

OSVALDO SANGIORGI

VOLUME 2

para os ginásios

mate
máti

ca $\neq \neq \rightarrow \neq$

curso

moderno

SEGUNDA PARTE:

Grandezas Proporcionais.

Problemas com novas estruturas

Números proporcionais.

razões e porcentagens; Porcentagens práticas.

Novos números e novas estruturas

Números inteiros relativos.

Estrutura de ordem; valor absoluto.

SEGUNDA PARTE:

Prof. ...

TERCEIRA PARTE:

Números racionais.

Propriedades estruturais.

Operações com números inteiros

Modernos tratamentos da A

PRIMEIRA PARTE:

Conjuntos

Relações e Expressões

SEGUNDA PARTE:
Relações Binárias.
Sentenças abertas com
Sistemas de equações s
uas variáveis.
ultâneas.

MATEMÁTICA

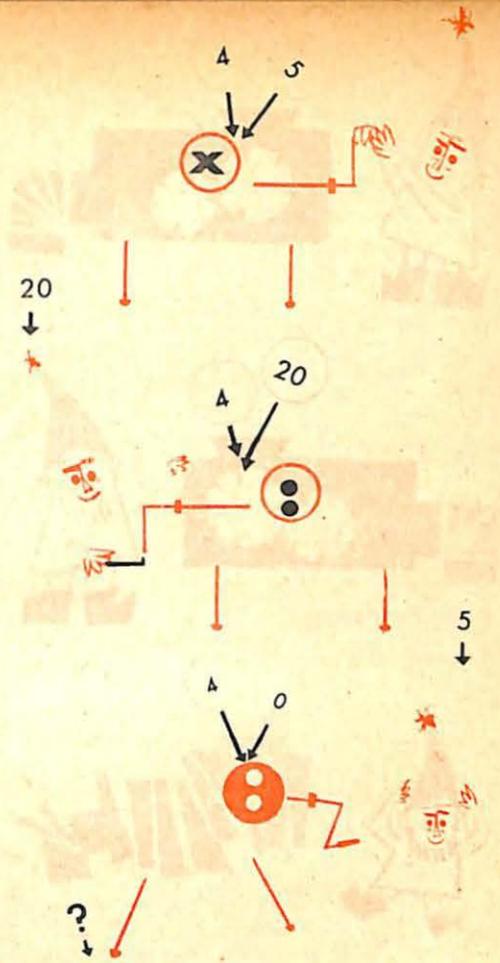
CURSO MODERNO

O autor agradece, sensibilizado, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram na feitura deste livro, em particular aos colegas do "Grupo de Estudos do Ensino da Matemática" — GEEM — pelas magníficas sugestões e discussões de certos tópicos aqui presentes.

O. S.

(Rua Macapá, 17 — S. Paulo 5, SP.)

OSVALDO
SANGIORGI



2^o VOLUME
MATEMÁTICA
CURSO MODERNO

para os ginásios

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

PROGRAMA (*)
para um
CURSO MODERNO
de
MATEMÁTICA

Para a 2.^a Série dos Cursos Ginasiais(**):

1. *razões* — número racional absoluto — razões especiais (velocidade, densidades, . . .);
2. *proporções* — propriedades — por cento — porcentagem — números proporcionais — regras de três — juros — câmbio;
3. *números racionais relativos* — conjunto dos números inteiros relativos (I_r) — operações (operações inversas) — propriedades estruturais — conjunto dos números racionais relativos (Q_r) — operações (operações inversas) — propriedades estruturais;
4. *equações e inequações do primeiro grau* — resolução de equações e inequações do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas no conjunto dos números racionais relativos (Q_r);
5. *sistemas de inequações simultâneas com duas variáveis* — variável sujeita a duas condições — resolução de sistemas de equações simultâneas do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas;
6. *sistemas de duas equações simultâneas com duas variáveis* — relações binárias — resolução de sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau, através da linguagem de sentenças matemáticas.

(*) De acordo com os *Assuntos Mínimos* para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 e as *Sugestões para desenvolvimento da Matemática*, da 2.^a Série Ginasial, publicadas pelo Departamento de Educação de São Paulo (*Diário Oficial* de 19/1/65).

(**) Designação genérica do 1.^o ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais e os Ginásios Comerciais.

Capa e ilustrações:

NESTOR BATTAGLIERO

5.^a edição

Todos os direitos reservados.
Interdita qualquer reprodução sem
permissão escrita do Autor e dos Editores.

1967

obra composta e impressa
nas oficinas da
São Paulo Editora S. A.

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

índice

CAPÍTULO **um**

CAPÍTULO **dois**

CAPÍTULO **três**

CAPÍTULO **quatro**

- { Conceito de número racional absoluto;
Operações com conjuntos, 5-12
- { Reta numerada, 17
- { Operações com números racionais;
propriedades estruturais, 22
- { Razões; aplicações, 27
- { Razões especiais: velocidade, . . . , 34
- { Proporções; propriedades, 38-40
- { Proporções especiais: médias, . . . ; transformações, 44-49
- { Por cento; Porcentagem, 56-60

- { Números proporcionais, 73-74
- { Problemas com novas estruturas, 79
- { Grandezas proporcionais, 86
- { Regras de três (R3S, R3C), 92
- { Juros simples, 98
- { Desconto; Câmbio, 103

- { Números inteiros relativos;
Operações com conjuntos, 111-118
- { Estrutura de ordem; valor absoluto, 122-126
- { Operações com números inteiros relativos, 129
- { Adição; propriedades estruturais; subtração, 129-135
- { Multiplicação; propriedades estruturais; divisão, 140-146
- { Potenciação; técnicas de cálculo, radiciação, 148-151
- { Conceito de número racional relativo;
Operações; propriedades estruturais, 154-161

- { Moderno tratamento da Álgebra, 169
- { Sentenças e Expressões; Sentenças abertas;
Variáveis, 169-173
- { Conjunto-Universo (U); Conjunto-Verdade (V), 174-175
- { Equações e Inequações — Equações do primeiro grau, 181-182
- { Resolução de equações no Q_r ; Técnicas, 185
- { Quantificadores; Identidade, 210
- { Inequações do primeiro grau, 213
- { Inequações simultâneas, 222
- { Técnicas operatórias, 227
- { Relações Binárias; sentenças abertas com duas variáveis, 237
- { Sistemas de equações simultâneas, 242
- { Técnica da substituição; Discussão, 247-251

- APÊNDICE: Lembrando Relações . . . , 256
- Lembrando Sentenças abertas . . . , 262
- Sistemas Matemáticos, 266

Do mesmo autor:

Guia para uso dos *Professôres* — correspondente à *Matemática, 2*
Matemática, 1 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* — correspondente à *Matemática, 1*
Matemática, 3 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* — correspondente à *Matemática, 3*
Matemática, 4 — Curso Moderno.

Guia para uso dos *Professôres* — correspondente à *Matemática, 4*
Matemática e Estatística, para os Institutos de Educação e Escolas Normais.

Programa de Admissão — parte da *Matemática Moderna* — para os ginásios
(em colaboração)

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639

São Paulo 2, SP

UMA PALAVRA PARA VOCE
QUE JÁ INICIOU O GINÁSIO...



Meu caro estudante:

Um novo mundo está à sua espera. Você, que já teve contato com a *Matemática Moderna* da 1.^a Série, irá saborear mais intensamente, agora, os seus frutos, mediante as belas *estruturas* que serão estudadas.

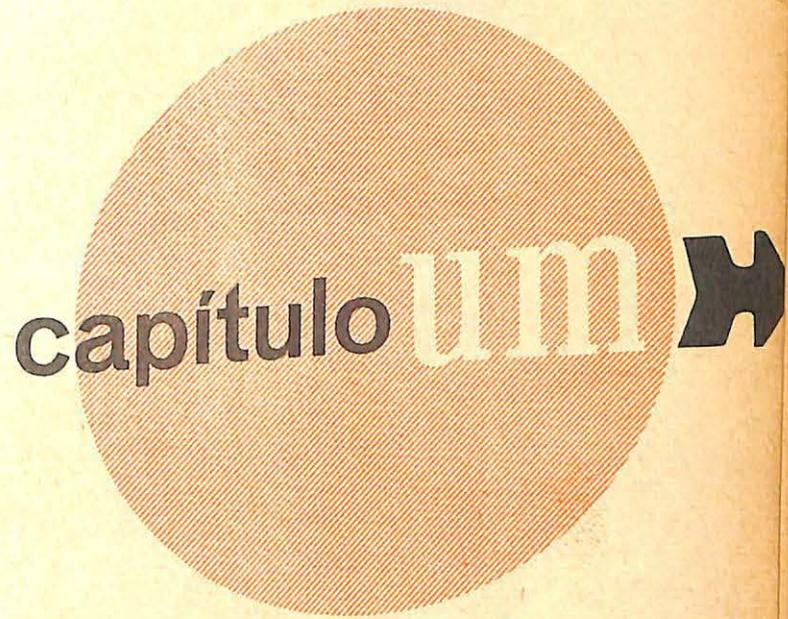
Os novos *conjuntos de números* e as importantes *relações* a serem apresentadas neste curso moderno de *Matemática* enriquecerão a sua capacidade de raciocinar, dentro do Universo dirigido pela ciência em que vive. Sabe você que, estudando a resolução de *equações* por meio da linguagem de sentenças matemáticas, virá a dominar com facilidade uma série enorme de problemas que antes lhe pareciam "inconquistáveis"?

Com a ajuda indispensável de seu professor, temos a certeza de que até o fim do ano você terá adquirido uma bagagem de informações matemáticas utilíssimas para bem conduzi-lo na vida real.

Felicidades nos estudos e até breve!

OSVALDO SANGIORGI

PRIMEIRA
Números Raci
Operação com
Propriedades Est.
Reta Numerada.
SEGUNDA PARTE
Razões e Proporr
Por cento; Porc
Aplicações pr
ais absol



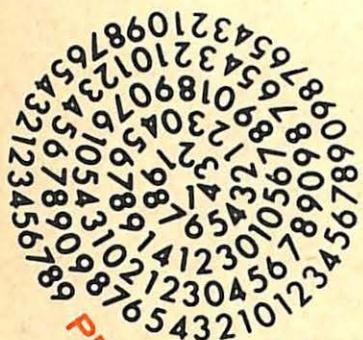


PRIMEIRA PARTE:

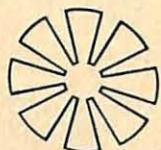
Números Racionais absolutos.
 Operação com conjuntos.
 Propriedades Estruturais.
 Reta Numerada.

SEGUNDA PARTE:

Razões e Proporções.
 Por cento; Porcentagem.
 Aplicações práticas.



PRIMEIRA PARTE



Números Racionais absolutos.
Operação com conjuntos.
Propriedades Estruturais.
Reta Numerada.



Números Racionais absolutos.

1. Conceito de número racional (*)

Ao trabalhar no importante conjunto dos números inteiros:

$$I = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

you conheceu as operações: *adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação*, com as respectivas *propriedades estruturais*.

Como aplicação foram resolvidos muitos problemas, alguns dos quais relacionados com a sua vida diária. Lembra-se?

Contudo, você estava sujeito a certas limitações, tais como: não efetuar *qualquer subtração*:

$$3 - 5 = ? \text{ (Não!)}$$

ou *qualquer divisão*:

$$2 : 3 = ? \text{ (Não!)}$$

ou mesmo *qualquer radiciação*:

$$\sqrt{5} = ? \text{ (Não!)}$$

porque no conjunto I as operações: *subtração, divisão e radiciação* não gozavam da *propriedade do fechamento*.

(*) Trata-se do número racional absoluto, para distinguir do número racional relativo.

LEMBRETE AMIGO

Você deve recordar-se que para uma operação gozar da *propriedade do fechamento* em um conjunto é necessário que, *quaisquer* que sejam os números operados, o resultado da operação *pertença* a esse conjunto. Assim, por exemplo: a *adição* e a *multiplicação*, no conjunto I , gozam da propriedade do *fechamento*, porque o resultado é *sempre* um elemento de I . Logo:

$$\text{se } 4 \in I \text{ e } 7 \in I \text{ então } \begin{cases} (4 + 7) \in I \\ (4 \times 7) \in I \end{cases}$$

Para justificar que uma operação não goza da propriedade do fechamento, basta encontrar um *contra-exemplo*, como é o caso das operações subtração e divisão, por exemplo. Assim:

$$\text{embora } 4 \in I \text{ e } 7 \in I, \text{ contudo } \begin{cases} (4 - 7) \notin I \\ (4 : 7) \notin I \end{cases}$$

Entretanto, quando você veio a conhecer os *números fracionários*, foi possível efetuar *qualquer divisão* (naturalmente com o divisor diferente de zero) e assim o resultado de $2 : 3$ — que não existia no conjunto I — passou a ser o *número fracionário* $\frac{2}{3}$.

Graças, pois, à ampliação de seu *universo de trabalho*, você pôde resolver algumas das questões que estavam “esperando” o aparecimento dos números fracionários. O mesmo ocorrerá quando você pretender efetuar qualquer subtração ou qualquer radiciação: serão necessários “novos” números, alguns dos quais você estudará ainda durante este Curso.

Voltemos para os dois conjuntos de números já conhecidos:

$$\text{o dos números inteiros: } I = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$$

e

$$\text{o dos números fracionários: } F = \left\{ \dots 0,2; \dots; \frac{1}{2}; \dots; \frac{2}{3}; \dots; \frac{7}{10}; \dots; \frac{13}{3}; \dots \right\}$$

$$\text{Vamos reuni-los: } I \cup F$$

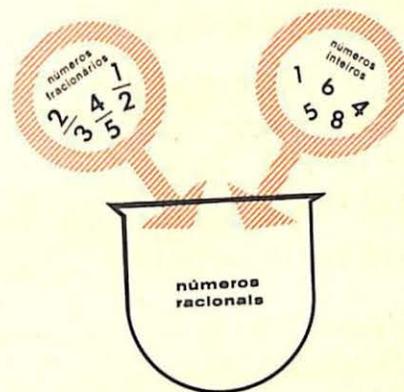
Dessa *reunião* resulta um novo conjunto denominado **conjunto dos números racionais**, que será indicado pela letra Q (inicial da palavra *quociente*, e você logo verá porque foi empregada ...).

Logo:

$$I \cup F = Q$$

e qualquer número inteiro ou número fracionário *pertencerá* ao conjunto Q e será chamado **número racional**. Assim, por exemplo:

$$3 \in Q; \frac{1}{2} \in Q; 0,7 \in Q; \frac{10}{5} \in Q; \frac{2}{9} \in Q; \frac{8}{1} \in Q; \dots$$



Na verdade, o *número racional* é o *quociente* indicado de dois números inteiros, com o segundo deles diferente de zero, pois:

o *número racional* 3 nada mais é que o *quociente* de 3 por 1: $\frac{3}{1}$

o *número racional* 0,7 nada mais é que o *quociente* de 7 por 10: $\frac{7}{10}$

Qualquer número racional pode ser sempre representado pelo símbolo

$$\frac{\square}{\Delta}$$

onde \square e Δ podem ser substituídos por números inteiros, com *exceção* de 0 para Δ . Assim:

se $\square = 6(*)$ e $\Delta = 2$, então o número racional indicado é: $\frac{6}{2}$ ou 3

se $\square = 1$ e $\Delta = 5$, então o número racional indicado é: $\frac{1}{5}$ ou 0,2

(*) Com a notação: $\square = 6$ queremos dizer que estamos *substituindo* \square por 6.

se $\square = 0$ e $\Delta = 3$, então o número racional indicado é: $\frac{0}{3}$ ou 0

Convém lembrar que quando o número racional está escrito sob a forma de numeral decimal ele pode aparecer como *decimal exato* (por exemplo: $\frac{1}{5}$ ou 0,2), ou *decimal periódico* (por exemplo: $\frac{1}{3} = 0,333\dots$).

E se você substituir Δ por 1 em $\frac{\square}{\Delta}$?

Encontrará sempre o número racional da forma $\frac{\square}{1} = \square$, que representa um *número inteiro*. Exemplo: se $\square = 8$ e $\Delta = 1$, então $\frac{\square}{\Delta} = 8$ (número inteiro).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 1

1. Escrever os números racionais $\frac{\square}{\Delta}$ nos seguintes casos, classificando-os como inteiro ou fracionário:

1.º) $\square = 6$ e $\Delta = 3$. Temos: $\frac{\square}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$; *número racional inteiro*

2.º) $\square = 2$ e $\Delta = 7$. Temos: $\frac{\square}{\Delta} = \frac{2}{7}$; *número racional fracionário*

3.º) $\square = 0$ e $\Delta = 5$. Temos: $\frac{\square}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0$; *número racional inteiro*

4.º) $\square = 3$ e $\Delta = 0$. Não existe número racional

2. Colocar os seguintes números racionais sob a forma $\frac{\square}{\Delta}$ e classificá-los a seguir:

1.º) 5. Temos: $\frac{5}{1}$; *número racional inteiro*

2.º) 0,4. Temos: $\frac{4}{10}$; *número racional fracionário*

3.º) 0,777... Temos: $\frac{7}{9}$; *número racional fracionário*

4.º) 2,35. Temos: $\frac{235}{100}$; *número racional fracionário*

3. Dado o conjunto de números racionais: $\left\{ \frac{3}{4}, 6, \frac{1}{3}, \frac{4}{2}, 0 \right\}$

destacar o conjunto de números inteiros e o conjunto de números fracionários.

Temos: conjunto de números inteiros: $\left\{ 6, \frac{4}{2}, 0 \right\}$

(lembre-se que $\frac{4}{2}$ é o número inteiro 2!)

conjunto de números fracionários: $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{3} \right\}$

4. Idem com o conjunto: $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7} \right\}$.

Temos: conjunto de número inteiros: vazio (\emptyset) "não há números inteiros no conjunto dado".

conjunto de números fracionários: $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7} \right\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 2

1. Escrever o número racional obtido em cada caso, quando se substitui em $\frac{\square}{\Delta}$, respectivamente:

1.º) \square por 4 e Δ por 2;

2.º) \square por 4 e Δ por 3;

3.º) \square por 0 e Δ por 1;

4.º) \square por 139 e Δ por 139;

5.º) \square por 2 e Δ por 100;

6.º) \square por 1,965 e Δ por 5.

2. Classificar, como inteiro ou fracionário, cada número racional do exercício anterior.

3. Na fração $\frac{a}{b}$, qualquer que seja a , se $b = 1$, que tipo de número racional ela representa? E se $a = 4$ e $b = 5$?

4. Dar exemplos de:

1.º) número racional inteiro;

2.º) número racional fracionário.

5. Dizer quais dos seguintes numerais representam números racionais inteiros e quais representam números fracionários:

1.º) $\frac{1}{5}$; 2.º) $\frac{12}{3}$; 3.º) 0,05; 4.º) 6; 5.º) 3,222...

6.º) $3\frac{1}{4}$; 7.º) 200; 8.º) 1,044.4...; 9.º) 0; 10.º) $\frac{1}{1}$.

6. Quais dos seguintes numerais não representam números racionais:

1.º) $4 \frac{1}{2}$; 2.º) $\frac{8}{0}$; 3.º) $\frac{0}{8}$; 4.º) $\frac{0}{0}$; 5.º) 13 ?

7. De cada um dos seguintes conjuntos de números racionais destacar o conjunto de números inteiros e o conjunto de números fracionários:

1.º) $\left\{ \frac{8}{2}, 5, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{12}{3}, 1 \right\}$

2.º) $\left\{ 0; 3; \frac{1}{4}; 0,555\dots; \frac{121}{11}; \frac{3}{9}; 2\frac{1}{4} \right\}$

3.º) $\left\{ \frac{3}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

4.º) $\left\{ 3, \frac{8}{4}, 12 \right\}$

5.º) $\left\{ \frac{1}{2}; 0,5; 23,2; \frac{3}{9} \right\}$

8. As operações adição e subtração gozam da *propriedade do fechamento* no conjunto I ? Justifique.

9. As operações multiplicação e divisão gozam da *propriedade do fechamento* no conjunto I ? Justifique.

10. (Cuidado!) A operação divisão goza da *propriedade do fechamento* no conjunto Q ? Justifique.

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 3

Verificar se as seguintes sentenças matemáticas são *verdadeiras* ou *falsas*. Escrever V no primeiro caso e F no segundo:

1.ª) $5 \notin Q$. 2.ª) $\frac{1}{2} \in F$. 3.ª) $0 \in I$. 4.ª) $0,5 \in I$. 5.ª) $3,2 \in Q$. 6.ª) $2\frac{1}{3} \notin Q$.

7.ª) $0,555\dots \in Q$. 8.ª) $1 \notin Q$. 9.ª) $\frac{3}{10} \in F$. 10.ª) $\frac{4}{2} \notin I$.

11.ª) Qualquer número inteiro bem como qualquer número fracionário é um número racional.

12.ª) Uma dízima periódica composta não pertence ao conjunto Q .

13.ª) O conjunto dos números racionais não é infinito.

14.ª) O conjunto dos números fracionários é infinito.

15.ª) $F \cup I = Q$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

A representação do conjunto Q dos números racionais, colocando seus elementos entre chaves, é mais delicada do que as que você tem feito até agora. Isto porque *entre* dois números racionais *quaisquer* é sempre possível colocar outro número racional.

Daí o fato de se abusar do uso das reticências na representação do conjunto Q :

$$Q = \left\{ 0, \dots, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{2}{3}, \dots, 1, \dots, \frac{3}{2}, \dots, 2, \dots, \frac{5}{2}, \dots, 3, \dots, \dots, \frac{7}{2}, \dots, 4, \dots, \frac{9}{2}, \dots, 5, \dots \right\}$$

Um conjunto nestas condições é denominado *denso* ("cheio de elementos"), pois, escritos ordenadamente dois números racionais quaisquer, por mais "próximos" que estejam, podemos *sempre* colocar um outro número racional "entre" eles. Exemplo: se você escolher os números racionais 0,523 e 0,524, existe entre eles o número racional 0,523,5!

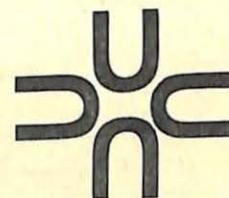
Em contraposição o conjunto I , dos números inteiros, *não* é denso, pois escolhidos dois números inteiros *convenientes*, por exemplo, 5 e 6, *não* existe nenhum número inteiro que possa ser colocado entre eles. Nesse caso o conjunto é denominado *discreto*. Logo:

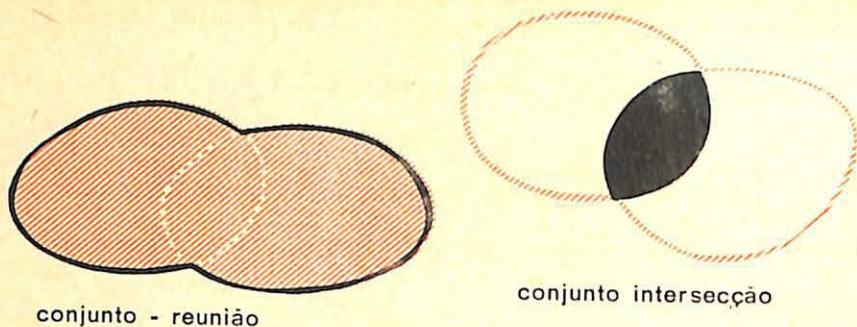
O conjunto dos números racionais é *denso*.
O conjunto dos números inteiros é *discreto*.

Muitas vezes você vai precisar trabalhar com o conjunto dos números racionais sem o 0 (zero). Nesse caso costuma-se representar tal conjunto por Q^* . Portanto:

$$Q^* = Q - \{0\}$$

lê-se: "conjunto Q estrêla."





Operações com os conjuntos estudados

Recordando as principais operações estudadas com os conjuntos: \cup (reunião) e \cap (intersecção), vamos praticá-las com os conjuntos até agora estudados. O resultado dessas operações é sempre um conjunto, finito ou infinito. Exemplos:

1.º) O conjunto-reunião dos conjuntos:

$$\left\{ 2, \frac{1}{5}, 3, 0 \right\} \text{ e } \left\{ 3, \frac{9}{2}, 0 \right\}$$

é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a um, a outro ou a ambos os conjuntos dados. Logo:

$$\left\{ 2, \frac{1}{5}, 3, 0 \right\} \cup \left\{ 3, \frac{9}{2}, 0 \right\} = \left\{ 2, \frac{1}{5}, 3, \frac{9}{2}, 0 \right\}$$

(Como os elementos 0 e 3 pertencem a ambos os conjuntos dados, basta figurar uma só vez no conjunto-reunião.)

2.º) O conjunto-intersecção dos conjuntos dados no exercício anterior:

$$\left\{ 2, \frac{1}{5}, 3, 0 \right\} \text{ e } \left\{ 3, \frac{9}{2}, 0 \right\}$$

é o conjunto formado por todos os elementos comuns aos conjuntos dados. Logo:

$$\left\{ 2, \frac{1}{5}, 3, 0 \right\} \cap \left\{ 3, \frac{9}{2}, 0 \right\} = \left\{ 3, 0 \right\}$$

Outros exemplos:

1. Determinar o conjunto-reunião e o conjunto-intersecção dos conjuntos:

$$\left\{ 5, \frac{1}{4}, 7, 2, \frac{1}{3} \right\} \text{ e } \left\{ \frac{1}{2}, 4, 7, \frac{1}{8} \right\}$$

Temos:

$$\begin{aligned} & \left\{ 5, \frac{1}{4}, 7, 2, \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, 4, 7, \frac{1}{8} \right\} = \\ & = \left\{ 5, \frac{1}{4}, 7, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{8} \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ 5, \frac{1}{4}, 7, 2, \frac{1}{3} \right\} \cap \left\{ \frac{1}{2}, 4, 7, \frac{1}{8} \right\} = \left\{ 7 \right\} \text{ "conjunto unitário"}$$

2. Idem com os conjuntos:

$$\left\{ 16, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5} \right\} \text{ e } \left\{ 5, \frac{2}{4} \right\}$$

$$\text{Temos: } \left\{ 16, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5} \right\} \cup \left\{ 5, \frac{2}{4} \right\} = \left\{ 16, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, 5, \frac{2}{4} \right\}$$

$$\left\{ 16, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5} \right\} \cap \left\{ 5, \frac{2}{4} \right\} = \left\{ \right\} \text{ ou } \emptyset \text{ "conjunto vazio"}$$

3. Idem com os conjuntos:

$$\left\{ 5, 4 \right\} \text{ e } \left\{ 5, \frac{1}{2}, 4 \right\}$$

$$\text{Temos: } \left\{ 5, 4 \right\} \cup \left\{ 5, \frac{1}{2}, 4 \right\} = \left\{ 5, \frac{1}{2}, 4 \right\}$$

$$\left\{ 5, 4 \right\} \cap \left\{ 5, \frac{1}{2}, 4 \right\} = \left\{ 5, 4 \right\}$$

4. Idem com os conjuntos:

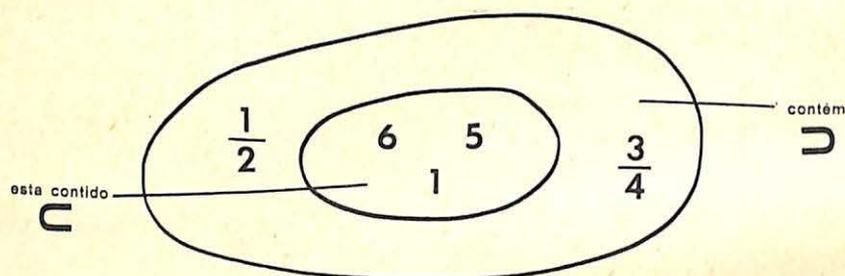
$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\} \text{ e } \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\}$$

Temos:

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\} = \\ = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\}$$

$$\left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\} \cap \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\} = \\ = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 3 \frac{1}{3} \right\}$$

Relações de inclusão com os conjuntos estudados



Vamos recordar as *relações de inclusão* existentes entre conjuntos, "estar contido" e "contém", considerando o exemplo: Seja o conjunto

$$\left\{ 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 1 \right\}$$

Observe que dêsse conjunto fazem parte os conjuntos:

de números inteiros: $\{ 6, 5, 1 \}$

de números fracionários: $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$

que são seus *subconjuntos*. O conjunto $\{ 6, 5, 1 \}$, por ter *todos os seus elementos* no conjunto $\left\{ 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 1 \right\}$, *está contido nêle*. Indicamos:

$$\{ 6, 5, 1 \} \subset \left\{ 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 1 \right\}$$

Conseqüentemente, o conjunto $\left\{ 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 1 \right\}$, por ter *todos os elementos* do conjunto $\{ 6, 5, 1 \}$, *o contém*. Indicamos:

$$\left\{ 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 1 \right\} \supset \{ 6, 5, 1 \}$$

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 4

1. Escrever V ao lado das sentenças verdadeiras e F ao lado das falsas:

1.ª) $\left\{ 2, \frac{1}{5}, 0 \right\} \subset \left\{ 3, \frac{1}{2}, 2, 0, 9, \frac{1}{5} \right\}$

2.ª) $\left\{ 2, \frac{1}{5}, 0 \right\} \supset \left\{ 3, \frac{1}{2}, 2, 0, 9, \frac{1}{5} \right\}$

3.ª) $\left\{ 4 \frac{1}{2}, 3, 1 \right\} \cap \left\{ 3, 2, \frac{1}{5} \right\} = \{ 3 \}$

4.ª) $\left\{ 4 \frac{1}{2}, 3, 1 \right\} \cap \left\{ 3, 2, \frac{1}{5} \right\} = \emptyset$

5.ª) $\{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 0,5; 2,5; 3,5 \} = \{ 0,5; 2,5; 3,5 \}$

6.ª) $\{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 0,5; 2,5; 3,5 \} = \{ 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 \}$

2. Lembrando que: $N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$$I = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

$$Q = \{ 0, \dots, 1, \dots, 2, \dots, 3, \dots, 4, \dots, 5, \dots \}$$

$$Q^* = Q - \{ 0 \}$$

dizer quais das seguintes sentenças são *verdadeiras*:

1.ª) $I \subset Q$

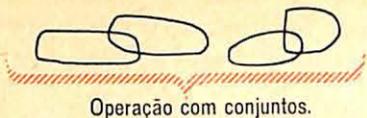
4.ª) $N \subset I$

2.ª) $Q^* \supset Q$

5.ª) $Q \supset N$

3.ª) $I \subset Q^*$ "cuidado!"

6.ª) $N \supset Q^*$



Operação com conjuntos.

PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 5

De agora em diante a indicação de conjuntos será feita por letras maiúsculas (A, B, C, D, \dots), a fim de facilitar a apresentação das questões que envolvem operações e relações com esses conjuntos.

1. Dados os conjuntos:

$$A = \left\{ 4, \frac{1}{3}, 2, 0 \right\} \text{ e } B = \left\{ 2, 0, \frac{1}{2}, 5 \right\}$$

Calcular: 1.º) $A \cup B$ 2.º) $A \cap B$

2. Dados os conjuntos:

$$A = \left\{ 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{3} \right\} \quad B = [1, 3, 5] \quad C = \left\{ 3, 0, \frac{1}{2} \right\} \quad D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} \quad E = \{3\}$$

Calcular:

- 1.º) $A \cup B$ 2.º) $A \cap B$ 3.º) $A \cup C$ 4.º) $A \cap C$ 5.º) $B \cup A$
 6.º) $B \cap A$ 7.º) $B \cap C$ 8.º) $B \cap D$ 9.º) $B \cup E$ 10.º) $B \cap E$

3. Que você conclui dos resultados obtidos nos exercícios 1.º e 5.º da Prática 2? E do 2.º e 6.º? Trata-se de que propriedade?

4. Empregando os mesmos conjuntos da Prática 2, calcular:

1.º) $(A \cup B) \cup C$ 2.º) $(A \cup B) \cap D$ 3.º) $(A \cap B) \cap (C \cap D)$

NOTA: Êstes exercícios são feitos seguindo a ordem indicada pelos parênteses.

5. Que você conclui dos resultados obtidos dos exercícios 9.º e 10.º da Prática 2? Trata-se de que relações?

6. Dados os conjuntos:

$$A = \{\square, \triangle, *, /\} \quad B = \{\nabla, \Delta, \circ\} \quad C = \{*, \nabla\} \quad D = \{\backslash\} \quad E = \{\} = \emptyset$$

Calcular:

- 1.º) $A \cup B$ 2.º) $A \cap B$ 3.º) $A \cup C$ 4.º) $A \cap C$ 5.º) $D \cup C$
 6.º) $C \cap D$ 7.º) $A \cap D$ 8.º) $B \cup E$ 9.º) $B \cap E$ 10.º) $A \cap E$

7. Que você conclui com relação ao exercício 8.º da Prática 6? Enuncie essa conclusão.

8. E dos exercícios 9.º e 10.º da Prática 6? Enuncie essas conclusões.

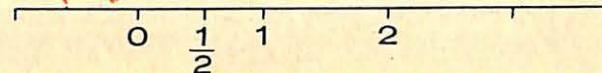
9. Completar as seguintes sentenças matemáticas, colocando os símbolos \subset ou \supset , de modo que fiquem verdadeiras:

- | | |
|--|---|
| 1.º) $\{1, 2, 3, 4\}$ | $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ |
| 2.º) $\{1, 2, 3, 4\}$ | $\{1, 3, 4\}$ |
| 3.º) $\{1, 2, 3, 4\}$ | $\{2, 1, 4, 3\}$ |
| 4.º) $\left\{ 2, \frac{1}{4}, 3, 0 \right\}$ | $\left\{ 2, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{2}, 3, 0 \right\}$ |
| 5.º) $\{\square, \triangle, *, /\}$ | $\{/, \backslash, *, \square, \nabla, \Delta\}$ |
| 6.º) $\{\otimes, \nabla, /\}$ | $\{\nabla, /\}$ |

10. Que você notou de interessante no exercício 3.º da Prática 9? Depois de sua conclusão, ler a seguinte

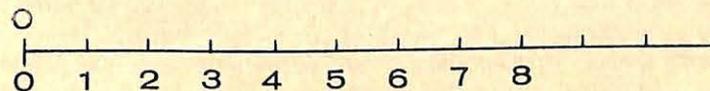
OBSERVAÇÃO: Repare que cada um dos conjuntos do exercício 3.º da Prática 9 está contido no outro e contém o outro. Nesse caso, diz-se que os conjuntos são iguais, por terem os mesmos elementos e somente êsses. Logo:

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 1, 4, 3\}$$



2. *Reta numerada. Representação geométrica dos números racionais. Aplicações*

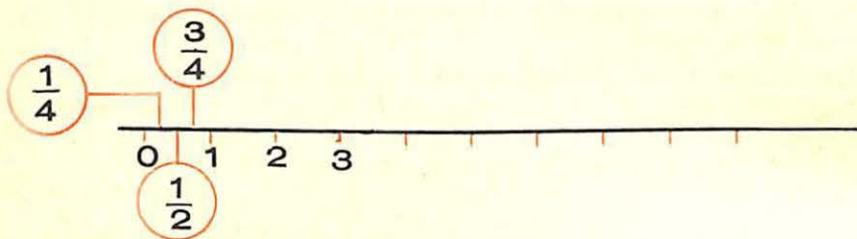
Outra maneira de você "ver" os números racionais é observar a *reta numerada*. Em uma reta qualquer, marque um ponto "O" que chamaremos *origem*. A seguir, usando uma unidade de medida de comprimento (o *cm*, por exemplo), marque à *direita* de O segmentos consecutivos e *iguais* à unidade considerada. Na extremidade direita de cada um dêles escreva, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, ... À *origem* O corresponde o *número zero*.



Estão assim representados os números inteiros sobre a reta.

E os números fracionários?

Você sabe que "entre" 0 e 1, marcados na *reta numerada*, existem pontos que podemos fazer *corresponder* a $\frac{1}{4}$ cm, $\frac{1}{3}$ cm, $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{3}{4}$ cm, ... Segue-se daí que às extremidades direitas desses segmentos *corresponderão*, respectivamente, os números fracionários: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...



Dê-se modo, a *reta numerada* passa a representar *geomêtricamente* o conjunto Q dos números racionais (inteiros ou fracionários).

Como aplicação do uso da *reta numerada* você pode "ver" a *estrutura de ordem* existente com os números racionais. Assim, por exemplo, você "vê" que o 3 está entre o 2 e o 4, podendo escrever a *dupla desigualdade*:

$2 < 3 < 4$ (lê-se: "dois é menor que três e três é menor que quatro")

Outros exemplos:

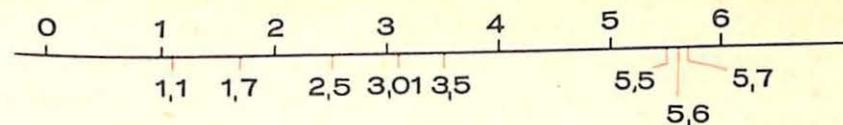
$$\begin{aligned} 1 &< 3 < 5 \\ 0 &< 3 < 3,5 \\ 2,8 &< 3 < 3,1 \end{aligned}$$

Quantos números inteiros existem entre 1 e 6?

Você pode "contar" ou "ver" que existem quatro: 2, 3, 4 e 5.

Quantos números racionais existem entre 1 e 6?

Agora você não pode "contar" ou "ver" todos os números racionais (inteiros ou fracionários) existentes entre 1 e 6, porque eles constituem um conjunto *denso*; mas, poderá "ver" o *segmento* que vai desde 1 até 6, contendo o conjunto de pontos correspondentes a *todos* os números racionais existentes entre 1 e 6:



Observe, ainda, que na *reta numerada*, as sentenças:

"5 está à direita de 3" e "5 é maior que 3" são *equivalentes*, isto é:

$$\boxed{5 \text{ está à direita de } 3} \iff \boxed{5 > 3}$$

Da mesma forma, você concluirá:

$$\boxed{3 \text{ está à esquerda de } 5} \iff \boxed{3 < 5}$$

Que significa escrever: $0 < 6$? Significa que o zero está à esquerda do seis. E dizer que $3,2$ está à direita de $2,5$? Significa escrever: $3,2 > 2,5$.

Como conclusão geral você pode escrever as equivalências:

"está à direita de" \iff "é maior que"

"está à esquerda de" \iff "é menor que"

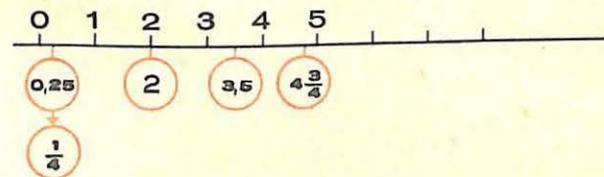


EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 6

1. Representar sobre a *reta numerada* os seguintes números racionais:

2; 3,5; 0,25; $\frac{1}{4}$; $4\frac{3}{4}$

Temos:

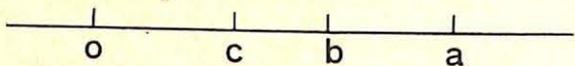


2. Preencher os claros das seguintes sentenças:

- 1.ª) Se o número 8 é maior que o número 1 então o ponto 8 está à **direita** do ponto 1;
 2.ª) Se o ponto 1,2 está à esquerda do ponto 1,201 então o número 1,2 é **menor** que o número 1,201.

3. Localizar, na reta numerada, os números a , b e c , sabendo-se que b está entre a e c , e que $c < b$

Temos:



4. Escrever, usando uma dupla desigualdade, que:

- 1.ª) 1 está entre $\frac{3}{4}$ e 1,5;
 2.ª) m está entre 3 e 12;
 3.ª) m está entre p e q , sendo p menor que q .

Temos:

- 1.ª) $\frac{3}{4} < 1 < 1,5$
 2.ª) $3 < m < 12$
 3.ª) $p < m < q$

5. Quantos números inteiros há entre 2 e 7? Há **quatro** (3, 4, 5 e 6)

E entre 3 e 9? Há **cinco** (4, 5, 6, 7 e 8)

OBSERVAÇÃO: O número de números inteiros existentes entre outros dois inteiros é dado pela diferença entre eles, diminuída de uma unidade. Experimente essa "fórmula" nos exercícios resolvidos.

Agora você pode responder que entre 3 e 239 existem: $239 - 3 = 236$; $236 - 1 = 235$, isto é, **235** números inteiros.

1. Represente na reta numerada os seguintes números racionais:

$$3; 0; 5\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0,75; \frac{8}{4}$$

2. Preencher os claros das seguintes sentenças:

- 1.ª) Se 5 é maior que 3, então o ponto 5 está à do ponto 3;
 2.ª) Se 75 é que 80, então 75 está à esquerda de 80;
 3.ª) Se 0 é que 0,5, então 0,5 está à de 0.

3. Se a e b representam dois números inteiros quaisquer, então:

$a > b$ significa que o ponto que representa a está à do ponto que representa b ;

$a < b$ significa que o ponto que representa a está à do ponto que representa b .

4. Se o ponto que representa a está entre os pontos que representam p e q e $p < q$ são verdadeiras as sentenças $p < a$ e $a < q$?

5. Escrever, usando uma dupla desigualdade, que:

- 1.ª) 4 está entre 2 e 7;
 2.ª) $\frac{1}{2}$ está entre 0 e $\frac{3}{4}$;
 3.ª) 2,355.5 está entre 2,2 e 2,36;
 4.ª) m está entre a e b , sendo $b > a$.

6. Dizer quantos números inteiros há entre:

- 1.ª) 3 e 8; 2.ª) 5 e 8; 3.ª) 6 e 8; 4.ª) 7 e 8; 5.ª) 8 e 8; 6.ª) 9 e 8;
 7.ª) 10 e 8; 8.ª) 30 e 60; 9.ª) 60 e 62; 10.ª) 11 e 1.965.

7. Dizer quantos *números racionais* (lembre-se que agora devem ser considerados os números inteiros e os números fracionários) existem entre:

- 1.ª) 5 e 7; 2.ª) 0 e 0,01; 3.ª) a e b (com $a > b$).

8. Se a e b são números inteiros quaisquer, com $a > b$, qual é a expressão que dá o número de números inteiros entre a e b :

- 1.ª) $a - b$? ou 2.ª) $(a - b) - 1$?

9. Indicar, na reta numerada, a localização dos números inteiros a , b e c , sabendo-se que b está entre a e c , e que $a < b$.

10. Idem, no caso de $a > b$.



Propriedades Estruturais.

3. Operações com números racionais. Propriedades estruturais

No conjunto Q , com restrições para as operações subtração e radiação, as demais são sempre possíveis.

Analisemos as *propriedades estruturais* da adição e da multiplicação de números racionais no conjunto Q :

1.ª) FECHAMENTO:

A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Ex.: $\frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \rightarrow$ n.º racional (Abreviatura: p. f. a.)
n.º racional n.º racional

Em linguagem simbólica:

se $\frac{a}{b} \in Q$ e $\frac{c}{d} \in Q$ então $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in Q$

O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

Ex.: $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} \rightarrow$ n.º racional (Abreviatura: p. f. m.)
n.º racional n.º racional

Em linguagem simbólica:

se $\frac{a}{b} \in Q$ e $\frac{c}{d} \in Q$ então $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \in Q$

2.ª) COMUTATIVA:

A ordem das parcelas não altera a soma. Abreviatura: p.c.a.

Ex.: $\frac{3}{4} + 2 = 2 + \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

A ordem dos fatores não altera o produto. Abreviatura: p.c.m.

Ex.: $\frac{3}{4} \times 2 = 2 \times \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

3.ª) ELEMENTO NEUTRO:

0 para a adição.....: $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ ou $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
 abreviatura: e. n. a.

1 para a multiplicação: $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$ ou $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
 abreviatura: e. n. m.

4.ª) ASSOCIATIVA:

$\left(\frac{4}{1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{12}{11} = \frac{4}{1} + \left(\frac{2}{5} + \frac{12}{11}\right)$

$\left(\frac{4}{1} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{12}{11} = \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{12}{11}\right)$

Em linguagem simbólica:

$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$
 abreviatura: p.a.a.

$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$
 abreviatura: p.a.m.

5.ª) DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO em relação à adição. Abreviatura: p.d.m.(a.):

$\frac{3}{4} \times \left(\frac{8}{2} + 5\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{2} + \frac{3}{4} \times 5$

Em linguagem simbólica:

$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

Considerando o conjunto Q^* (é o conjunto Q menos o 0), você vai encontrar uma "nova" propriedade, muito importante para os estudos que virão. Trata-se da propriedade denominada EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO. (Abreviatura: e. i. m.)

Para qualquer número racional $\frac{a}{b}$ do conjunto Q^* existe um único número racional $\frac{b}{a}$, denominado *inverso multiplicativo*, tal que o produto deles é igual ao elemento neutro da multiplicação, isto é:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Assim, por exemplo, considerando o número racional $\frac{2}{3} \in Q^*$, existe o número racional $\frac{3}{2} \in Q^*$, tal que: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Outro exemplo:

Para $2 \in Q^*$, existe o número racional $\frac{1}{2} \in Q^*$, tal que $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 8

1. Assinalar qual é a propriedade aplicada em cada uma das seguintes igualdades, verdadeiras no conjunto Q :

1.^a) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{2} = \frac{4}{2} \times \frac{3}{5}$

6.^a) $\frac{2}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{2}{5}$

2.^a) $0 + \frac{5}{1} = \frac{5}{1}$

7.^a) $\left(3 \times \frac{1}{1}\right) \times \frac{4}{2} = 3 \times \left(\frac{1}{1} \times \frac{4}{2}\right)$

3.^a) $\frac{2}{3} \times \left(6 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times 6 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$

8.^a) $1,4 + 0 = 1,4$

4.^a) $0,3 \times 1 = 0,3$

9.^a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

5.^a) $\left(4 + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

10.^a) $(0,1 + 2,3) + \frac{1}{2} = 0,1 + \left(2,3 + \frac{1}{2}\right)$

2. Idem, no conjunto Q^* :

1.^a) $\frac{3}{10} \times 1 = \frac{3}{10}$

4.^a) $\left(\frac{2}{5} + 3\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \left(3 + \frac{1}{2}\right)$

2.^a) $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$

5.^a) $8 \times \frac{1}{8} = 1$

3.^a) $\frac{3}{4} + 1 = 1 + \frac{3}{4}$

6.^a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$

3. Dar o nome da operação, da propriedade dessa operação e o nome do respectivo conjunto onde tal propriedade é verdadeira.

1.^a) (Exemplo modelo): Se $a \in N$ e $b \in N$ então $(a + b) \in N$
operação: adição; propriedade: fechamento; conjunto: números naturais.

2.^a) Se $x \in I$ e $y \in I$, então: $(x \times y) \in I$

3.^a) Se $\square \in Q$ e $\Delta \in Q$, então: $(\square \times \Delta) \in Q$

4.^a) Se $a \in Q^*$ e $b \in Q^*$, então: $a + b = b + a$

5.^a) Se $m \in I$ e $n \in I$, então: $m \times n = n \times m$

6.^a) Se $a \in I$ e $0 \in I$, então: $a + 0 = a$

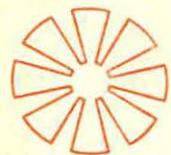
7.^a) Se $x \in I$ e $1 \in I$, então: $x \times 1 = x$

8.^a) Se $a \in Q$, $b \in Q$ e $c \in Q$, então: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

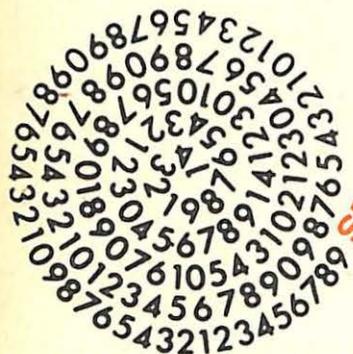
9.^a) Se $x \in Q^*$, $y \in Q^*$ e $z \in Q^*$, então: $(x + y) + z = x + (y + z)$

10.^a) Se $\frac{a}{b} \in Q^*$ e $\frac{b}{a} \in Q^*$, então: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

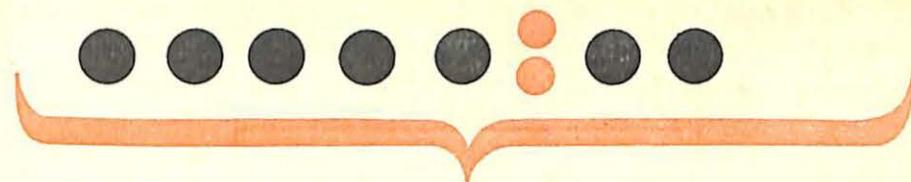




Razões e Proporções.
Por cento; Porcentagem.
Aplicações práticas.



SEGUNDA PARTE



Razões e Proporções.

Razões expressas por números racionais

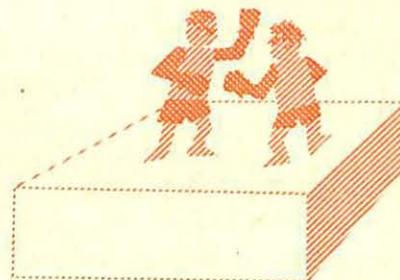
1. Razão, como comparação entre dois números

É muito comum você ouvir *comparações* expressas por sentenças tais como:

- 1.ª) As preferências para a decisão do título máximo de boxe — *pêso-galo* — são de 5 para 1, favoráveis a Eder Jofre;
- 2.ª) O número de meninos de minha classe para o número de meninas é de 3 para 2.

Que significam essas expressões?

A primeira quer dizer que *há cinco vezes* mais torcedores favoráveis ao nosso "Galo de Ouro" do que ao seu adversário. A segunda indica que:



5:1

para cada 3 meninos de minha classe existem 2 meninas

ou

para cada 6 meninos de minha classe existem 4 meninas

ou

para cada 9 meninos de minha classe existem 6 meninas...

Estas expressões 5 para 1, 3 para 2, que permitem comparações entre números, são chamadas razões e indicadas, geralmente, por:

$$5 : 1 \text{ ou } \frac{5}{1} \text{ (lê-se: "cinco para um")}$$

$$3 : 2 \text{ ou } \frac{3}{2} \text{ (lê-se: "três para dois")}$$

Na prática, a razão entre dois números é tomada como *quociente indicado* entre eles, portanto por um *número racional*. Por isso a razão 3 está para 2 pode ser expressa pela fração $\frac{3}{2}$, que não deve ser lida "três meios" como se fôra um número fracionário(*).

Se a e b representam dois números inteiros (sendo $b \neq 0$) então a razão a está para b pode ser expressa pelo número racional $\frac{a}{b}$. Nas indicações

$$a : b \text{ ou } \frac{a}{b}$$

a e b são chamados *têrmos* da razão, sendo a o *antecedente* e b o *conseqüente*.

Observe que *qualquer par ordenado* de múltiplos de dois números dados, segundo o mesmo fator, tem *razão equivalente* à razão desses números. Assim, por exemplo, *razões equivalentes* a $3 : 2$ são $6 : 4$, $9 : 6$, $12 : 8$, ..., que se obtêm multiplicando os *têrmos*, respectivamente, por 2, 3, 4, ...

A verificação de que duas razões são equivalentes pode ser feita por meio da *simplificação* das frações representativas. Assim, por exemplo, as razões $12 : 8$, $6 : 4$ e $3 : 2$ são *equivalentes*, pois as frações que as representam são equivalentes $(\frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2})$. Portanto, a *forma mais simples* de se escrever a razão $12 : 8$ é $3 : 2$, bem mais vantajosa para os cálculos.

Pode-se, também, determinar a *razão* entre *dois números racionais*, numa certa ordem (sempre com o segundo diferente de zero), como, por exemplo:

$$\frac{1}{2} : 1, \text{ que é equivalente à razão } 1 : 2 \text{ ou } 2 : 4$$

(*) A fração $\frac{3}{2}$ tem sido, até este instante, o numeral que representou somente o número fracionário "três meios". Agora, representa também a razão "3 está para 2".

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 9

1. Numa classe há 35 alunos dos quais 20 são meninas. Qual é a *razão* do número de meninas para o número de alunos da classe?

$$\text{Temos: } 20 : 35 \text{ ou } \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

Logo, a *razão* do número de meninas para o número de alunos da classe é $4 : 7$ ou "4 para 7".

NOTA: Você poderia considerar uma outra razão: a do número de alunos da classe para o número de meninas. Nesse caso, tal razão: $35 : 20$ ou $7 : 4$ (forma mais simples) é denominada *razão inversa* da anterior.

2. Paulo levantou uma bola de ferro pesando 15kg e João outra, pesando 20kg. Qual a razão entre os pesos levantados por Paulo e por João?

$$\text{Temos: } 15 : 20 \text{ ou } \frac{15}{20} = \frac{3}{4}, \text{ ou seja: "3 para 4"}$$

3. É a razão $3 : 8$ equivalente à razão $15 : 40$?

$$\text{Temos: } \frac{3}{8} = \frac{15}{40} \text{ é uma sentença verdadeira. Logo, as razões são equivalentes.}$$

4. É a razão $\frac{3}{11} : 3$ equivalente à razão "um para doze"?

Como

$$\frac{\frac{3}{11}}{3} = \frac{3}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{11} \text{ é uma sentença que não equivale à sentença proposta}$$

(um para doze), segue-se que $\frac{3}{11} : 3$ não é equivalente a $1 : 12$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 10

1. Traduzir sob forma de *razão* as seguintes expressões:
 - 1.^a) As apostas sobre qual o time que venceria o Campeonato Mundial de Futebol Interclubes, em 1963, eram de *três para dois* favoráveis ao Santos Futebol Clube.
 - 2.^a) Para cada quatro mulheres funcionárias de um escritório existem três homens.
 - 3.^a) A escolha dos sapatos do tipo "X" pelos colegiais de 1967 é de quatro para um.
2. Expressar como número racional a *razão* (escrevendo-a sob a forma que seja mais simples) das seguintes expressões:
 - 1.^a) 4cm para 12cm;
 - 2.^a) 28kg para 6kg;
 - 3.^a) 2dam para 10m (não esquecer de reduzir ambos à mesma unidade)

- 4.^a) 300 poltronas ocupadas para 900 poltronas disponíveis de um cinema;
 5.^a) 120.000 pessoas ocupando o Estádio do Maracanã, para uma lotação de 200.000 lugares;
 6.^a) a está para b ($b \neq 0$).

3. Determinar a forma que seja mais simples de cada uma das seguintes razões:

- 1.^a) $2 : 24$; 2.^a) $24 : 2$; 3.^a) $3 : 5$; 4.^a) $8 : 8$; 5.^a) $8 : 108$; 6.^a) $60 : 5$;
 7.^a) $8 : \frac{1}{2}$; 8.^a) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$; 9.^a) $0,5 : 0,25$; 10.^a) $\frac{2}{11} : 2$; 11.^a) $1.200 : 20$; 12.^a) $10^3 : 10^5$.

4. Qual é a razão entre cada par de números correspondentes (que pertencem à mesma coluna) do quadro:

2	3	1	5
8	12	4	20

5. Se a razão de cada par de números correspondentes é a mesma, determinar os números que estão faltando no seguinte quadro:

4	2	6		18	
	3	9	12		9

6. Escrever V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

- 1.^a) a razão $9 : 5$ é equivalente à razão $18 : 10$;
 2.^a) a razão "5 para 9" é equivalente à razão "18 para 10";
 3.^a) a razão $\frac{2}{3} : 6$ é equivalente à razão $2 : 18$;
 4.^a) a razão $1 : 4$ não é equivalente à razão $1 : 8$;
 5.^a) a razão $1 : 4$ não é equivalente à razão $2 : 8$.

7. Um avião voa 1.800km em 3 horas. Qual a razão que dá o número de quilômetros para o número de horas empregadas no voo?

8. Dos 468 homens que trabalham numa fábrica, 312 são casados. Qual é a razão (expressa sob a forma mais simples) do número de casados para o número de homens que trabalham nessa fábrica?

9. Um mapa do Brasil é desenhado numa escala de 10cm para 300km. Expressar essa escala como razão.

10. Carlos tem 1,71m de altura e o seu irmão menor 1,14m. Qual é a razão da altura de Carlos para a de seu irmão?

1. Você já deve ter ouvido falar que uma molécula de água é composta de dois átomos de hidrogênio e de um átomo de oxigênio. Logo, na molécula de água a razão entre o número de átomos de hidrogênio e o número de átomos de oxigênio é $2 : 1$.

Responda agora:

- 1.^o) Em 1.000 moléculas de água quantos átomos de hidrogênio existem?
 2.^o) Qual a razão entre o número de átomos de hidrogênio e o número de átomos de oxigênio em 2.000 moléculas de água?

2. Verifique se todas as razões expressas por $N : (4 \times N)$, quando você substitui N por qualquer número natural, são equivalentes, e determine a forma mais simples.

3. Suponha que a represente qualquer número racional diferente de zero. Será que as razões representadas por $(5 \times a) : (3 \times a)$ são equivalentes?

4. Você também pode exprimir razões entre números expressos em outros sistemas de numeração para o sistema decimal, como também números que exprimem medidas em sistemas não-decimais.

Exemplo-módulo: Expressar a razão $3_8 : 12_8$ no sistema decimal.

Temos: $3_8 = 3_{10}$
 $12_8 = 1 \times 5^1 + 2 \times 5^0 = 1 \times 5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7_{10}$

Logo: $3_8 : 12_8 \iff 3_{10} : 7_{10}$ ou $3 : 7$

Exprima você as razões:

$23_8 : 14_8$; $15_7 : 12_7$; $7_8 : 65_8$; $1_2 : 1_2$; $3_6 : 4_6$; $5_{12} : 5_{12}$

na base decimal.

5. Qual é a razão entre 10 dias e 1 ano?

Temos: $10 : 360$ ou $1 : 36$.

2. Aplicações da noção de razão na Geometria Prática

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , por exemplo, são chamados *comensuráveis* se existe um terceiro segmento \overline{MN} do qual eles sejam múltiplos.

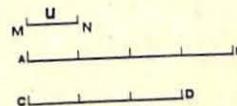
Indicando por $m(\overline{AB})$ e $m(\overline{MN})$, respectivamente as medidas dos segmentos \overline{AB} e \overline{MN} , se, por exemplo:

$$m(\overline{AB}) = 4 \times m(\overline{MN})$$

então \overline{AB} diz-se múltiplo de \overline{MN}

e se: $m(\overline{CD}) = 3 \times m(\overline{MN})$

então \overline{CD} diz-se múltiplo de \overline{MN}



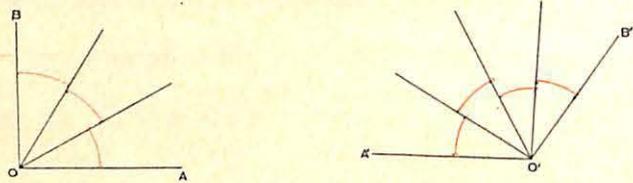
Como $m(\overline{MN})$ é uma medida comum aos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} , dizemos que \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis e temos as seguintes razões:

entre \overline{AB} e \overline{CD} : $4 : 3$ ou $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4}{3}$

entre \overline{CD} e \overline{AB} : $3 : 4$ ou $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$

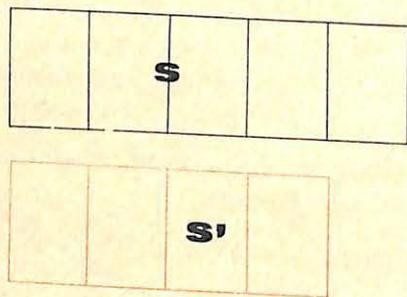
De modo análogo, para outras grandezas geométricas de mesma espécie, você tem:

para ângulos:



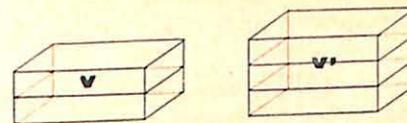
$\widehat{AOB} : \widehat{A'O'B'}$ ou $3 : 4$ como também $\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{A'O'B'}} = \frac{3}{4}$

para superfícies:



a razão entre S e S' é de 5 para 4 ou $\frac{S}{S'} = \frac{5}{4}$

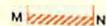
para volumes:



a razão entre V e V' é de 2 para 3 ou $\frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$

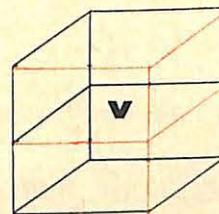
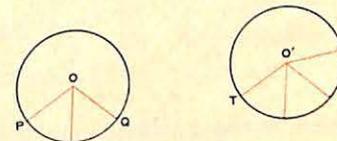
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 12

Determinar as seguintes razões:

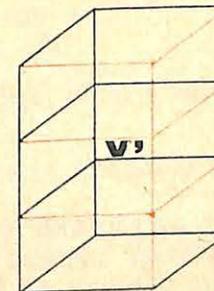


- 1.ª) $\overline{AB} : \overline{CD} = ?$
- 2.ª) $\overline{CD} : \overline{AB} = ?$

- 1.ª) $\widehat{PQ} : \widehat{TU} = ?$
- 2.ª) $\widehat{TU} : \widehat{PQ} = ?$
- 3.ª) $\widehat{POQ} : \widehat{TOU} = ?$
- 4.ª) $\widehat{TOU} : \widehat{POQ} = ?$



- 1.ª) $V : V' = ?$
- 2.ª) $V' : V = ?$

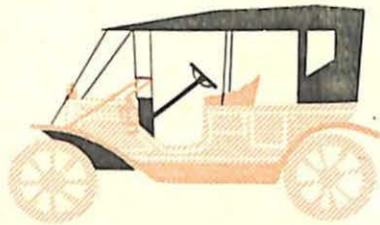


3. Razões especiais: velocidade, densidade demográfica, densidade específica

Há razões que, por confrontarem medidas de uso corrente, recebem nomes especiais. Tais razões serão estudadas por intermédio de exemplos práticos.

1. VELOCIDADE:

O automóvel de papai percorreu 420km em 6h. Quantos quilômetros foram percorridos, em média, por hora?



A comparação será feita com unidades de medidas diferentes: comprimento e tempo. Então, a razão será:

$$420\text{km} : 6\text{h} \text{ ou } \frac{420}{6} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ (lê-se: 70 quilômetros por hora)}$$

A razão quilômetro por hora $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ é denominada **velocidade** (média) com que o automóvel fez a viagem. Você poderia dizer também que o automóvel percorreu:

$$\begin{aligned} &140\text{km em } 2\text{h} \\ \text{ou} &280\text{km em } 4\text{h} \dots \end{aligned}$$

porque a razão (agora *velocidade*) é a mesma.

2. DENSIDADE DEMOGRÁFICA:

Suponha que um certo país tenha uma população de 39.200.000 habitantes¹ ocupando uma superfície de 560.000km² e um outro país tenha uma população de 5.760.000 habitantes ocupando 80.000km² de superfície.



Para determinar qual o país *mais densamente povoado*, você vai usar uma *razão especial*, chamada **densidade de população**, que exprime o número de habitantes de cada país por quilômetro quadrado. Logo:

densidade de população do primeiro país:

$$39.200.000 \text{ hab.} : 560.000\text{km}^2 \text{ ou } \frac{39.200.000}{560.000} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} = 70 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

densidade de população do segundo país:

$$5.760.000 \text{ hab.} : 80.000\text{km}^2 \text{ ou } \frac{5.760.000}{80.000} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} = 72 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

portanto, o segundo país é mais densamente povoado.

NOTA: Você pode encontrar como densidade de população de um país um número que não seja inteiro. Este fato não deve trazer cuidados, pois o resultado, sendo um número racional, visa a confrontar densidades de população de diversos países. Assim, o Brasil, por exemplo, que ocupa uma superfície de 8.511.189km² (é um dos maiores países do mundo), apresentava pelo recenseamento de 1960 (você sabe que a "contagem" da nossa população é feita de dez em dez anos) uma população de 70.528.625 habitantes. A densidade de população brasileira, em 1960, era então de:

$$\frac{70.528.625}{8.511.189} \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2} \cong 8,3 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$$

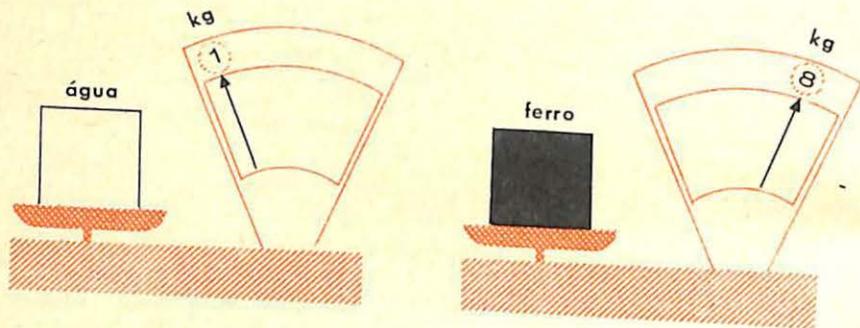
3. DENSIDADE ESPECÍFICA (OU MASSA ESPECÍFICA):

Corpos de volumes iguais podem "pesar"(*) diferentemente. Assim, por exemplo, se você confrontar os volumes de 1dm³ de água e de 1dm³

(*) Convém lembrar os conceitos de peso e de massa (Matemática — Curso Moderno — Volume 1).

de ferro, que têm o mesmo volume, você notará que o ferro pesa quase oito vezes 1dm^3 de água (cêrca de 7,9 vezes mais).

Diz-se, então, que o ferro é *mais denso* que a água.



A água é geralmente usada nesse confronto porque 1dm^3 de água pesa aproximadamente 1kg . Surge, assim, a **densidade** de um corpo qualquer como uma *razão especial de quilogramas por decímetro cúbico*.

Temos, portanto:

densidade da água: $1\text{kg} : 1\text{dm}^3$ ou $1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

densidade do ferro: $7,9\text{kg} : 1\text{dm}^3$ ou $7,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Com a redução de unidades que você já conhece, pode-se exprimir a densidade de um corpo também em $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (grama por centímetro cúbico).

Você sabia que:

a densidade do ouro é $19,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$? Isto é, cada cm^3 de ouro pesa $19,3\text{g}$.

a densidade do álcool é $0,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$? Portanto, o álcool é *menos denso* que a água.

Como exercício prático você pode calcular facilmente o peso, em toneladas, de um bloco de 500dm^3 de aço, conhecendo a densidade do aço, que é de $7,6 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Assim:

se $1\text{dm}^3 \Leftrightarrow 7,6\text{kg}$ então $500\text{dm}^3 \Leftrightarrow 500 \times 7,6\text{kg} = 3.800\text{kg} = 3,8\text{t}$

ATENÇÃO

Embora se diga 70km por hora ($70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$), 72 hab. por km^2 ($72 \frac{\text{hab.}}{\text{km}^2}$) ou $7,9\text{kg}$ por dm^3 ($7,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$), estas expressões referem-se efetivamente a razões, pois a primeira significa $70\text{km} : 1\text{h}$, a segunda, $72 \text{ hab.} : 1\text{km}^2$ e a terceira, $7,9\text{kg} : 1\text{dm}^3$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 13

- Um trem percorre 220km em duas horas e meia. Qual é a sua *velocidade média* em $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- A *velocidade média* com que um automóvel vai de São Paulo à Guanabara é de $71 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sabendo-se que levou 6 horas para efetuar a viagem, qual foi a distância percorrida?
- Qual é a *velocidade*, em km/h , de um transatlântico que desenvolve 33 nós horários? (NOTA: cada nó horário equivale a 1852m por hora).
- Determinar qual dos seguintes países era mais densamente povoado, sabendo-se que:

	ÁREA	POPULAÇÃO
Itália.....	287.000km^2	$49.100.000$ hab.
Japão.....	450.000km^2	$93.500.000$ hab.
México.....	$1.987.000\text{km}^2$	$34.300.000$ hab.

- Um número fracionário pode representar a *densidade demográfica* de um país? Por quê?
- Determinar a *densidade específica* de um corpo, do qual $7,2\text{kg}$ ocupam um volume de 36dm^3 .
- Conhecida a densidade do álcool, que é de $0,8\text{g/cm}^3$, qual o melhor negócio: vender o álcool a NCr\$ $0,35$ o litro ou a NCr\$ $0,40$ o quilograma?
- Determinar a densidade do mercúrio (por sinal é o mais denso dos líquidos), sabendo-se que uma porção de $2,500\text{dm}^3$ pesa $34,750\text{kg}$.
- Preencha os claros, a fim de tornar verdadeira a seguinte tabela referente ao aço:

kg	15,2	...	76
dm^3	2	5	...	2,5	1

10. Você sabe que a densidade específica da água é 1g/cm^3 (por isso é usada como unidade legal de densidade). Um corpo qualquer só flutuará na água se a sua densidade específica for menor que a da água. Na tabela abaixo você tem dados relativos a três corpos:

corpo A : 2dm^3 pesam $1,5\text{kg}$
 corpo B : 5cm^3 pesam 12g
 corpo C : 1m^3 pesa 2t

Qual desses corpos flutuará na água? Tal corpo poderia ser o gelo? A cortiça? Por quê?

Proporções

4. Proporção

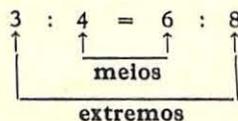
Considere duas razões equivalentes, por exemplo:

$$3 : 4 \text{ e } 6 : 8$$

então a sentença matemática: $3 : 4 = 6 : 8$ é verdadeira e lemos: "3 está para 4 assim como 6 para 8". Tal sentença é denominada proporção. Logo:

Proporção é a sentença matemática que indica a igualdade de duas razões equivalentes.

Os termos que figuram numa proporção recebem nomes especiais:



Quando a proporção está escrita sob a forma:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

os extremos são o primeiro e o quarto termos, na ordem da leitura, e os meios, o segundo e o terceiro termos.

Se $a : b$ e $c : d$ representarem duas razões equivalentes, então temos a proporção:

$$a : b = c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

onde a e d são os extremos e b e c , os meios.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 14

1. Verificar quais das seguintes sentenças matemáticas são proporções. Colocar V no caso de ser verdadeira e F no caso de ser falsa:

1.ª) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ (V)

2.ª) $3 : 4 = 6 : 9$ (F)

3.ª) $1 : 2 = 5 : 10$ (V)

4.ª) $\frac{4}{2} = \frac{6}{4}$ (F)

2. Nomear os extremos e os meios das seguintes proporções:

1.ª) $4 : 2 = 6 : 3$ extremos: 4 e 3; meios: 2 e 6

2.ª) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ extremos: 3 e 12; meios: 4 e 9

3.ª) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ extremos: x e t ; meios: y e z

4.ª) $\square : \triangle = \nabla : *$ extremos: \square e $*$; meios: \triangle e ∇

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 15

1. Conclua você mesmo um processo prático para reconhecer se duas razões são equivalentes. Nas seguintes proporções, calcule o produto dos extremos e, a seguir, o produto dos meios e observe bem os resultados obtidos:

PROPORÇÃO	PRODUTO DOS EXTREMOS	PRODUTO DOS MEIOS
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	$2 \times 6 = \dots$	$3 \times 4 = \dots$
$8 : 4 = 6 : 3$	$8 \times 3 = \dots$	$4 \times 6 = \dots$
$2 \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 14 : 1$	$\frac{7}{3} \times 1 = \dots$	$\frac{1}{6} \times 14 = \dots$
$\frac{20}{5} = \frac{12}{3}$	$20 \times 3 = \dots$	$5 \times 12 = \dots$

2. Agora preencha os claros abaixo, de acordo com os resultados que você obteve no Exercício 1:

PROPORÇÃO	PRODUTO DOS EXTREMOS	PRODUTO DOS MEIOS
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	$3 \times \dots = 24$	$\dots \times 6 = 24$
$20 : 10 = 4 : 2$	$\dots \times 2 = 40$	$10 \times \dots = 40$
$\frac{7}{\dots} = \frac{2}{4}$	$7 \times 4 = \dots$	$\dots \times 2 = 28$
$\dots : 5 = 2 : 1$	$\dots \times 1 = 10$	$5 \times 2 = \dots$
$\frac{6}{3} = \frac{b}{a}$	$6 \times \dots = 6 \times a$	$\dots \times b = 3 \times b$
$\frac{1}{2} : \dots = 8 : 16$	$\dots \times 16 = \dots$	$\dots \times 8 = 8$

5. Propriedade fundamental das proporções

Você já deve ter concluído que em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Isto é:

se $3 : 4 = 6 : 8$ então $3 \times 8 = 4 \times 6$

ou $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \iff 3 \times 8 = 4 \times 6$

Pode-se, agora, justificar porque em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Seja, por exemplo, a proporção:

$$3 : 4 = 6 : 8$$

logo, $3 : 4$ é equivalente a $6 : 8$ e, portanto, deve existir um par de múltiplos de 3 e 4, tais que:

$$6 = \dots \times 3 \quad \text{e} \quad 8 = \dots \times 4$$

O fator multiplicador que torna estas sentenças verdadeiras é 2, ou seja:

$$6 = 2 \times 3 \quad \text{e} \quad 8 = 2 \times 4$$

Substituindo na proporção: $3 : 4 = 6 : 8$
6 e 8 pelos seus novos numerais, temos:

$$3 : 4 = (2 \times 3) : (2 \times 4)$$

onde o produto dos extremos é: $3 \times (2 \times 4)$

e o produto dos meios é: $4 \times (2 \times 3)$

Como nesses produtos aparecem os mesmos fatores, segue-se pela propriedade associativa da multiplicação (p.a.m.) que eles são iguais. Portanto:

$$3 : 4 = 6 : 8 \iff 3 \times 8 = 4 \times 6$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Que é uma propriedade em Matemática?

Seria possível você concluir, com os exemplos estudados, que "em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios"?

Ainda não, pois você teria sempre novos exemplos para verificar.

Procura-se, então, em Matemática, "demonstrar" que a sentença enunciada é verdadeira para quaisquer números (do universo em que se está trabalhando), desde que formem uma proporção. Para isso usam-se letras que passam a representar números quaisquer e só depois dessa fase é que o enunciado pode ser chamado de propriedade.

Como exemplo, demonstremos que o enunciado "em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios" é uma propriedade. Suponhamos que $a : b$ e $c : d$ representem duas razões equivalentes quaisquer, isto é:

$$a : b = c : d$$

Nestas condições: c é o produto de a por um certo fator n e

d é o produto de b pelo mesmo fator n

Logo:

$$c = n \times a \quad \text{e} \quad d = n \times b$$

Substituindo c e d por esses valores, vem:

$$a : b = (n \times a) : (n \times b)$$

onde o produto dos extremos é: $a \times (n \times b)$

e o produto dos meios é: $b \times (n \times a)$

Como pela p.a.m. esses produtos são iguais, segue-se que: em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$$

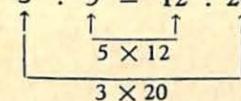
Esta propriedade é chamada fundamental.

6. Como "testar" uma proporção. Aplicações

De agora em diante, para você "testar" se uma dada sentença é uma proporção, basta aplicar a propriedade estudada.

Assim:

$3 : 5 = 12 : 20$ é uma proporção, pois: $3 \times 20 = 5 \times 12$



$3 : 6 = 1 : 4$ não é uma proporção, pois: $3 \times 4 \neq 6 \times 1$, indica que a sentença é falsa.

7. Proporções especiais. Médias usuais

Proporção contínua: quando os meios da proporção são iguais entre si.
Exemplo:

$$2 : 4 = 4 : 8 \text{ (há uma "continuidade" do meio 4)}$$

Numa proporção contínua o meio comum é denominado *média proporcional* ou *média geométrica* dos extremos. Portanto, 4 é a *média proporcional* de 2 e 8.

O quarto termo de uma proporção contínua é chamado de *terceira proporcional*. Assim, por exemplo, diz-se que 8 é a *terceira proporcional* depois de 2 e 4.

O cálculo da média proporcional de dois números reduz-se ao cálculo do valor do meio comum de uma proporção contínua. Exemplo:

Calcular a média proporcional dos números 2 e 8. Temos:

$$2 : x = x : 8 \iff 2 \times 8 = x \times x$$

$$\text{ou } 16 = x^2 \iff x = \sqrt{16} = 4 \text{ ("desfazendo a potenciação")}$$

Técnica operatória: A média proporcional (ou média geométrica) de dois números, que será indicada por m_p , é a raiz quadrada do produto deles. Assim:

$$m_p \text{ de 2 e 8} \iff m_p = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$m_p \text{ de } a \text{ e } b \iff m_p = \sqrt{a \times b}$$

Outras médias usuais: *média aritmética simples* e *média aritmética ponderada*.

Você ouve frequentemente expressões do tipo:

1. Qual foi a *média* de "gols" marcados por Pelé no último Campeonato Brasileiro de Futebol?
2. A *média* final com que Sílvia passou para a 2.^a Série Ginásial foi maior que a minha, porém o "pêso" dos exames no Colégio onde ela estuda é diferente do empregado no meu.

A expressão *média*, do Exemplo 1, refere-se à *média aritmética simples*, definida como o *quociente da soma dos valores dados pelo número deles*.
Indicação: m_a . Exemplos:

Calcular a média aritmética de:

$$1.^{\circ}) \text{ 7, 12 e 23} \quad \text{Temos: } m_a = \frac{7 + 12 + 23}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

$$2.^{\circ}) \text{ 3,4 e 6,8} \quad m_a = \frac{3,4 + 6,8}{2} = \frac{10,2}{2} = 5,1$$

$$3.^{\circ}) \text{ } a, b, c \text{ e } d \quad m_a = \frac{a + b + c + d}{4}$$

Chama-se *média aritmética ponderada* de vários números, aos quais se atribuem determinados "pesos", (que indicam o número de vezes que tais números figuram), ao:

quociente da soma dos produtos, — que se obtêm multiplicando cada número pelo "pêso" correspondente, — pela soma dos pêsos.

Indicação: $m_{a,p}$. Exemplos:

- 1.^o) Sabendo-se que os pesos relativos às notas obtidas em qualquer disciplina, num certo Colégio, são: 1 para o 1.^o bimestre, 2 para o 2.^o bimestre, 2 para o 3.^o bimestre e 2 para o 4.^o bimestre, pede-se:

1. a média aritmética ponderada obtida em Português por um aluno que conseguiu as seguintes notas: 4, 5, 4 e 7, respectivamente nos 1.^o, 2.^o, 3.^o e 4.^o bimestres;
2. se esse aluno passou em Português, sem fazer o exame final, sendo 5 a nota mínima para ficar livre de tal exame;

$$\text{Temos: } 1. \quad m_{a,p} = \frac{4 \times 1 + 5 \times 2 + 4 \times 2 + 7 \times 2}{1 + 2 + 2 + 2} = \\ = \frac{4 + 10 + 8 + 14}{7} = \frac{36}{7} \cong 5,1 \text{ (aproximação 0,1).}$$

2. passou ("raspando"...))

- 2.^o) Supondo que na laranjada feita na Cantina foram empregados 3 litros de suco de laranja a NCr\$ 1,42 o litro e 2 litros de suco de laranja a NCr\$ 1,68 o litro, qual o preço do litro da *mistura* obtida?

$$\text{Temos: } m_{a,p} = \frac{3 \times 1,42 + 2 \times 1,67}{3 + 2} = \frac{7,60}{5} = 1,52$$

Logo: o litro da mistura custará NCr\$ 1,52.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 16

1. "Testar", usando a propriedade fundamental das proporções, quais das seguintes sentenças são verdadeiras:

1.^a) $1:2 = 5:10$

6.^a) $\square : 5 = \square : 5$

2.^a) $7:5 = 5:3$

7.^a) $2:\Delta = 4:2 \times \Delta$ (para $\Delta \neq 0$)

3.^a) $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$

8.^a) $\frac{a}{2} = \frac{3 \times a}{6}$

4.^a) $\frac{4}{4} = \frac{15}{15}$

9.^a) $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$ (para $x \neq y$)

5.^a) $0,5:6 = \frac{1}{3}:4$

10.^a) $*:10 = 10:*$ (para $* \neq 0$)

2. Completar as seguintes equivalências, supondo verdadeiras as sentenças que se apresentam sob a forma de proporção:

1.^a) $\frac{\perp}{\top} = \frac{\Delta}{\nabla} \iff \perp \times \nabla = \dots \times \dots$

2.^a) $\square : / = \circ : \backslash \iff \dots \times \backslash = \dots \times \circ$

3.^a) $\cup = \subset \iff \cup \times \dots = \cap \times \dots$

4.^a) $\square : // = // : \square \iff \dots \times \dots = \dots \times \dots$

3. Resolver as seguintes proporções, determinando o valor do termo desconhecido:

1.^a) $\square : 15 = 12 : 6$

6.^a) $\left(3 + \frac{1}{2}\right) : \frac{11}{3} = \left(3 - \frac{1}{2}\right) : x$

2.^a) $\frac{1}{2} : x = 3 : 4$

7.^a) $\frac{\left(1 + \frac{2}{5}\right) \times 3}{x} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$

3.^a) $\frac{0,01}{4} = \frac{\Delta}{1,2}$

8.^a) $2 \times x : 5 = 10 : 1$

4.^a) $0,4 : 2 = 18 : y$

9.^a) $\frac{\square}{3} = \frac{1}{2}$

5.^a) $\frac{2,3}{n} = \frac{3}{9}$

10.^a) $\frac{3 \times \Delta}{4} = 5$

4. Determinar o valor de x nas seguintes proporções:

1.^a) $x : a = b : d$ ($a \neq 0$ e $d \neq 0$)

3.^a) $a : x = b : d$ ($d \neq 0$)

2.^a) $n : x = m : p$ ($p \neq 0$)

4.^a) $m : p = n : x$ ($p \neq 0$)

5. Dizer quando é que uma proporção é contínua.

6. Tornar contínuas as proporções providas das seguintes sentenças:

1.^a) $4:8 = \dots:16$

3.^a) $a:x = \dots:b$ ($b \neq 0$)

2.^a) $9:6 = \dots:\dots$

4.^a) $x:a = \dots:b$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$)

7. Determinar a média proporcional (ou média geométrica) dos seguintes pares de números (aproveite para recordar a extração de raiz quadrada...):

1.^o) 4 e 9

2.^a) 24 e 6

3.^a) 6,3 e 0,7

4.^a) m e n

8. Calcular a média aritmética (subentende-se simples) dos seguintes conjuntos de números ou expressões:

1.^a) 3, 8, 2, 15

4.^a) $2 \times \square, 4 \times \square$

2.^a) $\frac{2}{3}, 5, \frac{4}{3}, 5$

5.^a) $x, 2x, 3x, 4x, 5x$

3.^a) $3,6; 2\frac{1}{3}; 0,9$

6.^a) \square, Δ

9. As minhas notas bimestrais em Matemática, no ano passado, foram:

1.^o bimestre (pêso 2): 6; 2.^o bimestre (pêso 2): 5; 3.^o bimestre (pêso 3): 8; 4.^o bimestre (pêso 3): 7. Que média consegui em Matemática?

10. Misturam-se 3 copos de groselha a NCr\$0,15 o copo e 12 copos de água mineral a NCr\$0,05 o copo. Qual o preço do copo de mistura?

Emprêgo das proporções para resolver problemas

As proporções podem ser empregadas, com êxito, na resolução de problemas que envolvem razões. Observe os seguintes exemplos:

1.^o) A fotografia que tirei de nossa classe tem 9cm de comprimento por 6cm de altura ("9 por 6"). Quero ampliá-la de forma que tenha 27cm de comprimento. Qual será a altura da ampliação?

Ora, a razão entre os comprimentos das duas fotografias é 9:27 e esta razão deve ser conservada para as alturas. Representando, então, por x a altura procurada, a razão existente entre as alturas será: 6:x e o problema é resolver a proporção:

$$9 : 27 = 6 : x$$

Logo: $x = \frac{27 \times 6}{9} = 18$ e a altura da ampliação será: 18cm.

2.^o) A escala da planta de uma casa é de 1cm para 100cm (isto é, cada cm da planta corresponde a 100cm ou 1m de medida real). Quais são as dimensões de um quarto que na planta figura como 3cm por 4cm?

É fácil ver que a razão que compara as dimensões dos segmentos da planta e dos compartimentos da casa é: 1 : 100. Se x representa uma das dimensões do quarto, a proporção que determinará o seu valor será:

$$1 : 100 = 3 : x \iff x = \frac{100 \times 3}{1} = 300$$

Se y representa a outra dimensão, o seu valor será dado pela proporção:

$$1 : 100 = 4 : y \iff y = \frac{100 \times 4}{1} = 400$$

Logo, as dimensões do quarto são: 3m por 4m.

- 3.º) U'a máquina produz pregos à razão de 10.000 em cada 12 horas de trabalho. Pergunta-se: a) nessa mesma razão, quantos pregos produzirá em 15 horas?; b) quantas horas necessitará para produzir 25.000?

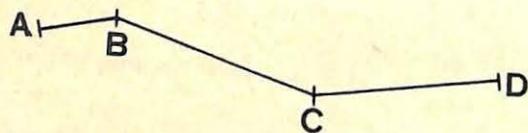
Temos: a) $10.000 : 12 = x : 15 \iff x = \frac{10.000 \times 15}{12} = 12.500$

b) $10.000 : 12 = 25.000 : y \iff y = \frac{12 \times 25.000}{10.000} = 30$

Logo: Em 15 horas produzirá 12.500 pregos e necessitará 30 horas para produzir 25.000.

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO — GRUPO 17

- Usando uma proporção, determinar o comprimento que deve possuir um cartão postal de altura igual a 12cm, sabendo-se que as dimensões desse cartão estão na razão 3 para 2.
- O desenho representa uma estrada ligando as cidades A, B, C e D:



Se a escala do desenho é 1 : 100.000, determinar em quilômetros as distâncias entre A e B, B e C, e C e D, sabendo-se que: $m(\overline{AB}) = 3\text{cm}$, $m(\overline{BC}) = 8\text{cm}$ e $m(\overline{CD}) = 5\text{cm}$.

- Um trem percorre 140km em $1\frac{3}{4}$ horas. Quanto tempo levará para percorrer 560km na mesma razão (velocidade)? (Sugestão: reduzir horas a minutos)
- Use uma proporção para resolver os seguintes problemas (verifique o acerto de seu trabalho, resolvendo-os por outros métodos que você já conhece):
 - Qual o preço de 3 chocolates se cada um custa NCr\$ 0,35?
 - Se 4 lápis custam NCr\$ 0,12, qual o preço de meia dúzia de lápis iguais?
- Com a seguinte receita: 1 xícara de manteiga; $\frac{3}{4}$ de kg de açúcar; 8 ovos; 600g de farinha de trigo; $\frac{1}{2}$ kg de côco ralado e uma colher das de sopa de fermento, pode-se fazer 20 "forminhas" de doce. Pergunta-se:
 - Qual seria uma receita na razão 4 : 1?
 - Quantas "forminhas" seriam feitas pela nova receita?
 - Se você quisesse 30 "forminhas", quanto necessitaria de cada um daqueles ingredientes?

Transformações de uma proporção

Você sabe que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$

Utilizando a propriedade comutativa da multiplicação (p.c.m.), pode-se escrever:

$$a \times d = b \times c \text{ das seguintes maneiras: } \begin{cases} d \times a = b \times c \\ a \times d = c \times b \\ d \times a = c \times b \end{cases}$$

Qualquer uma das novas igualdades conduzirá, pela propriedade fundamental, a uma nova proporção denominada transformada da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Então, de:

- $d \times a = b \times c \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ obtemos uma transformada de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de extremos permutados;
- $a \times d = c \times b \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ a transformada de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é, agora, de meios permutados;

(3) $d \times a = c \times b \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ obtemos uma transformada de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ de razões inversas.

Portanto: dada uma proporção, você pode transformá-la numa outra se:

1.º) permutar os seus extremos; 2.º) permutar seus meios; 3.º) substituir cada uma das razões pela respectiva inversa.

Simbolicamente, sendo a, b, c e d diferentes de zero, podem existir simultaneamente as igualdades:

$$a \times d = b \times c \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

Exemplo de aplicação:

Transformar a proporção: $3 : 4 = 6 : 8$, em novas proporções, permutando seus extremos, seus meios e invertendo suas razões.

Temos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ (proporção dada) $\iff 3 \times 8 = 4 \times 6$ Teste

Permutando os extremos: $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ (transformada) $\iff 8 \times 3 = 4 \times 6$

Permutando os meios: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ (transformada) $\iff 3 \times 8 = 6 \times 4$

Invertendo as razões: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ (transformada) $\iff 4 \times 6 = 3 \times 8$

Você ainda pode estudar transformações que envolvem operações. Seja, por exemplo, a proporção:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

Somando 1 aos dois membros da igualdade, vem:

$$\frac{4}{3} + 1 = \frac{8}{6} + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{4+3}{3} = \frac{8+6}{6}$$

Logo: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \iff \frac{4+3}{3} = \frac{8+6}{6}$

E, subtraindo 1 dos dois membros:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \iff \frac{4-3}{3} = \frac{8-6}{6}$$

Como exercício, transforme você, a seguir, as seguintes proporções preenchendo corretamente os claros:

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \iff \frac{4 + \dots}{5} = \frac{12 + \dots}{15}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} \iff \frac{9 - \dots}{3} = \frac{12 - \dots}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} \iff \frac{5 + \dots}{\dots} = \frac{10 + \dots}{\dots}$$

Partindo da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (com $b \neq 0$ e $d \neq 0$) e somando 1 aos dois membros (ou subtraindo 1, no caso de $a > b$ e $c > d$), encontraremos os resultados:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \end{cases} \quad \text{que permitem dizer:}$$

“Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então a soma (ou diferença) dos dois primeiros termos está para o segundo termo assim como a soma (ou a diferença) dos dois últimos está para o quarto termo.”

OBSERVAÇÃO: As transformações que conduzem uma proporção a novas proporções, quando se somam (ou se subtraem) os dois primeiros e os dois últimos termos de uma proporção, auxiliam o cálculo, porém são inúteis de serem “decoradas” como resultados, pois o importante é você compreender como tais transformadas são obtidas.

Quer conhecer outra transformação de uma proporção? Seja a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, vem: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ e, transformando de acordo com o resultado enunciado acima, temos: $\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$ e $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$; permutando os meios, outra vez, vem: $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ e, como: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, você pode escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} \\ \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} \end{cases} \quad \text{que permitem dizer:}$$

“Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para a soma (ou a diferença) dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.”

Confrontando os resultados obtidos ou permutando, convenientemente, os meios ou os extremos, você poderá chegar a outras transformadas, como por exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Através das operações *multiplicação e divisão, potenciação e radiciação* também se pode transformar uma proporção em *novas proporções*. São bons exercícios para você fazer. Tente alguns deles.

À guisa de apresentação será feito um *resumo* das transformações mais usuais, obtidas da proporção: $a:b = c:d$. É bom guardá-lo, pois será útil quando forem introduzidas “estruturas” análogas mais tarde (sistemas de duas variáveis).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \begin{cases} \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ e } \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \quad (a > c \text{ e } b > d) \\ \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a^2}{b^2} \text{ e } \frac{a:c}{b:d} = \frac{1}{1} \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \text{ e } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} \end{cases}$$

1.º) Os volumes de dois cubos estão entre si assim como 3 está para 4. Calcular o volume de cada cubo sabendo-se que a soma desses volumes é 21dm^3 .

Se os volumes procurados forem representados, respectivamente, por a e b , então o problema se traduzirá nas seguintes sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \\ a + b = 21 \end{cases}$$

A transformação a ser aplicada na proporção: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ é a que diz respeito à “... soma dos dois primeiros...”. Logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \iff \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4} \iff \frac{21}{b} = \frac{7}{4} \iff b = \frac{21 \times 4}{7} = 12$$

Como a soma é 21, vem: $a = 21 - b$ ou $a = 21 - 12 = 9$

Os volumes dos cubos são, portanto, respectivamente: 9dm^3 e 12dm^3

$$\text{Prova: } \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}} \\ a + b = 9 + 12 = \boxed{21} \end{cases}$$

2.º) Calcular dois números sabendo-se que a diferença entre eles é 20 e a razão 7:3.

$$\text{As sentenças matemáticas correspondentes são: } \begin{cases} a - b = 20 \\ \frac{a}{b} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Agora, a transformação é a “... diferença dos dois primeiros...” e o cálculo:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{7-3}{3} \iff \frac{20}{b} = \frac{4}{3} \iff b = \frac{20 \times 3}{4} = 15$$

$a = 20 + 15 = 35$. Logo: os números são $\boxed{35}$ e $\boxed{15}$. Faça a verificação.

3.º) Determinar x e y na proporção: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, sabendo-se que $x + y = 28$.

Temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ x + y = 28 \end{cases} \quad \text{e a transformada a ser empregada é:}$$

$$\frac{x+y}{3+4} = \frac{x}{3} \iff \frac{28}{7} = \frac{x}{3} \iff x = \frac{28 \times 3}{7} = 12. \text{ Portanto: } y = 28 - x = 28 - 12 = 16$$

Logo: $x = \boxed{12}$ e $y = \boxed{16}$. Verifique você mesmo esses resultados.

4.º) Quais os dois números que estão na razão 4 : 5 e cujo produto é 180?
Temos:

$$\text{sentenças matemáticas} \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \\ a \times b = 180 \end{cases}$$

Permutando os meios da proporção: $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ vem $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ e transformando-a, pelo emprêgo da operação multiplicação (veja o resumo), obtemos:

$$\frac{a \times b}{4 \times 5} = \frac{a^2}{4^2} \iff \frac{180}{20} = \frac{a^2}{16} \iff a^2 = \frac{180 \times 16}{20} = 144$$

$$a^2 = 144 \iff a = \sqrt{144} = 12 \text{ ("desfazendo" a potenciação)} \text{ e } b = 180 : 12 = 15$$

Logo: os números procurados são: $\boxed{12}$ e $\boxed{15}$. Prova: $\begin{cases} \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \\ 12 \times 15 = 180 \end{cases}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 19

1. Transformar as seguintes proporções:

- 1.ª) $5 : 3 = 10 : 6$ *permutando os extremos*
 2.ª) $\frac{16}{12} = \frac{8}{6}$ *permutando os meios*
 3.ª) $x : y = z : t$ *invertendo as razões* ($x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, t \neq 0$)
 4.ª) $0,5 : 4 = 1 : 8$ *permutando os extremos*
 5.ª) $\frac{49}{7} = \frac{7}{1}$ *permutando os meios*
 6.ª) $4 : 1 = 2 : \frac{1}{2}$ *invertendo as razões*

2. Supostas verdadeiras as seguintes sentenças, transformar as proporções que elas indicam:

- 1.ª) $\frac{1}{T} = \frac{\Delta}{\nabla}$ *invertendo as razões*
 2.ª) $\square : / = \circ : \backslash$ *permutando os meios*
 3.ª) $\cup = \subset$ *permutando os extremos*
 4.ª) $\square : // = // : \square$ *invertendo as razões*

3. Calcular os valores de a e b , nas seguintes proporções:

- 1.ª) $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ onde $a + b = 33$
 2.ª) $a : b = 5 : 2$ " $a - b = 6$

3.ª) $a : 12 = b : 32$ onde $a + b = 11$

4.ª) $\frac{9}{a} = \frac{3}{b}$ " $a - b = 24$

5.ª) $\frac{7}{4} : a = 0,5 : b$ " $a - b = 1,25$

6.ª) $\frac{a}{b} = 0,9$ " $a + b = 3,8$

7.ª) $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ " $a \times b = 180$

8.ª) $a : 5 = b : 8$ " $a \times b = 1.000$

4. Calcular x e y , que participam das seguintes sentenças matemáticas:

1.ª) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \\ x + y = 49 \end{cases}$ 2.ª) $\begin{cases} x - y = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$ 3.ª) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \\ x \times y = 135 \end{cases}$ 4.ª) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ x \times y = 12 \end{cases}$

5. As áreas de dois retângulos estão entre si como 3 está para 4. Calcular a área de cada retângulo, sabendo-se que a soma delas é $42m^2$.
 6. A razão entre as capacidades de dois recipientes é de 2 : 3 e o menor deles tem 12l. Determinar, em litros, a capacidade do maior.
 7. Decompor 42 em duas parcelas tais que estejam na razão $\frac{3}{4}$ (Sugestão: chamar as parcelas de a e b e aplicar uma transformação, ... a da soma ...).
 8. Qual a fração equivalente à fração $\frac{7}{3}$ cuja diferença dos termos é igual a 16?
 9. Um salão de festas, de forma retangular, tem a área de $1.000m^2$. Calcular as dimensões desse salão que estão na razão 5 : 8 (Sugestão: ... a transformação agora é a do produto ...).
 10. A razão entre a base e a altura de um triângulo é de 7 para 4. A área desse triângulo é de $56m^2$. Calcular as medidas da base e da altura.
 11. Os volumes de dois tambores de gasolina estão entre si como 2 está para 5. Calcular o volume de cada um, sabendo-se que a soma desses volumes é igual a $56dm^3$.
 12. As dimensões de um retângulo de área igual a $48m^2$ estão na razão 1 : $\frac{1}{3}$. Determinar as medidas dessas dimensões.
 13. O produto de dois números é igual a 1.200 e um deles vale três vezes o outro (é o mesmo que dizer: a razão entre eles é de 3 : 1). Quais são esses números?
 14. Conhece-se o produto: 60, e o quociente: $\frac{3}{5}$ de dois números. Determinar esses números.
 15. O preço de um vaso é o quádruplo do preço de um outro vaso (é o mesmo que dizer: a razão entre eles é de 4 : 1). Se a diferença entre esses preços é de NCr\$ 1,20, qual o preço de cada vaso?



Por cento; Porcentagem.

8. Por cento: razão de conseqüente 100

É freqüente o uso da palavra "por cento" na maioria de nossas atividades. Assim, por exemplo, quando o professor de Matemática diz que: "Cinquenta por cento dos alunos obtiveram *Bom* no último teste", você logo conclui que a *metade* da classe foi bem.

Isto, porque 50 é a *metade* de 100 e a razão empregada nessa afirmação é $50 : 100$ ou $\frac{50}{100}$. Logo:

Uma razão na qual o conseqüente é 100 é denominada "por cento"

É usado o símbolo % (lê-se: "por cento") para indicar a razão cujo segundo termo (conseqüente) é 100. Então:

$$50 : 100 = 50\%$$

$$\frac{18}{100} = 18\%$$

$$11 \frac{1}{2} : 100 = 11 \frac{1}{2}\%$$

LEMBRETE AMIGO

$$50 : 100, \quad \frac{50}{100}, \quad 50\%$$

são *numerais* diferentes que exprimem a mesma razão (por cento)

Suponhamos que numa "bateria" de 100 perguntas fôssem registrados os seguintes resultados: a) 70 respostas *certas*; b) 18 respostas *erradas*; c) 12 *sem respostas*. Você poderá exprimir êsses resultados em termos de "por cento":

$$a) \frac{70}{100} = 70\% \quad b) \frac{18}{100} = 18\% \quad c) \frac{12}{100} = 12\%$$

e conhecer *tôdas* as possíveis respostas:

$$\frac{70}{100} + \frac{18}{100} + \frac{12}{100} = \frac{100}{100}$$

ou $70\% + 18\% + 12\% = 100\%$

Observação interessante: Como $1 = \frac{100}{100} = 100\%$, você pode dizer que 100% é um outro *numeral* para o número *um*!

E para o número *dois*? Um outro numeral é 200% .

Seja agora uma classe experimental de 25 alunos constituída por 13 meninos e 12 meninas. Qual é a razão entre o número de meninos e o número de alunos dessa classe? Você já sabe que é $\frac{13}{25}$ ou *qualquer* razão equivalente, isto é:

$$\frac{13}{25} = \frac{26}{50} = \frac{39}{75} = \frac{52}{100} = \frac{65}{125} = \dots$$

Portanto, se você quiser saber quanto "por cento" representam os meninos dessa classe, é fácil concluir que é 52% . E as meninas? Basta considerar a *razão* $\frac{12}{25}$ e procurar a equivalente de *conseqüente* 100.

Como $100 : 25 = 4$, vem: $\frac{12}{25} = \frac{12 \times 4}{25 \times 4} = \frac{48}{100}$

o que dá 48% de meninas. É lógico que o total de alunos da classe é dado por:

$$\frac{13}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$$

ou

$$\frac{52}{100} + \frac{48}{100} = \frac{100}{100}$$

isto é: $52\% + 48\% = 100\%$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 20

1. Expressar as seguintes razões em "por cento", usando o símbolo %. Se fôr necessário, expressar antes uma razão equivalente com o conseqüente igual a 100:

1.^a) $28 : 100$ Temos: 28%

2.^a) $\frac{40}{100}$ Temos: 40%

3.^a) $33 \frac{1}{4} : 100$ Temos: $33 \frac{1}{4}\%$

4.^a) $\frac{214}{100}$ Temos: 214%

5.^a) $\frac{4}{5}$ Temos: $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 20}{5 \times 20} = \frac{80}{100} = 80\%$

6.^a) $3 : 2$ Temos: $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 50}{2 \times 50} = \frac{150}{100} = 150\%$

7.^a) $1 : 1$ Temos: $\frac{1}{1} = \frac{1 \times 100}{1 \times 100} = \frac{100}{100} = 100\%$

8.^a) $315 : 1.000$ Temos: $\frac{315}{1.000} = \frac{315:10}{1.000:10} = \frac{31,5}{100} = 31,5\%$

2. Expressar os seguintes "por cento" como razões, sob a forma mais simples:

1.^a) 25% Temos: $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ portanto: $25\% = 1 : 4$

2.^a) 120% Temos: $\frac{120}{100} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ portanto: $120\% = 6 : 5$

3.^a) $0,8\%$ Temos: $\frac{0,8}{100} = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$ portanto: $0,8\% = 1 : 125$

4.^a) $44,5\%$ Temos: $\frac{44,5}{100} = \frac{445}{1000} = \frac{89}{200}$ portanto: $44,5\% = 89 : 200$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 21

- Nas 100 figurinhas que possuo, 30 são repetidas. Quanto "por cento" de figurinhas repetidas tenho?
- Dos 400 operários daquela fábrica, 80 são mulheres. Quanto "por cento" representam as mulheres?
- Uma classe de 50 alunos possui: 16 alunos com doze anos, 18 alunos com treze anos, 12 alunos com quinze anos e 4 com dezesseis anos. Dizer quantos "por cento" representam, respectivamente, os alunos com doze, treze, quinze e dezesseis anos.

4. Em nosso time de voleibol (seis efetivos e quatro suplentes) vale a seguinte classificação *por altura*: João é considerado "alto"; Rui, "médio"; Pedro, "médio"; Francisco, "baixo"; Paulo, "alto"; Paulo II, "baixo"; Nelson, "médio"; Antônio, "médio"; Osvaldo, "alto" e Luís, "médio".

Quantos "por cento" representam os "altos", os "médios" e os "baixos"?

5. Dos NCr\$ 5,00 recebidos neste mês, Pérsio gastou: NCr\$ 1,20 em cadernos, NCr\$ 0,30 em lápis, NCr\$ 0,80 em cinema e NCr\$ 0,20 em revistinhas. Expressar em razões "por cento" da importância recebida, os gastos que Pérsio fez. Que razão "por cento" lhe resta ainda?

6. Usar as razões "por cento" para saber qual o time mais regular, sabendo-se que o time "A" jogou 25 partidas e ganhou 18 e o time "B" jogou 20 partidas e ganhou 15.

7. Expressar as seguintes razões "por cento" usando o símbolo %. Se fôr necessário, expressar antes uma razão equivalente com o conseqüente igual a 100:

1.^a) $32 : 100$

5.^a) $226 : 1.000$

9.^a) $\frac{3}{100}$

2.^a) $\frac{50}{100}$

6.^a) $3 : 3$

10.^a) $3 : 4$

3.^a) $5 : 2$

7.^a) $36 : 2.000$

11.^a) $0,6 : 10$

4.^a) $\frac{8}{10}$

8.^a) $15 : 15$

12.^a) $2,3 : 2,3$

8. Expressar os seguintes "por cento" como razões, sob a forma mais simples:

1.^a) 30%

3.^a) $5 \frac{1}{2}\%$

5.^a) $78,5\%$

7.^a) 100%

2.^a) 135%

4.^a) 400%

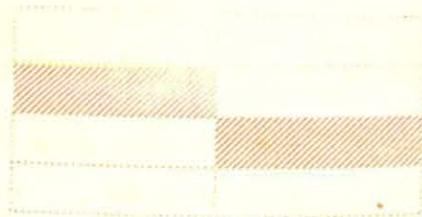
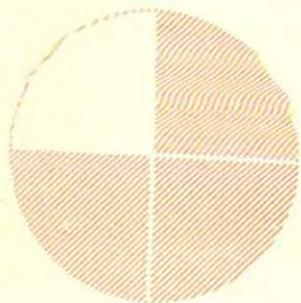
6.^a) 205%

8.^a) $12 \frac{3}{4}\%$

9. Completar a tabela, atendendo às colunas: fração decimal, número decimal e "por cento":

FRAÇÃO DECIMAL	NÚMERO DECIMAL	"POR CENTO"
$\frac{32}{100}$	0,32	32%
$\frac{8}{100}$
...	...	25%
...	0,80	...

10. Nas figuras seguintes determinar que parte fracionária está colorida e, a seguir, exprimir cada fração em "por cento":



9. Porcentagem: aplicação da razão "por cento"

Se 50% dos alunos de uma certa classe obtiveram *Bom* no teste de Matemática, você ficou sabendo que a razão: 50 : 100 representa a metade da classe, porém não sabe ainda quantos alunos essa metade representa. Esse número vai depender do *total* de alunos, que passa a ser assim o elemento *principal* do problema.

Se a classe tiver 40 alunos, então 50% representam 20 alunos. É importante, agora, você guardar os nomes dos "personagens" que figuram neste problema:

a razão 50 : 100 = 50% é o "por cento", sendo o antecedente 50 denominado taxa
o total 40 alunos é denominado principal
o resultado 20 alunos é denominado porcentagem

E 30% de 40 alunos, quantos alunos representam?

Basta determinar a porcentagem para saber quantos alunos representam. Para isso você se vai valer do estudo das proporções, pois se procura, neste problema, uma razão equivalente a $\frac{30}{100}$ cujo conseqüente seja 40, isto é, resolver a proporção:

$$\frac{30}{100} = \frac{\square}{40}$$

onde: $\square = \frac{40 \times 30}{100} = 12$, representa a porcentagem procurada.

Logo: 30% de 40 alunos representam 12 alunos.

10. Técnica operatória para determinar a porcentagem, o principal e a taxa, em problemas práticos

Como, de $\frac{\square}{40} = \frac{30}{100}$ vem $\square = \frac{40 \times 30}{100}$

segue-se que:

$$\text{porcentagem} = \frac{\text{principal} \times \text{taxa}}{100}$$

e, pelas propriedades conhecidas das operações:

$$\text{taxa} = (100 \times \text{porcentagem}) : \text{principal}$$

$$\text{principal} = (100 \times \text{porcentagem}) : \text{taxa}$$

Na prática, para uso em Bancos, Casas Comerciais e mesmo nos problemas da vida diária, empregam-se como técnica algumas fórmulas — que são sentenças matemáticas padrões — para o cálculo rápido da porcentagem, do principal e da taxa.

Indicando: porcentagem por *p*

principal por *P*

taxa por *i* (antecedente da razão $\frac{i}{100}$)

vem: $\frac{p}{P} = \frac{i}{100}$ e, portanto:

$$p = \frac{P \times i}{100}$$

sentença matemática padrão ou "fórmula" que permite calcular a porcentagem.



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 22

1.º) Calcular 25% de NCr\$ 80,00

A maneira de resolver este problema, fixando o conceito de razão "por cento", é já conhecida:

$$\frac{25}{100} = \frac{x}{80} \iff x = \frac{25 \times 80}{100} = 20, \text{ ou seja, } 25\% \text{ de NCr\$ } 80,00 \text{ é NCr\$ } 20,00$$

Pode-se resolvê-lo, também, aplicando diretamente a "fórmula": $p = \frac{P \times i}{100}$

$$\text{Logo: } p = \frac{80,00 \times 25}{100} = 20,00$$

2.º) Quantos "por cento" é NCr\$ 20,00 de NCr\$ 80,00?

Trata-se do problema inverso, pois se procura a taxa. Agora o x é o antecedente da razão, cujo conseqüente é 100, valendo a proporção:

$$\frac{x}{100} = \frac{20,00}{80,00}$$

ou

$$x = \frac{100 \times 20,00}{80,00} = 25, \text{ isto é, a taxa é de } 25\%.$$

Pode-se, também, empregar a "fórmula":

$$\text{taxa} = (100 \times \text{porcentagem}) : \text{principal}$$

ou

$$\frac{i}{100} = \frac{p}{P} \iff i = \frac{100 \times p}{P}$$

$$\text{Logo: } i = \frac{100 \times 20,00}{80,00} = 25$$

3.º) Se 25% de uma certa importância são NCr\$ 20,00, qual é o valor dessa importância?

Agora é preciso determinar o "principal" do problema. Deduza, você mesmo, que a proporção agora é:

$$\frac{25}{100} = \frac{20,00}{x} \iff x = \frac{100 \times 20,00}{25} = 80,00 \text{ e o principal é NCr\$ } 80,00$$

Aplicando-se a "fórmula":

$$\text{principal} = (100 \times \text{porcentagem}) : \text{taxa}$$

ou

$$P = \frac{p \times 100}{i} \text{ ou ainda: } P = \frac{100 \times p}{i}$$

$$\text{Logo: } P = \frac{100 \times 20,00}{25} = 80,00$$

OBSERVAÇÃO: Nos três exercícios resolvidos sempre foram conhecidos dois dos dados do problema e o 100 que caracteriza a porcentagem. Quer-se determinar um terceiro elemento.

4.º) Em cada uma das seguintes sentenças, destacar: o principal, a taxa e a porcentagem:

1. 25% de NCr\$ 80,00 é NCr\$ 20,00

- ↗ principal : NCr\$ 80,00
- porcentagem : NCr\$ 20,00
- ↘ taxa : 25

2. 54 é 300% de 18

- ↗ principal : 18
- porcentagem : 54
- ↘ taxa : 300

3. 16 é 20% de 80

- ↗ principal : 80
- porcentagem : 16
- ↘ taxa : 20

4. $3\frac{1}{2}\%$ de NCr\$ 2.000,00 é NCr\$ 70,00

- ↗ principal : NCr\$ 2.000,00
- porcentagem : NCr\$ 70,00
- ↘ taxa : $3\frac{1}{2}$

5. 216kg é 100% de 216kg

- ↗ principal : 216kg
- porcentagem : 216kg
- ↘ taxa : 100

6. 120% de NCr\$ 1.000,00 é NCr\$ 1.200,00

- ↗ principal : NCr\$ 1.000,00
- porcentagem : NCr\$ 1.200,00
- ↘ taxa : 120

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Quando a taxa é menor que 100 a porcentagem é menor que o principal
 Quando a taxa é igual a 100 a porcentagem é igual ao principal
 Quando a taxa é maior que 100 a porcentagem é maior que o principal

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 23

1. Calcular:

1.º) 30% de NCr\$ 600,00

2.º) 120% de 50

3.º) $6 \frac{1}{2}\%$ de NCr\$ 4.000,00

4.º) 0,8% de 90 gramas

5.º) $1 \frac{3}{4}\%$ de 3.000.000 de habitantes

6.º) $216 \frac{1}{2}\%$ de NCr\$ 10.000,00

2. Determinar quanto "por cento" é:

1.º) NCr\$ 0,50 de NCr\$ 2,50

2.º) 12 gramas de 96 gramas

3.º) $1.200m^2$ de $60km^2$

4.º) 120,6 de 50,25

5.º) 122,5 toneladas de 100 toneladas

6.º) $244 \frac{4}{5}$ de 216

3. Dizer:

1.º) NCr\$ 100,00 é 8% de que importância?

2.º) 72 é 400% de que número?

3.º) 5.600.000 habitantes é 100% de que população?

4.º) NCr\$ 220,00 é 110% de que quantia?

5.º) 0,73g é 0,5% de quantos gramas?

6.º) 100 é 100% de que número?

4. Nas seguintes sentenças dizer qual é o principal, a taxa e a porcentagem:

1.ª) 12kg representa 50% de 24kg

2.ª) Ganhando 20% sobre o preço anunciado de NCr\$ 8,00 para uma camisa, paguei somente NCr\$ 6,40

3.ª) Δ é $\square\%$ de ∇

5. Escrever V nas sentenças verdadeiras e F nas falsas:

1.º) Quando a taxa é menor de 100 a porcentagem é igual ao principal

2.º) Quando a taxa é maior que 100 a porcentagem é menor que o principal

3.º) Quando a taxa é igual a 100 a porcentagem é igual ao principal

PROBLEMAS VARIADOS SOBRE USO DE PORCENTAGEM — GRUPO 24

1. A classe de Virgínia possui 40 alunas, 15% das quais são Bandeirantes. Quantas são as Bandeirantes da classe?

2. Existem 300 estudantes no período da tarde do Ginásio Estadual. Vinte e cinco por cento desses estudantes solicitaram passes escolares. Quantos são esses estudantes?



3. As calças "rancheiras" compradas durante o mês de março têm 20% de desconto sobre o preço marcado. Mamãe comprou duas delas, cujo preço marcado era NCr\$ 8,80 cada. Quanto pagou?

4. No baile de formatura do ano passado participaram 80% dos formandos. A 4.ª Série "A" tinha 40 estudantes e a 4.ª "B", 35. Quantos formandos deixaram de participar do baile?

5. Feito um inquérito sobre o que cada aluno gostaria de estudar, depois de completado o Ginásio, foram registrados os seguintes dados, numa classe de 40 alunos: 45% desejam cursar o científico; 25% desejam cursar o clássico. Quantos alunos desejam cursar o científico? E o clássico? Quantos "por cento" e quantos alunos se dedicarão a outras atividades?

6. Na minha classe faltaram na última sabatina de História: 5% por doença e 10% por motivos de ordem religiosa. Quantos fizeram a sabatina, se a classe possui 40 alunos?

7. Num colégio os 12% de alunos de origem estrangeira somam 72. Quantos alunos tem o colégio?

8. Papai comprou a vista um terreno e obteve um desconto de 10%, equivalente a NCr\$ 200,00? Quanto pagou?

9. Renato, Elza e Roberto possuem coleções de selos. Renato possui 200 selos; Elza, 150 e Roberto, 100. Quantos "por cento" é a coleção de Renato em relação à de Elza? E a de Roberto em relação à coleção de Renato?

10. Num certo Congresso participaram 648 homens, sabendo-se que 46% dos congressistas são mulheres. Quantos "por cento" de homens participaram e qual o total de congressistas?

11. Uma casa foi comprada por NCr\$ 13.450,00 e vendida por NCr\$ 15.550,00. Qual é a taxa de lucro dessa transação?

12. O raio da Terra é aproximadamente de 6.400km e o raio da Lua, 1.728km. Quantos "por cento" do raio da Terra é o raio da Lua?

13. O maior planeta é Júpiter, que possui um raio aproximadamente igual a 68.800km. Quantos "por cento" é esse raio em relação ao da Terra?

14. Lavinia mediu 160cm de altura quando estava no curso de Admissão. Atualmente mede 168 cm. De quantos "por cento" foi o aumento?

15. O penúltimo recorde para a corrida das duas milhas americanas foi de 8 minutos e 30 segundos. O último foi de 8 minutos e 20 segundos. De quantos "por cento" foi reduzido o tempo?

LEMBRETE AMIGO

Acêrca do uso correto do "por cento" e da "porcentagem", convém lembrar que não se pode dizer, por exemplo: "a minha *camisa esporte é 100% mais bonita que a sua*", pois a *beleza de uma camisa depende do gôsto de cada um e não pode ser expressa em números!*

Outras vêzes o "por cento" é usado para comparar grandezas, sem porém discriminar o principal. Assim, por exemplo, *não se pode dizer que o óleo "tal" rende 30% a mais se não se completar em relação a quê.*

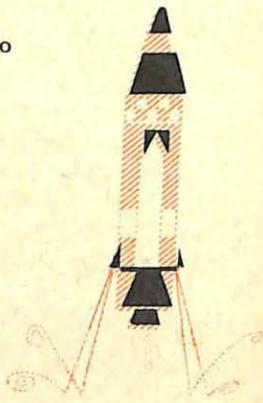
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 25

Escreva V ou F onde achar que deva, levando em conta a "forma" da pergunta:

1. A minha lancheira custou 10% mais barato que a sua.
2. Se um número é aumentado de seus 30% e em seguida do resultado fôr diminuído 30%, obtêm-se o mesmo resultado inicial.
3. As pilhas "x" trabalham 20% a mais.
4. 20% de 50 é igual a 50% de 20.
5. Eu gosto de Matemática 200% mais do que o João!
6. 15% de minha classe tirou "A" em Geografia.
7. Se o *principal* é duplicado e a *taxa* dividida por dois, a *porcentagem* conservar-se-á a mesma.
8. Vavá marcou 30% dos gols.
9. Vavá marcou 30% de gols.
10. Calculei 125% de 100; a seguir, 80% do resultado e obtive 100 novamente.

... e mais esta:

O foguete "Guarani" tem 20% mais potência do que o foguete "Tupi".



Utilização das propriedades estruturais das operações na resolução de problemas

Você já sabe que a multiplicação de números racionais é *comutativa*, *associativa* e *distributiva* em relação à adição. Estas propriedades podem tornar mais simples a resolução de problemas que envolvem "por cento" e "porcentagem" se você tiver que usar a multiplicação. Exemplos:

- 1.º Devendo calcular 10% de 80 e 10% de 120, quanto valerá a soma dos resultados?

Basta calcular 10% de (80 + 120) ou 10% de 200, pois:

10% × (80 + 120) = 10% × 80 + 10% × 120, como é fácil verificar:

$$\frac{10}{100} \times (80 + 120) = \frac{10}{100} \times 80 + \frac{10}{100} \times 120 \text{ é uma sentença verdadeira.}$$

- 2.º 12% de 30 é igual a 30% de 12?

Sim, pois:

$$\left(12 \times \frac{1}{100}\right) \times 30 = \left(30 \times \frac{1}{100}\right) \times 12$$



TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 26

Escreva V ou F onde achar que deva:

1. É a mesma coisa 20% de 100 e 100% de 20.
2. Somando 50% de 80 com 50% de 20 é o mesmo que calcular 50% de 100.
3. 0,5% de 50 com mais 0,5% de 50 é o mesmo que 1% de 100.
4. 42% de 20 mais 8% de 20 é igual a 10.
5. $\frac{1}{2}$ % de 100 é igual a 50% de 1.

1ª PARTE: PRIMEIRA PARTE

em. Números proprios
cas. Problemas de
bio. Grandezas Proporcionais

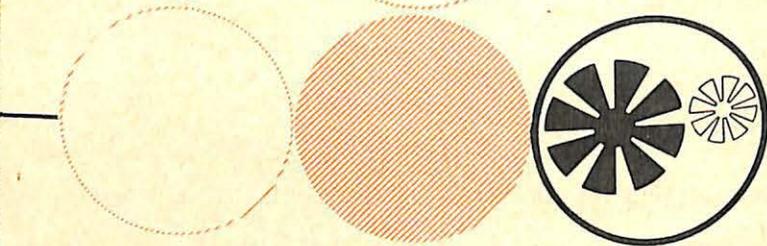
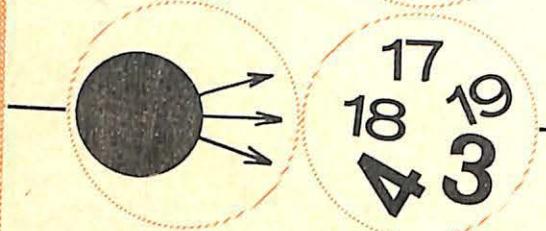
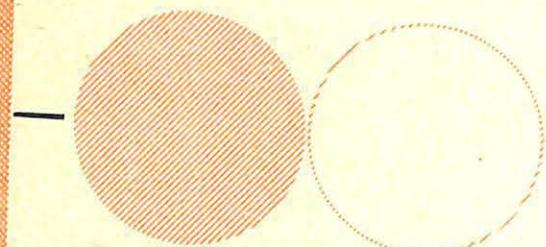
2ª PARTE: SEGUNDA PARTE

tos. Regras de três
ais. Juros Simples
ais. Desconto - C

números racionais esta coleção
conjunto - reunião conjunto

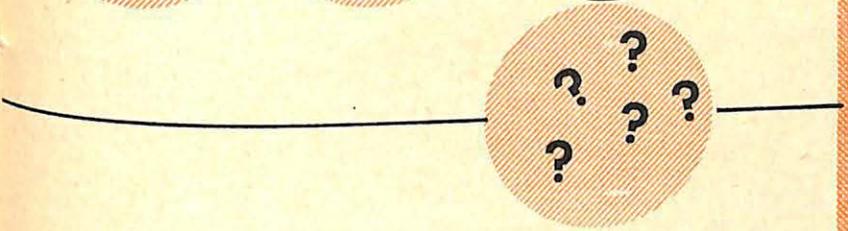
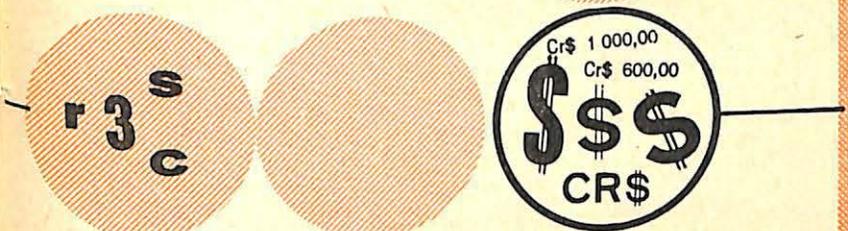
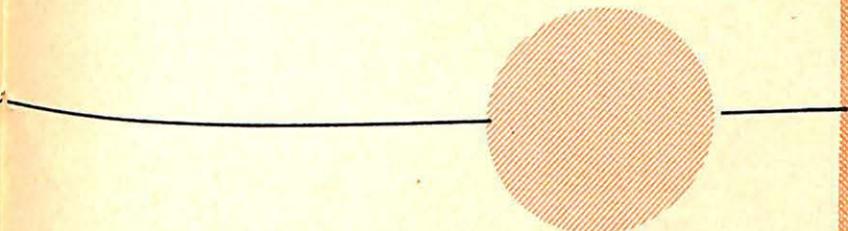
números inteiros negativos

capítulo dois



PRIMEIRA PARTE:

Números proporcionais.
Problemas com novas estruturas.
Grandezas Proporcionais.



SEGUNDA PARTE:

Regras de três.
Juros Simples.
Desconto - Câmbio.

Números proporcionais.

42

x:1
y:2
z:3

1. Números diretamente proporcionais

Considere uma sucessão de números quaisquer:

5 8 10 13

Multiplicando cada um deles por um mesmo número, por exemplo 2, você obterá a sucessão:

10 16 20 26

Com esse procedimento você formou duas sucessões de números proporcionais:

5	8	10	13
↓	↓	↓	↓
10	16	20	26

E se fossem dadas, ao contrário, duas sucessões de números, como por exemplo:

1	2	5
↓	↓	↓
3	6	15

como você reconheceria se esses números são *proporcionais*?

“Explorando” o exercício anterior, você notará que a *razão* entre dois números correspondentes é sempre a mesma, isto é:

$$\frac{5}{10} = \frac{8}{16} = \frac{10}{20} = \frac{13}{26}$$



PRIMEIRA PARTE

Números proporcionais.
Problemas com novas estruturas.
Grandezas Proporcionais.

Agora você pode concluir que:

1 2 5
são números proporcionais a
3 6 15

pois: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$. Essa é a técnica para você "testar" se duas sucessões de números são proporcionais ou, como também se diz, diretamente proporcionais.

Portanto, os números da sucessão:

a, b, c, d, \dots

são proporcionais aos correspondentes números da sucessão:

a', b', c', d', \dots

quando:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \dots \quad \text{é V (verdadeira)}$$

2. Propriedade que relaciona números proporcionais

Chamando de n o valor comum às razões, como por exemplo:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = n \quad (a' \neq 0; b' \neq 0; c' \neq 0)$$

temos:

$$a = n \times a' \quad \left(\text{de } \frac{a}{a'} = n \right)$$

$$b = n \times b'$$

$$c = n \times c'$$

ou, somando membro a membro, as igualdades acima:

$$a + b + c = n \times a' + n \times b' + n \times c'$$

ou

$$a + b + c = n \times (a' + b' + c') \quad \text{pela p.d.m.(a.)}$$

ou

$$n = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$$

Logo:

$$\text{se } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{então} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$$

3. Números inversamente proporcionais

Sejam, por exemplo, as duas sucessões:

3 5 6 10
20 12 10 6

Que esses números não são proporcionais está claro, pois:

$$\frac{3}{20} = \frac{5}{12} = \frac{6}{10} = \frac{10}{6} \quad \text{é falsa!}$$

"Explorando" melhor as duas sucessões, você observará que os números que as compõem satisfazem à seguinte condição: multiplicando dois números correspondentes, obtém-se o mesmo resultado, ou seja:

$$3 \times 20 = 60; 5 \times 12 = 60; 6 \times 10 = 60 \text{ e } 10 \times 6 = 60$$

Quando isto acontece dizemos que os números da sucessão

3 5 6 10

são inversamente proporcionais aos correspondentes números da sucessão:

20 12 10 6

Para "testar" se duas sucessões de números são inversamente proporcionais, basta você lembrar que é sempre o mesmo o produto de dois números correspondentes:

$$3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 10 \times 6 = 60$$

Este fato permite dizer também que os números da primeira sucessão são diretamente proporcionais aos INVERSOS dos correspondentes números da segunda sucessão, isto é:

$$\frac{3}{20} = \frac{5}{12} = \frac{6}{10} = \frac{10}{6}$$

pois:

$$\frac{3}{20} = 3 \times \frac{1}{20} = 60$$

De um modo geral, os números da sucessão

a, b, c, d, \dots

são inversamente proporcionais aos correspondentes números da sucessão

$$a', b', c', d', \dots$$

quando forem diretamente proporcionais aos INVERSOS dos correspondentes números da segunda sucessão, isto é:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \dots$$

ou

$$a \times a' = b \times b' = c \times c' = \dots \text{ é V (verdadeira)}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 27

1. Verificar se são diretamente ou inversamente proporcionais os números dos seguintes pares de sucessões:

$$1.^{\text{a}} \begin{cases} 6 & 2 & 5 & 1 \\ 18 & 6 & 15 & 3 \end{cases}$$

$$3.^{\text{a}} \begin{cases} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 12 & 4 \end{cases}$$

$$2.^{\text{a}} \begin{cases} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 \end{cases}$$

$$4.^{\text{a}} \begin{cases} 5 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & 9 \end{cases}$$

Testando as sucessões com as técnicas conhecidas, temos:

$$1.^{\text{a}} \begin{cases} \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} & \text{(V)} \\ 6 \times 18 = 2 \times 6 = 5 \times 15 = 1 \times 3 & \text{(F)} \end{cases}$$

logo: os n.os são diretamente proporcionais

$$2.^{\text{a}} \begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{3}{4} = \frac{1}{3} = \frac{4}{8} & \text{(F)} \\ 2 \times 5 = 3 \times 4 = 1 \times 3 = 4 \times 8 & \text{(F)} \end{cases}$$

logo: os n.os não são nem diretamente, nem inversamente proporcionais

$$3.^{\text{a}} \begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{12} = \frac{3}{4} & \text{(F)} \\ 4 \times 3 = 2 \times 6 = 1 \times 12 = 3 \times 4 & \text{(V)} \end{cases}$$

logo: os n.os são inversamente proporcionais

Teste você a 4.^a.

2. Determinar os valores de m e n , nos seguintes conjuntos de números diretamente proporcionais:

$$\begin{matrix} 5 & 6 & 7 \\ 75 & m & n \end{matrix}$$

Se são diretamente proporcionais, devemos ter:

$$\frac{5}{75} = \frac{6}{m} = \frac{7}{n} \quad \text{(V)}$$

Trabalhando com as duas primeiras razões, temos a proporção:

$$\frac{5}{75} = \frac{6}{m} \iff m = \frac{6 \times 75}{5} = 90$$

e, com a primeira e a última:

$$\frac{5}{75} = \frac{7}{n} \iff n = \frac{7 \times 75}{5} = 105$$

Logo: $m = 90$ e $n = 105$. Verifique.

3. Determinar os valores de x e y nos seguintes conjuntos de números inversamente proporcionais:

$$\begin{matrix} 6 & 4 & 12 \\ x & 3 & y \end{matrix}$$

Se são inversamente proporcionais, devemos ter:

$$6 \times x = 4 \times 3 = 12 \times y \quad \text{(V)}$$

$$\text{De: } 6 \times x = 4 \times 3 \iff x = \frac{4 \times 3}{6} = 2$$

e

$$\text{de: } 4 \times 3 = 12 \times y \iff y = \frac{4 \times 3}{12} = 1$$

Portanto: $x = 2$ e $y = 1$. Verifique.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 28

1. Verificar se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais os números dos seguintes pares de sucessões:

$$1.^{\text{a}} \begin{cases} 6 & 8 & 10 & 12 \\ 15 & 20 & 25 & 30 \end{cases}$$

$$4.^{\text{a}} \begin{cases} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 3 \end{cases}$$

$$2.^{\text{a}} \begin{cases} 6 & 10 & 12 \\ 20 & 12 & 10 \end{cases}$$

$$5.^{\text{a}} \begin{cases} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{cases}$$

$$3.^{\text{a}} \begin{cases} \frac{2}{5} & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$6.^{\text{a}} \begin{cases} 2 & \frac{1}{3} & 14 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{3}{35} \end{cases}$$

2. Determinar m e n , nas seguintes sucessões de números diretamente proporcionais:

$$1.^a) \begin{cases} 3 & 2 & 5 \\ 12 & m & n \end{cases}$$

$$2.^a) \begin{cases} m & 2 & 1 \\ 15 & 10 & n \end{cases}$$

$$3.^a) \begin{cases} m & 5 & n \\ 121 & 55 & 33 \end{cases}$$

$$4.^a) \begin{cases} m & n & 13 & 4 \\ 40 & 24 & 104 & 32 \end{cases}$$

3. Determinar os valores de p , q e r , nas seguintes sucessões de números inversamente proporcionais:

$$1.^a) \begin{cases} 6 & 10 & q \\ 5 & p & 15 \end{cases}$$

$$2.^a) \begin{cases} p & 1 & q \\ 9 & 18 & 3 \end{cases}$$

$$3.^a) \begin{cases} p & q & 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 4 & r \end{cases}$$

$$4.^a) \begin{cases} 12 & 2 & p & q & 30 \\ 5 & 30 & 12 & \frac{2}{5} & r \end{cases}$$

4. Dadas as sucessões de números:

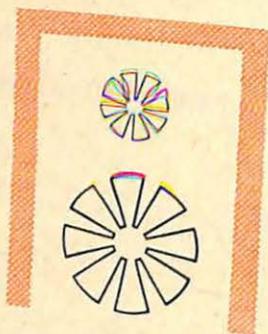
$$(a) \quad 6 \quad 8 \quad 2 \quad 12$$

$$(b) \quad 4 \quad 3 \quad 12 \quad 2$$

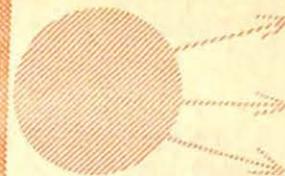
$$(c) \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 6$$

como são (a) e (b), (a) e (c), (b) e (c)?

5. Quando é que os números: x , y , z e t são, nessa ordem, diretamente proporcionais aos números: p , q , r e s ? Quando é que são inversamente proporcionais?



Problemas com novas estruturas.



4. Aplicações: novas estruturas de problemas

1.^a) **ESTRUTURA:** Repartição de um número em partes diretamente proporcionais a números dados.

Repartir um número, por exemplo 32, em partes diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 8, é determinar três números: x , y e z , que sejam proporcionais aos números 3, 5 e 8 e tenham 32 por soma.

Obedece, pois, à seguinte estrutura:

$$\begin{array}{l} \boxed{32} \longrightarrow x : 3 \\ \boxed{32} \longrightarrow y : 5 \\ \boxed{32} \longrightarrow z : 8 \end{array} \quad \text{cujas sentenças matemáticas são:}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \\ x + y + z = 32 \end{cases}$$

Pela propriedade que relaciona números proporcionais (n.º 2, pág. 74) é fácil calcular os valores de x , y e z , pois:

$$\frac{x + y + z}{3 + 5 + 8} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8}$$

ou

$$\frac{32}{16} = \frac{x}{3} \iff x = \frac{32 \times 3}{16} = \boxed{6}$$

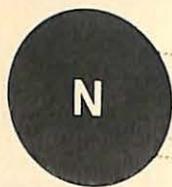
$$\frac{32}{16} = \frac{y}{5} \iff y = \frac{32 \times 5}{16} = \boxed{10}$$

$$\frac{32}{16} = \frac{z}{8} \iff z = \frac{32 \times 8}{16} = \boxed{16}$$

Logo, os números que satisfazem ao problema são: 6, 10 e 16.

$$\text{Prova: } \begin{cases} \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{16}{8} \\ 6 + 10 + 16 = 32 \end{cases}$$

Técnica operatória: De um modo geral, simbolizando por N o número que se quer repartir em partes *diretamente proporcionais* aos números a , b e c , temos, seguindo o mesmo raciocínio:



$$\begin{aligned} x &: a \\ y &: b \\ z &: c \end{aligned}$$

sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ x + y + z = N \end{cases}$$

$$\text{Como: } \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

ou

$$\frac{N}{a + b + c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

e daí "tiram-se" as seguintes "fórmulas" que fornecem os valores de x , y e z :

$$x = \frac{N \times a}{a + b + c} \quad y = \frac{N \times b}{a + b + c} \quad z = \frac{N \times c}{a + b + c}$$

Nota: Se a repartição for diretamente proporcional a números fracionários, pode-se converter ao caso da repartição em partes diretamente proporcionais a números inteiros (caso já estudado). Basta converter as frações ao mesmo denominador, desprezando-se, a seguir, o denominador comum. Exemplo:

Repartir 92 em partes diretamente proporcionais aos números: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Convertendo-se as frações ao menor denominador comum, vem: $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{12}$. E, agora, repartindo-se 92 em partes diretamente proporcionais aos números: 9, 8 e 6, isto é:

92

$$\begin{aligned} x &: 9 \\ y &: 8 \\ z &: 6 \end{aligned}$$

sentenças matemáticas

$$\begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{8} = \frac{z}{6} \\ x + y + z = 92 \end{cases}$$

E os números procurados serão: 36, 32 e 24. Determine-os você.

2.^a) **ESTRUTURA:** Repartição de um número em partes *inversamente proporcionais* a números dados.

Repartir um número, por exemplo 144, em partes *inversamente proporcionais* aos números 3, 4 e 12, é determinar três números: x , y e z , que sejam inversamente proporcionais aos números 3, 4 e 12 e tenham 144 por soma. Agora você tem a estrutura:

sentenças matemáticas

144

$$\begin{aligned} \longrightarrow x &: \frac{1}{3} \\ \longrightarrow y &: \frac{1}{4} \\ \longrightarrow z &: \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{12}} \\ x + y + z = 144 \end{cases}$$

Convertendo as frações: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{12}$ ao menor denominador comum, vem:

$$\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}$$

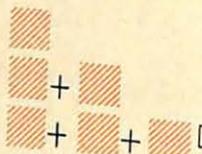
que permitem simplificar as sentenças matemáticas do problema para:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 144 \end{cases} \quad \text{que fornecem os valores: } \begin{cases} x = 72 \\ y = 54 \\ z = 18 \end{cases}$$

LEMBRETE AMIGO

A unidade da Matemática faz-se sentir neste instante. Quando você estudou na 1.^a Série problemas cujas estruturas se apresentavam, como por exemplo:

60



sentença matemática:

$$\square + (\square + \square) + (\square + \square + \square) = 60$$

que corresponde ao problema de "distribuir 60 objetos quaisquer para três pessoas, de modo que a segunda receba o *dôbro* e o terceiro o *triplo* do que deve receber a primeira", estava você na verdade, conhecendo um caso particular de uma estrutura mais ampla que pertence aos problemas agora estudados, pois corresponde à estrutura da repartição de 60 em partes proporcionais aos números 1, 2 e 3:

60

$$x : 1$$

$$y : 2$$

$$z : 3$$

sentenças matemáticas:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \\ x + y + z = 60 \end{cases}$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 29

1.º) A importância de NCr\$ 780,00 deve ser repartida aos três primeiros colocados num certo concurso em partes proporcionais aos pontos conseguidos pelos concorrentes. Sabe-se que o concorrente "A" conseguiu 50 pontos, "B" conseguiu 43 e "C", 37. Qual a importância que caberá a cada um?

Trata-se de problema que pertence à estrutura da repartição de um número em partes diretamente proporcionais a números dados. Logo:

$$780 \rightarrow x : 50$$

$$\rightarrow y : 43$$

$$\rightarrow z : 37$$

sentenças matemáticas

$$\begin{cases} \frac{x}{50} = \frac{y}{43} = \frac{z}{37} \\ x + y + z = 780 \end{cases}$$

Resolvendo pelas técnicas conhecidas, temos:

o candidato "A" receberá NCr\$ 300,00 (x); o candidato "B" receberá NCr\$ 258,00 (y) e o candidato "C" receberá NCr\$ 222,00 (z).

2.º) Um pacote de 157 balas deve ser repartido entre Aninha, de 5 anos, Glória, de 8 anos e Luluzinha de 9 anos, em partes inversamente proporcionais às suas idades (isto é, quem tem menos idade recebe mais balas!). Qual a porção que receberá cada uma?

157

$$x : \frac{1}{5}$$

$$y : \frac{1}{8}$$

$$z : \frac{1}{9}$$

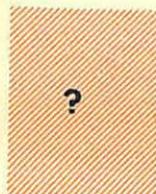
sentenças matemáticas

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{8}} = \frac{z}{\frac{1}{9}} \\ x + y + z = 157 \end{cases}$$

Aplicando as técnicas conhecidas, temos:

Aninha receberá 72 balas, Glória, 45 balas e Luluzinha, 40.

3.º) Redigir um problema que possua a seguinte estrutura:



$$x : 2$$

$$(x+5) : 3$$

sentença matemática:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+5}{3}$$

Trata-se de descobrir uma certa quantidade de unidades que será repartida em duas partes, respectivamente proporcionais a 2 e a 3, sendo que a segunda deve possuir 5 unidades a mais que a primeira. Aplicando na sentença matemática

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x}{2}$$

a transformação conveniente ("... a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como..."), vem:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+5) - x}{3-2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{5+x-x}{1} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{1} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \times 5}{1} = 10$$

Então a primeira parte receberá: $x = 10$ (unidades) e a segunda: $x + 5 = 10 + 5 = 15$ (unidades)

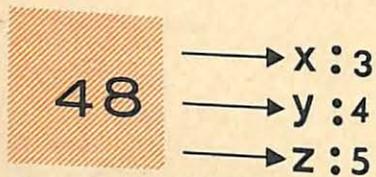
e o número de unidades distribuídas é: $10 + 15 = 25$

1. Repartir:

- 1.º) 40 em partes diretamente proporcionais aos números: 2, 3 e 5;
- 2.º) 21 em partes inversamente proporcionais aos números: 9 e 12;
- 3.º) 625 em partes diretamente proporcionais aos números: 5, 7 e 13;
- 4.º) 96 em partes diretamente proporcionais aos números: $1,2$; $\frac{2}{5}$ e 8;
- 5.º) 444 em partes inversamente proporcionais aos números: 4, 5 e 6;
- 6.º) 1.090 em partes inversamente proporcionais aos números: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$.

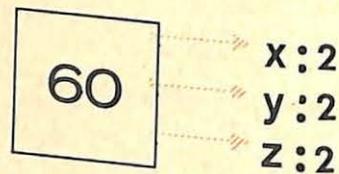
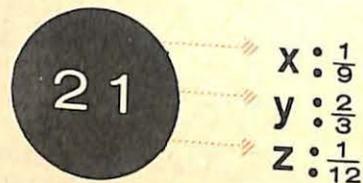
2. Determinar os valores de x , y e z , nas seguintes estruturas:

1.ª)



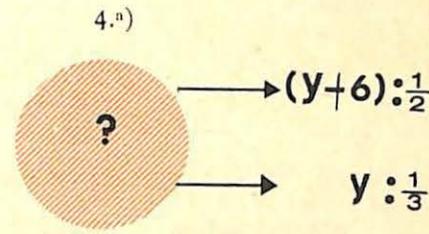
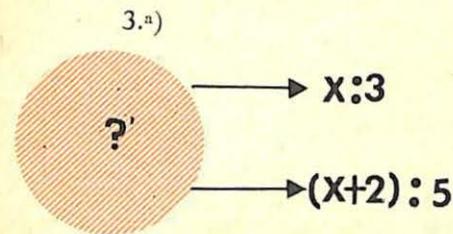
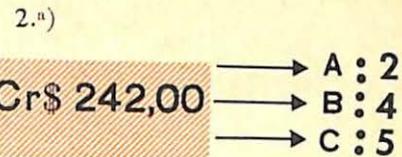
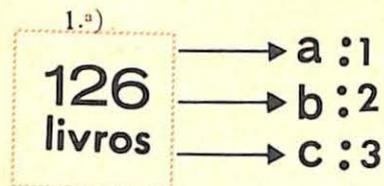
3.ª)

2.ª)



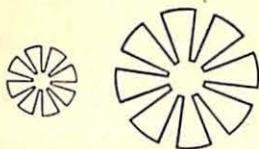
4.ª)

3. Formular pelo menos um problema que tenha a seguinte estrutura:



4. Titio repartiu os 94 peixinhos de seu aquário para seus três sobrinhos: Huguinho, de 6 anos; Luisinho, de 8 anos e Zêzinho, de 10 anos, com a condição que a distribuição fosse em partes inversamente proporcionais à idade de cada um. Qual a parte que coube a cada um dos sobrinhos?
5. Um prêmio de Agricultura no valor de NCR\$ 4.000,00 deve ser repartido em partes diretamente proporcionais às áreas cultivadas pelos três melhores agricultores da região. Qual a quantia que coube a cada um, sabendo-se que as áreas cultivadas são, respectivamente: 55a, 70a e 75a?
6. Na campanha "Dei ouro para o bem do Brasil", meu irmão de 12 anos e eu, com 13, demos um total de 5 gramas de ouro. Quanto deu cada um de nós, sabendo-se que as partes foram proporcionais às nossas idades?
7. Determinar a medida de cada um dos ângulos de um triângulo, sabendo-se que a soma é 180° e que essas medidas são inversamente proporcionais aos números 1, 6 e 3.
8. Os ângulos de um quadrilátero convexo, que têm por soma 360° , estão entre si assim como os números 2, 3, 5 e 8. Determinar os valores desses ângulos.
9. Papai e o titio Radamés constituíram uma sociedade comercial. Papai entrou com NCR\$ 24.000,00 e titio com NCR\$ 16.000,00. No fim de um ano de atividades comerciais, houve um lucro de NCR\$ 10.000,00. Qual a parte de lucro que caberá a cada um? (Sugestão: o lucro deve ser repartido em partes diretamente proporcionais às partes com que cada um participou na sociedade).
10. Os 130 livros de nosso Grêmio vão ser encapados por Dóris, Ceres e Jamile. Para esse trabalho cada uma receberá um número de livros inversamente proporcional aos números de livros que leram e que são respectivamente: Dóris e Ceres: 25 livros; Jamile: 20 livros. Quantos livros receberá cada uma delas? (É natural que quem lê mais, encape menos...)

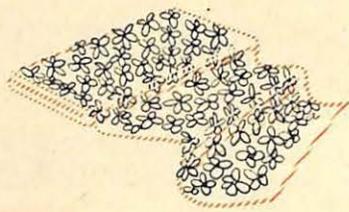
Grandezas Proporcionais.



5. Grandezas diretamente proporcionais. Propriedade característica

Duas grandezas variáveis(*) dizem-se *diretamente proporcionais* ou simplesmente *proporcionais* quando, **aumentando** (ou **diminuindo**) uma delas de *duas, três, quatro, ...* vezes o seu valor, a outra também **aumenta** (ou **diminui**) de *duas, três, quatro, ...* vezes o respectivo valor. Exemplo:

Sejam as grandezas variáveis:



	comprimento de uma fazenda		quantia de dinheiro (NCr\$)
Se	3m	↓	custam
então	6m	↓	custarão
e	9m	↓	custarão
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·

Logo, quando o comprimento da fazenda torna-se *duplo, triplo, etc.*, o mesmo acontece com o respectivo custo. Portanto, as duas grandezas: *comprimento de fazenda e quantia de dinheiro* são *diretamente proporcionais*. A propriedade que caracteriza a existência de grandezas diretamente proporcionais é:

(*) São as grandezas que podem assumir infinitos valores.

Em duas grandezas diretamente proporcionais, a razão de dois valores de uma delas é equivalente à razão dos dois valores correspondentes da outra.

No exemplo citado, temos:

$$\frac{3}{6} = \frac{36,00}{72,00}$$

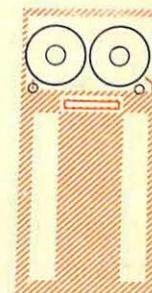
e
$$\frac{6}{9} = \frac{72,00}{108,00}$$

indicando as flechas, de *mesmo sentido*, que as razões resultaram de *grandezas diretamente proporcionais*.

6. Grandezas inversamente proporcionais. Propriedade característica

Duas grandezas variáveis dizem-se *inversamente proporcionais* quando, **aumentando** (ou **diminuindo**) uma delas de *duas, três, quatro, ...* vezes o seu valor, a outra **diminui** (ou **aumenta**) de *duas, três, quatro, ...* vezes o respectivo valor. Exemplo:

Sejam as grandezas variáveis:



número de máquinas(*)

e duração do tempo

Se	5 máquinas realizaram certo trabalho em	↓	12 dias	↑
então	10 máquinas(*) realizarão o mesmo trabalho em	↓	6 dias	↑
e	15 máquinas	↓	4 dias	↑

(*) Subentenda-se: máquinas de *mesma* capacidade de produção.

Agora, quando o número de máquinas duplica, triplica, etc., a duração do tempo, empregado para realizar o mesmo trabalho, reduz-se à metade, a um terço, etc., e as duas grandezas são inversamente proporcionais. A propriedade que caracteriza a existência de grandezas inversamente proporcionais é:

Em duas grandezas inversamente proporcionais, a razão de dois valores de uma delas é igual ao inverso da razão dos dois valores correspondentes da outra.

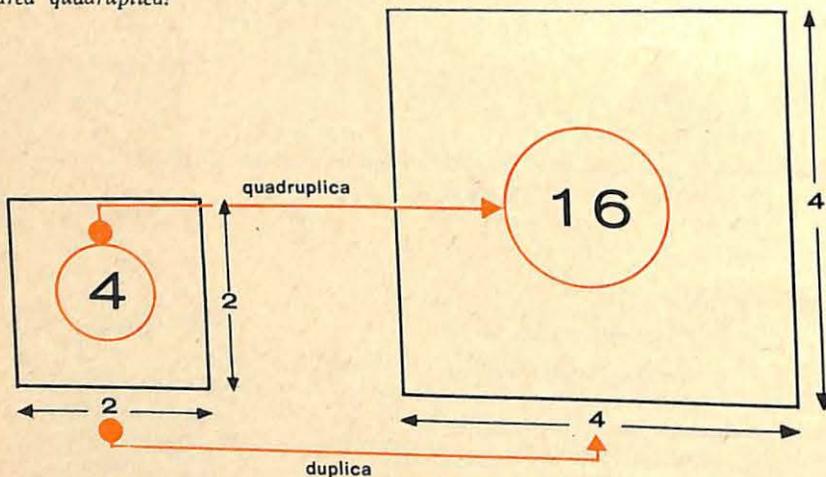
No exemplo considerado, temos:

$$\frac{5}{10} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{4}{6}$$

e as flechas correspondentes às grandezas variáveis são, agora, de sentido contrário.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Para a caracterização da proporcionalidade de duas grandezas não basta verificar se o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra. É necessário que, duplicando o valor de uma delas, por exemplo, o valor correspondente da outra também duplique. Assim, por exemplo, o comprimento do lado de um quadrado e a sua área, não são grandezas proporcionais, pois, quando o lado duplica de valor, a área quadruplica!

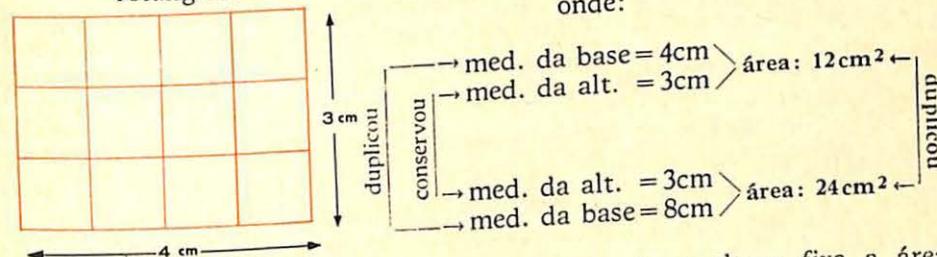


Também o comprimento da aresta de um cubo e o seu volume, não são grandezas proporcionais, pois, se o valor da aresta duplica, o volume do cubo torna-se oito vezes maior! Faça os cálculos você mesmo.

7. Proporcionalidade composta. Propriedade característica

Para você saber se uma grandeza variável é proporcional, diretamente ou inversamente, a várias outras, basta saber se tal grandeza é diretamente ou inversamente proporcional a cada uma delas, quando as demais não variam. Exemplos:

1. A área de um retângulo é diretamente proporcional tanto à medida de sua base como à medida de sua altura. De fato, seja o retângulo:



Portanto, duplicando a base e conservando a altura fixa a área também duplicará, o que mostra ser a área diretamente proporcional à base; o mesmo você concluirá, duplicando a altura e conservando a base: a área é diretamente proporcional à altura.

Se, agora, você duplicar a base e duplicar a altura, a área resultará quadruplicada, isto é:

$$\begin{array}{l} \text{med. da base (duplicada): } 8\text{cm} \\ \text{med. da altura (duplicada): } 6\text{cm} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8\text{cm} \\ 6\text{cm} \end{array}} \right\} \text{área: } 48\text{cm}^2 \text{ (quadruplicada!)}$$

Logo:

Se uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras, então os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos produtos dos valores correspondentes das outras.

2. O tempo (contado em dias de trabalho^(*)) gasto para se efetuar a escavação de uma rocha, por meio de máquinas, é diretamente proporcional ao volume de rocha extraída e inversamente proporcional ao número de máquinas empregadas.

(*) Dia de trabalho: aquele que corresponde ao número de horas permitido pela Legislação Trabalhista em vigor.

De fato:

se 2 máquinas, em 4 dias de trabalho, escavam 100m^3 de rocha, então 4 máquinas, em 2 dias de trabalho, escavarão 100m^3 de rocha,

ou seja, não variando a grandeza volume (100m^3), as grandezas n.º de máquinas e tempo gasto são inversamente proporcionais, pois o produto de dois valores correspondentes é o mesmo ($2 \times 4 = 4 \times 2$)...

...e 4 máquinas em 4 dias de trabalho escavam 200m^3 , isto é, não variando a grandeza n.º de máquinas (4), as grandezas tempo gasto e volume são diretamente proporcionais, pois são equivalentes as razões: $\frac{2}{4} = \frac{100}{200}$.

Mostre você que para esse exemplo vale a mesma propriedade:

“se uma grandeza é proporcional a várias outras, direta ou inversamente, então será proporcional ao produto de todas ou de algumas, quando as demais não variam”.

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 31

Escrever V ou F, conforme achar conveniente:

1. A velocidade de uma locomotiva e o tempo que ela gasta para percorrer o percurso entre duas cidades são grandezas inversamente proporcionais, porque quanto mais veloz for a locomotiva menor é o tempo gasto para ir de uma cidade a outra.
2. O valor de uma fração é diretamente proporcional ao valor de seu denominador, porque quanto maior é o valor do denominador tanto maior é o valor da fração.
3. O comprimento da aresta de um cubo e o volume desse cubo são grandezas proporcionais, porque, multiplicando por 3 a medida da aresta, o volume do cubo resulta multiplicado também por 3.
4. O produto de dois números é diretamente proporcional a cada um dos fatores, pois, dividido um dos números por 2, o produto resulta dividido por 2.
5. O trajeto percorrido por um automóvel é uma grandeza inversamente proporcional aos litros de gasolina gastos, pois quanto maior for o percurso menor é o consumo de gasolina.
6. A área de um retângulo é diretamente proporcional à medida de sua base e à medida de sua altura.
7. A área de um retângulo é diretamente proporcional à medida de sua base e inversamente proporcional à medida de sua altura.
8. O tempo gasto por Ivo na confecção do mapa do Brasil é diretamente proporcional ao tamanho do mapa e inversamente proporcional ao número de minutos diários empregados para executar tal tarefa.
9. A soma de dois números é diretamente proporcional a cada uma das parcelas.
10. A diferença entre dois números não é inversamente proporcional ao subtraendo.



SEGUNDA PARTE
Regras de três.
Juros Simples.
Desconto - Câmbio.

Disposição prática: \downarrow 8 máq. \uparrow 6 dias
 \downarrow 12 máq. \uparrow x

R3S, (Regra de três simples, inversa)

Agora, na obtenção da sentença matemática — que é uma proporção — você deve inverter uma das razões (a segunda, por exemplo):

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{6} \iff x = \frac{8 \times 6}{12} = 4$$

Portanto, 12 máquinas realizarão o atêrro em 4 dias de trabalho.

3. Em 6 dias de trabalho aprontaram-se 720 uniformes escolares fazendo funcionar 16 máquinas de costura. Em quantos dias se poderiam aprontar 2.160 uniformes (iguais aos primeiros) se, em virtude do racionamento de luz, funcionaram somente 12 daquelas máquinas?

O problema envolve mais de duas grandezas variáveis: n.º de dias de trabalho, n.º de uniformes e n.º de máquinas de costura. Vamos resolvê-lo usando a técnica R3C, estabelecendo a seguinte disposição prática:

\downarrow 6 dias \downarrow 720 unif. \uparrow 16 máq.
 \downarrow x \downarrow 2 160 unif. \uparrow 12 máq. R3C

Vamos agora estabelecer a natureza da proporcionalidade entre essas grandezas. Fixando a terceira grandeza "n.º de máquinas" (para facilitar, coloque a mão sobre a última coluna, tapando-a), é fácil concluir que a primeira grandeza: "n.º de dias" e a segunda: "n.º de uniformes" são diretamente proporcionais (aumentando uma delas, a outra aumenta, proporcionalmente). Portanto, as flechas têm o mesmo sentido.

Fixada, agora, a segunda grandeza ("cubra" a segunda coluna e raciocine como se o n.º de uniformes fôsse o mesmo), você notará que a primeira grandeza e a terceira grandeza são inversamente proporcionais (pois, "se um certo n.º de uniformes é feito por 16 máq. em 6 dias, reduzindo o n.º de máq. a 12, êsses mesmos uniformes serão feitos em mais tempo"). Logo: as flechas da primeira e terceira colunas terão sentido contrário.

A seguir procura-se colocar as flechas tôdas no mesmo sentido. Para isso, invertem-se os correspondentes valores da terceira grandeza:

6 720 12
x 2.160 16

Lembrando a propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras: os valores que exprimem suas medidas são diretamente proporcionais aos produtos dos valores correspondentes das outras, vem:

$$\frac{6}{x} = \frac{720 \times 12}{2.160 \times 16}$$

$$\text{Sentença matemática: } \frac{6}{x} = \frac{720 \times 12}{2.160 \times 16} \iff x = \frac{6 \times 2.160 \times 16}{720 \times 12} = 24$$

Portanto, serão necessários 24 dias para se aprontarem 2.160 uniformes, fazendo funcionar somente 12 máquinas.

NOTA: Você pode usar razões equivalentes às razões empregadas no problema, a fim de simplificar os cálculos. Assim, as razões do problema resolvido podem ser simplificadas por:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{6}{x} = \frac{1 \times 3}{3 \times 4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6 \times 3 \times 4}{1 \times 3} = 24$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 32

Aplicando as técnicas da R3S e R3C, resolver os seguintes problemas:

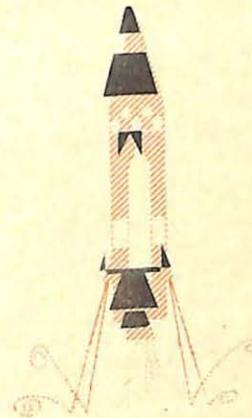
- Por 3 maçãs Joãozinho pagou NCr\$ 0,51. Quantas compraria com NCr\$ 0,85?
- Com a velocidade média de 60km/h, titio Rodolfo foi de São Paulo à Guanabara em 8 horas. Se a velocidade média fôsse de 80km/h, em quanto tempo teria feito essa viagem?
- A nossa "perua" percorreu 240km em 3 horas. Quanto tempo levará para percorrer 400km, empregando a mesma velocidade?
- Certa máquina produz 30.000 pregos em 12 horas. Quantos pregos iguais tal máquina produziria em 15 horas? Quantas horas necessitaria para produzir 50.000 dêsses pregos?
- Se 6 pedreiros levam 45 dias para construírem uma casa-operária, quanto tempo levariam 5 pedreiros — supostos de mesma capacidade de trabalho dos primeiros — para fazerem casa igual?
- Um avião comercial, com a velocidade de 400km/h, efetua a viagem entre Salvador e Brasília em 3h de vôo. Em quanto tempo um avião a jato, de velocidade igual a 1.200km/h, faria essa mesma viagem?
- Uma bomba eleva 240 litros de água em 8 minutos. Quantos decalitros elevará em 2h 30min?
- Calcular a altura de um edifício que projeta uma sombra de 19,60m no mesmo instante em que um bambu de 3,8m, plantado verticalmente, projeta sombra de 4,9m.

9. Se de cada 30kg de café cru obtemos 26kg de café torrado, quantos quilos de café cru serão necessários para se obterem 208kg de café torrado?
10. Os 25 escoteiros das 2.^{as} Séries de nosso Ginásio programaram uma excursão de 8 dias durante julho, recolhendo, para tanto, alimento para os 25 participantes. No dia do embarque, 5 dos escoteiros não puderam ir. Resolveu-se, então, prolongar a excursão até se esgotarem os alimentos disponíveis, que seriam sempre consumidos, proporcionalmente, cada dia. De quantos dias a excursão pôde ser prolongada?
11. Num Internato, 45 alunos menores gastam NCr\$ 1.850,00 pelas refeições de 20 dias. Se o Internato admitir mais 15 alunos menores, qual será a despesa das refeições em 60 dias?
12. Um grande circo é armado por 15 homens em 3 dias de trabalho, de 10 horas por dia. Em quantos dias seria armado esse circo dispendo-se de 25 homens de mesma capacidade de trabalho que os primeiros, mas trabalhando 9 horas por dia?
13. Certa máquina, funcionando 4h por dia, rotulou durante 6 dias 2.000 garrafas. Quantas horas por dia deveria funcionar essa máquina para rotular 20.000 garrafas num mês (30d)?
14. Um trecho de estrada de 300m de comprimento por 10m de largura foi asfaltado em 4 dias, por 4 máquinas que trabalharam 8h por dia. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 6 máquinas, iguais às primeiras, para asfaltarem, em 2 dias, um trecho de 150m dessa mesma estrada (de mesma largura)?
15. Foram empregados 24kg de fio para tecer 120m de tecido, de 0,82m de largura. Quantos metros de tecido de 1,23m de largura serão tecidos com 30kg do mesmo fio?
16. Duas rodas dentadas, engrenadas uma na outra, têm, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 8?
17. De bicicleta, Paulo percorreu 7km em 35 minutos. Empregando a mesma velocidade, quanto tempo gastará para percorrer 12km?
18. No problema anterior, se Paulo aumentasse a velocidade de $\frac{1}{5}$, em quanto tempo percorreria os mesmos 12km? (Sugestão: a nova velocidade pode ser representada por $\frac{6}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5}$).
19. Num livro de 315 páginas há 40 linhas em cada página. Se em cada página houvesse 30 linhas, com quantas páginas ficaria esse livro?
20. Um livro tem 250 páginas e cada página 40 linhas; cada linha possui 66 letras. Reimprimindo-se esse livro com os mesmos caracteres, porém em páginas de 30 linhas cada uma e com 50 letras em cada linha, pergunta-se quantas páginas deverá ter o novo livro?



... resolva mais este:

21. Uma viagem da Terra à Lua, num foguete tripulado por três astronautas, será realizada em 72 horas. Sabendo-se que cada tripulante consome em cada 24 horas meia dúzia de cápsulas de alimento concentrado, qual a quantidade mínima de cápsulas que a espaçonave deverá transportar?



Juros Simples.



9. Emprêgo dos juros

Você, que vive em sociedade, está sempre ouvindo ou lendo expressões como:

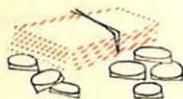
“Os juros pagos pelo Banco do Brasil são de 12% ao ano”;

“A quanto está o dólar hoje?” “E o escudo?”;

“O Sr. João teve um desconto de NCr\$ 7,20 por ter pago a prestação antes do vencimento”;

“No fim de três anos papai acumulou NCr\$ 4.500,00 de rendimentos”.

Tôda vez que se empresta oficialmente uma quantia, por um determinado tempo, recebe-se uma compensação em dinheiro. Essa compensação recebe o nome de **juro** (*).



Também nas compras a prazo — tão comum nos negócios atuais — pagam-se os chamados *juros legais*. Com relação ao dólar, você sabe que se trata da moeda oficial dos Estados Unidos da América, assim como o escudo é a de Portugal, a libra a da Inglaterra, a lira a da Itália, o rublo a da União Soviética, o pêso a da Argentina, o yen a do Japão, o franco a da França, etc. A “cotação” do dólar no mercado nacional, por exemplo, é fixada pelo Banco do Brasil e depende de uma série de fatos que mais tarde você entenderá.

Desconto é o abatimento feito sôbre uma determinada quantia que irá ser paga antes do prazo do vencimento e o seu cálculo reduz-se a um simples cálculo de juros. Chama-se *capital acumulado* ou *montante* à soma de um certo capital com os próprios juros que êsse capital rendeu.

Com o conhecimento recebido acêrca das grandezas proporcionais, você vai obter, agora, algumas informações úteis sôbre êsses assuntos.

(*) Trata-se do juro simples.

É fácil perceber que o juro (j) é uma grandeza variável, diretamente proporcional:

à *quantia emprestada*, geralmente denominada *Capital* (pois, quanto “maior” é a quantia emprestada, “maior” será o juro produzido proporcionalmente);

ao *tempo* (t) de duração do empréstimo (pois, quanto “mais” tempo fica emprestado, “maior” será o juro recebido);

à *taxa* (i), que é o valor tomado em cada 100 unidades, referida ao ano, ou ao mês, ou a dias (pois, quanto “maior” a taxa cobrada, tanto “maior” será o juro recebido).

Assim, por exemplo, dizer que:

“a importância de NCr\$ 100,00 foi emprestada à taxa de 12% ao ano, significa que no fim de um ano de empréstimo o juro produzido por essa importância foi de NCr\$ 12,00”.

Nestas condições, você pode calcular os juros, usando a técnica da R3C. Exemplo:

Quais os juros produzidos pelo capital de NCr\$ 500,00, emprestado a 10% ao ano, durante 3 anos?

Pode-se raciocinar assim:

se	o capital	100	produz	10 em 1 ano
então	o capital	500	produzirá	5 × 10 em 1 ano
e, portanto,	o capital	500	produzirá	3 × 5 × 10 em 3 anos

Logo: os juros produzidos pelo capital de NCr\$ 500,00 durante 3 anos, à taxa de 10% ao ano, foi de NCr\$ 150,00.

$$(3 \times 5 \times 10 = 150)$$

Na prática, a repetição dêsse raciocínio é condensada em “fórmulas”, que são *sentenças padrões* de inúmeros problemas. É o que ocorre com as Casas Bancárias, Caixas Econômicas, Fundos de Investimentos, etc., que dispõem inclusive de máquinas (muitas delas contando com modernos computadores eletrônicos) para aplicação de “fórmulas” que simplificam seu trabalho.

Para o nosso caso, vamos “deduzir” uma boa “fórmula”, assim:

se	o capital	100	produz	i	em 1 ano
então	o capital	C	produzirá	j	em t anos

ou		100		i		1	
		↓	C	↓	j	↓	t

ou
$$\frac{i}{j} = \frac{100 \times 1}{C \times t} \iff j = \frac{C \times i \times t}{100}$$

Aplicando essa "fórmula" no exemplo estudado, onde:

$$\begin{cases} C = \text{NCr\$ } 500,00 \\ i\% = 10\% \text{ (ao ano)} \\ t = 3 \text{ (anos)} \\ j = ? \end{cases} \text{ vem: } j = \frac{500,00 \times 10 \times 3}{100} = 150,00$$

NOTA: Se, por exemplo, a taxa fôsse de 2% ao mês, então um capital de NCr\$ 2.000,00 produziria, por mês, um juro de:

$$j = \frac{C \times i \times t}{100} = \frac{2.000,00 \times 2 \times 1}{100} = 40,00$$

Os problemas "inversos", isto é, aqueles nos quais se pede o *capital* (ou a *taxa*, ou o *tempo*), conhecidos os *juros* e a *taxa* (ou o *tempo*), são resolvidos aplicando-se a técnica da **R3C** que, agora, como é natural, tratará com grandezas inversamente proporcionais. Exemplos:

1.º) Um certo *capital* à taxa de 11% ao ano rendeu NCr\$ 220,00 de juros, durante 5 anos. Determinar o valor desse capital.

$$\text{Tem-se: } \begin{cases} i\% = 11\% \\ j = \text{NCr\$ } 220,00 \\ t = 5 \text{ (anos)} \\ C = ? \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Esquema da R3C:} \\ \downarrow 100 \quad \downarrow 11 \quad \uparrow 1 \\ \quad \quad \quad x \quad \downarrow 220 \end{array}$$

Determinação dos sentidos das flechas:

fixando o tempo: se 11 foi produzido por 100, para produzir 220 ("maior") será necessário "mais" que 100; logo: diretamente proporcionais;

fixando o juro: se 100 produz um "certo" juro em 1 ano, para produzir o "mesmo" juro em 5 anos ("mais" tempo) será preciso capital "menor"; logo: inversamente proporcionais.

$$\text{Cálculo: } \begin{array}{ccc} 100 & 11 & 5 \\ \sim x & 220 & 1 \end{array}$$

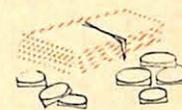
$$\frac{100}{x} = \frac{11 \times 5}{220 \times 1} \iff x = \frac{220 \times 100}{11 \times 5} = 400$$

Portanto: o *capital* é de NCr\$ 400,00.

Esse exemplo sugere a seguinte "dedução" da fórmula, para o caso em que se deseja o *capital*, conhecidos a *taxa* e o *tempo*:

$$\downarrow 100 \quad \downarrow i \quad \uparrow 1 \quad \iff \quad 100 \quad i \quad t \\ C \quad j \quad 1$$

ou
$$\frac{100}{C} = \frac{i \times t}{j \times 1} \iff C = \frac{100 \times j}{i \times t}$$



Aplicação no exemplo estudado: $C = \frac{100 \times 220,00}{11 \times 5} = 400,00$

2.º) A que *taxa* anual foi empregado um capital de NCr\$ 900,00 que em 5 meses rendeu juros de NCr\$ 45,00?

$$\text{Temos: } \begin{cases} C = 900,00 \\ t = 5 \text{ meses} = \frac{5}{12} \text{ do ano} \\ j = 45,00 \\ i\% = ? \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Esquema da R3C:} \\ 100 \quad x \quad 1 \\ \downarrow 900 \quad \downarrow 45 \quad \downarrow \frac{5}{12} \end{array}$$

Mostre você que as flechas nesse caso têm tôdas o mesmo sentido (as grandezas são tôdas diretamente proporcionais). Então:

$$\frac{x}{45} = \frac{100 \times 1}{900 \times \frac{5}{12}} \iff x = \frac{45 \times 100}{900 \times \frac{5}{12}} = 12$$

Portanto: $i\% = 12\%$

Bom exercício: mostre que a "fórmula" que dá a *taxa* é: $i = \frac{100 \times j}{C \times t}$

NOTA: Se, por exemplo, o tempo fôsse 2a 3me e a taxa dada por ano, reduzir-se-ia a meses: 27me e, a seguir, à fração de ano: $\frac{27}{12}$.

Se o tempo fôsse: 1a 5me 12d, deduzir-se-ia tudo a dias: $360 + 150 + 12 = 522$, isto é: 522d, e a seguir à fração de ano: $\frac{522}{360}$.

3.º) Durante quanto tempo foi empregado o capital de NCr\$ 180,00 que, a $9\frac{1}{2}\%$ ao ano, produziu juros de NCr\$ 38,00?

Temos:
$$\begin{cases} C = 180,00 \\ i\% = 9\frac{1}{2}\% = \frac{19}{2}\% \\ j = 38,00 \\ t = ? \end{cases}$$

Esquema da R3C:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 100 & \downarrow \\ & 180 & \downarrow \\ & & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \frac{19}{2} & \downarrow \\ & 38 & \downarrow \\ & & x \end{array}$$

Justifique você os sentidos das flechas. Então:

$$180 \quad \frac{19}{2} \quad 1$$

$$100 \quad 38 \quad x$$

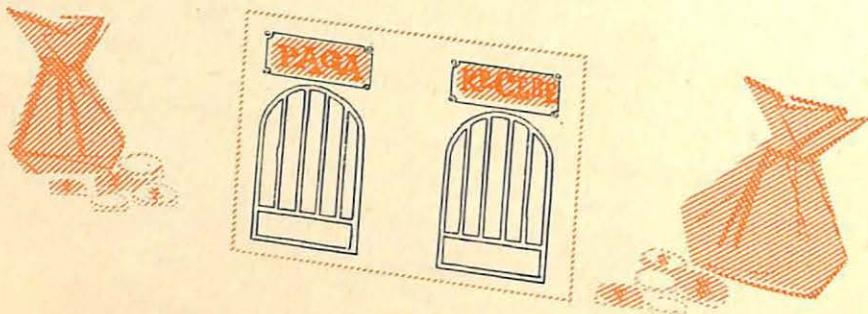
$$\frac{1}{x} = \frac{180 \times \frac{19}{2}}{100 \times 38} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 38}{180 \times \frac{19}{2}} = 2\frac{2}{9}$$

ou, tempo = $2\frac{2}{9}$ anos \Leftrightarrow 2a 2m e 20d (reduzindo)

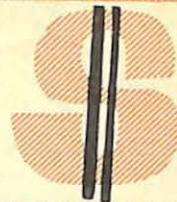
Fácilmente se chega à "fórmula" que dá o tempo:

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & i & \downarrow \\ 100 & & 1 \\ \uparrow C & \downarrow j & \downarrow t \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} C & i & 1 \\ 100 & j & t \end{array}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{C \times i}{100 \times j} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times j}{C \times i}$$



Desconto — Câmbio.



10. Algumas informações sobre câmbio

Câmbio significa troca de moedas entre dois países. Por intermédio dos exemplos seguintes, você ficará um pouco informado sobre esse assunto.

1.º) Se você quiser comprar, por exemplo, livros nos Estados Unidos da América, num total de 18 dólares e não dispuser deles, então necessitará fazer uma troca (cambiar), dando em moeda nacional (cruzeiros) uma quantia equivalente. É evidente que tal troca vai depender do *câmbio do dia*, fornecido pelo Banco do Brasil.

Assim, se você comprar o dólar (nas casas especializadas) a NCr\$ 2,75 (*), deverá desembolsar: $18 \times 2,75 = \text{NCr\$ } 49,50$, mais as pequenas despesas relativas à remessa.

2.º) Vamos supor o *problema inverso*, usando outra moeda: papai quer remeter para Lisboa a importância de NCr\$ 1.080,00. Se, no *câmbio do dia*, cada escudo custar NCr\$ 0,09, papai deverá remeter:

$$1.080 : 0,09 = 12.000$$

isto é, 12.000 escudos, sem contar a despesa de remessa.

3.º) Qual será o valor, em Brasília, de 36 libras, 9 shillings e 3 pence, ao câmbio de NCr\$ 7,53 por libra (esterlina)?

Este cálculo é sempre mais trabalhoso porque o sistema monetário inglês ainda não é decimal.

Como: $\text{£ } 36 - 9 - 3 = 8.751\text{d}$ (redução conhecida desde a 1.ª série) e cada libra ou 240d vale NCr\$ 7,53, temos que 8.751d valerão, aproximadamente: NCr\$ 276,23.

(*) Mercado de câmbio livre (O Estado de S. Paulo, edição de 1/3/67.)

MERCADO NACIONAL

Taxas fixadas pelo Banco do Brasil (1/3/67)



Moedas	Venda
Dólar (E.U.A.)	NCr\$ 2,75
Libra Esterlina (Inglaterra)	NCr\$ 7,53
Marco (Alemanha)	NCr\$ 0,68
Pêso (Argentina)	NCr\$ 0,01
Franco (França)	NCr\$ 0,55
Escudo (Portugal)	NCr\$ 0,09
Coroa (Suécia)	NCr\$ 0,52
Xelim (Áustria)	NCr\$ 0,10
Franco (Suíça)	NCr\$ 0,62
Pêso (Uruguai)	NCr\$ 0,03
Franco (Bélgica)	NCr\$ 0,05

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 33

- Calcular os juros produzidos por:
 - NCr\$ 720,00, à taxa de 12% ao ano, em 2 anos;
 - NCr\$ 200,00, à taxa de $11 \frac{1}{2}\%$ ao ano, em 3a 3me:
 - NCr\$ 2.000,00, se a taxa fôsse de 4% ao mês, durante 6 meses;
 - NCr\$ 20,00, à taxa de 1% ao mês, durante 40 dias;
 - NCr\$ 252,00, se a taxa fôsse de $2 \frac{3}{4}\%$ ao mês, durante 2a 4me 10d.
- Determinar o capital que produziu os juros de:
 - NCr\$ 80,00, se a taxa fôsse de 4% ao mês, durante 2 meses;
 - NCr\$ 54,00, se a taxa fôsse de 18% ao ano, durante 3 anos;
 - NCr\$ 1,00, se a taxa fôsse de 0,05% por dia, durante 20 dias;
 - NCr\$ 420,00, se a taxa fôsse de 26% ao ano, durante 2a 3me 10d;
 - NCr\$ 0,15, à taxa de 12% ao ano, durante 1 ano.
- Qual a taxa:
 - por mês, que faria um capital de NCr\$ 1.000,00 render NCr\$ 50,00 de juros em 5 meses?
 - por ano, que faz um capital de NCr\$ 500,00 render NCr\$ 60,00 de juros em 1 ano?
 - por ano, que faria um capital de NCr\$ 9.000,00 render NCr\$ 342,00 de juros em 3 meses e 10 dias?
 - por mês, que faz um capital de NCr\$ 10,00 render NCr\$ 1,80 de juros em 15 dias?

5.º por ano, que faria um capital de NCr\$ 13.000,00 render NCr\$ 3.250,00 de juros em 2 anos?

4. Calcular o tempo empregado pelo capital de:

- NCr\$ 1.800,00 que, à taxa de $11 \frac{1}{2}\%$ ao ano, rendeu NCr\$ 460,00 de juros;
- NCr\$ 600,00 que, se a taxa fôsse de 3% ao mês, renderia NCr\$ 90,00 de juros;
- NCr\$ 18,00 que, à taxa de 6% ao ano, rendeu NCr\$ 3,24 de juros;
- NCr\$ 3.650,00 que, à taxa de 8% ao ano, rendeu NCr\$ 430,00 de juros;
- NCr\$ 1,00 que, à taxa de $\frac{1}{12}\%$ ao mês, rendeu NCr\$ 0,01.

PROBLEMAS COMERCIAIS PRÁTICOS — GRUPO 34

- Você gostaria de comprar NCr\$ 100,00 por NCr\$ 65,00? Esta é a oferta feita pelo fundo de Investimentos "X" nos jornais de hoje. Qual é a taxa do lucro na transação?
- Papai comprou NCr\$ 1.000,00 de títulos de uma Cia. de Investimentos, pagando no ato NCr\$ 880,00. Qual a taxa do ganho nessa compra?
- Mamãe pagou sua prestação de NCr\$ 15,00 um mês antes do vencimento, ganhando com isso um desconto de NCr\$ 1,20. Qual foi a taxa desse desconto?
- Ao concluir a 1.ª Série Ginásial ganhei NCr\$ 20,00 de meu padrinho. Esse dinheiro foi depositado num Banco que paga 10% de juros ao ano. Quanto acumularei no Banco, depois de um semestre?
- Titio fez um empréstimo de NCr\$ 1.200,00 por 6 meses. Supondo que a taxa foi de 18% ao ano, no fim desse tempo titio pagou os juros combinados, restituindo somente metade do capital emprestado. O restante foi renovado em novo empréstimo por mais 3 meses, à taxa de 24% ao ano. Determinar o total de juros pagos.
- Para terminar a construção de sua casa, o Sr. Luís contraiu um empréstimo de NCr\$ 3.000,00, a ser pago em três prestações. Supondo que a taxa de juros simples cobrada foi de 2% ao mês e sabendo-se que a primeira prestação de NCr\$ 1.000,00 deverá ser paga depois de 6 meses, a segunda, de NCr\$ 750,00, depois de 1 ano e a terceira, de NCr\$ 1.250,00, depois de 18 meses, quanto o Sr. Luís pagará no final, contando capital emprestado e juros pagos?
- Se um comerciante receber emprestado, à taxa de $1 \frac{1}{2}\%$ ao mês, as seguintes importâncias: NCr\$ 2.480,00 por 90 dias, NCr\$ 1.280,00 por 30 dias e NCr\$ 3.800,00 por 5 meses, qual o total de juros que deverá pagar por esses empréstimos?
- Em quanto tempo um capital duplica com juros (simples), se a taxa fôr de 25% ao ano? (Nota: lembrar que nesse caso $j = C$)
- A que taxa anual deverá ser empregado um certo capital para duplicar depois de 5 anos?
- Se um capital empregado durante 5 anos, a juros simples, aumentasse de uma vez e meia, qual seria a taxa anual empregada?

11. É descontada em um Banco, 4 meses antes do vencimento, uma *letra*(*) cujo valor nominal é de NCr\$ 480,00. Qual foi a importância recebida do Banco, sabendo-se que a taxa de desconto é de 10% ao ano?
12. Qual é o abatimento sofrido por uma *duplicata*(*) de NCr\$ 625,00 que, paga à vista, ganha um desconto de 8%?

ATENÇÃO

De acôrdo com o decreto-lei n.º 1, de 13/11/65, que entrou em vigor a partir de 13/2/67, a moeda brasileira tornou-se o *cruzeiro novo* (símbolo NCr\$) — equivalente a 1.000 cruzeiros antigos — subdividido em 100 centavos, escritos sob forma de fração decimal. Na conversão suprimem-se as importâncias inferiores a 10 cruzeiros antigos: Cr\$ 109 ou Cr\$ 103, por ex., convertem-se em NCr\$ 0,10.

Todos os documentos (contratos, recibos, letras, cheques, etc.) devem ser emitidos em cruzeiros novos, escrevendo-se, por exemplo: NCr\$ 45,25 e, por extenso: *quarenta e cinco cruzeiros novos e vinte e cinco centavos*.

APLICAÇÃO DE MOEDA ESTRANGEIRA — GRUPO 35

1. Estando o dólar a NCr\$ 2,75, quanto pagarei em cruzeiros por um livro de 8 dólares? Ao mesmo câmbio, quanto vale em cruzeiros uma moeda de um quarto de dólar? E uma moeda de 10 cents?
2. Preciso remeter para Lisboa a importância equivalente a 20.000 escudos, ao câmbio de NCr\$ 0,09. Quanto devo pagar em moeda nacional?
3. Um livreiro de Brasília quer remeter a favor de outro, em Leipzig, a importância de 1.600 marcos. Que quantia deverá pagar em moeda brasileira, valendo o marco NCr\$ 0,68 no câmbio do dia?
4. Os jogadores ingleses que disputaram a Taça das Nações no Maracanã, em 30/5/1964, mesmo perdendo do time brasileiro, ganharam uma gratificação de 60 libras esterlinas. Quanto receberam, em cruzeiros novos, ao câmbio de NCr\$ 7,53?
5. Recebi dois prêmios de Londres: o primeiro de £ 150-12-4 e o segundo de £ 60-15-8. Quanto receberei em São Paulo, ao câmbio de NCr\$ 7,53?
6. Há uma excursão programada a Bariloche (Argentina), que custará 30.000 pesos. Quanto custará, em cruzeiros novos, se o câmbio do dia está a NCr\$ 0,01?
7. É preciso enviar à prima Laurinha, que estuda na Inglaterra, NCr\$ 753,00. Convertida essa importância ao câmbio do dia, isto é, a libra a NCr\$ 7,53, quanto receberá ela em moeda inglesa?
8. Papai recebeu de Paris um livro que lhe custou 52 francos. Ao câmbio do dia foram pagos NCr\$ 28,60. Qual o preço pago por um franco?
9. Paulinho, Antônio Carlos e Márcia irão participar de uma visita a lugares históricos do Uruguai. Cada um entrará com NCr\$ 300,00. Quantos pesos uruguaios poderão comprar se, ao câmbio do dia, o peso uruguaio custa NCr\$ 0,03?
10. O livro *Mathématique Moderne* — Volume I — de autoria do Prof. Papy, chegou da Bélgica ao preço de NCr\$ 19,35. Quantos francos belgas foram pagos se, no câmbio do dia, o franco belga estava a NCr\$ 0,05?



(*) São nomes atribuídos a documentos usados nas transações comerciais.

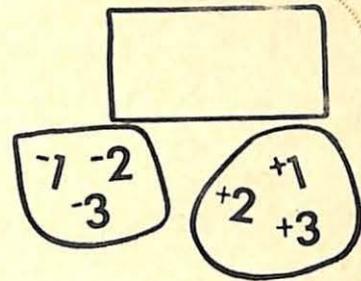
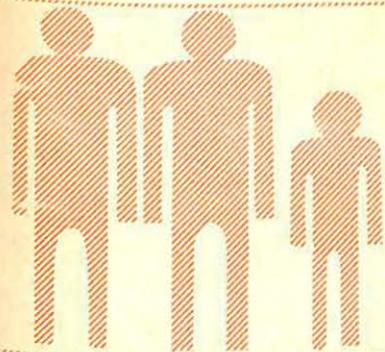
numeros inteiros
 estrutura de ordem
 SEGUNDA PARTI
 operações com nú
 propriedades estr

propriedades estr
 TERCEIRA PARTI
 números racionais
 propriedades estru
 temas Matem



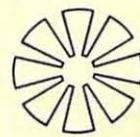
PRIMEIRA PARTE:

Novos números e novas estruturas.
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto.



SEGUNDA PARTE:

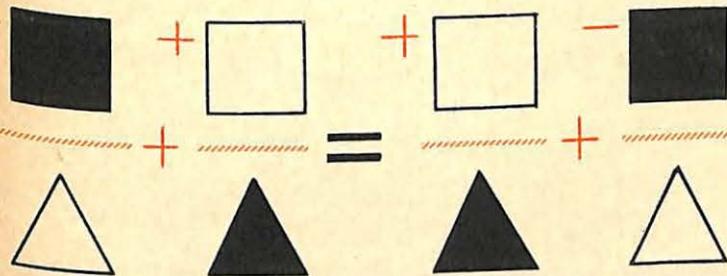
Operações com números inteiros relativos.
Propriedades estruturais.



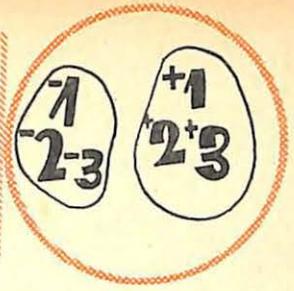
$$\begin{array}{l} -8 : +4 \\ +3 -5 \quad 5 * -8 \\ -3 +4 \end{array}$$

TERCEIRA PARTE:

Números racionais relativos.
Propriedades estruturais.



Novos números e novas estruturas.



Números inteiros relativos

1. Necessidade dos números inteiros relativos

No estudo das operações com os números inteiros, a subtração não gozava da propriedade do fechamento, isto é, o conjunto I , onde se operava, nem sempre continha o resultado da subtração de dois números inteiros quaisquer. Assim, por exemplo, no:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

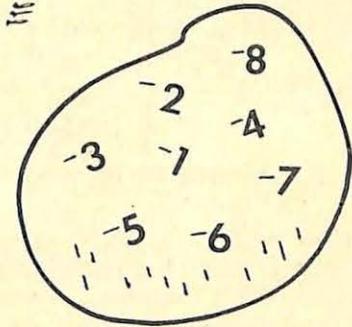
$$7 - 2 = 5 \text{ (SIM)}$$

$$3 - 5 = ? \text{ (NÃO!)}$$

A fim de tornar a subtração uma operação sempre possível, bem como dotá-la da propriedade do fechamento, foi necessário criar novos números.

Que números novos são esses? ≡

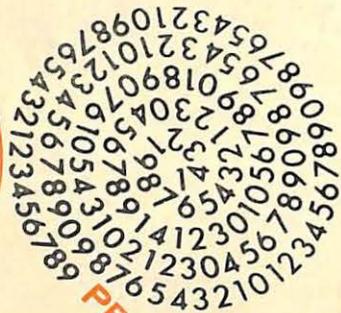
São:



a) os números negativos, representados pelos numerais:

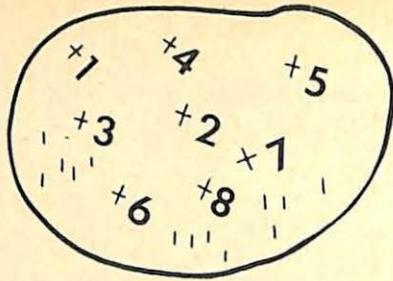
-1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 ...

lê-se: um negativo, dois negativo, três negativo, quatro negativo, cinco negativo, seis negativo, sete negativo



PRIMEIRA PARTE

Novos números e novas estruturas.
Números inteiros relativos.
Estrutura de ordem; valor absoluto.



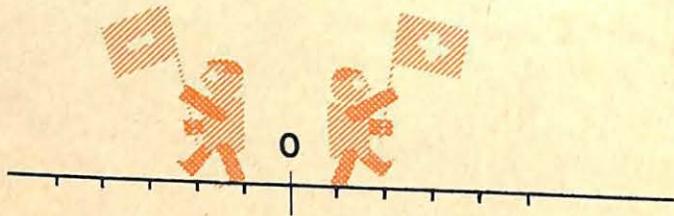
b) os números positivos, representados pelos numerais:

	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	...
lê-se:	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	
	positivo							

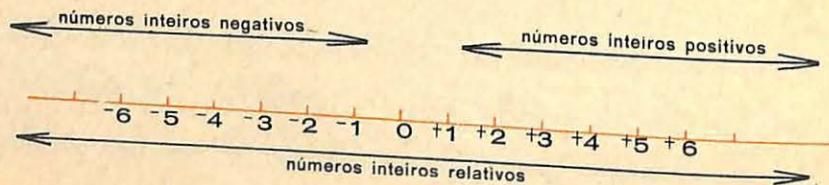
que, juntamente com o 0 (zero), constituem o conjunto dos NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS. Indicação: I_r

$$I_r = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots \}$$

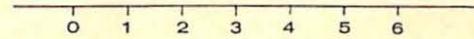
A representação geométrica dos números inteiros relativos pode ser feita sobre uma reta, como o foi no Cap. 1, 1.ª Parte (§ 2), com os números inteiros que, para se distinguirem dos novos números criados, serão denominados *números inteiros absolutos* ou *aritméticos*. A reta, agora, será pensada "sem fim", tanto à direita como à esquerda de um ponto O marcado sobre ela:



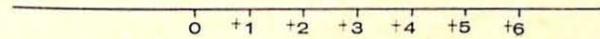
Escolhida uma unidade de medida (continua sendo o *cm*), são marcados sobre a reta, à direita e à esquerda de 0, segmentos consecutivos iguais à unidade escolhida, cujas extremidades indicarão os *números inteiros relativos*:



Você deve estar observando que o *comportamento* dos números inteiros absolutos (ou aritméticos): 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... na *reta numerada*:



é o mesmo que o dos números inteiros positivos: +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...



pois foram determinados da *mesma maneira*.

Este *comportamento* permite, no *cálculo*, suprimir futuramente o sinal + da representação dos números inteiros positivos. Assim, por exemplo, poder-se-á mais tarde escrever:

1 ao invés de +1
2 ao invés de +2
3 ao invés de +3

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Os sinais + e -, chamados, respectivamente, "mais qualificativo" e "menos qualificativo", que figuram no numeral de um número positivo (ex: +2) ou de um número negativo (ex: -3) *não têm* relação alguma com as operações de adição (+) e de subtração (-), razão por que são escritos um pouco acima à esquerda. Assim, por exemplo:

+2 + -4 é uma expressão matemática que indica a *adição* do número dois *positivo* com o número quatro *negativo*;
-3 - +5 indica a *subtração* entre os números relativos três *negativo* e cinco *positivo*.

NOTA HISTÓRICA

O nome de *número relativo* (às vezes *número algébrico*) decorre do fato geométrico de esses números traduzirem *posições relativas* sobre a reta numerada. Os números inteiros: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., conhecidos desde a Escola Primária, recebem também o nome de *absolutos* (às vezes *números aritméticos*) para serem distinguidos dos números inteiros relativos.

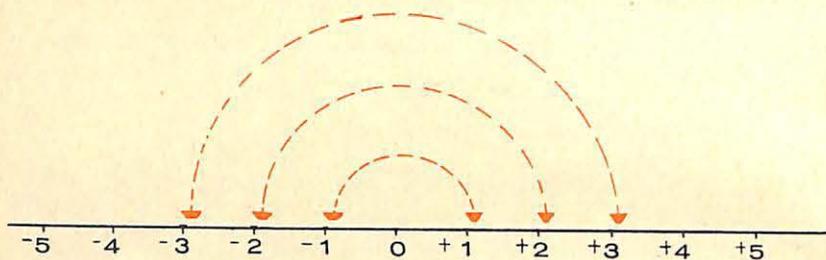
Históricamente, a noção de *número negativo* só foi admitida depois de muita relutância por parte dos matemáticos do séc. XVII. O defeito estava em se querer interpretá-los como representantes de quantidades ou de grandezas "negativas", pois nunca ninguém vira sobre uma mesa, por exemplo: -3 *livros!* Porém, pensados os números relativos como *entes* que satisfazem a determinadas *propriedades estruturais*, foram reveladas as mais ricas *estruturas* da Matemática.

2. Números relativos opostos

Dois números inteiros relativos, cujos numerais diferem pelo *sinal qualificativo*, tais como:

-1 e +1
-2 e +2
-3 e +3
:
:

são denominados *opostos* (ou *simétricos*). Na reta numerada, os números relativos *opostos* indicam *pontos* situados a *igual distância* da origem *O*, e em *semi-retas opostas*:



NOTA: O 0 é o *oposto* de 0, razão por que não se escreve: -0 e +0.

Qual é o *oposto* do *oposto* de -2?

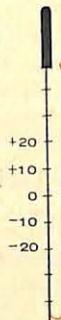
É o -2 mesmo, pois o *oposto* de -2 é +2 e, o *oposto* dêste, é o -2.

3. Exemplos de "mesma estrutura" que a dos números relativos

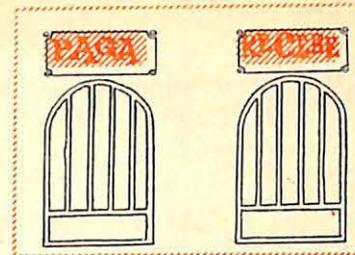
Procurando destacar, para outros entes, *comportamentos semelhantes* aos dos números relativos, basta lembrar as situações em que aparecem idéias de *variações em sentidos opostos*. Tais variações *comportam-se* como os números relativos sobre a reta numerada.

Assim, por exemplo:

1. As *temperaturas* registradas por um termômetro são situações que se apresentam ou *acima de zero* (seriam as "positivas") ou *abaixo de zero* (... as "negativas") em relação à temperatura de 0 grau (é o 0 da reta numerada);

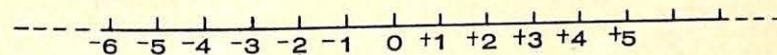


2. As *importâncias em dinheiro*, com as quais se efetuam operações comerciais, contam-se em *créditos* (seriam as "positivas") e em *débitos* (seriam as "negativas").



LEMBRETE AMIGO

Você acabou de conhecer os seguintes novos conjuntos (infinitos) de números, todos eles "suportados" pela *reta numerada*:



- a) dos números *inteiros relativos*:

$$I_r = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots \}$$

- b) dos números *inteiros positivos*:

$$+I = \{ +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$

- c) dos números *inteiros negativos*:

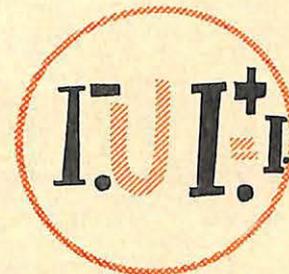
$$-I = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1 \}$$

- d) dos números *inteiros não-positivos*, isto é, o 0 e os números inteiros negativos:

$$-I_0 = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0 \}$$

- e) dos números *inteiros não-negativos*, isto é, o 0 e os números inteiros positivos:

$$+I_0 = \{ 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$

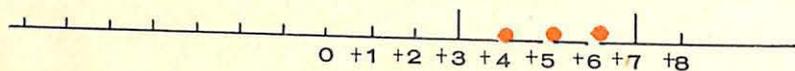


1. Os seguintes numerais representam números inteiros relativos. Escrever na frente de cada um deles a leitura respectiva:

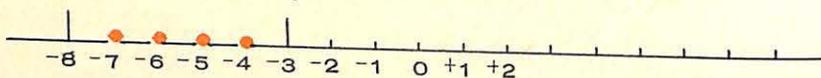
-3: três negativo;
 +49: quarenta e nove positivo
 0: zero
 -1: um negativo

2. Escrever, representando entre chaves, os seguintes conjuntos (finitos):

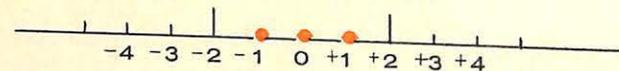
- a) dos números inteiros positivos "entre" +3 e +7 (exclusive o +3 e o +7):
 basta observar na reta numerada que esse conjunto é: $\{+4, +5, +6\}$



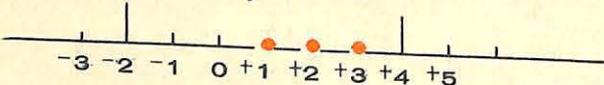
- b) dos números inteiros negativos "entre" -8 e -3:
 temos: $\{-7, -6, -5, -4\}$



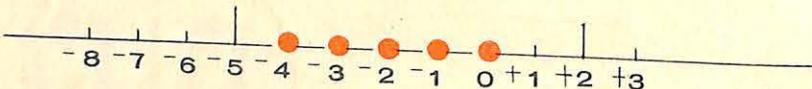
- c) dos números inteiros relativos "entre" -2 e +2:
 temos: $\{-1, 0, +1\}$



- d) dos números inteiros positivos "entre" -2 e +4:
 temos: $\{+1, +2, +3\}$



- e) dos números inteiros não-positivos "entre" -5 e +2:
 temos: $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$



- f) dos números inteiros relativos "entre" -1.965 e +1.965
 temos: $\{-1.964, -1.963, \dots, 0, \dots, +1.963, +1.964\}$

... agora é difícil "desenhar" todo esse conjunto de pontos na reta numerada!

1. Escrever a leitura dos seguintes números inteiros relativos:

1.º) -2; 2.º) +1; 3.º) 0; 4.º) +1.965; 5.º) -5; 6.º) -26.

2. Escrever (representando entre chaves) os seguintes conjuntos:

- 1.º) dos números inteiros negativos; (... lembre-se que é infinito!)
 2.º) dos números inteiros relativos; (... idem)
 3.º) dos números inteiros positivos; (... idem)
 4.º) dos números inteiros não-positivos; (... idem)
 5.º) dos números inteiros não-negativos; (... idem)
 6.º) dos números inteiros positivos "entre" +5 e +10; (... agora é finito!)
 7.º) dos números inteiros negativos "entre" -120 e -117; (... idem)
 8.º) dos números inteiros positivos "entre" -3 e +5; (... idem)
 9.º) dos números inteiros não-negativos "entre" -1 e +3; (... idem)
 10.º) dos números inteiros não-positivos "entre" -4 e +4; (... idem)
 11.º) dos números inteiros positivos "entre" -6 e -2; (... idem e... cuidado!)
 12.º) dos números inteiros relativos "entre" -6 e +3; (... idem)
 13.º) dos números inteiros positivos "entre" +5.000 e +9.000; (... finito)
 14.º) dos números inteiros relativos "entre" -3.000 e +1.966; (... finito)
 15.º) dos números inteiros não-positivos e não-negativos; (... finito)

3. Tornar verdadeiras as seguintes sentenças:

- 1.ª) o oposto de +5 é ...
 2.ª) o oposto de -5 é ...
 3.ª) o oposto de -2.000 é ...
 4.ª) o oposto de 0 é ... (cuidado!)
 5.ª) o oposto do oposto de -3 é ...
 6.ª) o oposto do oposto do oposto de +8 é ...

4. Descrever alguns exemplos de situações nas quais as idéias de variações em sentidos opostos "comportam-se" como os números relativos.

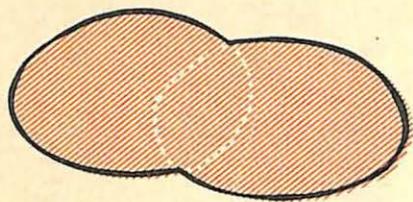
(Sugestões de algumas situações: altitudes (acima do nível do mar seriam as "positivas" e, abaixo, as "negativas"); acontecimentos históricos (antes de Cristo, "negativos"; depois de Cristo, "positivos").

5. Ler as seguintes expressões, destacando o sinal que participa dos numerais dos números relativos do sinal das operações adição e subtração:

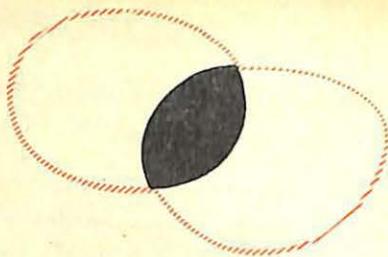
- 1.ª) $-25 + +25$ 3.ª) $+4 - -2$
 2.ª) $-1 - 0$ 4.ª) $(-3 + +5) - -8$

6. Determinar, para cada ponto assinalado na reta numerada (fig. pág. 129), o número inteiro relativo respectivo, supondo a unidade de medida $m(OA) = 1\text{cm}$.

- 1.º) C 3.º) E 5.º) D'
 2.º) E' 4.º) O 6.º) A



conjunto - reunião



conjunto intersecção

Operações com os conjuntos estudados

Vamos praticar as operações *reunião* e *intersecção* e as relações de *inclusão* com os novos conjuntos estudados:

1. Determinar o *conjunto-reunião* dos seguintes conjuntos:

1.º) $\{-3, -2, -1, 0\}$ e $\{+1, +2\}$

Temos: $\{-3, -2, -1, 0\} \cup \{+1, +2\} = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2\}$

2.º) $\{+2, +3, +4\}$ e $\{+3, +4, +5, +6\}$

Temos: $\{+2, +3, +4\} \cup \{+3, +4, +5, +6\} = \{+2, +3, +4, +5, +6\}$

3.º) $\{-6, -2, +1\}$ e $\{+3, +5, +8\}$

Temos: $\{-6, -2, +1\} \cup \{+3, +5, +8\} = \{-6, -2, +1, +3, +5, +8\}$

4.º) $\{-615, -1, +26\}$ e $\{-1, +39, +5.000\}$

Temos: $\{-615, -1, +26\} \cup \{-1, +39, +5.000\} = \{-615, -1, +26, +39, +5.000\}$

5.º) $\{\dots -4, -3, -2, -1, 0\}$ e $\{0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$

Temos dois conjuntos infinitos: o dos números inteiros *não-positivos* ($-I_0$) e o dos números inteiros *não-negativos* ($+I_0$). O conjunto-reunião:

$$\{\dots -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{0, +1, +2, +3, +4, \dots\} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

ou seja, é o conjunto dos números inteiros relativos (I_r). Logo:

$$-I_0 \cup +I_0 = I_r$$

2. Determinar o *conjunto-intersecção* dos seguintes conjuntos:

1.º) $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$ e $\{-2, -1, 0, +1, +2\}$

Temos: $\{-4, -3, -2, -1, 0\} \cap \{-2, -1, 0, +1, +2\} = \{-2, -1, 0\}$

2.º) $\{-3, -1, 0\}$ e $\{0, +2\}$

Temos: $\{-3, -1, 0\} \cap \{0, +2\} = \{0\}$

3.º) $\{-2, +1, +2\}$ e $\{+4, +5, +7\}$

Temos: $\{-2, +1, +2\} \cap \{+4, +5, +7\} = \emptyset$ conjunto-vazio

4.º) $\{\dots -4, -3, -2, -1, 0\}$ e $\{0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$

Temos: $\{\dots -4, -3, -2, -1, 0\} \cap \{0, +1, +2, +3, +4, \dots\} = \{0\}$

Portanto: o *conjunto-intersecção* do conjunto dos números inteiros *não-positivos* ($-I_0$) com o conjunto dos números inteiros *não-negativos* ($+I_0$) é o conjunto unitário constituído por 0, isto é, $\{0\}$.

Logo:

$$-I_0 \cap +I_0 = \{0\}$$

Relações de inclusão com os conjuntos estudados

Quais as *relações de inclusão* entre os conjuntos estudados?

É fácil você concluir que: o conjunto dos números *inteiros negativos* está **contido** no conjunto dos números *inteiros relativos*, pois qualquer elemento do primeiro conjunto *pertence* ao segundo conjunto. Portanto:

$$\{\dots -4, -3, -2, -1\} \subset \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

ou

$$-I \subset I_r$$

Também o conjunto dos números *inteiros positivos* está *contido* no conjunto dos números *inteiros relativos*, isto é:

$$+I \subset I_r$$

E o conjunto dos números *inteiros não-negativos* contém o conjunto dos números *inteiros positivos*?

Dê você a resposta e represente o resultado com os símbolos conhecidos.

Consideremos, agora, exemplos de conjuntos finitos. Quais as relações de inclusão existentes entre os conjuntos:

1.º) $\{-5, -2, -1\}$ e $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1\}$?

Temos: $\{-5, -2, -1\} \subset \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1\}$

2.º) $\{+1, 0, +8\}$ e $\{0\}$?

Temos: $\{+1, 0, +8\} \supset \{0\}$

ATENÇÃO: Observe com cuidado as seguintes sentenças:

$$\{-3, -2, -1, 0\} \subset \{-3, -2, -1, 0\}$$

$$\{-3, -2, -1, 0\} \supset \{-3, -2, -1, 0\}$$

Ambas são verdadeiras! Sabe por quê?

Porque, com relação à primeira sentença, qualquer elemento do primeiro conjunto pertence ao segundo; e, com relação à segunda sentença, qualquer elemento do segundo conjunto pertence ao primeiro.

Êste fato permite dizer que os dois conjuntos são IGUAIS e escrever:

$$\{-3, -2, -1, 0\} = \{-3, -2, -1, 0\}$$

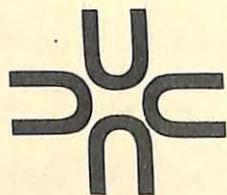
NOTA: A ordem com que os elementos figuram no conjunto, como você deve estar lembrado, pode ser qualquer. Assim, representando um conjunto qualquer por A e outro por B:

se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$

caso contrário: $A \neq B$

Exemplos: $\{-2, -1, +5\} = \{-1, +5, -2\}$

$\{-2, -1\} \neq \{-1, +5, -2\}$



PRÁTICAS MODERNAS — GRUPO 38

1. Dados os conjuntos: $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ e $B = \{-1, 0, +1, +2\}$
determinar: $A \cup B$ e $A \cap B$

2. Dados os conjuntos: $A = \{-2, -1, 0, +1\}$; $B = \{+2, +3\}$ e $C = \{0\}$
determinar: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$; $B \cup C$; $B \cap C$; $(A \cap C) \cup B$

3. Dados os conjuntos: $X = \{-32, 0, +32\}$; $Y = \{0, +1.965\}$; $Z = \{0\}$ e
 $T = \{+1.964, +1.965, +1.966, +1.967\}$
determinar: $X \cup Y$; $X \cap Y$; $Y \cup T$; $Y \cap T$; $Z \cap T$; $(Y \cup Z) \cap T$; $(X \cap Y) \cap Z$

4. Dados os conjuntos infinitos:
 $+I = \{+1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$ $-I = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1\}$
 $-I_0 = \{\dots -3, -2, -1, 0\}$ $+I_0 = \{0, +1, +2, +3, \dots\}$
determinar: 1.º) $+I \cup -I$ 4.º) $+I \cap -I$ 7.º) $-I \cup -I_0$ 9.º) $(+I \cup +I_0) \cap I_r$
2.º) $-I_0 \cup +I_0$ 5.º) $-I \cap +I_0$ 8.º) $-I \cap -I_0$ 10.º) $(+I \cup -I) \cup \{0\}$
3.º) $+I \cup +I_0$ 6.º) $+I \cap +I_0$

5. Preste muita atenção: nas seguintes sentenças, escrever V se for verdadeira e F se for falsa:

1.º) $\{-5, +3, -1\} \subset \{+2, -5, -1, +7, +3\}$

2.º) $\{-5, +3, -1\} \supset \{+2, -5, -1, +7, +3\}$

3.º) $\{0, -3, +18\} \neq \{-3, 0, +18\}$

4.º) $\{0, -3, +18\} = \{+18, -3, 0\}$

5.º) $\{0, -3, +18\} = \{0, -3, +18\}$

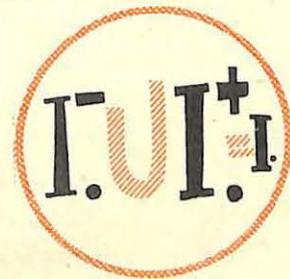
6.º) $\{0, -3, +18\} \supset \{+18, -3, 0\}$

7.º) $\{0, -3, +18\} \subset \{0, +18, -3\}$

8.º) $\{ \} \subset \{-2, +1, -13\}$

9.º) $\{-1, +3\} = \{-4, +3, +2, 0\}$

10.º) $\{-1, +3\} \neq \{-4, +3, +2, 0\}$



Estrutura de ordem;
valor absoluto.

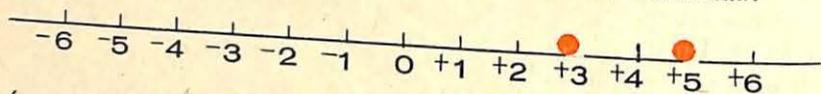
$$\begin{array}{c} + \\ -5 < 2 \\ | -8 | \end{array}$$

Estrutura de ordem nos números inteiros relativos
Analogia das sentenças em Português e Matemática



4. Relações: "é maior que" (" $>$ ")
e "é menor que" (" $<$ ")

Considere na reta numerada:



os números inteiros positivos: +3 e +5. Repare que o +5 está à direita de +3. Este fato permite dizer que: +5 é maior que +3, indicando-se, simbolicamente, esta sentença por: $+5 > +3$. São, pois, equivalentes tais sentenças, isto é:

$$+5 \text{ está à direita de } +3 \iff +5 > +3$$

Então:

$$\begin{array}{l} +2 > -1 \text{ (pois o } +2 \text{ está à direita de } -1) \\ -1 > -4 \text{ (" " } -1 \text{ " " " " } -4) \\ 0 > -3 \text{ (" " } 0 \text{ " " " " } -3) \\ +5 > 0 \text{ (" " } +5 \text{ " " " " } 0) \end{array}$$

Analogamente, conclui-se facilmente que:

$$+3 \text{ está à esquerda de } +5 \iff +3 < +5$$

Portanto:

$$\begin{array}{l} +3 < +4 \text{ (pois o } +3 \text{ está à esquerda de } +4) \\ +3 < +8 \text{ (" " } +3 \text{ " " " " } +8) \\ -5 < -2 \text{ (" " } -5 \text{ " " " " } -2) \\ -1 < +4 \text{ (" " } -1 \text{ " " " " } +4) \\ 0 < +3 \text{ (" " } 0 \text{ " " " " } +3) \\ -2 < 0 \text{ (" " } -2 \text{ " " " " } 0) \end{array}$$

Você, agora, já pode "deduzir" que:

1. O zero é maior que qualquer número inteiro negativo e menor que qualquer número inteiro positivo. Exemplos:

$$\begin{array}{ll} 0 > -5 & 0 < +1 \\ 0 > -2 \text{ 319} & 0 < +18 \end{array}$$

2. Qualquer número inteiro positivo é maior que qualquer número inteiro negativo. Exemplos:

$$+3 > -15 \quad +1 > -2 \quad +8 > -5 \quad +2 > -1.966$$

3. Qualquer número inteiro negativo é menor que qualquer número inteiro positivo. Exemplos:

$$-8 < +1 \quad -26 < +25 \quad -3 < +9 \quad -8.000 < +2$$

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 39

1. Duas, das seguintes sentenças, são falsas. Quais são?

$$\begin{array}{ll} 1.^a) +5 > -3 & 6.^a) -1 > -8 \\ 2.^a) -3 < -2 & 7.^a) 0 > -3 \\ 3.^a) 0 < -8 & 8.^a) +1 > -1 \\ 4.^a) 0 < +8 & 9.^a) -6 > +6 \\ 5.^a) +1.000 > +1.000 & 10.^a) -1.000 < +1.000 \end{array}$$

2. Uma, das seguintes sentenças, é falsa. Qual é?

$$\begin{array}{ll} 1.^a) +5 \neq -3 & 4.^a) -3 \neq +3 \\ 2.^a) +5 = +5 & 5.^a) -8 \neq 0 \\ 3.^a) -3 = +3 & 6.^a) -2 = -2 \end{array}$$

3. Substitua, nas seguintes sentenças, Δ , \square , ∇ por números inteiros relativos, de modo a formar: primeiro, uma sentença verdadeira (V) e, a seguir, uma sentença falsa (F):

$$\begin{array}{lll} 1.^a) \Delta > -3 & \text{(Ex. modelo): } \begin{array}{l} +2 > -3 \text{ (V)} \\ -4 > -3 \text{ (F)} \end{array} & 4.^a) -2 < \square \\ 2.^a) \square < +5 & & 5.^a) +126 = \Delta \\ 3.^a) \nabla \neq +1 & & 6.^a) -1 > \nabla \end{array}$$



5. Relações: "é maior ou igual que" (" \geq ") e "é menor ou igual que" (" \leq "); uso do conectivo "ou" em Português e Matemática

Você sabe da importância que tem em Português o uso do conectivo *ou* quando liga duas sentenças simples para formar *sentença composta*.

O mesmo ocorre em Matemática quando você liga duas sentenças matemáticas simples para formar uma *sentença matemática composta*. Suponha, por exemplo, que seu professor tenha feito o seguinte pedido à classe:

"Paulo *ou* Joaquim devem trazer amanhã o livro de Matemática Moderna"

Esta sentença é composta de duas sentenças simples ligadas pelo conectivo *ou*, isto é: Paulo deve trazer amanhã o livro de Matemática Moderna *ou* Joaquim deve trazer amanhã o livro de Matemática Moderna.

Em quantos, dos seguintes casos, o professor será atendido no seu pedido?

1. somente Paulo trouxe o livro de M. M.;
2. somente Joaquim trouxe o livro de M. M.;
3. ambos trouxeram o livro de M. M.;
4. nenhum dos dois trouxe o livro de M. M.

Pela atuação do conectivo *ou* você conclui que o professor será atendido nos casos: 1, 2 e 3, e não será atendido no caso 4. Isto significa que, para uma sentença composta (duas sentenças simples ligadas pelo conectivo *ou*) ser *verdadeira*, basta que uma das sentenças simples seja *verdadeira*. Só será *falsa* se as duas sentenças simples que a compõem forem falsas.

Se você, agora, combinar sentenças matemáticas com as *relações* dadas pelos símbolos:

$>$, $=$, $<$

resultarão *sentenças matemáticas compostas*, de *mesma estrutura* que as obtidas em Português com o conectivo *ou*. Assim, por exemplo, a sentença composta:

$+5$ é maior que $+3$ *ou* $+5$ é igual a $+3$, isto é: $+5 > +3$ *ou* $+5 = +3$ simbolicamente, pode ser escrita:

$+5 \geq +3$ (lê-se: "cinco positivo é maior *ou* igual que três positivo")

Essa sentença matemática composta é *verdadeira*? Sim, pois basta que *uma das sentenças simples* seja verdadeira, e, como a primeira delas: $+5 > +3$ é verdadeira... não interessa que a segunda: $+5 = +3$, seja falsa. Logo:

$+5 \geq +3$ é uma sentença verdadeira.

Já a sentença matemática composta:

$+5 \geq +10$ (lê-se: " $+5$ é maior *ou* igual que $+10$ ")

é *falsa*, pois as duas sentenças que a compõem são falsas:

$+5 > +10$ (F) e $+5 = +10$ (F)

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 40

1. Suponha que você diga a sentença (composta): "Julinho está de camisa branca *ou* Pedro está de camisa amarela". Responda às seguintes perguntas:
 - 1.ª) Se, efetivamente, Julinho está de camisa branca, mas Pedro está de camisa azul, a sentença que você disse é verdadeira? Por quê?
 - 2.ª) Se Julinho está de camisa cinza e Pedro de camisa amarela, continuaria verdadeira a sentença que você enunciou? Por quê?
 - 3.ª) E se Julinho está de camisa amarela e Pedro de camisa branca?
 - 4.ª) E se Julinho está sem camisa e Pedro de camisa branca?
2. Coloque, sob forma de sentenças matemáticas compostas, as seguintes sentenças ligadas pelo conectivo *ou*:
 - 1.ª) " $+3$ é maior ou igual que -5 " Ex. modelo: $+3 \geq -5$
 - 2.ª) " $+7$ é menor ou igual que $+2$ ";
 - 3.ª) " $-1,964$ é menor ou igual que $-1,965$ ";
 - 4.ª) " 0 é maior ou igual que -3 ".
3. Quais, das sentenças compostas do Exercício 2, são verdadeiras?
4. Substituir Δ e \square por números inteiros relativos nas seguintes sentenças compostas, a fim de torná-las verdadeiras:
 - 1.ª) $\Delta \geq +4$ Ex. modelo: $\Delta = +5$, pois: $+5 \geq +4$ (V)
 - 2.ª) $\square \leq -1$
 - 3.ª) $-3 \leq \square$
 - 4.ª) $\Delta \geq \square$

5. Assinale com V as sentenças verdadeiras e com F as falsas:

- 1.^a) $+7 \geq +2$ (V) Ex. modelo: é V porque $+7 > +2$
 2.^a) $-9 \leq -10$
 3.^a) $-4 \leq 0$
 4.^a) $-3 \geq +5$



6. Valor absoluto de um número relativo

Como você já sabe, cada número relativo é representado pelo numeral de um número aritmético acompanhado do sinal qualificativo + ou -. Tal número aritmético é denominado **valor absoluto** ou **módulo** do número relativo. Exemplos:

- o valor absoluto de : -3 é 3
- o valor absoluto de : $+3$ é 3
- o valor absoluto de : $+26$ é 26
- o valor absoluto de : -26 é 26

Costuma-se indicar o *valor absoluto* de um número relativo com as duas barras: $| |$. Assim, por exemplo:

- $|-3| = 3$ lê-se: “valor absoluto de três negativo é três”
- $|+3| = 3$ lê-se: “valor absoluto de três positivo é três”
- $|+26| = 26$ lê-se: “valor absoluto de vinte e seis positivo é vinte e seis”

$|-1.000| = 1.000$ lê-se: “valor absoluto de mil negativo é mil”

O *valor absoluto* de 0 é 0 ; ou também: $|0| = 0$

O importante sobre esse assunto é você guardar que está pela primeira vez relacionando os “novos” números criados: *números inteiros relativos*, com os “velhos” números conhecidos, isto é, os *números inteiros aritméticos*”.

Observe o comportamento de ambos nas importantes relações de *igualdade* e de *desigualdade*. Como:

então: $|-3| = 3$ e $|+3| = 3$

$$|-3| = |+3| = 3$$

LEMBRETE AMIGO

$$|+3| = 3 \quad \text{e} \quad |-3| = 3$$

$$|+3| = |-3| \quad \text{e} \quad +3 \neq -3$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 41

1. Calcular o *valor absoluto* dos seguintes números relativos, usando as duas barras para sua indicação:

- 1.^o) -7 (Ex. modelo): $|-7| = 7$ 6.^o) -1
 2.^o) $+186$ 7.^o) -12
 3.^o) 0 8.^o) $+120$
 4.^o) -39 9.^o) $+12$
 5.^o) $+1$ 10.^o) -3

2. Tornar verdadeira cada uma das seguintes sentenças:

- 1.^a) $|-5| = \dots$ (Ex. modelo): $|-5| = 5$ 6.^a) $|+200| = \dots$
 2.^a) $|+1| = \dots$ 7.^a) $|-2| = \dots$
 3.^a) $|+5| = \dots$ 8.^a) $|+3| = \dots$
 4.^a) $0 = \dots$ 9.^a) $|+1.932| = \dots$
 5.^a) $|-13| = \dots$ 10.^a) $|-1| = \dots$

3. Dois números inteiros relativos diferentes possuem, cada um deles, o módulo 2. Quais são eles?

4. Escrever V ou F, dependendo de a sentença ser verdadeira ou falsa:

- 1.^a) $-1 \neq +1$ 4.^a) $+3 = -3$ 7.^a) $|+13| \geq |+13|$ 10.^a) $|-9| < 5$
 2.^a) $|-1| = |+1|$ 5.^a) $|+3| = |-3|$ 8.^a) $|+13| = |+13|$ 11.^a) $|-2| \neq |+2|$
 3.^a) $|-5| < 5$ 6.^a) $0 \neq |0|$ 9.^a) $0 < |-216|$ 12.^a) $|+3| > 12$

5. Substituir, nas seguintes sentenças, \square e Δ por números inteiros relativos, a fim de torná-las verdadeiras:

- 1.^a) $|\Delta| = 3$ 5.^a) $|\Delta| < 4$
 2.^a) $\square > |-5|$ 6.^a) $|+13| \geq \square$
 3.^a) $\Delta \neq |+2|$ 7.^a) $|\Delta| = |\square|$
 4.^a) $\square \geq |-1|$ 8.^a) $|\Delta| \neq \square$

Operações com números inteiros relativos.
Propriedades estruturais.



Operações com números inteiros relativos.



1. Importância de uma operação

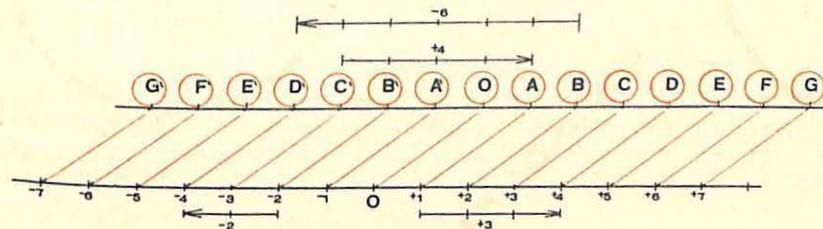
Conhecidos *novos* números, a fase seguinte é *operar* com os mesmos. A seguir são pesquisadas as *propriedades estruturais* das operações estudadas, que "dirão" da importância dos números "criados".

ADIÇÃO

2. Conceito

A operação de *adição*, que será indicada também pelo sinal +, de dois números inteiros relativos quaisquer, pode ser definida através da *reta numerada*. Como o resultado dessa operação — *soma* — é um número inteiro relativo, pois também se encontra na *reta numerada*, você logo "descobrirá" *técnicas operatórias* que permitirão efetuar a *adição* (+) de dois números inteiros relativos, sem usar a *reta numerada*.

Imagine-se, agora, percorrendo uma estrada, marcada de *quilômetro* a *quilômetro* por letras:



Tal estrada teria, nessas condições, o mesmo "comportamento" de uma *reta numerada*, marcada como de costume. Todo *movimento* que você fizer para a *direita* é descrito por *números inteiros positivos*, e todo *movimento* que fizer para a *esquerda* será descrito por *números inteiros negativos*. Assim, por exemplo:

- o movimento que o deslocaria de A para D é descrito por: $+3$
(pois você "andou" *três unidades para a direita*)
- o movimento que o deslocaria de B' para D' é descrito por: -2
(pois você "andou" *duas unidades para a esquerda*)
- o movimento de C' para A é descrito por: $+4$
- o movimento de B para D' é descrito por: -6

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 42

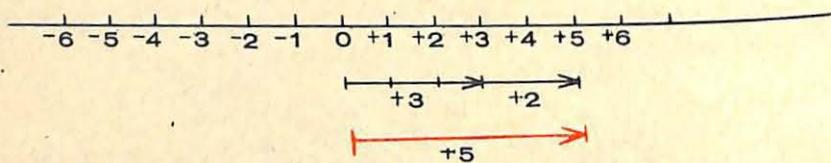
Dizer qual o número inteiro relativo que descreve os seguintes movimentos:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1.º de C' para O : ... | 6.º de O para O : ... |
| 2.º de C' para C : ... | 7.º de D' para D : ... |
| 3.º de O para E : ... | 8.º de C para C : ... |
| 4.º de A para A' : ... | 9.º de B' para E : ... |
| 5.º de O para D' : ... | 10.º de E para B' : ... |

Qual seria a **adição** de dois números inteiros positivos, como, por ex.:

$$+3 + +2 = ?$$

Voltemos à *reta numerada*, que funcionará como uma verdadeira *tábua de adição* de números relativos:

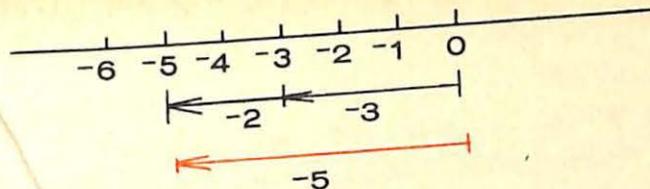


Partindo sempre de 0 para a direita, a "composição" dos movimentos consecutivos que traduzem, respectivamente, os números $+3$ e $+2$, dá como resultado: $+5$, isto é:

$$+3 + +2 = +5$$

Qual seria a **adição** de dois números inteiros negativos, como, por ex.:

$$-3 + -2 = ?$$

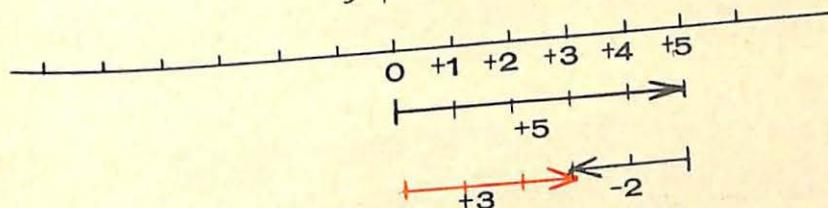


Partindo, agora, de 0 para a esquerda, na *reta numerada*, você concluirá facilmente que:

$$-3 + -2 = -5$$

Qual seria a **adição** de um número inteiro positivo com um número inteiro negativo, como, por ex.:

$$+5 + -2 = ?$$



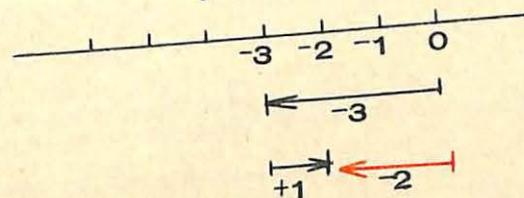
SOLUÇÃO:

$$+5 + -2 = +3$$

Por quê?

Qual seria a **adição** de um número inteiro negativo com um número inteiro positivo, como, por ex.:

$$-3 + +1 = ?$$



SOLUÇÃO:

$$-3 + +1 = -2$$

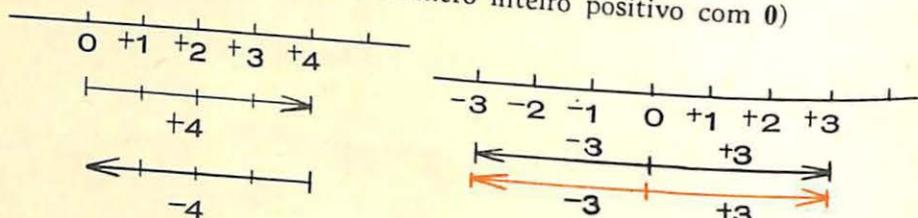
Por quê?

Qual seria a adição de:

$+4 + -4 = ?$ (adição de dois números inteiros relativos opostos)

$-3 + 0 = ?$ (adição de um número inteiro negativo com 0)

$+3 + 0 = ?$ (adição de um número inteiro positivo com 0)



A *tábua operatória*, estabelecida sobre a reta numerada, mostra que:

$+4 + -4 = 0$

$-3 + 0 = -3$

$+3 + 0 = +3$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 43

1. Determine a soma resultante das seguintes adições de números inteiros relativos, usando a reta numerada como *tábua operatória*:

1.^a) $+1 + +4 = \dots$

2.^a) $+2 + +3 = \dots$

3.^a) $+4 + 0 = \dots$

4.^a) $0 + +4 = \dots$

5.^a) $0 + -3 = \dots$

6.^a) $-1 + -4 = \dots$

7.^a) $-2 + -5 = \dots$

8.^a) $+5 + -2 = \dots$

9.^a) $-8 + +3 = \dots$

10.^a) $-2 + 0 = \dots$

11.^a) $-4 + -3 = \dots$

12.^a) $-6 + +2 = \dots$

2. Observe, com atenção, as respostas obtidas nas questões do Exercício 1. A seguir tente "descobrir" uma *técnica operatória* capaz de determinar a soma de dois números inteiros relativos *quaisquer* (evitando assim de usar sempre a reta numerada).

Você já pensou em "somar" $+2.315$ com $+1.216$, usando a reta numerada? Seria difícil, não? Por isso é bom ir empregando "a sua" técnica e só depois recorrer à *técnica* que irá ser ensinada (que provavelmente coincidirá com a sua...)

3. Experimente "sua" técnica nas seguintes adições:

1.^a) $+30 + +12$

2.^a) $+30 + -12$

3.^a) $-65 + -15$

4.^a) $-139 + -1$

5.^a) $+1.965 + -10$

6.^a) $-1.965 + +10$

7.^a) $-315 + 0$

8.^a) $0 + +68$

3. *Técnica de cálculo para a adição de dois números inteiros relativos*

Será revelada por intermédio das seguintes *regras-padrões*:

1.^a) A soma de dois números *inteiros positivos* é um número *inteiro positivo*, cujo valor absoluto é a *soma* dos valores absolutos dos números dados. Exemplos:

$+3 + +2 = +5$ ($3 + 2 = 5 \iff$ soma dos valores absol.)

$+515 + +1.300 = +1.815$ ($515 + 1.300 = 1.815 \iff$ soma dos val. absol.)

2.^a) A soma de dois números *inteiros negativos* é um número *inteiro negativo*, cujo valor absoluto é a *soma* dos valores absolutos dos números dados. Exemplos:

$-3 + -2 = -5$ ($3 + 2 = 5 \iff$ soma dos val. absol.)

$-515 + -1.300 = -1.815$ ($515 + 1.300 = 1.815 \iff$ soma dos val. absol.)

3.^a) A soma de dois números inteiros relativos, um deles *positivo* e outro *negativo* (porém, *não-opostos*), é um número *inteiro relativo*, cujo valor absoluto é a *diferença* entre os valores absolutos dos números dados; essa *diferença* será um número inteiro positivo ou negativo, de acordo com o número relativo que tiver *maior valor absoluto*. Exemplos:

$+8 + -5 = +3$ ($8 - 5 = 3 \iff$ diferença dos val. absol.)

$+2 + -7 = -5$ ($7 - 2 = 5 \iff$ diferença dos val. absol.)

$-312 + +839 = +527$ ($839 - 312 = 527 \iff$ diferença dos val. absol.)

4.^a) A soma de dois números *inteiros relativos opostos* é 0. Exemplos:

$+3 + -3 = 0$ ($3 - 3 = 0 \iff$ diferença dos val. absol.)

$-850 + +850 = 0$ ($850 - 850 = 0 \iff$ diferença dos val. absol.)

5.^a) A soma de um número *inteiro relativo qualquer* (positivo ou negativo) com 0 é o próprio número inteiro relativo. Exemplos:

$+8 + 0 = +8$

$-3 + 0 = -3$

4. Adição de vários números inteiros relativos

Procede-se da mesma forma que no caso da adição de mais de dois números inteiros (aritméticos). Assim, por exemplo, para operar com três números inteiros relativos, determina-se a soma dos dois primeiros e a seguir adiciona-se o terceiro ao resultado obtido. Exemplo:

$$-3 + +5 + -2 = \underbrace{(-3 + +5)}_{+2} + -2 = +2 + -2 = 0$$



5. Propriedades estruturais

A adição de números inteiros relativos goza das seguintes propriedades:

1.^a FECHAMENTO: A soma de dois números inteiros relativos quaisquer é sempre um número inteiro relativo. Exemplo:

$$\begin{array}{ccc} -3 & + & +2 = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \in \mathbb{I}_r & & \in \mathbb{I}_r \end{array}$$

2.^a COMUTATIVA: Trocando-se a ordem de dois termos quaisquer, a soma obtida é a mesma. Exemplo:

$$-3 + +2 = +2 + -3$$

3.^a ASSOCIATIVA: Exemplo:

$$(-3 + +2) + -7 = -3 + (+2 + -7)$$

4.^a ELEMENTO NEUTRO: 0 Exemplos:

$$\begin{array}{l} +5 + 0 = 0 + +5 = +5 \\ -3 + 0 = 0 + -3 = -3 \end{array}$$

5.^a ELEMENTO INVERSO ADITIVO: Para qualquer número inteiro relativo existe sempre um número inteiro relativo — que é o seu oposto, agora denominado **inverso aditivo** — tal que a soma de ambos é o elemento neutro, isto é, 0. Exemplos:

$$\begin{array}{l} \text{Dado o } -3, \text{ existe o } +3 \text{ tal que: } -3 + +3 = 0 \\ \text{Dado o } +8, \text{ existe o } -8 \text{ tal que: } +8 + -8 = 0 \end{array}$$

LEMBRETE AMIGO

Guarde bem essas propriedades! Elas serão de muita importância quando você fôr determinar a ESTRUTURA de um Sistema Matemático (que é um conjunto de elementos quaisquer munido de uma operação).

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 44

Escreva a propriedade que está sendo aplicada nas seguintes sentenças:

1.^a) $-5 + 0 = -5$

6.^a) $+3 + -4 = -4 + +3$

2.^a) $+1 + -1 = 0$

7.^a) $-7 + +7 = 0$

3.^a) $(-4 + +1) \in \mathbb{I}_r$

8.^a) $(-5 + +2) \in \mathbb{I}_r$

4.^a) $0 + +8 = +8$

9.^a) $-1 + -1 = -1 + -1$

5.^a) $(-2 + +3) + -5 = -2 + (+3 + -5)$

10.^a) $+1 + (0 + -2) = (+1 + 0) + -2$

SUBTRAÇÃO

6. Conceito

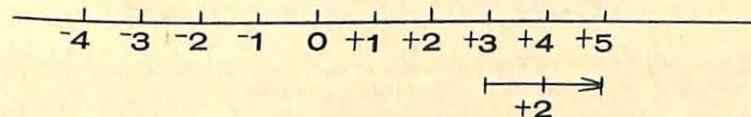
A relação existente entre a subtração e a adição de números inteiros relativos é a mesma que você conhece para a adição e a subtração de números inteiros (aritméticos), isto é, são operações inversas:

$$\square - \Delta = \star \iff \star + \Delta = \square$$

(\square , Δ e \star são numerais de números inteiros relativos)

Que seria preciso para efetuar: $+5 - +3 = ?$

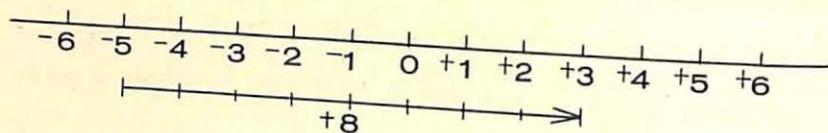
Seria preciso procurar o número inteiro relativo (denominado **diferença**) que, adicionado a $+3$, dá como resultado $+5$. Na reta numerada encontra-se, fãcilmente, tal número relativo:



Basta "sair" do $+3$ e "contar" as unidades necessárias para alcançar o $+5$, ou seja, duas unidades à direita de $+3$, o que equivale a: $+2$! Logo:

$$+5 - +3 = +2$$

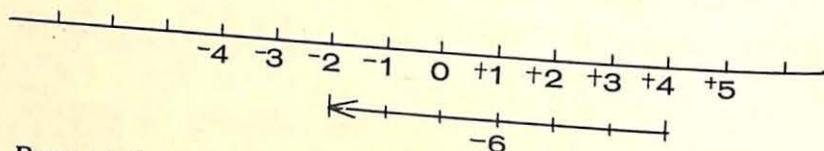
E para efetuar: $+3 - -5 = ?$



"Sair" do -5 , na reta numerada, e contar as unidades necessárias para alcançar o $+3$, ou seja, *oito* unidades à *direita* de -5 . Logo:

$$+3 - -5 = +8$$

E para efetuar: $-2 - +4 = ?$



Basta "sair" do $+4$ e contar as unidades necessárias (seis) para alcançar -2 . Sendo o movimento para a *esquerda*, segue-se que:

$$-2 - +4 = -6$$

E, finalmente, para efetuar: $-1 - -4 = ?$

Usando a reta numerada e a *técnica* dos outros casos, verifique você mesmo que:

$$-1 - -4 = +3$$

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 45

1. Determine a *diferença* resultante das seguintes *subtrações* de números inteiros relativos, usando a *reta numerada* como *tábua operatória*:

1.^a) $+8 - +5 = \dots$

2.^a) $-3 - +1 = \dots$

3.^a) $-8 - -5 = \dots$

4.^a) $+6 - 0 = \dots$

5.^a) $0 - +6 = \dots$

6.^a) $+4 - +4 = \dots$

7.^a) $-1 - +2 = \dots$

8.^a) $0 - -5 = \dots$

9.^a) $+1 - -1 = \dots$

10.^a) $0 - 0 = \dots$

11.^a) $+7 - -3 = \dots$

12.^a) $-5 - -5 = \dots$

2. Observe, com atenção, as respostas obtidas nas questões do Exercício 1. A seguir tente "descobrir" uma *técnica operatória* capaz de determinar a *diferença* de dois números inteiros relativos quaisquer, sem usar a *reta numerada*.

3. Experimente a "sua" *técnica* nas seguintes *subtrações*:

1.^a) $+59 - +3$

2.^a) $-59 - -3$

3.^a) $-100 - +100$

4.^a) $+315 - +315$

5.^a) $+2.518 - +1$

6.^a) $-3.619 - 0$

7.^a) $0 - -3.619$

8.^a) $0 - +3.619$

... e somente depois recorra à *técnica* ensinada abaixo.

7. Técnica de cálculo para a subtração de dois números inteiros relativos

A *subtração* de dois números relativos quaisquer, dados numa certa ordem, *transforma-se* numa *adição* do primeiro número relativo com o *oposto* do segundo. Exemplos:

$$+5 - +3 = +5 + -3 = +2$$

$$+3 - -5 = +3 + +5 = +8$$

$$-2 - +4 = -2 + -4 = -6$$

$$-1 - -4 = -1 + +4 = +3$$

$$+6 - 0 = +6 + 0 = +6$$

$$0 - +6 = 0 + -6 = -6$$

$$+315 - +315 = +315 + -315 = 0$$

$$-2.819 - +619 = -2.819 + -619 = -3.438$$

Se \square e Δ são numerais de números inteiros (aritméticos), então:

$$+\square - +\Delta = +\square + -\Delta$$

$$+\square - -\Delta = +\square + +\Delta$$

$$-\square - +\Delta = -\square + -\Delta$$

$$-\square - -\Delta = -\square + +\Delta$$

CONSEQÜÊNCIA IMPORTANTE: Agora a *subtração* é sempre possível...

No conjunto dos números inteiros relativos I_r a operação *subtração* é sempre *possível*, pois, dados dois números inteiros relativos quaisquer, numa certa ordem, *existe* um número inteiro relativo (negativo, nulo ou positivo) tal que, somado ao segundo, dá como resultado o primeiro.

Logo: no conjunto I_r a subtração goza da propriedade do fechamento.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} +5 - +3 = +2 \\ +3 - +5 = -2 \end{array} \rangle \in I_r$$

Para facilitar o cálculo com os números inteiros relativos, pode-se dispensar o uso do sinal qualificativo + do numeral que representa o número positivo. Assim:

$$+3 - +5 = -2 \text{ pode ser escrito: } 3 - 5 = -2$$

Agora você já sabe que é sempre possível subtrair um número de outro... Outros exemplos:

$$\begin{array}{l} 1 - 8 = -7 \\ 0 - -5 = 5 \\ 9 - 9 = 0 \\ 8 - 1 = 7 \end{array}$$

NOTA: Apesar da subtração possuir a propriedade do fechamento no I_r , ela continua não sendo comutativa e associativa, e não tendo elemento neutro em I_r , como mostram os exemplos:

$$\begin{array}{l} 3 - 8 = 8 - 3 \text{ (Falsa!)} \\ (5 - -2) - 1 = 5 - (-2 - 1) \text{ (Falsa!)} \\ 5 - 0 = 0 - 5 \text{ (Falsa!)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Por quê?} \\ \text{Por quê?} \\ \text{Por quê?} \end{array}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 46

Pode-se, com os números inteiros relativos, considerar associações de adições e subtrações, a exemplo do que foi feito com os números inteiros (aritméticos). Também o cálculo de expressões numéricas com números inteiros relativos é feito de modo análogo.

1.º Calcular o valor da seguinte expressão numérica (é o mesmo que mandar calcular o numeral mais simples que a representa):

$$\begin{array}{l} \text{Exemplos:} \\ \text{Temos: } +7 - (+2 - -5) = +7 - (+2 + +5) = +7 - +7 = 0 \end{array}$$

$$2.º \text{ Idem: } +1 + [-3 - (-2 + -1)]$$

$$\text{Temos: } +1 + [-3 - (-2 + -1)] = +1 + [-3 - -3] = +1 + [-3 + +3] = +1 + 0 = 1$$

3.º Idem, decompondo convenientemente os números relativos de modo que apareça um número inteiro relativo e seu oposto, bem como se possa fazer uso da propriedade associativa da adição (p.a.a.): Ex.:

$$\begin{array}{l} \underbrace{-8 + +5}_{-3 + -5} = (-3 + -5) + +5 = -3 + (-5 + +5) = -3 + 0 = -3 \\ \text{p.a.a.} \end{array}$$

4.º Verificar se é V ou F cada uma das seguintes sentenças:

a) $3 + |-5| = 8$. É V, pois: $|-5| = 5$, e portanto: $3 + 5 = 8$ (V)

b) $|3 + -4| = |3| + |-4|$. É F, pois: $|-1| = |3| + |-4|$
 $\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$
 $1 = 3 + 4$ (F)

5.º Resolver, usando números inteiros relativos, os seguintes problemas:

a) No primeiro turno de um campeonato de futebol um time perdeu 3 jogos e ganhou 8. Qual o saldo favorável?

Temos: $-3 + +8 = +5$. Logo, saldo favorável: 5 jogos.

b) Se um foguete, disparado de um submarino situado a 30m abaixo do nível do mar, atinge uma altura (na vertical) de 700m acima do nível do mar, qual a distância, em valor absoluto, percorrida pelo foguete?

Temos: $|-30| + |+700| = 30 + 700 = 730$. Logo, o foguete percorreu 730m.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 47

1. Calcular o valor das seguintes expressões numéricas:

1.ª) $-1 + (+4 + -4)$

2.ª) $+9 - (-2 - +5)$

3.ª) $[0 - (-3 + -1 + +2)] - [+1 - (+2 - -1)]$

4.ª) $+8 - [-4 + (-3 + +5) - (+8 - +18)]$

5.ª) $-12 + [+8 - [0 - (-1 + -3)]]$

2. Idem, decompondo convenientemente os números inteiros relativos, de modo que apareça um número inteiro relativo e o seu oposto, bem como possa fazer uso da propriedade associativa da adição:

1.ª) $-10 + +3$

3.ª) $-1 + +101$

2.ª) $+5 + -15$

4.ª) $+214 + -14$

3. Verificar se é V ou F cada uma das seguintes sentenças:

1.ª) $6 + |-5| = 11$

3.ª) $3 + |-2| \neq 1$

2.ª) $6 + |+5| = 11$

4.ª) $3 + |+2| = 1$

4. Resolver, usando números inteiros relativos, os seguintes problemas:

1.º Dos NCr\$ 10,00 que eu tinha paguei NCr\$ 5,00 que devia a Carlinhos e gastei NCr\$ 3,00 no teatro. Com quanto fiquei?

2.º Se um doente passar de 39º para 37º, então a sua temperatura sofreu um decréscimo de 2º ou um acréscimo de ...

3.º A diferença entre as temperaturas de 39 graus à sombra e 9 graus abaixo de zero é, em valor absoluto, ...

- 4.º) Se Euclides, famoso geômetra grego, nasceu 320 anos antes de Cristo, que idade teria Euclides em 1965 (números de anos em valor absoluto)?
- 5.º) Recebi como pagamento um cheque de NCr\$ 20,00 e outro de NCr\$ 25,00, mas tenho uma conta de NCr\$ 50,00 para pagar. Qual o resultado dessa "operação"?
- 6.º) Entrei em certa mina e desci 10m abaixo do nível do mar; depois, desci mais 15m. A que profundidade cheguei?

MULTIPLICAÇÃO

8. Conceito

Que são:

$$\begin{array}{ll} +2 \times +4 ? & +3 \times -2 ? \\ +3 \times 0 ? & -2 \times +3 ? \\ -5 \times 0 ? & -3 \times -4 ? \end{array}$$

São expressões onde o sinal \times está indicando uma "nova operação", chamada *multiplicação de dois números inteiros relativos*, que será definida obedecendo aos seguintes requisitos:

- 1.º) o **produto** de dois números inteiros relativos é um número inteiro relativo;
- 2.º) *existe um mesmo comportamento* (conhecido pelo nome de *isomorfismo*) entre os números inteiros aritméticos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) e os números inteiros não-negativos (0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...);
- 3.º) continuam *valendo as propriedades estruturais* conhecidas na adição e multiplicação dos números inteiros aritméticos, tais como:

comutativa: $\Delta \times \square = \square \times \Delta$

anulamento: $\Delta \times 0 = 0$

distributiva: $\Delta \times (\square + \nabla) = \Delta \times \square + \Delta \times \nabla$

Pelo 2.º você pode estabelecer uma *correspondência biunívoca* entre aqueles dois conjuntos de números:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \uparrow & \dots \\ 0 & +1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & \dots \end{array}$$

que permite calcular, por exemplo: $+2 \times +4$. De fato, usando a *correspondência* (que agora funcionaria como uma *tábua de multiplicação* de números inteiros positivos), temos:

$$\begin{array}{ccc} +2 \times +4 = +8 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ 2 \times 4 = 8 \end{array} \quad \text{portanto:} \quad +2 \times +4 = +8$$

Verifique você mesmo que:

$$\begin{array}{ll} +3 \times +2 = +6 & 0 \times +3 = 0 \\ +5 \times +5 = +25 & +3 \times 0 = 0 \\ +1 \times +3 = +3 & 0 \times 0 = 0 \end{array}$$

Êstes resultados sugerem uma primeira *definição*:

o produto de dois números positivos é um número positivo

o produto de um número positivo por zero é zero

EXERCÍCIOS EXPLORATÓRIOS — GRUPO 48

1. Determine o *produto* resultante das seguintes *multiplicações* de números inteiros positivos, usando a correspondência estudada como *tábua operatória*:

1.º) $+2 \times +3 = \dots$	4.º) $+1 \times +5 = \dots$
2.º) $+4 \times +4 = \dots$	5.º) $+3 \times +3 = \dots$
3.º) $+7 \times +1 = \dots$	6.º) $0 \times +6 = \dots$
2. Com a *técnica operatória* que, provavelmente, você já "descobriu" para multiplicar dois números inteiros positivos (antes de conhecer a regra-padrão que será ensinada), calcule:

1.º) $+252 \times +3$

2.º) $+8 \times +532$

3.º) $+1.325 \times +100$



Como você efetuará: $-3 \times 0 = ?$ e $0 \times -3 = ?$

Pela II, propriedade do *anulamento* (lembre-se que o 0 é o "terrível" que *anula* tudo...), temos:

$-3 \times 0 = 0$ e pela *comutativa*: $0 \times -3 = 0$

Então: o produto de um número negativo por zero é zero

Que é, agora: $+3 \times -2 = ?$ (multiplicação de um n.º positivo por um n.º negativo)

Muita atenção: o resultado dessa multiplicação será determinado mediante resultados já conhecidos. Assim:

$$\begin{aligned} & +3 \times 0 = 0 && \text{(propriedade do anulamento)} \\ \text{ou} & +3 \times (+2 + -2) = 0 && \text{(foi escrito } 0 = +2 + -2, \text{ para introduzir o n.º} \\ & && \text{negativo } -2) \\ \text{ou} & +3 \times +2 + +3 \times -2 = 0 && \text{(aplicou-se a propriedade distributiva)} \\ \text{ou} & +6 + +3 \times -2 = 0 && \text{(} +3 \times +2 = +6, \text{ já conhecido)} \\ & +6 + ? = 0 \end{aligned}$$

Ora, pela existência do elemento inverso aditivo no conjunto I_r , o único número inteiro relativo que, somado com $+6$ dá como resultado 0, é o -6 . Logo:

$$+3 \times -2 = -6$$

Segue-se o cálculo de $-2 \times +3$, pela propriedade comutativa, isto é:

$$-2 \times +3 = +3 \times -2 = -6$$

Então:

O produto de um número positivo por um número negativo é um número negativo

Finalmente, como você efetuará a multiplicação de um número negativo por um número negativo, como por exemplo: -3×-4 ?

$$\begin{aligned} \text{"Partindo" de: } & -3 \times 0 = 0 && \text{(por quê?)} \\ \text{ou} & -3 \times (+4 + -4) = 0 && \text{(por quê?)} \\ \text{ou} & -3 \times +4 + -3 \times -4 = 0 && \text{(por quê?)} \\ & -12 + ? = 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma: o único número inteiro relativo do conjunto I_r , que, somado com -12 dá como resultado 0, é o $+12$. Logo:

$$-3 \times -4 = +12$$

Então:

O produto de um número negativo por um número negativo é um número positivo

$$\begin{aligned} \text{Outros exemplos: } & -4 \times -3 = +12 & -2 \times -2 = +4 \\ & -6 \times -1 = +6 & -5 \times -12 = +60 \\ & -1 \times -1 = +1 & -100 \times -1 = +100 \end{aligned}$$

9. Técnica de cálculo para a multiplicação de dois números inteiros relativos

Obedece à seguinte regra-padrão:

O produto de dois números inteiros relativos é um número inteiro relativo, cujo valor absoluto é o produto dos valores absolutos dos números dados.

Será positivo se ambos os números dados forem positivos ou ambos negativos.

Será negativo se um dos números dados for positivo e o outro negativo.

Se um dos fatores for 0, o produto será igual a 0.

Resumindo:

$$\begin{aligned} \text{n.º positivo} \times \text{n.º positivo} &= \text{n.º positivo} \\ \text{n.º positivo} \times \text{n.º negativo} &= \text{n.º negativo} \\ \text{n.º negativo} \times \text{n.º positivo} &= \text{n.º negativo} \\ \text{n.º negativo} \times \text{n.º negativo} &= \text{n.º positivo} \end{aligned}$$

CURIOSIDADE

Se você tomar o número positivo como "amigo" e o número negativo como "inimigo" fica "valendo" a seguinte regra:

- O "amigo" (+) de meu "amigo" (+) é meu "amigo" (+) (deve ser V!)
- O "amigo" (+) de meu "inimigo" (-) é meu "inimigo" (-) (idem . . .)
- O "inimigo" (-) de meu "amigo" (+) é meu "inimigo" (-) (idem . . .)
- O "inimigo" (-) de meu "inimigo" (-) é meu "amigo" (+) (idem . . .)

10. Multiplicação de vários números inteiros relativos

Procede-se da mesma forma que no caso da multiplicação de vários números inteiros aritméticos. Os exemplos esclarecerão:

$$1.^{\circ} -3 \times +5 \times -2 = \underbrace{(-3 \times +5)}_{-15} \times -2 = -15 \times -2 = +30$$

$$2.^{\circ} +1 \times -3 \times -4 \times -6 = \underbrace{[(+1 \times -3) \times -4]}_{-3} \times -6 = \underbrace{[-3 \times -4]}_{+12} \times -6 = +12 \times -6 = -72$$

$$3.^{\circ} -2 \times +1 \times 356 \times 0 = 0$$

Guarde a seguinte *técnica de cálculo* para a multiplicação de vários números relativos: se na multiplicação figurar um número *par* de números negativos, então o produto é um número *positivo* (1.º ex.); se figurar um número *ímpar* de números negativos como fatores, então o produto é um número *negativo* (2.º ex.); se houver um fator nulo, o produto é 0 (3.º ex.).



11. Propriedades estruturais

Resumindo as propriedades estudadas, temos:

$$1.^{\circ} \text{ FECHAMENTO: } \begin{array}{ccc} +3 \times -2 = -6 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \in \mathbb{I}_r \quad \in \mathbb{I}_r \quad \in \mathbb{I}_r \end{array}$$

$$2.^{\circ} \text{ COMUTATIVA: } +3 \times -2 = -2 \times +3 \quad (\text{p.c.m.})$$

$$3.^{\circ} \text{ ASSOCIATIVA: } (+3 \times -2) \times -5 = +3 \times (-2 \times -5) \quad (\text{p.a.m.})$$

$$4.^{\circ} \text{ ELEMENTO NEUTRO: } 1 \quad -5 \times 1 = 1 \times -5 = -5 \quad (\text{e.n.m.})$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 49

1. Efetuar as seguintes multiplicações:

$$1.^{\circ} +3 \times +5$$

$$2.^{\circ} -8 \times -1$$

$$3.^{\circ} +200 \times -2$$

$$4.^{\circ} -1 \times +45$$

$$5.^{\circ} 0 \times -5$$

$$6.^{\circ} +1.254 \times 0$$

$$7.^{\circ} -3 \times -4 \times +5$$

$$8.^{\circ} (-1 \times +2) \times (-5 \times -3)$$

$$9.^{\circ} (-12 \times +1 \times -1) \times (-3 \times -4)$$

$$10.^{\circ} -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1$$

$$11.^{\circ} (-2 \times -2) \times (-1 \times -1 \times -1)$$

$$12.^{\circ} -3 \times -2 \times -1 \times 0 \times +1 \times +2 \times +3$$

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

NOTA: Para facilitar o *cálculo* foi suprimido o sinal + do numeral que representa o número inteiro positivo, a exemplo do que já foi feito no cálculo da adição e subtração dos números relativos.

$$1.^{\circ} -3 \times (5 + -2)$$

$$2.^{\circ} -1 \times 2 - (-3 + -5)$$

$$3.^{\circ} [4 \times (-5 + 0)] \times -1$$

$$4.^{\circ} (-2 + 1 - 3) \times -2 + [-1 + (-952 - 1)] \times 0$$

$$5.^{\circ} -100 + [-100 + (100 - -100 \times 1)]$$

3. Efetuar, usando a propriedade do *anulamento* e a propriedade *distributiva* em relação à adição:

$$1.^{\circ} +4 \times -3$$

$$2.^{\circ} -5 \times +5$$

$$3.^{\circ} +4 \times -6$$

$$4.^{\circ} -6 \times +1$$

$$5.^{\circ} -5 \times -3$$

$$6.^{\circ} -1 \times -1$$

4. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

$$1.^{\circ} \text{ n.º positivo } \times \dots = \text{ n.º negativo}$$

$$2.^{\circ} \dots \times \text{ n.º negativo } = \text{ n.º positivo}$$

$$3.^{\circ} \text{ n.º negativo } \times \dots = \text{ n.º positivo}$$

$$4.^{\circ} \dots \times \text{ n.º positivo } = \dots$$

$$5.^{\circ} \dots \times \text{ n.º negativo } = \dots$$

$$6.^{\circ} \text{ n.º positivo } \times \dots = \text{ n.º negativo}$$

$$7.^{\circ} \dots \times \dots = \dots$$

5. Verificar se é V ou F cada uma das seguintes sentenças:

$$1.^{\circ} |-3 \times -4| = |-3| \times |-4| \quad \text{Modêlo: } \begin{array}{l} |-3 \times -4| = |-3| \times |-4| \\ \underbrace{|+12|} = \underbrace{3 \times 4} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 12 \qquad \qquad \qquad 12 \quad (V) \end{array}$$

$$2.^{\circ} |-3 \times -4| < |-3| \times |-4| \quad \text{Modêlo: } \dots 12 < 12 \quad (F)$$

$$3.^{\circ} |-5 \times +3| = |-5| \times |+3|$$

$$4.^{\circ} |-5 \times +3| < |-5| \times |+3|$$

$$5.^{\circ} |-5 \times +3| > |-5| \times |+3|$$

6.º O elemento neutro da multiplicação de números relativos é o -1.

7.º O elemento neutro da multiplicação de números relativos é o +1.

8.º $-5 \times +3 = +3 \times -5$ pela p.c.m.

9.º $-3 \times +5 = +5 \times -3$ pela p.a.m.

DIVISÃO

12. Conceito

A relação existente entre a divisão e a multiplicação de números inteiros relativos é a *mesma* que você conhece para a multiplicação e a divisão de números inteiros aritméticos, isto é, são *operações inversas*:

$$\square : \Delta = \star \iff \star \times \Delta = \square$$

\square , Δ ($\neq 0$) e \star são numerais de números inteiros relativos

Que significa efetuar: $-8 : +4 = ?$

Significa: procurar o número inteiro relativo (denominado *quociente*) que, multiplicado por $+4$, dá como resultado -8 . Nesse exemplo o *quociente*, se existir, deverá ser *negativo* (lembre-se que $n.^\circ$ negativo \times $n.^\circ$ positivo = $n.^\circ$ negativo) e o seu *valor absoluto*, 2, pois: $-2 \times +4 = -8$. Logo:

$$-8 : +4 = -2$$

podendo-se escrever a equivalência:

$$-8 : +4 = -2 \iff -2 \times +4 = -8$$

Outros exemplos:

$+8 : +4 = +2$	por quê?
$+8 : -4 = -2$	por quê?
$-8 : -4 = +2$	por quê?

permitirão *concluir* que:

$n.^\circ$ positivo	:	$n.^\circ$ positivo	=	$n.^\circ$ positivo
$n.^\circ$ positivo	:	$n.^\circ$ negativo	=	$n.^\circ$ negativo
$n.^\circ$ negativo	:	$n.^\circ$ positivo	=	$n.^\circ$ negativo
$n.^\circ$ negativo	:	$n.^\circ$ negativo	=	$n.^\circ$ positivo

e que o *valor absoluto* do *quociente* de dois números inteiros relativos, dados numa certa ordem, e com o segundo diferente de zero, é igual ao *quociente* dos números dados.

NECESSIDADE DA CRIAÇÃO DE NOVOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

No I_r , pode *não existir* o quociente de dois números inteiros relativos, como por exemplo:

$$-3 : +4 = ?$$

Então, seguindo a mesma "marcha" que você já aprendeu, deverão ser "criados" os números *fracionários relativos* $\left(\frac{-3}{+4}\right)$ que, juntamente com os números inteiros relativos, constituirão o *conjunto dos números racionais relativos* Q_r .

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 50

1. Efetuar as seguintes divisões:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. ^a) $-6 : +3$ | 7. ^a) $+1 : -1$ |
| 2. ^a) $-8 : -1$ | 8. ^a) $(-7 : +7) : -1$ |
| 3. ^a) $+200 : -2$ | 9. ^a) $(+8 : -8) : (-4 : +4)$ |
| 4. ^a) $0 : +3$ | 10. ^a) $-120 : [-8 : (+4 : -2)]$ |
| 5. ^a) $+12 : -12$ | 11. ^a) $0 : [-5 : (+4 : -4)]$ |
| 6. ^a) $-12 : +12$ | 12. ^a) $[(-1 : +1) : (+1 : -1)] : -1$ |

2. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas (ou seja, o numeral mais simples que a representa):

NOTA: Para êsse *cálculo*, foi suprimido o sinal $+$ do numeral que representa o número inteiro positivo.

- 1.^a) $(-48 + 36) : -3$
- 2.^a) $(4 \times -3 - 8) : (1 + 3 \times -2)$
- 3.^a) $[5 - (3 - 4)] : -2$
- 4.^a) $[(8 - -1) : -1] : 9$

3. Preencher os claros nas seguintes igualdades simbólicas:

- 1.^a) $n.^\circ$ negativo : = $n.^\circ$ positivo
- 2.^a) : $n.^\circ$ positivo = $n.^\circ$ negativo
- 3.^a) : =
- 4.^a) $n.^\circ$ positivo : $n.^\circ$ negativo =
- 5.^a) : = $n.^\circ$ positivo
- 6.^a) : = $n.^\circ$ negativo

NOVIDADE: Potência indicada do expoente NEGATIVO!

Pode acontecer que, na divisão de potências indicadas de mesma base, o expoente da primeira potência seja *menor* que o da segunda. Então surgirá como expoente um número inteiro *negativo*. Assim, por exemplo:

$$(+4)^3 : (+4)^5 = (+4)^{3-5} = (+4)^{-2}$$

$$(-3)^1 : (-3)^4 = (-3)^{1-4} = (-3)^{-3} \quad \text{NOVIDADE!}$$

Essas potências — tão “importantes” quanto as outras — terão, logo mais, um significado relacionado com a estrutura à qual pertencem.

3.º $[(-3)^2]^4 = (-3)^{2 \times 4} = (-3)^8$ (para *eleva* uma potência indicada a uma potência, *multiplicam-se* os expoentes...)

4.º $\left\{ \begin{array}{l} [(-2) \times (+3)]^2 = (-2)^2 \times (+3)^2 \\ [(+8) : (-2)]^3 = (+8)^3 : (-2)^3 \end{array} \right\}$ (... propriedade *distributiva*...)

Um bom exercício sobre as propriedades da potenciação: *justificar* que $a^0 = 1$ ($a \neq 0$). Temos:

$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$, então: $a^0 \times a^n = a^n$, que é uma *igualdade* que subsiste se, e somente se: $a^0 = 1$!

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 51

1. Escrever, sob forma de potência indicada:

1.º $(-3) \times (-3) = \dots$

4.º $0 \times 0 \times 0 = \dots$

2.º $(+5) \times (+5) \times (+5) = \dots$

5.º $(+10) \times (+10) \times (+10) \times (+10) = \dots$

3.º $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \dots$

6.º -5

2. Calcular os valores das seguintes potências indicadas:

1.º $(-2)^3$

2.º $(+4)^2$

3.º $(-1)^{10}$

4.º $(-1)^{99}$

5.º $(+1)^{100}$

6.º $(+3)^0$

7.º $(-78)^1$

8.º $(-5)^3$

9.º $(+2)^5$

10.º $(-13)^2$

3. Verificar se é V ou F cada uma das seguintes sentenças:

1.º $|(-3)^2| = (|-3|)^2$

3.º $|(-1)^3| \geq (|-1|)^3$

2.º $|(-3)^2| < (|-3|)^2$

4.º $|0^4| = (|0|)^4$

4. Efetuar:

1.º $(-1)^3 \times (-1)^5$

7.º $(+12)^4 : (+12)^2$

2.º $(+8)^1 \times (+8)^2 \times (+8)^5$

8.º $(-6)^3 : (-6)^2$

3.º $(-3)^2 \times (-3) \times (-3)^3 \times (-3)^0 \times (-3)^4$

9.º $(-6)^3 : (-6)^3$

4.º $(-2)^4 \times (-2)^3$

10.º $(-6)^2 : (-6)^3$

5.º $(+5)^0 \times (+5)^3 \times (+5) \times (+5)$

11.º $(+9)^1 : (+9)^0$

6.º $a^n \times a^m$ ($a \neq 0$)

12.º $a^n : a^m$ ($a \neq 0$)

Modelo: 1.º $(-1)^3 \times (-1)^5 = (-1)^{3+5} = (-1)^8 = +1$

5. Efetuar:

1.º $[(-2)^3]^4$

2.º $[(+1)^8]^{10}$

3.º $[(-2)^1]^5$

4.º $[(-15)^0]^8$

6. Efetuar:

1.º $[(-3) \times (+2)]^4$

3.º $[(-8) : (+4)]^2$

2.º $[(+8)^2 \times (-1)^3]^2$

4.º $[(-1)^2 : (+1)^8]^{125}$

7. Calcular o valor de cada uma das seguintes expressões numéricas:

1.º $(-2)^5 - (+3)^2 \times (-1)^8$

2.º $[(+7)^2 - [(+3)^3 + (-1)^8] \times (-2)^2] \times (-3)^0$

RADICIAÇÃO

14. Conceito

Por se tratar de uma operação “delicada” a *radiciação* de números inteiros relativos será estudada com mais pormenores adiante. Todavia, qual é o resultado de:

1) $\sqrt{+9} = ?$ 2) $\sqrt{-9} = ?$ 3) $\sqrt[3]{-1} = ?$ 4) $\sqrt[3]{+1} = ?$

1) Se você usar a *equivalência* que relaciona a *potenciação* com sua operação inversa, a *radiciação*, poderá escrever, para o primeiro exemplo:

$$\sqrt{+9} = \square \iff \square^2 = +9$$

e, como:

$$(+3)^2 = +9 \text{ e } (-3)^2 = +9$$

segue-se que existem **dois** valores que tornam a sentença $\sqrt{+9} = \square$ verdadeira, isto é:

$$\square = +3 \text{ e } \square = -3$$

NOVIDADE: Você encontrou dois resultados para o cálculo de $\sqrt{+9}$: +3 ou -3

2) Com $\sqrt{-9}$, teremos:

$$\sqrt{-9} = \square \Leftrightarrow \square^2 = -9$$

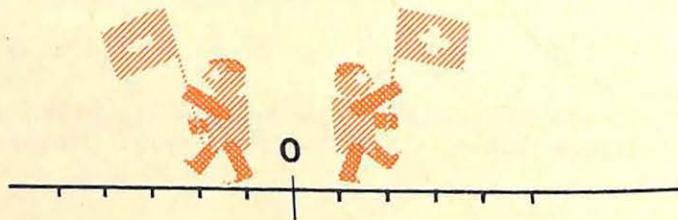
Porém, você sabe que: se o expoente da potência indicada de um número inteiro relativo (positivo ou negativo) for *par* (como é o caso de \square^2), então o resultado é *sempre* um número relativo *positivo*. Logo, a sentença:

$\square^2 = -9$ continua *aberta* no conjunto I_r . Portanto, a sua *equivalente* $\sqrt{-9} = \square$ também está *aberta* em I_r .

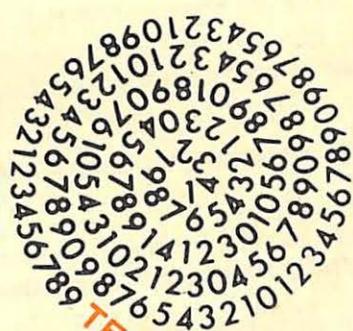
Logo: $\sqrt{-9} \notin I_r$. Mais tarde, quando você conhecer *novos conjuntos de números*, então essa sentença poderá ser *verdadeira* em novo conjunto tomado como *universo de trabalho*(*).

3) e 4). Pesquise, como exercício, os resultados de:

$$\sqrt[3]{-1} \text{ e } \sqrt[3]{+1}$$

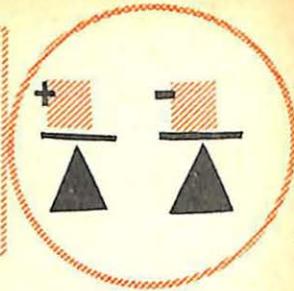


(*) Trata-se do conjunto \mathbb{C} dos números complexos.



Números racionais relativos.
Propriedades estruturais.

Números racionais relativos.



1. Conceito de número racional relativo

Considerados dois números inteiros aritméticos, como, por exemplo, 3 e 5, chama-se *número racional relativo* ao *quociente indicado* entre eles, cujo numeral possui o "mais qualificativo" ou o "menos qualificativo". Assim:

$$+\frac{3}{5} \text{ e } -\frac{3}{5}$$

exprimem dois *números racionais relativos*: $+\frac{3}{5}$ (racional positivo) e $-\frac{3}{5}$ (racional negativo).

Às vezes um numeral *mais simples* ou sob forma *mais conveniente*, pode estar representando um número racional relativo. Exemplos:

$-\frac{8}{4} = -2$ indica que o número racional relativo é um número inteiro negativo

$+\frac{6}{1} = +6$ indica que o número racional relativo é um número inteiro positivo

$-\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} = -0,5$ indica que o número racional relativo é um número fracionário (decimal) negativo

Que representam expressões tais como:

$$\frac{+8}{+4}, \frac{+8}{-4}, \frac{-8}{+4}, \frac{-8}{-4} ?$$

Levando-se em conta o "sinal qualificativo" do numeral que representa o *quociente indicado* dos números relativos que figuram no "numeral" e "denominador", você pode sempre escrevê-las:

$$\frac{+8}{+4} = \frac{+8}{4}, \quad \frac{+8}{-4} = -\frac{8}{4}, \quad \frac{-8}{+4} = -\frac{8}{4}, \quad \frac{-8}{-4} = \frac{+8}{4}$$

isto é, sempre sob as duas formas: $+\frac{8}{4}$ ou $-\frac{8}{4}$ com que aparecem os números racionais relativos.

Portanto: qualquer número racional relativo pode ser representado por uma das duas formas:

$$+\frac{\square}{\Delta} \text{ ou } -\frac{\square}{\Delta}$$

onde \square e Δ podem ser substituídos por números inteiros aritméticos, com exceção de $\Delta = 0$; $+\frac{\square}{\Delta}$ é chamado número racional POSITIVO e $-\frac{\square}{\Delta}$ número racional NEGATIVO.

Indicação do conjunto dos números racionais relativos: Q_r . Exemplos: se $\square = 3$ e $\Delta = 5$, teremos os números racionais relativos:

$$+\frac{3}{5} \text{ (positivo) e } -\frac{3}{5} \text{ (negativo); portanto: } +\frac{3}{5} \in Q_r \text{ e } -\frac{3}{5} \in Q_r$$

NOTA: Para simplificar o cálculo, pode-se suprimir o sinal qualificativo + do numeral que representa o número racional positivo. Assim, escreve-se $\frac{3}{5}$ ao invés de $+\frac{3}{5}$.

se $\square = 8$ e $\Delta = 4$, teremos os números racionais relativos:

$$\left. \begin{array}{l} +\frac{8}{4} \text{ (positivo) e } -\frac{8}{4} \text{ (negativo) } \\ \text{ou} \\ +2 \quad \quad \quad \text{e } -2 \end{array} \right\} \text{ portanto: } +2 \in Q_r \text{ e } -2 \in Q_r$$

Que aconteceria se você substituísse Δ por 1?

Encontraria os números racionais relativos:

$$+\frac{\square}{1} = +\square \text{ e } -\frac{\square}{1} = -\square$$

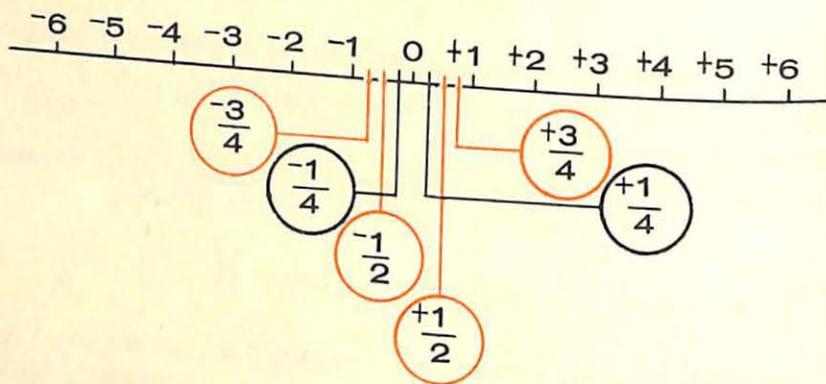
que são números inteiros relativos. Este fato permite dizer que o conjunto I_r está contido no conjunto Q_r , ou que I_r é um subconjunto de Q_r e escrever:

$$I_r \subset Q_r$$

NOTA: O conjunto Q dos números racionais, já estudado, também é denominado: conjunto dos números racionais absolutos ou racionais aritméticos, para distingui-lo do conjunto Q_r .

2: Representação geométrica

A reta numerada, sobre a qual já foram representados geomêtricamente todos os números racionais aritméticos (inteiros ou fracionários), permitirá agora representar todos os números racionais relativos (inteiros ou fracionários):



À direita de 0 situam-se os pontos correspondentes aos números racionais *positivos* e, à esquerda de 0, os *negativos*. Por se tratar de um conjunto *denso* contentamo-nos, na indicação usual de conjunto, em usar as reticências para ressaltar que é um conjunto infinito:

$$Q_r = \{ \dots -4 \dots -3,5 \dots -3 \dots -2,5 \dots -2 \dots -1 \dots 0 \dots +1 \dots +1,5 \dots +2 \dots +2,5 \dots +3 \dots +3,5 \dots +4 \dots \}$$

TFSTE DE ATENÇÃO — GRUPO 52

Substituir em $\frac{+\square}{\Delta}$ e $\frac{-\square}{\Delta}$, \square e Δ pelos valores indicados e escrever os números racionais relativos obtidos:

$$1.^{\circ} \begin{cases} \square = 4 \\ \Delta = 2 \end{cases}$$

$$2.^{\circ} \begin{cases} \square = 13 \\ \Delta = 1 \end{cases}$$

Ex. modelo: $\frac{+\square}{\Delta} = \frac{+4}{2} = +2$; $\frac{-\square}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2$

$$3.^{\circ} \begin{cases} \square = 5 \\ \Delta = 100 \end{cases}$$

$$4.^{\circ} \begin{cases} \square = 1 \\ \Delta = 2 \end{cases}$$

$$5.^{\circ} \begin{cases} \square = 0 \\ \Delta = 5 \end{cases}$$

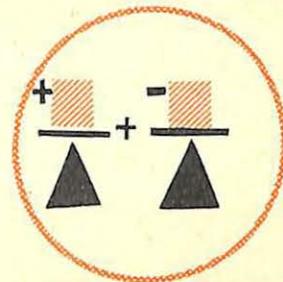
$$6.^{\circ} \begin{cases} \square = 6 \\ \Delta = 6 \end{cases}$$

$$7.^{\circ} \begin{cases} \square = 3 \\ \Delta = 10 \end{cases}$$

$$8.^{\circ} \begin{cases} \square = n \\ \Delta = m \quad (m \neq 0) \end{cases}$$

$$9.^{\circ} \begin{cases} \square = p \\ \Delta = q \quad (q \neq 0) \end{cases}$$

$$10.^{\circ} \begin{cases} \square = 0 \\ \Delta = b \quad (b \neq 0) \end{cases}$$



Operações com números racionais relativos

Propriedades estruturais

No conjunto dos números racionais relativos (Q_r) são sempre *possíveis* as operações: *adição*, *subtração*, *multiplicação*, *divisão* (com o divisor diferente de zero) de dois números racionais relativos quaisquer.

Isto quer dizer que essas operações em Q_r gozam da propriedade do *fechamento* ou, em outras palavras, que o conjunto Q_r é *fechado* em relação a tais operações, cujas *técnicas de cálculo* você acompanhará facilmente por intermédio dos exemplos que serão estudados.

E com relação às operações: *potenciação* e *radiciação*?

No Q_r nem sempre é possível realizá-las, como você irá ver. Então, continuando a mesma "marcha" — a que você já está acostumado, estudando Matemática — serão criados "novos" números para dotar essas operações da propriedade do *fechamento*.

Adição e subtração

Exemplos-modêlo:

$$1.^{\circ}) \quad \frac{-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-3+2}{4} = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

$$2.^{\circ}) \quad 8 - \frac{-2}{5} = \frac{40-2}{5} = \frac{40+2}{5} = \frac{42}{5} = \boxed{8 \frac{2}{5}}$$

$$3.^{\circ}) \quad 2 \frac{1}{2} + -1 \frac{1}{3} = \frac{5}{2} + \frac{-4}{3} = \frac{15-8}{6} = \frac{7}{6} = \boxed{1 \frac{1}{6}}$$

$$4.^{\circ}) \quad -3,5 - (1,2 + -0,01) = -3,5 - (1,2 - 0,01) = -3,5 - +1,19 = -3,5 + -1,19 = \boxed{-4,69}$$

Multiplicação e divisão

Exemplos-modêlo:

$$1.^{\circ}) \quad -3 \times \frac{-1}{15} = \frac{+3}{15} = \boxed{\frac{+1}{5}}$$

$$2.^{\circ}) \quad \frac{1}{2} \times \frac{-2}{3} = \boxed{\frac{-1}{3}}$$

$$3.^{\circ}) \quad -4 : \frac{2}{3} = -4 \times \frac{3}{2} = \frac{-12}{2} = \boxed{-6}$$

$$4.^{\circ}) \quad -3 \frac{1}{2} : 0,5 = \frac{-7}{2} : \frac{5}{10} = \frac{-7}{2} \times \frac{10}{5} = \boxed{-7}$$

Potenciação — Interpretação de “nova” potência

Exemplos-modêlo:

$$1.^{\circ}) \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$$

$$3.^{\circ}) \quad \left(-2 \frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right)^4 = \frac{+625}{16} \text{ ou } \frac{625}{16}$$

$$2.^{\circ}) \quad (+0,5)^2 = +0,25 \text{ ou } 0,25 \quad 4.^{\circ}) \quad (-0,333\dots)^3 = \left(\frac{-3}{9}\right)^3 = \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = \frac{-1}{27}$$

Vamos, agora, interpretar na Q_r as potências indicadas de expoente inteiro negativo. Basta lembrar as propriedades conhecidas que constarão dos seguintes exemplos:

$$1.^{\circ}) \quad (+4)^{-2} = (+4)^{0-2} = (+4)^0 : (+4)^2 = 1 : (+4)^2 = \frac{+1}{4^2} \text{ ou } \frac{1}{4^2}$$

$$2.^{\circ}) \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{0-3} = \left(\frac{-1}{2}\right)^0 : \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = 1 : \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^3}$$

$$\text{De um modo geral: } \square^{-n} = \square^{0-n} = \square^0 : \square^n = 1 : \square^n = \frac{1}{\square^n}$$

Logo: se \square representa um número racional relativo e n um número inteiro aritmético, então:

$$\square^{-n} = \frac{1}{\square^n}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 53

Calcular o valor das seguintes expressões:

$$1.^{\circ}) \quad \frac{-3}{4} + \frac{2}{5} \times -10$$

$$\text{Temos: } \frac{-3}{4} + \frac{2}{5} \times -10 = \frac{-3}{4} + -4 = \frac{-3-16}{4} = \frac{-19}{4} = \boxed{-4 \frac{3}{4}}$$

$$2.^{\circ}) \quad (-0,222\dots)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

$$\text{Temos: } (-0,222\dots)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-2}{9}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{+4}{81} \times \frac{1}{16} = \frac{4}{81} \times \frac{81}{16} = \frac{1}{4}$$

$$3.^a) \left[\left(-2 + \frac{1}{3} \right) \times \frac{-3}{4} + \left(\frac{-1}{2} \right)^2 : 3 \right] \times 2^{-3}$$

Temos, efetuando em partes:

$$* -2 + \frac{1}{3} = \frac{-6 + 1}{3} = \frac{-5}{3} \quad ** \left(\frac{-1}{2} \right)^2 : 3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Portanto: } \left[\left(-2 + \frac{1}{3} \right) \times \frac{-3}{4} + \left(\frac{-1}{2} \right)^2 : 3 \right] \times 2^{-3} = \left[\frac{-5}{3} \times \frac{-3}{4} + \frac{1}{12} \right] \times \frac{1}{2^3} = \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{12} \right] \times \frac{1}{8} = \frac{16}{12} \times \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 54

1. Efetuar as seguintes expressões:

$$1.^a) -7 + \frac{-1}{2}$$

$$2.^a) \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 8$$

$$3.^a) 1 - \frac{-3}{5}$$

$$4.^a) 1,8 + -3,222 \dots$$

$$5.^a) -0,333 \dots \times -3$$

$$6.^a) 3 \frac{1}{4} \times -0,2$$

$$7.^a) -2 \frac{1}{5} - 0,01$$

$$8.^a) \frac{-3}{6} \times \frac{1}{2} \times -12$$

$$9.^a) \frac{4}{3} : -4$$

$$10.^a) 5 : \left(-3 + \frac{-1}{4} \right)$$

$$11.^a) \left(\frac{1}{2} : -0,2 \right) : -2$$

$$12.^a) (1 - -1) : -1$$

2. Calcular as seguintes potências indicadas:

$$1.^a) \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$2.^a) (-0,111 \dots)^2$$

$$3.^a) (-2)^{-1}$$

$$4.^a) 3^{-2}$$

$$5.^a) 4^{-4}$$

$$6.^a) (-1)^{-10}$$

$$7.^a) \left(\frac{-1}{3} \right)^{-2}$$

$$8.^a) 8^{-3}$$

$$9.^a) \left(-3 \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

$$10.^a) (50)^0$$

3. Usando as propriedades da potenciação, calcular:

$$1.^o) 3^{-4} \times 3^{-2}$$

$$2.^o) (-5)^{-3} : (-5)^4$$

$$3.^o) [(-4)^2]^{-3}$$

$$4.^o) (3^{-2} \times 3)^{-2}$$

$$4. \text{ Idem: } 1.^o) [\square^{-n}]^m \quad 2.^o) \left[\frac{\square^n}{\square^m} \right]^{-p}$$

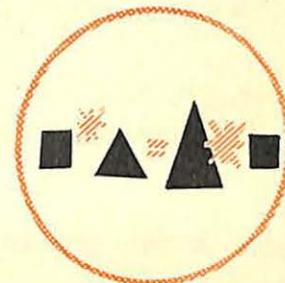
5. Calcular o valor das seguintes expressões:

$$1.^a) \left(\frac{-3}{4} \right)^2 - \left[2,5 - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \times 3^{-2} \right]$$

$$2.^a) \frac{-1 - \frac{2}{3}}{4 \times \frac{-2}{5}} : \left(\frac{-1}{3} \right)^{-1}$$

$$3.^a) \left\{ (-2)^2 \times \left[\frac{1}{2} - \left(-1 + \frac{-4}{5} \right) \right] \right\} \times \left(\frac{-56}{10} \right)^{-1}$$

$$4.^a) [(2,5 + -3) + (-3,2)^{-2} \times -1] : (-1,555 \dots)^0$$



Propriedades estruturais da adição e da multiplicação no conjunto Q_r

Com relação às operações *adição* e *multiplicação* de números racionais relativos, valem as seguintes *propriedades estruturais* no Q_r :

1.^a) FECHAMENTO:

$$\text{Exs.: } \begin{array}{ccc} \frac{-3}{4} + 5 = \frac{17}{4} & \begin{array}{l} \nearrow \text{n.º racional} \\ \searrow \text{relativo;} \end{array} & \frac{-3}{4} \times 5 = \frac{-15}{4} & \begin{array}{l} \nearrow \text{n.º racional} \\ \searrow \text{relativo} \end{array} \\ \begin{array}{l} \swarrow \text{n.º racional} \\ \searrow \text{relativo} \end{array} & & \begin{array}{l} \swarrow \text{n.º racional} \\ \searrow \text{relativo} \end{array} & & \begin{array}{l} \swarrow \text{n.º racional} \\ \searrow \text{relativo} \end{array} \end{array}$$

Em linguagem simbólica:

$$\text{se } \frac{+a}{b} \in Q_r \text{ e } \frac{-c}{d} \in Q_r \text{ então } \begin{cases} \left(\frac{+a}{b} + \frac{-c}{d} \right) \in Q_r \text{ (p.f.a.)} \\ \left(\frac{+a}{b} \times \frac{-c}{d} \right) \in Q_r \text{ (p.f.m.)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} b \neq 0 \\ d \neq 0 \end{array}$$

2.^a) COMUTATIVA:

Exs.: $-\frac{3}{4} + 5 = 5 + -\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{4} \times 5 = 5 \times -\frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica:

$$\frac{+a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{-c}{d} + \frac{+a}{b} ; \frac{+a}{b} \times \frac{-c}{d} = \frac{-c}{d} \times \frac{+a}{b}$$

(p.c.a.) (p.c.m.)

3.^a) ELEMENTO NEUTRO:

0 para a *adição*. Ex.: $-\frac{3}{4} + 0 = -\frac{3}{4}$; $\frac{-a}{b} + 0 = 0 + \frac{-a}{b} = \frac{-a}{b}$

(e.n.a.)

1 para a *multiplicação*. Ex.: $-\frac{3}{4} \times 1 = -\frac{3}{4}$; $\frac{-a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{-a}{b} = \frac{-a}{b}$

(e.n.m.)

4.^a) ELEMENTO INVERSO:

na *adição*: para qualquer n.º racional relativo $\frac{-a}{b}$ ($b \neq 0$) existe um (e.i.a.) único n.º racional relativo: $\frac{+a}{b}$ (denominado **inverso aditivo**) tal que:

$$\frac{-a}{b} + \frac{+a}{b} = 0 \text{ (elemento neutro) Ex.:}$$

para o n.º racional relativo: $-\frac{3}{4}$ existe o n.º racional relativo $+\frac{3}{4}$ tal que: $-\frac{3}{4} + \frac{+3}{4} = 0$

na *multiplicação*: para qualquer n.º racional relativo $\frac{-a}{b}$ ($b \neq 0$) existe um único n.º racional relativo: $\frac{-b}{a}$ (denominado **inverso multiplicativo**) tal que:

$$\frac{-a}{b} \times \frac{-b}{a} = 1 \text{ (elemento neutro).}$$

Ex.:

para o n.º racional relativo: $-\frac{3}{4}$ existe o n.º racional relativo $-\frac{4}{3}$ tal que: $-\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = 1$

NOTA: No caso de o conjunto ser o Q_r^* , isto é, o conjunto dos números racionais sem o 0, então não é necessário fazer exceção alguma para o elemento $\frac{-a}{b} \in Q_r^*$.

5.^a) ASSOCIATIVA:

Exs.: $\left(-\frac{3}{4} + 5\right) + -\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \left(5 + -\frac{1}{2}\right)$

$$\left(-\frac{3}{4} \times 5\right) \times -\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \times \left(5 \times -\frac{1}{2}\right)$$

Em linguagem simbólica:

$$\left(\frac{-a}{b} + \frac{+c}{d}\right) + \frac{-e}{f} = \frac{-a}{b} + \left(\frac{+c}{d} + \frac{-e}{f}\right) \text{ (p.a.a.)}$$

$$\left(\frac{-a}{b} \times \frac{+c}{d}\right) \times \frac{-e}{f} = \frac{-a}{b} \times \left(\frac{+c}{d} \times \frac{-e}{f}\right) \text{ (p.a.m.)}$$

6.^a) DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO:

Ex.: $-\frac{2}{3} \times (5 + -0,4) = -\frac{2}{3} \times 5 + -\frac{2}{3} \times -0,4$

Em linguagem simbólica:

$$\frac{-a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{-e}{f}\right) = \frac{-a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{-a}{b} \times \frac{-e}{f}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 55

1. Assinalar qual é a propriedade aplicada em cada uma das seguintes igualdades, verdadeiras no conjunto Q_r :

1.ª) $+5 + -5 = 0$

6.ª) $-\frac{6}{5} \times 1 = -\frac{6}{5}$

2.ª) $-3,5 + 0 = 3,5$

7.ª) $(1,8 \times -\frac{1}{2}) \times 3 = 1,8 \times (-\frac{1}{2} \times 3)$

3.ª) $\frac{24}{3} + -1 = -1 + \frac{24}{3}$

8.ª) $-\frac{3}{2} \times -\frac{2}{3} = 1$

4.ª) $\frac{2}{7} + -\frac{2}{7} = 0$

9.ª) $8,5 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 8,5$

5.ª) $2\frac{1}{5} \times (-3 + \frac{1}{2}) = 2\frac{1}{5} \times -3 + 2\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

10.ª) $(-0,01 + 1) + -\frac{1}{3} = -0,01 + (1 + -\frac{1}{3})$

2. Dar o nome da operação, da propriedade dessa operação e o nome do respectivo conjunto, onde tal propriedade é verdadeira:

1.º (Exemplo-módulo): Se $\frac{a}{b} \in Q_r$ e $\frac{c}{d} \in Q_r$, então $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \in Q_r$
 ($b \neq 0$) ($d \neq 0$)

operação: multiplicação; propriedade: fechamento; conjunto: n.ºs racionais relativos

2.º Se $\frac{n}{m} \in Q_r$ e $\frac{p}{q} \in Q_r$, então $(\frac{n}{m} + \frac{p}{q}) \in Q_r$
 ($m \neq 0$) ($q \neq 0$)

3.º Se $x \in Q^*$, então existe $\frac{1}{x} \in Q^*$, tal que: $x \times \frac{1}{x} = 1$

4.º Se $-\frac{m}{2} \in Q_r$, então existe $+\frac{m}{2} \in Q_r$, tal que: $-\frac{m}{2} + +\frac{m}{2} = 0$

5.º Se $\frac{a}{b} \in Q_r$ e $\frac{c}{d} \in Q_r$, então: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$
 ($b \neq 0$) ($d \neq 0$)

6.º Se $x \in Q_r$, $y \in Q_r$, e $z \in Q_r$, então: $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

7.º Se $-a \in Q^*$, $b \in Q^*$, e $-c \in Q^*$, então: $(-a + b) + -c = -a + (b + -c)$

8.º Se $-\frac{a}{b} \in Q_r$, então existe $0 \in Q_r$, tal que: $-\frac{a}{b} + 0 = -\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)

Moderno tratamento
 Matemática

mas de equa
 as au
 equações e Ine
 SEGUNDA PA
 Relações Binári
 ntenças abe
 conjunto - U
 conjunto - Ver
 equações e Inec
 SEGUNDA P

IMEIRA PA

novos números
 números inteiros
 estrutura de or
 UNI.

Razões e Prop
 SEGUNDA P
 por cento; Por
 ta Numerar

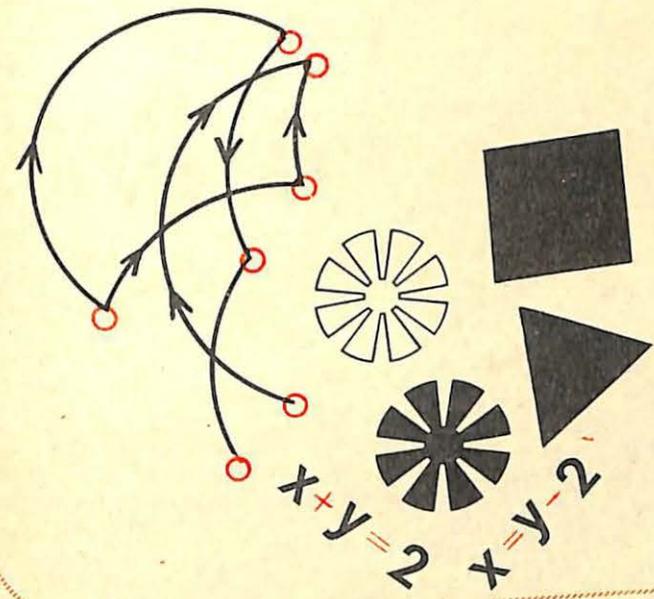
capítulo quatro



Moderno tratamento da
 Álgebra Elementar.
 Brasília é a capital do Brasil

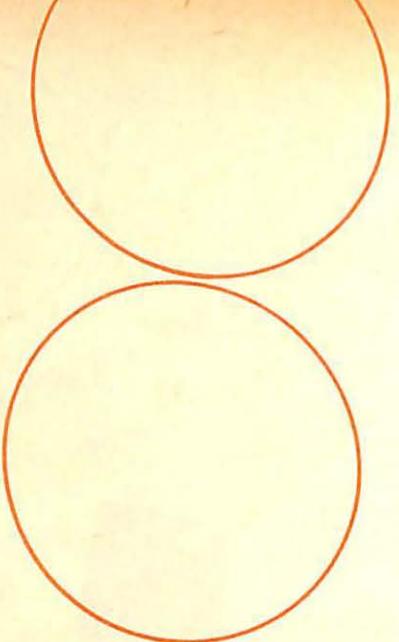
$3 + 5 = 8$
 $\square + 5 = 8$
 $x + 2 = 5$

PRIMEIRA PARTE:
 Sentenças e Expressões.
 Conjunto – Universo.
 Conjunto – Verdade.
 Equações e Inequações.



SEGUNDA PARTE:

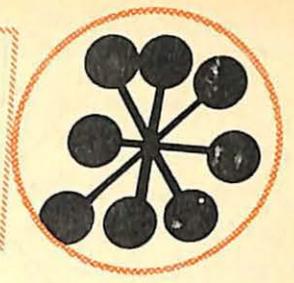
Relações Binárias.
 Sentenças abertas com duas variáveis.
 Sistemas de equações simultâneas.
 APENDICE



PRIMEIRA PARTE

Sentenças e Expressões.
Conjunto – Universo.
Conjunto – Verdade.
Equações e Inequações.

Moderno tratamento da Álgebra Elementar.



$$x + 2 = 5$$

Sentenças — Variável
Conjunto-Universo
Conjunto-Verdade

1. Sentenças e Expressões

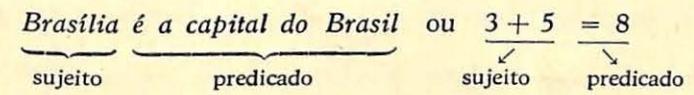
Até agora você tem tido uma boa experiência com *sentenças matemáticas*. Da mesma forma que em Português, as sentenças matemáticas exprimem um *pensamento completo*. Assim, por exemplo:

“Brasília é a capital do Brasil”

e

$$3 + 5 = 8$$

são *sentenças*(*), porque ambas exprimem um *pensamento completo* por possuírem *sujeito* e *predicado*. Observe:



Porém, se você disser (ou escrever) sômente:

$$\text{Brasília} \quad \text{ou} \quad 3 + 5$$

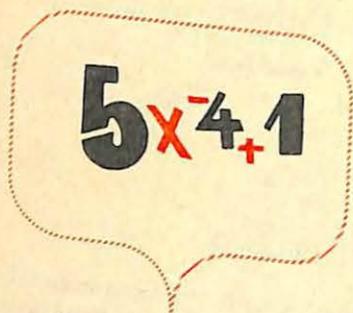
não estará exprimindo um pensamento completo; disse nesse caso uma *expressão*, quer em Português, quer em Matemática.

(*) Comumente denominadas *proposições*.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 56

Assinale com S as sentenças e com E as expressões:

- | | |
|---|--|
| 1. ^a) Ônibus | 8. ^a) $8 + \frac{1}{2}$ |
| 2. ^a) O ônibus 216 passa pelo Ginásio | 9. ^a) Zezé é minha amiga |
| 3. ^a) 2 | 10. ^a) $3 + 4 > 5$ |
| 4. ^a) $-2 < 0$ | 11. ^a) Pelé |
| 5. ^a) $(5 \times -3) : 9$ | 12. ^a) A diferença entre 4 e 5 |
| 6. ^a) Zezé | 13. ^a) O triângulo ABC é isósceles |
| 7. ^a) 4 é um número primo | 14. ^a) Pelé é o apelido de Edson Arantes do Nascimento |



2. Sentenças numéricas e Expressões numéricas

As sentenças e as expressões que dizem respeito a números são chamadas numéricas. Levando em conta os símbolos que você já conhece, as sentenças e as expressões numéricas podem ser escritas de uma maneira simplificada na chamada linguagem simbólica da Matemática. Exs.:

linguagem corrente

linguagem simbólica

- “um terço”
- “o quadrado de 9 é diferente de 80”
- “o produto de sete negativo por 5”
- “dois é um número inteiro”
- “um meio negativo não é número racional relativo”

- $\frac{1}{3}$
- $9^2 \neq 80$
- -7×5
- $2 \in I$
- $-\frac{1}{2} \notin Q$

Você também pode fazer a “operação inversa”, traduzindo as sentenças e as expressões numéricas da linguagem simbólica para a linguagem corrente:

linguagem simbólica

linguagem corrente

- -4
- $3 \leq 5$
- $8 - 3 > 5^2$
- $+2,5 \in Q$
- $4 \in \emptyset$

- “quatro negativo”
- “três é menor ou igual a cinco”
- “a diferença entre oito e três é maior que o quadrado de cinco”
- “dois e meio positivo é um número racional relativo (ou pertence ao conjunto dos números racionais relativos)”
- “quatro pertence ao conjunto vazio”

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 57

1. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes expressões e sentenças matemáticas:

- 1.^a) “O cubo de cinco negativo é vinte e cinco”
- 2.^a) “um quarto positivo”
- 3.^a) “cinco é um número natural”
- 4.^a) “zero não é número inteiro”
- 5.^a) “produto de três pelo oposto de cinco positivo”
- 6.^a) “o quadrado da soma de seis e três”
- 7.^a) “o quadrado da soma de seis e três não é um número racional relativo”
- 8.^a) “mil novecentos e sessenta e cinco é maior que um número negativo”
- 9.^a) “o quociente de vinte e quatro por três é igual à diferença entre o quadrado de três e o cubo de um”
- 10.^a) “a diferença entre oito e seu oposto não é um número racional aritmético”.

2. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes sentenças e expressões numéricas:

- | | |
|--|--|
| 1. ^a) $0 > -30$ | 6. ^a) $3 \in N$ |
| 2. ^a) $0,9 \notin Q$ | 7. ^a) $0 \in I$ |
| 3. ^a) $(5 - 8) > (4 : 2)$ | 8. ^a) $(8 - 5)^2 - \frac{1}{10}$ |
| 4. ^a) $(3 \times 5)^3$ | 9. ^a) $126 \times 0 \neq 126$ |
| 5. ^a) $(\frac{1}{2} + 2^4) \notin I$ | 10. ^a) $(\frac{1}{2} + 5) \in I$ |

3. Sentenças verdadeiras e sentenças falsas

A informação que toda sentença traz pode ser: verdadeira (V) ou falsa (F). Os valores V ou F são os únicos que as sentenças(*) podem assumir. Assim, por exemplo:

Brasília é a capital do Brasil tem valor V

$3 + 5 = 8$ tem valor V

$2 + 4 > 7$ tem valor F ($2 + 4 = 6!$)

O Brasil é tricampeão mundial de futebol tem valor F (que penal!)

$6 \in I$ tem valor V

$\frac{1}{2} \notin Q$ tem valor F ($\frac{1}{2}$ é um n.º racional relativo!)

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 58

Diga qual o valor de cada uma das seguintes sentenças, se V ou F :

1.ª) Todo brasileiro é casado

2.ª) $-8 + 5 < 0$

3.ª) $(9 + \frac{1}{2}) \in Q$

4.ª) Ester Bueno é a campeã mundial de tênis de 1964

5.ª) O Marechal Floriano proclamou a Independência do Brasil

6.ª) $5 \times -3 = -3 \times 5$

7.ª) Todo animal tem quatro pés

8.ª) $-6 + 0 = +0$

9.ª) $0,5 \in Q$

10.ª) zero é um número inteiro

11.ª) $5 \times (2 + 4) \neq 5 \times 2 + 5 \times 4$

12.ª) $3 \in \emptyset$

13.ª) A Lua é um satélite de Vênus

14.ª) $(5 + 3)^2 = 5^2 + 3^2$

15.ª) A cidade de São Sebastião do Rio de Janeiro comemorou seu IV Centenário em 1965

(*) As sentenças que estamos estudando recebem, também, o nome de *proposições* ou *afirmações*, por assumirem definitivamente um valor V ou F .

4. Sentenças abertas; Variáveis

Considere as seguintes "sentenças":

(1) $\hat{E}le$ é aluno da 2.ª Série "A" de nosso Ginásio

(2) $\square + 5 = 8$

(3) $x < 3$

Serão V ou F ?

Você, agora, não poderá responder tão prontamente, a menos que seja informado de quem é $\hat{E}le$, ou \square , ou x . Tais sentenças dizem-se **abertas**.

Uma *sentença aberta* torna-se uma sentença no sentido que você conhece (ou seja, "fechada"), quando os símbolos: $\hat{E}le$, \square , x , ..., forem substituídos por nomes de *coisas definitivas*. Assim, se:

na sentença (1) " $\hat{E}le$ " fôr substituído por Joãozinho e você souber que Joãozinho é aluno da 2.ª Série "A" do Ginásio, então a sentença obtida tem valor V ;

na sentença (2) " \square " fôr substituído por 2, a sentença obtida é F (experimente!); se " \square " fôr substituído por 3, o valor é V (idem); se fôr substituído por 4, o valor é F , e assim por diante;

na sentença (3) " x " fôr substituído por -3 , o seu valor é V ; por 3 é F ; por 4 é F ; ... (Experimente ...)

Os símbolos: $\hat{E}le$, \square , x , ..., usados nas *sentenças abertas*, são chamados de **variáveis**.

Nas sentenças em Português, as *variáveis* são geralmente representadas pelos *pronomes* (" $\hat{e}le$ ", " ela ", ...), por outras *palavras*, como " tal ", " $alguém$ ", " $fulano$ ", ... ou por letras " X ", " Y ", ... e, em Matemática, freqüentemente, pelas letras do alfabeto latino (a , b , ..., x , y , z) ou também pelos *pronomerais* (*): \square , Δ , ..., todos "desconhecidos" ou "incógnitos".

(*) Por analogia com o nome *pronomes* (palavra que vai no lugar do *nome*), pode-se, agora, chamar *pronomeral* o símbolo que ocupa o lugar do *numeral* (sugestão de Max Beberman, do Grupo de Illinois — U.I.C.M. — E.U.A.).

Assinale as variáveis das seguintes sentenças abertas:

- 1.^a) Ela é minha prima
- 2.^a) $a + -2 = 0$
- 3.^a) Fulano forma-se no Ginásio este ano.
- 4.^a) $x - 1 \geq 5$
- 5.^a) $3 \times \square - 2 = 10$
- 6.^a) O herói da novela foi o Sr. "X".
- 7.^a) $3 < n$
- 8.^a) $\square^2 = 1$
- 9.^a) Êle é meu professor de Matemática
- 10.^a) $y = 9$
- 11.^a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = z$
- 12.^a) O ano tal é bissexto.

$$U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto — Universo.

5. Conjunto-Universo (U) — Conjunto-Verdade (V)

Considere, por exemplo, a seguinte sentença aberta:

O dia "X" é o dia da semana cujo nome começa por "s"

Os possíveis valores da variável "X" são:

domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado

que constituem, em Português, todas as possibilidades lógicas de "X", isto é, são todos os nomes possíveis para os dias que compõem a semana. O conjunto desses valores recebe o nome de *Conjunto-Universo* da variável "X". Indicação: U

Logo:

$$U = \{\text{domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}\}$$

Para que elementos de U a sentença proposta é verdadeira?

Você conclui, facilmente, que a sentença é V para os dias: segunda, sexta e sábado, cujos nomes começam por s, e F para os demais. O conjunto dos valores de U para os quais a sentença é V, denomina-se **Conjunto-Verdade** dessa sentença.

Indicação: V. Logo:

$$V = \{\text{segunda, sexta, sábado}\}$$

Resumindo:

Sentença aberta proposta: "O dia "X" é o dia da semana cujo nome começa por s"

Conjunto-Universo: $U = \{\text{domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}\}$

Conjunto-Verdade: $V = \{\text{segunda, sexta, sábado}\}$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: O Conjunto-Verdade de uma sentença aberta é sempre um *subconjunto* (está contido!) do Conjunto-Universo, isto é: $V \subset U$.

Supondo que não houvesse, em Português, dia da semana cujo nome começasse por s, então o Conjunto-Verdade seria *vazio* (\emptyset) e, mesmo assim: $\emptyset \subset U$, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto!

No caso de uma sentença numérica aberta o "comportamento" da variável é o mesmo: você tem o *Conjunto-Universo*, e dele "extrairá" o *Conjunto-Verdade* da sentença. Exemplos:

1.^o) $\square + 5 = 8$

O Conjunto-Universo da variável \square seria, naturalmente, o conjunto dos números racionais relativos (Q_r) que — por conter todos os conjuntos numéricos estudados até agora — apresenta o maior número de possibilidades lógicas de escolha.

Todavia, atendendo-se a certas exigências, pode-se tomar como *Conjunto-Universo qualquer conjunto*. Assim, se fôr escolhido para *Conjunto-Universo*, da sentença numérica proposta, o conjunto dos números inteiros aritméticos, isto é:

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$V = \{2\}$$

Conjunto — Verdade.

o Conjunto-Verdade de: $\square + 5 = 8$ é o conjunto unitário constituído pelo elemento 3, pois este é o único valor da variável \square que torna a sentença V . Logo:

$$V = \{3\}$$

(NOTA: Você pode determinar o valor de 3 para \square , por intermédio da operação inversa, subtração: $8 - 5 = 3$).

LEMBRETÊ AMIGO

O Conjunto-Verdade de uma sentença numérica aberta depende do Conjunto-Universo escolhido. Daí o fato de se escrever ao lado da sentença numérica aberta o Conjunto-Universo onde se irá trabalhar:

$$\square + 5 = 8, \quad U = I \\ V = \{3\}$$

2.º) $x + 5 = 3, \quad U = I$

Agora, você observa que não existe no conjunto I valor para x que, somado com 5, dê como resultado 3. Então o Conjunto-Verdade é vazio, isto é:

$$V = \emptyset$$

Porém, se:

3.º) $x + 5 = 3, \quad U = I,$

então existe o elemento -2 (experimente determinar pela operação inversa!). Logo:

$$V = \{-2\}$$

4.º) $y + \frac{1}{2} = 5, \quad U = Q$

O Conjunto-Verdade será formado pelo número $4 \frac{1}{2}$, isto é:

$$V = \left\{4 \frac{1}{2}\right\}$$

NOTA: Se for escolhido para "universo" um conjunto finito qualquer, então se atribuirá a tal conjunto o nome de Conjunto-Substituição. Indicação: S

Exemplos:

1. $x + 5 = 3, \quad S = \{0, 1, 2, 3\}$

$V = \emptyset$ (pois não há elemento em S que torne $x + 5 = 3$ verdadeira)

2. $x + 5 = 3, \quad S = \{0, -1, -2, -3\}$

$V = \{-2\}$ (agora o elemento -2, que torna a sentença verdadeira, é elemento de S)

5.º) $\Delta \times 2 = 8, \quad U = I$

$V = \{4\}$ (o valor de Δ é determinado pela operação inversa, divisão: $8 : 2 = 4$)

6.º) $\Delta \times 2 = 8, \quad U = Q$

$V = \{4\}$ (o Conjunto-Verdade ainda é constituído pelo número 4, que também é um número racional!)

7.º) $\square \times 3 = -5, \quad U = I$

$V = \emptyset$ (não há em I elemento que torne a sentença verdadeira; experimente ...)

8.º) $\square \times 3 = -5, \quad U = Q,$

$V = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ (o número $-\frac{5}{3}$, que é um número racional relativo, surge rapidamente pelo emprêgo da operação inversa: $-5 : 3 = -\frac{5}{3}$)

9.º $y : 2 = -4$, $U = I$

$V = \emptyset$ (... não há elemento em I que, dividido por 2, dê -4 ...)

10.º $y : 2 = -4$, $U = I_r$

$V = \{-8\}$ (... agora existe em I_r o elemento -8)

11.º $\square^2 = 9$, $U = I$

$V = \{3\}$ (... 3 é o elemento de I que, elevado ao quadrado, resulta 9, não é? ... Experimente)

12.º $\square^2 = 9$, $U = I_r$

$V = \{-3, +3\}$ (agora há, no conjunto I_r , dois elementos que tornam a sentença verdadeira: $(+3)^2 = 9$ e $(-3)^2 = 9$)

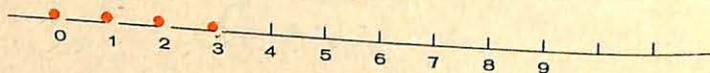
13.º $\Delta^3 = 8$, $U = I$

$V = \{2\}$ (... o valor de Δ que satisfaz à sentença é 2, pois: $2^3 = 8$; o conhecimento da operação inversa: $\sqrt[3]{8} = 2$, também ajuda ...)

14.º $x \leq 3$, $U = I$

$V = \{0, 1, 2, 3\}$ (agora, a sentença: $x \leq 3$, é verdadeira para uma "porção" de elementos de x que pertencem a I : 0, 1, 2 e 3)

interpretação geométrica na reta numerada:



15.º $x \leq 3$, $U = I_r$

$V = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ (... infinitos elementos de I_r tornam a sentença verdadeira, como você está "vendo" na reta numerada ...)



$U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$V = \{2\}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 60

- Nos seguintes exercícios são dados: uma sentença aberta com uma variável e o Conjunto-Universo da tal variável. Determinar o Conjunto-Verdade dessa sentença:
 - "Éle" é o ponta-direita do time brasileiro, Campeão Mundial de Futebol de 1962.
Conjunto-Universo: [Gilmar, Djalma, Mauro, Jurandir, Zito, Calvet, Garrincha, Didi, Vavá, Amarildo, Zagalo]
 - O planeta "Y" é o maior planeta do Sistema Solar.
Conjunto-Universo: [Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urânio, Netuno, Plutão]
 - O Estado "X" é o maior, em superfície, do Brasil.
Conjunto-Universo: [Amazonas, Pará, Maranhão, ..., Rio Grande do Sul]
 - O mês "tal" é de férias escolares no Brasil.
Conjunto-Universo: [janeiro, fevereiro, março, ..., novembro, dezembro]
 - "Este" é um dia da semana.
Conjunto-Universo: [domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado] (Atenção!)
 - "Ela" tem cabelos pretos.
Conjunto-Universo: todos os colegas de sua classe.

2. Determinar o *Conjunto-Verdade* (V), para cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, ao lado das quais figura o *Conjunto-Universo* (U), ou *Conjunto-Substituição* (S), onde deve achar-se a variável:

- | | |
|--|---|
| 1. ^a) $\square + 5 = 9, U = I$ | 21. ^a) $x - 2 = 5, U = I_r$ |
| 2. ^a) $\square + 5 = 9, U = Q$ | 22. ^a) $x : 3 = 6, U = I$ |
| 3. ^a) $\square + 5 = 9, S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ | 23. ^a) $x : -3 = 6, U = I_r$ |
| 4. ^a) $\square + 5 = 9, S = \{0, 1, 2, 3\}$ | 24. ^a) $\square + 2,5 = 6,2, U = Q$ |
| 5. ^a) $x - 2 = 8, U = I$ | 25. ^a) $\square + 2,5 = 6,2, S = \{2,3; 0,5; 4\}$ |
| 6. ^a) $x + 7 = 3, U = I$ | 26. ^a) $\square + 2,5 = 6,2, S = \{3,2; 3,5; 3,7\}$ |
| 7. ^a) $x + 7 = 3, U = I_r$ | 27. ^a) $x + \frac{-1}{2} = -8, U = I_r$ |
| 8. ^a) $x + 7 = 3, S = \{-5, -4, -3, -2\}$ | 28. ^a) $x + \frac{-1}{2} = -8, U = Q_r$ |
| 9. ^a) $x + 7 = 3, S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ | 29. ^a) $\square^2 = 16, U = I$ |
| 10. ^a) $\Delta - 5 = 1, U = I$ | 30. ^a) $\square^2 = 16, U = I_r$ |
| 11. ^a) $\square \times 3 = 12, U = I$ | 31. ^a) $\Delta^3 = \frac{-1}{8}, U = I_r$ |
| 12. ^a) $\square \times 2 = 5, U = I$ | 32. ^a) $\Delta^3 = \frac{-1}{8}, U = Q_r$ |
| 13. ^a) $\square \times 2 = 5, U = Q$ | 33. ^a) $x \leq 2, S = \{0, 1, 2\}$ |
| 14. ^a) $\square \times 2 = 5,$
$S = \left\{1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\right\}$ | 34. ^a) $x \leq 2, U = N$ (atenção!) |
| 15. ^a) $\square \times 2 = 5,$
$S = \left\{0, \frac{1}{2}, -1, \frac{-5}{2}\right\}$ | 35. ^a) $x \leq 2, U = I_r$ |
| 16. ^a) $x \times -3 = 8, U = I_r$ | 36. ^a) $z > 4, U = I_r$ |
| 17. ^a) $x \times -3 = 8, U = Q_r$ | 37. ^a) $z \geq 4, U = Q_r$ |
| 18. ^a) $x \times -3 = 8, S = \left\{\frac{-3}{8}, \frac{-8}{3}\right\}$ | 38. ^a) $z \geq 4, S = \{0, 1, 3, 5, 6, 7\}$ |
| 19. ^a) $5 \times \Delta = -1, U = Q_r$ | 39. ^a) $z \geq 4, S = \{-2, 0, +2\}$ |
| 20. ^a) $y + -3 = -6, U = I_r$ | 40. ^a) $x = x, U = I$ (atenção!) |

$$\square + 5 = 8$$

$$x + 2 = 5$$

Equações e Inequações.

6. Conceito

Em Matemática você trabalha, freqüentemente, com sentenças numéricas abertas do tipo:

$$\square + 3 = 5$$

$$2 \times \Delta = -8$$

$$5 \times x = x + 4$$

$$3 \times \square^2 = 75$$

que exprimem a *igualdade* entre duas *expressões* numéricas. Tais sentenças abertas são denominadas **equações**.

No caso de as sentenças numéricas abertas exprimirem *desigualdade* entre duas expressões numéricas, como:

$$x \geq 3$$

$$y < -4$$

$$3 \times \square \neq 6$$

recebem o nome de **inequações**.

As expressões numéricas que compõem as *equações* e as *inequações*, são denominadas, respectivamente: *primeiro membro* (ou membro à esquerda) e *segundo membro* (ou membro à direita). Exemplos:

$$\underbrace{5 \times x}_{1.^\circ \text{ membro}} = \underbrace{x + 4}_{2.^\circ \text{ membro}}$$

$$\begin{array}{cc} & y < -4 \\ \swarrow & & \searrow \\ 1.^\circ \text{ membro} & & 2.^\circ \text{ membro} \end{array}$$

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Teria $x = 2$ o mesmo significado que $2 = x$?

e $x > 2$ o mesmo significado que $2 > x$?

No primeiro caso SIM, pois, substituindo-se x por 2 na primeira equação, obtém-se: $2 = 2$; fazendo-se o mesmo na segunda: $2 = 2$. Ambas são verdadeiras. No segundo caso NÃO, pois, substituindo-se na primeira x por 5, por exemplo, obtém-se: $5 > 2$ (V) e, na segunda: $2 > 5$ (F). Logo:

na relação de igualdade, não tem importância trocar o membro da esquerda com o membro da direita;

na relação de desigualdade, tem importância trocar o membro da esquerda com o membro da direita;

you pode dizer, portanto, que a relação de igualdade é simétrica e a relação de desigualdade não é simétrica.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 61

1. Assinale quais, das seguintes sentenças numéricas abertas, são equações ou inequações:

1.ª) $x - 8 = 2$

7.ª) $n^3 \leq 8$

2.ª) $7 \times \square - 1 = 0$

8.ª) $3 \times x - 1 = 2$

3.ª) $3 \times y < 6$

9.ª) $2 \times \Delta + 1 = \Delta + 2$

4.ª) $x \neq -1$

10.ª) $\square^2 : 8 \neq 1$

5.ª) $y + 5 > -3$

11.ª) $\frac{1}{2} \times x < 3$

6.ª) $x^2 = 25$

12.ª) $y^2 - 5y + 6 > 0$

2. Têm o mesmo significado:

1.º) $\square = 5$ e $5 = \square$? Por quê?

2.º) $\Delta < 3$ e $3 < \Delta$? Por quê?

Equações do primeiro grau

7. Resolução de equações do primeiro grau com uma variável

Que é resolver uma equação?

Resolver uma equação, num certo Conjunto-Universo, é determinar o seu Conjunto-Verdade. Os elementos do Conjunto-Verdade, quando existem, são chamados: raízes, soluções ou valores-verdade da equação. Assim, por exemplo:

o valor-verdade (ou raiz, ou solução) da equação:

$$x + 4 = 6, \quad U = I$$

é o 2, porque $V = \{2\}$.

No caso do Conjunto-Verdade ser vazio, isto é: $V = \emptyset$, então não existem raízes no Conjunto-Universo onde se trabalha. Exemplo: a equação

$$x + 4 = 2, \quad U = I$$

não tem solução, pois: $V = \emptyset$

São chamadas do primeiro grau com uma variável as equações nas quais a variável figura com expoente 1 (um), como, por exemplo:

$$x + 4 = 6; \quad 2 \times \square - 1 = 9; \quad \frac{y}{3} = -2$$

Você irá aprender a resolver, por enquanto, com bastante desembaraço, qualquer equação do primeiro grau com uma variável, no Conjunto-Universo dos números racionais relativos, isto é, no \mathbb{Q}_r .

NOTA: Quando não fôr discriminado o Conjunto-Universo onde se está operando, subentender-se-á o \mathbb{Q}_r .

Quais são, no Teste de Atenção — Grupo 61 —, as equações do primeiro grau com uma variável? Assinale-as.

8. Equações equivalentes

Que você observa em relação à raiz de cada uma das equações:

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x + 1 = 3, \quad \text{no } U = \mathbb{Q}_r?$$

Ambas admitem a mesma raiz: 2.

O mesmo ocorre com as equações:

$$3 \times x = 15 \quad \text{e} \quad x = 5, \quad \text{no } U = \mathbb{Q}_r$$

pois têm a mesma raiz: 5

3.º) $y - 5 = -3$

$$y - 5 = -3 \iff y = -3 + 5 \quad (\text{"desfazendo" a subtração})$$

ou $y = 2$

Logo: $V = \{2\} \implies$ raiz: 2

Verificação: $2 - 5 = -3$
 $-3 = -3$ (V)

4.º) $2 \times x = -8$

$$2 \times x = -8 \iff x = -8 : 2 \quad (\text{"desfazendo" a multiplicação})$$

ou $x = -4$

Logo: $V = \{-4\} \implies$ raiz: -4

Verificação: $2 \times -4 = -8$
 $-8 = -8$ (V)

NOTA: A equação: $2 \times x = -8$ pode, também, ser escrita sob as formas:
 $2 \cdot x = -8$ ou $2x = -8$

5.º) $z \times \frac{1}{2} = 0$

$$z \times \frac{1}{2} = 0 \iff z = 0 : \frac{1}{2} \quad (\text{"desfazendo" a multiplicação})$$

ou $z = 0$

Logo: $V = \{0\} \implies$ raiz: 0

Verificação: $0 \times \frac{1}{2} = 0$
 $0 = 0$ (V)

6.º) $t : \frac{-1}{3} = -8$

$$t : \frac{-1}{3} = -8 \iff t = -8 \times \frac{-1}{3} \quad (\text{"desfazendo" a divisão})$$

ou $t = \frac{8}{3}$

Logo: $V = \left\{\frac{8}{3}\right\} \implies$ raiz: $\frac{8}{3}$

Verificação: $\frac{8}{3} : \frac{-1}{3} = -8$ ou $\frac{8}{3} \times \frac{-3}{1} = -8$
 $-8 = -8$ (V)

7.º) $u : 6 = 3,2$

$$u : 6 = 3,2 \iff u = 6 \times 3,2 \quad (\text{"desfazendo" a divisão})$$

ou $u = 19,2$

Logo: $V = \{19,2\} \implies$ raiz: 19,2

Verificação: $19,2 : 6 = 3,2$
 $3,2 = 3,2$ (V)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 63

Resolver, no Conjunto-Universo Q , as seguintes equações:

1.º) $x + 5 = 9$

7.º) $x \times -2 = -10$

2.º) $y + 2 = 7$

8.º) $y : -3 = \frac{2}{5}$

3.º) $z - -1 = 0$

9.º) $\frac{5}{2} \times t = 1$

4.º) $t + \frac{2}{5} = \frac{-1}{2}$

10.º) $z : \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$

5.º) $u + -0,2 = 0,1$

11.º) $-3 \cdot u = 0,01$

6.º) $v = \frac{-3}{9}$

12.º) $v : \frac{1}{8} = 2,5$

SEGUNDA SÉRIE DE EXEMPLOS DE EQUAÇÕES

Nesta série, das mais usuais na prática, você deverá "desfazer" duas ou mais operações:

1.º $2 \times x + 3 = -9$

$$2 \times x + 3 = -9 \iff 2 \times x = -9 - 3 \quad (\text{"desfazendo" a adição})$$

$$\text{ou } 2 \times x = -12 \iff x = -12 : 2 \quad (\text{"desfazendo" a multiplicação})$$

$$\text{ou } x = -6$$

Logo: $V = \{-6\} \implies$ raiz: -6

Verificação: $2 \times (-6) + 3 = -9$
 $-12 + 3 = -9$
 $-9 = -9 \quad (V)$

NOTA: Você poderia resolver a equação proposta, determinando diretamente o valor de x pela "fórmula":

$$x = (-9 - 3) : 2$$

cuja técnica "desfaz" as duas operações na ordem dada. Logo:

$$x = -12 : 2 = -6 \implies \text{raiz: } -6$$

2.º $y : 3 - 5 = 2,3$

$$y : 3 - 5 = 2,3 \iff y : 3 = 2,3 + 5 \quad (\text{"desfazendo" a subtração})$$

$$\text{ou } y : 3 = 7,3 \iff y = 7,3 \times 3 \quad (\text{"desfazendo" a divisão})$$

$$\text{ou } y = 21,9$$

Logo: $V = \{21,9\} \implies$ raiz: $21,9$

Verificação: $21,9 : 3 - 5 = 2,3$
 $7,3 - 5 = 2,3$
 $2,3 = 2,3 \quad (V)$

Pela técnica: $y = (2,3 + 5) \times 3 = 7,3 \times 3 = 21,9 \implies$ raiz: $21,9$

3.º $a \times x + b = c$ onde: x é a variável; a, b e c são números racionais relativos, com $a \neq 0$

Temos:

$$a \times x + b = c \iff a \times x = c - b \quad (\text{"desfazendo" a adição})$$

$$\text{ou } a \times x = (c - b) \iff x = (c - b) : a$$

Logo: $V = \left\{ \frac{(c-b)}{a} \right\} \implies$ raiz: $\frac{(c-b)}{a}$

Verificação: $a \times \frac{(c-b)}{a} + b = c$
 $c - b + b = c$
 $\underbrace{c + 0}_{c} = c \quad (V)$

Pela técnica: $x = (c - b) : a \implies$ raiz: $\frac{c-b}{a}$

4.º $(3 \times x + 15) : 2 = -4$

Agora você irá "desfazer" três operações:

$$(3 \times x + 15) : 2 = -4 \iff 3 \times x + 15 = -4 \times 2 \quad (\text{"desfazendo" a divisão})$$

$$\text{ou } 3 \times x + 15 = -8 \iff 3 \times x = -8 - 15 \quad (\text{"desfazendo" a adição})$$

$$\text{ou } 3 \times x = -23 \iff x = -23 : 3 \quad (\text{"desfazendo" a multiplicação})$$

$$\text{ou } x = \frac{-23}{3}$$

Logo: $V = \left\{ \frac{-23}{3} \right\} \implies$ raiz: $\frac{-23}{3}$

Verificação: $\left(3 \times \frac{-23}{3} + 15 \right) : 2 = -4$
 $-8 : 2 = -4$
 $-4 = -4 \quad (V)$

Pela técnica: $x = (-4 \times 2 - 15) : 3 = (-8 - 15) : 3 = -23 : 3 =$
 $= \frac{-23}{3} \implies$ raiz: $\frac{-23}{3}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 64

Resolver, no Conjunto-Universo Q , as seguintes equações:

1.^a) $3 \times x + 4 = 10$

2.^a) $2 \times x - \frac{1}{2} = \frac{-3}{5}$

3.^a) $y \times -1 + 1 = 1$

4.^a) $5 \times z - 2 = 3$

5.^a) $\frac{4}{3} \times t + 5 = 0$

6.^a) $m \times x + n = p \quad (m \neq 0)$

7.^a) $(4 \times y - 1) : -2 = 3$

8.^a) $y : 3 + 4 = -2$

9.^a) $x : 2 - 3 = \frac{1}{4}$

10.^a) $z : -1 + 5 = 0,3$

11.^a) $u : 4 - 3 = -1$

12.^a) $x : \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{4}$

13.^a) $x : a + b = c \quad (a \neq 0)$

14.^a) $(t : 5 - 3) \times \frac{1}{2} = -1$

Uso de equações para resolver problemas

Todo problema envolve sentenças numéricas abertas e, portanto, equações.

Nestas condições você irá empregar a nova "técnica" aprendida para resolver os seguintes problemas:

- 1.^o) Pensei em um número; multipliquei-o por 3, somei 4 ao produto e obtive 10 como resultado. Qual o número pensado? Pode-se raciocinar assim:

pensei em um número : x

multipliquei-o por 3 : $3 \times x$

somei 4 ao produto : $3 \times x + 4$

... e obtive 10 : $3 \times x + 4 = 10$

O valor de x (que representa o número pensado) é a raiz da equação:

$3 \times x + 4 = 10$

isto é:

$x = (10 - 4) : 3 = 6 : 3 = 2 \implies$ raiz: 2

Logo: o número pensado é 2.

Verificação (prova): pensei em um n.^o : 2

multipliquei-o por 3 : $2 \times 3 = 6$

somei 4 ao produto : $6 + 4$

... e obtive 10 ... : 10 (V)

ATENÇÃO:

A sentença numérica aberta, ou seja, a equação:

$3 \times x + 4 = 10$

que "traduziu" algêbricamente o problema estudado, também "traduz" todos os problemas de mesma estrutura do problema proposto. Ainda mais: você poderá imaginar uma porção de estórias que se transformem em problemas, cuja resolução implica resolver a equação: $3 \times x + 4 = 10$. Exemplos:

- I) Sílvia ganhou 10 pirulitos. Ficou com 4 e repartiu os demais em partes iguais para as suas três coleguinhas. Quanto recebeu cada uma?

Temos: x : representa a parte dada a cada coleguinha;

$3 \times x$: representa o total recebido pelas três;

$3 \times x + 4$: representa o total (10) dos pirulitos ganhos por Sílvia;

e, portanto: $3 \times x + 4 = 10$, representa a equação que "traduz" o problema. A sua raiz, 2, indica o número de pirulitos dados a cada uma das coleguinhas da Sílvia.

- II) Alvinho mora a um certo número de quilômetros da Escola. Se esse número fôr triplicado e ao resultado forem somados 4 quilômetros, obtém-se uma distância de 10km. A quantos quilômetros mora Alvinho da Escola?

Você encontrará, como equação resultante desse problema:

$3 \times x + 4 = 10$ (Experimente ...)

- 2.^o) Subtraí 10 do dôbro de um certo número e o resultado dividi por 4, obtendo -30. Que número é esse?

Temos: certo número : x

dôbro desse n.^o ... : $2 \times x$

subtraí 10 : $2 \times x - 10$

dividi por 4 : $(2 \times x - 10) : 4$

... obtendo -30 ... : $(2 \times x - 10) : 4 = -30$

Logo, a equação é: $(2 \times x - 10) : 4 = -30$, onde $x = [(-30 \times 4) + 10] : 2 = -55 \implies$ raiz: -55

NOTA: Como o resultado representa uma dívida, a raiz é o número 55 negativo.

Agora, você pode formular quantos "problemas" quiser, que impliquem a resolução da equação:

$(2 \times x - 10) : 4 = -30$

Um dêles, por exemplo: "Um grupo de quatro colegas devia uma certa importância (x). Tendo-se duplicado essa dívida (2x), perdoaram-se dez cruzeiros novos (2x - 10) e o restante foi repartido em partes iguais entre os colegas ((2x - 10) : 4). O resultado acusou que cada um deveria pagar trinta cruzeiros novos (-30). Quanto devia o grupo inicialmente?"

CURIOSIDADE

Com o que você já sabe acêrca da resolução de equações é possível surpreender seus amiguinhos com questões do seguinte tipo:

Diga para seu amigo:

1. Pense em um número
2. Multiplique-o por 4
3. Some 10
4. Diga-me o resultado e eu direi o número que você pensou!
5. Você pensou no 5!

Escreva num papel:

1. x
2. $4 \times x$
3. $4 \times x + 10$
4. Suponha que seu amigo tenha dito: 30. Então você escreverá a equação:
 $4 \times x + 10 = 30$
cuja raiz é 5

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Suponha que um seu amiguinho é convidado a pensar em um número inteiro. Depois lhe é dito para multiplicá-lo por 3 e somar 8 ao produto. Se ele disser que o resultado é 15, por exemplo, terá cometido algum engano?

Sim; a equação resultante: $3 \times x + 8 = 15$, tem por raiz o número $\frac{7}{3}$ que não é inteiro!

Daí a necessidade de se escrever, ao lado da equação resultante de um determinado problema, o *Conjunto-Universo* exigido pela própria natureza do problema. No caso em apêço, você deveria escrever:

$$3 \times x + 8 = 15, \quad U = I$$

e procurar se há valores de x que tornam essa sentença verdadeira em I . Como a raiz $\frac{7}{3}$ não é número inteiro, segue-se que:

$V = \emptyset$ e, portanto, o problema não tem solução!



Resolver os seguintes problemas mediante o uso de equações do primeiro grau com uma variável:

- 1.º Pensei em um número; somei-o com 5, dividi o resultado por 10 e obtive 40. Qual foi o número pensado?
- 2.º Redija dois problemas que tenham como equação resultante a equação correspondente ao problema do Exercício 1.º).
- 3.º A quinta parte do que Luís possui diminuída de NCr\$ 2,00 é igual a NCr\$ 1,00. Quanto possui Luís?
- 4.º Redija um problema, usando a equação resultante do problema anterior.
- 5.º Pensei em um número: multipliquei-o por 6 e somei 4 ao resultado. Como obtive 25 no final, qual é o número em que pensei?
- 6.º Redija dois problemas que possuam a mesma equação resultante que a do problema anterior.
- 7.º Vera Maria tinha NCr\$ 1,10. Comprou duas revistas de mesmo preço e sobraram-lhe NCr\$ 0,40. Qual o preço pago por revista?
- 8.º Imagine mais um problema que possua a mesma equação resultante que a do problema anterior.
- 9.º Suponha que seu amigo é convidado a pensar em um número primo. Depois lhe é dito que o multiplique por 5 e subtraia 3 do resultado. Dizendo que obteve 17, teria ele cometido algum engano? Por quê? E se ele disser que obteve 12?
- 10.º Peça a seu colega para pensar em um número racional; depois, dividi-lo por 2 e somar $\frac{1}{2}$ ao resultado. Se ele disser que o resultado obtido é 2, terá cometido algum engano? Por quê?
- 11.º Quantos foguetes foram disparados de uma certa base militar, sabendo-se que a metade do número dêles, somado com 5 foguetes perdidos, totalizam 12 foguetes?
- 12.º Diga a seu companheiro para pensar em um número inteiro. A seguir, convide-o a multiplicar tal número por 4 e ao resultado somar 2. Se disser que o resultado final é 15, terá cometido algum engano? Por quê? E se disser que é 14?

TERCEIRA SÉRIE DE EXEMPLOS DE EQUAÇÕES (Novidade!)

1.º Como você resolveria a equação:

$$3.x + 2.x = 10$$

ou

$$3x + 2x = 10 \quad ?$$

Basta aplicar uma propriedade estrutural muito importante: a *propriedade distributiva da multiplicação (p.d.m.)* que relaciona duas operações: a multiplicação com a adição (ou subtração). Então, pela *p.d.m.*, o primeiro membro $3x + 2x$ da equação proposta pode ser escrito:

$$(3 + 2)x \text{ ou } 5x$$

Logo, a equação original se transforma na equação:

$$5x = 10$$

cuja raiz é 2.

NOTA: Costuma-se dizer "pôr x em evidência" quando se aplica a *p.d.m.* no sentido em que foi feito: $3x + 2x = (3 + 2)x$

$$\text{Técnica de cálculo: } 3x + 2x = 10 \xLeftrightarrow[\text{p.d.m.}]{(3 + 2)x = 10}$$

$$\text{ou } 5x = 10 \xLeftrightarrow{x = 10:5}$$

$$\text{ou } x = 2 \Rightarrow \text{raiz: } 2$$

NOTA: Dentro da técnica usada você pode, se quiser, passar diretamente de $3x + 2x = 10$ para $5x = 10$.

$$\begin{array}{r} \text{Verificação: } 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 \\ 6 + 4 = 10 \\ 10 = 10 \text{ (V)} \end{array}$$

$$2.^\circ) \quad 2x + 6x - 9x + 17 = 20$$

Da mesma forma, aplicando-se a *p.d.m.* (no sentido de "pôr x em evidência" onde se fizer necessário):

$$2x + 6x - 9x + 17 = 20 \xLeftrightarrow[\text{p.d.m.}]{(2 + 6 - 9)x + 17 = 20}$$

$$\text{ou } -1x + 17 = 20 \xLeftrightarrow{-1x = 20 - 17}$$

$$\text{ou } -1x = 3 \xLeftrightarrow{x = 3 : -1}$$

$$\text{ou } x = -3 \Rightarrow \text{raiz: } -3$$

Faça você mesmo a *verificação* de que a raiz da equação proposta é -3.

$$3.^\circ) \quad (2 + 3x) + 7x = -21$$

$$\text{Temos: } (2 + 3x) + 7x = -21$$

$$\text{p.a.a.: } 2 + (3x + 7x) = -21 \quad (\text{p.a.a.: propr. associativa da adição aplicada para "juntar" } 7x \text{ com } 3x)$$

$$\text{p.d.m.: } 2 + (3 + 7)x = -21$$

$$\text{ou } 2 + 10x = -21 \Leftrightarrow 10x = -21 - 2$$

$$\text{ou } 10x = -23 \Leftrightarrow x = -23:10$$

$$\text{ou } x = \frac{-23}{10} = -2,3 \Rightarrow \text{raiz: } -2,3$$

Faça a *verificação*.

$$4.^\circ) \quad 2(x + -3) + 4(x - 2) = -2$$

A resolução desta equação resultará da aplicação das seguintes propriedades, que você já conhece:

$$\text{p.d.m.: } 2x + 2 \cdot -3 + 4x - 4 \cdot 2 = -2 \quad (\text{a p.d.m. é aplicada agora no sentido de "eliminar os parênteses"})$$

$$\text{ou } 2x + -6 + 4x - 8 = -2$$

$$\text{p.c.a.: } 2x + 4x + -6 - 8 = -2 \quad (\text{p.c.a.: propr. comutativa da adição aplicada para "juntar" } 4x \text{ com } 2x)$$

$$\text{p.d.m.: } (2 + 4)x + -14 = -2 \quad (\text{a p.d.m. foi agora aplicada no sentido de "pôr } x \text{ em evidência"})$$

$$\text{ou } 6x + -14 = -2 \Leftrightarrow 6x = -2 - -14$$

$$\text{ou } 6x = 12 \Leftrightarrow x = 12:6$$

$$\text{ou } x = 2 \Rightarrow \text{raiz: } 2$$

$$\begin{array}{l} \text{Verificação: } 2(2 + -3) + 4(2 - 2) = -2 \\ 2 \cdot -1 + 4 \cdot 0 = -2 \\ -2 + 0 = -2 \\ -2 = -2 \text{ (V)} \end{array}$$

$$5.^{\circ} \quad 8x + -5(2x - 3) = 2$$

Temos:

$$\text{p.d.m.: } 8x + -5(2x) - -5.3 = 2 \quad (\dots \text{ "eliminando os parênteses" } \dots)$$

$$\text{p.a.m.: } 8x + (-5.2)x - -15 = 2 \quad [\text{a p.a.m. permite efetuar: } -5.(2x) = (-5.2)x = -10x]$$

$$\text{ou } 8x + -10x - -15 = 2$$

$$\text{p.d.m.: } (8 + -10)x - -15 = 2 \quad (\dots \text{ "pondo } x \text{ em evidência" } \dots)$$

$$\text{ou } -2x - -15 = 2 \iff -2x = 2 + -15$$

$$\text{ou } -2x = -13 \iff x = -13 : -2$$

$$\text{ou } x = \frac{13}{2} \implies \text{raiz: } \frac{13}{2}$$

Verifique.

$$6.^{\circ} \quad \frac{1}{2}(x + -5) - \frac{3}{4}x - 2 = 0$$

Aplicando a "técnica" em que você já está iniciado, vem:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot -5 - \frac{3}{4}x - 2 = 0 \quad (\dots \text{ "eliminando os parênteses" } \dots)$$

$$\text{ou } \frac{1}{2}x + \frac{-5}{2} - \frac{3}{4}x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x + \frac{-5}{2} - 2 = 0 \quad (\dots \text{ "juntando" os "têrmos em } x \text{"} \dots)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)x + \frac{-5}{2} - 2 = 0 \quad (\dots \text{ "pondo } x \text{ em evidência" } \dots)$$

$$\text{ou } \frac{-1}{4}x + \frac{-9}{2} = 0 \iff \frac{-1}{4}x = 0 - \frac{-9}{2}$$

$$\text{ou } \frac{-1}{4}x = \frac{9}{2} \iff x = \frac{9}{2} : \frac{-1}{4}$$

$$\text{ou } x = \frac{9}{2} \times \frac{-4}{1} = -18 \implies \text{raiz: } -18$$

Faça a verificação.

$$7.^{\circ} \quad ax + bx = c \quad \text{onde: } x \text{ é a variável; } a, b \text{ e } c, \text{ números racionais relativos, tais que } a + b \neq 0 \text{ (por quê?)}$$

Temos:

$$(a + b)x = c \quad (\dots \text{ "pondo } x \text{ em evidência" } \dots)$$

$$\text{e } (a + b)x = c \iff x = c : (a + b) \quad (\dots \text{ para esta divisão ter sentido é preciso que } a + b \neq 0 \dots)$$

Logo, raiz: $c : (a + b)$

$$\text{Verificação: } a\left(\frac{c}{a + b}\right) + b\left(\frac{c}{a + b}\right) = c$$

$$\frac{ac}{a + b} + \frac{bc}{a + b} = c$$

$$\frac{(a + b)c}{(a + b)} = c$$

$$c = c \quad (V)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 66

Usando propriedades conhecidas, resolver as seguintes equações:

$$1.^{\circ} \quad 3x + 4x = 21$$

$$2.^{\circ} \quad 2,5y - 0,5y = -1$$

$$3.^{\circ} \quad \frac{1}{2}x - x = 0$$

$$4.^{\circ} \quad 3z - -4z + 5z - 12 = -16$$

$$5.^{\circ} \quad (-3 + 5x) + 2x = 6$$

$$6.^{\circ} \quad y - -3y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$7.^{\circ} \quad 3(x + 2) + 2(x - 1) = 6$$

$$8.^{\circ} \quad -2(3y + 1) + 5(y - -3) = 1$$

$$9.^{\circ} \quad \frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{5}\right) - -0,5 = 0$$

$$10.^{\circ} \quad -1(z - 3) = \frac{1}{2}$$

$$11.^{\circ} \quad mx - nx = p$$

$$12.^{\circ} \quad a(x + 1) + b(x - 1) = c \quad (a + b \neq 0)$$

$$(m - n \neq 0)$$

$$(a + b \neq 0)$$

$$x + 2 = 5$$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 67

1.º Um certo número somado com seu dôbro dá como resultado 36. Que número é esse?

Temos: certo n.º : x
 ... somado com o seu "dôbro": $x + 2x$
 e, portanto, a equação: $x + 2x = 36$

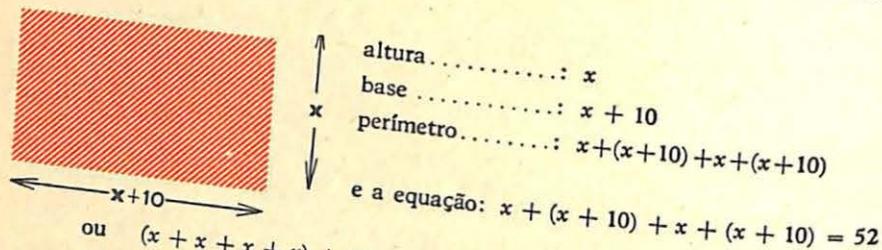
Resolvendo-a: $(1 + 2)x = 36$
 ou $3x = 36 \iff x = 36 : 3$
 ou $x = 12 \implies$ raiz: 12

Resposta: o número procurado é 12.

Verificação: Somando 12 com o seu dôbro (24), obtém-se 36.

2.º O perímetro de um retângulo é igual a 52m. Quanto mede a base desse retângulo, a qual é 10m maior que a altura?

Temos:



ou $(x + x + x + x) + (10 + 10) = 52$ Por quê?
 ou $4x + 20 = 52 \iff 4x = 52 - 20$
 ou $4x = 32 \iff x = 32 : 4$
 ou $x = 8 \implies$ raiz: 8

Logo: a base do retângulo mede: $8m + 10m = 18m$

3.º Metade do número de laranjas de uma cesta, mais a terça parte do número dessas laranjas, é igual a 30. Quantas dúzias de laranjas há na cesta?

Temos: n.º de laranjas da cesta : x
 Equação: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 30$

ou $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x = 30$

ou $\frac{5}{6}x = 30 \iff x = 30 \cdot \frac{6}{5}$

ou $x = 30 \times \frac{6}{5} = 36$

Logo: na cesta há três dúzias (36) laranjas. "Tire" a prova.

4.º Você perguntou a seu amiguinho: pense em um número, acrescente-lhe 6 e multiplique a soma obtida por 3. Se o seu amiguinho disser que o resultado é 48, qual foi o número em que ele pensou inicialmente?

Temos: n.º pensado pelo seu amiguinho .. : x
 somando 6 : $x + 6$
 multiplicando a soma obtida por 3... : $3(x + 6)$

Equação: $3(x + 6) = 48$

Resolvendo-a, você encontrará a raiz 10, que é o número pensado inicialmente pelo seu amiguinho. "Tire" a prova.

5.º A soma de três números inteiros consecutivos é 57. Quais são esses números?

Temos: n.º inteiro (qualquer) : x
 ... seu consecutivo : $x + 1$ Por quê?
 ... e o consecutivo seguinte... : $(x + 1) + 1$

Equação: $x + (x + 1) + (x + 1) + 1 = 57$ raiz: 18

Logo: o primeiro número é 18, o seu consecutivo 19 ($18 + 1$) e o consecutivo seguinte 20 ($19 + 1$).

6.º A soma de dois números pares consecutivos é igual a 54. Quais são esses números?

Temos: n.º par : x
 n.º par consecutivo ... : $x + 2$ Por quê?

Equação: $x + (x + 2) = 54$ raiz: 26

Logo: um número par é 26 e o seu consecutivo 28 ($26 + 2$).

7.º Num joguinho de recreio Pedro diz a Paulo:

"Se multiplicasse por 2 a idade que eu tinha há 5 anos, obteria 16 anos".

Quantos anos Pedro tem atualmente?

Temos: idade atual de Pedro : x
 idade que Pedro tinha há 5 anos: $x - 5$

Equação: $2 \times (x - 5) = 16$ raiz: 13

Logo: Pedro tem atualmente 13 anos. Verifique.

8.º Ester tem 8 anos mais que Cibele. A soma da idade de ambas é igual a 42 anos. Qual é a idade de cada uma?

Temos: idade de Cibele : x
 idade de Ester : $x + 8$

Equação: $x + (x + 8) = 42$ raiz: 17

Logo: Cibele tem 17 anos e Ester 25 anos.

9.º) O perímetro de um triângulo é 60cm. Um dos lados é igual à base mais 8cm e o outro mede o dobro da base. Quanto mede cada lado?

Temos: base: x
 um dos lados: $x + 8$
 outro lado: $2x$

Equação: $x + (x + 8) + 2x = 60$ raiz: 13

Logo: a base mede 13cm, um dos lados 21cm e o outro 26cm.

10.º) Tenho 50 figurinhas a mais que Rui e Antoninho 27 figurinhas a menos que Rui. O total de nossas figurinhas é 113. Quantas tem cada um?

Temos: figurinhas de Rui: x
 n.º de minhas figurinhas: $x + 50$
 n.º de figurinhas de Antoninho: $x - 27$

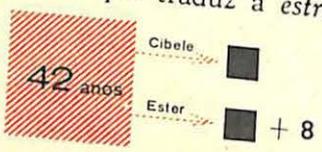
Equação: $x + (x + 50) + (x - 27) = 113$ raiz: 30

Logo: Rui tem 30 figurinhas, eu tenho 80 e Antoninho, 3.

LEMBRETE AMIGO

Você está empregando uma outra "técnica" para resolver os últimos problemas, cuja *estrutura* (a da repartição) você esquematisou na 1.ª Série Ginásial. Lembra-se?

Por exemplo, o esquema que traduz a *estrutura* do problema n.º 8 é:



Sentença matemática: $\square + (\square + 8) = 42$

Faça, como exercício, esquemas dos problemas n.ºs 9 e 10.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 68

Determinar, de cada um dos seguintes problemas: 1.º) a equação correspondente; 2.º) a solução:

1. Cinco vezes um certo número menos duas vezes esse mesmo número é igual a 120. Qual é esse número?
2. Qual o número que, somado com sua terça parte, dá como resultado 12?
3. O dobro de um número, diminuído de 8, é igual a 20. Que número é esse?

4. Um certo número de alunos está no pátio do Colégio, quando entra um número de alunos quatro vezes maior, totalizando 180 alunos. Quantos alunos havia de início no pátio?
5. O triplo da idade de Gláucia mais duas vezes a idade de seu irmão gêmeo é igual à idade de seu pai, isto é, 35 anos. Qual a idade de Gláucia?
6. Um quinto de um certo número mais a metade desse número é igual a 140. Que número é esse?
7. Sabe-se que num retângulo a medida da base é três vezes maior que a da altura, e que o perímetro é igual a 48 metros. Determinar as medidas da base e da altura desse retângulo.
8. Dois números inteiros consecutivos têm por soma 27. Quais são esses números?
9. Três números ímpares consecutivos têm por soma 45. Quais são esses números? [Sugestão: n.º ímpar: x ; seu consecutivo: $x + 2$; consecutivo seguinte: $(x + 2) + 2$].
10. A soma de quatro números pares consecutivos é 412. Quais são eles?
11. Pense em um número. Acrescente-lhe 5 e divida a soma obtida por 8. Se o resultado é 40, qual foi o número pensado?
12. Pense em um número. Diminua 3 do dobro desse número e multiplique a diferença obtida por 9. Se o resultado é 54, qual foi o número pensado? E se o número a ser pensado tivesse de ser *inteiro*, o problema admitiria solução?
13. O triplo da idade que eu tinha há dois anos é igual à idade do primo Lufs, que é de 27 anos. Qual a minha idade?
14. Raul tem 3 anos a mais que Rosinha. A soma das atuais idades de ambos é igual a 25 anos. Qual a idade de cada um? Esquematize a *estrutura* (repartição) deste problema.
15. Repartir 72 balas entre Aninha, Luluzinha e Glória, de modo que Aninha ganhe o dobro das balas que Glória receber e Luluzinha duas a mais do que Aninha.
16. O perímetro de um triângulo é igual a 120cm. Um dos lados mede o triplo da medida da base e o outro 12cm a mais que a base. Quanto mede cada lado?
17. Repartir NCr\$ 386,00 entre três pessoas, de modo que a primeira receba NCr\$ 38,40 mais do que recebe a segunda e esta receba NCr\$ 26,00 menos do que a terceira.
18. Qual é o número cujos $\frac{2}{7}$ aumentados de 15, mais os $\frac{3}{4}$ menos 8, dá como resultado 239?

QUARTA SÉRIE DE EXEMPLOS DE EQUAÇÕES (com variável nos dois membros!)

Até agora você aprendeu a resolver equações nas quais a variável aparecia *somente* em um dos membros da equação. E se a variável aparecer nos *dois membros* da equação, como no caso de:

$$4x = 6 + 2x ?$$

A resolução desta equação vai depender de você obter uma equação *equivalente*, onde a variável apareça somente em um dos membros. Para isso, basta conhecer o *princípio aditivo da igualdade* (P.A.I.), que será introduzido a partir de alguns exemplos:

1.º se $8 = 5 + 3$ é uma *sentença verdadeira*, somando então um mesmo número aos dois membros da igualdade, a *sentença continua verdadeira*; assim:

$$\text{somando } +2, \text{ por ex.: } 8 + +2 = 5 + 3 + +2 \quad (10 = 10)$$

$$\text{somando } -2, \text{ por ex.: } 8 + -2 = 5 + 3 + -2 \quad (6 = 6)$$

$$\text{somando } +\frac{1}{3}, \text{ por ex.: } 8 + +\frac{1}{3} = 5 + 3 + +\frac{1}{3} \quad \left(\frac{25}{3} = \frac{25}{3}\right)$$

2.º o mesmo ocorre, partindo da *sentença numérica aberta* (equação):

$$2x = 8, \text{ cuja raiz é } 4;$$

somando o mesmo número a ambos os membros da igualdade, a *sentença continuará admitindo a mesma raiz*, ou seja, é uma equação *equivalente* à dada; assim:

$$\text{somando } +3, \text{ por ex.: } 2x + +3 = 8 + +3 \text{ raiz: } 4 \text{ (Experimental!)}$$

$$\text{somando } -8, \text{ por ex.: } 2x + -8 = 8 + -8 \text{ raiz: } 4 \text{ (Experimental!)}$$

3.º o mesmo ocorrerá, ainda, quando você *somar* u'a *mesma expressão* aos dois membros de uma equação, isto é, a equação *resultante* continuará admitindo a *mesma raiz* e, portanto, será *equivalente*; assim, dada a equação:

$$4x = 6 + 2x, \text{ cuja raiz é } 3;$$

somando $-2x$ aos dois membros, obtém-se a equação:

$$4x + -2x = 6 + 2x + -2x, \text{ também de raiz } 3 \text{ (Experimental!)}$$

NOTA: Lembre-se que a expressão $-2x$, quando se substitui x por um valor numérico qualquer, *sempre representa um número!*

Vale, pois, o seguinte

Princípio Aditivo da Igualdade (P. A. I.):

se $a = b$ então $a + c = b + c$
onde a, b e c representam quaisquer números.

Aplicações do P. A. I.:

I. É sempre possível fazer com que o primeiro membro de uma equação só tenha termos com x e o segundo só tenha termos numéricos (também chamados *constantes*). Exemplos:

$$1.º \quad 3x + 8 = 4$$

Observe que o primeiro membro da equação contém um termo com x , ou seja, $3x$ e outro termo constante, $+8$. Somando -8 (que é o oposto de $+8$) aos dois membros, temos pela P.A.I.:

$$3x + +8 + -8 = 4 + -8$$

ou

$$3x + 0 = 4 + -8$$

ou

$$3x = 4 + -8$$

(agora o primeiro membro contém somente termos com x e o segundo somente termos constantes)

Técnica operatória: Observando a equação original:

$$3x + +8 = 4$$

e a final:

$$3x = 4 + -8$$

você conclui que a "passagem" de um termo (no exemplo: 8) de um membro para o outro (no exemplo, do primeiro para o segundo) é feita *trocando-se* o seu *sinal qualificativo* (no exemplo, o 8, que possui o sinal qualificativo $+$, no primeiro membro, "passou" para o segundo como -8).

$$2.º \quad 2x = 5 + x \quad \text{ou} \quad 2x = 5 + +1x$$

(NOTA: pela propriedade do elemento neutro da multiplicação, vem: $+1 \cdot x = x$)
Temos, pela P.A.I., somando a ambos os membros $-1x$ (que é o oposto de $+1x$):

$$2x + -1x = 5 + +1x + -1x$$

ou

$$2x + -1x = 5 + 0$$

ou

$$2x + -1x = 5$$

Pela técnica operatória, você passa diretamente de

$$2x = 5 + +1x$$

para

$$2x + -1x = 5$$

(fazendo o +1x, do segundo membro, figurar no primeiro como -1x)

$$3.º) 5x + -9 = 4 + \frac{2}{3}x$$

Aplicando a técnica, de modo a "passar" o -9 para o segundo membro e o $\frac{2}{3}x$ para o primeiro, temos imediatamente:

$$5x + \frac{-2}{3}x = 4 + +9 \quad \text{ou} \quad 5x + \frac{-2}{3}x = 4 + 9$$

NOTA: Os termos: $5x$, $\frac{2}{3}x$, $-1x$, ... são denominados **semelhantes**, em relação a x , por serem todos termos com x . Os números: 5 , $\frac{2}{3}$, -1 , ... são, respectivamente, seus **coeficientes numéricos**.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 69

1. Faça com que o primeiro membro, das seguintes equações, tenha somente termos com x e o segundo membro só termos numéricos (constantes) aplicando o P.A.I.:

$$1.º) 5x + 3 = 7 \quad (\text{Ex. modelo: } 5x = 7 + -3) \quad 6.º) \frac{3}{2}x + 1 + 2\frac{1}{5} = -12x$$

$$2.º) 9x = 2x + -1$$

$$7.º) 2x + -1 = 2x + \frac{1}{9}$$

$$3.º) x + -4x = 0$$

$$8.º) 6x + x + 3x = 0$$

$$4.º) 3x + 8 = 2 + -7x \quad (\text{Ex. modelo: } 3x + 7x = 2 + -8)$$

$$9.º) ax + -b = cx + d$$

$$5.º) \frac{2}{3} + -1 = x + \frac{-1}{2}$$

$$10.º) mx = nx + p$$

2. Assinale os termos semelhantes e os respectivos coeficientes numéricos, nos seguintes grupos de expressões:

$$1.º) 3x; -2y; \frac{x}{4}; 0,5y; -y \quad \text{Exemplo modelo:}$$

termos semelhantes em x : $3x$, coeficiente 3 ; $\frac{x}{4} = \frac{1}{4}x$, coeficiente $\frac{1}{4}$

termos semelhantes em y : $-2y$, coeficiente -2 ; $0,5y$, coeficiente $0,5$; $-y = -1y$, coeficiente -1

$$2.º) \frac{-3}{4}x; 6y; \frac{-1}{2}z; 4x; 5,3z; \frac{y}{7}; -x; 139y; \frac{-9}{4}z$$

II. Agora você é capaz de resolver um grande número de equações, que antes não podia. Basta acompanhar os exemplos seguintes:

$$1.º) 3x + 8 = 4$$

Aplicando o P.A.I., essa equação pode ser transformada numa equivalente que possua no primeiro membro só termos com x e no segundo só termos constantes:

$$3x = 4 + -8$$

ou

$$3x = -4 \Leftrightarrow x = -4 : 3$$

$$\text{ou } x = \frac{-4}{3} \Rightarrow \text{raiz: } \frac{-4}{3}$$

$$2.º) 2x = 5 + x$$

$$\text{ou } 2x = 5 + 1x$$

$$\text{Temos: } 2x + -1x = 5$$

$$\text{ou } (2 + -1)x = 5$$

$$\text{ou } 1x = 5 \Leftrightarrow x = 5 : 1$$

$$\text{ou } x = 5 \Rightarrow \text{raiz: } 5$$

$$3.º) 5x + -9 = 4 + \frac{2}{3}x$$

$$\text{Temos: } 5x + \frac{-2}{3}x = 4 + 9$$

$$\text{ou } \left(5 + \frac{-2}{3}\right)x = 13$$

$$\text{ou } \frac{13}{3}x = 13 \Leftrightarrow x = 13 : \frac{13}{3}$$

$$\text{ou } x = 13 \times \frac{3}{13} = 3 \Rightarrow \text{raiz: } 3$$

4.º) $3(x + 2) = -8x + 1$

Temos:

$$3x + 6 = -8x + 1 \quad (\dots \text{“eliminando os parênteses”} \dots)$$

$$3x + 8x = 1 + -6 \quad (\dots \text{“passando” os termos semelhantes para um mesmo membro} \dots)$$

$$11x = -5 \quad (\dots \text{efetuando; ou seja, “pondo } x \text{ em evidência” e efetuando o cálculo com os números no 1.º membro; e, no 2.º, efetuando o cálculo})$$

Então:

$$11x = -5 \iff x = -5 : 11 \implies \text{raiz: } \frac{-5}{11}$$

LEMBRETE AMIGO

Você já dispõe, agora, de recursos que permitem resolver equações do primeiro grau com uma variável, por mais “complicada” que ela possa parecer. Observe a resolução do seguinte exemplo:

$$\frac{1}{2}(x + -3) + -5(2x + 1) = \frac{3}{4}x + 2$$

Temos:

$$\frac{1}{2}x + \frac{-3}{2} + -10x + -5 = \frac{3}{4}x + 2 \quad (\dots \text{“eliminando os parênteses”} \dots)$$

$$\frac{1}{2}x + -10x + \frac{-3}{4}x = 2 + 5 + \frac{3}{2} \quad (\dots \text{“passando” os termos com } x \text{ para o 1.º membro e as constantes para o 2.º} \dots)$$

$$\left(\frac{1}{2} + -10 + \frac{-3}{4}\right)x = 2 + 5 + \frac{3}{2} \quad (\dots \text{“pondo } x \text{ em evidência” e “reduzindo” os termos semelhantes} \dots)$$

$$\frac{-41}{4}x = \frac{17}{2} \iff x = \frac{17}{2} : \frac{-41}{4}$$

$$\text{ou } x = \frac{17}{2} \times \frac{-4}{41} = \frac{-34}{41} \implies \text{raiz: } \frac{-34}{41}$$

Resolver, aplicando os recursos conhecidos, as seguintes equações:

1.ª) $6x + -4 = 2x + 8$

6.ª) $3x + \frac{-1}{6}x + 1x = 0$

2.ª) $x + \frac{1}{2} = -2 + -3x$

7.ª) $\frac{2}{5}(2x + -1) + -3(x + -2) = \frac{1}{2}x + 4$

3.ª) $4(x + -5) = 2x + -1$

8.ª) $\frac{4}{3} = 2x + \frac{1}{9}x$

4.ª) $-2\left(3x + \frac{-1}{3}\right) = \frac{3}{4}x + 4$

9.ª) $ax + -b = cx + d \quad (a - c \neq 0)$

5.ª) $\frac{1}{8}(-2x + 1) = x$

10.ª) $mx = -nx + p \quad (m + n \neq 0)$

Princípio multiplicativo da igualdade (P.M.I.)

Sempre para facilitar o seu trabalho na resolução de equações, você vai conhecer, através de exemplos, um outro “aliado”: o Princípio Multiplicativo da Igualdade (P.M.I.):

1.º) se $8 = 5 + 3$ é uma sentença verdadeira, então multiplicando os dois membros da igualdade (isto é, todos os seus termos) por um mesmo número, a sentença continua verdadeira; assim:

multiplicando por 2, por ex.: $2 \times 8 = 2 \times (5 + 3) \quad (16 = 16)$

multiplicando por $\frac{1}{8}$, por ex.: $\frac{1}{8} \times 8 = \frac{1}{8} \times (5 + 3) \quad (1 = 1)$

2.º) se na equação: $2x = 8$, cuja raiz é 4, forem multiplicados ambos os membros por $\frac{1}{2}$, por exemplo:

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 8$$

a equação resultante será equivalente a: $2x = 8$, pois a raiz ainda é 4 (experimente!)

Tem-se, assim, o seguinte Princípio Multiplicativo da Igualdade (P.M.I.):

se $a = b$ então $a \times c = b \times c$
onde a, b e c representam quaisquer números

Aplicações do P. M. I.:

1.^a) Se a equação se apresentar sob a forma:

$$-2x = -8$$

onde o sinal qualificativo do -2 (coeficiente de x) e do -8 (térmo constante) é $-$, então, multiplicando ambos os membros por -1 , obter-se-á a equação:

$$+2x = +8 \text{ ou } 2x = 8$$

que é equivalente (pelo P.M.I.) à equação original, e seus termos possuem o sinal qualificativo $+$. Portanto, pode-se trocar o sinal qualificativo de todos os termos de uma equação, multiplicando ambos os membros dessa equação por -1 .

2.^a) Seja a equação: $\frac{1}{2}x = \frac{3}{5}$

Multiplicando ambos os membros por 2 (que é o elemento inverso de $\frac{1}{2}$), vem:

$$2 \times \frac{1}{2}x = 2 \times \frac{3}{5}$$

ou

$$1x = \frac{6}{5} \implies \text{raiz: } \frac{6}{5}$$

Logo: você pode determinar a equação equivalente: $x = \frac{6}{5}$, multiplicando ambos os termos da equação original pelo número que é o inverso do número que representa o coeficiente de x .

3.^a) Seja a equação: $\frac{1}{2}(x+3) + \frac{1}{3}(2x-1) = \frac{7}{2}$, que também pode ser escrita:

$$\frac{x+3}{2} + \frac{2x-1}{3} = \frac{7}{2}$$

Convertendo as frações que figuram na equação ao menor denominador comum, vem:

$$\frac{3(x+3)}{6} + \frac{2(2x-1)}{6} = \frac{3 \times 7}{6}$$

Multiplicando (... pela P.M.I.) ambos os membros por 6, temos:

$$3(x+3) + 2(2x-1) = 3 \times 7$$

e daí:

$$3x + 9 + 4x - 2 = 21$$

$$3x + 4x = 21 + -9 + 2$$

$$7x = 14 \iff x = 2 \implies \text{raiz: } 2$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 71

Resolver as seguintes equações:

1.^a) $3x = 12$

2.^a) $5x = -30$

3.^a) $\frac{1}{2}y = -5$

4.^a) $\frac{-3}{4}z = -1$

5.^a) $2x + -20 = 0$

6.^a) $5 + -3y = 10 + 2y$

7.^a) $4x + 3(2x + 5) = 25$

8.^a) $3x + -5(x + 2) = 12$

9.^a) $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = x + \frac{2}{3}$

10.^a) $\frac{x+3}{4} + \frac{2x}{5} = 1 + \frac{-2x-1}{8}$

11.^a) $\frac{1}{2}(x+6) + \frac{-1x}{x} = \frac{1}{6}(8 + -5 - 1x) + x + \frac{1}{3}$

12.^a) $2n + \frac{-1}{5} = 4(3 + -1n)$

13.^a) $z + \frac{-z}{4} + 1 = \frac{2z}{3} + 5$

14.^a) $\frac{1}{6}(8 + -y) + 3y + -1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(y + 6)$

15.^a) $\frac{t}{3} + \frac{2t}{3} + 1 + t = 0$

16.^a) $\frac{3x+2}{8} + \frac{x-5}{2} = 1$

17.^a) $\frac{2}{5}(x+3) + -1(2x+5) = \frac{1}{2}$

18.^a) $\frac{x+1}{4} = \frac{3x+2}{2}$

19.^a) $\frac{1}{2}(5x) = \frac{-x + \frac{2}{3}}{2}$

20.^a) $5 + \frac{5x-36}{4} + \frac{-1x+2}{2} = 6 + \frac{-12+x}{2}$

21.^a) $\frac{19}{6}(y + -4) + \frac{5y}{2} = \frac{5y + -3}{7} + \frac{-9+y}{3}$

22.^a) $\frac{t + -1}{10} + \frac{-t + -1}{5} = \frac{1 + -2t}{15}$

23.^a) $\frac{20+z}{8} + -1z = 3 + -1\left(\frac{1}{2} + 2z\right)$

24.^a) $\frac{y}{6} + \frac{-2y + -1}{6} + \frac{-1}{3}\left(\frac{2}{6} + \frac{-1}{3}y\right) = 0$

25.^a) $\frac{x}{6} + \frac{x}{9} = \frac{1}{15} + \frac{x + \frac{-1}{2}}{3}$

26.^a) $\frac{7+9z}{4} + -7z + 1 + \frac{-2+z}{9}$

27.^a) $\frac{3x+1}{13} + \frac{2x-5}{3} = \frac{2-x}{2} + \frac{4x-1}{5}$

28.^a) $m + \frac{3m-9}{5} + \frac{5m-12}{3} = 4$

29.^a) $-1t + -1t + -1t = 0$

30.^a) $\frac{x-2}{4} + \frac{1}{3} + -1\left(x + \frac{-2x+1}{3}\right) = 0$

QUANTIFICADORES

$\forall x, \exists x$

Identities — Quantificador universal: \forall

Ao resolver a equação:

$$x = x, \quad U = \mathbb{Q}_r$$

você poderá seguir dois caminhos:

1.º interpretando a sentença numérica aberta: “o número racional relativo x é igual ao número racional relativo x ”, podemos concluir, rapidamente, que **qualquer** número colocado no lugar de x , torna a sentença obtida verdadeira ($0=0, 1=1, -1=-1, 2=2, \dots$); então, o Conjunto-Verdade é o próprio Universo (\mathbb{Q}_r), ou seja:

$$x = x, \quad U = \mathbb{Q}_r$$

$$\forall = \mathbb{Q}_r \implies \text{raiz: qualquer valor de } x.$$

2.º aplicando a técnica operatória conhecida:

$$x = x$$

ou

$$1x = 1x \text{ e, portanto: } 1x + -1x = 0$$

$$\text{ou } (1 + -1)x = 0$$

$$\text{ou } 0x = 0 \implies \text{raiz: qualquer valor de } x$$

(lembre-se que qualquer número multiplicado por 0 tem como resultado 0)

Equações desse tipo — onde qualquer valor atribuído a x é raiz — são denominadas *Identities* ou *Generalizações*. Há um símbolo especial para indicar toda essa “quantidade” de valores de x que tornam uma sentença verdadeira: é o *quantificador universal* \forall (lê-se: “qualquer”)

Assim: $\forall x$ é lido: “qualquer x ”. Logo, resolvendo a equação:

$$x = x \quad \text{ou} \quad 0 \cdot x = 0$$

você escreverá como solução: $\forall x, x = x$ ou $\forall x, 0 \cdot x = 0$

Outros exemplos de *identidades*:

1. $y + 0 = y$

Solução: $\forall y, y + 0 = y$ (pois, qualquer que seja o y , somado com 0 dá como resultado y ; portanto essa equação *identidade*, reduz-se às equações: $y = y$ ou $0 \cdot y = 0$).

2. $x + x = 2x$

Solução: $\forall x, x + x = 2x$ (... é o mesmo que: $2x = 2x$ ou $2x + -2x = 0$ ou $0x = 0$, ... *tôdas identidades*)

Equações com soluções determinadas.

Quantificador existencial: \exists

A maioria das equações do primeiro grau com uma variável que você estudou, admite solução, isto é, tem *raiz*. Para indicar que *existe* tal raiz, usamos um outro *quantificador*, denominado *existencial*, cujo símbolo é \exists (lê-se: “*existe*”). Assim:

$\exists x$ é lido: “*existe* x ” e $\exists x$ | : “*existe* x , tal que”

Tudo isso é feito para *precisar a sua linguagem* matemática. Assim, por exemplo, uma pergunta *bem formulada* em Matemática, acêrca da resolução de uma equação, num determinado Conjunto-Universo, seria:

$$\exists x | 5x + 2 = 3x + 10?$$

que se lê: “*existe* x , tal que $5x + 2 = 3x + 10$?”

Resolvendo essa equação, você encontrará a raiz 4 (experimental!) e responderá:

$$\exists x | 5x + 2 = 3x + 10.$$

Equações sem solução. Indicação: \nexists

Assim como há equações que admitem infinitas soluções (são as *identidades*) há também equações que *não admitem* solução alguma (que correspondem às sentenças numéricas *sempre falsas!*). Assim, por exemplo:

$$3x + 5 = 3x + 7, \quad U = \mathbb{Q}$$

ou

$$3x + -3x = 7 + -5$$

ou

$$0x = 2,$$

é uma equação *sem solução*, pois *não há* valor algum de x que torne essa sentença verdadeira (basta lembrar que qualquer valor de x multiplicado por 0 tem como resultado 0 e, portanto, nunca se obterá 2).

Nesse caso escreve-se: $\nexists x$ (lê-se: "não existe x ") para indicar que *não existe solução*. Então, se fôsse feita a "pergunta":

$$\exists x \mid 3x + 5 = 3x + 7?$$

a resposta seria:

$$\nexists x \mid 3x + 5 = 3x + 7.$$

NOTA: A resposta: $\nexists x \mid 3x + 5 = 3x + 7$ equivale a esta outra:

$$\forall x, 3x + 5 \neq 3x + 7$$

pois, *qualquer* que seja o valor atribuído a x na sentença proposta, o resultado obtido no 1.º membro será *diferente* do obtido no 2.º.

LEMBRETE AMIGO

Se, depois de conduzir a resolução de uma equação do primeiro grau com uma variável, você encontrar, por exemplo, as seguintes sentenças:

$$\begin{aligned} 0.x &= 0 \\ 3.x &= 5 \\ 0.x &= 6 \end{aligned}$$

procure estabelecer com precisão a "quantidade" de valores de x , no Conjunto-Universo \mathbb{Q} , que tornem *verdadeira* cada uma delas, isto é, procure **quantificá-las**. Nessas sentenças, temos:

$$\forall x, 0.x = 0 \quad (\dots \text{ pois qualquer valor de } x \text{ é raiz!})$$

$$\exists x, 3.x = 5 \quad (\dots \text{ é a raiz } \frac{5}{3})$$

$$\nexists x, 0.x = 6 \quad (\dots \text{ não existe valor algum de } x)$$

1. Das seguintes equações, indicar quais são as *identidades*, sendo $U = \mathbb{Q}$:

1.ª) $3x + 2 = 5x + -1$	5.ª) $y \times 1 = 1$
2.ª) $5x = 5x$	6.ª) $0 + z = z$
3.ª) $3x + x = 4x$	7.ª) $\frac{y}{3} = \frac{y}{3}$
4.ª) $-2x = 2$	8.ª) $3y = \frac{1}{3} + y$

2. Preencher, com o respectivo *quantificador*, cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = \mathbb{Q}$,

1.ª) $\dots, 0.x = 0$	6.ª) $\dots, 3.t = 3$
2.ª) $\dots, 2.y = -2$	7.ª) $\dots, 3x + 5 = 3x + 5$
3.ª) $\dots, 0.y = 2$	8.ª) $\dots, 5x + 4 = 4x + x + -2$
4.ª) $\dots, 0.y = 0$	9.ª) $\dots, -12x = 0$
5.ª) $\dots, 8.x = \frac{-1}{2}$	10.ª) $\dots, \frac{z}{2} = \frac{z}{2}$

$$x + 2 \leq 5$$

Inequações do primeiro grau

10. Resolução de inequações do primeiro grau com uma variável

Você já sabe que as inequações são *sentenças numéricas abertas* que exprimem a *desigualdade* entre duas expressões numéricas. Os dois membros de uma inequação são agora "ligados" pelos sinais:

$$<, >, \leq, \geq, \neq$$

São denominadas *inequações do primeiro grau* aquelas cuja variável figura com expoente 1 (um), como, por exemplo:

$$x < 3; \quad 8y + -3 > 5y + 9; \quad \frac{3 \times \square}{4} \leq \frac{1}{2}; \quad 5x \neq -1$$

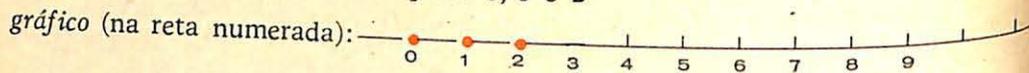
Resolver uma inequação, num certo Conjunto-Universo (ou num Conjunto-Substituição), é determinar o seu *Conjunto-Verdade*, cujos elementos, quando existem, são chamados *valôres-verdade* ou soluções.

NOTA: Não será usada, para as inequações, a palavra raiz empregada para as equações.

Dêse modo, resolvendo a inequação:

$$x < 3, \quad U = I$$

temos: $V = \{0, 1, 2\} \implies$ soluções: 0, 1 e 2

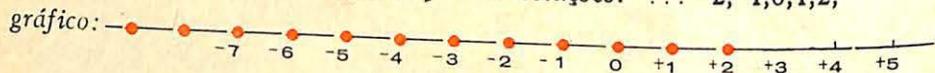


Se fôsse: $x < 3, \quad S = \{4, 5, 6, 7\}$

teríamos: $V = \emptyset \implies$ não há solução

Se fôsse: $x < 3, \quad U = I_r$

teríamos: $V = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\} \implies$ soluções: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2,$



Se fôsse: $x < 3, \quad U = Q_r$

teríamos: $V = \{\text{n.}^\circ\text{s racionais relativos menores que } 3\}$

\implies soluções: todos os n.ºs racionais relativos menores que 3

11. Inequações equivalentes. Princípios: P. A. D. e P. M. D.

Inequações equivalentes são as que possuem o mesmo *Conjunto-Verdade*. Exemplos:

$$x < 3 \quad \text{e} \quad 2x < 6, \quad U = I$$

são inequações equivalentes, pois o *Conjunto-Verdade* de ambas é:

$$V = \{0, 1, 2\} \quad (\text{Experimente!})$$

A resolução de uma inequação obedece à mesma orientação estudada na das equações: procura-se transformá-la em inequações equivalentes, cada vez mais simples. Para isso serão usados os seguintes Princípios:

Princípio aditivo da desigualdade (P. A. D.):

Se uma desigualdade é verdadeira, então, somando um mesmo número aos dois membros, a desigualdade continua verdadeira. Exemplo:

se $5 > 2$ é V, então somando +3, por exemplo, aos dois membros,

vem: $5 + 3 > 2 + 3$, que também é V (pois: $8 > 5$); somando -3, por ex., vem: $5 - 3 > 2 - 3$, ainda V (pois: $2 > -1$).

Coisa análoga ocorrerá com uma inequação quando se soma o mesmo número (ou uma expressão) aos seus dois membros: dará como resultado uma inequação equivalente. Exemplos:

1.º se $x \leq 5, U = I$, tem por $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, então somando +2, por ex., aos dois membros, vem:

$$x + 2 \leq 5 + 2, \quad U = I, \quad \text{onde} \quad V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

são, portanto, inequações equivalentes.

2.º se $2x > 5 + 1x, U = I$, tem por $V = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$, então somando $-1x$, por ex., aos dois membros, vem:

$$2x - 1x > 5 + 1x - 1x, \quad U = I, \quad \text{onde} \quad V = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$$

ou seja, inequações equivalentes (experimente!). Como:

$$\begin{aligned} 2x + -1x &> 5 + 1x + -1x \\ \text{ou} \quad 2x + -1x &> 5 \quad \quad \quad \underbrace{1x + -1x}_0 \end{aligned}$$

segue-se que: a "passagem" de um termo (no ex., $+1x$) de um membro para outro é feita trocando-se o seu sinal qualificativo.

3.º Verifique que:

$$5x + -8 < 3x + 12$$

e $5x + -3x < 12 + 8$, são inequações equivalentes.

Princípios multiplicativos da desigualdade (P. M. D.)

Observe agora: se $3 < 5$ é V, então:

1.º Multiplicando os dois membros por um mesmo número positivo, +2, por ex., vem:

$$+2 \times 3 < +2 \times 5, \quad \text{que também é V (pois: } +6 < +10)$$

Como você verificará, se fizer outros exemplos semelhantes (isto é, multiplicar ambos os membros da desigualdade por um mesmo número positivo), que as coisas se passam como no exemplo acima, segue-se que:

multiplicando ambos os membros de uma desigualdade verdadeira por um mesmo número positivo, a sentença obtida é uma desigualdade verdadeira de mesmo sentido que a primeira.

Este é um Princípio Multiplicativo da Desigualdade. Indicação: P.M.D₊

2.º) Multiplicando os dois membros, por um mesmo número negativo, -2, por ex., vem:

$-2 \times 3 < -2 \times 5$, que é falsa (F), pois: $-6 < -10$ é F enquanto que:

$-2 \times 3 > -2 \times 5$ é verdadeira (V), pois: $-6 > -10$ é V

Então, se:

e $3 < 5$ é V $\begin{matrix} < & \leftarrow \\ & & \leftarrow \end{matrix}$
 $-2 \times 3 > -2 \times 5$ é V $\begin{matrix} > & \leftarrow \\ & & \leftarrow \end{matrix} \times -2$

Segue-se que:

Multiplicando ambos os membros de uma desigualdade verdadeira por um mesmo número negativo, a sentença obtida só continuará verdadeira se "trocarmos" o sentido da desigualdade: de < para > ou de > para <.

Este, também, é um Princípio Multiplicativo da Desigualdade. Indicação: P.M.D₋

Mais um exemplo: seja a desigualdade

$$-5 > -8 \quad (V)$$

multiplicando-a por +3: $-15 > -24 \quad (V)$ (o "sentido" de > foi **conservado**)

multiplicando-a por -3: $+15 < +24 \quad (V)$ (o "sentido" de > foi **trocado** para <)

1. Usando o P.A.D., faça com que o primeiro membro, das seguintes inequações, tenha somente termos com x e o segundo membro só termos numéricos (constantes):

1.º) $5x + 3 > 7$

6.º) $\frac{2}{3} + 1 \leq x + \frac{-1}{2}$

2.º) $9x < 2x + -1$

7.º) $\frac{3}{2}x + -4 + 2\frac{1}{5} \neq 12x$

3.º) $x + -4x > 0$

8.º) $2x + -1 > 2x + \frac{-1}{0}$

4.º) $3x + 8 \neq -2 + 7x$

9.º) $3x + -3x < 0$

5.º) $\frac{2}{3} + 1 \geq x + \frac{-1}{2}$

10.º) $6x + x + 3x \leq 0$

2. Usando os P.M.D., complete as desigualdades, depois de efetuar as operações indicadas nas seguintes desigualdades:

1.º) $5 > 2$

2.º) $-3 < \frac{1}{2}$

$+3 \times 5 \dots +3 \times 2$

$-2 \times -3 \dots -2 \times \frac{1}{2}$

$-2 \times 5 \dots -2 \times 2$

$-\frac{1}{5} \times -3 \dots -\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

$+\frac{1}{3} \times 5 \dots +\frac{1}{3} \times 2$

$+5 \times -3 \dots +5 \times \frac{1}{2}$

(NOTA: Multiplicar 5 por $+\frac{1}{3}$, como você já sabe, é o mesmo que dividir 5 por 3)

Valendo-se ainda dos P.M.D., o mesmo se dá, por ex., com a inequação:

$x > 4 \quad U = Q_r$

onde: $V = \{\text{n.ºs racionais relativos maiores que } 4\}$

Multiplicando os dois membros por 2, obtemos a inequação equivalente:

$2x > 8, \quad U = Q_r$

onde: $V = \{\text{n.ºs racionais relativos maiores que } 4\}$ (experimental!)

Multiplicando por -1 porém, a inequação equivalente só será obtida "trocando-se" o sinal $>$ para $<$, isto é:

$$-2x < -8, U = Q_r$$

pois temos ainda: $V = \{\text{n.}^\circ\text{s racionais relativos maiores que } 4\}$

Como aplicação dos P.M.D., observe a resolução das seguintes inequações:

1.^a) $5x > 10$, $U = Q_r$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{5}$ (que é o elemento inverso de 5), vem:

$$\underbrace{\frac{1}{5} \times 5x}_{1} > \frac{1}{5} \times 10$$

ou $x > 2$, onde: $V = \{\text{n.}^\circ\text{s racionais relativos maiores que } 2\}$

\Rightarrow Soluções: todos os n.ºs racionais relativos maiores que 2.

2.^a) $-\frac{1}{3}x \leq 7$, $U = Q_r$

Multiplicando ambos os termos por -3 (que é o elemento inverso de $-\frac{1}{3}$):

$$\underbrace{-3 \times -\frac{1}{3}x}_{1} \geq -3 \times 7 \quad (\text{"trocou" para } \geq \text{ em virtude do P.M.D.})$$

ou $x \geq -21$, onde: $V = \{\text{n.}^\circ\text{s racionais relativos maiores ou iguais a } -21\}$

\Rightarrow Soluções: todos os n.ºs racionais relativos maiores ou iguais a -21

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 74

Resolver as seguintes inequações, aplicando o P.A.D. e os P.M.D.:

1.^a) $8x + -3 > 5x + 9$, $U = I$

Temos: $8x + -5x > 9 + 3$ (... "passando" — pelo P.A.D. — os termos com x para o 1.º membro e as constantes para o 2.º...)

$$3x > 12$$

(... "reduzindo" ...)

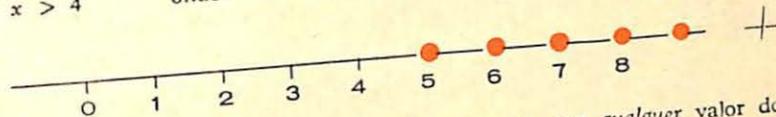
$$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times 12$$

(... pelo P.M.D., ...)

$$x > 4$$

onde: $V = \{5, 6, 7, 8, \dots\} \Rightarrow$ Soluções: 5, 6, 7, 8, ...

gráfico:



Verificação: Basta substituir x , na inequação proposta, por qualquer valor do Conjunto-Verdade, por ex., 5:

$$\begin{aligned} 8(5) + -3 &> 5(5) + 9 \\ 40 + -3 &> 25 + 9 \\ 37 &> 34 \quad (V) \end{aligned}$$

2.^a) $2x + -5(3x + 1) > 19 + -1x$, $U = I_r$

Temos: $2x + -15x + -5 > 19 + -1x$ (... "eliminando" os parênteses ...)

e daí:

$$\begin{aligned} 2x + -15x + 1x &> 19 + 5 \\ (2 + -15 + 1)x &> 24 \end{aligned}$$

$$-12x > 24$$

ou

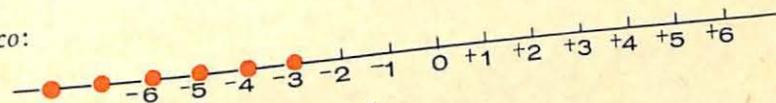
$$12x < -24 \quad (\text{multiplicando os dois membros por } -1)$$

e

$$x < -2$$

onde: $V = \{\dots -5, -4, -3\} \Rightarrow$ Soluções: $\dots -5, -4, -3$.

gráfico:



Faça você mesmo a verificação.

3.^a) $\frac{3y}{2} + \frac{-5(y + -2)}{4} \leq 8 + \frac{1 + -2y}{2}$, $U = Q_r$

Convertendo as "frações" ao mesmo denominador comum, vem:

$$\frac{6y}{4} + \frac{-5(y+2)}{4} \leq \frac{32}{4} + \frac{2(1-2y)}{4}$$

Multiplicando ambos os membros por 4:

$$6y + -5(y+2) \leq 32 + 2(1-2y)$$

e daí:

$$6y + -5y + 10 \leq 32 + 2 + -4y$$

$$6y + -5y + 4y \leq 32 + 2 + -10$$

$$(6 + -5 + 4)y \leq 24$$

$$5y \leq 24$$

$$y \leq \frac{24}{5}$$

onde: $V = \left\{ n.^\circ\text{s racionais relativos menores ou iguais a } \frac{24}{5} \right\}$

\Rightarrow Soluções: todos os n.ºs racionais relativos menores ou iguais a $\frac{24}{5}$

NOTA: No caso de a inequação ter os seus membros ligados pelo sinal \neq (diferente de), como, por ex.:

$$3x \neq 2x + -5$$

vale o P.M.D.: multiplicando-se os dois membros por qualquer número (positivo ou negativo), obtém-se sempre uma desigualdade equivalente. Experimente...

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 75

Resolver as seguintes inequações:

1.ª $3x + -5 < x + 7, U = I$

6.ª $\frac{4y + -3}{8} \leq 1 + \frac{-1(y+3)}{2}, U = Q_r$

2.ª $6y + -8 \geq 7y + 2, U = I_r$

7.ª $\frac{2x + -1}{5} + -3(4 + -1x) < 12 + \frac{1 + 5x}{3}, U = Q_r$

3.ª $6(x + -2) + -3x > 0, U = I$

8.ª $3x + a > x + b, U = Q_r$

4.ª $-2(z+1) + 5z \leq 4 + -3(2z+1), U = Q_r$

9.ª $ax + -b \neq 0 \quad (a > 0), U = Q_r$

5.ª $\frac{3x}{2} + -5 \neq \frac{x + -1}{3}, U = I$

10.ª $mx + -n < -px \quad (m + p > 0), U = Q_r$

Uso de quantificadores na resolução de inequações

Você pode, para precisar sua linguagem matemática, usar os *quantificadores* a fim de exprimir a "quantidade" de valores de x que tornam uma desigualdade verdadeira. Exemplos:

Seja a inequação: $0.x < 5, U = Q_r$

Você sabe que qualquer número multiplicado por 0 tem como resultado 0 e é, portanto, menor que 5. Logo:

para $0.x < 5, \forall x$ é o quantificador que deve ser usado.

Se: $0.x < -5, U = Q_r$

e, como qualquer número multiplicado por 0 tem como resultado 0 e é, portanto, maior que -5, segue-se que:

$$\nexists x \mid 0.x < -5$$

Se fôsse: $3.x > 6, U = I$

teríamos: $V = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ e, portanto:

para $3.x > 6, \exists x$ é o quantificador indicado.

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 76

1. Preencha com o respectivo *quantificador* cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = Q_r$:

1.ª ... , $0.x > 3$

6.ª ... , $3x + 5 > 3x + 7$

2.ª ... , $0.x \leq -2$

7.ª ... , $8x + 3 < 8x + 3$

3.ª ... , $2x < 4$

8.ª ... , $5x + 4 \geq 3x + 2x + 2$

4.ª ... , $0.x > 0$

9.ª ... , $\frac{x}{3} \neq 2$

5.ª ... , $0.x \neq 0$

10.ª ... , $\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$

2. Verifique se é V ou F cada uma das seguintes sentenças numéricas abertas, sendo $U = Q_r$:

1.ª $\forall x, 3x = 6$

7.ª $\exists x, 0.x < 8$

2.ª $\exists x, 3x = 6$

8.ª $\forall x, 0.x < 8$

3.ª $\nexists x, 3x = 6$

9.ª $\nexists x, 0.x < 8$

4.ª $\forall x, 0.x = 0$

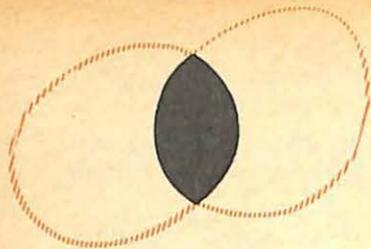
10.ª $\forall x, 0.x > 0$

5.ª $\exists x, 0.x = 9$

11.ª $\exists x, -3x < 0$

6.ª $\nexists x, 0.x = -8$

12.ª $\nexists x, 2x \geq 6$



Variável sujeita a duas condições

\cap Inequações simultâneas ou conjuntivas
 \Rightarrow Intersecção de conjuntos-verdade

Suponha que, na Feira de Ciências de seu Ginásio, possam concorrer somente alunos *maiores de 11 anos* e alunos *menores de 18 anos*. Este é um problema no qual a variável x (que representa a idade dos alunos) está sujeita a duas condições, isto é:

$$x > 11 \text{ e } x < 18$$

Quais são os alunos que podem participar dessa Feira?

São os que possuem *mais de onze anos e menos de dezoito anos*, ao mesmo tempo, isto é, *simultaneamente*. Logo, podem participar da Feira os que têm: 12, 13, 14, 15, 16 e 17 anos de idade, ou seja, aqueles cujas idades satisfazem às duas condições.

NOTA: Estamos considerando somente alunos com idades completas, a fim de facilitar o raciocínio que se está efetuando.

Você pode estudar problemas como este, com *muito mais precisão*, usando o que conhece da *linguagem dos conjuntos*. Assim, por exemplo, seja a sentença:

$$x > 3 \text{ e } x < 8$$

composta de duas sentença simples ($x > 3$, $x < 8$), ligadas pelo conectivo *e*, e procuremos o *Conjunto-Verdade* dessa sentença, tomando para "universo" o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Temos:

$$V_{x > 3} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (\text{Conjunto-Verdade da sentença } x > 3)$$

$$V_{x < 8} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (\text{Conjunto-Verdade da sentença } x < 8)$$

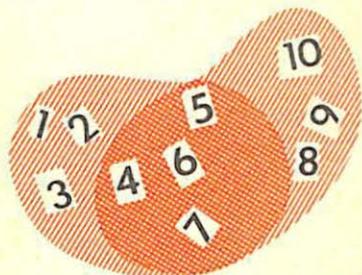
Ora, o *Conjunto-Verdade* da sentença composta:

$$x > 3 \text{ e } x < 8$$

é formado pelos elementos que pertencem *simultaneamente* aos Conjuntos-Verdade das sentenças simples que a compõem, ou seja, é o *conjunto-intersecção* de ambos. Logo:

$$V = V_{x > 3} \cap V_{x < 8}$$

$$\text{ou } V = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 5, 6, 7\}$$



Usando o símbolo \wedge (lê-se: "e") para o conectivo e que liga duas sentenças, ao invés de:

$$x > 3 \text{ e } x < 8 \text{ escreveremos: } x > 3 \wedge x < 8$$

Então: *tôda vez que duas sentenças numéricas abertas estão ligadas pelo conectivo \wedge , o Conjunto-Verdade da sentença composta é dado pela intersecção dos Conjuntos-Verdade dessas sentenças.*

As inequações resultantes ($x > 3 \wedge x < 8$, no exemplo) são denominadas *simultâneas* ou *conjuntivas*, no "universo" considerado, porque se procuram valores de x que satisfaçam *simultaneamente* a ambas as sentenças e somente a ambas.

OBSERVAÇÃO: As inequações *simultâneas* podem apresentar-se de outra maneira. Assim, por exemplo:

$x > 3 \wedge x < 8$ pode ser escrita: $3 < x < 8$, que pode ser "desdobrada" nas duas inequações: $x > 3$ e $x < 8$.

Outros exemplos de resolução de inequações simultâneas:

$$1.^\circ) \quad y > -3 \wedge y < 2, \quad S = \{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2\}$$

Basta determinar o *Conjunto-Verdade* de cada inequação e, a seguir, a *intersecção* deles, isto é:

$$V = \{-2, -1, 0, +1, +2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, +1\} = \{-2, -1, 0, +1\}$$

$$2.^\circ) \quad x \leq 2 \wedge x > 2, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Temos:

$$V = \{0, 1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \quad (\text{não há solução})$$

$$3.^{\circ}) \quad 2 < \frac{3y + -7}{4} \leq 5, \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ou "desdobrando" por meio do conectivo e:

$$\frac{3y + -7}{4} > 2 \quad \wedge \quad \frac{3y + -7}{4} \leq 5$$

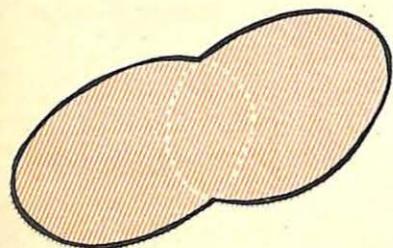
Para a primeira inequação: $\frac{3y + -7}{4} > 2$, temos: $3y + -7 > 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3y > 15 \Leftrightarrow y > 5$$

e, para a segunda: $\frac{3y + -7}{4} \leq 5$, temos: $3y + -7 \leq 20 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3y \leq 27 \Leftrightarrow y \leq 9$$

Logo: $V = \{6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{6, 7, 8, 9\}$



\cup Inequações disjuntivas

\Rightarrow Reunião de conjuntos-verdade

Suponha, agora, que você tem duas sentenças ligadas pelo conectivo **ou**, cujo emprêgo em Matemática já foi destacado neste livro (pág. 124). Seja, por exemplo, a sentença:

$$x > 3 \text{ ou } x < 8, \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

composta de duas sentenças simples ($x > 3$, $x < 8$) ligadas pelo conectivo **ou**.

Qual o seu Conjunto-Verdade?

O significado do conectivo **ou** diz: "o Conjunto-Verdade da sentença composta é constituído pelos elementos que tornam verdadeira *uma*, ou

outra, ou ainda, *ambas* as sentenças que a compõem". Portanto, é o **Conjunto-reunião** dos conjuntos-verdade das sentenças propostas.

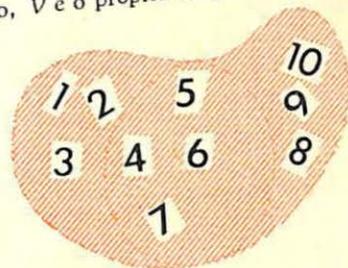
Indicando o conectivo **ou** pelo símbolo: \vee (lê-se: "ou"), temos:

$$x > 3 \vee x < 8$$

cujo Conjunto-Verdade é a **reunião** dos conjuntos-verdade de $x > 3$ e $x < 8$, isto é:

$$V = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

NOTA: Neste exemplo, V é o próprio conjunto "universo" S .

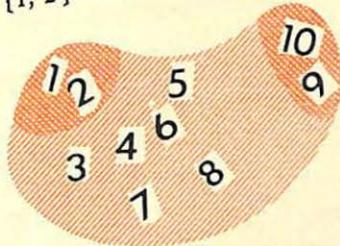


Seja, agora, a sentença composta:

$$x < 3 \vee x > 8, \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

cujo Conjunto-Verdade é:

$$V = \{1, 2\} \cup \{9, 10\} = \{1, 2, 9, 10\}$$



Então: *tôda vez que duas sentenças estão ligadas pelo conectivo \vee , o Conjunto-Verdade da sentença composta é dado pela reunião dos Conjuntos-Verdade dessas sentenças.*

Tais inequações são denominadas **disjuntivas** no "universo" considerado, porque se procuram valores de x que podem não satisfazer a ambas simultaneamente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 77

Determinar o Conjunto-Verdade das seguintes sentenças compostas, onde a variável assume valores no conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

1.º) x é um número par ou x é um número maior que 5

$$\text{Temos: } V = \underbrace{\{0, 2, 4, 6, 8\}}_{\text{n.º par}} \cup \underbrace{\{6, 7, 8, 9\}}_{\text{n.º } > 5} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

2.º) x é um número par e x é um número maior que 5

$$\text{Temos: } V = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{6, 7, 8, 9\} = \{6, 8\}$$

3.º) y é um número menor que 2 e y é um número maior que 4

$$\text{Temos: } V = \{0, 1\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\} = \emptyset$$

4.º) y é um número menor que 2 ou y é um número maior que 4

$$\text{Temos: } V = \{0, 1\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 1, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 78

1. Resolver as seguintes inequações simultâneas (conjuntivas):

$$1.ª) x > 2 \wedge x < 9, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$2.ª) x \geq 2 \wedge x > 2, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$3.ª) y > -1 \wedge y < 3, \quad S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$4.ª) z > 5 \wedge z < 4, \quad S = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$5.ª) 5 \leq x + 3 < 7, \quad S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$6.ª) -1 < \frac{2x + 1}{3} \leq 5, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

2. Resolver as seguintes inequações disjuntivas: seguem-se sentenças compostas das mesmas sentenças simples do exercício anterior, porém ligadas com o conectivo ou (\vee), isto é:

$$1.ª) x > 2 \vee x < 9, \quad S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

etc...

3. Determinar o Conjunto-Verdade das seguintes sentenças compostas no conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

$$1.ª) x \text{ é um número ímpar e } x < 5;$$

$$2.ª) x \text{ é um número ímpar ou } x < 5;$$

$$3.ª) y \text{ é um número divisível por 3 ou } y \leq 6;$$

$$4.ª) y \text{ é um número divisível por 3 e } y \leq 6;$$

$$5.ª) z \text{ é um número par e } z \text{ é um número ímpar};$$

$$6.ª) z \text{ é um número par ou } z \text{ é um número ímpar};$$

$$7.ª) x = 5 \text{ e } x = 8;$$

$$8.ª) x = 5 \text{ ou } x = 8;$$

$$9.ª) y + 2 > 3 \text{ e } y \text{ é múltiplo de } 4;$$

$$10.ª) y + 2 > 3 \text{ ou } y \text{ é múltiplo de } 4.$$



Novas técnicas operatórias para simplificar o cálculo

Você simplificou os numerais dos números positivos quando, ao invés de representar, por exemplo, três positivo por +3, escreveu 3 (deixando de usar o sinal qualificativo +). Visando, principalmente, a facilitar a técnica de cálculo para resolver equações, você pode, também, representar os números negativos de outro modo.

Assim, por exemplo, lembrando que o -3 é igual ao oposto de +3 (ou de 3), isto é:

$$\text{o oposto de } 3 \text{ é igual a } -3$$

e como, em Matemática, a relação oposto de é indicada pelo sinal -, escrito à esquerda do numeral que representa o número, vem:

$$-3 = -3$$

Logo, dizer "três negativo" ou "oposto de três" significa, de agora em diante, a mesma coisa e a representação de -3 por -3 trará benefícios na técnica operatória, como você irá ver. Da mesma forma, pode-se escrever:

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad -0,8 = -0,8, \quad -2\frac{1}{5} = -2\frac{1}{5}$$

Que significa: $-(-4)$?

Significa o oposto do oposto de 4, isto é, o próprio 4.

Então, se $-(-4) = 4$, podemos escrever, na prática: $-(-4) = +4$ e dizer: "menos por menos dá mais" ou "se menos precede parênteses, a eliminação desses parênteses troca o sinal do "número".

$$\text{E: } -[-(-4)] ?$$

$$\text{É fácil ver que: } -[-(-4)] = -4$$

Da mesma forma, a expressão $-x$ será lida "oposto de x ", ao invés de " x negativo", porque não sabemos se $-x$ se refere a um número positivo ou número negativo. É bom lembrar também que:

para qualquer número x do conjunto dos números racionais relativos (Q_r), existe um único número oposto $-x$, tal que: $x + (-x) = 0$.

Assim, se:

$$x = 3, \quad \text{então: } 3 + (-3) = 0$$
$$x = -3 = -3, \quad \text{então: } (-3) + [-(-3)] = (-3) + 3 = 0$$

No cálculo, onde intervêm números negativos, pode-se usar a "linguagem" dos *opostos*. Lembrando, por exemplo, que a *subtração* de dois números relativos quaisquer, dados numa certa ordem, transforma-se numa *adição* do primeiro com o *oposto* do segundo (pág. 137), temos:

$$5 - 3 = 5 + -3 = 5 + (-3) = 2 \quad \text{e, portanto:}$$

ao invés de escrever: $5 + -3$
você pode escrever: $5 + (-3)$
ou, diretamente: $5 - 3$

Da mesma forma:

ao invés de escrever: $5 - -3$
você pode escrever: $5 - (-3)$ ↘ valendo a técnica: eliminando parênteses, "menos" por "menos", dá "mais"
ou, diretamente: $5 + 3$ ✓

Também:

ao invés de escrever: -3×-4
você pode escrever: $(-3) \times (-4)$ ↘ valendo a técnica: multiplicando "menos" por "menos", dá "mais"
ou, diretamente: $+12$ ✓

ao invés de escrever: $-5 : \frac{1}{2}$

você pode escrever: $(-5) : \left(+\frac{1}{2} \right)$ ↘ valendo a técnica: dividindo "menos" por "mais", dá "menos"
ou, diretamente: -10 ✓

Conclua você os exemplos seguintes:

1.º) ao invés de escrever: 6×-3
você pode escrever: $(+6) \times (-3)$ ↘ técnica: multiplicando "mais" por "menos", dá
ou, diretamente: -18 ✓

2.º) : -6×3
..... : $(-6) \times (+3)$ técnica:
..... : -18

3.º) : 6×3
..... : $(+6) \times (+3)$ técnica:
..... : $+18$

4.º) : $5 : \frac{-1}{2}$
..... : $(+5) : \left(-\frac{1}{2} \right)$ técnica:
..... : -10

5.º) : $-5 : \frac{-1}{2}$
..... : $(-5) : \left(-\frac{1}{2} \right)$ técnica:
..... : $+10$

6.º) : $5 : \frac{1}{2}$
..... : $(+5) : \left(+\frac{1}{2} \right)$ técnica:
..... : $+10$

Observe, agora, com atenção os seguintes exercícios exploratórios:

1.º) $\underbrace{-5 + 3}_{\text{oposto da soma: } (5+3)} = -8 = (-5) + \underbrace{(-3)}_{\substack{\text{oposto de } 5 \\ \text{oposto de } 3}}$

2.º) $\underbrace{-[8 + (-3)]}_{\text{oposto da soma: } [8+(-3)]} = -5 = (-8) + \underbrace{3}_{\substack{\text{oposto de } 8 \\ \text{oposto de } (-3)}}$

Que conclui você?

Conclui que: "o oposto da soma é igual à soma dos opostos". Este resultado é importantíssimo para o cálculo.

Aplicações:

$$1.^a) \underbrace{a - (b + c)} = a + [-(b + c)] \quad (\dots \text{definição de subtração})$$

$$= a + (-b) + (-c) \quad (\dots \text{"o oposto da soma é igual à soma dos opostos"})$$

$$\rightarrow = a - b - c$$

$$2.^a) \underbrace{a - (b - c)} = a - [b + (-c)] \quad (\text{outra maneira de escrever})$$

$$= a + \{-[b + (-c)]\} \quad (\dots \text{definição de subtração})$$

$$= a + \{(-b) + c\} \quad (\dots \text{"o oposto da soma ..."})$$

$$= a + (-b) + c \quad \text{ou}$$

$$\rightarrow = a - b + c$$

Vale, pois, para aplicações desse tipo, a seguinte técnica:

se o sinal - (menos) precede parênteses (ou colchêtes, chaves, ...), a eliminação desses parênteses troca o sinal dos numerais dos números contidos nêles.

Outros exemplos:

$$1.^o) 5 - (3 + 12) = 5 - 3 - 12$$

$$2.^o) 3 - \left(-\frac{1}{2} + 0,3 - 1\right) = 3 + \frac{1}{2} - 0,3 + 1$$

$$3.^o) x - \left(2y + z - \frac{t}{3}\right) = x - 2y - z + \frac{t}{3}$$

$$4.^o) 5 - [-(-4 + 3)] = 5 - [+4 - 3] = 5 - 4 + 3$$

$$5.^o) x - \{ -[-(-1)] \} = x - \{ -[+ 1] \} = x - \{ -1 \} = x + 1$$

$$6.^o) y - \{ -(x - y) \} = y - \{ -x + y \} = y + x - y$$

NOTA: Você já sabe que no caso de os parênteses virem precedidos do sinal + (mais) a eliminação dos parênteses se fará naturalmente, sem trocar o sinal dos numerais dos números contidos nêles. Exemplos:

$$2 + (8 - 3) = 2 + 8 - 3$$

$$a + (-b + c - d) = a - b + c - d$$

$$2x + [x - (1 - x)] = 2x + [x - 1 + x] = 2x + x - 1 + x$$

Elimine os parênteses (colchêtes, chaves, ...) das seguintes expressões:

$$1.^a) 5 - (3 - 2 + 8)$$

$$6.^a) x - (2x + 3y - 1)$$

$$2.^a) x + (y - z + t + u)$$

$$7.^a) \frac{3x}{2} + [(x - 2) - 8]$$

$$3.^a) \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{2} + (0,2 - 1)\right]$$

$$8.^a) x - [1 + \{-(x + 1)\}]$$

$$4.^a) - \left\{ - \left[2,3 + \left(1 - 0,7 + \frac{1}{5} \right) \right] \right\}$$

$$9.^a) y - \{ -[-(-5 + z)] \}$$

$$5.^a) 0 - [-(-1 + 0 + 1)]$$

$$10.^a) -\frac{4x}{5} - \left[(-x - 1) + \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right]$$

APLICAÇÕES DAS NOVAS TÉCNICAS
NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

$$1.^a) \text{ A equação: } \frac{1}{2}(x + -3) + -5(2x + 1) = \frac{3}{4}x + 2$$

estudada na pág. 206 e que pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{x + -3}{2} + \frac{-5(2x + 1)}{1} = \frac{3x}{4} + \frac{2}{1}$$

é, com a nova técnica, simplificada para:

$$\frac{x - 3}{2} - \frac{5(2x + 1)}{1} = \frac{3x}{4} + \frac{2}{1}$$

como geralmente aparece na "tradução" de um problema.

Então, sendo o m.m.c. dos denominadores igual a 4, temos:

$$2(x - 3) - 20(2x + 1) = 3x + 8$$

$$\text{ou } 2x - 6 - 40x - 20 = 3x + 8$$

$$\text{ou } 2x - 40x - 3x = 8 + 20 + 6$$

$$(2 - 40 - 3)x = 34$$

$$\text{ou } -41x = 34 \iff x = 34 : (-41)$$

$$\text{ou } x = \frac{-34}{41} \implies \text{raiz: } \frac{-34}{41}$$

(não se esqueça de, ao eliminar os parênteses, trocar o sinal dos termos internos se os parênteses forem precedidos pelo sinal -)

2.^a) A inequação: $2x + -5(3x + 1) > 19 + -1x$, $U = I_r$

resolvida na pág. 219, pode agora ser escrita na forma **simplificada**:

$$2x - 5(3x + 1) > 19 - x$$

e, portanto: $2x - 15x - 5 > 19 - x$

ou $2x - 15x + x > 19 + 5$

$$(2 - 15 + 1)x > 24$$

ou $-12x > 24$

ou $12x < -24$

(não se esqueça que, ao trocar o sinal dos dois membros da igualdade, você deve mudar o *sentido* da mesma...)

e $x < (-24) : 12$

ou $x < -2$ onde: $V = \{ \dots, -5, -4, -3 \}$

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO — GRUPO 80

1.^o) De cinco vezes um certo número, diminuimos 8; o resultado é o mesmo que o dobro desse número aumentado de 16. Determinar esse número.

Temos:

número procurado: x

Equação: $5x - 8 = 2x + 16$

Resolvendo-a, com a *nova técnica simplificada*, vem:

$$5x - 2x = 16 + 8$$

ou $3x = 24 \iff x = 8$

Logo: o número procurado é 8. Verificação: $5 \times 8 - 8 = 2 \times 8 + 16$

$$40 - 8 = 16 + 16$$

$$32 = 32 \quad (V)$$

2.^o) Se de 126 você subtrair a quinta parte da soma indicada de um certo número com 4, encontrará 30. Qual é esse número?

Temos:

número procurado: x

Equação: $126 - \frac{x + 4}{5} = 30$

Resolvendo-a:

$$630 - (x + 4) = 150$$

$$630 - x - 4 = 150 \quad (\text{lembre-se: o m.m.c. é 5, daí...})$$

$$-x = 150 - 630 + 4 \quad (\text{não esqueça de trocar o sinal...})$$

$$-x = -476$$

ou $x = 476$

Logo: o número procurado é 476. Verificação: $126 - \frac{476 + 4}{5} = 30$

$$126 - \frac{96}{5} = 30$$

$$30 = 30 \quad (V)$$

3.^o) A idade de um pai somada à idade de seu filho é igual a 42 anos. Sabendo-se que a idade do pai é cinco vezes a idade do filho, dizer a idade de cada um.

Temos:

se a idade do pai fôr representada por: x

a idade do filho será representada por: $42 - x$

a segunda condição que o problema determina (a idade do pai é cinco vezes a do filho) revela a equação:

$$x = 5(42 - x)$$

Resolvendo-a: $x = 210 - 5x$

ou $x + 5x = 210$

$$6x = 210 \iff x = 35$$

Logo:

a idade do pai 35

a idade do filho ... 7 anos $42 - 35 = 7$

4.^o) Paulo viveu $\frac{1}{6}$ de sua vida em Campinas, $\frac{2}{3}$ no Recife; mudou-se em seguida para Curitiba, onde viveu os 9 últimos anos de sua vida. Quantos anos viveu?

NOTA: Embora de aparência "tétrica" esse problema é análogo ao famoso problema que pretendeu determinar a idade de *Diófanto* (matemático grego que viveu no séc. II d. C.)

Se o n.^o de anos que Paulo viveu fôr representado por x , a seguinte equação traduzirá o problema:

$$\frac{x}{6} + \frac{2x}{3} + 9 = x$$

ou, resolvendo-a, $x = 54$. Logo, Paulo viveu 54 anos. "Tire" a prova.

5.^o) Joaquim, que tem uma banca no mercado, pretendia vender um certo número de ovos especiais a NCr\$0,05 cada um, a fim de lucrar uma certa importância. No transporte quebraram-se 20 ovos e Joaquim teve que vender os restantes a NCr\$0,06 cada, para obter o mesmo lucro. De quantos ovos dispunha Joaquim no início?

Se x representa o n.^o de ovos que Joaquim possuía no início, temos que:

$$(x - 20) \times 0,06$$

representa o *total* apurado na venda, quando foram descontados os 20 ovos quebrados. Por outro lado esse total representaria a *mesma importância* que seria recebida pela venda dos x ovos iniciais a NCr\$0,05 cada. Logo, a seguinte equação traduzirá o problema:

$$(x - 20) \times 0,06 = x \times 0,05$$

Resolvendo-a: $0,06x - 1,2 = 0,05x$

ou $0,01x = 1,2 \iff x = 120$

Portanto: Joaquim possuía no início 120 ovos. "Tire" a prova.

- 6.º) Elsa não tem ainda 15 anos, porém o *dôbro* de sua idade menos 4 anos é *maior* que a sua idade aumentada de 9 anos. Que idade tem Elsa? (NOTA: Subentenda-se: número de anos).

Se x representa a idade de Elsa, seguindo à risca a leitura do problema (quando diz: ... *porém o dôbro de sua idade* ...), obtemos a seguinte inequação:

$$2x - 4 > x + 9$$

Resolvendo-a:

$$x > 13$$

Observando que, no problema, Elsa *não tem* ainda 15 anos e que $x > 13$, segue-se que Elsa tem 14 anos.

ATENÇÃO: Pela natureza do problema, o Conjunto-Substituição da inequação: $2x - 4 > x + 9$ é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, pois os elementos de S representam as idades possíveis de Elsa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 81

- Três vezes um certo número somado com 20 é o mesmo que a metade desse número aumentado de 50. Que número é esse?
- A idade do Sr. João somada com a de Roberto é igual a 78 anos. Sabendo-se que a idade do Sr. João é o *quíntuplo* da de Roberto, qual a idade de cada um?
- Júlio é agora 15 anos mais *môço* que sua irmã Júlia. Em 6 anos a idade de Júlia se tornará o *dôbro* da de Júlio. Que idade têm eles agora?
- A idade de um pai é o triplo da do filho. Qual é a idade do pai, sabendo-se que daqui a 15 anos será o *dôbro* da do filho?
- Lília não tem ainda 12 anos, porém o triplo de sua idade menos 2 anos é *maior* que o *dôbro* de sua idade aumentado de 8 anos. Qual a idade de Lília?
- Se você subtrair $\frac{3}{5}$ da *têrça* parte da diferença indicada entre um certo número e 10 encontrará 20. Que número é esse?
- Determinar o número x que satisfaz à seguinte equação: $2(x + 5) - 3(2x - 1) = 5$.
- Determinar o *número* que satisfaz à seguinte condição: "o *dôbro* da soma indicada desse *número* com 5, menos o triplo da diferença indicada entre o *dôbro* desse *número* e 1 é igual a 5".
- Suponha que você diga a um seu colega: "cinco vezes o número de alunos de minha classe menos 12, dá como resultado 51 a mais que o triplo de alunos de minha classe" e pergunte quantos alunos tem sua classe. A resposta obtida, por intermédio da equação resultante, satisfará ao problema? Por quê? E se fôsse dito 50 ao invés de 51?

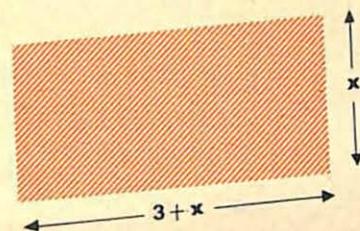
10. A capacidade de um tanque, medida em litros, tem mais de 20 e menos de 30. O número x de litros de gasolina contidos nesse tanque satisfaz à seguinte inequação:

$$x - (4x + 1) > -73$$

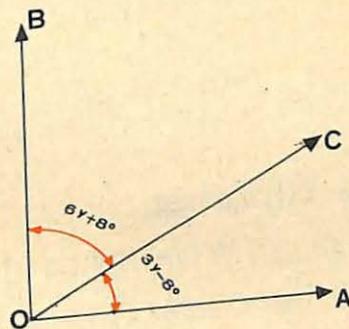
Sabendo-se ainda que o número de litros de gasolina é divisível por 3, qual a quantidade de gasolina contida nesse tanque?

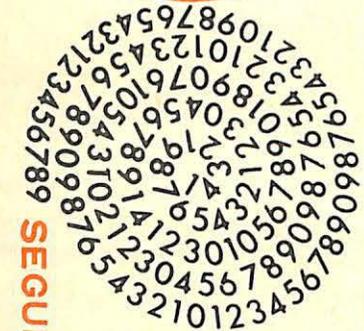
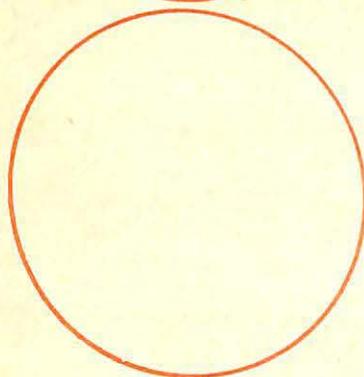
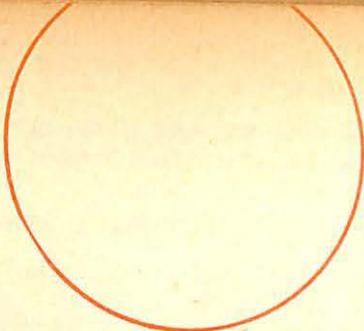
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 82

1. No retângulo $ABCD$, a medida de dois de seus lados é expressa em termos da variável x . Se o perímetro desse retângulo é igual a 14m, qual a medida dos lados \overline{AB} e \overline{BC} ?



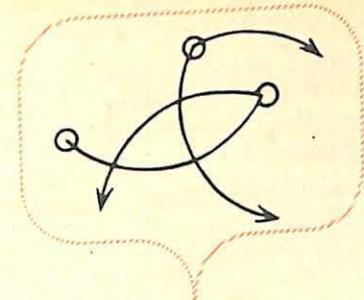
2. O ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ é reto e OC é uma semi-reta entre os lados desse ângulo que determina os ângulos: $\widehat{A\hat{O}C}$ e $\widehat{C\hat{O}B}$, cujas medidas estão expressas em termos da variável y . Qual a medida, em graus, de $\widehat{A\hat{O}C}$? E de $\widehat{C\hat{O}B}$? (Lembre-se que um ângulo reto mede 90 graus...)





SEGUNDA PARTE

Relações Binárias.
Sentenças abertas com duas variáveis.
Sistemas de equações simultâneas.



Relações Binárias.

1. Relações binárias; Sentenças abertas com duas variáveis.

Observe as seguintes relações, comumente usadas quando você se exprime em Português e em Matemática:

- ... é irmão de ...
- ... é primo de ...
- ... é aluno de ...
- ... é mais alto que ...
- ... é divisor de ...
- ... é igual a ...
- ... é menor que ...
- ... é múltiplo de ...

Coloque nos espaços pontilhados (...) das relações escritas à esquerda, nomes de pessoas conhecidas; nos das relações escritas à direita, números quaisquer. Você obterá sempre uma sentença que poderá ser Verdadeira (V) ou Falsa (F).

Assim, por exemplo:

Raul é irmão de Pedro
(é uma sentença V ou F, dependendo de Raul ser ou não irmão de Pedro)

- 2 é divisor de 8 (é V)
- 3 é divisor de 5 (é F)

As relações acima, denominadas binárias porque envolvem dois elementos, mostram a existência de sentenças abertas com duas variáveis, de larga aplicação nas suas relações diárias e em toda a Matemática. No exemplo:

... é divisor de ...

as reticências podem ser substituídas, respectivamente, por x e y, isto é:

x é divisor de y

que é uma sentença aberta nas variáveis x e y .

x e y , recebendo valores de um "universo" conhecido, determinam sentenças que podem ser V ou F . Observe, porém, que você precisará de um **par ordenado** de valores (um valor para x e outro para y) a fim de concluir se a sentença obtida é V ou F .

Assim, a sentença aberta com duas variáveis:

x é o dobro de y

torna-se uma sentença Verdadeira, para os seguintes pares de números escolhidos no Q :

2 é o dobro de 1, isto é: $(2,1)$

4 é o dobro de 2, isto é: $(4,2)$

6 é o dobro de 3, isto é: $(6,3)$

1 é o dobro de $\frac{1}{2}$, isto é: $(1, \frac{1}{2})$

7 é o dobro de $3\frac{1}{2}$, isto é: $(7, 3\frac{1}{2})$

Nesses pares (cujos valores foram escritos entre parênteses):

$(2,1)$ $(4,2)$ $(6,3)$, ... $(1, \frac{1}{2})$, ... $(7, 3\frac{1}{2})$, ...

a ordem em que figuram os números é muito importante, pois:

enquanto o par $(2,1)$, onde 2 é o primeiro elemento e 1 é o segundo elemento, torna a sentença verdadeira (2 é o dobro de 1) ...

o par $(1,2)$, onde 1 é, agora, o primeiro elemento e 2 é o segundo, torna a sentença falsa (1 não é o dobro de 2)

Por isso são chamados de *ordenados* os pares que tornam verdadeira uma sentença com duas variáveis. No par (x, y) , x é o primeiro elemento e y , o segundo. Logo, o *Conjunto-Verdade* da sentença aberta:

x é o dobro de y , no "universo" Q .

$$V = \{(2,1), (4,2), (6,3), (1, \frac{1}{2}), (7, 3\frac{1}{2}), \dots\}$$

que é um conjunto com infinitos elementos.

Se fôr escolhido como "universo" o conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$ o *Conjunto-Verdade* da sentença " x é o dobro de y " agora será *finito*, isto é: $V = \{(2,1), (4,2)\}$, cujos elementos $(2,1)$ e $(4,2)$ são os únicos *pares ordenados* que se podem obter com os elementos de S .

NOTA: Simbolicamente, a relação: " x é o dobro de y " é traduzida por: $x = 2y$ que é uma equação do primeiro grau nas variáveis x e y .

LEMBRETE AMIGO

Enquanto o *Conjunto-Verdade* de uma sentença aberta com uma variável é constituído por um conjunto de números, o *Conjunto-Verdade* de uma sentença aberta com duas variáveis é constituído por um conjunto de pares de números.

Uma curiosidade acêrca dos pares ordenados...

Você tem experiência da importância dos pares ordenados quando, por ex., referindo-se às combinações dos nomes José e Maria, sabe que o par:

(José, Maria) refere-se, certamente, ao nome de um colega (homem), e o par (Maria, José) refere-se, certamente, ao nome de uma colega ...

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 83

1. Determinar o *Conjunto-Verdade* das seguintes sentenças com duas variáveis (... que são relações binárias ...) no conjunto: $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

1.^a x é igual a y (simbolicamente: $x = y$)

Temos: $V = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \dots\}$ (conjunto infinito)

2.^a x é maior que y (simbolicamente: $x > y$)

Temos: $V = \{(1,0), (2,0), \dots, (2,1), (3,1), \dots, (3,2), (4,2), \dots\}$ (conjunto infinito)

NOTA: Lembre-se que o valor de x é o primeiro elemento do par e o de y , o segundo.

3.^a) x é primo com y

Temos:

$$V = \{(1,2), (1,3), \dots, (2,3), (2,5), (2,7), \dots, (3,4), (3,5), \dots, (8,9), (8,15), \dots\}$$

(conjunto infinito)

2. Determinar o *Conjunto-Verdade* das seguintes sentenças com duas variáveis no conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1.^a) x é igual a y

Temos:

$$V = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$
 (conjunto finito)

2.^a) x é divisor de y

Temos:

$$V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$
 (conjunto finito)

3.^a) x é igual a duas unidades a mais que y (simbolicamente $x = 2 + y$)

Temos:

$$V = \{(3,1), (4,2), (5,3)\}$$
 (conjunto finito)

NOTA: A técnica para se obterem os pares que sejam elementos de V , pode ser a seguinte: substitui-se y , da equação $x = 2 + y$, pelos elementos de S , isto é: 1, 2, 3, 4 e 5, e procura-se o correspondente valor de x para cada um desses valores. Assim:

para $y = 1$, temos: $x = 2 + 1 = 3$ e, portanto, o par: (3,1) (V)

para $y = 2$, temos: $x = 2 + 2 = 4$ e, portanto, o par: (4,2) (V)

para $y = 3$, temos: $x = 2 + 3 = 5$ e, portanto, o par: (5,3) (V)

para $y = 4$, temos: $x = 2 + 4 = 6$ e, portanto, o par: (6,4) (F)

para $y = 5$, temos: $x = 2 + 5 = 7$ e, portanto, o par: (7,5) (F)

Como 6 e 7 não pertencem a S , segue-se que os pares (6,4) e (7,5) não farão parte do *Conjunto-Verdade* procurado.

3. No "universo" formado pela família: [Pedro, Rosa, Gustavo, Cristina, Sílvio] sabe-se que Gustavo, Cristina e Sílvio são filhos do casal Pedro e Rosa. Determinar o *Conjunto-Verdade* das seguintes sentenças:

1.^a) x é filho de y

Temos: $V = \{(G,P), (G,R), (C,P), (C,R), (S,P), (S,R)\}$

(estamos usando somente a inicial de cada nome)

2.^a) x é irmão de y

Temos: $V = \{(G,C), (C,G), (G,S), (S,G), (C,S), (S,C)\}$

4. As seguintes relações binárias (... que são conjuntos de pares ordenados ...) foram selecionadas do conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Descreva, em linguagem corrente, a relação que liga o primeiro elemento (x) com o segundo (y):

1.^a) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Temos: x é igual a y (simbolicamente: $x = y$)

2. 1,2 . 2,4

Temos: x é metade de y (simbolicamente: $x = \frac{1}{2} y$)

1. Determinar o *Conjunto-Verdade* das seguintes sentenças com duas variáveis, no Conjunto: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

1.^a) x é a metade de y

2.^a) x é o dobro de y

3.^a) x é o triplo de y

4.^a) x é um terço de y

5.^a) x é múltiplo de y

6.^a) x é divisor de y

2. Idem, das seguintes sentenças com duas variáveis, no Conjunto: $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1.^a) x é menor que y

2.^a) x é raiz quadrada de y

3.^a) x é igual ou maior que y

4.^a) x é igual a três unidades a mais que y

5.^a) x é igual a duas unidades a menos que y

6.^a) x é primo com y

3. No "universo" formado pelas pessoas: [Mário, João, Raul, Lúcia, Dora], sabe-se que Mário e Lúcia são casados; Raul e Dora são casados; Raul e João são irmãos; Dora é filha de Mário e Lúcia. Construir o *Conjunto-Verdade* das seguintes sentenças com duas variáveis:

1.^a) x é marido de y

2.^a) x é irmão de y

3.^a) x é cunhado de y

4.^a) x é pai de y

5.^a) x é filha de y

6.^a) x é mulher de y

4. As seguintes relações binárias (apresentadas como pares ordenados) foram selecionadas do Conjunto: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

1.^a) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

2.^a) (2,1), (3,2), (4,3)

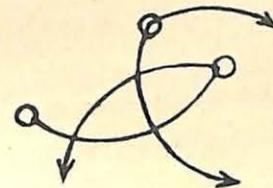
3.^a) (1,2), (2,4)

4.^a) (2,1), (4,2)

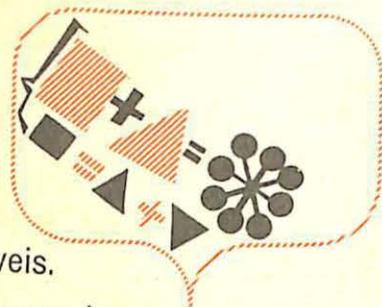
5.^a) (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)

6.^a) (2,1), (3,2), (4,3)

Que relações são essas?



$$x + y = 8$$



Sentenças abertas com duas variáveis.

Sistemas de equações simultâneas.

2. Sistemas de equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis

Muitos problemas da vida prática traduzem-se em sentenças abertas com duas variáveis e, portanto, em equações com duas variáveis. Vamos tratar das equações com duas variáveis do primeiro grau. Assim, por exemplo, seja:

1.º) Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui duas bolinhas a mais que Zeca. Quantas bolinhas possui cada um?

Se o número de bolinhas de Juca fôr representado por ... : x
de Zeca fôr representado por ... : y

então o problema será "traduzido" pelas seguintes equações:

$$x + y = 8 \text{ e } x = y + 2$$

A resolução da sentença composta dessas equações consiste em procurar valores de x e de y que satisfaçam **simultaneamente** ao sistema constituído pelas duas equações. Por isso:

$$x + y = 8 \wedge x = y + 2$$

é denominado sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis. Tal sistema é, geralmente, escrito sob a forma:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

significando, a chave, que se procuram valores de x e de y que satisfaçam simultaneamente a ambas as equações.

Êsses valores são denominados *solução*, ou *valores-verdade* do sistema e são *elementos* do Conjunto-Verdade V , que é a *intersecção* dos Conjuntos-Verdade das equações propostas.

Tomando para "universo" o conjunto dos números inteiros: $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, pois as bolinhas do problema só têm sentido quando inteiras ..., temos, indicando por:

$$V_1: \text{ o Conjunto-Verdade da equação: } x + y = 8$$

$$V_2: \text{ o Conjunto-Verdade da equação: } x = y + 2$$

que

$$V = V_1 \cap V_2$$

Para determinar os elementos de V_1 (lembre-se que, agora, os elementos do conjunto são *pares ordenados* ...) atribuímos valores *inteiros* a x e achamos o correspondente valor de y na equação: $x + y = 8$. Assim, para:

$$y = 0, \text{ temos: } x = 8 - 0 = 8 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (8,0)$$

$$y = 1, \text{ temos: } x = 8 - 1 = 7 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (7,1)$$

$$y = 2, \text{ temos: } x = 8 - 2 = 6 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (6,2)$$

$$y = 3, \text{ temos: } x = 8 - 3 = 5 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (5,3)$$

$$y = 4, \text{ temos: } x = 8 - 4 = 4 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (4,4)$$

$$\text{Logo: } V_1 = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), \dots\}$$

Da mesma forma será determinado V_2 , trabalhando com a equação: $x = y + 2$. Assim, para:

$$y = 0, \text{ temos: } x = 0 + 2 = 2 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (2,0)$$

$$y = 1, \text{ temos: } x = 1 + 2 = 3 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (3,1)$$

$$y = 2, \text{ temos: } x = 2 + 2 = 4 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (4,2)$$

$$y = 3, \text{ temos: } x = 3 + 2 = 5 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (5,3)$$

$$y = 4, \text{ temos: } x = 4 + 2 = 6 \quad \text{e, portanto, o par } \dots : (6,4)$$

$$\text{Logo: } V_2 = \{(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \dots\}$$

Como: $V = V_1 \cap V_2$, vem:

$$V = \{(8,0), (7,1), (6,2), \underline{(5,3)}, (4,4), (3,5), \dots\} \cap \{(2,0), (3,1), (4,2), \underline{(5,3)}, (6,4), \dots\}$$

ou $V = \{(5,3)\}$

Portanto: a *solução* do sistema proposto é o par: (5,3), e a resposta é: Juca tem 5 bolinhas e Zeca, 3.

Prova: n.º de bolinhas de Juca: 5
n.º de bolinhas de Zeca: 3 } diferença: 2 (Juca tem a mais)
soma: 8

ATENÇÃO:

Logo mais você aprenderá uma *técnica* rápida para a determinação da *solução* de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Início de uma "Discussão"... Será que o Conjunto-Verdade V do sistema:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = y + 2$$

é constituído somente de um *único* elemento, ou seja, do par ordenado (5,3)?

A resposta é: *sim!* O Conjunto-Verdade V é sempre *unitário* para todos os sistemas simultâneos do primeiro grau que traduzem problemas envolvendo *duas variáveis e duas condições distintas e compatíveis*, isto é, que não sejam *inconciliáveis*.

Quer ver por quê?

Vamos supor que além de (5,3) existisse em V um *outro* par ordenado: (a,b) , onde a e b seriam números do conjunto I , isto é, *inteiros*.

Então (a,b) , por ser elemento do Conjunto-Verdade, que é a *intersecção* dos conjuntos V_1 e V_2 , deverá pertencer tanto a V_1 , como a V_2 . Logo: $(a,b) \in V_1 \implies a + b = 8$ e $(a,b) \in V_2 \implies a = b + 2$.

Nestas condições a e b são dois números inteiros que *somados* dão como resultado 8 e um deles tem 2 a mais que o outro. Como os *únicos* números inteiros que gozam dessa propriedade são 5 e 3, respectivamente, segue-se que: $a = 5$ e $b = 3$, ou seja, (5,3) é o *único* elemento do Conjunto-Verdade V .

LEMBRETE AMIGO

Se um problema envolve somente:

uma variável, então **uma equação** é suficiente para resolvê-lo;

duas variáveis, então **um sistema de duas equações distintas** é suficiente para resolvê-lo.

Se o problema fôsse:

2.º) Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui o triplo das bolinhas de Zeca. Quantas possui cada um?

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = 3y$$

cujas equações traduzem *duas condições distintas e compatíveis*. Como:

$$V_1 = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), \dots\}$$

$$V_2 = \{(0,0), (3,1), (6,2), (9,3), \dots\}$$

temos:

$$V = V_1 \cap V_2 = \{(6,2)\}$$

Sendo (6,2) o *único* par, segue-se que: Juca possui 6 bolinhas e Zeca, 2.

Porém, se fôssem enunciados os seguintes problemas:

3.º) Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que o *dôbro* das bolinhas que Juca possui somado com o *dôbro* das de Zeca é igual a 16 bolinhas. Quantas possui cada um?

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad 2x + 2y = 16$$

Que percebe você?

Que as "duas" condições dadas resumem-se, na verdade, em *uma* só, isto é, as condições propostas *não são distintas*, pois é a *mesma* coisa dizer: "a soma de dois números é 8" e "a soma de seus dobros é 16" (*dôbro* de 8)! Nesse caso, você verificará facilmente que os Conjuntos-Verdade: V_1 de $x + y = 8$ e V_2 de $2x + 2y = 16$ são os mesmos:

$$V_1 = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6), (1,7), (0,8)\}$$

$$V_2 = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6), (1,7), (0,8)\}$$

$$\text{Logo: } V = V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$$

e, agora, o Conjunto-Verdade V não é mais unitário, pois *qualquer* um dos pares: (8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6), (1,7) e (0,8) é *solução* do sistema e, portanto, resolve o problema.

4.º) Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que a soma das bolinhas que Juca e Zeca possuem é igual a 10. Quantas possui cada um?

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x + y = 10$$

que é composto de duas equações *incompatíveis*, ou seja, *inconciliáveis*, pois a soma das bolinhas que Juca e Zeca possuem *não pode ser*, ao mesmo tempo, 8 e 10!

Construídos os Conjuntos-Verdade dessas equações, teríamos:

$$V_1 = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6), (1,7), (0,8)\}$$

$$V_2 = \{(10,0), (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (5,5), (4,6), (3,7), (2,8), (1,9), (0,10)\}$$

que não apresentam *nenhum* elemento em comum. Logo, o Conjunto-Verdade intersecção de ambos é *vazio*, isto é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Nesse caso, o sistema proposto *não tem solução* e o problema que o originou *não é problema possível*.



E daí?...



O que você percebeu, estudando com pormenores esses problemas, foi "discutir" a existência, ou não, da *solução* ou das *soluções* de problemas cuja "tradução" dos enunciados levava a um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis.

Essa "discussão" permite concluir que:

1. Se o enunciado envolve duas condições *distintas* e *compatíveis* (como nos exercícios 1.º e 2.º), então o problema é considerado *possível* e *determinado*, e admite uma *única solução*.

NOTA: O par que deve constituir a *solução* do problema deve atender à *natureza* dos dados; assim, o problema cujos dados dizem respeito a bolinhas, alunos, livros, ... deve ter como solução um par de números *inteiros* e *positivos* (... não teria sentido encontrar $\frac{2}{5}$ de aluno ou -5 livros, etc...).

2. Se o enunciado envolve duas condições que *não sejam distintas* (exercício 3.º), então o problema é considerado *possível* e *indeterminado*, e admite sempre *mais de uma solução*.

3. Se o enunciado envolve duas condições *incompatíveis* (exercício 4.º), então o problema é considerado *impossível* e *não admite solução*.

1. Resolver os seguintes problemas por intermédio de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) Dorotéia e Sílvia possuem juntas 6 bonecas. Sabe-se que Sílvia possui duas bonecas a mais que Dorotéia. Quantas bonecas possui cada uma?

2.º) Há, na caixa de jogos do Colégio, 6 bolas de voleibol do 1.º A e do 2.º A. Sabe-se que o 2.º A tem o dobro de bolas de voleibol das que o 1.º A possui. Quantas bolas possui cada classe?

3.º) A soma de dois números é 9 e a diferença entre eles, 3. Que números são esses?

4.º) A soma de dois números é 12 e um deles é o triplo do outro. Determine esses números.

5.º) Dois números têm por soma 4. Se duas vezes o segundo for subtraído do primeiro o resultado será 7. Quais são os números?

2. "Discutir" os seguintes casos:

1.º) Raul e Diva possuem juntos 12 cadernos. Sabe-se que a soma das metades dos números de cadernos que Raul e Diva possuem é igual a 6. Quantos cadernos possui cada um?

2.º) Sabe-se que: 1) a diferença entre as figurinhas que Carlos e Edmur possuem é 5; 2) a soma dessas figurinhas é 7. Quantas figurinhas possuem Carlos e Edmur?

3.º) Antônio e Luís possuem juntos 8 lápis de côr. Sabe-se que a soma dos lápis de côr de Antônio e Luís é igual a 6. Quantos lápis possui cada um?

4.º) O total de soldados que policiam dois jardins é 15 e a diferença entre o número deles é 1. Quantos soldados policiam cada jardim?

5.º) A diferença entre o número de bolinhas de pingue-pongue contidas numa caixa e o dobro de bolinhas de pingue-pongue contidas em outra caixa é 8. Se o total das bolinhas contidas nas duas caixas é 5, quantas há em cada caixa?

6.º) Determinar dois números inteiros que têm por soma 6, sendo o maior o triplo do menor.

3. Técnica Operatória. Método da Substituição de Variáveis)

Pode-se determinar, rapidamente, a *solução* — quando existe — de um Sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis, pela Técnica denominada **Substituição de Variáveis**. Como tais Sistemas podem ser estudados independentemente dos problemas que eventualmente possam estar "traduzindo", vamos tomar como "universo" de trabalho o conjunto Q_r , ou seja, as *duas variáveis* serão *quaisquer números racionais relativos*.

Seja, por exemplo, o Sistema:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = y + 2$$

Substituindo o x , que figura na primeira das equações, pelo valor expresso por x na segunda equação (ou seja: $y + 2$), temos:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ (y + 2) + y &= 8 \end{aligned}$$

(que é uma equação do 1.º grau somente com *uma variável* (y), cuja resolução você já conhece.)

Logo: $(y+2) + y = 8 \iff y+y = 8-2 \iff 2y = 6 \iff y = \boxed{3}$

Substituindo esse valor de y na segunda equação, vem:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ x &= \boxed{3} + 2 = \boxed{5} \end{aligned}$$

Então, se $x=5$ e $y=3$, a *solução* do Sistema proposto é o *par*: $(5,3)$.

Prova: $\left. \begin{aligned} x + y &= 8 \\ x &= y + 2 \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} 5 + 3 &= 8 & (V) \\ 5 &= 3 + 2 & (V) \end{aligned} \right.$

Outros exemplos:

1.º $x + y = 8 \wedge x = 3y$

Basta substituir o x da primeira equação por $3y$ (que é o valor de x na segunda):

$$3y + y = 8 \iff 4y = 8 \iff y = 2$$

Portanto, o valor de x será: $x = 3y$ ou $x = 3 \times 2 = 6$.

Logo, a *solução* do Sistema é: $(6,2)$. Faça a prova ...

2.º $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = -12 \end{cases}$

“Tiramos” o valor de x na primeira equação, isto é:

$$x + 2y = 5 \implies x = 5 - 2y$$

e substituímos esse valor de x na segunda equação:

$$\begin{aligned} 3(5-2y) - 4y &= -12 \iff 15 - 6y - 4y = -12 \iff -10y = -27 \iff \\ \iff y &= \frac{27}{10} = \boxed{2,7} \end{aligned}$$

O valor de x será:

$$x = 5 - 2y \text{ ou } x = 5 - 2 \times (2,7) = 5 - 5,4 = \boxed{-0,4}$$

Logo, a *solução* do Sistema é: $(-0,4; 2,7)$

Prova: $\begin{cases} -0,4 + 2 \times 2,7 = 5 \\ 3 \times (-0,4) - 4 \times 2,7 = -12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -0,4 + 5,4 = 5 & (V) \\ -1,2 - 10,8 = -12 & (V) \end{cases}$

3.º $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 0 \end{cases}$

Neste caso é preferível, antes de fazer a *substituição de variáveis*, “eliminar” os denominadores da segunda equação. Assim:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

“Tirando-se” o valor de y na primeira equação (é mais prático do que “tirar” o valor de x , cujo coeficiente é 2):

$$-y = 3 - 2x \iff y = -3 + 2x \text{ (... lembre-se que trocamos o sinal de todos os termos ...)}$$

Substituindo-se esse valor de y na segunda equação, vem:

$$\begin{aligned} 6x - 4(-3 + 2x) &= 0 \iff 6x + 12 - 8x = 0 \iff -2x = -12 \iff \\ \iff x &= \boxed{6} \end{aligned}$$

e, portanto: $y = -3 + 2 \times 6 = -3 + 12 = \boxed{9}$ Solução: $(6,9)$

4.º $2x - 3y = 1 \wedge x = 5$

É só substituir x da primeira equação por 5 (... é o que diz a segunda...):

$$\begin{aligned} 2(5) - 3y &= 1 \iff 10 - 3y = 1 \iff -3y = 1 - 10 \iff -3y = -9 \iff \\ \iff y &= \boxed{3} \end{aligned}$$

Portanto, *solução* do Sistema: $(5,3)$

$$5.^{\circ}) \begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{x-y}{3} = -\frac{2}{3} \\ \frac{2x-y}{4} - \frac{3x+2y}{2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

“Eliminando-se” os denominadores de cada uma das equações, vem:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(x+y) + 5(x-y) = -10 \\ 1(2x-y) - 2(3x+2y) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 5x - 5y = -10 \\ 2x - y - 6x - 4y = 5 \end{cases}$$

(foi “tirado” o valor de x na 1.ª equação)

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = -10 \\ -4x - 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y-10}{8} \\ 4x + 5y = -5 \end{cases}$$

(os dois membros foram multiplicados por -1)

Substituindo esse valor de x na segunda equação:

$$4\left(\frac{2y-10}{8}\right) + 5y = -5 \Leftrightarrow \frac{8y-40}{8} + 5y = -5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8y - 40 + 40y = -40 \Leftrightarrow 48y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{0}{48} = \boxed{0}$$

e, portanto: $x = \frac{2 \times 0 - 10}{8} = \frac{-10}{8} = \boxed{\frac{-5}{4}}$

Logo: solução do Sistema: $\left(\frac{-5}{4}, 0\right)$. “Tire” a prova.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Término da “discussão”...

Observe com atenção o que aconteceria se você empregasse a técnica da Substituição de variável na solução dos seguintes sistemas:

$$1.^{\circ}) \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Teríamos: $x + y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - y$ (... “tirando” o valor de x ...)
e $(8 - y) + y = 10$ (... substituindo na segunda equação)
ou $8 - y + y = 10 \Leftrightarrow 0 \cdot y = 2$

Ora, você já sabe que não existe valor algum para y que, multiplicado por 0, dê 2, isto é: $\nexists y | 0 \cdot y = 2$. Da mesma forma você concluiria que não existe valor para x. Nestas condições as equações são incompatíveis e o sistema é impossível, não existindo, portanto, solução.

$$2.^{\circ}) \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$$

Teríamos: $x + y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - y$ (... “tirando” o valor de x ...)
e $2(8 - y) + 2y = 16$ (... substituindo na segunda equação)
ou $16 - 2y + 2y = 16 \Leftrightarrow 0 \cdot y = 0$

Como, qualquer que seja o valor de y, multiplicado por 0 dá 0, isto é, $\forall y | 0 \cdot y = 0$, o mesmo se poderia concluir para x, ou seja, $\forall x | 0 \cdot x = 0$, segue-se que:

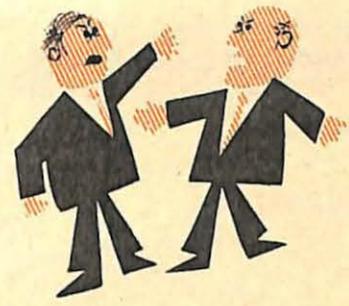
$$\forall x, \forall y | x + y = 8 \wedge 2x + 2y = 16$$

Logo: existem, no \mathbb{Q} , infinitos pares de valores para x e para y que tornam verdadeiras as equações que compõem o sistema. Cada um desses pares constitui solução do sistema.

Nestas condições o sistema proposto é possível e indeterminado, existindo, portanto, infinitas soluções.

É natural que cada um dos sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis, resolvidos nos primeiros exemplos, onde era acusada a existência de um único par de valores para x e y que tornavam verdadeiras as equações componentes, seja denominado possível e determinado.

Confere!...



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 86

1. Resolver os seguintes sistemas simultâneos de duas equações do primeiro grau com duas variáveis, usando a técnica da *Substituição de Variáveis*:

1.º) $x + y = 10 \quad \wedge \quad x = y + 6$

2.º) $\begin{cases} 2y = 6 \\ 3x + 5y = 19 \end{cases}$

3.º) $2x - 3y = 1 \quad \wedge \quad x = 5$

4.º) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

5.º) $\begin{cases} 6x + y = 8 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

6.º) $3x - 2y = 1 \quad \wedge \quad 3y - 2x = 6$

7.º) $\begin{cases} 3(x - 1) + 4(y - 3) = 4 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases}$

8.º) $x = 3(y - 1) \quad \wedge \quad x = \frac{y + 14}{2}$

(Sugestão: basta igualar os valores de x ...)

9.º) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 0 \end{cases}$

10.º) $y = x \quad \wedge \quad \frac{2x + y}{3} + 5 = 0$

2. "Discutir" os seguintes sistemas:

1.º) $x + y = 5 \quad \wedge \quad x + y = 8$

2.º) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

11.º) $a = b + 7 \quad \wedge \quad a + 3b = 3$

12.º) $\begin{cases} r = s - 3 \\ r + s = 1 \end{cases}$

13.º) $\begin{cases} 2z + 3t = 13 \\ 2z + 5t = 19 \end{cases}$

14.º) $2a - b = b + 4 \quad \wedge \quad a = 2b - 3$

15.º) $\begin{cases} \frac{2m - n}{3} - \frac{m + 2n}{2} = 1 \\ \frac{m + n}{2} - \frac{n}{4} = 2 \end{cases}$

16.º) $p + 2q = 7 \quad \wedge \quad p + 3q = 7$

17.º) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{x + 2y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \end{cases}$

18.º) $y = x + 3 \quad \wedge \quad y = 2x + 6$

19.º) $\begin{cases} a = b + 4 \\ a = 2b \end{cases}$

20.º) $\begin{cases} \frac{x + y}{8} + \frac{x - y}{6} = 5 \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{3} = 10 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x = y - 1 \end{cases}$

4.º) $4x - 3y = -2 \quad \wedge \quad 8x - 6y = 13$

5.º) $x + y = 10 \quad \wedge \quad x - y = 2$

6.º) $2x + 2y = 10 \quad \wedge \quad x + y = 6$

7.º) $\begin{cases} a + b = 8 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 4 \end{cases}$

8.º) $\begin{cases} a = 2b \\ a = 3b \end{cases}$

9.º) $x - y = 0 \quad \wedge \quad x - y = 0$

10.º) $\begin{cases} x = y \\ x + y = 10 \end{cases}$

PROBLEMAS VARIADOS — GRUPO 87

Resolver os seguintes problemas por intermédio de sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis:

1.º) A soma de dois números é 12 e um deles é o triplo do outro. Quais são os números?

2.º) A diferença entre dois números é -4. O dobro do maior somado com o menor é 5. Determinar esses números.

3.º) Decompor 98 em duas partes tais que a maior delas seja igual à menor mais 14.

4.º) Determinar os preços de duas camisas, sabendo-se que a soma deles é NCr\$ 16,40 e a diferença NCr\$ 2,80.

5.º) A idade de um pai somada à idade de seu filho é igual a 42 anos. Se a idade do pai é cinco vezes a idade do filho, dizer a idade de cada um.

6.º) A soma das idades de dois alunos é 20. Daqui 3 anos o mais velho terá 6 anos mais que o mais moço. Qual a idade atual de ambos?

Sugestão: Representando a idade de um dos alunos por x e a idade do outro por y

temos: $x + y = 20$ (1.ª equação do sistema)

Como, daqui 3 anos, um terá: $x + 3$ e o outro: $y + 3$, a 2.ª equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, será:

$$x + 3 = 6 + (y + 3)$$

Agora é só resolver o sistema...

7.º) A idade de Néelson, há 18 anos, era o dobro da de Carlos. Daqui 9 anos a idade de Néelson será os $\frac{5}{4}$ da idade de Carlos. Que idade tem cada um deles atualmente?

8.º) A soma das idades de dois irmãos é 17. Um deles tinha 5 anos quando o outro nasceu. Qual a idade de cada um?

- 9.º) Numa tecelagem fizeram-se 360 peças de tecido, umas de 20m e outras de 30m.
A soma total foi de 9 600m. Quantas peças de cada foram feitas?

Sugestão: Representando o n.º de peças de 20m por x e o n.º de peças de 30m por y , o sistema que traduz as duas partes do problema é:

$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 20x + 30y = 9\ 600 \end{cases}$$

- 10.º) Uma pessoa paga NCr\$ 100,00 com 40 notas, umas de NCr\$ 1,00 e outras de NCr\$ 5,00. Quantas notas há de cada espécie?
- 11.º) O perímetro de um retângulo é de 80m. O dobro do comprimento é igual ao triplo da largura. Quanto medem o comprimento e a altura desse retângulo?
- 12.º) Repartir 310 em duas partes tais que, dividindo-se a primeira por 15 e a segunda por 30, a soma dos quocientes obtidos seja 20.

Sugestão: ... a segunda equação do sistema é: $\frac{x}{15} + \frac{y}{30} = 20$

- 13.º) Um número é formado de dois algarismos, cuja soma dos valores absolutos é 8. Se adicionarmos 18 a esse número, o resultado obtido será um número cuja representação decimal está na ordem inversa daquela com que figurava o número dado. Qual é esse número?

Sugestão: Este problema é interessante por usar resultados já conhecidos no sistema de numeração decimal. Assim, representando o algarismo das unidades, do n.º procurado, por y e o das dezenas por x , a primeira equação do sistema é:

$$x + y = 8$$

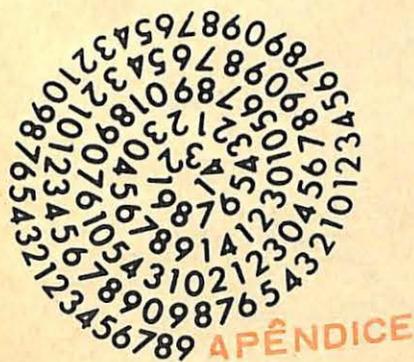
Como um n.º de dois algarismos, no sistema de numeração decimal, tem a representação: $10 \times x + y$, a segunda equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, é:

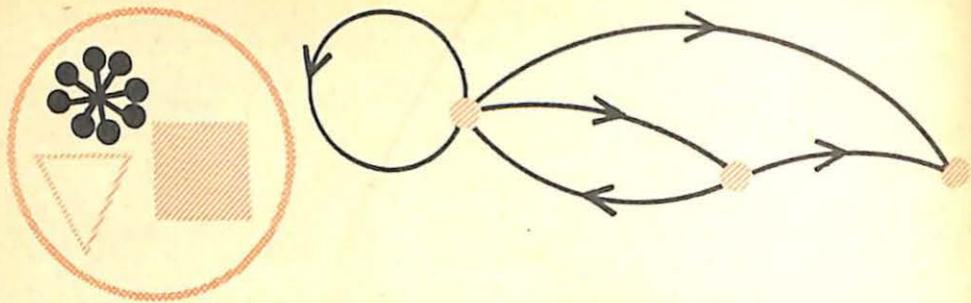
$$(10 \times x + y) + 18 = 10 \times y + x$$

Resolva-o ...

- 14.º) Um número é formado de dois algarismos, e a soma dos seus valores absolutos é 11. Quando se trocam as posições desses algarismos entre si, o número obtido ultrapassa de 5 o triplo do número dado. Qual é o número?
- 15.º) Foram propostos neste Livro, entre outros, 80 Grupos de Exercícios distribuídos entre os de Fixação e os de Aplicação. Os Grupos de Exercícios de Aplicação constituem $\frac{1}{7}$ dos de Fixação. Quantos Grupos há dessas duas espécies?

Não há sugestão ...





Estruturas matemáticas em outras disciplinas

Sistemas matemáticos — Aplicações

1. Lembrando o estudo das Relações Binárias ...

Durante êste Curso, você já percebeu que as **RELAÇÕES** participam ativamente de seu *sistema mental*. Assim, por exemplo, ao dizer:

Paulo é mais baixo que Pedro

você está usando uma *relação de ordem* expressa pela sentença aberta:

... é mais baixo que ...

Ora, quando, em Matemática, você enuncia que:

2 é menor que 5

também está empregando uma *relação de ordem* dada pela sentença aberta:

... é menor que ...

Então, as *relações*:

... é mais baixo que ... e ... é menor que ...

têm a *mesma estrutura* (que é de ordem parcial). "Desenhando" os *pares* de pessoas (ou de números) que estão na *relação de ordem* estudada, temos:

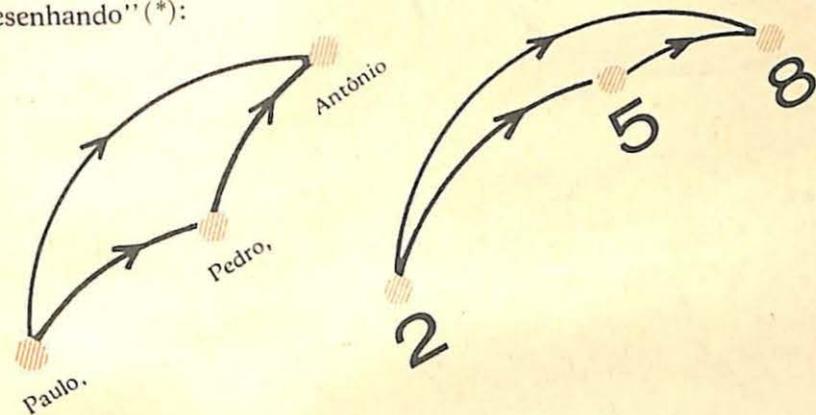


onde a "flecha" relaciona dois elementos (no ex.: (Paulo, Pedro) e (2, 5)).
A *estrutura de ordem* comum a essas relações é caracterizada pela *propriedade transitiva*, isto é:

se Paulo é mais baixo que Pedro, e se Pedro é mais baixo que Antônio,
então Paulo é mais baixo que Antônio;

e
se 2 é menor que 5, e se 5 é menor que 8, então 2 é menor que 8.

"Desenhando" (*):



Analogamente, as *relações*:

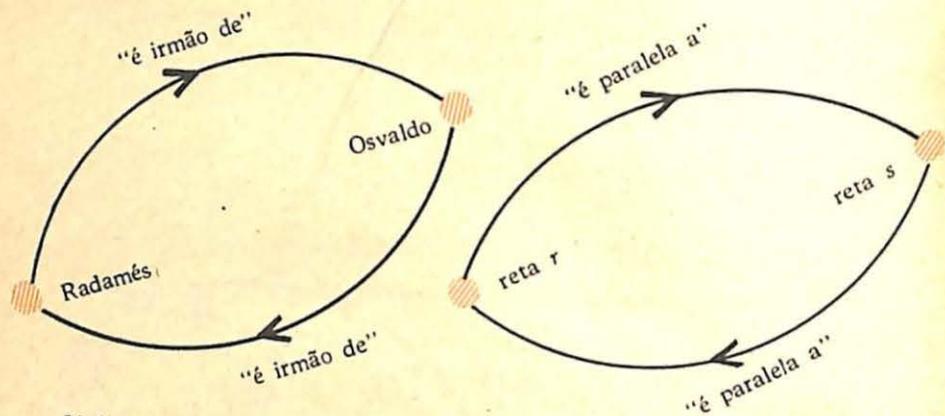
... é irmão de ... e ... é paralelo a ...

usadas quando você diz, por exemplo:

Radamés é irmão de Osvaldo e a reta r é paralela à reta s
têm a *mesma estrutura* por possuírem exatamente as *mesmas propriedades*:
simétrica e transitiva. A *propriedade simétrica* decorre de:
se Radamés é irmão de Osvaldo, então Osvaldo é irmão de Radamés;
se a reta r é paralela à reta s , então a reta s é paralela à reta r .

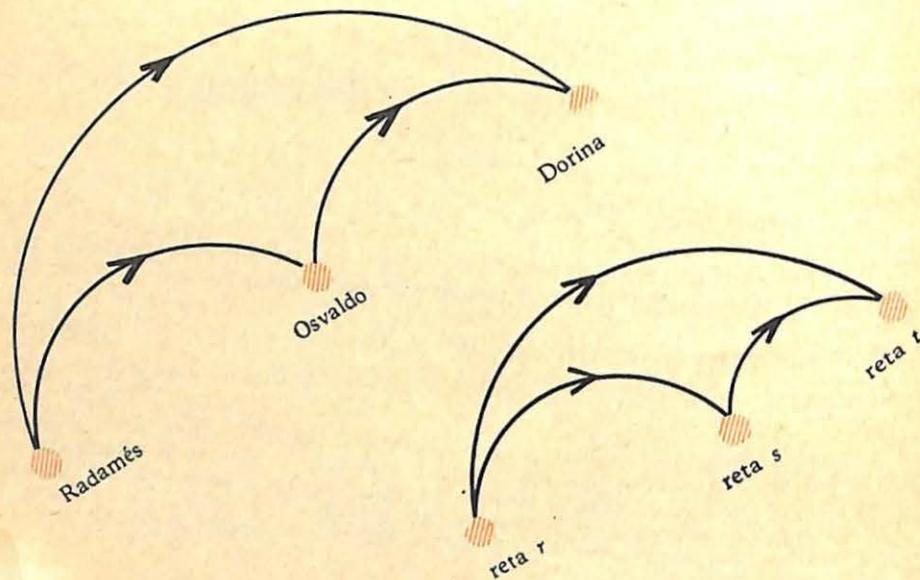
(*) O "desenho" ou "grafo" para representar **RELAÇÕES BINÁRIAS**, bem como as propriedades que caracterizam sua *estrutura*, é tratado de um modo extraordinário pelo Prof. Papy, da Universidade de Bruxelas, e responsável pela *modernização* do ensino da Matemática nas escolas secundária e normal da Bélgica. Os estudos do Prof. Papy constam do Simpósio Internacional do Ensino da Matemática, realizado pela UNESCO, em Budapeste, 1962.

No "desenho", a *simetria* das relações é indicada por uma flecha que "vai" de um elemento a outro, e por outra que "volta" do segundo elemento para o primeiro.



Vale a propriedade *transitiva*:

se Radamés é irmão de Osvaldo, e se Osvaldo é irmão de Dorina, então Radamés é irmão de Dorina;
se a reta r é paralela à reta s , e se a reta s é paralela à reta t , então a reta r é paralela à reta t .

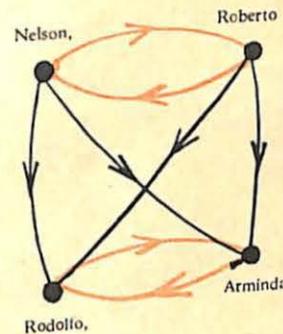


Suponhamos, agora, que o casal Rodolfo e Arminda tenha os filhos Néelson e Roberto. Vamos *desenhar*, em côres diferentes, as seguintes relações:

... é casado com... ... é filho de... ... é irmão de...

ressaltando-lhes as propriedades no exemplo proposto:

Convém lembrar que a relação ... é filho de ... não é simétrica (não há, portanto, a flecha que "volta"), enquanto que as outras duas o são.



Consideremos, a seguir, um exemplo com *conjunto de números*. Seja o conjunto: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, representado por pontos, dispostos em qualquer ordem.

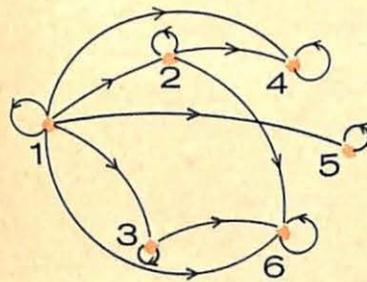
Vamos representar, com "desenho", a importante relação da Matemática:

... é divisor de...

entre os elementos do conjunto dado.

Como *qualquer* número desse conjunto é divisor de si mesmo (1 é divisor de 1, 2 é divisor de 2, 3 é divisor de 3, ...), dizemos que a relação ... é divisor de ... possui a propriedade *reflexiva*.

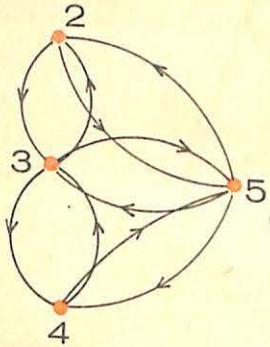
A propriedade *reflexiva* no desenho foi assinalada com um "giro" em torno de cada um dos números.



Com os elementos do conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$ vamos "desenhar" a relação:

... é primo com ...

Temos os seguintes pares de números dessa relação, que é simétrica (isto é, se 2 é primo com 3, então 3 é primo com 2, ...):



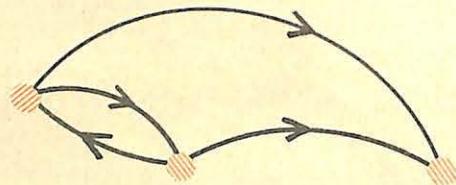
- (2, 3) (3, 2)
- (2, 5) (5, 2)
- (3, 4) (4, 3)
- (3, 5) (5, 3)
- (4, 5) (5, 4)

Observe que a relação ... é primo com ... não é reflexiva (ex.: 2 não é primo consigo mesmo) e nem transitiva (ex.: 2 é primo com 3, 3 é primo com 4 e, contudo, 2 não é primo com 4).

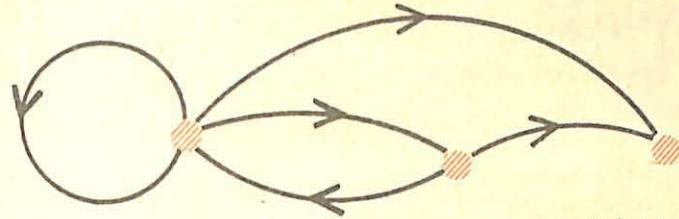
TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 88

1. Verifique as propriedades mencionadas (entre parênteses) de cada uma das seguintes relações, desenhando seus característicos e substituindo ... por elementos adequados:

1.^a Exemplo-modêlo: ... é irmã de ... (simétrica, transitiva)

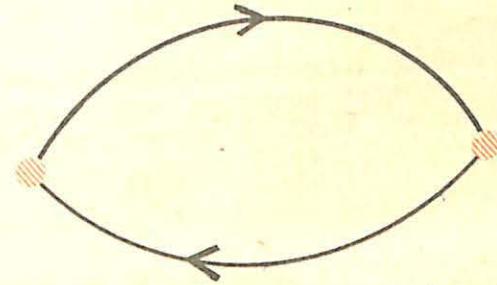


2.^a Exemplo-modêlo: ... é tão alto como ... (reflexiva, simétrica, transitiva)



NOTA: A relação que possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva é denominada relação de equivalência.

3.^a Exemplo-modêlo: ... é perpendicular a ... (simétrica)



4.^a ... é igual a ... (reflexiva, simétrica, transitiva)

5.^a ... é maior que ... (transitiva)

6.^a ... é maior ou igual que ... (reflexiva, transitiva)

7.^a ... é múltiplo de ... (reflexiva, transitiva)

8.^a ... tem a mesma cor que ... (reflexiva, simétrica, transitiva)

9.^a ... é pai de ... (?)

10.^a ... é o dobro de ... (?)

2. "Desenhe", para o conjunto: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12 (você pode dispor os pontos representativos desses números como quiser), as seguintes relações:

1.^a ... é divisor de ...

4.^a ... é múltiplo de ...

2.^a ... é primo com ...

5.^a ... é a metade de ...

3.^a ... é maior que ...

6.^a ... é menor que ...

3. Suponha que:

1.^o Carlos e João são irmãos e filhos do casal Antônio e Maria;

2.^o João e Luís são primos;

3.^o Pedro é pai de Antônio.

"Desenhe" as relações: ... é casado com ...; ... é filho de ...; ... é irmão de ...; ... é primo com ...; ... é neto de ...; ... é nora de ...

$$U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$V = \{2\}$$

2 Lembrando o estudo das sentenças abertas, do Conjunto-Universo e do Conjunto-Verdade...

Observe, com atenção, como a História, a Geografia, as Ciências, de um modo geral, apresentam questões de mesma estrutura das equações estudadas em Matemática. Assim, por exemplo, seja na

1. História

A sentença aberta: "X" é o descobridor do Brasil onde a variável "X" pode assumir valores do Conjunto-Universo:

$$U = \{\text{Colombo, Camões, Vasco da Gama, Cabral, Pêro Vaz de Caminha}\}$$

Qual o Conjunto-Verdade dessa sentença?

É o conjunto unitário:

$$V = \{\text{Cabral}\}$$

e, portanto, o valor-verdade ou solução da sentença proposta é Cabral.

2. Geografia

Seja a sentença aberta: "Êstes" são os dois maiores rios da Terra onde: $U = \{\text{Tocantins, Nilo, Volga, São Francisco, Amazonas, São Lourenço}\}$

Como: $V = \{\text{Nilo, Amazonas}\}$

então os rios Amazonas e Nilo são os valores-verdade da sentença dada.

3. Ciências

Seja a sentença aberta: "Êle" é o maior peixe que vive no mar

onde: $U = \{\text{baleia, mero, tubarão, pescada, barracuda}\}$

Temos: $V = \{\text{tubarão}\}$ e, portanto, valor-verdade: tubarão.

NOTA: Não se esqueça que a baleia, apesar de viver no mar, não é peixe: é mamífero!

TESTE DE ATENÇÃO — GRUPO 89

Determinar o valor-verdade das seguintes sentenças:

- 1.^a) "Êle" proclamou a independência do Brasil
 $U = \{\text{José Bonifácio, Pedro II, Tiradentes, Joaquim Nabuco, Pedro I}\}$
- 2.^a) "Êste" é o pico mais alto do Brasil
 $U = \{\text{Bandeiras, Itatiaia, Neblina, Dedo de Deus, Agulhas Negras}\}$
- 3.^a) "Aquêle" é o oceano que banha os Estados do Pará, Maranhão e Piauí.
 $U = \{\text{Atlântico, Pacífico, Índico, Antártico, Ártico}\}$
- 4.^a) "X" é o maior animal que vive no Pólo Norte
 $U = \{\text{Urso, Foca, Pingüim}\}$
- 5.^a) "Y" é o maior animal que vive no mar
 $U = \{\text{Tubarão, baleia, mero, barracuda, pescada}\}$
- 6.^a) "Êles" foram os fundadores de Roma
 $U = \{\text{Romeu, Julieta, João, Maria, Rômulo, Remo}\}$



SEMANA DE MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE SENTENÇAS ABERTAS

É da fruta "x" que se extrai o vinho

$$U = \left\{ \text{maçã} \quad \text{uva} \quad \text{laranja} \quad \text{banana} \right\}$$

$$V = \left\{ \text{uva} \right\}$$

"Fulano" descobriu o Brasil

$$U = \left\{ \text{Pedro Álvares Cabral} \quad \text{Vasco da Gama} \right\}$$

$$V = \left\{ \text{Pedro Álvares Cabral} \right\}$$

O planeta "y" é o maior do sistema solar

$$U = \left\{ \text{Terra} \quad \text{Marte} \quad \text{Júpiter} \quad \text{Saturno} \right\}$$

$$V = \left\{ \text{Júpiter} \right\}$$

Na região antártica vivem "y"

$$U = \left\{ \text{pinguim} \quad \text{polaris} \right\}$$

$$V = \left\{ \text{pinguim} \right\}$$

"X" é o maior animal que vive no mar

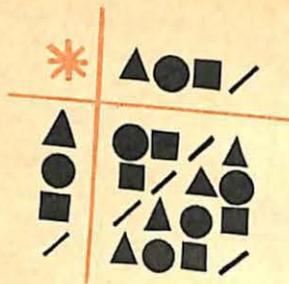
$$U = \left\{ \text{baleia} \quad \text{peixe} \quad \text{tubarão} \right\}$$

$$V = \left\{ \text{baleia} \right\}$$

Ao lado figura o quadro mural, relativo a resolução de sentenças abertas em outras disciplinas, que constou da I Semana de Matemática, organizada pelas alunas das Primeiras Séries Ginasiais, do Clube de Estudos Matemáticos, do Colégio Sagrado Coração de Jesus — Campinas — S. P.

Data: 28 de setembro a 3 de outubro de 1964

Professora: Maria de Lourdes L. de Castro.



Sistemas Matemáticos

Aplicações

Desde o Curso Primário você está em contacto com *Sistemas Matemáticos* (S. M.), isto é, um conjunto de elementos (quaisquer) e uma operação (qualquer) definida para os elementos desse conjunto. Assim, por exemplo, você conhece muito bem o S. M.:

S. M. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\} \\ \text{Operação: adição} \end{array} \right.$

também indicado, abreviadamente, por: $(I, +)$

Como você tem a liberdade de escolher o conjunto que quiser, bem como a de idealizar qualquer operação entre dois de seus elementos (operação binária), conclui-se que existem tantos S. M. quantos se queiram. Outros exs.:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \\ \text{Operação: multiplicação} \end{array} \right.$ ou (N, \times)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } I_r = \{\dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\} \\ \text{Operação: adição} \end{array} \right.$ ou $(I_r, +)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } Q_r^* \\ \text{Operação: multiplicação} \end{array} \right.$ ou (Q_r^*, \times)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: rotações de pontos no plano, em torno de um ponto} \\ \text{Operação: composição de rotações.} \end{array} \right.$ ou (Rot, o)

Os S. M. têm uma estrutura caracterizada pelas propriedades (estruturais) da operação definida no conjunto dado. Tais estruturas recebem nomes especiais, que você irá conhecendo à medida que seus conhecimentos se forem ampliando.

Todavia, as estruturas dos S. M. em que você vem trabalhando, desde a Escola Primária, são as algébricas. Que estruturas são essas?

Basta lembrar as propriedades das operações definidas nos conjuntos dados pelo S. M., para se obterem as seguintes estruturas algébricas:

- 1) de SEMIGRUPO, quando a operação possui a propriedade *Associativa* (*) (A);
- 2) de MONÓIDE, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (A) e *Elemento Neutro* (N);
- 3) de GRUPO, quando a operação possui as propriedades *Associativa* (A), *Elemento Neutro* (N) e *Elemento Inverso* (I).

Se, além dessas propriedades, a operação é *Comutativa* (C), então a estrutura algébrica é ainda *comutativa*. Assim, se o S. M. possui as propriedades:

A-C a estrutura algébrica é de SEMIGRUPO COMUTATIVO

A-N-C a estrutura algébrica é de MONÓIDE COMUTATIVO

A-N-I-C a estrutura algébrica é de GRUPO COMUTATIVO

Como exercício, determinemos o tipo da estrutura algébrica dos S. M., tomados como exemplos:

1. $(I, +)$

Como valem para esse S. M., para quaisquer elementos do conjunto, as propriedades: A-N-C, isto é:

$$(2+3)+5 = 2+(3+5) \quad (A)$$

$$2 + 0 = 2 \quad (N)$$

$$3 + 4 = 4 + 3 \quad (C)$$

a sua estrutura é a de MONÓIDE COMUTATIVO

2. $(I_r, +)$

É fácil concluir que a estrutura desse S. M. é a de GRUPO COMUTATIVO, pois:

$$(+3 + -2) + -7 = +3 + (-2 + -7) \quad (A)$$

$$-5 + 0 = -5 \quad (N)$$

$$+3 + -3 = 0 \quad (I)$$

$$+4 + +3 = +3 + +4 \quad (C)$$

(*) A propriedade do *Fechamento* é considerada em nossos exemplos como verdadeira no exame da estrutura de um S. M., pois, caso contrário, não teria sentido tal exame.

NOTA: A estrutura de Grupo Comutativo, das mais importantes em Matemática e que possui o mesmo tipo de estrutura de sua mente, recebe também o nome de Grupo Abelian, em homenagem ao jovem matemático Abel que morreu com 27 anos.

3. (\mathbb{Q}_r, \times)

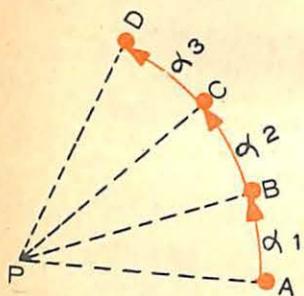
Verifique você mesmo que a estrutura dêse S. M. é de Grupo Comutativo. Não se esqueça: \mathbb{Q}_r^* significa o conjunto dos números racionais relativos, com exceção do 0.

4. S. M. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: rotações de pontos no plano, em torno de um ponto } P \\ \text{Operação: composição de rotações (indicação: } \circ \text{)} \end{array} \right.$

NOTA: Entende-se por composição de rotações (operação aqui indicada por \circ) a sucessão de duas rotações consecutivas, num dado sentido (p. ex.: anti-horário). Assim, pela rotação α , em torno de P leva-se o ponto A ao ponto B e a operação:

$$\alpha_1 \circ \alpha_2$$

significa que, compondo a rotação α_1 com a rotação α_2 , leva-se o ponto A ao ponto C (*).

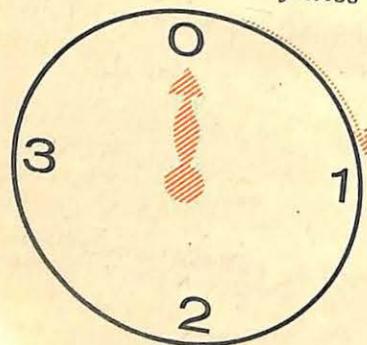


Propriedades:

- (A) $(\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3 = \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3)$
- (N) $\alpha_1 \circ 0 = \alpha_1$ (0 é a rotação nula)
- (I) $\alpha_1 \circ (-\alpha_1) = 0$ ($-\alpha_1$ é a rotação "inversa" de α_1)
- (C) $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1$

Logo: a estrutura do S. M. estudado é a de GRUPO COMUTATIVO

Consideremos, agora, alguns SISTEMAS MATEMÁTICOS FINITOS, isto é, constituídos por conjuntos com um número finito de elementos.



Seja, por exemplo, o S. M. formado pelo conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ e da operação "adição-círculo", definida sobre um "relógio" especial que possui somente um ponteiro; marque quatro minutos: 0, 1, 2 e 3, onde 0 é o ponto inicial e também final de uma rotação completa.

(*) A rigor, o composto de α_1 com α_2 significa aplicar primeiramente α_2 e a seguir α_1 , embora se escreva: $\alpha_1 \circ \alpha_2$.

Imprimindo ao ponteiro um movimento (no sentido horário), cada espaço percorrido, que será entendido como uma rotação (por exemplo, entre 0 e 1, 1 e 2, ...), representa um quarto da rotação completa do mostrador. Logo, no

$$S. M. \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } \{0, 1, 2, 3\} \\ \text{Operação: } \otimes \end{array} \right.$$

que significa: $2 \otimes 3 = ?$

Basta fazer o ponteiro, a partir de 0, percorrer dois espaços e pará-lo em 2; a seguir, percorrer mais três espaços e encontrar o resultado 1.

Logo: $2 \otimes 3 = 1$, que é o resultado de uma "nova" adição!

Constatare você mesmo que:

$$2 \otimes 2 = 0 \quad 3 \otimes 1 = 0 \quad 1 \otimes 2 = 3$$

e fazendo todas as composições (isto é, operando com dois elementos quaisquer do conjunto), "teste" a tábua operatória:

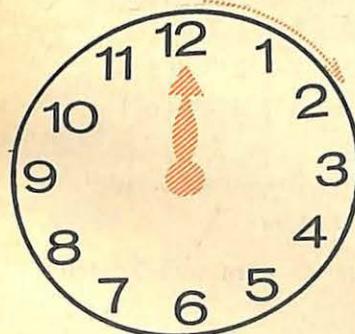
\otimes	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Qual é a estrutura dêse S. M. de "bôlo"?

É fácil concluir que a estrutura é a de Grupo Comutativo, pois:

- (A) $(2 \otimes 3) \otimes 1 = 2 \otimes (3 \otimes 1)$ (experimentalmente...)
- (N) $3 \otimes 0 = 3$
- (I) $1 \otimes 3 = 0$ (o "inverso" de 1 é 3, de 0 é 0, de 2 é 2, de 3 é 1, pois a soma dêles dá o neutro 0)
- (C) $2 \otimes 3 = 3 \otimes 2$

APLICAÇÕES:



1.^a O cálculo usual da adição de horas (que pertence a um sistema de medidas não-decimal) se enquadra dentro de uma "adição especial". O S. M. correspondente é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto: } \{1h, 2h, 3h, 4h, \dots, 12h\} \\ \text{Operação: } \otimes \end{array} \right.$$

Então: $7h + 8h = 3h$ (verifique...)

NOTA: Quando dizemos 15h referimo-nos, na verdade, às 3h registradas pelo relógio comum. É fácil descobrir uma "técnica" para esses cálculos. Observe bem o resto da divisão de 15 por 12:

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 12} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$$

2.^a) O mesmo fato ocorre com as contagens que envolvem dias, como este por exemplo:

7 dias depois do dia 28 de julho, que dia será?

Temos o seguinte S. M.:

{ Conjunto: {1, 2, 3, 4, 31}
Operação: \otimes

Cálculo: $28 \otimes 7 = 4$ Técnica: $\begin{array}{r} 35 \overline{) 31} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$

Logo: 7 dias depois do dia 28 de julho será o dia 4 de agosto.

3.^a) Que dia será cinco dias depois de quarta-feira?

A resposta será dada através de uma "nova tabuada", onde:

domingo 1
2.^a feira 2
3.^a feira 3
4.^a feira 4
5.^a feira 5
6.^a feira 6
Sábado 7

\otimes	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	1
2	3	4	5	6	7	1	2
3	4	5	6	7	1	2	3
4	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
6	7	1	2	3	4	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Então: $\begin{array}{ccc} 4 & \otimes & 5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4.^{\text{a}} \text{ feira} & & 5.^{\text{a}} \text{ feira} \end{array} = 2$
 $\phantom{\text{Então:}} \phantom{2.^{\text{a}} \text{ feira}}$

Logo: cinco dias depois de 4.^a feira será 2.^a feira.

1. Determinar o tipo da estrutura algébrica dos seguintes Sistemas Matemáticos:

- 1.^o) (I, \times) 2.^o) $(I_r, +)$ 3.^o) $(N, +)$ 4.^o) (N, \times)
 5.^o) $(Q_r, +)$ 6.^o) (Q_r, \times) 7.^o) $(Q_r^*, +)$ 8.^o) (Q_r^*, \times)

2. Qual é a estrutura do seguinte S. M.:

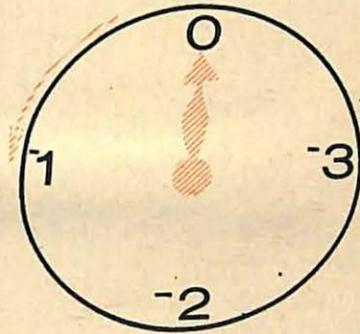
{ Conjunto: deslocamentos de pontos numa reta
Operação: composição de deslocamentos

NOTA: Considere cada deslocamento de um ponto numa reta como se fôsse o trajeto percorrido por um carrinho, numa estrada, de um local para outro.

3. Construa a tábua operatória do seguinte S. M., através do "relógio" ao lado, cujo ponteiro gira no sentido anti-horário:

\odot	-3	-2	-1	0
-3	.	-1	.	-3
-2	.	0	.	.
-1	0	.	.	.
0	.	.	-1	.

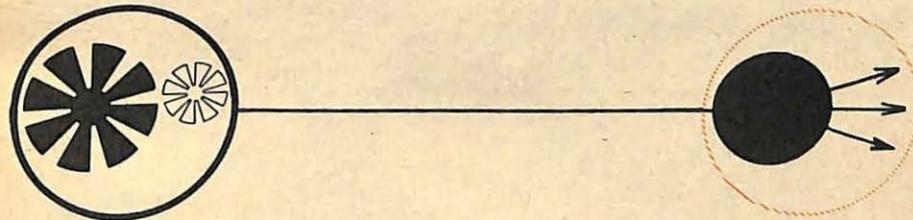
Ex.: $-1 \odot -2 = -3$
 $-1 \odot -3 = 0$
 $-2 \odot -3 = -1$



Qual é a estrutura desse S. M.?

4. Responda:

- 1.^o) Que dia será 11 dias depois de 27 de março?
 2.^o) Que dia da semana será 9 dias depois de 3.^a feira?
 3.^o) Que dia da semana será 6 dias depois de sábado?
 4.^o) Que dia da semana será 12 dias depois do domingo?



8,00

razões e porcentagens; Problemas com novas Grandezas Proporcionais.
SEGUNDA PARTE:

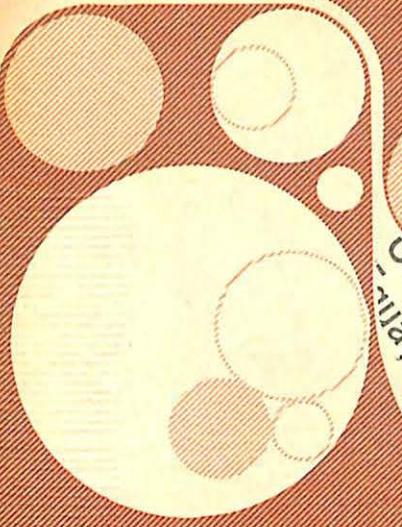
Números proporcionais; Problemas com novas Grandezas Proporcionais.

Novos números e novas estruturas
Números inteiros relativos.

Estrutura de ordem; valor absoluto.

REGRAS DE SIMPLES
PRIMEIRA PARTE:

Propriedades estruturais
TERCEIRA PARTE:
Modernos tratamentos da Aritmética



PRIMEIRA PARTE:
Conjuntos; Operações com conjuntos; Conjuntos e Expressões Lógicas; Sentenças abertas com conjuntos; Sentenças abertas com conjuntos e expressões lógicas.

SEGUNDA PARTE:
Relações Binárias.
Sentenças abertas com conjuntos.
Sistemas de equações simultâneas.



12,500

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

