 0,01; 0,001; ....., tem-se a raiz quadrada aproximada *por excesso*, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; ...... Exemplo:

Dizer quais são as raízes quadradas aproximadas, por falta e por excesso, a menos de 0,1, do número 8.

Como:

$2{,}8^2 = 7{,}84 < 8$ (2,8 é o maior quadrado, com *uma* casa decimal, cujo quadrado está contido em 8.)

$2{,}9^2 = 8{,}41 > 8$ (2,9 é o menor número, com *uma* casa decimal, cujo quadrado contém 8).

Logo: $\sqrt{8} \sim 2{,}8$ (por *falta*, a menos de 0,1)

$\sqrt{8} \sim 2{,}9$ (por *excesso*, a menos de 0,1)

Lembrando que para *cada algarismo* da raiz corresponde *um grupo de dois algarismos* do número dado, temos que na extração da raiz quadrada aproximada com *uma, duas, três,* etc., ... casas decimais, o número deverá necessàriamente possuir *duas, quatro, seis,* etc., ... casas decimais. Vale, pois, a seguinte regra:

> **Para a extração da raiz quadrada aproximada, por falta a menos de 0,1; 0,01; 0,001; ... de um número inteiro, extrai-se a sua raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade, e, à direita, põe-se uma vírgula. Se à direita do número inteiro se acrescentar um par de zeros, a continuação da extração permitir-nos-á encontrar o algarismo dos décimos da raiz procurada. Se forem acrescentados quatro zeros, a operação permitirá encontrar o algarismo dos centésimos da raiz quadrada e assim, por diante, até à ordem da aproximação desejada.**

Exemplos:

1) Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de 0,01, do número 2.

Devemos acrescentar 4 zeros à direita de 2 (a aproximação é de centésimos).

```
√ 2.00.00 | 1,41
  1       | 24 × 4 = 96
  10.0    | 281 × 1 = 281
   9 6
    40.0
    28 1
    11 9
```

Logo:(*) $\overset{0{,}01}{\sqrt{2}} \sim 1{,}41$ (por falta a menos de 0,01) e o resto é 0,0119 (da mesma espécie do radicando).

2) Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de 0,1 do número 475.

Devemos acrescentar 2 zeros à direita de 475 (a aproximação é de décimos).

```
    0,1
√ 4.75.00 | 21,7
  4       | 41 × 1 = 41
  07.5    | 427 × 7 = 2989
   41
   340.0
   298 9
    41 1
```

Logo: $\overset{0{,}1}{\sqrt{475}} \sim 21{,}7$ (por falta a menos de 0,1) e o resto, 4,11.

18. Raiz quadrada dos números decimais. Para a extração da raiz quadrada dos números decimais, *faz-se com que o número tenha duas, quatro, seis, . . . casas decimais* conforme a aproximação desejada seja a menos 0,1; 0,01; 0,001; ....

(*) A aproximação será indicada sôbre o radical.

e extrai-se a raiz quadrada como se a vírgula não existisse. No resultado separam-se, com uma vírgula, respectivamente, uma, duas, três, etc., casas decimais. Exemplos:

1) Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de $\frac{1}{100}$ (ou 0,01) do número 0,941.

O número deve possuir 4 casas decimais depois da vírgula, pois a aproximação é de centésimos.

```
0,9410 → √94.10 | 97
          81    |------------------
         -----  | 187 × 7 = 1 309
          131.0 |
          130 9 |
         ------ |
          000 1 |
```

Logo: $\sqrt[0,01]{0,941} \sim 0,97$ (por falta a menos de 0,01) e o resto, 0,0001.

2) Extrair a raiz quadrada de 2,25 143, por falta, a menos de 0,1.

A raiz deverá ter uma casa decimal (aproximação de um décimo), e, portanto é suficiente considerar as duas primeiras casas decimais.

```
3,25 143 → √3.25 | 18
            1    |------------------
           ----- | 28 × 8 = 224
            22.5 |
            22 4 |
           ----- |
            00 1 |
```

Logo: $\sqrt[0,1]{3,25\,143} \sim 1,8$ (por falta a menos de 0,1).

19. Raiz quadrada das frações. Se ambos os têrmos de uma fração são quadrados perfeitos, obtém-se a raiz quadrada *extraindo-se as raízes dos dois têrmos.* Exemplos:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Se um, ou ambos os têrmos de uma fração, não forem quadrado perfeito, podemos calcular a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade ou a menos de uma unidade fracionária decimal $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots$ Exemplos:

1) Calcular $\sqrt{\frac{42}{57}}$, por falta, a menos de 0,01.

Convertemos a fração $\frac{42}{57}$ em decimal com 4 casas decimais, pois a aproximação é de um centésimo.

```
420 | 57
    |-------------
      0,736842. . .
```

ou $\frac{42}{57} \sim 0,7\,368$ (quociente aproximado a menos de 0,000 1).

```
√73.68 | 85
 64    |------------------
 ----- | 165 × 5 = 825
  96.8 |
  82 5 |
 ----- |
  14 3 |
```

Logo: $\sqrt[0,01]{\frac{42}{57}} \sim 0,85$ (por falta a menos de 0,01).

2) Calcular $\sqrt{\frac{141}{23}}$, por falta, a menos de *uma unidade.*

Temos: 141 | 23 → 6 ou $\frac{141}{23} \sim 6$ (quociente aproximado a menos de uma unidade)

Logo:

$$\sqrt[1]{\frac{141}{23}} \sim \sqrt{6} \sim 2 \text{ (por falta a menos de } \textit{uma unidade}).$$

NOTA: Caso se queira extrair a raiz quadrada de uma fração (que não seja um quadrado perfeito), por falta ou por excesso, com um êrro inferior a uma unidade fracionária, *não decimal,* é preciso que o denominador da fração seja *um quadrado.*

Assim, por exemplo, seja extrair a raiz quadrada de $\frac{5}{49}$. Temos:

$\sqrt{\frac{5}{49}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{49}} \sim \frac{2}{7}$ (extrái-se a raiz quadrada do numerador, por falta, a menos de uma unidade) e dizemos que $\frac{2}{7}$ é a raiz quadrada, por falta, com êrro inferior a $\frac{1}{7}$. De fato, $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} < \frac{5}{49}$ e $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49} > \frac{5}{49}$.

Caso, o denominador não seja um quadrado perfeito, podemos torná-lo um quadrado, sem alterar o valor da fração, desde que multipliquemos ambos os têrmos da fração pelo fator ou fatôres primos que aparecem no denominador com expoente ímpar. Exemplos:

1. $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11 \times 11}} = \sqrt{\frac{77}{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} \sim \frac{8}{11}$ $\left(\text{por falta, a menos de } \frac{1}{11}\right)$

2. $\sqrt{\frac{25}{72}} = \sqrt{\frac{25}{2^3 \times 3^2}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{2^3 \times 3^2 \times 2}} = \sqrt{\frac{50}{2^4 \times 3^2}} = \frac{\sqrt{50}}{2^2 \times 3} =$

$$= \frac{\sqrt{50}}{12} \sim \frac{7}{12} \left(\text{por falta a menos de } \frac{1}{12}\right)$$

Como *aplicação* dêsses resultados, para se *extrair a raiz quadrada de um número,* com um êrro inferior a uma unidade fracionária, *não decimal* basta: 1.º) multiplicar o n.º pelo quadrado do denominador da unidade fracionária dada; 2.º) extrair a raiz quadrada do resultado, por falta, a menos de uma unidade; 3.º) dividir a raiz obtida pelo denominador da unidade fracionária. Exemplo: Extrair a raiz quadrada de 35, por falta a menos de $\frac{1}{4}$. Temos:

1.º) $35 \times 4^2 = 35 \times 16 = 560$

2.º) $\sqrt{560} \sim 23$

3.º) $\frac{23}{4} = 5\frac{3}{4}$

Logo:

$$\sqrt{35} \sim 5\frac{3}{4} \left(\text{por falta, a menos de } \frac{1}{4}\right)$$

EXERCÍCIOS

1. Extrair a raiz quadrada, *por decomposição em fatôres primos,* dos seguintes números:
1.º) 576 ; 2.º) 784 ; 3.º) 1 936 ; 4.º) 12 321 ; 5.º) 396 900

2. Dizer quais são as raízes quadradas aproximadas por falta e por excesso, *a menos de uma unidade,* dos seguintes números:
1.º) 12 ; 2.º) 38 ; 3.º) 51 ; 4.º) 135

3. Extrair a raiz quadrada exata dos seguintes quadrados perfeitos:

1.º) 64	4.º) 2 401	7.º) 36 100	10.º) 998 001
2.º) 289	5.º) 7 225	8.º) 88 209	11.º) 1 002 001
3.º) 1 024	6.º) 11 664	9.º) 651 249	12.º) 4 937 284

4. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, *a menos de uma unidade,* dos números:

1.º) 120	4.º) 9 712	7.º) 163 516	10.º) 11 594 026
2.º) 315	5.º) 16 130	8.º) 654 482	11.º) 4 084 444
3.º) 6 245	6.º) 57 164	9.º) 774 480	12.º) 1 234 321

5. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,1, dos números:
1.º) 8 ; 2.º) 12 ; 3.º) 385 ; 4.º) 1 049 ; 5.º) 72 354 ; 6.º) 1 234 589

6. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,01, dos números:
1.º) 5 ; 2.º) 11 ; 3.º) 219 ; 4.º) 608 ; 5.º) 35,04 ; 6.º) 167,036 ; 7.º) 1,3

7. Extrair a raiz quadrada das frações:
1.ª) $\frac{36}{49}$; 2.ª) $\frac{1}{16}$; 3.ª) $\frac{25}{324}$; 4.ª) $\frac{1}{10\,000}$

8. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,01, dos seguintes números decimais:
1.º) 0,52 ; 2.º) 3,214 ; 3.º) 33,8 ; 4.º) 0,00 781

9. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,001 das frações:
1.ª) $\frac{5}{9}$; 2.ª) $\frac{144}{166}$; 3.ª) $\frac{16}{3}$; 4.ª) $\frac{1}{8}$

10. Extrair a raiz quadrada, por falta, das seguintes frações:
1.ª) $\frac{11}{64}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{8}\right)$ 3.ª) $\frac{133}{1\,521}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{39}\right)$
2.ª) $\frac{12}{169}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{13}\right)$ 4.ª) $\frac{29}{5\,184}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{72}\right)$

11. Extrair a raiz quadrada, por falta, dos seguintes números:

1.º) 26 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{3}\right)$ 3.º) 3 840 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{5}\right)$

2.º) 1 085 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{4}\right)$ 4.º) 7 568 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{7}\right)$

12. Extrair a raiz quadrada dos seguintes produtos, sem efetuá-los:

1.º) 25×36 3.º) $2^6 \times 3^4 \times 5^2$

2.º) $2^4 \times 3^2$ 4.º) $11^2 \times 81$

13. O dôbro do quadrado de um número é 288. Qual é êsse número?
14. O produto de dois números iguais é 973,44. Qual é o valor de cada um?
15. Qual é o número cujo quadrado é 0,012 544?
16. Qual é o número cujo quadrado aumentado de 199 dá 10 000?
17. O quadrado de um número diminuído de 161 resulta 17 000. Qual é êsse número?
18. A área de um quadrado é igual a 75,69m². Qual é o valor do seu lado (em m)?
19. Qual é o valor de x que verifica as igualdades:
1.ª) $x^2 = 144$; 2.ª) $x^2 = 184{,}96$; 3.ª) $3x^2 = 1\,323$
20. Um quinto do quadrado de um número é 500. Determinar êsse número.
21. Qual é em metros o comprimento do lado de uma praça de forma quadrada, sabendo-se que a sua área é igual a de uma outra praça de forma retangular, cujas dimensões são: 196m e 49m?
22. Determinar o número cuja raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade é 31 e o resto 56.
23. Qual o menor número que se deve somar a 3 216 para se obter um quadrado?
24. O quadrado da soma de dois números positivos é 144 e a diferença entre êles, 6. Quais são êsses números? (Nota: Lembrar que $\sqrt{144}$ representa a soma dos dois números; como a diferença entre êles é 6, segue-se que...).
25. O quadrado da diferença de dois números positivos é 4. Achar êsses números sabendo que a soma dêles é 14.

(NOTA: Ver outros exercícios de recapitulação no fim do livro, pág. 194).

RESPOSTAS:

1. 1.º) $2^3 \times 3 = 24$ 3.º) $2^2 \times 11 = 44$ 5.º) $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630$
2.º) $2^2 \times 7 = 28$ 4.º) $3 \times 37 = 111$
2. 1.º) 3 e 4; 2.º) 6 e 7; 3.º) 7 e 8; 4.º) 11 e 12

3. 1.º) 8 4.º) 49 7.º) 190 10.º) 999
2.º) 17 5.º) 85 8.º) 297 11.º) 1 001
3.º) 32 6.º) 108 9.º) 807 12.º) 2 222
4. 1.º) 10 4.º) 98 7.º) 404 10.º) 3 405
2.º) 17 5.º) 127 8.º) 809 11.º) 2 021
3.º) 79 6.º) 239 9.º) 880 12.º) 1 111
5. 1.º) 2,8; 2.º) 3,4; 3.º) 19,6; 4.º) 32,3; 5.º) 268,9; 6.º) 1 111,1
6. 1.º) 2,23 3.º) 14,79 5.º) 5,91 7.º) 1,14
2.º) 3,31 4.º) 24,65 6.º) 12,92
7. 1.ª) $\frac{6}{7}$; 2.ª) $\frac{1}{4}$; 3.ª) $\frac{5}{18}$; 4.ª) $\frac{1}{100}$
8. 1.º) 0,72; 2.º) 1,79; 3.º) 5,81; 4.º) 0,08
9. 1.ª) 0,745; 2.ª) 0,931; 3.ª) 2,309; 4.ª) 0,353
10. 1.º) 3/8; 2.º) 3/13; 3.º) 11/39; 4.º) 5/72
11. 1.º) 5; 2.º) $35\frac{1}{4}$; 3.º) $61\frac{4}{5}$; 4.º) 87
12. 1.º) 30; 2.º) 12; 3.º) 360; 4.º) 99
13. 12; 14. 31,2; 15. 0,112; 16. 99; 17. 131; 18. 8,7m
19. 1.ª) $x = 12$; 2.ª) $x = 13{,}6$; 3.ª) $x = 21$
20. 50; 21. 98m; 22. 1 017; 23. 33; 24. 9 e 3; 25. 8 e 6.

§ 4. Raiz cúbica

20. Raiz cúbica exata. Do fato de ser, por exemplo,

$$4^3 = 64$$

diz-se que o número 4 é a *raiz cúbica exata* ou a raiz cúbica de 64 e se indica:

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

sendo agora $\sqrt[3]{}$, o *sinal* da raiz cúbica.

Temos, assim, a definição:

Raiz cúbica de um número (cubo perfeito) é o número cujo cubo é igual ao número dado.

Exemplos: $\sqrt[3]{27} = 3$, pois, $3^3 = 27$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}, \text{ pois, } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{1} = 1 , \text{ pois, } 1^3 = 1$$

$$\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2, \text{ pois, } (0{,}2)^3 = 0{,}008$$

A operação que permite encontrar a raiz cúbica de um número é chamada *extração de raiz cúbica*, sendo inversa da operação de *elevar ao cubo*. Daí só ter sentido a procura da raiz cúbica exata dos números que são *cubos perfeitos*, isto é, dos números que são cubos de outros números.

Também agora, temos:

1.º) A raiz cúbica do cubo de um número é o próprio número. Ex.: $\sqrt[3]{6^3} = 6$

2.º) O cubo da raiz cúbica de um número é o próprio número. Ex.: $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

21. Raiz cúbica aproximada a menos de uma unidade. Caso o número não seja um cubo perfeito, como é o número 36, podemos dizer que a raiz cúbica de 36 está compreendida entre **3** ($3^3 = 27$, que é menor de 36) e **4** ($4^3 = 64$, que é maior de 36). Temos, assim, que:

3 é a raiz cúbica aproximada *por falta* de 36, a menos de uma unidade;

4 é a raiz cúbica aproximada *por excesso* de 36, a menos de uma unidade, e indicamos:

$$\sqrt[3]{36} \sim 3 \textit{ (por falta)}$$

$$\sqrt[3]{36} \sim 4 \textit{ (por excesso)}$$

Logo, para um número que não seja cubo perfeito, chama-se:

1.º) *Raiz cúbica aproximada por falta, a menos de uma unidade, ao maior número, cujo cubo esteja contido em o número dado.*

2.º) *Raiz cúbica aproximada por excesso, a menos de uma unidade, ao menor número cujo cubo contém o número dado.*

Nas raízes cúbicas aproximadas, por falta, chama-se *resto da raiz cúbica* a diferença entre o número dado e o maior cubo nela contido.

22. Regras práticas para a extração da raiz cúbica exata ou aproximada, por falta, de um número inteiro, a menos de uma unidade.

a) ***O número não ultrapassa 1 000.*** Neste caso, a extração da raiz cúbica se obtém *mentalmente* recorrendo à seguinte tabela:

número:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
cubo:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1 000

Exemplos:

$$\sqrt[3]{64} = 4; \quad \sqrt[3]{389} \sim 7 \text{ (por falta)}; \quad \sqrt[3]{730} \sim 9 \text{ (por falta)}$$

b) ***O número é maior que 1 000.*** Para êsse caso, vale a seguinte regra que será exposta em partes num exemplo, como fizemos com a extração da raiz quadrada. Seja extrair a raiz cúbica do número 75 478.

Agiremos da seguinte maneira (etapas):

1.ª) Decompomos o número em grupos de três algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo conter dois ou um algarismo. *A cada grupo separado corresponde um algarismo na raiz.*

Logo;

$\sqrt[3]{75 \,.\, 478} \rightarrow$ a raiz deve possuir dois algarismos (um para cada grupo)

2.ª) Extraímos a raiz cúbica aproximada, por falta, a menos de uma unidade, do último grupo (no exemplo é 75), obtendo-se assim o primeiro algarismo da raiz.

Assim,

$$\sqrt[3]{75\,.\,478} \;\big|\; 4$$

3.ª) Subtraímos do primeiro grupo o cubo do algarismo encontrado ($4^3 = 64$) e, à direita do resto (11), escrevemos o segundo grupo (478), separando com um ponto os *dois últimos* algarismos da direita.

Portanto:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{75\,.\,478} & 4 \\ 64 & \\ \hline 114\,.\,78 & \end{array}$$

1.º resto: 114 . 78

4.ª) *Triplicamos* o quadrado do algarismo da raiz

$$(3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48)$$

escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por êsse número, o número que permaneceu à esquerda do ponto (114). O quociente aproximado obtido (2) escreve-se à direita do 1.º algarismo da raiz, já obtido, e, a seguir, *elevamos ao cubo* o número assim formado (42).

Temos, assim,

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{75\,.\,478} & 4 \\ 64 & 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48; \quad 114 \,\underline{|\,48\,}; \quad 42^3 = 74\,088 \\ \hline 114\,.\,78 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

5.ª) Se fôr possível subtrair o cubo assim obtido ($42^3 = 74\,088$), do número formado com os grupos até agora usados (75 478), o quociente encontrado será o *segundo* algarismo da raiz. Caso contrário, diminuímos o quociente de uma unidade até que se encontre um cubo que torne possível a subtração.

Disposição prática:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\to 75\,.\,478} & 42 \\ 64 & 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48; \quad 114 \,\underline{|\,48\,}; \quad 42^3 = 74\,088 \\ \hline 114\,.\,78 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \\ \to 74\,088 & \\ \hline \text{resto:} \quad 1\,390 & \end{array}$$

6.ª) A seguir fazemos um traço horizontal separando êsses cálculos dos que ainda se vão efetuar. Ao lado do resto encontrado escrevemos o terceiro grupo, caso exista, e calculamos o terceiro algarismo da raiz da mesma forma que foi calculado o segundo.

Se o *último resto* fôr *zero*, a raiz encontrada é *exata* e o número dado é um *cubo perfeito*.

Logo, a raiz cúbica aproximada, por falta a menos de uma unidade, do número 75 478 é 42 e o resto, 1 390. Indicação:

$$\sqrt[3]{75\,478} \sim 42 \text{ (por falta); resto, } 1\,390$$

23. Prova. A prova da extração da raiz cúbica de um número é feita em duas partes:

1.ª) *Verificando se o resto não é maior que três vêzes o quadrado da raiz mais três vêzes a mesma raiz;*

2.ª) *Verificando se da soma do cubo da raiz com o resto resulta o número dado.*

Para o nosso exemplo, temos:

1.ª) O resto 1 390 é menor de $3 \times 42^2 + 3 \times 42 = 5\,418$;

2.ª) $42^3 + 1\,390 = 74\,088 + 390 = 75\,478$ (número dado).

Verificadas as duas condições, concluímos que a operação está certa.

Outros exemplos: Extrair, a menos de uma unidade, por falta, a raiz cúbica dos números: 350 402 625 e 6 135 937.

```
∛ →→350.402.625 | 705
     343         | 3×7² = 3×49 = 147; 74|147; 70³ = 343 000
     74.02       |                       0
   →343.000      | 3×70² = 3×4 900 = 14 700; 74 026|14 700;
     74026.25    |                                5
  → 350.402.625  |                 705³ = 350 402 625
    000 000 000  |
```

Logo: $\sqrt[3]{350\ 402\ 625} = 705$ (raiz cúbica exata)

Prova: 1.ª) O resto é nulo.

2.ª) $705^3 = 350\ 402\ 625$ (cubo perfeito).

```
∛ →→6.135.937   | 183
     1          | 3×1² = 3×1 = 3;   51|3 ;   18³ = 5832
     51.35      |             usa-se 8   (9 é muito)
   →5.832       | 3×18² = 3×324 = 972;  3 039|972 ;
     3039.37    |                            3
  → 6.128.487   |                183³ = 6 128 487
resto:   7 450  |
```

Logo: $\sqrt[3]{6\ 135\ 937} \sim 183$ (por falta); resto: 7 450

Prova: 1.ª) $7\ 450 < 3\times183^2 + 3\times183$ ou $7\ 450 < 101\ 016$

2.ª) $183^3 + 7\ 450 = 6\ 135\ 937$

24. Raiz cúbica de um produto

A raiz cúbica de um produto é igual ao produto das raízes cúbicas de seus fatôres.

Exemplo: $\sqrt[3]{8\times125} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}$

Essa propriedade convém ser usada quando os fatôres são *cubos perfeitos*, o que fàcilmente se deduz verificando se

os expoentes dos fatôres primos que compõem o número são *múltiplos de* 3. Dêsse modo, a raiz cúbica de um número, que seja cubo perfeito, pode ser obtida dividindo-se por 3 os expoentes dos fatôres primos que o compõem e efetuando o produto dos novos fatôres. Exemplo:

$$\sqrt[3]{1\ 728} = \sqrt[3]{2^6\times3^3} = \sqrt[3]{2^6}\times\sqrt[3]{3^3} = 2^2\times3 = 4\times3 = 12$$

25. Aproximação decimal no cálculo da raiz cúbica. Para um número que não seja cubo perfeito, chama-se *raiz cúbica aproximada, por falta, a menos de* 0,1; 0,01; 0,001; ... *ao maior número com uma, duas, três, etc., ..., casas decimais cujo cubo esteja contido em o número dado. Acrescentando-se à raiz as unidades decimais* 0,1; 0,01; 0,001; ..., *tem-se a raiz cúbica aproximada por excesso, a menos de* 0,1; 0,01, 0,001 ; . . . . . .

Assim, por exemplo:

$\sqrt[3]{10} \sim 2,1$ (*por falta*, a menos de 0,1 pois, $(2,1)^3 = 9,261 < 10$)

$\sqrt[3]{10} \sim 2,2$ (*por excesso*, a menos de 0,1 pois, $(2,2)^3 = 10,648 > 10$)

Como para *cada algarismo* da raiz cúbica corresponde *um grupo de três algarismos* do número dado, temos que na extração da raiz cúbica aproximada com *uma, duas, três,* etc., ... , casas decimais, o número deverá, necessàriamente, possuir *três, seis, nove,* etc., ... , casas decimais respectivamente.

Vale assim, a seguinte *regra:*

Para a extração da raiz cúbica aproximada por falta, a menos de 0,1; 0,01; 0,001; ... *etc., ..., de um número inteiro, extrai-se a sua raiz cúbica aproximada por falta, a menos de uma unidade e, à direita, põe-se uma vírgula. Se à direita do número inteiro se acrescentarem três zeros, a continuação da extração permitir-nos-á encontrar o algarismo dos décimos da raiz procurada. Se forem acrescentados seis zeros, a operação permitirá encontrar o algarismo dos centésimos da raiz cúbica e assim por diante até à aproximação desejada.* Exemplo:

Extrair a raiz cúbica aproximada por falta, a menos de um décimo (0,1), do número 12.

Devemos acrescentar *três zeros* (aproximação de 0,1)

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{\to 12.000} & 2,2 \\
8 & 3\times 2^2=3\times 4=12;\quad 40 \,\underline{|\,12}\;;\quad 22^3=10\,648 \\
40.00 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2 \\
\to 10.648 & \\
\text{resto: }\; 1\,352 &
\end{array}
$$

Logo: $\overset{0,1}{\sqrt[3]{12}} \sim 2,2$ (por falta, a menos de 0,1) e o resto é 1,352.

26. Raiz cúbica dos números decimais. Para o caso dos números decimais, *faz-se com que o número tenha três, seis, nove, . . ., casas decimais* conforme a aproximação desejada seja a menos de 0,1; 0,01; 0,001; . . . . . e extrai-se a raiz cúbica como se a vírgula não existisse. No resultado separam-se com uma vírgula, respectivamente, uma, duas, três, etc., . . . casas decimais. Exemplo:

Extrair a raiz cúbica de 0,282 1, por falta, a menos de 0,01.

O número deve possuir 6 casas decimais depois da vírgula, em virtude de a aproximação ser de centésimos.

$$
0,282\,\mathbf{100} \to
\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{\to 282.100} & 65 \\
216 & 3\times 6^2=3\times 36=108;\quad 661 \,\underline{|\,108}\;; \\
661.00 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5 \\
\to 274.625 & \qquad\qquad\quad 65^3 = 274\,625 \\
7\,475 &
\end{array}
$$

Logo: $\overset{0,01}{\sqrt[3]{0,282\,1}} \sim 0,65$ (por falta a menos de 0,01).

27. Raiz cúbica das frações. Se ambos os têrmos de uma fração são cubos perfeitos, obtém-se a raiz cúbica exata *extraindo-se as raízes dos dois têrmos.* Exemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$$

Se um, ou ambos os têrmos de uma fração, não fôr cubo perfeito podemos calcular a raiz cúbica aproximada por falta, a menos de uma unidade ou a menos de uma unidade fracionária decimal 0,1; 0,01; 0,001; . . . . . . Exemplo:

Calcular a $\sqrt[3]{\frac{36}{47}}$, por falta, a menos de 0,1.

Convertemos a fração $\frac{36}{47}$ em decimal com 3 casas, pois, a aproximação é de um décimo.

$$
\begin{array}{l|l}
360 & 47 \\
\;310 & \overline{0,765} \\
\;\;280 & \\
\;\;\;45 &
\end{array}
\qquad \sqrt[3]{0,765} \to \sqrt[3]{765} \sim 9 \text{ (por falta, a menos de 1 unidade).}
$$

Logo: $\overset{0,1}{\sqrt[3]{0,765}} \sim 0,9$ (por falta, a menos de 0,1).

NOTA: Para a extração da raiz cúbica de uma fração (que não seja um cubo perfeito), por falta ou por excesso, com um êrro inferior a uma unidade fracionária, *não decimal,* é preciso que o denominador da fração seja um cubo.

Os alunos podem fazer estudo análogo ao que foi feito para a extração da raiz quadrada (*Nota* da pág. 47).

EXERCÍCIOS

1. Dizer quais são as raízes cúbicas aproximadas por falta e por excesso, a menos de uma unidade, dos seguintes números:

   1.º) 68 ; 2.º) 123 ; 3.º) 510 ; 4.º) 881

2. Extrair a raiz cúbica exata dos seguintes cubos perfeitos:

   1.º) 1 331 3.º) 17 576 5.º) 1 030 301
   2.º) 6 859 4.º) 110 592 6.º) 537 367 797

3. Extrair a raiz cúbica, por decomposição em fatôres primos, dos seguintes cubos perfeitos:

   1.º) 5 832 ; 2.º) 1 728 ; 3.º) 3 375 ; 4.º) 9 261

4. Extrair a raiz cúbica aproximada por falta, *a menos de uma unidade*, dos números que se seguem:
   1.º) 16 514 3.º) 117 640 5.º) 24 135 501
   2.º) 29 700 4.º) 1 193 439 6.º) 82 312 876

5. Extrair a raiz cúbica aproximada por falta, *a menos de* 0,1, dos seguintes números:
   1.º) 8 ; 2.º) 26 ; 3.º) 135 ; 4.º) 1 771 ; 5.º) 32 513,4 ; 6.º) 90 518,52

6. Extrair a raiz cúbica aproximada por falta, *a menos de* 0,01, dos seguintes números:
   1.º) 3 ; 2.º) 11 ; 3.º) 218 ; 4.º) 997 ; 5.º) 10,583 ; 6.º) 1,4

7. Extrair a raiz cúbica dos seguintes números decimais, com aproximação por falta, a menos de 0,01.
   1.º) 0,019 673 ; 2.º) 0,000 001 ; 3.º) 7,535 64 ; 4.º) 313,02

8. Extrair a raiz cúbica das frações: $\frac{729}{1\,000}$; $\frac{64}{27}$; $\frac{1\,331}{1\,728}$

9. Extrair a raiz cúbica aproximada por falta, a menos de 0,01, das seguintes frações $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{5}{12}$

10. Qual é o número cujo cubo vale 531 441?

11. O produto de três números iguais é 9,261. Qual é o valor de cada um?

12. Qual é o número que se deve subtrair de 2 400 para se obter um cubo perfeito?

13. Qual é o número cujo cubo aumentado de 3 000 dá 30 000?

14. O volume de um cubo é igual a 32,768cm³. Qual é o valor de sua aresta?

15. Qual é o valor de x que verifica as igualdades:
    1.ª) $x^3 = 343$; 2.ª) $x^3 = 1,331$?

(NOTA: Ver outros exercícios de recapitulação no fim do livro, pág. 196).

RESPOSTAS:

1. 1.º) 4 e 5 ; 2.º) 4 e 5 ; 3.º) 7 e 8 ; 4.º) 9 e 10
2. 1.º) 11 ; 2.º) 19 ; 3.º) 26 ; 4.º) 48 ; 5.º) 101 ; 6.º) 813
3. 1.º) 18 ; 2.º) 12 ; 3.º) 15 ; 4.º) 21

4. 1.º) 25 ; 2.º) 30 ; 3.º) 48 ; 4.º) 106 ; 5.º) 288 ; 6.º) 435
5. 1.º) 2 ; 2.º) 2,9 ; 3.º) 5,1 ; 4.º) 12,1 ; 5.º) 31,9 ; 6.º) 44,8
6. 1.º) 1,44 ; 2.º) 2,22 ; 3.º) 6,01 ; 4.º) 9,98 ; 5.º) 2,19 ; 6.º) 1,11
7. 1.º) 0,26 ; 2.º) 0,01 ; 3.º) 1,96 ; 4.º) 6,78
8. $\frac{9}{10}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{11}{12}$
9. 0,90 ; 0,52 ; 1,03 ; 0,74
10. 81
11. 2,1
12. 203
13. 30
14. 3,2cm
15. 1.ª) $x = 7$; 2.ª) $x = 1,1$

§5. Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais

28. Grandezas comensuráveis. ***Números racionais.*** Duas grandezas são *comensuráveis* quando *admitem uma medida comum*. Assim, os comprimentos dos segmentos (fig. 3):

$$\overline{AB} = 21 \text{ cm} \qquad \text{e} \qquad \overline{CD} = 15 \text{ cm}$$

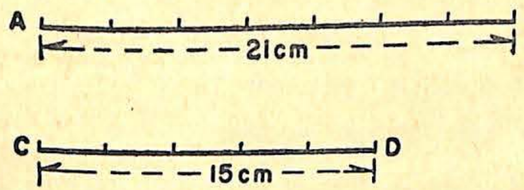


FIG. 3

constituem um exemplo de grandezas comensuráveis, pois, admitem a *medida comum*. 3 cm que está contida 7 vêzes em $\overline{AB}$ e 5 vêzes em $\overline{CD}$.

Outro exemplo: as áreas dos quadrados $ABCD$ (16cm²) e $MNPQ$ (4cm²) são grandezas comensuráveis pelo fato de admitirem *medida comum* (a maior é 4cm², que cabe *quatro* vêzes em $ABCD$ e *uma* vez em $MNPQ$) (fig. 4).

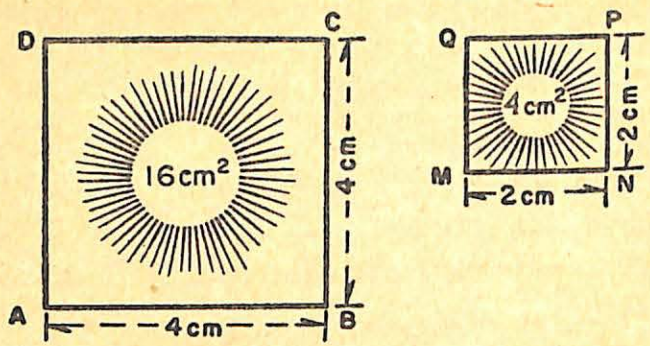


FIG. 4

A relação entre duas grandezas comensuráveis é expressa mediante um número denominado *racional*. Os *números racionais* compreendem os *números inteiros* e os *números fracionários*.

Nos exemplos dados, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{21 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{7}{5} \text{ (fracionário)};$$

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } MNPQ} = \frac{16\text{cm}^2}{4\text{cm}^2} = 4 \text{ (inteiro)}.$$

Exemplos de *números racionais:*

$$2; \quad \frac{3}{7}; \quad 0; \quad 215; \quad 0{,}31; \quad 3{,}555\ldots\ldots; \quad 2\frac{1}{9}$$

A consideração dos números inteiros e fracionários relativos permite as denominações de *números racionais relativos* aos números inteiros e fracionários relacionados com os sinais + ou −, e, *racionais absolutos* aos números inteiros e fracionários que não estão relacionados com sinal algum. Exemplos:

$$\frac{3}{4}; \quad 12; \quad 5; \quad 0; \quad 3\,413; \quad 3\frac{2}{7}; \quad 0{,}444\ldots\ldots; \quad 2{,}39;$$

são números *racionais absolutos*, enquanto que:

$$-4; \quad +\frac{11}{35}; \quad +13; \quad -1\frac{1}{2}; \quad -0{,}8; \quad +2; \quad -19{,}424\,242\ldots$$

são números *racionais relativos*.

29. Grandezas incomensuráveis. ***Números irracionais.*** Duas grandezas são *incomensuráveis* quando *não admitem medida comum*. Assim, por exemplo, os comprimentos da *diagonal* e do *lado* de um quadrado (fig. 5) são grandezas

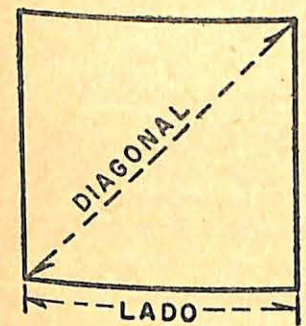


FIG 5

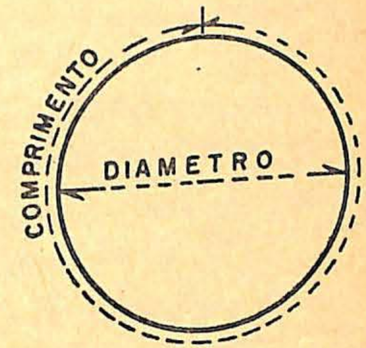


FIG. 6

incomensuráveis, pois, escolhida uma unidade de medida, ela *nunca estará* contida um número exato de vêzes na diagonal e no lado do quadrado. Êsse fato significa também que podemos ter uma medida que esteja contida exatamente na diagonal, porém a mesma medida nunca estaria contida exatamente no lado e vice-versa.

Já encontramos na primeira série ginasial um outro exemplo clássico de grandezas incomensuráveis: os comprimentos de *uma circunferência* e o de *seu diâmetro* (fig. 6).

A relação entre duas grandezas incomensuráveis é expressa mediante um *número irracional* (*).

(*) Do latim *irrationalis* que significa "contrário à razão".

No primeiro exemplo, a relação entre as grandezas incomensuráveis: *diagonal* e *lado* de um *quadrado* é o número irracional $\sqrt{2}$, que no estudo da raiz quadrada vimos não ser possível exprimir-se com uma representação decimal exata e sim com uma aproximação desejada que é simbolizada pelos primeiros algarismos que se escrevem. A indicação que a $\sqrt{2}$ é um *número irracional* é feita colocando-se reticências a seguir os primeiros algarismos da aproximação. Assim:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,2 \ldots\ldots\ldots$$

No segundo exemplo, a relação entre os comprimentos de uma circunferência e o de seu diâmetro é o *número irracional* "pi":

$$\pi = 3{,}14159 \ldots\ldots\ldots$$

que, não podendo exprimir-se com uma representação decimal exata, é também representado com os primeiros algarismos (de acôrdo com a aproximação desejada) colocando-se a seguir reticências para indicar a existência de infinitos outros algarismos.

Outros exemplos de *números irracionais:*

$\sqrt{3} = 1{,}7321\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\sqrt{7} = 2{,}6458\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{21} = 4{,}5826\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\sqrt{480} = 89{,}9120\ldots\ldots\ldots$

30. Radiciação. ***Radicais.*** O cálculo da potência n-ésima de um número a:

$$a^n = P$$

deu lugar, como já vimos (§1, n.º 1), à operação denominada *potenciação*, que permite determinar o número P quando são conhecidos a base a e o expoente n.

A operação *inversa* da potenciação, que permite determinar a base a, quando são conhecidos a potência P e o expoente n, é denominada *radiciação*. A indicação dessa operação é feita da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{P} = a$$

O sinal $\sqrt[n]{\ }$ é denominado *radical* de *ordem* n, onde n é o índice (que indica o grau da raiz); P é o *radicando* e o número a, a raiz n-ésima de P.

Temos assim, a definição (*):

> **Raiz n-ésima de um número é o número que elevado à potência n-ésima reproduz êsse número.**

Se o índice $n = 2$, a raiz denomina-se *quadrada*; quando $n = 3$ a raiz é *cúbica*; $n = 4$, raiz *quarta*; $n = 5$, raiz *quinta* e assim por diante.

Da mesma forma que nas raízes quadradas, encontramos raízes de outras ordens (cúbicas, quartas, quintas, etc. ...) de números que não são potências perfeitas do grau que indica o seu índice e que são exemplos de *números irracionais*.

Assim, por exemplo, são números irracionais:

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt[5]{5} = 1{,}3195\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt[3]{12} = 2{,}2894\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt[4]{126} = 3{,}3503\ldots\ldots\ldots$$

Na prática, para os cálculos, operam-se com os números irracionais com seus *valores aproximados*, ressaltando-se, todavia, o êrro cometido.

31. Sinais dos radicais. ***Valor Aritmético de um radical.*** Com o emprêgo que passam a ter os radicais no cálculo, convém frisar, levando-se em conta os números relativos, que:

(*) Definição aritmética.

1.º) *Tôda raiz de índice par de um número positivo tem dois valores relativos simétricos.* Exemplos:

$$\sqrt{+36} = \pm 6, \text{ pois } \begin{cases} (+6)^2 = +36 \\ (-6)^2 = +36 \end{cases}$$

$$\sqrt{+1} = \pm 1, \text{ pois } \begin{cases} (+1)^2 = +1 \\ (-1)^2 = +1 \end{cases}$$

2.º) *Tôda raiz de índice ímpar de um número positivo ou negativo tem o sinal dêsse número.* Exemplos:

$$\sqrt[3]{+8} = +2, \text{ porque } (+2)^3 = +8$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1, \text{ porque } (-1)^5 = -1$$

Observação: As raízes de *índice par* de *números negativos* são numèricamente impossíveis. Daí a denominação geral que recebem de *imaginárias*. Exemplo:

$$\sqrt{-4} = \ ? \text{ (impossível), pois, tanto } (-2)^2 = +4 \text{ como } (+2)^2 = +4$$

Valor aritmético ou *valor absoluto* de um radical é o valor dêsse radical isento dos sinais algébricos + ou −. Quando o radical vem relacionado com os sinais + ou − dizemos ser êsse o seu *valor algébrico*. Exemplos:

$\sqrt{25} = \pm 5$ (valor algébrico); $\sqrt{81} = \pm 9$ (valor algébrico);

$\sqrt{25} = 5$ (valor aritmético); $\sqrt{81} = 9$ (valor aritmético).

Para o estudo dos radicais, que será desenvolvido a seguir, só consideraremos o *valor aritmético* dos mesmos.

32. Transformação de radicais. Aplicações. A transformação dos radicais está baseada na seguinte *propriedade fundamental:*

> **O valor aritmético de um radical não se altera multiplicando ou dividindo o índice e o expoente do radicando pelo mesmo número.**

bosoco bepepo

Assim, na $\sqrt[3]{5^2}$ multiplicando o índice (3) e o expoente do radicando (2), por exemplo, pelo número 2, temos:

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3\times 2]{5^{2\times 2}} = \sqrt[6]{5^4}$$

De fato, por definição de raiz, temos que

$$\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3 = 5^2$$ (as operações potenciação e radiciação são inversas uma da outra.)

Elevando essa igualdade ao quadrado:

$$\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6 = 5^4$$

e voltando à definição de raiz, temos que:

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4}$$

de acôrdo com a propriedade fundamental enunciada.

Aplicações:

1.ª) ***Redução de radicais ao mesmo índice.*** Podem-se reduzir vários radicais ao mesmo índice, da mesma forma como se reduziram várias frações ao menor denominador comum (1.ª série ginasial). Divide-se o m.m.c. dos índices por cada um dos índices e os quocientes obtidos multiplicam-se, respectivamente, pelo índice e o expoente do radicando correspondente. Exemplo:

Reduzir ao menor índice comum os radicais:

$$\sqrt[3]{2^2},\ \sqrt{8},\ \sqrt[4]{5^3}$$

Disposição prática: m.m.c. (3, 2, 4) = 12

$$\sqrt[12]{},\ \sqrt[12]{},\ \sqrt[12]{}$$

$$\sqrt[12]{2^8},\ \sqrt[12]{8^6},\ \sqrt[12]{5^9}$$

2.ª) ***Comparação de radicais.*** Confrontam-se radicais, reduzindo-os primeiramente ao mesmo índice. Exemplos:

1) Determinar qual é o maior dos radicais: $\sqrt{8}$ e $\sqrt[3]{21}$

bosoco

Reduzindo-os ao mesmo índice, temos:

$$\sqrt[6]{8^3}\ ,\ \sqrt[6]{21^2}$$
$$\sqrt[6]{512},\ \sqrt[6]{441}$$

Como: $\sqrt[6]{512} > \sqrt[6]{441}$, segue que $\sqrt{8} > \sqrt[3]{21}$

2) Escrever em ordem de grandeza decrescente os radicais:

$$\sqrt[6]{5}\ ,\ \sqrt[3]{9}\ ,\ \sqrt[4]{3^2}$$

Reduzindo-os ao mesmo índice, temos:

$$\sqrt[12]{5^2}\ ,\ \sqrt[12]{9^4}\ ,\ \sqrt[12]{3^6}$$

ou $\sqrt[12]{25}\ ,\ \sqrt[12]{6\,561},\ \sqrt[12]{729}$

e portanto: $\sqrt[3]{9} > \sqrt[4]{3^2} > \sqrt[6]{5}$

3.ª) ***Redução de um radical à expressão mais simples. Simplificação.*** Podemos simplificar um radical suprimindo os fatôres comuns ao índice do radical e ao expoente do radicando. Exemplos:

1) $\sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3^2}$ (dividimos o índice e o expoente do radicando pelo fator comum 3).

2) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$

3) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

Podemos também *passar* um fator, que entre na composição do radicando, para *fora* do radical, bastando para isso dividir o seu expoente pelo índice do radical. Exemplos:

1) $\sqrt{108} = \sqrt{2^2\times 3^3} = \sqrt{2^2\times 3^2\times 3} = 2\times 3.\sqrt{3} = 6.\sqrt{3}$ (*)

2) $\sqrt[3]{72\,000} = \sqrt[3]{2^6\times 3^2\times 5^3} = 2^2\times 5.\sqrt[3]{3^2} = 2^2\times 5.\sqrt[3]{3^2} = 20.\sqrt[3]{9}$

3) $\sqrt[5]{4^6} = \sqrt[5]{4^5\times 4} = 4.\sqrt[5]{4}$

4) $\sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^9\times 2} = 2^3.\sqrt[3]{2}$

(*) A rigor essa igualdade não subsiste para extrações de raízes com a aproximação que se quer. Nesse exemplo vale com a aproximação de 0,001.

33. Operações com radicais.

1.ª) Multiplicação. *O* ***produto*** *de radicais de mesmo índice é o radical de mesmo índice tendo por radicando o produto dos radicandos.*

Assim: $\sqrt{3}\times\sqrt{4} = \sqrt{3\times 4} = \sqrt{12}$

Com efeito, elevando êsse produto ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{3}\times\sqrt{4})^2 = (\sqrt{3})^2\times(\sqrt{4})^2$$

ou

$$(\sqrt{3}\times\sqrt{4})^2 = 3\times 4$$

e por definição de raiz:

$$\sqrt{3}\times\sqrt{4} = \sqrt{3\times 4}$$

Exemplos:

1) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5\times 2\times 3} = \sqrt[4]{30}$

2) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\times 3\times 5\times 4} = \sqrt[3]{120}$

Quando os radicais não têm o *mesmo índice*, reduzimo-los, primeiramente, ao mesmo índice e aplicamos a seguir a regra acima. Exemplo:

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{3}$$

Primeiramente reduzimos ao mesmo índice:

$$\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4\times 3^3} = \sqrt[12]{16\times 27} = \sqrt[12]{432}$$

2.ª) Divisão. *O* ***quociente*** *de dois radicais de mesmo índice, considerados numa certa ordem, é o radical de mesmo índice tendo por radicando o quociente dos radicandos.*

Isto é, $\sqrt{24} : \sqrt{3} = \sqrt{24 : 3} = \sqrt{8}$

De fato, como $\sqrt{3}\times\sqrt{8} = \sqrt{24}$ (produto), segue que:

$$\sqrt{24} : \sqrt{3} = \sqrt{8}$$

No caso de os índices serem diferentes reduzimo-los, inicialmente, ao mesmo índice. Exemplo:

$$\sqrt[5]{8} : \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[15]{8^3} : \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{8^3 : 2^5} = \sqrt[15]{512 : 32} = \sqrt[15]{16}$$

3.ª) Potenciação. *Para se **elevar** um radical a uma potência eleva-se o radicando a essa potência, conservando-se o índice.*

Assim:

$$(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3}$$

De fato,

$$(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5 \times 5 \times 5} = \sqrt[4]{5^3}$$

4.ª) Radiciação. *Para se **extrair** a raiz de um radical é suficiente multiplicar os índices e conservar o radicando sob um único radical.*

Assim: $$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4\times 3]{2} = \sqrt[12]{2}$$

De fato, elevando ambos os radicais à quarta potência, temos:

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}\right)^4 = (\sqrt[12]{2})^4$$

ou $$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4}$$

isto é, $$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

Exemplos: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$

2) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{18}}} = \sqrt[30]{18}$

Observações:

1.ª) As operações de adição e subtração de radicais são feitas sòmente com uma certa *aproximação*, caso os números apresentados pelos radicais sejam irracionais. Exemplo: Calcular o valor da expressão:

$\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{2}$, com a *aproximação* das parcelas, por falta, *a menos de* 0,01.

Temos: $\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{2} \sim 2{,}23 + 1{,}81 - 1{,}41 = 2{,}63$ (aprox. 0,01)

O estudante não deve ser levado a somar ou subtrair radicais, operando com os seus radicandos, *mesmo que êstes se apresentem como quadrados* (ou cubos, . . .) *perfeitos.* Assim, por exemplo:

$\sqrt{9} + \sqrt{16}$ *não é igual* a $\sqrt{25}$

pois, caso contrário extraindo as raízes quadradas respectivas, teríamos a igualdade absurda:

$$3 + 4 = 5\ (?)$$

Da mesma forma:

$\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}$ *não é igual a* $\sqrt[3]{19}$

2.ª) Para adição (ou subtração) de radicais *iguais*, como por exemplo, a soma de três $\sqrt{2}$, vem:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

onde 3, que indica o número de radicais iguais, é denominado *coeficiente*.

Da mesma forma: $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Operando com radiciais *semelhantes*, isto é, aquêles que diferem sòmente pelos coeficientes, podemos somar e subtrair. Exemplo:

$$8\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = (8 + 3 - 2).\sqrt[3]{5} = 9\sqrt[3]{5}$$

Algumas vêzes, os radicais aparentemente não se apresentam semelhantes. Então, simplificando-os (que é uma operação que deve ser sempre feita antes de qualquer cálculo) tornamo-los semelhantes. Exemplos:

1) $\sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{2\times 5^2} + \sqrt{2\times 7^2} - \sqrt{2^5} + \sqrt{2} =$

$= 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{27}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{625} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3^3}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{5^4} =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{5} + \frac{1}{9} \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{5} =$

$= \frac{2}{9}\sqrt[3]{5} + \frac{5}{9}\sqrt[3]{5} = \frac{7}{9} \cdot \sqrt[3]{5}$

34. Expoentes fracionários. Partindo de que

$$(2^3)^4 = 2^{12}$$

segue, imediatamente, da definição de raiz que:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^3$$

ou também $$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}}$$

Êsse resultado permite dizer que *para se extrair a raiz de um número basta elevar êsse número ao quociente da divisão de seu expoente pelo índice.*

Se o expoente não fôr divisível pelo índice da raiz, indica-se a divisão e escreve-se o expoente sob *forma de fração.* Exemplos:

1) $\sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$

2) $\sqrt[4]{8^7} = 8^{\frac{7}{4}}$

O estudo dos radicais permite estender, mais uma vez, o conceito de potência permitindo que se defina *potência de expoente fracionário.* Essas potências são as equivalentes a radicais cujo índice é o *denominador* do expoente fracionário e o expoente do radicando, o *numerador.* Exemplos:

1) $4^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4^2}$

2) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25} = 5$

3) $13^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{13^4}$

Para as potências de expoente fracionário, valem tôdas as propriedades estudadas com as potências de expoente inteiro, isto é, seguem as mesmas regras formais.

Assim:

$$2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{19}{20}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{3}{7}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{3}{7}} = 3^{\frac{1}{14}}$$

$$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^5 = 5^{\frac{10}{3}}$$

35. Frações irracionais. ***Casos simples de racionalização de denominadores.*** Uma fração é *irracional* quando, pelo menos, um de seus têrmos é irracional. Exemplos:

$$\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \frac{2}{\sqrt[3]{6}}, \quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt[5]{4}}$$

Quando o *denominador é irracional,* é conveniente, para maior facilidade nos cálculos, transformar essa fração em outra equivalente de *denominador racional.* A operação que possibilita essa transformação é denominada *racionalização de denominadores* e consiste em multiplicar ambos os têrmos da fração por um mesmo número que torne o denominador racional.

Daremos, a seguir, alguns exemplos dos casos mais simples de *racionalização de denominadores.*

Racionalizar o denominador das seguintes *frações irracionais:*

1.ª) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Multiplicando-se ambos os têrmos da fração por $\sqrt{3}$ temos:

$$\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

e o denominador está racionalizado.

2.ª) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Nesse caso é necessário multiplicar ambos os têrmos por $\sqrt[3]{2^2}$, sendo o expoente do radicando a diferença entre o índice (3) e o seu expoente (1).

$$\frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

3.ª) $\dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[5]{3^2}}$.

Basta multiplicar ambos os têrmos por $\sqrt[5]{3^3}$.

$$\frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{4 \cdot \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{4 \cdot \sqrt[5]{3^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{4}$$

4.ª) $\dfrac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Multiplicamos ambos os têrmos pela expressão: $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, denominada *conjugada* da expressão: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Êsse produto da soma indicada pela diferença indicada de dois números já foi estudado (*).

$$\frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\frac{8(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

5.ª) $\dfrac{1}{2.\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

$$\frac{1.(2.\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(2.\sqrt{7}-\sqrt{3})(2.\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{2.\sqrt{7}+\sqrt{3}}{(2.\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{2.\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4.7-3}=\frac{2.\sqrt{7}+\sqrt{3}}{25}$$

EXERCÍCIOS

1. Como se chamam os números:

1.º) 8 ; 0 ; $\frac{3}{7}$; $12{,}515151\ldots\ldots$; 13 ; $\frac{4}{219}$; $0{,}32$; $10\,000$?

2.º) -3 ; $+\frac{2}{5}$; $-3\frac{1}{7}$; -1 ; $+145$; $+0{,}895$; -6 ; $+100\,000$?

3.º) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[7]{8}$; $\sqrt{132}$?

4.º) $\sqrt{-1}$; $\sqrt[4]{-2}$; $\sqrt{-5}$?

(*) Vide § 2 número 8.

2. Dizer os valores *algébrico* e *aritmético* dos seguintes radicais:
1.º) $\sqrt{16}$; 2.º) $\sqrt[3]{-8}$; 3.º) $\sqrt{1}$; 4.º) $\sqrt[5]{+32}$.

3. Reduzir ao menor índice comum os seguintes grupos de radicais:
1.º) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{5}$; 3.º) $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[6]{3}$.
2.º) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[5]{2^3}$; 4.º) $\sqrt[15]{3^2}$, $\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[10]{2}$.

4. Escrever em ordem de grandeza decrescente os radicais:
$\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{24}$

5. Escrever em ordem de grandeza crescente:
$\sqrt{4}$, $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[3]{4^2}$

6. Simplificar os radicais:
1.º) $\sqrt[8]{2^4}$ 3.º) $\sqrt[5]{3^5}$ 5.º) $\sqrt[12]{4^3}$ 7.º) $\sqrt{144}$
2.º) $\sqrt[3]{5^{11}}$ 4.º) $\sqrt{208}$ 6.º) $\sqrt[3]{648}$ 8.º) $\sqrt[5]{1024}$

7. Efetuar as multiplicações que se seguem:
1.ª) $\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$; 3.ª) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}$; 5.ª) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$.
2.ª) $\sqrt[5]{2}\times\sqrt[12]{2}$; 4.ª) $\sqrt[4]{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt[6]{2}$; 6.ª) $\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[4]{3^2}$.

8. Efetuar as seguintes divisões:
1.ª) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{8}$; 2.ª) $\sqrt[4]{2}:\sqrt{8}$; 3.ª) $\sqrt[5]{3^2}:\sqrt[4]{2^2}$; 4.ª) $\sqrt{12}:\sqrt[3]{4}$.

9. Calcular o valor de:
1.º) $(\sqrt[3]{2})^2$ 3.º) $(\sqrt[4]{3})^5$ 5.º) $(\sqrt[8]{2})^8$
2.º) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ 4.º) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$ 6.º) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$

10. Efetuar, com a aproximação das parcelas, por falta, a menos de 0,01, as seguintes expressões:
1.ª) $\sqrt{5}+\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$; 2.ª) $\sqrt{8}-\sqrt[3]{3}$; 3.ª) $\sqrt{11}+\sqrt{3}-\sqrt[3]{9}$.

11. Efetuar:
1.º) $8\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ 2.º) $3\sqrt[5]{4}-2\sqrt[5]{4}$
3.º) $5\sqrt{7}+\frac{3}{2}\sqrt{7}-\frac{1}{5}\sqrt{7}$ 4.º) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$
5.º) $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$ 6.º) $2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98}-\sqrt{72}+\sqrt{8}$
7.º) $3\sqrt{20}+12\sqrt{45}+2\sqrt{125}$ 8.º) $\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{625}$
9.º) $\sqrt{\frac{25}{18}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-17\sqrt{\frac{1}{18}}$ 10.º) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{2}\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

12. Colocar sob a forma de radicais as seguintes potências de expoente fracionário:
$3^{\frac{2}{5}}$; $16^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{3}{4}}$; $5^{\frac{7}{6}}$

13. Efetuar:

1.º) $3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{5}} \times 3^{\frac{1}{2}}$; 2.º) $2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{1}{7}}$; 3.º) $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^2$

14. Racionalizar os denominadores das seguintes frações irracionais:

1.ª) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 5.ª) $\dfrac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ 9.ª) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

2.ª) $\dfrac{3}{4 \cdot \sqrt{7}}$ 6.ª) $\dfrac{5}{3+\sqrt{2}}$ 10.ª) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{3}}$

3.ª) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{2^2}}$ 7.ª) $\dfrac{1}{3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3}}$ 11.ª) $\dfrac{2}{2\sqrt{5}-1}$

4.ª) $\dfrac{3}{5 \cdot \sqrt[7]{3^4}}$ 8.ª) $\dfrac{2}{8 - 2 \cdot \sqrt{3}}$ 12.ª) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(Nota: Ver outros exercícios de recapitulação no fim do livro, pág. 197)

Respostas:

1. 1.º) Números racionais absolutos; 2.º) Números racionais relativos; 3.º) Números irracionais; 4.º) Números imaginários.
2. 1.º) ± 4 e 4; 2.º) -2 e 2; 3.º) ± 1 e 1; 4.º) $+2$ e 2
3. 1.º) $\sqrt[12]{2^4}$, $\sqrt[12]{3^3}$, $\sqrt[12]{5^6}$; 2.º) $\sqrt[30]{5^5}$, $\sqrt[30]{2^{20}}$, $\sqrt[30]{2^{18}}$; 3.º) $\sqrt[12]{2^9}$, $\sqrt[12]{2^8}$, $\sqrt[12]{3^2}$; 4.º) $\sqrt[60]{3^8}$, $\sqrt[60]{6^5}$, $\sqrt[60]{2^6}$
4. $\sqrt{12} > \sqrt[3]{24} > \sqrt[4]{2^3}$
5. $\sqrt[6]{2^3} < \sqrt{4} < \sqrt[3]{4^2}$
6. 1.º) $\sqrt{2}$ 2.º) $5^3 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ 3.º) 3 4.º) $2^2 \cdot \sqrt{13}$ 5.º) $\sqrt[4]{4}$ 6.º) $6 \cdot \sqrt[3]{3}$ 7.º) $2^2 \times 3$ 8.º) 4
7. 1.ª) $\sqrt{30}$ 2.ª) $\sqrt[60]{2^{17}}$ 3.ª) $\sqrt[3]{24}$ 4.ª) $\sqrt[12]{3^3 \times 5^6 \times 2^2}$ 5.ª) $\sqrt[6]{108}$ 6.ª) $\sqrt[12]{2^{12} \times 3^6} = 2\sqrt{3}$
8. 1.ª) $\sqrt[3]{2}$; 2.ª) $\sqrt[4]{2 : 8^2}$; 3.ª) $\sqrt{3^8 : 2^{15}}$; 4.ª) $\sqrt[6]{12^3 : 4^2}$
9. 1.º) $\sqrt[3]{2^2}$; 2.º) $\sqrt[6]{2}$; 3.º) $3 . \sqrt[4]{3}$; 4.º) $\sqrt[12]{3}$; 5.º) $\sqrt[8]{2^8} = 2$; 6.º) $\sqrt[8]{5}$
10. 1.º) 5,55; 2.º) 1,38; 3.º) 2,96
11. 1.º) $6\sqrt{2}$; 2.º) $2\sqrt[5]{4}$ 3.º) $\frac{33}{10}\sqrt{7}$; 4.º) $\frac{29}{30}\sqrt[3]{9}$; 5.º) $7\sqrt{3}$
    6.º) $48\sqrt{2}$; 7.º) $52\sqrt{5}$; 8.º) $6\sqrt[3]{5}$; 9.º) 0; 10.º) $211\sqrt[3]{2}$

12. 1.º) $\sqrt[6]{3^2}$; 2.º) $\sqrt{16} = 4$; 3.º) $\sqrt[4]{8^3}$; 4.º) $\sqrt[6]{5^7}$
13. 1.º) $3^{\frac{23}{20}}$; 2.º) $2^{\frac{11}{21}}$; 3.º) $4^{\frac{4}{3}}$
14. 1.º) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 2.º) $\dfrac{3 . \sqrt{7}}{28}$ 3.º) $\sqrt[5]{2^3}$ 4.º) $\dfrac{\sqrt[7]{3^3}}{5}$ 5.º) $\dfrac{3(\sqrt{8}+\sqrt{3})}{5}$ 6.º) $\dfrac{5(3-\sqrt{2})}{7}$ 7.º) $\dfrac{3 . \sqrt{5}+\sqrt{3}}{42}$ 8.º) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{13}$ 9.º) $3 - \sqrt{6}$ 10.º) $-\dfrac{4\sqrt{6} - 30}{67}$ 11.º) $\dfrac{4\sqrt{5}+2}{19}$ 12.º) $-5-2\sqrt{6}$

Curiosidades sôbre raízes quadradas

1. Um tenente quer dispor os seus soldados em um quadrado, isto é, quer distribuí-los em tantas filas quantos forem os soldados de cada fila.

   Será sempre possível essa formação? Quando que é?

2. Observe bem que a **raiz quadrada de um número pode ser também maior** que êsse número. Exemplo:

   $\sqrt{0,25} = 0,5$ (ou seja, a raiz quadrada 0,5 é o DÔBRO do número 0,25).

3. Já conhecemos a terminação de um quadrado perfeito. Como deveriam ser os DOIS ÚLTIMOS ALGARISMOS de um quadrado perfeito?

   Constam do seguinte quadro:

01	04	09	16	
21	24	29	36	
41	44	49	56	
61	64	69	76	
81	84	89	96	e também 00 e 25.

   Descubram a lei de formação das linhas seguintes à primeira. (Basta somar..... a cada um dos grupos de dois algarismos).

4. Verifique como exercício que:

$$\sqrt{4} = \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$$

5. Calcule:

$$\sqrt{123456789,101112}$$

e veja que resultado curioso (*).

(*) Constante na *Aritmética* de D. Palermo.

TABELA DOS QUADRADOS, CUBOS, RAÍZES QUADRADAS E CÚBICAS DOS NÚMEROS DE 1 A 200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	26 01	132 651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	27 04	140 608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	28 09	148 877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	29 16	157 464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	30 25	166 375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	31 36	175 616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	32 49	185 193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	33 64	195 112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	34 81	205 379	7,6811	3,8930
10	1 00	1 000	3,1623	2,1544	60	36 00	216 000	7,7460	3,9149
11	1 21	1 331	3,3166	2,2240	61	37 21	226 981	7,8102	3,9365
12	1 44	1 728	3,4641	2,2894	62	38 44	238 328	7,8740	3,9579
13	1 69	2 197	3,6056	2,3513	63	39 69	250 047	7,9373	3,9791
14	1 96	2 744	3,7417	2,4101	64	40 96	262 144	8,0000	4,0000
15	2 25	3 375	3,8730	2,4662	65	42 25	274 625	8,0623	4,0207
16	2 56	4 096	4,0000	2,5198	66	43 56	287 496	8,1240	4,0412
17	2 89	4 913	4,1231	2,5713	67	44 89	300 763	8,1854	4,0615
18	3 24	5 832	4,2426	2,6207	68	46 24	314 432	8,2462	4,0817
19	3 61	6 859	4,3589	2,6684	69	47 61	328 509	8,3066	4,1016
20	4 00	8 000	4,4721	2,7144	70	49 00	343 000	8,3666	4,1213
21	4 41	9 261	4,5826	2,7589	71	50 41	357 911	8,4261	4,1408
22	4 84	10 648	4,6904	2,8020	72	51 84	373 248	8,4853	4,1602
23	5 29	12 167	4,7958	2,8439	73	53 29	389 017	8,5440	4,1793
24	5 76	13 824	4,8990	2,8845	74	54 76	405 224	8,6023	4,1983
25	6 25	15 625	5,0000	2,9240	75	56 25	421 875	8,6603	4,2172
26	6 76	17 576	5,0990	2,9625	76	57 76	438 976	8,7178	4,2358
27	7 29	19 683	5,1962	3,0000	77	59 29	456 533	8,7750	4,2543
28	7 84	21 952	5,2915	3,0366	78	60 84	474 552	8,8318	4,2727
29	8 41	24 389	5,3852	3,0723	79	62 41	493 039	8,8882	4,2908
30	9 00	27 000	5,4772	3,1072	80	64 00	512 000	8,9443	4,3089
31	9 61	29 791	5,5678	3,1414	81	65 61	531 441	9,0000	4,3267
32	10 24	32 768	5,6569	3,1748	82	67 24	551 368	9,0554	4,3445
33	10 89	35 937	5,7446	3,2075	83	68 89	571 787	9,1104	4,3621
34	11 56	39 304	5,8310	3,2396	84	70 56	592 704	9,1652	4,3795
35	12 25	42 875	5,9161	3,2711	85	72 25	614 125	9,2195	4,3968
36	12 96	46 656	6,0000	3,3019	86	73 96	636 056	9,2736	4,4140
37	13 69	50 653	6,0828	3,3322	87	75 69	658 503	9,3274	4,4310
38	14 44	54 872	6,1644	3,3620	88	77 44	681 472	9,3808	4,4480
39	15 21	59 319	6,2450	3,3912	89	79 21	704 969	9,4340	4,4647
40	16 00	64 000	6,3246	3,4200	90	81 00	729 000	9,4868	4,4814
41	16 81	68 921	6,4031	3,4482	91	82 81	753 571	9,5394	4,4979
42	17 64	74 088	6,4807	3,4760	92	84 64	778 688	9,5917	4,5144
43	18 49	79 507	6,5574	3,5034	93	86 49	804 357	9,6437	4,5307
44	19 36	85 184	6,6332	3,5303	94	88 36	830 584	9,6954	4,5468
45	20 25	91 125	6,7082	3,5569	95	90 25	857 375	9,7468	4,5629
46	21 16	97 336	6,7823	3,5830	96	92 16	884 736	9,7980	4,5789
47	22 09	103 823	6,8557	3,6088	97	94 09	912 673	9,8489	4,5947
48	23 04	110 592	6,9282	3,6342	98	96 04	941 192	9,8995	4,6104
49	24 01	117 649	7,0000	3,6593	99	98 01	970 299	9,9499	4,6261
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
101	1 02 01	1 030 301	10,0499	4,6570	151	2 28 01	3 442 951	12,2882	5,3251
102	1 04 04	1 061 208	10,0995	4,6723	152	2 31 04	3 511 808	12,3288	5,3368
103	1 06 09	1 092 727	10,1489	4,6875	153	2 34 09	3 581 577	12,3693	5,3485
104	1 08 16	1 124 864	10,1980	4,7027	154	2 37 16	3 652 264	12,4097	5,3601
105	1 10 25	1 157 625	10,2470	4,7177	155	2 40 25	3 723 875	12,4499	5,3717
106	1 12 36	1 191 016	10,2956	4,7326	156	2 34 36	3 796 416	12,4900	5,3832
107	1 14 49	1 225 043	10,3441	4,7475	157	2 46 49	3 869 893	12,5300	5,3947
108	1 16 64	1 259 712	10,3923	4,7622	158	2 49 64	3 944 312	12,5698	2,4964
109	1 18 81	1 295 029	10,4403	4,7769	159	2 52 81	4 019 679	12,6095	5,4175
110	1 21 00	1 331 000	10,4881	4,7914	160	2 56 00	4 096 000	12,6491	5,4288
111	1 23 21	1 367 631	10,5357	4,8059	161	2 59 21	4 173 281	12,6886	5,4401
112	1 25 44	1 404 928	10,5830	4,8203	162	2 62 44	4 251 528	12,7279	5,4514
113	1 27 69	1 442 897	10,6301	4,8346	163	2 65 69	4 330 747	12,7671	5,4626
114	1 29 96	1 481 544	10,6771	4,8488	164	2 68 96	4 410 944	12,8062	5,4737
115	1 32 25	1 520 875	10,7238	4,8629	165	2 72 25	4 492 125	12,8452	5,4848
116	1 34 56	1 560 896	10,7703	4,8770	166	2 75 56	4 574 296	12,8841	5,4959
117	1 36 89	1 601 613	10,8167	4,8910	167	2 78 89	4 657 463	12,9228	5,5069
118	1 39 24	1 643 032	10,8628	4,9049	168	2 82 24	4 741 632	12,9615	5,5178
119	1 41 61	1 685 159	10,9087	4,9187	169	2 85 61	4 826 809	13,0000	5,5288
120	1 44 00	1 728 000	10,9545	4,9324	170	2 89 00	4 913 000	13,0384	5,5397
121	1 46 41	1 771 561	11,0000	4,9461	171	2 92 41	5 000 211	13,0767	5,5505
122	1 48 84	1 815 848	11,0454	4,9597	172	2 95 81	5 088 558	13,1149	5,5613
123	1 51 29	1 860 867	11,0905	4,9732	173	2 99 29	5 177 717	13,1529	5,5721
124	1 53 76	1 906 624	11,1355	4,9866	174	3 02 76	5 268 024	13,1909	5,5828
125	1 56 25	1 953 125	11,1803	5,0000	175	3 06 25	5 359 375	13,2288	5,5923
126	1 58 76	2 000 376	11,2250	5,0133	176	3 09 76	5 451 776	13,2665	5,6041
127	1 61 29	2 048 383	11,2694	5,0265	177	3 13 29	5 545 233	13,3041	5,6147
128	1 63 84	2 097 152	11,3137	5,0397	178	3 16 84	5 639 752	13,3417	5,6252
129	1 66 41	2 146 689	11,3578	5,0528	179	3 20 41	5 735 339	13,3791	5,6357
130	1 69 00	2 197 000	11,4018	5,0658	180	3 24 00	5 832 000	13,4164	5,6462
131	1 71 61	2 248 091	11,4455	5,0788	181	3 27 61	5 929 741	13,4536	5,6567
132	1 74 24	2 299 968	11,4891	5,0916	182	3 31 24	6 028 568	13,4907	5,6671
133	1 76 89	2 352 637	11,5326	5,1045	183	3 34 89	6 128 487	13,5277	5,6774
134	1 79 56	2 406 104	11,5758	5,1172	184	3 38 56	6 229 504	13,5647	5,6877
135	1 82 25	2 460 375	11,6190	5,1299	185	3 42 25	6 331 625	13,6015	5,6980
136	1 84 96	2 515 456	11,6619	5,1426	186	3 45 96	6 434 856	13,6382	5,7083
137	1 87 69	2 571 353	11,7047	5,1551	187	3 49 69	6 539 203	13,6748	5,7185
138	1 90 44	2 628 072	11,7473	5,1676	188	3 53 44	6 644 672	13,7113	5,7287
139	1 93 21	2 685 619	11,7898	5,1801	189	3 57 21	6 751 269	13,7477	5,7388
140	1 96 00	2 744 000	11,8322	5,1925	190	3 61 00	6 859 000	13,7840	5,7489
141	1 98 81	2 803 221	11,8743	5,2048	191	3 64 81	6 967 871	13,8203	5,7590
142	2 01 64	2 863 288	11,9164	5,2171	192	3 68 64	7 077 888	13,8564	5,7690
143	2 04 49	2 924 207	11,9583	5,2293	193	3 72 49	7 189 057	13,8924	5,7790
144	2 07 36	2 985 984	12,0000	5,2415	194	3 76 36	7 301 384	13,9284	5,7890
145	2 10 25	3 048 625	12,0416	5,2536	195	3 80 25	7 414 875	13,9642	5,7989
146	2 13 16	3 112 136	12,0830	5,2656	196	3 84 16	7 529 536	14,0000	5,8088
147	2 16 09	3 176 523	12,1244	5,2776	197	3 88 09	7 645 373	14,0357	5,8186
148	2 19 04	3 241 792	12,1655	5,2896	198	3 92 04	7 762 392	14,0712	5,8285
149	2 22 01	3 307 949	12,2066	5,3015	199	3 96 01	7 880 599	14,1067	5,8383
150	2 25 00	3 375 000	12,2474	5,3133	200	4 00 00	8 000 000	14,1421	5,8480

"A mulher é bela de um modo mas pode ser linda de muitas maneiras."

"A esperança é um empréstimo que se pede a felicidade."

"O verdadeiro amor é silencioso como um túmulo e luminoso como a aurora."

CAPÍTULO II

Cálculo literal. Polinômios.

§1. Expressão algébrica. Monômios e polinômios

1. Álgebra. A essência da Álgebra é estudar as operações independentemente dos números sôbre os quais se efetuam. Não se pode precisar uma linha divisória entre a Aritmética e a Álgebra, pois os resultados particulares que se obtêm pela primeira não se podem separar das teorias gerais que se estudam pela segunda.

Os números com os quais se raciocina em Álgebra são representados por *letras* com o fim de generalizar os problemas. Dêste modo, torna-se impossível o cálculo das operações, contentando-nos, tão-sòmente, em indicá-las.

O cálculo sôbre letras, cujos valores não estão ainda estabelecidos é denominado *cálculo literal.*

2. Representação algébrica. Os sinais abreviados que se usam em Álgebra são os mesmos que se empregam em Aritmética. Assim, a indicação da *soma* de dois números quaisquer é feita por $a + b$; a *diferença* por $a - b$. Os sinais $+$ e $-$ são empregados em Álgebra, geralmente, sob o nome de *soma algébrica.*

O *produto* de dois números quaisquer é indicado:

$$a \times b; \quad a \,.\, b \quad \text{ou} \quad ab$$

No caso de um dos fatôres ser numérico, como por exemplo, no produto: $2 \times a$, escreve-se também $2a$.

Na *divisão* temos as indicações: $a : b$ ou $\frac{a}{b}$

Para indicar a extração de raízes emprega-se o *radical* $\sqrt{}$

O sinal = exprime *igualdade* dos números colocados à esquerda e à direita do sinal. Assim, a igualdade dos números a e b é indicada:

$$a = b$$

O sinal > significa *maior que* e o sinal < *menor que*. Assim:

$a > b$, exprime que o número a é *maior* que o número b;
$a < b$, exprime que o número a é menor que o número b.

Os sinais > e < exprimem *desigualdades* dos números colocados à esquerda e à direita do sinal.

Geralmente com as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d, ...), representamos os números que são *conhecidos* ou *dados* e com as últimas (x, y, z, t, ...) os números *desconhecidos* ou *incógnitos*.

3. Expressão algébrica. *Valor numérico.* *Expressão algébrica* é um conjunto de números e letras reunidos por sinais de operações. As operações são: *adição*, *subtração*, *multiplicação*, *divisão*, *potenciação* e *radiciação*. Exemplos:

$$5a^2b; \quad \frac{-3x + 4y}{x^2 - 1}; \quad ax + b; \quad u^2 - \sqrt{z-3}$$

Chama-se *valor numérico* de uma expressão algébrica ao resultado que se obtém quando se substituem as letras dessa expressão por números dados e se efetuam as operações indicadas.

Devemos, no entanto, evitar atribuir às letras da expressão algébrica valores que tornem nulo um divisor ou que a base e o expoente de uma potência sejam nulos simultâneamente. Exemplo:

Calcular o valor numérico das seguintes expressões:

1) $-3a^2b$ para $a = -1$ e $b = 2$

Substituindo-se a e b pelos respectivos valores, temos:

$$-3 \cdot (-1)^2 \cdot (2) = -3 \cdot 1 \cdot 3 = -6$$

2) $\dfrac{5x+3}{2y-5}$ para $x = 2$ e $y = -3$

$$\frac{5 \cdot (2) + 3}{2 \cdot (-3) - 5} = \frac{10+3}{-6-5} = \frac{13}{-11} = -\frac{13}{11}$$

3) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{a}}{5 - a}$ para $a = 4$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{4}}{5 - 4} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$$

Nota: Nunca se poderia, nessa expressão, atribuir a a o valor 5, pois teríamos um divisor nulo.

4) $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ para $x = 1$ e $y = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Nota: A fim de evitar um divisor nulo, não se podem atribuir, nessa expressão, valores iguais para x e y.

4. Expressões algébricas equivalentes. Quando duas expressões algébricas têm valores numéricos iguais, para todos os conjuntos de valores atribuídos às suas letras, diz-se que elas são *equivalentes* ou *idênticas*.

Assim, as expressões:

$$(a + b)^2 \quad \text{e} \quad a^2 + 2ab + b^2$$

são *equivalentes*. Fazendo, por exemplo, $a = 3$ e $b = 1$, temos:

$$(3 + 1)^2 = 4^2 = \mathbf{16}$$

$$\text{e} \qquad 3^2 + 2\text{x}3\text{x}1 + 1^2 = 9 + 6 + 1 = \mathbf{16}$$

5. Classificação das expressões algébricas. As expressões algébricas podem ser: *racionais* e *irracionais*.

Uma expressão algébrica é *racional* quando não possui a indicação de nenhuma extração de raiz ou potência de expoente fracionário em suas letras. Exemplos:

$$3x^2y - 5z;\ \frac{3a}{2a+b};\ ax^2 + bx + c;\ \frac{1}{y} + 8x$$

A expressão algébrica é *irracional* quando possui a indicação de extração de raiz ou potência de expoente fracionário em suas letras. Exemplos:

$$x + \sqrt{y};\ \sqrt[3]{a^2+b^2};\ 4a^{\frac{1}{5}}\ (\text{que é o mesmo de } 4 \,.\, \sqrt[5]{a})$$

Uma expressão racional que não contenha a indicação de divisão ou de potência de expoente inteiro e negativo é chamada *inteira*. Exemplos:

$$4x^2 - 5x + 9;\ 3a + 2b^3;\ x + 3y + 1$$

Uma expressão algébrica racional é *fracionária* quando contém a indicação de divisão ou de potência de expoente inteiro e negativo em suas letras. Exemplos:

$$\frac{3x^4}{x^2-y^2};\ 9a^{-5};\ \frac{1}{x} - 2y^3$$

6. Monômios. CLASSIFICAÇÃO. Chama-se *monômio uma expressão algébrica em que as letras (e os números)* **não** *são separados pelos sinais* + *ou* −. Exemplos;

$$5x^2y;\ \frac{-3ab^4}{4c^2};\ 9\sqrt{x}$$

Um monômio pode ser considerado como um PRODUTO de fatôres. Assim;

$$5x^2y = 5 \times x^2 \times y$$

$$\frac{-3ab^4}{4c^2} = -\frac{3}{4} \times a \times b^4 \times \frac{1}{c^2}$$

$$9\sqrt{x} = 9 \times \sqrt{x}$$

Distinguem-se num monômio: o *coeficiente* e a *parte literal*.

Coeficiente é o fator numérico, geralmente colocado à esquerda do produto que compõe o monômio (*). O sinal do coeficiente diz-se *sinal* do monômio.

Parte literal é o conjunto das letras, com os respectivos expoentes, que fazem parte do monômio. Exemplo:

$$3x^2y \begin{cases} \text{coeficiente:} & 3 \\ \text{parte literal:} & x^2y \end{cases}$$

Outros exemplos:

$$0{,}6xy^3 \begin{cases} \text{coeficiente:} & 0{,}6 \\ \text{parte literal:} & xy^3 \end{cases}$$

$$3 \,.\, \sqrt{12}\, tu^2 \begin{cases} \text{coeficiente:} & 3 \,.\, \sqrt{12} \\ \text{parte literal:} & tu^2 \end{cases}$$

$$-5xy^3z \begin{cases} \text{coeficiente:} & -5 \\ \text{parte literal:} & xy^3z \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}m^4n \begin{cases} \text{coeficiente:} & \frac{2}{3} \\ \text{parte literal:} & m^4n \end{cases}$$

Convém salientar que o *coeficiente* e os *expoentes* da parte literal podem também se apresentar como *quantidades literais*. Assim, por exemplo, no monômio:

$$ax^2y^3$$

pode-se considerar a como coeficiente;

no monômio: $$bx^my^n$$

podemos considerar b como coeficiente e x^my^n como a parte literal, onde m e n são os expoentes.

O coeficiente 1 e o expoente 1 nunca se escrevem. Assim, por exemplo, em: $$x^3y$$

o coeficiente é 1 e o expoente de y é 1.

(*) São considerados, particularmente, como monômios os números isolados, sejam representados por letras ou não.

Os monômios classificam-se como as expressões algébricas, isto é:

$$\text{MONÔMIOS}\begin{cases}\textit{racionais}\begin{cases}\text{inteiros}\\\text{fracionários}\end{cases}\\ \textit{irracionais}\end{cases}$$

Exemplos: $5x^2y^3$ é um monômio racional inteiro;

$\dfrac{-3a}{4b}$ é um monômio racional fracionário;

$7 . \sqrt{x}$ é um monômio irracional.

7. Grau de um monômio racional inteiro. Chama-se *grau de um monômio racional inteiro* a soma dos expoentes das letras que compõem a sua parte literal. Exemplos:

$4x^3y^2$ monômio racional inteiro do quinto grau;

$\dfrac{-3}{7}xy^3z^2$ monômio racional inteiro do sexto grau;

a^3 monômio racional inteiro do terceiro grau.

Costuma-se também dar o grau de um monômio em relação a uma determinada letra de sua parte literal. Assim, por exemplo, o monômio:

$$4x^5y^3z \text{ é do }\begin{cases}\text{quinto grau em relação a } x;\\\text{terceiro grau em relação a } y;\\\text{primeiro grau em relação a } z.\end{cases}$$

8. Monômios semelhantes. *Monômios semelhantes* são aquêles que têm as partes literais iguais. Exemplos:

1.º) $-5x,\ 4x,\ \dfrac{2}{3}x$ são monômios semelhantes (parte literal: x)

2.º) $3x^2y,\ -\dfrac{4}{5}x^2y,\ x^2y$ são monômios semelhantes (parte literal: x^2y)

3.º) $4a^3b^2,\ 2a^3b^2,\ \dfrac{7}{8}a^3b^2$ são monômios semelhantes (parte literal: a^3b^2)

9. Polinômios. Chama-se *polinômio* a soma algébrica de monômios.(*) Os monômios que constituem o polinômio chamam-se *têrmos* do polinômio. Exemplos:

$8x^2 - 3x + 5$ é um polinômio de três têrmos;

$ax + b$ é um polinômio de dois têrmos;

$5x^3y + 4x^2y^2 - \dfrac{2}{5}xy^3 + 8$ é um polinômio de quatro têrmos.

Os polinômios de dois têrmos recebem o nome particular de *binômios* e os de três têrmos de *trinômios*. Como as expressões algébricas, os polinômios classificam-se em:

$$\text{POLINÔMIOS}\begin{cases}\textit{racionais}\begin{cases}\text{inteiros}\\\text{fracionários}\end{cases}\\ \textit{irracionais}\end{cases}$$

Exemplos:

$5x + 3$ binômio racional inteiro;

$\dfrac{3a}{x} - 2y + \dfrac{1}{3x}$ trinômio racional fracionário;

$5x^3 - 4.\sqrt{y} + \dfrac{y^3}{5} + 1$ polinômio irracional.

10. Grau de um polinômio racional inteiro. Chama-se *grau* de um polinômio racional *inteiro* o grau de seu têrmo de maior grau. Exemplos:

1.º) $4x^3y - 8x^2y^5 + 3y^4 - \dfrac{1}{2}$ é um polinômio racional inteiro do sétimo grau (que é o grau do monômio $-8x^2y^5$);

2.º) $a^2 - 1$ é do segundo grau.

Pode-se também definir grau de um polinômio em relação a uma sua letra como o maior grau de seus têrmos em relação a essa letra. Assim, por exemplo:

$$4x^3y - 8x^2y^5 + 3y^4 - \frac{1}{2}$$

é do terceiro grau *em relação a* x e do quinto grau *em relação a* y.

(*) O *polinômio* é, portanto, *uma indicação* de dois ou mais monômios, em uma dada ordem separados a partir do segundo, com o sinal da adição (+) ou da subtração (–).

11. Polinômios homogêneos. Um polinômio cujos têrmos são todos do mesmo grau, diz-se *homogêneo* e o grau comum chama-se *grau de homogeneidade*. Exemplos:

$-5x^2 + 3y^2 - xy$ é um polinômio homogêneo do segundo grau (grau de homogeneidade 2);

$a^4 - b^4$ é um binômio homogêneo do quarto grau (grau de homogeneidade 4).

12. Polinômios ordenados. Um polinômio diz-se *ordenado* segundo as *potências decrescentes* de uma *sua letra*, quando os seus têrmos, do primeiro ao último, *decrescem de grau* em relação a essa letra. Se os têrmos do polinômio *crescem de grau*, do primeiro ao último, em relação a uma determinada letra, diz-se que o polinômio está ordenado segundo as *potências crescentes* daquela letra. Exemplos:

1.º) $-8x^5 + 4x^3 - 12x^2 - 9$ ordenado segundo as potências decrescentes de x.

2.º) $4a^3 - 8a^2b + 3a + 1$ ordenado segundo as potências decrescentes de a.

3.º) $42x + 3x^2 - 5x^3$ ordenado segundo as potências crescentes de x.

4.º) $2x^2y^4 + 4x^3y^3 - x^4y^2$ ordenado segundo as potências crescentes de x e, ao mesmo tempo, decrescentes de y.

13. Polinômios completo e incompleto. Um polinômio ordenado é *completo* em relação a uma letra, quando os expoentes dessa letra, nos sucessivos têrmos que compõem o polinômio, vão constantemente diminuindo de uma unidade (até zero) desde o mais elevado.

O têrmo de grau zero é aquêle em que não figura a letra considerada. Êsse têrmo é chamado *independente*. Exemplo:

$5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 7x + 5$ é um polinômio ordenado e completo em relação a x; o número 5 é o têrmo independente (grau zero em x), pois pode ser considerado como: $5x^0$ $(x^0 = 1)$.

Quando houver falta de um dos têrmos, diz-se que o polinômio é *incompleto*. Exemplos:

$$8x^4 - 3x^2 + 1; \qquad 5y^2 + 32y^4 - y^5.$$

14. Valor numérico de um polinômio. Chama-se *valor numérico de um polinômio* ao valor que resulta quando se substituem as suas letras por números dados e se efetuam as operações indicadas. Exemplos:

Calcular o valor numérico dos seguintes polinômios

1º) $4x^2 - 3x + 1$ para $x = 2$.

Temos:

$$4(2)^2 - 3(2) + 1 = 4 \times 4 - 3 \times 2 + 1 = 16 - 6 + 1 = 11$$

2º) $-3x^2y + 5xy^2 - 3xy^3$ para $x = -1$ e $y = 2$.

Temos:

$$-3(-1)^2 . 2 + 5(-1)(2)^2 - 3(-1)(2)^3 =$$
$$= -3 . 1 . 2 + 5(-1) . 4 - 3(-1) . 8 = -6 - 20 + 24 = -2$$

EXERCÍCIOS

1. Representar algèbricamente:
   - 1.º) A soma de dois números quaisquer;
   - 2.º) A diferença de dois números quaisquer;
   - 3.º) O quadrado da soma de dois números;
   - 4.º) O produto da soma de dois números pela sua diferença;
   - 5.º) Que a soma de dois números não depende da ordem das parcelas (propriedade comutativa);
   - 6.º) Um número maior que outro.
2. Calcular o valor numérico das seguintes expressões algébricas:
   - 1.ª) $-3x^2 + 5x + 3$ para $x = 2$
   - 2.ª) $4a^3b^2 - 5a^2b + 2$ para $a = -1$ e $b = 2$
   - 3.ª) $\frac{x-y}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{y^2}{5}$ para $x = 3$ e $y = 2$
   - 4.ª) $3a^2 - 4 . \sqrt{b} + \frac{c}{2} - 5d$ para $a = -1$, $b = 4$, $c = 12$ e $d = \frac{1}{5}$

3. Classificar as seguintes expressões algébricas:

1.ª) $2x^4y - \frac{3}{5}x^2y^2 + 8x - 1$

2.ª) $x - 3.\sqrt{y} - 1$

3.ª) $4a^3 - \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c}$

4.ª) $5.\sqrt{2}\,x - y + 8$

5.ª) $8x^{-3} + 5$

6.ª) $5x^{\frac{2}{3}} - 4x^2 + 3x - 2$

4. Classificar os seguintes monômios, dizendo os respectivos coeficientes

1.°) $-4a^3b^2$; 2.°) $2.\sqrt{3}\,abc$; 3.°) $\frac{\sqrt{xy}}{3}$; 4.°) $\frac{a}{x}$

5. Dizer os graus dos seguintes monômios racionais inteiros:

1.°) $3x^4y^2$; 2.°) $-\frac{1}{2}xy^3z^2$; 3.°) a^2 ; 4.°) $\sqrt{2}\,ab^3$

6. Dizer os graus dos seguintes polinômios racionais inteiros:

1.°) $3x + 2$; 2.°) $a^2 - 2ab + b^2$; 3.°) $5x^3y - 4x^2y^6 + 3x^5 + 9$

7. Classificar os seguintes polinômios:

1.°) $-12x^3y^2 + 8xy^3 - 5$; 2.°) $\frac{a-2}{x} - 3y$; 3.°) $5.\sqrt[3]{x} - 2y + 4x^3 + 1$

8. Dizer o grau de homogeneidade dos seguintes polinômios:

1.°) $4a^2b - 3ab^2 + a^3$; 2.°) $-\frac{3}{5}xy^2z + 5x^2yz + xyz^2$

9. Ordenar, em relação às potências decrescentes, os polinômios:

1.°) $5x^2 + 3x^5 - 8x + 12x^4$

2.°) $3a^4b - a^5 + 2ab + 3b^2$ (em relação a a)

10. Ordenar, em relação às potências crescentes, os polinômios:

1.°) $9a^4 - 3a^2 + \frac{2}{5}a + a^5 - 6a^3$

2.°) $-2x^3 + 4x^2 - 5x^5 + x^4 + 2x + 8$

RESPOSTAS:

1. 1.°) $a + b$ 3.°) $(a + b)^2$ 5.°) $a + b = b + a$
2.°) $a - b$ 4.°) $(a + b)(a - b)$ 6.°) $a > b$

2. 1.°) 1; 2.°) -24 ; 3.°) $1\frac{19}{20}$; 4.°) 0

3. 1.ª) racional int. ; 2.ª) irracional ; 3.ª) racional frac. ; 4.ª) racional int. ; 5.ª) racional frac. ; 6.ª) irracional.

4. 1.°) rac. int. coef. $= -4$ 3.°) irrac. coef. $= \frac{1}{3}$
2.°) rac. int. coef. $= 2.\sqrt{3}$ 4.°) rac. frac. coeficiente 1 (ou a)

5. 1.ª) 6.° ; 2.ª) 6.° ; 3.ª) 2.° ; 4.ª) 4.°

6. 1.ª) 1.° ; 2.ª) 2.° ; 3.ª) 8.°

7. 1.ª) trinômio rac. int. ; 2.ª) binômio rac. frac. ; 3.ª) polinômio irrac.

8. 1.ª) 3 ; 2.ª) 4

9. 1.ª) $3x^5 + 12x^4 + 5x^2 - 8x$; 2.ª) $-a^5 + 3a^4b + 2ab + 3b^2$

10. 1.°) $\frac{2}{5}a - 3a^2 - 6a^3 + 9a^4 + a^5$
2.°) $8 + 2x + 4x^2 - 2x^3 + x^4 - 5x^5$

NOTA: Outros exercícios no fim do livro, pág. 205.

§2. Operações algébricas

a) ADIÇÃO

15. Adição e subtração de monômios. Para *somar* ou *subtrair* dois monômios, basta escrever entre êles o sinal + ou − e *reduzir* os têrmos semelhantes, se houver. *Reduzir monômios a têrmos semelhantes* significa construir um monômio semelhante cujo coeficiente é igual à soma algébrica dos coeficientes dos monômios dados. Exemplos:

1.°) Somar os monômios: $3a$ e $5x^2y$
Temos para soma: $3a + 5x^2y$ (não são têrmos semelhantes).

2.°) Calcular a diferença entre $5x$ e $9a$.
Devemos ter: $5x - 9a$ (não são têrmos semelhantes).

3.°) Somar os monômios: $3a^2b$ e $9a^2b$.
Temos: $3a^2b + 9a^2b = 12a^2b$ (são têrmos semelhantes).

Para somar vários monômios procedemos da mesma maneira, isto é, escrevemos entre êles o sinal + e reduzimso os têrmos semelhantes, se houver. Exemplos:

1.º) Somar os monômios: $5x$, $-8x$, x, $4x$.

Temos:

$5x+(-8x)+x+4x = 2x$ (reduzimos os têrmos semelhantes, isto é, o coeficiente é igual $5 - 8+1+4 = +2$ e a parte literal x).

2.º) Efetuar a soma dos monômios: $6a$, $-3x$, $-9a$, $5x$.

Temos a seguinte indicação:

$$6a + (-3x) + (-9a) + 5x$$

ou

$$6a - 3x - 9a + 5x = 6a - 9a - 3x + 5x =$$
$$= -3a + 2x.$$

Foram reduzidos os têrmos semelhantes:

$$6a - 9a = -3a$$

e

$$5x - 3x = 2x$$

16. Adição e subtração de polinômios. A *adição* de polinômios é feita escrevendo-se os polinômios uns depois dos outros, conservados os sinais de seus têrmos, e, reduzindo os têrmos semelhantes, se houver. Exemplo:

Somar os polinômios:

$$(3a^2x - 5x^2 + 7x^3) \text{ e } (-5a^2x + 3x^2 + x^3 - 8)$$

Disposição prática:

$$\begin{array}{l} 3a^2x - 5x^2 + 7x^3 \\ \underline{-5a^2x + 3x^2 + x^3 - 8} \\ -2a^2x - 2x^2 + 8x^3 - 8 \end{array}$$

NOTA: É sempre conveniente ordenar os polinômios quando se efetuam as operações de adição e subtração.

Para a *subtração* de dois polinômios, numa certa ordem, efetuamos a soma do primeiro polinômio com o segundo, depois de trocar os sinais de todos os seus têrmos. Exemplo:

Efetuar as diferença entre os polinômios:

$$(8x^2 - 5x + 1) \text{ e } (-3x^2 + 4x - 2)$$

Disposição prática:

$$\begin{array}{l} 8x^2 - 5x + 1 \\ \underline{3x^2 - 4x + 2} \text{ (trocamos os sinais dos têrmos)} \\ 11x^2 - 9x + 3 \end{array}$$

A indicação conjunta das operações de somar e subtrair monômios ou polinômios é feita escrevendo-se as expressões dadas entre parênteses precedidos dos sinais que indicam a operação desejada. Suprime-se, a seguir, trocando os sinais dos têrmos quando o parêntese fôr precedido do sinal de subtração (–). Exemplos:

1.º) Efetuar: $9x^2 + 5x - (2x + 3x^2) + 4x - (-x + 72)$

Temos:

$$9x^2 + 5x - 2x - 3x^2 + 4x + x - 72 =$$
$$= 9x^2 - 3x^2 + 5x - 2x + 4x + x - 72 =$$
$$= 6x^2 + 8x - 72.$$

2.º) Efetuar:

$$4a - [b - (a - 3b) + 5b]$$

Temos

$$4a - [b - a + 3b + 5b] =$$
$$= 4a - b + a - 3b - 5b =$$
$$= 4a + a - b - 3b - 5b =$$
$$= 5a - 9b.$$

3.º) Efetuar:

$$5y - \left[3x - \left(y + \frac{2}{5}x + x - \frac{y}{4}\right)\right] - (4x - 3y)$$

Temos:

$$5y - \left[3x - y - \frac{2}{5}x - x + \frac{y}{4}\right] - 4x + 3y =$$

$$= 5y - 3x + y + \frac{2}{5}x + x - \frac{y}{4} - 4x + 3y =$$

$$= 5y + y - \frac{y}{4} + 3y - 3x + \frac{2}{5}x + x - 4x =$$

$$= (5 + 1 - \frac{1}{4} + 3)\,y + (-3 + \frac{2}{5} + 1 - 4)\,x =$$

$$= \frac{35}{4}y + \left(-\frac{28}{5}\right)x =$$

$$= \frac{35}{4}y - \frac{28}{5}x$$

EXERCÍCIOS

1. Efetuar a soma dos seguintes monômios:
   1.º) $2a,\ -3a,\ 8a$ 3.º) $9y^2,\ -3y^2,\ -6y^2$ 5.º) $3a,\ 2b$
   2.º) $5x,\ \frac{1}{2}x$ 4.º) $3ax^2,\ -5by,\ 2ax^2,\ 6by$ 6.º) $\frac{a}{2},\ -b$
2. Efetuar a diferença entre:
   $3x^2$ e x^2; $4ab^3$ e $-ab^3$; $5x$ e $3y$; a e b.
3. Efetuar a soma dos seguintes polinômios:
   1.º) $(3x^2 - 5x + 8)$ e $(x^2 + 8x - 9)$
   2.º) $(4ab^2 - 3a^2 + 2b)$, $(ab^2 + 6a^2 - 8b)$ e $(-3ab^2 + a^2 - b)$
   3.º) $(8m^2 - 3mn + n^2 - 1)$ e $(-5n^2 + 3m^2 + 5 - mn)$
   4.º) $(x^2 - y^2)$, $(2y^2 + 3x^2)$ e $(5x^2 - y^2)$
4. Efetuar:
   1.º) $(3ax + y) - (2ax - 5y)$
   2.º) $(-x + 2x^2 - 3x^3) - (x^3 + 2x^2 + x)$
   3.º) $\left(x - \frac{y}{3}\right) - \left(\frac{2}{5}x + y\right)$
5. Qual é o polinômio que se deve somar a $(3x - 2y + 5)$ para se obter o polinômio $(2x + 3y - 8)$?
6. Qual é o polinômio que se deve subtrair de $(5ax^2 + 2bx - 3)$ para se obter $(5 - bx + 8ax^2)$?

7. Efetuar a expressão:
   $$8x^2 - (1 - 3x^2) + (5x^2 + 9)$$
8. Reduzir a têrmos semelhantes:
   $$-3x - \{-x + 5 - [8x - (2 + x)]\}$$
9. Reduzir a têrmos semelhantes:
   $$2x^2 - 3x + 5 - [6x^2 - (5 + 2x^2) + 9x] + 8 - 4x$$
10. Sabendo-se que:
    $A = 3a^2 - 2ab + 5b^2$; $B = a^2 - 3ab + b^2$; $C = 4a^2 - 5ab - 3b^2$; $D = a^2 + 2ab + 3b^2$, calcular:
    $$A - [B - (C + D)]$$

(Outros exercícios, pág. 206).

RESPOSTAS:

1. 1.º) $7a$ 3.º) 0 5.º) $3a + 2b$
   2.º) $5\frac{1}{2}x$ 4.º) $5ax^2 + by$ 6.º) $\frac{a}{2} - b$
2. 1.º) $2x^2$; 2.º) $5ab^3$; 3.º) $(5x - 3y)$; 4.º) $(a - b)$
3. 1.º) $(4x^2 + 3x - 1)$ 3.º) $(11m^2 - 4mn - 4n^2 + 4)$
   2.º) $(2ab^2 + 4a^2 - 7b)$ 4.º) $9x^2$
4. 1.º) $(ax + 6y)$; 2.º) $(-2x - 4x^3)$; 3.º) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{4y}{3}\right)$
5. $-x + 5y - 13$
6. $3ax^2 - 3bx + 8$
7. $(16x^2 + 8)$
8. $5x - 7$
9. $(-2x^2 - 16x + 18)$
10. $(7a^2 - 2ab + 4b^2)$

b) MULTIPLICAÇÃO

17. Multiplicação de monômios. *O produto de dois ou mais monômios é um monômio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monômios dados e cuja parte literal é formada por tôdas as letras que entram nesses monômios, sendo cada uma afetada de um expoente igual à soma algébrica dos expoentes com que essa letra figura nos monômios.* Exemplos:

1.º) $4x^3y^2 \times (-3x^2y) = -12x^5y^3$

2.º) $2a^2b^3c \times \frac{4}{5}ab^2 = \frac{8}{5}a^3b^5c$

3.º) $3y^2t \times y^3t^2z \times 8yz^4 = 24y^6t^3z^5$

4.º) $2a^n \times \frac{1}{5}a^m = \frac{2}{5}a^{n+m}$

Para se elevar um monômio a uma *potência* (produto de fatôres iguais), eleva-se a essa potência o seu coeficiente e multiplicam-se os expoentes de cada fator literal pelo grau da potência. Exemplos:

1.º) $(-3a^2b)^3 = -27a^6b^3$

2.º) $\left(\frac{1}{2}x^2y^4\right)^2 = \frac{1}{4}x^4y^8$

18. Multiplicação de um polinômio por um monômio. *Para se multiplicar um polinômio por um monômio, multiplica-se cada têrmo do polinômio pelo monômio e somamos algèbricamente os produtos obtidos.* Exemplos:

1.º) $(a+b-c+d)\times m = a\times m+b\times m-c\times m+d\times m$

2.º) $(3x^2y-5xy^2+4xy^3)\times 5xy = 15x^3y^2-25x^2y^3+20x^2y^4$

3.º) $(ax^{2m}-bx^m+c)\times x = ax^{2m+1}-bx^{m+1}+cx$

19. Multiplicação de dois polinômios. *Para se multiplicar um polinômio por outro polinômio, multiplica-se cada têrmo de um dos polinômios por todos os têrmos do outro e somam-se algèbricamente os produtos obtidos.* Exemplos:

1.º) Efetuar o produto de: $(3x^2-5x+1)$ por $(7x+2)$.

Devemos ter: $(3x^2-5x+1)\,.\,7x+(3x^2-5x+1)\,.\,2 =$

$= 21x^3-35x^2+7x+6x^2-10x+2 =$

$= 21x^3-29x^2-3x+2.$

Disposição prática:

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 3x^2 & -\ 5x & +\ 1 & \text{(multiplicando)}\\
 & & 7x & +\ 2 & \text{(multiplicador)}\\
\hline
21x^3 & -\ 35x^2 & +\ 7x & & \text{(produtos por } 7x)\\
 & 6x^2 & -\ 10x & +\ 2 & \text{(produtos por 2)}\\
\hline
21x^3 & -\ 29x^2 & -\ 3x & +\ 2 &
\end{array}$$

Observação: É sempre conveniente ordenar-se os polinômios segundo as potências decrescentes em relação a uma mesma letra.

2.º) Efetuar o produto de $(5x^2-7x^3+8-x)$ por $(-5x+2x^2-1)$

Ordenando os dois polinômios, segundo as potências decrescentes de x, temos: $(-7x^3+5x^2-x+8)\times(2x^2-5x-1)$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -\ 7x^3 & +\ 5x^2 & -\ x & +\ 8\\
 & & & 2x^2 & -\ 5x & -\ 1\\
\hline
-\ 14x^5 & +\ 10x^4 & -\ 2x^3 & +\ 16x^2 & & \\
 & +\ 35x^4 & -\ 25x^3 & +\ 5x^2 & -\ 40x & \\
 & & 7x^3 & -\ 5x^2 & +\ x & -\ 8\\
\hline
-\ 14x^5 & +\ 45x^4 & -\ 20x^3 & +\ 16x^2 & -\ 39x & -\ 8
\end{array}$$

20. Multiplicação de vários polinômios. *O produto de vários polinômios é obtido multiplicando-se o primeiro polinômio pelo segundo, o resultado pelo terceiro e assim sucessivamente.* Exemplo:

Efetuar $(3x-y)\,.\,(x+y)\,.\,(2x-5y)$

Temos: $(3x-y)\,.\,(x+y) = 3x^2+2xy-y^2$

e, em seguida:

$(3x^2+2xy-y^2)\,.\,(2x-5y) = 6x^3-11x^2y-12xy^2+5y^3$

21. Produtos notáveis. Certos produtos de polinômios têm uma larga aplicação no cálculo algébrico, pela freqüência com que aparecem, recebendo por essa razão denominações especiais. Destacamos, assim, os seguintes *produtos:*

1. **Quadrado da soma de duas expressões algébricas** (*). *O quadrado da soma de duas expressões algébricas é igual ao quadrado da primeira, mais duas vêzes o produto da primeira pela segunda e mais o quadrado da segunda.*

De fato: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

e como:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

temos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

e também: $(b + a)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemplo: $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x)(3y) + (3y)^2 =$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2.$

2. **Quadrado da diferença de duas expressões algébricas.** *O quadrado da diferença de duas expressões algébricas é igual ao quadrado da primeira, menos duas vêzes o produto da primeira pela segunda e mais o quadrado da segunda.*

Da mesma forma: $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

ou $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

e também: $(b - a)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \qquad \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Exemplo:

$$\left(3a^2b - \frac{1}{2}c\right)^2 = (3a^2b)^2 - 2 \cdot (3a^2b)\left(\frac{1}{2}c\right) + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 =$$
$$= 9a^4b^2 - 3a^2bc + \frac{1}{4}c^2.$$

(*) Já estudamos no Capítulo I, § 2, números 7 e 8, os produtos notáveis: quadrado da soma indicada de dois números e produto da soma indicada de dois números pela sua diferença.

3. **Produto da soma de duas expressões algébricas pela sua diferença.** *O produto da soma de duas expressões algébricas pela sua diferença é igual ao quadrado da primeira expressão menos o quadrado da segunda.*

Seja, de fato, o produto:

$(a + b) \cdot (a - b)$

Efetuando, temos:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \qquad \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2 \end{array}$$

Exemplo: $(5x + y)(5x - y) = (5x)^2 - (y)^2 =$
$= 25x^2 - y^2.$

4. **Cubo da soma de duas expressões algébricas.** *O cubo da soma de duas expressões algébricas é igual ao cubo da primeira, mais três vêzes o quadrado da primeira pela segunda, mais três vêzes a primeira pelo quadrado da segunda e mais o cubo da segunda.*

Isto é, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

De fato, como: $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) =$
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Exemplo: $(x + 2y)^3 = (x)^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3 =$
$= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3.$

5. **Cubo da diferença de duas expressões algébricas.** *O cubo da diferença de duas expressões algébricas é igual ao cubo da primeira, menos três vêzes o quadrado da primeira pela segunda, mais três vêzes a primeira pelo quadrado da segunda e menos o cubo da segunda.*

Da mesma forma: $(a-b)^3 = (a-b)^2 \, . \, (a-b) =$

$= (a^2 - 2ab + b^2) \, . \, (a-b) =$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Exemplo:

$$\left(\frac{a}{2}-5\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 3 \, . \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \, 5 + 3 \, . \left(\frac{a}{2}\right) . \, 5^2 - 5^3 =$$

$$= \frac{a^3}{8} - \frac{15a^2}{4} + \frac{75a}{2} - 125.$$

EXERCÍCIOS

1. Multiplicar os monômios:
   1.º) $-2x^3y$ por $4xy^2$ 2.º) ab^2c^3 por $-3a^2bc^2d$
   3.º) $\frac{2}{5}xy^2$ por $-\frac{5}{2}x^3y^2$ 4.º) $3x^m$ por $2x^n$

2. Efetuar os seguintes produtos:
   1.º) $3ax^2 \times \left(-\frac{1}{3}a^2x\right) \times ab^3x^4$ 2.º) $a^{2n}b \times a^3b^m \times ab$
   3.º) $(-0{,}7a^2b) \times 2{,}1ab^3 \times (-ab)$ 4.º) $2x^n \times xy \times 2y^n \times 8$

3. Calcular o valor das seguintes potências:
   1.ª) $(-4a^2b)^2$; 2.ª) $(2x^3y)^3$; 3.ª) $\left(-\frac{1}{2}yz^2\right)^4$; 4.ª) $(-0{,}1a)^3$

4. Efetuar os seguintes produtos:
   1.º) $(3x+y) \times 2a$ 3.º) $(-3x^3y + \frac{2}{5}x^2y^2 - xy^3) \times 2xy^2$
   2.º) $(-3ab) \times (5a^2 - 2ab + b^2)$ 4.º) $(4a2m - 5a^m + 3) \times \frac{a}{2}$

5. Efetuar as seguintes multiplicações:
   1.ª) $(3a+b) \times (2a-5b)$ 5.ª) $(-7x^2+8-x) \times (3x-4x^2+1)$
   2.ª) $(x^2-y) \times (4x^2+3y)$ 6.ª) $(4a^3-2+5a-a^2) \times (8-a^2+4a)$
   3.ª) $(5x^2-3x+2) \times (2x-1)$ 7.ª) $(2x-1) \times (x+3) \times (3x-4)$
   4.ª) $(3a^3-2a^2b+8ab^2-b^3) \times (a-b)$ 8.ª) $(2a^3-b^2) \times (a+b) \times (a-2b)$

6. Calcular o quadrado das expressões:
   1.ª) $(2a+3)$ 3.ª) (x^2-1) 5.ª) $(-2a^3+5)$
   2.ª) $(n-2m)$ 4.ª) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$ 6.ª) $\left(3a^2b+\frac{2c}{5}\right)$

7. Efetuar os seguintes produtos (notáveis):
   1.º) $(x+5).(x-5)$ 4.º) $(3x^2y-2) \, . \, (3x^2y+2)$
   2.º) $(a+2b) \, . \, (a-2b)$ 5.º) $\left(\frac{x}{2}+1\right) . \left(\frac{x}{2}-1\right)$
   3.º) $(a^2-1) \, . \, (a^2+1)$ 6.º) $(a^2+b^2) \, . \, (a^2-b^2)$

8. Calcular o cubo das seguintes expressões:
   1.ª) $(x+y)$; 2.ª) $(a-2b)$; 3.ª) (x^2-1); 4.ª) $\left(x-\frac{1}{2}\right)$

(Outros exercícios, pág. 210).

RESPOSTAS:

1. 1.º) $-8x^4y^3$; 2.º) $-3a^3b^3c^5d$; 3.º) $-x^4y^4$; 4.º) $6x^{m+n}$
2. 1.º) $-a^4b^3x^7$; 2.º) $a^{2n+4}b^{m+2}$; 3.º) $1{,}47a^4b^5$; 4.º) $32x^{n+1}y^{n+1}$
3. 1.ª) $16a^4b^2$; 2.ª) $8x^9y^3$; 3.ª) $\frac{1}{16}y^4z^8$; 4.ª) $-0{,}001a^3$
4. 1.º) $6ax + 2ay$ 3.º) $-6x^4y^3 + \frac{4}{5}x^3y^4 - 2x^2y^5$
   2.º) $-15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$ 4.º) $2a^{2m+1} - \frac{5}{2}a^{m+1} - \frac{3}{2}a$
5. 1.ª) $6a^2 - 13ab - 5b^2$
   2.ª) $4x^4 - x^2y - 3y^2$
   3.ª) $10x^3 - 11x^2 + 7x - 2$
   4.ª) $3a^4 - 5a^3b + 10a^2b^2 - 9ab^3 + b^4$
   5.ª) $28x^4 - 17x^3 - 42x^2 + 23x + 8$
   6.ª) $-4a^5 + 17a^4 + 23a^3 + 14a^2 + 32a - 16$
   7.ª) $6x^3 + 7x^2 - 29x + 12$
   8.ª) $2a^5 - 2a^4b - 4a^3b^2 - a^2b^2 + ab^3 + 2b^4$
6. 1.ª) $4a^2 + 12a + 9$ 3.ª) $x^4 - 2x^2 + 1$ 5.ª) $4a^6 - 20a^3 + 25$
   2.ª) $n^2 - 4mn + 4m^2$ 4.ª) $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$ 6.ª) $9a^4b^2 + \frac{12}{5}a^2bc + \frac{4c^2}{25}$
7. 1.º) $x^2 - 25$ 3.º) $a^4 - 1$ 5.º) $\frac{x^2}{4} - 1$
   2.º) $a^2 - 4b^2$ 4.º) $9x^4y^2 - 4$ 6.º) $a^4 - b^4$
8. 1.ª) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 3.ª) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$
   2.ª) 2.ª) $a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - 8b^3$ 4.ª) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

c) DIVISÃO

22. Divisão de monômios. *O quociente da divisão de dois monômios é um outro monômio cujo coeficiente é o quociente da divisão do coeficiente do dividendo pelo coeficiente do divisor e cuja parte literal é formada das letras que entram no dividendo e no divisor afetadas de um expoente igual à diferença dos expoentes com que figuram.* Exemplos:

1.º) $(-6x^3y^5) : 2xy^2 = -3x^2y^3$

2.º) $12a^5b^2 : 6a^2b = 2a^3b$

3.º) $\left(-\dfrac{2}{3}x^4\right) : \dfrac{1}{5}x = \dfrac{-10}{3}x^3$

Observações:

1.ª) Uma letra que figure no dividendo e no divisor com o mesmo expoente não figurará no quociente. Exemplos:

1) $16a^2 : (-8a^2) = -2$

2) $(-12x^4y^2) : (-13x^4y^2) = \dfrac{12}{13}$

3) $ab^2 : ab^2 = 1$

2.ª) Uma letra que figure sòmente no dividendo, figurará no quociente com o expoente que tem no dividendo. Exemplos:

1) $25x^4y^2 : 5x^2 = 5x^2y^2$

2) $(-3a^3b^2) : 4b = -\dfrac{3}{4}a^3b$

3) $5{,}1xy^4 : (-3) = -1{,}7xy^4$

3.ª) Para que o quociente de dois monômios seja um monômio inteiro é necessário que tôdas as letras que figurem no divisor figurem também no dividendo, com expoentes iguais ou maiores; caso contrário, ou, se no divisor figurarem letras que não figurem no dividendo, o quociente será um monômio fracionário. Exemplos:

1) $\dfrac{6x^4y^3}{2x^5y^6} = \dfrac{3}{xy^3}$ (ou $3x^{-1}y^{-3}$)

2) $\dfrac{-5a^4b^2c}{6a^4b^5} = \dfrac{-5c}{6b^3}$ (ou $-\dfrac{5}{6}cb^{-3}$)

23. Divisão de um polinômio por um monômio. *O quociente da divisão de um polinômio por um monômio se obtém dividindo cada têrmo do polinômio pelo monômio e somando-se algèbricamente os quocientes obtidos.* Exemplos:

1.º) $(8x^3y^2 - 24x^4y + 16x^2y^3) : 4x^2y = 2xy - 6x^2 + 4y^2$

2.º) $(12a^3b^4 - 4ab^3 + 5a^4b^2) : (-2ab^2) = -6a^2b^2 + 2b - \dfrac{5}{2}a^3$

24. Divisão de polinômios com uma variável. Consideremos dois polinômios ordenados segundo uma mesma letra (variável). Efetuar a *divisão* do primeiro polinômio (dividendo) pelo segundo polinômio (divisor) é verificar *se é possível* representar o seu quociente com um polinômio ordenado segundo a mesma letra (variável).

Para se dividir um polinômio por outro, procederemos da seguinte maneira: *divide-se o primeiro têrmo do dividendo pelo primeiro têrmo do divisor obtendo-se, assim, o primeiro têrmo do quociente; multiplica-se o primeiro têrmo do quociente pelo divisor e subtrai-se o produto do dividendo. A diferença obtida representa um* **resto** *(o 1.º), cujo primeiro têrmo dividido pelo têrmo do divisor dará o segundo têrmo do quociente. Multiplica-se a seguir, o segundo têrmo do quociente pelo divisor e subtrai-se o produto do 1.º resto. E assim sucessivamente até que se encontre um* **resto nulo** *ou um resto que o primeiro têrmo não seja possível dividir pelo primeiro têrmo do divisor.*

Exemplos:

Efetuar as divisões de:

1.º) $2x^3 - 5x^2 + x - 8$ por $x^2 + 3x - 4$

A disposição prática da regra acima é a seguinte:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\ 5x^2 & +\ \ x & -\ 8 & \ x^2 + 3x - 4 \\ \cline{5-5}
-\ 2x^3 & -\ 6x^2 & +\ 8x & & \ 2x - 11 \\ \cline{1-3}
 & -\ 11x^2 & +\ 9x & -\ 8 & \\
 & +\ 11x^2 & +\ 33x & -\ 44 & \\ \cline{2-4}
 & & 42x & -\ 52 &
\end{array}
$$

Costumamos dizer:

1) $2x^3$ *dividido* por x^2 resulta $2x$ (1.º têrmo do quociente);

2) $2x$ *multiplicado* por x^2 resulta $+2x^3$, que para subtrair fica $-2x^3$;

$2x$ multiplicado por $+3x$ resulta $+6x^2$, que para subtrair fica $-6x^2$;

$2x$ multiplicado por -4 resulta $-8x$, que para subtrair fica $+8x$.

Da mesma forma procederemos, depois de determinado o 2.º têrmo do quociente ($-11x^2 : x^2 = -11$), até chegarmos ao resto $42x - 52$, quando não poderemos continuar a divisão porque o seu 1.º têrmo ($42x$) não pode ser dividido pelo 1.º têrmo do divisor (x^2).

2.º) $15a^5 - a^4 - 4a^3 + 5a^2 - a$ por $5a^2 + 3a - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
15a^5 - a^4 - 4a^3 + 5a^2 - a & 5a^2 + 3a - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-15a^5 - 9a^4 + 3a^3} & 3a^3 - 2a^2 + a \\
\quad -10a^4 - a^3 + 5a^2 & \\
\quad \underline{+10a^4 + 6a^3 - 2a^2} & \\
\qquad +5a^3 + 3a^2 - a & \\
\qquad \underline{-5a^3 - 3a^2 + a} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Nesse caso, tendo-se chegado a um *resto nulo*, a divisão é *exata*, isto é, o primeiro polinômio é *divisível* pelo segundo.

3.º) $y^3 - 3y^2 + 3y - 1$ por $y - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
y^3 - 3y^2 + 3y - 1 & y - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-y^3 + y^2} & y^2 - 2y + 1 \\
\quad -2y^2 + 3y & \\
\quad \underline{+2y^2 - 2y} & \\
\qquad + y - 1 & \\
\qquad \underline{- y + 1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

4.º) $3x^4 - 5x^3 + 1$ por $2x^2 - x$

Nota: quando o dividendo não é completo é conveniente deixar espaços correspondentes aos têrmos faltantes, a fim de facilitar as operações.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 5x^3 \qquad\qquad + 1 & 2x^2 - x \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^4 + \frac{3}{2}x^3} & \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{7}{8} \\
\quad -\frac{7}{2}x^3 \qquad\qquad + 1 & \\
\quad \underline{+\frac{7}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2} & \\
\qquad -\frac{7}{4}x^2 \qquad + 1 & \\
\qquad \underline{+\frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{8}x} & \\
\qquad\qquad -\frac{7}{8}x + 1 &
\end{array}
$$

EXERCÍCIOS

1. Efetuar:
   - 1.º) $12x^3y^2 : (-4x^2y)$
   - 2.º) $36a^4b^2c : 42ab^2$
   - 3.º) $(-60xy^2t) : (-15xy)$
   - 4.º) $6x^n : (-2x)$
   - 5.º) $3ax^2 : \frac{1}{2}x$
   - 6.º) $2a^3b^2c : (-5a^3bc)$
   - 7.º) $\left(-\frac{4}{5}x^2y\right) : \left(-\frac{6}{7}x^2y\right)$
   - 8.º) $3{,}2a^5b^3cd^2 : (-1{,}6a^4b^2)$
   - 9.º) $18x^{2n}y^m : 12xy^m$
   - 10.º) $\left(-\frac{1}{5}x^2y^3z^2\right) : 5xy^2z$

2. Indicar o quociente (monômio fracionário) nas seguintes divisões:
   - 1.º) $(-2ax^4y^2) : 5x^5y^4$
   - 2.º) $3{,}5xy^3t : 0{,}5x^2y^5$
   - 3.º) $(-5a^4b^2c^3) : (-2ab^3c^5)$
   - 4.º) $\frac{3}{4}xy^8t^3 : \frac{2}{5}xy^{12}t$

3. Efetuar as seguintes divisões:
   - 1.ª) $(4x^3 - 6x^2 + 12x) : 2x$
   - 2.ª) $(3x^2y^2 + 4x^3y^3 - 8x^5y^4) : (-4xy^2)$

3.ª) $\left(\dfrac{a^3b^2}{4} - 3a^2b^3 + 2a^4b^4 + 5a^5b^5\right) : \dfrac{a^2b^2}{2}$

4.ª) $(-2x^{3m} + 4x^{2m} - \dfrac{1}{2}x^m) : \left(-2x^m\right)$

5.ª) $(a^{m+n}b^n + 2a^{m+1}b^{n+1} + a^mb^{m+n}) : a^mb^n$

6.ª) $\left(\dfrac{1}{2}a^3b^4 - \dfrac{2}{3}a^2b^3 + a^4b^5\right) : \dfrac{1}{8}a^2b^3$

4. Efetuar as seguintes divisões entre polinômios:

1.ª) $5x^3 - 8x^2 + 2x + 9$ por $x^2 - 2x + 3$
2.ª) $a^2 - 2a + 1$ por $a - 1$
3.ª) $y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ por $y + 1$
4.ª) $6x^4 - x^3 - 19x^2 + 19x - 5$ por $3x^2 + 4x - 5$
5.ª) $2a^3 - 3a^2 + a + 30$ por $a + 2$
6.ª) $12 - 2m + 7m^2 + 3m^3$ por $3 + m$
7.ª) $n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ por $n - 1$
8.ª) $b^2 - 7b + 12$ por $b - 4$
9.ª) $y^4 - 5y^3 + 8y^2 - 5y + 1$ por $y^2 - 2y + 1$
10.º) $2x^3 - 5x^2 + 6x - \dfrac{64}{27}$ por $3x - 2$

(Outros exercícios, pág. 212).

RESPOSTAS:

1. 1.º) $-3xy$ 3.º) $4yt$ 5.º) $6ax$ 7.º) $\dfrac{14}{15}$ 9.º) $\dfrac{3}{2}x^{2n-1}$
2.º) $\dfrac{6}{7}a^3c$ 4.º) $-3x^{n-1}$ 6.º) $-\dfrac{2}{5}b$ 8.º) $-2abcd^2$ 10.º) $-\dfrac{1}{25}xy^z$

2. 1.º) $\dfrac{-2a}{5xy^2}$; 2.º) $\dfrac{7t}{xy^2}$; 3.º) $\dfrac{5a^3}{2bc^2}$; 4.º) $\dfrac{15t^2}{8y^4}$

3. 1.ª) $2x^2 - 3x + 6$ 4.ª) $x^{2m} - 2x^m + \dfrac{1}{4}$
2.ª) $-\dfrac{3}{4}x - x^2y + 2x^4y^2$ 5.ª) $a^n + 2ab + b^m$
3.ª) $\dfrac{a}{2} - 6b + 4a^2b^2 + 10a^3b^3$ 6.ª) $4ab - \dfrac{16}{3} + 8a^2b^2$

4. 1.º) quociente: $5x + 2$; resto: $-9x + 3$
2.ª) $a - 1$
3.ª) $y^4 + y^2 + 1$
4.ª) $2x^2 - 3x + 1$
5.ª) $2a^2 - 7a + 15$
6.ª) $4 - 2m + 3m^2$
7.ª) $n^2 - 2n + 1$
8.ª) $b - 3$
9.ª) $y^2 - 3y + 1$
10.ª) $\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{11}{9}x + \dfrac{32}{27}$

§ 3. Casos simples de fatoração

25. Fatoração. Uma das operações de grande importância na prática é a da decomposição de um polinômio qualquer em um produto de fatôres. Essa operação, denominada *fatoração*, só é possível em certos casos. Limitar-nos-emos ao estudo dos casos mais simples.

PRIMEIRO CASO: ***Pôr em evidência um fator comum num polinômio.*** Nesse caso pode-se separar êste fator comum colocando-o como multiplicador de outro polinômio cujos têrmos são respectivamente o quociente da divisão do polinômio dado pelo fator considerado. Essa operação é denominada *pôr em evidência um fator comum.*

O fator que se *põe em evidência*, obtém-se fàcilmente formando o monômio que tem por *coeficiente* o m.d.c. de todos os coeficientes dos vários têrmos do polinômio e para *parte literal* as letras comuns a todos os têrmos tomadas com expoente igual ao menor expoente com que figuram no polinômio. Exemplos:

Pôr em evidência o fator comum nos polinômios:

1.º) $8x^3 - 6x^2$

O fator comum nesse polinômio é $2x^2$. Logo:

$$8x^3 - 6x^2 = 2x^2(4x - 3)$$

2.º) $4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 18a^4x^5$

Fator comum: $2a^2x^2$. Logo:

$$4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 18a^4x^5 = 2a^2x^2(2a - 3x + 9a^2x^3)$$

3.º) $\dfrac{x^2y}{4} - \dfrac{xy^2}{2}$

Temos: $\dfrac{x^2y}{4} - \dfrac{xy^2}{2} = \dfrac{xy}{2}\left(\dfrac{x}{2} - y\right)$

4.º) $x^{m+1} - x^m$

Temos: $x^{m+1} - x^m = x^m(x - 1)$

EXERCÍCIOS

Decompôr em fatôres (pôr em evidência) os seguintes polinômios:

1.º) $a + ax$
2.º) $16ax - 12ay$
3.º) $35a^8b^4 - 10a^6b^5 + 15a^3b^7$
4.º) $\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{4} - \frac{m}{6}$
5.º) $(x + y)a + (x + y)b$
6.º) $5a^4x^6 - 10a^2x^4 + 15a^6x^2$
7.º) $x + x^2 + x^3$
8.º) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}a$
9.º) $24a^2b^5 - 32a^2b^6 + 8a^2b^2 - 16a^2b^3$
10.º) $(m + n)x + (m + n)y$
11.º) $2x^m - 4x^{m+1}$
12.º) $\frac{x^{2n}}{8} + \frac{x^n}{4}$

RESPOSTAS:

1.º) $a(1 + x)$
2.º) $4a(4x - 3y)$
3.º) $5a^3b^4(7a^5 - 2a^3b + 3b^3)$
4.º) $\frac{m}{2}\left(m + \frac{m^2}{2} - \frac{1}{3}\right)$
5.º) $(x + y)(a + b)$
6.º) $5a^2x^2(a^2x^4 - 2x^2 + 3a^4)$
7.º) $x(1 + x + x^2)$
8.º) $\frac{1}{4}a\left(a - \frac{1}{2}\right)$
9.º) $8a^2b^2(3b^3 - 4b^4 + 1 - 2b)$
10.º) $(m + n)(x + y)$
11.º) $2x^m(1 - 2x)$
12.º) $\frac{x^n}{4}\left(\frac{x^n}{2} + 1\right)$

SEGUNDO CASO: ***Fatoração por agrupamento.*** É o caso de o polinômio ter fatôres comuns, mas não a todos os têrmos. Obtém-se a decomposição grupando convenientemente os têrmos e colocando os fatôres comuns em evidência. Exemplos:

1.º) $ax + bx + ay + by$

Põe-se x em evidência nos dois primeiros têrmos: $x(a+b)$
e y em evidência nos dois segundos têrmos: $y(a+b)$

Logo: $ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$
ou $ax + bx + ay + by = (a+b)(x+y)$

2.º) $6ax + 4ay - 3bx - 2by$

Temos, agrupando os têrmos em x e os têrmos em y:

$$\begin{aligned} 6ax + 4ay - 3bx - 2by &= 6ax - 3bx + 4ay - 2by = \\ &= 3x(2a - b) + 2y(2a - b) = \\ &= (2a - b)(3x + 2y). \end{aligned}$$

3.º) $mn + 2n - 6 - 3m$

Temos:
$$\begin{aligned} mn + 2n - 6 - 3m &= mn + 2n - 6 - 3m = \\ &= n(m + 2) - 3(m + 2) = \\ &= (m + 2)(n - 3). \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Decompor em fatôres (por agrupam nto), os seguintes polinômios:

1.º) $6ax + 4bx + 9ay + 6by$
2.º) $2a + 2ax + bx + b$
3.º) $mn - x^2 + mx - nx$
4.º) $a - ab + b - 1$
5.º) $x^3 - x^2 + x - 1$
6.º) $3ax - 6a + bx - 2b$
7.º) $1 + b + b^2 + b^3$
8.º) $ab + ax - bx - x^2$
9.º) $uv + uy + vy + y^2$
10.º) $5a + ax - 5b - bx$

RESPOSTAS:

1.º) $(3a + 2b)(2x + 3y)$
2.º) $(x + 1)(2a + b)$
3.º) $(m - x)(n + x)$
4.º) $(1 - b)(a - 1)$
5.º) $(x - 1)(x^2 + 1)$
6.º) $(3a + b)(x - 2)$
7.º) $(b + 1)(b^2 + 1)$
8.º) $(a - x)(b + x)$
9.º) $(u + y)(v + y)$
10.º) $(x + 5)(a - b)$

TERCEIRO CASO: ***Fatoração de um binômio formado pela diferença de dois quadrados.*** Nesse caso, a fatoração está baseada no produto notável (§2, n.º 21-3);

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemplos:

1.º) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
2.º) $16a^4 - 4b^2 = (4a^2 + 2b)(4a^2 - 2b)$
3.º) $m^8 - n^6 = (m^4 + n^3)(m^4 - n^3)$
4.º) $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$
5.º) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy$
6.º) $144y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (12y + \frac{1}{2}z)(12y - \frac{1}{2}z)$
7.º) $12x^2 - 9y^2 = (\sqrt{12} \cdot x + 3y) \cdot (\sqrt{12} \cdot x - 3y)$

EXERCÍCIOS

Fatorar:

1.º) $9x^2 - 16y^4$ 5.º) $\frac{1}{9} - \frac{x^4}{4}$ 9.º) $a^2 - \frac{1}{81}$

2.º) $a^4 - 1$ 6.º) $(2a - 1)^2 - a^2$ 10.º) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

3.º) $16a^2 - x^4$ 7.º) $625x^2 - \frac{y^2}{9}$ 11.º) $9a^2 - 5b^2$

4.º) $(m - x)^2 - y^2$ 8.º) $1 - t^2$ 12.º) $\frac{x^2}{2} - 1$

Respostas:

1.º) $(3x + 4y^2)\,(3x - 4y^2)$

2.º) $(a^2 + 1)\,(a^2 - 1)$

3.º) $(4a + x^2)\,(4a - x^2)$

4.º) $(m - x + y)\,(m - x - y)$

5.º) $\left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$

6.º) $(3a - 1)\,(a - 1)$

7.º) $\left(25x + \frac{y}{3}\right)\left(25x - \frac{y}{3}\right)$

8.º) $(1 + t)\,(1 - t)$

9.º) $\left(a + \frac{1}{9}\right)\left(a - \frac{1}{9}\right)$

10.º) $4ab$

11.º) $(3a + \sqrt{5}\,.b)\,(3a - \sqrt{5}\,b)$

12.º) $\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} - 1\right)$

Quarto caso: ***Fatoração de um trinômio que é quadrado da soma ou diferença de duas expresões em algébricas.*** Basta aplicar os resultados obtidos com os produtos notáveis (§2, n.º 21-1 e 2);

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos:

1.º) $x^2 + 2xy + y^2$

Para fatorar êsse trinômio é necessário verificar se os têrmos extremos são quadrados perfeitos e se o têrmo médio é duas vêzes o produto dos têrmos extremos.

De fato, no exemplo, temos:

x^2 é o quadrado de x;
y^2 é o quadrado de y;
$2xy$ é duas vêzes o produto de x por y.

Logo: $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

2.º) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

Como: $4a^2$ é o quadrado de $2a$;
$9b^2$ é o quadrado de $3b$;
$12ab$ é duas vêzes o produto de $2a$ por $3b$, temos:

$$4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$$

EXERCÍCIOS

Fatorar:

1.º) $a^2 + 2a + 1$ 6.º) $144a^6 - 24a^3 + 1$

2.º) $36x^2 - 60xy + 25y^2$ 7.º) $\frac{1}{9}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$

3.º) $4m^2 + 4m + 1$ 8.º) $1 - 2z^2 + z^4$

4.º) $\frac{a^2}{4} + 2a + 4$ 9.º) $81x^4y^2 - 54x^3y^3 + 9x^2y^4$

5.º) $25x^4 - 30x^2y^2 + 9y^4$ 10.º) $a^4 - 2a^2b^3 + b^6$

Respostas:

1.º) $(a + 1)^2$ 5.º) $(5x^2 - 3y^2)^2$ 9.º) $(9x^2y - 3xy^2)^2$

2.º) $(6x - 5y)^2$ 6.º) $(12a^3 - 1)^2$ 10.º) $(a^2 - b^3)^2$

3.º) $(2m + 1)^2$ 7.º) $\left(\frac{m}{3} - 1\right)^3$

4.º) $\left(\frac{a}{2} + 2\right)^2$ 8.º) $(1 - x^2)^2$

Quinto caso: ***Fatoração de um trinômio do segundo grau que pode ser decomposto no produto de dois binômios do primeiro grau tendo um fator comum.*** Consideremos o produto: $(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

Chamando de: $a + b = s$ (soma)
$ab = p$ (produto)

podemos escrever: $x^2 + sx + p = (x + a)\,(x + b)$

Exemplos:

1.º) $x^2 + 5x + 6$

Para fatorar êsse trinômio devemos procurar dois números (a e b), cuja soma algébrica seja 5 (s) e o produto 6 (p).

Como o produto deve ser positivo (+6), os números procurados devem ter o mesmo sinal. Logo, podem ser:

$$+2 \text{ e } +3; \text{ ou } -2 \text{ e } -3;$$
$$+1 \text{ e } +6; \text{ ou } -1 \text{ e } -6.$$

Dêsses conjuntos de dois números, aquêles que satisfazem à condição de a soma ser 5 é o formado pelos números: +2 e +3. Portanto:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

2.º) $a^2 - a - 30$

Dois números cujo produto seja − 30, devem ter sinais diferentes; logo, podem ser:

$$-1 \text{ e } +30;\ +1 \text{ e } -30;\ -3 \text{ e } +10;\ +3 \text{ e } -10;$$
$$-2 \text{ e } +15;\ +2 \text{ e } -15;\ -5 \text{ e } +6\ \ +5 \text{ e } -6.$$

Como a soma deve ser igual a − 1, os números procurados serão:

$$+5 \text{ e } -6$$

Logo: $a^2 - a - 30 = (a - 6)(a + 5)$

EXERCÍCIOS

Fatorar:

1.º) $x^2 + 7x + 12$	5.º) $b^2 + 14b + 45$	9.º) $y^2 - y - 2$
2.º) $y^2 + y - 20$	6.º) $x^2 - 9x - 22$	10.º) $t^2 + t - 2$
3.º) $a^2 - 4a - 96$	7.º) $n^2 + 44n - 45$	11.º) $x^2 - 2x + 1$
4.º) $m^2 - 8m + 12$	8.º) $z^2 - 15z + 56$	12.º) $m^2 - 3m + 2$

RESPOSTAS:

1.º) $(x + 3)(x + 4)$	5.º) $(b + 5)(b + 9)$	9.º) $(y - 2)(y + 1)$
2.º) $(y - 4)(y + 5)$	6.º) $(x - 11)(x + 2)$	10.º) $(t - 1)\ t + 2)$
3.º) $(a - 12)(a + 8)$	7.º) $(n - 1)(n + 45)$	11.º) $(x - 1)(x - 1)$
4.º) $(m - 6)(m - 2)$	8.º) $(z - 7)(z - 8)$	12.º) $(m - 1)(m - 2)$

EXERCÍCIOS SÔBRE OS DIVERSOS CASOS DE FATORAÇÃO

1.º) $3x^2y + 6x^3y^2$	6.º) $(a - 1)^2 - (b + 2)^2$
2.º) $27a^3b^2 - 18ab^4 + 9a^2b^3$	7.º) $4x^2 - 12xy + 9y^2$
3.º) $ax - ay + bx - by$	8.º) $\frac{a^2}{4} + a + 1$
4.º) $a^3b^2 + 4a^3 - 7b^2 - 28$	9.º) $x^2 - 8x + 15$
5.º) $4x^2 - 4y^2$	10.º) $3m^2 - 9m + 6$

(Outros exercícios, pág. 214).

RESPOSTAS:

1.º) $3x^2y(1+2xy)$	5.º) $4(x+y)(x-y)$	9.º) $(x - 5)(x - 3)$
2.º) $9ab^2(3a^2 - 2b^2 + ab)$	6.º) $(a+b+1)(a-b-3)$	10.º) $3(m-1)(m-2)$
3.º) $(a+b)(x-y)$	7.º) $(2x - 3y)^2$	
4.º) $(b^2+4)(a^3-7)$	8.º) $\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2$	

§4. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de expressões algébricas (*)

26. Máximo divisor comum de expressões algébricas. Máximo divisor comum (m.d.c.) de duas ou mais expressões algébricas é *a expressão algébrica de mais alto grau que é divisora de tôdas as expressões algébricas dadas.*

A determinação do m.d.c. de expressões algébricas é feita *decompondo-se cada uma das expressões em seus fatôres e formando-se o produto dos fatôres comuns afetados de seus menores expoentes.* Exemplos:

Determinar o m.d.c. das seguintes expressões:

1.º) $8x^2y^3$; $12x^3y^5$ e $24a^2x^4y^6$

Decompondo êsses monômios em seus fatôres:

$$8x^2y^3 = 2^3 \times x^2 \times y^3$$
$$12x^3y^5 = 2^2 \times 3 \times x^3 \times y^5$$
$$24a^2x^4y^6 = 2^3 \times 3 \times a^2 \times x^4 \times y^6 \text{ e, portanto o}$$

m.d.c. $(8x^2y^3;\ 12x^3y^5;\ 24a^2x^4y^6) = 2^2 \times x^2 \times y^3 = 4x^2y^3$

(*) Consideraremos sòmente as expressões algébricas racionais e inteiras.

2.°) $(x^2 - y^2)$ e $(x^2 + 2xy + y^2)$

Fatorando essas expressões, temos:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

O único fator comum é o binômio: $(x + y)$, logo:

$$\text{m.d.c.}\ (x^2 - y^2;\ x^2 + 2xy + y^2) = x + y$$

3.°) $2a^2 - 4ab$; $2a - 4b$; e $2a^2 - 8ab + 8b^2$

Fatorando:
$$2a^2 - 4ab = 2a\,(a - 2b)$$
$$2a - 4b = 2(a - 2b)$$
$$2a^2 - 8ab + 8b^2 = 2\,(a^2 - 4ab + 4b^2) = 2\,(a - 2b)^2$$
$$\text{m.d.c.}\ (2a^2 - 4ab;\ 2a - 4b;\ 2a^2 - 8ab + 8b^2) = 2\,(a - 2\,b)$$

27. Mínimo múltiplo comum de expressões algébricas. Mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de duas ou mais expressões algébricas *é a expressão algébrica de* **menor** *grau que é divisível por tôdas as expressões dadas.*

A sua determinação é feita decompondo-se *cada uma das expressões algébricas em seus fatôres e formando-se o produto dos fatôres comuns e não comuns afetados de seus maiores expoentes.* Exemplos:

Determinar o m.m.c. das seguintes expressões:

1.°) $12a^2x^3y$; $16ax^4y^3$ e $8x^5y^2$

Fatorando:
$$12a^2x^3y = 2^2 \times 3 \times a^2 \times x^2 \times y$$
$$16ax^4y^3 = 2^4 \times a \times x^4 \times y^3$$
$$8x^5y^2 = 2^3 \times x^5 \times y^2$$

Logo:
$$\text{m.m.c.}\ (12a^2x^3y;\ 16ax^4y^3;\ 8x^5y^2) = 2^4 . 3a^2x^5y^3 = 48a^2x^5y^3$$

2.°) $a^2 - b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$

Fatorando:
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Logo: $\text{m.m.c.}\ (a^2 - b^2;\ a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^2 . (a + b)$

3.°) $3x + 2y$; $9x^2 - 4y^2$; $6ax + 4ay$

Fatorando:
$$3x + 2y = 3x + 2y$$
$$6ax + 4ay = 2a\,(3x + 2y)$$
$$9x^2 - 4y^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$$

Portanto:
$$\text{m.m.c.}\ (3x + 2y;\ 9x^2 - 4y^2;\ 6ax + 2ay) = 2a\,(3x + 2y)(3x - 2y) = 2a\,(9x^2 - 4y^2).$$

EXERCÍCIOS

Calcular o m.d.c. e o m.m.c. das seguintes expressões:

1.ª) $15a^2x^3$ e $30a^3x^2$
2.ª) $8a^2b^3x$; $12a^3bx^2$ e $16a^5b^2$
3.ª) a^2b; ab e ab^2
4.ª) $121z^2y$; $11zy^3$ e zy
5.ª) $x^3y^2z^5$; x^2y^3z e $x^5y^4z^2$
6.ª) $a^2 - b^2$ e $a^2 + 2ab + b^2$
7.ª) $4x^2 - 1$; $20x^2 - 5$ e $6x - 3$
8.ª) $a^4 - 1$ e $a^2 + 1$
9.ª) $x^2 + 2xy + y^2$; $x + y$ e $ax + ay$
10.ª) $x^2 + 5x + 6$; $3x + 6$

(Outros exercícios, pág. 217).

RESPOSTAS:

1.ª) $15a^2x^2$ e $30a^3x^3$
2.ª) $4a^2b$ e $48a^5b^3x^2$
3.ª) ab e a^2b^2
4.ª) zy e $121z^2y^3$
5.ª) x^2y^2z e $x^5y^4z^5$
6.ª) $(a + b)$ e $(a + b)^2(a - b)$
7.ª) $2x - 1$ e $15x(2x + 1)(2x - 1)$
8.ª) $a^2 + 1$ e $(a^2 + 1)(a^2 - 1)$
9.ª) $(x + y)$ e $a(x + y)^2$
10.ª) $(x + 2)$ e $3(x + 2)(x + 3)$

§5. Frações literais. Propriedades. Operações fundamentais

28. Fração algébrica. *Frações literais* ou *frações algébricas* são as que se obtêm indicando o quociente da divisão de duas expressões algébricas no caso da impossibilidade de se efetuar exatamente a operação.

Assim, por exemplo, querendo dividir $x - a$ por $3a^2x + 2b$, o quociente é a fração algébrica:

$$\frac{x - a}{3a^2x + 2b}$$

onde $x - a$, *numerador*, e $3a^2x + 2b$, *denominador*, são seus *têrmos*.

29. Propriedades. ***Simplificação.*** Valem para as frações algébricas as mesmas propriedades, e, portanto, as mesmas regras de cálculo, já estudadas na Aritmética para as frações numéricas. Dêsse modo, temos para *propriedade fundamental*:

> **O valor de uma fração algébrica não se altera multiplicando ou dividindo os dois têrmos dessa fração por uma expressão, diferente de zero.**

As frações obtidas, a partir dessa propriedade, dizem-se *equivalentes*. Resulta, assim, que se pode *simplificar* ou reduzir à *forma mais simples* uma fração algébrica como as frações aritméticas, bastando para isso dividir ambos os têrmos por uma mesma quantidade diferente de zero.

Quando os têrmos são *monômios*, suprimem-se os fatôres numéricos e literais comuns ao numerador e ao denominador. Se, ao invés, os têrmos são *polinômios*, decompomo-los em seus fatôres e se suprimem os comuns ao numerador e ao denominador. Exemplos:

Simplificar as frações algébricas:

1.ª) $\dfrac{36a^3b^4x^2}{24a^2b^6x^3}$

Fatorando: $36a^3b^4x^2 = 2^2 \times 3^2 \times a^3 \times b^4 \times x^2$

$24a^2b^6x^3 = 2^3 \times 3 \times a^2 \times b^6 \times x^3$

Temos: $\dfrac{36a^3b^4x^2}{24a^2b^6x^3} = \dfrac{2^2 \times 3^2 \times a^3 \times b^4 \times x^2}{2^3 \times 3 \times a^2 \times b^6 \times x^3} = \dfrac{3a}{2b^2x}$

Nota: Pode-se chegar ràpidamente à redução de uma fração à sua forma mais simples, dividindo ambos os seus têrmos pelo seu m.d.c.

2.ª) $\dfrac{12a^2y^2-27b^2y^2}{2axy - 3bxy}$

Fatorando, temos: $\dfrac{12a^2y^2-27b^2y^2}{2axy - 3bxy} = \dfrac{3y^2(4a^2-9b^2)}{xy(2a-3b)} =$

$= \dfrac{3y^2(2a+3b)(2a-3b)}{xy(2a-3b)} =$

$= \dfrac{3y(2a+3b)}{x}.$

3.ª) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$

Fatorando: $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21} = \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-7)} = \dfrac{x-5}{x-7}$

EXERCÍCIOS

Simplificar as frações algébricas:

1.ª) $\dfrac{3x^3y}{4xy^3}$ 5.ª) $\dfrac{x+y}{x^2+xy}$ 9.ª) $\dfrac{m^2+7m+12}{m^2+4m+3}$.

2.ª) $\dfrac{-12a^2b^3c}{3a^4b^2c}$ ✓ 6.ª) $\dfrac{3ax+3by}{a^2x^2+2abxy+b^2y^2}$ 10.ª) $\dfrac{ax-a}{bx^2-b}$

3.ª) $\dfrac{3xyz}{-5x^2y^2z^2}$ 7.ª) $\dfrac{-ab}{a^2-ab}$ 11.ª) $\dfrac{p^2+3p}{p^2-9}$

4.ª) $\dfrac{3a^2}{5a^2+5ab}$ 8.ª) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ 12.ª) $\dfrac{(m^5+1)-(m^3+1)}{m^2-1}$

(Outros exercícios, pág. 218).

Respostas:

1.ª) $\dfrac{3x^2}{4y^2}$ 5.ª) $\dfrac{1}{x}$ 9.ª) $\dfrac{m+4}{m+1}$

2.ª) $\dfrac{-4b}{a^2}$ ✓ 6.ª) $\dfrac{3}{ax+by}$ 10.ª) $\dfrac{a}{b(x+1)}$

3.ª) $\dfrac{-3}{5xyz}$ 7.ª) $\dfrac{-b}{a-b}$ 11.ª) $\dfrac{p}{p-3}$

4.ª) $\dfrac{3a}{5(a+b)}$ 8.ª) $\dfrac{x-2}{x+2}$ 12.ª) m^3

30. Redução de frações algébricas ao mesmo denominador. Como na Aritmética, reduzimos frações algébricas ao mesmo denominador, da seguinte maneira:

1.º) Determinando um múltiplo comum (de preferência o m.m.c.) dos denominadores.

2.º) Dividindo êsse múltiplo comum pelo denominador de cada uma das frações e multiplicando o numerador pelo quociente obtido. Exemplos:

Reduzir ao mesmo denominador as frações:

1.º) $\frac{2a}{3b}$, $\frac{7b}{a}$, $\frac{3c}{4a}$

Determinamos o m.m.c. $(3b\,;\ a\,;\ 4a) = 12ab$.

Disposição prática: $\frac{\quad}{12ab}$, $\frac{\quad}{12ab}$, $\frac{\quad}{12ab}$

$$\frac{8a^2}{12ab},\quad \frac{84b^2}{12ab},\quad \frac{9bc}{12ab}$$

pois, $(12ab : 3b = 4a)$, $(12ab : a = 12b)$, $(12ab : 4a = 3b)$

e $(4a \times 2a = 8a^2)$, $(12b \times 7b = 84b^2)$, $(3b \times 3c = 9bc)$

2.º) $\frac{x+y}{10a^2b}$, $\frac{2x}{5b^3}$, $\frac{3x-y}{4ab^4}$

m.m.c. $(10a^2b;\ 5b^3;\ 4ab^4) = 20a^2b^4$

$$\frac{\quad}{20a^2b^4},\quad \frac{\quad}{20a^2b^4},\quad \frac{\quad}{20a^2b^4}$$

$$\frac{2b^3\,(x+y)}{20a^2b^4},\quad \frac{8a^2bx}{20a^2b^4},\quad \frac{5a\,(3x-y)}{20a^2b^4}$$

3.º) $\frac{2}{a+b}$, $\frac{4}{a-b}$, $\frac{3a}{a^2-b^2}$

m.m.c. $(a+b\,;\ a-b\,;\ a^2-b^2) = a^2-b^2 = (a+b)\,(a-b)$

$$\frac{2\,(a-b)}{a^2-b^2},\quad \frac{4\,(a+b)}{a^2-b^2},\quad \frac{3a}{a^2-b^2}$$

EXERCÍCIOS

Reduzir ao menor denominador comum as seguintes frações:

1.º) $\frac{2x}{5y}$, $\frac{3y}{x}$, $\frac{1}{2x}$

2.º) $\frac{1}{x^3}$, $\frac{ac}{4x^2y}$, $\frac{2a^2c^3}{x^5}$, $\frac{b}{2xy^2}$

3.º) $\frac{a}{x^2-1}$, $\frac{4b}{x+1}$, $\frac{c}{x-1}$

4.º) $\frac{x+y}{a+2}$, $\frac{2x}{a^2+5a+6}$, $\frac{x-y}{a+3}$

5.º) $\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$, $\frac{2}{x^2-y^2}$, $\frac{x}{x+y}$

(Outros exercícios, pág. 220).

RESPOSTAS:

1.º) $\frac{4x^2}{10xy}$, $\frac{30y^2}{10xy}$, $\frac{5y}{10xy}$

2.º) $\frac{4x^2y^2}{4x^5y^2}$, $\frac{acx^3y}{4x^5y^2}$, $\frac{8a^2c^3y^2}{4x^5y^2}$, $\frac{2bx^4}{4x^5y^2}$

3.º) $\frac{a}{x^2-1}$, $\frac{4b(x-1)}{x^2-1}$, $\frac{c\,(x+1)}{x^2-1}$

4.º) $\frac{(x+y)\,(a+3)}{a^2+5a+6}$, $\frac{2x}{a^2+5a+6}$, $\frac{(x-y)\,(a+2)}{a^2+5a+6}$

5.º) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2\,(x+y)}$, $\frac{2\,(x-y)}{(x-y)^2\,(x+y)}$, $\frac{x\,(x-y)^2}{(x-y)^2\,(x+y)}$

31. Operações fundamentais. Com as frações algébricas são possíveis as mesmas operações estudadas com os números fracionários.

I. ***Adição e subtração.*** *A soma algébrica de frações obtém-se reduzindo-se as frações ao mesmo denominador,* caso seja necessário, e, a seguir, *somando-se algèbricamente os numeradores, dando-se para denominador do resultado o denominador comum.* Exemplos:

Efetuar:

1.º) $\frac{3x}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{x}{5}$

Temos: $\frac{3x}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{3x + 2x - x}{5} = \frac{4x}{5}$

2.º) $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a}$

Temos: $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = \frac{x - y + z}{a}$

3.º) $\frac{2x-3}{4} + \frac{1-x}{6}$

Reduzindo as frações ao mesmo denominador (m.m.c. = 12), temos:

$$\frac{2x-3}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{3(2x-3) + 2(1-x)}{12} =$$

$$= \frac{6x - 9 + 2 - 2x}{12} =$$

$$= \frac{6x - 2x - 9 + 2}{12} =$$

$$= \frac{4x - 7}{12}.$$

4.º) $\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{a+1}{a-1}$

Sendo o m.m.c. dos denominadores igual a: $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$, temos:

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{a+1}{a-1} = \frac{(a-1)(a-1) - (a^2+1) + (a+1)(a+1)}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1 - a^2 - 1 + a^2 + 2a + 1}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

EXERCÍCIOS

Efetuar:

1.º) $\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} - \frac{7x}{3}$

2.º) $\frac{5x-3}{4} - \frac{1-2x}{3} - \frac{x}{12}$

3.º) $\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{x}$

4.º) $\frac{1-a^2}{a^2} + \frac{a+2}{2a} + \frac{1}{2}$

5.º) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}$

6.º) $3x + \frac{y-2x}{5}$

7.º) $\frac{a^2}{a^2+ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a+b}$

8.º) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1}$

9.º) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x}$

10.º) $\frac{m+n}{m-n} + \frac{n-m}{m+n} - \frac{4mn}{m^2-n^2}$

Respostas:

1.º) $\frac{-4x}{3}$ 3.º) 2 5.º) $\frac{2}{1+x}$ 7.º) $\frac{a+b}{b}$ 9.º) 1

2.º) $\frac{2+7x}{12}$ 4.º) $\frac{a+1}{a^2}$ 6.º) $\frac{13x+y}{5}$ 8.º) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 10.º) 0

II. **Multiplicação.** *O produto de duas ou mais frações algébricas é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas.* Exemplos:

Efetuar:

1.º) $\dfrac{3x^2}{2a} \times \dfrac{b}{5y}$

Temos: $\dfrac{3x^2}{2a} \times \dfrac{b}{5y} = \dfrac{3x^2b}{10ay}$

2.º) $\dfrac{15}{2x^2y} \times \dfrac{x-y}{4x} \times \dfrac{x}{3}$

Temos: $\dfrac{15}{2x^2y} \times \dfrac{x-y}{4x} \times \dfrac{x}{3} = \dfrac{15x\,(x-y)}{24x^3y} =$

$= \dfrac{5\,(x-y)}{8x^2y}.$

3.º) $\dfrac{a^2-b^2}{6a} \times \dfrac{12a}{a+b} \times \dfrac{1}{a-b}$

Devemos ter: $\dfrac{a^2-b^2}{6a} \times \dfrac{12a}{a+b} \times \dfrac{1}{a-b} = \dfrac{(a^2-b^2)\,.\,12a}{6a(a+b)(a-b)} =$

$= \dfrac{(a^2-b^2)\,.\,12a}{6a(a^2-b^2)} =$

$= 2.$

EXERCÍCIOS

Efetuar:

1.º) $\dfrac{3a^2}{5x} \times \dfrac{2bx}{9a} \times \dfrac{1}{b}$

2.º) $\dfrac{a}{a+b} \times \dfrac{-b}{a-b}$

3.º) $\dfrac{15x}{x-y} \times \dfrac{x^2-y^2}{5}$

4.º) $\dfrac{m-n}{m^2+mn} \times \dfrac{m^2-n^2}{m^2-mn}$

5.º) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-2x} \times \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+4}$

6.º) $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2} \times \dfrac{3a^2+3b^2}{a^2+2ab+b^2}$

ROBERTO

RESPOSTAS:

1.º) $\dfrac{2a}{15}$ 3.º) $3x\,(x+y)$ 5.º) $\dfrac{x-5}{x-1}$

2.º) $\dfrac{-ab}{a^2-b^2}$ 4.º) $\dfrac{m-n}{m^2}$ 6.º) $\dfrac{3a}{a+b}$

III. **Divisão.** *Para dividir uma fração algébrica por outra multiplica-se a primeira fração pelo* ***inverso*** *da segunda.* Exemplos:

Efetuar:

1.º) $\dfrac{a}{b} : \dfrac{x}{y}$

Temos: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{y}{x} =$

$= \dfrac{ay}{bx}.$

2.º) $\dfrac{4x^3y^2}{5a} : \dfrac{2xy^2}{3b}$

Temos: $\dfrac{4x^3y^2}{5a} : \dfrac{2xy^2}{3b} = \dfrac{4x^3y^2}{5a} \times \dfrac{3b}{2xy^2} =$

$= \dfrac{12x^3y^2b}{10axy^2} =$

$= \dfrac{6bx^2}{5a}.$

3.º) $\dfrac{a^2-x^2}{6ax} : \dfrac{a-x}{3x}$

Temos: $\dfrac{a^2-x^2}{6ax} : \dfrac{a-x}{3x} = \dfrac{a^2-x^2}{6ax} \times \dfrac{3x}{a-x} =$

$= \dfrac{(a+x)\,(a-x)}{6ax} \times \dfrac{3x}{a-x} =$

$= \dfrac{a+x}{2a}.$

EXERCÍCIOS

Efetuar:

1.º) $\frac{2m}{3n} : \frac{4m}{5}$

2.º) $\frac{5a^2b^2}{3xy^2} : \frac{-ab}{6xy}$

3.º) $\frac{a+b}{4a} : \frac{a^2-b^2}{2ab}$

4.º) $\frac{12m}{3m-3} : \frac{3m}{m-1}$

5.º) $\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2}$

6.º) $\frac{z^2-5z+6}{a^2-4a+4} : \frac{z-2}{a-2}$

RESPOSTAS:

1.º) $\frac{5}{6n}$

2.º) $\frac{-10ab}{y}$

3.º) $\frac{b}{2(a-b)}$

4.º) $\frac{4}{3}$

5.º) x^2-y^2

6.º) $\frac{z-3}{a-2}$

IV. **Potenciação.** *Calcula-se a potência de uma fração algébrica elevando-se o numerador e o denominador da fração a essa potência.* Exemplos:

1.º) $\left(\frac{3x^2}{4y}\right)^2 = \frac{(3x^2)^2}{(4y)^2} = \frac{9x^4}{16y^2}.$

2.º) $\left(\frac{-4a}{x-y}\right)^3 = \frac{(-4a)^3}{(x-y)^3} = \frac{-64a^3}{(x-y)^3}.$

Exemplos de cálculo de expressões algébricas fracionárias contendo as operações fundamentais:

1.º) Efetuar: $\left(\frac{2a}{x-y}\right)^2 : \frac{4a}{x-y}$

Temos: $\left(\frac{2a}{x-y}\right)^2 : \frac{4a}{x-y} = \frac{4a^2}{(x-y)^2} \times \frac{x-y}{4a} =$

$$= \frac{a}{x-y}.$$

2.º) Simplificar: $\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right)$

Temos:

$$\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right) = \left(\frac{a-b-a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b+a+b}{a+b}\right) =$$

$$= \frac{-2b}{a+b} \times \frac{a+b}{2a} =$$

$$= \frac{-2b(a+b)}{2a(a+b)} =$$

$$= \frac{-b}{a}.$$

3.º) Simplificar: $\dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}}$

Temos: $\dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} =$

$$= \frac{1-1+x}{1-x} \times \frac{1-x}{1} =$$

$$= \frac{x}{1-x} \times \frac{1-x}{1} =$$

$$= x.$$

EXERCÍCIOS

Simplificar:

1.º) $\dfrac{a-b}{x+y} : \dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$

2.º) $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}}$

3.º) $\dfrac{1 - \dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y} - 1}$

4.º) $\left(x - 3 + \dfrac{5x}{2x-6}\right) : \left(2x - 1 + \dfrac{15}{x-3}\right)$

5.º) $\dfrac{\left(\dfrac{1+a}{1-a} - \dfrac{1-a}{1+a}\right) \cdot a^2}{\left(\dfrac{1+a}{1-a} - 1\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1+a}\right)}$

6.º) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)^2 : \dfrac{(y-x)^2}{x^2y^2}$

(Outros exercícios, pág. 220).

RESPOSTAS:

1.º) $\dfrac{x-y}{a+b}$; 2.º) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$; 3.º) $\dfrac{x-y}{x+y}$; 4.º) $\dfrac{1}{2}$; 5.º) $2a$; 6.º) 1

CAPÍTULO III

Binômio linear. Equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas lineares com duas incógnitas. Aplicações

§1. Igualdade. Identidade. Equação

1. Igualdade algébrica. Chama-se *igualdade algébrica* um conjunto de duas expressões algébricas ligadas pelo sinal =. Exemplos:

$$x + 1 = 5$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

As duas expressões ligadas pelo sinal = são denominadas *membros* da igualdade. A que vem antes do sinal é denominada *primeiro membro* e a que vem depois, *segundo membro*. Os membros podem ser também números ou expressões numéricas.

As igualdades algébricas se apresentam sob as formas de: *identidades* e *equações*.

2. Identidade. *Identidade* é a igualdade que se verifica para *quaisquer valores* atribuídos às letras que nela figuram.

Costuma-se indicar as identidades com o sinal ≡. Assim, por exemplo:

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

é uma identidade, pois verifica-se para quaisquer valores atribuídos às letras a e b. De fato, fazendo-se, por exemplo: $a = 2$ e $b = 1$, temos:

$$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2\times2\times1 + 1^2$$

ou $$3^2 = 4 + 4 + 1$$

e, portanto: $$9 = 9$$

3. Equação. Chama-se *equação* a igualdade que se verifica sòmente para *alguns valores particulares* atribuídos a tôdas ou algumas das letras que nela figuram. Exemplos:

1.º) A igualdade $x + 2 = 7$

é uma *equação*, pois só se verifica para $x = 5$, isto é, para êsse valor de x, temos: $5 + 2 = 7$

2.º) A igualdade $y^2 - 1 = 8$

também é uma equação pelo fato de se verificar sòmente para os valores $y = +3$ e $y = -3$, pois para êsses valores de y temos:

$$(+3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$
$$(-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

As letras que nas equações só podem assumir determinados valores são denominadas *incógnitas*. Os valores que, substituídos nas incógnitas, tornam a equação uma identidade numérica dizem-se *raízes* ou *soluções* da equação.

Para os exemplos dados, temos:

na equação: $x + 2 = 7$ a *incógnita* é x e a *raiz* é 5;

na equação: $y^2 - 1 = 8$ a *incógnita* é y e as *raízes* são: $+3$ e -3.

4. Classificação das equações (*). As equações, envolvendo expressões algébricas classificam-se em:

$$\text{EQUAÇÕES}\begin{cases}\textit{racionais}\begin{cases}\text{inteiras}\\ \text{fracionárias}\end{cases}\\ \textit{irracionais}\end{cases}$$

As equações *racionais* são aquelas que não têm as incógnitas submetidas à radiciação ou sujeitas a expoente fracionário. São *irracionais*, caso contrário. Se a equação racional não tem incógnita em denominador (ou elevada a um expoente negativo) diz-se que ela é *racional* e *inteira*. Caso contrário a equação é *racional fracionária*. Exemplos:

1.º) $3x - 5 = 2x + 3$ equação *racional inteira*.

2.º) $\dfrac{12}{3 - x} = 7$ equação *racional fracionária*.

3.º) $\sqrt{x} - 4 = 8x - 1$ equação *irracional*.

(*) Nesta classificação supomos que estejam reduzidos os têrmos semelhantes.

As equações racionais inteiras ainda se classificam pelos *graus*.

Grau de uma equação racional inteira é o *maior expoente* com que figura a incógnita na equação, se esta possuir só uma incógnita. Caso a equação possua mais incógnitas, o grau é dado pela *soma* dos expoentes das mesmas no têrmo em que essa soma é a maior. Exemplos:

1.º) $5x - 2 = x + 4$ 1.º grau em x.

2.º) $3x^2 - 9x + 1 = 0$ 2.º grau em x.

3.º) $x^2 - 3x^3y^2 + 8y^2 = 1$ equação racional inteira do 5.º grau.

Quando nas equações tôdas as letras são incógnitas a equação diz-se *numérica*. Caso contrário, chama-se *literal*, e as letras não consideradas como incógnitas são denominadas *parâmetros* da equação. Exemplos:

1.º) $4x^2 - 3x = 8 - 5x$ é uma equação *numérica*;

2.º) $ax^2 + 2bx = c + 1$ é uma equação *literal*, onde a incógnita é x e os parâmetros a, b e c.

5. Equações equivalentes. Duas ou mais equações, que têm o mesmo número de raízes, dizem-se *equivalentes* quando tôda raiz de uma delas é também raiz da outra. Exemplo:

As equações $2x + 3 = 11$ (raiz 4)

e $x - 1 = 3$ (raiz 4)

são *equivalentes*, pois as duas admitem a raiz 4.

6. Resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. *Resolver* uma equação significa *determinar as suas soluções*, caso existam, ou *verificar* a sua *impossibilidade*. Para êsse fim empregamos certos princípios, denominados *princípios de equivalência*, que permitem transformar a equação dada em uma equação equivalente de *resolução imediata*.

7. Princípios de equivalência

Primeiro princípio:

> **Somando-se ou subtraindo-se, aos membros de uma equação, uma mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente à equação dada.**

Aplicação. Seja a equação: $6x - 3 = x + 2$, de raiz $x = 1$.

Somando, por exemplo, 3 aos dois membros da equação, teremos:

$$6x - 3 + 3 = x + 2 + 3$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes:

$$6x = x + 5$$

que é uma equação equivalente à primeira (pois a raiz ainda é $x = 1$).

Subtraindo, agora, de ambos os membros dessa equação, a expressão x, obtemos:

$$6x - x = x + 5 - x$$

ou

$$5x = 5$$

que é ainda uma equação equivalente à equação dada (a raiz é $x = 1$) e de resolução imediata.

Conseqüências:

1.ª) *Pode-se passar (ou transpor) um ou vários têrmos de um membro para outro de uma equação desde que se troquem os seus sinais.* Exemplos:

Na equação $\quad 4x - 5 = 1 + 3x$

pode-se passar o -5 para o segundo membro e $+3x$ para o primeiro membro: $\quad 4x - 3x = 1 + 5$

que é uma equação equivalente à equação dada (raiz $x = 6$).

2.ª) *Pode-se sempre reduzir o segundo membro de uma equação a zero.* Exemplo:

Na equação $\quad 4x - 5 = 1 + 3x$

basta passar $+1$ e $+3x$ para o primeiro membro e obtém-se a equação equivalente:

$$4x - 5 - 1 - 3x = 0$$

Segundo princípio:

> **Multiplicando-se ou dividindo-se os membros de uma equação por uma mesma expressão diferente de zero e que não contenha a incógnita, obtém-se uma equação equivalente à equação dada.**

Aplicação. Na equação: $20x - 5 = 10 + 15x$ de raiz $x = 3$, pode-se, dividir os seus membros por exemplo, por 5 e teremos: $\quad 4x - 1 = 2 + 3x$

que é uma equação equivalente à primeira (a raiz ainda é $x = 3$) e de resolução muito mais rápida.

Conseqüências:

1.ª) *Pode-se sempre trocar os sinais de todos os têrmos de uma equação,* pois essa troca equivale a multiplicar ambos os têrmos por -1. Exemplo:

Na equação $\quad -3x + 2x = -8 + 5$

podem-se trocar os sinais de seus têrmos. Obtém-se a equação equivalente $\quad 3x - 2x = 8 - 5$

2.ª) *Podem-se eliminar todos os denominadores, caso existam, de uma equação, multiplicando-se os dois membros pelo produto dos denominadores de seus têrmos* (ou de preferência pelo m.m.c. dos denominadores). Exemplo:

Na equação $\quad \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{2} + 5$

para eliminar os seus denominadores basta multiplicar todos os seus têrmos por 12, que é o m.m.c. dos denominadores, e teremos:

$$9x - 4 = 6x + 60$$

Na prática, divide-se o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplica-se o quociente obtido pelo respectivo numerador.

8. Ordem na resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Pode-se obedecer à seguinte *ordem*, na resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita:

1.º) Eliminam-se os denominadores, caso existam;

2.º) Efetuam-se as operações indicadas, eliminando-se os eventuais parênteses

3.º) Passam-se para o primeiro membro todos os têrmos que contêm a incógnita e para o outro os que não a contêm;

4.º) Reduzem-se os têrmos semelhantes;

5.º) Dividem-se os dois membros pelo coeficiente da incógnita. Exemplos:

Resolver as equações:

1.ª) $4x - 5 = 2x + 3$

Não tendo que eliminar denominadores e não havendo operações a efetuar, passamos o $2x$ para o primeiro membro e o -5 para o segundo. Obtemos:

$$4x - 2x = 5 + 3$$

e reduzindo os têrmos semelhantes:

$$2x = 8$$

Dividindo os dois membros por 2 (coeficiente da incógnita), temos:

$$x = \frac{8}{2}$$

ou

$$x = 4$$

que é raiz, e, portanto, a *solução* da equação proposta.

Verificação. A prova de que $x = 4$ é a raiz da equação é feita substituindo êsse valor na equação dada. Se estiver certa, deve-se encontrar uma igualdade. De fato, substituindo-se na equação x por 4, tem-se:

$$4(4) - 5 = 2(4) + 3$$
$$16 - 5 = 8 + 3$$
$$11 = 11$$

2.ª) $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} = x + \dfrac{2}{3}$

O m.m.c. dos denominadores é 12. Eliminando-os, temos: $9x + 6 = 12x + 8$

Passando para o primeiro membro os têrmos que contêm x, para o segundo os que não contêm:

$$9x - 12x = 8 - 6$$

Reduzindo os têrmos semelhantes:

$$-3x = 2$$

Dividindo os dois membros por -3:

$$x = -\frac{2}{3}$$

Verificação:

rosoco
Repepo.

$$\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$
$$0 = 0$$

rosoco
repepo.
roseo

3.ª) $\dfrac{x - 3}{4} + \dfrac{2x}{5} = 1 - \dfrac{2x+1}{8}$

M.m.c. dos denominadores: 40.
Eliminando os denominadores:

$$10(x - 3) + 8 \,.\, 2x = 40 - 5(2x + 1)$$

rosoco
repo
repepo.

Efetuando as operações indicadas:

$$10x - 30 + 16x = 40 - 10x - 5$$

Reunindo os têrmos semelhantes:

$$10x + 16x + 10x = 40 - 5 + 30$$
$$36x = 65$$
$$x = \frac{65}{36} \text{ (raiz)}$$

4.ª) $\frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3} = \frac{1}{6}(8-x) + x - 1\frac{2}{3}$

Escrevendo a equação proposta sob a forma:

$$\frac{x+6}{2} - \frac{x}{3} = \frac{8-x}{6} + x - \frac{5}{3}$$

m.m.c. = 6

$$3(x+6) - 2x = 8 - x + 6x - 10$$
$$3x + 18 - 2x = 8 - x + 6x - 10$$
$$3x - 2x + x - 6x = 8 - 10 - 18$$
$$-4x = -20$$

ou

$$4x = 20 \text{ (multiplicando os dois membros por } -1)$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5 \text{ (raiz).}$$

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

1.ª) $3x = 12$

2.ª) $5x = -30$

3.ª) $2x - 20 = 0$

4.ª) $3x - 1 = 12$

5.ª) $8 + 5x = 2 - 9x$

6.ª) $5 - 3y = 10 + 2y$

7.ª) $2n - \frac{1}{5} = 4(3 - n)$

8.ª) $\frac{x}{12} = 9$

9.ª) $\frac{x}{3} = 7 - 2x$

10.ª) $5 - 2(3y - 1) + 3(y + 2) = 10$

11.ª) $\frac{2x}{3} + 5 = x - \frac{x}{4} + 1$

12.ª) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{9} = 1 - x$

13.ª) $2x - \frac{x - 1}{4} = 3 - \frac{1 - 4x}{5}$

14.ª) $5 + \frac{5x - 36}{4} - \frac{x - 2}{2} = 6 - \frac{12 - x}{2}$

15.ª) $\frac{19}{6}(x - 4) + \frac{5x}{2} = \frac{5x - 3}{7} - \frac{9 - x}{3}$

16.ª) $\frac{x - 1}{10} - \frac{x + 1}{5} = \frac{1 - 2x}{15}$

17.ª) $\frac{1}{6}(8 - x) + 3x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x + 6)$

18.ª) $\frac{20 + x}{8} - x = 3 - \left(\frac{1}{2} + 2x\right)$

19.ª) $\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x - 5}{2} + 2\left(\frac{3x}{4} - 1\right)\right] + 3(2x - 1) = 0$

20.ª) $\frac{0{,}3x - 1}{4} - 5 \cdot \left(\frac{x - 1}{3} + 1{,}3\right) = 0$

(Outros exercícios, pág. 223).

RESPOSTAS:

1.ª) $x = 4$

2.ª) $x = -6$

3.ª) $x = 10$

4.ª) $x = \frac{13}{3}$

5.ª) $x = \frac{-3}{7}$

6.ª) $y = -1$

7.ª) $n = \frac{61}{30}$

8.ª) $x = 108$

9.ª) $x = 3$

10.ª) $y = 1$

11.ª) $x = 48$

12.ª) $x = 0{,}9$

13.ª) $x = \frac{51}{19}$

14.ª) $x = 12$

15.ª) $x = 2$

16.ª) $x = 11$

17.ª) $x = \frac{10}{7}$

18.ª) $x = 0$

19.ª) $x = \frac{27}{40}$

20.ª) $x = \frac{-610}{191}$

9. Equações fracionárias. As equações fracionárias são aquelas cujas incógnitas figuram em denominador ou com expoentes negativos. Como é possível reduzir essas equações à forma inteira, pode-se determinar as suas soluções *desde que as raízes encontradas não anulem nenhum dos denominadores da equação proposta.* Exemplos:

Resolver as seguintes equações fracionárias:

1.ª) $\frac{x - 3}{x + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x - 1}$

M.m.c. dos denominadores:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Seguindo a ordem já conhecida:

$$(x - 1)(x - 3) - 2x = x(x + 1)$$
$$x^2 - 4x + 3 - 2x = x^2 + x$$
$$x^2 - x^2 - 4x - 2x - x = -3$$
$$-7x = -3$$
$$x = \frac{3}{7}$$

Como a raiz encontrada $\left(x = \frac{3}{7}\right)$ não anula nenhum dos denominadores da equação dada, segue que êsse valor é a *solução*.

2.ª) $\frac{3x-3}{x+1} = 5$

$$3x - 3 = 5(x+1)$$
$$3x - 3 = 5x + 5$$
$$3x - 5x = 5 + 3$$
$$-2x = 8$$
$$x = -4$$ (É solução, pois essa raiz não anula o denominador $x + 1$).

EXERCÍCIOS

Resolver as seguintes equações fracionárias:

1.ª) $\frac{5}{2x} - \frac{3}{x} = \frac{1}{8}$

2.ª) $\frac{3}{9-x} = \frac{2}{x+1}$

3.ª) $\frac{2x-3}{x+5} = 1$

4.ª) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$

5.ª) $\frac{3}{4x} - \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2x}$

6.ª) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{5x+1}{5x-2}$

(Outros exercícios, pág. 225).

RESPOSTAS:

1.ª) $x = -4$ 2.ª) $x = 3$ 3.ª) $x = 8$ 4.ª) $x = -6$ 5.ª) $x = -\frac{1}{7}$ 6.ª) $x = -2$

10. Equações literais. As equações literais são resolvidas empregando-se a mesma ordem usada na resolução das equações numéricas. Exemplo:

Resolver a equação

$$5x - a = 2x + b$$

Temos:
$$5x - 2x = a + b$$
$$3x = a + b$$
$$x = \frac{a+b}{3}$$

Outros exemplos serão vistos, após o estudo da *discussão* de uma equação do primeiro grau com uma incógnita que faremos a seguir.

11. Discussão de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. *Discutir uma equação* é verificar se ela tem ou não solução, isto é, se é possível ou não a sua resolução.

Como as equações do primeiro grau com uma incógnita podem, seguindo a *ordem de resolução*, ser reduzidas a forma:

$$ax = b$$

onde a (coeficiente da incógnita) e b (têrmo conhecido) são dois números, tôda discussão será feita com as equações sob essa forma, denominada *forma geral*.

Na resolução das equações sob a *forma geral* é preciso, na última fase, dividir os dois membros por a. Daí a necessidade de serem feitas as seguintes hipóteses (*) sôbre os valores que a e b podem receber:

PRIMEIRA HIPÓTESE: $a \neq 0$. Nesse caso, podem-se dividir ambos os membros da equação $ax = b$, por a e teremos:

$$x = \frac{b}{a}$$

A equação diz-se *possível* e *determinada*, isto é, admite uma única solução.

SEGUNDA HIPÓTESE: $a = 0$ e $b \neq 0$. Nesse caso a equação se reduz a: $0 \, . \, x = b$

e como qualquer número multiplicado por zero resulta zero e o valor de b é diferente de zero, por hipótese, segue que a equação proposta *não tem solução*, isto é, é *impossível*.

(*) Hipótese: Suposição.

Terceira hipótese: $a = 0$ e $b = 0$. Nesse caso a equação fica

$$0 . x = 0$$

e como qualquer número multiplicado por zero resulta zero, segue que a igualdade acima é uma *identidade*, isto é, *qualquer número* atribuído a x pode verificá-la. Diz-se também que a equação é *indeterminada* e que admite uma *infinidade de soluções*.

Resumo da discussão:

Equação: $ax = b$

- 1.ª) $a \neq 0$ Equação *possível* e *determinada* admitindo *uma só solução*.
- 2.ª) $a = 0$
  - $b \neq 0$ Equação *impossível*. *Não admite solução*.
  - $b = 0$ Equação que se transforma numa *identidade*.

Exemplos:

Resolver e discutir as seguintes equações:

1.ª) $3x - 5(x + 2) = 12$

Seguindo a ordem de resolução conhecida, temos:

$$3x - 5x - 10 = 12$$
$$-2x = 12 + 10$$
$$-2x = 22$$ (Equação da forma $ax = b$ onde $a = -2$ e $b = 22$ são diferentes de zero).

$$x = \frac{-22}{2} = -11$$

Logo: a equação proposta é *possível* e *determinada* admitindo uma *única solução* ($x = -11$).

2.ª) $4x - 3(2x + 5) = 5 - 2(x - 2)$

Temos:

$$4x - 6x - 15 = 5 - 2x + 4$$
$$4x - 6x + 2x = 5 + 4 + 15$$
$$0 . x = 24$$ (Equação da forma $0 . x = b$ onde $a = 0$ e $b = 24$, diferente de zero).

Logo: a equação dada é *impossível*; não admite solução.

3.ª) $-\dfrac{3x}{20} + \dfrac{25 + 2x}{5} = \dfrac{x + 20}{4}$

Resolvendo: (m.m.c. = 20)

$$-3x + 100 + 8x = 5x + 100$$
$$5x - 5x = 100 - 100$$
$$0 . x = 0$$ (Equação da forma $0 . x = 0$ onde $a = 0$ e $b = 0$).

Logo: a equação dada se transforma numa *identidade;* qualquer valor atribuído a x a verifica, ou seja, é uma equação *indeterminada*, admitindo uma *infinidade de soluções*.

4.ª) $3ax - b = 5$

Temos: $3ax = 5 + b$

Discussão:

1) se $a \neq 0$, $x = \dfrac{5 + b}{3a}$ e a equação é *possível* e *determinada*

2) se $a = 0$
- $b \neq -5$, a equação $0 . x = 5 + b$ é *impossível*.
- $b = -5$, a equação se transforma numa *identidade* (*indeterminada*)

5.ª) $\dfrac{x - b}{b} - \dfrac{x - a}{a} = \dfrac{b}{a}$ (sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$)

M.m.c. $= a . b$

$$a(x - b) - b(x - a) = b^2$$
$$ax - ab - bx + ab = b^2$$
$$ax - bx = b^2$$
$$x(a - b) = b^2$$

ou $$(a - b)x = b^2$$

Discussão:

1) se $a \neq b$, $x = \dfrac{b^2}{a - b}$ e a equação é *possível e determinada*.

2) se $a = b$, a equação $0.x = b^2$ é *impossível*.

EXERCÍCIOS

Resolver e discutir as seguintes equações:

1.ª) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+3}{4} = 1$

2.ª) $\frac{20+x}{8} - x = 3 - \left(\frac{1}{2} + 2x\right)$

3.ª) $\frac{x}{2} - \frac{5x-11}{10} = \frac{6}{11}$

4.ª) $3(x-8) = 3x - 24$

5.ª) $x + 50 - \frac{3x-20}{3} = \frac{170}{3}$

6.ª) $ax + x = b$

7.ª) $x - \frac{x}{a} = a \quad (a \neq 0)$

8.ª) $\frac{a-x}{a} - \frac{x}{b} = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

9.ª) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{a \cdot b} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

10.ª) $\frac{a+b}{m+x} = \frac{a-b}{m-x}$

(Outros exercícios, pág. 226).

RESPOSTAS:

1.ª) Possível, determinada; sol: $x = \frac{9}{5}$. 2.ª) Possível, determinada; sol.: $x = 0$. 3.ª) Impossível. 4.ª) Identidade. 5.ª) Identidade. 6.ª) Para $a \neq -1$, possível e determinada, para $a = -1$ e $b \neq 0$, impossível, para $a = -1$ e $b = 0$, identidade. 7.ª) Para $a \neq 1$, possível determinada, para $a = 1$ impossível. 8.ª) Para $a \neq -b$ possível determinada, para $a = -b$ é impossível. 9.ª) Para $a \neq -b$, possível e determinada, para $a = -b$, impossível. 10.ª) Para $a \neq 0$, possível e determinada, para $a = 0$, $b \neq 0$, $m \neq 0$, impossível, para $a = 0$, $b = 0$, identidade.

§2. Binômio linear

12. Binômio linear. *Decomposição em fatôres. Raiz.* Chama-se *binômio do primeiro grau* ou *binômio linear* a expressão algébrica da forma:

$$ax + b$$

onde a e b são *números dados* (sendo $a \neq 0$), e x uma *variável* (*).

Exemplo: $2x + 5$.

(*) Variável: Com essa denominação queremos dizer que x pode mudar de valores no binômio.

Colocando o coeficiente a de x em evidência, o binômio linear fica *decomposto* nos seguintes fatôres:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

Exemplo: $$2x + 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

É sob essa forma que se estuda a *variação do sinal* do binômio linear quando x varia. Observa-se, primeiramente, que para $x = -\frac{b}{a}$ o valor numérico do binômio $ax + b$ é nulo. De fato, substituindo-se x por $-\frac{b}{a}$, temos:

$$a\left(-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

O valor $x = -\frac{b}{a}$, é denominado *raiz do binômio linear*, e é obtido resolvendo-se a equação que resulta igualando-se a zero o binômio $ax + b$, isto é,

$$ax + b = 0$$

Resolvendo a equação temos:

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

13. Variação do sinal. A variação do sinal do binômio linear é estudado a partir da sua forma:

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

levando-se em conta o *sinal do coeficiente* a, quando x varia $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ para valores *menores* ou *maiores* que a sua raiz.

Lembrando a representação geométrica e o confronto dos números relativos (*) (1.ª série), temos;

$$x < -\frac{b}{a} \qquad x > -\frac{b}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Para o coeficiente a podem-se fazer duas hipóteses:

1.ª) ***a* é positivo.** Nesse caso temos:

1.º) Para todo valor de x *menor* que $-\frac{b}{a}$ o sinal de $ax + b$ é *negativo* (contrário ao sinal de a) pois

$$ax + b = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)}$$

$$- \quad = + \;.\; -$$

2.º) Para todo valor de x *maior* que $-\frac{b}{a}$ o sinal de $ax + b$ é *positivo* (mesmo sinal de a), pois

$$ax + b = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)}$$

$$+ \quad = + \;.\; +$$

2.ª) ***a* é negativo.** Nesse caso temos:

1.º) Para todo valor de x *menor* que $-\frac{b}{a}$ o sinal de $a + b$ é *positivo* (contrário ao sinal de a), pois

$$ax + b = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)}$$

$$+ \quad = - \;.\; -$$

(*) O estudo das *desigualdades* é feito no parágrafo seguinte.

2.º) Para todo valor de x *maior* que $-\frac{b}{a}$ o sinal de $ax + b$ é *negativo* (mesmo sinal de a), pois

$$ax + b = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)}$$

$$- \quad = - \;.\; +$$

Resumindo, temos:

1.º) *Para os valores de* x **menores** *que o da raiz* $\left(x < -\frac{b}{a}\right)$ *o sinal do binômio linear* ax+b *é* **contrário** *ao sinal do coeficiente* **a.**

2.º) *Para os valores de* x **maiores** *que o da raiz* $\left(x > -\frac{b}{a}\right)$ *o sinal do binômio linear* ax+b *é* **igual** *ao sinal do coeficiente* **a.**

Exemplos. Estudar o sinal dos seguintes binômios lineares:

1.º) $3x + 6$

A raiz dêsse binômio é obtida resolvendo-se a equação:

$$3x + 6 = 0$$
$$3x = -6$$
$$x = -2$$

Representando geomètricamente:

$$x < -2 \qquad x > -2$$

$$x = -2$$

Pelo *resumo* feito, temos:

1. Para todos os valores de $x < -2$ o sinal do binômio $3x + 6$ é ***negativo*** (contrário ao sinal de $+3$);
2. Para todos os valores de $x > -2$ o sinal do binômio $3x + 6$ é ***positivo*** (mesmo sinal de $+3$).

VERIFICAÇÃO: $-3 \quad -2 \quad -1$

Para $x = -3$ (menor que -2), o binômio assume o valor:

$$3(-3) + 6 = -9 + 6 = -3 \ (\textit{negativo})$$

Para $x = -1$ (maior que -2), o binômio assume o valor:

$$3(-1) + 6 = -3 + 6 = +3 \ (\textit{positivo})$$

2.º) $-2x + 5$

Determinação da raiz:

$$-2x + 5 = 0$$
$$-2x = -5$$
$$x = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

O sinal dêsse binômio variará da seguinte maneira:

1. Para $x < 2{,}5$ o sinal do binômio: $-2x + 5$ é *positivo* (contrário ao sinal de -2);

2. Para $x > 2{,}5$ o sinal do binômio: $-2x + 5$ é *negativo* (mesmo sinal de -2).

VERIFICAÇÃO: $2 \quad 2{,}5 \quad 3$

Para $x = 2$ (menor que 2,5), temos para o binômio:

$$-2(2) + 5 = -4 + 5 = 1$$

um valor *positivo*;

Para $x = 3$ (maior que 2,5), temos para o binômio:

$$-2(3) + 5 = -6 + 5 = -1$$

um valor *negativo*.

EXERCÍCIOS

Estudar a variação do sinal dos seguintes binômios lineares:

1.º) $4x - 8$ 3.º) $x - 5$ 5.º) $mx + n$

2.º) $-3x + 6$ 4.º) $2x + 1$

RESPOSTAS:

1.º) Para $x < 2$, binômio negativo e para $x > 2$, binômio positivo.

2.º) Para $x < 2$, binômio positivo e para $x > 2$, binômio negativo.

3.º) Para $x < 5$, binômio negativo e para $x > 5$, binômio positivo.

4.º) Para $x < -\frac{1}{2}$, binômio negativo e para $x > -\frac{1}{2}$, binômio positivo.

5.º) Para $x < -\frac{n}{m}$ o binômio tem o sinal contrário ao sinal de m e para $x > -\frac{n}{m}$ o binômio tem o mesmo sinal de m.

§3. Desigualdade. Inequação

14. Desigualdade. ***Comparação de números relativos.*** Dois números relativos são *desiguais* ou *diferentes* quando a diferença entre êles não é zero. Assim, se a e b são dois números relativos diferentes, podemos dizer que

$$a - b \neq 0$$

Se a diferença $a - b$ é positiva, diz-se que a é *maior* que b e indicamos:

$$a > b$$

Se a diferença $a - b$ é negativa, diz-se que a é *menor* que e indicamos:

$$a < b$$

Exemplos:

$8 > 5$, pois $8 - 5 = \ \ 3 > 0$ (diferença positiva)

$3 < 7$, pois $3 - 7 = -4 < 0$ (diferença negativa)

CONSEQÜÊNCIAS:

1.ª) Qualquer número positivo é maior que zero.
Indicação de que um número a é positivo: $a > 0$;

2.ª) Qualquer número negativo é menor que zero.
Indicação de que um número a é negativo: $a < 0$;

3.ª) Qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo;

4.ª) De dois números positivos, o maior é o que tem maior valor absoluto;

5.ª) De dois números negativos, o maior é o que tem menor valor absoluto. Exemplos:

$$+5 > 0$$
$$-8 < 0$$
$$+7 > -9$$
$$+8 > +2$$
$$-5 > -8$$

Chama-se *desigualdade algébrica* a indicação que exprime a condição para que uma expressão algébrica seja *maior* ou *menor* que outra quando se atribuem valores às letras nelas contidas. Exemplo:

$$5x - 1 > 2x + 8$$

Desigualdades de *mesmo sentido* são aquelas nas quais o primeiro membro é maior do que o segundo ou o primeiro membro é menor do que o segundo. Caso contrário as desigualdades são de *sentidos contrários*. Exemplos:

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 > 5x + 2 \\ 3a - b > 2 \end{cases}$$

são desigualdades de mesmo sentido;

$$\begin{cases} 5a - 3a^2 > -5 \\ 2x + 4 < 1 - 3x \end{cases}$$

são desigualdades de sentidos contrários.

15. Propriedades das desigualdades.

Somando-se ou subtraindo-se aos dois membros de uma desigualdade uma mesma quantidade, a desigualdade não muda de sentido.

Assim, se

$$a > b$$

somando-se a ambos os membros a mesma quantidade m deve-se ainda ter

$$a + m > b + m$$

Consequência: Pode-se passar um têrmo (ou vários) de um membro para outro de uma desigualdade, desde que se lhe troque o sinal. Seja, por exemplo:

A desigualdade: $5x - 3 > 3x + 7$

pode-se, como nas equações, passar o $+2x$ para o primeiro membro e o -3 para o segundo:

$$5x - 2x > 7 + 3$$

Multiplicando-se ou dividindo-se os dois membros de uma desigualdade por uma mesma quantidade, a desigualdade não muda de sentido, se a quantidade fôr positiva e muda de sentido, se a quantidade fôr negativa.

Assim, por exemplo, se

$$a > b$$

e $m>0$, deve-se ter: $m \,.\, a>m \,.\, b$ e se $m<0$, $m \,.\, a<m \,.\, b$

Consequência: Podem-se trocar os sinais de todos os têrmos de uma desigualdade, desde que se lhe troque o sentido. Exemplo:

A desigualdade $-2x + 5 < 8x - 3$

pode ser escrita $2x - 5 > -8x + 3$

pois essa passagem equivale a multiplicar ambos os membros por -1.

16. Operações

I. ***Adição.*** Somando-se, membro a membro, desigualdades de *mesmo sentido*, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido que as desigualdades consideradas. Exemplos:

$$+\begin{cases} 5 > 3 \\ 12 > -1 \\ -3 > -8 \end{cases} \qquad\qquad +\begin{cases} a < b \\ c < d \\ m < n \end{cases}$$
$$14 > -6 \qquad\qquad a + c + m < b + d + n$$

Logo: só se podem *somar* desigualdades de *mesmo sentido*.

II. *Subtração.* Subtraindo-se, membro a membro, desigualdades de *sentidos contrários*, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido da desigualdade considerada como minuendo. Exemplos:

$$- \begin{cases} 8 > 5 \\ 3 < 7 \end{cases} \qquad\qquad - \begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases}$$
$$5 > -2 \qquad\qquad a - c < b - d$$

Logo: só se podem *subtrair* desigualdades de *sentidos contrários.*

III. *Multiplicação.* Multiplicando-se, membro a membro, desigualdades de *mesmo sentido* e de *membros positivos*, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido que as desigualdades consideradas. Exemplos:

$$\times \begin{cases} 5 > 2 \\ 8 > 3 \end{cases} \qquad\qquad \times \begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$$
$$40 > 6 \qquad\qquad a \,.\, c < b \,.\, d$$

Logo: só se podem *multiplicar* desigualdades de *mesmo sentido.* (*)

IV. *Divisão.* Dividindo-se, membro a membro, desigualdades de *sentidos contrários* e *membros positivos*, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido da desigualdade considerada como dividendo. Exemplos:

$$\div \begin{cases} 12 > 8 \\ 2 < 4 \end{cases} \qquad\qquad \div \begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases}$$
$$6 > 2 \qquad\qquad \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$$

Logo: só se podem *dividir* desigualdades de *sentidos contrários.* (**)

(*) Multiplicando-se duas desigualdades de mesmo sentido mas de membros negativos obtém-se uma desigualdade de sentido contrário ao sentido das consideradas. Exemplo:

$$\begin{array}{rcr} & -3 < & -2 \\ \times & -5 < & -4 \\ \hline & +15 > & +8 \end{array}$$

(**) Dividindo-se duas desigualdades de sentidos contrários mas de membros negativos, obtém-se uma desigualdade do mesmo sentido da desigualdade que serviu como divisora. Exemplo:

$$\begin{array}{rcr} & -15 < & -8 \\ : & -3 > & -4 \\ \hline & +5 > & +2 \end{array}$$

17. Inequação. Classificação. *Inequação* é a desigualdade algébrica que se verifica sòmente para determinados valores das suas incógnitas. Êsses valores recebem o nome de *raízes* ou *soluções* da inequação.

As inequações que admitem as mesmas raízes são chamadas *inequações equivalentes*. A *classificação* das inequações é feita como nas equações. Assim, temos as inequações *racionais* e *irracionais*, e aquelas classificam-se, ainda, em *inteiras* e *fracionárias*. As inequações também se apresentam sob as formas: *numérica* e *literal*. Exemplos:

1.º) $5x - 13 < x + 9$

Inequação numérica do 1.º grau com uma incógnita (x).

2.º) $ax^2 + bx + c > 0$

Inequação literal do 2.º grau com uma incógnita (x).

18. Resolução de uma inequação do primeiro grau com uma incógnita. Resolver uma inequação é verificar se ela é possivel ou não, e no caso de ser possível determinar-lhe as raízes. Para isso transforma-se a inequação em outras equivalentes, por intermédio das propriedades das desigualdades.

As diversas fases da resolução das inequações do 1.º grau, com uma incógnita, apresentam grande semelhança com as equações dêsse tipo. Exemplos:

Resolver as seguintes inequações:

1.ª) $8x - 3 > 5x + 9$

Transpondo os têrmos:

$$8x - 5x > 9 + 3$$

Reduzindo os têrmos semelhantes:

$$3x > 12$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da incógnita (3):

$$\boxed{x > 4}$$

Rgina Rohlmann.

A solução $x > 4$ significa que qualquer número *maior* que 4 é raiz da inequação considerada.

VERIFICAÇÃO: Basta substituir na inequação proposta x por qualquer valor maior que 4. Seja, por exemplo:

$$x = 5$$

teremos:

$$8 \times 5 - 3 > 5 \times 5 + 9$$
$$40 - 3 > 25 + 9$$
$$37 > 34$$

que é uma desigualdade verdadeira.

2.ª) $2x - 5(3x + 1) > 19 - x$

Temos:

$$2x - 15x - 5 > 19 - x$$
$$2x - 15x + x > 19 + 5$$
$$-12x > 24 \quad \text{(multiplicando ambos os membros por } -1)$$
$$12x < -24$$
$$x < -2$$

Logo: qualquer valor de x menor que -2 é *raiz* da inequação.

3.ª) $3x - \dfrac{3(x-2)}{4} < 8 + \dfrac{1-2x}{2}$

O m.m.c. dos denominadores é 4. Logo:

$$12x - 3(x-2) < 32 + 2(1 - 2x)$$
$$12x - 3x + 6 < 32 + 2 - 4x$$
$$12x - 3x + 4x < 32 + 2 - 6$$
$$13x < 28$$
$$x < \frac{28}{13} \quad \text{ou} \quad x < 2\,\frac{2}{13} \text{ (solução)}$$

4.ª) $ax + b > 0$

É uma inequação literal do primeiro grau. Temos para sua resolução:

$$ax > -b$$

e supondo $a > 0$, temos: $x > \dfrac{-b}{a}$

isto é, qualquer valor de x maior que $-\dfrac{b}{a}$ é raiz da inequação dada.

EXERCÍCIOS

1. Efetuar as seguintes operações:

1.ª) Somar: $+\begin{cases} 8 > 3 \\ -3 > -5 \\ 10 > -0{,}3 \end{cases}$

2.ª) Somar: $+\begin{cases} a < b \\ 2m < 3n \\ x < y \end{cases}$

3.ª) Subtrair: $-\begin{cases} 12 > 5 \\ 8 < 13 \end{cases}$

4.ª) Subtrair: $-\begin{cases} u < v \\ x > y \end{cases}$

5.ª) Multiplicar: $\times\begin{cases} 3 > 2 \\ 9 > 1 \end{cases}$

6.ª) Multiplicar: $\times\begin{cases} a < b \\ m < n \end{cases}$ (Fazer as hipóteses de os membros serem todos positivos ou todos negativos)

7.ª) Dividir: $\div\begin{cases} 8 > 2 \\ 6 < 8 \end{cases}$

8.ª) Dividir: $\div\begin{cases} a < b \\ m > n \end{cases}$ (Fazer as hipóteses anteriores)

2. Resolver as seguintes inequações:

1.ª) $3x - 5 < x + 7$

2.ª) $6x - 8 > 7x + 2$

3.ª) $6(x - 2) - 3x > 0$

4.ª) $-2(x + 1) + 5x < 4 - 3(2x + 1)$

5.ª) $\dfrac{3x}{2} - 5 > \dfrac{x-1}{3}$

6.ª) $\dfrac{4x-3}{8} < 1 - \dfrac{x+3}{2}$

7.ª) $\dfrac{2x-1}{5} - 3(4 - x) < -12 + \dfrac{1+5x}{3}$

8.ª) $3x + a > x + b$
9.ª) $ax - b < 0$
10.ª) $2mx - 5 < x + 1$

(Outros exercícios, pág. 227).

RESPOSTAS:

1. 1.ª) $15 > -2{,}3$; 2.ª) $(a + 2m + x) < (b + 3n + y)$; 3.ª) $4 > -8$; 4.ª) $(u - x) < (v - y)$; 5.ª) $27 > 2$; 6.ª) Todos os membros positivos: $am < bn$, todos os membros negativos: $am > bn$; 7.ª) $\frac{4}{3} > \frac{1}{4}$; 8.ª) Todos os membros positivos: $\frac{a}{m} < \frac{b}{n}$, todos os membros negativos: $\frac{a}{m} > \frac{b}{n}$.

2. 1.ª) $x < 6$ — 5.ª) $x > 4$ — 9.ª) $x < \frac{b}{a}$ $(a > 0)$
2.ª) $x < -10$ — 6.ª) $x < -\frac{1}{8}$
3.ª) $x > 4$ — 7.ª) $x < \frac{4}{13}$ — 10.ª) $x < \frac{6}{2m-1}$ $\left(m > \frac{1}{2}\right)$
4.ª) $x < \frac{1}{3}$ — 8.ª) $x > \frac{b-a}{2}$

§4. Sistemas lineares com duas incógnitas

19. Equações do primeiro grau com duas incógnitas. As equações do primeiro grau com duas incógnitas são aquelas que apresentam: um têrmo do primeiro grau numa das incógnitas, um têrmo do primeiro grau na outra incógnita e um têrmo conhecido. Assim, por exemplo, a equação:

$$2x + 3y = 12$$

é do primeiro grau nas incógnitas x e y.

A *forma geral* de uma equação do primeiro grau nas incógnitas x e y, é:

$$ax + by = c$$

onde a e b são os coeficientes das incógnitas e c, o têrmo conhecido.

É fácil verificar que estas equações admitem infinitas soluções, pois é sempre possível, atribuindo-se qualquer valor a x, determinar o correspondente valor de y, que juntos satisfazem a equação.

De fato, se na equação

$$2x + 3y = 12$$

se atribui a x, por exemplo, o valor 3, temos para y o seguinte valor:

$$2 \times 3 + 3y = 12$$
$$3y = 12 - 6$$
$$3y = 6$$
$$y = 2$$

e teremos os valores:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

que satisfazem à equação dada, e, portanto, constituem uma de suas soluções.

20. Sistemas de equações simultâneas. Consideremos, agora, *duas* equações do primeiro grau com *duas* incógnitas, como por exemplo, as equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

Essas equações que se verificam *simultâneamente* para $x = 2$ e $y = 3$, constituem um *sistema de equações simultâneas* de solução $x = 2$ e $y = 3$.

Logo: *duas ou mais equações* ***são simultâneas*** *ou formam um* ***sistema*** *quando se verificam para um mesmo conjunto de valores de suas incógnitas.*

Se as equações que compõem o sistema são do primeiro grau, diz-se que o sistema é *linear*. Chama-se *solução* de um sistema o conjunto de valores das incógnitas que satisfazem às equações do sistema.

Sistemas equivalentes são os sistemas de equações que admitem a mesma solução. A *forma geral* de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas é:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

onde a, b, a', b' são, respectivamente, os coeficientes das incógnitas x e y, e, c e c' os têrmos conhecidos.

21. Resolução de um sistema linear com duas incógnitas. *Resolver* um sistema de equações é verificar se o sistema é possível ou não, e, no caso de sua possibilidade, determinar-lhe a solução.

Existem diversos *métodos* de resolução de sistemas lineares de equações. Estudaremos os seguintes:

1.°) *Método da substituição;*
2.°) *Método da adição;*
3.°) *Método da comparação.*

1.°) ***Método de substituição.*** Reduzidas as duas equações à forma geral, resolve-se *uma das equações*, em relação a *uma das incógnitas*, considerando-se a outra como quantidade conhecida. O valor obtido dessa maneira *substitui-se* no lugar dessa incógnita na *outra equação* obtendo-se, assim, uma equação do primeiro grau contendo sòmente uma incógnita. Resolvida essa equação substitui-se a raiz encontrada no valor já expresso para a primeira incógnita resultando daí o valor numérico desta. Exemplo:

Resolver, pelo método da substituição, o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Resolve-se a primeira equação (ou a segunda) em relação a x. Costuma-se também usar a expressão: *tirar o valor de x na primeira equação.*

Assim,

$$2x + 3y = 7$$
$$2x = 7 - 3y$$
$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$

A seguir, substitui-se o x da segunda equação por êsse valor, isto é

$$3\left(\frac{7 - 3y}{2}\right) - 5y = 1$$

e resolvendo-a:

$$\frac{21 - 9y}{2} - 5y = 1$$
$$21 - 9y - 10y = 2$$
$$-9y - 10y = 2 - 21$$
$$-19y = -19$$
$$y = 1$$

O valor de x é obtido substituindo-se y por 1, na expressão:

$$x = \frac{7 - 3y}{2}$$
$$x = \frac{7 - 3 \times 1}{2}$$

isto é,

$$x = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

A solução do sistema é, pois: $x = 2$ e $y = 1$

VERIFICAÇÃO:

$$\begin{cases} 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7 \\ 3 \times 2 - 5 \times 1 = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

2.°) ***Método de adição.*** Neste método, multiplicam-se ambas as equações por dois números tais que os coeficientes da incógnita que se quer eliminar se tornam iguais em valor e de sinais contrários: *somam-se* então, membro a membro, as duas equações obtendo-se assim uma equação contendo sòmente uma incógnita que é logo determinada. O valor da incógnita eliminada é obtido substituindo-se o valor já encontrado em uma das equações e resolvendo-a em relação à única incógnita restante.

É evidente que êste método é uma aplicação direta do primeiro. Em geral, para se tornarem iguais os coeficientes de uma das incógnitas, basta multiplicar a primeira equação pelo coeficiente que a incógnita possui na segunda equação e a segunda equação pelo coeficiente que essa mesma incógnita possui na primeira. Se os dois coeficientes não são primos entre si, procura-se o m.m.c. dêles e multiplica-se cada uma das equações pelo quociente que se obtém dividindo êste m.m.c. pelo coeficiente que possui a incógnita na equação considerada. Exemplo:

Resolver, pelo método da adição, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Multiplicando-se a primeira equação por 3 (coeficiente de x na segunda equação) e multiplicando-se a segunda equação por -2 (coeficiente de x, com o sinal trocado, na primeira equação) obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 21 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$$

Somando-se, membro a membro, as equações dêsse sistema elimina-se a incógnita x, pois

$$+\begin{cases} 6x + 9y = 21 \\ -6x + 10y = -2 \end{cases}$$
$$19y = 19$$

$$y = \frac{19}{19} = 1$$

Substituindo-se êste valor de y $(y = 1)$, na primeira equação, temos:

$$2x + 3 \times 1 = 7$$
$$2x = 7 - 3$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2} = 2$$

Logo: a solução do sistema é $x = 2$ e $y = 1$.

3.º) ***Método da comparação.*** Resolvem-se as duas equações em relação a uma mesma incógnita considerando-se a outra como quantidade conhecida. Como as equações encontradas ainda constituem um sistema, admitindo portanto as mesmas raízes, segue que devem ser iguais os dois valores obtidos para a mesma incógnita. *Igualando-se* êsses valores tem-se uma equação contendo sòmente uma incógnita e que, resolvida, permite determinar o seu valor. A outra incógnita é determinada substituindo-se o valor já encontrado numa das equações. Exemplo:

Resolver, pelo método da comparação, o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Tirando-se o valor de x na primeira equação: $x = \dfrac{7 - 3y}{2}$

Tirando-se o valor de x na segunda equação: $x = \dfrac{1 + 5y}{3}$

Igualando-se os dois resultados, temos:

$$\frac{7 - 3y}{2} = \frac{1 + 5y}{3}$$

resolvendo-se a equação resultante:

$$3(7 - 3y) = 2(1 + 5y)$$
$$21 - 9y = 2 + 10y$$
$$-9y - 10y = 2 - 21$$
$$-19y = -19$$
$$y = 1$$

Substituindo êsse valor de y na equação $x = \dfrac{7 - 3y}{2}$, temos:

$$x = \frac{7 - 3 \times 1}{2}$$

$$x = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, a solução: $x = 2$ e $y = 1$.

Observação: A escolha de um dêsses métodos para a resolução de um sistema linear com duas incógnitas depende, na maioria das vêzes, de como êsse sistema se apresenta depois de reduzido à forma geral.

Outros exemplos:

1.º) Resolver o sistema: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 0 \end{cases}$

Inicialmente reduz-se o sistema à forma geral (basta eliminar os denominadores da segunda equação)

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

e aplicando-se o *método da adição* (é suficiente multiplicar a primeira equação por -3 para se eliminar x)

$$\begin{cases} -6x + 3y = -9 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$
$$-y = -9$$
$$y = 9$$

Substituindo êsse valor na equação:

temos: $2x - y = 3$

$2x - 9 = 3$

e, portanto (*): $2x = 12$

$\therefore x = 6$

Solução: $x = 6$ e $y = 9$.

2.º) Resolver o sistema: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{2y+3}{3} - 4 \\ 2x + \dfrac{y}{5} = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$

Reduzindo à forma geral (eliminam-se os denominadores das equações):

$\begin{cases} 3(x-3) = 4(2y+3) - 48 \\ 10x + y = -7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x - 9 = 8y + 12 - 48 \\ 10x + y = -7 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 8y = 9 + 12 - 48 \\ 10x + y = -7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x - 8y = -27 \\ 10x + y = -7 \end{cases}$

(*) O sinal $\therefore$ equivalente à palavra "portanto".

Multiplicando-se a segunda equação por $+8$ (método da adição), elimina-se y.

$$+\begin{cases} 3x - 8y = -27 \\ 80x + 8y = -56 \end{cases}$$
$$83x = -83$$
$$x = -1$$

Substituindo-se êsse valor na equação: $10x + y = -7$

$10 \cdot (-1) + y = -7$

$-10 + y = -7$

$y = 10 - 7$

$\therefore y = 3$

Solução: $x = -1$ e $y = 3$.

22. Discussão de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas. Consideremos o sistema linear de duas equações com duas incógnitas, sob a *forma geral*:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolvendo-se êsse sistema por qualquer um dos métodos, o da adição por exemplo, temos:

$\begin{cases} ax + by = c & (\times -a') \\ a'x + b'x = c' & (\times a) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} ax + by = c & (\times b') \\ a'x + b'y = c' & (\times -b) \end{cases}$

$+\begin{cases} -a'\cancel{ax} - a'by = -a'c \\ \cancel{aa'x} + ab'y = ac' \end{cases}$ $\qquad$ $+\begin{cases} ab'x + \cancel{bb'y} = b'c \\ -a'bx - \cancel{bb'y} = -bc' \end{cases}$

$(ab' - a'b)y = ac' - a'c$ $\qquad$ $(ab' - a'b)x = b'c - bc'$

Supondo: $ab' - a'b \neq 0$, podemos tirar os valores de x e de y

$$\boxed{x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}} \qquad \boxed{y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}$$

que são as *fórmulas de resolução* de um sistema linear de duas equações com duas incógnitas. Estas fórmulas, também denominadas de CRAMER(*), podem ser obtidas por outro processo de resolução — o chamado *Método dos Determinantes*, do qual faremos alusão no *apêndice de Álgebra* (pág. 175).

Podem-se fazer, agora, as seguintes hipóteses:

1.ª) $ab' - a'b \neq 0$

2.ª) $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' \neq 0$ (ou $ac' - a'c \neq 0$)

3.ª) $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' = 0$ (ou $ac' - a'c = 0$)

Na 1.ª, sendo $ab' - a'b \neq 0$, o sistema dado é *possível* e *determinado* com as raízes dadas pelas fórmulas de resolução.

Na 2.ª, sendo $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' \neq 0$, o sistema é *impossível*, isto é, *não admite solução*. Diz-se, nesse caso, que as equações são *incompatíveis*.

Na 3.ª, sendo $ab' - a'b = 0$ e $b'c - bc' = 0$, o sistema é *indeterminado*, isto é, *admite uma infinidade de soluções*.

Exemplos: Discutir os sistemas

1.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

Para êsses exemplo, temos: $\begin{cases} a = 3; & b = -2; & c = 1 \\ a' = 6; & b' = -4; & c' = 3 \end{cases}$

onde $\begin{cases} ab' - a'b = -12 + 12 = 0 \\ b'c - bc' = -4 + 6 = +2 \\ ac' - a'c = 9 - 6 = +3 \end{cases}$

Pela 2.ª hipótese da discussão, o sistema é *impossível*, não admitindo, pois, solução.

2.º) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases}$

Nesse sistema, temos: $\begin{cases} a = 1; & b = -3; & c = 2 \\ a' = 3; & b' = -9; & c' = 6 \end{cases}$

onde: $\begin{cases} ab' - a'b = -9 + 9 = 0 \\ b'c - bc' = -18 + 18 = 0 \\ ac' - a'c = 6 - 6 = 0 \end{cases}$

(*) GABRIEL CRAMER (1704-1752) — Ilustre matemático francês que muito se dedicou ao estudo dos sistemas de equações algébricas.

Pela 3.ª hipótese da discussão o sistema é *indeterminado*, isto é, admite uma *infinidade de soluções*.

3.º) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Para êsse sistema: $\begin{cases} a = 2; & b = -1; & c = 5 \\ a' = 3; & b' = 2; & c' = 4 \end{cases}$

onde: $\begin{cases} ab' - a'b = +4 + 3 = +7 \neq 0 \\ b'c - bc' = +10 + 4 = +14 \\ ac' - a'c = 8 - 15 = -7 \end{cases}$

Pela 1.ª hipótese da discussão, o sistema é *possível* e *determinado* e as suas raízes podem ser dadas pelas fórmulas:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \frac{+14}{+7} = +2$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{+7}{-7} = -1$$

Dai a solução: $x = 2$ e $y = -1$.

4.º) $\begin{cases} m + 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Nesse caso, temos: $\begin{cases} a = m; & b = 2; & c = 5 \\ a' = 3; & b' = 1; & c' = 1 \end{cases}$

onde: $\begin{cases} ab' - a'b = m - 6 \\ b'c - bc' = 5 - 2 = 3 \\ ac' - a'c = m - 15 \end{cases}$

Para a discussão, temos que fazer as hipóteses:

1.ª) Se $m - 6 \neq 0$ ou seja $m \neq 6$, o sistema é *possível* e *determinado* e a solução é dada por

$$x = \frac{3}{m - 6}$$

$$y = \frac{m-15}{m - 6}$$

2.ª) Se $m - 6 = 0$ ou $m = 6$, o sistema é *impossível*, isto é, não admite solução.

3.ª) O sistema nunca é *indeterminado*, pois não existe um valor de m que anule, ao mesmo tempo, o numerador $m - 15$ e o denominador $m - 6$.

EXERCÍCIOS

1. Resolver os seguintes sistemas, pelo método da substituição:

1.º) $\begin{cases} 2y = 6 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$ 2.º) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} 6x + y = 8 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

2. Resolver os seguintes sistemas, pelo método da adição:

1.º) $\begin{cases} 6x + y = 8 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$ 2.º) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} 3(x-1) + 4(y-3) = 4 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$

3. Resolver os seguintes sistemas, pelo método da comparação:

1.º) $\begin{cases} 2x = 6 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$ 2.º) $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x - 5y = -29 \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} x = 3(y-1) \\ x = \dfrac{y+14}{2} \end{cases}$

4. Resolver, por qualquer método, os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 0 \end{cases}$ 2.º) $\begin{cases} 2(2x+3y) = 10 + 3(2x - 3y) \\ 4x - 3y = 3 + 4(6y - 2x) \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - \dfrac{x+2y}{2} = 1 \\ \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

5. Discutir os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 2x + 5y = 28 \end{cases}$ 3.º) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$ 5.º) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 8x - 6y = 13 \end{cases}$ 4.º) $\begin{cases} 3x + ny = 1 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} bx - ay = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \end{cases}$

(Outros exercícios, pág. 228).

RESPOSTAS:

1. 1.º) $x = -2,\ y = 3$; 2.º) $x = 5,\ y = 3$; 3.º) $x = 2,\ y = -4$
2. 1.º) $x = 2,\ y = -4$; 2.º) $x = 5,\ y = 4$; 3.º) $x = 1,\ y = 4$
3. 1.º) $x = 3,\ y = \dfrac{1}{2}$; 2.º) $x = -2,\ y = 5$; 3.º) $x = 9,\ y = 4$
4. 1.º) $x = -3,\ y = 5$; 2.º) $x = \dfrac{5}{2},\ y = 1$; 3.º) $x = \dfrac{70}{17},\ y = -\dfrac{4}{17}$
5. 1.º) Possível, determinado, raízes: $x = 4,\ y = 4$. 2.º) impossível. 3.º) possível, determinado, raízes: $x = y = 20$. 4.º) Para $n \neq 15$, possível, determinado, raízes: $x = \dfrac{10n-5}{n-15},\ y = \dfrac{29}{15-n}$; para $n = 15$, impossível. 5.ª) Para $a \neq -b$, possível, determinado, raízes: $x = \dfrac{ab}{a+b}$, $y = \dfrac{ab}{a+b}$; para $a = -b$, impossível; para $a = b = 0$, sistema indeterminado. 6.º) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, sistema possível, determinado, raízes: $x = a,\ y = b$; se $a = 0$ ou $b = 0$, identidade (sist. indeterminado).

§ 5. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas. Generalização e discussão

23. Problema do primeiro grau. Tôda questão que nos propomos a resolver é um *problema*. Um problema é do *primeiro grau com uma incógnita*, quando a sua resolução nos conduz a uma equação do primeiro grau com uma incógnita, e é do *primeiro grau com duas incógnitas*, quando nos leva à resolução de um sistema linear com duas incógnitas.

24. Fases da resolução de um problema do primeiro grau. Destacam-se três fases, na resolução de um problema do primeiro grau:

1.ª) *Pôr o problema em equação;*

2.ª) *Resolver a equação ou o sistema de equações;*

3.ª) *Discutir as soluções.*

A primeira fase é a de maior responsabilidade, pois, para se pôr um problema em equação, não há regra fixa. Deve-se examinar, com a máxima atenção, quais as quantidades procuradas (incógnitas). Essas quantidades são, geralmente, representadas por letras, de preferência as últimas do alfabeto latino. A seguir, com símbolos algébricos, exprime-se o problema numa linguagem algébrica (equações) relacionando-se as incógnitas com os dados do problema. Exemplos:

1.º) Qual é o número que, aumentado de 5, resulta para soma 9?

Indica-se o número procurado (incógnita) por x. Traduzindo o enunciado do problema numa linguagem algébrica, mediante uma equação, temos:

$$x + 5 = 9$$

e resolvendo-a:

$$x = 9 - 5$$
$$x = 4$$

Resta, agora, verificar se o número encontrado (4) satisfaz o problema. Nota-se, fàcilmente, que o número 4 satisfaz.

2.º) Determinar o número que, somado com a sua têrça parte, é igual a 36.

Resolução: Seja x o número procurado; $\frac{x}{3}$ será a têrça parte dêsse número.

O problema nos leva à seguinte equação:

$$x + \frac{x}{3} = 36$$

Resolvendo-a:

$$3x + x = 108$$
$$4x = 108$$
$$\therefore x = \frac{108}{4} = 27$$

Verificação: número procurado: 27
têrça parte: 9
36 (soma exigida)

3.º) A idade de um pai somada à idade de seu filho resulta 42 anos. Sabendo-se que a idade do pai é 5 vêzes a idade do filho, dizer a idade de cada um.

Resolução: Seja x a idade do pai; a idade do filho será representada por $42 - x$ (pelo fato de a soma das idades ser igual a 42).

Logo: x idade do pai
$42 - x$ idade do filho

Pela segunda condição do problema (a idade do pai é 5 vêzes a do filho), devemos formar a seguinte equação:

$$x = 5(42 - x)$$

resolvendo-a:

$$x = 210 - 5x$$

ou

$$6x = 210$$
$$x = \frac{210}{6} = 35 \text{ (idade do pai)}$$

A idade do filho será: $42 - 35 = 7$

Verificação: idade do pai: 35 anos
idade do filho: 7 anos
42 anos (soma das idades)

25. Resolução de problemas do primeiro grau com duas incógnitas. O problema anterior pode também ser resolvido empregando-se duas incógnitas. Deve-se observar que o aumento de número de incógnitas em um problema torna mais fácil a sua tradução para uma linguagem algébrica ao mesmo tempo que dificulta a parte relativa ao cálculo.

Assim, no problema já estudado, indicando por:

x a idade do pai
y a idade do filho

as equações que traduzirão o problema, serão:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ x = 5y \end{cases}$$

Resolvendo êsse sistema, por substituição, temos:

$$5y + y = 42$$
$$6y = 42$$
$$\therefore y = 7$$

e como $x = 5y$, segue que $x = 35$

Logo, as idades são: 35 para o pai e 7 para o filho.

26. Generalização de um problema. Generalizar um problema é resolvê-lo de um modo *geral*, isto é, consiste na determinação de uma ou mais fórmulas que permitam resolver todos os problemas semelhantes ao considerado. Para êsse fim é necessário usar *letras* ao invés de dados numéricos. Exemplos:

1.º) Qual é o número que, diminuindo-se 10 de seu valor, se torna a metade do que era?

Solução: Seja x o número procurado. A equação resultante será:

$$x - 10 = \frac{x}{2}$$

ou

$$2x - x = 20$$

e

$$\therefore x = 20$$

Generalizando o problema, devemos enunciar:

Qual é o número que, diminuindo-se m *de seu valor, se torna* n *vêzes menor do que era?*

Sendo x o número procurado e seguindo o enunciado, temos:

$$x - m = \frac{x}{n}$$

ou

$$nx - nm = x$$
$$nx - x = nm$$
$$x(n-1) = nm$$
$$\therefore x = \frac{nm}{n-1}$$

Logo: para se obter o número procurado deve-se dividir o produto $n \cdot m$ por $n - 1$.

No caso particular de $m = 10$ e $n = 2$ (metade), temos:

$$x = \frac{10 \times 2}{2 - 1} = \frac{20}{1} = 20$$

Para todos os problemas semelhantes, temos a fórmula:

$$x = \frac{n \cdot m}{n - 1}$$

2.º) Determinar os números cuja soma é igual a 14 e a diferença 2.

Solução: Seja x um dos números procurados e y o outro.

$$\therefore \begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

cuja solução é: $x = 8$ e $y = 6$.

Generalização: Determinar dois números cuja soma é igual a s e a diferença d.

As equações, agora, serão: $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$

e a solução do sistema: $x = \dfrac{s + d}{2}$ e $y = \dfrac{s - d}{2}$

que nos dão as fórmulas que permitem resolver os problemas que visam a *determinar dois números* quando se conhece a sua *soma* e a sua *diferença*.

27. Discussão de um problema. Quando a natureza do problema exige que as soluções sejam de determinada espécie e a sua resolução algébrica conduz a resultados de outras espécies, dizemos que o problema é *impossível*. Assim, se o problema exige soluções inteiras e encontramos respostas fracionárias, ou se o problema exige soluções positivas e encontramos resultados negativos, estamos diante de soluções que não servem ao problema. Exemplos:

1.º) O número de alunos de duas classes reunidas é igual a 67. Sabendo-se que uma das classes tem 12 alunos a mais que a outra, quantos alunos tem cada classe?

Dando-se uma linguagem algébrica ao problema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 67 \\ x = y + 12 \end{cases}$$

e resolvendo-o:

$$y + 12 + y = 67$$
$$2y = 67 - 12$$
$$2y = 55 \therefore y = 27{,}5$$

e portanto:

$$x = y + 12,$$
$$x = 27{,}5 + 12 \therefore x = 39{,}5$$

Discussão: Ora, esta solução do sistema mostra que o problema é *impossível*, pois não é possível considerar-se classes com 27,5 alunos ou 39,5 alunos.

2.º) A idade de um pai é 38 anos e a do seu filho 14. Daquí a quantos anos a idade do pai será o triplo da do filho?

Seja x o número de anos necessários para que a idade do pai valha o triplo da do filho. A equação resultante será:

$$38 + x = 3\,(14 + x)$$
$$38 + x = 42 + 3x$$
$$x - 3x = 42 - 38$$
$$-2x = 4$$
$$x = -2$$

Discussão: Esta resposta mostra que o problema é *impossível*, a menos que se possa considerá-lo em dois sentidos em relação ao tempo, isto é, *passado* e *futuro*, pois só dêste modo é que se pode interpretar a solução negativa, dizendo que a idade do pai *foi* o triplo da do filho há 2 anos passados.

EXERCÍCIOS

1. Qual é o número que somado com a sua têrça parte resulta 12?
2. O dôbro de um número diminuído de 8 é igual à sua quarta parte aumentada de 13. Qual é êsse número?
3. A soma de dois números é igual a 22 e a diferença é 6. Determinar êsses dois números. Generalizar o problema.
4. O triplo de um número menos o dôbro de outro é igual a − 14. Sabendo-se que a soma do dôbro do primeiro com o quíntuplo do segundo é − 3, quais são êsses dois números?
5. Dois números consecutivos (isto é, a diferença entre êles é 1), têm por soma 27. Dizer quais são os números e generalizar o problema.
6. Um pai tem 40 anos e seu filho 12. Há quantos anos a idade do pai foi cinco vêzes a da do filho?
7. A idade de uma pessoa é hoje o dôbro da idade de uma outra e há 7 anos a soma das idades das duas pessoas era igual à idade que a maior tem hoje. Quantos anos tem cada pessoa?
8. Uma pessoa deu $\frac{3}{4}$ do que possuía a um amigo, a metade do resto a um outro amigo. Quanto possuía essa pessoa se ainda ficou com Cr$ 1 000,00?
9. Determinar a fração igual a $\frac{2}{5}$ cuja soma dos têrmos é igual a 42.
10. Num terreiro existem perus e coelhos, ao todo 36 cabeças e 104 pés. Quantos são os perus e quantos são os coelhos?
11. Determinar os preços de duas camisetas, sabendo-se que a sua soma é igual a Cr$ 205,00 e a sua diferença Cr$ 35,00.
12. Achar dois números sabendo-se que o seu quociente é 4 e a sua diferença 48.
13. Decompor o número 98 em duas partes tais que a maior delas seja igual à meno mais 14.
14. Dois números têm por soma a e por diferença b. Que números são êsses?
15. Dois números tendo por soma s e por quociente $\frac{n}{m}$. Determinar os dois números.
16. Um número é formado de dois algarismos cuja soma dos valores absolutos é 8. Se adicionarmos 18 a êsse número o resultado obtido será êsse mesmo número escrito em ordem inversa. Qual é êste número?

17. A soma de dois números é 324. Se dividirmos o maior por 15 e o outro por 12, os quocientes são iguais. Calcular os números.

18. Dividindo um número de dois algarismos pela soma de seus valores absolutos obtém-se 7. Mas êsse número supera de 27 o número formado com êsses mesmos algarismos escritos em ordem inversa. Qual é o número?

19. A idade de Nélson, há 18 anos, era o dôbro da de Carlos. Daqui 9 anos a idade de Nélson será os 5/4 da idade de Carlos. Que idade tem cada um dêles atualmente?

20. Sabendo-se que o dôbro de minha idade com o triplo da tua é igual a 145 e que a diferença entre a metade de minha idade e um têrço da tua é 7, dizer quais são as nossas idades.

21. A idade que possuo hoje é 8/7 daquela que possuía há 5 anos. Qual é a minha idade?

22. Repartir 310 em duas partes tais que, dividindo-se a primeira por 15 e a segunda por 30, a soma dos quocientes seja 20.

23. Uma pessoa paga Cr$ 89,00 com 25 notas, umas de Cr$ 2,00 e outras de Cr$ 5,00. Quantas notas há de cada espécie?

24. Numa tecelagem fizeram-se 360 peças de fazenda, umas de 20 metros e outras de 30 metros. A soma total foi de 9 600 metros. Quantas peças de cada espécie foram feitas?

25. Aumentando o numerador e o denominador de uma fração de 1 tem-se uma fração igual a 5/2; diminuindo o numerador e o denominador de 2 tem-se uma fração igual a 4. Determinar essa fração.

26. Determinar uma fração que se torna igual a 2 quando se aumenta o seu numerador de 3 e igual a 1/2 quando se aumenta o denominador de 9.

27. Que número se deve acrescentar aos têrmos de uma fração $\frac{n}{m}$ para lhe duplicar o valor? Discutir.

28. Quantos minutos faltam para o meio-dia se há 15 minutos faltavam os 7/4 dos minutos que faltam agora?

29. Um negociante tem cabritos e leitões e o número dos primeiros é os 3/4 do número dos segundos. Vende 5 leitões e restam tantos cabritos quantos são os leitões. Quantos cabritos e quantos leitões tinha o negociante?

30. Se aos 3/5 de um número juntarmos 8 obtemos uma soma igual à diferença entre os 9/10 do mesmo número e 13. Achar o número.

31. Se a um número se soma n, depois divide-se essa soma por n e se do quociente se subtrai n obtém-se para resultado n. Determinar êsse número. Estudar o caso particular de $n = 10$.

32. Quatro rapazes dividem Cr$ 1 000,00 de modo que o primeiro tenha os 4/3 do segundo e o dôbro do terceiro e o terceiro tenha Cr$ 100,00 mais do que o quarto. Quanto coube a cada um?

33. O quociente de dois números é 4 e o resto da divisão é 76. Achar êsses dois números, se a sua diferença é 430.

34. Um automóvel com a velocidade de 60km/h parte de São Paulo para o Rio de Janeiro. Decorridos dez minutos, parte um outro automóvel com a velocidade de 80km/h. Depois de quanto tempo o segundo automóvel alcança o primeiro?

35. Repartir Cr$ 5 425,00 entre três pessoas de modo que a primeira tenha um quinto a mais do que a segunda e a terceira 5/12 a mais do que a segunda.

36. A diferença dos quadrados de dois números consecutivos é 37. Quais são êsses números?

37. A diferença entre dois números é 5 e a diferença de seus quadrados 55. Determinar êsses números.

38. A diferença entre dois números é 361 e o seu quociente 20. Quais são êles?

39. Alípio faz um serviço em 8 dias e Roberto faz o mesmo serviço em 4 dias. Quantos dias levarão os dois juntos para fazer êsse serviço?

40. José e Antônio, trabalhando juntos, fizeram a têrça parte de um muro em 6 dias. A outra têrça parte foi feita por José que, sòzinho, gastou 10 dias. A última têrça parte ficou para ser feita por Antônio. Quantos dias êste gastará?

RESPOSTAS:

1.º) 9
2.º) 12
3.º) 14 e 8
4.º) -4 e 1
5.º) 13 e 14
6.º) 5 anos
7.º) 14 e 28 anos
8.º) Cr$ 8 000,00
9.º) $\frac{12}{30}$
10.º) 20 perus e 16 coelhos
11.º) Cr$ 120,00 e Cr$ 85,00
12.º) 64 e 16
13.º) 56 e 42
14.º) $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{a-b}{2}$
15.º) $\frac{ns}{n+m}$ e $\frac{ms}{n+m}$
16.º) 35
17.º) 180 e 144
18.º) 63
19.º) 36 e 27
20.º) 32 e 28

21.º) 40 anos
22.º) 290 e 20
23.º) 12 de Cr$ 2,00 e 13 de Cr$ 5,00
24.º) 120 e 240
25.º) 14/5
26.º) 7/5
27.º) $x = \dfrac{nm}{n - 2m}$, $n \gtrless 2m$ (poss.) e $n = 2m$ (imposs.)
28.º) 20
29.º) 20 e 15
30.º) 70
31.º) $x = n\,(2n - 1)$; $p/n = 10$, $x = 190$

32.º) Cr$ 400,00; Cr$ 300,00; Cr$ 200,00 e Cr$ 100,00
33.º) 548 e 118
34.º) 1/2h
35.º) Cr$ 1 800,00; Cr$ 1 500,00 e Cr$ 2 125,00
36.º) 19 e 18
37.º) 8 e 3
38.º) 380 e 19
39.º) $2\dfrac{2}{3}\,d$
40.º) 15d

(Outros problemas, pág. 231).

APÊNDICE DE ÁLGEBRA

Método dos determinantes (Fórmulas de Cramer) — Sistemas de equações (Formas especiais) redutíveis ao 1.° grau — Sistemas de três equações lineares com três incógnitas

a) **Método dos Determinantes** (Fórmulas de Cramer)
Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

e as fórmulas de resolução (que dão x e y) estudadas na pág. 159

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Vejamos, agora, *uma outra maneira* de se obter o denominador comum $(ab' - a'b)$ e os numeradores das fórmulas acima

Dispondo os coeficientes a, b, a', b' no quadro abaixo, em forma de um quadrado, que contém duas filas (são as horizontais) e duas colunas (são as verticais)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

e denominado *matriz quadrada de 2.ª ordem*, poderemos obter fàcilmente o denominador $ab' - a'b$ calculando a diferença entre os produtos dos elementos que se encontram em cada diagonal do quadrado. A primeira diagonal $\begin{vmatrix} a & \\ & b' \end{vmatrix}$, que dá o produto ab', é denominada *principal* e a outra, $\begin{vmatrix} & b \\ a' & \end{vmatrix}$, que dá $a'b$, *secundária.*

Temos assim:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = ab' - a'b$$

indicando, os sinais sôbre as diagonais, que devemos *trocar o sinal* (isto equivale a subtrair) o produto $a'b$. O resultado obtido: $ab' - a'b$, que geralmente é indicado por Δ (lê-se "delta"), é chamado *determinante dos coeficientes* e suposto diferente de zero. Logo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

Os numeradores: $b'c - bc'$ (de x) e $ac' - a'c$ (de y) são dados pelas seguintes matrizes quadradas de 2.ª ordem:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc' \quad \text{e} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

obtidas, respectivamente, de Δ quando se substitui em Δ os coeficientes de x (que são a e a') e os de y (que são b e b') pelos têrmos conhecidos correspondentes (que são c e c'). Portanto, temos:

$\Delta x = b'c - bc'$, denominado ***determinante da variável*** x

e $\Delta y = ac' - a'c$, denominado ***determinante da variável*** y

Finalmente, os valores das incógnitas x e y, que, caso existam, constituirão a *solução* do sistema proposto, são dados pelos quocientes:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}}$$

$$\boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}}$$

que constituem as chamadas Fórmulas de Cramer, usualmente empregadas para a resolução de sistemas de equações lineares literais.

Aplicações. Resolver, aplicando o método dos Determinantes, os sistemas:

1.º) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 9 = -19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -35 \ -3 = -38$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \ 2 - 21 = -19$$

Logo: $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-38}{-19} = 2 \\ \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-19}{-19} = 1 \end{cases}$ Solução: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 0 \end{cases}$

Nota: Podemos aplicar diretamente as fórmulas de Cramer ou, querendo evitar números fracionários, eliminar antes os denominadores da segunda equação.

ou

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Aplicando as fórmulas de Cramer, obtemos:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6+0}{-4+3} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0-9}{-4+3} = \frac{-9}{-1} = 9$$

Solução: $\begin{cases} x=6 \\ y=9 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} mx + 2y = 5 \\ 3x + \ \ y = 1 \end{cases}$

NOTA: Principalmente para a resolução de sistemas de equações lineares literais é que são recomendadas as fórmulas de Cramer.

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = m - 6 \neq 0$$

(impondo que o Δ seja diferente de zero, já estamos *discutindo* a possibilidade do sistema admitir solução).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} m & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = m - 15$$

Se $\Delta = m - 6 \neq 0$ ou $m \neq 6$, obtemos como *solução*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{3}{m-6} \\ \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{m-15}{m-6} \end{cases}$$

3.º) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 4a \\ \ \ x + 3y = 9a \end{cases}$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 4a & -1 \\ 9a & 3 \end{vmatrix} = 12a + 9a = 21a,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4a \\ 1 & 9a \end{vmatrix} = 18a - 4a = 14a$$

e a solução será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{21a}{7} = 3a \\ \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{14a}{7} = 2a \end{cases}$$

b) **Sistemas de equações, sob formas especiais, redutíveis ao 1.º grau.** Consideremos alguns casos simples de sistemas de equações algébricas (que podem se apresentar com equações fracionárias), cuja resolução pode ser simplificada usando *especiais artifícios* que, embora não obedeçam normas gerais, pois, só a prática intensa pode fixar, convém serem adotados.

Exemplos:

1.º) Resolver o sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$ naturalmente com $x \neq 0, \ y \neq 0$

Se fôssemos seguir o curso normal de resolução (eliminar denominadores, etc.) obteríamos o sistema:

$$\begin{cases} 6y + 6x = 5xy \\ 6y - 6x = \ \ xy \end{cases}$$

composto de equações do 2.º grau, cujo processo de resolução será conhecido sòmente na 4.ª Série.

Assim, a resolução do sistema proposto se simplifica fazendo uso de *incógnitas auxiliares*. Fazendo:

$$\frac{1}{x} = u \quad \text{e} \quad \frac{1}{y} = v$$

e substituindo êsses valores no sistema dado, obtemos o novo sistema:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{5}{6} \\[2mm] u - v = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

que é do 1.º grau nas incógnitas u e v, e, portanto, resolúvel por qualquer dos métodos já estudados. Aplicando o método *da adição*, temos:

somando: $2u = \dfrac{6}{6} \therefore 2u = 1 \therefore u = \dfrac{1}{2}$

subtraindo: $2v = \dfrac{4}{6} \therefore 2v = \dfrac{2}{3} \therefore v = \dfrac{1}{3}$

Substituindo os valores encontrados de u e v nas igualdades que os definiram, isto é:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$$

obteremos a solução final:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

2.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = \dfrac{5}{2}\,xy \\[2mm] 5x - 6y = xy \end{cases} \qquad \text{com } x \neq 0, \; y \neq 0$$

Dividindo (é êste agora o artifício) as duas equações por xy, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{y} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{5}{2} \\[2mm] \dfrac{5}{y} - \dfrac{6}{x} = 1 \end{cases}$$

Chamando: $\dfrac{1}{x} = u$ e $\dfrac{1}{y} = v$, vem substituindo:

$$\begin{cases} 3u + 4v = \dfrac{5}{2} \\[2mm] 5u - 6v = 1 \end{cases}$$, cuja solução $u = \dfrac{1}{4}$ e $v = \dfrac{1}{2}$, permite

determinar os valores de x e y, isto é:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \therefore x = 4$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \therefore y = 2$$

3.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{3} \\[2mm] \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$, com $x - y \neq 0$ (ou $x \neq y$) e $x + y \neq 0$ (ou $x \neq -y$)

Chamando: $\dfrac{1}{x-y} = u$ e $\dfrac{1}{x+y} = v$, obtemos:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\[2mm] u - v = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$, sistema de solução: $u = \dfrac{1}{2}$ e $v = \dfrac{1}{6}$

Portanto: $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{6}$ ou seja:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

sistema simples do 1.º grau, cuja resolução fornecerá a solução do sistema proposto, isto é, $x = 4$ e $y = 2$.

c) **Sistemas de três equações lineares (1.º grau) com três incógnitas.** Para a resolução de um sistema de *três equações* do 1.º grau com *três incógnitas* costumamos empregar os métodos da *substituição*, da *adição*, dos *determinantes* e ainda *artifícios de cálculo* que conduzam mais fàcilmente à solução

Os exemplos, a seguir, darão uma idéia da resolução dêsses sistemas com o emprêgo dos diferentes métodos. Exemplos:

1.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ -x + 5y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Vamos aplicar o método da *substituição*.

Da primeira equação (ou de qualquer outra) tiremos o valor de z (ou de qualquer outra variável). Logo:

$$z = -3 - 2x + y$$

Substituindo êsse valor nas duas últimas equações, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} z = -3 - 2x + y \\ -x + 5y + 3(-3 - 2x + y) = 0 \\ 3x - 2y - (-3 - 2x + y) = 2 \end{cases}$$

Basta agora resolver o sistema formado pelas duas últimas equações (sòmente nas incógnitas x e y) que, reduzidos os têrmos semelhantes, se apresenta:

$$\begin{cases} -7x + 8y = 9 \\ 5x - 3y = -1 \end{cases}$$

Aplicando qualquer dos métodos conhecidos obtemos: $x = 1$ e $y = 2$

Substituindo êsses valores na primeira equação, vem:

$$z = -3 - 2\times 1 + 2 = -3 - 2 + 2 = -3$$

e a solução do sistema dado é:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

2.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Êsse sistema também poderia ser resolvido por *substituição*, bastando para isso tirar o valor de x na segunda equação, o de y na terceira e substituir êsses valores na primeira que se transformaria numa equação do 1.º grau na única incógnita z. Todavia, com a finalidade de mostrar a existência de úteis *artifícios de cálculo*, procederemos da seguinte maneira:

Somemos, membro a membro, as três equações do sistema:

$$2x + 2y + 2z = 12$$

e dividindo por 2 (todos os têrmos são divisíveis por 2):

$$x + y + z = 6$$

Subtraindo, desta equação, respectivamente, as equações do sistema dado obteremos de pronto a solução, pois,

$$\begin{aligned} x + y + z - (x + y) &= 6 - 3 \\ x + y + z - (x + z) &= 6 - 4 \\ x + y + z - (y + z) &= 6 - 5 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} z &= 3 \\ y &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

portanto, $x = 1$; $y = 2$ e $z = 3$

3.º) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ -x + 5y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

pelo método dos *Determinantes*

As matrizes quadradas Δ, Δx, Δy e Δz, são agora de 3.ª ordem, isto é; possuem 3 filas e 3 colunas, e, obtidas de forma análoga a quem empregamos para as matrizes quadradas de 2.ª ordem, ou seja:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$ *(determinante dos coeficientes)*

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$ *(determinante da variável x* — obtido, a partir de Δ, substituindo os elementos da 1.ª coluna de Δ pelos correspondentes têrmos conhecidos −3, 0, 2)

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$ *(determinante da variável y* — idem, substituindo os elementos das 2.ª coluna, por −3, 0, 2)

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$ *(determinante da variável z* — idem substituindo os elementos da 3.ª coluna, por −3, 0, 2)

O cálculo de uma matriz quadrada de 3.ª ordem, pode ser feito da seguinte maneira: escreve-se à direita da matriz quadrada as duas primeiras colunas dessa matriz e consideramos os três produtos descendentes (flecha $\searrow$) com o próprio sinal e aqueles ascendentes (flecha $\nearrow$) com o sinal trocado, como vem indicado no cálculo de Δ:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right\} -10 - 9 + 2 - 15 + 12 + 1 = -19$$

A solução será dada pelas *fórmulas de Cramer:*

$$\left\{ x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-19}{-19} = 1 \right.$$

$$\left\{ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-38}{-19} = 2 \right.$$

$$\left\{ z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{57}{-19} = -3 \right.$$

onde $\Delta \neq 0$ e Δx, Δy e Δz, são calculados da mesma maneira que Δ.

EXERCÍCIOS

Resolver pelo método dos *Determinantes*, os sistemas:

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ 8x + y = 20 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3y - x = -1 \\ y - \dfrac{3x}{4} = -2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{6} - \dfrac{x+y}{8} = 5 \\ \dfrac{x+y}{4} - 10 = x - y \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = \dfrac{4}{3} \\ 2x - y = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + y = 3a \\ x - y = a \end{cases}$
9. $\begin{cases} ax + by = 2ab \\ x + y = a+b \end{cases}$
10. $\begin{cases} (a+c)x - by = bc \\ x + y = a+b \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} \\ \dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2 \end{cases}$

Resolver os seguintes sistemas, empregando *artifícios de cálculo:*

12. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 4 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5 \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{-2}{9} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{18} \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{15}{x} + \dfrac{20}{y} = -7 \\ \dfrac{15}{x} - \dfrac{20}{y} = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 2 \\ \dfrac{b}{x} + \dfrac{a}{y} = \dfrac{b^2 + a^2}{ab} \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{y} = b \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = a \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{4}{y-2} = 12 \\ \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{y-2} = 22 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x + 2y = -\dfrac{1}{20}xy \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{y} = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x + 4y = \dfrac{11xy}{2} \\ 14x - 4y = 3xy \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-y} + \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{3}{x+y} = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{4}{3x-2y} - \dfrac{2}{x+2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{3x-2y} + \dfrac{1}{x+2y} = 1 \end{cases}$

Resolver os seguintes sistemas de três equações com três incógnitas por qualquer dos métodos estudados:

23. $\begin{cases} -5x + 2y + z = 2 \\ 4x - y - 3z = -7 \\ x - 2y - z = -6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + y + x = 2 \\ x + 3y - 2z = 9 \\ x + 4y - 5z = 14 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x - y = 7 - z \\ x - z = 1 - 2y \\ 3z - 2y = 11 - 3x \end{cases}$

28. $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}4z = 29 \\ 0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z = 38 \\ 0{,}4x + 0{,}5y + 0{,}7z = 51 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y + z - x = m \\ z + x - y = n \\ x + y - z = p \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = (b-a)(c-b)(a-c) \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 22 \\ y + z = 28 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 16 \\ y + z = 9 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + z = 21 \\ 5x - 6z = -10 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x + y + t = 16 \\ x + z + t = 18 \\ y + z + t = 20 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{3}{z} - \dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{x} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{z} + \dfrac{4}{y} = -\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{z} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = -\dfrac{13}{2} \end{cases}$

NOTA: O Ex. 34 (Sist. de 4 equações com 4 incógnitas) e o Ex. 35 (Sist. de 3 equações fracionárias com 3 incógnitas) são resolvidos com os métodos e artifícios introduzidos.

RESPOSTAS:

1. $x = 2;\ y = 1$
2. $x = 8;\ y = 6$
3. $x = 2;\ y = 4$
4. $x = 0;\ y = -3$
5. $x = 4;\ y = -1$
6. $x = y = 20$
7. $x = 8/5;\ y = 16/5$
8. $x = 2a;\ y = a$
9. $x = b;\ y = a$
10. $x = b;\ y = a$
11. $x = a + b;\ y = a - b$
12. $x = 6;\ y = 9$
13. $x = -1/3;\ y = 2/7$
14. $x = 6;\ y = 9$
15. $x = 5;\ y = -2$
16. $x = a;\ y = b$
17. $x = \dfrac{ab+1}{a+b^2};\ y = \dfrac{ab+1}{b-a^2}$
18. $x = 5/4;\ y = 5/2$
19. $x = 10;\ y = -20$
20. $x = 1;\ y = 2$
21. $x = 4;\ y = 2$
22. $x = 2;\ y = 1$
23. $x = 1;\ y = 2;\ z = 3$
24. $x = 1;\ y = 2;\ z = -1$
25. $x = 2;\ y = 3;\ z = 1$
26. $x = 4;\ y = 5;\ z = 2$
27. $x = 1;\ y = 2;\ z = 4$
28. $x = 20;\ y = 30;\ z = 40$
29. $x = \dfrac{n+p}{2};\ y = \dfrac{m+p}{2};\ z = \dfrac{m+n}{2}$
30. $x = b - c;\ y = c - a,\ z = a - b$
31. $x = 0;\ y = 6;\ x = 22$
32. $x = 12;\ y = 5;\ z = 4$
33. $x = 4;\ y = 3;\ z = 5$
34. $x = 3;\ y = 5;\ z = 7;\ t = 8$
35. $x = 1;\ y = -1;\ z = 2.$

EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO

"Se amar é pecado,
jamais serei inocente, pois há alguém
nêste mundo que amarei eternamente."

"Amo e não sou amado,
quero e não sou querido,
mas um consolo eu tenho:
amo e não sou linajado!.."

Exercícios de Recapitulação sôbre Potências Expressões Quadráticas e Raízes

P o t ê n c i a s

Indicar, sob forma de potência, (e calcular onde se fizer necessário) os resultados das seguintes operações:

1. $3^4 \times 3^2 \times 3$
2. $5^4 \times 5^2 \times 5^{11} \times 5^1 \times 5^0$
3. $1^{54} \times 1^2 \times 1^{215} \times 1$
4. $a^m \times a^n \times a^p$
5. $b^q \times b^r \times b$
6. $2^{14} \times 2^{-2}$
7. $3^2 \times 3^{-8} \times 3$
8. $9^{-1} \times 9^1$
9. $4^{-1} \times 4^{-2} \times 4^{-3}$
10. $a^{-n} \times a^{-m} \times a^p$
11. $x^5 \times \frac{1}{x^3} \times x^4 \times \frac{1}{x}$
12. $\frac{1}{a^2} \times a^3$
13. $x^{-2} \times x^3 \times x^{-1}$
14. $3^4 \times \frac{1}{3^{-2}} \times 3^{-4} \times 3$
15. $1^{18} \times 1^{-219} \times 1^{-1}$
16. $a^{12} \times \frac{1}{a^{12}} \times a^{-3} \times \frac{1}{a^{-3}}$
17. $3^{16} : 3^{14}$
18. $(4^8 : 4^2) : 4^2$
19. $7^4 : (7^8 : 7^5)$
20. $(3^8 : 3^3) : (3^4 : 3)$
21. $a^n : a^m$
22. $2^4 : 2^7$
23. $(5^3 \times 5^2) : 5^7$
24. $[1^{20} : (1^3 \times 1^4)] : 1^0$
25. $(3^4)^2 \times (3^2)^3$
26. $[(2)^3 \times (2)^1]^2 : (2)^{-2}$
27. $(3)^3 \times [(3)^2 \times 3]^4$
28. $(4^3 \times 4^2 \times 4^5)^2 : (4^2 \times 4^3 \times 4)^3$
29. $(2^4 \times 3^3 \times 5^3)^4 : (2^2 \times 3^3 \times 5^2)^3$
30. $[(3^4 \times 2^2)^3]^4 : [(2^8 \times 3)^2]^3$
31. $(-2)^4; (-5)^3; (-3)^{-2}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$
32. $[(-3)^{-1} \times (3)^2] : 3^4$
33. $[(2^{-3})^4 \times (2^{-5})^2] : [(2^0)^3 \times$
$\times (2^{-5})^2]$
34. $[(-4)^{-1}]^{-2} : (4)^2$
35. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}; \left(+\frac{3}{4}\right)^{-2}$
36. $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-4}; (-0,1)^{-3}$
37. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3$
38. $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 9^{-1}\right]^2$
39. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3 : \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^{-3}$
40. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

41. $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{5}{3}\right)^2$

42. $\left[\frac{1}{a^m}\right]^{-n}$

43. $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 \times \left(-\frac{b}{a}\right)^3$

44. $\left(\frac{x^{-n}}{y^{-m}}\right)^p$

45. $(-k)^{-3} \times \frac{1}{k^{-6}}$

46. $(-2,1)^3$

47. $(-0,1)^2$

48. $(3,2525\ldots\ldots)^2$

49. $(-0,888\ldots\ldots)^3$

50. $(2,834545\ldots\ldots)^{-2}$

RESPOSTAS:

1. 3^7
2. 5^{18}
3. $1^{272} = 1$
4. a^{m+n+p}
5. b^{q+r+1}
6. 2^{12}
7. $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
8. $9^0 = 1$
9. $4^{-6} = \frac{1}{4^6}$
10. a^{-n-m+p}
11. x^5
12. $a^1 = a$
13. $x^0 = 1\ (x \neq 0)$
14. 3^3
15. $1^{-202} = 1$
16. $a^0 = 1\ (a \neq 0)$
17. 3^2
18. 4^4
19. $7^1 = 7$
20. 3^2
21. a^{n-m}
22. $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
23. 5^{-2}
24. $1^{13} = 1$
25. 3^{14}
26. 2^{10}
27. 3^{15}
28. 4^2
29. $2^{10} \times 3^3 \times 5^6$
30. $3^{42} \times 2^{-24}$
31. $+16; -125; 1/9; -8$
32. $-1/3 = -3^{-1}$
33. 2^{-12}
34. 1
35. -27; $16/9$
36. $81/625$; $-1\,000$
37. $3^6 = 729$
38. $1/9$
39. $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$
40. -1
41. 1
42. $\frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$
43. $-b/a$
44. y^{mp}/x^{np}
45. $-k^3$
46. $-4,41$
47. $0,01$
48. $\left(3\frac{25}{99}\right)^2$
49. $\left(-\frac{8}{9}\right)^2$
50. $\left(2\frac{8262}{9900}\right)^{-2}$

Expressões Quadráticas

Aplicar a expressão do *quadrado da soma* indicada de dois números nos exemplos:

51. $(10 + 15)^2$ 52. $(1 + 99)^2$ 53. $(m + n)^2$

54. $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)^2$ 55. $\left(1\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$ 56. $(3,2 + 0,1)^2$

57. $(2 + 0,01)^2$ 58. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$ 59. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2$

Qual o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar os seguintes produtos, a fim de obter um quadrado:

60. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 61. $3^2 \times 5^3 \times 7 \times 11$ 62. $2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$

Aplicar a expressão do produto da *soma* indicada pela *diferença* indicada de dois números:

63. $(5+3)(5-3)$; 64. $(4+1)(4-1)$; 65. $(12+10)(12-10)$

66. $(20+10)(20-10)$; 67. $(a+b)(a-b)$; 68. $(m+n)(m-n)$

Determinar, pela decomposição em fatôres primos, quais dos números são *quadrados perfeitos*:

69. 121; 70. 1 024; 71. 125; 72. 1 442; 73. 7 056

74. Qual o número que se deve somar a $4^2 + 5^2$ para se obter o quadrado de $(4 + 5)$?

75. Qual o número que se deve somar a $1 + 9$ para se obter o quadrado de $(1 + 3)$?

76. Qual o número que se deve somar a $x + y$ para se obter o quadrado de $(x + y)$?

Interpretar *geomètricamente* a expressão do quadrado da soma indicada:

77. $(5 + 3)^2$ 78. $(2 + 4)^2$ 79. $(2 + 3,5)^2$ 80. $(2,5 + 2,5)^2$

Determinar a diferença entre os quadrados dos seguintes números, *sem elevá-los ao quadrado*:

81. 20 e 19 82. 48 e 47 83. 19 e 18 84. 36 e 35

85. Sabendo-se que a soma de dois números é 13 e que a diferença entre os quadrados dêsses números é 65, determinar êsses dois números.

86. A diferença entre dois números é 8 a diferença entre os quadrados dêsses números é 224. Determinar êsses números.

87. A diferença entre os quadrados de dois números é 56 e a soma dêles 14.

Determinar êsses números.

RESPOSTAS:

51. $10^2 + 2 \times 10 \times 15 + 15^2$ 52. $1 + 2 \times 99 + 99^2$ 53. $m^2+2mn+n^2$

54. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 55. $\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

56. $(3{,}2)^2 + 2 \times 3{,}2 \times 0{,}1 + (0{,}1)^2$ 57. $2^2 + 2 \times 2 \times 0{,}01 + 0{,}01^2$

58. $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2$ 59. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)^2$

60. $2\times5=10$ 61. $5\times7\times11=385$ 62. 1
63. $5^2 - 3^2$ 64. $4^2 - 1^2$ 65. $12^2 - 10^2$
66. $20^2 - 10^2$ 67. $a^2 - b^2$ 68. $m^2 - n^2$
69. $121=11^2$ 70. $1024=2^{10}$ 71. Não
72. Não 73. $7056=2^4\times3^2\times7^2$ 74. $2\times4\times5=40$
75. $2\times9=18$ 76. $2xy$ 81. $39=(2\times19+1)$
82. 95 83. 37 84. 71
85. 9 e 4 86. 18 e 10 87. 9 e 5

Raiz Quadrada

Extrair a raiz quadrada, *por decomposição em fatôres primos*, dos seguintes números:

88. 900 89. 2 025 90. 3 721 91. 8 281 92. 66 564

Extrair a raiz quadrada dos seguintes produtos *sem efetuá-los*:

93. 16×49 94. $2^4 \times 3^2$ 95. $3^2 \times 81$ 96. $3^4 \times 11^2 \times 16$ 97. 2^{12}

98. Qual a raiz quadrada de 8^2? Qual o resultado de $(\sqrt{8})^2$?

Extrair a raiz quadrada *exata* dos seguintes *quadrados perfeitos*:

99. 576 100. 1 521 101. 2 304 102. 2 809 103. 10 609 104. 22 801
105. 38 025 106. 62 001 107. 109 561 108. 202 500 109. 817 216
110. 10 284 849

Extrair a raiz quadrada *aproximada* por falta, *a menos de uma unidade*, dos seguintes números:

111. 360 112. 1 442 113. 4 999 114. 10 800 115. 22 145 116. 58 544
117. 80 650 118. 90 600 119. 121 089 120. 10 284 800

Extrair a raiz quadrada *aproximada*, por falta, *a menos de* 0,1, dos seguintes números:

121. 3 122. 10 123. 48 124. 130 125. 248 126. 640 127. 1 789
128. 2 826 129. 10 222 130. 45 089

Extrair a raiz quadrada *aproximada*, por falta, *a menos de* 0,01, dos seguintes números:

131. 6 132. 30 133. 85 134. 78,4996 135. 66, 6062 136. 9025,01

Extrair a raiz quadrada das seguintes frações:

137. $\frac{16}{25}$ 138. $\frac{1}{9}$ 139. $\frac{441}{9025}$ 140. $\frac{196}{82359}$

Extrair a raiz quadrada *aproximada*, por falta, a menos de 0,01 dos seguintes *números decimais*:

141. 0,85 142. 5,567 143. 26,031 144. 0,0489

Extrair a raiz quadrada *aproximada*, por falta, a menos de 0,01: das seguintes *frações*:

145. $\frac{3}{16}$ 146. $\frac{13}{275}$ 147. $\frac{94}{83}$ 148. $\frac{20}{4}$ 149. $\frac{1}{10}$

Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, das seguintes frações,

150. $\frac{7}{81}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{9}\right)$ 151. $\frac{13}{256}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{16}\right)$

152. $\frac{17}{729}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{27}\right)$ 153. $\frac{28}{6561}$ $\left(\text{a menos de } \frac{1}{81}\right)$

Extrair a raiz quadrada aproximada, por falta, dos seguintes números:

154. 32 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{3}\right)$ 155. 2 530 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{5}\right)$

156. 143 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{2}\right)$ 157. 5 374 $\left(\text{a menos de } \frac{1}{7}\right)$

158. A quarta parte do quadrado de um número é 2 366. Determinar êsse número.
159. Determinar o número cuja raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade é 81 e o resto 48.
160. Qual o menor número que se deve somar a 5 145 para se obter um quadrado perfeito?
161. O quadrado da soma de dois números positivos é 784 e a diferença entre êles é 4. Quais são êsses números?
162. O quadrado da diferença de dois números positivos é 256 e a soma dêles é 8. Achar êsses números.
163. A área de uma praça de forma quadrada é igual a metade da área de uma praça retangular cujas dimensões são 50m por 121m. Qual é, em metros, o comprimento do lado da praça de forma quadrada?

164. No centro de um pátio de 2 800 m² de área, quer-se construir uma quadra de forma quadrada ocupando $\frac{1}{7}$ de sua área. Qual o comprimento do lado da quadra?

RESPOSTAS:

88. 30 89. 45 90. 61 91. 91 92. 258 93. $28=(4\times7)$

94. $12=(2^2\times3)$	95. $27=(3\times9)$	96. $396=(3^2\times11\times4)$	97. $64=(2^6)$
98. 8 ; 8	99. 24	100. 39	101. 48
102. 53	103. 103	104. 151	105. 195
106. 249	107. 331	108. 450	109. 904
110. 3 207	111. 19	112. 38	113. 70
114. 104	115. 149	116. 242	117. 284
118. 301	119. 347	120. 3 207	121. 1,7
122. 3,1	123. 6,9	124. 11,4	125. 15,7
126. 25,2	127. 42,2	128. 53,1	129. 101,1
130. 212,3	131. 2,44	132. 5,47	133. 9,21
134. 8,86	135. 8,16	136. 9,50	137. 4/5
138. 1/3	139. 21/95	140. 14/287	141. 0,92
142. 2,35	143. 5,09	144. 0,22	145. 0,18
146. 0,21	147. 1,05	148. 2,23	149. 0,31
150. 2/9	151. 3/16	152. 4/27	153. 5/81
154. 5 2/3	155. 50 1/5	156. 11 1/2	157. 73 1/7
158. 308	159. 6 609	160. 39	161. 16 e 12
162. 12 e 4	163. 55m	164. 20m	

Raiz Cúbica

Extrair a raiz cúbica, por decomposição em fatôres primos, dos seguintes números:

165. 1 728 166. 9 261 167. 15 625 168. 1 000 000

Extrair a raiz cúbica dos seguintes produtos *sem efetuá-los*:

169. 8×125 170. $2^6 \times 3^9$ 171. 3^3 172. $2^3 \times 5^6 \times 11^3$

173. Se um número é cubo perfeito, qual pode ser a sua terminação? Conhecida a terminação de um número pode-se concluir que êle é um cubo perfeito?

174. Qual a raiz cúbica de 5^3? Qual o resultado de $(\sqrt[3]{4})^3$?

Extrair a raiz cúbica *exata* dos seguintes *cubos perfeitos*:

175. 4 913 176. 29 791 177. 125 000 178. 8 998 912

Extrair a raiz cúbica *aproximada*, por falta, *a menos de uma unidade* dos seguintes números:

179. 710 180. 6 791 181. 9 604 182. 2 048 325 183. 250 130 112

Extrair a raiz cúbica *aproximada*, por falta, *menos de* 0,1, dos seguintes números:

184. 9 185. 23,456 186. 140,21 187. 0,837612

188. Qual é o número cujo cubo vale 493 039?

189. O produto de três números iguais é 68,921. Qual é o valor de cada um?

190. Qual é o número cujo cubo diminuído de 432 dá 999 568?

191. O volume de um cubo é de 79,507 cm³. Determinar o comprimento de sua aresta em cm.

192. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são: 8cm, 27cm e 64 cm. Determinar, em centímetros, o comprimento da aresta de um cubo de igual volume.

RESPOSTAS:

165. $12 = (2^2 \times 3)$	174. 5 ; 4	184. 2,0
166. $21 = (3 \times 7)$	175. 17	185. 2,8
167. $25 = (5^2)$	176. 31	186 5,1
168. $100 = (10^2)$	177. 50	187. 0,9
169. $2 \times 5 = (10)$	178. 208	188. 79
170. $2^3 \times 3^3 = (216)$	179. 26	189. 4,1
171. 3	180. 18	190. 100
172. $2\times5^2\times11=(550)$	181. 21	191. 4,3cm
173. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 000; nem sempre	182. 127	192. 24cm
	183. 630	

Radicais

Reduzir ao menor índice comum os seguintes grupos de radicais:

193. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$

194. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{6}$

195. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[6]{2}$

196. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{5}$

197. $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt[12]{2}$

198. $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt{5}$

199. $\sqrt[4]{3^3}$, $\sqrt[3]{2^5}$, $\sqrt[12]{4}$

200. $\sqrt[10]{3^5}$, $\sqrt[24]{2}$, $\sqrt[60]{5^3}$

201. $\sqrt[12]{2^5}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[24]{2}$

Simplificar os seguintes radicais:

202. $\sqrt[4]{64}$
203. $\sqrt{27}$
204. $\sqrt[12]{16}$
205. $\sqrt[4]{256}$
206. $\sqrt[8]{2^4}$
207. $\sqrt[6]{3^4}$
208. $\sqrt[5]{8192}$
209. $\sqrt[3]{10\,000}$
210. $\sqrt[3]{7^{11}}$
211. $\sqrt{4092}$
212. $\sqrt[3]{648}$
213. $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
214. $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{64}\right)^8}$
215. $\sqrt{\frac{1}{300}}$
216. $\sqrt[3]{\frac{144}{1296}}$
217. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$
218. $\sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5^5}$
219. $\sqrt[3]{2^4 \times 3^7 \times 11^2}$
220. $\sqrt{40000}$

Introduzir debaixo do radical os coeficientes dos seguintes radicais:

221. $3\sqrt{5}$
222. $4\sqrt{3}$
223. $2\sqrt[3]{4}$
224. $3^2 . \sqrt{3}$
225. $2\sqrt{0,05}$
226. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{100}$
227. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$
228. $2\sqrt[5]{\frac{3}{80}}$

Escrever em ordem de grandeza decrescente os radicais

229. $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[4]{2^2}$
230. $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{6}$

Escrever em ordem de grandeza crescente os radicais:

231. $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4^2}$
232. $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

Efetuar as operações, simplificando:

233. $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$
234. $4.\sqrt[3]{7} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{7} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{7}$
235. $\frac{3}{4}\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{2}$
236. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{288} + \sqrt{338}$
237. $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{125} + \sqrt{1445}$
238. $\sqrt{\frac{18}{25}} + \sqrt{32} - \sqrt{\frac{8}{9}}$
239. $\sqrt{243} + \sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{192} + \sqrt{507}$
240. $7\sqrt{50} + 9\sqrt{98} - 6\sqrt{162} + 3\sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 7\sqrt{242}$

241. $2\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - 2\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}$
242. $\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{8}$ (lembrar que: $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}.2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$)
243. $\sqrt{5} - 2\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20}$
244. $\sqrt{1\frac{1}{3}} + 5\sqrt{5\frac{1}{3}} - 3\sqrt{8\frac{1}{3}}$

Efetuar as operações:

245. $\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7}$
246. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{1}$
247. $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{2}$
248. $\sqrt{12} \times \sqrt{12}$
249. $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8}$
250. $\sqrt{8} \times \sqrt{50}$
251. $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}$
252. $\sqrt[4]{12} \times \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$
253. $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
254. $\sqrt{\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{10}{3}}$
255. $3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{3^2}}$
256. $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$
257. $\sqrt[3]{4} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt[4]{2}$
258. $5.\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[6]{3} \times 2\sqrt{3^2}$
259. $3\sqrt[4]{5} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[5]{2} \times 2\sqrt{3}$
260. $\frac{2}{5}\sqrt[6]{3} \times \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times 4\sqrt{2}$
261. $\sqrt{10} : \sqrt{5}$
262. $\sqrt{128} : \sqrt{8}$
263. $\sqrt[3]{18} : \sqrt[3]{9}$
264. $\sqrt{\frac{4}{5}} : \sqrt{\frac{5}{4}}$
265. $3\sqrt[4]{12} : 6\sqrt[4]{2}$
266. $\sqrt[3]{144} : \sqrt[6]{12}$
267. $\sqrt{\frac{3}{8}} : \sqrt[3]{2}$
268. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{18} : \frac{5}{2}\sqrt{6}$
269. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5^2} : \frac{2}{3}\sqrt{3}$
270. $(\sqrt{5})^2$
271. $(\sqrt[3]{2})^2$
272. $(\sqrt[5]{2})^5$
273. $(\sqrt[3]{4})^2$
274. $(\sqrt{2^2 \times 5})^3$
275. $[2\sqrt[3]{2^2 \times 3}]^2$
276. $\left[\frac{1}{3}\sqrt[4]{2^3 \times 3^2}\right]^2$
277. $\sqrt{\sqrt{4}}$
278. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}}$
279. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{3}}}$
280. $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[7]{5}}}}$

Colocar sob forma de radicais as seguintes potências de expoente fracionário.

281. $2^{\frac{3}{4}}$ 282. $25^{\frac{1}{2}}$ 283. $27^{\frac{1}{3}}$ 284. $10^{\frac{1}{2}}$ 285. $12^{\frac{2}{5}}$

Colocar sob forma de potência de expoente fracionário os seguintes radicais

286. $\sqrt[3]{4^2}$ 287. $\sqrt{2}$ 288. $\sqrt[5]{3^4}$ 289. $\sqrt[6]{2^5}$

Efetuar as operações:

290. $2^{\frac{3}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

291. $3^{\frac{1}{4}} \times 3$

292. $4^{\frac{2}{5}} : 4^{\frac{1}{4}}$

293. $\left(3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{2}{5}} \times 3\right) : 3^{\frac{33}{20}}$

294. $\left(2^3\right)^{\frac{2}{4}} : \left(2^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$

295. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Usando expoentes fracionários, calcular:

296. $[\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt{2}] : \sqrt[3]{2}$

297. $[(\sqrt[6]{5})^2 : (\sqrt[3]{5})] \times \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

298. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$

299. $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 : \left(4^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Racionalizar o denominador das seguintes frações irracionais:

300. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

301. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

302. $\frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$

303. $\frac{8}{5^2 . \sqrt{3}}$

304. $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

305. $\frac{2}{5 . \sqrt[4]{2^2}}$

306. $\frac{5}{3 . \sqrt[5]{4^3}}$

307. $\frac{4}{3 + \sqrt{2}}$

308. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

309. $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

310. $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}$

311. $\frac{2}{4\sqrt{3} - 2}$

312. $\frac{60}{3\sqrt{8} + 2\sqrt{3}}$

313. $\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}}$

314. $\frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{3}}{5}}$

315. $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

RESPOSTAS:

193. $\sqrt[6]{3^3}$, $\sqrt[6]{2^2}$, $\sqrt[6]{5^3}$

194. $\sqrt[30]{7^{10}}$, $\sqrt[30]{2^{15}}$, $\sqrt[30]{6^6}$

195. $\sqrt[12]{5^4}$, $\sqrt[12]{7^6}$, $\sqrt[12]{2^2}$

196. $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{3^2}$, $\sqrt[6]{5^1}$

197. $\sqrt[12]{2^8}$, $\sqrt[12]{2^9}$, $\sqrt[12]{2}$

198. $\sqrt[6]{25^2}$, $\sqrt[6]{5^3}$

199. $\sqrt[12]{3^9}$, $\sqrt[12]{2^{20}}$, $\sqrt[12]{4}$

200. $\sqrt[120]{3^{60}}$, $\sqrt[120]{2^5}$, $\sqrt[120]{5^6}$

201. $\sqrt[24]{2^{10}}$, $\sqrt[24]{3^4}$, $\sqrt[24]{2}$

202. $2\sqrt{2}$

203. $3\sqrt{3}$

204. $\sqrt[3]{2}$

205. 2

206. $\sqrt[4]{2}$

207. $\sqrt[3]{3^2}$

208. $4 . \sqrt[5]{2^3}$

209. $10\sqrt{10}$

210. $7^3 . \sqrt[3]{7^2}$

211. $2^6 = 64$

212. $6\sqrt[3]{3}$

213. $\frac{1}{2}$

214. $\left(\frac{1}{64}\right)^2$

215. $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{3}}$

216. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$

217. $\frac{5}{4}$

218. $2^2 \times 3 \times 5^2 \sqrt{3 \times 5} = (300\sqrt{15})$

219. $2 . 3^2 \sqrt[3]{2 \times 3 \times 11^2} = (18\sqrt[3]{726})$

220. 200

221. $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 . 5} = \sqrt{45}$

222. $\sqrt{48}$

223. $\sqrt[3]{32}$

224. $\sqrt{243}$

225. $\sqrt{0,20}$

226. $\sqrt[3]{\frac{100}{125}}$

227. $\sqrt[3]{\frac{72}{108}}$

228. $\sqrt[5]{\frac{96}{80}}$

229. $\sqrt[3]{24} > \sqrt{8} = \sqrt[4]{2^2}$

230. $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{6}$

231. $\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{4^2} < \sqrt{16}$

232. $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

233. $6\sqrt{3}$

234. $\frac{59}{15}\sqrt[3]{7}$

235. 0

236. $28\sqrt{2}$

237. $25\sqrt{5}$

238. $\frac{59}{15}\sqrt{2}$

239. $36\sqrt{3}$

240. $135\sqrt{2}$

241. 0

242. $3\frac{1}{2}\sqrt{2}$

243. $2\frac{3}{5}\sqrt{5}$

244. $2\frac{1}{3}\sqrt{3}$

245. $\sqrt{210}$

246. $\sqrt[3]{15}$

247. $\sqrt[5]{6}$

248. 12

249. $\sqrt[3]{512}$

250. 20

251. 3

252. 1

253. $6\sqrt{90}$

254. 1

255. 3

256. $\sqrt[6]{36}$

257. $8 . \sqrt[12]{4^4 \times 5^6 \times 2^3} = 8 . \sqrt[12]{2^8 \times 5^6 \times 2^3} = 8 . \sqrt[12]{2^{11} . 5^6}$

258. $30 . \sqrt[12]{2^8 \times 3^3}$

259. $6 \sqrt[60]{5^{15} \times 3^{40} \times 2^{12} \times 3^{30}}$

260. $\frac{8}{5} \sqrt[20]{2^5 \times 3^4}$

261. $\sqrt{2}$

262. 4

263. $\sqrt[3]{2}$

264. $\frac{4}{5}$

265. $\frac{1}{2} \sqrt[4]{6}$

266. $\sqrt[6]{12^3} = \sqrt{12}$

267. $\frac{1}{2} \sqrt[6]{\frac{9}{4}}$

268. $\frac{4}{25} \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

269. $\frac{3}{4} \sqrt[6]{\frac{5^4}{3^3}}$

270. 5

271. $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

272. 2

273. $\sqrt[3]{4^2} = 2\sqrt[3]{2}$

274. $\sqrt{2^6 \times 5^3} = 2^3 \times 5\sqrt{5}$

275. $4\sqrt[3]{2^4 . 3^2} = 8 . \sqrt[3]{2^3 . 3^2}$

276. $\frac{2}{3} \sqrt{2}$

277. $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

278. $\sqrt[30]{2}$

279. $\sqrt[60]{3}$

280. $\sqrt[84]{5}$

281. $\sqrt[4]{2^3}$

282. $\sqrt{25} = 5$

283. $\sqrt[3]{27} = 3$

284. $\sqrt{10}$

285. $\sqrt[5]{12^2}$

286. $4^{\frac{2}{3}}$

287. $2^{\frac{1}{2}}$

288. $3^{\frac{4}{5}}$

289. $2^{\frac{5}{6}}$

290. $2^{\frac{11}{10}}$

291. $3^{\frac{5}{4}}$

292. $4^{\frac{3}{20}}$

293. 1

294. $2^{\frac{6}{5}}$

295. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{3}}$

296. $2^{\frac{5}{6}}$

297. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

298. $2^{\frac{1}{30}}$

299. 4

300. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

301. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

302. $\frac{7 . \sqrt{10}}{15}$

303. $\frac{8\sqrt{3}}{75}$

304. $2\sqrt[3]{2^2}$

305. $\frac{1}{25} \sqrt{2}$

306. $\frac{5}{12} \cdot \sqrt[6]{4^3} = \frac{5}{12} \sqrt{4} = \frac{5}{6}$

307. $\frac{4(3 - \sqrt{2})}{7}$

308. $3 + \sqrt{15}$

309. $\frac{2\sqrt{15} - \sqrt{10}}{5}$

310. $\frac{15\sqrt{15} + 10\sqrt{6}}{37}$

311. $\frac{2\sqrt{3} + 1}{11}$

312. $3\sqrt{8} - 2\sqrt{3}$

313. $\frac{6 + 4\sqrt{\frac{3}{2}}}{13}$

314. $\frac{25 + 10\sqrt{3}}{13}$

315. $\frac{24\sqrt{15} - 18\sqrt{2}}{31}$

"O silêncio é a linguagem dos
corações felizes."

"A vida é um rosário:
cada conta uma lágrima
cada lágrima uma ~~felicidade~~"
"história de amor."

"A esperança é, depois do sono, a primeira ~~coisa~~ fonte de sonhos".

"Recordar, é viver."

"Amar é viver, e quem ama jamais esquece."

"É mais fácil, um barco resistir a uma tempestade, que um amor a uma saudade."

Exercícios de recapitulação sôbre o programa de Álgebra

Valor numérico

1. Calcular o valor numérico de: $a - b + c - d$

   1.º) para $a = 15$, $b = 10$, $c = -17$, $d = 14$
   2.º) para $a = 40$, $b = -15$, $c = 25$, $d = -11$
   3.º) para $a = -35$, $b = 24$, $c = -18$, $d = 17$
   4.º) para $a = 55$, $b = -12$, $c = 14$, $d = -30$
   5.º) para $a = -48$, $b = -30$, $c = 85$, $d = -12$

2. Calcular o valor numérico da expressão: $a - (b - c) + d$

   1.º) para $a = 5$, $b = 2$, $c = -3$, $d = 4$
   2.º) para $a = -2$, $b = -3$, $c = 2$, $d = -5$
   3.º) para $a = 4$, $b = 5$, $c = -2$, $d = -1$

3. Na expressão seguinte: $a - [b - (c - d)]$, substituir as letras pelos valores abaixo e efetuar.

   1.º) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 7$
   2.º) $a = -1$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 3$
   3.º) $a = 3$, $b = -5$, $c = -3$, $d = 0$

Calcular o valor numérico dos seguintes polinômios:

4. $x^2 + 2xy + y^2$ para $x = -8$, $y = 3$
5. $a^2b^2 - 4c^2$ para $a = -3$, $b = 4$, $c = 5$
6. $4x^2y^2 - b^2$ para $x = -4$, $y = -3$, $b = 9$
7. $6a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^4b$ para $a = 5$, $b = -2$
8. $(a+b)(a-b) - (a^2 - b^2)$ para $a = 7$, $b = -2$
9. $(a+b)^2 - (a-b)^2 - ab$ para $a = 5$, $b = -4$
10. $\dfrac{4a^2b + 3ab^2}{c}$ para $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$
11. $\dfrac{1}{4}a^2b + 2ab^3 - c$ para $a = 2$, $b = 0{,}1$ e $c = 2$

12. $6x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 0{,}2x - 7$ para $x = \dfrac{1}{2}$

13. $\dfrac{x+y}{y-x} + \dfrac{c+d}{d-c} - \dfrac{m+n}{n-m}$ para $x=-1,\ y=2,\ c=3,\ d=-4,\ m=5,\ n=-6$

14. $\dfrac{3x^2y - 5y^3}{4} + \dfrac{7}{32}$ para $x = -1,\ y = -\dfrac{1}{2}$

15. $5 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} + \dfrac{3a\,(5b-a)}{2}$ para $a = 5,\ b = 3$

16. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ 1.º) para $x=0$; 2.º) para $x=1$; 3.º) para $x=3$

17. $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x - 15}$ 1.º) para $x=5$; 2.º) para $x=0$; 3.º) para $x=1$; 4.º) para $x=3$

RESPOSTAS:

1. 1.º) -26; 2.º) 91; 3.º) -94; 4.º) 111; 5.º) 79
2. 1.º) 4; 2.º) -2; 3.º) -4
3. 1.º) -2; 2.º) 1; 3.º) 5
4. 25
5. 44
6. 495
7. 2 750
8. 0
9. -60
10. $\dfrac{20}{3}$
11. $-1{,}896$
12. $-6{,}475$
13. $\dfrac{131}{231}$
14. 0
15. 95
16. 1.º) $\dfrac{1}{3}$; 2.º) 0; 3.º) impossível
17. 1.º) 2; 2.º) $\dfrac{1}{3}$; 3.º) 0; 4.º) impossível

Redução de têrmos semelhantes

Reduzir os têrmos semelhantes das seguintes expressões algébricas:

18. $12x^2 + 3x^2 - x^2 + 5x^2$,
19. $12a^2b^2 - 7a^2b^2 + a^2b^2 - 4a^2b^2$
20. $5a^2 - b^2 + 8 - 3b^2 - a^2 + 7$
21. $2y - 3y^2 + 7 + 5y^2 + 5y + 1 + y$
22. $3ab^2 + 5a^2b + 4a^2b - 5ab^2$
23. $2x - 5bx + 5b - 3bx - 2b - x + b$

Eliminar os parênteses e reduzir os têrmos semelhantes:

24. $x + (y + 4x) - (2x - y)$
25. $12 - (x^2 - 2) - (5 + 4x^2) + (7x^2 - 15)$
26. $2p - (p - a) + 2p - (p - b) + 2p - (p - c)$
27. $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$
28. $(4x + z) - (y + 2z) + (x + 2y) - (z - y)$

Eliminar os parênteses, os colchêtes e reduzir os têrmos semelhantes:

29. $6ab - [4b - (4a - 4ab + 4b)]$
30. $4a^2 - [2b - (c - 5b + a^2)]$
31. $25y - [2x - (3y - x) + (2y - 5x)]$
32. $3x - y + [2x + y - (x - 2y) - x - y]$
33. $(5a^2 - 3ax + x^2) - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 7ax + 5x^2)]$
34. $6a - (4b - c + 2d) - [a - (2b - 4c + 3d)] - 5a$

RESPOSTAS:

18. $19x^2$
19. $2a^2b^2$
20. $4a^2 - 4b^2 + 15$
21. $2y^2 + 8y + 8$
22. $9a^2b - 2ab^2$
23. $x - 8bx + 4b$
24. $3x + 2y$
25. $2x^2 - 6$
26. $3p + a + b + c$
27. $4ab$
28. $5x + 2y - 2z$
29. $2ab + 4a$
30. $5a^2 - 7b + c$
31. $26y + 2x$
32. $3x + y$
33. $4a^2 - 15ax + 6x^2$
34. $-2b - 3c + d$

Grau de monômio e grau de polinômio. Ordenação

Qual é o grau dos seguintes monômios, em relação ao conjunto de letras:

35. $7ab^2$ 36. $6a^4b^2$ 37. $-9x^2$ 38. $\dfrac{3}{4}x^2yz$ 39. $8z^4y$

Qual é o grau dos seguintes polinômios, em relação a x, a y e a x e y

40. $3y^2 - 9xy + 3x^2y - 20y^2 + x^2$,
41. $x^2 + 2xy + y^2$
42. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ordenar em relação às potências decrescentes de x os seguintes polinômios:

43. $7x+3x^2-8+5x^3+1$
44. $3y^4+5x^2y^2-2x^4+4x^3y-9xy^3$
45. $6b^4x+5b^2x^3-4b^5+2x^5-8b^3x-3bx^4$

Ordenar em relação às potências crescentes de a os seguintes polinômios:

46. $a^3-b^3+3ab^2-3a^2b$
47. $7a^2b^3+a^3b^2+5ab^4-5a^4b+b^5-a^5$

RESPOSTAS:

35. 3.º
36. 6.º
37. 2.º
38. 4.º
39. 5.º
40. 2.º em relação a x e a y
    3.º em x e y
41. Homogêneo do 2.º grau
42. Homogêneo do 3.º grau
43. $5x^3+3x^2+7x-7$
44. $-2x^4+4x^3y+5x^2y^2-9xy^3+3y^4$;
45. $2x^5-3bx^4+5b^2x^3-8b^3x+6b^4x-4b^5$
46. $-b^3+3ab^2-3a^2b+a^3$
47. $b^5+5ab^4+7a^2b^3+a^3b^2-5a^4b-a^5$

Adição e subtração de polinômios

Efetuar a adição dos seguintes polinômios:

48. $(2b+5c-3a)$ e $(-2a+b-4c)$
49. $(4ab-5ac+4bc)$ e $(ac-3ab-2bc)$
50. $(4a^2b+3ab^2-b^2)$ e $(2b^3-4a^2b-4ab^2)$
51. $(b^2+2bc+c^2)$, $(b^2-2bc+b^2)$ e (b^2-c^2)
52. $5x-83x^3-1+2x^2$; $3x^3-5-x^2+3x$ e $15-x$
53. $x^3-3x^2y+3xy^2$; $-2x^2y-xy^2-y^3$ e x^3+4y^3
54. $a^3-4a^2b+6abx$; $a^2b-10abx+x^3$ e b^3+3a^2b+abx
55. $\frac{3a^3}{4}-\frac{2a^2b}{3}$; $\frac{3a^2}{5}+a^2b$ e $\frac{-1}{4}a^3+5a^2$
56. $\frac{c^2}{3}-\frac{b^2}{4}$; $\frac{b^2}{2}-\frac{bc}{3}+\frac{c^2}{4}$ e $\frac{bc}{2}-\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{2}$

Determinar os produtos:

86. $(a^2-b^2)\times ab$
87. $(x^2y-xy^2)\times 3xy$
88. $(3a^2-7b^2)\times(-2a^2b)$
89. $(3a-3b+3c)\times 2ab$
90. $(m^3-3m^2n+3mn^2-n^3)\times 5m^3n^3$
91. $(3a^2b+\frac{4}{5}a^2b^2)\times 10a^2b^2$
92. $(5ax^m+3bx^{m-1}-8)\times 2x$
93. $\left(\frac{4}{5}a^2c+\frac{1}{3}bc+\frac{5}{4}abc\right)\times\frac{6}{7}a^2bc$
94. $(8a^3-4a^2b+2ab^2-b^3)\,(2a-3b)$
95. $(3x^2-5xy+2y^2)\,(x^2-7xy)$
96. $(x^6+3x^3+9)\,(x^3-3)$
97. $(27a^6-9a^4b^4+3a^2b^8-b^{12})\,(3a^2+b^4)$
98. $(-x^4-y^4+x^3y+xy^3-x^2y^2)\,(-x-y)$
99. $(a+b-c)\,(a-b+c)$
100. $(x^2+y^2+xy)\,(x^2+y^2-xy)$
101. $(3a^2+2ab+b^2)\,(-3a^2+2ab-b^2)$
102. $(3-2x+4x^2)\,(1+x-2x^2)$
103. $(a+b)\,(b+c)-(c+d)\,(d+a)-(a+c)\,(b-d)$
104. $(a+b-c)\,(a+b)+(a-b+c)\,(a+c)+(b+c-a)\,(b+c)$
105. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$
106. $(2a-b)\,[(4+b)\,a+b\,(a+b)]x^2$

Efetuar utilizando os produtos notáveis:

107. $(2ab+5)^2$
108. $(1+2xy)^2$
109. $(1+x^2y)^2$
110. $(a^2+b^2)^2$
111. $(3+xy^2)^2$
112. $(ab-cd)^2$
113. $(2a^2-3ab)^2$
114. $(2x^2y-1)^2$
115. $(10-2m^2n)^2$
116. $(x^3-y^3)^2$
117. $(x^2+y^2)\,(x^2-y^2)$
118. $(m^3+1)\,(m^3-1)$
119. $(a-b^3)\,(a+b^3)$
120. $(m^3+n^3)\,(m^3-n^3)$
121. $(3c^4+2c^2)\,(3c^4-2c^2)$
122. $(x+1)^3$
123. $(y+5)^3$
124. $(2y-1)^3$
125. $(-2x-y)^3$
126. $(3x-2y^2)^3$
127. $(2xy-3x^2y)^3$

RESPOSTAS:

79. $10x^5$
80. $6a^3b$
81. $8x^5y^5z$
82. $6x^{n+m+1}$
83. $-2x^6y^5$
84. $-abcdx^{2n+1}y^{m+n}$
85. $-6a^4b^4$
86. a^3b-ab^3
87. $3x^3y^2-3x^2y^3$
88. $-6a^4b+14a^2b^3$
89. $6a^2b-6ab^2+6abc$

90. $5m^6n^3 - 15m^5n^4 + 15m^4n^5 - 5m^3n^6$
91. $30a^4b^3 + 8a^4b^4$
92. $10ax^{m+1} + 6bx^m - 16x$
93. $\frac{24}{35}a^4bc^2 + \frac{2}{7}a^2b^2c^2 + \frac{15}{14}a^3b^2c^2$
94. $16a^4 - 32a^3b + 16a^2b^2 - 8ab^3 + 3b^4$
95. $3x^4 - 26x^3y + 37x^2y^2 - 14xy^3$
96. $x^9 - 27$
97. $81a^8 - b^{16}$
98. $x^5 + y^5$
99. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
100. $x^4 + x^2y^2 + y^4$
101. $-9a^4 - 2a^2b^2 - b^4$
102. $3 + x - 4x^2 + 8x^3 - 8x^4$
103. $b^2 - d^2$
104. $2(a^2 + b^2 + c^2)$
105. 0
106. $8a^2x^2 + 4a^2bx^2 - 4abx^2 - b^3x^2$
107. $4a^2b^2 + 20ab + 25$
108. $1 + 4xy + 4x^2y^2$
109. $1 + 2x^2y + x^4y^2$
110. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$
111. $9 + 6xy^2 + x^2y^4$
112. $a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2$
113. $4a^4 - 12a^3b + 9a^2b^2$
114. $4x^4y^2 - 4x^2y + 1$
115. $100 - 40m^2n + 4m^4n^2$
116. $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$
117. $x^4 - y^4$
118. $m^6 - 1$
119. $a^2 - b^6$
120. $m^6 - n^6$
121. $9c^8 - 4c^4$
122. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
123. $y^3 + 15y^2 + 75y + 125$
124. $8y^3 - 12y^2 + 6y - 1$
125. $-8x^3 - 12x^2y - 6xy^2 - y^3$
126. $27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6$
127. $8x^3y^3 - 36x^4y^3 + 54x^5y^3 - 27x^6y^3$

Divisão de monômios e de polinômios

Efetuar as divisões dos monômios:

128. $(-6x^3y^5) : 2x^2y^3$
129. $3x^{12} : (-4x^7)$
130. $\left(-\frac{5}{7}ax^2y\right) : 3xy$
131. $5{,}4a^3b^5 : (-1{,}8a^3b^5)$
132. $x^{2m} : 3x$
133. $\left(-\frac{1}{2}y^{m+2}\right) : \frac{3}{5}y^m$
134. $20x^8y^4 : (-5x^6y)$
135. $(-18x^4y^2z) : (-3)$
136. $abcd : \frac{abcd}{4}$

Efetuar as divisões:

137. $(18m^4 + 15m^3 - 9m^2 + 6m) : 3m$
138. $(40ax^4 + 32a^2x^3 - 48a^3x^2 - 16ax) : (-8ax)$
139. $(16a^2b^3x - 8a^3cx^2 - 24a^2dx + 16a^2x) : 4a^2x$

140. $(-12a^3x^2y - 18a^2x^3y - 16axy^3 + 24a^2x^2y^2) : (-2axy)$
141. $(54a^4x^3y^2 - 36a^2x^3y^3 + 63a^4x^2y^3) : (-9a^2xy)$
142. $(4a^6b^3 - 3a^5b^4 + 5a^3b^5) : (-a^2b^3)$
143. $(-3x^{2m} + 6x^m - x) : (-2x)$
144. $(a^{m+n}b^n - 4a^{m+1}b^{n+1} + a^mb^{m+n}) : \left(-\frac{1}{2}a^mb^n\right)$
145. $(6y^3 - 2y^2 - 11y + 15) : (3y + 5)$
146. $(4x^3 + 4x^2y - 13xy^2 + 5y^3) : (2x + 5y)$
147. $(4a^2 - 9b^2) : (2a - 3b)$
148. $(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) : (m - 1)$
149. $(6x^4 - 19x^3 + 3x^2 + 19x + 6) : (3x^2 - 5x - 3)$
150. $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a^2 + 2ab + b^2)$
151. $(m^3 + n^3) : (m^2 - mn + n^2)$
152. $(3a^5 - 5a^4 - 4a^3 + 13a^2 + 3a - 6) : (3a^2 + a - 2)$
153. $(4n^5 - 2n^4 - 9n^3 + 2n^2 - 7n - 3) : (n^3 - 3n - 1)$
154. $(3y^4 - 2y^3 + y^2 - 4y - 3) : (4y^2 - 3y + 5)$
155. $(6a^4 + 2a^3b - 9a^2b^2 - 5ab^3 - b^4) : (3a^2 - 2ab - 4b^2)$

RESPOSTAS:

128. $-3xy^2$
129. $-\frac{3}{4}x^5$
130. $-\frac{5}{21}ax$
131. -3
132. $\frac{1}{3}x^{2m-1}$
133. $-\frac{5}{6}y^2$
134. $-4x^2y^3$
135. $6x^4y^2z$
136. 4
137. $6m^3 + 5m^2 - 3m + 2$
138. $-5x^3 - 4ax^2 + 6a^2x + 2$
139. $4b^3 - 2acx - 6d + 4$
140. $6a^2x + 9ax^2 + 8y^2 - 12axy$
141. $-6a^2x^2y + 4x^2y^2 - 7a^2xy^2$
142. $-4a^4 + 3a^3b - 5ab^2$
143. $\frac{3}{2}x^{2m-1} - 3x^{m-1} + \frac{1}{2}$
144. $-2a^n + 8ab - 2b^m$
145. $2y^2 - 4y + 3$
146. $2x^2 - 3xy + y^2$
147. $2a + 3b$
148. $m^2 - 2m + 1$
149. $2x^2 - 3x - 2$
150. $a + b$
151. $m + n$
152. $a^3 - 2a^2 + 3$
153. $4n^2 - 2n + 3$
154. Quociente: $\frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{16}y - \frac{41}{64}$ e resto: $\frac{-399}{64}y + \frac{13}{64}$
155. Quociente: $2a^2 + 2ab + b^2$ e resto: $5ab^3 + 3b^4$

Fatoração

Pôr em *evidência* os fatôres comuns nos seguintes polinômios:

156. $2b+b^2$
157. $5x^4-10x^2$
158. $16m+64m^2$
159. $15x^2-5ax$
160. $13a^2b^2-39a^4$
161. $21+28y$
162. $54+81xy$
163. $25mn+18m^2n$
164. $12a^3y^2+45ab^2y$
165. $ax+bx-cx$
166. $8a^3+10a^2-2a$
167. $a^2bc-ab^2c+abc^2$
168. $12x^3+3x^2y-21xy^2$
169. $9m^2n^2-27mn+63$
170. $18a^5-6a^4b+9a^3b^2$
171. $112a^3b^2c^2+24a^3bc^3+16ab^3c^3-32ab^2c^4$
172. $54a^4x^3y^2-36a^2x^3y^3+63a^4x^2y^3$
173. $(a+b)\,x+(a+b)\,y$
174. $(c-d)\,m-(c-d)\,2n$
175. $x\,(2a+b)-15\,(2a+b)$
176. $a\,(x^2+y^2)+b\,(x^2+y^2)$
177. $ab^2\,(xy+z)-(xy+z)$
178. $a\,(my-y)-y+my$
179. $(3a-1)\,(b+2)-(1-3a)\,(b-2)$
180. $(b-2c)\,(a-b)-(a+b)\,(2c-b)$

Decompor em fatôres, *por agrupamento*, os seguintes polinômios:

181. $ay-by-az+bz$
182. $mr+nr-ms-ns$
183. $a^2c-a^2d-b^2d+b^2c$
184. $7ax+ay-7bx-by$
185. $2mx-2my-nx+ny$
186. $8x^2+4xy-2ax-ay$
187. $a^2-b^2-5a+5b$
188. $a^5-15+5a^4-3a$
189. $x^2+yz-xy-xz$
190. $a^2b-1+b-a^2$

Fatorar, utilizando os *produtos notáveis*, os seguintes polinômios:

191. $25x^2-9y^2$
192. $\frac{1}{4}-a^2$
193. $2x^2-8y^2$
194. $5a^4-5b^2$
195. $x^{2m}-y^{2n}$
196. $75a^2-48$
197. $37a^5b^3-148a^3b^3$
198. $(x+y)^2-z^2$
199. $(c-d)^2-16a^2$
200. $100-(3x-y)^2$
201. $64x^2-(8a+b)^2$
202. $(x+1)^2-(x-1)^2$
203. $9\,(a-b)^2-16\,(a+b)^2$
204. $(3x+a-3)^2-(2+3x)^2$
205. $(a^2+a+1)^2-(a^2-a+1)^2$
206. $(a+b-c-d)^2-(c+d-a-b)^2$

Fatorar os seguintes trinômios (*quadrados perfeitos*):

207. $x^2-8x+16$
208. a^2-2a+1
209. x^4-4x^2+4
210. $9a^4b^2-6a^2bc+c^2$
211. $9a^4+24a^2b^2+16b^4$
212. $x^4-2x^2y^3+y^6$
213. $\frac{1}{9}n^2-\frac{2}{3}n+1$
214. $a^{2m}-2a^mb^n+b^{2n}$
215. $a^2+a+\frac{1}{4}$
216. $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{16}y^2$
217. $0{,}81a^4-1{,}26a^2b+0{,}49b^2$

Decompor, no *produto de dois binômios do 1.º grau*, os seguintes trinômios:

218. x^2-2x-3
219. x^2-4x-5
220. $x^2-4x-21$
231. $a^2-8a+12$
222. $z^2+44z-45$
223. t^2-t-2
224. $m^2-18m+56$
225. b^2+b-20
226. x^2+x-2
227. $x^2-27x+180$

Utilizando os diversos casos de decomposição em fatôres, fatorar:

228. $m^2-2mn+n^2-9p^2$
229. $a^2-b^2-2bc-c^2$
230. $x^2-y^2-2yz-z^2$
231. $1-9a^2-b^2+6ab$
232. $(x+y)\,(2y-x)+x^2-y^2$
233. $a^2-b^2-(a-b)\,(2b-a)$
234. $(2a-b)\,(b+a)-(2a-b)^2$
235. a^4-1
236. $9a^3-12a^2p+4ap^2$
237. a^3-2a^2-3a
238. a^3+a^2-4a-4
239. $(x-y)\,(x^2-z^2)-(x^2-y^2)\,(x-z)$
240. $a^4+a^3-a^2-a$
241. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
242. $[(a^2+b^2)\,x^2-1]^2-[(a^2-b^2)x^2+1]^2$
243. $16x^5y+16x^4y^2+4x^3y^3$
244. $x^3yz+y^3xz\ -\ z^3xy+2x^2y^2z$
245. $(y+1)\,(2-y)+(y-2)^2+y^2-4$

RESPOSTAS:

156. $b\,(2+b)$
157. $5x^2\,(x^2-2)$
158. $16m\,(1+4m)$
159. $5x\,(3x-a)$
160. $13a^2\,(b^2-3a^2)$
161. $7\,(3+4y)$
162. $27\,(2+3xy)$
163. $mn\,(25+18m)$
164. $3ay\,(4a^2y+15b^2)$
165. $x\,(a+b-c)$
166. $2a\,(4a^2+5a-1)$
167. $abc\,(a-b+c)$
168. $3x\,(4x^2+xy-7y)^2$
169. $9\,(m^2n^2-3mn+7)$
170. $3a^3\,(6a^2-2ab+3b^2)$

171. $8abc^2(14a^2b+3a^2c+2b^2c-4bc^2)$
172. $9a^2x^2y^2(6a^2x-4xy+7a^2y)$
173. $(a+b)(x+y)$
174. $(c-d)(m-2n)$
175. $(2a+b)(x-15)$
176. $(a+b)(x^2+y^2)$
177. $(xy+z)(ab^2-1)$
178. $y(m-1)(a+1)$
179. $2b(3a-1)$
180. $2a(b-2c)$
181. $(a-b)(y-z)$
182. $(m+n)(r-s)$
183. $(c-d)(a^2+b^2)$
184. $(7x+y)(a-b)$
185. $(x-y)(2m-n)$
186. $(2x+y)(4x-a)$
187. $(a-b)(a+b-5)$
188. $(a+5)(a^4-3)$
189. $(x-z)(x-y)$
190. $(a^2+1)(b-1)$
191. $(5x+3y)(5x-3y)$
192. $\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(\frac{1}{2}-a\right)$
193. $2(x+2y)(x-2y)$
194. $5(a^2+b)(a^2-b)$
195. $(x^m+y^n)(x^m-y^n)$
196. $3(5a+4)(5a-4)$
197. $37a^3b^3(a+2)(a-2)$
198. $(x+y+z)(x+y-z)$
199. $(c-d+4a)(c-d-4a)$
200. $(10+3x-y)(10-3x+y)$
201. $(8x+8a+b)(8x-8a-b)$
202. $4x$
203. $(7a+b)(-a-7b)$
204. $(6x+a-1)(a-5)$
205. $4a(a^2+1)$
206. 0
207. $(x-4)^2$
208. $(a-1)^2$
209. $(x^2-2)^2$
210. $(3a^2b-c)^2$
211. $(3a^2+4b^2)^2$
212. $(x^2-y^3)^2$
213. $\left(\frac{1}{3}n-1\right)^2$
214. $(a^m-b^n)^2$
215. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$
216. $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2$
217. $(0{,}9a^2-0{,}7b)^2$
218. $(x+1)(x-3)$
219. $(x+1)(x-5)$
220. $(x+3)(x-7)$
221. $(a-2)(a-6)$
222. $(z-1)(z+45)$
223. $(t-2)(t+1)$
224. $(m-14)(m-4)$
225. $(b+5)(b-4)$
226. $(x+2)(x-1)$
227. $(x-12)(x-15)$
228. $(m-n+3p)(m-n-3p)$
229. $(a+b+c)(a-b-c)$
230. $(x+y+z)(x-y-z)$
231. $(1+3a-b)(1-3a+b)$
232. $(x+y)y$
233. $(a-b)(2a-b)$
234. $(2a-b)(2b-a)$
235. $(a^2+1)(a+1)(a-1)$
236. $a(3a-2p)^2$
237. $a(a+1)(a-3)$
238. $(a+1)(a+2)(a-2)$
239. $(x-y)(x-z)(z-y)$
240. $a(a+1)^2(a-1)$

241. $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$
242. $4a^2x^2(bx+1)(bx-1)$
243. $4x^3y(2x+y)^2$
244. $xyz(x+y+z)(x+y-z)$
245. $(y-2)(y-1)$

M. d. c. e m. m. c. de expressões algébricas

Determinar o m.d.c. e o m.m.c. das seguintes expressões algébricas:

246. $12a^2x^3$, $9a^3x^2$
247. $28a^3b^2c^5$, $42a^2b^3c^5$
248. $30a^4y^5$, $60a^2y^3$, $120a^3y^4$
249. $7x^2y^5z$, $14x^3y^2$, $21x^4y^3z^2$, $28x^5yz^3$
250. $3x$, $4x$, $12x$, $36x$, $144x$
251. $6(a+b)$, $2(a+b)^2$, $4(a+b)^3$
252. a^2-b^2, $(a+b)^2$
253. a^2-b^2, a^3-b^3 (*)
254. $a^2+2ab+b^2$, a^2-b^2, $a+b$
255. $1+x$, $1-x^2$, $1+2x+x^2$
256. $16a^4-1$, $4a^2-1$, $14a^2-7a$
257. $1+2y$, $1+8y^3$, $4y^2-1$
258. x^2+x-42, $x^2+5x-14$, $3x+21$
259. $5x^2-5$, $8x^2+8x$
260. m^2+m-2, m^2-4, $3(m+2)$
261. $xy+y^2$, x^2+xy, x^2y+xy^2
262. a^2-ab, a^3-ab^2, a^2b-ab^2
263. x^2-4x+3, x^2-5x+6, x^2+x-12
264. $ab(a-c)(a-b)$, $bc(c-a)(c-b)$
265. y^3-1, y^4-1, $5y^2-5$, ay^2-a

RESPOSTAS:

O primeiro resultado indica o m.d.c. e o segundo o m.m.c.

246. $3a^2x^2$; $36a^3x^3$
247. $14a^2b^2c^5$; $84a^3b^3c^5$
248. $30a^2y^3$; $120a^4y^5$
249. $7x^2y$; $84x^5y^5z^3$
250. x; $144x$
251. $2(a+b)$; $12(a+b)^3$
252. $(a+b)$; $(a+b)^2(a-b)$
253. $(a-b)$; $(a^3-b^3)(a+b)$
254. $(a+b)$; $(a+b)^2(a-b)$
255. $(1+x)$; $(1+x)^2(1-x)$

(*) Para fatorar expressões das formas: a^3-b^3 e a^3+b^3, aplicam-se, respectivamente as identidades:
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

256. $2a - 1$; $7a\,(16a^4 - 1)$
257. $2y+1$; $(8y^3+1)\,(2y-1)$
258. $x+7$; $3\,(x+7)\,(x-6)\,(x-2)$
259. $x+1$; $40x\,(x^2-1)$
260. $m+2$; $3(m+2)^2\,(m-2)\,(m-1)$
261. $x+y$; $xy\,(x+y)$
262. $a-b$; $ab\,(a+b)\,(a-b)$
263. $x-3$; $(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x+4)$
264. $b\,(c-a)$; $abc\,(c-a)\,(a-b)\,(c-b)$
265. $y-1$; $5a\,(y^4-1)\,(y^2+y+1)$

Simplificação de frações algébricas

Simplificar as seguintes frações:

266. $\dfrac{15amx^3}{40bmx}$

267. $\dfrac{18cd^4}{27c^2d^3}$

268. $\dfrac{85a^2b}{51b^2c}$

269. $\dfrac{-12acx^2}{26a^2c^2x}$

270. $\dfrac{84a^3b^2x}{35a^4bx^2}$

271. $\dfrac{38m^3n^4r^2}{57m^4n^4r}$

272. $\dfrac{b+b^2}{a+ab}$

273. $\dfrac{2m+m^2}{2n+mn}$

274. $\dfrac{a+ax}{a-ax}$

275. $\dfrac{mx^2-m^3}{nx^2-m^2n}$

276. $\dfrac{mxy-nxy}{m-n}$

277. $\dfrac{35xz-45yz}{7x-9y}$

278. $\dfrac{28x^3-49x^3+77x}{4x^2-7x+11}$

279. $\dfrac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$

280. $\dfrac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$

281. $\dfrac{10x^2-2xy}{15xy-3y^2}$

282. $\dfrac{3a^2b-5ab^2}{3acd-5bcd}$

283. $\dfrac{4m^2-25}{2m+5}$

284. $\dfrac{8a^3+1}{64a^6-1}$

285. $\dfrac{4\,(a+b)^2}{5\,(a^2-b^2)}$

286. $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$

287. $\dfrac{a^3+3a^2}{a^2-9}$

288. $\dfrac{a^2-4}{a^2+2a}$

289. $\dfrac{2mx-10x}{m^2-25}$

290. $\dfrac{10x^3+x^3y}{100-y^2}$

291. $\dfrac{7a^3x+7ax^3}{a^4-x^4}$

292. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$

293. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

294. $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2b-ab^2}$

295. $\dfrac{a^2-1}{4a^2-8a+4}$

296. $\dfrac{(a+b)^2-4ab}{2a-2b}$

297. $\dfrac{(x^5+1)-(x^3+1)}{x^2-1}$

RESPOSTAS:

266. $\dfrac{3ax^2}{8b}$

267. $\dfrac{2d}{3c}$

268. $\dfrac{5a^2}{3bc}$

269. $\dfrac{-6x}{13ac}$

270. $\dfrac{12b}{5ax}$

271. $\dfrac{2r}{3m}$

272. $\dfrac{b}{a}$

273. $\dfrac{m}{n}$

274. $\dfrac{1+x}{1-x}$

275. $\dfrac{m}{n}$

276. xy

277. $5z$

278. $7x$

279. $\dfrac{2a}{3b}$

280. $\dfrac{x}{y}$

281. $\dfrac{2x}{3y}$

282. $\dfrac{ab}{cd}$

283. $2m-5$

284. $\dfrac{1}{8a^3-1}$

285. $\dfrac{4\,(a+b)}{5\,(a-b)}$

286. $\dfrac{a-1}{a+1}$

287. $\dfrac{a^2}{a-3}$

288. $\dfrac{a-2}{a}$

289. $\dfrac{2x}{m+5}$

290. $\dfrac{x^3}{10-y}$

291. $\dfrac{7ax}{a^2-x^2}$

292. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

293. $\dfrac{x+2}{x-2}$

294. $\dfrac{4}{a-b}$

295. $\dfrac{a+1}{4\,(a-1)}$

296. $\dfrac{a-b}{2}$

297. x^3

Redução de frações algébricas ao mesmo denominador

Reduzir ao mesmo denominador (usando o m. m.ºc.) as seguintes frações:

298. $\frac{1}{2a}$; $\frac{5}{a}$; $\frac{3}{a^2}$

299. $\frac{-3}{5a^2b}$; $\frac{2}{ab^2c}$; $\frac{-20}{bc^3}$

300. $\frac{x}{a-b}$; $\frac{y}{a+b}$

301. $\frac{a}{a-b}$; $\frac{5b}{2a-2b}$

302. $\frac{2a}{4a^2-9}$; $\frac{-a}{2a-3}$

303. $\frac{x+1}{x^2+x-2}$; $\frac{x-1}{x^2+2x+4}$

304. $\frac{x^2}{x^2-y^2}$; $\frac{x}{x+y}$

305. $\frac{a}{a-b}$; $\frac{b}{(a-b)^2}$

306. $\frac{-1}{1-x^2}$; $\frac{2}{1+x}$; $\frac{-3}{1-x}$

RESPOSTAS:

298. $\frac{a}{2a^2}$; $\frac{10a}{2a^2}$; $\frac{6}{2a^2}$

299. $\frac{-3bc^3}{5a^2b^2c^3}$; $\frac{10ac^2}{5a^2b^2c^3}$; $\frac{-100a^2b}{5a^2b^2c^3}$

300. $\frac{x(a+b)}{a^2-b^2}$; $\frac{y(a-b)}{a^2-b^2}$

301. $\frac{2a}{2(a-b)}$; $\frac{5b}{2(a-b)}$

302. $\frac{2a}{4a^2-9}$; $\frac{-a(2a+3)}{4a^2-9}$

303. $\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2(x-1)}$; $\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2(x-1)}$

304. $\frac{x^2}{x^2-y^2}$; $\frac{x(x-y)}{x^2-y^2}$

305. $\frac{a(a-b)}{(a-b)^2}$; $\frac{b}{(a-b)^2}$

306. $\frac{-1}{1-x^2}$; $\frac{2(1-x)}{1-x^2}$; $\frac{-3(1+x)}{1-x^2}$

Operações com as frações algébricas

Efetuar as seguintes operações (soma algébrica):

307. $\frac{x}{5}+\frac{x}{6}$

308. $\frac{2m}{5}+m$

309. $\frac{a}{3}+\frac{a}{4}-\frac{a}{12}$

310. $\frac{2x}{3}+\frac{7x}{6}-\frac{x}{2}$

311. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

312. $\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$

313. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$

314. $\frac{c}{b}-\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1$

315. $\frac{8m^2}{12m}-\frac{n^2}{m^2}$

316. $\frac{a+1}{3}+\frac{a-2}{15}$

317. $m-\frac{m+n}{2}$

318. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ac}+\frac{a-b}{ab}$

319. $\frac{a-b}{2b}-5+\frac{3ab-b^2}{b^2}$

320. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$

321. $x-\frac{x}{x-1}$

322. $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$

323. $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$

324. $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}$

325. $a-x+\frac{x^2}{a+x}$

326. $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+1$

327. $\frac{a-1}{a+2}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}$

328. $\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}+\frac{2a^2}{a^2-1}$

329. $\frac{2b-x}{x-b}+\frac{b-2x}{x+b}+\frac{3x(x-b)}{x^2-b^2}$

330. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$

331. $\frac{6}{1+x}-\frac{4}{1-x}-\frac{10x}{x^2-1}$

RESPOSTAS:

307. $\frac{11x}{30}$

308. $\frac{7m}{5}$

309. $\frac{a}{2}$

310. $\frac{4x}{3}$

311. 1

312. $a+b$

313. $\frac{(a+b)^2}{ab}$

314. $\frac{(b+c)(a-b)}{ab}$

315. $\frac{2m^3-3n^2}{3m^2}$

316. $\frac{2a+1}{5}$

317. $\frac{m-n}{2}$

318. 0

319. $\frac{7a-13b}{2b}$

320. $\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

321. $\dfrac{x(x-2)}{x-1}$

322. $\dfrac{1}{x-y}$

323. $\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

324. $\dfrac{2(1+x^2)}{1-x^2}$

325. $\dfrac{a^2}{a+x}$

326. $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

327. $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

328. $\dfrac{2a}{a-1}$

329. $\dfrac{b}{x-b}$

330. 1

331. $\dfrac{2}{1-x^2}$

Efetuar as multiplicações:

332. $\dfrac{a}{2x}\times\dfrac{x}{2a}$

333. $\dfrac{5}{8}x^2y^2\times\dfrac{-8xy}{3}$

334. $\dfrac{3a^2b}{4}\times\dfrac{-4b^2c}{5}\times\dfrac{-5ac}{3}$

335. $\dfrac{x+y}{x-y}\times\dfrac{x-y}{x+y}$

336. $\dfrac{2x}{x-y}\times\dfrac{x^2-y^2}{8}$

337. $\dfrac{a-b}{3a}\times\dfrac{3b}{a-b}$

338. $\dfrac{m+n}{3b}\times\dfrac{m-n}{2(m+n)}$

339. $\dfrac{ax}{a+x}\times\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)$

340. $\left(a+\dfrac{m}{x}\right)\times\left(a-\dfrac{m}{x}\right)$

341. $\dfrac{a+2}{a^2-4x^2}\times(a+2x)$

342. $\dfrac{b^2-3}{5bc}\times\dfrac{15c^3}{7b^4-21b^2}$

343. $\left(a^2-x+\dfrac{2x^2}{a^2+x}\right)\left(a^2+x\right)$

RESPOSTAS:

332. $\dfrac{1}{4}$

333. $-\dfrac{5x^3y^3}{3}$

334. $a^3b^3c^2$

335. 1

336. $\dfrac{x(x+y)}{4}$

337. $\dfrac{b}{a}$

338. $\dfrac{m-n}{6b}$

339. $x-a$

340. $\dfrac{a^2x^2-m^2}{x^2}$

341. $\dfrac{a+2}{a-2x}$

342. $\dfrac{3c^2}{7b^3}$

343. a^4+x^2

Efetuar as divisões:

344. $\dfrac{3a}{b}:\dfrac{a}{2}$

345. $\dfrac{8a^2}{2b}:4a$

346. $4ab:\dfrac{b}{a}$

347. $\dfrac{4a^2b}{5x^2y}:\dfrac{-2ab^2}{15x^2y}$

348. $\dfrac{m}{m+n}:\dfrac{m}{n}$

349. $\dfrac{x+y}{x-y}:\dfrac{1}{x-y}$

350. $\dfrac{1}{x^2-y^2}:\dfrac{1}{x-y}$

351. $(x+y):\dfrac{x+y}{x-y}$

352. $\left(a+\dfrac{b}{c}\right):\left(a-\dfrac{b}{c}\right)$

353. $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

354. $\dfrac{4b^2}{a^2-b^2}:\dfrac{4a^2}{a^2+2ab+b^2}$

355. $\left(1+\dfrac{x-a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{x-a}-1\right)$

356. $\dfrac{8x^3}{x^3-y^3}:\dfrac{4x^2}{x^2+xy+y^2}$

RESPOSTAS:

344. $\dfrac{6}{b}$

345. $\dfrac{a}{b}$

346. $4a^2$

347. $\dfrac{-6a}{b}$

348. $\dfrac{n}{m+n}$

349. $x+y$

350. $\dfrac{1}{x+y}$

351. $x-y$

352. $\dfrac{ac+b}{ac-b}$

353. $\dfrac{x}{y}$

354. $\dfrac{b^2(a+b)}{a^2(a-b)}$

355. $\dfrac{x(x-a)}{a(x+a)}$

356. $\dfrac{2x}{x-y}$

Equações do 1.º grau com uma incógnita

Resolver as seguintes *equações numéricas*:

357. $5x-4=4x+13$
358. $9x+8=7x+16$
359. $17x-1=3+5x$
360. $13+23x=49x-13$
361. $4x-7=8x-9$
362. $19+8x=12x+14$
363. $3(x-1)=x+11$
364. $5(1+4x)=7+12x$
365. $x-2(x-3)=3x-2$
366. $3(2x-19)-(x-2)=0$

367. $4(x+3) - 2(x-2) = 3(x+5) - 3(x-3)$

368. $\frac{x}{3} + 8 = 13$

369. $\frac{2x}{5} - 1 = \frac{x}{4} + 2$

370. $\frac{x+17}{2} = 17x - 8$

371. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$

372. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$

373. $\frac{x}{2} + 9 + x - 4 = \frac{2x}{3}$

374. $\frac{7+9x}{4} - 7x = 1 - \frac{2-x}{9}$

375. $\frac{3x+1}{13} - \frac{4x-1}{5} = \frac{2-x}{2} - \frac{2x-5}{3}$

376. $x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}$

377. $\frac{27-x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{10}(7x-54)$

378. $\frac{1}{6}(8-x) + x - \left(1 + \frac{2x}{3}\right) = \frac{1}{2}(x+6) + \frac{x}{3}$

379. $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

380. $\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5}\right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$

381. $\frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{15} - \frac{x}{9}$

382. $\frac{1}{2}(27-2x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}(7x-54) - 6$

383. $\frac{\frac{x}{2} - 2}{4} - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{2x-1}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{8}\right)$

384. $\frac{x + \frac{1}{2}}{2} + \frac{2x-1}{4} = x + \frac{\frac{x}{3} - \frac{1}{2}}{8}$

385. $\frac{1}{9} \cdot \left[3x - 6 - 5\left(\frac{7x}{2} - 5\right)\right] + 13(x-5) + \frac{1}{4} = 0$

386. $\frac{5x}{3} - 6\left(\frac{x}{3} + \frac{4x}{9} - x\right) + 2x = 450\,000$

387. $(2x-3)(x-1) - 2x^2 = 0$

388. $(2x-3)^2 - 4(x-2)^2 = 0$

389. $(x+8)^2 - x^2 = 200$

390. $(1+6x)^2 + (2+8x)^2 = (1+10x)^2$

391. $(x+2)(x+3) = x^2 + 21$

392. $\frac{3x-10}{4} - 1 + \frac{2(x+2)}{6} = \frac{2x-4}{8} + \frac{0{,}12}{0{,}02}$

393. $\frac{x-2}{4} + \frac{1}{3} - \left(x - \frac{2x-1}{3}\right) = 0$

Respostas:

357. 17
358. 4
359. $\frac{1}{3}$
360. 1
361. $\frac{1}{2}$
362. $\frac{5}{4}$
363. 7
364. $\frac{1}{4}$
365. 2
366. 11
367. 4
368. 15
369. 20
370. 1
371. 36
372. 6
373. -6
374. $\frac{1}{5}$
375. 4
376. 3
377. 12
378. -4
379. $\frac{3}{5}$
380. 17
381. $\frac{3}{5}$
382. 32
383. -6
384. $\frac{3}{2}$
385. $\frac{11}{2}$
386. 90 000
387. $\frac{3}{5}$
388. $\frac{7}{4}$
389. $\frac{17}{2}$
390. $\frac{-1}{6}$
391. 3
392. 10
393. -6

Resolver as seguintes *equações fracionárias*:

394. $\frac{9}{x} - \frac{4}{9} = \frac{10}{x} - \frac{1}{2}$

395. $\frac{7}{x} + \frac{1}{3} = \frac{23-x}{3x} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4x}$

396. $\frac{x-4}{x-8} = 9$

397. $\frac{3x+6}{3} - 8 = \frac{x^2-10}{x} + 2$

398. $\frac{x+4}{x+3}+\frac{10}{x^2-9}=\frac{x+2}{x-3}$

399. $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x^2-14x+6}{x^2-4}$

400. $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}$

401. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-3}=\frac{2x^2-4x-7}{x^2-5x+6}$

402. $\frac{4x^2}{4x^2-4}+\frac{6}{2x+2}=\frac{x+1}{x-1}$

403. $\frac{x^2}{x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x^2}{x-1}+x-\frac{x}{2}$

404. $\frac{x^2-x+1}{x-1}-2x=-\frac{x^2+x+1}{x+1}$

405. $\frac{2x-3}{x-4}-\frac{2}{x-4}=\frac{2x+1}{x-1}$

406. $\frac{x+3}{x+1}-\frac{2}{x+1}=\frac{x+3}{x-2}$

407. $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$

RESPOSTAS:

394. 18
395. 5
396. $8\frac{1}{2}$
397. $\frac{5}{4}$
398. -2
399. $\frac{8}{3}$
400. $\frac{4}{3}$
401. $\frac{7}{2}$
402. 4
403. identidade
404. 0
405. impossível ($x=4$)(*)
406. impossível ($x=-1$)
407. 30

Resolver, *discutindo*, as seguintes equações literais:

408. $ax-x=a+1$
409. $ax-a^2=x-1$
410. $ax-a^2=4x-16$
411. $ax-bx=5$
412. $ax-2a^2=bx-2b^2$
413. $ax-b^2+2ab=a^2+bx$

414. $\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1 \quad (a\neq 0;\ b\neq 0)$

415. $\frac{ax}{b}-\frac{bx-1}{a}=\frac{1}{b} \quad (a\neq 0;\ b\neq 0)$

416. $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=2 \quad (a\neq \pm b)$

417. $\frac{x-a}{a-b}-\frac{x-a}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2} \quad (a\neq \pm b)$

(*) São valores que anulam o denominador.

418. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab} \quad (a\neq 0;\ b\neq 0)$

419. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{4a^2}{x^2-a^2}=\frac{x-a}{x+a} \quad (x\neq \pm a)$

420. $\frac{a^2b-x}{a}+\frac{b^2c-x}{b}=\frac{x-ac^2}{c} \quad (a\neq 0;\ b\neq 0;\ c\neq 0)$

RESPOSTAS:

408. $x=\frac{a+1}{a-1}$, p/ $a\neq 1$, possível e $a=1$ impossível
409. $x=a+1$, p/ $a\neq 1$, possível e $a=1$ identidade
410. $x=a+4$, p/ $a\neq 4$, possível e $a=4$ identidade
411. $x=\frac{5}{a-b}$, p/ $a\neq b$, possível e $a=b$ impossível
412. $x=2(a+b)$, p/ $a\neq b$, possível e $a=b$ identidade
413. $x=a-b$, p/ $a\neq b$, possível e $a=b$ identidade
414. $x=\frac{ab}{b-a}$, p/ $a\neq b$, possível, $a=b$, impossível.
415. $x=\frac{a-b}{a^2-b^2}$ p/ $a\neq \pm b$, possível; $a=b$, identidade e $a=-b$, impos.
416. $x=\frac{a^2-b^2}{a}$, p/ $a\neq 0$, possível, $a=0$, impossível.
417. $x=\frac{ab}{b-a}$, como $b\neq \pm a$, esta equação é *sempre possível*.
418. $x=\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}$, $a\neq -b$, possível $=-b$, impossível.
419. Impossível ($x=a$)
420. $x=abc$, sempre possível.

Inequações do 1.º grau com uma incógnita

Resolver as seguintes inequações:

421. $(x-2)>3(2x-19)$
422. $5(1+4x)>7+12x$
423. $11(2x-15)<x+3$
424. $2(x-6)<3x-19$
425. $\frac{15x-4}{2}<1+6x$

426. $\frac{x-5}{3} - \frac{x-8}{4} < 0$

427. $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} < 7 - \frac{4+x}{4}$

428. $\frac{(3x-7)(3x+7)}{6} < \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(2x+1)^2}{4}$

RESPOSTAS:

421. $x < 11$

422. $x > \frac{1}{4}$

423. $x < 8$

424. $x > 7$

425. $x < 2$

426. $x < -4$

427. $x < 8$

428. $x < \frac{125}{12}$

Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

Resolver os seguintes sistemas:

429. $\begin{cases} x+y = 19 \\ x-y = 11 \end{cases}$

430. $\begin{cases} 2x+y = 17 \\ 2y-x = 9 \end{cases}$

431. $\begin{cases} 3x-2y = 1 \\ 3y-2x = 6 \end{cases}$

432. $\begin{cases} 5x-31 = 3y \\ 3(x+2) = 10y \end{cases}$

433. $\begin{cases} 3(3+x) = 4y \\ 12y-5 = 9x \end{cases}$

434. $\begin{cases} x+3y = 11 \\ 5y-68 = 3(x-1) \end{cases}$

435. $\begin{cases} 3x = 4y \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 9 \end{cases}$

436. $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{10} = 2 \\ x + \frac{7y}{5} = -9 \end{cases}$

437. $\begin{cases} 9x - 17 = \frac{37y}{13} \\ 2y - \frac{25x}{2} = -49 \end{cases}$

438. $\begin{cases} \frac{5x}{4} + \frac{3y}{2} = 9 \\ \frac{17y}{2} - \frac{3x}{4} = 4 \end{cases}$

439. $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{7x-5y}{6} + \frac{x+4}{4} \\ \frac{x-6y}{2} = \frac{x-2y}{7} + 4 \end{cases}$

440. $\begin{cases} y = x \\ \frac{2x-5y}{3} - \frac{3x+8y}{11} = -56 \end{cases}$

441. $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{9} = \frac{22}{21} \\ \frac{x}{8} - \frac{y}{12} = \frac{3}{8} \end{cases}$

442. $\begin{cases} \frac{5x-y}{3} = 5 \\ \frac{4x+3y}{4} = 2x - \frac{1}{4} \end{cases}$

443. $\begin{cases} \frac{3x+2}{4} + \frac{2y+3}{5} = 0 \\ \frac{3(x+1)+2(y+1)}{4} = \frac{x}{4} + \frac{y+2}{3} = 0 \end{cases}$

444. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{3x-3y} \\ \frac{x+1}{2y-3} + 8 = \frac{22}{6y-9} \end{cases}$

445. $\begin{cases} 3x+2y = 2a \\ \frac{x-2}{a-5} = \frac{5}{6} - \frac{y+3}{a+5} \quad (a \neq \pm 5) \end{cases}$

446. $\begin{cases} \frac{4x-3y-7}{5} = \frac{3x}{10} - \frac{2y+41}{15} \\ \frac{y-1}{3} + \frac{x}{2} - \frac{2y}{30} = \frac{y-x}{15} + \frac{5x+44}{30} \end{cases}$

447. $\begin{cases} \frac{2x-y}{x-y} = \frac{8}{5} \\ \frac{2x+y}{x+1} = 4 \end{cases}$

448. $\begin{cases} \frac{x-3}{14} = \frac{2y-1}{10} \\ 3(x-3) - 8\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$

449. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{3y+1}{6} = \frac{6x-6y-5}{2} \end{cases}$

450. $\begin{cases} 5x-3y = 1 \\ \frac{x-2}{4} + \frac{y-3}{8} + 1 = \frac{x}{2} \end{cases}$

451. $\begin{cases} \frac{x-1-4y}{5} + \frac{2x+y-3}{10} = \frac{1}{8} \\ 2x - \frac{15-(3x+4y)}{2} = 0 \end{cases}$

452. $\begin{cases} \frac{2x-1}{5y+1} = \frac{5}{6} \\ \frac{3x+2y-10}{4x-5y+1} = \frac{1}{8} \end{cases}$

453. $\begin{cases} \frac{1+x}{1+2x} + \frac{1+y}{1+2y} = 1 \\ x-2y = 3 \end{cases}$

454. $\begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases}$

455. $\begin{cases} ax+2y = 5 \\ 2x+ay = 3a+1 \end{cases}$

456. $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (a \neq 0;\ b \neq 0) \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$

457. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b} + \dfrac{y+b}{a} = 2 \quad (a \neq 0;\ b \neq 0) \\ \dfrac{x+y}{a} + \dfrac{x-y}{b} = 4 \end{cases}$

458. $\begin{cases} x+y = s \\ ax - by = 0 \end{cases}$

459. $\begin{cases} x - \dfrac{a}{b} = 1 + \dfrac{ay}{b} \quad (a \neq 0;\ b \neq 0) \\ x - \dfrac{a}{b} + y + \dfrac{b}{a} = 0 \end{cases}$

460. $\begin{cases} (a-1)x + 3(6-a)y = 5a^2 - 80 \\ x + (a-2)y = a^2 - 16 \end{cases}$

461. $\begin{cases} \dfrac{x}{2b} + \dfrac{y}{2a} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} \quad (a \neq 0;\ b \neq 0) \\ \dfrac{x+y}{2a} - \dfrac{y-x}{2b} = \dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{cases}$

462. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = m \ (*) \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = n \end{cases}$

463. $\begin{cases} \dfrac{bx}{a+b} + \dfrac{ay}{a-b} = \dfrac{1}{a-b} \quad (a \neq \pm b) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a+b}{a-b} \end{cases}$

RESPOSTAS:

429. $x = 15;\ y = 4$
430. $x = 5;\ y = 7$
431. $x = 3;\ y = 4$
432. $x = 8;\ y = 3$
433. impossível
434. $x = -10;\ y = 7$
435. $x = 12;\ y = 9$
436. $x = 5;\ y = -10$
437. $x = 6;\ y = 13$
438. $x = 6;\ y = 1$

(*) *Sugestão:* Fazer a substituição: $\dfrac{3}{x-y} = u$ e $\dfrac{3}{x+y} = v$. Obtém-se um sistema em u e v que, resolvido, permite determinar x e y. (Ver Apêndice de Álgebra, pág. 179).

439. $x = -4;\ y = -2$
440. $x = y = 28$
441. $x = 5;\ y = 3$
442. $x = 4;\ y = 5$
443. $x = -\dfrac{2}{3};\ y = -\dfrac{3}{2}$
444. $x = \dfrac{65}{9};\ y = \dfrac{13}{9}$
445. $x = \dfrac{a+1}{3};\ y = \dfrac{a-1}{2}$
446. $x = 2;\ y = 5$
447. $x = -\dfrac{3}{2};\ y = 1$
448. $x = 10;\ y = 3$
449. $x = \dfrac{1}{2};\ y = -\dfrac{1}{3}$
450. $x = 2;\ y = 3$
451. $x = 2;\ y = \dfrac{1}{4}$
452. $x = 3;\ y = 1$
453. $x = \dfrac{1}{3};\ y = -\dfrac{4}{3}$
454. $x = \dfrac{a+b}{2};\ y = \dfrac{a-b}{2}$
455. $x = \dfrac{-1}{a-2},\ y = \dfrac{3a-5}{a-2}$ (possível p/ $a \neq 2$, impossível p/ $a = 2$)
456. $x = y = \dfrac{ab}{a+b}$ (possível p/ $a \neq -b$, impossível p/ $a = -b$)
457. $x = a + b,\ y = a - b$
458. $x = \dfrac{sb}{a+b},\ y = \dfrac{sa}{a+b}$ (possível p/ $a \neq -b$, indeterminado p/ $a = b = 0$, impossível p/ $a = -b$)
459. $x = \dfrac{a}{b},\ y = -\dfrac{b}{a}$
460. $x = 8a - 28,\ y = a - 6$
461. $x = 2a,\ y = 2b$
462. $x = \dfrac{2m}{m^2-n^2},\ y = \dfrac{2n}{m^2-n^2}$ (possível p/ $m \neq \pm n$, p/ $m = n = 0$, indeterminado)
463. $x = \dfrac{1}{a-b},\ y = \dfrac{1}{a+b}$ (possível p/ $a \neq \pm b$)

Problemas do 1.º grau com uma e duas incógnitas

Resolver os seguintes problemas do 1.º grau com uma incógnita:

464. Qual é o número que, aumentado de 12, resulta para soma 21?
465. Determinar um número que somado com o seu décuplo resulta 33.

466. A idade de Luís somada com a de Roberto resulta 78; Sabendo-se que a idade de Luís é o quíntuplo da de Roberto, qual a idade de cada um?

467. A soma das idades de dois irmãos é 17 anos. Um dêles tinha 5 anos quando o outro nasceu. Qual a idade de cada um?

468. Repartir Cr$ 4 317,00 entre três pessoas de modo que a segunda receba Cr$ 528,00 mais que a primeira e a terceira Cr$ 315,00 mais do que a segunda.

469.(*) Paulo viveu 1/6 de sua vida em Campinas, 2/3 no Recife tendo a seguir se mudado para Curitiba, onde viveu os 9 últimos anos de sua vida. Quantos anos viveu?

470. Qual é o número cujo dôbro somado com 5 é igual ao seu triplo menos 19?

471. Achar três números ímpares consecutivos cuja soma seja igual a 909.

472. Determinar quatro números pares consecutivos que tenham por soma 1 028.

473. Achar um número de dois algarismos sabendo-se que a soma dos valores absolutos de seus algarismos é 8 e que, trocando-se a ordem dêsses algarismos, o número obtido ultrapassa de 18 o número primitivo.

474. A idade de um pai é o triplo da do filho. Qual é a idade do pai, sabendo-se que daqui a 15 anos ela será o dôbro da idade da do filho?

475. A diferença entre dois números é 42. Aumentando-se 8 em cada um dêles o maior torna-se o quádruplo do menor. Quais são êsses números?

476. A soma de dois números é 70. Seu quociente exato é 6. Quais são êsses números?

477. A diferença de dois números é 512. Dividindo-se o maior pelo menor obtém-se 15 para quociente e 8 para resto. Determinar os dois números.

478. Repartir Cr$ 85,00 entre três meninos de modo que o segundo receba Cr$ 7,00 menos que o primeiro e Cr$ 15,00 mais que o terceiro.

479. Doze carteiras e dezesseis camisas de linho foram vendidas por Cr$ 32 400,00. Qual é o preço de cada um dêsses artigos se o preço de uma carteira é Cr$ 450,00 menos que o preço de uma camisa?

480. Repartir Cr$ 1 836,00 entre duas pessoas de modo que a parte da primeira exceda a segunda de $\frac{1}{4}$ desta.

481. Qual é o número cujos $\frac{2}{3}$ mais os seus $\frac{3}{4}$ vale 170?

(*) Problema análogo ao histórico problema que pretendeu determinar a idade de *Diofanto* (matemático grego que viveu no sec. II a. C.).

482. Qual é o número cuja soma dos quocientes dêle por 12, por 9, por 8 e por 16 é 55?

483. Qual é o número cujos $\frac{2}{7}$ aumentados de 15, mais os $\frac{3}{4}$ diminuídos de 8, resultam 239?

484. Acrescentando-se a um número a sua metade, a sua têrça parte e a sua duodécima parte obtém-se por soma 46. Determinar êste número.

485. Juntando-se 8 aos $\frac{3}{5}$ de um número obtém-se uma soma igual à diferença entre os $\frac{9}{10}$ do mesmo número e 13. Determinar o número.

486. A diferença entre um número x e um outro número p é igual ao quociente entre o mesmo número e p. Determinar o número e estudar o caso particular de $p = 2$.

487. O perímetro de um triângulo é igual a 24m. Calcular o valor de seus lados sabendo-se que são três números pares consecutivos.

488. O perímetro de um campo retangular é 670m. O comprimento ultrapassa a largura de 35m. Vendeu-se 1 hectare dêsse campo. Calcular a área da parte restante.

489. Um jardim retangular tem um comprimento de 28m. Aumenta-se esta dimensão de 1m e diminui-se outro tanto na largura. Sabendo-se que a área do jardim diminuiu de 14m² com estas alterações, pede-se o valor da largura.

490. Um trem trafegou durante 13 horas. Se tivesse trafegado uma hora menos e aumentado a sua velocidade de 5km percorreria 5km menos. Qual é a sua velocidade?

Resolver os seguintes problemas do 1.º grau com duas incógnita:

491. A soma de dois números é 444, o quociente entre êles 4 e o resto da divisão 24. Quais são êsses números?

492. A soma de dois números é 192 e a diferença entre êles, 190. Quais são os números?

493. Por 5m de uma fazenda e 4m de outra pagaram-se Cr$ 584,00. Sabendo-se que por 4m da primeira e 5m da segunda pagam-se Cr$ 568,00, dizer o preço do metro de cada fazenda.

494. Um número é formado de dois algarismos cuja soma dos seus valores absolutos é 11. Quando se trocam as posições dêsses algarismos entre si, o número obtido ultrapassa de 5 o triplo do número dado. Qual é o número?

495. Achar uma fração tal que somando-se 4 a cada um de seus têrmos ela se torna igual a $\frac{2}{3}$ e, subtraindo-se 1 a cada um de seus têrmos, torna-se igual a $\frac{1}{2}$.

496. Antônio e Benedito, juntos, ganham Cr$ 1 200,00 em 6 horas Antônio e Carlos Cr$ 1 980,00 em 9 horas; Benedito e Carlos Cr$ 2 400,00 em 15 horas. Quanto ganha cada um por hora?

497. Uma pessoa comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 130 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou?

498. Duas torneiras juntas encheum um reservatório em 8 dias. Quantos dias empregará a segunda, se a primeira sòzinha necessitaria de 16 dias?

499. As idades de duas pessoas estão entre si como 2 está para 3. Há 10 anos esta relação era igual a $\frac{1}{4}$. Achar a idade de cada uma.

500. Achar dois números que estejam na razão de a para b, e tais que, acrescentando p a cada um, as somas estejam na razão de m para n.

RESPOSTAS:

464. 9
465. 3
466. 65 anos e 13 anos
467. 6 anos e 11 anos
468. Cr$ 982,00; Cr$ 1 510,00; Cr$ 1 825,00
469. 54 anos
470. 24
471. 301, 303, 305
472. 254, 256, 258, 260
473. 35
474. 45
475. 6 e 48
476. 10 e 60
477. 36 e 548
478. Cr$ 38,00, Cr$ 31,00 e Cr$ 16,00
479. Cr$ 900,00 a carteira e Cr$ 1 350,00 a camisa.
480. Cr$ 816,00 (2.ª) e Cr$ 1 020,00 (1.ª)
481. 120
482. 144
483. 224
484. 24
485. 70
486. $x = \frac{p^2}{p-1}$, $(p \neq 1)$; para $p=2$, $x=4$
487. 6; 8 e 10m
488. 17 750m²
489. 15m
490. 65km
491. 360 e 84
492. 191 e 1.

493. Cr$ 720,00 (1.ª) e Cr$ 560,00 (2.ª)
494. 29
495. $\frac{6}{11}$
496. Cr$ 130,00 ; Cr$ 70,00 ; Cr$ 90,00
497. 31 galinhas e 17 coelhos.
498. 16 dias
499. 12 e 18 anos
500. $x = \frac{pa\,(m-n)}{na-mb}$, $y = \frac{pb\,(m-n)}{na-mb}$

HOMENS DE AMANHÃ!

Explicação e Agradecimento

Há mais de trinta e cinco anos que nossa política editorial vem sendo a de produzir livros de alto valor cultural, ou de grande utilidade prática, a preços ao alcance do poder aquisitivo médio do povo brasileiro.

Recentemente, contudo, a marcha incontrolada da inflação vem pondo em perigo essa norma de trabalho e de dedicação à causa pública, pois que torna insuficientes nossos recursos financeiros próprios. Recorremos, então, às instituições de crédito, expondo-lhes, além das garantias materiais que estávamos capacitados a oferecer, a importância de nossa presença no terreno cultural brasileiro: acima de cinqüenta por cento de todos os livros didáticos adotados no Brasil nos cursos secundário, normal e comercial, são lançados por nós, além de alta percentagem nas escolas primárias.

Quatro dêsses estabelecimentos de crédito,

Banco Nacional de Minas Gerais S. A.,
Banco da Lavoura de Minas Gerais S. A.,
Banco Português do Brasil S. A.
Banco do Estado de São Paulo S. A.,

graças ao alto espírito público de suas administrações, contribuíram pronta e substancialmente para que não modificássemos nossa política de alta qualidade a preço acessível. A êles, pois, queremos deixar consignado desta forma pública o nosso agradecimento sincero. Mais, ainda, queremos que cada estudante, cada leitor brasileiro saiba que *êste* livro, com *esta* apresentação moderna e funcional, *é fruto também dessa cooperação*, que beneficiando as partes diretamente interessadas, beneficia de modo mais amplo e não menos profundo tôda a Nação brasileira.

A DIRETORIA DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

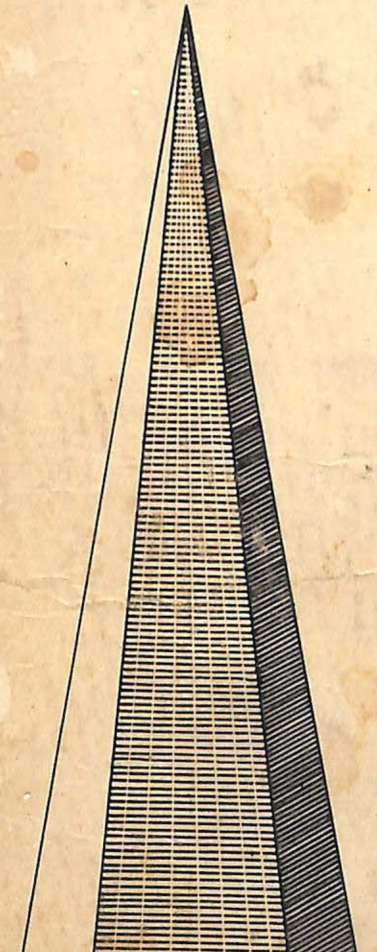
São Paulo, julho de 1960.

"O amor é como o vinho, quanto mais velho melhor"

"O amor é como uma carta, se escreve com um olhar, dobra-se com um beijo e sela-se com uma lágrima."

"Uma juventude sem amor é um carro sem motor."

"O amor é a poesia da vida e o perfume da flôr."



$$35 + \frac{4}{9}$$

0, −1, −2, −3, −4, −5, . . .

São Paulo Editora S.A. imprimiu